

Die allgemeine Theorie Magnetischer Flüssigkeiten

Vom Fachbereich Physik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
– Dr. rer. nat. –

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Phys. Sebastian Lissek
geboren am 15. November 1972 in Kassel

2000

Referent: Prof. Dr. M. Liu
Koreferent: Priv.-Doz. Dr. W. Apel
Tag der Promotion: 01.02.2001

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Hydrodynamik für magnetische Flüssigkeiten. Ausgehend von der allgemeinen hydrodynamischen Theorie polarisierbarer und magnetisierbarer Medien von Liu und deren Ausarbeitung von Liu, Henjes und Jiang wird zunächst das gesamte Gleichungssystem der Theorie den besonderen Gegebenheiten in einer magnetischen Flüssigkeit angepaßt. Hierdurch reduziert sich in den dissipativen Anteilen der Ströme die Anzahl der unbestimmten Materialparameter erheblich. Insbesondere kann gezeigt werden, daß der für Flüssigkeiten dieser Art entscheidende Parameter die magnetische Relaxationszeit τ ist. Zusätzlich wird in dieser Arbeit der extensive Anteil der inneren Drehimpulsdichte explizit eingebaut, d.h. er wird durch eine eigene Bilanzgleichung berücksichtigt, deren Struktur bereits bei Kostädt und Liu auftaucht, die aber bislang noch nie explizit für ein gegebenes System berechnet wurde. Dies geschieht durch die Durchführung einer hydrodynamischen Standardprozedur für das gesamte Gleichungssystem. Insbesondere findet sich ein antisymmetrischer Beitrag im Spannungstensor des Systems und neue Beiträge zur Entropieproduktion und zum Energiestrom.

Die Leistungsfähigkeit der hydrodynamischen Maxwell Theorie für magnetische Flüssigkeiten wird durch einige Anwendungsbeispiel untermauert, die wiederzugeben die Standardtheorie von Shliomis nicht in der Lage ist, die allerdings auch von teilweise geringer Größenordnung und damit als Richtschnur zum Vergleich dieser beiden Theorien ungeeignet sein mögen. Es wird jedoch ein interessanter Vorschlag für ein neues Experiment diskutiert, der nicht mit einem solchen Manko behaftet ist; die hier gezeigte Berechnung der Diagonalelemente der unterschiedlichen Spannungstensoren deutet auf große Unterschiede zwischen den statischen Aspekten der beiden Theorien hin.

Da die gewonnene Theorie einerseits durch die Forderung nach lokalem Gleichgewicht im Gegensatz zur Standardtheorie von Shliomis eingeschränkt wird und da andererseits die Materialparameter für experimentelle Vorhersagen benötigt werden, innerhalb der hydrodynamischen Theorie für magnetische Flüssigkeiten jedoch nicht berechnet werden können, ist ein weiterer Zugang zur Beschreibung derselben nötig. Dieser Zugang beschäftigt sich mit einem mesoskopischen Modell für das System, basierend auf der Arbeit von Shliomis. In diesem Modell wird die Magnetisierung des Systems als quasi-hydrodynamische Variable benötigt und ihre Dynamik in den Rahmen der Hydrodynamik eingebunden. Darauf aufbauend wird erstmals ein vollständiges, konsistentes Gleichungssystem für die Dynamik magnetischer Flüssigkeiten angegeben, das im Einklang mit Forderungen der Thermodynamik steht und dem phänomenologischen Bild einer magnetischen Flüssigkeit auf mesoskopischer Skala gerecht wird.

Schließlich werden diese beiden Ansätze im Limes $\omega \rightarrow 0$ zusammengeführt, und damit wird eine vollständige und allgemeine Theorie für magnetische Flüssigkeiten geschaffen, die den gesamten Frequenzbereich des experimentell Realisierbaren abdeckt und sämtliche Phänomene, die bislang mit Ferrofluiden in Beziehung stehen, widerzuspiegeln in der Lage ist.

Schlagnworte: Hydrodynamische Maxwell Theorie, Magnetische Flüssigkeiten, Intrinsischer Drehimpuls

Abstract

The present work is occupied with the hydrodynamic theory of magnetic fluids. Starting from the general hydrodynamic theory of polarizable and magnetizable media of Liu and the following elaboration of this work by Liu, Henjes, and Jiang, the whole system of equations of the theory will be adjusted to match the realities of a magnetic fluid firstly. Through this, the number of the undetermined material parameters in the dissipative parts of the fluxes will be reduced significantly. Particularly, it can be shown that the crucial parameter for such systems as under scrutiny is the magnetic relaxational time τ . In addition, the extensive part of the internal angular momentum density will be integrated into the system explicitly, i.e. it will be allowed for by an extra continuity equation, the structure of which did already arise in the work of Kostädt and Liu but which never was calculated for a given system explicitly so far. This calculation is accomplished by carrying out the hydrodynamic standard procedure for the whole system of equations. In particular, an antisymmetric contribution to the stress tensor and new contributions to the entropy production and the energy flux is found.

The effectiveness of the hydrodynamic Maxwell theory for magnetic fluids will be fortified by some examples for applications which the standard theory of Shliomis is not capable of reproducing, but which admittedly are of partial small magnitude and therefore unsuitable to judge the differences of both theories. However, an interesting proposal for a new experiment will be discussed which is not affected by the above restriction; the presented calculation of the diagonal elements of the different stresses points to the big differences between the static aspects of the two theories.

Because of the restriction of the newly found theory by the requirement of local equilibrium in contrast to the standard theory - the upper bound for the frequencies ω taking part in the systems dynamic is determined through the condition $\omega\tau \ll 1$ - and because of the need to know the material parameters which are not accessible through the hydrodynamic theory an additional approach for describing magnetic fluids is necessary. This approach deals with a mesoscopic model of the system which is based on the work of Shliomis. In this model the magnetization of the system is kept as a quasi hydrodynamic variable, the dynamics of which are incorporated into the theory. Constructed on this premise a complete and consistent system of equations for the dynamics of magnetic fluids will be given for the first time. This set of equations is in accordance with the requirements of the thermodynamic principles and with the phenomenological picture of a magnetic fluid on a mesoscopic scale. Finally, both basic approaches will be merged in the limit $\omega \rightarrow 0$ and a complete and general theory of magnetic fluids will be created which covers the entire frequency range of realizable experiments and every phenomenon which has ever been discovered with respect to ferrofluids.

Keywords: hydrodynamic Maxwell theory, magnetic fluids, intrinsic angular momentum

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	1
Kapitel 2. Einführung in die Hydrodynamische Maxwell Theorie	15
2.1 Die Grundprinzipien	15
2.2 Die Grundgleichungen	16
2.2.1 Die thermodynamischen Relationen	16
2.2.2 Die Bewegungsgleichungen	17
2.2.3 Die Kräftebilanz der Ferrofluide	20
Kapitel 3. Anwendungsbeispiele für die Hydrodynamische Maxwell Theorie	21
3.1 Der stromdurchflossene Leiter	22
3.1.1 Die Oberfläche	22
3.1.2 Dichtevariation bei angelegtem Feld	24
3.2 Der Spannungstensor	29
3.2.1 Die Nebendiagonalelemente	30
3.2.2 Die Diagonalelemente	31
Kapitel 4. Die mesoskopische Theorie für Ferrofluide	35
4.1 Der phänomenologische Hintergrund	36
4.1.1 Drehimpulsgleichung ohne äußere magnetische Felder	36
4.1.2 Drehimpulsgleichung mit äußeren magnetischen Feldern	36
4.2 Die Bewegungsgleichungen	37
Kapitel 5. Innere Drehimpulsfreiheitsgrade in der Hydrodynamischen Maxwell Theorie	41
5.1 Bewegungsgleichung für den inneren Drehimpuls	41
Kapitel 6. Reduktion der mesoskopischen Theorie: der Limes $\omega_B \rightarrow 0$	45
6.1 Die Energiedichte	45
6.2 Vergleich der Spannungstensoren	47
6.2.1 Die Nebendiagonalelemente	48
6.2.2 Die Diagonalelemente	49
Anhang A. Die Standardprozeduren	51
A.1 Standardprozeduren	51

Anhang B. Die Energiedichte im niederfrequenten Limes	57
B.1 Vollständige Entwicklung der Energiedichte	57
B.2 Äquivalenz der Energiedichten im Limes $\omega \rightarrow 0$	59
Literaturverzeichnis	63

Abbildungsverzeichnis

1.1	Der Aufbau eines Ferrofluid-Nanopartikels mit magnetischem Kern, magnetisch inaktiver Schicht und makromolekularer Hüllschicht	2
1.2	BROWNScher Relaxationsmechanismus. Die Orientierung der Kristallachsen fällt mit der Richtung der Magnetisierung zusammen, nur durch Drehung des Teilchens im Ganzen kann eine Relaxation in die aufgezwungene Richtung erfolgen.	5
1.3	NÈELScher Relaxationsmechanismus. Die Orientierung der Kristallachsen ist unabhängig von der der Magnetisierung.	6
1.4	Zur Veranschaulichung der phänomenologischen Situation. Die Flüssigkeit rotiert lokal mit der Geschwindigkeit Ω , das Magnetfeld mit ω_B	8
3.1	Die Form der Oberfläche mit zusätzlicher Korrektur gemäß Gl. (3.2)	24
3.2	Die Form der Oberfläche ohne zusätzliche Korrektur gemäß Gl. (3.1)	25
3.3	Vergleich der beiden Oberflächenformen mit und ohne Korrekturterm im Bereich stärkster Oberflächenänderung	26
3.4	Der durch das Gefäß mit dem Ferrofluid geführte Leiterdraht führt den Strom J . Die gestrichelte Linie stellt den Oberflächenverlauf des Fluids nach Einschalten des Stroms dar.	27
3.5	Die Dichteverteilungen der suspendierten Teilchen innerhalb des Ferrofluids. Die geringe Größenordnung des Effekts läßt sich leicht erkennen.	28
3.6	Die Dichteverteilungen der suspendierten Teilchen innerhalb des Ferrofluids bei viel größerer Stromstärke als zuvor. Der Effekt hat sich deutlich vergrößert.	29
3.7	Zur Messung einer zusätzlichen magnetischen Tangentialkraftdichte. Gäbe es einen nichtverschwindenden Term im Spannungstensor des Ferrofluids, so müßte das eingezeichnete Oberflächenelement in Bewegung geraten; ein anfänglich ruhendes Ferrofluid würde in Bewegung geraten.	31
3.8	Messung der Diagonalelemente des Spannungstensors über die Druckänderung an einer Ferrofluid-Oberfläche.	32

KAPITEL 1

Einleitung

Magnetische Flüssigkeiten. Woher kommt das Interesse in diese magnetischen Flüssigkeiten? Was ist in theoretischer Hinsicht an ihnen so spannend, was in experimenteller? Der letzte Teil dieser Frage kann einfach beantwortet werden: magnetische Flüssigkeiten sind untrennbar verknüpft mit unserem täglichen Leben. Das Ferrofluid¹ hat seinen kleinen, aber nicht wegzudenkenden Platz in den Festplatten unserer Computer, die uns unser Leben erleichtern, es befindet sich in den Lautsprecherboxen unserer Musikanlagen, die uns unser Leben verschönern und es verrichtet seinen unermüdlichen Dienst wohl bald in künstlichen Herzen, die uns unser Leben verlängern. Ist es da nicht an der Zeit, sich dieses Stoffes anzunehmen, ihn einzubetten in unsere Theorien, ihn zu analysieren, zu verstehen? Das ist nämlich erstaunlicherweise die Antwort auf den ersten Teil der obengenannten Frage: magnetische Flüssigkeiten sind unter theoretischen Gesichtspunkten so interessant, weil es bisher keine vollständige Theorie gab, die alle Phänomene beschreiben konnte, die sie im Alltag so vielseitig machen.

Tatsächlich sind Ferrofluide in weiten Teilen intuitiv verstanden, und in der Tat gibt es seit einigen Jahren Anstrengungen, den experimentellen Befunden und den Besonderheiten dieser Fluide auf theoretischem Wege Rechnung zu tragen. Doch nicht jeder Ansatz für eine "Theorie für Ferrofluide" war in jeder Hinsicht von Erfolg gekrönt. Selbst der bekannteste, auf die die weiter unten erwähnte "Standardtheorie" fußt, macht da keine Ausnahme. Alleine die Idee, eine "Theorie für Ferrofluide" schaffen zu wollen, mutet so unverständlich an, wie der Versuch, eine "Theorie für Honig" oder eine "Theorie für Kaffee" aufzustellen. Existiert nicht bereits eine Theorie, die sich mit makroskopischen Systemen wie Flüssigkeiten auseinandersetzt? Aber natürlich, die sogenannte Hydrodynamik. Gibt es keine Möglichkeit, diese so zu erweitern, daß sie nicht nur für Wasser, Honig oder Kaffee Vorhersagen zu machen erlaubt, sondern eben auch für Ferrofluide?

Aber ich greife voraus, der didaktische Übereifer läßt den interessierten, aber uneingeübten Leser atemlos zurück. Beginnen wir also ganz am Anfang: Was bezeichnen wir

¹Der Begriff "magnetische Flüssigkeit" wird in dieser Arbeit oft als Synonym für den Ausdruck "Ferrofluid" benutzt.

eigentlich als magnetische Flüssigkeit? Schließlich haben wir gelernt, daß bei Metallen die CURIE-Temperatur, also die Temperatur bei welcher das entsprechende Metall seine magnetischen Eigenschaften verliert, unterhalb des Schmelzpunktes liegt? Wie kann es dann eine Flüssigkeit mit magnetischen Eigenschaften geben? Offensichtlich kann es sich bei derartigen Flüssigkeiten um keine einkomponentigen handeln. Vielmehr werden seit Anfang der 60er Jahre ferromagnetische Teilchen mit einem Durchmesser der Größenordnung von 10 nm - beispielsweise Magnetit oder Kobaltferrit (CoFe_2O_4) - in einer geeignete Trägerflüssigkeit wie Öl oder Wasser dispergiert. Die Herstellung der Nanopartikel kann dabei auf mechanischem Weg durch Mahlen [1] oder mittlerweile auch auf chemische Weise erfolgen [2]. Durch die geringe Größe der Teilchen ist sichergestellt, daß sie nur aus einer einzigen magnetischen Domäne bestehen. Experimente zeigen überdies, daß die Sättigungsmagnetisierung dieser Teilchen um bis zu 25 Prozent kleiner ist als dieselbe eines makroskopischen Objektes des gleichen Materials [3]. Das legt ein Modell nahe, in dem der magnetische Kern des Teilchens von einer magnetisch inaktiven Schicht umgeben ist [4]. Um diese Schicht wiederum wird eine Hülle aus Makromolekülen gelegt, die verhindern soll, daß die dispergierten, wechselwirkenden Teilchen agglomerieren. Der schematische Aufbau eines Nanopartikels findet sich in Abb. 1.1.

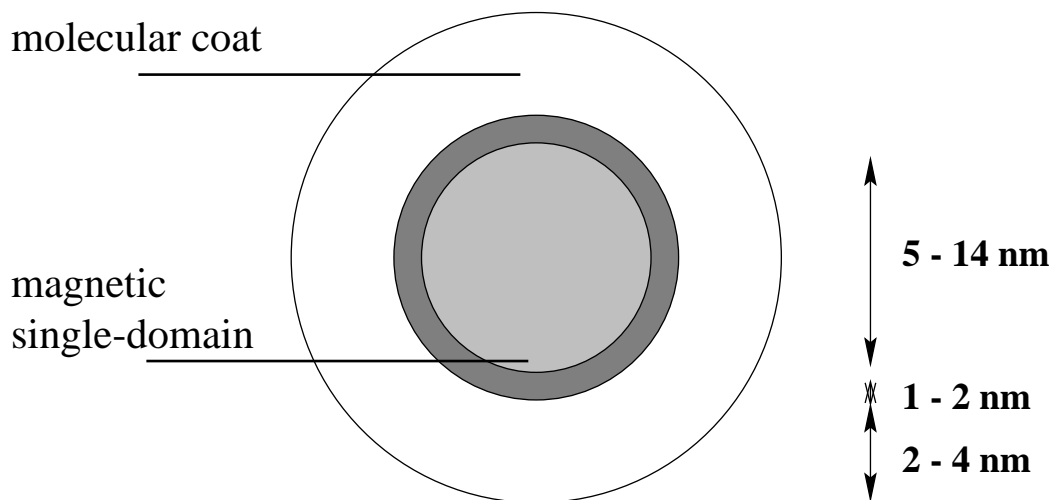


Abbildung 1.1. *Der Aufbau eines Ferrofluid-Nanopartikels mit magnetischem Kern, magnetisch inaktiver Schicht und makromolekularer Hüllschicht*

Schon bald nachdem die ersten einfachen Ferrofluide für Experimente zur Verfügung standen, gab es verblüffende Befunde, die das große Potential dieser Flüssigkeiten aufwiesen. Allen voran das wegweisende Experiment MCTAGUE'S, der feststellte, daß die Viskosität

einer magnetischen Flüssigkeit durch ein äußeres Magnetfeld beeinflusst werden kann, und zwar sowohl von seiner Feldstärke, als auch von seiner Ausrichtung relativ zur Flußrichtung des Fluids [5]. Wie sollte man diesen Effekt erklären?

Es war SHLIOMIS, der das Modell eines Ferrofluids als erster in eine Formelsprache übersetzte, die zwar zu intuitiv und inkonsistent, teilweise sogar fehlerhaft war, um sie als komplette Theorie anzuerkennen, die aber auf brillante Art und Weise die inneren Mechanismen in einer magnetischen Flüssigkeit einsichtig machte; sie lieferte plausible Erklärungen für viele Phänomene aus dem Bereich der Ferrofluide und gab richtige Vorhersagen für bisher unbeobachtete Vorgänge. Um also einen ersten Eindruck und anschauliches Verständnis für magnetische Flüssigkeiten zu bekommen, wenden wir uns für einen Augenblick seiner Arbeit zu, die aufgrund des gut funktionierenden Modells letztlich Ausgangspunkt für eine konsistente hydrodynamische Theorie ist, die sich auf Ferrofluide anwenden läßt.

Das Modell von SHLIOMIS basiert auf einer mesoskopischen Skalierung des Problems in Bezug auf die beteiligten Relaxationszeiten. Hier sind noch nicht alle abhängigen Variablen in ihren Gleichgewichtswert relaxiert, insbesondere die Magnetisierung erhält auf dieser Zeitskala eine eigene Dynamik und wird dadurch quasi-hydrodynamisch. In diesem Modell hat das Fluid zwei Komponenten, jede mit eigenen Eigenschaften und eigener Dynamik, die Einfluß auf die Gesamtdynamik der Flüssigkeit haben. Die beiden Komponenten an sich jedoch sind Vielteilchensysteme, so daß der Begriff “mesoskopisch” immer auf diese Betrachtung bezogen ist: das Zeitfenster ist so gewählt, daß die Magnetisierung eine unabhängige Dynamik bekommt, es befindet sich jedoch nicht auf einer solch kleinen Skala, auf der man die Dynamik der übrigen mikroskopischen Freiheitsgrade berücksichtigen müßte².

Dieses Modell verfolgend beschäftigt sich SHLIOMIS bereits 1967 mit den hydrodynamischen Eigenschaften einer Flüssigkeit mit inneren Rotationsfreiheitsgraden, ohne dabei auf einen etwaigen magnetischen Aspekt einzugehen [6]. In seiner Arbeit berechnet er den Spannungstensor, die Entropieerzeugung und den Energiestrom für eine solche Flüssigkeit; das wesentliche Ergebnis ist der antisymmetrische Beitrag zum Spannungstensor, der für zusätzliche Dissipation im System sorgt. Im Jahr 1969 folgt die nächste wichtige Arbeit [7], in der er die gewonnenen Ergebnisse auf eine Flüssigkeit überträgt, die magnetische Eigenschaften hat und deren Magnetisierung M mit dem inneren Drehimpuls S linear

²Wann immer in dieser Arbeit von einer “mesoskopischen Theorie” oder einer “mesoskopischen Skala” gesprochen wird, ist damit dieses Modell, diese Betrachtung der Flüssigkeit gemeint.

zusammenhängt, d.h. es gilt dort $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{S}$. Für dieses System gibt er den vollständigen Satz an Bewegungsgleichungen an und berechnet die symmetrischen und antisymmetrischen Beiträge zum Spannungstensor. Der daraus hervorgehende zusätzliche Beitrag zur Viskosität des Ferrofluids deckt sich jedoch nicht mit den experimentellen Vorgaben MCTAGUE'S, wie sich später herausstellen wird.

Dieses Manko wird in [8] aufgehoben. Hier wird die zusätzliche Viskosität, Rotationsviskosität genannt, explizit angegeben. Sie läßt sich durch

$$\eta_{Rot} = \frac{M_0 H \tau}{4(1 + \tau_s \tau M_0 H / I)} \quad (1.1)$$

beschreiben, wobei M_0 die Gleichgewichtsmagnetisierung, H der Betrag des Magnetfeldes, I die Summe der Trägheitsmomente aller Teilchen im Einheitsvolumen und τ_s die charakteristische Zeit ist, mit der die Rotation eines Teilchens abklingt; außerdem ist τ die magnetische Relaxationszeit, also jene charakteristische Zeit, die die Magnetisierung des Systems benötigt, um ihren lokalen Gleichgewichtswert nach einer Auslenkung wieder anzunehmen. Diese Relaxation kann über zwei unterschiedliche Mechanismen erfolgen, je nach der Größe der beteiligten Partikel: zum einen ist da der BROWNSche Relaxationsprozeß, bei dem man sich die Magnetisierung als im Teilchen fixiert vorstellt und die in Abb. 1.2 dargestellt ist. Die Relaxation läuft damit über die molekulare Diffusion der Teilchen mit der Zeit

$$\tau_B = \frac{3\eta V}{k_B T}. \quad (1.2)$$

Hier ist η die Viskosität der Trägerflüssigkeit, V das Volumen eines dispergierten Teilchens, T die Temperatur und k_B die BOLTZMANNKonstante. Diese Relaxationszeit ist offensichtlich abhängig von der Größe der "Nanomagneten".

Zum anderen gibt es das NÈELSche Relaxationsmodell, erläutert in Abb. 1.3, bei dem sich die Achse des magnetischen Dipolmoments durch spontane Ummagnetisierung relativ zur raumfesten Kristallachse des Teilchens ändert (vgl. [1]). Diese Zeit genügt der Formel

$$\tau_N = \tau_0 \left(\frac{k_B T}{KV} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{KV}{k_B T} \right\}. \quad (1.3)$$

Die hier auftretenden, noch nicht erläuterten Größen sind die vom Material abhängende Anisotropie-Konstante K und die sogenannte KORRINGA-Relaxationszeit $\tau_0 \approx 10^{-10 \pm 1} \text{s}$ [9].

Diese NÈEL-Relaxationszeit ist ebenso wie die BROWNSche abhängig von der Teilchengröße. Da die effektive Relaxationszeit des Prozesses dem schnelleren Mechanismus folgen wird, d.h. da

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_B} + \frac{1}{\tau_N} \quad (1.4)$$

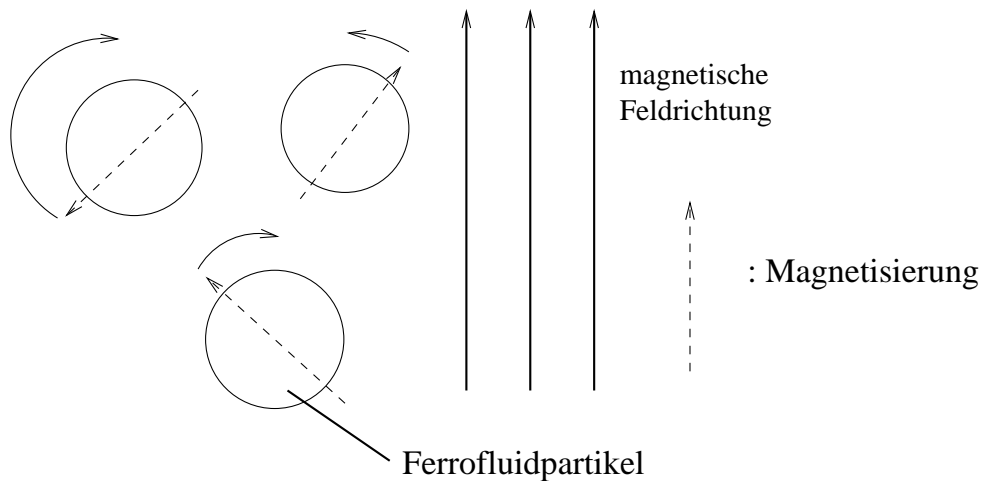


Abbildung 1.2. *BROWNScher Relaxationsmechanismus. Die Orientierung der Kristallachsen fällt mit der Richtung der Magnetisierung zusammen, nur durch Drehung des Teilchens im Ganzen kann eine Relaxation in die aufgezwangene Richtung erfolgen.*

gilt, dominiert laut [10] für kleine Partikel τ_N , ab einer Teilchengröße von etwa 10-11 nm jedoch τ_B . Eine solche Aussage bedarf jedoch einiger Vorsicht: denn es befinden sich die Partikel, wie oben bereits erwähnt, genau in einem Größenordnungsbereich, in dem keine klare Aussage darüber gemacht werden kann, welcher der beiden Relaxationsmechanismen der schnellere und damit dominante sein wird. Überdies läßt sich diese Grenze auch nur schwer exakt berechnen, da die Bestimmungsgleichungen für τ_N und τ_B teilweise sehr empfindlich von den äußeren Parametern abhängt. Von diesen sind jedoch einige bloßen Mutmaßungen unterworfen, etwa die tatsächliche Dicke der magnetisch inaktiven Schicht und der Hüllschichtdicke.

Demnach sollte eine allgemeingültige Theorie für Ferrofluide entweder unabhängig von der Art des magnetischen Relaxationsprozesses sein oder zumindest explizit die beiden verschiedenen Mechanismen berücksichtigen. Dieser Punkt wird in [8] nicht beachtet, die NÈELSche Relaxationszeit fällt in der Beschreibung der Teilchendynamik komplett unter den Tisch. Ein weiterer, noch weitreichenderer Schwachpunkt dieser Arbeit ist die unklare Herleitung des Spannungstensors σ_{ik} , der die Summe aus dem - leicht modifizierten - Tensor aus [6] und dem MAXWELLSchen Spannungstensor ist³.

Im Jahr 1974 endlich erscheint dann ein Artikel, der lange Zeit als Referenz für eine theoreti-

³SHLIOMIS selbst begründet dies in [8] lapidar mit den Worten "We have included in σ_{ik} the Maxwellian stress tensor, since we are dealing here with a magnetic suspension."

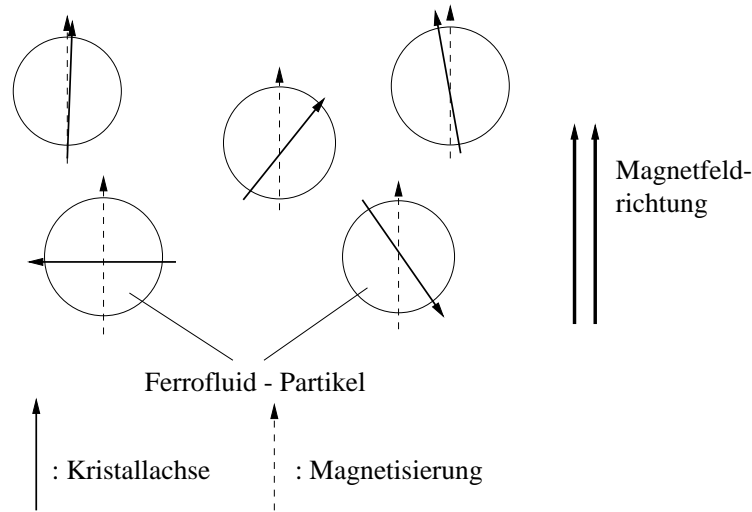


Abbildung 1.3. NÈEL'scher Relaxationsmechanismus. Die Orientierung der Kristallachsen ist unabhängig von der der Magnetisierung.

sche Beschreibung für magnetische Flüssigkeiten galt - und in einigen Teilen der “ferrofluid community” auch heute noch gilt. Es handelt sich um das Hauptwerk von SHLIOMIS, das schlicht den Titel “Magnetic fluids” trägt [9] und das als Standard-Theorie für Ferrofluide angesehen wird. Doch auch hier kommt man nicht umhin, diverse Kritikpunkte zu äußern. Im einzelnen sind diese die folgenden:

- Der Beitrag \mathbf{S} zum extensiven Anteil des inneren Drehimpulses der Suspension ist gleich dem antisymmetrischen Anteil des Spannungstensors. Seine Relaxationsgleichung als abhängige hydrodynamische Variable lautet damit (vgl. Abschnitt 4.1)

$$\frac{dS_{ik}}{dt} = \sigma_{ki} - \sigma_{ik}, \quad (1.5)$$

wobei $S_{ik} = \epsilon_{ikj} S_j$ gilt. Für schwache Felder und lineare konstituierende Relationen folgt der Zusammenhang $\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$ mit der konjugierten Variable $\omega_i = \partial\varepsilon/\partial S_i$, die sich aus der Fundamentalgleichung für die Energiedichte ε ergibt. Ist die Argumentation bis zu dieser Stelle vertretbar, so folgt nun eine unzulässige Annahme: SHLIOMIS identifiziert die Größe $\boldsymbol{\omega}$ mit der mittleren lokalen Winkelgeschwindigkeit, mit der die Teilchen rotieren, woraus die Identifikation der Größe I mit der Summe der Trägheitsmomente der Teilchen pro Einheitsvolumen folgt. Dies wäre in der Tat dann - und nur dann - der Fall, wenn der extensive innere Drehimpulsbeitrag \mathbf{S} sich allein aus einer Rotation der Teilchen speisen würde. Dies ist jedoch augenscheinlich unwahr für ein System, in dem es weitere Beiträge zu \mathbf{S} gibt, z.B. die mit der Spindichte des Systems verknüpften. Ein Beispiel für einen daraus erwachsenden Effekt stellt der EINSTEIN-DEHAAS-Effekt dar [11]. Einen Einblick in die Bedeutung der Größe \mathbf{S} gibt [12], eine Diskussion im Rahmen dieser Arbeit erfolgt in Abschnitt 4.2. Eine hydrodynamische Beschreibung muß alle diese Beiträge in Betracht ziehen, infolgedessen kann

die lokale Winkelgeschwindigkeit der suspendierten Teilchen nur in Ausnahmefällen mit ω übereinstimmen. Damit verlieren wir jedoch auch die Information darüber, ob der Entwicklungsparameter I tatsächlich mit der Summe der Trägheitsmomente übereinstimmt, d.h. ob der innere Drehimpuls tatsächlich auf rein mechanischem Wege relaxiert. Die Relaxationszeit τ_s , die der Drehimpuls des Systems benötigt, um seinen Gleichgewichtswert anzunehmen, kann somit nur auf experimentellem Weg bestimmt werden⁴, eine Berechnung ist ohne eine sehr viel detaillierte mikroskopische Theorie nicht ohne weiteres denkbar.

- Der Spannungstensor ist hier offensichtlich darauf ausgelegt, den Phänomenen Rechnung zu tragen, die mit seinen Außerdiagonalelementen verknüpft sind, so z.B. mit der effektiven Viskosität der Flüssigkeit (vgl. [13]). Da keine konsistente Herleitung des Spannungstensors erfolgte, verwundert es nicht, daß die Diagonalelemente desselben in [9] weitgehend unberücksichtigt bleiben. SHLIOMIS gibt noch nicht einmal eine genaue Definition des Drucks p , der in seinem Spannungstensor auftaucht, obwohl eine solche Größe im Zusammenhang mit elektromagnetischen Feldern einiger Erklärung bedarf [14]. Überdies existieren mittlerweile Vorschläge für Experimente, aus denen die Struktur der Diagonalelemente hervorgehen soll; demnach benötigt man hier eine Theorie, die in der Lage ist, genaue Vorhersagen zu machen - eine Eigenschaft, die der gerade diskutierten abgeht (vgl. Abschnitt 3.2.2).
- Die von SHLIOMIS aufgestellten hydrodynamischen Bewegungsgleichungen für die Magnetisierung und den intrinsischen Drehimpuls widersprechen den thermodynamischen Ungleichungen desselben Systems. Die Magnetisierung \mathbf{M} genügt laut [9] der Relaxationsgleichung

$$\dot{\mathbf{M}} = \omega \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau}(\mathbf{M} - \mathbf{M}^{\text{eq}}), \quad (1.6)$$

die des Drehimpulses lautet

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{M} \times \mathbf{H} - \frac{1}{\tau_s}(\mathbf{S} - I\Omega). \quad (1.7)$$

Die Bezeichnungen für die einzelnen Größen entsprechen den bereits verwendeten; zusätzlich wird angenommen, daß die suspendierten Teilchen des Ferrofluids im Gleichgewicht mit der lokalen Winkelgeschwindigkeit Ω der sie umgebenden Trägerflüssigkeit rotieren. Ein homogenes Magnetfeld der Stärke $|\mathbf{H}|$ durchdringe den Behälter mit der magnetischen Flüssigkeit und werde mit der Winkelgeschwindigkeit

⁴An dieser Stelle mag die Frage aufkommen, wie sich in einem mesoskopischen Modell, das sich drehende Teilchen betrachtet, die Relaxationszeiten τ_s und τ_B unterscheiden, die schließlich beide mit der Drehung des Teilchen als Ganzes zusammenhängen. Man sieht aber schon in SHLIOMIS' Modell, in dem der Drehimpuls auf rein mechanischem Weg relaxiert, daß es einen Unterschied zwischen diesen Zeiten geben muß. Während im Fall der magnetischen Relaxation sich die Orientierung ϕ des Teilchens ändert, bis das Gleichgewicht wiederhergestellt ist, muß im Fall des Drehimpulses aber deren Ableitung $\dot{\phi}$ geändert werden.

ω_B rotiert. Die Magnetisierung folgt diesem äußeren Feld, woraus der Zusammenhang $\dot{\mathbf{M}} = \omega_B \times \mathbf{M}$ folgt, vgl. Abb. 1.4.

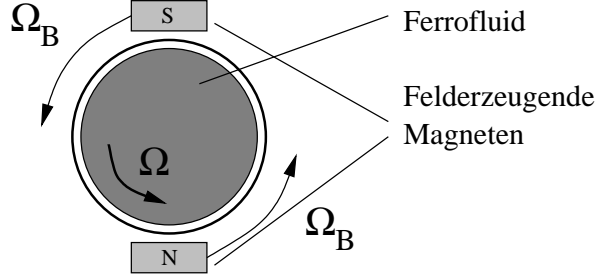


Abbildung 1.4. Zur Veranschaulichung der phänomenologischen Situation. Die Flüssigkeit rotiert lokal mit der Geschwindigkeit Ω , das Magnetfeld mit ω_B .

Der Drehimpuls relaxiert laut [9] hinreichend schnell in seine stationäre Lösung $d\mathbf{S}/dt = 0$, wir betrachten lediglich die Beiträge der Winkelgeschwindigkeiten senkrecht zum angelegten Feld. Dann ergibt eine kurze Rechnung analog zu der in Abschnitt 4.2 den Zusammenhang

$$(\omega_B - \Omega)_\perp = \left(1 + \frac{I\chi}{\tau\tau_s M^2}\right)(\omega - \Omega)_\perp. \quad (1.8)$$

Das phänomenologische Bild des mesoskopischen Modells vermittelt nun demzufolge (vgl. Abschnitt 4.1) die Relation

$$1 + \frac{I\chi}{\tau\tau_s M^2} = \frac{\zeta}{I} \ll 1, \quad (1.9)$$

was einen offensichtlichen Widerspruch darstellt.

An diesen Stellen zeigt sich, daß die mesoskopische Theorie von SHLIOMIS durchaus fehlerbehaftet ist. Hinzu kommt eine ungenaue Definition des Gültigkeitsbereichs dieser Theorie. In dem Bereich, der aufgrund der Frequenzbedingung $\omega_B \tau \ll 1$ als hydrodynamisch gilt, ist die Magnetisierung eine schnell in ihren Gleichgewichtswert $\mathbf{M}^{\text{eq}} = \mathbf{M}^{\text{eq}}(\mathbf{B})$ relaxierende Größe, die demzufolge keineswegs unabhängig ist und zusammen mit den übrigen kurzlebigen (typischerweise 10^{23}) Freiheitsgraden des Systems eliminiert werden muß. Eine Theorie, die die Magnetisierung explizit berücksichtigt, ist erst vonnöten, sobald sich die Frequenz dem Bereich $\omega_B \tau \approx 1$ nähert. In diesem Bereich verläßt SHLIOMIS jedoch bereits wieder die oben vorgestellte Theorie und entwickelt eine sogenannte “effective field theory” [15], um solch interessante Effekte wie die “negative Viskosität” von Ferrofluiden zu berücksichtigen. Eine wie auch immer geartete Begründung für die Anwendung dieser mikroskopischeren “effective field theory”, die im wesentlichen auf einer FOKKER-PLANCK-Gleichung basiert, gibt SHLIOMIS an keiner Stelle, obwohl der

Gültigkeitsbereich der von ihm selbst aufgestellten mesoskopischen Theorie gar nicht verlassen wird. Im Gegensatz dazu wurde erst kürzlich von MÜLLER und LIU gezeigt [16], daß eine mesoskopische Theorie, die sich der Magnetisierung als unabhängiger (jedoch nicht hydrodynamischer) Variable bedient, ohne weitere Annahmen der “negativen Viskosität” gerecht wird. Mit anderen Worten: die hydrodynamischen Prinzipien verlangen, daß man im Frequenzbereich, der durch $\omega_B \tau \ll 1$ gekennzeichnet ist, eine Theorie aufstellt, die nicht der Magnetisierung bedarf. Erst im Bereich $\omega_B \tau \approx 1$ muß die unabhängige Dynamik derselben berücksichtigt werden, allerdings ohne den Boden hydrodynamischer Prinzipien zu verlassen.

Womit wir mit einem Male bei der bereits erwähnten zweiten Annäherung an das Problemfeld “Ferrofluide” angelangt sind: bei der hydrodynamischen Theorie LIUS. Bei dieser sogenannten “Hydrodynamischen Maxwell Theorie” handelt es sich um eine strikt im Formalismus der irreversiblen Thermodynamik begründeten makroskopischen Theorie, die zunächst allgemein für alle polarisierbare und magnetisierbare Materialien aufgestellt wurde [17, 14, 18]. Der Gültigkeitsbereich dieser Theorie wird alleine durch die Relaxationszeiten τ_i der abhängigen Variablen bestimmt. Die an der Dynamik beteiligten Frequenzen ω_i dürfen wie bereits erwähnt die Bedingung $\omega_i \tau_i \ll 1$ nicht verletzen; insbesondere gilt für die Frequenz ω_B des Magnetfeldes die Bedingung $\omega_B \tau \ll 1$. Innerhalb dieses Bereichs jedoch ist die hydrodynamische Theorie streng und allgemein gültig, da sie nur auf als gesichert geltenden Prinzipien der Physik wie etwa der Energieerhaltung basiert.

Als Fundament dieser Theorie gilt die Forderung nach der Existenz von lokalem Gleichgewicht, eine Forderung, die die obengenannte Beschränkung des Frequenzbereiches zur Folge hat. Zweckmäßig ist eine intensive Darstellung der Theorie, um sicherzustellen, daß auch nur mit lokalen Größen gearbeitet wird. Die unabhängigen Variablen sind wie in jeder hydrodynamischen Theorie die erhaltenen Größen und die SymmetrievARIABLEN des Systems. Zusätzlich zu den gewöhnlichen Variablen der grundlegenden Hydrodynamik, wie sie beispielsweise in [19] dargestellt ist, also zusätzlich zur Entropiedichte s , zur Gesamtdichte ρ der Flüssigkeit und zur Impulsdichte g , gesellen sich in unserem Fall noch das elektrische Feld \mathbf{D} , auch elektrische Induktion genannt, das magnetische Feld \mathbf{B} , in der Literatur oft als magnetischer Fluß bezeichnet, und die Konzentrationsdichte der suspendierten Partikel im Ferrofluid ρ_1 . Mit diesen Erhaltungsgrößen und ihren jeweiligen Bilanzgleichungen läßt sich das vollständige Gleichungssystem für ein Ferrofluid aufstellen, das insbesondere die Bewegungsgleichung für die Flüssigkeit beinhaltet.

Die Vorteile einer solchen Beschreibung im Rahmen einer hydrodynamischen Theorie lie-

gen auf der Hand:

- Das Fundament der Hydrodynamik bilden allgemein anerkannte Prinzipien der theoretischen Physik. Solange diese gelten, gilt auch die hydrodynamische Theorie. Solange sich nicht herausstellt, daß sich z.B. die Entropie eines Systems im Laufe der Zeit verringert, ist die Richtigkeit der Theorie gewiß.
- Dies hat zur Folge, daß die Theorie im höchsten Grad allgemein ist. Die Struktur der von ihr gelieferten Bewegungsgleichungen unterscheiden sich nicht im geringsten für unterschiedliche System wie etwa Wasser, Öl oder Honig. Das teilweise unterschiedliche Verhalten dieser Systeme wird alleine durch einige wenige Materialparameter beschrieben; im hier angeführten Beispiel wäre ein solcher Parameter etwa die Viskosität des Stoffes.
- Die Theorie ist unabhängig von der Art der zugrunde liegenden mikroskopischen Wechselwirkung, die letztendlich für die Dynamik des Systems verantwortlich ist. Auf der mikroskopischsten Ebene der theoretischen Physik mag es eine Revolution geben, das HIGGS-Boson mag gefunden werden, die String-Theorien mögen sich als richtig erweisen, die Form aber etwa der NAVIER-STOKES-Gleichung wird davon völlig unberührt bleiben.

Jenseits davon hat diese Art der Beschreibung aber auch einen für praktische Zwecke entscheidenden Nachteil: die Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik werden erst durch die Materialparameter mit Leben gefüllt; diese aber können nicht mit den Mitteln der Hydrodynamik bestimmt werden. Hierin unterscheidet sich aber die hydrodynamische Maxwell Theorie nicht im geringsten von allen anderen hydrodynamischen Theorien. Die Parameter des Systems müssen als äußere Eingabe in das Gleichungssystem einfließen, um sinnvolle Vorhersagen zu ermöglichen. Dies kann im wesentlichen auf zwei Arten geschehen: die Materialgrößen können direkt im Experiment oder unter Anwendung von mikroskopischen Modellen auf theoretischem Wege bestimmt werden. Beide Wege erfordern zusätzlichen Input, den die Hydrodynamik nicht zu geben imstande ist.

Auf diese Tatsache gründen sich auch die Kinderkrankheiten, mit denen sich die hydrodynamische Maxwell Theorie lange Zeit plagen mußte. So zeigte sich früh, daß die Struktur der Bewegungsgleichungen zwar durchaus experimentellen Befunden Rechnung tragen konnten, etwa im Falle des "Spin-Up"-Verhaltens eines Ferrofluids [20], das von LIU in [18] qualitativ diskutiert wurde. Eine überzeugende quantitative Analyse des Problems mußte jedoch nicht zuletzt wegen der mangelnden Informationen über die Systemparameter ausbleiben. Andere theoretische Vorhersagen, wie etwa die Existenz einer stationären hydrodynamischen Mode [21] wurden bislang nicht überprüft, teils aus schwer zu überwindenden praktischen Hürden, teils aber auch aufgrund des ausbleibenden Interesses

seitens der “ferrofluid community”, die mit der Standardtheorie von SHLIOMIS ein für ihre Zwecke anscheinend mehr oder weniger ausreichend gut funktionierendes Werkzeug in den Händen hielt. So fehlte der hydrodynamischen Maxwell Theorie lange Zeit trotz ihrer fundamentalen Richtigkeit der Anschluß an experimentelle Daten und damit die Nützlichkeit für etwaige Anwendungen. Es muß allerdings betont werden, daß sich dieser Sachverhalt daraus ergab, daß die Theorie zu wenig Informationen enthielt. Das Gegenteil ist richtig: wie wir in Abschnitt 2.2 sehen werden, gibt es in der Hydrodynamischen Maxwell Theorie unbestimmte Koeffizienten in einer solchen Fülle, daß diese sogar zuviele Informationen beinhalten. Dieser Sachverhalt machte die Hydrodynamische Maxwell Theorie lange Zeit für den direkten Vergleich mit den genauen Daten aus den Experimenten unbrauchbar.

Im Jahre 1998 änderte sich dieser Sachverhalt endlich, als gezeigt werden konnte, wie mit LIU’s hydrodynamischer Maxwell Theorie unter Mitnahme einiger entscheidender Kreuzkopplungskoeffizienten aus dem dissipativen Anteil des Spannungstensors und dem dissipativen Magnetfeld die Struktur der effektiven Viskositätszunahme eines Ferrofluids in einem äußeren Magnetfeld erhalten werden kann [13]. Wie in Abschnitt 2.2 gezeigt werden wird, gilt gemäß der hydrodynamischen Theorie für magnetische Flüssigkeiten folgende Bewegungsgleichung:

$$\rho(\partial_t + v_l \nabla_l)(g_i/\rho) = -s \nabla_i T - \rho \nabla_i \xi - \rho_1 \nabla_i \xi_1 - g_j \nabla_i v_j + \nabla_j \Pi_{ij}^D + \left(\rho_{el} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{el} \times \mathbf{B} \right)_i + \left(\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}^D) \right)_i. \quad (1.10)$$

Hier bezeichnet \mathbf{v} die zur Impulsdichte konjugierte Geschwindigkeit, ξ und ξ_1 sind die chemischen Potentiale und damit die konjugierten Größen zu den Dichten ρ und ρ_1 . Die ersten vier Terme der rechten Seite bilden die Verallgemeinerung des Druckgradienten, die erste große Klammer der letzten Zeile bildet die oft verwendete makroskopische Form der Lorentz-Kraft, auch wenn diese Bezeichnung nicht hinreichend genau ist, wie LIU und STIERSTADT in ihrem äußerst didaktischen Artikel zeigen [22]. Eine Zunahme der Viskosität einer Flüssigkeit ist offensichtlich mit einer zunehmenden Energiedissipation verbunden, weshalb in diesem Zusammenhang die dissipativen Beiträge zur Kraftdichte

$$f_i^{\text{diss}} = \nabla_j \Pi_{ij}^D + \left(\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}^D) \right)_i \quad (1.11)$$

von Bedeutung sind. Die dissipativen Feldbeiträge bestimmen sich aus einer Entwicklung in die thermodynamischen Kräfte, die unter Rücksichtnahme auf die entsprechenden Einschränkungen (vgl. Kap. 2) wie folgt lautet:

$$\begin{pmatrix} -H_i^D \\ \Pi_{ik}^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \lambda_{ijl} \\ \bar{\lambda}_{ikj} & \eta_{ikjl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c \nabla \times \mathbf{E}^0)_j \\ v_{jl} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Einige der Kreuzkopplungen aus dieser Onsagermatrix gewährleisten nun, daß die hydrodynamische Maxwell Theorie die Struktur der Bewegungsgleichungen einschließlich der

effektiven Rotationsviskosität wiederzugeben in der Lage ist. Sie lautet hier

$$\eta_{Rot} = \frac{\alpha}{4\chi} M^{eq} B, \quad (1.13)$$

was mit dem Ausdruck (1.1) aus der Standardtheorie zu vergleichen ist. Zum einen ist durch Vergleich mit der mesoskopischen Theorie der Transportkoeffizient α jetzt bestimmt. Zum anderen scheinen die beiden Ausdrücke aber nicht völlig identisch zu sein. Der Unterschied zwischen Ihnen ist offensichtlich stark abhängig von der Form der im mesoskopischen Modell zugrunde gelegten Relaxationsgleichung für die Magnetisierung. Da diese selber wiederum ihre Form der adiabatischen Eliminierung der inneren Drehimpulsfreiheitsgrade verdankt, muß die Relaxationsgleichung für den Drehimpuls also zusätzlich zu der für die Magnetisierung betrachtet werden. Welche Gestalt aber haben diese beiden Gleichungen? Welches der Ergebnisse für die Rotationsviskosität ist richtig? Welche Informationen haben wir überhaupt über die Magnetisierung und den intrinsischen Drehimpuls?

Die vorliegende Arbeit bezieht ihre Motivation weitestgehend aus diesen offenen Fragen. Denn wie oben gezeigt verletzen die von SHLIOMIS aufgestellten Gleichungen thermodynamische Prinzipien; sie können demnach nicht Ausgangspunkt für ein Modell sein, daß die Transportkoeffizienten der Maxwell Theorie zu bestimmen hilft. Auf der anderen Seite fehlt der Maxwell Theorie genau dieser Input um eine für das Experiment nützliche Theorie zu sein.

In dieser Arbeit wird erstmals die vollständige Struktur einer Theorie für magnetische Flüssigkeiten gegeben, die sich über einen weiten Frequenzbereich und damit von einer mesoskopischen, quasi-hydrodynamischen Theorie bis zu einer rein hydrodynamischen Theorie erstreckt, in der die Magnetisierung keine eigenständige Variable mehr darstellt. Diese komplette, allgemeine Theorie räumt endlich sämtliche der hier aufgezeigten Unzulänglichkeiten und Inkonsistenzen aus dem Feld und ist damit das universelle Instrument zur Behandlung derjenigen Phänomene, die eng mit den Eigenschaften der Ferrofluide verbunden sind. Dazu wird im nächsten Kapitel eine knappe Einführung in die Hydrodynamik im allgemeinen (Abschnitt **2.1**) und in die hydrodynamische Maxwell Theorie im besonderen gegeben (Abschnitt **2.2**). Die Nützlichkeit dieser Theorie für Ferrofluide, die Anwendbarkeit auf Altbekanntes und die Voraussagen für Neues werden anschließend in Kapitel **3** ins Auge gefaßt; dieses Kapitel setzt sich mit bereits durchgeführten Experimenten auseinander, aber auch mit solchen, die erst von verschiedenen Seiten vorgeschlagen wurden und bei denen Unklarheit darüber herrscht, ob eine Durchführung sich lohnt und tiefere Einblicke in das Wesen der Ferrofluide zuläßt.

Der Kernpunkt der Arbeit folgt alsdann in Kapitel 4. Für die mesoskopische Theorie der magnetischen Flüssigkeiten wird mittels Standardprozedur erstmalig die korrekte Form einer Magnetisierungsgleichung und einer Relaxationsgleichung für den intrinsischen, extensiven Drehimpulsanteil hergeleitet. Diese genügen allen an sie gestellten Forderungen, insbesondere wird der Widerspruch zwischen den Prinzipien der Thermodynamik und den phänomenologischen Gegebenheiten aufgehoben. Dieser phänomenologische Hintergrund wird in Abschnitt 4.1 vermittelt, die Herleitung der Bewegungsgleichungen aus der Hydrodynamik erfolgt in Abschnitt 4.2. Diese Theorie ist sicherlich für sich genommen konsistent, doch fehlt ihr zur endgültigen Bestätigung als eine richtige mesoskopische Theorie für magnetische Flüssigkeiten eine Untersuchung, die im anschließenden Kapitel durchgeführt wird: Um als universell richtig im Frequenzbereich $\omega_{BT} \approx 1$ angesehen zu werden, muß sich die aufgestellte Theorie im Limes $\omega_B \rightarrow 0$ auf die allgemeinere hydrodynamische Maxwell Theorie reduzieren. Um diese Durchführung zu ermöglichen, wird in Kapitel 5 zum ersten Mal der innere Drehimpuls in die Hydrodynamik in konsistenter Weise explizit eingebaut; dieser Einbau steht ebenfalls im Einklang mit den phänomenologischen Erwägungen; die Bewegungsgleichung für den Drehimpuls wird angegeben, der Spannungstensor wird entsprechend mit einem antisymmetrischen Beitrag modifiziert. Es wird ebenfalls gezeigt werden, daß diese Änderung der Bewegungsgleichungen keine Konsequenz auf die Untersuchungen aus Kapitel 3 haben.

Im abschließenden Kapitel 6 wird dann gezeigt, daß sich die neu aufgestellte mesoskopische Theorie aus Kapitel 4 tatsächlich im Limes $\omega_B \rightarrow 0$ auf die Maxwell Theorie für Ferrofluide reduziert und diese als niederfrequenten Grenzfall beinhaltet. Die nunmehr über 30 Jahre anhaltende Suche nach einer einheitlichen Theorie für magnetische Flüssigkeiten ist damit endgültig abgeschlossen. Zwar sind, wie die jüngsten Veröffentlichungen zeigen, noch längst nicht alle Eigenschaften der Ferrofluide zur Genüge ausgelotet und verstanden. Aber die Beschreibung der Fluide steht nun endlich auf einem soliden Fundament, die Werkzeuge zum Verständnis dieser faszinierenden Flüssigkeiten stehen wie im weiteren gezeigt nun vollständig zur Verfügung.

Das Einheitensystem, das in dieser Arbeit verwendet wird, ist das Heaviside-Lorentz-System. Dieses System ist für eine theoretische Arbeit insbesondere günstig, weil in ihm alle elektromagnetischen Felder dieselbe Einheit $\sqrt{\text{J}/\text{m}^3}$ haben. Im Vakuum ist der Zusammenhang zwischen den Feldern besonders einfach, er lautet

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{D}. \quad (1.14)$$

Für den Vergleich mit experimentellen Daten ist jedoch das MKSA-System oft zweckmäßiger. Zur Unterscheidung der beiden Systeme werden die Einheiten im MKSA-System mit

einem $\hat{\cdot}$ gekennzeichnet. Die Transformation zwischen beiden Systemen erfolgt mittels

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}/\sqrt{\mu_0}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\sqrt{\mu_0}, \quad \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}/\sqrt{\epsilon_0} \quad (1.15)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\sqrt{\epsilon_0}, \quad \hat{\rho}^{el} = \rho^{el}\sqrt{\epsilon_0}, \quad \hat{\mathbf{j}}^{el} = \mathbf{j}^{el}\sqrt{\epsilon_0}. \quad (1.16)$$

Hierbei ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ und $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. Die elektrische Leitfähigkeit ist $\hat{\sigma} = \sigma\epsilon_0$, die Gleichgewichtssuszeptibilitäten sind in beiden Systemen dieselben. Um Verwechslungen mit den Permeabilitäten zu vermeiden, wurde für die chemischen Potentiale durchgängig der Buchstabe ξ benutzt.

KAPITEL 2

Einführung in die Hydrodynamische Maxwell Theorie

Im vorliegenden Kapitel soll in die sogenannte Hydrodynamische Maxwell-Theorie von Liu [17, 18] eingeführt werden, indem ausgehend von einfachen und fundierten Prämissen unter Anwendung von hydrodynamischen Prinzipien die vollständigen Bewegungsgleichungen für eine magnetisierbare Flüssigkeit erarbeitet werden.

2.1 Die Grundprinzipien

Ein System mit 10^{23} Teilchen und einer Anzahl von Freiheitsgraden in derselben Größenordnung kann bekanntermaßen aus praktischen Gründen unmöglich mit einer detaillierten mikroskopischen Theorie beschrieben werden. Einen Ausweg bieten die makroskopischen Theorien wie Thermodynamik oder Statistische Mechanik, die sich auf eine kontrollierbare Anzahl makroskopischer Parameter und Variablen beschränken und erstaunlich gute und genaue Resultate zeitigen. Mit der Thermodynamik werden jedoch üblicherweise Gleichgewichtszustände von Systemen beschrieben, was normalerweise Vorhersagen über die Dynamik eines Systems naturgegebenmaßen unmöglich macht. Um die zeitliche Entwicklung eines Systems zu studieren, muß man demnach das Gleichgewicht verlassen und sich in den Bereich von Dissipation und Irreversibilität begeben. Die “Irreversible Thermodynamik” - auch “Hydrodynamik” genannt - setzt genau hier an und beschreibt die dissipative Dynamik von Systemen wie nematischen Kristallen [23, 24, 25, 26], Supraflüssigkeiten [27] oder eben Ferrofluiden.

Wir unterteilen formal das Gesamtsystem in eine Vielzahl von immer noch makroskopischen Untersystemen, die aber selbst klein gegenüber dem Gesamtsystem sind. Voraussetzung für eine hydrodynamische Beschreibung ist nun die Existenz eines lokalen Gleichgewichts in den Untersystemen des betrachteten Systems, da ansonsten Begriffe wie z.B. Temperatur nicht wohldefiniert sind. Diese Forderung bedingt die Einschränkung der mit der Dynamik der i -ten Variable verknüpften Frequenz ω_i gemäß $\omega_i \tau_i \ll 1$, wobei die Relaxationszeit τ_i die Zeitspanne ist, die das gegebene Untersystem in Abwesenheit von äußeren Störeinflüssen benötigen würde, um in den lokalen Gleichgewichtszustand überzugehen. Da die lokalen Gleichgewichtszustände i.a. voneinander verschieden sind, wird das gesamte System zum globalen Gleichgewichtszustand streben. Dieser stellt

sich durch Umverteilung der entsprechenden hydrodynamischen Variablen der einzelnen Untersysteme ein, angetrieben durch die sogenannten thermodynamischen Kräfte; so wird beispielsweise durch die thermodynamische Kraft ∇T Energie zwischen zwei Systemen solange ausgetauscht, bis Temperaturgleichgewicht herrscht und die Entropie der beiden Systeme maximal ist. Für makroskopische Systeme muß dieser Austausch auch über makroskopische Distanzen erfolgen, was die entsprechenden Bilanzgleichungen mit ihren Transportkoeffizienten widerspiegeln.

Oftmals, so auch im Rahmen dieser Arbeit, ist es zweckmäßiger, die Energiedichte ε anstelle der Entropiedichte s als fundamentale Größe aufzufassen. Globales Gleichgewicht stellt sich dann ein, wenn das Gesamtsystem im Zustand minimaler Energie hinsichtlich der Zwangsbedingungen ist, die dem System durch die erhaltenen Größen aufgeprägt werden. Es ist hinlänglich bekannt, daß die sogenannte Energiedarstellung der Entropiedarstellung äquivalent ist [28, 29].

2.2 Die Grundgleichungen

2.2.1 Die thermodynamischen Relationen

Das hier interessierende System ist ein sogenanntes Ferrofluid, eine Suspension paramagnetischer Teilchen der Größe einiger Nanometer in einer Trägerflüssigkeit wie Öl oder Wasser. Die Hydrodynamik benötigt zur Beschreibung eines solchen Systems nur dessen langlebige Freiheitsgrade. Demnach ist gemäß [18, 22] die Gesamtenergiedichte ε eine Funktion der folgenden Variablen allein: des elektrischen Feldes \mathbf{D} , des magnetischen Feldes \mathbf{B} , der Entropiedichte s , der Dichte der Trägerflüssigkeit ρ_2 , der Dichte der suspendierten Partikel ρ_1 und der Impulsdichte $\mathbf{g} = \mathbf{g}^{\text{tot}} - \mathbf{D} \times \mathbf{B}/c$. Hierbei bezeichnet $\mathbf{g}^{\text{tot}} = \rho \mathbf{v} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c$ die erhaltene Gesamtimpulsdichte des Systems. Der Grund für die Entscheidung gegen diese als unabhängige Variable findet sich in [14]. Darüberhinaus ist es sinnvoller, eine der beiden Dichten ρ_1 und ρ_2 durch Einführung der Gesamtdichte $\rho = \rho_1 + \rho_2$ zu eliminieren. Wir entscheiden uns hier für die beiden Dichten ρ und ρ_1 als unabhängige Variablen. Verknüpft werden all diese Variablen durch die Gibbs'sche Fundamentalgleichung

$$d\varepsilon = T ds + \xi d\rho + \xi_1 d\rho_1 + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}. \quad (2.1)$$

Die konjugierten Variablen sind wie gewöhnlich als partielle Ableitungen der Energiedichte nach den jeweiligen Variablen definiert, also z.B.

$$T := \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right)_{\rho, \rho_1, \mathbf{g}, \mathbf{D}, \mathbf{B}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{H} := \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{B}} \right)_{s, \rho, \rho_1, \mathbf{g}, \mathbf{D}}. \quad (2.2)$$

Die Ableitung nach einem Vektor ist hierbei wie üblich als Kurzschreibweise für denjenigen Vektor zu verstehen, der entsteht, indem man eine skalare Größe nach den Komponenten

des Vektors ableitet und die Ergebnisse wieder zu einem Vektor zusammenfaßt.

Eine Minimierung der Gesamtenergie im Gleichgewicht unter den Randbedingungen erhaltener Entropie, erhaltener Dichten, erhaltenem Gesamtimpuls und Gültigkeit der zeitunabhängigen Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho^{el} \quad (2.3)$$

liefert die Gleichgewichtsbedingungen des Systems. Diese lauten in lokaler Darstellung

$$\begin{aligned} \nabla T = 0, \quad \nabla \xi = 0, \quad \nabla \xi_1 = 0, \quad (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}^0 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H}^0 = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2.2 Die Bewegungsgleichungen

Im Nichtgleichgewicht haben diese thermodynamischen Kräfte eine endliche Größe und produzieren Entropie, während sie das System ins globale Gleichgewicht treiben. Um diese Dynamik des Systems abzuleiten, benötigen wir die Bewegungsgleichungen für die hydrodynamischen Variablen. Für das elektrische und das magnetische Feld sind diese die makroskopischen Maxwellgleichungen

$$\partial_t \mathbf{B} = -c \nabla \times (\mathbf{E}^M) \quad \text{und} \quad (2.5)$$

$$\partial_t \mathbf{D} = c \nabla \times (\mathbf{H}^M) - \mathbf{j}_{el}. \quad (2.6)$$

Die Felder \mathbf{E}^M und \mathbf{H}^M , die in die Maxwell-Gleichungen eingehen, unterscheiden sich offensichtlich von den vorher definierten Feldern des Gleichgewichts \mathbf{E} und \mathbf{H} . In der Tat enthalten diese Felder als "Ströme" sowohl reaktive als auch dissipative Anteile, wobei die dissipativen Anteile \mathbf{E}^D und \mathbf{H}^D Funktionen der thermodynamischen Kräfte sind, deren genaue Gestalt wir später erhalten werden. Formal schreiben wir zum jetzigen Zeitpunkt

$$\mathbf{E}^M = \mathbf{E} + \mathbf{E}^D, \quad \mathbf{H}^M = \mathbf{H} + \mathbf{H}^D, \quad (2.7)$$

eine Darstellung, die von der herkömmlichen Variablen übernommen wurde. Deren zeitliche Entwicklungen lassen sich aufgrund ihrer lokalen Erhaltung einfach durch Kontinuitäts- und Bilanzgleichungen darstellen, wobei einzig der Entropiedichte ein Quellterm spendiert wird, die sogenannte Entropieerzeugung R , solange sich das System im Nichtgleichgewicht befindet. Dies trägt dem oben erwähnten Sachverhalt Rechnung, daß die thermodynamischen Kräfte jenseits des Gleichgewichts einen endlichen Wert haben und für die

Entropieproduktion verantwortlich sind. Im einzelnen sind diese Bilanzgleichungen

$$\partial_t s + \nabla \cdot (s\mathbf{v} - \mathbf{f}^D) = R/T, \quad (2.8)$$

$$\partial_t g_i^{\text{tot}} + \nabla_j (\Pi_{ij} + \Pi_{ij}^D) = 0. \quad (2.9)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (2.10)$$

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v} - \mathbf{j}^D) = 0, \quad (2.11)$$

$$\partial_t \varepsilon + \nabla \cdot \mathbf{Q} = 0. \quad (2.12)$$

Π_{ij} bezeichnet den Spannungstensor, Q den Energiestrom; wie bereits erwähnt kennzeichnet ein hochgestellter Index "D" die dissipativen Anteile der entsprechenden Ströme. Die Gleichung (2.12) für die Energieerhaltung ist nun Ausgangspunkt für die Ableitung der unbekanntenen Größen in diesem Gleichungssystem, namentlich die dissipativen Größen, die Entropieerzeugung, den Energiestrom und den reaktiven Anteil des Spannungstensors. Die Bestimmung dieser Größen erfolgt mit der sogenannten "hydrodynamischen Standardprozedur": aus der Gibbs'schen Beziehung (2.1) berechnen wir $\hat{\varepsilon}$ unter Hinzunahme der Bewegungsgleichungen (2.5) - (2.11). Diejenigen Terme, die sich als Divergenz darstellen lassen identifizieren wir mit dem Energiestrom. Die Forderung nach Energieerhaltung bedingt das Verschwinden aller übrigen Terme, wobei die reaktiven Terme dem Spannungstensor und die Terme, die aus Paaren von thermodynamischer Kraft und dissipativem Strom bestehen, der Entropieerzeugung zugeordnet werden. Schließlich soll die Entropieerzeugung im Gleichgewicht verschwinden und ist damit eine Funktion der thermodynamischen Kräfte allein. Diese etwas langwierige Rechnung findet sich in Anhang A und liefert uns als Ergebnis

$$Q_i = (Ts + \xi\rho + \xi_1\rho_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g})v_i + T f_i^D + \xi_1 j_i^D + \Pi_{ji}^D v_j + c(\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^D \times \mathbf{H}^0 + \mathbf{E}^0 \times \mathbf{H}^D)_i, \quad (2.13)$$

$$R = -\mathbf{f}^D \cdot \nabla T - \mathbf{j}^D \cdot \nabla \xi_1 - \Pi_{ij}^D v_{ij} - (\mathbf{j}_{el} - \rho_{el}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^D \cdot c(\nabla \times \mathbf{H}^0) - \mathbf{H}^D \cdot c(\nabla \times \mathbf{E}^0), \quad (2.14)$$

$$\Pi_{ij} = (Ts + \xi\rho + \xi_1\rho_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \varepsilon)\delta_{ij} - \frac{1}{2}(H_i B_j + E_i D_j - v_i g_j + (i \leftrightarrow j)). \quad (2.15)$$

Hieraus ergeben sich aufgrund der Forderung nach positiver Definitheit der Funktion R die dissipativen Ströme durch Entwicklung nach den thermodynamischen Kräften. Insbesondere ergibt diese für magnetische Flüssigkeiten

$$\begin{pmatrix} -H_i^D \\ \Pi_{ik}^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \lambda_{ijl} \\ \bar{\lambda}_{ikj} & \eta_{ikjl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c\nabla \times \mathbf{E}^0)_j \\ v_{jl} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

und

$$\begin{pmatrix} E_i^D \\ f_i^D \\ j_i^D \\ j_{el,i}^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{ij} & \nu_{ij} & \vartheta_{ij} & v_{ij} \\ \bar{\nu}_{ij} & \kappa_{ij}/T & \phi_{ij} & \gamma_{ij} \\ \bar{\vartheta}_{ij} & \bar{\phi}_{ij} & \Phi_{ij} & \Theta_{ij} \\ \bar{\nu}_{ij} & \bar{\gamma}_{ij} & \bar{\Theta}_{ij} & \sigma_{ij}^{el} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(\nabla \times \mathbf{H}^0)_j \\ \nabla_j T \\ \nabla_j \xi_1 \\ E_j^0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Eine einfache Modellrechnung in [17] zeigt, daß der Diagonalkoeffizient β der Relaxationszeit τ_p der Polarisation proportional ist, eine Größe, die für die hier betrachteten dielektrischen Ferrofluide äußerst klein ist. Es ist auch nicht zu erwarten, daß die entsprechenden Kreuzkopplungskoeffizienten ν , ϑ und υ diese Größenordnung übersteigen. Da die mit den restlichen Diagonal- und Kreuzkopplungen verknüpften Effekte aus der Hydrodynamik ohne elektromagnetische Felder stammen und bereits gut studiert sind (vgl. beispielsweise [11]), sind die interessanten Terme diejenigen von Gleichung (2.16), welche erstmalig in [13] genauer untersucht wurden.

Wir wenden uns diesen darum ein wenig ausführlicher zu. Die Nebendiagonalelemente der Transportkoeffizientenmatrix (2.16) sind über die Onsager-Symmetrie-Relation

$$\lambda_{ijl}(\mathbf{B}) = -\bar{\lambda}_{jli}(-\mathbf{B}) \quad (2.18)$$

miteinander verknüpft, was aus der Forderung nach geradem Zeitumkehrverhalten der Entropieerzeugung folgt (vgl. [30]). Da die Isotropie des Systems durch die Vorzugsrichtung eines angelegten Magnetfeldes zerstört wird, werden die Koeffizienten nach ebendieser Anisotropie entwickelt. Gemäß Landau [31] sind die einzig unabhängigen Einträge der Tensoren der entsprechenden Stufe

$$\alpha_{ij}(\mathbf{B}) = \alpha\delta_{ij} + \alpha_2 B_i B_j + \alpha_3 \epsilon_{ikj} B_k \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ijl}(\mathbf{B}) &= \lambda(\epsilon_{ikj} B_k B_l + \epsilon_{ikl} B_k B_j) + \lambda_2 B_i \delta_{jl} \\ &+ \lambda_3 (B_l \delta_{ij} + B_j \delta_{il}) + \lambda_4 B_i B_j B_l \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \eta_{ikjl}(\mathbf{B}) &= \eta_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \eta_2 (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kl}) + \eta_3 B_i B_k \delta_{jl} + \eta_4 B_j B_l \delta_{ik} \\ &+ \eta_5 (B_i B_j \delta_{kl} + B_i B_l \delta_{jk} + B_k B_l \delta_{ij} + B_j B_k \delta_{il}) \\ &+ \eta_6 B_i B_j B_k B_l \\ &+ \eta_7 (\epsilon_{inj} B_n \delta_{kl} + \epsilon_{inl} B_n \delta_{kj} + \epsilon_{knj} B_n \delta_{il} + \epsilon_{knl} B_n \delta_{ij}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Diese große Anzahl von Transportkoeffizienten wurde bereits eingangs erwähnt. Sie ist es, die lange Zeit den Vergleich zwischen der hydrodynamischen Maxwell Theorie und den experimentellen Daten so sehr erschwerte. Sie soll allerdings nicht darüber hinwegtäuschen, daß wesentliche Eigenschaften eines Ferrofluids wie etwa die justierbare effektive Viskosität bereits mit einigen wenigen Koeffizienten beschrieben werden können. Gemäß [13] sind dies die Koeffizienten α , λ_3 und η_5 , die überdies alle mit dem einzigen freien Parameter des Systems, der magnetischen Relaxationszeit τ_m über den Zusammenhang

$$\alpha = -2\lambda_3 = 4\eta_5 = \tau_m \chi \quad (2.22)$$

verknüpft sind. Die magnetische Suszeptibilität χ ist in diesem Fall durch die Proportionalität der Gleichgewichtsmagnetisierung \mathbf{M}^{eq} zum äußeren Feld \mathbf{B}^0 im Ruhesystem gegeben: $\mathbf{M}^{\text{eq}} = \chi \mathbf{B}^0$, analog dazu existiert eine weitere Suszeptibilität $\tilde{\chi}$, die der in der Literatur häufig verwendeten entspricht und durch die Relation $\mathbf{M}^{\text{eq}} = \tilde{\chi} \mathbf{H}^0$ definiert wird. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden ist durch $\tilde{\chi} = \chi / (1 - \chi)$ gegeben.

2.2.3 Die Kräftebilanz der Ferrofluide

Betrachten wir abschließend noch kurz die sich aus der Kontinuitätsgleichung für die Impulsdichte (2.9) ergebende Kräftegleichung - auch Navier-Stokes-Gleichung für magnetische Flüssigkeiten genannt - unter Vernachlässigung des Feldes \mathbf{E}^D , welches für die hier betrachteten Flüssigkeiten wie oben erwähnt kaum eine Rolle spielt, so erhalten wir

$$\rho(\partial_t + v_l \nabla_l)(g_i/\rho) = -s \nabla_i T - \rho \nabla_i \xi - \rho_1 \nabla_i \xi_1 - g_j \nabla_i v_j + \nabla_j \Pi_{ij}^D + \left(\rho_{el} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{el} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}^D) \right)_i. \quad (2.23)$$

Einsetzen von (2.16) und Ausnutzen der Beziehung (2.22) liefert dann die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t + v_l \nabla_l)(g_i/\rho) = & -s \nabla_i T - \rho \nabla_i \xi - \rho_1 \nabla_i \xi_1 - g_j \nabla_i v_j \\ & + (\rho_{el} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{el} \times \mathbf{B})_i + \eta_2 \Delta v_i \\ & + \frac{\tau_m}{4} \chi \nabla_k (B_k B_j \delta_{il} - B_k B_l \delta_{ij} \\ & - B_j B_i \delta_{kl} + B_l B_i \delta_{kj}) \nabla_j v_l. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Mit dieser Bewegungsgleichung und dem Ausdruck für den Spannungstensor (2.15) haben wir nun die Werkzeuge zur Verfügung, relevante Experimente für Ferrofluide zu beschreiben. Zum Schluß bemerken wir noch, daß die ersten vier Terme der rechten Seite der Gleichung (2.24) die Volumenkraftdichte

$$\mathbf{f}^{\text{bulk}} = -s \nabla - \rho \nabla_i \xi - \rho_1 \nabla_i \xi_1 - g_j \nabla v_j. \quad (2.25)$$

darstellen, was sich im weiteren Verlauf als nützlich erweisen wird.

KAPITEL 3

Anwendungsbeispiele für die Hydrodynamische Maxwell Theorie

Mit den Ergebnissen aus dem vorangegangenen Kapitel haben wir nun die Möglichkeit, die Nützlichkeit und Anwendbarkeit der Hydrodynamischen Maxwell Theorie zu überprüfen. In der Tat gibt es zwei wesentliche Gründe für die Formulierung einer Theorie für magnetische Flüssigkeiten, obwohl wie in der Einleitung erwähnt bereits eine funktionierende, wenn auch etwas undurchsichtige und teilweise sogar unrichtige Theorie bereits existiert, nämlich die auf dem Modell von M. I. SHLIOMIS basierende [9]. Neben den der Tatsache, daß diese Theorie teilweise Widersprüche in sich birgt ist da zusätzlich noch der Wunsch eines jeden theoretischen Physikers, das Wesen eines jeden Dinges vollständig zu durchdringen, alle Zusammenhänge, die mit ihm in Verbindung stehen, zu verstehen und eine Basis für eine Beschreibung zu finden, die keinen redundanten Input benötigt, die gleichsam den kleinsten gemeinsamen Nenner darstellt. Wir brauchen keine unterschiedlichen Theorien für Ferrofluide und Wasser, genauso, wie wir auch keine getrennten Theorien für Honig und Wasser benötigen. Und auch in diesem Sinne ist die bislang vorliegende Arbeit von Shliomis et al. unbefriedigend; sie ist oft lückenhaft, bedient sich zuweilen intuitiver Argumente und scheint eher eine Theorie zu sein, die am falschen Ende aufgepäppelt wurde: Sie ist deutlich auf die Vereinbarkeit mit den experimentellen Befunden ausgerichtet und sucht sich dafür die passenden Werkzeuge aus dem großen Modellbaukasten der klassischen Physik, anstatt einer reinen Deduktion aus wenigen Grundprinzipien zu folgen, wie das in Kapitel 2 dieser Arbeit geschah.

In diesem Teil der Arbeit sollen nun einige interessante und konkrete Vorgänge in Ferrofluiden analysiert werden; einerseits, um die Leistungsfähigkeit der Hydrodynamischen Maxwell Theorie unter Beweis zu stellen, andererseits aber auch, um deutlich zu machen, ob und wo die Vorhersagen dieser Theorie für bestimmte Experimente relevant sind. Daß dies nicht immer der Fall sein muß, zeigt eine Analyse relativistischer Korrekturterme in [13], die allesamt von zu geringer Größenordnung sind, um experimentell zugänglich zu sein. So wird es auch hier nicht verwundern, wenn nicht alle Effekte, die untersucht werden, tatsächlich experimentell verifiziert werden können.

3.1 Der stromdurchflossene Leiter

Eines der bekanntesten und gleichzeitig auch eines der beeindruckendsten Experimente, die sich mit Ferrofluiden auseinandersetzen, betrifft eine magnetische Flüssigkeit in einem inhomogenen magnetischen Feld. In [9] findet man eine mit Ferrofluid gefüllte Petrischale, durch die vertikal ein stromführender Draht gelegt ist. Dieser Aufbau ist in Abb. 3.4 dargestellt, nebst der sich einstellenden Oberflächenform der Flüssigkeit. In [22] wurde dieser Aufbau bereits im Rahmen der Hydrodynamischen Maxwell-Theorie prinzipiell untersucht, die genaue Analyse soll hier folgen, wobei auf die grundlegenden Gleichungen aus jener Arbeit für dieses Problems zurückgegriffen wird.

3.1.1 Die Oberfläche

Der Leiter im Ferrofluid befinde sich bei $r = 0$ in Zylinderkoordinaten. Ist er vom Strom der Stromstärke J durchflutet, so wird das sich aufbauende inhomogene Magnetfeld $|\mathbf{H}| = J/(2\pi r)$ das Ferrofluid in Richtung des Drahtes ziehen. Die resultierende Oberflächenform $z(r)$ wurde in [1] unter Vernachlässigung der Oberflächenspannung angegeben. Im Rahmen schwacher Felder und somit linearer konstituierender Relationen ergibt das Kräftegleichgewicht zwischen magnetischer Oberflächenkraft und Gravitation

$$z(r) = \frac{\mu_0 \chi}{8\pi \rho^2 g} \frac{J^2}{r^2}, \quad (3.1)$$

wobei g die Gravitationsbeschleunigung der Erde ist und die Dichte eines typischen Ferrofluids wie das Fluid EMG705 von Ferrofluidics Corp. $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ beträgt. Zwar kommt es (vgl. Abschnitt 3.1.2) bei angelegtem magnetischen Feld zu einer Änderung der Konzentrationsdichteverteilung im Ferrofluid; jedoch muß dieser hier nicht explizit berücksichtigt werden, denn es handelt sich um einen Effekt, der sich erst nach Zeiten einstellt, die sehr groß gegenüber den Zeiten sind, die die Oberfläche benötigt, um ihre neue Form anzunehmen. Die Dichte des Fluids kann folglich in den folgenden Überlegungen als konstant angenommen werden.

Wird über Gl. (3.1) hinaus die Oberflächenspannung der Flüssigkeit explizit berücksichtigt, so erhält man einen zusätzlichen Term, die modifizierte Gleichung lautet [22]

$$z(r) = \frac{\mu_0 \chi}{8\pi^2 \rho g} \frac{J^2}{r^2} - \frac{\alpha(\kappa_1 + \kappa_2)}{\rho g}. \quad (3.2)$$

Wie stark verändert dieser Zusatzterm nun die Form der Oberfläche? In obiger Gleichung bezeichnen κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen der Fläche. Diese sind allerdings selber wieder Funktionen der Oberflächenform $z(r)$, was die obige Gleichung zu einer komplizierten Differentialgleichung macht. Es gibt jedoch die Möglichkeit, diese Differentialgleichung

iterativ zu lösen, indem der zweite Term als kleine Störung betrachtet wird. Die damit berechnete Oberflächenform wird dann erneut zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien herangezogen, es ergibt sich die neue Störung nächster Ordnung, mit dieser kann erneut das Profil der Oberfläche bestimmt werden; dieser Vorgang wird wiederholt, bis die Oberfläche gegen eine feste Form konvergiert. Dieses Verfahren benötigt jedoch einen immensen Rechenaufwand, der durch die gewonnenen Einsichten in die Physik nicht gerechtfertigt zu sein scheint. Wir wollen hier darum einen noch weiter vereinfachenden Weg einschlagen, der dann gerechtfertigt ist, wenn bereits in erster Ordnung der Korrekturterm der Oberflächenspannung so klein ist, daß die Fläche selbst in den Punkten größter Krümmung weitgehend unverformt bleibt. Daß dem tatsächlich so ist, zeigt die folgende Rechnung.

Für diese benötigen wir zunächst den expliziten Ausdruck für die Krümmungsradien, die sich komplett aus der ersten und zweiten Fundamentalform berechnen lassen. Die Metrik für eine Fläche der Form $z(r) = C/r^2$ mit konstantem C lautet in Zylinderkoordinaten

$$(g_{\gamma\beta}) = \begin{pmatrix} (4\frac{C^2}{r^6} + 1) & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

die zweite Fundamentalform hat die Gestalt

$$(b_{\gamma\beta}) = (4\frac{C^2}{r^6} + 1)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 6\frac{C}{r^4} & 0 \\ 0 & -2\frac{C}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Daraus berechnet sich die mittlere Krümmung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (\kappa_1 + \kappa_2) &= (g^{11}b_{11} + g^{22}b_{22}) \\ &= (g_{11}^{-1}b_{11} + g_{22}^{-1}b_{22}) \\ &= \left(4\frac{C^2}{r^6} + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \left[4\frac{C}{r^4} - 8\frac{C^3}{r^{10}}\right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dieser Ausdruck beschreibt die mittlere Krümmung in einem beliebigen Punkt r . Wir sind jedoch an den Punkten interessiert, an denen die Fläche maximal gekrümmt ist und demzufolge auch die maximale mittlere Krümmung aufweist. Für den anstehenden Vergleich der Größenordnung der Terme wird der Ausdruck mit $C = \chi J^2 / (8\pi^2 \rho g r^2)$ maximiert. Für das angegebene Ferrofluid beträgt laut Angabe des Herstellers die magnetische Suszeptibilität $\chi = 0,56$, die Oberflächenspannung hat die Größe $\alpha = 0,03$ N/m. Damit erhalten wir bei einer Stromstärke von 1 A die Konstante $C = 7,57 \cdot 10^{-7}$ cm³. Es gibt aus den 12 Wurzeln der Ableitung von Gl. (3.5) nach r genau eine, die positiv und reell ist, sie lautet $r_{max} = 0,0134$ cm. Mit dieser ist der Betrag der mittleren Krümmung an der Stelle der stärksten Krümmung $(\kappa_1 + \kappa_2)_{max} = 45,67$ cm⁻¹.

Die stärkste Änderung der Oberflächenform erwarten wir demnach bei $r_{max} = 0,0134$ cm. Tatsächlich liefert Gl. (3.2) mit diesen konkreten Zahlen

$$z(r_{max}) = 4,10 \cdot 10^{-3} \text{ cm}, \quad (3.6)$$

ohne die Korrektur, also mit $\tilde{z}(r) = C/r^2$ hingegen erhalten wir

$$\tilde{z}(r_{max}) = 4,22 \cdot 10^{-3} \text{ cm.} \quad (3.7)$$

Der Einfluß, den die Oberflächenspannung auf das Kräftegleichgewicht zwischen magnetischer und Gravitationskraft hat, ist demnach von der Ordnung $\mathcal{O}(10^{-4})$ und damit wohl zu klein, um im Experiment überprüft werden zu können, auch wenn seine Signifikanz für die Theorie davon unberührt bleibt.

Für die angegebene Stromstärke von $J = 1 \text{ A}$ sollen die Oberflächenverläufe mit und ohne den korrigierenden Oberflächenterm in den nachstehenden Abbildungen 3.1 und 3.2 dargestellt werden. Der maximale Unterschied zwischen beiden Oberflächenverläufen ist in Abb. 3.3 zu sehen.

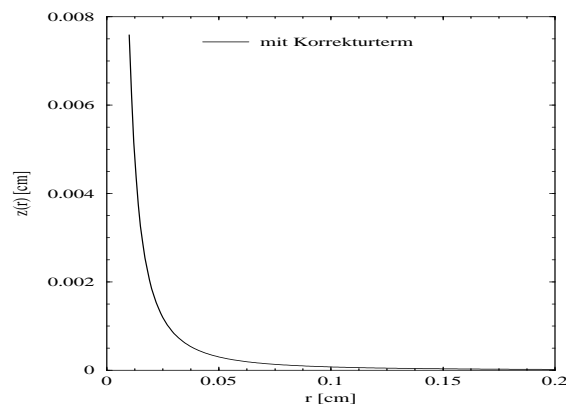


Abbildung 3.1. Die Form der Oberfläche mit zusätzlicher Korrektur gemäß Gl. (3.2)

3.1.2 Dichtevariation bei angelegtem Feld

Ferrofluide sind Suspensionen paramagnetischer Nanopartikel in eine Trägerflüssigkeit, demnach sind die beiden Dichten der Teilsysteme erhaltene Größen und sollten auch in die hydrodynamische Beschreibung eingehen. In den meisten Fällen liegt der hydrodynamischen Betrachtung jedoch eine solch geringe Auflösung zugrunde, daß ein gegebenes Ferrofluid als homogene Flüssigkeit einer einzigen Dichteveriablen erscheint. Gibt es aber nicht doch Ausnahmen, in denen der Einfluß der Dichte der suspendierten Teilchen spürbar wird? Kann man ein Ferrofluid immer als homogene, einkomponentige Flüssigkeit auffassen? Um diese Frage zu beantworten, soll im Folgenden ein Effekt analysiert werden,

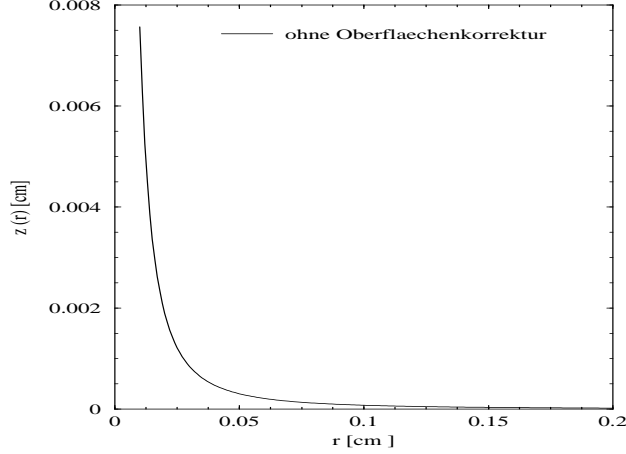


Abbildung 3.2. Die Form der Oberfläche ohne zusätzliche Korrektur gemäß Gl. (3.1)

der aus der Variation der Dichte der magnetischen Teilchen folgt.

Es ist hierbei zweckmäßig, statt der Dichte der suspendierten Teilchen ρ_1 und der Dichte des Solventen ρ_2 die Gesamtdichte $\rho = \rho^{\text{tot}} = \rho_1 + \rho_2$ und ρ_1 als die unabhängigen Variablen zu betrachten (vgl. [22]). Die Gibbs'sche Fundamentalbeziehung wird dann erweitert und liest sich

$$d\varepsilon = T ds + \xi d\rho + \xi_1 d\rho_1 + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}. \quad (3.8)$$

Als erhaltene Größe spendieren wir der Suspensatdichte eine eigene Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho}_1 = -\nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v})$ und binden sie in das gesamte Gleichungssystem ein. Die wesentliche Änderung betrifft die Volumenkraftdichte (2.25), die nun

$$\mathbf{f}^{\text{bulk}} = -s\nabla T - \rho\nabla\xi - \rho_1\nabla\xi_1 - v_j\nabla g_j - \rho g\mathbf{e}_z \quad (3.9)$$

lautet. Wie leicht zu erkennen ist, wurde hier die Gravitationskraft über $\dot{g}_i + \nabla_k \Pi_{ik}^{\text{tot}} = -\rho g\mathbf{e}_z$ eingebunden, um den Laborbedingungen gerecht zu werden. g ist offensichtlich die Gravitationsbeschleunigung der Erde, der Einheitsvektor \mathbf{e}_z ist aufwärts gerichtet. Im Gleichgewicht gelten die Bedingungen

$$\nabla T = 0, \quad \nabla\xi_1 = 0, \quad \nabla\xi = -g\mathbf{e}_z. \quad (3.10)$$

Ferner sei der inkompressible Limes, der in [22] erläutert wird, vorausgesetzt, d.h. die Gleichgewichtsbedingungen ändern sich folgendermaßen:

$$\nabla T = 0, \quad \nabla\xi_1^{\text{in}} = -g\gamma\mathbf{e}_z. \quad (3.11)$$

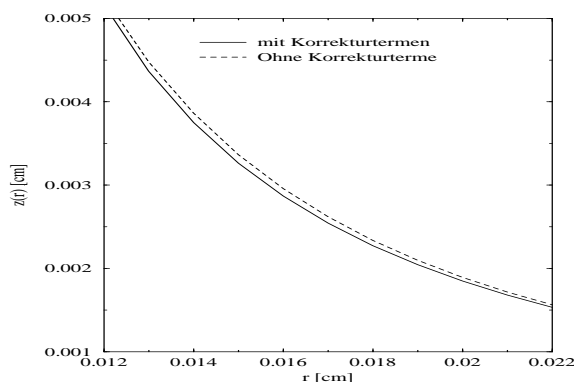


Abbildung 3.3. Vergleich der beiden Oberflächenformen mit und ohne Korrekturterm im Bereich stärkster Oberflächenänderung

In der zweiten Gleichung gelten die Abkürzungen $\xi_1^{\text{in}} = \xi_1 + \gamma\xi$ und $\gamma = 1 - \rho_F/\rho_M$. Die lokalen, tatsächlichen Dichten der umgebenden Flüssigkeit ρ_F und die der magnetischen Partikel ρ_M sind in diesem Limes konstante Größen; für ihre Volumenmittel gilt $\rho_1 = \langle \rho_M \rangle$ und $\rho_2 = \langle \rho_F \rangle$.

Im folgenden wollen wir ein ruhendes System mit $\mathbf{v} = 0$ in eben diesem Limes betrachten. Genauer gesagt handelt es sich bei dem zu untersuchenden System um eine Probe eines Ferrofluids, durch das ein stromdurchflossener Leiter geführt ist. Der schematische Aufbau ist in Abb. 3.4 verdeutlicht.

Es sind dabei allerdings folgende Einschränkungen zu beachten: Befindet sich das System zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei abgeschaltetem Strom in einem Gleichgewichtszustand mit homogener Dichteverteilung, so wird das System nach Einschalten des Stroms im Laufe der Zeit in einen neuen Gleichgewichtszustand übergehen, dem eine andersartige Dichteverteilung des Suspensats entspricht. Das gestellte Problem ist demnach dynamischer Natur, seine Lösung erfordert die Betrachtung des gesamten hydrodynamischen Gleichungssystems einschließlich der Diffusionsgleichungen und den Maxwellgleichungen zu einem gegebenen Zeitpunkt $t > t_0$, bis bei $t \rightarrow \infty$ eine stationäre Lösung der Bewegungsgleichungen gefunden wird. Im allgemeinen nimmt dieser Vorgang eine sehr große Zeit in Anspruch.

Wir sind hier lediglich an einer Angabe der Dichteverteilung nebst der Größenordnung dieses Effekts interessiert. Aus diesem Grund soll nicht die Umverteilung von ρ_1 bei einer festen Teilchenzahl N_1 betrachtet werden, sondern die sich einstellende Gleichgewichtsverteilung (3.11) für ein Reservoir mit unendlich vielen Teilchen. Das Profil der Dichteverteilung bleibt dabei im wesentlichen unverändert, und für die Größenordnung des Effekts wird in dieser Betrachtungsweise eine untere Grenze festgelegt, da der Effekt nur größer werden kann, wenn

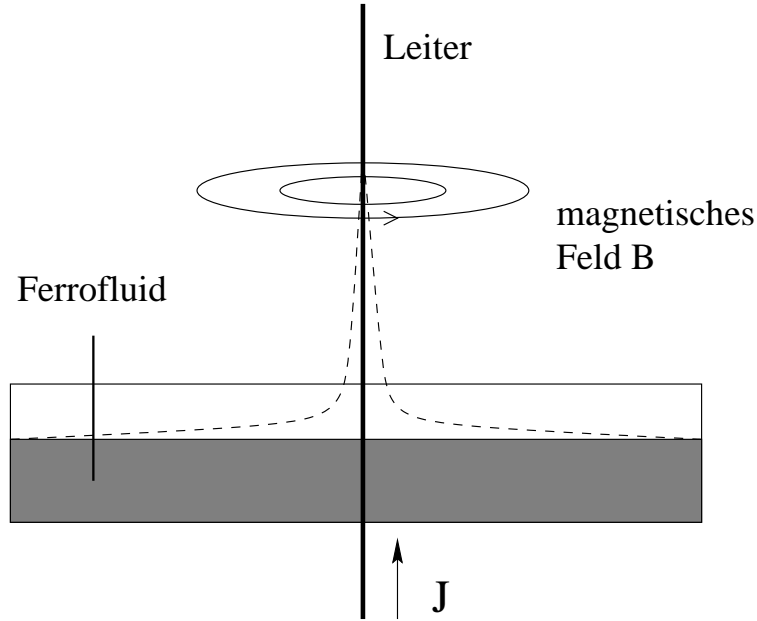


Abbildung 3.4. Der durch das Gefäß mit dem Ferrofluid geführte Leiterdraht führt den Strom J . Die gestrichelte Linie stellt den Oberflächenverlauf des Fluids nach Einschalten des Stroms dar.

die Teilchen vom Rand des Gefäßes zum Draht im Inneren wandern.

Die zweite Einschränkung betrifft die Bedingung $\nabla T = 0$, die für das beschriebene System mit Sicherheit nicht erfüllt sein wird. Dieser Effekt betrifft jedoch die Dynamik des Systems, da er in die Kräftebilanz (3.9) eingeht, weshalb seine Betrachtung in diesem Zusammenhang keinen Raum findet. Sollten die Daten aus etwaigen Experimenten jedoch tatsächlich nicht mit den hier angegebenen übereinstimmen, so liegt Nahe, daß die vorliegende Analyse zu vereinfachend ist und das vollständige Problem mit allen Bewegungsgleichungen gelöst werden muß.

Aus der zweiten Gleichgewichtsbedingung von (3.11) folgt bei Vernachlässigung des Gravitationseinflusses für $\xi_1^{\text{in}} = \xi_1^{\text{in}}(\rho_1, \mathbf{H})$ der Gradient für die Dichteverteilung

$$\nabla \rho_1 = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi_1^{\text{in}}} \right)_{\mathbf{H}} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \rho_1} \right)_{\mathbf{H}} \nabla \hat{H}^2. \quad (3.12)$$

Mit den Näherungen aus [22] folgt die Gleichung

$$\nabla \rho_1 = \frac{\mu_0}{2} \rho_1 \kappa_{\text{os}} \chi \nabla \hat{H}^2, \quad (3.13)$$

wobei in diesem Fall für die osmotischen Kompressibilität $\kappa_{\text{os}} = 10^{-3}/\text{Pa}$ gilt. Ein typisches Ferrofluid wie das schon oben betrachtete Fluid EMG705 der Firma Ferrofluidics Corp. hat

eine Suszeptibilität von $\chi = 0,56$. Mit diesen Daten wird der Dichtegradient

$$\frac{\nabla \rho_1}{\rho_1} = \nabla \ln \rho_1 \approx 8,91 \cdot 10^{-12} J^2 \frac{\text{m}^2}{\text{A}^2} \nabla \frac{1}{r^2}, \quad (3.14)$$

wobei das Magnetfeld eines vom Strom der Stromstärke J durchflossenen Leiters $|\mathbf{H}| = J/(2\pi r)$ eingesetzt wurde. In Zylinderkoordinaten hat diese Gleichung die Lösung

$$\rho_1(r) = \rho_1(\infty) e^{8,91 \cdot 10^{-8} \frac{J^2 \text{ cm}^2}{r^2 \text{ A}^2}}. \quad (3.15)$$

Die Dichteverteilung im Unendlichen $\rho_1(\infty)$ entspricht dabei der Teilchenzahldichte des Ferrofluids in Abwesenheit eines äußeren Feldes. Sie beträgt $2,4 \cdot 10^{22}/\text{m}^3$. Für die drei Stromstärken $J = 0,1 \text{ A}$, $J = 0,5 \text{ A}$ und $J = 1 \text{ A}$ sind die Dichteverläufe in der Abb. 3.5 für eine Probe angegeben. Der interessante Bereich, in dem es einen merklichen Effekt gibt, liegt dicht am Leiterdraht in einem Umfeld von ca. 1 cm Radius.

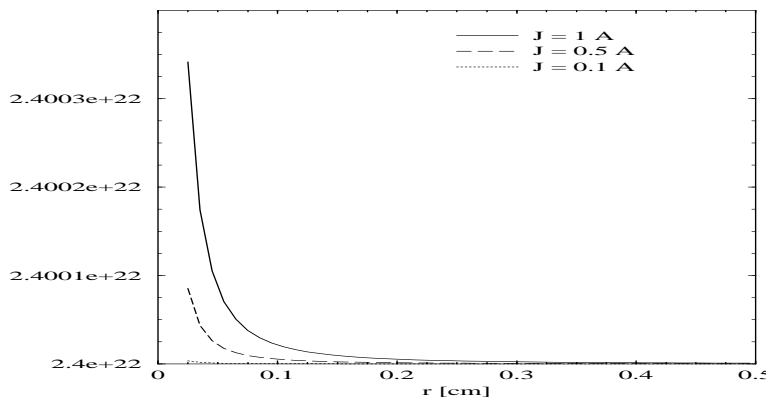


Abbildung 3.5. Die Dichteverteilungen der suspendierten Teilchen innerhalb des Ferrofluids. Die geringe Größenordnung des Effekts läßt sich leicht erkennen.

Dabei wird deutlich, daß die Größenordnung des Effekts bereits bei großen Stromstärken im Bereich von 10^{-3} bis 10^{-7} liegt. Um einen meßbareren Effekt zu erhalten, muß der Drahtradius entweder viel weiter verkleinert werden, oder aber die Stromstärke muß entsprechend erhöht werden. Beides wird zu großen praktischen Problemen führen. Die meisten Experimente werden also kaum davon berührt werden, daß es sich bei Ferrofluiden um binäre Mischungen handelt. Um zu zeigen, daß der Effekt aber keineswegs immer als klein angenommen werden darf, zeigt Abb. 3.6 dasselbe Profil der Dichteverteilung, hier allerdings unter Einfluß eines angelegten Stromes von 10 A.

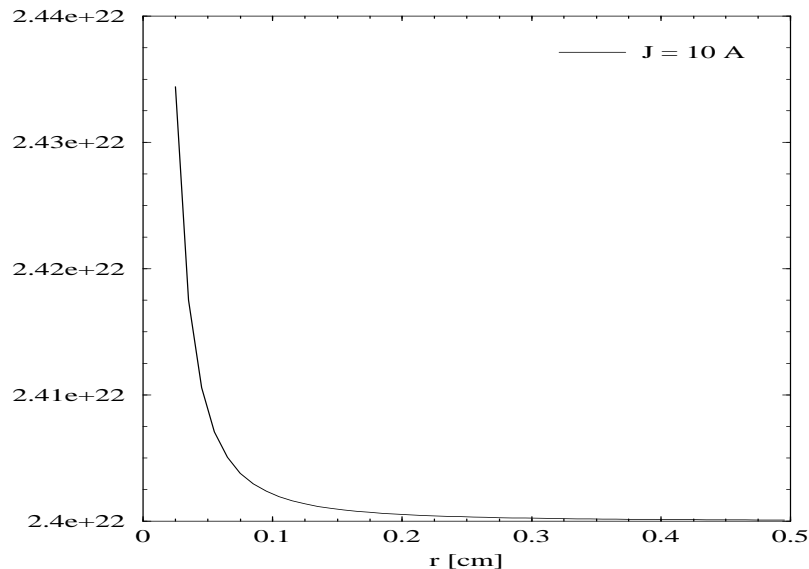


Abbildung 3.6. Die Dichteverteilungen der suspendierten Teilchen innerhalb des Ferrofluids bei viel größerer Stromstärke als zuvor. Der Effekt hat sich deutlich vergrößert.

3.2 Der Spannungstensor

Es gibt eine Reihe interessanter Versuche und experimenteller Befunde, die wesentlich mit der Struktur des Spannungstensors verknüpft sind. Gut bekannt und verstanden ist bislang die Erhöhung der Viskosität eines Ferrofluids in einem äußeren Feld, ein Effekt, der eng mit den Nebendiagonalelementen des Spannungstensors und der darin enthaltenen Kopplung von mechanischen an elektromagnetische Freiheitsgraden verknüpft ist [8, 13]. Darüberhinaus gibt es interessante Vorhersagen bezüglich des “Drucks”¹, die bislang nicht experimentell überprüft sind. Diesen soll im folgenden unser Augenmerk geschenkt werden. Im übrigen treten hierbei keine Effekte auf, die mit der Konzentrationsdichte der Ferrofluid-Teilchen zusammenhängen, auf diese Dichte ρ_1 soll demnach im folgenden der Einfachheit halber verzichtet werden.

¹Da der Druck in Anwesenheit elektromagnetischer Felder eine schlecht definierbare Größe ist, vgl. [14], muß man genauer von den Diagonalelementen des Spannungstensors, sprechen die sich in Abwesenheit äußerer Felder auf den üblichen hydrodynamischen Druck reduzieren.

3.2.1 Die Nebendiagonalelemente

Zunächst einmal befassen wir uns ein weiteres mal mit den Nebendiagonalelementen des Spannungstensors (2.15). Sie lauten

$$(\Pi_{ij}^{\text{tot}})_{i \neq j} = -\frac{1}{2}(H_i B_j + H_j B_i + E_i D_j + E_j D_i - v_i g_j - v_j g_i) + \Pi_{ij}^{\text{D}}. \quad (3.16)$$

Es konnte gezeigt werden, daß die dissipativen Anteile aus diesem Spannungstensor neben den dissipativen Anteilen aus dem Feld \mathbf{H}^{D} für die effektive Erhöhung der Viskosität eines Ferrofluids in einem äußeren Magnetfeld verantwortlich sind (vgl. [13, 32]). Überdies zeigt die Analyse wie nicht anders zu erwarten eine genaue Übereinstimmung der Nebendiagonalelemente des Spannungstensors der Hydrodynamischen Maxwell-Theorie und des von SHLIOMIS in [9, 8] erarbeiteten, wenn man den hydrodynamischen Limes $\omega_B \rightarrow 0$ betrachtet.

In einem relativ neuen Artikel finden nun jedoch MÜLLER und ENGEL in einem Vergleich eben dieser Theorien einen Unterschied [33]: Eine Schicht eines Ferrofluids wird dem Einfluß eines linear polarisierten Magnetfeldes $\mathbf{H}^{(2)} = (H_x^{(2)}, 0, H_z^{(2)}) \cos \omega_B t$ ausgesetzt, vgl. Abb. 3.7. Damit wird die Tangentialkraft $f_t = \Pi_{xz}^{\text{tot}} - \Pi_{xz}^{\text{tot},(2)}$ bestimmt, die auf ein gegebenes Oberflächenelement einer ruhenden Flüssigkeit mit $\mathbf{v} = 0$ wirkt. Während die mesoskopische Theorie von Shliomis hier eine Kraft der Ordnung $\mathcal{O}((\omega_B \tau)^2)$ voraussagt, diese also im hydrodynamischen Limes nicht beobachtbar sein kann, berechnen Müller und Engel für die hydrodynamische Tangentialkraft

$$f_t^{\text{hyd}} = \frac{\mu_0}{2} \alpha \omega_B H_x^{(2)} H_z^{(2)} \sin 2\omega_B t + \mathcal{O}((\alpha \omega_B)^2) \quad (3.17)$$

mit $\alpha = \tau(\mu - 1)/\mu$ und der magnetischen Relaxationszeit τ .

So schön ein solcher Widerspruch in diesen beiden Theorien auch für den physikalischen Fortschritt wäre: er hält leider einer genaueren Betrachtung nicht stand. Was MÜLLER und ENGEL hier berechnet haben, ist, wie man sich leicht überzeugen kann, der Anteil

$$(\Pi_{ij})_{i \neq j} = -\frac{1}{2}(H_i B_j + H_j B_i) \quad (3.18)$$

allein. Außer Acht gelassen wurde der Anteil des dissipativen Stromes Π_{ij}^{D} , der ebenfalls Außerdiagonalelemente hat. Es ist jedoch die Stetigkeit des durch die Oberfläche tretenden gesamten Impulsstromes, also von Π_{ij}^{tot} , die auf die Tangentialkraftdichte führt [34]. Wir erhalten demnach einen zusätzlichen Term

$$\Delta \Pi_{xz}^{\text{D}} = \frac{\alpha}{2}(B_x \dot{B}_z + B_z \dot{B}_x), \quad (3.19)$$

so daß sich die gesamte hydrodynamische Tangentialkraft folgendermaßen liest:

$$f_t^{\text{hyd}} = -\frac{\alpha}{2}(B_x \dot{B}_z - B_z \dot{B}_x). \quad (3.20)$$

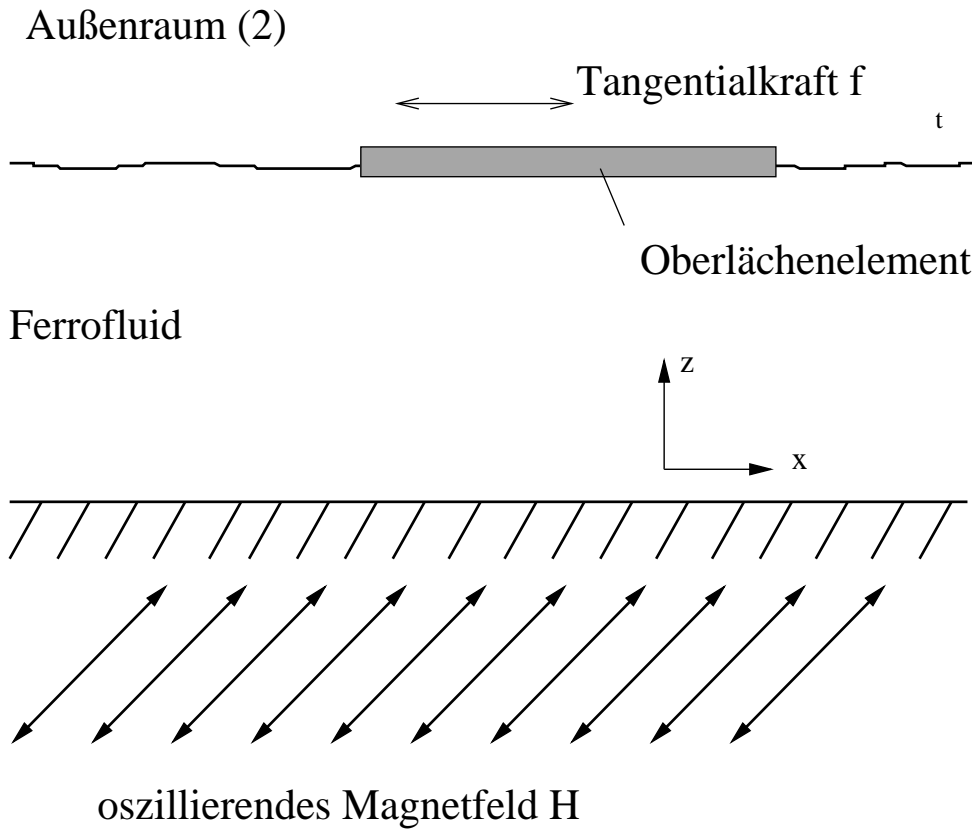


Abbildung 3.7. Zur Messung einer zusätzlichen magnetischen Tangentialkraftdichte. Gäbe es einen nichtverschwindenden Term im Spannungstensor des Ferrofluids, so müßte das eingezeichnete Oberflächenelement in Bewegung geraten; ein anfänglich ruhendes Ferrofluid würde in Bewegung geraten.

Mit dem Ansatz für das Magnetfeld, den MÜLLER und ENGEL vornahmen und den entsprechenden Stetigkeitsbedingungen für die einzelnen Felder ergibt sich nun tatsächlich

$$f_t^{\text{hyd}} = \frac{H_x^2 H_z^2}{2} \frac{(\omega_B \alpha)^2}{(1 - \chi)^2 + (\omega_B \alpha)^2}, \quad (3.21)$$

und damit eine Kraftdichte der Größenordnung $\mathcal{O}((\omega \alpha)^2)$. Die entsprechende kurze Rechnung findet sich im Anhang A. Tatsächlich besteht also kein Widerspruch zwischen der Hydrodynamischen Maxwell-Theorie und der mesoskopischen Theorie von SHLIOMIS im hydrodynamischen Limes, zumindest was die Nebendiagonalelemente des Spannungstensors und die damit verbundenen Phänomene angeht. Daß dies für die Diagonalelemente so ohne weiteres nicht gilt, soll im nächsten Abschnitt gezeigt werden.

3.2.2 Die Diagonalelemente

Eine vollständig andere Situation finden wir bei der Betrachtung der Diagonalelemente des Spannungstensors vor. Wie bereits in der Einleitung erwähnt hat die Standard Theorie von

SHLIOMIS hier große Schwächen. Um diese auszuloten, betrachten wir das folgende Beispiel: Der experimentelle Aufbau bestehe aus einer planen Trennfläche zwischen einem Ferrofluid und einem nichtmagnetischen Material. An diese trennende Oberfläche wird ein äußeres Feld der Form $\mathbf{H}^{\text{ext}} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega_B t)$ tangential angelegt, wie dies in Abb. 3.8 dargestellt ist.

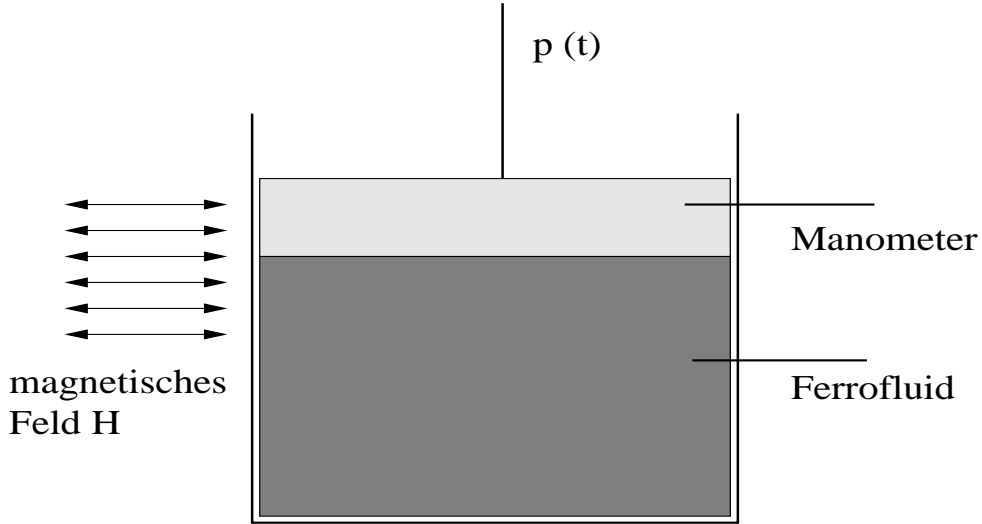


Abbildung 3.8. Messung der Diagonalelemente des Spannungstensors über die Druckänderung an einer Ferrofluid-Oberfläche.

Die Kraft, die in normaler Richtung auf die Oberfläche wirkt, kann von einem Manometer gemessen werden. Mit der Hydrodynamischen Maxwell Theorie kann man folgendes Ergebnis vorhersagen: Die in Betracht kommenden Elemente des Spannungstensors für diese Oberflächenkraft sind innerhalb des Ferrofluids

$$\begin{aligned} \Pi_{nn}^{\text{tot}} = \Pi_{nn} + \Pi_{nn}^{\text{D}} &= Ts + \xi\rho + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \varepsilon \\ &\quad - H_n B_n + \alpha B_n \dot{B}_n \\ &= Ts + \xi\rho - \varepsilon + \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{B}_t - \alpha \mathbf{B}_t \dot{\mathbf{B}}_t + \alpha B_n \dot{B}_n. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Beachtet man, daß die ersten drei Terme der letzten Gleichung die HELMHOLTZsche freie Energiedichte darstellen, $Ts + \xi\rho - \varepsilon = -\tilde{F}$ (vgl. [22]), und daß es im betrachteten Fall keinerlei Normalkomponenten der angelegten Felder gibt, so erhält man für den Spannungstensor

$$\Pi_{nn}^{\text{tot}} = -\tilde{F} + \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{B}_t - \alpha \mathbf{B}_t \dot{\mathbf{B}}_t. \quad (3.23)$$

Aus der Stetigkeit des Feldes \mathbf{H}_t^{M} folgt die Lösung für das tangentielle Feld

$$\mathbf{B}_t = \frac{H_0}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{\mu} + i\omega_B \alpha} e^{i\omega_B t} + \text{cc.} \right). \quad (3.24)$$

Einsetzen in den Spannungstensor und ein wenig Algebra liefern als Resultat somit im hydrodynamischen Limes $\omega_B \rightarrow 0$ das Ergebnis

$$\Pi_{nn}^{\text{tot}} = -\tilde{F} + \frac{\mu H_0^2}{2} (\cos(2\omega_B t) + \omega_B \alpha \sin(2\omega_B t) + 1). \quad (3.25)$$

Die Lösung für den Spannungstensor außerhalb des Ferrofluids dagegen lautet im selben Limes

$$\Pi_{nn}^{\text{ext}} = -\tilde{F}^{\text{ext}} + \frac{\mu H_0^2}{2} (\cos(2\omega_B t) + \mu \omega_B \alpha \sin(2\omega_B t) + 1). \quad (3.26)$$

Die Randbedingung für den Spannungstensor beim Übergang von einem Medium in ein anderes lautet

$$\Delta(\Pi_{nn} + \Pi_{nn}^{\text{D}}) = (\Pi_{nn}^{\text{tot}} - \Pi_{nn}^{\text{ext}}) = \alpha_{sf} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.27)$$

Hier sind R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche, die aber im vorliegenden Fall gemäß der gewählten Geometrie verschwinden. Der am Manometer anliegende und im Experiment zu messende Druck $p(t) = \tilde{F} - \tilde{F}^{\text{ext}}$ ist damit nach der Maxwell Theorie

$$p(t) = -\omega_B \tau \chi^2 \frac{\mu H_0^2}{2} \sin(2\omega_B t), \quad (3.28)$$

ein rein dissipativer Term, der in der Standard Theorie nicht enthalten ist. Er stirbt im Limes hoher Modulationsfrequenzen aus und erreicht bei Standardferrofluiden wie APG 933 der Firma Ferrofluidics Corp. mit einer Suszeptibilität von $\chi \approx 0,7$ und einem magnetischen Feld der geringen Stärke von 5 mT bereits eine maximale Amplitude von $p_{max} \approx 10$ Pa. Mit diesem Resultat gelingt es erstmals, die Hydrodynamische Maxwell Theorie nicht nur auf Bekanntes anzuwenden und schon durchgeführte Experimente zu bestätigen, vielmehr wird hiermit ein Experiment diskutiert, dessen Ausgang bisher unbekannt ist. Ein Ergebnis dieses Experiments wird demnach mit Spannung erwartet.

KAPITEL 4

Die mesoskopische Theorie für Ferrofluide

Wie in den früheren Kapiteln bereits erwähnt, ist die Hydrodynamische Maxwell Theorie - wie jede hydrodynamische Theorie - der den Gültigkeitsbereich einschränkenden Bedingung $\omega_B \tau \ll 1$ unterworfen. Tatsächlich ist diese Bedingung nicht so rigoros, wie sie auf den ersten Blick scheinen mag, denn mit einer typischen Relaxationszeit von $\tau = 10^{-6} \text{s}$ läßt sich die Theorie bis hin zu hohen Frequenzbereichen anwenden. Es existieren allerdings einige, wenige Phänomene, allen voran die sogenannte "negative Viskosität" [35, 15], die erst in Experimenten zutage treten, in denen magnetische Wechselfelder mit äußerst hohen Frequenzen eingesetzt werden. In diesen Experimenten wird der Gültigkeitsbereich der Hydrodynamik klar verlassen, und eine modifizierte Theorie, die in der Lage ist, den entsprechenden Frequenzbereich aufzulösen, muß zur Anwendung kommen.

Zunächst einmal bedingen die hohen Frequenzen, daß die Magnetisierung der Flüssigkeit nicht mehr "instantan" dem äußeren Feld folgen kann, sich somit zu einem gegebenen Zeitpunkt nicht im lokalen Gleichgewicht befindet. Obwohl die Magnetisierung damit noch immer keine hydrodynamische Variable im eigentlichen Sinn ist [36, 23], da sie einer Relaxationsgleichung genügt und ihre Anregungsfrequenz somit nicht im langwelligen Limes verschwindet - $\lim_{k \rightarrow 0} \omega_B(k) \neq 0$ -, muß sie dennoch als unabhängige, quasi-hydrodynamische Variable in einer entsprechenden Theorie betrachtet werden.

Mit dem Übergang zu höheren Frequenzen erfolgt aber auch ein Übergang zu einer größeren Auflösung, zu einer kleineren "Korngröße". Da diese sich auf einer Skala bewegt, die zwar immer noch makroskopisch, jedoch um ein Vielfaches kleiner als diejenige in der Hydrodynamischen Maxwell Theorie ist, sprechen wir hier von einer sogenannten "mesoskopischen" Theorie. In dieser werden die einzelnen suspendierten Teilchen als Träger der Magnetisierung aufgelöst und deren Dynamik geht demnach in die Bewegungsgleichungen mit ein. Zu dieser Dynamik gehört nun aber auch eine Rotation der einzelnen Teilchen, die Existenz eines extensiven Anteils des inneren Drehimpulses ist dementsprechend explizit zu berücksichtigen.

Wie aus der Literatur bekannt ist, existiert bereits eine solche Theorie, die bereits Ende der 60'er, Anfang der 70'er von M.I. SHLIOMIS aufgestellt worden ist [6, 9]. Auf der einen Sei-

te sind die Vorhersagen dieser Standardtheorie in guter Übereinstimmung mit dem Experiment, auf der anderen Seite jedoch erscheint die Herleitung dieser Theorie streckenweise unsauber und willkürlich. Darüberhinaus ergeben sich aus ihr auch gravierende Widersprüche zwischen phänomenologischem Ansatz und den thermodynamischen Ungleichungen, die sich nicht ohne weiteres beiseite wischen lassen. Aus diesem Grund soll im folgenden eine vollständige, auf hydrodynamischen Prinzipien basierende mesoskopische Theorie hergeleitet werden, die tauglich ist, die obigen Phänomene zu erfassen.

4.1 Der phänomenologische Hintergrund

4.1.1 Drehimpulsgleichung ohne äußere magnetische Felder

Wir betrachten ein System einer magnetischen Flüssigkeit. Obwohl die Geometrie für das folgende keine Rolle spielt, soll für dieses System hier ein zylindrischer Behälter gewählt werden. Dieser Behälter werde nun einschließlich des in ihm befindlichen Ferrofluids mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}/2$ gedreht. Ohne weitere äußere Einflüsse wird das Fluid eine "solid body rotation" ausführen. Wie in [12] ausgeführt, hängt die Energiedichte dann vom extensiven Beitrag des intrinsischen Drehimpulses \mathbf{s} als zusätzliche Variable ab, die erhaltene Größe ist dann der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{I}^{\text{tot}} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} + \mathbf{s}$. Anders als der erste Term der rechten Seite stellt der zweite Term einen unabhängigen Beitrag zur Energiedichte dar, was sich folglich in der Gibbs'schen Fundamentalgleichung niederschlägt:

$$d\varepsilon = T ds + \xi d\rho + \xi_1 d\rho_1 + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \omega \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.1)$$

Aus einer Entwicklung nahe des Minimalwertes der Energiedichte folgt dann der Zusammenhang

$$\mathbf{s} = I\omega, \quad \omega := \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{s}}. \quad (4.2)$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\omega = \Omega \quad (4.3)$$

bestimmt sich dann die zunächst unbekannte Größe ω , und für den inneren Drehimpuls folgt

$$\mathbf{s} = I\Omega, \quad (4.4)$$

eine Beziehung, die die instantane Entwicklung ins Gleichgewicht beschreibt; eine unabhängige Dynamik für den Drehimpulsanteil \mathbf{s} entfällt somit.

4.1.2 Drehimpulsgleichung mit äußeren magnetischen Feldern

Eine davon abweichende Situation entsteht, wenn ein äußeres Magnetfeld Einfluß auf die Teilchen in der Flüssigkeit ausübt (vgl. Abb. 1.4). Die Fundamentalgleichung lautet nun

$$d\varepsilon = T ds + \xi d\rho + \xi_1 d\rho_1 + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \mathbf{h} \cdot d\mathbf{M} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} + \omega \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.5)$$

Im Grenzfall der BROWNSchen Relaxation werden sich die Teilchen einheitlich entlang dem äußeren Feld ausrichten wollen, da die Magnetisierung hier als im Partikel “festgefroren” betrachtet wird. Die Situation der BROWNSchen Relaxation im Gegensatz zur NÈELSchen wird in den Abb. 1.2 und 1.3 dargestellt. Demnach werden die Teilchen hier nicht mehr mit der Winkelgeschwindigkeit Ω der umgebenden Flüssigkeit rotieren, der innere Drehimpulsanteil wird also vermindert und zwar um den Betrag

$$\mathbf{s} = I\Omega - n\Theta(\Omega - \omega_B). \quad (4.6)$$

n ist die Teilchenzahldichte, Θ das Trägheitsmoment eines einzelnen Teilchens und ω_B ist die Frequenz des homogenen, rotierenden Magnetfeldes. Offensichtlich ist die Reduktion des Drehimpulses \mathbf{s} maximal für ein statisches Magnetfeld mit der Frequenz $\omega_B = 0$, was mit der Erfahrung übereinstimmt; ebenso erwarten wir, daß die suspendierten Teilchen bei einer Rotationsgeschwindigkeit $\omega_B = \Omega$ ein statisches Magnetfeld sehen und mit unvermindertem Drehimpuls rotieren. Die Größe I ist unbestimmt, jedoch von der Größenordnung des Einstein-deHaas-Effekts. Der zweite Term von (4.6) wird also der führende sein, woraus sich die grundlegende Beziehung zwischen den phänomenologischen Größen ableitet:

$$\frac{I}{n\Theta} \ll 1. \quad (4.7)$$

Gleichung (4.6) zusammen mit (4.7) bildet unseren phänomenologischen Rahmen, dem sich eine mesoskopische Theorie anzupassen hat.

4.2 Die Bewegungsgleichungen

Die unabhängigen hydrodynamischen und quasi-hydrodynamischen Variablen einer mesoskopischen Theorie für Ferrofluide sind die Volumendichten für Entropie s , Gesamtdichte ρ , Konzentrationsdichte ρ_1 , Impuls \mathbf{g} , elektrisches Feld \mathbf{D} , Magnetfeld \mathbf{B} , Magnetisierung \mathbf{M} und innerer Drehimpuls \mathbf{s} . Verknüpft werden diese durch die Fundamentalgleichung

$$d\varepsilon = T ds + \xi d\rho + \xi_1 d\rho_1 + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{h} \cdot d\mathbf{M} + \omega \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.8)$$

Die in Anhang A durchgeführte hydrodynamische Standardprozedur liefert mit den Ansätzen

$$\dot{s}_i = \epsilon_{ijk}(\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^D) - \nabla_j \lambda_{ij} \quad (4.9)$$

$$\dot{M}_i = (\Omega \times \mathbf{M})_i - \nabla_j (M_i v_j) + X_i^D \quad (4.10)$$

- wobei \mathbf{X}^D nach allgemeiner Lesart der dissipative Relaxationsterm in der Magnetisierungsgleichung ist - folgende Entropieerzeugungsfunktion R ,

$$\begin{aligned} R = & -f_i^D \nabla_i T - j_i^D \cdot \nabla_i \xi_1 - \Pi_{ij}^D v_{ij} - \mathbf{j}_{el}^D \cdot \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^D \cdot (c\nabla \times \mathbf{H}^0) \\ & + (\Omega_i - \omega_i) \epsilon_{ijk} \Pi_{jk}^D - h_i X_i^D, \end{aligned} \quad (4.11)$$

und zusätzlich einen antisymmetrischen Anteil im Spannungstensor $\epsilon_{ijk}\Pi_{jk} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s})_i$. Der Ansatz (4.9) folgt der Argumentation aus [12], wohingegen sich die Gleichung (4.10) aus der Analogie zur Polarisation wie in [37] besprochen ergibt.

Der gesamte Spannungstensor ist also $\Pi_{ij}^{\text{tot}} = \Pi_{ij} + \Pi_{ij}^{\text{D}}$ mit dem reaktiven Anteil

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & (Ts + \xi\rho + \xi_1\rho_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s} - \varepsilon)\delta_{ij} \\ & - \frac{1}{2}(H_i B_j + E_i D_j - v_i g_j + (i \leftrightarrow j)) + \frac{1}{2}(w_i s_j - w_j s_i) \end{aligned} \quad (4.12)$$

und dem dissipativen Anteil Π_{ij}^{D} , der im folgenden bestimmt werden soll.

Entscheidend ist nun bei der Entwicklung der dissipativen Ströme in die thermodynamischen Kräfte, daß Gl. (4.10) nicht wie im herkömmlichen Sinne eine Relaxationsgleichung für die Magnetisierung darstellt, sondern daß sie in unserem Fall die Definitionsgleichung für die thermodynamische Kraft \mathbf{X}^{D} ist. Umgeschrieben lautet sie, unter Vernachlässigung des zweiten, konvektiven Terms der rechten Seite,

$$\mathbf{X}^{\text{D}} = (\boldsymbol{\omega}_B - \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{M}, \quad (4.13)$$

da für ein rotierendes Magnetfeld die Magnetisierung die Form $\mathbf{M} = M \cos(\boldsymbol{\omega}_B t) \mathbf{e}_x + M \sin(\boldsymbol{\omega}_B t) \mathbf{e}_y$ annimmt, und somit die Identität $\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{M}$ gilt. \mathbf{X}^{D} übernimmt damit die Rolle der thermodynamischen Kraft $c\nabla \times \mathbf{E}^0$ im Falle der hydrodynamischen Maxwell-Theorie.

Dementsprechend lautet die Entwicklung, die die Positivität der Entropieerzeugung sowie ihre Invarianz unter Zeitumkehr und räumlichen Spiegelungen wahrt, nun

$$\begin{pmatrix} -h_i \\ \epsilon_{ilk}\Pi_{lk}^{\text{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} & \gamma_{ij} \\ \bar{\gamma}_{ij} & \beta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_j^{\text{D}} \\ (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})_j \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Die zugehörige Onsagerrelation lautet $\gamma_{ij}(\mathbf{M}) = -\bar{\gamma}_{ji}(-\mathbf{M})$. Unter Mitnahme der wesentlichen Koeffizienten ergibt sich

$$h_i = -\alpha X_i^{\text{D}} + \gamma [(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{M}]_i \quad (4.15)$$

$$\epsilon_{ijk}\Pi_{jk}^{\text{D}} = \beta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})_i + \gamma(\mathbf{X}^{\text{D}} \times \mathbf{M})_i. \quad (4.16)$$

Folgende Substitutionen sind zweckmäßig, um später die Vergleichbarkeit mit der Hydrodynamischen Maxwell Theorie zu gewährleisten: $\alpha = 1/\zeta_3$ und $\gamma = \zeta_2/\zeta_3$. Wie in Kapitel 5 gezeigt werden wird, ergibt sich damit der Zusammenhang $\chi \mathbf{h} \longrightarrow -\mathbf{H}^{\text{D}}$ für $\boldsymbol{\omega}_B \tau, \boldsymbol{\Omega} \tau, \boldsymbol{\omega} \tau \ll 1$ und $\zeta_2^{\text{hyd}} = -\tau \chi \zeta_2$. Die gleichen Bedingungen führen auf $\zeta_1^{\text{hyd}} = \beta$.

Wir erhalten also für den gesuchten dissipativen Beitrag zum gesamten Spannungstensor

$$\Pi_{ij}^D = \frac{\zeta_1}{2} \epsilon_{ijk} (\Omega - \omega)_k - \frac{\zeta_2 M^2}{2\zeta_3} \epsilon_{ijk} (\omega_B - \Omega)_k + \eta_2 (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i), \quad (4.17)$$

was leicht nachvollzogen werden kann.

Benutzt man die stationäre Lösung der Bewegungsgleichung für den inneren Drehimpuls $\dot{s} = 0$, so ergibt sich für die Anteile der Winkelgeschwindigkeiten senkrecht zum angelegten Magnetfeld aus Gln. (4.9) und (4.16)

$$(\omega - \Omega)_\perp = -\zeta_2 \frac{M^2}{\zeta_1 \zeta_3} (\omega_B - \Omega)_\perp. \quad (4.18)$$

Der antisymmetrische Anteil des Spannungstensors entfällt, da in unserem Fall $\mathbf{s} \propto \boldsymbol{\omega}$ gilt, der konvektive Term $\propto \lambda$ wird vernachlässigt. Also liefert ein Vergleich mit der phänomenologischen Gleichung (4.6), $\mathbf{s} = I\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\Omega} - n\Theta(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}_B)$, die Beziehung

$$0 < -\frac{\zeta_1 \zeta_3}{\zeta_2 M^2} = \frac{I}{n\Theta} \ll 1. \quad (4.19)$$

Demzufolge muß $\zeta_2 < 0$ gelten. Das phänomenologische Bild ist also befriedigt, falls

$$-\frac{\zeta_1 \zeta_3}{M^2} \ll \zeta_2 \quad (4.20)$$

gilt, was prinzipiell immer erreicht werden kann. Je nachdem, ob wir uns im Grenzfall Néel'scher oder Brown'scher Relaxation befinden, erwarten wir Werte für $|\zeta_2|$ zwischen Null und Eins.

Die endgültig resultierende Bewegungsgleichung für die Magnetisierung nimmt nun folgende Gestalt an:

$$\dot{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} - \zeta_3 \mathbf{h} + \zeta_2 (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{M}. \quad (4.21)$$

Wie in [38] erhalten wir \mathbf{h} aus einer Entwicklung um das Energieminimum für schwache Felder, $\mathbf{h} = \mathbf{M}/\chi - \mathbf{B}$, und die Relaxationsgleichung nimmt nach einer Linearisierung in τ die folgende Gestalt an:

$$M_i = \chi [(1 + i\omega_B \tau) \delta_{ik} + \tau \epsilon_{ijk} (\boldsymbol{\Omega} + \zeta_2 (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}))_j] B_k. \quad (4.22)$$

Der letzte Term der rechten Seite ist jedoch aufgrund der Kleinheit von ζ_2 ein Term zweiter Ordnung. Demzufolge gilt im wesentlichen die bereits in [13] angewandte Gleichung für die Magnetisierung

$$M_i = \chi [(1 + i\omega_B \tau) \delta_{ik} - \tau/2 (\nabla_i v_k - \nabla_k v_i)] B_k. \quad (4.23)$$

Da die Gleichungen für den reduzierten inneren Drehimpuls wie oben erwähnt für das Brown'sche Relaxationsmodell, die letzte Gleichung jedoch für das Neel'sche Modell gilt, in dem die Magnetisierung innerhalb eines Partikels spontan umklappen kann, zeigt sich, daß der Unterschied zwischen den beiden Relaxationsmechanismen lediglich von zweiter Ordnung in den kleinen Größen $\Omega\tau$ und $\omega\tau$ und ist.

KAPITEL 5

Innere Drehimpulsfreiheitsgrade in der Hydrodynamischen Maxwell Theorie

Es ist bisher gelungen, eine Theorie für magnetische Flüssigkeiten aufzustellen, die uneingeschränkt auf hydrodynamischen Prinzipien beruht und dennoch hochauflösender als eine rein hydrodynamische Theorie ist. “Rein hydrodynamisch” meint hier eine Theorie, in der nur hydrodynamische Variablen, deren mit der Dynamik verknüpften Frequenzen die Bedingung $\lim_{k \rightarrow 0} \omega_B(k) = 0$ befriedigen, als unabhängige Größen angesehen werden. Diese Theorie ist allgemeiner als die Hydrodynamische Maxwell Theorie und läßt sich in einem erweiterten Gültigkeitsbereich, d.h. im Bereich hoher Frequenzen, anwenden. Wir erwarten jedoch, daß diese mesoskopische Theorie die Hydrodynamische Maxwell Theorie als niederfrequenten Grenzfall enthält, damit sie wirklich die Erweiterung dieser Theorie darstellt.

5.1 Bewegungsgleichung für den inneren Drehimpuls

Um zu erörtern, ob die im vorigen Kapitel vorgestellte Theorie tatsächlich im Limes $\omega_B \rightarrow 0$ mit der Maxwell-Theorie aus Kapitel 2 zusammenfällt, muß zunächst der extensive Anteil des inneren Drehimpulses auch in die hydrodynamische Theorie eingebaut werden. Bekanntermaßen führt die Erhaltung des Drehimpulses auf einen symmetrischen Spannungstensor (vgl. [12]), da

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{l} &= \partial_t (\mathbf{r} \times \mathbf{g}^{\text{tot}}) \\ \Rightarrow \partial_t l_i &= -\nabla_l (\epsilon_{ijk} r_j (\Pi_{kl} + \Pi_{kl}^D)) + \epsilon_{ilk} (\Pi_{kl} + \Pi_{kl}^D) \end{aligned} \quad (5.1)$$

gilt. Existiert nun ein extensiver Anteil eines inneren Drehimpulses \mathbf{s} , so ist der erhaltene Gesamtdrehimpuls nunmehr $\mathbf{l}^{\text{tot}} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}^{\text{tot}} + \mathbf{s}$. Die Existenz dieses Drehimpulsbeitrags führt also auf einen antisymmetrischen Anteil im Spannungstensor, die Dynamik wird demzufolge beschrieben durch die Gleichung

$$\dot{s}_i + \nabla_j \lambda_{ij} = \epsilon_{ijk} (\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^D). \quad (5.2)$$

In obigem Sinne ist \mathbf{s} also eine “quasi-hydrodynamische” Variable, deren unabhängiger Dynamik jedoch nichtsdestotrotz Rechnung getragen werden muß. Gl. (5.2) entspricht der Form nach Gl. (4.9), jedoch gehen in die jeweiligen Gleichungen unterschiedliche Spannungstensoren ein.

Die Energiedichte ist im vorliegenden Fall auch Funktion des inneren Drehimpulses, die Fundamentalbeziehung der Variablen lautet also

$$d\varepsilon = T ds + \xi d\rho + \xi_1 d\rho_1 + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} + \omega \cdot d\mathbf{s}. \quad (5.3)$$

Die Standardprozedur, die auf die Entropieerzeugung R führt, findet sich in Anhang A. Hier sei nur das Ergebnis angegeben:

$$\begin{aligned} R = & -f_i^D \nabla_i T - j_i^D \nabla_i \xi_1 - \Pi_{ij}^D v_{ij} - \mathbf{j}^D \cdot \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^D \cdot (c\nabla \times \mathbf{H}^0) \\ & - \mathbf{H}^D \cdot (c\nabla \times \mathbf{E}^0) + (\Omega_i - \omega_i) \epsilon_{ijk} (\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^D). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die uns interessierenden dissipativen Ströme sind nun

$$\epsilon_{ijk} \Pi_{jk}^D = \zeta_1^{\text{hyd}} (\Omega_i - \omega_i) + \zeta_2^{\text{hyd}} [(c\nabla \times \mathbf{E}^0) \times \mathbf{B}]_i \quad (5.5)$$

$$-H_i^D = \alpha (c\nabla \times \mathbf{E}^0)_i - \zeta_2^{\text{hyd}} [(\Omega - \omega) \times \mathbf{B}]_i. \quad (5.6)$$

Im hydrodynamischen Bereich gilt die stationäre Lösung der Drehimpulsgleichung (5.2) wegen der geringen Größe der entsprechenden Relaxationszeit $\tau_s \approx 10^{-12} \text{s}$ [6]. Also stellt sich instantan

$$\epsilon_{ijk} \Pi_{jk}^D / \zeta_1^{\text{hyd}} = (\Omega_i - \omega_i) + \frac{\zeta_2^{\text{hyd}}}{\zeta_1^{\text{hyd}}} [(c\nabla \times \mathbf{E}^0) \times \mathbf{B}]_i = 0 \quad (5.7)$$

ein, was umgeformt zu

$$\omega = \Omega + \frac{\zeta_2^{\text{hyd}}}{\zeta_1^{\text{hyd}}} [(c\nabla \times \mathbf{E}^0) \times \mathbf{B}] \quad (5.8)$$

die Vergleichbarkeit mit der phänomenologischen Gleichung

$$\mathbf{s} = I\omega = I\Omega - n\Theta(\Omega - \omega_B) \quad (5.9)$$

gewährleistet. Die Bezeichnungsweise aus dem vorangegangenen Abschnitt wird hier übernommen. Mit der Maxwellgleichung $c\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ folgt für eine ‘‘solid-body-rotation’’ des Systems die Beziehung

$$c\nabla \times \mathbf{E}^0 = (\Omega - \omega_B) \times \mathbf{B}. \quad (5.10)$$

Eingesetzt in Gl. (5.8) liefert dies für die Frequenzanteile senkrecht zum angelegten Magnetfeld

$$\omega = \Omega - \frac{\zeta_2^{\text{hyd}}}{\zeta_1^{\text{hyd}}} B^2 (\Omega - \omega_B)_\perp. \quad (5.11)$$

Aus Vergleich von (5.9) mit (5.11) folgt dann die Beziehung

$$\frac{\zeta_2^{\text{hyd}}}{\zeta_1^{\text{hyd}}} B^2 = \frac{n\Theta}{I}. \quad (5.12)$$

Mit dem Zusammenhang $\tau_s = I/\zeta_1^{\text{hyd}}$ ist auch der zweite Koeffizient bestimmt:

$$\zeta_2^{\text{hyd}} = \frac{n\Theta}{B^2 \tau_s}. \quad (5.13)$$

Der dissipative Strom \mathbf{H}^{D} gewinnt nun folgende, neue Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{\text{D}} &= -\alpha(c\nabla \times \mathbf{E}^0) + \zeta_2^{\text{hyd}}(\Omega - \omega) \times \mathbf{B} \\ &= -\alpha(c\nabla \times \mathbf{E}^0) - \frac{(\zeta_2^{\text{hyd}})^2}{\zeta_1^{\text{hyd}}} [(c\nabla \times \mathbf{E}^0) \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} \\ &\approx -\left[\alpha + \frac{(n\Theta)^2}{B^2 I \tau_s} \right] (c\nabla \times \mathbf{E}^0). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Es zeigt sich, daß die Struktur des dissipativen Stroms unverändert bleibt (vgl. [18, 13]), wohingegen der Transportkoeffizient renormiert wird. Die Größe dieses Effekts läßt sich ohne Kenntnis von I nicht abschätzen, die genaue Größe von

$$\alpha^{\text{eff}} := \alpha + \frac{(n\Theta)^2}{B^2 I \tau_s} \quad (5.15)$$

kann jedoch noch immer durch Vergleich mit dem mesoskopischen Modell bestimmt werden.

KAPITEL 6

Reduktion der mesoskopischen Theorie: der Limes $\omega_B \rightarrow 0$

Nachdem eine konsistente Theorie für Ferrofluide auf einer mesoskopischen Skala hergeleitet wurde, der Einbau eines inneren Drehimpulsfreiheitsgrads auch in die Hydrodynamische Maxwell Theorie erfolgte, läßt sich nun der Frage nachgehen, ob die beiden Theorien tatsächlich konsistent sind, d.h. ob die mesoskopische Theorie den hydrodynamischen Grenzfall im niederfrequenten Limes auch enthält. Wir erwarten, daß die Spannungstensen, die Energiedichten und die Bewegungsgleichungen einander entsprechen.

6.1 Die Energiedichte

Selbstverständlich müssen die Ausdrücke für die Energiedichte in führender Ordnung einander entsprechen. Da diese Ausdrücke auch für die Analyse der übrigen Gleichungen benötigt werden, soll mit deren Betrachtung hier begonnen werden.

Im allgemeinen Fall besteht die Energiedichte aus zwei Teilen

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{mat}} + \varepsilon^{\text{em}}, \quad (6.1)$$

vgl. auch mit der Diskussion zu Beginn von [39]. Der erste Term ist die thermodynamische Energie in Abwesenheit von äußeren Feldern, der zweite Term ist die zusätzliche Energie, die äußere Felder mit sich bringen. Ein möglicher, dritter Energieterm, der alle mikroskopischen Variablen enthält, die weder dem ersten noch dem zweiten Term zugeordnet werden können, ist hier wie in [39] von keiner Bedeutung und demzufolge vernachlässigt. Um eine explizite Darstellung zu gewinnen, entwickeln wir den elektromagnetischen Anteil der Energiedichte in die entsprechenden Variablen:

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{mat}}(s, \rho, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2\chi}M^2 + \frac{1}{2I}\mathbf{s}^2 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2\epsilon}D^2. \quad (6.2)$$

Die Terme $\propto \mathbf{B} \cdot \mathbf{s}$ und $\propto \mathbf{M} \cdot \mathbf{s}$ wurden der besseren Übersichtlichkeit wegen unterdrückt. In Anhang B wird gezeigt, daß ihre Anwesenheit an der Struktur des Gleichungssystems nichts ändert, sondern lediglich einige Entwicklungskoeffizienten renormiert. Offensichtlich wurde die Entwicklung für schwache Felder vorgenommen.

Mit dieser Entwicklung (6.2) und den Definitionen

$$T^{\text{mat}} := \frac{\partial(\varepsilon^{\text{mat}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g})}{\partial s}, \quad \text{und} \quad \mu^{\text{mat}} := \frac{\partial(\varepsilon^{\text{mat}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g})}{\partial \rho} \quad (6.3)$$

erhalten wir die konjugierten Variablen

$$T = T^{\text{mat}} - \frac{1}{2\chi^2} M^2 \frac{\partial \chi}{\partial s} - \frac{1}{2I^2} \mathbf{s}^2 \frac{\partial I}{\partial s}, \quad (6.4)$$

$$\xi = \xi^{\text{mat}} - \frac{1}{2\chi^2} M^2 \frac{\partial \chi}{\partial \rho} - \frac{1}{2I^2} \mathbf{s}^2 \frac{\partial I}{\partial \rho}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{H}^{\text{M}} = \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\chi} \mathbf{M} - \mathbf{B}, \quad (6.8)$$

$$\omega = \frac{1}{I} \mathbf{s}. \quad (6.9)$$

Mit diesen läßt sich das totale Differential der Energiedichte

$$d(\varepsilon - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) = T ds + \xi d\rho - \mathbf{g} \cdot d\mathbf{v} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H}^{\text{M}} \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{h} \cdot d\mathbf{M} + \omega \cdot d\mathbf{s} \quad (6.10)$$

auf eine Form bringen, in der bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\mathbf{h}^2)$ lediglich die hydrodynamischen Variablen aus Kapitel 2 auftreten. Diese findet sich in Anhang B. Wir finden somit die Fundamentalgleichung der Hydrodynamik (2.1) mit der folgenden Entwicklung des elektromagnetischen Anteils der Energiedichte

$$\varepsilon^{\text{em,hyd}} = \frac{1}{2\mu} B^2 + \frac{1}{2I} \mathbf{s}^2 + \frac{1}{2\epsilon} D^2. \quad (6.11)$$

Der Parameter μ ist die magnetische Permeabilität des Systems, ein Koeffizientenvergleich (vgl. Anhang B) liefert die Beziehung $1/\mu = 1 - \chi$, die bereits aus der Elektrodynamik bekannt ist. Für diese Entwicklung für schwache Felder finden wir also tatsächlich im Übergang von der mesoskopischen, quasi-hydrodynamischen zur makroskopischen, hydrodynamischen Theorie die erwartete lineare Abhängigkeit $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ und den Zusammenhang

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{hyd}} + \mathcal{O}(\mathbf{h}^2). \quad (6.12)$$

Es bleibt somit zu zeigen, daß mit $\Omega\tau, \omega_B\tau \rightarrow 0$ auch $\mathbf{h} \rightarrow 0$ gilt. Wie bereits erörtert, lautet die Gleichung für die Magnetisierung

$$\dot{\mathbf{M}} = \Omega \times \mathbf{M} - \zeta_3 \mathbf{h} + \zeta_2 (\Omega - \omega) \times \mathbf{M}. \quad (6.13)$$

Der Koeffizient ζ_3 ergibt sich aus der Forderung, daß die Magnetisierung nach der charakteristischen Zeitspanne τ in das lokale Gleichgewicht relaxiert ist, es gilt $\zeta_3 = \chi/\tau$, wobei die magnetische Suszeptibilität χ in diesem Fall über $\mathbf{M}^{\text{eq}} = \chi\mathbf{B}$ definiert ist (vgl. (6.2); \mathbf{M}^{eq} bezeichnet den Wert der Magnetisierung im lokalen Gleichgewicht.

Aufgelöst nach der Abweichung aus dem Gleichgewicht \mathbf{h} , erhalten wir dann folgende Gleichung

$$\mathbf{h} = -\frac{\tau}{\chi}(\dot{\mathbf{M}} - \Omega \times \mathbf{M}) + \frac{\zeta_2\tau}{\chi}(\Omega - \omega) \times \mathbf{M}. \quad (6.14)$$

Der letzte Term der rechten Seite ist offenbar wegen $\zeta_2 \ll 1$ und $\Omega, \omega \ll 1$ zu vernachlässigen. Eine mögliche Linearisierung der Gl. (6.14) führt uns dann zur konstituierenden Relation

$$\mathbf{h} = -\tau(\dot{\mathbf{B}} - \Omega \times \mathbf{B}) + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (6.15)$$

Mit der Frequenz des Magnetfeldes muß auch die lokale Winkelgeschwindigkeit gegen Null gehen, was sich aus folgendem Argument ableiten läßt: Ein relativ zum System rotierendes Magnetfeld mit der Rotationsfrequenz ω_B ist physikalisch äquivalent zu einem statischen Magnetfeld, das einen Behälter durchdringt, der mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = -\omega_B$ rotiert wird. Die geringe Größe der einen Frequenz bedingt somit die das Verschwinden der anderen. Da ein rotierendes Magnetfeld aber nur die Überlagerung zweier Wechselfelder darstellt, folgt der allgemeine Zusammenhang.

Für ein beliebiges magnetisches Wechselfeld gilt nun aber $\dot{\mathbf{B}} \propto \omega_B B$, so daß tatsächlich die gesuchte Bedingung $\mathbf{h} \ll 1$ aus den das hydrodynamische Regime begrenzenden Forderungen $\omega_B \ll 1$ und $\Omega \ll 1$ folgt. Damit ist gezeigt, daß die Energiedichte der mesoskopischen Theorie im hydrodynamischen Grenzfall tatsächlich in die Energiedichte der Hydrodynamischen Maxwell Theorie übergeht.

6.2 Vergleich der Spannungstensoren

Mit dem Ausdruck für die Energien in der Tasche soll nun geklärt werden, ob aus dem Spannungstensor der mesoskopischen Theorie im Übergang $\omega_B\tau \rightarrow 0$ der Spannungstensor der hydrodynamischen Theorie folgt. Die Nebendiagonal- sowie die Diagonalelemente der Tensoren werden dabei zweckmäßigerweise getrennt voneinander untersucht.

6.2.1 Die Nebendiagonalelemente

In der mesoskopischen Theorie lauten die Nebendiagonalelemente mit $i \neq j$ des Spannungstensors (vgl. Anhang A)

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{\text{mes}} &= -H_i^M B_j - E_i D_j + v_j g_i - \frac{1}{2}(h_i M_j - h_j M_i) \\ &\quad + \eta_2(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) + \frac{\zeta_1}{2}\epsilon_{ijk}(\Omega - \omega)_k - \frac{\zeta_2 M^2}{2\zeta_3}\epsilon_{ijk}(\omega_B - \Omega)_k. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Wegen $\zeta_2 \ll 1$ und $\zeta_3 = \chi/\tau$ ist der letzte Term der rechten Seite im betrachteten Limes bereits zu vernachlässigen. Für die übrigen Terme gilt unter Verwendung von Gl. (6.15) und (4.23)

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{\text{mes}} &= -H_i^M B_j - E_i D_j + v_j g_i + \frac{\tau\chi}{2}\left((\dot{\mathbf{B}} - \Omega \times \mathbf{B})_i B_j - (\dot{\mathbf{B}} - \Omega \times \mathbf{B})_j B_i\right) \\ &\quad + \eta_2(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) + \frac{\zeta_1}{2}\epsilon_{ijk}(\Omega - \omega)_k + \mathcal{O}(\Omega^2 \tau^2) + \mathcal{O}(\omega_B^2 \tau^2). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Zum Vergleich nun der Spannungstensor der hydrodynamischen Maxwell-Theorie. Mit der Relation aus Anhang A

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{\text{D,hyd}} &= -\frac{\alpha}{2}\left((\dot{\mathbf{B}} - \Omega \times \mathbf{B})_i B_j + (\dot{\mathbf{B}} - \Omega \times \mathbf{B})_j B_i\right) \\ &\quad + \eta_2^{\text{hyd}}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \end{aligned} \quad (6.18)$$

stellen sich dessen Nebendiagonalelemente als

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{\text{hyd}} &= -H_i B_j - E_i D_j + v_j g_i + \Pi_{ij}^{\text{D,hyd}} + \frac{\zeta_1^{\text{hyd}}}{2}\epsilon_{ijk}(\Omega - \omega)_k \\ &= -H_i^M B_j - E_i D_j + v_j g_i + H_i^{\text{D}} B_j + \eta_2^{\text{hyd}}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \\ &\quad - \frac{\alpha}{2}\left((\dot{\mathbf{B}} - \Omega \times \mathbf{B})_i B_j + (\dot{\mathbf{B}} - \Omega \times \mathbf{B})_j B_i\right) \\ &\quad + \frac{\zeta_1^{\text{hyd}}}{2}\epsilon_{ijk}(\Omega - \omega)_k \end{aligned} \quad (6.19)$$

dar.

Mit

$$\mathbf{H}^{\text{D}} = \alpha(\dot{\mathbf{B}} - \Omega \times \mathbf{B}) \quad (6.20)$$

erhalten wir also durch Koeffizientenvergleich der Gleichungen (6.17) und (6.19) den Zusammenhang $\zeta_1^{\text{hyd}} = \zeta_1$ sowie $\eta_2^{\text{hyd}} = \eta_2$ und damit die erwartete Relation

$$\Pi_{ij}^{\text{mes}} = \Pi_{ij}^{\text{hyd}} + \mathcal{O}(\Omega^2 \tau^2) + \mathcal{O}(\omega_B^2 \tau^2) \quad (6.21)$$

für die Nebendiagonalelemente.

6.2.2 Die Diagonalelemente

Der Spannungstensor der mesoskopischen Theorie hat folgende Diagonalelemente mit $i = j = \phi$:

$$\Pi_{\phi\phi}^{\text{mes}} = (Ts + \xi\rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{H}^{\text{M}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} - \tilde{\varepsilon}) - H_{\phi}^{\text{M}} B_{\phi} - E_{\phi} D_{\phi} + v_{\phi} g_{\phi}, \quad (6.22)$$

wobei ϕ für eine der drei Komponenten x , y oder z steht und demnach nicht über ϕ summiert wird. Die Energiedichte ε dieser Theorie entspricht gemäß Abschnitt (6.1) der Energiedichte ε^{hyd} der Hydrodynamik. Aus diesem Abschnitt folgt auch die Gleichheit der Potentiale $\varepsilon - Ts - \xi\rho = \varepsilon^{\text{hyd}} - T^{\text{hyd}}_s - \xi^{\text{hyd}}\rho$. Die Umformung der Diagonalelemente des Spannungstensors lautet damit

$$\begin{aligned} \Pi_{\phi\phi}^{\text{mes}} &= T^{\text{hyd}}_s + \xi^{\text{hyd}}\rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \chi \mathbf{h} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \chi \mathbf{h} \cdot \mathbf{B} - \varepsilon^{\text{hyd}} \\ &\quad - H_{\phi} B_{\phi} + \chi h_{\phi} B_{\phi} - E_{\phi} D_{\phi} + v_{\phi} g_{\phi} + \mathcal{O}(\tau^2) \\ &= T^{\text{hyd}}_s + \xi^{\text{hyd}}\rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \varepsilon^{\text{hyd}} \\ &\quad - H_{\phi} B_{\phi} + \chi h_{\phi} B_{\phi} - E_{\phi} D_{\phi} + v_{\phi} g_{\phi} + \mathcal{O}(\tau^2). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Auf der anderen Seite haben wir den folgenden Diagonalanteil des Spannungstensors der Hydrodynamischen Maxwell Theorie:

$$\begin{aligned} \Pi_{\phi\phi}^{\text{hyd}} &= T^{\text{hyd}}_s + \xi^{\text{hyd}}\rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \varepsilon^{\text{hyd}} \\ &\quad - H_{\phi} B_{\phi} + \Pi_{\phi\phi}^{\text{D}} - E_{\phi} D_{\phi} + v_{\phi} g_{\phi}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Der dissipative Anteil des Spannungstensors läßt sich als

$$\Pi_{\phi\phi}^{\text{D}} = -H_{\phi}^{\text{D}} B_{\phi} \quad (6.25)$$

darstellen (vgl. 6.18). Somit gilt für den gesamten Spannungstensor wegen der Relation $H_{\phi} = -\chi h_{\phi}$ für $\Omega\tau, \omega_B\tau \ll 1$ schließlich

$$\Pi_{\phi\phi}^{\text{mes}} = \Pi_{\phi\phi}^{\text{hyd}} + \mathcal{O}(\Omega^2\tau^2) + \mathcal{O}(\omega_B^2\tau^2), \quad (6.26)$$

d.h. in linearer Ordnung in den kleinen Nichtgleichgewichtsgrößen sind die Spannungstensoren der beiden Theorien tatsächlich identisch.

ANHANG A

Die Standardprozeduren

A.1 Standardprozeduren

A.1.1 Die Hydrodynamischen Gleichungen

In der hydrodynamischen Maxwell-Theorie lautet die Gibbs'sche Fundamentalgleichung

$$d\varepsilon = T ds + \xi d\rho + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \omega \cdot ds. \quad (\text{A.1})$$

Als Bewegungsgleichung bzw. Relaxationsgleichung für die innere Drehimpulsdichte wird folgender Ansatz gemacht (vgl. [12]),

$$\dot{s}_i = \epsilon_{ijk}(\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^D) - \nabla_j \lambda_{ij}, \quad (\text{A.2})$$

da die Änderung des Drehimpulses bis auf eine unbestimmte Divergenz gleich dem antisymmetrischen Anteil des Spannungstensors sein muß. Es existiert kein konvektiver Term, da der damit verbundene mechanische Relaxationsprozeß langsamer wäre als der Prozeß, der mit der Dynamik der elektromagnetischen Felder verknüpft ist. Damit und mit den übrigen Bilanzgleichungen lassen sich die einzelnen Terme für die zeitliche Ableitung der Fundamentalgleichung berechnen. Im einzelnen sind diese

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla \cdot \mathbf{Q}, \quad (\text{A.3})$$

$$T\dot{s} = R - \nabla_i(Tsv_i + Tf_i^D) + f_i^D \nabla_i T + \underline{v_i s \nabla_i T}, \quad (\text{A.4})$$

$$\xi\dot{\rho} = -\nabla_i(\xi\rho v_i) + \underline{v_i \rho \nabla_i \xi} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{g}} &= -\nabla_i [(\Pi_{ji} + \Pi_{ji}^D + B_i H_j + D_i E_j - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\delta_{ij})v_j] \\ &\quad + (\Pi_{ji} + \Pi_{ji}^D + B_i H_j + D_i E_j - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\delta_{ij})\nabla_i v_j \\ &\quad - \underline{v_i (H_j \nabla_i B_j + E_j \nabla_i D_j)} - (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^D) \\ &\quad + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^D) + \rho^{el} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^0 - \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} &= -c\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^D \times \mathbf{H}^0) - c\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &\quad - \mathbf{E}^D \cdot (c\nabla \times \mathbf{H}^0) + (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^D), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + c\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + \mathbf{H}^D \cdot (c\nabla \times \mathbf{E}^0) \\ &\quad - (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}^D), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\omega \cdot \dot{\mathbf{s}} = \omega_i \epsilon_{ijk} (\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^D) - \omega_i \nabla_j \lambda_{ij}. \quad (\text{A.9})$$

Hier wurde auf die Gleichung (2.11) verzichtet. Ihr Einbau beeinflusst die Struktur der zu findenden Terme nicht wesentlich und kann deshalb einfach aus [18] übernommen werden. Die unterstrichenen Terme erfüllen die Identität

$$\begin{aligned}
& v_i(s\nabla_i T + \rho\nabla_i \xi - H_j \nabla_i B_j - E_j \nabla_i D_j) \\
= & (u - Ts - \xi\rho - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s} - v_i g_j) \delta_{ij} \nabla_i v_j \\
& - \nabla_i [(u - Ts - \xi\rho - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}) \delta_{ij} v_j] - v_i s_j \nabla_i \omega_j. \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Vergleichen wir die einzelnen Ausdrücke für die Zeitableitungen sorgfältig, so stellen wir bereits hier fest, daß sich bei der Bildung der Summe viele Terme gegeneinander wegheben. Damit erhalten wir den folgenden, übersichtlicheren Ausdruck:

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \mathbf{Q} = & -\nabla_i \left[T f_i^D + \Pi_{ji}^D v_j + c(\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^D \times \mathbf{H}^0 + \mathbf{E}^0 \times \mathbf{H}^D)_i + (\lambda_{ji} - s_j v_i) \omega_j \right. \\
& \left. + (\Pi_{ji} + B_i H_j + D_i E_j - v_i g_j - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \varepsilon) \delta_{ij}) v_j \right] \\
& + R + f_i^D \nabla_i T + \Pi_{ji}^D \nabla_i v_j + \mathbf{j}^D \cdot \mathbf{E}^0 - \mathbf{E}^D \cdot (c \nabla \times \mathbf{H}^0) + \mathbf{H}^D \cdot (c \nabla \times \mathbf{E}^0) \\
& + \omega_i \epsilon_{ijk} (\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^D) + (\lambda_{ji} - s_j v_i) \nabla_i \omega_j + \left[\Pi_{ji} + H_j B_i + E_j D_i - v_i g_j \right. \\
& \left. + (\varepsilon - Ts - \xi\rho - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}) \delta_{ij} \right] \nabla_i v_j. \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Die Isotropie des Raumes führt uns ausgehend von der Gibbs'schen Fundamentalgleichung auf die sogenannte Rotationsidentität (da bei einer Rotation des gesamten Systems die Energiedichte als skalare Größe unverändert bleibt, müssen sich alle Beiträge zur Energiedichte, die sich aus vektoriellen Größen zusammensetzen und die folglich bei einer Drehung nicht invariant sind, gegenseitig wegheben; die mathematische Formulierung dieses Sachverhalts ist hier angegeben):

$$\mathbf{v} \times \mathbf{g} + \mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{H} \times \mathbf{B} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = \mathbf{0}. \tag{A.12}$$

Diese läßt sich hier am zweckmäßigsten in der Form

$$\begin{aligned}
& H_j B_i + E_j D_i - v_i g_j \\
= & \frac{1}{2} (H_i B_j + E_i D_j - v_j g_i + (i \leftrightarrow j)) + \frac{1}{2} (\omega_i s_j - \omega_j s_i) \tag{A.13}
\end{aligned}$$

benutzen. Eine weitere nützliche Identität ist durch

$$(\Pi_{ji} + \Pi_{ji}^D) \nabla_i v_j = \Pi_{ij}^D v_{ij} + \Pi_{ij} v_{ij} - \Omega_i \epsilon_{ijk} (\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^D) \tag{A.14}$$

gegeben, was aufgrund der Definition der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}/2$ gilt. Die beiden letzten Gleichungen eingesetzt in (A.11) ergibt nach der jeweiligen Zuordnungen der richtigen Terme die folgenden Ausdrücke für Energiestrom \mathbf{Q} , Entropieerzeugung R und für

den Spannungstensor

$$Q_i = T f_i^D + \Pi_{ji}^D v_j + c(\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^D \times \mathbf{H}^0 + \mathbf{E}^0 \times \mathbf{H}^D)_i + (Ts + \xi\rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \omega \cdot \mathbf{s})v_i + \frac{1}{2}[\mathbf{v} \times (\omega \times \mathbf{s})]_i \quad (\text{A.15})$$

$$R = -f_i^D \nabla_i T - \Pi_{ij}^D v_{ij} - j_{i,el}^D E_i^0 + \mathbf{E}^D \cdot (c\nabla \times \mathbf{H}^0) - \mathbf{H}^D \cdot (c\nabla \times \mathbf{E}^0) + (\Omega_i - \omega_i) \epsilon_{ijk} \Pi_{jk}^D \quad (\text{A.16})$$

$$\Pi_{ij} = (Ts + \xi\rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \omega \cdot \mathbf{s} - \varepsilon) \delta_{ij} - \frac{1}{2}(H_i B_j + E_i D_j - v_j g_i + (i \leftrightarrow j)) + \frac{1}{2}(\omega_i s_j - \omega_j s_i). \quad (\text{A.17})$$

Zusätzlich erhält man die Gleichung $\lambda_{ij} = s_i v_j$.

A.1.2 Die mesoskopischen Gleichungen

Wie in Kapitel 4 erläutert, erweitert sich das Variablensystem für magnetische Flüssigkeiten, wir benutzen die Fundamentalgleichung

$$du = T ds + \xi d\rho + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{h} \cdot d\mathbf{M} + \omega \cdot d\mathbf{s}. \quad (\text{A.18})$$

Hinsichtlich der Konzentrationsdichte ρ_1 gelten also dieselben Einschränkungen wie in Abschnitt A.1.1, was aber an der Richtigkeit und Gültigkeit der hier gewonnenen Ergebnisse nichts zu ändern vermag, wie man sich leicht überzeugen kann. Neu kommt jedoch die Relaxationsgleichung für die Magnetisierung hinzu, die die Form

$$\dot{\mathbf{M}} = \Omega \times \mathbf{M} - \nabla_j (\mathbf{M} v_j) + \mathbf{X}^D \quad (\text{A.19})$$

hat. Die übrigen Bilanzgleichungen entsprechen denen des vorigen Abschnitts, das Feld \mathbf{H}^D entfällt jedoch, da der Übergang der Magnetisierung in das lokale Gleichgewicht jetzt durch obige Magnetisierungsgleichung beschrieben wird. Im einzelnen lauten nun die Terme der zeitlichen Ableitung der Fundamentalgleichung

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla \cdot \mathbf{Q}, \quad (\text{A.20})$$

$$T \dot{s} = R - \nabla_i (T s v_i + T f_i^D) + f_i^D \nabla_i T + \underline{v_i s \nabla_i T}, \quad (\text{A.21})$$

$$\xi \dot{\rho} = -\nabla_i (\xi \rho v_i) + \underline{v_i \rho \nabla_i \xi}, \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{g}} &= -\nabla_i [(\Pi_{ji} + \Pi_{ji}^D + B_i H_j + D_i E_j - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \delta_{ij} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \delta_{ij}) v_j] \\ &\quad + (\Pi_{ji} + \Pi_{ji}^D + B_i H_j + D_i E_j - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \delta_{ij} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \delta_{ij}) \nabla_i v_j \\ &\quad - \underline{v_i (H_j \nabla_i B_j + E_j \nabla_i D_j)} - (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^D) + \rho^{el} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}^0 - \frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{AB}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{B}} &= -c \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^D \times \mathbf{H}^0) - c \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \\ &\quad - \mathbf{E}^D \cdot (c \nabla \times \mathbf{H}^0) + (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}^D), \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{D}} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + c \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (\text{A.25})$$

$$\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{h} \cdot (\Omega \times \mathbf{M}) + \mathbf{h} \cdot \mathbf{X}^D - \nabla_i (\mathbf{h} \cdot \mathbf{M} v_i) + \underline{v_i M_j \nabla_i h_j}, \quad (\text{A.26})$$

$$\omega \cdot \dot{\mathbf{s}} = \omega_i \epsilon_{ijk} (\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^D) - \omega_i \nabla_j \lambda_{ij}. \quad (\text{A.27})$$

Die unterstrichenen Terme sollen durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}
& v_i(s\nabla_i T + \rho\nabla_i \xi - H_j \nabla_i B_j - E_j \nabla_i D_j + M_j \nabla_i h_j) \\
= & (u - Ts - \xi\rho - \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s} - v_i g_j) \delta_{ij} \nabla_i v_j \\
& - \nabla_i [(u - Ts - \xi\rho - \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}) \delta_{ij} v_j] - v_i s_j \nabla_i \omega_j, \quad (\text{A.28})
\end{aligned}$$

ersetzt werden, der durch einfaches Nachrechnen überprüft werden kann. Das führt uns auf folgende Gleichung führt:

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \mathbf{Q} = & -\nabla_i \left[T f_i^{\text{D}} + \Pi_{ji}^{\text{D}} v_j + c(\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^{\text{D}} \times \mathbf{H}^0)_i + (\lambda_{ji} - s_j v_i) \omega_j \right. \\
& \left. + (\Pi_{ji} + B_i H_j + D_i E_j - v_i g_j - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \varepsilon) \delta_{ij}) v_j \right] \\
& + R + f_i^{\text{D}} \nabla_i T + \Pi_{ji}^{\text{D}} \nabla_i v_j + \mathbf{j}^{\text{D}} \cdot \mathbf{E}^0 - \mathbf{E}^{\text{D}} \cdot (c \nabla \times \mathbf{H}^0) + \mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}) \\
& + \mathbf{h} \cdot \mathbf{X}^{\text{D}} + \omega_i \epsilon_{ijk} (\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^{\text{D}}) + (\lambda_{ji} - s_j v_i) \nabla_i \omega_j \\
& + \left[\Pi_{ji} + H_j B_i + E_j D_i - v_i g_j \right. \\
& \left. + (\varepsilon - Ts - \xi\rho - \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \right. \\
& \left. - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}) \delta_{ij} \right] \nabla_i v_j. \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

Benutzt man an dieser Stelle für die lokale Winkelgeschwindigkeit den Ausdruck $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}/2$ und berechnet damit das doppelte Kreuzprodukt $\mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M})$, dann erhält man das Ergebnis

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \mathbf{Q} = & -\nabla_i \left[T f_i^{\text{D}} + \Pi_{ji}^{\text{D}} v_j + c(\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^{\text{D}} \times \mathbf{H}^0)_i + (\lambda_{ji} - s_j v_i) \omega_j \right. \\
& \left. + (\Pi_{ji} + B_i H_j + D_i E_j - v_i g_j - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \varepsilon) \delta_{ij}) v_j \right] \\
& + R + f_i^{\text{D}} \nabla_i T + \Pi_{ji}^{\text{D}} \nabla_i v_j + \mathbf{j}^{\text{D}} \cdot \mathbf{E}^0 - \mathbf{E}^{\text{D}} \cdot (c \nabla \times \mathbf{H}^0) \\
& + \mathbf{h} \cdot \mathbf{X}^{\text{D}} + \omega_i \epsilon_{ijk} (\Pi_{jk} + \Pi_{jk}^{\text{D}}) + (\lambda_{ji} - s_j v_i) \nabla_i \omega_j \\
& + \left[\Pi_{ji} + H_j B_i + E_j D_i - v_i g_j - \frac{1}{2} (h_i M_j - h_j M_i) \right. \\
& \left. + (\varepsilon - Ts - \xi\rho - \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \right. \\
& \left. - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}) \delta_{ij} \right] \nabla_i v_j. \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

Die Rotationsidentität, die bereits im vorigen Abschnitt zur Anwendung kam, hat nun aufgrund der zusätzlichen Vektorvariablen \mathbf{M} die Gestalt

$$\mathbf{v} \times \mathbf{g} + \mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{H} \times \mathbf{B} + \mathbf{h} \times \mathbf{M} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = 0. \quad (\text{A.31})$$

Diesen Ausdruck können wir wie vorher umschreiben, wir erhalten

$$\begin{aligned}
& H_j B_i + E_j D_i - v_i g_j - \frac{1}{2} (h_i M_j - h_j M_i) \\
= & \frac{1}{2} (H_i B_j + E_i D_j - v_j g_i + (i \leftrightarrow j)) + \frac{1}{2} (\omega_i s_j - \omega_j s_i). \quad (\text{A.32})
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt immer noch Gleichung (A.14). Alles zusammen liefert die folgenden Ausdrücke:

$$Q_i = T f_i^D + \Pi_{ij}^D v_j + c(\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^D \times \mathbf{H}^0)_i + (Ts + \xi\rho + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} + \omega \cdot \mathbf{s})v_i + \frac{1}{2}[\mathbf{v} \times (\mathbf{h} \times \mathbf{M} + \omega \times \mathbf{s})]_i \quad (\text{A.33})$$

$$R = -f_i^D \nabla_i T - \Pi_{ij}^D v_{ij} - j_{i,el}^D E_i^0 + \mathbf{E}^D \cdot (c \nabla \times \mathbf{H}^0) - \mathbf{h} \cdot \mathbf{X}^D + (\Omega_i - \omega_i) \epsilon_{ijk} (\Pi_{jk}^D), \quad (\text{A.34})$$

$$\Pi_{ij} = (Ts + \xi\rho + \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \omega \cdot \mathbf{s} - u) \delta_{ij} - \frac{1}{2}(H_i B_j + E_i D_j - v_j g_i + (i \leftrightarrow j)) + \frac{1}{2}(\omega_i s_j - \omega_j s_i), \quad (\text{A.35})$$

zusammen mit $\lambda_{ij} = s_i v_j$.

A.1.3 Die Berechnung der Tangentialkraftdichte

Der experimentelle Aufbau und damit die Geometrie ist in Abb. 3.7 verdeutlicht. Die zur Berechnung der Tangentialkraftdichte nötigen Elemente des Spannungstensors lauten

$$f_t = -\alpha(B_z \dot{B}_x - B_x \dot{B}_z)/2. \quad (\text{A.36})$$

Sie ergeben sich wie in Abschnitt 3.2.1 aus der Forderung nach der Stetigkeit des Impulsstroms beim Durchgang durch eine Trennfläche (vgl. [34]). Im Außenraum wird das Feld $\mathbf{B}^{(2)} = H_x^2 \cos \omega_B t \mathbf{e}_x + H_z^2 \cos \omega_B t \mathbf{e}_z$ angelegt. Wegen der Stetigkeit der Normalkomponente des magnetischen Feldes \mathbf{B} erhalten wir im inneren der Flüssigkeit direkt

$$B_z = H_z^2 \cos \omega_B t. \quad (\text{A.37})$$

Die Tangentialkomponente im inneren der Flüssigkeit ist dagegen

$$B_x = \mu H_x = \frac{(H_x^M - H_x^D)}{(1 - \chi)}, \quad (\text{A.38})$$

wobei der Nichtgleichgewichtsanteil im Ferrofluid durch $\mathbf{H}^D = \alpha \dot{\mathbf{B}}$ für eine ruhende Flüssigkeit gegeben ist. Eingesetzt in Gl. (A.38) erhalten wir daraus die konstituierende Relation

$$(1 - \chi)B_x + \alpha \dot{B}_x = H_x^2 \cos \omega t, \quad (\text{A.39})$$

wobei wieder die Stetigkeit von H_x ausgenutzt wurde. Der Ansatz

$$B_x = \frac{1}{2}(X e^{i\omega_B t} + X^* e^{i\omega_B t}) \quad (\text{A.40})$$

führt dann zur Lösung

$$B_x = \frac{1}{2} \left(\frac{H_x^2}{(1 - \chi) + i\omega_B \alpha} e^{i\omega_B t} + \frac{H_x^2}{(1 - \chi) - i\omega_B \alpha} e^{-i\omega_B t} \right) \quad (\text{A.41})$$

$$B_z = \frac{1}{2} (H_z^2 e^{i\omega_B t} + H_z^2 e^{-i\omega_B t}). \quad (\text{A.42})$$

Das Einsetzen dieser beiden Komponenten in Gl. (A.36) für die Tangentialkraftdichte liefert dann das Ergebnis

$$f_t = \frac{H_x^2 H_z^2}{2} \frac{(\omega_B \alpha)^2}{(1 - \chi)^2 + (\omega_B \alpha)^2}. \quad (\text{A.43})$$

ANHANG B

Die Energiedichte im niederfrequenten Limes

B.1 Vollständige Entwicklung der Energiedichte

Die Energiedichte eines magnetisierbaren Systems läßt sich wie die für ein polarisierbares System (vgl. [39]) in drei voneinander unabhängige Teile zerlegen:

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{mat}} + \varepsilon^{\text{em}} + \varepsilon^{\text{mic}}. \quad (\text{B.1})$$

Der erste Teil ist dabei die gewöhnliche thermodynamische Energiedichte in Abwesenheit äußerer elektromagnetischer Felder, der zweite Term beschreibt die zusätzliche Energie, die aus dem Anlegen ebensolcher Felder erwächst. Der dritte Teil schließlich beinhaltet sämtliche mikroskopische Variablen, die nicht explizit in den ersten beiden Termen enthalten sind. Gemäß der Diskussion in [39] ist dieser letzte Anteil hier außer acht zu lassen. Wir nehmen an, daß sämtliche beteiligte elektromagnetische Felder schwach genug sind, um linear konstituierende Relationen anwenden zu können. Folglich können wir die Energiedichte, die der Fundamentalgleichung

$$d\varepsilon = T ds + \xi d\rho + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H}^{\text{M}} \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{h} \cdot d\mathbf{M} + \omega \cdot ds \quad (\text{B.2})$$

genügt, folgendermaßen um ihren Gleichgewichtswert nach den Feldern entwickeln:

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{mat}} + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2\chi}M^2 + \frac{1}{2I}\mathbf{s}^2 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} - \gamma\mathbf{B} \cdot \mathbf{s} - \Theta\mathbf{M} \cdot \mathbf{s} + \frac{1}{2\epsilon}D^2. \quad (\text{B.3})$$

Für die Berechnung der thermodynamisch konjugierten Variablen ist es zweckmäßiger, die Legendre-Transformierte der Energiedichte $\varepsilon - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}$ zu betrachten. In diesen Variablen erklären wir die Temperatur und das chemische Potential in Abwesenheit äußerer Felder. Explizit lauten diese

$$T^{\text{mat}} := \frac{\partial(\varepsilon^{\text{mat}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g})}{\partial s}, \quad \text{und} \quad \xi^{\text{mat}} := \frac{\partial(\varepsilon^{\text{mat}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g})}{\partial \rho}. \quad (\text{B.4})$$

Wir erhalten damit die gesuchten konjugierten Variablen. Sie lauten

$$T = T^{\text{mat}} - \frac{1}{2\chi^2} M^2 \frac{\partial \chi}{\partial s} - \frac{1}{2I^2} \mathbf{s}^2 \frac{\partial I}{\partial s}, \quad (\text{B.5})$$

$$\xi = \xi^{\text{mat}} - \frac{1}{2\chi^2} M^2 \frac{\partial \chi}{\partial \rho} - \frac{1}{2I^2} \mathbf{s}^2 \frac{\partial I}{\partial \rho}, \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}, \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{H}^{\text{M}} = \mathbf{B} - \mathbf{M} - \gamma \mathbf{s}, \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\chi} \mathbf{M} - \mathbf{B} - \Theta \mathbf{s}, \quad (\text{B.9})$$

$$\boldsymbol{\omega}^{\text{M}} = \frac{1}{I} \mathbf{s} - \gamma \mathbf{B} - \Theta \mathbf{M}. \quad (\text{B.10})$$

Aus Gleichung (B.9) lernen wir das folgende über die Magnetisierung:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{h} + \chi \mathbf{B} + \chi \Theta \mathbf{s}. \quad (\text{B.11})$$

Wir erwarten jedoch, daß die Magnetisierung in diesem mesoskopischen Modell zerlegbar ist in einen Anteil $\mathbf{M}^{\text{eq}} = \mathbf{M}^{\text{eq}}(s, \rho, \mathbf{g}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{s})$, der dem äußeren angelegten Feld folgt, dementsprechend nicht unabhängig ist und nur von den Variablen der hydrodynamischen Theorie abhängt einerseits. Dazu kommt andererseits ein unabhängiger Anteil, der sich bezüglich des äußeren Feldes nicht im Gleichgewicht befindet. Dieser wird beschrieben durch das Inverse der Funktion

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{M}), \quad (\text{B.12})$$

welche wir hier mit $\delta \mathbf{M}(\mathbf{h})$ bezeichnen wollen. Mit anderen Worten läßt sich die Magnetisierung aufteilen in

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\text{eq}}(\mathbf{B}, \mathbf{s}) + \delta \mathbf{M}(\mathbf{h}). \quad (\text{B.13})$$

Ein Vergleich mit Gl. (B.11) liefert dann

$$\mathbf{M}^{\text{eq}}(\mathbf{B}, \mathbf{s}) = \chi(\mathbf{B} + \Theta \mathbf{s}) \quad (\text{B.14})$$

$$\delta \mathbf{M}(\mathbf{h}) = \chi \mathbf{h}. \quad (\text{B.15})$$

Ähnliche Ausdrücke erhalten wir auch für die Variablen aus Gln. (B.8) und (B.10). Dazu setzt man Gl. (B.11) in diese beiden Gleichungen ein. Damit folgt für Gl. (B.8)

$$\mathbf{H}^{\text{M}} = (1 - \chi) \mathbf{B} - (\chi \Theta + \gamma) \mathbf{s} - \chi \mathbf{h}. \quad (\text{B.16})$$

Zerlegen wir das Feld \mathbf{H}^{M} wie oben in die Variablen \mathbf{B} und \mathbf{s} einerseits und \mathbf{h} andererseits, bezeichnen den ersten Teil mit \mathbf{H} , den zweiten mit \mathbf{H}^{D} , um den Vergleich mit der hydrodynamischen Maxwell-Theorie zu gewährleisten, so entsprechen diesen beiden Anteilen die Ausdrücke

$$\mathbf{H} = (1 - \chi) \mathbf{B} - (\chi \Theta + \gamma) \mathbf{s}, \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{H}^{\text{D}} = -\chi \mathbf{h}. \quad (\text{B.18})$$

Analoges Vorgehen für $\omega^{\text{M}} = \omega(\mathbf{B}, \mathbf{s}) + \omega^{\text{D}}(\mathbf{h})$ beschert uns

$$\omega = \left(\frac{1}{I} - \Theta^2 \chi\right) \mathbf{s} - (\gamma + \chi \Theta) \mathbf{B}, \quad (\text{B.19})$$

$$\omega^{\text{D}} = -\chi \Theta \mathbf{h}. \quad (\text{B.20})$$

Ersetzen wir nun die Magnetisierung in der Energiedichte (B.3) durch den obigen Ausdruck (B.13), so erhalten wir die Gleichung

$$\varepsilon^{\text{em}} = \frac{1 - \chi}{2} B^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{I} - \Theta^2 \chi\right) s^2 - (\gamma + \Theta \chi) \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} + \frac{1}{2\epsilon} D^2 + \frac{\chi}{2} h^2. \quad (\text{B.21})$$

Diese muß im hydrodynamischen Limes $\omega \rightarrow 0$ in die hydrodynamische Energiedichte

$$\varepsilon^{\text{em,hyd}} = \frac{1}{2\mu} B^2 + \frac{1}{2I^{\text{hyd}}} s^2 - \beta \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} + \frac{1}{2\epsilon} D^2 \quad (\text{B.22})$$

übergehen. Daß dies so ist, wird im nächsten Abschnitt (B.2) gezeigt werden. Der Term proportional zu h^2 verschwindet in diesem Limes, so daß ein einfacher Koeffizientenvergleich folgendes liefert:

$$\chi = \frac{\mu - 1}{\mu} \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{I^{\text{hyd}}} - \Theta^2 \chi \quad (\text{B.24})$$

$$\gamma = \beta - \Theta \chi. \quad (\text{B.25})$$

Bis auf diese Umbenennung der entsprechenden Koeffizienten ändert die Mitnahme der Kopplungen $\mathbf{B} \cdot \mathbf{s}$ und $\mathbf{M} \cdot \mathbf{s}$ nichts an der Durchführbarkeit der Reduktion der mesoskopischen Gleichungen auf das hydrodynamische Gleichungssystem.

B.2 Äquivalenz der Energiedichten im Limes $\omega \rightarrow 0$

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie die Energiedichte der mesoskopischen Theorie für Ferrofluide im Limes $\omega \rightarrow 0$ in die der hydrodynamischen Maxwell-Theorie übergeht. Dazu starten wir mit dem Ausdruck für das Differential der Energiedichte. Im mesoskopischen Fall lautet dieses gemäß dem vorigen Abschnitt

$$d\varepsilon = T ds + \xi dp + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{g} + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H}^{\text{M}} \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{h} \cdot d\mathbf{M} + \omega \cdot ds. \quad (\text{B.26})$$

Wie bereits erwähnt, ist es zweckmäßig, hier stattdessen das thermodynamische Potential $f := \varepsilon - sT - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}$ zu verwenden. Mit der bereits im vorigen Abschnitt vorgenommenen Aufteilung der Energiedichte in zwei unabhängige Anteile

$$f = f^{\text{mat}} + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2\chi} M^2 + \frac{1}{2I} s^2 - \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2\epsilon} D^2 \quad (\text{B.27})$$

und den zugehörigen konjugierten Größen

$$\begin{aligned}\mathbf{g} &= \rho\mathbf{v} + \frac{1}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\mathbf{D} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon}D, \quad \mathbf{h} = \frac{1}{\chi}\mathbf{M} - \mathbf{B} \\ \mathbf{H}^M &= \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad \omega = \frac{1}{I}s\end{aligned}\tag{B.28}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}df &= df^{\text{mat}} - \frac{1}{2\chi^2}M^2\frac{\partial\chi}{\partial T}dT - \frac{1}{2\chi^2}M^2\frac{\partial\chi}{\partial\rho}d\rho - \frac{1}{2I^2}s^2\frac{\partial I}{\partial T}dT - \frac{1}{2I^2}s^2\frac{\partial I}{\partial\rho}d\rho \\ &\quad + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + (\mathbf{B} - \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{h} \cdot d(\chi\mathbf{B} + \chi\mathbf{h}) + \omega \cdot ds.\end{aligned}\tag{B.29}$$

Es wurde hierbei vorausgesetzt, daß die magnetische Suszeptibilität - genau wie später die Permeabilität - eine Funktion der Dichte und der Temperatur allein ist. Gleiches gilt auch für das "innere Trägheitsmoment" I .

Besehen wir uns das hydrodynamische Potential $f^{\text{hyd}} = \varepsilon^{\text{hyd}} - sT - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}^{\text{hyd}}$, dessen Entwicklung nach den schwachen Feldern unter der Voraussetzung $\mathbf{g} = \mathbf{g}^{\text{hyd}}$ dann

$$f^{\text{hyd}} = f^{\text{mat,hyd}} + \frac{1}{2\mu}B^2 + \frac{1}{2I^{\text{hyd}}}s^2 + \frac{1}{2\epsilon^{\text{hyd}}}D^2\tag{B.30}$$

liefert. Identifizieren wir die Koeffizienten I und ϵ mit I^{hyd} und ϵ^{hyd} , so folgt die Gleichheit der letzten beiden Terme in den jeweiligen Theorien. Es verbleibt demnach folgende Betrachtung:

$$\begin{aligned}df &= df^{\text{mat}} - \frac{1}{2\chi^2}M^2\frac{\partial\chi}{\partial T}dT - \frac{1}{2\chi^2}M^2\frac{\partial\chi}{\partial\rho}d\rho - \frac{1}{2I^2}s^2\frac{\partial I}{\partial T}dT - \frac{1}{2I^2}s^2\frac{\partial I}{\partial\rho}d\rho \\ &\quad + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + (\mathbf{B} - \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{B} + \mathbf{h} \cdot d(\chi\mathbf{B} + \chi\mathbf{h}) + \omega \cdot ds \\ &= df^{\text{mat}} - \frac{1}{2\chi^2}M^2\frac{\partial\chi}{\partial T}dT - \frac{1}{2\chi^2}M^2\frac{\partial\chi}{\partial\rho}d\rho - \frac{1}{2I^2}s^2\frac{\partial I}{\partial T}dT - \frac{1}{2I^2}s^2\frac{\partial I}{\partial\rho}d\rho \\ &\quad + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{B}d\mathbf{B} - \chi\mathbf{h} \cdot d\mathbf{B} - \chi\mathbf{B} \cdot d\mathbf{B} \\ &\quad + h^2d\chi + \chi\mathbf{h} \cdot d\mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{B}d\chi + \chi\mathbf{h} \cdot d\mathbf{B} + \omega \cdot ds.\end{aligned}\tag{B.31}$$

Da die Suszeptibilität eine Funktion der Temperatur und der Dichte ist, gilt $d\chi = \partial\chi/\partial T dT + \partial\chi/\partial\rho d\rho$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}df &= df^{\text{mat}} - \frac{1}{2I^2}s^2\frac{\partial I}{\partial T}dT - \frac{1}{2I^2}s^2\frac{\partial I}{\partial\rho}d\rho - \omega \cdot ds \\ &\quad + \left(h^2\frac{\partial\chi}{\partial T} - \frac{1}{2\chi^2}M^2\frac{\partial\chi}{\partial T}\right)dT + \mathbf{h} \cdot \mathbf{B}\frac{\partial\chi}{\partial T}dT \\ &\quad + \left(h^2\frac{\partial\chi}{\partial\rho} - \frac{1}{2\chi^2}M^2\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\right)d\rho + \mathbf{h} \cdot \mathbf{B}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}d\rho \\ &\quad + (1 - \chi)\mathbf{B} \cdot d\mathbf{B} + \frac{\chi}{2}h^2.\end{aligned}\tag{B.32}$$

Benutzen wir nun in der letzten Gleichung das Quadrat der Größe $\mathbf{h} = \mathbf{M}/\chi - \mathbf{B}$ und ersetzen damit die Größe $M^2/(2\chi^2)$, so folgt

$$\begin{aligned}
 df &= df^{\text{mat}} - \frac{1}{2I^2} s^2 \frac{\partial I}{\partial T} dT - \frac{1}{2I^2} s^2 \frac{\partial I}{\partial \rho} d\rho - \omega \cdot d\mathbf{s} \\
 &\quad + - \frac{B^2}{2} \frac{\partial \chi}{\partial T} dT - \frac{B^2}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} d\rho + (1 - \chi) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{B} + \mathcal{O}(h^2) \\
 &= df^{\text{hyd}} + \mathcal{O}(h^2).
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

Das letzte Gleichheitszeichen impliziert den Zusammenhang $\chi = \mu - 1/\mu$. Allgemein folgt also aus der letzten Relation die Beziehung

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{hyd}} + \mathcal{O}(h^2) + \text{const.} \tag{B.34}$$

Die Integrationskonstante des letzten Terms kann ohne Einschränkung gleich Null gesetzt werden, da bereits die Wahl des Energienullpunktes in beiden Theorien willkürlich erfolgte. Wesentlich ist nur die Erkenntnis, daß die Änderung eines äußeren Parameters in der einen Theorie auf eine geänderte Energiedichte führt, die mit der geänderten Energiedichte der anderen Theorie bis auf Terme der Ordnung h^2 übereinstimmt, auch wenn sie in anderen Variablen ausgedrückt wird.

Literaturverzeichnis

- [1] R. E. Rosensweig. Ferrohydrodynamics. *Cambridge University Press* (1985).
- [2] R. Massart, E. Dubois, V. Gabuil und E. Hasmonay. Preparation and properties of monodisperse magnetic fluids. *J. Mag. Mag. Mat.* **149**, 1 (1995).
- [3] B. M. Berkovsky, V. F. Medvedev und M.S. Krakov. Magnetic fluids: Engineering applications. *Oxford University Press* (1993).
- [4] P. C. Fannin, B. K. P. Scaife und S. W. Charles. The measurement of the frequency dependent susceptibility of magnetic colloids. *J. Mag. Mag. Mat.* **72**, 95 (1988).
- [5] J. P. McTague. Magnetoviscosity of magnetic colloids. *J. Chem. Phys.* **51** (1), 133 (1969).
- [6] M.I. Shliomis. Hydrodynamics of a liquid with intrinsic rotation. *Sov. Phys. JETP* **24** (1), 173 (1967).
- [7] M. I. Shliomis. Equations of motion of a fluid with hydromagnetic properties. *Sov. Phys. JETP* **26** (3), 665 (1968).
- [8] M. I. Shliomis. Effective viscosity of magnetic suspensions. *Sov. Phys. JETP* **34** (6), 1291 (1972).
- [9] M.I. Shliomis. Magnetic fluids. *Sov. Phys.-Usp.* **17** (2), 153 (1974).
- [10] A. Zeuner. Strömungsverhalten magnetischer Flüssigkeiten. *Ph. D thesis* (1998).
- [11] L.D. Landau und E.M. Lifshitz. Electrodynamics of continuous media. *Pergamon Press Oxford* (1986).
- [12] P. Kostädt und Mario Liu. Three ignored densities, frame-independent thermodynamics and broken galilean symmetry. *Preprint : cond-mat / 9806317* (1998).
- [13] S. Lissek. *Diploma thesis, Universität Hannover* (1998).
- [14] K. Henjes und M. Liu. Hydrodynamics of polarizable liquids. *Ann. Phys.* **223**, 243 (1993).
- [15] J.-C. Bacri, R. Perzynski, M.I. Shliomis und G.I. Burde. "Negative-viscosity" effect in a magnetic fluid. *Phys. Rev. Lett.* **75** (11), 2128 (1995).
- [16] H. W. Müller und M. Liu. The structure of ferro-fluid dynamics. *to be published ...*
- [17] M. Liu. Hydrodynamic theory of electromagnetic fields in continuous media. *Phys. Rev. Lett.* **70** (23), 3580 (1993).

- [18] M. Liu. Fluid dynamics of colloidal magnetic and electric liquids. *Phys. Rev. Lett.* **74** (22), 4535 (1995).
- [19] L.D. Landau und E.M. Lifshitz. Fluid mechanics. *Pergamon Press Oxford* (1987).
- [20] R. E. Rosensweig, J. Popplewell und R. J. Johnston. Magnetic fluid motion in rotating field. *J. Mag. Mag. Mat.* **85**, 171 (1990).
- [21] M. Liu. Off-equilibrium, static fields in dielectric ferrofluids. *Phys. Rev. Lett.* **80** (13), 2937 (1998).
- [22] M. Liu und K. Stierstadt. Electromagnetic force and the maxwell stress tensor in condensed systems. *Preprint : cond-mat / 0010261* (2000).
- [23] P.C. Martin, O. Parodi und P.S. Pershan. Unified hydrodynamic theory for crystals, liquid crystals, and normal fluids. *Phys. Rev. A* **6** (6), 2401 (1972).
- [24] S. Chandrasekhar. Liquid crystals. *Cambridge University Press* (1992).
- [25] M. Liu. Maxwell equations in nematic liquid crystals. *Phys. Rev. E* **50** (4), 2925 (1994).
- [26] H. Temmen. Die dissipative dynamik elastischer und polarisierbarer medien. *Shaker Verlag, Aachen* (1997).
- [27] I. M. Khalatnikov. Introduction to the theory of superfluidity. *Verlag W.A. Benjamin* (1965).
- [28] L. D. Landau und E. M. Lifschitz. Statistische Physik, Teil I. *Verlag Harri Deutsch* (1987).
- [29] H. B. Callen. Thermodynamics and an introduction to thermostatistics. *John Wiley & Sons* (1985).
- [30] M. Liu. The onsager symmetry relation and the time inversion invariance of the entropy production. *Preprint : cond-mat / 9806318* (1998).
- [31] L.D. Landau und E.M. Lifschitz. Physikalische Kinetik. *Akademie-Verlag Berlin* (1981).
- [32] S. Lissek und M. Liu. Effective viscosity of magnetic fluids. *to be published ...*
- [33] H. W. Müller und A. Engel. Dissipation in ferrofluids: mesoscopic versus hydrodynamic theory. *Phys. Rev. E* **60** (6), 7001 (1999).
- [34] S. Symalla und M. Liu. Boundary conditions of the hydrodynamic theory of electromagnetism. *Physica B* **255**, 132 (1998).
- [35] M.I. Shliomis und K.I. Morozov. Negative viscosity of ferrofluid under alternating magnetic field. *Phys. Fluids* **6** (8), 2855 (1994).
- [36] D. Forster. Hydrodynamic fluctuations, broken symmetrie, and correlation functions. *Verlag W.A. Benjamin* (1975).

- [37] Y.Jiang und M. Liu. Dynamics of dispersive and nonlinear media. *Phys. Rev. Lett.* **77** (6), 1043 (1996).
- [38] Y. Jiang. *Ph. D thesis* (1996).
- [39] Y. Jiang und M. Liu. Electromagnetic force in dispersive and transparent media. *Phys. Rev. E* **58** (5), 6685 (1998).

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Liu für die Vergabe des interessanten Themas, die vielen wertvollen Anregungen und seine Bereitschaft, ein Thema als abgeschlossen anzuerkennen, wenn es abgeschlossen ist, bedanken.

Danken möchte ich auch Dr. Hanns Walter Müller für fruchtbare E-Mails.

Martin Müller, Siniša Karnas und Carsten Reinhardt danke ich dafür, daß sie mich während meines Studiums stets begleiteten. Joachim Kullmann danke ich dafür, daß er mich während der Zeit außerhalb des Studiums stets begleitet hat.

Alles andere kann kaum in Worten ermessen werden. Sonst wird es noch pathetischer als dieser letzte Satz. Wer kann das schon wollen?

Lebenslauf

15. November 1972	Geburt in Kassel
1979 - 1983	Grundschule, Fuldataal - Ihringshausen
1983 - 1992	Gymnasium, Kassel
Mai 1992	Allgemeine Hochschulreife
1992 - 1993	Wehrdienst
1993 - 1995	Studium der Physik an der Universität Göttingen
1995 - 1998	Studium der Physik an der Universität Hannover
Dezember 1998	Diplom in Physik
Januar 1999 - Februar 2001	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Hannover

