

Konstruktion von Splineräumen mit verschiedenen ECT-Systemen und Anwendungen auf Cauchy-Vandermonde-Splines

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. BERND BUCHWALD
geboren am 04. Dezember 1964 in Halle

2001

Referent: Prof. Dr. G. Mühlbach, Universität Hannover
Korreferent: Prof. Dr. K. Schnoegel, Universität Hannover

Tag der Promotion: 12.07.2001
Datum der Veröffentlichung: Juli 2001

Zusammenfassung

Wir zeigen, daß der bekannte Nullstellensatz für polynomiale Splines von Jetter/Lorentz/Riemenschneider [6], also $Z(s, (x_p, x_q)) \leq \sigma - L(\Phi) - 2$ für ein Trägerintervall $[x_p, x_q]$, auch in verallgemeinerten Splineräumen gilt, wenn man für singuläre Punkte eine geeignete Definition mit Hilfe von ECT-Ableitungen trifft. Daraus leiten wir hinreichende Bedingungen dafür her, daß alle Elemente eines Splineräume in einem Trägerintervall $[x_p, x_q]$ höchstens $\sum_{i=p}^{q-1} d_i - \sum_{i=p}^q \mu_i - 1$ Nullstellen haben. In diesen Räumen ist eindeutige Hermite-Interpolation möglich, wenn die Interpolationsknoten eine Mischbedingung erfüllen. Wir konstruieren lokale Basen mit Hilfe linearer Gleichungssysteme, die aus geeigneten Interpolationsaufgaben entstehen. Dabei können wir die auf Integral = 1 normierten B-Splines ohne erhöhten Rechenaufwand konstruieren, während für die auf Teilung der Eins normierten Splines ein weiteres Gleichungssystem gelöst werden muß. Anschließend betrachten wir rationale Splines mit in jedem Knotenintervall individuell vorgegebenen Polstellen. Für spezielle Wahl der Pole können wir zeigen, daß rationale Splines gegen polynomiale Splines konvergieren und damit letztere um zwei Ordnungen glätten.

Schlagwörter: verallgemeinerte Splines, lokale Basen, vorgegebene Polstellen

Abstract

We prove that the well known theorem for polynomial splines by Jetter/Lorentz/Riemenschneider [6], $Z(s, (x_p, x_q)) \leq \sigma - L(\Phi) - 2$ for a support interval $[x_p, x_q]$, is valid in generalized spline spaces if we adopt a suitable definition of singular points by using ECT-derivations. Using this, we find sufficient conditions under which all elements of a spline space have at most $\sum_{i=p}^{q-1} d_i - \sum_{i=p}^q \mu_i - 1$ zeros in a support interval $[x_p, x_q]$. These spaces allow unique Hermite interpolation, providing the interpolation points satisfy an interlacing property. We construct local bases by using systems of linear equations resulting from certain interpolation problems. By doing this, we can construct B-splines normed by integral = 1 at no additional cost, while for splines forming a partition of unity we need to solve an additional system of linear equations. We then consider rational splines with prescribed poles given individually in every interval. For a special choice of poles we can show that rational splines converge to polynomial splines and thereby smooth the latter by the order of two.

Keywords: generalized splines, local bases, prescribed poles

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 ECT-Systeme	10
1.1 Čebyšev-Systeme	10
1.2 Normaldarstellungen einiger CV-Systeme	17
2 Splineräume	20
2.1 Definitionen, Einseitige Basen	20
2.2 Ein Nullstellensatz	24
2.3 Interpolation	34
2.4 Konstruktion lokaler Basen in IP-Räumen	37
2.4.1 Lokale Basen in IP-Räumen maximaler Glattheit, deren ECT- Räume die gleiche Dimension haben	38
2.4.2 Lokale Basen in beliebigen IP-Räumen	45
3 Cauchy-Vandermonde-Splines	50
3.1 Gresbrandsche B-Splines	50
3.2 Cauchy-Vandermonde-Splines aus CV-Systemen mit zwei symmetri- schen Polstellen	52
3.2.1 Definition, Beispiele	53
3.2.2 Konvergenz rationaler B-Splines gegen einen polynomialen B- Spline	55
3.3 Splineräume aus CV-Systemen mit unsymmetrischen Polstellen	63
3.3.1 Eine Verallgemeinerung des Konvergenzsatzes	63

3.3.2 Ein weiteres Beispiel	65
Anhang: Koeffizienten einiger Cauchy–Vandermonde–Splines	68
Symbolverzeichnis	77
Literaturverzeichnis	79

Einleitung

Eine einfache Methode zur Approximation von Funktionen durch solche aus einem endlichdimensionalen Raum ist die Interpolation. In Polynomräumen oder allgemeiner in erweiterten vollständigen Čebyšev-Räumen (ECT-Räumen) ist bekanntlich eindeutige Hermite-Interpolation möglich, wenn die Anzahl der Interpolationspunkte mit der Dimension des Raumes übereinstimmt. Elemente aus einem ECT-Raum U sind damit jedoch durch die Vorgabe weniger Punkte eindeutig bestimmt und eignen sich bekanntermaßen nicht zur Approximation von Funktionen auf einem großen Intervall. Deshalb zerteilt man das Intervall $[a, b]$, auf dem die Funktionen aus U definiert sind, in mehrere kleine und betrachtet Funktionen, die stückweise aus Elementen von U zusammengesetzt sind, wobei an den Nahtstellen Glattheitsbedingungen erfüllt sein sollen. Die so entstehenden Funktionenräume nennt man Polynomsplineräume oder allgemein Čebyšev-Splineräume und ihre Elemente Splines. Insbesondere polynomiale Splines haben wie Polynome den Vorzug großer Einfachheit, sind aber im Gegensatz zu diesen auch global sehr flexibel.

Die polynomiale Theorie ist weit entwickelt, ein Standardwerk ist Schumaker [12]. Viele Ergebnisse konnten auf Čebyšev-Splineräume übertragen werden, zum Beispiel fand Lyché [8] eine Rekursionsformel für B-Splines, die allerdings keinen Hinweis darauf liefert, wie man in den Fällen, in denen das möglich ist, die B-Splines so normiert, daß sie eine lokale Zerlegung der Eins bilden.

Eine mögliche Wahl eines ECT-Raums ist ein Cauchy-Vandermonde-Raum (CV-Raum)

$$U = \text{span} \left\{ 1, x, \dots, x^{r_1-1}, \frac{1}{x - P_2}, \dots, \frac{1}{(x - P_2)^{r_2}}, \dots, \frac{1}{x - P_m}, \dots, \frac{1}{(x - P_m)^{r_m}} \right\}.$$

Einen Čebyšev-Splineräum V , der stückweise aus Funktionen aus U besteht, nennen wir Cauchy-Vandermonde-Splineräum. Gresbrand [4], [5] ist es gelungen, eine Rekursionsformel für die auf Teilung der Eins normierten B-Splines aus V anzugeben. Die Rekursion stimmt für den Fall, daß alle Polstellen bei unendlich liegen, mit der polynomialen von de Boor überein.

Ein Nachteil von Čebyšev-Splineräumen ist, daß sie nur aus einem ECT-Raum konstruiert werden und sich so zum Beispiel im Fall von Cauchy-Vandermonde-Splineräumen

ergibt, daß sämtliche Polstellen außerhalb von $[a, b]$ liegen müssen. Deshalb unterscheiden sich die Gresbrandschen B-Splines nur in einer kleinen Umgebung der Randpunkte wesentlich von den polynomialen.

Wir setzen an diesem Punkt an: Um mehr Flexibilität bei der Wahl der Polstellen zu gewinnen und insbesondere die Möglichkeit zu haben, sie in das Innere des Intervalls $[a, b]$ zu legen, untersuchen wir Cauchy–Vandermonde–Splineräume, die aus verschiedenen CV-Räumen zusammengesetzt sind. Dazu verallgemeinern wir den Begriff des Splineriums, indem wir – anders als bei Čebyšev–Splineräumen – nicht mehr fordern, daß die definierenden ECT-Räume identisch sind, und diese dann insbesondere auch verschiedene Dimension haben können. Unser Ziel ist es, eine Theorie zu entwickeln, die es gestattet, in einer großen Klasse verallgemeinerter Splineräume lokale Basen zu konstruieren. Da es im allgemeinen keine Rekursionsformeln für B-Splines geben kann, berechnen wir sie mit Hilfe linearer Gleichungssysteme, die durch die Formulierung geeigneter Interpolationsprobleme entstehen.

Verallgemeinerte Splineräume wurden bisher wenig untersucht. Die umfangreichste uns bekannte Arbeit ist die Dissertation von Freyburger [2]. Er verwendet die Resultate von Nürnberger, Schumaker, Sommer, Strauß [9], [10], [11] und entwickelt einen Remez-Algorithmus zur Approximation mit verallgemeinerten Splines. In jener Arbeit wird auch ein Nullstellensatz bewiesen, indem die Methoden von Schumaker [12] p. 155 ff auf den allgemeinen Fall übertragen werden. Wir gehen hier einen anderen Weg und finden eine obere Schranke für die Anzahl der Nullstellen eines Splines, die im Fall von Polynomsplines der von Jetter/Lorentz/Riemenschneider [6] entspricht. Mit Hilfe dieser Abschätzung zeigen wir, daß die Übereinstimmung der Vorzeichen der relevanten ECT-Ableitungen in den Knoten eine hinreichende (aber keine notwendige) Bedingung dafür ist, daß ein solcher Raum schwach Čebyšev ist. In diesen Räumen ist Hermite-Interpolation genau dann eindeutig möglich, wenn die Interpolationsknoten richtig auf die Intervalle verteilt sind (Mischbedingung). Räume die eindeutige Interpolation zulassen, nennen wir IP-Räume. Der Interpolationssatz garantiert, daß die zur Berechnung von B-Splines definierten Gleichungssysteme in IP-Räumen eindeutig lösbar sind. Es gelingt uns, sowohl auf Integral = 1 als auch auf lokale Zerlegung der Eins normierte Splines zu berechnen, letzteres natürlich nur in Splineräumen, deren definierende ECT-Räume die konstanten Funktionen enthalten.

Betrachten wir speziell verallgemeinerte Cauchy–Vandermonde–Splineräume, so sehen wir, daß sich die B-Splines wesentlich von den polynomialen unterscheiden und je nach Wahl der Lage der Polstellen verschiedene Effekte eintreten. Wir untersuchen insbesondere Räume, deren definierende CV-Räume zwei einfache Polstellen haben, von denen je eine links und rechts der Knoten liegt. Läßt man die Polstellen auf die Intervallenden zustreben, so konvergieren die B-Splines der Dimension d gegen einen polynomialen B-Splines vom Grad $d - 3$. Dies gibt uns insbesondere im Fall $d = 4$ eine einfache Möglichkeit, zweimal stetig differenzierbare „Ecken“ zu modellieren.

An dieser Stelle sei ein kurzer Überblick über den Aufbau der Arbeit gegeben:

In Kapitel 1 führen wir Čebyšev–Systeme und insbesondere ECT–Systeme ein. Neben der Vereinbarung von Notationen liegt unser Hauptaugenmerk auf der Betrachtung von ECT–Ableitungen, die hier die Rolle der gewöhnlichen Ableitungen übernehmen und später erfolgreich zum Zählen der Nullstellen eines Splines verwendet werden. Anschließend berechnen wir die Normalformen einiger Cauchy–Vandermonde–Systeme, die wir in Kapitel 3 zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens der Koeffizienten rationaler Splines benötigen.

Im zweiten Kapitel wird die Theorie allgemeiner Splineräume entwickelt. Zunächst bestimmen wir die Dimension von Splineräumen und betrachten verschiedenartige Basen. Anschließend werden die erwähnten Nullstellen– und Interpolationssätze bewiesen und lokale Basen konstruiert. Letzteres zunächst in Räumen gleicher Dimension und maximaler Glattheit und anschließend in beliebigen IP–Räumen.

Im letzten Kapitel untersuchen wir Cauchy–Vandermonde–Splines. Wir gehen kurz auf Gresbrandsche B–Splines ein, betrachten verschiedene Beispiele und beweisen oben angesprochenen Konvergenzsatz, der anschließend noch verallgemeinert wird.

Zum Gelingen dieser Dissertation haben viele Personen beigetragen. Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. G. Mühlbach, der mein Interesse an diesem Teilgebiet der Mathematik weckte und mir während der Erstellung der Arbeit mit vielen Anregungen, Hinweisen und großer Geduld zur Seite stand. Herrn Prof. Dr. K. Schnoege danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr. L. Baringhaus für einen wertvollen Hinweis und meinen Freunden und Kollegen Dr. Christian Alpert, Dr. Boris Buchmann, Dr. Anke Reimers und Dipl. Math. Matthias Teltscher für die vielen anregenden Diskussionen, ihre Hilfen beim Korrekturlesen und nicht zuletzt für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Ich danke all meinen Freunden insbesondere Detlef Ackermann, Nuria Merayo und Dr. Holger Tröbs dafür, daß unsere Freundschaft auch das vergangene Jahr überdauert hat.

Mein besonderer Dank gilt meiner Freundin Patricia Hübner, die durch ihr Verständnis, ihre unendliche Geduld und durch das wiederholte Lesen des für sie unverständlichen Textes einen großen Anteil an der Fertigstellung der Arbeit hat.

Kapitel 1

ECT–Systeme

Ein Splineraum S ist ein Raum aus auf einem Intervall $[a, b]$ definierten Funktionen (Splines), die stückweise aus Funktionen bestehen, die auf Teilintervallen von $[a, b]$ definiert sind, wobei an den Verheftungspunkten gewisse Glattheitsbedingungen erfüllt sein sollen (siehe Kapitel 2.1). Damit es aber überhaupt eine reichhaltige Anzahl von Splines in S gibt, muß man fordern, daß in den zugrundeliegenden Funktionenräumen Interpolation möglich ist. (Hat man etwa auf dem Intervall $[0, \pi]$ den Raum $\text{span}\{\sin x, x\}$, auf dem Intervall $[\pi, 4]$ den Raum $\text{span}\{(x - \pi), (x - \pi)^2\}$, und fordert man für einen „Spline“ $s : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ Stetigkeit, so ist die Identität als Element des ersten Raumes gewissermaßen überflüssig. Auch, daß jeder Spline an der Stelle π den Funktionswert 0 hat, ist keine wünschenswerte Eigenschaft. Deshalb hat es wenig Sinn, solche Räume zu betrachten.)

Im ersten Abschnitt werden wir Čebyšev–Räume einführen, die als Verallgemeinerung von Polynomräumen zur Konstruktion von Splineräumen geeignet sind.

Kapitel 1.2 hat eher Hilfscharakter: Wir berechnen die Gewichtsfunktionen und Normalformen einiger Cauchy–Vandermonde–Systeme. Diese expliziten Darstellungen werden für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Koeffizienten von speziellen Cauchy–Vandermonde–Splines in den Kapiteln 3.2 und ?? benötigt.

1.1 Čebyšev–Systeme

Erweiterte vollständige Čebyšev–Räume besitzen gerade die Interpolationseigenschaften, die die aus ihnen konstruierten Splineräume zu interessanten Objekten machen. Wir werden sie in diesem Abschnitt kurz einführen und ein wichtiges Lemma über Nullstellen in ECT–Räumen beweisen.

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Ein n –dimensionaler Teilraum U von $C[a, b]$ heißt *Čebyšev–Raum*, falls er eindeutige Lagrange–Interpolation zuläßt, das heißt, für

jede Knotenfolge $a \leq \tau_1 < \dots < \tau_n \leq b$ und alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $u \in U$ mit

$$u(\tau_i) = \alpha_i.$$

Äquivalent dazu ist offenbar, daß für jede Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von U gilt

$$\det (u_i(\tau_j))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n} \neq 0. \quad (1.1)$$

Da Determinanten stetige Funktionen ihrer Einträge sind, ist obige Determinante von einerlei Vorzeichen. Ist dies positiv, so heißt $\{u_1, \dots, u_n\}$ *Čebyšev-System* oder *T-System*. Ist eine Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von U gegeben, so ist für geeignetes $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$ die Basis $\{\varepsilon_1 u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ein *T-System*.

Gibt es in U eine geordnete Basis $[u_1, \dots, u_n]$, so daß für alle $i = 1, \dots, n$ die Menge $\{u_1, \dots, u_i\}$ ein *Čebyšev-System* ist, so heißt U *vollständiger Čebyšev-Raum* und $[u_1, \dots, u_n]$ *vollständiges Čebyšev-System* bzw. *CT-System*.

Da wir für unsere Splines meist nicht nur Stetigkeit, sondern höhere Glattheit fordern, benötigen wir Räume, in denen Hermite-Interpolation möglich ist.

Sei U ein n -dimensionaler Teilraum des $C^{m-1}[a, b]$. U heißt *erweiterter Čebyšev-Raum* oder *ET-Raum* der Ordnung m , falls für jede schwach wachsende Folge von Interpolationsknoten $a \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_n \leq b$, in der jeder Knoten höchstens m mal auftritt, das Hermite-Interpolationsproblem

$$D^{\nu_i} u(\tau_i) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \nu_i := \#\{\tau_j \mid \tau_j = \tau_i, j = 1, \dots, i-1\}$$

eindeutig lösbar ist. D bezeichnet den Differentialoperator $\frac{d}{dx}$. In Analogie zu oben nennen wir eine Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von U *erweitertes Čebyšev-System* oder *ET-System*, wenn gilt

$$\det (D^{\nu_j} u_i(\tau_j))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n} > 0. \quad (1.2)$$

Da die obige Determinante wiederum für jede Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von U und jede zulässige Wahl der Interpolationsknoten τ_i von einerlei Vorzeichen ist, kann man durch geeignete Wahl von $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$ aus $\{u_1, \dots, u_n\}$ ein *ET-System* $\{\varepsilon_1 u_1, u_2, \dots, u_n\}$ gewinnen.

Ein n -dimensionaler Teilraum U des $C^{n-1}[a, b]$ heißt *vollständiger erweiterter Čebyšev-Raum* (*ECT-Raum*), falls es eine geordnete Basis $[u_1, \dots, u_n]$ von U gibt, so daß $\{u_1, \dots, u_k\}$ für alle $1 \leq k \leq n$ ein *ET-System* der Ordnung k ist. Wir nennen $[u_1, \dots, u_n]$ *erweitertes vollständiges Čebyšev-System* oder kurz *ECT-System*.

Beispiele. (i) Der Prototyp für alle vier oben definierten Systeme ist

$$[1, x, x^2, \dots, x^{n-2}, x^{n-1}].$$

Die auftretenden Determinanten sind in diesem Fall die gewöhnliche Vandermondesche Determinante und die gewöhnliche konfluente Vandermondesche Determinante, die bekanntermaßen einen positiven Wert haben, nämlich im Fall einfacher Knoten

$$\det (u_i(\tau_j))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\tau_j - \tau_i),$$

und im Fall mehrfacher Knoten

$$\det (D^{\nu_j} u_i(\tau_j))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i)^{r_i r_j} \prod_{j=1}^n (\nu_j!),$$

wobei $\{z_1, \dots, z_l\} := \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$ und r_i die Vielfachheit von z_i in (τ_1, \dots, τ_n) ist.

(ii) Seien $[a, b]$ ein Intervall und $P_2, \dots, P_m \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ paarweise verschieden. Dann heißt

$$[u_1, u_2, \dots, u_n] = \left[1, x, \dots, x^{r_1-1}, \frac{1}{x - P_2}, \dots, \frac{1}{(x - P_2)^{r_2}}, \dots, \frac{1}{x - P_m}, \dots, \frac{1}{(x - P_m)^{r_m}} \right],$$

ein *Cauchy-Vandermonde-System* oder kurz *CV-System*. Sei

$$(p_1, \dots, p_n) = (\underbrace{\infty, \dots, \infty}_{r_1}, \underbrace{P_2, \dots, P_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{P_m, \dots, P_m}_{r_m}).$$

Wir schreiben für $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$$x^* := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x = \infty \\ x & \text{sonst} \end{cases}.$$

Seien $a \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_n \leq b$ und ν_i wieder die Anzahl der Vorgänger von τ_i , die mit τ_i identisch sind. Dann gilt für $1 \leq p \leq n$ die folgende Formel (Gasca/Martinez/Mühlbach [3] p. 301)

$$\det (D^{\nu_j} u_i(\tau_j))_{j=1,\dots,p}^{i=1,\dots,p} = \prod_{k=1}^p (\nu_k!) \cdot \frac{\prod_{\substack{k,j=1 \\ k>j}}^p (\tau_k - \tau_j)^* \prod_{\substack{k,j=1 \\ k>j}}^p (p_k - p_j)^*}{\prod_{\substack{k,j=1 \\ k \geq j}}^p (\tau_k - p_j)^* \prod_{\substack{k,j=1 \\ k > j}}^p (p_k - \tau_j)^*} (\neq 0), \quad (1.3)$$

die offenbar eine Verallgemeinerung der beiden obigen Formeln ist.

Nach eventueller Multiplikation eines Elementes mit -1 ist also $[u_1, \dots, u_m]$ ein ET-System. Somit ist mit geeigneten $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ das Cauchy-Vandermonde-System $[\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2, \dots, \varepsilon_n u_n]$ ein ECT-System. Mit diesen Systemen, die gerade die Bausteine rationaler Splineräume mit vorgegebenen Polstellen sind, werden wir uns im zweiten Teil dieses Kapitels beschäftigen.

Bemerkung. In Anlehnung an die bei Polynomen übliche Terminologie nennen wir auch im allgemeinen Fall die Determinanten aus (1.1) und (1.2) Vandermondedeterminanten.

Es gilt die folgende Charakterisierung von ECT-Systemen durch die Wronskideterminanten der Teilsysteme:

Satz 1.1. Seien $u_1, \dots, u_n \in C^{n-1}[a, b]$. Dann ist $[u_1, \dots, u_n]$ ein ECT-System gdw. für alle $1 \leq j \leq n$ und alle $x \in [a, b]$ gilt

$$W(u_1, \dots, u_j)(x) := \det (D^i u_k(x))_{i=0, \dots, j-1}^{k=1, \dots, j} > 0.$$

Beweis. Karlin/Studden [7], p. 376 . □

Seien für $i = 1, \dots, n$ positive Funktionen $w_i \in C^{n-i}[a, b]$ gegeben. Dann genügen die Funktionen

$$\begin{aligned} u_1(x) &= w_1(x) \\ u_2(x) &= w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) ds_2 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ u_n(x) &= w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) \int_a^{s_2} \cdots \int_a^{s_{n-1}} w_n(s_n) ds_n \cdots ds_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

offensichtlich den Anfangsbedingungen

$$D^j u_i(a) = 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, n, j = 0, \dots, i - 2. \tag{1.5}$$

Es gilt der folgende

Satz 1.2. Seien $u_1, \dots, u_n \in C^{n-1}[a, b]$, so daß $D^j u_i(a) = 0$ für $i = 2, \dots, n$ und $j = 0, \dots, i - 2$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Das System $[u_1, \dots, u_n]$ besitzt eine Integraldarstellung (1.4).
- (ii) $[u_1, \dots, u_n]$ ist ein ECT-System auf $[a, b]$.

Beweis. Karlin/Studden [7], p. 379 f . □

Hat ein ECT-System $[\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n]$ nicht die Form (1.4), so können wir aus ihm immer ein solches konstruieren, das denselben Raum aufspannt. Wir berechnen die Gewichtsfunktionen

$$\begin{aligned} w_1 &= \tilde{u}_1 \\ w_2 &= \frac{W(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)}{\tilde{u}_1^2} \\ w_k &= \frac{W(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{k-2})W(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k)}{(W(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{k-1}))^2}, \quad k = 3, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Für das daraus gewonnene System $[u_1, \dots, u_n]$ gilt

$$\text{span}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{span}\{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Es heißt ECT-System in *Normaldarstellung* oder in (*Links-*)*Normalform*. Außer in konkreten Beispielen werden wir in Zukunft immer davon ausgehen, daß ein ECT-System in Normalform vorliegt. Dies hat hauptsächlich den folgenden Grund: Viele Eigenschaften von Polynomen und Polynomsplines beweist man mit Hilfe ihrer Ableitungen. Die gewöhnlichen Ableitungen sind allerdings kaum ein geeignetes Werkzeug bei der Betrachtung von ECT-Räumen und später verallgemeinerten Splineräumen, denn die Ableitung einer Funktion aus einem ECT-Raum ist ihrerseits nicht notwendigerweise wieder ein Element dieses oder eines anderen ECT-Raumes. Deshalb ersetzen wir die gewöhnlichen Ableitungen durch Differentialoperatoren, die eng mit ihnen verwandt sind, die eben erwähnten Nachteile aber nicht haben. Für deren Definition benötigt man die Gewichtsfunktionen w_1, \dots, w_n , also ein ECT-System in Normaldarstellung.

Analog zur obigen Normalform eines ECT-Systems, bei dem die Elemente des Systems im Punkt a den Anfangsbedingungen (1.5) genügen, können wir auch ein entsprechendes Normalsystem konstruieren, für deren Elemente dies im Punkt b gilt, indem wir bei der Integration der Gewichtsfunktionen als obere Grenze jeweils b wählen. Ein solches System nennen wir *Rechtsnormalsystem*.

Sei $u \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$. Sei

$$D_0 u = u \quad \text{und} \quad D_i u = D\left(\frac{u}{w_i}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Wir definieren

$$L^i = D_i D_{i-1} \cdots D_0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Für $u \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ nennen wir die Funktion $L^j u$ die *ECT-Ableitung* der Ordnung j von u ($j = 0, \dots, n$).

Bemerkung. Wir werden später auch Systeme $[u_1, \dots, u_n]$ betrachten, die selbst keine ECT-Systeme sind, für die aber $[\varepsilon_1 u_1, \dots, \varepsilon_n u_n]$ mit geeigneten $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ ein solches ist (s.o.: Cauchy-Vandermonde-Systeme). Trotzdem werden wir auch $[u_1, \dots, u_n]$

ECT-System nennen, zumal, wenn sich die Bestimmung der ε_i als schwierig und nicht nötig herausstellt. Um gegebenenfalls den Unterschied deutlich zu machen, sprechen wir dann von $[\varepsilon_1 u_1, \dots, \varepsilon_n u_n]$ als einem ECT⁺-System. Bei theoretischen Betrachtungen ist aber mit ECT-System immer ein „richtiges“ gemeint. (Die Forderung, daß die entsprechenden Vandermondedeterminanten nicht nur von Null verschieden sondern größer als Null sind, die im Fall von T-, CT- und ET-Systemen eigentlich belanglos ist, ist hier dann von Bedeutung, wenn man aus einem ECT-System ein ECT-System in Normalform konstruieren möchte.)

Wie schon oben angesprochen, ist eine wichtige Eigenschaft von Polynomen, daß ihre Ableitungen wiederum Polynome (niedrigerer Ordnung) sind. Ähnliches gilt auch für die ECT-Ableitungen von Funktionen aus einem ECT-System. Für $j = 1, \dots, n-1$ sei

$$\begin{aligned} u_{j,1}(x) &= w_{j+1}(x) \\ u_{j,2}(x) &= w_{j+1}(x) \int_a^x w_{j+2}(s_{j+2}) ds_{j+2} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ u_{j,n-j}(x) &= w_{j+1}(x) \int_a^x w_{j+2}(s_{j+2}) \int_a^{s_{j+2}} \cdots \int_a^{s_{n-1}} w_n(s_n) ds_n \cdots ds_{j+2}. \end{aligned}$$

Dann ist $[u_{j,1}, \dots, u_{j,n-j}]$ wieder ein ECT-System, es heißt *j-tes reduziertes System*, und es gilt

$$L^j u_i = \begin{cases} u_{j,i-j} & \text{für } i = j+1, \dots, n \\ 0 & \text{für } i = 1, \dots, j \end{cases}. \quad (1.7)$$

Die *j*-te ECT-Ableitung eines Elementes $u \in \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ ist also wiederum ein Element eines ECT-Raumes, nämlich des vom *j*-ten reduzierten System aufgespannten Raumes.

Das folgende Lemma ist für das Weitere von großer Bedeutung. Es besagt, daß man für das Zählen von Nullstellen (mit Vielfachheiten) statt wie üblich die gewöhnlichen Ableitungen auch die ECT-Ableitungen verwenden kann.

Lemma 1.3. *Seien $[u_1, \dots, u_n]$ ein ECT-System in Normalform mit Gewichtsfunktionen w_1, \dots, w_n und Differentialoperatoren L^1, \dots, L^n . Seien $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ und $u \in U$. Dann gilt:*

$$(i) \quad u(\xi) = D^1 u(\xi) = \cdots = D^j u(\xi) = 0 \iff u(\xi) = L^1 u(\xi) = \cdots = L^j u(\xi) = 0.$$

(ii) *Ist ξ eine l -fache Nullstelle von u , dann gibt es eine (in den Randpunkten einseitige) Umgebung von ξ , in der $L^l u$ und $D^l u$ dasselbe Vorzeichen haben.*

(iii) ξ ist eine l -fache Nullstelle von u gdw.

$$u(\xi) = L^1 u(\xi) = \dots = L^{l-1} u(\xi) = 0 \neq L^l u(\xi).$$

Beweis. Mit Hilfe der Leibniz-Formel für Ableitungen von Produkten erhält man für $j = 1, \dots, n$ (siehe Schumaker [12] p. 365)

$$L^j u(x) = \frac{D^j u(x)}{w_1(x) \cdots w_j(x)} + \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i}(x) D^i u(x), \quad (1.8)$$

mit stetigen Funktionen $a_{j,i}$, deren explizite Gestalt uns hier nicht interessiert. Damit ist die Aussage „ \implies “ in (i) trivial. Die andere Richtung zeigt man leicht durch Induktion.

Mit (1.8) folgt $L^l u(\xi) = \alpha \cdot D^l u(\xi)$ mit $\alpha > 0$. Da die Funktion $x \mapsto \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i}(x) D^i u(x)$ stetig ist und bei ξ verschwindet, erhalten wir (ii). Die letzte Aussage folgt unmittelbar aus den beiden ersten. \square

Ein n -dimensionaler Teilraum $U \subset C[a, b]$ heißt *schwacher Čebyšev-Raum*, falls es eine Basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ von U gibt, so daß für jede stark wachsende Knotenfolge $a \leq \tau_1 < \dots < \tau_n \leq b$ gilt

$$\det (u_i(\tau_j))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n} \geq 0.$$

Es gilt der folgende

Satz 1.4. *Für einen n -dimensionalen Unterraum $U \subset C[a, b]$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) U ist ein schwacher Čebyšev-Raum.
- (ii) Jede Funktion aus U besitzt höchstens $n - 1$ Vorzeichenwechsel.
- (iii) Für alle $m = 1, \dots, n$ und alle Punkte $a = \tau_0 < \dots < \tau_m = b$ existiert eine nichttriviale Funktion $u \in U$ mit

$$(-1)^i u(x) \geq 0, \quad x \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i = 1, \dots, m.$$

Beweis. DeVore/Lorentz [1] p. 92. \square

Beispiele. (i) Polynomiale Splineräume.

- (ii) Splineräume, bei denen die Ableitungen der Gewichtsfunktionen der zugrundeliegenden ECT-Systeme bestimmte Vorzeichenbedingungen erfüllen (siehe Satz 2.9).

1.2 Normaldarstellungen einiger CV-Systeme

Wir betrachten das CV-System (zu den Bezeichnungen siehe Seite 12)

$$[v_1, v_2, \dots, v_n] = \left[1, x, \dots, x^{r_1-1}, \frac{1}{x - P_2}, \dots, \frac{1}{(x - P_2)^{r_2}}, \dots, \frac{1}{x - P_m}, \dots, \frac{1}{(x - P_m)^{r_m}} \right].$$

Es ist ein ECT-System, das weder positiv noch in Normalform ist. In Kapitel 3.2 benötigen wir explizite Darstellungen von Normalformen einiger CV-Systeme mit zwei Polstellen, deshalb werden wir uns hier auf solche Systeme beschränken. Die Bestimmung des Normalsystems ist natürlich für beliebige CV-Systeme möglich, i.a. ist aber schon die Berechnung der Gewichtsfunktionen sehr aufwendig. Wir betrachten also Systeme der Form

$$\Gamma^1 = [v_1, \dots, v_n] := \left[1, x, \dots, x^{n-3}, \frac{1}{x - p_2}, \frac{1}{x - p_3} \right], \quad p_2 \neq p_3$$

und

$$\Gamma^2 = [v_1, \dots, v_{n-1}, \tilde{v}_n] := \left[1, x, \dots, x^{n-3}, \frac{1}{x - p_2}, \frac{1}{(x - p_2)^2} \right].$$

Es ist klar, daß $u_j(x) = (x - a)^{j-1}$, $j = 1, \dots, n - 2$, die ersten $n - 2$ Elemente der zugehörigen Normalsysteme sind.

Der kanonische Weg zur Bestimmung von Normalformen besteht nach dem vorherigen Abschnitt darin, zunächst das assoziierte ECT⁺-System zu berechnen, mit dessen Hilfe die Gewichtsfunktionen durch die Wronskideterminanten (1.6) zu bestimmen, um schließlich die Integrale (1.4) auszurechnen. Da wir aber an einer expliziten Darstellung der ECT⁺-Systeme nicht interessiert sind, können wir für die Berechnung der Gewichtsfunktionen mit Hilfe der Determinanten in (1.6) auch die CV-Systeme Γ^1 und Γ^2 heranziehen, wir müssen die Ergebnisse gegebenenfalls nur noch mit -1 multiplizieren.

Wir führen folgende Schreibweise ein

$$k !! := \prod_{i=1}^k (i!).$$

Vermöge Formel (1.3) gilt

$$W(v_1, \dots, v_{n-1})(x) = \frac{(n-2)!!}{(x - p_2)(p_2 - x)^{n-2}},$$

woraus wir mit (1.6) erhalten

$$\begin{aligned} w_{n-1}(x) &= \left| \frac{W(v_1, \dots, v_{n-3})(x)W(v_1, \dots, v_{n-1})(x)}{(W(v_1, \dots, v_{n-2})(x))^2} \right| = \left| \frac{(n-4)!!(n-2)!!}{(x-p_2)^{n-1}(n-3)!!} \right| \\ &= \frac{n-2}{|x-p_2|^{n-1}}. \end{aligned}$$

Im Fall, daß die Polstellen p_2 und p_3 verschieden sind, erhalten wir

$$W(v_1, \dots, v_n)(x) = \frac{(n-1)!!(p_3-p_2)}{(x-p_2)^2(x-p_3)(p_2-x)^{n-2}(p_3-x)^{n-1}},$$

und damit berechnen wir wie oben

$$w_n(x) = \frac{(n-1)|p_3-p_2| \cdot |x-p_2|^{n-2}}{|p_3-x|^n}.$$

Sind die Polstellen gleich, gilt

$$W(v_1, \dots, v_{n-1}, \tilde{v}_n)(x) = \frac{(n-1)!!}{(x-p_2)^3(p_2-x)^{2n-3}},$$

also

$$w_n(x) = \frac{n-1}{(x-p_2)^2}.$$

Lemma 1.5. *Die Polstellen seien verschieden und je eine liege rechts von b bzw. links von a . Wir vereinbaren $p_2 < a$ und $p_3 > b$. Dann ist das zu Γ^1 assoziierte System in Normaldarstellung*

$$\left[1, x-a, \dots, (x-a)^{n-3}, \underbrace{\frac{(x-a)^{n-2}}{(a-p_2)^{n-2}(x-p_2)}}_{=: \rho_1^n(x)}, \underbrace{\frac{(x-a)^{n-1}(p_3-p_2)}{(p_3-x)(x-p_2)(p_3-a)^{n-1}}}_{=: \rho_2^n(x)} \right].$$

Beweis. Bekanntermaßen ist für $n \neq 1$

$$\int \frac{1}{(x-p_2)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-p_2)^{n-1}} + C.$$

Daraus erhalten wir unmittelbar die Aussage für ρ_1^3 . Die Behauptung gelte für ρ_1^{n-1} .

Dann folgt mit obigem

$$\begin{aligned} \rho_1^n(x) &= \int_a^x 1 \int_a^{s_2} \cdots \int_a^{s_{n-3}} n-3 \int_a^{s_{n-2}} \frac{n-2}{(s_{n-1}-p_2)^{n-1}} ds_{n-1} \cdots ds_2 \\ &= \int_a^x 1 \int_a^{s_2} \cdots \int_a^{s_{n-3}} (n-3) \left(\frac{1}{(a-p_2)^{n-2}} - \frac{1}{(s_{n-2}-p_2)^{n-2}} \right) ds_{n-2} \cdots ds_2 \\ &= \frac{(x-a)^{n-3}}{(a-p_2)^{n-2}} - \frac{(x-a)^{n-3}}{(a-p_2)^{n-3}(x-p_2)} \\ &= \frac{(x-a)^{n-2}}{(a-p_2)^{n-2}(x-p_2)}. \end{aligned}$$

Für die Bestimmung von ρ_2^n benötigen wir die folgende Identität, die man leicht nachrechnet:

$$\int \frac{(x-p_2)^{n-2}}{(x-p_3)^n} dx = \frac{(x-p_2)^{n-1}}{(n-1)(p_2-p_3)(x-p_3)^{n-1}} + C.$$

Mit Hilfe der Darstellung für ρ_1^n erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho_2^n(x) &= \int_a^x \cdots \int_a^{s_{n-2}} \frac{n-2}{(s_{n-1}-p_2)^{n-1}} \int_a^{s_{n-1}} \frac{(n-1)(p_3-p_2)(s_n-p_2)^{n-2}}{(-1)^n(s_n-p_3)^n} ds_n \cdots ds_2 \\ &= \int_a^x \cdots \int_a^{s_{n-2}} \frac{(n-2)(p_3-p_2)(-1)^n}{(p_2-p_3)(s_{n-1}-p_2)^{n-1}} \left(\frac{(s_{n-1}-p_2)^{n-1}}{(s_{n-1}-p_3)^{n-1}} - \frac{(a-p_2)^{n-1}}{(a-p_3)^{n-1}} \right) ds_{n-1} \cdots ds_2 \\ &= (-1)^{n-1} \left(\frac{(x-a)^{n-2}}{(a-p_3)^{n-2}(x-p_3)} - \frac{(a-p_2)(x-a)^{n-2}}{(a-p_3)^{n-1}(x-p_2)} \right) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}(p_2-p_3)}{(x-p_3)(x-p_2)(a-p_3)^{n-1}} \\ &= \frac{(x-a)^{n-1}(p_3-p_2)}{(p_3-x)(x-p_2)(p_3-a)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. □

Im Fall gleicher Polstellen gilt:

Lemma 1.6. *Das zu Γ^2 assoziierte System in Normalform ist*

$$\Gamma = \left[1, x-a, \dots, (x-a)^{n-3}, \frac{(x-a)^{n-2}}{|a-p_2|^{n-2}|x-p_2|}, \frac{(x-a)^{n-1}}{|a-p_2|^{n-1}|x-p_2|^2} \right].$$

Beweis. Durch elementare Rechnung unter Verwendung der Formel für ρ_1^n . □

Kapitel 2

Splineräume

Ziel dieses Kapitels ist es, eine möglichst allgemeine aber dennoch reichhaltige Theorie der Splineräume zu entwickeln. Unser Interesse ist darauf gerichtet, hinreichende Bedingungen für die Existenz lokaler Basen anzugeben.

Dazu werden Splineräume zunächst definiert, ihre Dimension bestimmt und einseitige Basen konstruiert. Im zweiten Abschnitt werden wir sehen, daß nur in bestimmten Splineräumen die maximale Anzahl der Nullstellen eines Splines so klein ist, daß man in diesen Räumen eindeutig interpolieren kann. Daß dies dann auch möglich ist, wird in Kapitel 2.3 gezeigt. Im letzten Teil werden wir B-Spline-Basen konstruktiv mit Hilfe linearer Gleichungssysteme bestimmen. Wir können B-Splines konstruieren, die auf Integral = 1 normiert sind und in den Fällen, in denen die konstanten Funktionen Elemente des Splineräumens sind, auch solche, die eine lokale Zerlegung der Eins bilden.

2.1 Definitionen, Einseitige Basen

Wir definieren verallgemeinerte Splineräume, bestimmen ihre Dimension und konstruieren einseitige Basen, die denen der truncated-power-Basen im Fall von Polynomsplines entsprechen.

Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und

$$\cdots < x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b < x_{k+2} < \cdots$$

Für $i \in \mathbb{Z}$ seien $d_i \in \mathbb{N}$ und $\mu_i \in \mathbb{N}_0$ mit $\mu_i < \min\{d_{i-1}, d_i\}$. Seien $\Gamma_i = [s_1^{(i)}, \dots, s_{d_i}^{(i)}]$ ein ECT-System auf $[x_i, x_{i+1}]$ und

$$S_i = \text{span}\{s_1^{(i)}, \dots, s_{d_i}^{(i)}\} \subset C^{d_i-1}[x_i, x_{i+1}]$$

der zugehörige erweiterte vollständige Čebyšev-Raum der Dimension d_i . Außerdem bezeichnen wir mit $w_1^{(i)}, \dots, w_{d_i}^{(i)}$ die Gewichtsfunktionen von Γ_i und mit L_i^j die zugehörigen Differentialoperatoren.

Sei $\mu = (\mu_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Wir wollen diese Räume „glatt miteinander verbinden“ und definieren für $p < q$ den (verallgemeinerten) Splineraum¹

$$S_{p,q}^\mu := \{s : [x_p, x_q] \longrightarrow \mathbb{R} : s|_{I_j} \in S_j, D_-^l s(x_i) = D_+^l s(x_i), \quad (2.1)$$

$$j = p, \dots, q-1, \quad l = 0, \dots, \mu_i - 1, \quad i = p+1, \dots, q-1\},$$

dabei bezeichnet D_-^l bzw. D_+^l die l -te links- bzw. rechtsseitige Ableitung und $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ für $i = p, \dots, q-2$ bzw. $I_{q-1} := [x_{q-1}, x_q]$. Die Zahl μ_i gibt also an, wie glatt die Elemente aus S_i und S_{i-1} am Knoten x_i miteinander verbunden werden. Dabei bedeutet $\mu_i = 0$ keine Bedingung, $\mu_i = 1$ Stetigkeit usw..

Für $S_{0,k+1}^\mu$ schreiben wir auch $S_{[a,b]}^\mu$.

Beispiele. (i) Sei $\mu_i = \min\{d_{i-1}, d_i\} - 1$ für $i = 1, \dots, k$. Dann ist $S_{[a,b]}^\mu =: S_{[a,b]}^{\max}$ der Splineraum, bei dem die Funktionen aus S_i mit maximaler Glattheit verbunden werden.

(ii) Ist $\mu_i = 0$ für $i = 1, \dots, k$, so erhält man den Raum $S_{[a,b]}^\mu =: S_{[a,b]}^0$, der stückweise aus Funktionen aus S_i besteht.

(iii) Ist $S_i = \mathbb{P}^{d-1}|_{[x_i, x_{i+1}]}$, also in jedem Intervall der Raum der Polynome bis zum Grad $d-1$, so erhalten wir für $0 \leq \mu_i \leq d-1$ die gewöhnlichen polynomialen Splinerräume $S_{p,q}^\mu =: \mathbb{P}_{p,q}^{d-1, \mu}$. Mit $\mathbb{P}_{[a,b]}^{d-1, \mu}$ bezeichnen wir wieder den Splineraum $\mathbb{P}_{0,k+1}^{d-1, \mu}$.

Um lästige Fallunterscheidungen (in Formeln) zu vermeiden, werden wir bei der Betrachtung von $S_{p,q}^\mu$ oft die Größen μ_p oder μ_q verwenden. In diesem Zusammenhang werden wir meist $\mu_p = \mu_q = 0$ setzen, auch wenn vorher eventuell andere Definitionen getroffen wurden, wobei wir aber immer ausdrücklich darauf hinweisen werden.

Wir schreiben

$$\mathcal{S}_{p,q}(\mu) := \{S_{p,q}^\nu : \min\{d_{i-1}, d_i\} > \nu_i \geq \mu_i \text{ für } i = p+1, \dots, q-1\}.$$

Hierbei ist μ eine zulässige Folge, also $\mu_i < \min\{d_{i-1}, d_i\}$ und $S_{p,q}^\nu$ durch (2.1) definiert, wobei man dort μ durch ν zu ersetzen hat. $\mathcal{S}_{p,q}(\mu)$ ist also die Menge aller Splinerräume, die aus denselben ECT-Systemen wie $S_{p,q}^\mu$ bestehen und deren Elemente mindestens so glatt wie die aus $S_{p,q}^\mu$ sind.

Wir definieren folgende Vandermonde-Matrizen: Für $i = -d_0 + 2, \dots, k + d_k$ sei

$$V_-^i := \left(D_-^l s_m^{(i-1)}(x_i) \right)_{l=0, \dots, \mu_i-1}^{m=1, \dots, d_{i-1}},$$

¹Wir interessieren uns (eigentlich) nur für das Intervall $[a, b]$ bzw. den Splineraum $S_{[a,b]}^\mu$. Da wir später zur Konstruktion lokaler Basen links von a bzw. rechts von b gewisse Hilfsräume benötigen, führen wir der Einfachheit halber die entsprechenden Knoten und Räume schon hier ein.

und für $i = -d_0 + 1, \dots, k + d_k - 1$ sei

$$V_+^i := \left(D_+^l s_m^{(i)}(x_i) \right)_{l=0, \dots, \mu_i-1}^{m=1, \dots, d_i}.$$

Die obigen Matrizen haben den Rang μ_i , da die S_i nach Voraussetzung erweiterte vollständige Čebyšev-Räume sind.

Sei $m_i = d_i - \mu_i$ und $n_i = d_{i-1} - \mu_i$.

Satz 2.1. $S_{[a,b]}^\mu$ ist ein linearer Raum, und es gilt

$$\delta := \dim S_{[a,b]}^\mu = d_0 + \sum_{i=1}^k m_i = d_k + \sum_{i=1}^k n_i.$$

Beweis. Die erste Behauptung gilt trivialerweise.

Sei

$$V := \begin{pmatrix} V_-^1 & -V_+^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_-^2 & -V_+^2 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & V_-^{k-1} & -V_+^{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & V_-^k & -V_+^k \end{pmatrix}.$$

Die Funktion $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stückweise aus Funktionen $s_i \in S_i$ zusammengesetzt, also $s = \sum_{m=0}^k \sum_{n=1}^{d_m} c_n^{(m)} s_n^{(m)}$. Sei $c = (c_1^{(0)}, \dots, c_{d_0}^{(0)}, c_1^{(1)}, \dots, c_{d_1}^{(1)}, \dots, c_1^{(k)}, \dots, c_{d_k}^{(k)})^t$. Dann ist $Vc = 0$ notwendig und hinreichend für $s \in S_{[a,b]}^\mu$. Da die Zeilen von V linear unabhängig sind und V von $\mathbb{R}^{\sum_{j=0}^k d_j}$ nach $\mathbb{R}^{\sum_{j=1}^k \mu_j}$ abbildet, hat der Kern von V die Dimension $\sum_{j=0}^k d_j - \sum_{j=1}^k \mu_j$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Konstruktion einer „linksseitigen“ Basis von $S_{[a,b]}^\mu$. (Sie korrespondiert zur Abzählung der Dimension von $S_{[a,b]}^\mu$ von links nach rechts.)

Sei $i = 0$. Für $j = 1, \dots, d_0$ sei

$$b_j|_{I_0} = s_j^{(0)}, \quad (2.2)$$

und auf $[x_1, b]$ werde b_j (beliebig) durch Elemente aus den Räumen S_1 bis S_k fortgesetzt, so daß die Glattheitsbedingungen an den „Übergängen“ x_1 bis x_k erfüllt sind. Dies ist möglich, da die S_i nach Voraussetzung erweiterte vollständige Čebyšev-Räume sind und $\mu_i < \min\{d_{i-1}, d_i\}$ gilt.

Sei $i \geq 1$. Für $j = \sum_{l=0}^{i-1} m_l + 1, \dots, \sum_{l=0}^i m_l$ sei $b_j|_{I_0 \cup \dots \cup I_{i-1}} \equiv 0$. Das lineare Gleichungssystem

$$V_+^i c = 0$$

hat genau m_i linear unabhängige Lösungen $(c_1^{(j)}, \dots, c_{d_i}^{(j)})$, $j = \sum_{l=0}^{i-1} m_l + 1, \dots, \sum_{l=0}^i m_l$. Sei

$$b_j|_{I_i} = \sum_{l=1}^{d_i} c_l^{(j)} s_l^{(i)}. \quad (2.3)$$

Diese Funktionen werden dann wie oben auf die restlichen Intervalle fortgesetzt.

Bemerkungen. (i) Der Begriff „linksseitige Basis“ wurde gewählt, weil man, wenn die ECT-Systeme Γ_i in (Links-)Normalform vorliegen, für die Funktionen b_j aus (2.3) die letzten m_i Elemente von Γ_i wählen kann.

(ii) Nach Konstruktion ist $\text{supp } b_j \subset [x_i, b]$, wenn $j = \sum_{l=0}^{i-1} m_l + p$, $1 \leq p \leq m_i$, $i = 1, \dots, k$. Dabei bezeichnen wir wie üblich mit $\text{supp } f$ den Träger einer reellwertigen Funktion f .

Satz 2.2. Die Menge $B := \{b_1, \dots, b_\delta\}$ ist eine Basis von $S_{[a,b]}^\mu$.

Beweis. Da $\text{card } B = \delta$, reicht es zu zeigen, daß die Elemente aus B linear unabhängig sind. Sei

$$\sum_{j=1}^{\delta} \alpha_j b_j(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b]. \quad (2.4)$$

Sei $x \in I_0$. Da nur die Funktionen b_1, \dots, b_{d_0} im ersten Intervall von Null verschieden sind, folgt $\sum_{j=1}^{d_0} \alpha_j b_j(x) = 0$ und somit $\alpha_j = 0$ für $j = 1, \dots, d_0$, da $b_j|_{I_0} = s_j^{(0)}$ und diese Funktionen linear unabhängig sind.

Sei $x \in I_1$. Dann folgt $\alpha_{d_0+1} = \dots = \alpha_{d_0+m_1} = 0$, denn nur die ersten $d_0 + m_1$ Elemente aus B sind in I_1 von Null verschieden. Nach obigem ist $\alpha_1 = \dots = \alpha_{d_0} = 0$. Da die $b_{d_0+1}, \dots, b_{d_0+m_1}$ auf I_1 linear unabhängig sind, gilt auch $\alpha_{d_0+1} = \dots = \alpha_{d_0+m_1} = 0$.

Mit dem gleichen Schluß auf den restlichen Intervallen folgt, daß alle Koeffizienten in (2.4) Null sind und damit die Behauptung. \square

Bemerkungen. (i) Korrespondierend zur Abzählung der Dimension von $S_{[a,b]}^\mu$ von rechts her, läßt sich eine „rechtsseitige“ Basis $\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_\delta\}$ von $S_{[a,b]}^\mu$ konstruieren, mit $\text{supp } \tilde{b}_j \subset [a, x_{i+1}]$, wenn $j = d_k + \sum_{l=1}^{i-1} n_l + p$, $p = 1, \dots, n_i$, $i = 1, \dots, k$.

(ii) Bis hierher wäre offensichtlich die Voraussetzung S_i ET-Raum ausreichend gewesen. Da wir aber für alles weitere ECT-Räume benötigen, haben wir unsere Splineräume gleich entsprechend definiert.

Beispiele. (i) Für $i = 0, \dots, k$ sei $S_i = \mathbb{P}^{d-1}|_{[x_i, x_{i+1}]}$. Eine Basis von S_i ist $\{(x - x_i)_+^j : j = 0, \dots, d-1\}$, wobei wir wie üblich für eine reelle Zahl x definieren: $x_+ = \max\{0, x\}$. Auf folgende Weise erhält man mit der obigen Methode die bekannte linksseitige Basis für den Raum der Polynomsplines $\mathbb{P}_{[a,b]}^{d-1, \mu}$. Für $i = 1, \dots, k$ wählt man als Fundamentalsystem von $D_+^i c = 0$ die Vektoren e_{μ_i+1}, \dots, e_d , $i = 1, \dots, k$ und erhält damit die

Splines

$$\begin{aligned} b_{0,j} &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto (x - x_0)_+^j, \quad j = 0, \dots, d-1 \\ b_{i,j} &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto (x - x_i)_+^j, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = \mu_i + 1, \dots, d-1, \end{aligned}$$

indem man die Funktionen als Polynome aus \mathbb{P}^{d-1} nach rechts fortsetzt.

(ii) Sei S_i wie in (i). Eine andere Basis von S_i ist $\{(-1)^j(x_j - x)_+^j : j = 0, \dots, d-1\}$. Daraus erhält man analog zur obigen Konstruktion die rechtsseitige Basis für den Raum der Polynomsplines $\mathbb{P}_{[a,b]}^{d-1,\mu}$, nämlich

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{k+1,j} &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto (-1)^j(x_{k+1} - x)_+^j, \quad j = 0, \dots, d-1 \\ \tilde{b}_{i,j} &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, & x &\longmapsto (-1)^j(x_i - x)_+^j, \quad i = k, \dots, 1, \\ & & & j = \mu_i + 1, \dots, d-1, \end{aligned}$$

indem man die Funktionen als Polynome nach links fortsetzt.

Wir nennen eine Basis eines Splineräume *beidseitig*, wenn sie sowohl links- als auch rechtsseitig ist. Die Existenz solcher Basen ist natürlich a priori nicht gesichert. Ein Hauptanliegen der nächsten Teile dieses Kapitels wird es sein, hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß solche Basen existieren, um diese dann in Kapitel 2.4 berechnen zu können. Der Grund für ihre Konstruktion ist zwar ein anderer – der Träger der Splines soll möglichst klein sein –, man überlegt sich aber leicht, daß die Forderung nach Lokalität äquivalent zu der nach Beidseitigkeit ist.

2.2 Ein Nullstellensatz

Eine notwendige Voraussetzung für die eindeutige Lösbarkeit von Interpolationsproblemen in einem Splinerraum $S_{[a,b]}^\mu$ ist, daß die Splines nicht zuviele Nullstellen (weniger als δ) haben, denn sonst gäbe es homogene Interpolationsprobleme die nichttrivial lösbar wären. In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß dies in gewissen (aber nicht in allen) Splineräumen $S_{[a,b]}^\mu$ der Fall ist. Dafür werden wir zunächst einen Nullstellensatz beweisen, indem wir die Methoden von Jetter/Lorentz/Riemenschneider [6] für polynomiale Splines auf den allgemeinen Fall übertragen und anschließend eine hinreichende Bedingung dafür herleiten, daß ein Element eines Splineräume im Inneren eines Trägerintervalls $[x_p, x_q]$ höchstens $\sum_{i=p}^{q-1} d_i - \sum_{i=p}^q \mu_i - 1$ Nullstellen hat. Dazu müssen wir zunächst die verschiedenartigen Formen der Nullstellen, die ein Spline haben kann, genau charakterisieren.

Sei $s \in S_{[a,b]}^\mu$ in der Darstellung

$$s = \sum_{i=0}^k \sum_{j=1}^{d_i} c_j^{(i)} s_j^{(i)}$$

gegeben. Wir zählen die Nullstellen von s zunächst in sogenannten *Trägerintervallen*, das sind Intervalle $[x_p, x_q] \subseteq [a, b]$, für die gilt

- (i) $[x_p, x_q] \subseteq \text{supp } s$,
- (ii) $s|_{(x_{p-1}, x_p)} \equiv 0$ falls $p > 0$ und $s|_{(x_q, x_{q+1})} \equiv 0$ falls $q < k + 1$.

Seien $[x_p, x_q]$ ein Trägerintervall von s und $\xi \in (x_p, x_q)$ eine Nullstelle von s . Dann existiert ein $l \in \mathbb{N}$ und ein i mit $p < i \leq q$, so daß ξ von genau einer der folgenden drei Formen ist:

(Na) $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$ (also kein Knoten) und

$$s(\xi) = Ds(\xi) = \dots = D^{l-1}s(\xi) = 0 \neq D^l s(\xi).$$

(Nb) $\xi = x_i \neq x_q$ ist ein Knoten, und es gilt

$$s(\xi) = \dots = D^{l-1}s(\xi) = 0 \neq D_-^l s(\xi) \quad \text{oder} \quad s(\xi) = \dots = D^{l-1}s(\xi) = 0 \neq D_+^l s(\xi)$$

und

$$D_-^l s(\xi) \cdot D_+^l s(\xi) \geq 0.$$

(Nc) $\xi = x_i \neq x_q$ ist ein Knoten, und es gilt

$$s(\xi) = \dots = D^{l-2}s(\xi) = 0 \quad \text{und} \quad D_-^{l-1}s(\xi) \cdot D_+^{l-1}s(\xi) < 0.$$

Da s nichttrivial ist, können die entsprechenden Ableitungen in (Na) nur alle verschwinden, wenn $l \leq d_i - 1$ ist, in (Nb) falls $l \leq \min\{d_{i-1}, d_i\} - 1$ ist und in (Nc) falls $l \leq \min\{d_{i-1}, d_i\} - 2$ ist, somit ist alles wohldefiniert. Wir nennen l die *Vielfachheit* der Nullstelle ξ . Nullstellen vom Typ (Nc) mit $l = 1$ heißen *unstetige Nullstellen* (da s dort eine Sprungunstetigkeit mit Vorzeichenwechsel hat), sonst sprechen wir von *stetigen Nullstellen*. Man sieht, daß Nullstellen vom Typ (Nc) mindestens die Vielfachheit $\mu_i + 1$ haben, da $l - 1 \geq \mu_i$.

Seien $j \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \mathbb{Z}$. Mit Γ_i^j bezeichnen wir das j -te reduzierte System von Γ_i und mit S_i^j den von Γ_i^j aufgespannten ECT-Raum. Außerdem sei

$$L^j S_{p,q}^\mu := \{L^j s : [x_p, x_q] \longrightarrow \mathbb{R} : s \in S_{p,q}^\mu \text{ und } L^j s|_{I_i} = L_i^j(s), i = p, \dots, q - 1\}.$$

Polynomiale Splines haben wegen $L^j = \text{const} \cdot D^j$ bekanntlich die schöne Eigenschaft $L^j S_{p,q}^\mu \in \mathcal{S}_{p,q}((\mu_{p+1} - j)_+, \dots, (\mu_{q-1} - j)_+)$. Im allgemeinen werden aber die Elemente aus $L^j S_{p,q}^\mu$ schon für $j = 1$ nicht mehr stetig sein. Mit Hilfe der folgenden Lemmata können wir diese Räume dennoch erfolgreich zur Bestimmung der Anzahl der Nullstellen verwenden.

Lemma 2.3. Sei $\xi \in (x_p, x_q)$. Dann ist ξ eine l -fache Nullstelle von s , genau dann, wenn die Bedingung (Na), (Nb) oder (Nc) auch gilt, wenn man die Operatoren D^j durch die Operatoren L^j ersetzt.

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Lemma 1.3. \square

Lemma 2.4. Es gilt:

- (i) Ist $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ eine mindestens $l + 1$ -fache Nullstelle von s , so ist $L_i^l s \neq 0$.
- (ii) Seien $x_p \leq c < d \leq x_q$ mit $\lim_{x \downarrow c} L^l s(x) = \lim_{x \uparrow d} L^l s(x) = 0$. Dann existiert ein $\xi \in (c, d)$, für das entweder
 - (a) ξ ist eine (stetige oder unstetige) Nullstelle von $L^{l+1} s$ mit Vorzeichenwechsel und keine Nullstelle von $L^l s$
 - oder
 - (b) ξ ist eine unstetige Nullstelle von $L^l s$, und $L^{l+1} s$ wechselt bei ξ sein Vorzeichen nicht

gilt.

Beweis. (i) Ist $L^l s = L_i^l (\sum_{j=1}^{d_i} c_j^{(i)} s_j^{(i)}) \equiv 0$, dann folgt nach (1.7) $c_j^{(i)} = 0$ für $j = l + 1, \dots, d_i$. Somit ist $L_i^{l-1} s = c_l^{(i)} L_i^{l-1} s_l^{(i)} = c_l^{(i)} s_{l,1}^{(i)} = c_l^{(i)} w_{l+1}^{(i)}$. Da aber ξ in jedem der Fälle (Na), (Nb), (Nc) eine stetige Nullstelle von $L_i^{l-1} s$ ist, ist auch $c_l^{(i)} = 0$. Mit derselben Argumentation für $L^{l-1} s, \dots, s$ folgt $s \equiv 0$, also ein Widerspruch.

(ii) Da $L^l s$ ein Spline ist, genügt es, die Behauptung für $l = 0$ zu zeigen. Wir können annehmen, daß (c, d) keine weiteren stetigen Nullstellen von s enthält. (Sonst verkleinern wir das Intervall.) Wählen wir $h > 0$ klein genug, so gilt $s(c+h)Ds(c+h) > 0$ und $s(d-h)Ds(d-h) < 0$, und mit Lemma 1.3 (ii) gilt (für eventuell noch kleineres h) auch $s(c+h)Ls(c+h) > 0$ und $s(d-h)Ls(d-h) < 0$. Also haben s und Ls eine verschiedene Anzahl von Vorzeichenwechseln. Somit gibt es einen von links aus gesehen ersten Punkt ξ an dem entweder s oder Ls sein Vorzeichen wechselt. Da ξ keine stetige Nullstelle von s ist, folgt also entweder (a) oder (b). \square

Bemerkung. Teil (i) des letzten Lemmas besagt: Eine $l + 1$ -fache Nullstelle von s liegt im Träger aller ECT-Ableitungen von s bis zur Ordnung l . Da $L^j s$ ein Spline ist, gilt insbesondere, daß eine stetige Nullstelle von $L^j s$ im Träger von L^{j+1} liegt.

Für $j = 0, \dots, d - 1 := \max_{i=p, \dots, q-1} d_i - 1$ seien $I_1^{(j)}, \dots, I_{l_j}^{(j)}$ die Trägerintervalle von $L^j s$ in $[x_p, x_q]$, also $l_j := \#$ Trägerintervalle von $L^j s$ in $[x_p, x_q]$. Klar ist $l_0 = 1$.

Seien

$$\Phi := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{es gibt ein } j \in \{0, \dots, d-1\}, \text{ mit } x \in \text{supp } L^j s \text{ und } 0 \leq y \leq j\}$$

und

$$L(\Phi) := \sum_{j=1}^{d-1} l_j.$$

Für $i = p, \dots, q-1$ sei $\tilde{d}_i = \max\{j : c_j^{(i)} \neq 0, j = 1, \dots, d_i\}$ die „Dimension von s in $[x_i, x_{i+1}]$ “.

Lemma 2.5. *Es gilt*

$$L(\Phi) = \tilde{d}_p - 1 + \sum_{i=p}^{q-2} (\tilde{d}_{i+1} - \tilde{d}_i)_+ = \tilde{d}_{q-1} - 1 + \sum_{i=p}^{q-2} (\tilde{d}_i - \tilde{d}_{i+1})_+.$$

Beweis. Die Trägerintervalle der ECT-Ableitungen von s kann man offenbar auf folgende Weise abzählen: Für $i = p, \dots, q-2$ sei

$$\sigma_j(\tilde{d}_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i = p \text{ und } \tilde{d}_p > j) \text{ oder } (\tilde{d}_i \leq j \text{ und } \tilde{d}_{i+1} > j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann gilt

$$L(\Phi) = \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{i=p}^{q-2} \sigma_j(\tilde{d}_i) = \tilde{d}_p - 1 + \sum_{i=p}^{q-2} (\tilde{d}_{i+1} - \tilde{d}_i)_+.$$

Zählt man von rechts statt von links, erhält man $L(\Phi) = \tilde{d}_{q-1} - 1 + \sum_{i=p}^{q-2} (\tilde{d}_i - \tilde{d}_{i+1})_+$. \square

Die Bezeichnung $L(\Phi)$ wurde gewählt, weil

$$\begin{aligned} 2L(\Phi) &= \tilde{d}_p - 1 + \sum_{i=p}^{q-2} (\tilde{d}_{i+1} - \tilde{d}_i)_+ + \tilde{d}_{q-1} - 1 + \sum_{i=p}^{q-2} (\tilde{d}_i - \tilde{d}_{i+1})_+ \\ &= \tilde{d}_p + \tilde{d}_{q-1} - 2 + \sum_{i=p}^{q-2} |d_{i+1} - d_i| \end{aligned}$$

offensichtlich gerade die Länge des vertikalen Randes von Φ ist.

Seien $p \leq i \leq q$ und $j \in \mathbb{N}_0$. Wir nennen den Punkt $(x_i, j) \in \Phi$ *singulär*, falls $x_i \in \text{supp } L^j s$ und ein $0 \leq k \leq j$ existiert mit $\text{sign } L_{i-1}^k s(x_i) \neq \text{sign } L_i^k s(x_i)$. Sei σ die Anzahl aller singulären Punkte von s im Intervall $[x_p, x_q]$.

Es gilt die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Jetter/Lorentz/Riemenschneider [6] (vgl. auch DeVore/Lorentz [1] p. 157 ff).

Satz 2.6. Sei $s \in S_{[a,b]}^\mu$ und $[x_p, x_q]$ ein Trägerintervall von s . Dann ist

$$Z(s, (x_p, x_q)) \leq \sigma - L(\Phi) - 2,$$

wobei wir wie üblich mit $Z(s, (x_p, x_q))$ die Anzahl der Nullstellen von s in (x_p, x_q) bezeichnen.

Beweis. Für die Zählung der Nullstellen verwenden wir Lemma 2.4. Wir definieren

$$z_j := \#\{\xi \in (x_p, x_q) : L^l s(\xi) = 0 \text{ für } l = 0, \dots, j\}$$

$$z'_j := \#\{x_i \in (x_p, x_q) : L^l s(x_i) = 0 \text{ für } l = 0, \dots, j-1, \text{ sign } L_{i-1}^j s(x_i) \cdot \text{sign } L_i^j s(x_i) < 0\}.$$

In z_j berücksichtigen wir also die Nullstellen vom Typ (Na), (Nb) (mit Vielfachheit), und falls ξ eine l -fache Nullstelle vom Typ (Nc) ist, wird diese dort mit Vielfachheit $l-1$ gezählt, die unstetige Nullstelle der $(l-1)$ -ten Ableitung geht in z'_j ein. Es gilt also

$$Z(s, (x_p, x_q)) = \sum_{j=0}^{d-1} (z_j + z'_j).$$

Außerdem seien

$$\sigma'_j = \#\{(x_i, j) : (x_i, j) \in \text{int } \Phi \text{ ist singular, } i = p+1, \dots, q-1\}$$

$$\sigma''_j = \#\{(x_i, j) : (x_i, j) \in \partial \Phi \text{ ist singular, } i = p, \dots, q\},$$

dabei bezeichne wie üblich $\text{int } \Phi$ die Menge der inneren Punkte und $\partial \Phi$ die Menge der Randpunkte von Φ . Trivialerweise ist

$$\sigma = \sum_{j=0}^{d-1} (\sigma'_j + \sigma''_j).$$

Wir wollen die Anzahl der stetigen Nullstellen von $L^j s$ (ohne Vielfachheit) nach unten abschätzen. Sei ξ_j eine untere Schranke für die Anzahl der stetigen Nullstellen von $L^j s$, die nicht schon in z_j erfaßt sind und im Inneren des Trägers von $L^j s$ liegen. Dazu kommen noch $2l_j - \sigma''_j$ stetige Nullstellen von $L^j s$, die am Rand der Trägerintervalle von $L^j s$ liegen, denn ist $(x_i, j) \in \partial \Phi$ nichtsingulär, so ist $L^j s$ dort stetig. Es gilt also

$$\text{Anzahl der stetigen Nullstellen von } L^j s \geq z_j + \xi_j + 2l_j - \sigma''_j.$$

Nach der Bemerkung zu Lemma 2.4(i) liegen all diese Nullstellen im Träger von $L^{j+1} s$. Wir verwenden Lemma 2.4(ii), um ξ_{j+1} nach unten abzuschätzen. Dazu betrachten wir Paare benachbarter stetiger Nullstellen von $L^j s$, wobei wir die Paare ausschließen müssen, die in verschiedenen Trägerintervallen liegen. Wir haben also mindestens $\xi_j + z_j + 2l_j - \sigma''_j - l_{j+1}$ solcher Paare benachbarter Nullstellen von $L^j s$. Zwischen ihnen liegen keine in z_{j+1} gezählten Nullstellen, denn die sind auch stetige Nullstellen von $L^j s$. Falls zwischen einem solchen Paar keine neue stetige Nullstelle von $L^{j+1} s$ existiert,

liegt folgende Situation an einem Knoten $x_i \in \text{int supp } L^{j+1}$ vor: Entweder ist x_i eine unstetige Nullstelle von $L^j s$ oder eine unstetige Nullstelle von $L^{j+1} s$. Es gibt höchstens $\sigma'_{j+1} - z'_{j+1}$ derartige innere Knoten, denn in beiden Fällen ist $(x_i, j+1)$ singulär, und x_i wird nicht in z'_{j+1} gezählt, da x_i keine stetige Nullstelle von $L^j s$ ist. Damit gilt

$$\xi_{j+1} \geq \xi_j + z_j + 2l_j - \sigma''_j - l_{j+1} - \sigma'_{j+1} + z'_{j+1}.$$

Wir bringen ξ_j auf die linke Seite, setzen $j = 0, \dots, d-2$ und summieren die Ungleichungen. Dann gilt wegen $\xi_{d-1} = \xi_0 = 0$

$$0 \geq \sum_{j=0}^{d-2} z_j + \sum_{j=0}^{d-2} 2l_j - \sum_{j=0}^{d-2} \sigma''_j - \sum_{j=1}^{d-1} l_j - \sum_{j=1}^{d-1} \sigma'_j + \sum_{j=1}^{d-1} z'_j.$$

Da $z_{d-1} = 0$, $2l_0 = 2$, $\sigma''_{d-1} = 2l_{d-1}$ und $\sigma'_0 \geq z'_0$, erhalten wir

$$0 \geq \sum_{j=0}^{d-1} (z_j + z'_j) + \sum_{j=1}^{d-1} l_j - \sum_{j=0}^{d-1} (\sigma'_j + \sigma''_j) + 2 = Z(s, (x_p, x_q)) - \sigma + L(\Phi) + 2$$

und somit die Behauptung. \square

Mit Hilfe dieses Satzes wollen wir zeigen, daß in geeigneten Splineräumen für die Anzahl der Nullstellen eines Splines s in einem Trägerintervall $[x_p, x_q]$ gilt

$$Z(s, (x_p, x_q)) \leq \sum_{i=p}^{q-1} d_i - \sum_{i=p}^q \mu_i - 1. \quad (2.5)$$

Dies ist von fundamentaler Bedeutung für die Interpolationstheorie in Splineräumen (siehe Kapitel 2.3) und die Konstruktion lokaler Basen (Kapitel 2.4). Folgendes Beispiel zeigt, daß eine solche Aussage im allgemeinen nicht gilt.

Beispiel. Wir betrachten das folgende ECT-System auf dem Intervall $[-4, 0] = [x_0, x_1]$: Sei $w_1^{(0)}(x) := e^{-x}$, $w_2^{(0)}(x) := 1$, $w_3^{(0)}(x) := 2$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} s_1^{(0)}(x) &= e^{-x}, \\ s_2^{(0)}(x) &= e^{-x} \int_{-4}^x 1 dt = e^{-x}(x+4), \\ s_3^{(0)}(x) &= e^{-x} \int_{-4}^x 1 \int_{-4}^s 2 dt ds = e^{-x}(x+4)^2. \end{aligned}$$

Seien auf $[0, 10] = [x_1, x_2]$ die Gewichtsfunktionen für das polynomiale System gegeben: $w_1^{(1)}(x) := 1$, $w_2^{(1)}(x) := 1$, $w_3^{(1)}(x) := 2$. Dann folgt $s_1^{(1)} = 1$, $s_2^{(1)}(x) = x$, $s_3^{(1)}(x) = x^2$. Im Splineräum $S_{0,2}^{\max}$ konstruieren wir einen Spline mit $d_0 + d_1 - \mu_0 - \mu_1 - \mu_2 = 4$ Nullstellen.

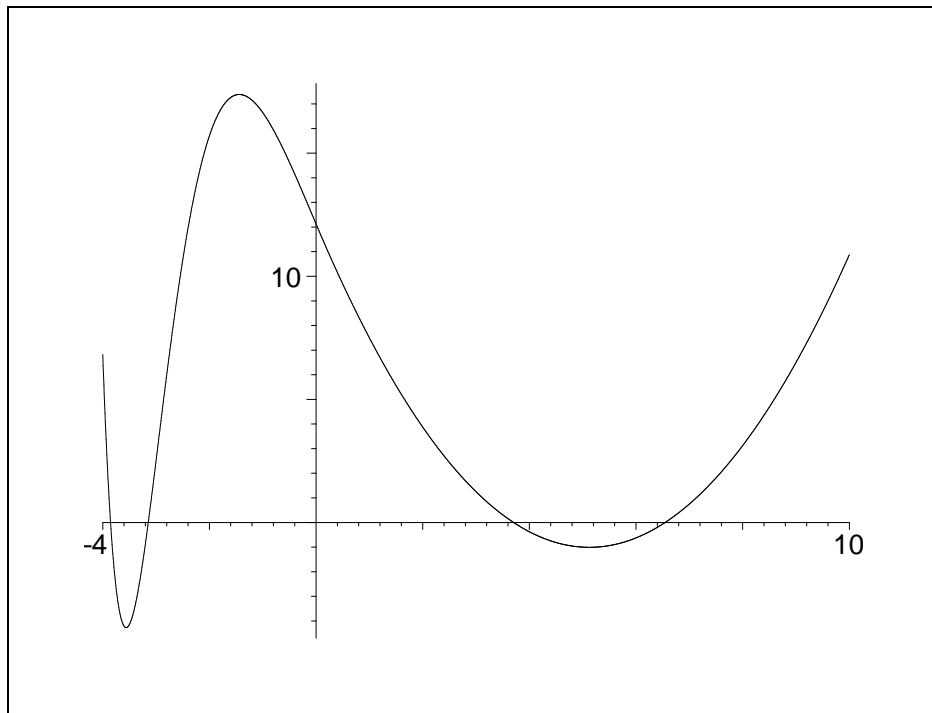


Abbildung 2.1: Ein Spline mit vier Nullstellen in einem vierdimensionalen Raum

Sei $g(x) = s_3^{(0)}(x) - s_2^{(0)}(x) + \frac{1}{8}s_1^{(0)}(x) = e^{-x}(x^2 + 7x + \frac{97}{8}) =: e^{-x}p(x)$. Die Diskriminante von p ist $\frac{1}{8}$, deshalb hat p und somit auch g zwei reelle Nullstellen. Man überzeugt sich leicht, daß sie im Intervall $(-4, 0)$ liegen. Weiterhin gilt $g(0) = \frac{97}{8}$ und $g'(0) = -\frac{41}{8}$.

Sei $f(x) := \frac{1}{5}x^2 - \frac{41}{8}x + \frac{97}{8}$. Wie oben sieht man leicht, daß f im Intervall $(0, 10)$ zwei Nullstellen hat. Für

$$s(x) := \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in [-4, 0] \\ f(x) & \text{falls } x \in [0, 10] \end{cases}$$

gilt offensichtlich $s \in S_{0,2}^{\max}$ (Abbildung 2.1). (Da s vier Vorzeichenwechsel hat, ist, wegen $\delta = 4$, der Raum $S_{0,2}^{\max}$ auch ein Beispiel für einen Spliner Raum, der nicht schwach Čebyšev ist.)

Die Konstruktion von s war möglich, weil wir links von Null den Spline – obwohl er dort zwei Nullstellen hat – sozusagen wieder nach unten biegen konnten, was z.B. im Fall, daß $s|_{[-4,0]}$ eine Parabel ist, unmöglich wäre. Dieses Phänomen kann offenbar nur dann auftreten, wenn das Vorzeichen der ECT-Ableitung im Punkt Null nicht mit dem Vorzeichen der gewöhnlichen Ableitung (= ECT-Ableitung bei Polynomen) übereinstimmt, wie es in unserem Beispiel der Fall ist. Hier gilt nämlich

$$D_+s(0) = D_-s(0) = L_1^1s(0) = -\frac{41}{8}, \quad L_0^1s(0) = 7.$$

Obige Beobachtung legt die Vermutung nahe, daß das Übereinstimmen der Vorzeichen der relevanten ECT-Ableitungen in den Knoten x_{p+1}, \dots, x_{q-1} hinreichend für

die Gültigkeit der Ungleichung (2.5) ist. Daß dies zutrifft, besagt der folgende

Satz 2.7. *Sei $s \in S_{[a,b]}^\mu$ und $[x_p, x_q]$ ein Trägerintervall von s . Es sei*

$$\text{sign } L_{i-1}^j s(x_i) = \text{sign } L_i^j s(x_i), \quad \text{für } i = p+1, \dots, q-1 \text{ und } j = 0, \dots, \mu_i - 1. \quad (2.6)$$

Dann gilt

$$Z(s, (x_p, x_q)) \leq \sum_{i=p}^{q-1} \tilde{d}_i - \sum_{i=p}^q \mu_i + \sum_{i=p}^{q-2} (\mu_{i+1} - \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\})_+ - 1 \leq \sum_{i=p}^{q-1} d_i - \sum_{i=p}^q \mu_i - 1,$$

wobei wir im Fall $x_p = a$ oder $x_q = b$ wieder $\mu_0 = \mu_{k+1} = 0$ setzen.

Beweis. Wegen (2.6) und $L^j s(x_i) = 0$ für $j \geq \max\{\tilde{d}_{i-1}, \tilde{d}_i\}$ können höchstens die Punkte

$$(x_i, \mu_i), \dots, (x_i, \max\{\tilde{d}_{i-1}, \tilde{d}_i\} - 1)$$

bzw. am Rand die Punkte $(x_i, \mu_i), \dots, (x_p, \tilde{d}_p - 1), (x_q, \mu_q), \dots, (x_q, \tilde{d}_{q-1} - 1)$ singular sein. Da $[x_p, x_q]$ ein Trägerintervall ist, gilt $L^j s(x_p) = 0$ für $j = 0, \dots, \mu_p - 1$. Wegen $Ls|_{[x_p, x_{p+1}]} \not\equiv 0$ ist $L^{\tilde{d}_p} s(x_p) \neq 0$. Es gilt also $\tilde{d}_p \geq \mu_p$. Analog schließt man $\tilde{d}_{q-1} \geq \mu_q$. (An den inneren Knoten gilt eine entsprechende Aussage nicht notwendigerweise.) Wir erhalten also

$$\sigma \leq \tilde{d}_p - \mu_p + \tilde{d}_{q-1} - \mu_q + \underbrace{\sum_{i=p}^{q-2} (\max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\} - \mu_{i+1})_+}_{=:K}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=p}^{q-2} \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\} - \sum_{i=p}^{q-2} \mu_{i+1} + \sum_{i=p}^{q-2} (\mu_{i+1} - \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\})_+ \\ &= \sum_{i=p}^{q-2} \tilde{d}_i + \sum_{i=p}^{q-2} (\tilde{d}_{i+1} - \tilde{d}_i)_+ - \sum_{i=p+1}^{q-1} \mu_i + \sum_{i=p}^{q-2} (\mu_{i+1} - \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\})_+. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\sigma \leq \tilde{d}_p + \sum_{i=p}^{q-1} \tilde{d}_i + \sum_{i=p}^{q-2} (\tilde{d}_{i+1} - \tilde{d}_i)_+ - \sum_{i=p}^q \mu_i + \sum_{i=p}^{q-2} (\mu_{i+1} - \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\})_+.$$

Wir müssen noch zeigen, daß für $i = p, \dots, q-2$ gilt

$$\tilde{d}_i + (\mu_{i+1} - \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\})_+ \leq d_i.$$

Für $\mu_{i+1} \leq \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\}$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\mu_{i+1} > \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\}$. Dann ist $\tilde{d}_i + (\mu_{i+1} - \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\})_+ = \tilde{d}_i + \mu_{i+1} - \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\} \leq \tilde{d}_i + \mu_{i+1} - \tilde{d}_i = \mu_{i+1} < d_i$.

Jetzt können wir die Anzahl der Nullstellen nach oben abschätzen. Vermöge Satz 2.6 und Lemma 2.5 gilt

$$\begin{aligned} Z(s, (x_p, x_q)) &\leq \sigma - L(\Phi) - 2 \\ &\leq \sum_{i=p}^{q-1} \tilde{d}_i - \sum_{i=p}^q \mu_i + \sum_{i=p}^{q-2} (\mu_{i+1} - \max\{\tilde{d}_i, \tilde{d}_{i+1}\})_+ + 1 - 2 \\ &\leq \sum_{i=p}^{q-1} d_i - \sum_{i=p}^q \mu_i - 1. \end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen. \square

Freyburger [2] bewies eine zu (2.6) äquivalente Aussage:

Lemma 2.8. *Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Für alle $s \in S_{[a,b]}^\mu$ gilt

$$\text{sign } L_{i-1}^l s(x_i) = \text{sign } L_i^l s(x_i), \quad \text{für } i = 1, \dots, k \text{ und } l = 0, \dots, \mu_i - 1.$$

(ii) Für $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, \mu_i - 1$ existieren positive Konstanten $K_{i,j}$, so daß gilt

$$D_-^l w_j^{(i-1)}(x_i) = K_{i,j} D_+^l w_j^{(i)}(x_i), \quad l = 0, \dots, \mu_i - j. \quad (2.7)$$

Beweis. „(ii) \implies (i)“ ist trivial, für „(i) \implies (ii)“ siehe Freyburger [2] pp. 39-43. \square

Beispiele. (i) Obige Bedingung ist offenbar immer dann erfüllt, wenn „globale Gewichtsfunktionen“ existieren, das heißt, für $j = 1, \dots, \max d_i$ existiert eine positive Funktion $w_j \in C[a, b]$, die an den inneren Knoten x_i mindestens $\mu_i - 1$ -mal differenzierbar ist, so daß für $i = 0, \dots, k$ gilt

$$w_j|_{[x_i, x_{i+1}]} = w_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, d_i,$$

dabei seien wieder $w_j^{(i)}$ die Gewichtsfunktionen von Γ_i .

Dieser Fall umfaßt die polynomialen Splineräume, denn da sind die Gewichtsfunktionen gerade Konstanten.

(ii) Man sieht, daß man zumindest die beiden letzten Gewichtsfunktionen immer frei wählen kann: Sind z.B. folgende Cauchy–Vandermonde–Systeme gegeben

$$\Gamma_i := \left[1, x, \dots, x^{d-3}, \frac{1}{x - a_i}, \frac{1}{x - b_i} \right], \quad i = 0, \dots, k, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R} \setminus [x_i, x_{i+1}],$$

so gilt für jeden Spline $s \in S_{[a,b]}^{\max}$ der Nullstellensatz 2.7. Diese Räume werden wir in Kapitel 3.2 betrachten.

Folgendes Beispiel zeigt, daß die Bedingung (2.6) bzw. (2.7) nicht notwendig für die Gültigkeit von Satz 2.7 ist.

Beispiel. Auf $[-1, 0]$ betrachten wir das System $[1, x + 1, (x + 1)^2]$ und auf $[0, 1]$ das von den Gewichtsfunktionen $x + 1, 1, 2$ erzeugte System, also $[1 + x, (1 + x)x, (1 + x)x^2]$. Im Splineraum, der aus stetig differenzierbaren Funktionen dieser beiden ECT-Räume besteht, hat jedes Element höchstens drei Nullstellen, obwohl gilt

$$\text{sign } L_0^1 w_1^{(0)} = 0 \neq 1 = \text{sign } L_1^1 w_1^{(1)}.$$

Wir nehmen das Gegenteil an. Dann existiert ein Spline s , der sowohl in $[-1, 0)$ als auch in $(0, 1]$ zwei Nullstellen besitzt. Da $s|_{[-1, 0]}$ eine Parabel ist, gilt somit $s(0) \cdot Ds(0) > 0$, also besitzt auch die erste Ableitung von s in $(0, 1)$ zwei Nullstellen. Wir nehmen o.B.d.A. $s(0) > 0$ an. (Sonst multiplizieren wir s mit -1 .) Sei $s|_{[0, 1]}(x) = \lambda_1(x + 1) + \lambda_2(x + 1)x + \lambda_3(x + 1)x^2$. Dann ist $Ds|_{[0, 1]}(x) = 3\lambda_3 x^2 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_1 + \lambda_2$. Wir erhalten also $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, und da für $x \in (0, 1)$ gilt $1 + x > (1 + x)x > (1 + x)x^2$ und s dort negative Werte annimmt, folgt $\lambda_3 < -(\lambda_1 + \lambda_2)$. Der Scheitelpunkt der ersten Ableitung ist an der Stelle

$$-\frac{\lambda_2 + \lambda_3}{3\lambda_3} < -\frac{-\lambda_1}{3\lambda_3} < 0.$$

Das ist ein Widerspruch.

Weitere Beispiele für die Nichtnotwendigkeit von (2.7) liefern Splinerräume, die aus ECT-Systemen Γ_i zusammengesetzt sind, deren Gewichtsfunktionen (2.7) nicht erfüllen, man die Elemente von Γ_i aber so umordnen kann, daß die umgeordneten Systeme $\tilde{\Gamma}_i$ wiederum ECT-Systeme sind, sich benachbarte Systeme $\tilde{\Gamma}_{i-1}, \tilde{\Gamma}_i$ jetzt allerdings nur noch ab der μ_i -ten Stelle unterscheiden. Beispiele dafür werden wir in Kapitel 3.3.1 kennenlernen. I.a. ist eine Umordnung von ECT-Systemen natürlich nicht möglich, denn z.B. ist $[1, x, \dots, x^n]$ nur in dieser Anordnung ein ECT-System.

Aus dem Nullstellensatz 2.7 können wir noch folgern, daß Räume, in denen er für alle Splines gilt, schwach Čebyšev sind. Dazu sei $S^-(s, (x_p, x_q))$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel von s in (x_p, x_q) .

Korollar 2.9. Sei $S_{[a, b]}^\mu$ ein Splineraum, in dem die Bedingung (2.6) für alle s gilt. Dann ist $S_{[a, b]}^\mu$ ein schwacher Čebyšev-Raum.

Beweis. Der Spline s habe l Trägerintervalle $[x_{p_1}, x_{q_1}], \dots, [x_{p_l}, x_{q_l}]$. Dann gilt mit Satz 2.3 (wir vereinbaren wieder $\mu_0 = \mu_{k+1} = 0$)

$$Z(s, (a, b)) \leq \sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=p_j}^{q_j-1} d_i - \sum_{i=p_j}^{q_j} \mu_i - 1 \right) \leq \sum_{i=0}^k d_i - \sum_{i=1}^k \mu_i - l = \dim S_{[a, b]}^\mu - l.$$

Wegen $S^-(s, (a, b)) \leq Z(s, (a, b)) + l - 1$ folgt $S^-(s, (a, b)) \leq \dim S_{[a, b]}^\mu - 1$ und somit die Behauptung. \square

2.3 Interpolation

Für den gesamten Abschnitt sei $S_{[a,b]}^\mu$ ein Splineräum, in dem für alle $s \in S_{[a,b]}^\mu$ der Nullstellensatz 2.7 gilt. Wir wollen jetzt das folgende Hermite–Interpolationsproblem betrachten. Gegeben sind δ Punkte $a \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_\delta \leq b$ und δ reelle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_\delta$. Sei ν_i wieder die Anzahl der Vorgänger von τ_i , die mit τ_i übereinstimmen. Wir suchen einen Spline $s \in S_{[a,b]}^\mu$, für den gilt

$$D^{\nu_i} s(\tau_i) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, \delta. \quad (2.8)$$

Wir wollen eine notwendige und hinreichende Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit der obigen Interpolationsaufgabe herleiten. Dabei wird es uns nicht gelingen, eine notwendige Bedingung zu formulieren, wenn wir über die Vielfachheit der Interpolationsknoten nicht zusätzliche sinnvolle Voraussetzungen machen. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel im Raum $\mathbb{P}_{0,2}^{1,\max}$: Für $\tau_1 = \tau_2 = x_1$ und $\tau_3 \in (x_1, x_2]$ suchen wir ein $s \in \mathbb{P}_{0,2}^{1,\max}$ mit

$$s(\tau_1) = \tau_1, \quad Ds(\tau_1) = 1, \quad s(\tau_3) = \tau_3.$$

Es gibt offenbar eine eindeutig bestimmte Lösung. Fordern wir aber an der Stelle τ_3 einen anderen Funktionswert, ist das Interpolationsproblem nicht lösbar.

Man überlegt sich leicht, daß die Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar ist, wenn zwei (eventuell identische) Knoten entweder in $[x_0, x_1)$ oder in $(x_1, x_2]$ liegen und der dritte Knoten im jeweils anderen abgeschlossenen Intervall. Obiges Beispiel zeigt, daß diese Bedingung nicht notwendig ist. Ähnliche Beispiele kann man auch in höherdimensionalen Räumen konstruieren.

Um solche künstlichen Fälle auszuschließen, betrachten wir nur Interpolationsprobleme, bei denen folgende *Häufigkeitsbedingung* erfüllt ist

$$\nu_i \leq \mu_j - 1 \quad \text{falls } \tau_i = x_j, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.9)$$

Dies reicht aber noch nicht, um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu garantieren: Liegen etwa mehr als d_i Knoten im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, so wird schon das Teilproblem im Raum S_i i.a. keine Lösung haben, und ist dies „zufällig“ doch der Fall, so geht die eindeutige Lösbarkeit des Restproblems verloren, weil sozusagen überflüssige Knoten in $[x_i, x_{i+1}]$ liegen, die eigentlich nach $[a, b] \setminus [x_i, x_{i+1}]$ gehören. (Siehe den Beweis von Satz 2.10.)

Wie im Fall polynomialer Splines müssen die Knoten τ_i richtig auf die Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$ verteilt sein. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 = \dots = y_{d_0} &= x_0 \\ y_{d_0+1} = y_{d_0+2} = \dots = y_{d_0+m_1} &= x_1 && \text{(erweiterte Knotenfolge, berücksichtigt wird} \\ & \vdots && \text{die Anzahl der Freiheitsgrade „von rechts“)} \\ y_{\delta-m_k+1} = y_{\delta-m_k+2} = \dots = y_\delta &= x_k, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 z_1 &= z_2 = \dots = z_{n_1} = x_1 \\
 z_{n_1+1} &= z_{n_1+2} = \dots = z_{n_1+n_2} = x_2 && \text{(erweiterte Knotenfolge, berücksichtigt wird} \\
 & \vdots && \text{die Anzahl der Freiheitsgrade „von links“)} \\
 z_{\delta-d_k+1} &= z_{\delta-d_k+2} = \dots = z_{\delta} = x_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Sei

$$M_i := \begin{cases} [a, z_i] & \text{für } i = 1, \dots, d_0, \\ (y_i, z_i) & \text{für } i = d_0 + 1, \dots, \delta - d_k. \\ (y_i, b] & \text{für } i = \delta - d_k + 1, \dots, \delta \end{cases}$$

Wir sagen, die Interpolationsknoten $\tau_1, \dots, \tau_{\delta}$ erfüllen die *Mischbedingung*, falls gilt

$$\tau_i \in M_i, \quad i = 1, \dots, \delta.$$

Wir schreiben die Mischbedingung auch folgendermaßen

$$y_i \prec \tau_i \prec z_i, \quad i = 1, \dots, \delta,$$

dabei bedeute „ \prec “ entsprechend der Definition der Mischintervalle M_i entweder „ $<$ “ oder „ \leq “.

Die Mischbedingung korrespondiert mit der Art und Weise, wie man die Dimension von $S_{[a,b]}^{\mu}$ abzählen kann, man zählt:

(\rightarrow) von links nach rechts, also $\delta = \underbrace{(d_0 - \mu_0)}_{=0} + (d_1 - \mu_1) + \dots + (d_k - \mu_k)$ und schreibt für $i = 0, \dots, k$ jeden Knoten x_i genau $d_i - \mu_i$ mal auf. So erhält man die linken Enden der zulässigen Intervalle.

(\leftarrow) von rechts nach links, also $\delta = (d_k - \underbrace{\mu_{k+1}}_{=0}) + (d_{k-1} - \mu_k) + \dots + (d_0 - \mu_1)$ und schreibt für $i = k + 1, \dots, 1$ jeden Knoten x_i genau $d_{i-1} - \mu_i$ mal in umgekehrter Reihenfolge darunter. Dies sind die rechten Randpunkte der zulässigen Intervalle.

„Mischbedingung“

$$\begin{aligned}
 (\rightarrow) \quad & \overbrace{x_0, \dots, x_0}^{d_0}, \overbrace{x_1, \dots, x_1}^{d_1 - \mu_1}, \dots, x_k \\
 & \wedge, \dots, \wedge \\
 & \tau_1, \dots, \tau_{\delta} \\
 & \wedge, \dots, \wedge \\
 & x_1, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{d_{k-1} - \mu_k}, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_{k+1}}_{d_k} \quad (\leftarrow)
 \end{aligned}$$

Im Fall, daß die Dimension aller Räume S_i gleich ist (etwa d), genügt es, eine erweiterte Knotenfolge zu betrachten. Die Mischbedingung schreibt sich dann

$$y_i \prec \tau_i \prec y_{i+d} \quad i = 1, \dots, \delta \quad (y_{\delta+1} = \dots = y_{\delta+d} = x_{k+1}),$$

oder

$$z_i \prec \tau_i \prec z_{i+d} \quad i = -d + 1, \dots, \delta - d \quad (z_{-d+1} = \dots = z_0 = x_0). \quad (2.10)$$

In der Theorie der Polynomsplines wird üblicherweise die zweite Art der Indizierung verwendet.

Satz 2.10. *Sei $S_{[a,b]}^\mu$ ein Splineraum, in dem für alle seine Elemente der Nullstellensatz 2.7 gilt. Das Interpolationsproblem (2.8) erfülle die Häufigkeitsbedingung (2.9). Dann ist es eindeutig lösbar, gdw. die Interpolationsknoten die Mischbedingung erfüllen.*

Beweis. Das Interpolationsproblem ist eindeutig lösbar, gdw. das homogene Problem (also $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \dots, \delta$) nur die Lösung $s \equiv 0$ besitzt.

Die Mischbedingung ist hinreichend. Falls nicht, existiert ein nicht identisch verschwindender Spline $s \in S_{[a,b]}^\mu$, der den homogenen Interpolationsbedingungen genügt. Sei $[x_p, x_q]$ ein Trägerintervall von s . Der Nullstellensatz besagt, daß in (x_p, x_q) höchstens $\sum_{i=p}^{q-1} d_i - \sum_{i=p}^q \mu_i - 1$ Nullstellen liegen, aber im gleichen Intervall gibt es $\sum_{i=p}^{q-1} d_i - \sum_{i=p}^q \mu_i$ Interpolationsknoten.

Wir zeigen die Notwendigkeit der Mischbedingung. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es ist $\tau_i \leq y_i$ für ein $i \in \{d_0 + 1, \dots, \delta\}$.

Fall 2: Es ist $z_i \leq \tau_i$ für ein $i \in \{1, \dots, \delta - d_k - 1\}$.

Im ersten Fall benutzen wir die in Satz 2.2 konstruierte linksseitige Basis $\{b_1, \dots, b_\delta\}$ und betrachten

$$s_0 := \sum_{l=i}^{\delta} c_l b_l \in S_{[a,b]}^\mu.$$

Der Spline s_0 erfüllt die homogenen Interpolationsbedingungen in den Interpolationsknoten τ_1, \dots, τ_i . Werden an s_0 noch $\delta - i$ homogene Interpolationsbedingungen an den Interpolationsknoten $\tau_{i+1}, \dots, \tau_\delta$ gestellt, so sind dies für die $\delta - i + 1$ Koeffizienten c_i, \dots, c_δ (= Unbekannte) nur $\delta - i$ Gleichungen. Ein solches System ist stets nicht-trivial lösbar, also existiert ein Spline $s_0 \neq 0$, der die homogene Interpolationsaufgabe in den Knoten $\tau_1, \dots, \tau_\delta$ löst. Analog beweist man den Fall 2 mit einer rechtsseitigen Basis von $S_{[a,b]}^\mu$. \square

Wir nennen Splineräume, in denen der obige Interpolationssatz gilt, *IP-Räume*.

Bemerkung. Gibt es ein Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, in dem genau d_i Interpolationsknoten liegen, so zerfällt die Interpolationsaufgabe in zwei oder drei kleinere, nämlich:

- (1.) Löse das Interpolationsproblem im ECT-Raum S_i . Die Lösung sei f .
- (2.) Ist $i > 0$, dann löse das neue Interpolationsproblem, das aus dem alten entsteht, wenn man zu den in $[a, x_i]$ liegenden Interpolationsknoten, den μ_i -fachen Knoten x_i hinzunimmt und $D^j s(x_i) = D^j f(x_i)$ für $j = 0, \dots, \mu_i - 1$ fordert, im Raum $S_{0,i}^\mu$.
- (3.) Ist $i < k$, dann löse das neue Interpolationsproblem, das aus dem alten entsteht, wenn man zu den in $(x_{i+1}, b]$ liegenden Interpolationsknoten, den μ_{i+1} -fachen Knoten x_{i+1} hinzunimmt und $D^j s(x_{i+1}) = D^j f(x_{i+1})$ für $j = 0, \dots, \mu_{i+1} - 1$ fordert, im Raum $S_{i+1,k+1}^\mu$.

Da die Lösbarkeit des gesamten Problems offenbar äquivalent zur Lösbarkeit der Probleme (1.) bis (3.) ist, hätten wir o.B.d.A. diesen Fall von vornherein ausschließen können, indem wir die Häufigkeitsbedingung um die Bedingung, daß in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ höchstens $d_i - 1$ Knoten liegen, ergänzen, wie es manche Autoren im Fall von Polynomsplines tun.

2.4 Konstruktion lokaler Basen in IP-Räumen

In der Theorie der Polynomsplines und auch im CAGD arbeitet man üblicherweise mit einer B-Spline-Basis, da sie im Vergleich zur einseitigen truncated-power-Basis unter anderem den Vorteil der Lokalität hat. Außerdem gelingt es dort, die B-Splines so zu berechnen, daß sie eine lokale Zerlegung der Eins bilden. Eine andere übliche Normierung von B-Splines ist die auf Integral = 1. In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß wir auch in allgemeinen IP-Räumen solche lokalen Basen konstruieren können. Natürlich wird es hier i.a. keine Möglichkeit geben, deren Elemente rekursiv zu berechnen oder in einem einfachen geschlossenen Ausdruck anzugeben. Auch ist es i.a. nicht möglich, die Basiselemente gleich so zu berechnen, daß sie eine Teilung der Eins bilden. (Eine solche Basis kann es natürlich sowieso nur dann geben, wenn für alle Räume S_i ($i = 0, \dots, k$) gilt $1 \in S_i$, das heißt, wenn $w_1^{(i)} \equiv \text{const.}$) Deshalb erscheint zunächst die Forderung nach Positivität und die Normierung auf Integral = 1 sinnvoll. Diese Bedingungen werden wir automatisch, das heißt ohne zusätzlichen Rechenaufwand, erfüllen.

Wie in Kapitel 2.1 angekündigt, benötigen wir für die Konstruktion lokaler Basen Hilfsräume auf $[x_{-d_0+1}, x_{-d_0+2}], \dots, [x_{-1}, x_0]$ und $[x_{k+1}, x_{k+2}], \dots, [x_{k+d_k-1}, x_{k+d_k}]$. Wir wählen links von x_0 ECT-Räume der Dimension d_0 und rechts von x_{k+1} ECT-Räume der Dimension d_k . Seien $\mu_{-d_0+2} = \dots = \mu_0 = d_0 - 1$ und $\mu_{d_{k+1}} = \dots = \mu_{d_k+k-1} = d_k - 1$. Da wir die Basis durch das Lösen von Gleichungssystemen (= Interpolationsproblemen)

gewinnen, müssen wir die Hilfsräume so wählen, daß der Splinerraum S_{-d_0+1, d_k+k}^μ ein IP-Raum ist. Dies ist z.B. dann gewährleistet, wenn wir für die Gewichtsfunktionen fordern

$$\begin{aligned} w_j^{(i)}(x_{i+1}) &= w_j^{(i+1)}(x_{i+1}) && \text{für } i = -d_0 + 1, \dots, -1, \quad j = 1, \dots, d_0 - 2, \\ w_j^{(i)}(x_{i+1}) &= w_j^{(i+1)}(x_{i+1}) && \text{für } i = k, \dots, d + k - 1, \quad j = 1, \dots, d_k - 2. \end{aligned}$$

Folgende einfache Feststellung wird uns gleich noch von Nutzen sein:

Lemma 2.11. *Sei B eine Basis eines Splinerhauses $S_{[a,b]}^\mu$ mit der Eigenschaft, daß nur d_i Elemente s_1, \dots, s_{d_i} von B in $[x_i, x_{i+1}]$ von Null verschiedene Werte annehmen. Dann ist $\{s_1|_{[x_i, x_{i+1}]}, \dots, s_{d_i}|_{[x_i, x_{i+1}]}\}$ eine Basis von S_i .*

Beweis. Sei $f \in S_i$. Dann existiert ein $s \in S$, so daß $f = s|_{[x_i, x_{i+1}]} = \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_j s_j|_{[x_i, x_{i+1}]}$. Also ist $\{s_1|_{[x_i, x_{i+1}]}, \dots, s_{d_i}|_{[x_i, x_{i+1}]}\}$ eine Basis von S_i . \square

2.4.1 Lokale Basen in IP-Räumen maximaler Glattheit, deren ECT-Räume die gleiche Dimension haben

Um technischen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen, betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, nämlich daß die Dimension aller ECT-Räume gleich ist und daß die Funktionen aus S_i mit maximaler Glattheit verknüpft werden, das heißt, wir fordern $d_i = d$ für alle $i = -d + 1, \dots, k + d - 1$ und $\mu_i = d - 1$ für alle $i = -d + 2, \dots, k + d - 1$.

Satz 2.12. *Sei $S_{[a,b]}^{\max}$ ein IP-Raum, in dem die Dimension aller Räume S_i gleich $d \geq 2$ ist ($i = 0, \dots, k$). Sei $p \in \{-d + 1, \dots, k\}$. Dann gilt:*

- (i) *Es gibt einen Spline $s_p \in S_{-d+1, k+d}^{\max}$ mit $\text{supp } s_p = [x_p, x_{p+d}]$, der als C^{d-2} -Funktion auf \mathbb{R} fortgesetzt werden kann.*
- (ii) *s_p hat in (x_p, x_{p+d}) keine Nullstelle.*
- (iii) *\tilde{s}_p ist ein weiterer Spline mit dieser Eigenschaft, gdw. es eine von Null verschiedene Konstante α gibt mit $\tilde{s}_p = \alpha s_p$.*
- (iv) *Die Menge $\{s_{-d+1}|_{[a,b]}, \dots, s_k|_{[a,b]}\}$ ist eine Basis von $S_{a,b}^{\max}$. Es gibt keine Basis von $S_{a,b}^{\max}$, deren Elemente kleinere Träger haben.*
- (v) *Die Basis $\{s_{-d+1}|_{[a,b]}, \dots, s_k|_{[a,b]}\}$ ist beidseitig.*

Beweis. Alle im folgenden auftretenden Splineräume sind nach Voraussetzung bzw. nach Wahl der Hilfsräume S_{-d+1}, \dots, S_{-1} und $S_{k+1}, \dots, S_{k+d-1}$ IP-Räume.

Wir betrachten den Splineraum $S_{-d+1,d+k}^{\max}$. Es ist $\dim S_{-d+1,d+k}^{\max} = 3(d-1) + k + 1$. Sei $x' \in (x_p, x_{p+d})$ beliebig. Dann erfüllen die $3(d-1) + k + 1$ Punkte

$$x_{-d+1}, x_{-d+2}, \dots, x_{p-1}, \underbrace{x_p, \dots, x_p}_{d-1 \text{ mal}}, x', \underbrace{x_{p+d}, \dots, x_{p+d}}_{d-1 \text{ mal}}, x_{p+d+1}, \dots, x_{k+d}$$

die Mischbedingung. Also ist das Interpolationsproblem

$$\begin{aligned} s_p(x_i) &= 0 & \text{für } i = -d+1, \dots, p-1 \text{ und } i = p+d+1, \dots, d+k \\ s_p(x') &= 1 \\ D^j s_p(x_i) &= 0 & \text{für } i = p, p+d, j = 0, \dots, d-2 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar. Damit folgt sofort, daß s_p links von x_p bzw. rechts von x_{p+d} Null ist. Die Funktion s_p besitzt in (x_p, x_{p+d}) keine Nullstelle ξ , denn sonst hätte das homogene Interpolationsproblem, das aus obigem entsteht, wenn man die Bedingung $s_p(x') = 1$ wegläßt und dafür $s_p(\xi) = 0$ hinzunimmt, eine nichttriviale Lösung.

Es ist klar, daß für $\alpha \neq 0$ der Spline $\tilde{s}_p = \alpha s_p$ die von s_p geforderten Eigenschaften hat. Existierte ein Spline s anderer Bauart mit dieser Eigenschaft, so gäbe es ein $\alpha \neq 0$ und ein $\xi \in (x_p, x_{p+d})$ mit $\alpha s_p(\xi) = s(\xi)$. Dies ist aber nicht möglich, weil sonst der nichttriviale Spline $s - \alpha s_p$ wiederum eine Nullstelle zuviel hätte.

Wir werden sehen, daß die Menge $\{s_{-d+1}|_{[a,b]}, \dots, s_k|_{[a,b]}\}$ eine Basis von $S_{[a,b]}^{\max}$ ist, wie sie in Satz 2.2 konstruiert wurde. Sei zunächst $i \in \{1, \dots, k\}$. Nach Konstruktion gilt $D^l s_i(x_i) = 0$ für $l = 0, \dots, d-2$, also ist $s_i|_{[x_i, x_{i+1}]} \neq 0$ eine Basis des entsprechenden $m_i (= 1)$ -dimensionalen Unterraumes von S_i , wie in Satz 2.2 gefordert. Außerdem ist nach Konstruktion $s_i|_{[a,b]} \in S_{[a,b]}^{\mu}$ für $i = -d+1, \dots, k$. Wir müssen also nur noch zeigen, daß die Funktionen $s_{-d+1}|_{[x_0, x_1]}, \dots, s_0|_{[x_0, x_1]}$ den Raum S_0 aufspannen. Sei $\{f_{-2d+1}, \dots, f_{-d}\}$ eine Basis eines ECT-Raumes auf dem Intervall $[x_{-d}, x_{-d+1}]$. Wir wählen einen beliebigen Punkt $x' \in (x_{-d+1}, x_0)$. Dann erfüllen die Punkte

$$\underbrace{x_{-d+1}, \dots, x_{-d+1}}_{d-1 \text{ mal}}, x', \underbrace{x_0, \dots, x_0}_{d-1 \text{ mal}}$$

die Mischbedingung im Splineraum $S_{-d+1,0}^{\max}$, also ist für $l = -2d+1, \dots, -d$ die Interpolationsaufgabe: finde $F_l \in S_{-d+1,0}^{\max}$ mit

$$\begin{aligned} D^j F_l(x_{-d+1}) &= D^j f_l(x_{-d+1}), & j = 0, \dots, d-2 \\ D^j F_l(x_0) &= 0, & j = 0, \dots, d-2 \\ F_l(x') &= 1 \end{aligned}$$

lösbar. Für $i = -2d+1, \dots, -d$ sei

$$G_i : [x_{-d}, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} f_i(x) & \text{für } x_{-d} \leq x < x_{-d+1} \\ F_i(x) & \text{für } x_{-d+1} \leq x < x_0 \\ 0 & \text{für } x_0 \leq x \leq x_1 \end{cases},$$

und für $i = -d + 1, \dots, 0$ sei

$$G_i : [x_{-d}, x_1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x_{-d} \leq x < x_i \\ s_i(x) & \text{für } x_i \leq x \leq x_1 \end{cases}.$$

Aus Satz 2.2 folgt, daß $\{G_{-2d+1}, \dots, G_0\}$ eine Basis von $S_{-d,1}^{\max}$ ist. Da aber nur die d Funktionen G_{-d+1}, \dots, G_0 in $[x_0, x_1]$ nicht identisch verschwinden und sie dort mit s_{-d+1}, \dots, s_0 übereinstimmen, folgt die Behauptung aus Lemma 2.11.

Nichttriviale Splines mit kleinerem Träger kann es nicht geben, denn dann würden die geforderten Vielfachheiten der Nullstellen am Rand des Trägers erzwingen, daß nur $s \equiv 0$ diese Interpolationsbedingungen erfüllt.

Die Behauptung (v) gilt nach Konstruktion trivialerweise. \square

Bemerkung. Wir möchten auf folgende interessante Konsequenz aus obigem Satz hinweisen: Hat man für $i = -d + 1, \dots, k$ Funktionen f_i mit $\text{supp } f_i = [x_i, x_{i+d}]$ gegeben, und will man zeigen, daß die Menge $\{f_{-d+1}|_{[a,b]}, \dots, f_k|_{[a,b]}\}$ eine Basis eines IP-Splineräume $S_{[a,b]}^{\max}$ ist, der aus d -dimensionalen ECT-Systemen zusammengesetzt ist, so genügt es nachzuweisen, daß die f_i entsprechende Splines sind. Die lineare Unabhängigkeit folgt dann automatisch.

Wir nennen die oben konstruierten (und bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmten) Splines *B-Splines*.

Beispiel. Wir betrachten den polynomialen Splineräum $\mathbb{P}_{[a,b]}^{d-1, \max}$, der aus Polynomen vom Grad $d-1$ verknüpft mit maximaler Glattheit besteht. Wählen wir links von a und rechts von b entsprechende Hilfsräume, so gibt es für $i = -d+1, \dots, k$ nach obigem Satz im wesentlichen genau einen Spline, dessen Träger $[x_i, x_{i+d}]$ ist. Die Restriktionen dieser Splines auf das Intervall $[a, b]$ bilden eine Basis von $\mathbb{P}_{[a,b]}^{d-1, \max}$. Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die gewöhnlichen dividierten Differenzen $b_i(x) := [x_i, \dots, x_{i+d}] (\cdot - x)_+^{d-1}$. Bekanntlich gelten folgende Formeln für dividierte Differenzen mit einfachen Knoten (vgl. etwa DeVore/Lorentz [1] p. 121, 123):

$$[x_i, \dots, x_{i+d}] f = \sum_{j=i}^{i+d} f(x_j) \left(\prod_{\substack{l=i \\ l \neq j}}^{d+i} (x_j - x_l) \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

und für hinreichend glattes f

$$[x_i, \dots, x_{i+d}] f = \int_{x_i}^{x_{i+d}} f^{(d)}(t) [x_i, \dots, x_{i+d}] \left(\frac{(\cdot - t)_+^{d-1}}{(d-1)!} \right) dt \quad (\text{Peano-Darstellung}).$$

Vermöge (2.11) bedarf es nur noch einer einfachen Rechnung, um nachzuweisen, daß b_i ein polynomialer B-Spline maximaler Glattheit vom Grad $d-1$ mit Träger $[x_i, x_{i+d}]$ ist.

Wählt man noch geeignete Normierungen $\lambda_i b_i$ mit $\lambda_i \neq 0$, so erhält man die gewöhnlich in der Literatur betrachteten Splines, nämlich für $\lambda_i = x_{i+d} - x_i$ die B-Splines N_i^{d-1} mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=-d+1}^k N_i^{d-1}(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in [a, b] \quad (\text{lokale Zerlegung der Eins})$$

und für $\lambda_i = d$ die auf Integral = 1 normierten B-Splines M_i^{d-1} . Ersteres folgt leicht aus der de Boor-Rekursion für polynomiale B-Splines, die ein Spezialfall der auf Seite 51 angegebenen für Gresbrandsche B-Splines rationaler Funktionen mit vorgegebenen Polstellen ist, letzteres aus der Peano-Darstellung (setze dort $f(t) = t^d$).

(Natürlich hängt der Spline b_i für $i < 0$ und $i > k - d$ von der Wahl der Hilfsknoten ab. Mit „im wesentlichen eindeutig“ ist nur gemeint, daß bei fester Wahl der x_i für $i < 0$ und $i > k + 1$ der Spline bis auf Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eindeutig bestimmt ist.)

Wir möchten außer den auf Integral = 1 normierten B-Splines auch eine B-Spline-Basis konstruieren, deren Elemente eine lokale Zerlegung der Eins bilden, wie es für die oben angegebenen Polynomsplines N_i^{d-1} gilt. Das ist selbstverständlich nur dann möglich, wenn jeder ECT-Raum S_i die konstanten Funktionen enthält oder äquivalent dazu das erste Element von Γ_i eine Konstante ist. Das folgende Lemma sichert die Existenz einer solchen Basis.

Lemma 2.13. *Sei $S_{[a,b]}^{\max}$ ein IP-Raum, in dem die Dimension aller Räume S_i gleich d ist, wobei das erste Element von Γ_i jeweils eine Konstante ist. Sei $B = \{s_{-d+1}, \dots, s_k\}$ die im letzten Satz konstruierte B-Spline-Basis. Dann liegt der Spline $s^0 \equiv 1 \in S_{[a,b]}^{\max}$ in keinem von einer echten Teilmenge von B aufgespannten Unterraum.*

Beweis. Für $d = 1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Im Fall $d = 2$ folgt sie daraus, daß an einem Knoten x_i nur ein Spline von Null verschieden ist. Wir setzen jetzt $d \geq 3$ voraus.

Sei zunächst $2k - 1 > d$. Nach Voraussetzung ist $\tilde{S} := L^1 S_{[a,b]}^{\max} = DS_{[a,b]}^{\max}$, also \tilde{S} ein Splineraum zusammengesetzt aus $(d - 1)$ -dimensionalen ECT-Systemen, deren Elemente mit maximaler Glattheit verknüpft sind. Wir schreiben $\tilde{s}_i := Ds_i$ und $\tilde{B} := \{\tilde{s}_{-d+1}, \dots, \tilde{s}_k\}$. \tilde{S} hat die Dimension $d + k - 1$. Damit ist die Behauptung offenbar äquivalent dazu, daß eine beliebige Teilmenge mit $d + k - 1$ Elementen von \tilde{B} linear unabhängig ist. Gelingt es uns zu zeigen, daß für alle $i = -d + 1, \dots, k$ ein Intervall $A_i = [x_p, x_{p+1}] \subset [a, b]$ mit $A_i \subset \text{supp } \tilde{s}_i$ existiert, auf dem die Restriktionen der übrigen dort nicht identisch verschwindenden $d - 1$ Splines aus \tilde{B} linear unabhängig sind, so folgt die Behauptung, denn lokale lineare Unabhängigkeit zieht globale nach sich.

\tilde{B} spannt den Raum \tilde{S} auf, denn bildet man die ECT-Ableitungen der Elemente einer Basis eines ECT-Raumes, so spannen die Ableitungen den abgeleiteten Raum auf,

also gilt $\text{span}\{\tilde{s}_{-d+1}|_{[x_0, x_1]}, \dots, \tilde{s}_0|_{[x_0, x_1]}\} = DS_0$. Für ein geeignetes $i \in \{-d+1, \dots, 0\}$ ist also $\{\tilde{s}_{-d+1}|_{[x_0, x_1]}, \dots, \tilde{s}_0|_{[x_0, x_1]}\} \setminus \{\tilde{s}_i|_{[x_0, x_1]}\}$ eine Basis von DS_0 . Da die Splines \tilde{s}_j , $j = 1, \dots, k$ bei x_j eine $(d-3)$ -fache Nullstelle haben, liefert uns Satz 2.2, daß $\tilde{B} \setminus \{\tilde{s}_i\}$ eine Basis von \tilde{S} ist.

Wir zeigen, daß für alle $j \in \{-d+1, \dots, i\}$ die Elemente aus $\tilde{B} \setminus \{\tilde{s}_j\}$ linear unabhängig sind. Das folgt aus der Tatsache, daß nur $d-1$ Elemente aus $\tilde{B} \setminus \{\tilde{s}_i\}$ im Intervall $A_i = [x_{i+d-1}, x_{i+d}]$ von Null verschiedene Werte annehmen und dies dann natürlich auch für $\tilde{B} \setminus \{\tilde{s}_j\}$ gilt. Auf Grund von Lemma 2.11 sind die Restriktionen dieser $d-1$ Splines auf A_i linear unabhängig und damit auch die Splines selbst. Es folgt, daß $\tilde{B} \setminus \{\tilde{s}_{-d+1}\}$ eine Basis von \tilde{S} ist. Denselben Schluß führen wir für die Intervalle $[x_1, x_2], \dots, [x_{d-1}, x_d]$, indem wir für $j = 1, \dots, d-1$ die Splineräume $S_{j, k+1}^{\max}$ betrachten und so erhalten, daß die Mengen $\tilde{B} \setminus \{\tilde{s}_j\}$ Basen von \tilde{S} sind. Durch eine analoge Argumentation mit Hilfe rechtsseitiger Basen erhalten wir diese Aussage auch für die übrigen Mengen $\tilde{B} \setminus \{\tilde{s}_k\}, \dots, \tilde{B} \setminus \{\tilde{s}_d\}$.

Die Voraussetzung $d < 2k - 1$ war nur nötig, damit wir sicherstellen konnten, daß sämtliche Intervalle A_i Teilmengen von $[a, b]$ sind. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, müssen wir nur einen entsprechend größeren IP-Raum $S_{0, m}^{\max}$ mit geeignetem $m > k + 1$ betrachten und dort eine B-Spline-Basis wählen, deren erste $d + k$ Elemente wieder unsere oben betrachteten Splines sind. \square

Bemerkung. Im Fall einer einseitigen Basis gilt obiger Satz i.a. natürlich nicht, denn wählt man z.B. als ein Element der Basis des Raumes S_0 die Konstante 1 und setzt man diese nach rechts konstant fort, ist der Spline s^0 selbst schon ein Element der entsprechenden linksseitigen Basis. Es gilt zwar auch hier, daß die Ableitungen der Elemente der Basis den abgeleiteten Raum aufspannen, aber im Gegensatz zu oben, wo man aus der Menge dieser Ableitungen ein beliebiges Element entfernen konnte, um eine Basis von \tilde{S} zu erhalten, muß man hier zwangsläufig die Ableitung von s^0 weglassen.

Wir führen noch einige Abkürzungen ein. Für $i = -d+1, \dots, k$ und $j > i$ seien

$$V_i^j := \begin{pmatrix} V_+^i & 0 & \dots & 0 \\ V_-^{i+1} & -V_+^{i+1} & 0 & \\ 0 & V_-^{i+2} & -V_+^{i+2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & V_-^{j-2} & -V_+^{j-2} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & V_-^{j-1} & -V_+^{j-1} \\ & & & & 0 & V_-^j \end{pmatrix}$$

und

$$J_i := \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} s_1^{(i)}(x) dx, \dots, \int_{x_i}^{x_{i+1}} s_{d_i}^{(i)}(x) dx \right).$$

Dabei sind V_+^l bzw. V_-^l die auf Seite 22 definierten Vandermonde-Matrizen. Außerdem sei $V_{J,i}^j$ die Matrix, die man erhält, wenn man zur Matrix V_i^j als letzte Zeile den Vektor $(J_i, J_{i+1}, \dots, J_{j-1}) \in \mathbb{R}^{d(j-i)}$ hinzufügt. Offenbar ist $V_{J,i}^{i+d} \in \mathbb{R}^{d^2 \times d^2}$.

Korollar 2.14. *Sei $S_{[a,b]}^{\max}$ ein IP-Raum, der aus ECT-Räumen der Dimension d zusammengesetzt ist. Dann gilt*

- (i) *Es gibt Splines $\{B_{-d+1}, \dots, B_k\} \subset S_{-d+1, k+d}^{\max}$ mit $\text{supp } B_p = [x_p, x_{p+d}]$, für die $\{B_{-d+1}|_{[a,b]}, \dots, B_k|_{[a,b]}\}$ eine Basis von $S_{[a,b]}^{\max}$ ist, die im Inneren ihres Trägers keine Nullstelle haben und für die gilt*

$$\int_{x_{-d+1}}^{x_{d+k}} B_i(x) dx = 1.$$

Für $p = -d+1, \dots, k$ sei

$$c_p = (c_{p,1}, \dots, c_{p,d}, c_{p+1,1}, \dots, c_{p+1,d}, \dots, c_{p+d-1,1}, \dots, c_{p+d-1,d})^t$$

die (eindeutig bestimmte) Lösung des Gleichungssystems $V_{J,p}^{p+d} x = (0, \dots, 0, 1)^t$. Dann gilt

$$B_p(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=1}^d c_{p+i,j} s_j^{(p+i)}.$$

- (ii) *Ist $1 \in S_i$ für alle $i = 0, \dots, k$, so gibt es Splines $N_{-d+1}, \dots, N_k \in S_{-d+1, d+k}^{\max}$ mit $\text{supp } N_p = [x_p, x_{p+d}]$, deren Restriktionen auf $[a, b]$ eine Basis von $S_{[a,b]}^{\max}$ bilden, so daß für alle $x \in [a, b]$ gilt*

$$\sum_{i=-d+1}^k N_i(x) = 1 \quad (\text{Teilung der Eins}).$$

Wählen wir Interpolationsknoten $\tau_1, \dots, \tau_\delta \in [a, b]$, die die Mischbedingung erfüllen, und lösen wir das Interpolationsproblem

$$s(\tau_l) = \sum_{i=-d+1}^k \lambda_i B_i(\tau_l) = 1, \quad l = 1, \dots, \delta, \quad (2.12)$$

so gilt $N_i = \lambda_i B_i$, $i = -d+1, \dots, k$.

Beweis. Nach Satz 2.12 existiert ein im Inneren von $[x_p, x_{p+d}]$ positiver Spline s_p . Den Spline B_p erhält man, indem man s_p durch $\int_{x_p}^{x_{p+d}} s_p(x) dx$ teilt. Er ist eindeutig bestimmt, denn gäbe es einen zweiten, so hätte ihre (nichttriviale) Differenz in (x_p, x_{p+d}) weitere Nullstellen.

Es ist klar, daß für $B_p(x) = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=1}^d \lambda_{p+i,j} s_j^{(p+i)}$ gilt, daß die $\lambda_{p+i,j}$ eine Lösung des Gleichungssystems $V_{J,p}^{p+d} x = (0, \dots, 0, 1)^t$ sind. Da B_p einzig ist, ist auch das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

Da aus den Voraussetzungen folgt, daß die Funktion $s \equiv 1$ die einzige Lösung von (2.12) ist und die λ_i unabhängig von der Wahl der Interpolationsknoten sind, genügt es für den Teil (ii) zu zeigen, daß $\lambda_i \neq 0$ für $i = -d+1, \dots, k$ gilt. Das folgt aber sofort aus Lemma 2.13. \square

Wir haben also gesehen, daß wir unter den bisher gemachten Voraussetzungen, in allgemeinen Splineräumen Basen konstruieren können, die ähnliche Eigenschaften haben wie die polynomialen B-Splines. Natürlich wird es nur in Ausnahmefällen (siehe die Gresbrandschen rationalen B-Splines, Kapitel 3.1) einfache Rekursionsformeln zu ihrer Berechnung geben.

Folgendes Beispiel zeigt, daß bei der Konstruktion lokaler Basen in Splineräumen, die keine IP-Räume sind, gewisse Unsymmetrien auftreten können.

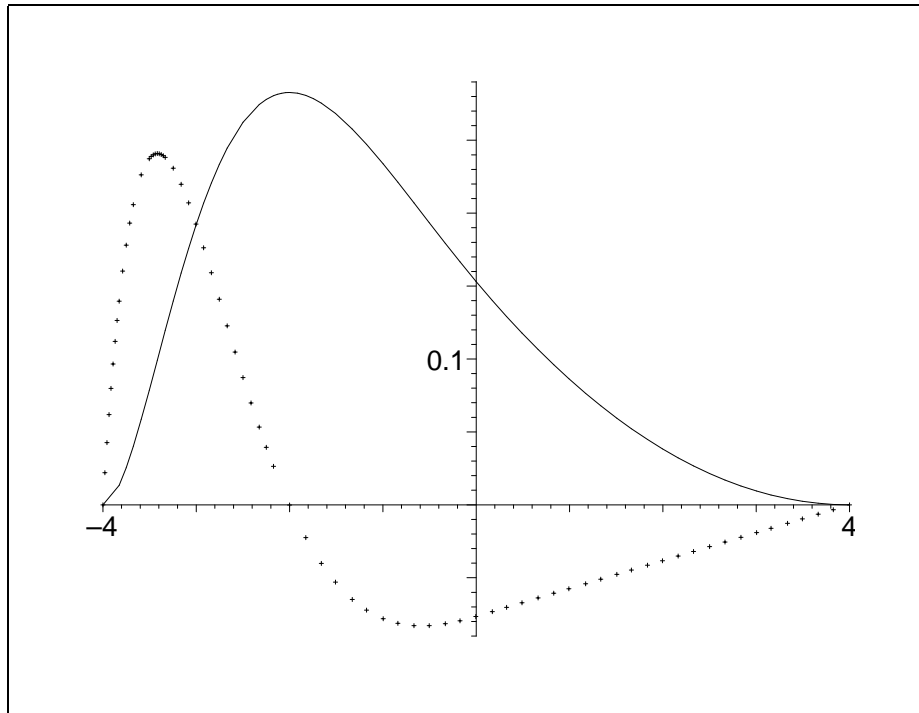
Beispiel. Seien $x_0 = -8$, $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$. Seien $S_0 := \mathbb{P}^2|_{[x_0, x_1]}$, $S_1 = \text{span}\{e^{-x}, (x+4)e^{-x}, (x+4)^2 e^{-x}\}$ (siehe das Beispiel auf Seite 29), $S_2 := \mathbb{P}^2|_{[x_2, x_3]}$ und $S_3 := \mathbb{P}^2|_{[x_3, x_4]}$. Sei

$$s(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [x_0, x_1] \\ \frac{3}{-14 + 6e^4} \cdot e^{-x}(x+4)^2 & \text{für } x \in [x_1, x_2] \\ \frac{1}{-7 + 3e^4} \left(\frac{3}{2}x^2 - 12x + 24 \right) & \text{für } x \in [x_2, x_3] \\ 0 & \text{für } x \in [x_3, x_4] \end{cases}.$$

Wegen $s(-4) = Ds(-4) = s(4) = Ds(4) = 0$, $s_-(0) = s_+(0) = \frac{24}{3e^4-7}$ und $D_-s(0) = D_+s(0) = \frac{-12}{3e^4-7}$ ist $s \in S_{0,4}^{\max}$, sein Träger besteht jedoch nur aus zwei Knotenintervallen (siehe Abbildung 2.2). Außerdem rechnet man nach, daß $\int_{x_1}^{x_3} s(x) dx = 1$ gilt. Jetzt ist es aber keineswegs so, daß man in diesem Raum eine „noch lokalere“ Basis konstruieren kann: Man berechnet

$$\det V_{J,0}^3 = 1024e^8 - \frac{7168}{3}e^4 \neq 0,$$

also gibt es genau einen auf Integral = 1 normierten Spline mit Träger $[x_0, x_3]$, nämlich s . Da aber s auf $[x_0, x_1]$ identisch Null ist, muß man um eine Basis von $S_{0,4}^{\max}$ zu gewinnen, einen weiteren Spline konstruieren, der dann den Träger $[x_0, x_4]$ hat. (Dies war

Abbildung 2.2: Der Spline s und seine Ableitung (gepunktet)

auch nicht anders zu erwarten: Existierte ein zu s linear unabhängiger Spline \tilde{s} mit $\text{supp } \tilde{s} = [x_0, x_3]$, so gäbe es eine Basis von $S_{0,4}^{\max}$, in der nur zwei Elemente auf $[x_2, x_3]$ von Null verschiedene Werte annehmen würden, was aber offenbar nicht möglich ist.)

2.4.2 Lokale Basen in beliebigen IP-Räumen

Wir werden uns in diesem Abschnitt im wesentlichen auf die Ergebnisse des vorherigen stützen können und zur Konstruktion lokaler Basen wiederum Satz 2.2 verwenden. Sei also $S_{[a,b]}^{\mu}$ ein IP-Raum, wobei an die Dimensionen der zugrundeliegenden ECT-Räume und den Vektor (μ_1, \dots, μ_k) keine zusätzlichen Forderungen gestellt werden (außer natürlich denen auf Seite 20). Wir verwenden erneut die auf Seite 38 definierten Hilfsräume $S_{-d_0+1}, \dots, S_{-1}$ und $S_{d_{k+1}}, \dots, S_{k+d_k-1}$, wobei die Verknüpfung der Hilfsräume untereinander und die von S_{-1} mit S_0 bzw. S_k mit S_{k+1} wieder mit maximaler Glattheit erfolgen soll.

Wir gehen wie folgt vor: Zunächst konstruieren wir die Splines s_{-d_0+1}, \dots, s_0 wie in Satz 2.12. Hier kann es schon vorkommen, daß wir ab einem $j \in \{-d+2, \dots, 0\}$ für die Splines s_j, \dots, s_0 rechts von x_1 weniger Knoten benötigen als im letzten Abschnitt. Mit denselben Argumenten wie im Beweis von Satz 2.12 ist aber gewährleistet, daß ihre Restriktionen auf $[x_0, x_1]$ linear unabhängig sind. Sei $i \in \{1, \dots, k\}$. Nach Satz 2.2 sind $m_i = d_i - \mu_i$ linear unabhängige Elemente von S_i , die bei x_i Nullstellen hinreichender Vielfachheit haben, als Splines nach rechts fortzusetzen, wobei wir hier fordern, daß

ihre Träger möglichst klein sein sollen. Statt feste linear unabhängige Elemente aus S_i zu betrachten, können wir natürlich auch zulassen, daß jedes von ihnen noch von einem von Null verschiedenen Faktor abhängt.

Es sind wieder rechts von x_i genügend viele Freiheitsgrade anzusammeln. Damit $[x_i, x_j]$ der Träger eines Splines sein kann, muß nach obiger Bemerkung

$$\sum_{m=i+1}^j d_m \geq \sum_{m=i+1}^{j+1} \mu_m$$

gelten. Das folgende Lemma liefert eine grobe Abschätzung für die Größe der Träger:

Lemma 2.15. *Sei $-d_0 + 1 \leq i \leq k$. Sei l_i die kleinste Zahl mit*

$$\sum_{m=i+1}^{i+l_i-1} d_m \geq \sum_{m=i+1}^{i+l_i} \mu_m.$$

Dann gilt $l_i \leq d_i$.

Beweis. Sei zunächst $\mu_{i+d_i} < d_i$. Wegen $d_m > \mu_m$ für alle m gilt dann

$$\sum_{m=i+1}^{i+d_i-1} d_m \geq d_i - 1 + \sum_{m=i+1}^{i+d_i-1} \mu_m \geq \sum_{m=i+1}^{i+d_i} \mu_m.$$

Sei jetzt $\mu_{i+d_i} = d_i + n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mu_{i+d_i} > \mu_{i+1} + n$, und mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\sum_{m=i+1}^{i+d_i-1} |\mu_m - \mu_{m+1}| > n.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{m=i+1}^{i+d_i-1} d_m &\geq \sum_{m=i+1}^{i+d_i-1} (\max\{\mu_m, \mu_{m+1}\} + 1) = d_i - 1 + \sum_{m=i+1}^{i+d_i-1} \mu_m + \sum_{m=i+1}^{i+d_i-1} |\mu_m - \mu_{m+1}| \\ &\leq \sum_{m=i+1}^{i+d_i} \mu_m, \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Das Lemma besagt, daß die Träger unserer Splines nicht größer sein werden als im Falle maximaler Glattheit und gleicher Dimensionen der ECT-Räume, was wenig überrascht. Die Zahl l_i kann man im Anwendungsfall leicht ausrechnen, und selbst bei maximaler Glattheit werden wir, wenn die Dimensionen der Räume S_i unterschiedlich sind, i.a. mit

weniger als d_i Intervallen auskommen. Je weniger Glattheit wir fordern, desto kleiner wird natürlich l_i .

Das folgende Lemma liefert uns eine einfache Möglichkeit, wie wir beim Konstruieren der Splines (= Lösen von Interpolationsproblemen) garantieren können, daß die Restriktionen der Splines auf $[x_i, x_{i+1}]$ linear unabhängig sind.

Lemma 2.16. *Seien $f_1, \dots, f_{m_i} \in S_i$ mit $D^j f_l(x_i) = 0$ für $j = 0, \dots, \mu_i - 1$ und $l = 1, \dots, m_i$. Gilt außerdem*

$$(D^j f_l(x_i))_{l=1, \dots, m_i}^{j=\mu_i, \dots, d_i-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 & * \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & * \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & a \neq 0 \end{pmatrix},$$

dann sind die f_i linear unabhängig.

Beweis. Sei $\sum_{l=1}^{m_i} \lambda_l f_l \equiv 0$. Dann gilt $\lambda_1 = 0$, damit folgt $\lambda_2 = 0$ usw.. \square

Sei $x' \in (x_i, x_{i+l_i})$. Für $j = 1, \dots, m_i$ müssen wir folgende Interpolationsprobleme lösen (vgl. Satz 2.12)

$$\begin{aligned} D^l s_{i,j}(x_i) &= \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq l \leq \mu_i - 2 + j \\ 1 & \text{für } \mu_i - 1 + j \leq l \leq d_i - 2 \end{cases}, \\ D^l s_{i,j}(x_{i+l_i}) &= 0, \quad l = 0, \dots, \mu_{i+l_i} - 1, \\ s(x') &= 1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dies sind $d_i + \mu_{i+l_i}$ Interpolationsbedingungen. Damit der Interpolant eindeutig bestimmt ist, benötigen wir aber $\sum_{m=i}^{i+l_i-1} d_m - \sum_{m=i+1}^{i+l_i-1} \mu_m$ Bedingungen. Da es sich i.a. nicht ergeben wird, daß $\sum_{m=i+1}^{i+l_i-1} d_m = \sum_{m=i+1}^{i+l_i} \mu_m$ ist, ist die Hinzunahme zusätzlicher Interpolationsknoten unumgänglich. Dabei gehen wir folgendermaßen vor: Sei $F_i := \sum_{m=i+1}^{i+l_i-1} d_m - \sum_{m=i+1}^{i+l_i} \mu_m$ die Anzahl der „überflüssigen“ Freiheitsgrade. Die zusätzlichen Freiheitsgrade wollen wir nutzen, um unsere Basis-Splines glatter zu machen, als es eigentlich nötig ist, ohne dabei die Minimalität der Träger zu verlieren. Dies erscheint natürlicher als etwa die Forderung nach bestimmten Funktionswerten in Punkten aus (x_i, x_{i+l_i}) .

Da l_i die kleinste Zahl mit $\sum_{m=i+1}^{i+l_i-1} d_m \geq \sum_{m=i+1}^{i+l_i} \mu_m$ ist, folgt $d_{i+l_i-1} > F_i + \mu_{i+l_i}$. Wir können also für unseren B-Spline an der Stelle x_{i+l_i} auch $(F_i + \mu_{i+l_i} - 1)$ -fache stetige Differenzierbarkeit fordern. Tun wir das, und ersetzen also in (2.13) μ_{i+l_i} durch $\mu_{i+l_i} + F_i$, so ist unser Interpolationsproblem eindeutig lösbar.

Da offenbar $D^{(d_i-1)}s_{i,m_i}(x_i) \neq 0$ ist (sonst wäre im Widerspruch zum Nullstellensatz $s_{i,m_i}|_{[x_i,x_{i+1}]} \equiv 0$), folgt mit Lemma 2.16, daß die Funktionen $s_{i,1}|_{[x_i,x_{i+1}]}, \dots, s_{i,m_i}|_{[x_i,x_{i+1}]}$ linear unabhängige Elemente von S_i sind. Damit folgt mit Satz 2.2 wie in Satz 2.12, daß die Splines

$$s_{i,j}|_{[a,b]}, \quad i = -d_0 + 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m_i$$

eine Basis von $S_{[a,b]}^\mu$ minimalen Trägers sind.

Bemerkung. Im Falle maximaler Glattheit ist die obige Vorgehensweise zwangsläufig, so wir denn den Spline glätten wollen und nicht weitere Lagrangebedingungen im Inneren fordern. Ist der Spliner Raum nicht maximal glatt, können wir den B-Spline auch anders glätten, indem wir die zusätzlichen Freiheitsgrade z.B. gleichmäßiger auf die Knoten verteilen, bei denen das möglich ist.

Seien

$$V_{+, \max}^i := \left(D_+^l s_m^{(i)}(x_i) \right)_{l=0, \dots, d_i-2}^{m=1, \dots, d_i},$$

$$V_{-, F_i}^{i+l_i} := \left(D_-^l s_m^{(i+l_i-1)}(x_{i+l_i}) \right)_{l=0, \dots, \mu_{i+l_i} + F_i - 1}^{m=1, \dots, d_{i+l_i-1}}.$$

Sei $\tilde{V}_i^{i+l_i}$ die Matrix, die aus $V_i^{i+l_i}$ entsteht, wenn man dort V_+^i durch $V_{+, \max}^i$ und $V_-^{i+l_i}$ durch $V_{-, F_i}^{i+l_i}$ ersetzt. Sei $\tilde{V}_{J_i}^{i+l_i}$ wieder die Matrix, die aus $\tilde{V}_i^{i+l_i}$ entsteht, wenn man ein Zeile ergänzt, in der die bestimmten Integrale der Elemente der Basen von S_i, \dots, S_{i+l_i-1} stehen. (Bei der Definition der Vektoren J_i wurde der Fall, daß die Räume S_i unterschiedliche Dimension haben, gleich mit berücksichtigt.) Für $i = -d_0 + 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, m_i$ sei

$$a_i^j := \underbrace{(0, \dots, 0)}_{\mu_i + j - 1}, \underbrace{(1, \dots, 1)}_{d_i - \mu_i - j}, 0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{R}^{\sum_{n=i}^{i+l_i-1} d_n}.$$

Wir können jetzt wie im letzten Abschnitt eine auf Integral = 1 normierte B-Spline-Basis konstruieren, die bei fester Wahl der Verteilung eventueller zusätzlicher Freiheitsgrade eindeutig bestimmt ist.

Korollar 2.17. Sei $S_{[a,b]}^\mu$ ein IP-Raum. Für $i = -d_0 + 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, m_i$ gibt es Splines $B_i^j \subset S_{-d+1, k+d}^\mu$ mit $\text{supp } B_i^j = [x_i, x_{i+l_i}]$, deren Restriktionen auf das Intervall $[a, b]$ eine Basis von $S_{[a,b]}^\mu$ bilden, die im Inneren ihres Trägers keine Nullstelle haben und für die gilt

$$\int_{x_{-d_0+1}}^{x_{d_k+k}} B_i^j(x) dx = 1.$$

Für $i = -d + 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, m_i$ sei

$$c_i^j = (c_{i,1}^j, \dots, c_{i,d_i}^j, c_{i+1,1}^j, \dots, c_{i+1,d_{i+1}}^j, \dots, c_{i+l_i-1,1}^j, \dots, c_{i+l_i-1,d_{i+l_i-1}}^j)^t$$

die (eindeutig bestimmte) Lösung des Gleichungssystems $\tilde{V}_{j,i}^{i+l_i} x = a_i^j$. Dann gilt

$$B_i^j(x) = \sum_{n=0}^{l_i-1} \sum_{m=1}^{d_{i+n}} c_{i+n,m}^j s_m^{(i+n)}.$$

Beweis. Analog zu Korollar 2.14. □

Um zu zeigen, daß in beliebigen IP-Räumen, deren ECT-Systeme die konstanten Funktionen enthalten, eine auf lokale Zerlegung der Eins normierte B-Spline-Basis existiert, muß man nur nachweisen, daß das Lemma 2.13 auch im allgemeinen Fall richtig ist. Im Beweis von Lemma 2.13 haben wir ausschließlich die Eigenschaft der B-Spline-Basis benutzt, daß in jedem Knotenintervall genau d Elemente von Null verschiedene Werte annehmen und deren Restriktionen auf dieses Intervall den dort definierten ECT-Raum aufspannen. Wir zeigen, daß eine entsprechende Aussage auch hier gilt.

In $[x_0, x_1]$ ist das nach Konstruktion klar. Wir betrachten das Intervall $[x_1, x_2]$. Nach unserer Glättungsmethode ist x_1 der rechte Randpunkt von $d_0 - \mu_1$ Splines, die auf $[x_0, x_1]$ nicht identisch verschwinden, das heißt, nur μ_1 der ersten d_0 Splines sind in $[x_1, x_2]$ nicht identisch Null. Da von m_1 Splines x_1 der linke Randpunkt ihres Träger ist, folgt, daß genau $\mu_1 + m_1 = d_1$ Splines in $[x_1, x_2]$ von Null verschieden sind. Den gleichen Schluß kann man jetzt natürlich auch in allen übrigen Intervallen ziehen, womit die gewünschte Eigenschaft bewiesen ist. Damit gilt

Korollar 2.18. *Sei $S_{[a,b]}^\mu$ ein IP-Raum. Ist $1 \in S_i$ für alle $i = 0, \dots, k$, so gibt es für $i = -d_0 + 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, m_i$ Splines $N_i^j \in S_{-d_0+1, d_0+k}^\mu$ mit $\text{supp } N_i^j = [x_i, x_{i+l_i}]$, deren Restriktionen auf $[a, b]$ eine Basis von $S_{[a,b]}^\mu$ bilden, so daß für alle $x \in [a, b]$ gilt*

$$\sum_{i=-d_0+1}^k \sum_{j=1}^{m_i} N_i^j(x) = 1 \quad (\text{Teilung der Eins}).$$

Wählen wir Interpolationsknoten $\tau_1, \dots, \tau_\delta \in [a, b]$, die die Mischbedingung erfüllen, und lösen wir das Interpolationsproblem

$$s(\tau_n) = \sum_{i=-d_0+1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_i^j B_i^j(\tau_n) = 1, \quad n = 1, \dots, \delta,$$

so gilt $N_i^j = \lambda_i^j B_i^j$, $i = -d_0 + 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m_i$.

Beweis. Klar. □

Kapitel 3

Cauchy–Vandermonde–Splines

In diesem Kapitel untersuchen wir spezielle Splineräume, die aus Cauchy–Vandermonde–Systemen zusammengesetzt sind. Wir nennen diese Räume *Cauchy–Vandermonde–Splineräume* und ihre Elemente *Cauchy–Vandermonde–Splines* (kurz *CV–Splineräume* bzw. *CV–Splines*). Im ersten Abschnitt werden wir sehen, daß im Fall der Gleichheit aller Systeme wie in der Theorie der Polynomsplines eine Rekursionsformel für die Berechnung einer B–Spline–Basis existiert. Im zweiten Teil dieses Kapitels betrachten wir symmetrische Cauchy–Vandermonde–Splineräume. Dies sind Räume die durch Systeme mit zwei einfachen Polstellen an den Stellen $x_i - \varepsilon$ und $x_{i+1} + \varepsilon$ zusammengesetzt sind ($\varepsilon > 0$). Das Hauptergebnis dieses Abschnittes ist ein Konvergenzsatz, der besagt, daß für $\varepsilon \rightarrow 0$ diese B–Splines gegen polynomiale B–Splines konvergieren.

3.1 Gresbrandsche B–Splines

Wir betrachten zunächst den Fall, daß alle Systeme gleich sind, woraus insbesondere folgt, daß alle Polstellen außerhalb von $[a, b]$ liegen müssen.

Seien $[a, b]$ ein kompaktes Intervall, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b$, d eine natürliche Zahl und $\mu_i \in \mathbb{N}_0$ für $i = 1, \dots, k$ mit $\mu_i < d$. Ferner seien $p_1, \dots, p_d \in \overline{\mathbb{R}} \setminus [a, b]$ mit $p_1 = \infty$ vorgegebene Polstellen. Wir gehen davon aus, daß die Pole auf folgende Art sortiert sind

$$(p_1, \dots, p_d) = (\underbrace{\infty, \dots, \infty}_{r_1}, \underbrace{P_2, \dots, P_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{P_m, \dots, P_m}_{r_m}),$$

mit paarweise verschiedenen $P_2, \dots, P_m \in \overline{\mathbb{R}} \setminus [a, b]$. Für $i = 0, \dots, k$ sei

$$S_i := \text{span} \left\{ 1, x, \dots, x^{r_1-1}, \frac{1}{x - P_2}, \dots, \frac{1}{(x - P_2)^{r_2}}, \dots, \frac{1}{x - P_m}, \dots, \frac{1}{(x - P_m)^{r_m}} \right\}.$$

Für alle zulässigen μ ist der Raum $S_{[a,b]}^\mu$ ein verallgemeinerter Splineraum im Sinne unserer Definition.

Gresbrand [4] ist es gelungen, eine Basis für $S_{[a,b]}^\mu$ anzugeben, die der B-Spline Basis für polynomiale Splines sehr ähnlich ist. Wie dort definieren wir zunächst die schwach wachsende erweiterte Knotenfolge $z_{-d+1} \leq \dots \leq z_\delta$ (siehe auch (2.10)).

Seien

$$\begin{aligned}\chi_0 &:= \chi_{[z_0, z_1]}, \\ \chi_i &:= \chi_{(z_i, z_{i+1}]}, \quad i = 1, \dots, \delta - d.\end{aligned}$$

Für $j = 2, \dots, d$ und $i = -j + 2, \dots, \delta - d$ definieren wir die Koeffizienten

$$\alpha_i^j(x) := \frac{x - z_i}{z_{i+j-1} - z_i} \frac{1}{(j-1)(x - p_j)^*} \frac{\text{per} \left((z_{i+s-1} - p_r)^* \right)_{r=2, \dots, j}^{s=2, \dots, j}}{\text{per} \left((z_{i+s-1} - p_r)^* \right)_{r=2, \dots, j-1}^{s=2, \dots, j-1}}$$

und

$$\beta_i^j(x) := \frac{z_{i+j-1} - x}{z_{i+j-1} - z_i} \frac{1}{(j-1)(x - p_j)^*} \frac{\text{per} \left((z_{i+s-2} - p_r)^* \right)_{r=2, \dots, j}^{s=2, \dots, j}}{\text{per} \left((z_{i+s-1} - p_r)^* \right)_{r=2, \dots, j-1}^{s=2, \dots, j-1}}.$$

Dabei sei $\text{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$ die Permanente der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und S_n die symmetrische Gruppe aller Permutationen der Ordnung n . Zur Definition von x^* siehe Seite 12.

Wir definieren die folgenden Funktionen (eventuell nicht erklärte Summanden setzen wir Null):

$$\begin{aligned}B_i^1 &:= \chi_i, & \text{für } i = 0, \dots, \delta - d, \\ B_i^j &:= \alpha_i^j B_i^{j-1} + \beta_{i+1}^j B_{i+1}^{j-1}, & \text{für } j = 2, \dots, d \text{ und } i = -j + 1, \dots, \delta - d.\end{aligned}$$

Es gilt der folgende

Satz 3.1. *Die Funktionen $B_{-d+2}^d, \dots, B_{\delta-d}^d$ bilden eine Basis von $S_{[a,b]}^\mu$ (sind also insbesondere Elemente aus $S_{[a,b]}^\mu$) und haben die folgenden Eigenschaften.*

Für $i = -d + 1, \dots, \delta - d$ gilt:

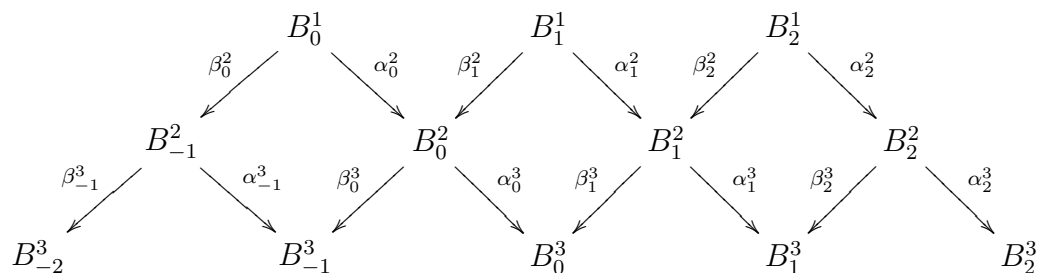
$$(i) \quad B_i^d(x) = \frac{\text{per} \left((z_{i+s-1} - p_r)^* \right)_{r=2, \dots, d}^{s=2, \dots, d}}{(d-1)! \prod_{s=2}^d (x - p_s)^*} \cdot N_i^{d-1}(x),$$

wobei die $N_i^{d-1}(x)$ die auf Teilung der Eins normierten polynomialen B-Splines vom Grad $d - 1$ sind.

- (ii) B_i^d hat dieselben Glattheitseigenschaften wie N_i^{d-1} .
- (iii) Sind alle Pole $P_2 = \dots = P_m = \infty$, so ist $B_i^d = N_i^{d-1}$.
- (iv) $\text{supp } B_i^d = [z_i, z_{i+d}]$.
- (v) Die B_i^d sind nichtnegativ und bilden eine Zerlegung der Eins.

Beweis. Gresbrand [4] p. 54 ff. □

Die folgende Abbildung zeigt das Dreiecksschema zur Berechnung der Gresbrandschen B–Spline–Basis.



Der Nachteil dieser Splines ist, daß sie in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ mit demselben CV–System konstruiert werden und somit sämtliche Polstellen außerhalb von $[a, b]$ liegen müssen. Aber nur in einer unmittelbaren Umgebung der Polstellen unterscheiden sich die rationalen B–Splines wesentlich von den gewöhnlichen B–Splines (siehe Gresbrand [4] p. 81 ff). Deshalb liegt die Frage auf der Hand, wie sich die B–Splines in Räumen, deren definierende CV–Systeme individuell verschiedene Polstellen haben und letztere dann insbesondere im Inneren von $[a, b]$ liegen können, von den polynomialen B–Splines unterscheiden. Dabei treten – je nach Wahl der Polstellen – verschiedene Effekte auf, wie wir in den folgenden Teilen dieses Kapitels sehen werden.

3.2 Cauchy–Vandermonde–Splines aus CV–Systemen mit zwei symmetrischen Polstellen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Splineräumen, deren Bausteine spezielle Cauchy–Vandermonde–Systeme Γ_i mit zwei einfachen Polstellen sind, von denen je eine links von x_i und eine rechts von x_{i+1} liegt. Wir konstruieren die auf Integral = 1 normierte B–Spline–Basis und werden sehen, daß für einen solchen B–Spline die Polstellen nicht nur am Rand seines Trägers Einfluß auf seine Gestalt nehmen, sondern sie diese insgesamt beeinflussen, denn läßt man die Polstellen auf die Intervallenden zustreben, so konvergiert ein solcher Spline der Ordnung d gegen einen polynomialen B–Spline vom Grad $d - 3$. Dies gibt uns insbesondere im Fall $d = 4$ eine einfache Möglichkeit, zweimal stetig differenzierbare „Ecken“ zu modellieren.

3.2.1 Definition, Beispiele

Seien $d_i \geq 4$ und $\varepsilon > 0$. Sei

$$\Gamma_i^\varepsilon = [s_1^{(i,\varepsilon)}, \dots, s_{d_i}^{(i,\varepsilon)}] := \left[1, x, \dots, x^{d_i-3}, \frac{1}{x-x_i+\varepsilon}, \frac{1}{x-x_{i+1}-\varepsilon} \right] \quad (3.1)$$

ein Cauchy–Vandermonde–System mit zwei einfachen Polstellen, die symmetrisch zu den Intervallenden liegen. Für alle zulässigen μ ist der Cauchy–Vandermonde–Spline–raum $S_{[a,b]}^\mu$ ein IP-Raum, denn nur die beiden letzten Gewichtsfunktionen der ECT–Systeme unterscheiden sich voneinander. Entsprechend sind natürlich für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p < q$ die Räume $S_{p,q}^\mu$ IP–Räume. Sei

$$S_i^\varepsilon := \text{span}\{s_1^{(i,\varepsilon)}, \dots, s_{d_i}^{(i,\varepsilon)}\}.$$

Wir betrachten wieder den Fall, daß die Dimension aller CV–Räume gleich ist, also $d_i = d$ für alle i . Wir bestimmen die auf Integral = 1 normierte lokale Basis im Raum $S_{[a,b]}^{\max} =: R_{[a,b]}^{d,\varepsilon}$. Sei $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon}$ die auf Seite 42 definierte Matrix, die hier natürlich auch noch von ε abhängt¹. Die (eindeutig bestimmte) Lösung des Gleichungssystems $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon} x = (0, \dots, 0, 1)^t$ bezeichnen wir mit

$$c = (c_{i,1}^{d,\varepsilon}, \dots, c_{i,d}^{d,\varepsilon}, c_{i+1,1}^{d,\varepsilon}, \dots, c_{i+1,d}^{d,\varepsilon}, \dots, c_{i+d-1,1}^{d,\varepsilon}, \dots, c_{i+d-1,d}^{d,\varepsilon})^t.$$

Dann folgt aus Korollar 2.14, daß

$$r_i^{d,\varepsilon} := \sum_{j=1}^d \sum_{l=i}^{i+d-1} c_{l,j}^{d,\varepsilon} s_j^{(l,\varepsilon)}$$

der auf Integral = 1 normierte Spline mit Träger $[x_i, x_{i+d}]$ ist.

Wir betrachten zunächst einige Beispiele: Seien $h > 0$ und $x_{i+1} = x_i + h$ (äquidistante Knoten) für alle $i \in \mathbb{Z}$. Mit Hilfe des Computeralgebraprogramms Maple 6 haben wir die Koeffizienten (bezüglich der Basen aus (3.1)) der Splines $r_0^{4,\varepsilon}$, $r_0^{5,\varepsilon}$ und $r_0^{6,\varepsilon}$ berechnet. Sie sind im Anhang angegeben. Bei ihrer Betrachtung kommt man zu folgenden Vermutungen:

- (i) Der Spline $r_{i+1}^{d,\varepsilon}$ entsteht aus $r_i^{d,\varepsilon}$ durch Translation um h .
- (ii) Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert $r_i^{d,\varepsilon}$ gleichmäßig gegen M_{i+1}^{d-3} , den auf Integral = 1 normierten polynomialen B-Spline $(d-3)$ -ten Grades maximaler Glattheit mit Träger $[x_{i+1}, x_{i+d-1}]$, denn durch elementare Rechnung erhält man

¹Später werden wir für die Räume S_i^ε auch andere Basen als Γ_i^ε betrachten, die bezüglich dieser Basen definierten Matrizen zur Bestimmung von $r_i^{d,\varepsilon}$ aber wieder mit $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon}$ bezeichnen. Aus dem Zusammenhang wird hervorgehen, was mit $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon}$ gemeint ist. Gleiches gilt dann natürlich auch für die Koeffizienten $c_{j,l}^{d,\varepsilon}$.

$$c_{1,1}^{4,0} = -\frac{1}{h} - \frac{x_0}{h^2}, \quad c_{1,2}^{4,0} = \frac{1}{h^2}, \quad c_{2,1}^{4,0} = \frac{3}{h} + \frac{x_0}{h^2}, \quad c_{2,2}^{4,0} = \frac{-1}{h^2},$$

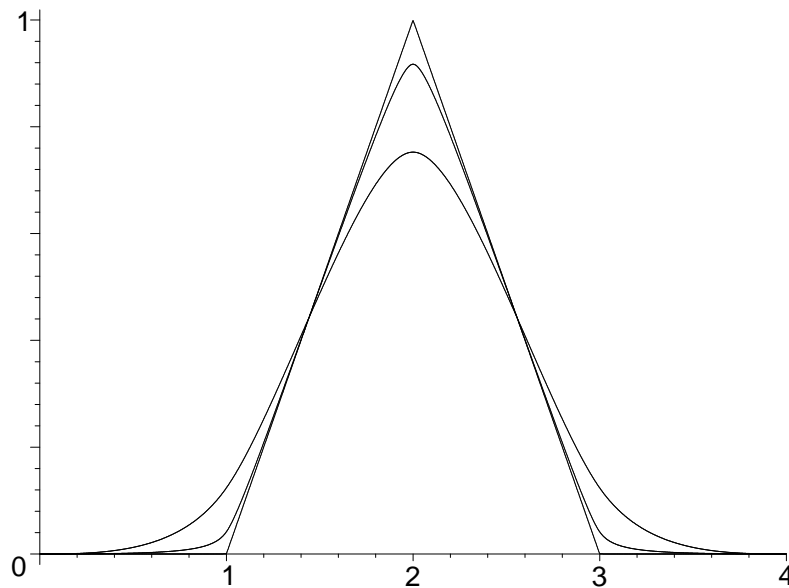


Abbildung 3.1: Die Splines $r_0^{4,\varepsilon}$ für $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{1000}$

$$\begin{aligned} c_{1,1}^{5,0} &= \frac{h^2 + 2x_0h + x_0^2}{2h^3}, & c_{1,2}^{5,0} &= \frac{x_0 + h}{-h^3}, & c_{1,3}^{5,0} &= \frac{1}{2h^3}, & c_{2,1}^{5,0} &= \frac{11h^2 + 10x_0h + 2x_0^2}{-2h^3}, \\ c_{2,2}^{5,0} &= \frac{5h + 2x_0}{h^3}, & c_{2,3}^{5,0} &= \frac{-1}{h^3}, & c_{3,1}^{5,0} &= \frac{16h^2 + 8x_0h + x_0^2}{2h^3}, & c_{3,2}^{5,0} &= \frac{x_0 + 4h}{-h^3}, \\ c_{3,3}^{5,0} &= \frac{1}{2h^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{1,1}^{6,0} &= \frac{3x_0^2h + x_0^3 + h^3 + 3x_0h^2}{-6h^4}, & c_{1,2}^{6,0} &= \frac{x_0^2 + h^2 + 2x_0h}{2h^4}, \\ c_{1,3}^{6,0} &= \frac{x_0 + h}{-2h^4}, & c_{1,4}^{6,0} &= \frac{1}{6h^4}, \\ c_{2,1}^{6,0} &= \frac{31h^3 + 45x_0h^2 + 3x_0^3 + 21x_0^2h}{6h^4}, & c_{2,2}^{6,0} &= \frac{15h^2 + 14x_0h + 3x_0^2}{-2h^4}, \\ c_{2,3}^{6,0} &= \frac{3x_0 + 7h}{2h^4}, & c_{2,4}^{6,0} &= \frac{-1}{2h^4}, \\ c_{3,1}^{6,0} &= \frac{131h^3 + 3x_0^3 + 117x_0h^2 + 33x_0^2h}{-6h^4}, & c_{3,2}^{6,0} &= \frac{39h^2 + 22x_0h + 3x_0^2}{2h^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{3,3}^{6,0} &= \frac{11h + 3x_0}{-2h^4}, & c_{3,4}^{6,0} &= \frac{1}{2h^4}, \\
c_{4,1}^{6,0} &= \frac{125h^3 + x_0^3 + 75x_0h^2 + 15x_0^2h}{6h^4}, & c_{4,2}^{6,0} &= \frac{10x_0h + x_0^2 + 25h^2}{-2h^4}, \\
c_{4,3}^{6,0} &= \frac{x_0 + 5h}{2h^4}, & c_{4,4}^{6,0} &= \frac{-1}{6h^4},
\end{aligned}$$

dabei ist $c_{i,j}^{d,0} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{i,j}^{d,\varepsilon}$. Alle hier nicht vorkommenden Koeffizienten sind 0, und zwar konvergieren sie so schnell gegen 0, daß für einen solchen Koeffizienten gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|c_{i,j}^{d,\varepsilon} s_j^{(i,\varepsilon)}\|_{\infty} = 0 \quad d = 4, 5, 6.$$

(Wir liefern später noch einen Beweis für beliebiges d und nichtäquidistante Knoten.) Wie man sich leicht überzeugt, sind die oben angegebenen Koeffizienten gerade die des Splines M_1^{d-3} .

Als Beispiel betrachten wir die Räume $R_{[a,b]}^{4,\varepsilon}$ mit $a = 0$, $b = 5$, Intervalllänge 1 und wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ bzw. $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ (vgl. Abbildung 3.2.1). Etwas vereinfacht kann man sagen, daß diese Splines - bis auf die kompliziertere Darstellung - alle Vorzüge linearer Polynomsplines haben, aber nicht nur stetig, sondern zweimal stetig differenzierbar sind.

3.2.2 Konvergenz rationaler B-Splines gegen einen polynomialen B-Spline

Wir wollen jetzt - wie schon oben angesprochen - zeigen, daß im Fall maximaler Glätte und gleicher Dimension der Räume S_i^{ε} die B-Splines $r_i^{d,\varepsilon}$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen einen polynomialen B-Spline vom Grad $d - 3$ konvergieren.

Seien $d_i = d$ für alle i und die Knoten x_i nicht mehr notwendigerweise äquidistant. Weiterhin setzen wir o.B.d.A. voraus, daß $i \geq 1$ und $d \leq k$ ist, damit wir sämtliche Argumentationen (der einfacheren Schreibweise wegen) im Splineraum $R_{[a,b]}^{d,\varepsilon}$ führen können. Dies ist keine Einschränkung, denn wie wir oben schon bemerkt haben, sind sämtliche Räume $S_{p,q}^{\max}$ IP-Räume, so daß wir gegebenenfalls die gleichen Schlüsse in $S_{i-1,i+d+1}^{\max}$ ziehen können.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 3.7 benötigen wir einige Lemmata.

Das zu Γ_i^{ε} assoziierte System in (Links-)Normalform ist (siehe Lemma 1.5)

$$\left[1, \dots, (x - x_i)^{d-3}, \underbrace{\frac{(x - x_i)^{d-2}}{\varepsilon^{d-2}(x - x_i + \varepsilon)}}_{=\rho_{1,i}^{\varepsilon}(x)}, \underbrace{\frac{(x - x_i)^{d-1}(x_{i+1} - x_i + 2\varepsilon)}{(x - x_i + \varepsilon)(x_{i+1} - x + \varepsilon)(x_{i+1} + \varepsilon - x_i)^{d-1}}}_{=\rho_{2,i}^{\varepsilon}(x)} \right].$$

Lemma 3.2. Für $l \in \{0, \dots, d-2\}$ sei

$$p_l : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \varepsilon \longmapsto D^l \rho_{2,i}^\varepsilon(x_{i+1}).$$

Dann ist p_l positiv und hat an der Stelle $\varepsilon = 0$ einen Pol $(l+1)$ -ter Ordnung.

Beweis. Daß eventuelle Polstellen von p_l den Wert $+\infty$ haben, ist klar, denn $\rho_{2,i}^\varepsilon$ und sämtliche seiner Ableitungen bis zur Ordnung $d-2$ sind positiv.

Wir müssen die ersten $d-2$ Ableitungen von $\rho_{2,i}^\varepsilon$ berechnen. Dazu nehmen wir o.B.d.A. $x_i = 0$ an. Wir zeigen, daß die n -te Ableitung von folgender Bauart ist

$$D^n \rho_{2,i}^\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{m_n} \lambda_j \underbrace{\frac{x^{d-1}}{x^{\alpha_j}(x+\varepsilon)^{\beta_j}(x_{i+1}+\varepsilon-x)^{\gamma_j}}}_{=: f_j^n(x)}, \quad (3.2)$$

wobei m_n eine von n abhängige natürliche Zahl ist, $\lambda_j \neq 0$, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{N}_0$ mit $\alpha_j \leq n$ und $\gamma_j \leq n+1$ für alle j , wobei $\gamma_l = n+1$ für genau ein $l \in \{1, \dots, m_n\}$.

Für $n=0$ ist die Behauptung offensichtlich richtig. Sie gelte für $n-1$. Wir leiten einen Summanden $f_j^{n-1}(x)$ ab, dann ist

$$\begin{aligned} D f_j^{n-1}(x) &= \frac{(d-1)x^{d-1}}{x^{\alpha_j+1}(x+\varepsilon)^{\beta_j}(x_{i+1}+\varepsilon-x)^{\gamma_j}} - \frac{\alpha_j x^{d-1}}{x^{\alpha_j+1}(x+\varepsilon)^{\beta_j}(x_{i+1}+\varepsilon-x)^{\gamma_j}} \\ &\quad + \frac{\gamma_j x^{d-1}}{x^{\alpha_j}(x+\varepsilon)^{\beta_j}(x_{i+1}+\varepsilon-x)^{\gamma_j+1}} - \frac{\beta_j x^{d-1}}{x^{\alpha_j}(x+\varepsilon)^{\beta_j+1}(x_{i+1}+\varepsilon-x)^{\gamma_j}}, \end{aligned}$$

womit aus der Induktionsannahme die Formel (3.2) und aus der offensichtlich die Behauptung folgt, denn an der Stelle $x = x_{i+1} \neq 0$ dominiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ der Summand, in dessen Nenner $(x_{i+1} + \varepsilon - x)^{n+1}$ steht. \square

Bemerkung. Wir haben oben noch einmal mitbewiesen, daß $\rho_{2,i}^\varepsilon$ und sämtliche seiner Ableitungen bis zur Ordnung $d-2$ für alle $\varepsilon > 0$ an der Stelle x_i Nullstellen hinreichender Vielfachheit haben, was nach Konstruktion natürlich selbstverständlich ist.

Sei

$$[1, -(x_{i+1} - x), \dots, (-1)^{d-3}(x_{i+1} - x)^{d-3}, h_{1,i}^\varepsilon(x), h_{2,i}^\varepsilon(x)] \quad (3.3)$$

ein zu Γ_i^ε assoziiertes System in Rechtsnormalform, wobei alle Funktionen – also auch $h_{1,i}^\varepsilon$ und $h_{2,i}^\varepsilon$ – im Intervall $[x_i, x_{i+1})$ positiv sind. (Wir können natürlich die Elemente des eigentlichen Systems in Rechtsnormalform mit von Null verschiedenen Faktoren versehen, ohne daß dabei die Basiseigenschaft und die Gültigkeit der Anfangsbedingungen im Punkt x_{i+1} zerstört wird.)

Korollar 3.3. Für $l \in \{0, \dots, d-2\}$ sei

$$g_l : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \varepsilon \longmapsto (-1)^l D^l h_{2,i}^\varepsilon(x_i).$$

Dann ist g_l positiv und hat an der Stelle $\varepsilon = 0$ einen Pol $(l+1)$ -ter Ordnung.

Beweis. Folgt aus Symmetriegründen sofort aus vorherigem Lemma. \square

Lemma 3.4. Für $j = i, \dots, d+i-1$ und $l = 1, \dots, d$ sei

$$C_{j,l}^d : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \varepsilon \longmapsto c_{j,l}^{d,\varepsilon}.$$

Dann gilt:

- (i) Für jede in Frage kommende Wahl der Basen in S_j^ε ist $C_{j,l}^d$ eine rationale Funktion.
- (ii) Für hinreichend kleines $\eta > 0$ ist $C_{j,l}^d|_{[0,\eta]}$ monoton.

Beweis. Die Elemente von $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon}$ sind Konstanten oder rationale Funktionen in ε (siehe auch die Matrizen auf Seite 59f.). Dies gilt dann natürlich auch für die Elemente der inversen Matrix von $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon}$. Da die rechten Seiten der Gleichungssysteme $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon} x = (0, \dots, 0, 1)^t$ konstant sind, folgt (i).

Die Behauptung (ii) erhalten wir unmittelbar aus (i), wenn wir für η die kleinste der (endlich vielen) Null- und Polstellen der ersten Ableitung von $C_{j,l}^d$ wählen, die größer als Null ist. \square

Satz 3.5. Seien $i \in \{-d+1, \dots, k\}$ und $d \geq 4$. Dann gilt:

- (i) Sind die Knoten x_i äquidistant mit Schrittweite h , dann erhält man den Spline $r_{i+1}^{d,\varepsilon}$ aus dem Spline $r_i^{d,\varepsilon}$ durch Translation um h .
- (ii) Für alle $\varepsilon > 0$ hat $r_i^{d,\varepsilon}$ genau ein Maximum.
- (iii) Die Splines $r_i^{d,\varepsilon}$ sind gleichmäßig beschränkt in ε .

Beweis. (i) Wählen wir in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{i+d}, x_{i+d+1}]$ das Cauchy-Vandermonde-System in Normalform, dann sind die Matrizen $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon}$ und $V_{J,i+1}^{i+d+1,\varepsilon}$ identisch, woraus sich die Behauptung ergibt.

(ii) Der Spline $r_i^{d,\varepsilon}$ ist stetig differenzierbar, in (x_i, x_{i+d}) positiv und in den Punkten x_i und x_{i+d} gleich Null, daher existiert mindestens ein Maximum. Da der ECT-Differentialoperator L^1 hier der gewöhnliche Differentialoperator ist, ist $L^1 R_{[a,b]}^{d,\varepsilon}$ ein $(\delta-1)$ -dimensionaler Splineraum maximaler Glattheit. Das einzige Trägerintervall von $L^1 r_i^{d,\varepsilon}$ ist $[x_i, x_{i+d}]$. Da $L^1 R_{[a,b]}^{d,\varepsilon}$ wiederum ein IP-Raum ist, ist nach Satz 2.7 die Anzahl der

Nullstellen von $L^1 r_i^{d,\varepsilon}$ in (x_i, x_{i+d}) höchstens $d(d-1) - (d+1)(d-2) - 1 = 1$. Damit folgt die Behauptung.

(iii) Wir nehmen an, daß $r_i^{d,\varepsilon}$ nicht gleichmäßig beschränkt ist. Sei x_ε der Punkt, an dem $r_i^{d,\varepsilon}$ sein (eindeutig bestimmtes) Maximum annimmt. Wir betrachten das Netz $(r_i^{d,\varepsilon}(x_\varepsilon))$. Es ist $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_i^{d,\varepsilon}(x_\varepsilon) = \infty$, und da $[a, b]$ kompakt ist, existiert ein konvergentes Teilnetz (x_η) von (x_ε) . Seien $x' = \lim_{\eta \rightarrow 0} x_\eta$ und $p \in \{0, \dots, k\}$ mit $x' \in [x_p, x_{p+1}]$. Wir wählen als Basis des Raumes S_p^ε die Elemente des CV-Systems (3.1) (setze dort $i = p$) und definieren

$$\varphi_\varepsilon := \sum_{j=1}^d c_{p,j}^{d,\varepsilon} s_j^{(p,\varepsilon)} \in S_p^\varepsilon,$$

also $\varphi_\varepsilon = r_i^{d,\varepsilon}|_{[x_p, x_{p+1}]}$. Für alle $\varepsilon > 0$ sind die Funktionen φ_ε positiv, und außerdem ist $\int_{x_p}^{x_{p+1}} \varphi_\varepsilon(x) \leq 1$. Damit folgt, daß für alle von x' verschiedenen Punkte $x \in [x_p, x_{p+1}]$ gilt $\varphi_\eta(x) = \mathcal{O}(1)$ für $\eta \rightarrow 0$. Wir wählen d von x' verschiedene Punkte $y_1, \dots, y_d \in (x_p, x_{p+1})$. Sei V_ε die Vandermondematrix bezüglich der oben gewählten Basis in den Punkten y_1, \dots, y_d . Dann gibt es eine positive Konstante C mit $\|V_\varepsilon^{-1}\|_{\text{ZS}} < C$, dabei bezeichne $\|\cdot\|_{\text{ZS}}$ die Zeilensummennorm. Es ist

$$V_\eta(c_{p,1}^{d,\eta}, \dots, c_{p,d}^{d,\eta})^t = (\varphi_\eta(y_1), \dots, \varphi_\eta(y_d))^t.$$

Damit folgt

$$\|(c_{p,1}^{d,\eta}, \dots, c_{p,d}^{d,\eta})\|_\infty \leq \|V_\eta^{-1}\|_{\text{ZS}} \cdot \|(\varphi_\eta(y_1), \dots, \varphi_\eta(y_d))\|_\infty = \mathcal{O}(1), \quad \eta \rightarrow 0.$$

Da wir wissen, daß die $c_{p,j}^{d,\varepsilon}$ schließlich monoton sind, folgt daraus $c_{p,j}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ für alle $j = 1, \dots, d$. Wir müssen nur noch $c_{p,d}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ für $j = d-1, d$ zeigen. Ist $x' \neq x_{p+1}$, dann ist $c_{p,d}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon)$, denn $\sum_{j=1}^{d-1} c_{p,j}^{d,\varepsilon} s_j^{(p,\varepsilon)}(x_{p+1})$ ist nach dem schon Bewiesenen beschränkt, und $s_d^{(p,\varepsilon)}(x_{p+1})$ wächst von der Ordnung ε^{-1} . Analog folgt aus $x' \neq x_p$, daß dann $c_{p,d-1}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon)$ gilt. Ist x' ein Knoten, etwa x_{p+1} , und gilt $c_{p,d}^{d,\varepsilon} \neq \mathcal{O}(\varepsilon)$, dann ist für hinreichend kleines η die (einseitige) Ableitung von φ_η an der Stelle x_{p+1} ungleich Null, denn die Ableitungen von $\sum_{j=1}^{d-1} c_{p,j}^{d,\eta} s_j^{(p,\eta)}$ sind an der Stelle x_{p+1} gleichmäßig beschränkt und die von $c_{p,d}^{d,\eta} s_d^{(p,\eta)}$ wegen $c_{p,d}^{d,\eta} \neq \mathcal{O}(\varepsilon)$ nicht. Für alle η muß die Ableitung von φ_η an der Stelle x_{p+1} aber Null sein, weil die B-Splines stetig differenzierbar sind und bei x' das Maximum der Splines $r_i^{d,\eta}$ ist. Damit erhalten wir insgesamt einen Widerspruch. \square

Bemerkung. Den ersten Teil des Beweises von (iii) kann man auch folgendermaßen führen: Seien $x_p < c < d < x_{p+1}$. Auf dem Intervall $[c, d]$ kann man die rationalen Funktionen $x \mapsto \frac{1}{x - (x_p - \varepsilon)}$ und $x \mapsto \frac{1}{x - (x_{p+1} + \varepsilon)}$ betragsmäßig nach oben abschätzen, indem man $\varepsilon = 0$ setzt. Tun wir dies für alle Elemente des Netzes φ_ε , so erhalten wir ein Netz stetiger Funktionen aus einem endlichdimensionalen Raum, und damit folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Splines im Inneren eines Knotenintervalls aus der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$.

Wir bestimmen das asymptotische Verhalten der Koeffizienten von $r_i^{d,\varepsilon}$ bezüglich folgender Systeme (= Basen der Räume S_i^ε): Wir wählen im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ das CV-System in Linksnormalform in den Intervallen $[x_j, x_{j+1}]$ für $j = i + 1, \dots, i + d - 2$ die Systeme

$$\left[1, (x - x_i), \dots, (x - x_i)^{d-3}, \frac{1}{x - x_i + \varepsilon}, \frac{1}{x - x_{i+1} - \varepsilon}\right]$$

und im letzten Intervall $[x_{i+d-1}, x_{i+d}]$ das CV-System in der in (3.3) angegebenen Rechtsnormalform. Dann gilt:

$$V_+^i = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \odot \end{pmatrix}, \quad V_-^{i+1} = \begin{pmatrix} * & \dots & * & \odot & \frac{*}{\varepsilon} \\ 0 & * & \dots & * & \odot \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \odot \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \odot \end{pmatrix}.$$

Für $j = i + 1, \dots, i + d - 2$ gilt

$$V_+^j = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 & \frac{*}{\varepsilon} & -* \\ 0 & * & 0 & \dots & -\frac{*}{\varepsilon^2} & -* \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & * & \frac{* \cdot (-1)^{d-1}}{\varepsilon^{d-2}} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{* \cdot (-1)^d}{\varepsilon^{d-1}} & -* \end{pmatrix}.$$

Für $j = i + 2, \dots, i + d - 1$ gilt

$$V_-^j = \begin{pmatrix} * & \dots & * & * & -\frac{*}{\varepsilon} \\ 0 & * & \dots & -* & -\frac{*}{\varepsilon^2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \cdot (-1)^{d-1} & -\frac{*}{\varepsilon^{d-2}} \\ 0 & \dots & 0 & * \cdot (-1)^d & -\frac{*}{\varepsilon^{d-1}} \end{pmatrix}.$$

Die letzten beiden Matrizen sind

$$V_+^{i+d-1} = \begin{pmatrix} * & \dots & * & \odot & \frac{*}{\varepsilon} \\ 0 & * & \dots & * & \odot \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \odot \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \odot \end{pmatrix}, \quad V_-^{i+d} = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \odot \end{pmatrix}.$$

Dabei steht „*“ für einen positiven Eintrag, der in den jeweils letzten beiden Spalten durchaus von ε abhängen kann, es gilt aber in jedem Fall „* = $\mathcal{O}(1)$ “ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Die Elemente „ \odot “ sind für alle $\varepsilon > 0$ von Null verschieden, insbesondere die letzten Elemente der vorletzten Spalten von V_+^i und V_-^{i+d} , über das asymptotische Verhalten für $\varepsilon \rightarrow 0$ werden aber keine Aussagen gemacht (benötigt). Daß die entsprechenden Untermatrizen von $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon}$ von obiger Bauart sind, folgt aus Lemma 3.2, Korollar 3.3 und aus den Eigenschaften von ECT–Systemen in Normalform.

Der Beweis des nächsten Lemmas beruht zum Teil auf der folgenden einfachen Tatsache: Gegeben seien zwei reelle Folgen (a_n) und (b_n) und $m \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n n^{m-1} + b_n n^{m-1} = \mathcal{O}(1) \quad \text{und} \quad a_n n^m - b_n n^m = \mathcal{O}(1).$$

Dann gilt $a_n = \mathcal{O}(n^{-m+1})$ und $b_n = \mathcal{O}(n^{-m+1})$.

Weiterhin gilt $a_n = o(n^{-m+1})$ gdw. $b_n = o(n^{-m+1})$, denn: Sei $a_n = o(n^{-m+1})$. Wir nehmen an, daß $b_n \neq o(n^{-m+1})$ ist. Dann existiert eine unbeschränkte Folge (φ_n) mit $a_n n^m = \mathcal{O}(\varphi_n)$ und $b_n n^m \neq \mathcal{O}(\varphi_n)$. Damit gilt

$$\underbrace{a_n n^m}_{=\mathcal{O}(\varphi_n)} - \underbrace{b_n n^m}_{\neq \mathcal{O}(\varphi_n)} \neq \mathcal{O}(1)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Lemma 3.6. *Es sei $c = (c_{i,1}^{d,\varepsilon}, \dots, c_{i,d}^{d,\varepsilon}, c_{i+1,1}^{d,\varepsilon}, \dots, c_{i+1,d}^{d,\varepsilon}, \dots, c_{i+d-1,1}^{d,\varepsilon}, \dots, c_{i+d-1,d}^{d,\varepsilon})^t$ die Lösung des Gleichungssystems $V_{J,i}^{i+d,\varepsilon} x = (0, \dots, 0, 1)^t$, wobei wir die Basen der Räume S_i wie oben angegeben wählen. Dann gilt*

- (i) $c_{j,l}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $j = i, \dots, i+d-1$, $l = 1, \dots, d$,
- (ii) $c_{j,l}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon^{d-2})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $j = i, \dots, i+d-1$, $l = d-1, d$,
- (iii) $c_{j,d-1}^{d,\varepsilon} \neq o(\varepsilon^{d-2})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $j = i+1, \dots, i+d-2$,
 $c_{j,d}^{d,\varepsilon} \neq o(\varepsilon^{d-2})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $j = i, \dots, i+d-1$.

Beweis. (i): Das haben wir schon im Beweis von Satz 3.5 (iii) gesehen, denn dort haben wir geschlossen, daß aus der Beschränktheit von $\varphi_\varepsilon := r_i^{d,\varepsilon}|_{[x_p, x_{p+1}]}$ in d Punkten die Beschränktheit der Koeffizienten folgt. Jetzt wissen wir sogar, daß $r_i^{d,\varepsilon}$ gleichmäßig beschränkt ist.

Zu (ii): Die ersten $d-1$ Gleichungen und die Gleichungen $d^2 - d$ bis $d^2 - 2$ sind

$$\begin{aligned} * \cdot c_{i,l}^{d,\varepsilon} &= 0, \quad l = 1, \dots, d-2, & \odot \cdot c_{i,d-1}^{d,\varepsilon} &= 0, \\ * \cdot c_{i+d-1,l}^{d,\varepsilon} &= 0, \quad l = 1, \dots, d-2, & \odot \cdot c_{i+d-1,d-1}^{d,\varepsilon} &= 0. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} c_{i,l}^{d,\varepsilon} &= 0, \quad l = 1, \dots, d-1, \\ c_{i+d-1,l}^{d,\varepsilon} &= 0, \quad l = 1, \dots, d-1. \end{aligned}$$

Dies liefert uns mit (i) für die Gleichungen d bis $2d-2$

$$c_{i,d}^{d,\varepsilon} \frac{*}{\varepsilon^l} - c_{i+1,d-1}^{d,\varepsilon} \frac{* \cdot (-1)^{l+1}}{\varepsilon^l} = \mathcal{O}(1), \quad l = 1, \dots, d-1.$$

Insbesondere gilt

$$c_{i,d}^{d,\varepsilon} \frac{*}{\varepsilon^{d-2}} - c_{i+1,d-1}^{d,\varepsilon} \frac{* \cdot (-1)^{d-1}}{\varepsilon^{d-2}} = \mathcal{O}(1) = c_{i,d}^{d,\varepsilon} \frac{*}{\varepsilon^{d-1}} - c_{i+1,d-1}^{d,\varepsilon} \frac{* \cdot (-1)^d}{\varepsilon^{d-1}}.$$

Nach unserer Vorbemerkung ist das nur möglich, wenn sowohl $c_{i,d}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon^{d-2})$ als auch $c_{i+1,d-1}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon^{d-2})$ gilt. Betrachtet man die oben angegebenen Matrizen, so sieht man, daß man denselben Schluß auch für alle weiteren fraglichen Koeffizienten $c_{j,l}^{d,\varepsilon}$ machen kann, womit (ii) bewiesen ist.

Zu (iii): Mit (ii) liest man aus den Matrizen V_-^{i+1} und V_+^{i+1} direkt ab:

$$c_{i+1,l}^{d,\varepsilon} = o(1), \quad l = 1, \dots, d-3. \quad (*)$$

Wir nehmen an, daß (iii) verletzt ist. Dann folgt aus der Vorbemerkung und mit denselben Argumenten wie oben, daß für alle fraglichen Koeffizienten $c_{j,l}^{d,\varepsilon} = o(\varepsilon^{d-2})$ gilt. Damit erhalten wir aber zum Beispiel

$$c_{i,d}^{d,\varepsilon} \frac{*}{\varepsilon^{d-2}} - c_{i+1,d-1}^{d,\varepsilon} \frac{* \cdot (-1)^{d-1}}{\varepsilon^{d-2}} = o(1),$$

und somit $c_{i+1,d-2}^{d,\varepsilon} = o(1)$, woraus mit (*) $c_{i+1,l}^{d,\varepsilon} = o(1)$ für alle $l = 1, \dots, d-2$ folgt. Denselben Schluß kann man jetzt in allen weiteren Intervallen ziehen. Wir erhalten, daß sämtliche Koeffizienten vor Polynomen für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen Null konvergieren. Damit folgt mit (ii), daß für hinreichend kleines ε gilt $\|r_i^{d,\varepsilon}\|_\infty < \frac{1}{x_{d+i}-x_i}$, woraus wir $\|r_i^{d,\varepsilon}\|_1 < 1$ und somit einen Widerspruch erhalten. \square

Wir haben jetzt alle Vorbereitungen getroffen, um den angekündigten Konvergenzsatz zu beweisen.

Satz 3.7. *Sei $d \geq 4$. Seien $r_i^{d,\varepsilon}$ der auf $\text{Integral} = 1$ normierte B-Spline im Raum $R_{[a,b]}^{d,\varepsilon}$ mit Träger $[x_i, x_{i+d}]$ und M_{i+1}^{d-3} der auf $\text{Integral} = 1$ normierte B-Spline im Raum $\mathbb{P}_{[a,b]}^{d-3,\max}$ mit Träger $[x_{i+1}, x_{i+d-1}]$. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^m r_i^{d,\varepsilon} - D^m M_{i+1}^{d-3}\|_\infty = 0, \quad m = 0, \dots, d-4.$$

Beweis. Sei $j \in \{i, \dots, i+d-1\}$ und $l \in \{1, \dots, d\}$. Wir betrachten den Koeffizienten $c_{j,l}^{d,\varepsilon}$. Er ist für $\varepsilon \rightarrow 0$ beschränkt und schließlich monoton, also existiert $c_{j,l}^{d,0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{j,l}^{d,\varepsilon}$ und ist eine reelle Zahl.

Sei zunächst $l \in \{1, \dots, d-2\}$. Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Da $s_l^{(j,\varepsilon)} = s_l^{(j)}$ für alle ε dasselbe Polynom ist, erhalten wir, daß $D^m c_{j,l}^{d,\varepsilon} s_l^{(j,\varepsilon)}$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen $c_{j,l}^{d,0} D^m s_l^{(j)}$ konvergiert.

Sei jetzt $l \in \{d-1, d\}$. Dann gilt wegen $c_{j,l}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon^{d-2})$

$$\|D^m c_{j,l}^{d,\varepsilon} s_l^{(j,\varepsilon)}\|_\infty = |c_{j,l}^{d,\varepsilon}| \|D^m s_l^{(j,\varepsilon)}\|_\infty = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad m = 0, \dots, d-4,$$

denn die Koeffizienten $c_{i,d-1}^{d,\varepsilon}$ und $c_{i+d-1,d-1}^{d,\varepsilon}$ sind identisch Null, und für die restlichen j, l gilt, daß $\|D^m s_l^{(j,\varepsilon)}\|_\infty = \mathcal{O}(\varepsilon^{-m-1})$ für $m = 0, \dots, d-2$ ist (siehe die Matrizen auf Seite 59).

Da die Koeffizienten vor den Polynomen im ersten und letzten Intervall verschwinden, erhalten wir insgesamt, daß

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| D^m r_i^{d,\varepsilon} - D^m \left(\sum_{j=i+1}^{i+d-2} \sum_{l=1}^{d-2} c_{j,l}^{d,0} (\cdot - x_j)_+^{l-1} \right) \right\|_\infty = 0, \quad m = 0, \dots, d-4$$

gilt, also die ersten $d-4$ Ableitungen von $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_i^{d,\varepsilon}$ mit denen eines Polynomsplines maximaler Glattheit vom Grad $d-3$ mit Träger $[x_{i+1}, x_{i+d-1}]$ übereinstimmen, für den auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\int_{x_{i+1}}^{x_{i+d-1}} \sum_{j=i+1}^{i+d-2} \sum_{l=1}^{d-2} c_{j,l}^{d,0} (x - x_j)_+^{l-1} dx = \int_{x_{i+1}}^{x_{i+d-1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_i^{d,\varepsilon}(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+d-1}} r_i^{d,\varepsilon}(x) dx = 1.$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Beispiel. Im Fall $d = 4$ bedeutet dies: Der B-Spline $r_i^{4,\varepsilon}$ konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen eine Hutfunktion die auf $[x_{i+1}, x_{i+3}]$ definiert ist, nämlich

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r_i^{4,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}) \cup (x_{i+3}, x_{i+4}] \\ \frac{1}{x_{i+2}-x_{i+1}} \cdot x - \frac{x_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}} & \text{für } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \\ \frac{-1}{x_{i+3}-x_{i+2}} \cdot x + \frac{x_{i+3}}{x_{i+3}-x_{i+2}} & \text{für } x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \end{cases}.$$

Die erste Ableitung konvergiert noch punktweise:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D r_i^{4,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}) \cup \{x_{i+2}\} \cup (x_{i+3}, x_{i+4}] \\ \frac{1}{x_{i+2}-x_{i+1}} & \text{für } x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \\ \frac{1}{x_{i+3}-x_{i+2}} & \text{für } x \in (x_{i+2}, x_{i+3}] \end{cases}.$$

Die zweite Ableitung ist für $\varepsilon \rightarrow 0$ in allen Knoten unbeschränkt.

Die Abbildung 3.2 verdeutlicht dieses Konvergenzverhalten an der Stelle x_{i+2} . Dabei wurden $x_i = 0, x_{i+1} = 1, x_{i+2} = 2, x_{i+3} = 4$ und $x_{i+4} = 5$ gewählt.

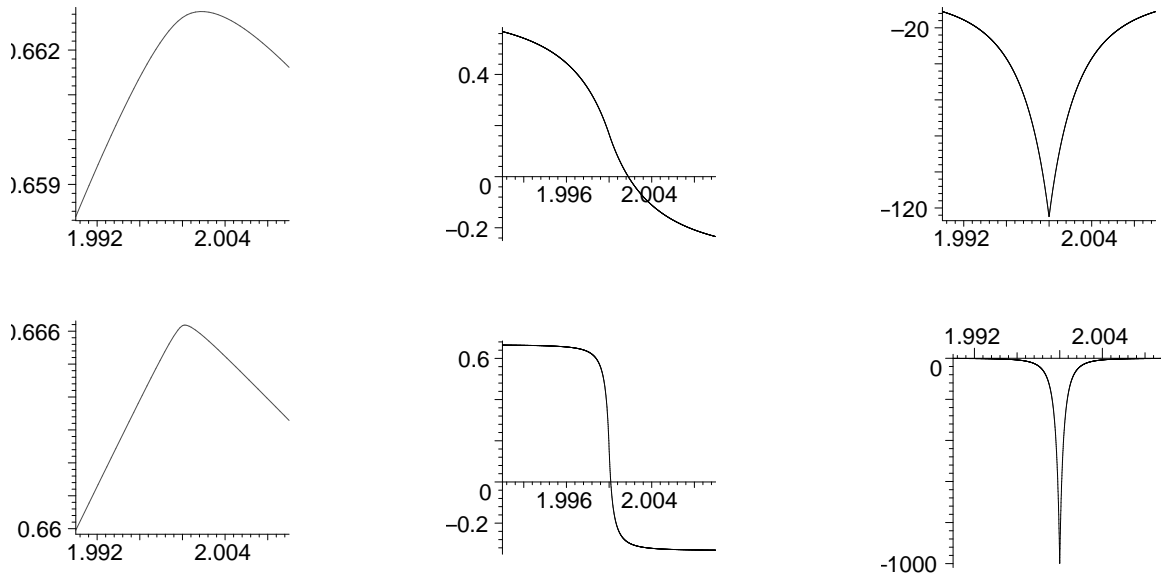


Abbildung 3.2: $D^j r_i^{4,\varepsilon}$, $j = 0, 1, 2$ in einer Umgebung von x_{i+2} für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ (oben) und $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ (unten)

3.3 Splineräume aus CV-Systemen mit unsymmetrischen Polstellen

In Kapitel 3.3.1 werden wir Satz 3.7 verallgemeinern, indem wir für die ersten $d - 2$ Funktionen ein beliebiges aber in jedem Intervall dasselbe CV-System zulassen. Im letzten Abschnitt werden wir ein Beispiel betrachten, das zeigt, daß bei einer anderen Verteilung der Polstellen im vierdimensionalen Fall die rationalen Splines nicht gegen eine Hutfunktion sondern gegen eine charakteristische Funktion konvergieren.

3.3.1 Eine Verallgemeinerung des Konvergenzsatzes

Seien $r_1 \geq 1$, $r_2 = r_3 = 1$, $\sum_{j=1}^m r_m = d$, $\varepsilon > 0$ und $P_4, \dots, P_m \notin [a, b]$. Sei

$$\Gamma_i^\varepsilon := \left[1, x, \dots, x^{r_1-1}, \frac{1}{x - x_i + \varepsilon}, \frac{1}{x - x_{i+1} - \varepsilon}, \frac{1}{x - P_4}, \dots \right. \\ \left. \dots, \frac{1}{(x - P_4)^{r_4}}, \dots, \frac{1}{x - P_m}, \dots, \frac{1}{(x - P_m)^{r_m}} \right]. \quad (3.4)$$

Wir betrachten den Raum $S_{[a,b]}^\mu$ für ein zulässiges μ . Wir können das obige CV-System so umordnen, daß wir das $(r_1 + 1)$ -te und $(r_1 + 2)$ -te Element an die vorletzte bzw.

letzte Stelle des Systems schreiben, also

$$\tilde{\Gamma}_i^\varepsilon := \left[1, x, \dots, x^{r_1-1}, \frac{1}{x-P_4}, \dots, \frac{1}{(x-P_4)^{r_4}}, \dots, \frac{1}{x-P_m}, \dots, \frac{1}{(x-P_m)^{r_m}}, \dots, \frac{1}{x-x_i+\varepsilon}, \frac{1}{x-x_{i+1}-\varepsilon} \right].$$

Da dies die einzigen Funktionen sind, die von i abhängen, ist der Splineraum, der von den umsortierten Systemen definiert wird (= der Splineraum, der von den Systemen (3.4) erzeugt wird) ein IP–Raum. Dasselbe gilt natürlich auch, wenn die rationalen Funktionen in verschiedenen Intervallen verschieden angeordnet sind. Wir müssen nur darauf achten, daß Funktionen, die gleiche Polstellen haben, in aufsteigender Ordnung der Pole hintereinander stehen.

Der Grund für diese etwas umständlich wirkende Herangehensweise ist, daß wir es so vermeiden, für die von ε abhängigen rationalen Funktionen den Lemmata 1.5 und 3.2 entsprechende Aussagen zu beweisen, was im Fall, daß diese Funktionen am Ende der Systeme stehen, ungleich aufwendiger ist. So können wir auf die Ergebnisse des letzten Abschnitts unmittelbar zugreifen, denn die anderen rationalen Funktionen hängen nicht von ε ab, womit die entsprechenden Einträge in den Vandermondematrizen für $\varepsilon \rightarrow 0$ trivialerweise beschränkt sind.

Wir untersuchen wieder den Fall maximaler Glattheit. Sei $r_i^{d,\varepsilon}$ erneut der auf Integral = 1 normierte B–Spline mit Träger $[x_i, x_{i+d}]$. Falls Hilfsknoten $\dots < x_{-2} < x_{-1} < a$ oder $b < x_{k+2} < x_{k+3} < \dots$ benötigt werden, müssen wir hier natürlich darauf achten, daß sie sämtlich echt zwischen dem größten Pol, der kleiner als a ist, und a bzw. echt zwischen dem kleinsten Pol, der größer als b ist, und b liegen. Wir gehen aber wieder o.B.d.A. davon aus, daß $\text{supp } r_i^{d,\varepsilon} \subseteq [x_1, x_k]$ ist.

Sei g_{i+1}^{d-2} der auf Integral = 1 normierte B–Spline mit Träger $[x_{i+1}, x_{i+d-1}]$ im Splineraum maximaler Glattheit, der von den (identischen) $(d-2)$ –dimensionalen CV–Systemen

$$\left[1, x, \dots, x^{r_1-1}, \frac{1}{x-P_4}, \dots, \frac{1}{(x-P_4)^{r_4}}, \dots, \frac{1}{x-P_m}, \dots, \frac{1}{(x-P_m)^{r_m}} \right]$$

erzeugt wird. Wir erhalten die folgende Verallgemeinerung von Satz 3.7:

Satz 3.8. *Es gilt:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|D^m r_i^{d,\varepsilon} - D^m g_{i+1}^{d-3}\|_\infty = 0, \quad m = 0, \dots, d-4.$$

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß sämtliche für den Beweis von Satz 3.7 benötigten Aussagen auch hier gelten. Da das erste Element jedes CV–Systems eine Konstante ist, ist die Gültigkeit aller Sätze und Lemmata bis auf Lemma 3.6 (ii) und (iii) unmittelbar klar. Um die asymptotischen Aussagen für die Koeffizienten der Splines zu zeigen, benutzen wir die folgenden Systeme: Im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ das Linksnormalsystem von Γ_i^ε , in $[x_{i+d-1}, x_{i+d}]$ das Rechtsnormalsystem von $\Gamma_{i+d-1}^\varepsilon$ und in den inneren Intervallen

die Linksnormalsysteme von $\tilde{\Gamma}_{i+1}^\varepsilon, \dots, \tilde{\Gamma}_{i+d-2}^\varepsilon$, nur daß wir die beiden letzten von ε abhängenden rationalen Funktionen in ihrer ursprünglichen Gestalt belassen. Dann unterscheiden sich in ihrer „asymptotischen Form“ nur die Matrizen $V_+^i, V_-^{i+1}, V_+^{i+d-1}$ und V_-^{i+d} von denen auf Seite 59. Wie im Beweis von Lemma 3.6 folgt

$$\begin{aligned} c_{i,l}^{d,\varepsilon} &= 0, \quad l = 1, \dots, d-1, \\ c_{i+d-1,l}^{d,\varepsilon} &= 0, \quad l = 1, \dots, d-1, \end{aligned}$$

denn wir arbeiten im ersten und letzten Intervall wieder mit einem Normalsystem. Der einzige Unterschied zur dortigen Situation ist noch, daß hier die Einträge in den letzten Spalten von V_-^{i+1} und V_+^{i+d-1} sämtlich von Null verschiedene Konstanten sind. Deshalb beginnen wir mit der Bestimmung der Asymptotik der $c_{j,l}^{d,\varepsilon}$, $j = i+1, \dots, i+d-2$, $l = d-1, d$ (man beachte die unterschiedliche Anordnung der Funktionen in den Systemen) nicht am Knoten x_{i+1} sondern bei x_{i+2} . Es gilt

$$c_{i+1,d}^{d,\varepsilon} \frac{-*}{\varepsilon^{d-2}} - c_{i+2,d-1}^{d,\varepsilon} \frac{* \cdot (-1)^{d-1}}{\varepsilon^{d-2}} = \mathcal{O}(1) = c_{i+1,d}^{d,\varepsilon} \frac{-*}{\varepsilon^{d-1}} - c_{i+2,d-1}^{d,\varepsilon} \frac{* \cdot (-1)^d}{\varepsilon^{d-1}}.$$

Mit den Argumenten von oben erhalten wir

$$c_{j,l}^{d,\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon^{d-2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = i+1, \dots, i+d-2, \quad l = d-1, d$$

und

$$c_{j,l}^{d,\varepsilon} \neq o(\varepsilon^{d-2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad j = i+1, \dots, i+d-2, \quad l = d-1, d.$$

Wir müssen nur noch

$$c_{i,d}^{d,\varepsilon} = o(1) = c_{i+d-1,d}^{d,\varepsilon} \tag{3.5}$$

zeigen. Mit dem eben Bewiesenen erhalten wir, wenn wir die jeweils letzten Zeilen von V_-^{i+1} und V_+^{i+1} bzw. V_-^{i+d-1} und V_+^{i+d-1} betrachten,

$$* \cdot c_{i,d}^{d,\varepsilon} + o(1) + \mathcal{O}(\varepsilon^{d-2}) = 0 \quad \text{und} \quad o(1) + \mathcal{O}(\varepsilon^{d-2}) + * \cdot c_{i+d-1,d}^{d,\varepsilon} = 0,$$

woraus (3.5) folgt.

Jetzt läßt sich der Beweis von Satz 3.7 auf die hier vorliegende Situation übertragen, wobei eventuelle Modifikationen nur Schreibweisen betreffen. \square

3.3.2 Ein weiteres Beispiel

Satz 2.7 gibt uns die Freiheit, die beiden letzten Funktionen der Cauchy–Vandermonde–Systeme, die den Splinerraum erzeugen, frei zu wählen, während die ersten $d-2$ Funktionen identisch sein müssen und sie somit nur Polstellen außerhalb von $[a, b]$ besitzen

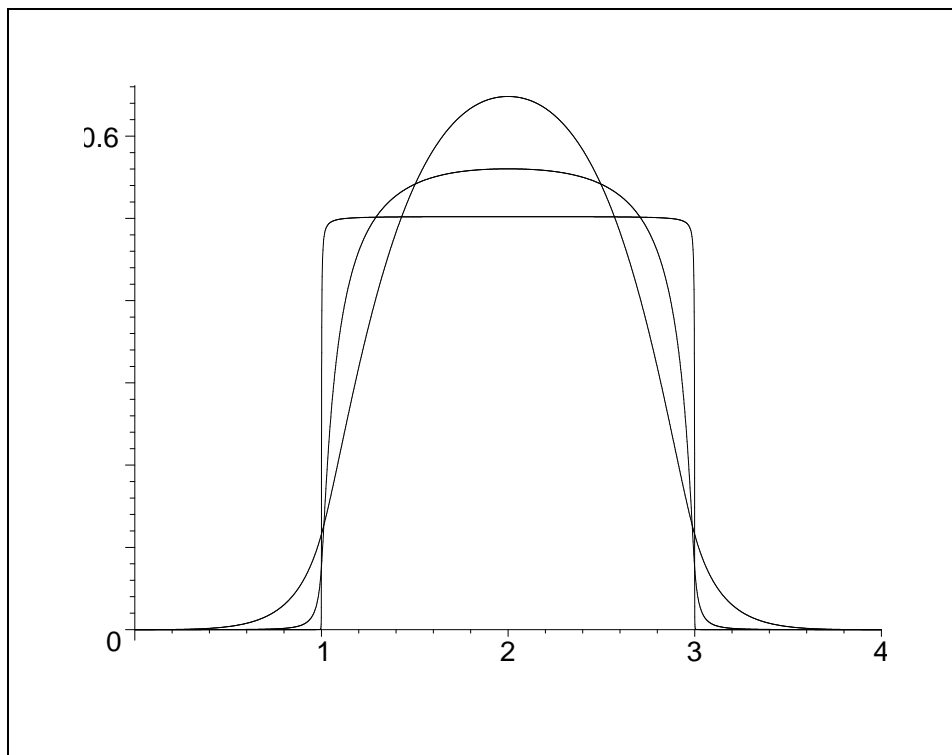


Abbildung 3.3: Der Spline r_i^ε für $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ und $\varepsilon = \frac{1}{1000}$

dürfen. Im letzten Abschnitt haben wir die frei wählbaren Funktionen so gewählt, daß sie jeweils links von x_i und rechts von x_{i+1} eine (einfache) Polstelle hatten. Wir werden jetzt Systeme betrachten, in denen beide frei wählbare Funktionen ihre Polstellen entweder rechts von x_i oder links von x_{i+1} haben. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Systeme der Form

$$\Gamma_i^\varepsilon = \left[1, x, \dots, x^{d-3}, \frac{1}{x-p_i}, \frac{1}{(x-p_i)^2} \right],$$

mit $p_i = x_i - \varepsilon$ oder $p_i = x_{i+1} + \varepsilon$. Assoziierte Systeme in Normalform sind nach Lemma 1.6: Für $p_i = x_i - \varepsilon$

$$\Gamma_{i-}^\varepsilon = \left[1, (x-x_i), \dots, (x-x_i)^{d-3}, \underbrace{\frac{(x-x_i)^{d-2}}{\varepsilon^{d-2}(x-x_i+\varepsilon)}}_{\rho_1^\varepsilon(x)}, \underbrace{\frac{(x-x_i)^{d-1}}{\varepsilon^{d-1}(x-x_i+\varepsilon)^2}}_{\rho_2^\varepsilon} \right],$$

und für $p_i = x_{i+1} + \varepsilon$

$$\Gamma_{i+}^\varepsilon = \left[1, \dots, (x-x_i)^{d-3}, \frac{(x-x_i)^{d-2}}{(x_{i+1}-x_i+\varepsilon)^{d-2}(x_{i+1}-x+\varepsilon)}, \frac{(x-x_i)^{d-1}}{(x_{i+1}-x_i+\varepsilon)^{d-1}(x_{i+1}-x+\varepsilon)^2} \right].$$

Es ist klar, daß ρ_1^ε und alle seine Ableitungen an der Stelle x_{i+1} für $\varepsilon \rightarrow 0$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{d-2})$ sind. Ähnliches gilt für ρ_2^ε , hier mit der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{d-1})$.

Wir betrachten den Fall $d = 4$ und wählen $p_i = x_{i+1} + \varepsilon$, $p_{i+1} = x_{i+1} - \varepsilon$, $p_{i+2} = x_{i+3} + \varepsilon$ und $p_{i+3} = x_{i+3} - \varepsilon$. Sei r_i^ε der auf Integral = 1 normierte B-Spline mit Träger $[x_i, x_{i+4}]$ im Splineräum maximaler Glattheit.

Mit den Methoden des letzten Abschnittes kann man zeigen, daß r_i^ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ punktweise gegen das $\frac{1}{x_{i+3}-x_{i+1}}$ -fache der charakteristischen Funktion auf dem Intervall $[x_{i+1}, x_{i+3}]$ konvergiert (siehe Abbildung 3.3).

Anhang: Koeffizienten einiger symmetrischer Cauchy–Vandermonde–Splines

Für die Dimensionen vier, fünf und sechs geben wir die Koeffizienten des B–Splines $r_0^{d,\varepsilon}$ an, wobei als Basen der Räume S_i die üblichen Cauchy–Vandermonde–Systeme Γ_i^ε , also

$$\Gamma_i^\varepsilon = \left[1, x, \dots, x^n, \frac{1}{x - x_i + \varepsilon}, \frac{1}{x - x_{i+1} - \varepsilon} \right], \quad n = 2, 3, 4$$

gewählt wurden.

Koeffizienten von $r_0^{4,\varepsilon}$ (äquidistante Knoten, Schrittweite h)

$$\begin{aligned} c_{0,1}^{4,\varepsilon} &= \frac{\varepsilon^2 (h + \varepsilon)^2 (x_0 - h)}{2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4}, & c_{0,2}^{4,\varepsilon} &= \frac{-\varepsilon^2 (h + \varepsilon)^2}{2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4}, \\ c_{0,3}^{4,\varepsilon} &= \frac{-\varepsilon^5 (h + \varepsilon)^2}{2h^4 (h^3 + 5h^2\varepsilon + 9h\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3)}, & c_{0,4}^{4,\varepsilon} &= \frac{-\varepsilon^2 (h + \varepsilon)^5}{2h^4 (h^3 + 5h^2\varepsilon + 9h\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3)}, \\ c_{1,1}^{4,\varepsilon} &= \frac{3h\varepsilon^4 + 3\varepsilon^4 x_0 + 6\varepsilon^3 x_0 h + 6h^2\varepsilon^3 + 9\varepsilon^2 h^2 x_0}{-2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4} \\ &+ \frac{9h^3\varepsilon^2 + 6\varepsilon x_0 h^3 + 6h^4\varepsilon + 2h^5 + 2h^4 x_0}{-2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4}, \\ c_{1,2}^{4,\varepsilon} &= \frac{3\varepsilon^4 + 6h\varepsilon^3 + 9h^2\varepsilon^2 + 6h^3\varepsilon + 2h^4}{2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4}, \\ c_{1,3}^{4,\varepsilon} &= \frac{(3\varepsilon^5 + 9h\varepsilon^4 + 12h^2\varepsilon^3 + 10h^3\varepsilon^2 + 5h^4\varepsilon + h^5)\varepsilon^2}{2h^4 (h^3 + 5h^2\varepsilon + 9h\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{1,4}^{4,\varepsilon} &= \frac{(3\varepsilon^3 + 6h\varepsilon^2 + 6h^2\varepsilon + 2h^3)(h + \varepsilon)^2\varepsilon^2}{2h^4(h^3 + 5h^2\varepsilon + 9h\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3)}, \\
c_{2,1}^{4,\varepsilon} &= \frac{3\varepsilon^4x_0 + 6\varepsilon^3x_0h + 9\varepsilon^2h^2x_0 + 6\varepsilon x_0h^3 + 9h\varepsilon^4}{2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4} \\
&\quad + \frac{18h^2\varepsilon^3 + 27h^3\varepsilon^2 + 18h^4\varepsilon + 6h^5 + 2h^4x_0}{2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4}, \\
c_{2,2}^{4,\varepsilon} &= \frac{3\varepsilon^4 + 6h\varepsilon^3 + 9h^2\varepsilon^2 + 6h^3\varepsilon + 2h^4}{-2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4}, \\
c_{2,3}^{4,\varepsilon} &= \frac{-(3\varepsilon^3 + 6h\varepsilon^2 + 6h^2\varepsilon + 2h^3)(h + \varepsilon)^2\varepsilon^2}{2h^4(h^3 + 5h^2\varepsilon + 9h\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3)}, \\
c_{2,4}^{4,\varepsilon} &= \frac{-(3\varepsilon^5 + 9h\varepsilon^4 + 12h^2\varepsilon^3 + 10h^3\varepsilon^2 + 5h^4\varepsilon + h^5)\varepsilon^2}{2h^4(h^3 + 5h^2\varepsilon + 9h\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3)}, \\
c_{3,1}^{4,\varepsilon} &= \frac{-\varepsilon^2(h + \varepsilon)^2(x_0 + 5h)}{2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4}, & c_{3,2}^{4,\varepsilon} &= \frac{\varepsilon^2(h + \varepsilon)^2}{2(3\varepsilon^2 + 3h\varepsilon + h^2)h^4}, \\
c_{3,3}^{4,\varepsilon} &= \frac{\varepsilon^2(h + \varepsilon)^5}{2h^4(h^3 + 5h^2\varepsilon + 9h\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3)}, & c_{3,4}^{4,\varepsilon} &= \frac{\varepsilon^5(h + \varepsilon)^2}{2h^4(h^3 + 5h^2\varepsilon + 9h\varepsilon^2 + 6\varepsilon^3)}.
\end{aligned}$$

Koeffizienten von $r_0^{5,\varepsilon}$ (äquidistante Knoten, Schrittweite h)

$$\begin{aligned}
c_{0,1}^{5,\varepsilon} &= \frac{(e^2 + he - kh + k^2 + h^2)e^3(h^3 + 3h^2e + 3he^2 + e^3)}{-4h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{0,2}^{5,\varepsilon} &= \frac{(2k - h)e^3(h^3 + 3h^2e + 3he^2 + e^3)}{4h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{0,3}^{5,\varepsilon} &= \frac{e^3(h^3 + 3h^2e + 3he^2 + e^3)}{-4h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{0,4}^{5,\varepsilon} &= \frac{(h^3 + 3h^2e + 3he^2 + e^3)e^7}{4(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)h^5}, \\
c_{0,5}^{5,\varepsilon} &= \frac{(h + e)^3e^3(e^4 + 4he^3 + 6h^2e^2 + 4h^3e + h^4)}{-4(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)h^5}, \\
c_{1,1}^{5,\varepsilon} &= \frac{17h^2e^6 + 2e^6k^2 + 4khe^6 + 23h^3e^5 + 12kh^2e^5 + 6e^5k^2h + 24h^4e^4 + 12e^4k^2h^2}{2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)} \\
&\quad + \frac{19h^5e^3 + 28kh^4e^3 + 14e^3k^2h^3 + 12h^6e^2 + 11e^2k^2h^4 + 22kh^5e^2 + 5h^7e}{2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{24kh^3e^4 + 2e^8 + 8he^7 + 10kh^6e + 5ek^2h^5 + h^8 + k^2h^6 + 2kh^7}{2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{1,2}^{5,\varepsilon} &= - \frac{12kh^2e^4 + 14kh^3e^3 + 11kh^4e^2 + 5kh^5e + kh^6 + 2he^6 + 6h^2e^5 + 12h^3e^4}{(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)h^5} \\
& - \frac{2ke^6 + 6khe^5 + 14h^4e^3 + 11h^5e^2 + 5h^6e + h^7}{(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)h^5}, \\
c_{1,3}^{5,\varepsilon} &= \frac{2e^6 + 6he^5 + 12h^2e^4 + 14h^3e^3 + 11h^4e^2 + 5h^5e + h^6}{2(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)h^5}, \\
c_{1,4}^{5,\varepsilon} &= \frac{(4e^7 + 16he^6 + 30h^2e^5 + 38h^3e^4 + 35h^4e^3 + 21h^5e^2 + 7h^6e + h^7)e^3}{-4h^5(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)}, \\
c_{1,5}^{5,\varepsilon} &= \frac{(4e^7 + 24he^6 + 66h^2e^5 + 106h^3e^4 + 105h^4e^3 + 63h^5e^2 + 21h^6e + 3h^7)e^3}{4h^5(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)}, \\
c_{2,1}^{5,\varepsilon} &= \frac{12he^7 + 42h^2e^6 + 3e^6k^2 + 15khe^6 + 9e^5k^2h + 45kh^2e^5 + 84h^3e^5 + 143h^4e^4}{-2(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)h^5} \\
& + \frac{21e^4k^2h^2 + 105kh^3e^4 + 160h^5e^3 + 27e^3k^2h^3 + 135kh^4e^3 + 22e^2k^2h^4 + 3e^8}{-2(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)h^5} \\
& + \frac{123h^6e^2 + 110kh^5e^2 + 50kh^6e + 55h^7e + 10ek^2h^5 + 2k^2h^6 + 11h^8 + 10kh^7}{-2(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)h^5}, \\
c_{2,2}^{5,\varepsilon} &= \frac{6ke^6 + 15he^6 + 45h^2e^5 + 18khe^5 + 42kh^2e^4 + 105h^3e^4 + 135h^4e^3 + 54kh^3e^3}{2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)} \\
& + \frac{44kh^4e^2 + 110h^5e^2 + 50h^6e + 20kh^5e + 4kh^6 + 10h^7}{2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{2,3}^{5,\varepsilon} &= \frac{3e^6 + 9he^5 + 21h^2e^4 + 27h^3e^3 + 22h^4e^2 + 10h^5e + 2h^6}{-2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{2,4}^{5,\varepsilon} &= \frac{3(2e^7 + 10he^6 + 24h^2e^5 + 36h^3e^4 + 35h^4e^3 + 21h^5e^2 + 7h^6e + h^7)e^3}{4h^5(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)}, \\
c_{2,5}^{5,\varepsilon} &= \frac{3(2e^7 + 10he^6 + 24h^2e^5 + 36h^3e^4 + 35h^4e^3 + 21h^5e^2 + 7h^6e + h^7)e^3}{-4h^5(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)}, \\
c_{3,1}^{5,\varepsilon} &= \frac{8he^7 + 47h^2e^6 + 2e^6k^2 + 16khe^6 + 6e^5k^2h + 48kh^2e^5 + 113h^3e^5 + 204h^4e^4}{2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)} \\
& + \frac{2e^8 + 96kh^3e^4 + 229h^5e^3 + 14e^3k^2h^3 + 112kh^4e^3 + 11e^2k^2h^4 + 177h^6e^2}{2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)} \\
& + \frac{12e^4k^2h^2 + 88kh^5e^2 + 40kh^6e + 80h^7e + 5ek^2h^5 + k^2h^6 + 16h^8 + 8kh^7}{2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{3,2}^{5,\varepsilon} &= - \frac{2ke^6 + 8he^6 + 24h^2e^5 + 6khe^5 + 12kh^2e^4 + 48h^3e^4 + 56h^4e^3 + 14kh^3e^3}{h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)} \\
& - \frac{11kh^4e^2 + 44h^5e^2 + 20h^6e + 5kh^5e + kh^6 + 4h^7}{h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{3,3}^{5,\varepsilon} &= \frac{2e^6 + 6he^5 + 12h^2e^4 + 14h^3e^3 + 11h^4e^2 + 5h^5e + h^6}{2h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{3,4}^{5,\varepsilon} &= \frac{(4e^4 + 12he^3 + 18h^2e^2 + 12h^3e + 3h^4)(h+e)^3 e^3}{-4h^5(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)}, \\
c_{3,5}^{5,\varepsilon} &= \frac{(4e^7 + 16he^6 + 30h^2e^5 + 38h^3e^4 + 35h^4e^3 + 21h^5e^2 + 7h^6e + h^7)e^3}{4h^5(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)}, \\
c_{4,1}^{5,\varepsilon} &= \frac{e^3(h+e)^3(e^2 + he + k^2 + 31h^2 + 11kh)}{-4h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{4,2}^{5,\varepsilon} &= \frac{e^3(h+e)^3(2k + 11h)}{4h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{4,3}^{5,\varepsilon} &= \frac{e^3(h+e)^3}{-4h^5(6e^4 + 12he^3 + 11h^2e^2 + 5h^3e + h^4)}, \\
c_{4,4}^{5,\varepsilon} &= \frac{e^3(h+e)^7}{4h^5(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)}, \\
c_{4,5}^{5,\varepsilon} &= \frac{e^7(h+e)^3}{-4h^5(h^5 + 7h^4e + 21h^3e^2 + 34h^2e^3 + 30he^4 + 12e^5)}.
\end{aligned}$$

Koeffizienten von $r_0^{6,\varepsilon}$ (äquidistante Knoten, Schrittweite h)

$$\begin{aligned}
c_{0,1}^{6,\varepsilon} &= \frac{(x_0h^2 - x_0h\varepsilon + 2h\varepsilon^2 + x_0^2h - x_0^3 - x_0\varepsilon^2)(4h^3\varepsilon + 6h^2\varepsilon^2 + 4h\varepsilon^3)\varepsilon^4}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&\quad + \frac{h^7\varepsilon^4 + h^3\varepsilon^8 + 2h^6\varepsilon^5 + 2h^2\varepsilon^9}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{0,2}^{6,\varepsilon} &= \frac{(h^2 + h\varepsilon - 2x_0h + 3x_0^2 + \varepsilon^2)(h^4 + 4h^3\varepsilon + 6h^2\varepsilon^2 + 4h\varepsilon^3 + \varepsilon^4)\varepsilon^4}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{0,3}^{6,\varepsilon} &= \frac{(-3x_0 + h)(h^4 + 4h^3\varepsilon + 6h^2\varepsilon^2 + 4h\varepsilon^3 + \varepsilon^4)\varepsilon^4}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{0,4}^{6,\varepsilon} &= \frac{(h^4 + 4h^3\varepsilon + 6h^2\varepsilon^2 + 4h\varepsilon^3 + \varepsilon^4)\varepsilon^4}{-12h^6(-12h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{0,5}^{6,\varepsilon} &= \frac{(h^4 + 4h^3\varepsilon + 6h^2\varepsilon^2 + 4h\varepsilon^3 + \varepsilon^4)\varepsilon^9}{-12h^6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)}, \\
c_{0,6}^{6,\varepsilon} &= \frac{(9h^8\varepsilon + 36h^7\varepsilon^2 + 84h^6\varepsilon^3 + 126h^5\varepsilon^4 + 126h^4\varepsilon^5 + 84h^3\varepsilon^6 + 36h^2\varepsilon^7 + 9h\varepsilon^8)\varepsilon^4}{-12(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6} \\
&\quad + \frac{h^9\varepsilon^4 + \varepsilon^{13}}{-12(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{1,1}^{6,\varepsilon} &= \frac{2h^8x_0^3 + 15h^3\varepsilon^8 + 6x_0^2h^9 + 15h\varepsilon^8x_0^2 + 60\varepsilon^7x_0^2h^2 + 42x_0^2h^8\varepsilon + 285x_0^2h^5\varepsilon^4}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{132x_0^2h^7\varepsilon^2 + 240x_0^2h^6\varepsilon^3 + 2h^{11} + 20hx_0^3\varepsilon^7 + 50h^2x_0^3\varepsilon^6 + 80h^3x_0^3\varepsilon^5}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{44h^6x_0^3\varepsilon^2 + 14h^7x_0^3\varepsilon + 134x_0h^8\varepsilon^2 + 254x_0h^7\varepsilon^3 + 327x_0h^6\varepsilon^4 + 315x_0h^5\varepsilon^5}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{75x_0h^2\varepsilon^8 + 25x_0h\varepsilon^9 + 5x_0\varepsilon^{10} + 14h^{10}\varepsilon + 46h^9\varepsilon^2 + 94h^8\varepsilon^3 + 137h^7\varepsilon^4}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{95h^4x_0^3\varepsilon^4 + 240x_0^2h^4\varepsilon^5 + 120h^5\varepsilon^6 + 60h^4\varepsilon^7 + 42x_0h^9\varepsilon + 6x_0h^{10}}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{245x_0h^4\varepsilon^6 + 150h^6\varepsilon^5 + 150x_0h^3\varepsilon^7 + 80h^5x_0^3\varepsilon^3 + 150x_0^2h^3\varepsilon^6 + 5x_0^3\varepsilon^8}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{1,2}^{6,\varepsilon} &= \frac{315h^5\varepsilon^5 + 5\varepsilon^{10} + 480x_0h^6\varepsilon^3 + 12x_0h^9 + 264x_0h^7\varepsilon^2 + 84x_0h^8\varepsilon + 570x_0h^5\varepsilon^4}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{15\varepsilon^8x_0^2 + 60h\varepsilon^7x_0^2 + 240h^5x_0^2\varepsilon^3 + 285h^4x_0^2\varepsilon^4 + 240h^3\varepsilon^5x_0^2 + 150h^2\varepsilon^6x_0^2}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{42h^7x_0^2\varepsilon + 6h^8x_0^2 + 120\varepsilon^7x_0h^2 + 30\varepsilon^8x_0h + 75h^2\varepsilon^8 + 25h\varepsilon^9 + 245h^4\varepsilon^6}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{150h^3\varepsilon^7 + 300x_0h^3\varepsilon^6 + 134h^8\varepsilon^2 + 254h^7\varepsilon^3 + 6h^{10} + 42h^9\varepsilon}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{327h^6\varepsilon^4 + 480x_0h^4\varepsilon^5 + 132h^6x_0^2\varepsilon^2}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{1,3}^{6,\varepsilon} &= \frac{2h^8x_0 + 14h^7x_0\varepsilon + 44h^6x_0\varepsilon^2 + 80h^5x_0\varepsilon^3 + 95h^4x_0\varepsilon^4 + 50h^2x_0\varepsilon^6 + 20hx_0\varepsilon^7}{-4h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{14h^8\varepsilon + 44h^7\varepsilon^2 + 80h^6\varepsilon^3 + 95h^5\varepsilon^4 + 80h^4\varepsilon^5 + 50h^3\varepsilon^6 + 20h^2\varepsilon^7 + 5h\varepsilon^8}{-4h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{2h^9 + 5x_0\varepsilon^8 + 80h^3x_0\varepsilon^5}{-4h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{1,4}^{6,\varepsilon} &= \frac{2h^8 + 14h^7\varepsilon + 44\varepsilon^2h^6 + 80\varepsilon^3h^5 + 95\varepsilon^4h^4 + 80\varepsilon^5h^3 + 50\varepsilon^6h^2 + 20\varepsilon^7h + 5\varepsilon^8}{h^6(12h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{1,5}^{6,\varepsilon} &= \frac{(84h^6\varepsilon^3 + 126h^5\varepsilon^4 + 130h^4\varepsilon^5 + 100h^3\varepsilon^6 + 60h^2\varepsilon^7 + 25h\varepsilon^8 + 5\varepsilon^9)\varepsilon^4}{12h^6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)} \\
&+ \frac{(h^9 + 9h^8\varepsilon + 36h^7\varepsilon^2)\varepsilon^4}{12h^6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)}, \\
c_{1,6}^{6,\varepsilon} &= \frac{(144h^7\varepsilon^2 + 336h^6\varepsilon^3 + 504h^5\varepsilon^4 + 505h^4\varepsilon^5 + 340h^3\varepsilon^6 + 150h^2\varepsilon^7 + 40h\varepsilon^8)\varepsilon^4}{12h^6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)} \\
&+ \frac{(4h^9 + 36h^8\varepsilon + 5\varepsilon^9)\varepsilon^4}{12h^6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2,1}^{6,\varepsilon} &= \frac{3h^8x_0^3 + 21x_0^2h^9 + 35h\varepsilon^8x_0^2 + 140\varepsilon^7x_0^2h^2 + 147x_0^2h^8\varepsilon + 980x_0^2h^5\varepsilon^4}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{462x_0^2h^7\varepsilon^2 + 840x_0^2h^6\varepsilon^3 + 31h^{11} + 20hx_0^3\varepsilon^7 + 60h^2x_0^3\varepsilon^6 + 110h^3x_0^3\varepsilon^5}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{6h^6x_0^3\varepsilon^2 + 21h^7x_0^3\varepsilon + 993x_0h^8\varepsilon^2 + 1821x_0h^7\varepsilon^3 + 2168x_0h^6\varepsilon^4}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{430x_0h^3\varepsilon^7 + 145x_0h^2\varepsilon^8 + 25x_0h\varepsilon^9 + 5x_0\varepsilon^{10} + 217h^{10}\varepsilon + 689h^9\varepsilon^2}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{1425h^6\varepsilon^5 + 965h^5\varepsilon^6 + 480h^4\varepsilon^7 + 195h^3\varepsilon^8 + 50h^2\varepsilon^9 + 10h\varepsilon^{10} + 315x_0h^9\varepsilon}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{770x_0^2h^4\varepsilon^5 + 6140h^4x_0^3\varepsilon^4 + 1780x_0h^5\varepsilon^5 + 1289h^8\varepsilon^3 + 45x_0h^{10}}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{5x_0^3\varepsilon^8 + 420x_0^2h^3\varepsilon^6 + 120h^5x_0^3\varepsilon^3 + 1060x_0h^4\varepsilon^6 + 1602h^7\varepsilon^4}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{2,2}^{6,\varepsilon} &= \frac{2168h^6\varepsilon^4 + 1780h^5\varepsilon^5 + 5\varepsilon^{10} + 1680x_0h^6\varepsilon^3 + 42x_0h^9 + 924x_0h^7\varepsilon^2 + 294x_0h^8\varepsilon}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{15\varepsilon^8x_0^2 + 60h\varepsilon^7x_0^2 + 360h^5x_0^2\varepsilon^3 + 420h^4x_0^2\varepsilon^4 + 330h^3\varepsilon^5x_0^2 + 180h^2\varepsilon^6x_0^2}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{63h^7x_0^2\varepsilon + 9h^8x_0^2 + 280\varepsilon^7x_0h^2 + 70\varepsilon^8x_0h + 145h^2\varepsilon^8 + 25h\varepsilon^9 + 1060h^4\varepsilon^6}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{840x_0h^3\varepsilon^6 + 430h^3\varepsilon^7 + 993h^8\varepsilon^2 + 1821h^7\varepsilon^3 + 45h^{10} + 315h^9\varepsilon}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{1960x_0h^5\varepsilon^4 + 1540x_0h^4\varepsilon^5 + 198h^6x_0^2\varepsilon^2}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{2,3}^{6,\varepsilon} &= \frac{21h^9 + 147h^8\varepsilon + 9h^8x_0 + 63h^7x_0\varepsilon + 462h^7\varepsilon^2 + 198h^6x_0\varepsilon^2 + 840h^6\varepsilon^3 + 980h^5\varepsilon^4}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{770h^4\varepsilon^5 + 330h^3x_0\varepsilon^5 + 420h^3\varepsilon^6 + 140h^2\varepsilon^7 + 180h^2x_0\varepsilon^6 + 35h\varepsilon^8 + 60hx_0\varepsilon^7}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{420h^4x_0\varepsilon^4 + 360h^5x_0\varepsilon^3 + 15x_0\varepsilon^8}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{2,4}^{6,\varepsilon} &= \frac{3h^8 + 21h^7\varepsilon + 66\varepsilon^2h^6 + 120\varepsilon^3h^5 + 140\varepsilon^4h^4 + 110\varepsilon^5h^3 + 60\varepsilon^6h^2 + 20\varepsilon^7h + 5\varepsilon^8}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{2,5}^{6,\varepsilon} &= \frac{(2h^9 + 18h^8\varepsilon + 72h^7\varepsilon^2 + 168h^6\varepsilon^3 + 255h^4\varepsilon^5 + 180h^3\varepsilon^6 + 90h^2\varepsilon^7 + 30h\varepsilon^8)\varepsilon^4}{-6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6} \\
&+ \frac{252h^5\varepsilon^8 + 5\varepsilon^{13}}{-6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6}, \\
c_{2,6}^{6,\varepsilon} &= \frac{(3h^9 + 27h^8\varepsilon + 108h^7\varepsilon^2 + 378h^5\varepsilon^4 + 380h^4\varepsilon^5 + 260h^3\varepsilon^6 + 120h^2\varepsilon^7 + 35h\varepsilon^8)\varepsilon^4}{-6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6} \\
&+ \frac{252h^6\varepsilon^7 + 5\varepsilon^{13}}{-6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{3,1}^{6,\varepsilon} &= \frac{3h^8x_0^3 + 33x_0^2h^9 + 55h\varepsilon^8x_0^2 + 220\varepsilon^7x_0^2h^2 + 231x_0^2h^8\varepsilon + 1540x_0^2h^5\varepsilon^4}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{726x_0^2h^7\varepsilon^2 + 1320x_0^2h^6\varepsilon^3 + 131h^{11} + 20hx_0^3\varepsilon^7 + 60h^2x_0^3\varepsilon^6 + 110h^3x_0^3\varepsilon^5}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{120h^5x_0^3\varepsilon^3 + 21h^7x_0^3\varepsilon + 2577x_0h^8\varepsilon^2 + 4701x_0h^7\varepsilon^3 + 5528x_0h^6\varepsilon^4}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{2500x_0h^4\varepsilon^6 + 910x_0h^3\varepsilon^7 + 265x_0h^2\varepsilon^8 + 25x_0h\varepsilon^9 + 917h^{10}\varepsilon + 2893h^9\varepsilon^2}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{5295h^6\varepsilon^5 + 3235h^5\varepsilon^6 + 1380h^4\varepsilon^7 + 495h^3\varepsilon^8 + 100h^2\varepsilon^9 + 20h\varepsilon^{10} + 819x_0h^9\varepsilon}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{5317h^8\varepsilon^3 + 4420x_0h^5\varepsilon^5 + 140h^4x_0^3\varepsilon^4 + 660x_0^2h^3\varepsilon^6 + 5x_0^3\varepsilon^8 + 117x_0h^{10}}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{66h^6x_0^3\varepsilon^2 + 6366h^7\varepsilon^4 + 1210x_0^2h^4\varepsilon^5 + 5x_0\varepsilon^{10}}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{3,2}^{6,\varepsilon} &= \frac{4420h^5\varepsilon^5 + 2640x_0h^6\varepsilon^3 + 66x_0h^9 + 1452x_0h^7\varepsilon^2 + 462x_0h^8\varepsilon + 3080x_0h^5\varepsilon^4}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{1320x_0h^3\varepsilon^6 + 2420x_0h^4\varepsilon^5 + 15\varepsilon^8x_0^2 + 60h\varepsilon^7x_0^2 + 360h^5x_0^2\varepsilon^3 + 420h^4x_0^2\varepsilon^4}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{198h^6x_0^2\varepsilon^2 + 63h^7x_0^2\varepsilon + 9h^8x_0^2 + 440\varepsilon^7x_0h^2 + 110\varepsilon^8x_0h + 265h^2\varepsilon^8 + 25h\varepsilon^9}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{5\varepsilon^{10} + 180h^2\varepsilon^6x_0^2 + 2500h^4\varepsilon^6 + 910h^3\varepsilon^7 + 4701h^7\varepsilon^3 + 117h^{10} + 819h^9\varepsilon}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{5528h^6\varepsilon^4 + 2577h^8\varepsilon^2 + 330h^3\varepsilon^5x_0^2}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{3,3}^{6,\varepsilon} &= \frac{9h^8x_0 + 63h^7x_0\varepsilon + 726h^7\varepsilon^2 + 198h^6x_0\varepsilon^2 + 1320h^6\varepsilon^3 + 1540h^5\varepsilon^4 + 360h^5x_0\varepsilon^3}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{420h^4x_0\varepsilon^4 + 330h^3x_0\varepsilon^5 + 660h^3\varepsilon^6 + 180h^2x_0\varepsilon^6 + 220h^2\varepsilon^7 + 55h\varepsilon^8}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{1210h^4\varepsilon^5 + 231h^8\varepsilon + 33h^9 + 60hx_0\varepsilon^7 + 15x_0\varepsilon^8}{-6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{3,4}^{6,\varepsilon} &= \frac{3h^8 + 21h^7\varepsilon + 66\varepsilon^2h^6 + 120\varepsilon^3h^5 + 140\varepsilon^4h^4 + 110\varepsilon^5h^3 + 60\varepsilon^6h^2 + 20\varepsilon^7h + 5\varepsilon^8}{6h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{3,5}^{6,\varepsilon} &= \frac{(108h^7\varepsilon^2 + 252h^6\varepsilon^3 + 378h^5\varepsilon^4 + 380h^4\varepsilon^5 + 260h^3\varepsilon^6 + 120h^2\varepsilon^7 + 35h\varepsilon^8)\varepsilon^4}{(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6} \\
&+ \frac{27h^8\varepsilon^5 + 3h^9\varepsilon^4 + 5\varepsilon^{13}}{(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6}, \\
c_{3,6}^{6,\varepsilon} &= \frac{(72h^7\varepsilon^2 + 168h^6\varepsilon^3 + 252h^5\varepsilon^4 + 255h^4\varepsilon^5 + 180h^3\varepsilon^6 + 90h^2\varepsilon^7 + 30h\varepsilon^8)\varepsilon^4}{6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6} \\
&+ \frac{18h^8\varepsilon^5 + 2h^9\varepsilon^4 + 5\varepsilon^{13}}{6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{4,1}^{6,\varepsilon} &= \frac{2h^8x_0^3 + 30x_0^2h^9 + 75h\varepsilon^8x_0^2 + 300\varepsilon^7x_0^2h^2 + 210x_0^2h^8\varepsilon + 1425x_0^2h^5\varepsilon^4}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{660x_0^2h^7\varepsilon^2 + 1200x_0^2h^6\varepsilon^3 + 250h^{11} + 20hx_0^3\varepsilon^7 + 50h^2x_0^3\varepsilon^6 + 80h^3x_0^3\varepsilon^5}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{44h^6x_0^3\varepsilon^2 + 14h^7x_0^3\varepsilon + 3302x_0h^8\varepsilon^2 + 6014x_0h^7\varepsilon^3 + 7167x_0h^6\varepsilon^4}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{3845x_0h^4\varepsilon^6 + 1590x_0h^3\varepsilon^7 + 435x_0h^2\varepsilon^8 + 25x_0h\varepsilon^9 + 5x_0\varepsilon^{10} + 1750h^{10}\varepsilon}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{12085h^7\varepsilon^4 + 10380h^6\varepsilon^5 + 6750h^5\varepsilon^6 + 3000h^4\varepsilon^7 + 975h^3\varepsilon^8 + 150h^2\varepsilon^9}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{95h^4x_0^3\varepsilon^4 + 750x_0^2h^3\varepsilon^6 + 5x_0^3\varepsilon^8 + 30h\varepsilon^{10} + 1050x_0h^9\varepsilon + 150x_0h^{10}}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{80h^5x_0^3\varepsilon^3 + 6075x_0h^5\varepsilon^5 + 10070h^8\varepsilon^3 + 5510h^9\varepsilon^2 + 1200x_0^2h^4\varepsilon^5}{12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{4,2}^{6,\varepsilon} &= \frac{6075h^5\varepsilon^5 + 2400x_0h^6\varepsilon^3 + 60x_0h^9 + 1320x_0h^7\varepsilon^2 + 420x_0h^8\varepsilon + 2850x_0h^5\varepsilon^4}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{2400x_0h^4\varepsilon^5 + 15\varepsilon^8x_0^2 + 60h\varepsilon^7x_0^2 + 240h^5x_0^2\varepsilon^3 + 285h^4x_0^2\varepsilon^4 + 240h^3\varepsilon^5x_0^2}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{42h^7x_0^2\varepsilon + 6h^8x_0^2 + 600\varepsilon^7x_0h^2 + 150\varepsilon^8x_0h + 435h^2\varepsilon^8 + 25h\varepsilon^9}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{5\varepsilon^{10} + 3845h^4\varepsilon^6 + 1590h^3\varepsilon^7 + 3302h^8\varepsilon^2 + 6014h^7\varepsilon^3 + 150h^{10} + 1050h^9\varepsilon}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{132h^6x_0^2\varepsilon^2 + 7167h^6\varepsilon^4 + 1500x_0h^3\varepsilon^6 + 150h^2\varepsilon^6x_0^2}{-12h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{4,3}^{6,\varepsilon} &= \frac{10h^9 + 2h^8x_0 + 70h^8\varepsilon + 220h^7\varepsilon^2 + 14h^7x_0\varepsilon + 44h^6x_0\varepsilon^2 + 400h^6\varepsilon^3 + 475h^5\varepsilon^4}{4h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{80h^3x_0\varepsilon^5 + 250h^3\varepsilon^6 + 50h^2x_0\varepsilon^6 + 100h^2\varepsilon^7 + 25h\varepsilon^8 + 20hx_0\varepsilon^7 + 5x_0\varepsilon^8}{4h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)} \\
&+ \frac{400h^4\varepsilon^5 + 95h^4x_0\varepsilon^4 + 80h^5x_0\varepsilon^3}{4h^6(h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{4,4}^{6,\varepsilon} &= \frac{2h^8 + 14h^7\varepsilon + 44\varepsilon^2h^6 + 80\varepsilon^3h^5 + 95\varepsilon^4h^4 + 80\varepsilon^5h^3 + 50\varepsilon^6h^2 + 20\varepsilon^7h + 5\varepsilon^8}{h^6(-12h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)}, \\
c_{4,5}^{6,\varepsilon} &= \frac{(4h^5 + 20h^4\varepsilon + 40h^3\varepsilon^2 + 40h^2\varepsilon^3 + 20h\varepsilon^4 + 5\varepsilon^5)(h + \varepsilon)^4\varepsilon^4}{-12(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)h^6}, \\
c_{4,6}^{6,\varepsilon} &= \frac{(36h^7\varepsilon^2 + 84h^6\varepsilon^3 + 126h^5\varepsilon^4 + 130h^4\varepsilon^5 + 100h^3\varepsilon^6 + 60h^2\varepsilon^7 + 25h\varepsilon^8 + 5\varepsilon^9)\varepsilon^4}{-12h^6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)}, \\
&+ \frac{(h^9 + 9h^8\varepsilon)\varepsilon^4}{-12h^6(h^7 + 9h^6\varepsilon + 36h^5\varepsilon^2 + 84h^4\varepsilon^3 + 125h^3\varepsilon^4 + 120h^2\varepsilon^5 + 70h\varepsilon^6 + 20\varepsilon^7)}, \\
c_{5,1}^{6,\varepsilon} &= \frac{\varepsilon^4(h + \varepsilon)^4(259h^3 + 121x_0h^2 + 8h^2\varepsilon + x_0h\varepsilon + 8h\varepsilon^2 + 19x_0^2h + x_0^3 + x_0\varepsilon^2)}{h^6(-12h^6 + 7h^5\varepsilon + 22\varepsilon^2h^4 + 40\varepsilon^3h^3 + 45\varepsilon^4h^2 + 30\varepsilon^5h + 10\varepsilon^6)},
\end{aligned}$$

$$c_{5,2}^{6,\varepsilon} = \frac{\varepsilon^4 (h + \varepsilon)^4 (121 h^2 + h\varepsilon + 38 x_0 h + 3 x_0^2 + \varepsilon^2)}{12 h^6 (h^6 + 7 h^5 \varepsilon + 22 \varepsilon^2 h^4 + 40 \varepsilon^3 h^3 + 45 \varepsilon^4 h^2 + 30 \varepsilon^5 h + 10 \varepsilon^6)},$$

$$c_{5,3}^{6,\varepsilon} = \frac{\varepsilon^4 (h + \varepsilon)^4 (3 x_0 + 19 h)}{-12 h^6 (h^6 + 7 h^5 \varepsilon + 22 \varepsilon^2 h^4 + 40 \varepsilon^3 h^3 + 45 \varepsilon^4 h^2 + 30 \varepsilon^5 h + 10 \varepsilon^6)},$$

$$c_{5,4}^{6,\varepsilon} = \frac{\varepsilon^4 (h + \varepsilon)^4}{12 h^6 (h^6 + 7 h^5 \varepsilon + 22 \varepsilon^2 h^4 + 40 \varepsilon^3 h^3 + 45 \varepsilon^4 h^2 + 30 \varepsilon^5 h + 10 \varepsilon^6)},$$

$$c_{5,5}^{6,\varepsilon} = \frac{\varepsilon^4 (h + \varepsilon)^9}{12 (h^7 + 9 h^6 \varepsilon + 36 h^5 \varepsilon^2 + 84 h^4 \varepsilon^3 + 125 h^3 \varepsilon^4 + 120 h^2 \varepsilon^5 + 70 h \varepsilon^6 + 20 \varepsilon^7) h^6},$$

$$c_{5,6}^{6,\varepsilon} = \frac{\varepsilon^9 (h + \varepsilon)^4}{(h^7 + 9 h^6 \varepsilon + 36 h^5 \varepsilon^2 + 84 h^4 \varepsilon^3 + 125 h^3 \varepsilon^4 + 120 h^2 \varepsilon^5 + 70 h \varepsilon^6 + 20 \varepsilon^7) h^6}.$$

Symbolverzeichnis

Symbol	Seite	Erläuterung
\mathbb{N}		natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$		
\mathbb{Z}		ganze Zahlen
\mathbb{R}		reelle Zahlen
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$		
ν_i	11	
Df	11	gewöhnliche Ableitung der Funktion f einer reellen Veränderlichen
x^*	12	
L^j	14	ECT-Differentialoperator
$(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$	21	streng wachsende Knotenfolge, $x_0 = a$, $x_{k+1} = b$
Γ_i	21	ECT-System auf $[x_i, x_{i+1}]$
S_i	21	ECT-Raum auf $[x_i, x_{i+1}]$
$d_i = \dim S_i$	21	
$s_1^{(i)}, \dots, s_{d_i}^{(i)}$	21	Basis von S_i
$w_1^{(i)}, \dots, w_{d_i}^{(i)}$	21	Gewichtsfunktionen bezüglich der Normalform von Γ_i
L_i^j	21	ECT-Differentialoperator bezüglich der Normalform von Γ_i
μ, μ_i	21	Glattheitsbedingungen
$S_{p,q}^\mu$	21	Splinerraum auf $[x_p, x_q]$
D_+f, D_-f	21	einseitige Ableitungen
$S_{[a,b]}^\mu = S_{0,k+1}^\mu$	21	Splinerraum auf $[a, b]$
$\mathbb{P}_{[a,b]}^{d-1,\mu}$	21	polynomialer Splinerraum auf $[a, b]$
$\mathcal{S}_{p,q}(\mu)$	21	Menge der Splineräume, die mindestens so glatt wie $S_{p,q}^\mu$ sind und aus denselben ECT-Systemen bestehen
V_-^i, V_+^i	21	
$m_i = d_i - \mu_i$	21	Anzahl der Freiheitsgrade bei x_i von rechts gesehen
$n_i = d_{i-1} - \mu_i$	21	Anzahl der Freiheitsgrade bei x_i von links gesehen
$\delta = \dim S_{a,b}^\mu$	22	
$\text{supp } f$	23	Träger von f
$x_+ := \max\{x, 0\}$	23	

$Z(s, (x_p, x_q))$	28	Anzahl der Nullstellen von s in (x_p, x_q)
$S^-(s, (x_p, x_q))$	33	Anzahl der Vorzeichenwechsel von s in (x_p, x_q)
N_i^{d-1}	41	polynomialer B-Spline vom Grad $d - 1$, linker Randpunkt des Trägers ist x_i , Element einer auf Teilung der Eins normierten Basis
M_i^{d-1}	41	polynomialer B-Spline vom Grad $d - 1$, linker Randpunkt des Trägers ist x_i , normiert auf Integral = 1
V_i^j	42	
J_i	43	
$V_{J,i}^j$	43	
per A	51	Permanente einer Matrix
Γ_i^ε	53	CV-System mit zwei einfachen symmetrischen Polstellen, die im Abstand ε zu den Intervallgrenzen liegen
$r_i^{d,\varepsilon}$	53	auf Integral = 1 normierter rationaler B-Spline

Literaturverzeichnis

- [1] R.A. DeVore, G.G. Lorentz: *Constructive Approximation*, Springer, 1993.
- [2] K. Freyburger: *Approximation mit verallgemeinerten Splines*, Dissertation, Universität Mannheim, 1991.
- [3] M. Gasca, J.J. Martinez, G. Mühlbach: Computation of Rational Interpolants with Prescribed Poles, *J. Comput. Appl. Math.* **26** (1989), 297-308.
- [4] A. Gresbrand: *Rationale B-Splines mit vorgegebenen Polstellen*, Dissertation, Universität Hannover, 1995.
- [5] A. Gresbrand: Rational B-Splines with prescribed poles, *Numerical Algorithms* **12** (1996), 151-158.
- [6] K. Jetter, G.G. Lorentz, S.D. Riemenschneider: Rolle theorem method in spline approximation, *Analysis* **3** (1983), 1-37.
- [7] S. Karlin, W.J. Studden: *Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics*, Interscience Publishers, 1966.
- [8] T. Lyche: A recurrence relation for Chebyshevian B-Splines, *Constr. Approx.* **1** (1985), 155-173.
- [9] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, M. Sommer, H. Strauß: Interpolation by generalized splines, *Numer. Math.* **42** (1983), 195-212.
- [10] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, M. Sommer, H. Strauß: Generalized Chebyshevian splines, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 790-804.
- [11] G. Nürnberger, L.L. Schumaker, M. Sommer, H. Strauß: Approximation by generalized splines, *J. Math. Anal. Appl.* **108** (1985), 466-494.
- [12] L. Schumaker: *Spline Function: Basic Theory*, John Wiley and Sons, 1981.