

Ein Verfahren zur Aufspaltung der Wigner-Transformation in Auto- und Kreuzterme

Von dem Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTOR-INGENIEUR

genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Ing. Peter Georg Baum

2000

Hauptberichter: Univ.-Prof. em. Dr. rer. nat. Dr. h. c. mult. H. G. Natke

Korreferent: Univ.-Prof. Dr.-Ing. K. Popp

Tag der mündlichen Prüfung: 14.12.2000

Abstract

Ein wichtiges Kriterium bei der Auswahl einer Zeit-Frequenz-Transformation ist eine hohe Zeit- und Frequenzauflösung. Die Wigner-Transformation besitzt in der Klasse der bilinearen Transformationen diesbezüglich sehr gute Eigenschaften. Es treten jedoch Interferenzterme auf, die, insbesondere wenn sie Autoterme überlagern, die Interpretation erschweren. Da diese Transformationsanteile teilweise Schwebungen modellieren, sind sie jedoch für einige Anwendungen notwendig.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem die Wigner-Transformation mit Hilfe von Filtern im Zeitbereich in Auto- und Interferenzterme aufgespalten wird. Somit ist eine getrennte Interpretation dieser beiden Ergebnisse möglich. Die gute Zeit-Frequenz-Auflösung der Transformation bleibt erhalten. Es werden Indikatoren angegeben, die a priori auf sinnvolle Filtergrenzen weisen. Zudem werden Wirksamkeits- und Gütekriterien hergeleitet, die a posteriori eine Bewertung jedes Filters hinsichtlich Effizienz der Trennung und Beeinflussung von Autoterme ermöglichen. Die durch nicht optimal gewählte Filtergrenzen hervorgerufenen Artefakte werden hinsichtlich Größe und Verteilung im Zeit-Frequenz-Raum angegeben. Fehler durch endliche Arithmetik werden abgeschätzt. Abschließend wird an zwei aus der Praxis stammenden, gemessenen Signalen das beschriebene Verfahren mit dem Spektrogramm mit jeweils zwei verschiedenen Fensterlängen verglichen.

Schlagworte:

Zeit-Frequenz-Transformation, Interferenzterm, Filter

Abstract

An important criterion concerning the selection of time frequency transformation is a high time and frequency resolution. The Wigner transformation possesses in this connection very good characteristics in the class of bilinear transformations. However, interference terms occur which in particular if they overlay autoterms make interpretation difficult. Since these portions of the transformation partial model beats of frequency, they are necessary for some applications however.

In this work a method is presented, with which the Wigner transformation is split up by filters in the time domain into auto and interference terms. Thus, a separate interpretation of these two results is possible. The good resolution of time and frequency of the transformation is preserved. Indicators are given, which point out a priori to meaningful filter boundaries. Besides, effectiveness and control criteria are deduced which enable a posteriori an evaluation of each filter regarding efficiency of the separation and influence of autoterms. The artifacts caused by not optimally selected filter boundaries are indicated regarding size and distribution in the time frequency space. Errors by finite arithmetic are estimated. Finally the described method is compared with the spectrogram with two different window lengths at two signals originating from practice.

Keywords:

Time-Frequency-Transformation, Interference, Filter

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Curt-Risch-Institut für Dynamik, Schall- und Meßtechnik der Universität Hannover.

Ich danke Herrn Prof. em. Dr. rer. nat. Dr. h. c. mult. H. G. Natke herzlich für seine engagierte Unterstützung. Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Popp danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Mein Dank gilt zudem Frau Dr. med. vet. B. Görke für die Durchsicht der Arbeit hinsichtlich Orthographie und Grammatik.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	IX
1 Motivation und Stand der Forschung	1
2 Wigner-Transformation	5
3 Interferenzterme	8
4 TFW – Time filtered Wigner-Transformation	11
5 Vereinigung der Interferenzterme	20
6 Filter	24
6.1 Entwurf im Frequenzbereich	25
6.2 Entwurf im Zeitbereich	28
7 Filterkriterien	31
8 Filtergrenzen	34
9 Fensterung	40
10 Fehler durch signalüberschreitende Filtergrenzen	41
11 Zeitdiskretisierung	48
12 Numerische Betrachtung	49
13 Beispiele mit gemessenen Signalen	50
13.1 Kolbenverdichter	50
13.2 Flüssigkeitsfilter	56
14 Zusammenfassung	61
Literatur	63

Symbolverzeichnis

$\mathcal{A}[\cdot]$	analytisches Signal von (\cdot)
$\mathcal{F}[\cdot]$	Fouriertransformation von (\cdot)
$h(\tau)$	Fenster der STFT, Impulsantwort eines Filters
$\mathcal{H}[\cdot]$	Hilbert-Transformation von (\cdot)
i	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$\Im\{\cdot\}$	Imaginärteil von (\cdot)
k	natürliche Zahl, Summationsvariable
$\max(\cdot, \dots)$	Maximum der Werte (\cdot, \dots)
$\min(\cdot, \dots)$	Minimum der Werte (\cdot, \dots)
n	natürliche Zahl
N	natürliche konstante Zahl
$p(t)$	Signal, Zeitfunktion
$P(t, \omega)$	Zeit-Frequenz-Transformation
$PW(t, \omega)$	Pseudo-Wigner-Transformation
$q(t)$	Signal, Zeitfunktion
$\Re\{\cdot\}$	Realteil von (\cdot)
$s(t)$	Signal, Zeitfunktion
$\text{Scal}(a, b)$	Skalogramm
$\text{SP}(t, \omega)$	Spektrogramm
$\text{STFT}(t, \omega)$	Short-Time-Fouriertransformation
t	Zeitvariable
t_0	fester Zeitwert
T	feste Zeitdauer
u	Integrationsvariable
$w(\xi)$	Pfad in der Zeit-Frequenz-Ebene
$\text{TFW}(t, \omega)$	Time filtered Wigner-Transformation
$\text{VT}(a, b)$	Wavelet-Transformation
$\text{W}(t, \omega)$	Wigner-Transformation
$x_i(t)$	Signale, Zeitfunktionen

$\tilde{x}_k(t)$	mit Filter Nr. k gefiltertes Zeitsignal
$X_i(\omega)$	Fouriertransformierte von $x_i(t)$
$z(t)$	analytisches Signal, analytische Zeitfunktion
τ	Integrationsvariable, Zeitvariable im Ambiguity Bereich
θ	Integrationsvariable, Kreisfrequenzvariable im Ambiguity Bereich
ν	Integrationsvariable
$\phi(\theta, \tau)$	Kern einer Zeit-Frequenz-Transformation
$\Phi(t, \tau)$	Fouriertransformierte des Kerns einer Zeit-Frequenz-Transformation
$\psi(b)$	Waveletfunktion
ω	Kreisfrequenz
ω_0	fester Kreisfrequenzwert
ξ	Laufvariable
$(\cdot)^*$	konjugiert komplexer Wert von (\cdot)
$(\cdot)^-$	negative Werte von (\cdot) : $\begin{cases} \cdot & \text{für } \cdot < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$(\cdot)^+$	positive Werte von (\cdot) : $\begin{cases} \cdot & \text{für } \cdot > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
$*$	Faltungssymbol
$:=$	per Definition gleich
$\stackrel{!}{=}$	vorausgesetzt gleich
$\stackrel{!}{\rightarrow}$	vorausgesetzt führt zu
\approx	ungefähr gleich
\implies	führt zu

Integrale erstrecken sich bei nicht explizit angegebenen Integralgrenzen von $-\infty$ bis $+\infty$.

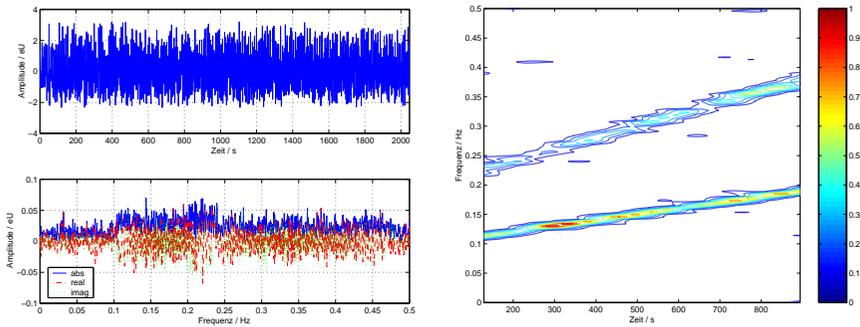


Abbildung 1: Signal im Zeit-, Frequenz- und Zeit-Frequenz-Bereich

1 Motivation und Stand der Forschung

Das Einsatzgebiet der Signalverarbeitung, insbesondere die Identifikation und Zeitlokalisierung von Frequenzen in einem Messschrieb, reicht von der Telekommunikation bis zur Bauwerks- und Maschinenüberwachung. Mit Hilfe der Fouriertransformierten $X(\omega)$ eines Zeitsignals $x(t)$ können Aussagen über die im Zeitsignal auftretenden Frequenzen gemacht werden. Ist das Signal zeitvariant, d. h. ändern sich Amplitude oder Frequenz der gemessenen Schwingungen mit der Zeit, ist die Fouriertransformierte schwer zu interpretieren, obwohl sie, da sie invertierbar ist, auch die zeitlichen Informationen beinhaltet. Hier werden zweidimensionale Transformationen $P(t, \omega)$ benötigt, die die Eigenschaften des Signals gleichzeitig in der Zeit und der Frequenz wiedergeben. Abbildung 1 verdeutlicht dies mit der Darstellung des Zeitschriebs, der Fouriertransformierten sowie einer Zeit-Frequenz-Transformation eines Signals bestehend aus einer Gleitfrequenz (Sweep) mit ihrer ersten Harmonischen sowie überlagertem, starkem Breitbandrauschen. Nur in der Zeit-Frequenz-Darstellung kann die Natur des Signals entdeckt werden. Die „Inseln“ zeigen hierbei Bereiche an, in denen das Rauschen einen darstellungsabhängigen Grenzwert überschreitet.

Ein wichtiges Kriterium bei der Auswahl einer Zeit-Frequenz-Transformationen ist eine hohe Zeit- und Frequenzauflösung. Häufig werden bilineare Transformationen bevorzugt, bei denen das Signal zweimal linear in die Berechnung eingeht, da sie sich im weiteren Sinne als lokale Energiedichten interpretieren lassen. Deshalb ist es wünschenswert, dass das Integral der zweidimensionalen Transformation über die Zeit bzw. die Frequenz mit dem Quadrat der Amplitude im Zeit- bzw. Frequenzbereich übereinstimmt (Zeit- und Frequenzbedingung; in

der englischen Literatur „time marginal“ und „frequency marginal“ genannt):¹

$$\int P_x(t, \omega) d\omega \stackrel{!}{=} |x(t)|^2 \quad (1)$$

und

$$\int P_x(t, \omega) dt \stackrel{!}{=} |X(\omega)|^2 \quad . \quad (2)$$

Für eine leichte Interpretation sollte die Zeit-Frequenz-Transformation zudem nur in den Zeit-Frequenz-Bereichen Amplituden ungleich Null besitzen, in denen auch das Zeitsignal und seine Fouriertransformierte Amplituden größer Null aufweisen (in der Literatur „starke Bedingung für kompakten Träger“ genannt). Desweiteren scheint es sinnvoll, dass die Transformation der Summe zweier Signale gleich der Summe der Transformationen der Einzelsignale ist (Summationseigenschaft).

Die bekanntesten Zeit-Frequenz-Transformationen sind die Short-Time-Fouriertransformation (STFT)

$$\text{STFT}(t, \omega) := \int x(\tau) h(\tau - t) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad , \quad (3)$$

mit der Gewichtsfunktion (dem Fenster) $h(\tau)$ und das Spektrogramm (SP)

$$\text{SP}(t, \omega) := |\text{STFT}(t, \omega)|^2 \quad . \quad (4)$$

Die multiplikative Verknüpfung der Gewichtsfunktion mit dem Signal im Zeitbereich bedeutet eine Faltung im Frequenzbereich. Das heißt, die Gewichtsfunktion beeinflusst sowohl Zeit- als auch Frequenzauflösung der Transformation. Da nach dem Unschärfepinzipp der Signalanalyse (z. B. NATKE [1992]) eine Funktion nicht gleichzeitig in Zeit und Frequenz beliebig schmal gewählt werden kann, muss bei der STFT ein Kompromiss zwischen Zeitauflösung (kurzes Fenster) und Frequenzauflösung (langes Fenster) gewählt werden. Zudem erfüllt das Spektrogramm, obwohl es zu den bilinearen Transformationen gehört, weder die Energiebedingungen noch die starke Bedingung für einen kompakten Träger [COHEN 1995].

Bei der Wavelet-Transformation (ausführlich z. B. von LOUIS U. A. [1998] behandelt) wird statt einer Gewichtsfunktion konstanter Länge und trigonometrischer Ansatzfunktionen eine Analysefunktion (Wavelet ψ) gestaucht bzw. gedehnt und in der Zeit verschoben:

$$\text{VT}(a, b) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int x(\tau) \psi^* \left(\frac{\tau - b}{a} \right) d\tau \quad ; \quad (a \neq 0) \quad (5)$$

¹bei nicht explizit angegebenen Integralgrenzen erstrecken sich Integrale jeweils von $-\infty$ bis $+\infty$

bzw. Skalogramm (Scal)

$$\text{Scal}(a, b) := |\text{VT}(a, b)|^2 \quad (6)$$

mit der Skalierung a und dem Verschiebungsparameter b . Die oben beschriebenen Zusammenhänge, wie Einfluss der Analysefunktion auf die Auflösung und die Nichterfüllung obiger wünschenswerter Bedingungen, gelten auch für die Wavelet-Transformation. Durch die Skalierung ist die Zeit- und Frequenzauflösung jedoch frequenzabhängig. Die Zeitauflösung nimmt mit abnehmenden Skalen a (zunehmende Frequenz) zu, während die Skalenauflösung (entspricht der Frequenzauflösung) abnimmt.

Mit Hilfe des verallgemeinerten Ansatzes [COHEN 1966]

$$P(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega + i\theta u} du d\tau d\theta \quad (7)$$

können alle bilinearen Transformationen vereinheitlicht dargestellt werden. Das Spektrogramm besitzt beispielsweise den Kern

$$\phi_{\text{SP}}(\theta, \tau) = \int h\left(u + \frac{\tau}{2}\right) h^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\theta u} du \quad (8)$$

Wünschenswerte Eigenschaften der Transformation resultieren in eindeutige Bedingungen an den Kern, z. B.

- Zeit-Bedingung:

$$\int P_x(t, \omega) d\omega \stackrel{!}{=} |x(t)|^2 \quad (9a)$$

$$\implies \phi(\theta, 0) = 1 \quad (9b)$$

- Frequenz-Bedingung:

$$\int P_x(t, \omega) dt \stackrel{!}{=} |X(\omega)|^2 \quad (10a)$$

$$\implies \phi(0, \tau) = 1 \quad (10b)$$

Eine wichtige Eigenschaft der bilinearen Transformationen ist das Auftreten von Interferenztermen: Die Transformation der Summe zweier Signale

$$x(t) := p(t) + q(t) \quad (11)$$

ergibt sich mit

$$K(\theta, \tau, \omega, t, u) := \frac{1}{4\pi^2} \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega + i\theta u} \quad (12)$$

zu

$$P_x(t, \omega) = \iiint x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) K(\theta, \tau, \omega, t, u) du d\tau d\theta \quad (13)$$

$$= \iiint \left(p\left(u + \frac{\tau}{2}\right) + q\left(u + \frac{\tau}{2}\right)\right) \left(p^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) + q^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right)\right) K(\theta, \tau, \omega, t, u) du d\tau d\theta \quad (14)$$

$$= P_p(t, \omega) + P_q(t, \omega) + P_{p,q}(t, \omega) + P_{q,p}(t, \omega) \quad (15)$$

mit der Kreuztransformation

$$P_{p,q}(t, \omega) := \iiint p\left(u + \frac{\tau}{2}\right) q^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) K(\theta, \tau, \omega, t, u) du d\tau d\theta \quad (16)$$

$$\neq P_{q,p}(t, \omega) \quad . \quad (17)$$

Das heißt, die Transformation der Summe zweier Signale ergibt sich aus der Summe der Transformationen der einzelnen Signale sowie einem Interferenzterm.

Mit Hilfe des verallgemeinerten Ansatzes kann der Kern $\phi(\theta, \tau)$ so gewählt werden, dass Interferenzterme unterdrückt werden. Dies resultiert jedoch in einer verringerten Zeit- bzw. Frequenzauflösung. Wie in Abschnitt 3 ausgeführt wird, kann eine bilineare Transformation zudem nicht gleichzeitig die Zeit- und Frequenzbedingung sowie die Additionseigenschaft erfüllen und keine Interferenzterme besitzen.

Wird der Kern hingegen signaladaptiv gestaltet, so kann der für ein gegebenes Signal und gewünschte Randbedingungen bestmögliche Kompromiss gefunden werden. Von BARANIUK UND JONES [1993] wird z. B. eine Methode beschrieben, wie ein Kern auf einem diskreten Zeit-Frequenz-Gitter adaptiv an ein Signal angepasst werden kann. Er ist jedoch nicht in geschlossener Form beschreibbar, so dass die Eigenschaften der Transformation für jeden Kern und somit jedes Signal neu berechnet werden müssen. Von COSTA UND BOUDREAU-BARTELS [1995A, B] wird ein Kern vorgestellt, der die Verallgemeinerung mehrerer bekannter einfacher Kerne ist. Dieser hat den Vorteil, dass er sich analytisch darstellen lässt und somit die Eigenschaften der Transformation steuerbar sind. Gleichzeitig besitzt er sieben Parameter, mit denen er an ein Signal angepasst werden kann. Von RAO UND MOHARIR [1998] wird diese Optimierung mit Hilfe genetischer Algorithmen erreicht. Diese Transformationen bleiben jedoch ein Kompromiss hinsichtlich Auflösung und Interferenzunterdrückung.

Ziel der Arbeit ist daher eine Transformation, die eine gute Zeit-Frequenz-Auflösung und die Erfüllung der Energiebedingungen mit einer eindeutigen Interpretierbarkeit durch das Fehlen von Interferenztermen verbindet. Da dieses, wie oben erwähnt, nicht mit einem unmodifizierten Transformationsergebnis möglich ist, wird in der vorliegenden Arbeit ein grundsätzlich neuer Weg beschritten, indem eine Transformation iterativ in Auto- und Interferenzterme getrennt wird. Somit kann an den Autoterme eine visuelle Interpretation der Transformation erfolgen, während gleichzeitig die Interferenzterme z. B. für Untersuchungen von Schwebungen oder zur Berechnung von Integralgrößen als getrenntes Ergebnis zur Verfügung stehen. Als Basis dient die Wigner-Transformation

$$W_x(t, \omega) := \frac{1}{2\pi} \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad , \quad (18)$$

die eine sehr gute Zeit- und Frequenzauflösung besitzt, die Energiebedingungen erfüllt und demzufolge Interferenzterme aufweist. Mit Hilfe von Filtern im Zeitbereich werden Auto- und Kreuzterme, auch wenn sie sich überlagern, identifiziert und das Ergebnis der Wigner-Transformation dementsprechend aufgespalten.

Im Vergleich zu Transformationen die Kerne einsetzen, die als Tiefpassfilter in der Zeit-Frequenz-Ebene wirken, wird eine bessere Zeit-Frequenz-Auflösung erreicht. Bei Signalen, die bestimmte Eigenschaften besitzen, können gleichzeitig alle Interferenzterme identifiziert werden.

Weiterhin werden Kriterien entwickelt, die Hinweise geben, wo sinnvolle Filtergrenzen gelegt werden sollten und solche, die anzeigen, in wie weit ein Filter Autoterme verfälscht. Der Entwurf der Filter wird sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich hergeleitet. Schließlich werden die durch die Filter induzierten Fehler sowie die erforderliche Rechengenauigkeit abgeschätzt.

Am Schluß der Arbeit wird an zwei aus der Praxis stammenden, gemessenen Signalen dieses neue Verfahren mit dem häufig angewandten Spektrogramm mit jeweils zwei verschiedenen Fensterlängen verglichen.

2 Wigner-Transformation

Die Wigner-Transformation ($W(t, \omega)$) eines Signal $x(t)$ und die Kreuz-Wigner-Transformation der Signale $x(t)$ und $y(t)$ sind definiert als

$$W_x(t, \omega) := \frac{1}{2\pi} \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int X\left(\omega + \frac{\nu}{2}\right) X^*\left(\omega - \frac{\nu}{2}\right) e^{it\nu} d\nu \quad (20)$$

bzw.

$$W_{x,y}(t, \omega) := \frac{1}{2\pi} \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad . \quad (21)$$

Sie wurde in WIGNER [1932] als zweidimensionale Dichtefunktion in der Quantenphysik vorgestellt. Ville zeigte mehr als 15 Jahre später ihren Nutzen in der Signalanalyse [VILLE 1948]. Viele Aspekte der Transformation werden ausführlich in MECKLENBRÄUKER UND HLAWATSCH [1997] behandelt. Die Wigner-Transformation ergibt sich aus der allgemeinen Form der bilinearen Zeit-Frequenz-Transformationen (Gl. 7) mit dem Kern $\phi(\theta, \tau) = 1$.

Mit

$$x_r(t) := \Re\{x(t)\} \quad (22)$$

$$x_i(t) := \Im\{x(t)\} \quad (23)$$

ergibt sich

$$W_x(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int \left(x_r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + ix_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right) \\ &\quad \cdot \left(x_r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - ix_i\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int \left(\underbrace{x_r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_r\left(t - \frac{\tau}{2}\right)}_{\text{gerade}} + \underbrace{x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t - \frac{\tau}{2}\right)}_{\text{gerade}} \right. \\ &\quad \left. + i \underbrace{\left(x_r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - x_r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right)}_{\text{ungerade}} \right) \\ &\quad \cdot (\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) d\tau \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int \left(x_r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right) \cos(\omega\tau) \\ &\quad + \left(x_r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - x_r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right) \sin(\omega\tau) d\tau \quad (27) \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x_r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \sin(\omega\tau) \, d\tau \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} x_r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \sin(\omega(-\tau)) \, d\tau \end{aligned} \quad (28)$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} x_r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \sin(\omega\tau) \, d\tau \quad (29)$$

folgt

$$\begin{aligned} W_x(t, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int \left(x_r\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right) \cos(\omega\tau) \\ &\quad + 2 x_r\left(t - \frac{\tau}{2}\right) x_i\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \sin(\omega\tau) \, d\tau \quad . \end{aligned} \quad (30)$$

Das heißt, die Autotransformation ist für alle Signale reell.

Für die Kreuztransformation gilt:

$$W_{x,y}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} \, d\tau \quad (31)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{i\omega\tau} \, d\tau \quad (32)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{i\omega\tau} \, d\tau \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) y\left(t + \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} \, d\tau \right)^* \quad (34)$$

$$= W_{y,x}^*(t, \omega) \quad . \quad (35)$$

Die Wigner-Transformation besitzt einige wünschenswerte Eigenschaften [CLAASEN UND MECKLENBRÄUKER 1980A, C], wie z.B. die Erfüllung der Energiebedingungen

$$\int W(t, \omega) \, d\omega = |x(t)|^2 \quad (36)$$

$$\int W(t, \omega) \, dt = |X(\omega)|^2 \quad (37)$$

und hat für Signale mit gaußschem Amplitudenverlauf und linearer Frequenzänderung eine optimale Zeit-Frequenz-Lokalisierung.

3 Interferenzterme

Ist $x(t)$ ein Signal, welches sich aus zwei Signalkomponenten $p(t)$ und $q(t)$ zusammensetzt

$$x(t) := p(t) + q(t) \quad , \quad (38)$$

erhält man seine Wigner-Transformation mit

$$W_x(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (39)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \left(p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) + q\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \right) \cdot \left(p^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + q^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (40)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \left(p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) p^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + q\left(t + \frac{\tau}{2}\right) q^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) q^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + q\left(t + \frac{\tau}{2}\right) p^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (41)$$

$$= W_p(t, \omega) + W_q(t, \omega) + W_{p,q}(t, \omega) + W_{q,p}(t, \omega) \quad (42)$$

$$= W_p(t, \omega) + W_q(t, \omega) + 2\Re\{W_{p,q}(t, \omega)\} \quad . \quad (43)$$

Die Wigner-Transformation der Summe zweier Signale ist demnach die Summe der Wigner-Transformationen der Signale und eines Kreuzterms.

Diese Kreuzterme können negativ werden und bei Frequenzen oder Zeiten erscheinen, bei denen das Signal bzw. seine Fouriertransformierte keine Energie besitzen. Dies erschwert die Interpretation der Transformation als zeit- und frequenzlokale Energieverteilung. Zeit- und frequenzlokal ist hier stets unter der Einschränkung der „Unschärferelation“ der Signalverarbeitung zu sehen.

Andererseits sind Interferenzterme jedoch notwendig, um die Zeit- und Frequenzbedingung zu erhalten. Es sei das Signal $x(t)$ z. B. die Summe zweier harmonischer Signale mit den zeitkonstanten Amplituden a_1 und a_2 und Frequenzen ω_1 und ω_2

$$x(t) := x_1(t) + x_2(t) \quad (44)$$

mit

$$x_1(t) := a_1 e^{i\omega_1 t} \quad (45)$$

$$x_2(t) := a_2 e^{i\omega_2 t} \quad . \quad (46)$$

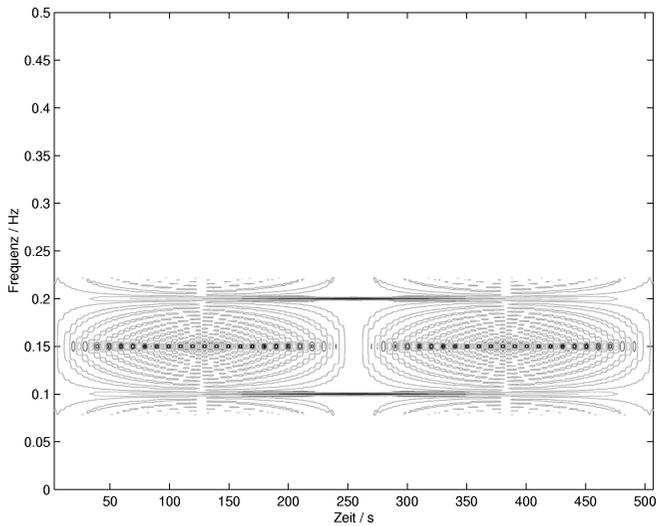


Abbildung 2: Wigner-Transformation eines Signals mit zwei konstanten, harmonischen Anteilen

Dann ist seine Energieverteilung zeitvariant:

$$|x(t)|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1||a_2| \cos(\omega_{12}t + \phi_{12}) \quad (47)$$

mit

$$\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2 \quad (48)$$

$$\phi_{12} = \arg(a_1) - \arg(a_2) \quad (49)$$

Es entstehen Schwebungen, die z. T. von den Interferenztermen modelliert werden.

Es können externe und interne Interferenzterme unterschieden werden. Zu den externen Interferenztermen gehören diejenigen Interferenzterme, die zwischen zwei Autotermen auftreten (Abbildung 2). Interne Interferenzterme werden nur durch *einen* Autoterm, der in der Zeit-Frequenz-Ebene gekrümmt ist, erzeugt (Abbildung 3). In diesem Zusammenhang wird von „Signalatomen“ gesprochen. Das sind solche Signale, die keine internen Interferenzterme besitzen. Dazu gehören die Dirac-Funktion und harmonische Signale mit zeitkonstantem oder gaußchem Amplitudenverlauf und linear veränderlicher Frequenz.

Jedes Signal lässt sich als Integral über gewichtete, verschobene Dirac-Funk-

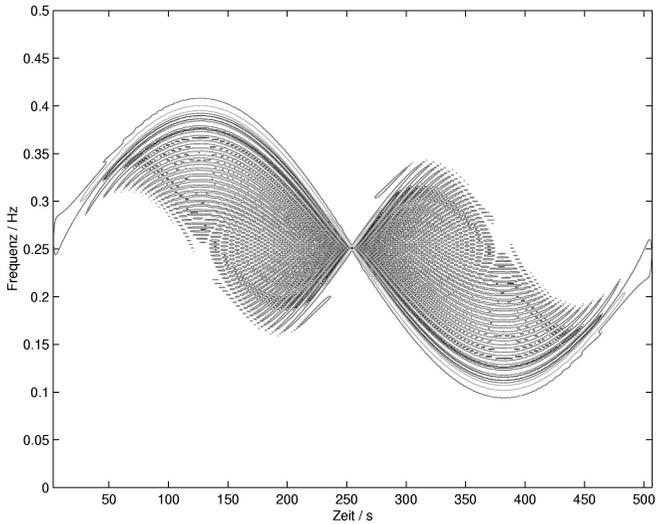


Abbildung 3: Wigner-Transformation eines Signals mit sinusförmigem Frequenzverlauf

tionen darstellen:

$$x(t) = \int A(\tau) \delta(\tau - t) d\tau \quad (50)$$

bzw. für den diskreten Fall

$$x_i = \sum_k A_k \delta(k - i) \quad (51)$$

Die Wigner-Transformation der Dirac-Funktion

$$x_d(t) := \sqrt{2\pi} \delta(t - t_0) \quad (52)$$

ist

$$W_{x_d}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int x_d\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_d\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (53)$$

$$= \int \delta\left(t + \frac{\tau}{2} - t_0\right) \delta\left(t - \frac{\tau}{2} - t_0\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (54)$$

$$= \delta(t - t_0) \quad (55)$$

Die Kreuz-Wigner-Transformation zweier Dirac-Funktionen

$$x_1(t) := \sqrt{2\pi}\delta(t - t_1) \quad (56)$$

$$x_2(t) := \sqrt{2\pi}\delta(t - t_2) \quad (57)$$

ist

$$W_{x_1, x_2}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int x_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (58)$$

$$= \int \delta\left(t + \frac{\tau}{2} - t_1\right) \delta\left(t - \frac{\tau}{2} - t_2\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (59)$$

$$= \delta\left(t - \frac{t_1 + t_2}{2}\right) e^{-i\omega(t_1 - t_2)/2} \quad (60)$$

In Übereinstimmung mit ihrer Fouriertransformierten ist die Wigner-Transformation der Dirac-Funktion für einen festen Zeitpunkt t_f für alle Frequenzen ω konstant. Das heißt, denkt man sich ein Signal nach Gleichung 50 zusammengesetzt, so ermöglicht erst die Überlagerung der Kreuzterme eine Frequenzauflösung.

Gleichung 60 zeigt zudem, dass bei zwei Dirac-Funktionen im Zeitbereich die Interferenzterme zeitlich in der Mitte zwischen den Funktionen liegen und mit einer Frequenz oszillieren, die proportional dem zeitlichen Abstand der Funktionen sind. Da die Wigner-Transformation symmetrisch hinsichtlich Zeit- und Frequenzraum ist, gilt das entsprechende für zwei Dirac-Funktionen im Frequenzbereich. Weil sich alle Signale als Überlagerung dieser Dirac-Funktionen darstellen lassen, gilt für diese Signale, dass die Interferenzterme bezogen auf Zeit und Frequenz zwischen den Autoterme liegen.

4 TFW – Time filtered Wigner-Transformation

Nach Gleichung 43 gilt mit

$$x(t) := p(t) + q(t) \quad (61)$$

für beliebige $p(t)$ und $q(t)$

$$W_x(t, \omega) = W_p(t, \omega) + W_q(t, \omega) + 2\Re\{W_{p,q}(t, \omega)\} \quad (62)$$

Für

$$\tilde{x}(t) := p(t) - q(t) \quad (63)$$

ergibt sich die Wigner-Transformation zu

$$W_{\tilde{x}}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{x}\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \tilde{x}^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (64)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \left(p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - q\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right) \cdot \left(p^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - q^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (65)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \left(p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) p^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) + q\left(t + \frac{\tau}{2}\right) q^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - p\left(t + \frac{\tau}{2}\right) q^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - q\left(t + \frac{\tau}{2}\right) p^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (66)$$

$$= W_p(t, \omega) + W_q(t, \omega) - W_{p,q}(t, \omega) - W_{q,p}(t, \omega) \quad (67)$$

$$= W_p(t, \omega) + W_q(t, \omega) - 2\Re\{W_{p,q}(t, \omega)\} \quad (68)$$

Die Wigner-Transformation der Differenz zweier Signale ist demnach die Summe der Wigner-Transformationen der Signale abzüglich eines Kreuzterms. Und somit erhält man als Differenz der Wigner-Transformationen

$$(W_x(t, \omega) - W_{\tilde{x}}(t, \omega))/2 = 2\Re\{W_{p,q}\} \quad (69)$$

die Interferenzterme zwischen dem unveränderten Teil $p(t)$ und dem phasengedrehten Teil $q(t)$ von $x(t)$.

Somit kann ein neues Verfahren zur Zeit-Frequenz-Analyse definiert werden, bei dem das zugrundeliegende Signal teilweise mit 180° -Phasen-Filtern gefiltert wird und die ursprüngliche Wigner-Transformation durch die anschließende Differenzbildung der Wigner-Transformationen des originalen und des gefilterten Signals die Wigner-Transformation in Autoterme und Kreuzterme aufgespalten wird. Ist $\tilde{x}_k(t)$ das mit einem 180° -Phasen-Filter F_k gefilterte Signal $x(t)$, wobei die Filtergrenzen keine Autoterme schneiden, dann erhält man somit die Interferenzterme zwischen den gefilterten und den ungefilterten Signalkomponenten mit

$$\text{TFW}_{\tilde{x}_k}^I(t, \omega) := (W_x(t, \omega) - W_{\tilde{x}_k}(t, \omega))/2 \quad (70)$$

und die Autoterme mit

$$\text{TFW}_{\tilde{x}_k}^A(t, \omega) := (W_x(t, \omega) + W_{\tilde{x}_k}(t, \omega))/2 \quad (71)$$

Die Kreuzterme zwischen allen gefilterten und diejenigen zwischen allen ungefilterten Signalkomponenten werden nicht identifiziert. Bestehen die gefilterten

oder ungefilterten Zeit-Frequenz-Bereiche jeweils aus mehr als einem Signalterm, so enthält $\text{TFW}_{\bar{x}_k}^A(t, \omega)$ neben den Autoterme noch die zwischen ihnen auftretenden Interferenzterme. Diese können in weiteren Schritten mit angepassten Filtergrenzen identifiziert werden. Mit N Filtern erhält man alle identifizierten Interferenzterme als Kombination der einzelnen Interferenzterme

$$\text{TFW}_x^I(t, \omega) := \bigcup_{k=1}^N \text{TFW}_{\bar{x}_k}^I(t, \omega) \quad (72)$$

und die Autoterme mit

$$\text{TFW}_x^A(t, \omega) := W_x(t, \omega) - \text{TFW}_x^I(t, \omega) \quad . \quad (73)$$

Das heißt, die TFW liefert als Ergebnis zwei Amplitudenverläufe in der Zeit-Frequenz-Ebene. Im optimalen Fall enthält der eine die Autoterme, die sich zur (visuellen) Analyse des Signals eignen, da sie meist mit dem intuitiv erwarteten Amplitudenverlauf übereinstimmen. Der zweite besteht aus den Interferenztermen, die zusätzlich benötigt werden, um Integralgrößen der Transformation (z. B. Gl. 36 und 37) zu berechnen.

Dieses Verfahren hat gegenüber herkömmlichen Methoden mehrere Vorteile. Es bleibt die gute Zeit-Frequenz-Auflösung der Wigner-Transformation bestehen. Man erhält Auto- und Kreuzterme als getrennte Ergebnisse, so dass sie z. B. für die Berechnung der Zeit- oder Frequenzbedingungen oder anderer Integralgrößen wieder zusammengefügt werden können. Im Gegensatz zur adaptiven Filterung im Ambiguity Bereich (z. B. COSTA UND BOUDREAUX-BARTELS [1995B]) kann im bekannten Zeit-Frequenz-Bereich gefiltert werden, so dass Filtergrenzen wesentlich leichter festgelegt werden können. Im Gegensatz zu reinen Filterlösungen darf der Durchlassbereich eines Filters hier auch mehrere Signalatome enthalten; vorausgesetzt jedes Atom ist gegenüber jedem anderen mindestens einmal durch eine Filtergrenze getrennt. Die Voraussetzung, dass das Filter die „verursachenden“ Autoterme trennen muss, zeigt allerdings, dass hiermit nur externe Interferenzen identifiziert werden können.

Wie in Abschnitt 3 gezeigt, sind nicht alle Interferenzterme störend bei der Interpretation der Transformation als zeit- und frequenzlokale Energieverteilung. Besonderes Augenmerk muss somit auf die Lokalisierung der Filter, d. h. die Festlegung der Filtergrenzen in Abhängigkeit von der Zeit und Frequenz, gelegt werden.

Beispiel 1 Als Beispiel sei das klassische 3-Ton-Signal $x(t)$ aufgeführt. Es hat die

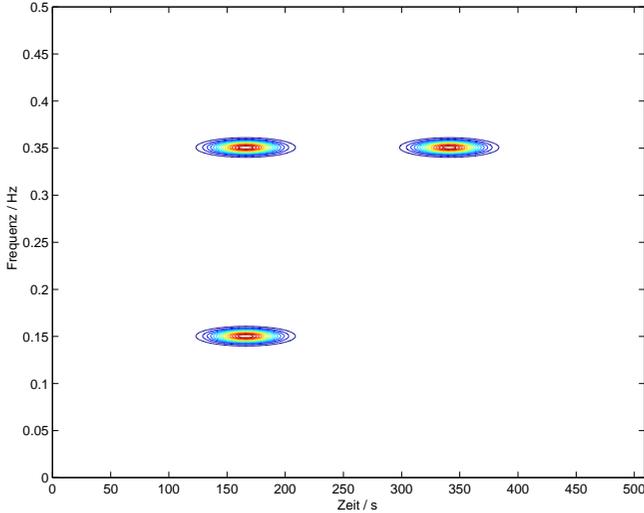


Abbildung 4: Summe der Wigner-Transformationen der Signalatome aus Beispiel 1

Form

$$x(t) := \sum_{k=1}^3 e^{-i\omega_k t - d_k(t-t_k)^2} \quad (74)$$

mit $t_1 = t_3$, $\omega_1 = \omega_2$, $t_2 \neq t_3$ und $\omega_2 \neq \omega_3$. Abbildung 4 zeigt die Summe der Wigner-Transformationen der einzelnen Atome. Die simulierte Abtastfrequenz beträgt 1 Hz, die Signaldauer 512 s.

In Abbildung 5, der Wigner-Transformation der Summe der Atome, erkennt man deutlich die Interferenzterme, die größere Amplituden als die Autoterme besitzen. Der Interferenzterm *a* wird durch Überlagerung der Atome 1 und 2 erzeugt, *b* durch 1 und 3, *c* durch 2 und 3. In Abbildung 6 ist zum Vergleich die in der Literatur häufig genannte Choi-Williams-Transformation $CW(t, \omega)$

$$CW(t, \omega) := \frac{1}{4\pi^{3/2}} \iint \frac{\sqrt{\sigma}}{|\tau|} e^{-\sigma(u-t)^2/\tau^2 - i\tau\omega} x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) du d\tau \quad (75)$$

des Signals dargestellt. Bei dieser Transformation sind nur die Interferenzterme zwischen Autoterminen stark ausgeprägt, die gleiche Zeit- oder gleiche Frequenzkoordinaten besitzen.

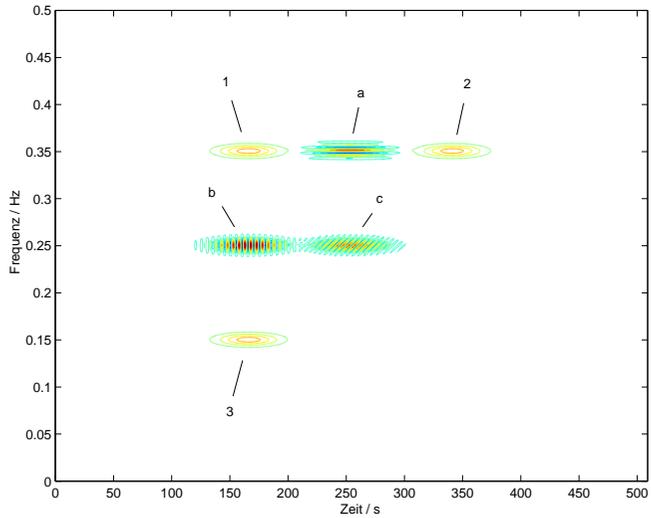


Abbildung 5: Wigner-Transformation der Summe der Signalatome aus Beispiel 1

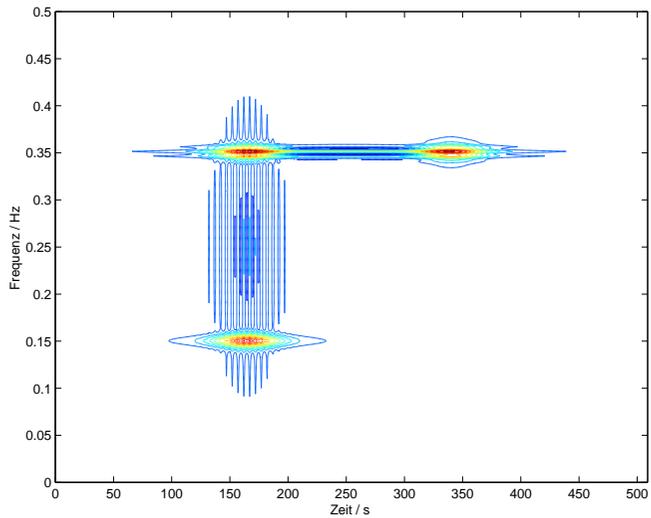


Abbildung 6: Choi-Williams-Transformation der Summe der Signalatome aus Beispiel 1

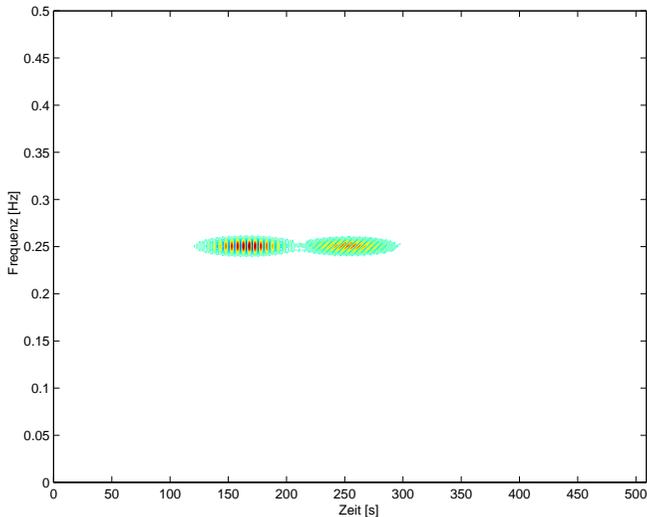


Abbildung 7: Identifizierte Kreuzterme des Signals aus Beispiel 1, 1. Schritt

Das Signal $x(t)$ wird nun zweimal gefiltert und die Differenz zwischen der nicht modifizierten Wigner-Transformation und der Wigner-Transformation des gefilterten Signals gebildet, um die Interferenzterme zu identifizieren (s. Gl. 70).

Das erste Filter ist ein zeitkonstantes Phasenfiter, bei dem Frequenzen unterhalb 0.25 Hz um 180° gedreht und Frequenzen oberhalb 0.25 Hz nicht verändert werden. Abbildung 7 zeigt $\text{TFW}_{\bar{x}_1}^I(t, \omega)$.

Das zweite Filter ist ein Phasenfiter, bei dem das Signal bis 155 s phasengedreht und nach 155 s original belassen wird (Abbildung 8).

Abbildung 9 zeigt $\text{TFW}_x^I(t, \omega)$, die Kombination der beiden Interferenzterme. Die in Abbildung 10 dargestellte Wigner-Transformation abzüglich der identifizierten Interferenzterme ($\text{TFW}_x^A(t, \omega)$) entspricht dem intuitiv erwarteten Energieverlauf.

Beispiel 2 Wird zu dem Signal in obigem Beispiel noch ein Atom hinzugefügt, so dass drei Signalatome bei der selben Frequenz auftreten, so wird, bei gleichen zeitlichen Abständen zwischen aufeinanderfolgenden Atomen, das mittlere Signalatom von der Interferenz zwischen dem ersten und dem letzten Atom überlagert. Die Darstellung der Wigner-Transformation ist visuell kaum zu interpretieren (s. Abbildung 11). Mit Hilfe der TFW kann auch in diesem Fall eine Aufspaltung der Transformation erfolgen. Abbildung 12 zeigt die resultierenden Autoterme und Abbildung 13 die zugehörigen Interferenzterme.

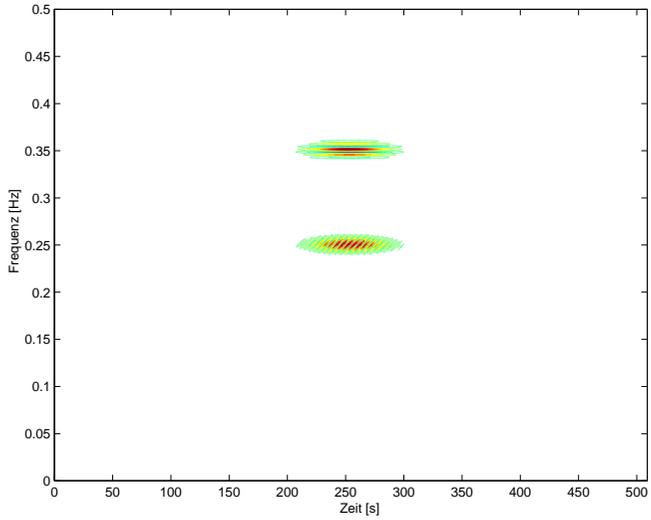


Abbildung 8: Identifizierte Kreuzterme des Signals aus Beispiel 1, 2. Schritt

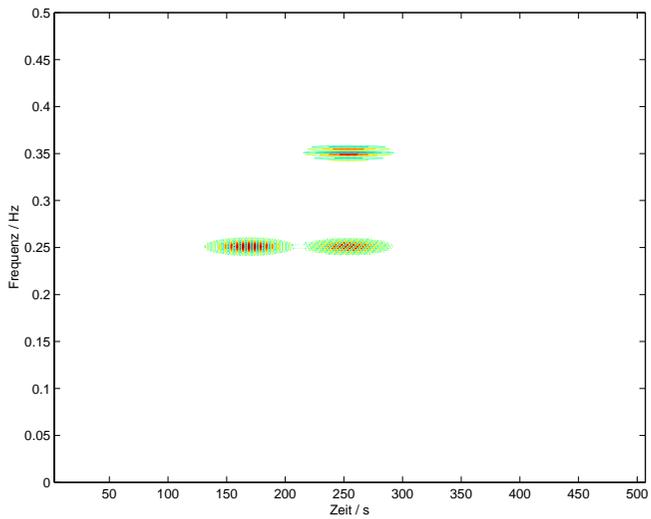


Abbildung 9: Identifizierte Kreuzterme des Signals aus Beispiel 1

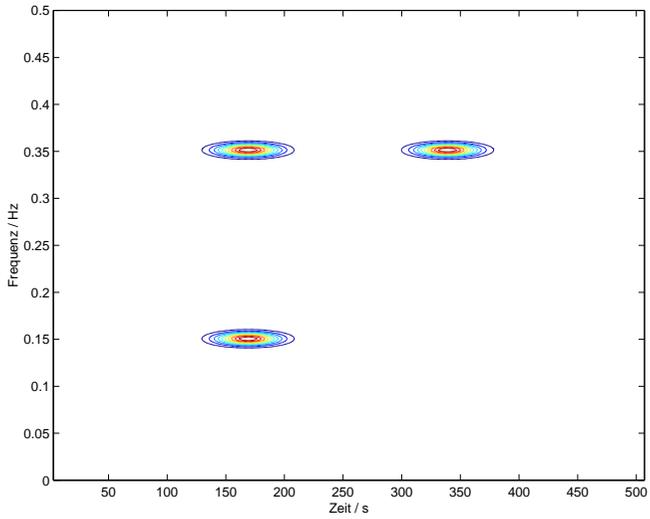


Abbildung 10: Resultierende Autoterme des Signals aus Beispiel 1

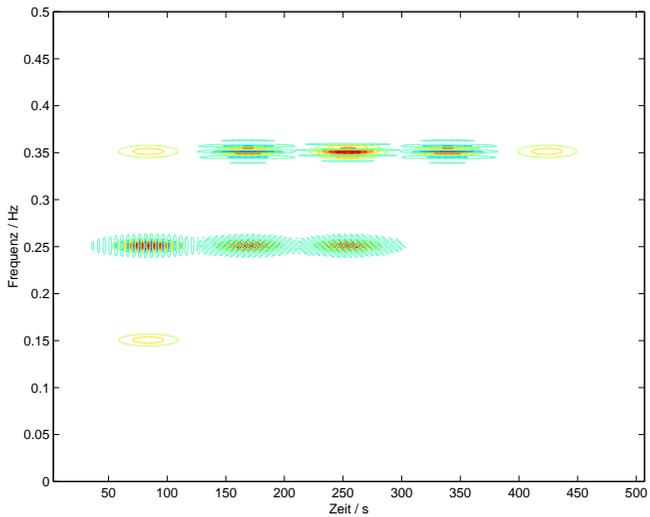


Abbildung 11: Wigner-Transformation des Signals aus Beispiel 2

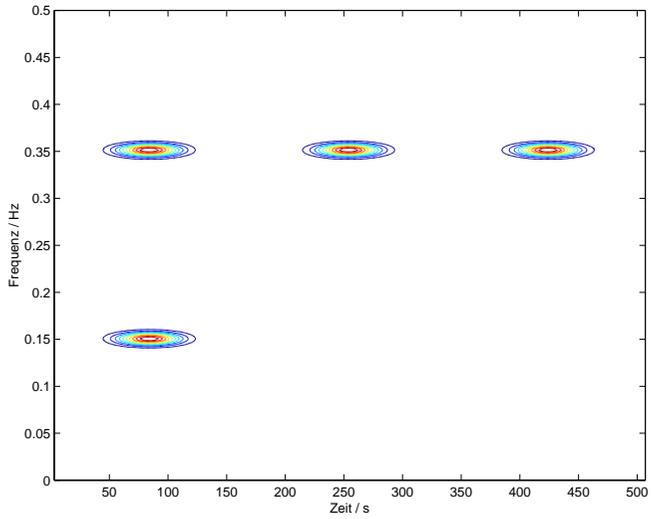


Abbildung 12: Mit der TFW identifizierte Autoterme des Signals aus Beispiel 2

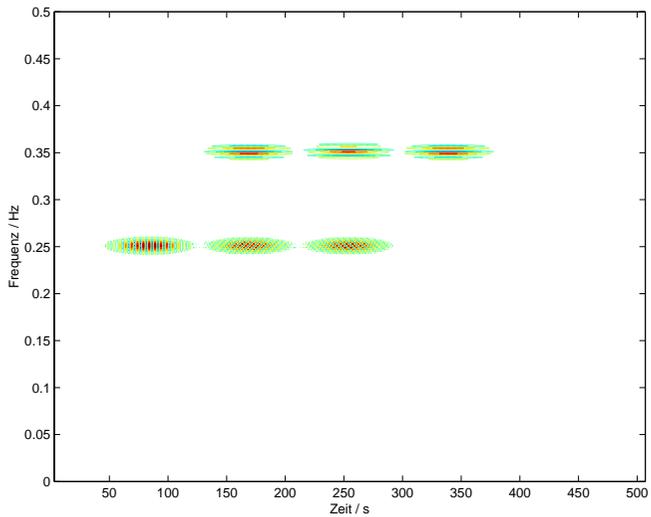


Abbildung 13: Interferenzterme zu Abbildung 12

5 Vereinigung der Interferenzterme

Gleichung 72 zeigt, dass die gesuchten Interferenzterme die Vereinigung der einzeln identifizierten Interferenzterme sind. Es ergibt sich folglich das Problem diese Vereinigungsmenge zu ermitteln.

Sehr elegant wäre eine rekursive Formulierung, bei der das Signal im Zeitbereich gefiltert, die resultierende Wigner-Transformation abzüglich der identifizierten Interferenzterme zurück in den Zeitbereich transformiert und das Verfahren erneut angewendet wird.

Die Wigner-Transformation kann nach COHEN [1995] bis auf einen konstanten Faktor k invertiert werden:

$$s(t) = k \int W(t/2, \omega) e^{it\omega} d\omega \quad . \quad (76)$$

Jedoch ist nicht jede Zeit-Frequenz-Verteilung eine gültige Wigner-Transformation. Es können Zeit-Frequenz-Verteilungen konstruiert werden, zu denen kein Signal (im Zeitbereich) existiert, dessen Wigner-Transformation diese Zeit-Frequenz-Verteilung ergibt. Speziell ist jede strikt positive Zeit-Frequenz-Verteilung (die hier als Ergebnis angestrebt wird), die nicht die Form

$$W(t, \omega) = \frac{1}{\pi} e^{-\alpha t^2 - (\omega - \beta t - \omega_0^2)/\alpha} \quad ; \quad \alpha \neq 0 \quad (77)$$

besitzt, keine gültige Wigner-Transformation [COHEN 1995]. Somit ist eine rekursive Formulierung nach obiger Form nicht möglich.

Wird die Zeit-Frequenz-Ebene so in N Gebiete eingeteilt, dass die Gebiete sich nicht überschneiden sowie außerhalb dieser Gebiete keine Signalterme auftreten, und bezeichnet $I_{k,j} = I_{j,k}$ die Interferenzen, die zwischen den Autoterme der Gebiete k und j auftreten, so können maximal die folgenden „atomaren“ Interferenzen

$$\begin{aligned} &I_{1,2}, I_{1,3}, I_{1,4}, \dots, I_{1,N}, \\ &I_{2,3}, I_{2,4}, I_{2,5}, \dots, I_{2,N}, \\ &\quad \vdots \\ &I_{N-2,N-1}, I_{N-2,N}, \\ &I_{N-1,N} \end{aligned}$$

d. h. insgesamt $(N - 1)N/2$ verschiedene, identifiziert werden. Mit einem Filter, das sich über eines oder mehrere dieser Gebiete erstreckt, werden Interferenzen identifiziert, die sich aus der Summe mehrerer atomarer Interferenzen zusammensetzen. Erstreckt sich ein Filter F z. B. über die beiden Gebiete j_0 und k_0 mit

Filter-Nr.	Filter-Gebiet	identifizierte Interferenzen
1	1	$I_1 = I_{1,2} + I_{1,3} + I_{1,4}$
2	1, 2	$I_2 = I_{1,3} + I_{1,4} + I_{2,3} + I_{2,4}$
3	1, 2, 3	$I_3 = I_{1,4} + I_{2,4} + I_{3,4}$

Tabelle 2: Beispiel für identifizierte Interferenzen bei 4 Gebieten und 3 Filtern

$1 \leq j_0 < k_0 \leq N$, so ergeben sich die identifizierten Interferenzen mit

$$I_F = \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ k \neq j_0 \\ k \neq k_0}} I_{j_0, k} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ j \neq j_0 \\ j \neq k_0}} I_{j, k_0} \quad . \quad (78)$$

Gesucht ist die Summe über alle atomaren Interferenzen:

$$I_g = \sum_{j=1}^N \sum_{k=j+1}^N I_{j, k} \quad . \quad (79)$$

Im Allgemeinen lässt sich diese gesuchte Summe nicht aus einer Linearkombination der je Filter identifizierten Interferenzen darstellen. Wie die Tabelle 2 zeigt, sind z. B. bei $N = 4$ Gebieten und drei Filtern, die sich über Gebiet 1, 1 und 2 sowie 1, 2 und 3 erstrecken, alle atomaren Interferenzen in den identifizierten Interferenzen enthalten. Es ist jedoch nicht möglich, die gesuchte Summe der atomaren Interferenzen

$$I_g = I_{1,2} + I_{1,3} + I_{1,4} + I_{2,3} + I_{2,4} + I_{3,4} \quad (80)$$

als

$$I_g = k_1 I_1 + k_2 I_2 + k_3 I_3 \quad (81)$$

mit den konstanten Faktoren $k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{R}$ und den identifizierten Interferenzen I_1, I_2, I_3 darzustellen.

Die Interferenzen können nur wenig lokal eingegrenzt werden: Alle Tupel $\langle t, \omega \rangle$, die von einem Punkt $P_f = \langle t_f, \omega_f \rangle$ des Filterbereichs und einem Punkt $P_u = \langle t_u, \omega_u \rangle$ in dem ungefilterten Bereich gleich weit entfernt sind

$$\{ \langle t, \omega \rangle \mid t - t_f = t_u - t \wedge \omega - \omega_f = \omega_u - \omega \} \quad , \quad (82)$$

bezeichnen Punkte in der Zeit-Frequenz-Ebene, die mit diesem Filter identifizierte Interferenzbereiche enthalten können. Insbesondere gilt, dass sich auch bei nicht

überlappenden Filtern die identifizierten Interferenzbereiche überlagern können. Das heißt, Interferenzterme können sich gegenseitig abschwächen oder verstärken. Somit können auch bei bekannten Gebiets- und Filtergrenzen die atomaren Interferenzen nicht aus den partiellen Interferenzsummen, wie sie nach der Filterung vorliegen, extrahiert werden.

Beispiel 3 *Verschiedene Möglichkeiten der Überlagerung von Interferenztermen mit Autotermen und anderen Interferenztermen zeigen die Abbildungen 14 bis 16. Das zugrunde liegende Signal besteht aus vier Gauß-Signalatomen, d. h. Signalen der Form $x_k(t) = e^{-i\omega_k t - \alpha_k (t-t_k)^2}$ mit den Konstanten $\omega_k, \alpha_k, t_k \in \mathbf{R}$, (bezeichnet mit G_k , $k = 1 \dots 4$) bei 250 s und 0.1 Hz (G_1), 0.2 Hz (G_2), 0.3 Hz (G_3) bzw. 0.4 Hz (G_4). Es stellt damit die in der Praxis häufig vorkommende Situation einer Grundfrequenz mit ihren ersten Harmonischen dar. Es wurden hier Gauß-Atome und keine harmonischen Signale mit konstanter Amplitude gewählt, um die Bandbreite der einzelnen Signalanteile zu vergrößern und somit eine deutlichere Darstellung der Interferenzen zu erhalten. Interferenzterme zwischen den Gauß-Atomen G_i und G_k werden mit $I_{i,k}$ bezeichnet. Es treten hierbei auf*

- *Überlagerung von Interferenztermen mit Autotermen ($I_{1,3}$ mit G_2 bzw. $I_{2,4}$ mit G_3) und*
- *Überlagerung von Interferenztermen mit anderen Interferenztermen ($I_{1,4}$ mit $I_{2,3}$).*

Wird jedes Gebiet in der Zeit-Frequenz-Ebene genau einmal gefiltert, so wird jeder identifizierte Interferenzterm genau zweimal erfasst, bei Filterung der beiden „verursachenden“ Autoterme jeweils einmal. Somit entspricht die Hälfte der Summe der einzelnen Interferenzterme der gesuchten Vereinigung der Interferenzterme.

In speziellen Fällen, bei denen mehr Informationen zur Lage der Autoterme zur Verfügung stehen, sind auch andere Vereinigungsstrategien möglich. Falls sich keine Interferenzterme überlagern, können sie z. B. iterativ kombiniert werden mit

$$I_{g_1}(t, \omega) := 0 \tag{83}$$

$$I_{g_{k+1}}(t, \omega) = \begin{cases} I_k(t, \omega) & \text{für } |I_k(t, \omega)| > |I_{g_k}(t, \omega)| \\ I_{g_k}(t, \omega) & \text{sonst} \end{cases}, \tag{84}$$

wobei I_{g_k} die insgesamt identifizierten Interferenzterme im Schritt k und I_k die in diesem Schritt identifizierten Interferenzterme bezeichnet.

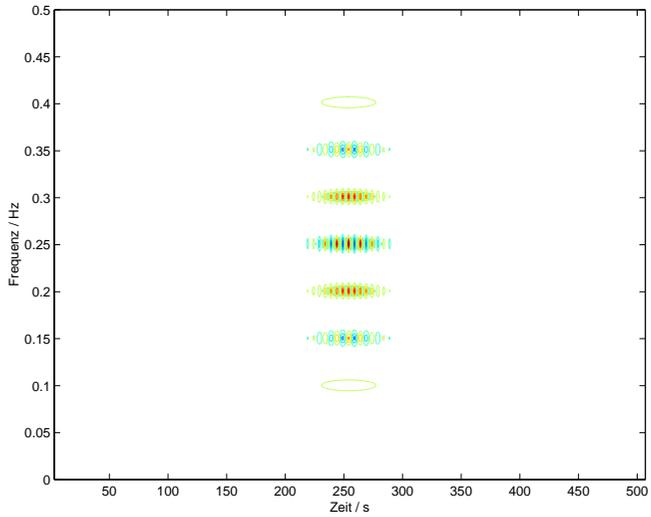


Abbildung 14: Wigner-Transformation des Signals aus Beispiel 3

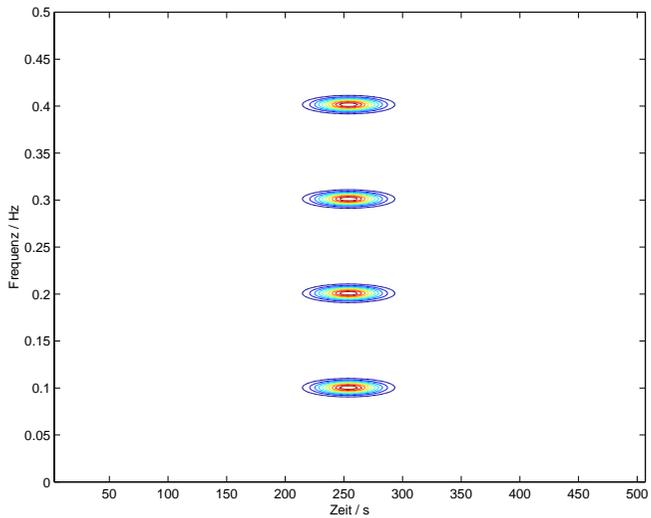


Abbildung 15: Autoterme zu Abbildung 12

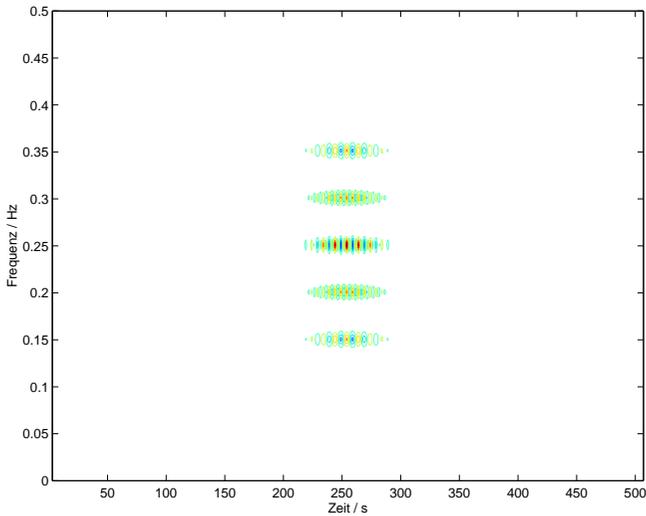


Abbildung 16: Interferenzterme zu Abbildung 12

6 Filter

Für die TFW werden Filter benötigt, die einen Bereich in der Zeit-Frequenz-Ebene um 180° in der Phase drehen. Da dieser Bereich in der Zeit beschränkt sein kann und allgemein die Zeit- und Frequenzgrenzen zeitveränderlich sein können, müssen signaladaptiv zeitvariante Phasenfilter entworfen werden.

Zeitinvariante Filter werden im Allgemeinen im Frequenzbereich entworfen (z. B. STEARNS UND HUSH [1994]; LYONS [1997]; OPPENHEIM UND SCHAFER [1999]). Die Filterung erfolgt aus Gründen der Minimierung des Rechenaufwands meist im Zeitbereich als FIR- (Finite Impuls Response) oder IIR- (Infinite Impuls Response) Filter. Bei zeitvarianten Filtern liegt der Schwerpunkt auf Tracking-Filtern, d. h. solchen, die sich einem sich langsam verändernden Signal anpassen (z. B. [HAYKIN 1996, Kap. 16]).

Die hier benötigten 180° -Phasenfilter gehören zur Gruppe der Allpassfilter. Der Amplitudengang ist konstant, nur der Phasengang wird an das Signal angepasst. Die Filtergrenzen können sich in der Zeit und Frequenz sehr stark ändern. Dies gilt insbesondere auch für die zeitlichen Übergänge zwischen gefilterten und ungefilterten Bereichen. Da ein Filter zudem mehrere Signalatome umfassen kann, liefern Trackingalgorithmen keine optimalen Filtergrenzen. Die Optimierung hinsichtlich der Rechenzeit ist zweitrangig, da die Filterung bei der mehrfachen Wig-

ner-Transformation wenig ins Gewicht fällt.

Für die Fouriertransformierte $X(\omega)$ von reellen Signalen gilt

$$X(\omega) = X^*(-\omega) \quad . \quad (85)$$

Um bei einem reellen Signal gleichzeitig sowohl positive als auch negative Frequenzen zeitvariant zu filtern, müsste obiges Filter im Frequenzraum ebenfalls symmetrisch zur Frequenz Null sein. Einfacher ist es, statt dessen das analytische Signal zu verwenden, welches definiert ist als:

$$\mathcal{A}[x(t)] := x(t) + i\mathcal{H}[x(t)] \quad (86)$$

mit der Hilberttransformation

$$\mathcal{H}[x(t)] := \frac{1}{\pi} \int \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad . \quad (87)$$

Das bedeutet im Frequenzraum

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[x(t)]] = \begin{cases} 2X(\omega) & \text{für } \omega > 0 \\ X(\omega) & \text{für } \omega = 0 \\ 0 & \text{für } \omega < 0 \end{cases} \quad . \quad (88)$$

Das Fehlen von negativen Frequenzen hat zudem den Vorteil, dass keine Interferenzterme zwischen Autotermen bei positiven und negativen Frequenzen auftreten können.

Da eine Filterung eine (zeitabhängige) Multiplikation im Frequenzbereich bedeutet und nach dem Faltungssatz eine Multiplikation im Frequenzbereich einer Faltung im Zeitbereich entspricht, sollen im Folgenden beide Möglichkeiten vorgestellt werden.

6.1 Entwurf im Frequenzbereich

Eine Phasendrehung um π in dem Zeitraum $t_a < t < t_e$ kann im Zeitbereich realisiert werden mit

$$\tilde{x}(t) := \begin{cases} -x(t) & \text{für } t_a < t < t_e \\ x(t) & \text{sonst} \end{cases} \quad (89)$$

$$= x(t) - 2 f_t(t) x(t) \quad (90)$$

mit

$$\begin{aligned} -\infty < t < \infty & \text{ der Zeit,} \\ x(t) & \text{ dem Originalsignal,} \\ \tilde{x}(t) & \text{ dem gefilterten Signal} \end{aligned}$$

und dem Zeitfenster

$$f_t(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t_a < t < t_e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (91)$$

Soll in diesem Zeitraum nur der Bereich $\omega_a < \omega < \omega_e$ gefiltert werden, so wird dies erreicht durch eine finite Fouriertransformation mit anschließender finiten inversen Fouriertransformation. Mit

$$\tilde{x}(t) := x(t) - 2 \int_{\omega_a}^{\omega_e} \int_{t_a}^{t_e} x(t) e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega \quad (92)$$

erhält man stückweise konstante Filter, d. h. es werden Signale in dem rechteckigen Gebiet der Zeit-Frequenz-Ebene zwischen t_a und t_e , ω_a und ω_e um π in der Phase gedreht.

Nach dem Faltungssatz gilt, wenn

$$y(t) = x(t) w(t) \quad , \quad (93)$$

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] \quad , \quad (94)$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] \quad (95)$$

und

$$W(\omega) = \mathcal{F}[w(t)] \quad , \quad (96)$$

dann ist

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int X(\omega) W(\omega - \nu) d\nu \quad . \quad (97)$$

Speziell gilt für

$$y(t) = x(t) e^{j\omega_0 t} \quad \text{mit } \omega_0 = \text{const} \quad (98)$$

$$Y(\omega) = X(\omega - \omega_0) \quad . \quad (99)$$

Somit kann ein zeitveränderliches Filter erhalten werden, indem $x(t)$ in Gleichung 92 vor der Fouriertransformation zeitabhängig in der Frequenz verschoben und nach der inversen Fouriertransformation zurückgeschoben wird (Frequenz-(de)modulation):

$$\tilde{x}(t) := x(t) - 2 \int_{\omega_a}^{\omega_e} \int_{t_a}^{t_e} x(t) e^{i\nu(t)} e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega e^{-i\nu(t)} \quad . \quad (100)$$

Im einfachsten Fall, abgesehen von einer hier nicht sinnvollen zeitkonstanten Frequenzverschiebung, ist $\nu(t)$ eine Parabel

$$\nu(t) = \frac{\alpha (t - t_a)^2}{2(t_e - t_a)} \quad ; \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad , \quad (101)$$

so dass $e^{-i\nu(t)}$ die Form einer linearen Gleitfrequenz (Sweep) besitzt. Hierdurch wird oben genanntes Filterrechteck in der Zeit-Frequenz-Ebene zu einem Parallelogramm mit den Eckpunkten (t_a, ω_e) , (t_a, ω_a) , $(t_e, \omega_a + \alpha)$ und $(t_e, \omega_e + \alpha)$ (s. Beispiel 4).

Wird die Frequenzmodulation getrennt für die untere und die obere Filtergrenze angewendet, kann ein Bandpass mit veränderlicher Bandbreite erhalten werden. Zunächst wird mit $\nu_a(t)$ moduliert und nur die untere Filtergrenze berücksichtigt:

$$\tilde{x}_a(t) := \int_{\omega_a}^{\infty} \int_{t_a}^{t_e} x(t) e^{i\nu_a(t)} e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega \quad . \quad (102)$$

Im nächsten Schritt wird dieses gefilterte Teilsignal mit $\nu_e(t)$ moduliert und die obere Filtergrenze berücksichtigt:

$$\tilde{x}_s(t) := \int_{-\infty}^{\omega_e} \int_{t_a}^{t_e} \tilde{x}_a(t) e^{i\nu_e(t)} e^{-i\omega t} dt e^{i\omega t} d\omega \quad . \quad (103)$$

Das gesuchte gefilterte Signal wird erhalten mit

$$\tilde{x}(t) := x(t) - 2\tilde{x}_s(t) \quad . \quad (104)$$

Mit

$$\nu_a(t) = \frac{\alpha (t - t_a)^2}{2(t_e - t_a)} \quad ; \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad (105)$$

$$\nu_e(t) = \frac{\beta (t - t_a)^2}{2(t_e - t_a)} \quad ; \quad \beta \in \mathbf{R} \quad (106)$$

wird beispielsweise oben beschriebenes Filterparallelogramm zu einem Trapez mit den Koordinaten (t_a, ω_e) , (t_a, ω_a) , $(t_e, \omega_a + \alpha)$ und $(t_e, \omega_e + \beta)$

Jedes Einzelfilter im Frequenzbereich besitzt somit sechs Parameter:

t_a	Startzeit,
t_e	Endzeit,
ω_a	Startfrequenz,
ω_e	Endfrequenz,
$\nu_a(t)$	untere Frequenzverschiebungsfunktion und
$\nu_e(t)$	obere Frequenzverschiebungsfunktion.

Beispiel 4 Es ist

$$x(t) := e^{i(\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1)/(2T)t^2)} + e^{i2(\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1)/(2T)t^2)} \quad (107)$$

mit

$$\omega_1 = 0.1 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 0.24 \text{ Hz}$$

$$T = 512 \text{ s}$$

ein Chirp-Signal mit seiner ersten Harmonischen. In der Wigner-Transformation, die in Abbildung 17 dargestellt ist, dominieren die Interferenzterme zwischen den Autoterme, so dass eine Interpretation in dieser Darstellung schwer ist.

Die Abbildungen 18 und 19 zeigen die mit Hilfe der TFW identifzierten Autoterme bzw. Interferenzterme mit einem Filter mit den Parametern:

$$\begin{aligned} t_a &= 0 \text{ s} \\ t_e &= 512 \text{ s} \\ \omega_a &= 0 \text{ Hz} \\ \omega_e &= 2\pi 0.15 \text{ Hz} \\ \nu_a(t) = \nu_e(t) &= e^{-i 0.2 \text{ Hz } \pi / t_e t^2} \end{aligned} .$$

Die Trennung dieser beiden Terme gelingt vollständig. Die Signalanteile sind klar zu erkennen.

6.2 Entwurf im Zeitbereich

Eine Filterung kann, statt wie im vorherigen Abschnitt gezeigt als Multiplikation im Frequenzbereich, auch als Faltung im Zeitbereich realisiert werden:

$$\tilde{x}(t) = \int x(t) h(t - \tau) d\tau \quad (108)$$

mit

$$\begin{aligned} -\infty < t < \infty & \text{ der Zeit,} \\ x(t) & \text{ dem Originalsignal,} \\ \tilde{x}(t) & \text{ dem gefilterten Signal und} \\ h(\tau) & \text{ der (zeitabhängigen) Impulsantwort des Filters.} \end{aligned}$$

Die Übertragungsfunktion eines, bezogen auf die Frequenz, nicht symmetrischen idealen Tiefpassfilters mit Grenzfrequenz $\omega_g > 0$ ist

$$H_{\omega_g}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < \omega < \omega_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (109)$$

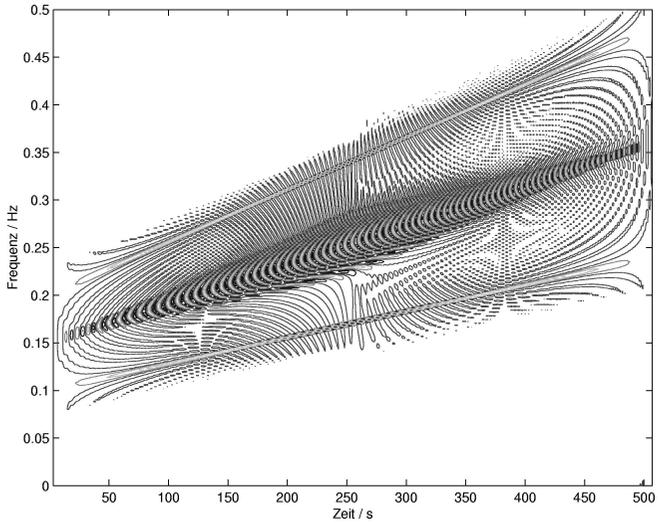


Abbildung 17: Wigner-Transformation des Signals aus Beispiel 4

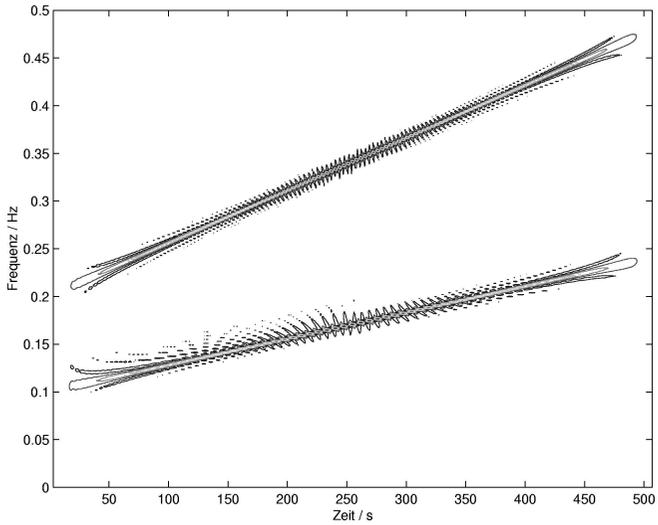


Abbildung 18: Mit Hilfe der TFW identifizierte Autoterme des Signals aus Beispiel 4

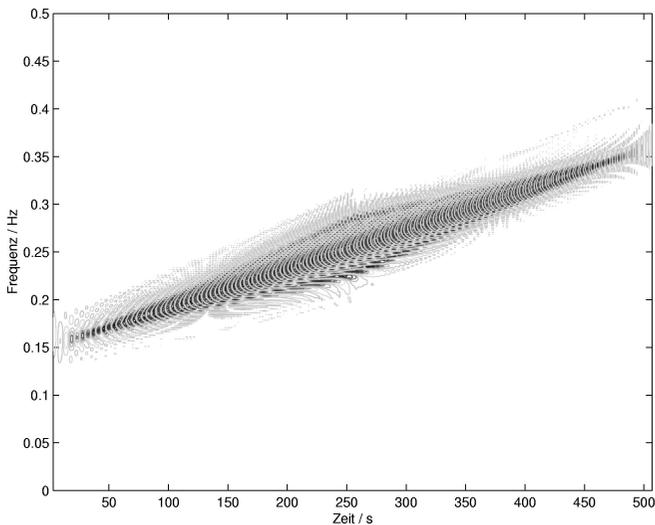


Abbildung 19: Interferenzterme zu Abbildung 18

Damit ergibt sich die Impulsantwort

$$h_{\omega_g}(t) = \int H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (110)$$

$$= \int_0^{\omega_g} e^{i\omega t} d\omega \quad (111)$$

$$= \left[\frac{1}{it} e^{i\omega t} \right]_0^{\omega_g} \quad (112)$$

$$= \frac{i}{t} (1 - e^{i\omega_g t}) \quad (113)$$

mit dem Grenzwert für $t \rightarrow 0$

$$h_{\omega_g}(0) := \omega_g \quad (114)$$

Die Übertragungsfunktion eines nicht symmetrischen, idealen Allpass mit Phasendrehung im Bereich $\omega_u < \omega < \omega_o$ ist

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega < \omega_u \\ -1 & \text{für } \omega_u < \omega < \omega_o \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (115)$$

und lässt sich somit als Überlagerung zweier nicht symmetrischer Tiefpässe mit einem Allpass (d. h. $H(\omega) = 1 \Leftrightarrow h(t) = \delta(t)$) darstellen:

$$H(\omega) = 1 - 2H_{\omega_o}(\omega) + 2H_{\omega_u}(\omega) \quad . \quad (116)$$

Da die Fouriertransformation eine lineare Operation ist, erhält man die Impulsantwort mit

$$h(t) = \delta(t) - 2\frac{j}{t} (1 - e^{i\omega_o t}) + 2\frac{j}{t} (1 - e^{i\omega_u t}) \quad (117)$$

$$= \delta(t) + 2\frac{j}{t} (e^{i\omega_o t} - e^{i\omega_u t}) \quad . \quad (118)$$

Auffällig ist, dass die Impulsantwort komplex, unendlich lang und nicht kausal ist. Letzteres ist notwendig, damit keine zusätzliche Phasendrehung auftritt. Für praktische Berechnungen wird die Impulsantwort durch ein Fenster beschränkt, was zu einer Oszillation der Übertragungsfunktion führt. Dieser Effekt kann durch eine spezielle Fensterwahl minimiert werden (Gibbsches Phänomen [OPPENHEIM UND SCHAFFER 1999]).

Mit

$$\check{h}(t) := h(t) e^{i\nu(t)} \quad (119)$$

bzw.

$$\check{h}_{\omega_u}(t) := h_{\omega_u}(t) e^{i\nu_u(t)} \quad \text{und} \quad (120)$$

$$\check{h}_{\omega_o}(t) := h_{\omega_o}(t) e^{i\nu_o(t)} \quad (121)$$

kann auch dieses Filter zeitabhängig in der Frequenz verschoben werden. Ebenso wie bei der Filterung durch Multiplikation im Frequenzbereich kann die untere Grenzfrequenz und die obere Grenzfrequenz unabhängig voneinander und somit die Bandbreite des Filters in Abhängigkeit von der Zeit verändert werden.

7 Filterkriterien

Um Filtergrenzen optimal fest zu legen, sind Kriterien notwendig, die die Beurteilung und den Vergleich von Filtergrenzen ermöglichen. Hierbei wird unterschieden zwischen einem Wirksamkeitskriterium W_k , das ein Maß ist, wie vollständig die Kreuzterme identifiziert werden, und einem Gütekriterium G_k , das ein Maß für die unerwünschte Beeinflussung der Autoterme darstellt. Beide Kriterien gelten für die Filtergrenzen, durch die ein Filter F_k definiert ist.

Das naheliegende Wirksamkeitskriterium

$$W_k := \iint |\text{TFW}_{\tilde{x}_k}^I(t, \omega)| dt d\omega \rightarrow \max \quad (122)$$

hat den Nachteil, dass bei $G_k > 0$ die fälschlicherweise als Interferenzterm identifizierten Autoterme die Wirksamkeit scheinbar verbessern.

Wird dagegen als Wirksamkeitskriterium W_k gewählt

$$W_k^- := \iint \text{TFW}_{\tilde{x}_k}^{I-}(t, \omega) dt d\omega \quad ; \quad |W_k^-| \rightarrow \max \quad (123)$$

mit

$$\text{TFW}_{\tilde{x}_k}^{I-}(t, \omega) := \begin{cases} \text{TFW}_{\tilde{x}_k}^I(t, \omega) & \text{für } \text{TFW}_{\tilde{x}_k}^I(t, \omega) < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (124)$$

so gehen in die Berechnung nur Werte ein, die zu Interferenztermen gehören. Allerdings ist auch hier die Zuordnung zwischen Interferenzidentifikation und Wirksamkeitskriterium nicht eindeutig, da zu Interferenztermen gehörige positive Werte nicht erfasst werden. Wie in Abschnitt 3 gezeigt, sind diese jedoch a priori unbekannt und sollen erst durch die Filter identifiziert werden.

Einfacher zu interpretieren ist die relative Wirksamkeit

$$w_k := \frac{W_k^-}{\iint W_x^-(t, \omega) dt d\omega} \quad , \quad (125)$$

da (bei $G_k = 0$) gilt $0 \leq w_k \leq 1$. Es ist zu beachten, dass bei dieser Definition die Summe der relativen Wirksamkeiten über alle Filterschritte größer 1 sein kann, da der selbe Interferenzterm von verschiedenen Filtern identifiziert werden kann und somit mehrfach in die Summe eingeht.

Im optimalen Fall, d. h. bei Abwesenheit von Rauschen und bei Filtergrenzen, die keine Signalterme schneiden, unterscheiden sich die Wigner Transformation des Signals $x(t)$ und die Wigner-Transformation des gefilterten Signals $\tilde{x}_k(t)$ nur in den Vorzeichen eines oder mehrerer Interferenzterme. Wenn sich Autoterme und Interferenzterme nicht überlagern, ist demzufolge ein Gütekriterium für Filter und Filtergrenzen, das umso größer wird, je stärker das Filter die Autoterme beeinflusst

$$G_k := \iint ||W_x(t, \omega)| - |W_{\tilde{x}_k}(t, \omega)|| dt d\omega \rightarrow \min \quad (126)$$

bzw. die relative Güte

$$g_k := G_k / \iint |W_x(t, \omega)| dt d\omega \quad , \quad (127)$$

die nahe 0 liegen sollte, bei schlecht gewählten Filtergrenzen, die die Autoterme verändern, jedoch auch Werte größer 1 annehmen kann.

Im Allgemeinen überlagern sich Auto- und Interferenzterme. Interferenzterme erzeugen in diesem Fall nicht immer negative Amplituden. Als Erkennungsmerkmal verbleibt nur noch die Oszillation im Zeit-Frequenz-Bereich. Bei der Fourier-transformierten der Wigner-Transformierten liegen Interferenzterme bei höheren Frequenzen und Autoterme bei niedrigeren Frequenzen. Mit einer geeignet gewählten Wichtungsfunktion $f(\tau)$ kann dann in Abhängigkeit von der Zeit t unterschieden werden, ob sich die gefilterte und die ungefilterte Wigner-Transformation in Auto- und/oder Kreuztermen unterscheiden

$$v_k(t) := \int \left(\int W_x(t, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega - \int W_{\tilde{x}_k}(t, \omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \right) f(\tau) d\tau \quad . \quad (128)$$

Je nach Wichtungsfunktion $f(\tau)$ nimmt $v_k(t)$ für Unterschiede in den Autoterme oder für Unterschiede in den Kreuztermen große Werte an. Entsprechend kann eine Transformation $w_k(\omega)$ definiert werden, die diese Unterscheidung als Funktion der Frequenz ω zulässt.

Werden beide Funktionen $v_k(t)$ und $w_k(\omega)$ bzw. deren Transformationen kombiniert, so wird durch die doppelte (inverse) Fouriertransformation der Wigner-Transformation die Ambiguity-Transformation erhalten [COHEN 1995]:

$$A_x(\theta, \tau) := \int x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) e^{i\theta u} du \quad (129)$$

$$= \iint W_x(t, \omega) e^{i\theta t + i\tau\omega} dt d\omega \quad , \quad (130)$$

bei der Autoterme nahe des Koordinatenursprungs liegen. Hiermit kann ein Zusammenhang obiger eindimensionalen Wichtungsfunktion $f(\tau)$ bzw. ihres Pendant in der Frequenzformulierung mit dem zweidimensionalen Kern $\phi(\tau, \nu)$ aus Gleichung 7 hergestellt werden, wenn der verallgemeinerte Ansatz geschrieben wird als

$$P(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) \phi(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega + i\theta u} du d\tau d\theta \quad (131)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint \phi(\theta, \tau) A_x(\theta, \tau) e^{-i\theta t - i\tau\omega} d\theta d\tau \quad . \quad (132)$$

Somit kann zur Unterscheidung, ob sich zwei Wigner-Transformationen eher in den Auto- oder den Kreuztermen unterscheiden, das Doppelintegral über die

Differenz ihrer Ambiguity-Funktionen herangezogen werden, wobei mit Hilfe eines Kerns der entsprechende Bereich gewichtet wird:

$$v_k := \iint (A_x(\theta, \tau) - A_{\bar{x}_k}(\theta, \tau)) \phi(\theta, \tau) d\theta d\tau \quad . \quad (133)$$

In Abhängigkeit von der Wahl des Kerns $\phi(\theta, \tau)$ kann v_k damit sowohl als Güte- als auch als Wirksamkeitskriterium dienen.

Im Hinblick auf die Sensitivität des Kriteriums v_k sollte $\phi(\theta, \tau)$ signaladaptiv gewählt werden. Die aus der Cohen-Klasse bekannten Verfahren können hierbei als Grundlage dienen. Da der Kern hier nur als ein Parameter eines Indikators dient, ist er keinen Einschränkungen hinsichtlich wünschenswerter Eigenschaften der Transformation unterworfen, was zu größeren Freiheiten in der Signaladaptation führt.

Ist die Güte des Filters schlecht ($g_k \gg 0$), so bedeutet dies, dass das Filter die Autoterme dadurch beeinflusst, dass die Filtergrenzen ein oder mehrere Signalatome schneiden. Dies führt zu Unstetigkeiten, die zusätzliche Interferenzterme erzeugen. Selbst wenn diese Interferenzterme mit weiteren Filtern identifiziert werden können, bleibt die Störung der Autoterme erhalten. Somit ist es nur bei einer hohen Güte des Filters ($g_k \approx 0$) sinnvoll, die Wirksamkeit zu interpretieren.

Beispiel 5 auf Seite 36 zeigt die Anwendung der verschiedenen Kriterien.

8 Filtergrenzen

Optimale Filtergrenzen können nur mit A-Priori-Wissen über die Lage der Autoterme festgelegt werden. Nach der Filterung lässt sich das Filter mit den obigen Kriterien hinsichtlich Wirksamkeit und Güte bewerten, und somit a posteriori entscheiden, ob die mit diesem Filter erhaltenen Ergebnisse verwendet oder verworfen werden. Da die für die Bewertung jedes Filters notwendige Wigner-Transformation relativ rechenaufwendig ist, müssen hinsichtlich des Rechenaufwands einfachere Indikatoren gefunden werden, die Hinweise geben, welche Filtergrenzen erfolversprechend sind.

Wie in Abschnitt 3 gezeigt, ist die Identifikation von Autoterminen schwierig. Bei der TFW hat die exakte Lage der Filtergrenzen auf das Ergebnis jedoch keinen Einfluss, solange die Filtergrenzen Autoterme trennen und keine schneiden. Da Kreuzterme immer in der Zeit-Frequenz-Ebene zwischen den Autoterminen liegen, ist es somit ausreichend, die einfacher zu identifizierenden Interferenzterme zu lokalisieren: Verläuft eine Filtergrenze in einem Interferenzgebiet und die andere „genügend weit“ entfernt (z. B. bei $\omega = 0$ oder $t = 0$), so ist gewährleistet, dass das Filter mindestens zwei Autoterme trennt. Dies gewährleistet jedoch nicht, dass die Filtergrenzen keine Autoterme schneiden.

Einen geeigneten Hinweis auf Interferenzbereiche geben negative Werte der Wigner-Transformation, da sie immer zu Kreuztermen gehören. Andererseits erzeugt nicht jeder Kreuzterm negative Werte, z. B. bei der Überlagerung mit einem betragsmäßig größeren Autoterm.

Ein zweiter Hinweis sind höherfrequente Oszillationen in der Zeit-Frequenz-Ebene. Es existiert jedoch keine feste Grenze zwischen Oszillationen durch Interferenzterme und meist tieferfrequente Amplitudenschwankungen der Autoterme.

Das heißt, in beiden Fällen können erst durch die anschließende Filterung Autoterme definitiv identifiziert und eventuelle Auswirkungen auf die Autoterme berechnet werden.

Gesucht sind somit mehrere Pfade $w(\xi)$ (mit der Laufvariablen $\xi: -\infty < \xi < \infty$) in der Zeit-Frequenz-Ebene der Wigner-Transformation

$$w(\xi) := W(p_t(\xi), p_\omega(\xi)) \quad , \quad (134)$$

wobei $p_t(\xi)$ und $p_\omega(\xi)$ so zu bestimmen sind, dass einer oder beide Indikatoren maximiert werden:

- Negative Amplituden:

$$I_N := - \int w^-(\xi) d\xi \rightarrow \max \quad (135)$$

- Oszillation im Zeit-Frequenz-Raum:

$$I_F := \int_0^\infty f(\zeta) \left| \int w(\xi) e^{-i\xi\zeta} d\xi \right| d\zeta \rightarrow \max \quad (136)$$

mit einer geeignet gewählten Funktion $f(\zeta)$, z. B. $f(\zeta) := \zeta$.

Sollen Interferenzbereiche identifiziert werden, die das Resultat von zu unterschiedlichen Zeiten auftretenden Autoterme sind, so kann

$$p_t(\xi) := t_0 \quad \text{mit } t_0 = \text{const.} \quad (137)$$

$$p_\omega(\xi) := \xi \quad (138)$$

gewählt werden. Das heißt, $w(\xi)$ ist ein „Schnitt“ in der Zeit-Frequenz-Ebene parallel zur Frequenz-Achse. Entsprechend erhält man mit

$$p_t(\xi) := \xi \quad (139)$$

$$p_\omega(\xi) := \omega_0 \quad \text{mit } \omega_0 = \text{const.} \quad (140)$$

einen Pfad, der die Identifikation von Interferenzbereichen zwischen Autoterme unterschiedlicher Frequenz zulässt.

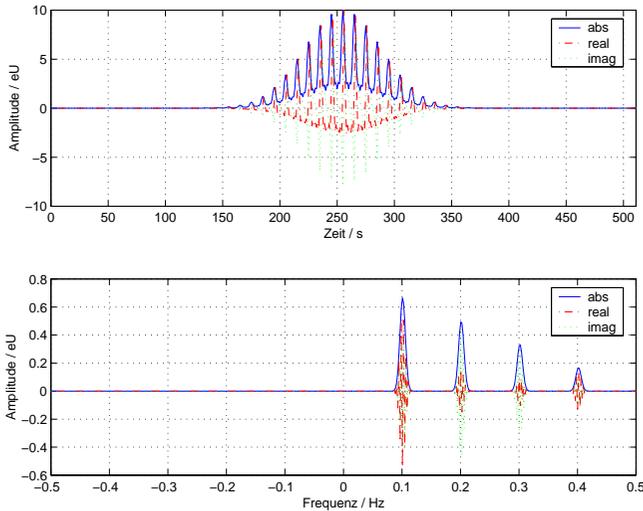


Abbildung 20: Zeitreihe und Fouriertransformierte zu Beispiel 5

Die Indikatoren auf diesen Pfaden mit konstanter Frequenz bzw. Zeit können rechenunaufwändig durch Summation bzw. Fouriertransformation der vorhandenen Wigner Matrix berechnet werden. Es ergeben sich Zeiten t_i und Frequenzen ω_i , bei denen die Indikatoren ein Maximum besitzen. Die resultierenden Filter erstrecken sich dann für alle Frequenzen vom Beginn des Signals bis zum Zeitpunkt t_i bzw. für alle Zeiten von Frequenz Null bis ω_i .

Es sei darauf hingewiesen, dass auch Autoterme veränderlicher Frequenz mit frequenzkonstanten Filtergrenzen identifiziert werden, wenn sie durch diese Grenzen getrennt und nicht geschnitten werden.

Beispiel 5 Die verschiedenen Indikatoren, Güte- und Wirksamkeitskriterien sollen an dem in den Abbildungen 20 und 21 dargestellten Signal verdeutlicht werden. Mit vier Gauß-Atomen werden eine Grundfrequenz mit ihren Höherharmonischen simuliert. Die Amplitude nimmt proportional zur Frequenz ab. In Abbildung 21 kann die höchste Harmonische nicht erkannt werden, da sie unter der Darstellungsgrenze liegt. Der zugehörige Kreuzterm ist jedoch sichtbar.

Die Abbildung 22 zeigt den Indikator nach Gleichung 135, die Abbildung 23 den Indikator nach Gleichung 136 als Funktion der Frequenz. Da sich bei diesem Beispiel Autoterme mit Interferenztermen im Zeit-Frequenz-Raum überlagern, ergeben sich mehrere falsch positive Weisungen, die erst durch die Berechnung der Güte des entsprechenden Filters aufgedeckt werden können.

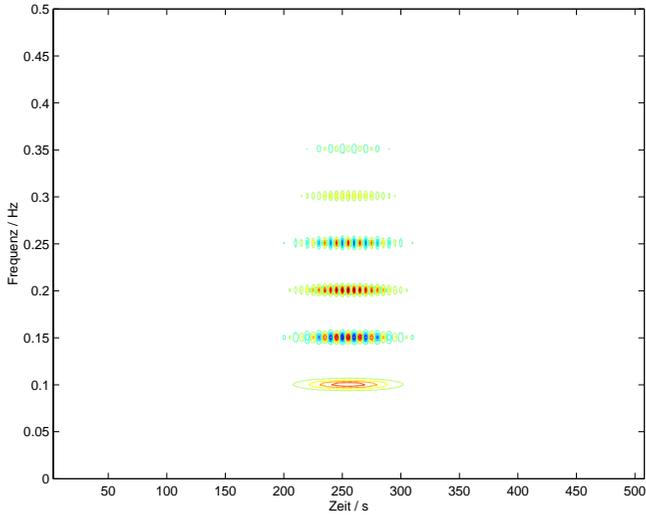


Abbildung 21: Wigner-Transformation zu Beispiel 5

In Tabelle 3 sind die Parameter der Filter nach Abschnitt 6 und die daraus resultierenden Kriterien aufgeführt. Es wurden alle Frequenzen berücksichtigt, bei denen die Indikatoren größer als 10% des Maximums dieses Indikators sind, sowie ein lokales, geglättetes Maximum besitzen. Dieses wurde definiert als der Abszissenwert, bei dem die zugehörige Ordinate größer als ihre 5 benachbarten Werte ist. Die Berechnung der Güte g_k und Wirksamkeit w_k der Filter erfolgte nach Gleichung 127 bzw. 125. Für das Kriterium v_k nach Gleichung 133 wurde der Kern ϕ gewählt zu

$$\phi(\theta, \tau) := e^{-0.001(\theta^2 + 0.05\tau^2)} \quad . \quad (141)$$

Filter mit einer relativen Güte von $v_k \geq 0.1$ wurden verworfen (– in der letzten Spalte).

Abbildung 24 zeigt das Ergebnis einer automatischen Auswertung aufgrund dieser Indikatoren. In diesem Beispiel kann es manuell nicht mehr verbessert werden.

f_a [Hz]	f_e [Hz]	g_k [-]	w_k [-]	v_k [-]	verwendet [-]
0.00	0.15	1.037	0.382	0.039	+
0.15	0.20	1.257	0.985	0.326	-
0.15	0.25	0.907	0.241	0.063	+
0.25	0.30	0.909	0.696	0.112	-
0.25	0.35	0.691	0.382	0.024	+
0.35	1.00	0.389	0.241	0.005	+

Tabelle 3: Güte- und Wirksamkeitskriterien für automatisch gewählte Filtergrenzen in Beispiel 5

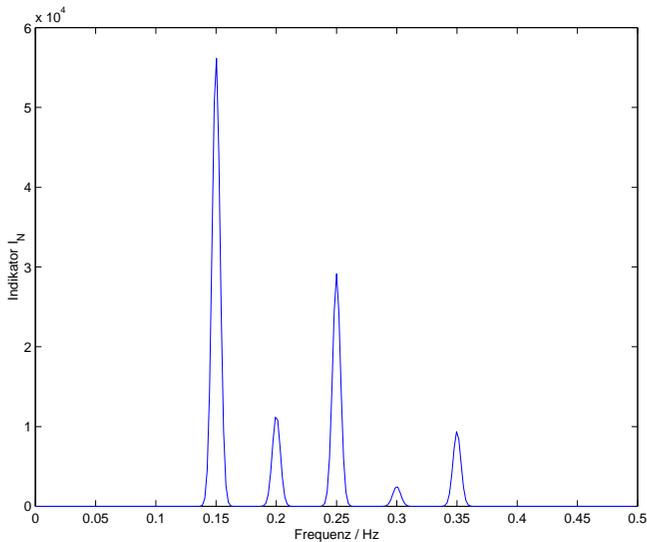


Abbildung 22: Indikator basierend auf dem Auftreten von negativen Werten (Gl. 135) als Funktion der Frequenz zu Beispiel 5

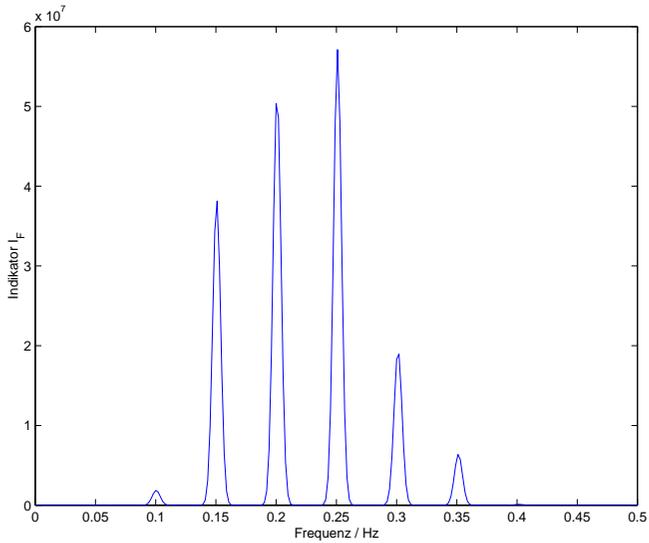


Abbildung 23: Indikator basierend auf dem Auftreten von Oszillation (Gl. 136) als Funktion der Frequenz zu Beispiel 5

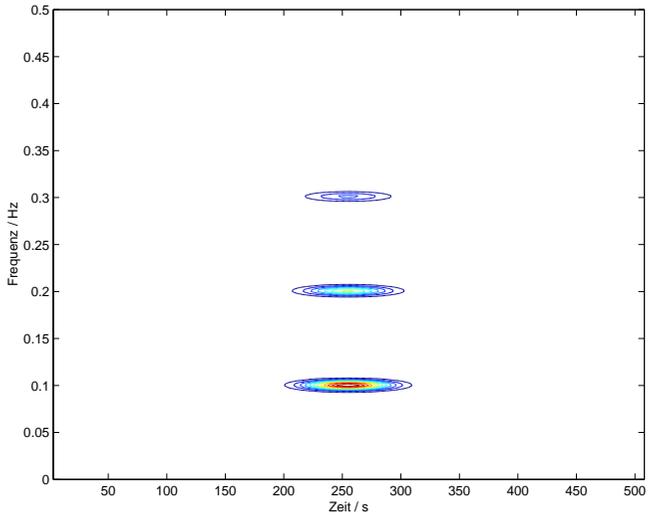


Abbildung 24: Durch die TFW identifizierte Autoterme bei automatischer Auswertung, zu Beispiel 5

9 Fensterung

Jede Wigner-Transformation eines Zeitschriebes ist eine Pseudo-Wigner-Transformation (PW)

$$\text{PW}(t, \omega) := \frac{1}{2\pi} \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) h\left(\frac{\tau}{2}\right) h^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) e^{-i\tau\omega} d\tau \quad (142)$$

mit einer Gewichtsfunktion $h(\tau)$ endlicher Länge, da die Integralgrenzen endlich sein müssen. Das heißt, das reale Signal wird automatisch durch die Messdauer gefenstert.

Somit erhält man bei einem Zeitschrieb der Länge T und dem Startpunkt $t = 0$ die Wigner-Transformation als

$$W(t, \omega) = \int_{2 \max(-t, t-T)}^{2 \min(t, T-t)} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{für } 0 \leq t < T \quad . \quad (143)$$

Die Integrationslänge ist für $0 < t < T/2$ proportional t und für $T/2 < t < T$ proportional $T - t$. Somit ist der Amplitudenverlauf der Wigner-Transformation eines Signals mit konstanter Frequenz und Amplitude dreiecksförmig. Wird das Integral mit dem Kehrwert der Integrationslänge gewichtet, so ist die Wigner-Transformation konstant für das zeitinvariante Signal. Bei relativ zu T kurzen Signalen erhält man jedoch eine Amplitude, die abhängig von der zeitlichen Lage der Signale ist.

Demnach sollte die Wigner-Transformation explizit durch ein Fenster konstanter Länge L gefenstert werden, wodurch die Pseudo-Wigner-Transformation erhalten wird:

$$\text{PW}_{x,h}(t, \omega) := \int h\left(\frac{\tau}{2}\right) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) h^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (144)$$

$$= \int W_x(t, \nu) W_h(0, \omega - \nu) d\nu \quad (145)$$

mit

$$h(\tau) = 0 \quad \text{für } |\tau| > \frac{L}{2} \quad . \quad (146)$$

Somit ergeben sich die aus der gefensterten Fouriertransformation bekannten Effekte wie Leakage und (im diskreten Fall) Picked Fence Effekt, und es können die dort bewährten Fenstertypen wie Hanning oder Kaiser [HARRIS 1978; NUTTAL 1981] eingesetzt werden.

Gleichzeitig ergibt sich eine Reduktion der Interferenzen, da Signale, die einen zeitlichen Abstand besitzen, der größer als die Fensterlänge ist, keine Kreuzterme produzieren.

Die oben genannten Sachverhalte gelten in gleicher Weise für die TFW.

10 Fehler durch signalüberschreitende Filtergrenzen

Wie in Abschnitt 4 gezeigt, induzieren die Filter bei optimaler Lage der Filtergrenzen keine Fehler. Fehler bedeutet in diesem Zusammenhang zum einen die Entstehung von Termen im Zeit-Frequenz-Raum, die in der Wigner-Transformation nicht vorhanden waren, d. h. Artefakte der Filter sind. Die zweite Art von Fehlern sind die meist daraus folgende ganze oder teilweise Zuordnung von Autotermen zu Interferenztermen. In Abschnitt 7 wurde gezeigt, dass das Auftreten dieser Fehler nachgewiesen werden und die Ergebnisse des entsprechenden Filters demzufolge verworfen werden können.

In diesem Abschnitt wird untersucht, inwieweit das Ergebnis der TFW verfälscht wird, wenn Filter, deren Grenzen Signalterme schneiden, in die Berechnung einfließen.

Ein zeitbegrenztes Phasenfiter kann nach Abschnitt 6 durch Multiplikation mit $f(t)$

$$f(t) := f_1(t) - 2f_2(t) \quad (147)$$

mit

$$f_1(t) := 1 \quad (148)$$

$$f_2(t) := \begin{cases} 2 & \text{für } t_a < t < t_e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (149)$$

realisiert werden. Die Pseudo-Wigner-Transformation von $f(t)$ mit einem Rechteckfenster der Länge $2L$, d. h.

$$\text{PW}_f(t, \omega) = \int f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) h^*(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (150)$$

mit

$$h(\tau) := \begin{cases} 1 & \text{für } |\tau| < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (151)$$

ergibt sich dann mit Gleichung 68 zu

$$\text{PW}_f(t, \omega) = \text{PW}_{f_1}(t, \omega) + \text{PW}_{f_2}(t, \omega) - 2\Re\{\text{PW}_{f_{12}}(t, \omega)\} \quad . \quad (152)$$

Es ist

$$\text{PW}_{f_1}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (153)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i\omega} (e^{-i\omega L} - e^{i\omega L}) \quad (154)$$

und mit $\sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{zi} - e^{-zi})$ ergibt sich

$$\text{PW}_{f_1}(t, \omega) = \frac{1}{\pi\omega} \sin(\omega L) \quad . \quad (155)$$

Für die Pseudo-Wigner-Transformation des zweiten Signals ergibt sich mit

$$\text{PW}_{f_2}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f_2\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad , \quad (156)$$

wobei

- für $t < t_a$ sowie für $t > t_e$ gilt

$$\text{PW}_{f_2}(t, \omega) = 0 \quad (157)$$

- für $t_a < t < \frac{t_e+t_a}{2}$ das Integral nur für $|\frac{\tau}{2}| < t - t_a$ Werte ungleich Null ergibt und somit

$$\text{PW}_{f_2}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2(t-t_a)}^{2(t-t_a)} 4e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (158)$$

$$= -\frac{2}{i\pi\omega} \left(e^{-i2\omega(t-t_a)} - e^{i2\omega(t-t_a)} \right) \quad (159)$$

$$= -\frac{4}{\pi\omega} \sin(-2\omega(t-t_a)) \quad (160)$$

$$= \frac{4}{\pi\omega} \sin(2\omega(t-t_a)) \quad (161)$$

- für $\frac{t_e+t_a}{2} < t < t_e$ das Integral nur für $|\frac{\tau}{2}| < t_e - t$ Werte ungleich Null ergibt und somit

$$\text{PW}_{f_2}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2(t_e-t)}^{2(t_e-t)} 4e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (162)$$

$$= -\frac{2}{i\pi\omega} \left(e^{-i2\omega(t_e-t)} - e^{i2\omega(t_e-t)} \right) \quad (163)$$

$$= -\frac{4}{\pi\omega} \sin(2\omega(t - t_e)) \quad . \quad (164)$$

Für den Realteil der Kreuztransformation ergibt sich

$$\Re\{\text{PW}_{f_{12}}(t, \omega)\} = \Re\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f_1\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f_2^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} \quad (165)$$

$$= \Re\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} \quad , \quad (166)$$

wobei

- für $t + \frac{L}{2} < t_a$ sowie für $t - \frac{L}{2} > t_e$ gilt

$$\Re\{\text{PW}_{f_{12}}(t, \omega)\} = 0 \quad (167)$$

- für $t - \frac{L}{2} < t_a < t_e < t + \frac{L}{2}$, d. h. das Filter komplett in die Transformation eingeht, gilt

$$\Re\{\text{PW}_{f_{12}}(t, \omega)\} = \Re\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2(t-t_e)}^{2(t-t_a)} 2e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} \quad (168)$$

$$= \Re\left\{ -\frac{1}{i\pi\omega} \left(e^{-i2\omega(t-t_a)} - e^{-i2\omega(t-t_e)} \right) \right\} \quad (169)$$

$$= \Re\left\{ \frac{i}{\pi\omega} \left(e^{-i2\omega(t-t_a)} - e^{-i2\omega(t-t_e)} \right) \right\} \quad (170)$$

$$= -\frac{1}{\pi\omega} (\sin(-2\omega(t - t_a)) - \sin(-2\omega(t - t_e))) \quad (171)$$

$$= \frac{1}{\pi\omega} (\sin(2\omega(t - t_a)) - \sin(2\omega(t - t_e))) \quad . \quad (172)$$

- für $t - \frac{L}{2} < t_a < t + \frac{L}{2} < t_e$, d. h. das Filter zum Teil in die Transformation eingeht, gilt

$$\Re\{\text{PW}_{f_{12}}(t, \omega)\} = \Re\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{2(t-t_a)} 2e^{-i\omega\tau} d\tau\right\} \quad (173)$$

$$= \Re\left\{-\frac{1}{i\pi\omega} \left(e^{-i2\omega(t-t_a)} - e^{i2L}\right)\right\} \quad (174)$$

$$= \frac{1}{\pi\omega} (\sin(2\omega(t-t_a)) + \sin(\omega L)) \quad (175)$$

- für $t_a < t - \frac{L}{2} < t_e < t + \frac{L}{2}$ gilt entsprechend

$$\Re\{\text{PW}_{f_{12}}(t, \omega)\} = \Re\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{2(t-t_e)}^L 2e^{-i\omega\tau} d\tau\right\} \quad (176)$$

$$= \frac{1}{\pi\omega} (\sin(\omega L) - \sin(2\omega(t-t_e))) \quad (177)$$

Somit ergibt sich für die Wigner-Transformation des zeitbegrenzten Phasenfilters mit den Abkürzungen

$$s_L(\omega) := \sin(\omega L) \quad (178)$$

$$s_a(t, \omega) := \sin(2\omega(t-t_a)) \quad (179)$$

$$s_e(t, \omega) := \sin(2\omega(t-t_e)) \quad (180)$$

$$\text{PW}_f(t, \omega) = \frac{1}{\pi\omega} \cdot \begin{cases} -s_L(\omega) - 2s_a(t, \omega) & \text{für } t < t_a < t + \frac{L}{2} < t_e \\ s_L(\omega) + 2s_a(t, \omega) - 2s_e(t, \omega) & \text{für } t < t_a < t_e < t + \frac{L}{2}^\dagger \\ -s_L(\omega) + 2s_a(t, \omega) & \text{für } t - \frac{L}{2} < t_a < t \\ & < t + \frac{L}{2} < t_e^* \\ s_L(\omega) + 2s_a(t, \omega) + 2s_e(t, \omega) & \text{für } t - \frac{L}{2} < t_a < t \\ & < \frac{t_a+t_e}{2} < t_e < t + \frac{L}{2}^\ddagger \\ s_L(\omega) - 2s_a(t, \omega) - 2s_e(t, \omega) & \text{für } t - \frac{L}{2} < t_a < \frac{t_a+t_e}{2} \\ & < t < t_e < t + \frac{L}{2}^\ddagger \\ -s_L(\omega) - 2s_e(t, \omega) & \text{für } t_a < t - \frac{L}{2} < t < t_e \\ & < t + \frac{L}{2}^* \\ s_L(\omega) + 2s_a(t, \omega) - 2s_e(t, \omega) & \text{für } t - \frac{L}{2} < t_a < t_e < t^\dagger \\ -s_L(\omega) + 2s_e(t, \omega) & \text{für } t_a < t - \frac{L}{2} < t_e < t \\ s_L(\omega) & \text{sonst} \end{cases} \quad (181)$$

Die mit * markierten Fälle treten nur auf für $L/2 < t_e - t_a$ auf, während die mit † markierten Fälle nur für $L/2 > t_e - t_a$ und die mit ‡ markierten Fälle nur für $L > t_e - t_a$ existieren.

Es gilt mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \sin(a\omega)}{\partial \omega}}{\frac{\partial \omega}{\partial \omega}} \quad (182)$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{a \cos(a\omega)}{1} \quad (183)$$

$$= a \quad (184)$$

Somit ergibt sich

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{PW}_f(t, \omega) = \frac{1}{\pi\omega} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} -L - 4(t - t_a) & \text{für } t < t_a < t + \frac{L}{2} < t_e \\ L + 4(t_e - t_a) & \text{für } t < t_a < t_e < t + \frac{L}{2} \quad \dagger \\ -L + 4(t - t_a) & \text{für } t - \frac{L}{2} < t_a < t \\ & < t + \frac{L}{2} < t_e \quad * \\ L + 8t - 4(t_a + t_e) & \text{für } t - \frac{L}{2} < t_a < t \\ & < \frac{t_a + t_e}{2} < t_e < t + \frac{L}{2} \quad \ddagger \\ L - 8t + 4(t_a + t_e) & \text{für } t - \frac{L}{2} < t_a < \frac{t_a + t_e}{2} \\ & < t < t_e < t + \frac{L}{2} \quad \ddagger \\ -L - 4(t - t_e) & \text{für } t_a < t - \frac{L}{2} < t < t_e \\ & < t + \frac{L}{2} \quad * \\ L + 4(t_e - t_a) & \text{für } t - \frac{L}{2} < t_a < t_e < t \quad \dagger \\ -L + 4(t - t_e) & \text{für } t_a < t - \frac{L}{2} < t_e < t \\ L & \text{sonst} \end{array} \right. \quad (185)$$

Abbildung 25 gibt zur Verdeutlichung der Gleichung 181 die Wigner-Transformation eines Phasenfilters mit der Fensterlänge $2L = 255$ s, und den Filterstart- bzw. -endzeiten $t_a = 500$ s und $t_e = 600$ s bei einer simulierten Abtastfrequenz von 1 Hz wieder. In Abbildung 26 ist der dazugehörigen Amplitudenverlauf des Gleichanteils, in Abbildung 27 der Amplitudenverlauf bei einer Frequenz von 0.012 Hz dargestellt.

Der erste Term der Funktion in Gleichung 181 ($s_L(\omega)$) ist der durch die Fensterung der Wigner-Transformation entstehende, aus der diskreten Fouriertransformation bekannte zeitunabhängige Spaltsinus. Die anderen Terme werden durch die Filterfunktion erzeugt. Sie oszillieren sowohl in der Zeit als auch in der Frequenz.

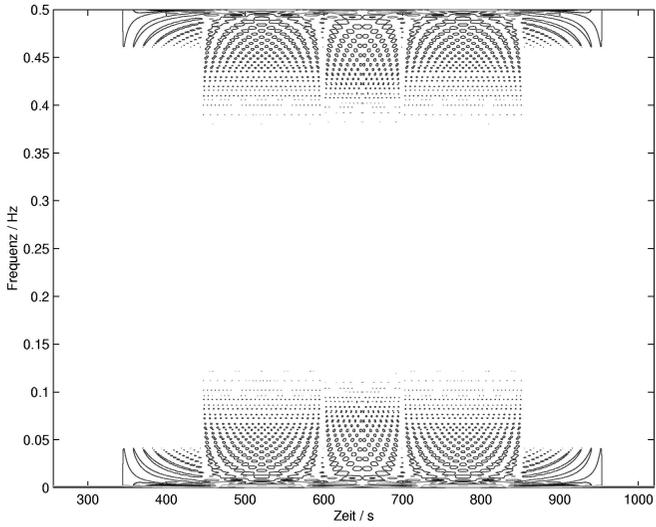


Abbildung 25: Wigner-Transformation eines zeitbegrenzten, frequenzinvarianten Phasenfilters

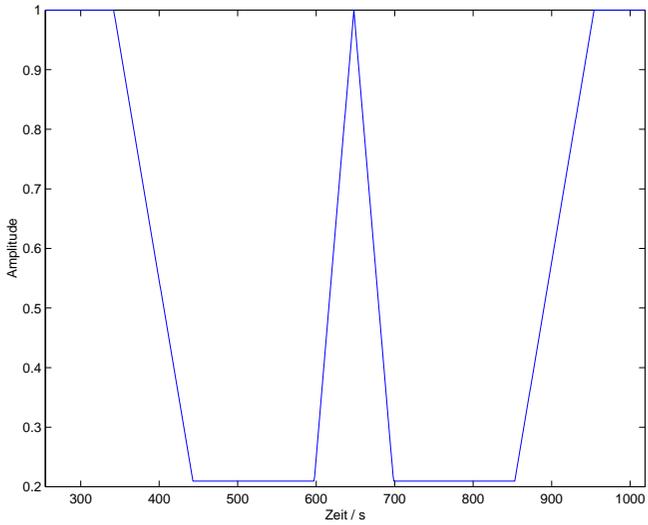


Abbildung 26: Amplitudenverlauf bei 0 Hz aus Abbildung 25

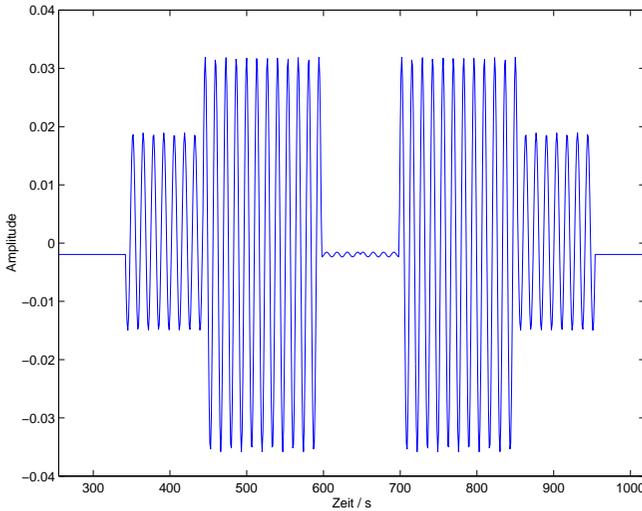


Abbildung 27: Amplitudenverlauf bei 0.012 Hz aus Abbildung 25

Nach [JANSSEN 1997] entspricht die Multiplikation zweier Signale der spektralen Faltung ihrer Wigner-Transformationen:

$$W_{f \cdot g}(t, \omega) = \int W_f(t, \nu) W_g(t, \omega - \nu) d\nu \quad . \quad (186)$$

Ist $f(x)$ das zu untersuchende Signal und $g(x)$ das Phasenfilter, so wird demnach nur für

$$W_g(t, \omega) = \delta(t) \quad (187)$$

die Wigner-Transformation jedes beliebigen Signals durch das Phasenfilter nicht verändert.

Das in den Abbildungen 25 bis 27 dargestellte endliche, diskrete Phasenfilter kann somit durch den von eins abweichenden Gleichanteil die Größe der Amplituden der Wigner-Transformation verfälschen und durch seine von Null abweichenden Amplituden bei Frequenzen ungleich Null Amplituden der Wigner-Transformation an Orte in der Zeit-Frequenz-Ebene projizieren, die nur indirekt mit der Energie des zugrunde liegenden Signals korreliert sind.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, dass Filtergrenzen, die Autoterme schneiden zu Artefakten in der resultierenden Transformation führen. Zum einen werden die Amplituden der Autoterme teilweise verringert, zu anderen werden in

der Zeit-Frequenz-Ebene zusätzliche Amplituden erzeugt, deren Lokalisierung in der Zeit und der Frequenz keine direkten Rückschlüsse auf das ursprüngliche Signal zulassen. Die Amplituden dieser Störung sind abhängig von der Länge des Filters, der Fensterlänge der Pseudo-Wigner-Transformation sowie von der Zeit und Frequenz. Sie nehmen proportional der Frequenz ab und sind parallel der Zeitachse stückweise konstant. Durch das Fenster der Pseudo-Wigner-Transformation sind sie jedoch in der zeitlichen Ausbreitung beschränkt.

11 Zeitdiskretisierung

Die diskrete Wigner-Transformation ist mit $n, k \in \mathbf{Z}$ definiert als [CLAASEN UND MECKLENBRÄUKER 1980B]

$$W(n, \theta) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+k) x^*(n-k) e^{-i2k\theta} \quad . \quad (188)$$

Sie ist in der Frequenz periodisch mit der Periode π . Somit muss ein Signal mit dem Vierfachen der höchsten vorkommenden Frequenz abgetastet werden, um Aliasing zu verhindern.

Für reelle Signale kann statt dessen nach dem Abtasten mit dem Zweifachen der höchsten vorkommenden Frequenz mit dem analytischen Signal aus Gleichung 86 gerechnet werden, das auch beim Einsatz von frequenzmodulierten Filtern benötigt wird.

Da die TFW auf der Summation von Wigner-Transformationen basiert, hat die Zeitdiskretisierung hier keine speziellen Auswirkungen.

Durch die in Abschnitt 9 behandelte Fensterung der Wigner-Transformation ergeben sich jedoch numerische Vorteile. Wird ein Rechteckfenster mit der Länge L mit $L = 2N - 1$, $N = 2^n$ und $n \in \mathbf{N}$ verwendet, d. h.

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } |n| < N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (189)$$

so ergibt sich die Pseudo-Wigner-Transformation zu [QIAN UND CHEN 1996]

$$PW(n, k) = 4\Re \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} x(n+m) x^*(n-m) e^{-i4\pi km/N} \right\} - 2x(n) x^*(n) \quad . \quad (190)$$

Sie kann somit mit einer Standard-FFT berechnet werden, was einen erheblichen Geschwindigkeitsvorteil bedeutet.

Zum Zweiten wird durch die Fensterung der Wertebereich der Summen beschränkt. Dies stellt eine notwendige Bedingung für die numerische Berechnung dar. Während bei der unbeschränkten Wigner-Transformation Dirac-Funktionen für konstante harmonische Signale sowie deren Interferenzen berechnet werden, erhält man bei der gefensterten Version endliche Werte. Da bei der TFW Wigner-Transformationen subtrahiert werden, ermöglicht dies erst die Berechnung bei endlicher Rechengenauigkeit.

12 Numerische Betrachtung

Der vorgestellte Algorithmus basiert darauf, dass sich Interferenzterme in der Addition aufheben. Somit muss die Frage beantwortet werden, inwieweit die endliche Rechengenauigkeit der Computerprogramme das Ergebnis beeinflusst.

Gemessene Signale müssen zunächst digitalisiert werden, um im Computer weiterverarbeitet zu werden. Für dynamische Signale sind heutzutage 16-Bit Digital-Analog (DA) Wandler erhältlich. Das ergibt bei der üblichen 2er-Komplement-Darstellung einen Wertebereich von -32768 bis 32767 . Bei Vernachlässigung von Quantisierungsfehlern und Rauschteilen auf der analogen Seite der Messkette, d. h. bei Annahme von perfekten Messgeräten, folgt daraus bei optimaler Aussteuerung ein Dynamikumfang von $2^{15} = 32768 \approx 90$ dB. Da bei der TFW Leistungsgrößen, d. h. das Quadrat der Signale, berechnet werden, treten hier Amplitudenverhältnisse von maximal $(2^{15})^2 = 2^{30} \approx 10^9$ auf.

Übliche Programme (bzw. die zugrundeliegende Hardware) benutzen für die Darstellung von Rationalen Zahlen das IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) Gleitpunktformat. Es sind zwei Genauigkeiten (`single` und `double Precision`) definiert, die beide die Form

$$p = s \cdot |m| \cdot 2^e \tag{191}$$

besitzen, mit den unterschiedlichen Längen (in Bit)

		single	double
p	Gleitpunktzahl	32	64
s	Vorzeichen der Mantisse	1	1
m	Mantisse, vorzeichenlos	23	52
e	Exponent	8	11

Durch die endliche Größe der Gleitkommadarstellung können nicht alle Zahlen im Wertebereich dargestellt werden. Weil sich bei der TFW negative und positive Interferenzterme durch Addition aufheben, ist die Darstellung der Mantisse als Vorzeichen s und Betrag m von Vorteil, da hieraus folgt: Ist die Zahl $a \in \mathbf{R}$ exakt darstellbar, so ist auch $-a$ exakt darstellbar und es gilt exakt $a + (-a) = 0$.

Bei Verwendung des Typs `double` wird eine Genauigkeit der Darstellung von $2^{-52} \approx 2 \cdot 10^{-16}$ erhalten. Sie liegt damit um sechs 10er-Potenzen über dem maximalen Amplitudenverhältnis. Die Berechnung der Pseudo-Wigner-Transformation als Zwischenergebnis der TFW erfolgt nach Gleichung 190 üblicherweise mit einer Fensterlänge in der Größenordnung von 10^3 . Somit bleibt eine „Genauigkeitsreserve“ von circa drei 10er-Potenzen erhalten.

Der Einsatz der `single` Variante, beispielsweise aufgrund der geringeren Speicheranforderungen, führt zu numerischen Fehlern, die den durch den AD-Wandler vorgegebenen Dynamikumfang reduzieren und der Aufhebung der Interferenzterme entgegenwirken können. Er sollte nur in Ausnahmesituationen mit vorheriger Fehlerabschätzung mit Berücksichtigung der effektiven AD-Wandler Dynamik, d. h. der Aussteuerung, der Quantisierungsfehler und der Größe des Rauschens, sowie der verwendeten Fensterlänge der Pseudo-Wigner-Transformation in Betracht gezogen werden.

13 Beispiele mit gemessenen Signalen

In den beiden folgenden Abschnitten werden an gemessenen Signalen die TFW und das Spektrogramm mit zwei verschiedenen Fensterlängen gegenübergestellt. Die Berechnung der Wigner-Transformation und der TFW erfolgte wegen der beschriebenen Vorteile, wie Wegfall von Interferenztermen durch Autoterme mit negativen Frequenzen und Vereinfachung der Filterung, mit dem zu dem reellen Messschrieb gehörigen analytischen Signal.

Um die Übersichtlichkeit zu verbessern, werden in den Graustufendarstellungen der Zeit-Frequenz-Transformationen nur positive Amplituden dargestellt. Amplituden der Größe Null werden weiß eingefärbt, die maximale Amplitude der jeweiligen Transformation wird schwarz dargestellt.

13.1 Kolbenverdichter

Das erste gemessene Beispielsignal ist nur schwach instationär. Durch das Auftreten von ganzzahligen Höherharmonischen tritt der in Abschnitt 5 beschriebene Effekt auf, dass sich Auto- und Kreuzterme komplett überlagern und somit eine visuelle Trennung kaum möglich ist.

Abbildung 28 zeigt die Schwinggeschwindigkeiten im Zeit- und Frequenzbereich an einer Rohrleitung². In der Leitung wird Wasser, welches bei der Gasförderung anfällt, mit Hilfe eines Kolbenverdichters einige Kilometer von der Bohrstelle entfernt wieder in die Erde gedrückt. Das Signal wurde beim Hochlauf des

²Zeitschrieb mit freundlicher Genehmigung der m+p MAHRENHOLTZ UND PARTNER Ingenieurbüro für Maschinendynamik GmbH

Verdichters aufgenommen.

Die Abtastfrequenz beträgt 1000 Hz. Bei einer Messzeit von ca. 70 s ergeben sich somit etwa 70000 Abtastwerte. Da hier nur der Frequenzbereich bis 80 Hz von Interesse ist, erfolgt zunächst ein Downsampling um den Faktor 4, so dass eine Abtastfrequenz von 250 Hz und etwa 18000 Abtastwerte erhalten werden. Um in der Darstellung die Höherharmonischen besser zu erkennen, wurde auf das Zeitsignal zudem ein Hochpassfilter angewandt, so dass die Amplituden bis 15 Hz, d. h. die Grundfrequenz des Verdichters, auf etwa ein Drittel reduziert wurden.

In Abbildung 29 ist das Spektrogramm des Signals mit einer Fensterlänge von 512 Abtastwerten dargestellt. Bei ca. 10 s ist offensichtlich eine Resonanzstelle der Leitung erreicht. Das hierdurch induzierte Klappern zeigt sich durch das Auftreten von Höherharmonischen. Bei etwa 60 s ist die Resonanzstelle durchfahren, und das Signal besteht wieder nur aus der Grundfrequenz des Verdichters.

Abbildung 30 zeigt das Spektrogramm mit einer Fensterlänge von 1024 Abtastwerten. Die durch das längere Fenster verbesserte Frequenzauflösung ist deutlich im Vergleich mit Abbildung 29 zu erkennen. So ist nur hier bei etwa 30 Hz und 55 s zu erkennen, dass die Frequenz sich weiterhin erhöht. Da das Signal nur schwach instationär ist, d. h. die Drehzahlerhöhung sehr langsam erfolgt und somit sich auch die Frequenzen nur sehr langsam im Zeitverlauf ändern, bedeutet die verringerte Zeitauflösung nur einen geringen Nachteil für die Interpretation der Darstellung.

In der Fouriertransformierten in Abbildung 28 ist zu erkennen, dass in dem Signal ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz auftreten. Da in der Wigner-Transformation die Interferenzterme immer in der Mitte zwischen den Autotermen liegen, wird in diesem Fall jeder Autoterm, abgesehen von der Grundfrequenz und ihrer höchsten Harmonischen, von einem oder mehreren Interferenztermen überlagert (Abb. 31). Eine Differenzierung, ob sich unter einem Interferenzterm ein Autoterm verbirgt oder ob es sich nur um ein Artefakt der Transformation handelt, ist visuell kaum möglich.

Bei der TFW wurden 9 zeitkonstante Filter benutzt, wobei jeweils zwei Filter eine Filtergrenze gemein hatten. Die Filtergrenze wurden mit Hilfe des Indikators aus Gleichung 135 ermittelt. Die Selektion, welche Grenzen in die Berechnung eingehen, erfolgte manuell. In Abbildung 32 sind die identifizierten Autoterme dargestellt, in Abbildung 33 die Interferenzterme. Auto- und Kreuzterme können trotz der gegenseitigen Überlagerung klar getrennt werden. Die Frequenzauflösung ist etwas höher als beim Spektrogramm mit langem Fenster. Zu sehen ist dies beispielsweise bei 30 Hz und 28 s, wo die kurzzeitige Frequenzschwankung bei der TFW besser zu erkennen ist. Da die Zeitauflösung bei diesem Signal sonst nur schwer beurteilt werden kann, ist diesbezüglich auch kein Vergleich mit den Spektrogrammen möglich. Der Vorteil der TFW, gleichzeitig sehr gute Zeit- und Frequenzauflösung, kommt somit hier wenig zur Geltung.

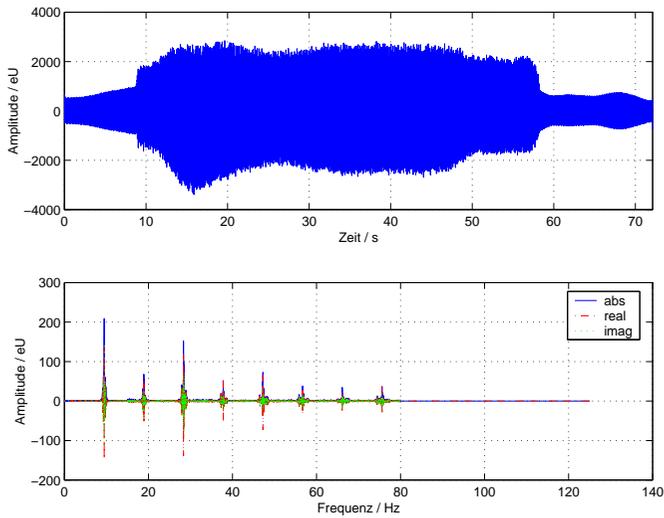


Abbildung 28: Schwinggeschwindigkeiten einer Rohrleitung im Zeit- und Frequenzbereich

Wie in Abschnitt 9 beschrieben, tritt bei der diskreten TFW wie beim Spektrogramm der Leakage Effekt auf, d. h. Amplitudenfehler bei Frequenzen, die nicht genau auf eine Frequenzlinie fallen. Beim Spektrogramm ist dies durch die zeitlich mittelnende Wirkung des Fensters hier jedoch nicht so auffällig wie bei der TFW (beispielsweise bei 10 Hz und 20 s).

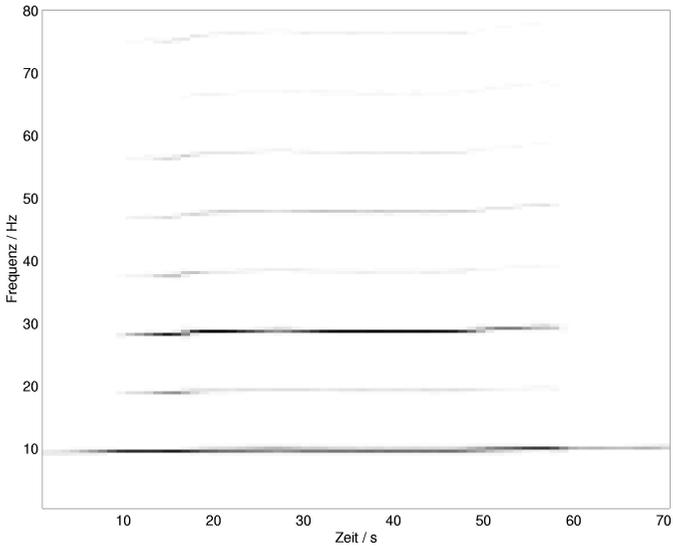


Abbildung 29: Spektrogramm mit einer Fensterlänge von 512 Werten des Signals aus Abbildung 28

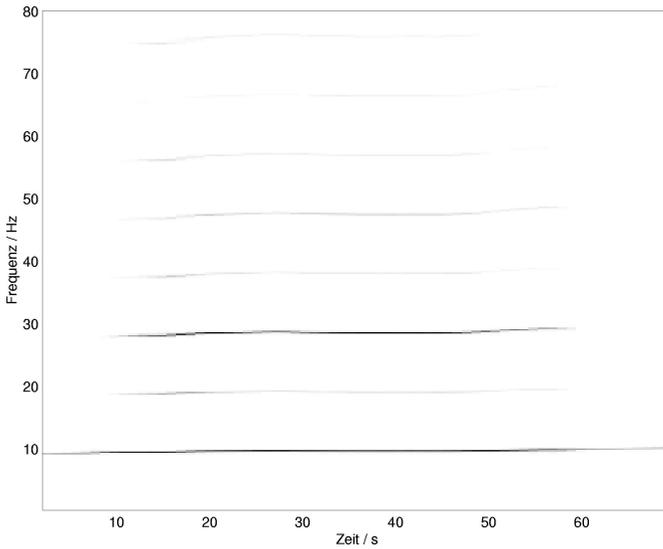


Abbildung 30: Spektrogramm mit einer Fensterlänge von 1024 Werten des Signals aus Abbildung 28

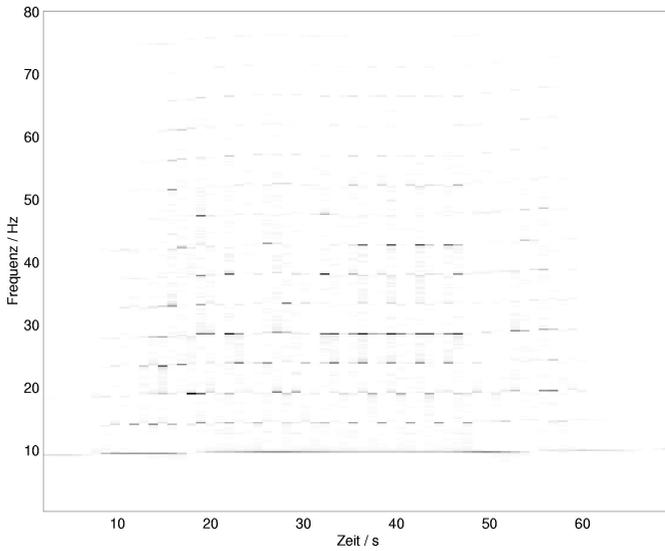


Abbildung 31: Wigner-Transformation des Signals aus Abbildung 28

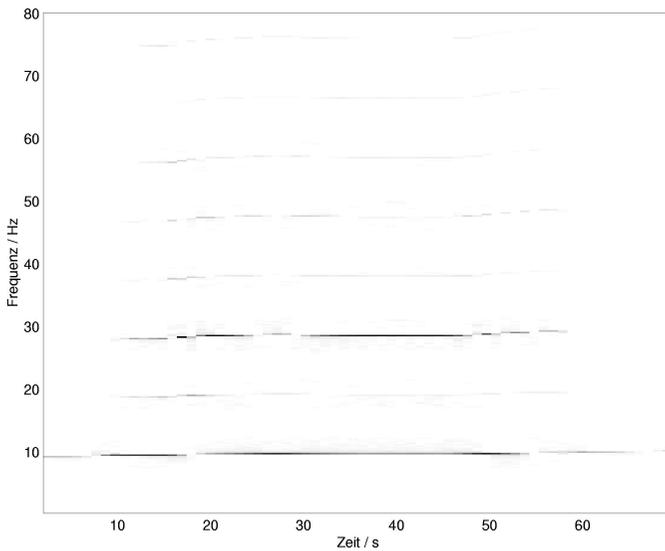


Abbildung 32: Identifizierte Autoterme des Signals aus Abbildung 28

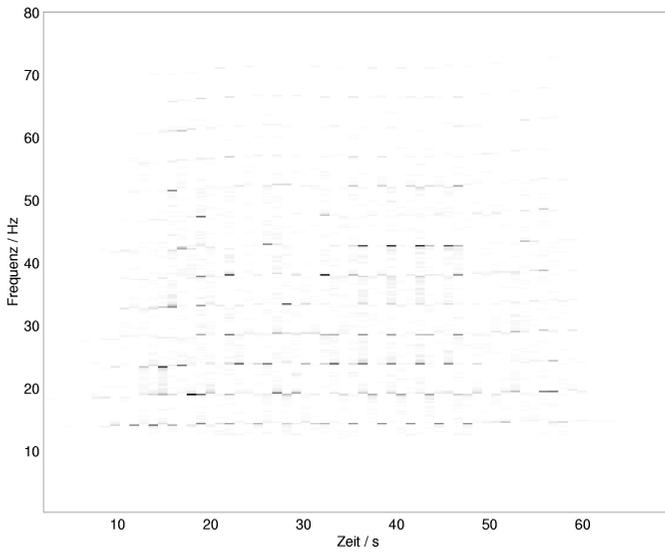


Abbildung 33: Identifizierte Interferenzterme des Signals aus Abbildung 28

13.2 Flüssigkeitsfilter

Der in Abbildung 34 dargestellte Zeitschrieb wurde an einem Horizontalfilter, der bei der Herstellung von Bier eingesetzt wird, aufgenommen³. Bei diesem Filter handelt es sich um einen zylindrischen Kessel mit ca. 2 m Durchmesser und einer Höhe von 4 m, in den mehrere Filterböden eingesetzt sind. Diese Filterböden werden in regelmäßigen Abständen in Rotation versetzt, um die entstandenen Ablagerungen zu lösen und an den Rand des Kessels zu schleudern, wo sie entfernt werden können.

Das Signal zeigt die gemessenen Beschleunigungen an der Kesselwand in der Abbremsphase der Filterböden. Die Abtastfrequenz beträgt 1000 Hz. Es wurden ca. 9000 Abtastwerte ausgewertet, was einen Auswertzeitraum von 9 Sekunden ergibt. Das hier vorgestellte Signal ist wesentlich instationärer als das in Abschnitt 13.1 beschriebene. Dies führt dazu, dass die Fouriertransformierte in Abbildung 34 bis auf den Frequenzbereich bis etwa 20 Hz, in dem die Signalanteile relativ konstant scheinen, nicht interpretierbar ist. Es treten große Amplituden nur in dem Frequenzbereich bis 130 Hz auf. Deswegen wird die Darstellung der Zeit-Frequenz-Transformationen auf einen Bereich von 10 Hz bis zu dieser Frequenz beschränkt, so dass auch die Grundfrequenz von etwa 5 Hz dort nicht zu erkennen ist.

In Abbildung 35 ist das Spektrogramm des Signals mit einer Fensterlänge von 1024 Abtastwerten dargestellt. Da hier der Schwerpunkt auf der Zeit-Frequenz-Auflösung lag, wurde ein Rechteckfenster gewählt. Deutlich sind Höherharmonische bei etwa 15, 30, 60 und 65 Hz zu erkennen⁴. Die verringerte Drehzahl der Filterböden sind an den zeitlich abnehmenden Frequenzen zu erkennen. Einige Signalanteile, wie beispielsweise bei 55 Hz sowie bei 50 Hz und 5 s, sind schwer interpretierbar. Es ist nicht zu unterscheiden, ob es sich hierbei um Rauschanteile oder weitere Höherharmonische handelt.

Abbildung 36 zeigt das Spektrogramm mit einer Fensterlänge von 2048 Abtastwerten. Bei dem Signalanteil bei 15 Hz zeigt sich die gegenüber Abbildung 35 erhöhte Frequenzauflösung. Die dadurch verringerte Zeitauflösung macht sich insbesondere bei den 55 und 60 Hz Komponenten negativ bemerkbar, da sie teilweise kaum zu trennen sind. Der Signalanteil bei 55 Hz wird so stark vermittelt, dass er nicht mehr dargestellt wird. Auch hier können die unklaren Amplituden bei 50 Hz und 5 s nicht interpretiert werden. Bei beiden Spektrogrammen ist eine Verbreiterung der 60 Hz-Linie bei 5 s auffällig, deren Ursache nicht erkannt werden kann.

³Zeitschrieb mit freundlicher Genehmigung der m+p MAHRENHOLTZ UND PARTNER Ingenieurbüro für Maschinendynamik GmbH

⁴Ist nur die Frequenz einer Signalkomponente angegeben, so sind die Amplituden in der Zeit-Frequenz-Ebene des harmonischen Signals bei dieser Frequenz und 0 s gemeint. Die Frequenz dieses Signals kann sich mit der Zeit jedoch auch ändern.

Die in Abbildung 37 dargestellte Wigner-Transformation läßt sich schwer interpretieren, da eine Zuordnung der Amplituden zu Auto- oder Kreuztermen visuell nicht möglich ist.

Bei der TFW wurden 14 Filter eingesetzt, die sich jeweils über das gesamte Signal erstrecken. Jede Filtergrenze ist durch drei Punkte in der Zeit-Frequenz-Ebene definiert, d. h. sie hat die Form einer einfach geknickten Geraden. Jeweils zwei Filter besitzen eine gemeinsame Filtergrenzen, so dass stückweise der gesamte Zeit-Frequenz-Bereich gefiltert wird. Die Festlegung der Filtergrenzen erfolgte manuell. In Abbildung 39 sind die identifizierten Kreuzterme dargestellt, in Abbildung 38 die resultierenden Autoterme. Deutlich ist die wesentlich bessere Zeit-Frequenz-Auflösung gegenüber den Spektrogrammen sichtbar. Die Signalkomponenten bei 60 Hz und 65 Hz sind klar trennbar. Die in den Spektrogrammen nicht interpretierbare Verbreiterung dieser Komponenten bei 5 s kann hier als beschleunigte Frequenzänderung und somit als Auswirkung der Fensterfunktion erkannt werden. Auch die Komponente bei 50 Hz und 5 s läßt sich mit Hilfe der Autoterme als weitere Höherharmonische identifizieren, die zu diesem Zeitpunkt aufgrund einer Resonanz relativ große Amplituden besitzt.

Bei diesem zeitvarianten Signal tritt der Vorteil der TFW gegenüber dem Spektrogramm, die gleichzeitig sehr gute Zeit- und Frequenz-Auflösung, deutlich hervor. Es können einige Signalkomponenten, die in den Spektrogrammen unklar sind, deutlich identifiziert werden.

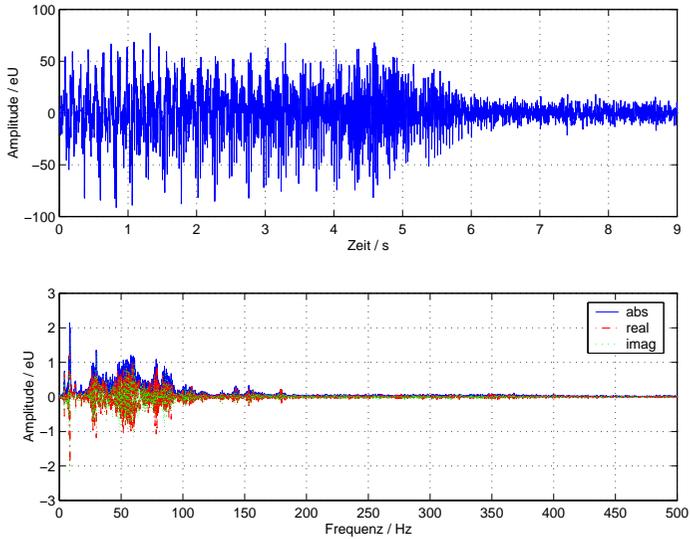


Abbildung 34: Signal eines Flüssigkeitsfilters im Zeit- und Frequenzbereich

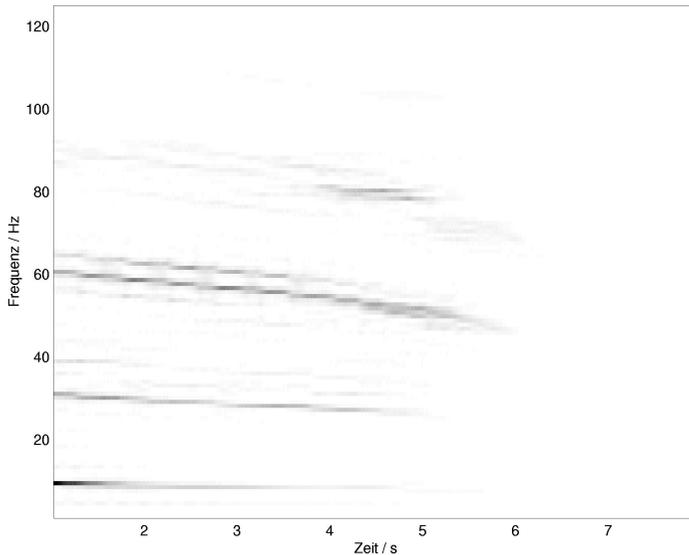


Abbildung 35: Spektrogramm des Signals aus Abbildung 34 mit einer Fensterlänge von 1024 Werten

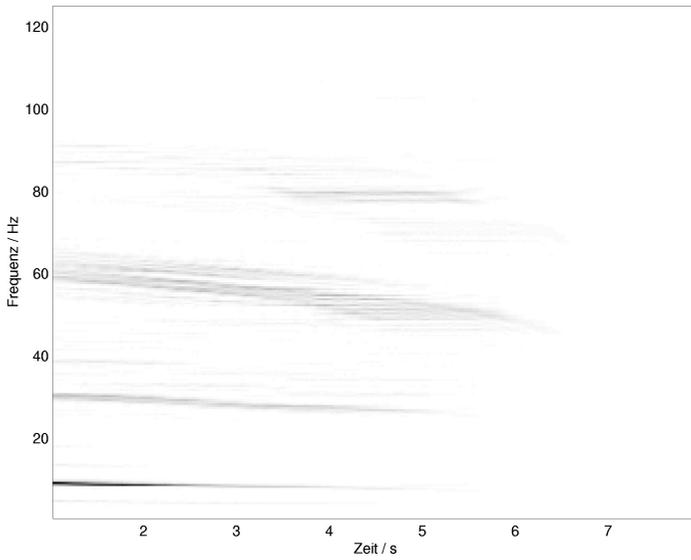


Abbildung 36: Spektrogramm des Signals aus Abbildung 34 mit einer Fensterlänge von 2048 Werten

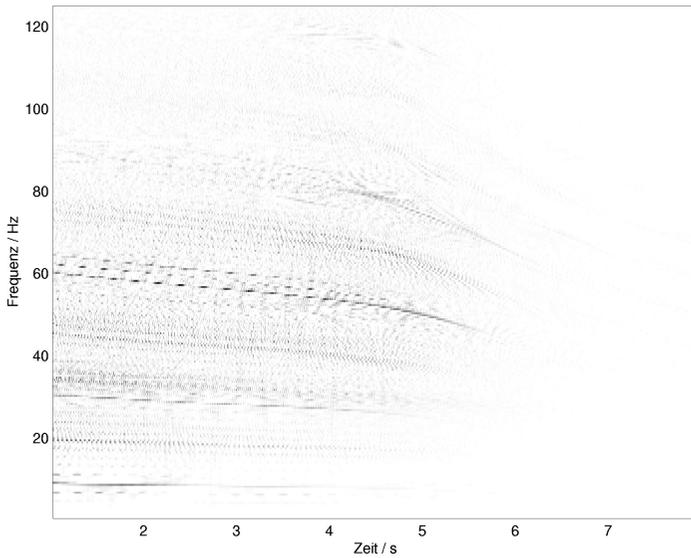


Abbildung 37: Wigner-Transformation des Signals aus Abbildung 34

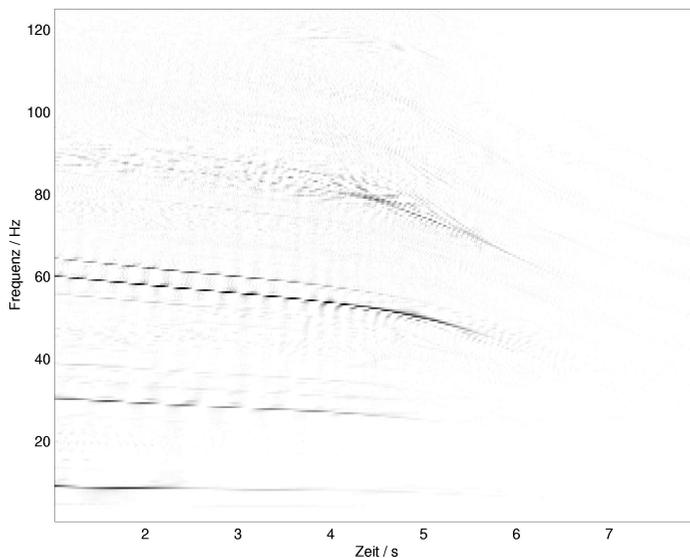


Abbildung 38: Identifizierte Autoterme des Signals aus Abbildung 34

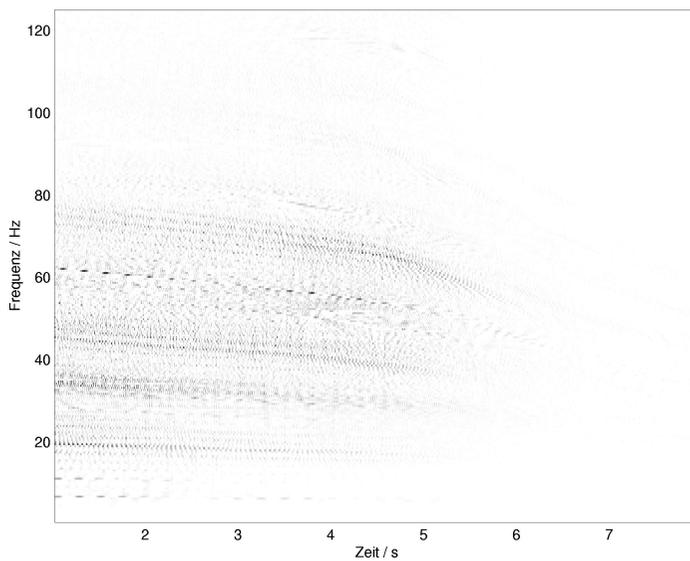


Abbildung 39: Identifizierte Interferenzterme des Signals aus Abbildung 34

14 Zusammenfassung

Für die Analyse von nichtstationären Signalen, wie sie beispielsweise bei Systemen mit nichtlinearen Komponenten oder durch zeitvariante Anregung entstehen, werden Transformationen benötigt, die das Signal gleichzeitig sowohl in der Zeit als auch in der Frequenz beschreiben.

Da an diese Zeit-Frequenz-Transformationen eine Vielzahl von Anforderungen gestellt werden, die sich teilweise widersprechen, gibt es keine für alle Anwendungen optimale Transformation. So muss z. B. bei einer Transformation, bei der Zeitfenster eingesetzt werden, nach der „Unschärferelation“ der Signalverarbeitung ein Kompromiss zwischen Zeit- und Frequenzauflösung eingegangen werden.

Bilineare Transformationen lassen sich im weiteren Sinne als lokale Energiedichten interpretieren. Bei ihnen treten Interferenzterme auf, d. h. die Transformation der Summe von Signalen setzt sich zusammen aus der Summe der Transformationen der Einzelsignale und allen Kombinationen der Kreuztransformationen der Signale. Während Interferenzen einerseits störend bei der (visuellen) Interpretation der Transformation sind, sind sie andererseits unter der Voraussetzung, dass sich bei der Transformation der Summe von Signalen die Transformationen der Einzelsignale additiv überlagern, notwendig für die korrekte Berechnung von Integralgrößen, indem sie Schwebungen modellieren. Diese sich widersprechenden Sichtweisen können nur vereint werden, wenn Autoterme und Kreuzterme als getrennte Ergebnisse der Transformation erhalten werden.

Die Wigner-Transformation besitzt, da sie kein Fenster für die Zeitauflösung benötigt, eine sehr gute Zeit-Frequenz-Auflösung und erlaubt die korrekte Berechnung von einigen häufig geforderten Integralgrößen, wie z. B. der Zeit- und Frequenz-Bedingung. Demzufolge muss sie Interferenzterme besitzen.

In dieser Arbeit wurde eine neue Zeit-Frequenz-Transformation vorgestellt, bei der durch Filterung des zugrunde liegenden Signals das Ergebnis der Wigner-Transformation iterativ in Auto- und Kreuzterme aufgespalten wird. Somit ist es möglich für eine visuelle Interpretation nur die Autoterme zu benutzen, Untersuchungen hinsichtlich Schwebungen an den Kreuztermen vorzunehmen und bestimmte Integralgrößen mit Hilfe der Kombination der beiden Ergebnisse zu berechnen. Eine Verschlechterung der Zeit-Frequenz-Auflösung wie bei Transformationen, die einen glättenden Kern einsetzen, findet nicht statt. Auch alle anderen Eigenschaften der Wigner-Transformation bleiben bei der Summe der Ergebnisse erhalten.

Die Identifikation von Interferenztermen basiert auf der Trennung von Autoterme durch Phasenfiltergrenzen. Wird ein Autoterm um 180° in der Phase gedreht, so verändern sich in der Wigner-Transformation nur die von diesem Term verursachten Kreuzterme. Alle anderen Kreuzterme und alle Autoterme bleiben

konstant. Daraus folgt, dass mit dieser Methode nur externe Interferenzterme, d. h. solche die durch zwei in Zeit und Frequenz getrennte Autoterme erzeugt werden, identifiziert werden können.

Da nur gefordert ist, dass die Phasenfilter die Autoterme trennen und sie somit nur relativ grob an das Signal angepasst werden müssen, sind stückweise in Zeit und Frequenz konstante Phasenfilter häufig ausreichend. Um ein Filter optimal an ein Signal anzupassen, kann es durch Frequenzmodulation parallel zur Frequenzachse als Funktion der Zeit verschoben werden. Eine weitergehende Adaptivität kann durch die getrennte Modulation von unterer und oberer Grenzfrequenz erreicht werden, so dass eine zeitveränderliche Bandbreite erhalten wird.

Entscheidend bei dieser Transformation ist die Lage der Filtergrenzen. Um diese signaladaptiv zu optimieren, wurden Indikatoren ausgearbeitet, die a priori auf sinnvolle Filtergrenzen hinweisen. Da diese jedoch nur Anhaltspunkte liefern, wurden Güte- und Wirksamkeitskriterien definiert, die es erlauben, jedes Filter a posteriori hinsichtlich seiner Beeinflussung der Autoterme und seiner Fähigkeit der Trennung von Auto- und Kreuztermen zu beurteilen.

Durch die angegebenen Indikatoren und Kriterien, ist sowohl eine automatische Berechnung der Transformation möglich, als auch eine manuell-visuelle Festlegung der Filtergrenzen mit quantitativer Bewertung jedes Schritts.

Schneiden Filtergrenzen Autoterme, so werden unerwünschte Artefakte erzeugt. Die Form und Größe dieser Störungen wurden angegeben, so dass Fehler der Transformation abgeschätzt werden können.

In der Praxis werden gemessene, zeitdiskrete und digitalisierte Messschriebe transformiert. Es wurde gezeigt, dass auch beim Einsatz sehr guter Messtechnik die Genauigkeit der Standardfließkommandarstellung in Computer-Programmen für die Berechnung der Transformation ausreichend ist.

Abschließend wurden an zwei gemessenen Signalen aus der Praxis die Vorteile dieses Verfahrens demonstriert. Insbesondere sind durch die sehr gute Zeit-Frequenz-Auflösung die Interpretation von Signalanteilen möglich, die beispielsweise im Spektrogramm unklar bleiben.

Zur Berechnung der gezeigten Beispiele wurden Computer-Programme erstellt. Eine darauf aufbauende grafische Oberfläche erleichtert eine visuelle, manuelle Festlegung der Filtergrenzen.

Weiterführend erscheinen Forschungen zur Vergrößerung der Sensitivität der Güte- bzw. Wirksamkeitskriterien durch Adaptivität des Kerns, sowie Untersuchungen hinsichtlich der Einsatzmöglichkeiten von Algorithmen aus der Bildverarbeitung, wie z. B. Mustererkennung, zur optimalen Festlegung der Filtergrenzen in der Zeit-Frequenz-Ebene sinnvoll.

Literatur

- BARANIUK UND JONES 1993** BARANIUK, Richard G. ; JONES, Douglas L.: A Signal-Dependent Time-Frequency Representation: Optimal Kernel Design. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 41 (1993), April, Nr. 4, S. 1589–1602
- BRONŠTEJN UND SEMENDJAEV 1989** BRONŠTEJN, Il'ja N. ; SEMENDJAEV, Konstantin A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Thun und Frankfurt/Main : Verlag Harri Deutsch, 1989
- CLAASEN UND MECKLENBRÄUKER 1980A** CLAASEN, T. A. C. M. ; MECKLENBRÄUKER, W. F. G.: The Wigner Distribution – A Tool for Time-Frequency Signal Analysis; Part I: Continuous-Time Signals. In: *Philips Journal of Research* 35 (1980), Nr. 3, S. 217–250
- CLAASEN UND MECKLENBRÄUKER 1980B** CLAASEN, T. A. C. M. ; MECKLENBRÄUKER, W. F. G.: The Wigner Distribution – A Tool for Time-Frequency Signal Analysis; Part II: Discrete-Time Signals. In: *Philips Journal of Research* 35 (1980), Nr. 4/5, S. 276–300
- CLAASEN UND MECKLENBRÄUKER 1980C** CLAASEN, T. A. C. M. ; MECKLENBRÄUKER, W. F. G.: The Wigner Distribution – A Tool For Time-Frequency Signal Analysis; Part III: Relations With Other Time-Frequency Signal Transformations. In: *Philips Journal of Research* 35 (1980), Nr. 6, S. 372–389
- COHEN 1966** COHEN, Leon: Generalized phase-space distribution functions. In: *Jour. Math. Phys.* 7 (1966), May, Nr. 5, S. 781–786
- COHEN 1989** COHEN, Leon: Time-Frequency Distribution – A Review. In: *Proceedings of the IEEE* 77 (1989), July, Nr. 7
- COHEN 1995** COHEN, Leon: *Time-Frequency Analysis*. Englewood Cliffs : Prentice Hall PTR, 1995
- COSTA UND BOUDREAU-BARTELS 1995A** COSTA, Antonio H. ; BOUDREAU-BARTELS, Faye: Time-Frequency Representations with Multiform, Tilttable Chebyshev Kernels. In: *The 1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing* Bd. 2, May 9–12 1995, S. 1001–1004. – Detroit, Michigan, USA
- COSTA UND BOUDREAU-BARTELS 1995B** COSTA, Antonio H. ; BOUDREAU-BARTELS, G. F.: Design of Time-Frequency Representations Using a Multiform, Tilttable Exponential Kernel. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 43 (1995), October, Nr. 10, S. 2283–2301

- HARRIS 1978** HARRIS, Frederic J.: On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. In: *Proceedings of the IEEE* 66 (1978), January, Nr. 1, S. 51–83
- HAYKIN 1996** HAYKIN, Simon: *Adaptive Filter Theory*. third edition. Englewood Cliffs : Prentice Hall PTR, 1996
- JANSSEN 1997** JANSSEN, A. J. E. M.: The Wigner Distribution. In: [MECKLENBRÄUKER UND HLAWATSCH 1997]
- LOUIS U. A. 1998** LOUIS, Alfred K. ; MAASS, Peter ; RIEDER, Andreas: *Wavelets: Theorie und Anwendungen*. zweite Aufl. Stuttgart : Teubner, 1998
- LYONS 1997** LYONS, Richard G.: *Understanding Digital Signal Processing*. first edition. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, 1997
- MECKLENBRÄUKER UND HLAWATSCH 1997** MECKLENBRÄUKER, W. (Hrsg.) ; HLAWATSCH, F. (Hrsg.): *The Wigner Distribution*. Amsterdam : Elsevier, 1997
- NATKE 1992** NATKE, H. G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen und Modalanalyse*. dritte Aufl. Braunschweig, Wiesbaden : Vieweg, 1992
- NUTTAL 1981** NUTTAL, Albert H.: Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior. In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 29 (1981), February, Nr. 1, S. 84–91
- OPPENHEIM UND SCHAFFER 1999** OPPENHEIM, Alan V. ; SCHAFFER, Ronald W.: *Discrete-Time Signal Processing*. Upper Saddle River, New Jersey : Prentice Hall, 1999. – With John R. Buck
- QIAN UND CHEN 1996** QIAN, Shie ; CHEN, Dapang: *Joint Time-Frequency Analysis: Methods and Applications*. Englewood Cliffs : Prentice Hall PTR, 1996
- RAO UND MOHARIR 1998** RAO, N. S. ; MOHARIR, P. S.: A Signal-Dependent Evolution Kernel for Cohen Class Time-Frequency Distributions. In: *Digital Signal Processing* 8 (1998), S. 158–165
- STEARNS UND HUSH 1994** STEARNS, Samuel D. ; HUSH, Don R.: *Digitale Verarbeitung analoger Signale*. 6. Aufl. München : Oldenbourg, 1994
- VILLE 1948** VILLE, J.: Théorie et applications de la notion du signal analytique. In: *Câbles & Transm.* 2ème A. (1948), Janvier, S. 61–74
- WIGNER 1932** WIGNER, E. P.: On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. In: *Phys. Rev.* 40 (1932), June, S. 749–759