

**Zur Korrelation von
Simulationsrechnungen und
Ausfallphänomenen bei Rollbalgluftfedern**

Vom Fachbereich Maschinenbau
der Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte
Dissertation
von

Dipl.-Ing. Ansgar Polley
geboren am 03.10.61 in Mosbach / Baden

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. D. Besdo
2. Referent: Prof. Dr.-Ing. E. Doege
Tag der Promotion: 17. Dezember 1999

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Mechanik der Universität Hannover. Ich möchte die Gelegenheit nutzen und an dieser Stelle meinen Dank aussprechen:

- Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Besdo für die Betreuung und Unterstützung dieser Arbeit
- Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Doege für die Übernahme des Korreferates
- Meinen Kollegen, die mich während meiner Zeit am IfM begleitet haben. Besonders zu nennen ist hier Herr Dr.-Ing. Oehemen, der immer für fachliche Gespräche offen war und mit zahlreichen konstruktiven Anregungen zum Gelingen beigetragen hat. Nicht unerwähnt bleiben dürfen auch die vielen Ratschläge, praktischen Hilfen und fachlichen Hinweise von Ulrike Warnecke, Jörn Ihlemann, Hartmut Pawelski, Cord Steinbeck-Behrens, Stefan Viola und vielen anderen.

Danken möchte ich meinem Vater, der den Abschluß des Promotionsverfahrens leider nicht mehr miterleben konnte, und meiner Mutter, die mir überhaupt erst meine Ausbildung ermöglicht haben. Wo sie konnten haben sie mich nach Kräften unterstützt.

Zum Schluß möchte ich mich besonders bei meiner lieben Frau Marion für ihre Geduld und Unterstützung bedanken. Sie hat mir neben unseren vier Kindern in dieser Zeit stets den Rücken freigehalten und so maßgeblich zum Erfolg beigetragen. Meinen Kindern Mara, Rahel, Ruth und David danke ich, daß sie sich nur selten beklagt haben, ihren Vater in den letzten Jahren vorwiegend mit zugewandtem Rücken am Schreibtisch erlebt zu haben.

Ansgar Polley

Wennigsen, im Mai 2000

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der rechen-technischen Simulation von Einfederungs-vorgängen bei Rollbalgluftfedern mit der Methode der Finiten Elemente.

Die Balgwand einer Luftfeder besteht aus einer inneren und äußeren Deckschicht aus Gummi, zwischen denen sich zwei kreuzende Verstärkungslagen befinden. Diese Verstärkungslagen bestehen aus den Festigkeitsträgern, Corden aus Polyamid, die in Gummi einvulkanisiert sind. Im Zuge der Abrollbewegung beim Einfedern der Luftfeder kommt es durch die Änderung des Cordwinkels zu erheblichen Deformationen innerhalb der die Corde umgebenden Gummimatrix. Das Gummimaterial zwischen den Corden erfährt hierbei eine kombinierte Zug-, Druck- und Scherbeanspruchung.

Für die Berechnungen wurden Stoffgesetze entwickelt, die in der Lage sind sowohl das Verhalten der Corde als auch des umgebenden Gummis adäquat abzubilden. Das orthotrope Materialverhalten für einer gesamten Gummi-Cord-Gewebelage wird durch ein homogenes Ersatzmaterial simuliert und ermöglicht FE-Berechnungen an der Gesamtstruktur der Luftfeder.

Zielstellung der Untersuchung war die Ermittlung von Beanspruchungsmaxima innerhalb der inneren Verstärkungslage der Balgwand. Die innere Cordlage im Bereich der Rollfalte war in Lebensdaueruntersuchungen der ContiTech als Entstehungsort erster Anrisse zwischen den Corden und der Gummimatrix identifiziert worden. Von dort wandern die Risse schließlich nach außen bis es zur Undichtigkeit und damit einem Versagen der Luftfeder kommt. Innerhalb FE-Berechnungen wurde der Einfluß unterschiedlicher Konfektionscordwinkel und Druckstufen untersucht. Für die Korrelation der FE-Ergebnisse mit in Dauerversuchen erreichten Lastspielzahlen standen als Vergleichsbasis die Ergebnisse von Lebensdaueruntersuchungen an Rollbalgluftfedern der ContiTech zur Verfügung.

Die Ergebnisse der Rechnungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Untersuchungen bezüglich der gefundenen Orte der maximalen Beanspruchungen im Gummi der inneren Verstärkungslage. Auch lassen sich die mit dem homogenisierten Stoffgesetz an der Gesamtluftfeder errechneten Balggeometrien sehr gut mit gemessenen Balgwandkonturen in Einklang bringen. Darüberhinaus korrelieren die experimentell festgestellten kürzeren Lebensdauern der Balgprüflinge bei einer Veränderung des Konfektionscordwinkels von $50,5^\circ$ auf $53,5^\circ$ mit den Simulationenergebnissen.

Schlagnworte: Gummi-Cord-Komposit, Luftfeder, Finite-Elemente-Methode

Abstract

This thesis deals with the simulation of spring compressions of rolling lobe airsprings by using the finite element method.

The typical air spring wall construction consists of an internal and an external layer surfaced with rubber, and two crossing reinforcement layers. These reinforcement layers are made up of polyamid textile reinforcement which have been vulcanised in rubber. During the compression phase, the movement of the rolling lobe alters the angle of the cords; hence, leading to considerable deformations within the rubber matrix surrounding the cords. Rubber material which is located directly between the cords is subjected to extreme tensile, compression and shear strains.

Prior to the computed simulation the development of appropriate material behaviours was required which would adequately show the behaviour of the cords and their rubber surfaces. The orthotropic material performance of the entire rubber-cord structure was reproduced with a homogeneous substitute. This also enabled the FE-computation of the entire air spring construction.

It was the aim of this work to identify the areas of maximum strain within the interior reinforcement layer of the air spring wall. Investigations carried out by ContiTech emphasise that cracks develop in the inner cord within the fold which emerges during the movement of the rolling bladder. The outward progression of the cracks leads to leakage, and finally, to the failure of the air spring. During the FE-computation, different construction angles of the cords and pressure gradients were also examined. The correlation between the FE-computation results and the findings which, were derived from long-term investigations into the number of cycles, agreed with comparative analyses that were undertaken by ContiTech.

The computation results show a good correlation with the findings of experimental investigations into the identification of the maximum strain locations in the rubber of the inner reinforcement layer. Geometrical analyses which were computed for the entire air spring construction, on the basis of a homogenised material behaviour, corresponded perfectly with the measured outer contours of the air spring. Furthermore, experimental research and FE-computation show identical results of a reduced life of the air spring specimen in case the construction angle of the cords is changed from $50,5^\circ$ to $53,5^\circ$.

Keywords: Rubber-Cord-Composit, airspring, finite element method

Inhaltsverzeichnis

0	Formelzeichen und Symbole	VIII
1	Einleitung	1
1.1	Entstehung der Arbeit	1
1.2	Aufbau und Wirkungsweise von Rollbalgluftfedern	1
1.3	Kinematik der Abrollbewegung	4
1.4	Ziele der Arbeit	5
2	Kontinuumsmechanische Grundlagen	6
2.1	Kinematische Beziehungen	6
2.2	Deformationsmaße	9
2.3	Formulierung des Spannungszustandes	11
3	Berechnung von Spannungen aus einer Potentialformulierung	14
4	Stoffgesetz für den Festigkeitsträger	19
4.1	Allgemeines	19
4.2	Beschreibung des Cordaufbaus	19
4.3	Idealisierung der Cordstruktur	21
4.4	Definition eines Füllfaktors	22
4.5	Formulierung des Potentials	25
4.5.1	Isotropes Grundpotential	26
4.5.2	Materialverhalten in Cordlängsrichtung	26
4.5.3	Querkompressionsverhalten des Cordes	27
4.5.4	Scherverhalten des Cordes	28

4.5.5	Berechnung der Spannungen und der Materialtangente	30
4.5.6	Parameteridentifikation	31
5	Stoffgesetze für den Gummi	34
5.1	Messungen am Gummimaterial	35
5.2	Mooney–Rivlin Stoffgesetz	37
5.3	Alexander-Smith Stoffgesetz	39
5.4	Reduziertes Alexander-Smith Stoffgesetz	41
5.5	Numerische Besonderheiten	43
6	Entwicklung eines homogenisierten Stoffgesetzes	45
6.1	Allgemeines	45
6.2	Identifizierung und Idealisierung der Struktur	50
6.3	Definition geeigneter Substrukturen	52
6.4	Schichtdicke der homogenisierten Gummi-Cord-Lage	52
6.5	Finite Elementmodellierung der Substruktur	54
6.6	Auswahl geeigneter Belastungsfälle	56
6.7	FE-Rechnungen an der Substruktur	60
6.7.1	Definition von Bereichen der Substruktur	60
6.7.2	Durchführung der Substrukturechnungen	62
6.8	Potentialfunktion für ein homogenisiertes Materialgesetz	66
6.8.1	Materialverhalten in Richtung der Corde	67
6.8.2	Materialverhalten quer zur Richtung der Corde	67
6.8.3	Materialverhalten in Dickenrichtung	68
6.8.4	Koppelung der Materialhaupttrichtungen	69
6.8.5	Modellierung des Scherverhaltens	70

7	Rechnungen am Makroelement	75
7.1	Allgemeines	75
7.2	Optimierung der Diskretisierung	76
7.3	Simulation der wesentlichen Lastfälle	85
8	Rechnungen auf globaler Ebene	89
8.1	Durchführung der FE-Rechnungen an der Gesamtluftfeder	89
8.2	Vergleich von Konturmessungen mit errechneten Luftfederkonturen . .	94
9	Übertragung von FE-Ergebnissen	98
9.1	Allgemeines	98
9.2	Aufbau einer Datenbasis mit Ergebnissen aus Substrukturechnungen .	98
9.3	Verifikation der Interpolationsroutine	106
9.3.1	Ermittlung von Randbedingungen für Rechnungen am Makro- element	106
10	Vergleich zwischen FE-Simulationen und Lebensdaueruntersuchun- gen	109
10.1	Allgemeines	109
10.2	Konsequenzen der Untersuchungsergebnisse	115
11	Zusammenfassung und Ausblick	118
12	Anhang	126

Abbildungsverzeichnis

1	Aufbau einer Rollbalgluftfeder	2
2	Luftfeder im Fahrwerk eines Busses	3
3	Kinematik in der Balgwand beim Ausfedervorgang	4
4	Darstellung der Kinematik	6
5	Elektronenmikroskopische Aufnahme eines Polyamid 6.6 Cordes (vor und nach Herauspräparieren eines Garns)	20
6	Querschnitte durch einen Cord, elektronenmikroskopische Aufnahmen	21
7	Typische Zugversuch-Kennlinien von Polyamidcorden mit unterschiedlichem Twist	22
8	Darstellung des Potentials Φ_q und seiner Ableitungen $\frac{\partial\Phi_q}{\partial f}$ und $\frac{\partial^2\Phi_q}{\partial f \partial f}$ für einen Referenzfüllfaktor von $\tilde{f} = 0,7$ und $M = 1$	29
9	Scherversuch an einer Gummi-Cord-Lage	30
10	Zugversuch in Cordlängsrichtung, Vergleich zwischen FE-Simulation und Messung	32
11	Finite-Element-Netz zum Nachrechnen des Druckversuches einer Gummi-Cord-Lage, links undeformierte Konfiguration, rechts deformierte Konfiguration	33
12	Druckversuch an einem Gummi-Cord-Ply, Vergleich zwischen FE-Simulation und Experiment	34
13	Stationäre Zyklen im Zugversuch am Gummi	36
14	Schematische Darstellung des einfachen Scherversuches	38
15	Vergleich Mooney-Rivlin und Alexander-Smith Stoffgesetz im Zug-Druckversuch	40
16	Vergleich Mooney-Rivlin und Alexander-Smith Stoffgesetz im Scherversuch	41

17	Zugversuch mit dem reduzierten Alexander-Smith Stoffgesetz	43
18	Gummi-Cord-Lage	46
19	Schematische Darstellung des Balgwandaufbaus	51
20	Aufbau der Luftfederbalgwand aus Substrukturen	53
21	Gegenüberstellung von Makroelement und fünfflagigem Ersatzmodell. . .	54
22	Gegenüberstellung der FE-Netze im Scherversuch	55
23	FE-Netz der Substruktur	57
24	Abhängigkeit der aktuellen Teilung vom aktuellen Cordwinkel bei einer Ausgangsteilung von 0,736 mm	58
25	Erforderliche Belastungsfälle zur Ermittlung der Stoffgesetzcharakteristika	59
26	Definition von Bereichen an der Substruktur	61
27	Charakteristische Kennlinie aus dem Druckversuch in x-Richtung . . .	65
28	Charakteristische Kennlinie aus dem Zugversuch in y-Richtung	65
29	Charakteristische Kennlinien für Scherversuche bei unterschiedlichen Teilungen	66
30	Abhängigkeit der Schubspannung von der Teilung	71
31	Abhängigkeit des Schubmoduls von der Teilung	72
32	Scherversuch: Abhängigkeit der 2.Piola-Kirchhoffspannung \tilde{T}_6 [N/mm^2] von Schermaß F_{12} [-] und Teilung F_{22} [-]	74
33	Scherversuch: Abhängigkeit des Gesamtpotentials von Schermaß F_{12} [-] und Teilung F_{22} [-]	75
34	Makroelement der Luftfederbalgwand	76
35	Zu grobes FE-Netz, Darstellung der dritten Invariante I_3 [-] des rechten Cauchy-Green-Tensors	78
36	Darstellung der Spannung σ_{zz} [$\frac{N}{mm^2}$] für die Diskretisierung durch Netz 1 (links) und Netz 2 (rechts)	82

37	Darstellung der Spannung $\sigma_{zz} \left[\frac{N}{mm^2} \right]$ für die Diskretisierung durch Netz 3 (links) und Netz 4 (rechts)	83
38	Darstellung der Spannung $\sigma_{zz} \left[\frac{N}{mm^2} \right]$ für die Diskretisierung durch Netz 5	84
39	FE-Simulation einer Cordwinkeländerung am Makroelement	86
40	Vergleichspannung nach Tresca $\left[\frac{N}{mm^2} \right]$ am Makroelement infolge Cordwinkeländerung	88
41	FE-Struktur eines Balgwandausschnittes für die Berechnungen auf globaler Ebene (links: maßstäblich Darstellung, rechts: Breite überhöht dargestellt)	89
42	FE-Simulation des Abrollvorganges	91
43	Konturabtaster und Hydropulser (Foto ContiTech)	94
44	Luftfeder und zugehöriger Kurvenzug einer Balgwandkonturmessung	95
45	Vergleich Konturmessung mit FE-Rechnung. Konfektionsfadenwinkel 50, 5°, Innendruck 9, 8 bar (links), Innendruck 10, 8 bar (mitte) und Innendruck 11, 8 bar (rechts)	96
46	Vergleich Konturmessung mit FE-Rechnung. Konfektionsfadenwinkel 53, 5°, Innendruck 9, 8 bar (links), Innendruck 10, 8 bar (mitte) und Innendruck 11, 8 bar (rechts)	97
47	Gitternetz der Substrukturerechnungen	100
48	Veranschaulichung der maximalen Scherung	102
49	Darstellung der Hauptdehnungen im Gummi für einen Punkt des Gitternetzes aus Abb. 47	104
50	Lokale Koordinaten zur Interpolation der Ergebniswerte	105
51	Vergleich globale Rechnung mit Rechnung am Makroelement (<i>MSX</i>)	108
52	Ergebnis für die maximale Scherung <i>MSX</i> (Referenzcordwinkel 50, 5° links, 53, 5° rechts, Druckstufe 10,8 bar)	110
53	Ergebnis für die größte Hauptdehnung <i>MHD</i> (Referenzcordwinkel 50, 5° links, 53, 5° rechts, Druckstufe 10,8 bar).	111

54	Ergebnis für die größte Hauptnormalspannung MHN (Referenzcordwinkel $50,5^\circ$ links, $53,5^\circ$ rechts, Druckstufe 10,8 bar).	112
55	Ergebnis für die größte von Mises Vergleichsspannung MSM (Referenzcordwinkel $50,5^\circ$ links, $53,5^\circ$ rechts, Druckstufe 10,8 bar).	113
56	Delaminierte Luftfederbalgwand	113
57	Vergrößerte Ausschnitte der delaminierten Luftfederbalgwand in Abb.56	114
58	Verteilung der aktuellen Cordwinkel innerhalb der Luftfederbalgwand (Referenzcordwinkel $50,5^\circ$ links, $53,5^\circ$ rechts, Druckstufe 10,8 bar). . .	114
59	Ergebnisse der Lebensdaueruntersuchung für unterschiedliche Referenzcordwinkel bei einer Druckstufe von 10,8 bar	115
60	Prozentuale Erhöhung von Maximalwerten in Abhängigkeit vom Referenzcordwinkel bei einer Druckstufe von 10,8 bar	116
61	Berechnung unterschiedlicher Belastungen infolge Cordwinkeländerungen am Makroelement	127
62	Reduziertes Alexander-Smith Stoffgesetz: Abnahme der von Mises Vergleichsspannung $[N/mm^2]$ der zweiten und vierten Konfiguration aus Abb. 61	128

0 Formelzeichen und Symbole

a, b, c, d	Stoffgesetzparameter für homogenisiertes Stoffgesetz
a_1, a_2, a_3, a_4	Stoffgesetzparameter im reduzierten Alexander-Smith Stoffgesetz
\tilde{A}, A	Referenzfläche, aktuelle Fläche
α, β	Stoffgesetzparameter im Mooney-Rivlin Stoffgesetz
$\tilde{\alpha}, \alpha$	Cordwinkel in der Referenz- und der aktuellen Konfiguration gemessen zur Umfangsrichtung
$\underline{\underline{b}}$	linker Cauchy-Green-Tensor
b_v	Schleppzeiger im reduzierten Alexander-Smith Stoffgesetz
$\underline{\underline{C}}$	rechter Cauchy-Green-Tensor
$\underline{\underline{D}}$	Tensor der Materialsteifigkeit
δ_{ab}	Kronecker-Delta
$\underline{\underline{E}}$	Einheitstensor
E_1, E_2, E_3	Elastizitätsmoduli für orthotrop verallgemeinertes Hooksches Stoffgesetz
\underline{e}_a	Basisvektoren eines kartesischen Inertialsystems
ϵ_c	Dehnung in Cordrichtung
$\underline{\underline{\epsilon}}$	Almansi-Tensor
$\underline{\underline{\epsilon}}$	Permutationstensor
$\underline{\underline{F}}$	Deformationsgradient
w	Wichtungsfaktor im Cordstoffgesetz
f, \tilde{f}	Füllfaktor in der aktuellen und der Referenzkonfiguration
G	Stoffgesetzparameter für Cordstoffgesetz
G^*	Stoffgesetzparameter für Cordstoffgesetz
$g^{ij}, \tilde{g}^{ij}, g_{ij}, \tilde{g}_{ij}$	Metrikoeffizienten
$\underline{g}_i, \tilde{\underline{g}}_i$	kovariante Basisvektoren im angepaßten Materialkoordinatensystem
$\underline{g}^i, \tilde{\underline{g}}^i$	kontravariante Basisvektoren im angepaßten Materialkoordinatensystem
$\underline{\underline{\gamma}}$	Greenscher Deformationstensor
G_4, G_5, G_6	Stoffgesetzparameter für homogenisiertes Stoffgesetz
G_{12}, G_{13}, G_{23}	Schubmoduli für orthotrop verallgemeinertes Hooksches Stoffgesetz
I_1, I_2, I_3	Hauptinvarianten des rechten bzw. linken Cauchy-Green-Tensors
k_1, k_2, k_3	Stoffgesetzparameter für homogenisiertes Stoffgesetz

K	Kompressionsmodul
K^*	Stoffgesetzparameter im Cordstoffgesetz
K_1, K_2, K_3, k	Stoffgesetzparameter im Alexander-Smith Stoffgesetz
L_I	Hauptdehnung, größter Hauptwert des rechten Cauchy-Green-Tensors
λ	Dehnungsmaß
M	Stoffgesetzparameter für Cordstoffgesetz
(M_{ab})	Materialsteifigkeitsmatrix
MHD	Maximalwert der Hauptdehnung im Gummimaterial zwischen den Corden einer Lage
MHN	Maximalwert der Hauptnormalspannung im Gummimaterial zwischen den Corden einer Lage
MSM	Maximalwert der Vergleichsspannung nach von Mises im Gummimaterial zwischen den Corden einer Lage
MST	Maximalwert der Vergleichsspannung nach Tresca im Gummimaterial zwischen den Corden einer Lage
MSX	Größter Wert der maximalen Scherung im Gummimaterial zwischen den Corden einer Lage
\underline{n}	Einheitsnormalenvektor
$\nabla, \widetilde{\nabla}$	Nablaoperator in der aktuellen Konfiguration und in der Referenzkonfiguration
N_i	Formfunktionen
$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	Querkontraktionszahlen für orthotrop verallgemeinertes Hooksches Stoffgesetz
p	hydrostatischer Druck
Φ	elastisches Potential
$\underline{\tilde{x}}, \underline{x}$	Ortsvektor zu einem Materiepunkt des undeformierten und des deformierten Kontinuums
$\underline{\underline{R}}$	orthogonaler Drehtensor
ρ	Dichte
\underline{s}	Spannungsvektor
$\underline{\underline{\sigma}}$	Cauchy-Spannungstensor
σ_I	Hauptnormalspannung, größter Hauptwert des Cauchy-Spannungstensors
σ_{vMises}	Vergleichsspannung nach von Mises
$\sigma_{vTresca}$	Vergleichsspannung nach Tresca
S_{max}	maximale Scherung

\tilde{t}, t	Cordteilung in der Referenz- und der aktuellen Konfiguration
\underline{t}	Vektor in Richtung der aktuellen Teilung
$\underline{\underline{\Delta T}}$	tensorielle Zeitableitung gegenüber einem translatorisch mitbewegtem Koordinatensystem
$\underline{\underline{T}}$	1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\underline{\underline{\tilde{T}}}$	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\underline{\underline{u}}, \underline{u}$	Vektor in Umfangsrichtung der Luftfeder in der Referenz- und aktuellen Konfiguration
$\underline{\underline{U}}$	linker Strecktensor
$\underline{\underline{V}}$	rechter Strecktensor
\tilde{V}, V	Referenzvolumen, aktuelles Volumen
ξ^i	materielle Koordinaten

1 Einleitung

1.1 Entstehung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit wurde durch das von der EU geförderte BRITE-Projekt „Fatigue Mechanisms and Failure Criteria of Rolling Lobe Air Springs“ initiiert. Partner in diesem Forschungsvorhaben waren die ContiTech Luftfedersysteme (D), die Firma AKZO Nobel (NL), das Institute for Mechanics Materials and Gestructures IMMIG (Gr) und das Institut für Mechanik der Universität Hannover. Gegenstand des Forschungsvorhabens war die Untersuchung des Ermüdungsverhaltens von Rollbalgluftfedern. Neben Lebensdaueruntersuchungen auf einem eigens dafür entwickelten Versuchsstand wurden auf der theoretischen Seite Modelle entwickelt, um das Verformungsverhalten der Luftfederbalgwand beim Einfederungsvorgang der Feder mittels eines Rechners zu simulieren. Ziel der Simulation, die mit Hilfe der FE-Methode durchgeführt wurde, war es, lokale Beanspruchungsmaxima innerhalb der Balgwand zu ermitteln und das Modell durch Vergleich mit dem Ausfallverhalten der Prüflinge aus den Lebensdaueruntersuchungen zu verifizieren.

1.2 Aufbau und Wirkungsweise von Rollbalgluftfedern

Rollbalgluftfedern werden vorwiegend in Lastkraftwagen und Bussen; seit einigen Jahren auch zunehmend im PKW-Bereich eingesetzt. Sie bestehen, wie Abb. 1 zeigt, aus einem zylinderförmigen Luftfederbalg, einem Kolben, auf dem der Balg beim Einfedern des Fahrzeuges abrollt und einem als Konusplatte ausgeführtem Deckel. Kolben und Konusplatte sind aus Stahl gefertigt und fest mit dem Fahrzeug verbunden. Die Balgwand selbst ist aus mehreren Schichten aufgebaut. Sie besteht aus einer inneren und einer äußeren Deckschicht und dem Festigkeitsträger. An den Enden ist jeweils ein Stahldrahtkern einvulkanisiert. Äußere und innere Deckschicht sind ca. 0,64 mm dick, bestehen aus Gummi und haben die Aufgabe, ein Entweichen der Luft zu verhindern und den Festigkeitsträger vor Umwelteinflüssen, wie zum Beispiel Öl, Ozon und UV-Strahlung, zu schützen. Zwischen den Deckschichten liegen als Festigkeitsträger zwei sich kreuzende Nyloncord-Gewebelagen mit einer Dicke von jeweils ca. 0,9 mm. Diese Verstärkungslagen sind selbst wieder in eine dünne Gummischicht einvulkanisiert. Die einzelnen Nyloncorde der Lage haben einen Durchmesser von ca. 0,55 mm.

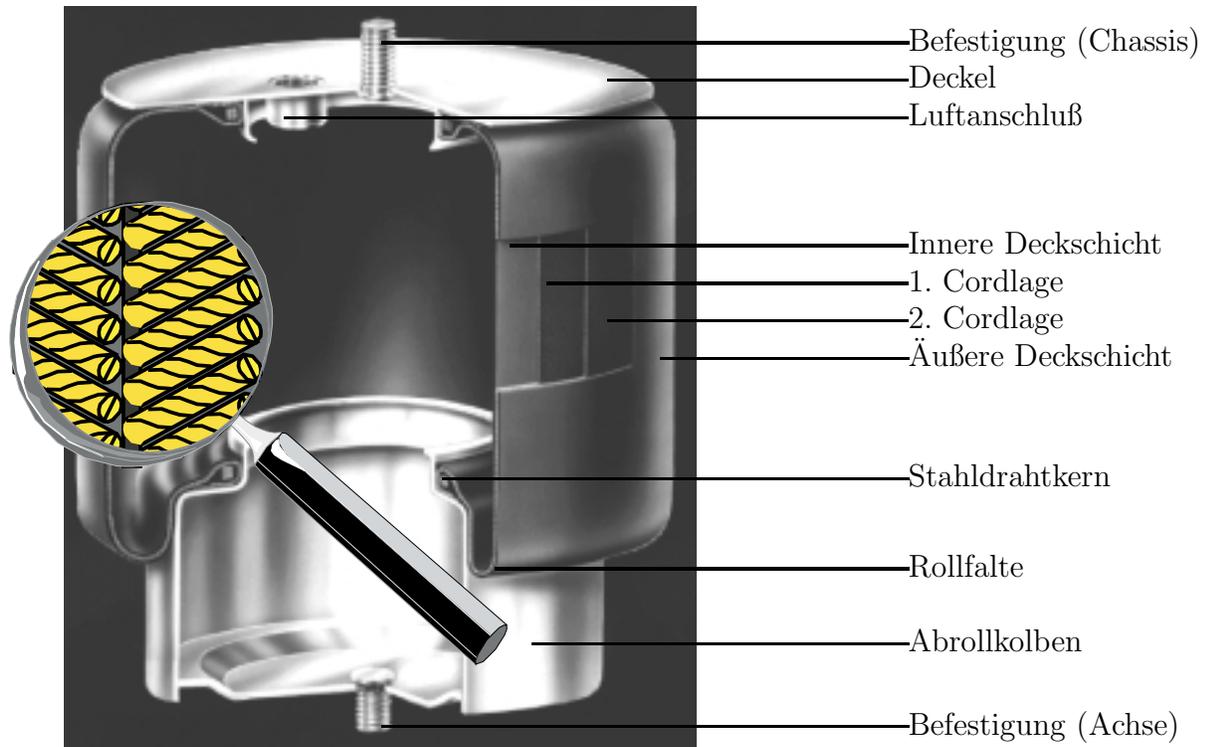


Abbildung 1: Aufbau einer Rollbalgluftfeder

Der sogenannte Cordwinkel einer solchen Schicht wird zur Umfangsrichtung des Balges gemessen und beträgt bei den untersuchten Luftfedern standardmäßig $\pm 50,5^\circ$. Der Abstand zweier Cordmitten, die sogenannte Teilung innerhalb der Schicht, beträgt hierbei ca. 0,74 mm. Aufgabe der Verstärkungscorde ist es, die durch den in der Luftfeder herrschenden Innendruck entstehenden Kräfte aufzunehmen.

Die offenen Enden des Luftfederbalges sind mit einem Wulst versehen, in den Stahldrahtkerne einvulkanisiert sind. Diese wulstartige Ausprägung der Enden ermöglicht einen dauerhaften Sitz des Balges auf dem Konussitz des Abrollkolbens.

Die Luftfederung hat gegenüber einer herkömmlichen Stahlfederung folgende wesentliche Vorteile:

- Die Luftfeder ist ein aktives Federelement. Das heißt, der Druck der im Balg eingeschlossenen Luft kann mit einem geregelten Kompressor der Belastung angepaßt werden. So kann die Steifigkeit der Feder geändert und dafür gesorgt werden, daß die Eigenfrequenzen eines beladenen und unbeladenen LKW und damit das Fahrverhalten gleich bleiben. Eine niedrige Aufbaueigenfrequenz schont das Fahrzeug

und die Ladung, da Fahrbahnstöße weitgehend aufgefangen werden.

- Die Luftfeder ermöglicht eine Niveauregulierung. Bei einem LKW läßt sich auf diese Weise die Höhe des Aufbaus unabhängig von der Beladung konstant halten. Die statische Einfederung kann kompensiert werden. So läßt sich der Raumbedarf für die Federung verkleinern, da nur noch der dynamische Federweg berücksichtigt werden muß. Auch zum Be- und Entladen läßt sich der Aufbau über diese Höhenverstellbarkeit an vorhandene Laderampen anpassen.
- PKWs lassen sich durch die mögliche Niveauregulierung z.B. bei Autobahnfahrten abhängig von der Geschwindigkeit absenken. Dadurch läßt sich der Luftwiderstand verringern und die Straßenlage verbessern.
- Generell kann gesagt werden, daß sich durch den Einsatz einer Luftfederung der Fahrkomfort gegenüber einer konventionellen Federung verbessern läßt.

In Abb. 2 ist eine eingebaute Rollbalgluftfeder am Beispiel eines Busses gezeigt [12].



Abbildung 2: Luftfeder im Fahrwerk eines Busses

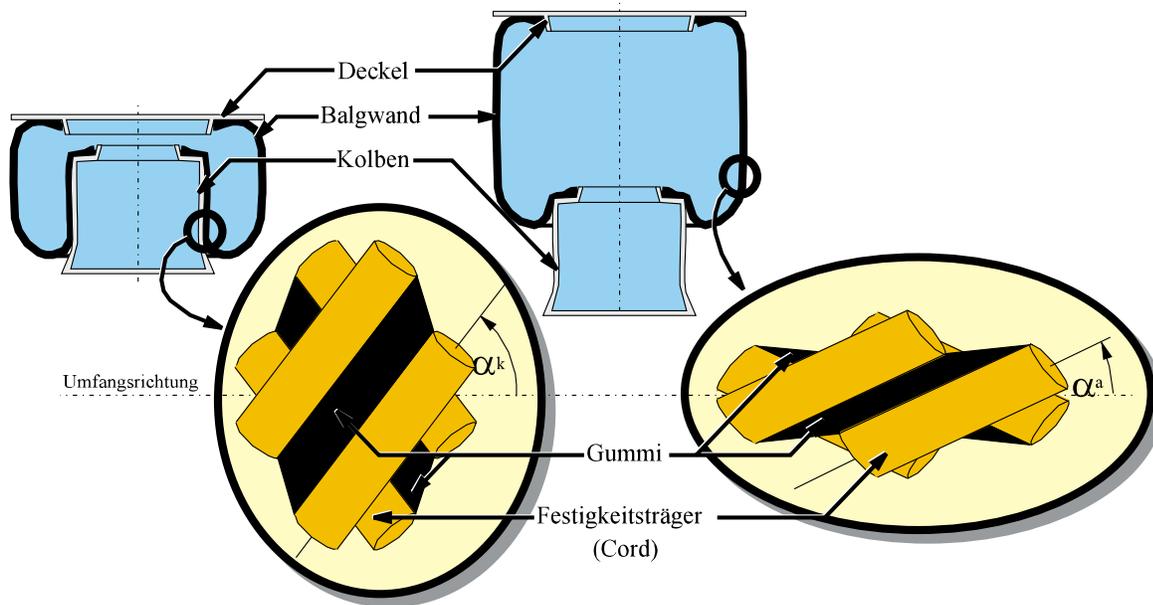


Abbildung 3: Kinematik in der Balgwand beim Ausfedervorgang

1.3 Kinematik der Abrollbewegung

Beim Ein- und Ausfedern der Luftfeder rollt die Balgwand auf einem Kolben ab. Dieser Vorgang bestimmt im wesentlichen das Deformationsverhalten der zwar hochfesten aber biege- und scherweichen Balgwand. Während dieses Vorganges erfährt ein Teil der Luftfedermembran ständig eine Durchmesseränderung. Dies geht mit einer starken Änderung des Cordwinkels α einher. In dem Teil der Balgwand, die beim Einfedern am Abrollkolben anliegt, stellt sich nahezu der Cordwinkel ein, unter dem er im Herstellungsprozeß vulkanisiert wurde (vgl. α^k in Abb. 3). Dies rührt daher, daß der Kolben mit einem Außendurchmesser von 62 mm nur geringfügig vom Vulkanisationsdurchmesser der Luftfeder von 65 mm abweicht. Beim Ausfederungsvorgang erfährt der betrachtete Balgwandausschnitt eine starke Durchmesserergrößerung. Bei einem vollständigen Durchlauf durch die Rollfalte bis in den zylindrischen Bereich der Luftfeder hinein nimmt der Außendurchmesser um ca. 40 mm zu und liegt dann in einer Größenordnung von 100 mm. Bei dieser starken Zunahme des Umfangs der Luftfederwand erfahren die Festigkeitsträger nur geringe Dehnungen in Längsrichtung. Es kommt zu einer starken Scherung des zwischen den Corden befindlichen Gummi und zu einer extremen Änderung des Cordwinkels um ca. 23° (vgl. α^a in Abb. 3). Der sich einstellende Cordwinkel hängt im wesentlichen von dem sich durch den Innendruck einstellenden

Verhältnis von Umfangsspannung zu Axialspannung in der Balgwand ab. Zuzüglich zu dieser starken Scherverformung wird der Gummi zwischen zwei Corden noch einer erheblichen Druckbeanspruchung ausgesetzt, da sich die Corde einander annähern. Das Deformationsverhalten beim Ausfedern ist in Abb. 3 schematisch dargestellt.

1.4 Ziele der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Modellierung von Rollbalgluftfedern, wie sie von ContiTech in Lebensdauerversuchen [54] untersucht wurden, mit der Methode der Finiten Elemente. Die typischen Verformungsmechanismen innerhalb der Balgwand werden numerisch simuliert. Die Ausschnitte der Balgwand, die hierbei den größten Verformungen ausgesetzt sind, werden einer Beanspruchungsanalyse unterzogen. Die Orte der Balgwand, die innerhalb der Simulation Beanspruchungsmaxima aufweisen, werden mit denjenigen verglichen, an denen im Lebensdauerversuch die ersten Anzeichen für Ausfälle in Form von Anrissen zwischen den Corden und dem Gummi auftreten. Aus solchen Anrissen innerhalb der Balgwand entwickeln sich in der Praxis recht schnell Undichtigkeiten, was einem Versagen der Luftfeder gleichkommt.

Im Rahmen einer FE-Analyse werden Rechnungen auf drei verschiedenen Modellierungsebenen der Luftfeder durchgeführt. Auf einer **Mikroebene** wird ein Stoffgesetz für den einzelnen Festigkeitsträger, den Cord entwickelt. Die zugehörigen Stoffgesetzparameter werden an Versuche angepaßt. Parameter für die verwendeten Gummistoffgesetze werden ebenfalls aus Versuchsreihen gewonnen.

In einem weiteren Schritt werden auf der **Makroebene** Rechnungen an in Gummi eingebetteten Corden durchgeführt. Aus diesen Rechnungen lassen sich Parameter für ein Stoffgesetz (Im folgenden auch als „verschmiertes“ bzw. „homogenisiertes“ Stoffgesetz bezeichnet) bestimmen, welches die globalen Eigenschaften einer Gummi-Cord Gewebelage repräsentiert. Schließlich werden auf einer **globalen Ebene** mit Hilfe des homogenisierten Stoffgesetzes Rechnungen an gesamten Luftfedern durchgeführt. Das Einfedern einer Luftfeder wird simuliert und die Beanspruchungsmaxima innerhalb der Balgwand werden an Luftfedern unterschiedlicher Geometrie und für unterschiedliche Belastungen untersucht. Im Rahmen dieser Vorgehensweise wird ein Verfahren entwickelt und verifiziert, mit dem aus Rechnungen auf globaler Ebene direkt Rückschlüsse auf maximale Beanspruchungen im Bereich einer Gummi-Cord Gewebelage

gezogen werden können.

2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die Bezeichnungen und Darstellungsform der im folgenden beschriebenen kontinuumsmechanischen Grundgleichungen orientieren sich an der Nomenklatur von Besdo [3]. Die Einsteinsche Summationskonvention soll vereinbarungsgemäß gelten. Das heißt, sofern es nicht explizit anders vermerkt ist, wird über doppelt auftretende Indizes summiert.

2.1 Kinematische Beziehungen

Die Bewegung und Deformation eines Körpers läßt sich mit Hilfe der Kontinuumsmechanik beschreiben. Betrachtet wird eine unverformte Referenzkonfiguration $\tilde{\mathcal{K}}$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ und eine aktuelle Konfiguration \mathcal{K} zum Zeitpunkt t (Abb. 4).

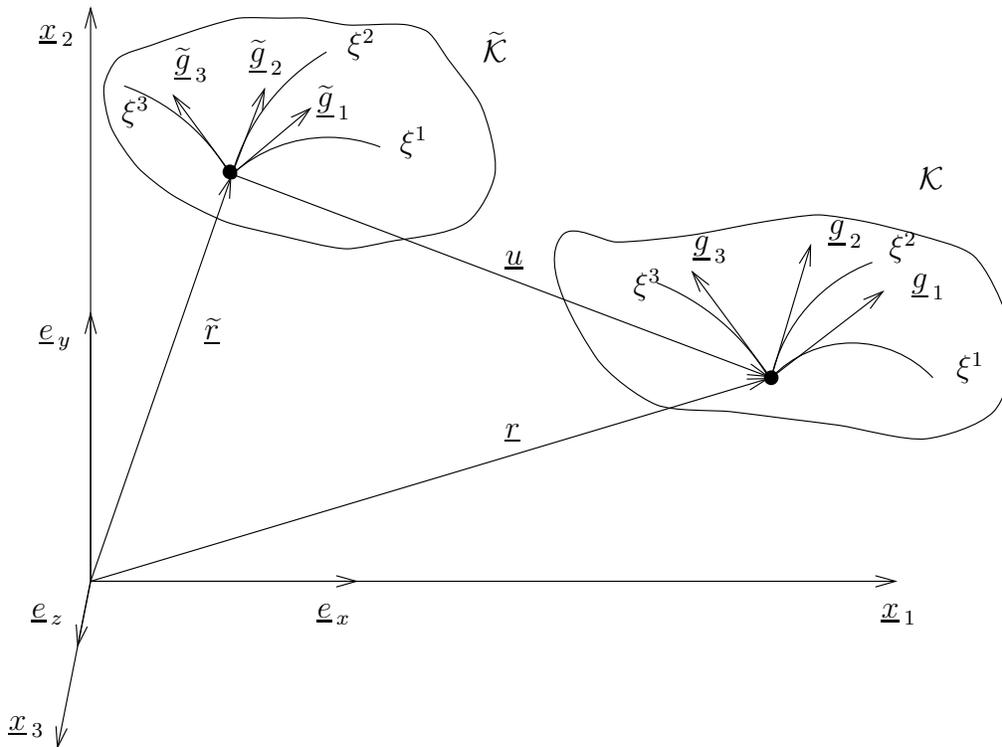


Abbildung 4: Darstellung der Kinematik

Der Verlauf der Deformation eines Körpers wird als eine Abfolge momentaner Konfigurationen aufgefaßt. Hierbei wird der Ausgangszustand zum Zeitpunkt $t = t_0$ als verformungs- und spannungsfrei angenommen. Die Position eines materiellen Punktes P des Körpers sei in der unverformten Lage durch den Ortsvektor $\tilde{\underline{r}}$ bestimmt. In der aktuellen Konfiguration wird derselbe materielle Punkt durch den Ortsvektor \underline{r} beschrieben. Zwischen diesen beiden Vektoren gilt der Zusammenhang

$$\underline{u} = \underline{r} - \tilde{\underline{r}}. \quad (1)$$

Hierin ist \underline{u} der Verschiebungsvektor zwischen den Punkten \tilde{P} und P .

Darstellen läßt sich der Vektor \underline{r} in einer kartesischen Basis \underline{e}_a wie folgt:

$$\underline{r} = x_a \underline{e}_a \quad (2)$$

Vielfach kann es bei der Beschreibung spezieller Probleme innerhalb der Kontinuumsmechanik sinnvoll sein, auf krummlinige Koordinaten überzugehen, die der Struktur des Körpers angepaßt sind (z.B. Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten) und fest an den Körperpunkten haften. Die Ortsvektoren \underline{r} und $\tilde{\underline{r}}$ sind Funktionen:

$$\tilde{\underline{r}} = \tilde{\underline{r}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (3)$$

bzw.

$$\underline{r} = \underline{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (4)$$

Die Basisvektoren $\tilde{\underline{g}}_i$ und \underline{g}_i ergeben sich aus den vollständigen Differentialen

$$d\tilde{\underline{r}} = \frac{\partial \tilde{x}_a \underline{e}_a}{\partial \xi^i} d\xi^i = \tilde{\underline{r}}_{,i} d\xi^i \stackrel{!}{=} \tilde{\underline{g}}_i d\xi^i \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad (5)$$

So folgt:

$$\tilde{\underline{g}}_i = \frac{\partial \tilde{x}_a \underline{e}_a}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \tilde{\underline{r}}}{\partial \xi^i} \quad (6)$$

und entsprechend gilt für die aktuelle Konfiguration:

$$\underline{g}_i = \frac{\partial x_a \underline{e}_a}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} . \quad (7)$$

Zu diesen sogenannten kovarianten Basen existieren zugeordnete kontravariante Basen \tilde{g}^i und \underline{g}^i . Diese sind folgendermaßen definiert:

$$g^i_j = \underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \delta^i_j . \quad (8)$$

Dabei ist

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & ; \text{ für } i = j \\ 0 & ; \text{ für } i \neq j \end{cases} \quad (9)$$

das sogenannte Kroneckersymbol. Für die Transformation zwischen ko- und kontravarianten Basissystemen gilt:

$$\underline{g}_i = g_{ij} \underline{g}^j \quad \text{bzw.} \quad \underline{g}^i = g^{ij} \underline{g}_j . \quad (10)$$

Ebenfalls kann der Zusammenhang der \underline{g}_i zu einer raumfesten kartesischen Basis \underline{e}_a über eine Transformationsmatrix hergestellt werden. Es gilt:

$$\underline{g}_i = g_{ia} \underline{e}_a \quad \text{bzw.} \quad \underline{g}^j = g^j_a \underline{e}_a \quad (11)$$

mit

$$[g^j_a]^T = [g_{ia}]^{-1} . \quad (12)$$

Der Zusammenhang der aufgeführten Transformationsmatrizen ergibt sich zu

$$[g_{ij}] = [g_{ia}] \cdot [g_{ja}]^T \quad (13)$$

$$[g^{ij}] = [g_a^i] \cdot [g_a^j]^T = [g_{ij}]^{-1} . \quad (14)$$

Die g_{ij} bzw. g^{ij} sind Koordinaten des Metriktensors $\underline{\underline{E}}$. Dieser hat in allen kartesischen Koordinatensystemen die gleichen Koordinaten δ_{ab} .

2.2 Deformationsmaße

Für die Bewegung und Deformation eines Körpers ist es wesentlich, zwischen Verzerrungen und Drehungen zu unterscheiden. Das heißt, es müssen Deformationsmaße formuliert werden, die eine Aussage darüber machen können, inwieweit der Verzerrung eines Körpers noch eine Drehung des Körpers überlagert ist. Deformationsmaße, die reine Verzerrungen eines Körpers darstellen, werden objektiv genannt. Bei der Formulierung dieser Größen ist der sogenannte Deformationsgradient $\underline{\underline{F}}$ die zentrale Größe. Bei dieser aus dem angelsächsischen übernommenen Bezeichnung handelt es sich nicht um einen Gradienten der Deformationen, sondern vielmehr um einen Ortsgradienten, da er den Gradienten des Ortes eines materiellen Punktes der aktuellen Konfiguration bezüglich der Referenzkonfiguration darstellt. Der Deformationsgradient ist als dyadisches Produkt definiert, es gilt:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \underline{g}_i \circ \underline{\tilde{g}}^i = \{ \widetilde{\nabla} \circ (\underline{\tilde{r}} + \underline{u}) \}^T \\ &= (\delta^i_j + \tilde{u}^i |_{,j}) \underline{\tilde{g}}_i \circ \underline{\tilde{g}}^j , \end{aligned} \quad (15)$$

wobei der Vektoroperator Nabla als

$$\widetilde{\nabla} = \tilde{g}^j \frac{\partial}{\partial \xi^i} \quad (16)$$

definiert ist.

Für die Darstellung linearer und nichtlinearer Verzerrungs– Verschiebungsbeziehungen läßt sich der Deformationsgradient multiplikativ zerlegen in

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad (17)$$

und

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} . \quad (18)$$

Hierbei wird $\underline{\underline{R}}$ als Drehtensor bezeichnet. Er beschreibt die Rotation eines materiellen Linienelementes. Da dieser Tensor orthogonale Eigenschaften besitzt, gilt für ihn:

$$\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{E}} . \quad (19)$$

Das bedeutet, daß eine reine Drehung mit $\underline{\underline{R}}$ durch eine Drehung mit $\underline{\underline{R}}^T$ wieder rückgängig gemacht wird. Die Tensoren $\underline{\underline{U}}$ und $\underline{\underline{V}}$ beschreiben demgegenüber die Verzerrungen. Sie werden je nach ihrer Stellung in der Gleichung als Rechts– oder Links– Strecktensoren bezeichnet.

Mittels des Deformationsgradienten können als materiell objektive Verzerrungsmaße der sogenannte rechte Cauchy–Green-Tensor $\underline{\underline{C}}$ und der zugehörige Green–Lagrangesche-Tensor $\underline{\underline{\gamma}}$ gebildet werden.

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}})^T \cdot (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}) \quad (20)$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{U}} \quad (21)$$

$$\underline{\underline{C}} = (\tilde{\underline{g}}^i \circ \underline{g}_i) \cdot (\underline{g}_j \circ \tilde{\underline{g}}^j) = g_{ij} \tilde{\underline{g}}^i \circ \tilde{\underline{g}}^j \quad (22)$$

$$\underline{\underline{\gamma}} = 1/2(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{E}}) = 1/2(g_{ij} - \tilde{g}_{ij}) \tilde{g}^i \circ \tilde{g}^j \quad (23)$$

Bei diesen Deformationsmaßen handelt es sich um Größen, die innerhalb einer sogenannten „Total Lagrangeschen Betrachtungsweise“ Verwendung finden. Ein Lagrangescher Beobachter bezieht sich immer auf die Referenzkonfiguration und orientiert sich daher an einem Inertialsystem, welches von der Verformung unabhängig ist. Als Maßstab für die Deformation wird das Basisvektorsystem der \tilde{g}_i bzw. \tilde{g}^i verwandt. Umgekehrt bezieht ein Beobachter der „Eulerschen Betrachtungsweise“ alle Größen auf die aktuelle Konfiguration. Als Maßstäbe nutzt er die der Verformung folgenden Basisvektoren \underline{g}_i bzw. \underline{g}^i .

Die zu $\underline{\underline{C}}$ und $\underline{\underline{\gamma}}$ analogen Deformationsmaße der Eulerschen Betrachtungsweise sind der linke Cauchy–Green Tensor

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = (\underline{g}_i \circ \tilde{g}^i) \cdot (\tilde{g}^j \circ \underline{g}_j) = \tilde{g}^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \quad (24)$$

und der Almansi-Tensor

$$\underline{\underline{c}} = 1/2(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{c}}) = 1/2(g_{ij} - \tilde{g}_{ij}) \underline{g}^i \circ \underline{g}^j \quad (25)$$

Auch diese Deformationsmaße sind objektiv und damit von Starrkörperdrehungen unabhängig.

2.3 Formulierung des Spannungszustandes

Den Zugang zu den inneren Kräften im mechanisch beanspruchten festen Kontinuum erhält man bei Anwendung des Eulerschen Schnittprinzips durch gedachte Schnitte durch den materiellen Körper. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) formulierte 1822 als erster den Spannungszustand in einem Punkt eines festen Körpers. In seinen „Recherches sur l' équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques“ definiert er die Spannung folgendermaßen [47]. „Wenn man in einem

festen, elastischen oder nicht elastischen, durch beliebige Flächen begrenzten und irgendwie belasteten Körper ein festes Element ins Auge faßt, so erfährt dieses Element in jedem Punkte seiner Oberfläche eine (Zug- oder Druck-) Spannung. Diese Spannung ist ähnlich jener in Flüssigkeiten auftretenden, einzig mit dem Unterschied, daß der Flüssigkeitsdruck in einem Punkt stets senkrecht zu der dort beliebig orientierten Fläche steht, während diese Spannung in einem gegebenen Punkte eines festen Körpers zu dem durch diesen Punkt gelegten Oberflächenelement im allgemeinen schief gerichtet und von der Stellung des Oberflächenelementes abhängig sein wird. Diese Spannung läßt sich leicht aus den in den drei Koordinatenebenen auftretenden Spannungen herleiten.“

Cauchy wendet das Eulersche Schnittprinzip auf einen Körper in der aktuellen Konfiguration \mathcal{K} an. Der Spannungsvektor \underline{s} ist für jeden beliebigen Schnitt eine lineare Tensorfunktion:

$$\underline{s} = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \quad (26)$$

Hierin bedeutet \underline{n} die den Schnitt festlegende äußere Normale und $\underline{\sigma}$ ist der sogenannte Cauchy Spannungstensor:

$$\underline{\sigma} = \sigma^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \quad (27)$$

Dieser zweistufige Tensor „lebt“ in der aktuellen Konfiguration und ist symmetrisch (Boltzmannsches Axiom):

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T \quad (28)$$

In der Kombination mit den Deformationsmaßen der aktuellen Konfiguration lassen sich mit diesem Spannungstensor Stoffgesetze der Eulerschen Betrachtungsweise formulieren.

Das Pendant zum Cauchy-Spannungstensor in der Referenzkonfiguration ist der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor. Der Zusammenhang zwischen $\underline{\tilde{T}}$ und $\underline{\sigma}$ ist durch den Deformationsgradienten formulierbar:

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \frac{dV}{d\tilde{V}} \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T-1} \quad (29)$$

Hierbei ist $\frac{dV}{d\tilde{V}}$ das Volumenverhältnis des differentiellen Materieteilchens zwischen aktueller und Referenzkonfiguration. Im Falle der Inkompressibilität des Materials wie bei Gummi ist das Verhältnis in guter Näherung 1.

Ein Nachteil des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor ist, daß er keine unmittelbare physikalische Deutung zuläßt. Er ist jedoch wie der Cauchy-Spannungstensor symmetrisch und läßt in Kombination mit den Deformationsmaßen der Referenzkonfiguration Stoffgesetzformulierungen der Lagrangschen Betrachtungsweise zu.

Zu diesen beiden Spannungstensoren tritt als weiterer Spannungstensor der sogenannte 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ hinzu. Dieser Tensor gibt die äußeren Lasten der aktuellen Konfiguration bezogen auf die unverformten Flächen der Referenzkonfiguration wieder. Er steht mit dem Cauchy-Spannungstensor und dem 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor wie folgt in Verbindung:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \frac{dV}{d\tilde{V}} \sigma^{ij} \tilde{g}_i \circ g_j. \quad (30)$$

Der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor hat den Nachteil, daß er ein unsymmetrischer Tensor ist. Der Vorteil dieses Tensors ist jedoch, daß sich seine Koordinaten in Experimenten oft am leichtesten erfassen lassen. Beim klassischen Zugversuch ist beispielsweise die Koordinate T_{11} direkt proportional zur gemessenen Zugkraft und damit einer ingenieurmäßigen Betrachtung direkt zugänglich. Im englischen Sprachgebrauch wird daher auch von „Engineering stress“ gesprochen.

3 Berechnung von Spannungen aus einer Potentialformulierung

Die in dieser Arbeit verwendeten Stoffgesetzformulierungen gehen von einem hyperelastischen Materialverhalten aus. Im Fall der Hyperelastizität wird die gesamte an einem Körper verrichtete Formänderungsarbeit im Körperinneren gespeichert. Dies bedeutet, daß die innere Formänderungsarbeit W_{in} Potentialeigenschaften besitzt. Die Spannungen lassen sich hierbei aus einer allein vom Deformationszustand abhängigen Potentialdichte Φ ableiten [16].

Es gilt

$$W_{in} = - \int_{\tilde{V}} \Phi d\tilde{V} . \quad (31)$$

Die hier betrachteten Stoffgesetze werden in der Lagrangschen Betrachtungsweise beschrieben. Aus diesem Grund wird die Potentialdichte Φ in Abhängigkeit des Green-Lagrangschen-Deformationstensors $\underline{\underline{\gamma}}$ bzw. des rechten Cauchy-Green-Tensors $\underline{\underline{C}}$ formuliert.

Im folgenden werden die Zusammenhänge zwischen der Potentialdichte und den 2. Piola-Kirchhoff Spannungen dargestellt. Bei der Berechnung der Spannungen wird von einem kartesischen Koordinatensystem ausgegangen. Zwischen der Potentialdichte Φ , dem 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\underline{\underline{\hat{T}}}$ und dem Green-Lagrangschen-Deformationstensor $\underline{\underline{\gamma}}$ gilt folgende Beziehung:

$$\underline{\underline{\hat{T}}} \cdot \underline{\underline{\hat{\gamma}}} = \dot{\Phi} \quad (32)$$

mit

$$\underline{\underline{\gamma}} = \gamma_{ab} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\hat{\gamma}}} = \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b . \quad (33)$$

Die Ableitung der Potentialdichte ergibt sich unter Anwendung der Kettenregel zu:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{ab}} \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{ba}} \frac{\partial \gamma_{ba}}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{ab}} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \cdots \frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial t} \underline{e}_c \circ \underline{e}_d .
\end{aligned} \tag{34}$$

Mit

$$\underline{\tilde{T}} \cdots \underline{\hat{\gamma}} = \tilde{T}_{ab} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \cdots \frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial t} \underline{e}_c \circ \underline{e}_d \tag{35}$$

folgt nach Einsetzen in Gleichung 32 schließlich:

$$\underline{\tilde{T}} \cdots \underline{\hat{\gamma}} = \underline{\tilde{T}} \cdots \frac{\partial \gamma_{ab}}{\partial t} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{ab}} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \cdots \frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial t} \underline{e}_c \circ \underline{e}_d . \tag{36}$$

Die Bestimmung der Spannungen ergibt sich mit der Abspaltung der Zeitableitungen zu:

$$\underline{\tilde{T}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{ab}} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b . \tag{37}$$

Damit gilt für die Koordinaten des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{ab}} = \tilde{T}_{ab} . \tag{38}$$

Unter der Voraussetzung, daß wie hier symmetrische Tensoren vorliegen, wird an dieser Stelle eine vereinfachende Schreibweise eingeführt. Die Koordinaten eines zweistufigen symmetrischen Tensors \underline{M} lassen sich wie folgt notieren:

$$[M_{ab}] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} . \tag{39}$$

Diese Matrix enthält nur sechs verschiedene Elemente, die sich in Form eines Vektors notieren lassen. Für diese Schreibweise, die auch unter dem Namen „Voigtsche Notation“ bekannt ist, wird ein großbuchstabiger Index A gewählt für den gilt $A = 1, 2, \dots, 6$. Damit wird:

$$[M_A]^T = [M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6] . \quad (40)$$

Hierbei entspricht:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_{11}, & M_2 &= M_{22}, & M_3 &= M_{33} \\ M_4 &= M_{23}, & M_5 &= M_{13}, & M_6 &= M_{12} . \end{aligned}$$

Das Produkt aus den Koordinaten zweier symmetrischer Tensoren $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{N}}$ läßt sich nun berechnen zu:

$$M_{ab}N_{ba} = \sum_{A=1}^3 M_A N_A + 2 \sum_{A=4}^6 M_A N_A . \quad (41)$$

Mittels dieser Schreibweise läßt sich Gleichung 38 wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_A} &= \tilde{T}_A \quad \text{für} \quad A = 1, 2, 3 \\ &\text{und} \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_A} = 2 \tilde{T}_A \quad \text{für} \quad A = 4, 5, 6 .$$

Mit der Beziehung $\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{E}})$ können die Koordinaten des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors auch mit Hilfe der Koordinaten des rechten Cauchy-Green-Tensor $\underline{\underline{C}}$ berechnet werden. Es gilt:

$$\tilde{T}_A = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial C_A} \quad \text{für} \quad A = 1, 2, 3$$

und (43)

$$\tilde{T}_A = \frac{\partial \Phi}{\partial C_A} \quad \text{für} \quad A = 4, 5, 6 .$$

Zur Ermittlung der Materialsteifigkeitsmatrix, die für die Berechnung innerhalb der Finiten Elemente benötigt wird, ist es erforderlich, auch die zweiten Ableitungen der Potentialdichte nach den Verzerrungsmaßen zu berechnen. Es gilt

$$\underline{\underline{D}} \leftarrow D_{abcd} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{ab} \partial \gamma_{cd}} . \quad (44)$$

Hierbei ist $\underline{\underline{D}}$ ein symmetrischer Tensor vierter Stufe für den gilt:

$$D_{abcd} = D_{cdab} = D_{bacd} = D_{abdc} . \quad (45)$$

Auch hier läßt sich der Schreibaufwand reduzieren, indem unter Ausnutzung der Symmetrien wie oben auf eine Indizierung mit Großbuchstaben zurückgegriffen wird. Es gilt:

$$D_{AB} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_A \partial \gamma_B} . \quad (46)$$

Hierbei gelten für die Indices A und B folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} D_{abcd} &= D_{AB} && \text{für } A \text{ und } B \text{ gleich } 1, 2 \text{ oder } 3 \\ 2 D_{abcd} &= D_{AB} && \text{für entweder } A \text{ oder } B \text{ gleich } 4, 5 \text{ oder } 6 \\ 4 D_{abcd} &= D_{AB} && \text{für } A \text{ und } B \text{ gleich } 4, 5 \text{ oder } 6. \end{aligned} \quad (47)$$

Auch die zweiten Ableitungen der Potentialdichte nach den Deformationen lassen sich wieder durch die Koordinaten des rechten Cauchy-Green-Tensors ausdrücken. Es gilt:

$$D_{abcd} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{ab} \partial \gamma_{cd}} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_{ab} \partial C_{cd}} \quad (48)$$

beziehungsweise

$$D_{AB} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_A \partial \gamma_B} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_A \partial C_B}. \quad (49)$$

Damit sind die mathematischen Grundlagen für die Berechnung der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen und der Materialsteifigkeit aus einer Potentialformulierung beschrieben. Einzelheiten zu den verschiedenen in dieser Arbeit verwendeten Stoffgesetzen werden in den einzelnen Kapiteln angegeben.

4 Stoffgesetz für den Festigkeitsträger

4.1 Allgemeines

Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist die rechentechnische Ermittlung von Beanspruchungsmaxima innerhalb des Gummis einer Cordlage mittels Finiter Elemente. Aus diesem Grund muß sowohl das Verhalten des Gummimaterials, als auch das der Festigkeitsträger, der Corde, durch geeignete Stoffgesetze beschrieben werden. Die verwendeten Gummistoffgesetze werden im Kap. 5 angegeben. Im folgenden wird ein Stoffgesetz für die Verstärkungscorde abgeleitet, welches die wesentlichen Effekte des Cordes beim Einfederungsvorgang der Luftfeder abbildet. Dazu ist zunächst der Aufbau des Cordes genauer zu betrachten. Ein Ansatz zur Modellierung des Cordverhaltens findet sich bei Pidaparti [33], wird jedoch hier nicht weiter verfolgt, da die nichtlinearen Effekte im Querkompressionsverhalten des Cordes dort keine Berücksichtigung finden. Das hier vorgestellte Stoffgesetz für den Festigkeitsträger baut auf die Formulierung von Steinbeck[45] auf. Es wurde im Rahmen des oben erwähnten Brite-Projektes [4] weiter entwickelt. Auch Jacob [22] verwendet in seiner Arbeit die innerhalb des EG-Projektes entwickelte Stoffgesetzformulierung für das Verhalten der Corde. Bei der hier vorgestellten Stoffgesetzformulierung handelt es sich um eine Weiterentwicklung der in [4] und [22] dargestellten Zusammenhänge. Es handelt sich um eine nichtlineare transversal-isotrope Materialbeschreibung, die auf einer Potentialformulierung basiert.

4.2 Beschreibung des Cordaufbaus

Im Rahmen dieser Arbeit werden Luftfedern für den Nutzfahrzeuggewebereich untersucht. Das in diesen Luftfedern verwendete Nutzfahrzeuggewebe enthält Corde, die aus zwei Garnen mit je 140 Filamenten bestehen. Diese Filamente bestehen aus einem Polyamid-Material (Pa 6.6), welches aus einer Schmelze gewonnen wird. Diese Schmelze wird durch Spinndüsen gedrückt und anschließend zu Filamenten verstreckt. Ein Garn entsteht dadurch, daß diese Filamente miteinander verdreht werden. Der sogenannte Twist beschreibt die Anzahl der Umdrehungen pro Meter und liegt üblicherweise zwischen 250 bis 400 Umdrehungen pro Meter. Die beiden getwisteten Garne werden anschließend in entgegengesetzter Richtung zu einem Cord verdreht, wobei der Twist des Cordes in der Regel der gleiche wie bei den Garnen ist. Auf diese Weise ergibt sich bei Zugbelastung

des Cordes kein resultierendes Torsionsmoment. Die Corde des Nutzfahrzeuggewebes haben einen Twist von 250 Umdrehungen pro Meter. In Abb. 5 ist der doppelhelixartige Aufbau eines Cordes erkennbar. Gleichzeitig wird in dieser elektronenmikroskopischen Aufnahme in der unteren Bildhälfte ein einzelnes herauspräpariertes Garn dargestellt.

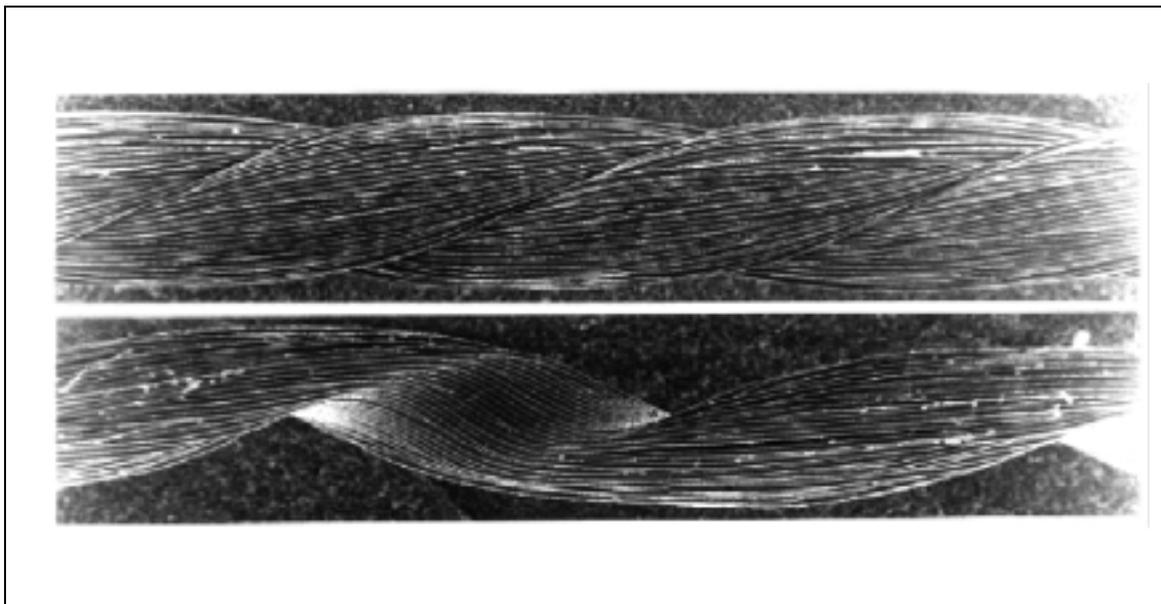


Abbildung 5: Elektronenmikroskopische Aufnahme eines Polyamid 6.6 Cordes (vor und nach Herauspräparieren eines Garns)

Der beschriebene Aufbau des Cordes hat zur Folge, daß bei senkrechten Schnitten durch den Cord im Abstand einer Schlaglänge jedes Filament immer wieder die gleiche Position innerhalb des Schnittes inne hat. Die Schlaglänge entspricht hierbei dem Kehrwert des Twistes.

Abb. 6 zeigt den Querschnitt eines Cordes. Im Gegensatz zum Cord auf der linken Bildhälfte ist der Cord auf der rechten Bildhälfte in eine Gummimatrix eingebettet und steht unter einer Scherbelastung. Die Nierenform der einzelnen Garne ist auf beiden Bildern deutlich erkennbar. Im linken Bild ist zu sehen, daß es innerhalb des Cordes Bereiche mit unterschiedlicher Filamentdichte gibt. So liegen im Inneren des Cordes die Filamente wesentlich dichter beieinander als in den Randzonen. Das rechte Bild zeigt eine deutlich höhere Packungsdichte der Filamente. Die Filamente haben sich hier infolge der äußeren Belastung umgelagert und liegen dichter beieinander.

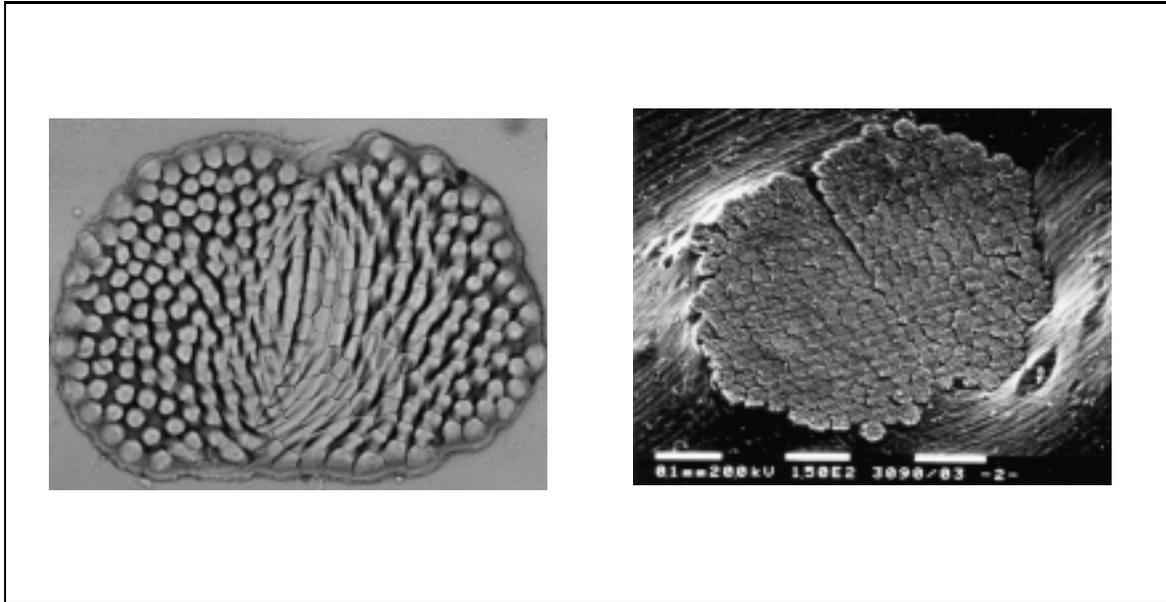


Abbildung 6: Querschnitte durch einen Cord, elektronenmikroskopische Aufnahmen

4.3 Idealisierung der Cordstruktur

Für die Modellierung des Cordes im Rahmen der FE-Rechnungen werden folgende idealisierenden Annahmen getroffen.

- Der Gesamtquerschnitt des Cordes wird kreisrund angenommen.
- Es wird nicht zwischen Filamenten und Garnen unterschieden, sondern von einer homogenen Beschreibung innerhalb des Cordquerschnittes ausgegangen.
- Die unterschiedliche Filamentdichte innerhalb des Cordes wird durch einen sogenannten Füllfaktor f beschrieben.

Aufgrund des Cordaufbaues ergeben sich zwei wesentliche, physikalisch nichtlineare Effekte, die durch das Stoffgesetz wiedergegeben werden müssen. Bei Zug in Längsrichtung kommt es zu einer starken Kompaktierung der Filamente im Cord, wodurch die Filamentdichte stark zunimmt. Dies ist dadurch möglich, daß die Filamente die Luft im Cordinneren verdrängen und sich dadurch der Füllfaktor deutlich erhöht. Auf diese Weise ergibt sich im Zugversuch eine progressive Kraft-Verschiebungskennlinie. Auf der anderen Seite bedingt die Anordnung der Filamente innerhalb des Cordes, daß

der Cord bezüglich seines Querkompansionsverhaltens ebenfalls eine progressive Kraft-Verschiebungskennlinie aufweist. Die Filamente können sich bei Querdruck zunächst wiederum umlagern, bis eine maximale Filamentdichte erreicht ist. In Abb. 7 sind typische Kraft-Dehnungskennlinien dargestellt, die aus Zugversuchen an Polyamidcorden mit unterschiedlichem Twist ermittelt wurden.

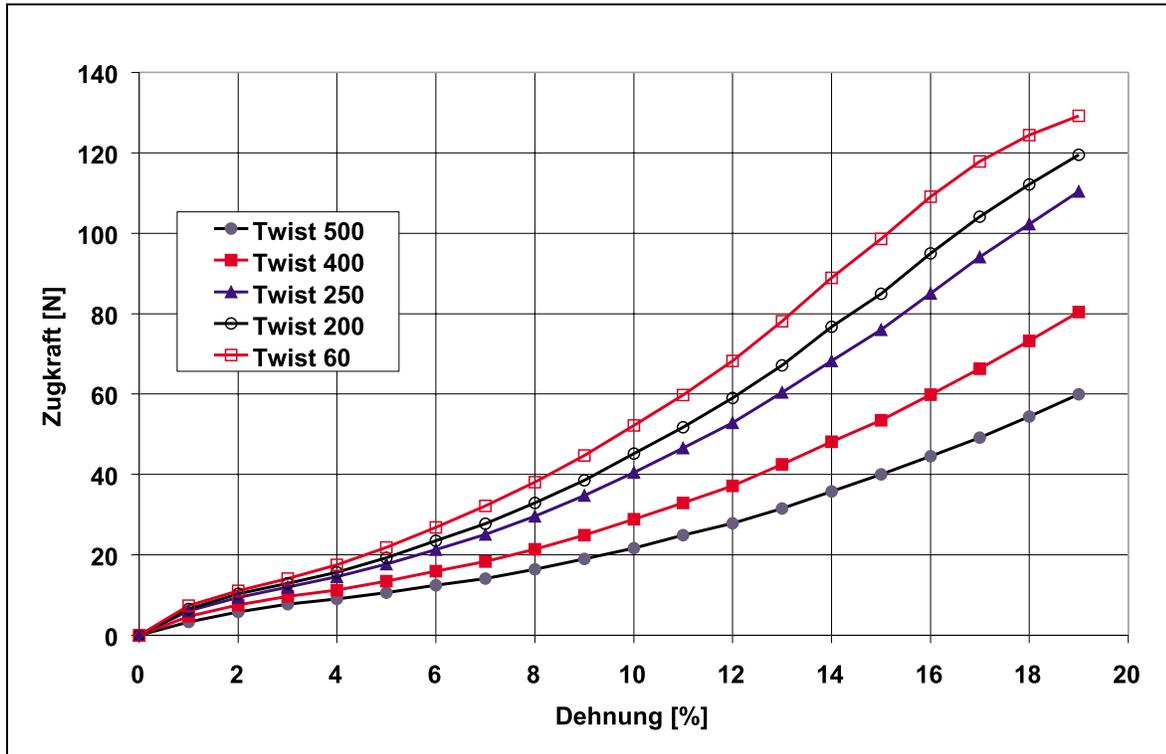


Abbildung 7: Typische Zugversuch-Kennlinien von Polyamidcorden mit unterschiedlichem Twist

4.4 Definition eines Füllfaktors

Im folgenden wird ein Füllfaktor f [4] als Maß für die Filamentdichte innerhalb des Cordes definiert. Der Füllfaktor berechnet sich aus dem Verhältnis der mit Filamentmaterial gefüllten Cordfläche zur Gesamtfläche des Cordquerschnittes. In ähnlicher Weise wird von Maßmann für seine Stoffgesetzformulierung [30] eine Packungsdichte formuliert, mit der ebenfalls das progressive Kennlinienverhalten bei Querkompansions von Corden beschrieben wird.

Geht man im spannungsfreien Zustand eines Cordes von einem gleichmäßig runden Querschnitt der Filamente aus, kann bei der Kompaktierung des Cordes und der idealen Annahme, daß die Filamente ihre Form behalten, ein maximaler Füllfaktor von $f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9$ erreicht werden. In der Realität werden sich die Filamente auch zu Ellipsen verformen. Dadurch können Füllfaktoren $f > 0,9$ erreicht werden. Es erscheint deshalb sinnvoll, innerhalb des Modells als obere Grenze einen Füllfaktor mit $f = 1$ festzulegen. Dies bedeutet, daß keine Zwischenräume zwischen den Filamenten des Cordes mehr vorhanden sind. Im unbelasteten Zustand werden sich in der Realität Füllfaktoren $f < 0,9$ einstellen. Dies ist infolge der Unregelmäßigkeiten innerhalb der Fertigung zu erwarten und wird durch die Darstellung in Abb. 6 belegt. Innerhalb der Stoffgesetzformulierung wird ebenfalls eine untere Grenze für den Füllfaktor definiert, da ab einer gewissen Größe der Leerräume zwischen den Filamenten nicht mehr von einem Cord gesprochen werden kann und die physikalischen Voraussetzungen für das Stoffgesetz nicht mehr gegeben sind. Zur Definition eines Referenzfüllfaktors \tilde{f} werden Cordquerschnitte wie in Abb. 6 ausgewertet.

Die Stoffgesetzformulierung wird in Lagrangescher Betrachtungsweise formuliert und verwendet zur Beschreibung körperfeste Tangentialvektoren $\underline{\tilde{t}}_\xi, \underline{\tilde{t}}_\eta, \underline{\tilde{t}}_\zeta$. Hierbei ist die $\underline{\tilde{t}}_\xi$ -Richtung identisch mit dem Vektor in Cordlängsrichtung $\underline{\tilde{l}}_c$.

Infolge der lokalen Formulierung des Stoffgesetzes müssen bei der FE-Rechnung die verwendeten Dehnungsmaße (hier also $\underline{\underline{C}}$) in jedem Integrationspunkt zunächst in das lokale Koordinatensystem transformiert werden. Nachdem dann der Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ und die lokale Materialsteifigkeit (Materialtangente) berechnet wurden, ist eine Rücktransformation in das globale Koordinatensystem erforderlich. Auf diese Weise erhöht sich zwar der Transformationsaufwand, jedoch läßt sich so die Darstellung der für die Stoffgesetzformulierung erforderlichen partiellen Ableitungen des Potentials nach den Koordinaten des lokal formulierten Tensors $\underline{\underline{C}}$ wesentlich vereinfachen.

Die Basis der Referenzkonfiguration $\underline{\tilde{g}}_i$ mit $\underline{\tilde{g}}_1 = \underline{\tilde{t}}_\xi$, $\underline{\tilde{g}}_2 = \underline{\tilde{t}}_\eta$ und $\underline{\tilde{g}}_3 = \underline{\tilde{t}}_\zeta$ spannt einen Spat auf, dessen Volumen sich berechnet zu:

$$\tilde{V} = [\underline{\tilde{t}}_\xi, \underline{\tilde{t}}_\eta, \underline{\tilde{t}}_\zeta] = |\underline{\tilde{t}}_\xi \cdot (\underline{\tilde{t}}_\eta \times \underline{\tilde{t}}_\zeta)|. \quad (50)$$

Für die Schnittfläche der Ausgangskonfiguration \tilde{A} , die senkrecht zur Cordlängsrichtung steht, gilt:

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{V}}{|\tilde{\underline{l}}_c|} = \frac{\tilde{V}}{|\tilde{\underline{t}}_\xi|}. \quad (51)$$

Für die aktuelle Konfiguration ergibt sich mit dem Deformationsgradienten:

$$\underline{t}_\xi = \underline{\underline{F}} \cdot \tilde{\underline{t}}_\xi, \quad \underline{t}_\eta = \underline{\underline{F}} \cdot \tilde{\underline{t}}_\eta, \quad \underline{t}_\zeta = \underline{\underline{F}} \cdot \tilde{\underline{t}}_\zeta. \quad (52)$$

Bei der Deformation wird davon ausgegangen, daß sich die Filamente mit Ausnahme einer Dehnung in Längsrichtung nicht verformen. Dies bedeutet, daß ein senkrechter Schnitt durch den deformierten Cord wieder eine unverändert große Fläche der Filamente $A_{Filament}$ im Cord ergibt.

Das Spatvolumen in der aktuellen Konfiguration berechnet sich demgegenüber zu

$$V = [\underline{t}_\xi, \underline{t}_\eta, \underline{t}_\zeta] = |\underline{t}_\xi \cdot (\underline{t}_\eta \times \underline{t}_\zeta)| = \tilde{V} \det[(F_{ab})], \quad (53)$$

womit sich die zum Vektor in Cordlängsrichtung \underline{l}_c senkrecht stehende aktuelle Fläche zu

$$A = \frac{V}{|\underline{t}_\xi|} \quad (54)$$

ergibt. Für den Füllfaktor in der aktuellen und in der Referenzkonfiguration lassen sich schließlich folgende Gleichungen angeben:

$$\tilde{f} = \frac{A_{Filament}}{\tilde{A}} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{A_{Filament}}{A} \quad (55)$$

$$f = \tilde{f} \frac{\tilde{A}}{A}.$$

Die Längung des Cordes ergibt sich mit dem Vektor in Cordlängsrichtung $\tilde{\underline{l}}_c$ bzw. dem Materialkoordinatensystem zu:

$$\frac{|l_c|}{|\tilde{l}_c|} = \sqrt{\frac{\tilde{l}_c \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \tilde{l}_c}{\tilde{l}_c \cdot \tilde{l}_c}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|t_\xi|}{|\tilde{t}_\xi|} = \sqrt{\frac{\tilde{t}_\xi \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \tilde{t}_\xi}{\tilde{t}_\xi \cdot \tilde{t}_\xi}} . \quad (56)$$

Mit der dritten Invarianten von $\underline{\underline{C}}$

$$I_3 = \det[(C_{ab})] = (\det[(F_{ab})])^2 = \left(\frac{V}{\tilde{V}}\right)^2 \quad (57)$$

läßt sich der aktuelle Füllfaktor schließlich zu

$$f = \tilde{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{|t_\xi|}{|\tilde{t}_\xi|} = \tilde{f} \cdot \frac{1}{|\tilde{t}_\xi|} \cdot \sqrt{\frac{\tilde{t}_\xi \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \tilde{t}_\xi}{I_3}} \quad (58)$$

berechnen.

4.5 Formulierung des Potentials

Für die Beschreibung des Cordes wird von einem hyperelastischen Materialverhalten ausgegangen. Hyperelastisches Materialverhalten bedeutet, daß ein Potential existiert, aus dem sich die Spannungen berechnen lassen. Das Gesamtpotential wird hierbei aus einzelnen Teilpotentialen aufgebaut, die einem isotropen Grundpotential überlagert werden. Die Teilpotentiale erfassen die oben beschriebenen Besonderheiten des Cordverhaltens. Es gilt

$$\Phi_{Gesamt} = \Phi_q + \Phi_l + \Phi_s + \Phi_{iso} . \quad (59)$$

Hierbei ist

- Φ_q das Teilpotential zur Berücksichtigung des Querkompressionsverhaltens,
- Φ_l das Teilpotential zur Berücksichtigung nichtlinearer Effekte in Längsrichtung,
- Φ_s das Teilpotential zur Berücksichtigung des Scherverhaltens und
- Φ_{iso} das Teilpotential für den isotropen Grundanteil.

4.5.1 Isotropes Grundpotential

Isotropes Materialverhalten liegt vor, wenn sich das Potential in Abhängigkeit von den drei Hauptinvarianten I_1 , I_2 , und I_3 des Tensors $\underline{\underline{C}}$ darstellen läßt [5].

$$\Phi = \Phi(I_1, I_2, I_3) \quad (60)$$

mit

$$I_1 = \underline{\underline{C}} \cdot \cdot \underline{\underline{E}}, \quad I_2 = \frac{1}{2} [(\underline{\underline{C}} \cdot \cdot \underline{\underline{E}})^2 - (\underline{\underline{C}} \cdot \cdot \underline{\underline{C}})] \quad \text{und} \quad I_3 = \det[(C_{ab})] .$$

Der hier gewählte Potentialansatz für isotropes Materialverhalten [45] lautet:

$$\begin{aligned} \Phi_{iso} = & \frac{1}{4} G^* [w I^* + (1 - w) \ln(1 + I^*)] \\ & + K^* \int (e^{k I^*} - 1) dI^* + \frac{1}{2} K (\sqrt{I_3} - 1)^2 . \end{aligned} \quad (61)$$

Für die hier eingeführte Invariante I^* gilt:

$$I^* = (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{E}}) \cdot \cdot (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{E}}) = (I_1 - 1)^2 - 2 \cdot (I_2 - 1) . \quad (62)$$

K^* , G^* , k und w sind zu bestimmende Parameter. K spiegelt in Kombination mit dem Term $(\sqrt{I_3} - 1)^2$ eine quadratische Abhängigkeit von der Volumenänderung wieder und ist als Kompressionsmodul zu verstehen. Für die Berechnung von Spannungen werden wie in Kap. 3 beschrieben die partiellen Ableitungen des Potentials nach den Elementen des rechten Cauchy-Green-Tensors benötigt. Diese lassen sich leicht mit Hilfe der Kettenregel bilden und sollen hier nicht eigens aufgeführt werden.

4.5.2 Materialverhalten in Cordlängsrichtung

Das Materialverhalten in Längsrichtung der Corde zeichnet sich durch eine progressive Kennlinie aus, die in Abb. 7 dargestellt ist. Um dieses Verhalten zu simulieren, wird ein exponentiellen Ansatz gewählt, wobei a und b Konstanten sind. Auch im folgenden wird wie in Kap. 3 die Voigtsche Notation verwandt. Das Potential lautet:

$$\Phi_l = \frac{a}{2b^2} (e^{b(C_1-1)} - bC_1) . \quad (63)$$

Dieser Ansatz hat den Vorteil, daß sich die 2.Piola-Kirchhoff-Spannung direkt als Funktion der Koordinaten des Green-Lagrangischen-Deformationstensors $\underline{\underline{\gamma}}$ beschreiben läßt und so eine bessere Interpretierbarkeit als im Ansatz in [4] gegeben ist. Dort wird das progressive Verhalten in Abhängigkeit von $\sqrt{C_{11}}$ formuliert. Die erste Ableitung nach den Koordinaten von $\underline{\underline{C}}$ ergibt nur einen von Null verschiedenen Ausdruck:

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial C_1} = \frac{a}{2b} (e^{b(C_1-1)} - 1) . \quad (64)$$

Für die 2. Piola-Kirchhoff-Spannung ergibt sich demnach:

$$\widetilde{T}_1(\Phi_l) = \frac{a}{b} (e^{b(C_1-1)} - 1) \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{T}_1(\Phi_l) = \frac{a}{b} (e^{2b\gamma_1} - 1) . \quad (65)$$

Der zugehörige Platz in der Materialsteifigkeitsmatrix ergibt sich mit den zweiten partiellen Ableitungen nach den Koordinaten von $\underline{\underline{C}}$ zu

$$D_{11} = 2a e^{b(C_1-1)} \quad \text{bzw.} \quad D_{11} = 2a e^{2b\gamma_1} . \quad (66)$$

4.5.3 Querkompressionsverhalten des Cordes

Auf das Materialverhalten in transversaler Richtung zum Cord soll in diesem Zusammenhang genauer eingegangen werden. Der wesentliche Effekt, der abzubilden ist, ist die deutliche Zunahme der Quersteifigkeit des Cordes bei Annäherung der Corde innerhalb der Luftfederbalgwand. Dieser Effekt stellt sich wie in Kap. 1 beschrieben ein, wenn ein Ausschnitt aus der Balgwand der Luftfeder die Rollfalte durchläuft. Hierbei werden Teilungen erreicht, die kleiner als der Corddurchmesser (0,55 mm) sind. Zur Simulation dieses Materialverhaltens wird folgender Ansatz (vgl. [45], [22] und [4]) zugrundegelegt:

$$\Phi_q = \frac{1}{2} M (1 - \tilde{f})^2 \left(\frac{(1 - \tilde{f})}{(1 - f)} + \frac{(1 - f)}{(1 - \tilde{f})} - 2 \right). \quad (67)$$

Zur Bestimmung der 2.Piola-Kirchhoff-Spannungen und der Materialtangente werden die Ableitungen nach den Koordinaten des Tensors $\underline{\underline{C}}$ benötigt. Diese ergeben sich, indem zunächst entsprechend der Kettenregel nach dem Füllfaktor abgeleitet wird:

$$\frac{\partial \Phi_q}{\partial f} = \frac{1}{2} M (1 - \tilde{f}) \left(\frac{(1 - \tilde{f})^2}{(1 - f)^2} - 1 \right). \quad (68)$$

Für die zweite Ableitung nach dem Füllfaktor folgt

$$\frac{\partial^2 \Phi_q}{\partial f \partial f} = M \frac{(1 - \tilde{f})^3}{(1 - f)^3}. \quad (69)$$

In der Abb. 8 sind der Verlauf der Potentialfunktion und die Verläufe seiner Ableitungen nach dem Füllfaktor in Abhängigkeit vom Füllfaktor dargestellt. Zur Bildung der Ableitungen des Füllfaktors (vgl. Glg. 58) nach den Koordinaten von $\underline{\underline{C}}$ sind ebenfalls die Ableitungen von I_3 und von $\underline{\underline{L}}_c$ nach den Koordinaten von $\underline{\underline{C}}$ erforderlich. Auf eine dezidierte Darstellung wird hier jedoch verzichtet. Es bleibt zu erwähnen, daß sich durch die lokale Formulierung des Stoffgesetzes in einem körperfesten Cord-Koordinatensystem die Bildung der Ableitungen deutlich vereinfacht, da der Basisvektor \underline{g}_1 der Referenzkonfiguration genau in Cordlängsrichtung zeigt und damit der Vektor $\underline{\tilde{L}}_c$ nur eine von Null verschiedene Koordinate besitzt. Im Rahmen einer Parameteridentifikation bleibt M ein zu bestimmender Parameter.

4.5.4 Scherverhalten des Cordes

In Versuchen der Firma AKZO wurde das Scherverhalten von in einer Gummimatrix eingebetteten Corden untersucht. Es zeigte sich, daß die Deformationen im Cord hier sehr viel geringer sind als die im Gummi beobachteten Scherdeformationen. Aus diesem Grund wird für das Scherverhalten des Cordes ein sehr einfacher Potentialansatz gewählt:

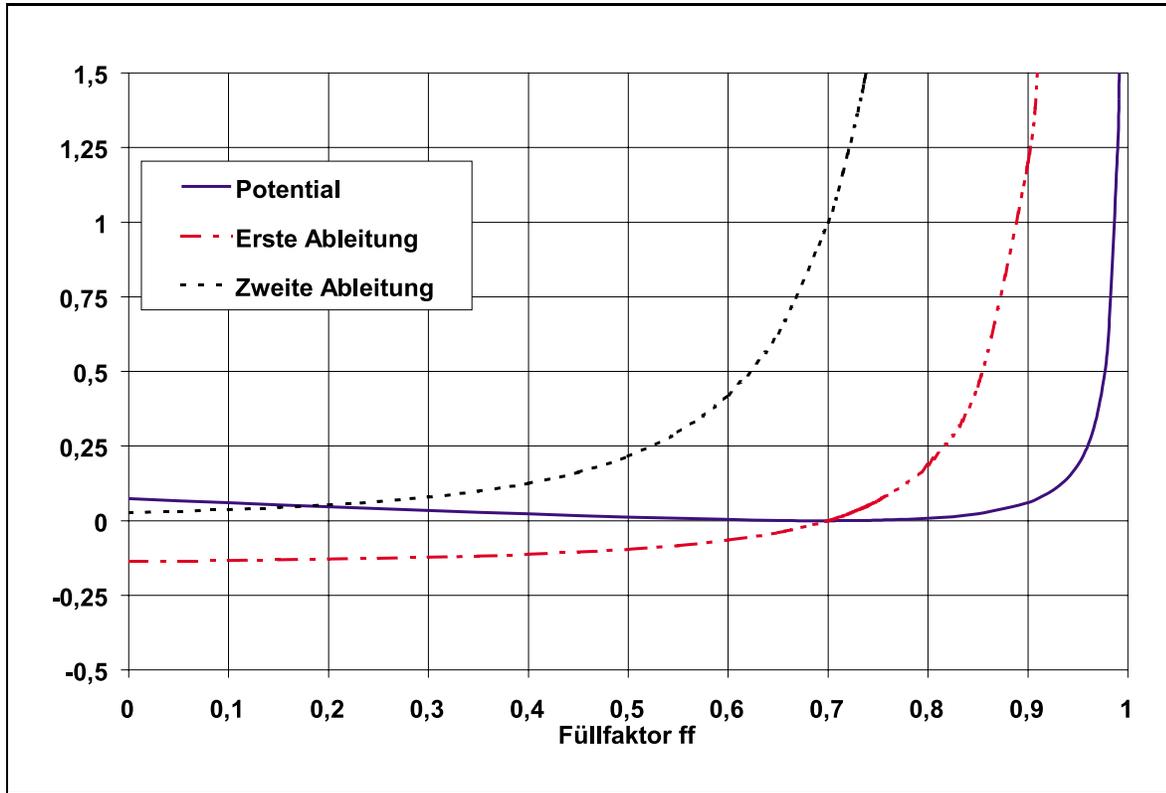


Abbildung 8: Darstellung des Potentials Φ_q und seiner Ableitungen $\frac{\partial\Phi_q}{\partial f}$ und $\frac{\partial^2\Phi_q}{\partial f \partial f}$ für einen Referenzfüllfaktor von $\tilde{f} = 0,7$ und $M = 1$

$$\Phi_s = \frac{1}{2}GC_5^2 + \frac{1}{2}GC_6^2 . \quad (70)$$

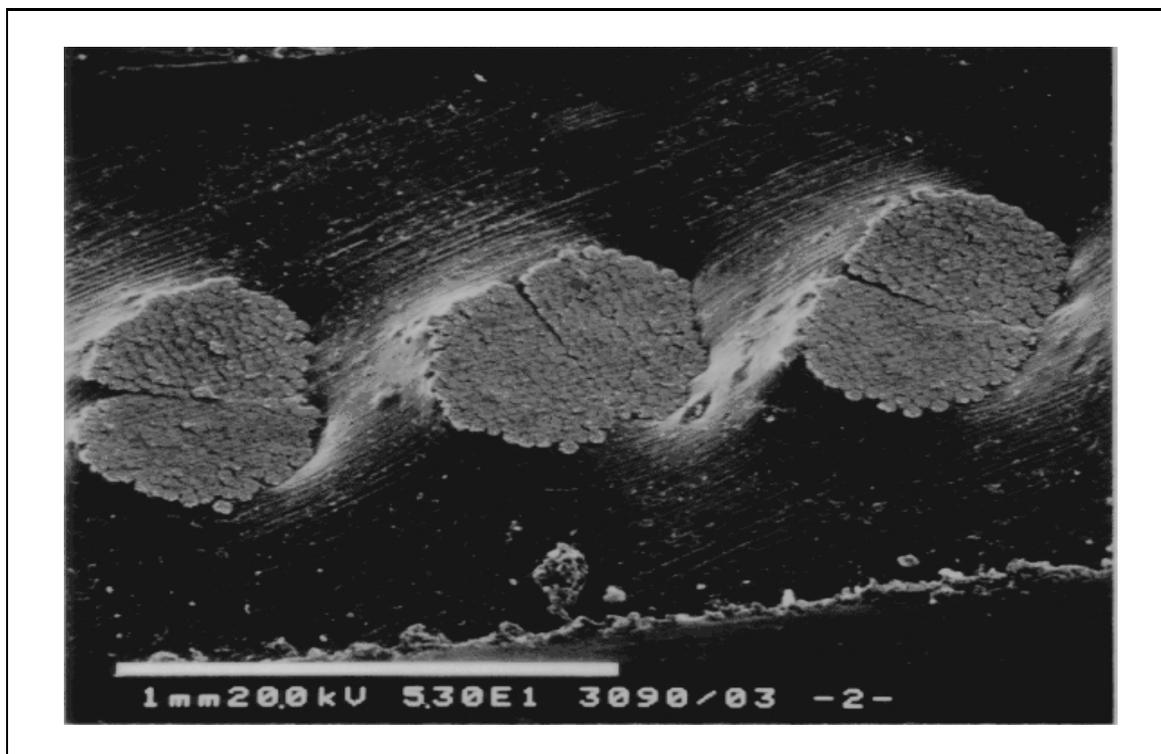


Abbildung 9: Scherversuch an einer Gummi-Cord-Lage

In Abb. 9 ist eine elektronenmikroskopische Aufnahme dargestellt, die die gegenüber dem Gummi sehr viel höhere Schersteifigkeit der Corde belegt. Es handelt sich um den Scherversuch an einer Gummi-Cord-Lage. Die Lage wurde parallel zu den Corden verschert. Deutlich ist erkennbar, daß sich eine Art Treppe zwischen den Corden und dem dazwischenliegenden Gummi herausbildet. Es kommt zu beträchtlichen Scherungen des Gummi, während bei den Corden keine merklichen Scherdeformationen zu verzeichnen sind.

4.5.5 Berechnung der Spannungen und der Materialtangente

Aus dem Gesamtpotential, d.h. der additiven Überlagerung der diskutierten Teilpotentiale, lassen sich schließlich die 2.Piola-Kirchhoff-Spannungen und die zugehörige Materialtangente bestimmen. Die zweite Ableitung des Gesamtpotentials nach den Koordinaten von $\underline{\underline{C}}$ sei an dieser Stelle für die undeformierte Konfiguration angegeben. Es gilt:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_A \partial C_B} \right) \Big|_{\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{E}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}G^* + \frac{1}{4}K a & \frac{1}{4}K & \frac{1}{4}K & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}K & \frac{1}{2}G^* + \frac{1}{4}K \tilde{f}^2 M & \frac{1}{4}K \tilde{f}^2 M & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}K & \frac{1}{4}K \tilde{f}^2 M & \frac{1}{2}G + \frac{1}{4}K \tilde{f}^2 M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^* + G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G^* + G \end{pmatrix} \quad (71)$$

4.5.6 Parameteridentifikation

Zur Bestimmung der Parameter für das Stoffgesetz eines Cordes wurden im wesentlichen zwei Versuche zugrundegelegt. Zum einen lagen Ergebnisse aus einem einachsigen Zugversuch vor (vgl. Abb. 7), an denen das Materialverhalten in Cordlängsrichtung angepaßt wurde. Diese Parameteroptimierung wurde mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate [57] durchgeführt. Das Ergebnis dieser Anpassung ist in Abb. 10 als Gegenüberstellung von Ergebnissen einer FE-Rechnung und der umgerechneten Zugversuchskurve dargestellt.

Da die Corde nicht unmittelbar weitergehenden Versuchen und Experimenten zugänglich sind, wurde das Querkompressionsverhalten der Corde auf indirektem Wege ermittelt. Die Firma AKZO führte an Gummi-Cord-Lagen, sogenannten „Plies“ Druckversuche durch und stellte die Meßergebnisse für die Parameteranpassung zur Verfügung. Die Proben hatten eine Höhe von 1, 2 mm. Die in der Lage einvulkanisierten Corde entsprachen dem innerhalb der Luftfederfertigung bei ContiTech verwendeten Nutzfahrzeuggewebe (Teilung 0, 736 mm, Corddurchmesser 0, 55 mm, Twist 250). Die Parameter, die das Querkompressionsverhalten betreffen, wurden aus einer Finite-Element-Rechnung gewonnen. Hierzu wurde unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften ein Ausschnitt (vgl. Abb. 11) aus der Gummi-Cord-Lage modelliert. Die Höhe des FE-Netzes entspricht der halben Dicke, die Breite der Struktur entspricht der halben Teilung der im Experiment untersuchten Gummi-Cord-Lage. Hierzu war das in der FE-Rechnung verwendete Gummistoffgesetz zuvor an Kompressionsversuche von reinen Gummiprüfproben der gleichen Gummimischung angepaßt worden (vgl. Kap. 5). Der zugehörige Vergleich

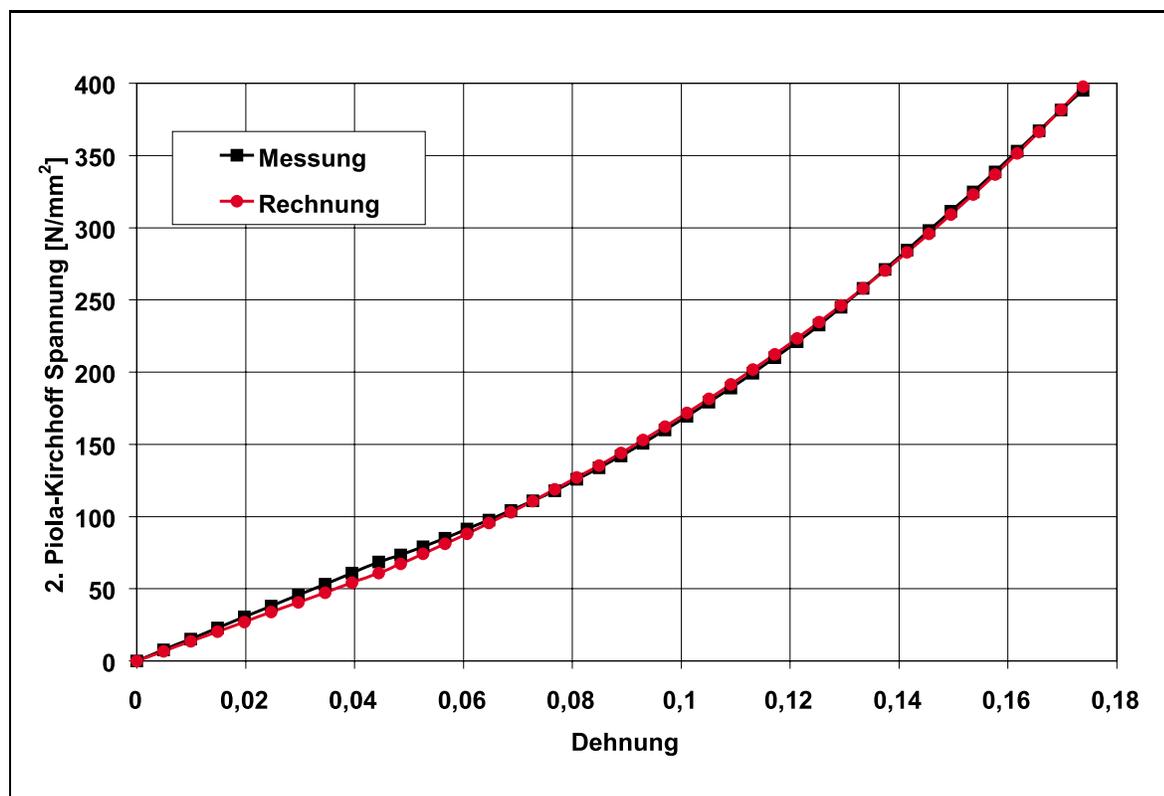


Abbildung 10: Zugversuch in Cordlängsrichtung, Vergleich zwischen FE-Simulation und Messung

der Kurven aus dem Experiment und der Simulationsrechnung für das in Abb. 11 gezeigte FE-Netz ist in der Abb. 12 dargestellt.

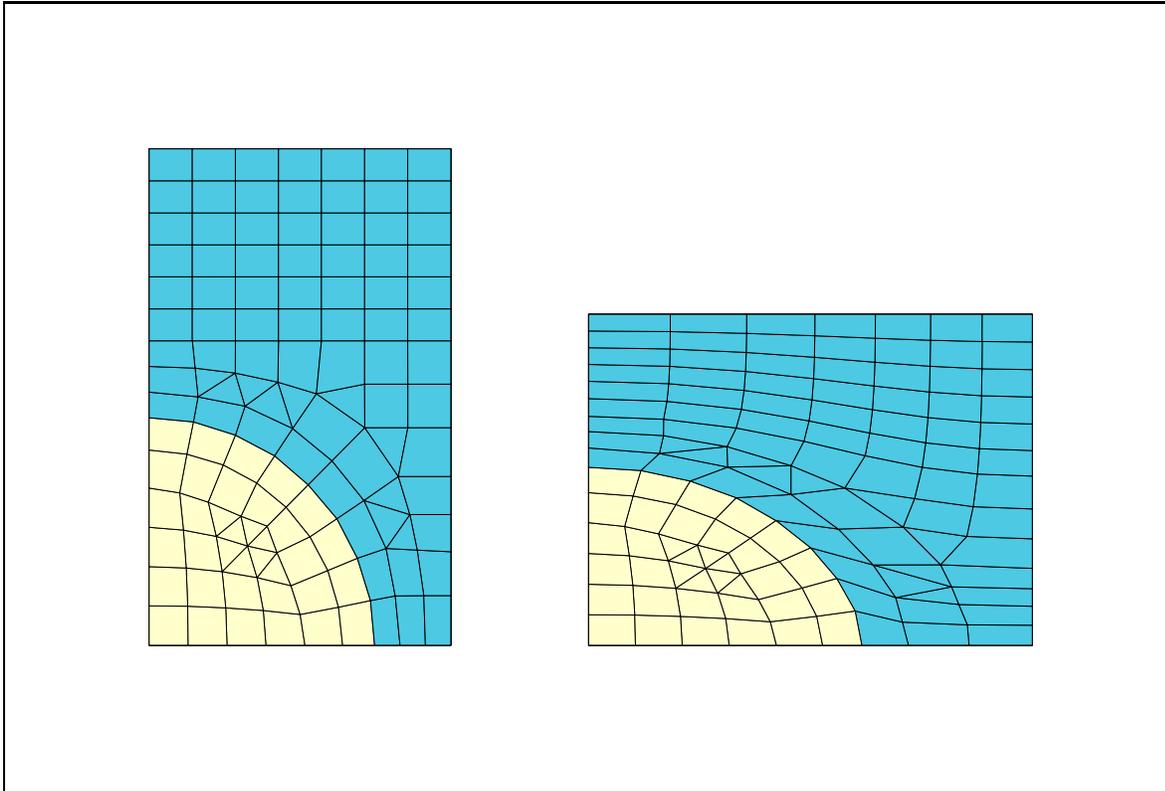


Abbildung 11: Finite-Element-Netz zum Nachrechnen des Druckversuches einer Gummi-Cord-Lage, links undeformierte Konfiguration, rechts deformierte Konfiguration

Folgender Parametersatz wurde für das Cordstoffgesetz identifiziert und in späteren Rechnungen verwandt.

a	$=$	$568.097 \frac{N}{mm^2}$
b	$=$	2.841
M	$=$	$10.000 \frac{N}{mm^2}$
w	$=$	0.900
\tilde{f}	$=$	0.850
G^*	$=$	$35.000 \frac{N}{mm^2}$
K^*	$=$	$2.800 \frac{N}{mm^2}$
k	$=$	0.150
G	$=$	$35.000 \frac{N}{mm^2}$
K	$=$	$50.000 \frac{N}{mm^2}$

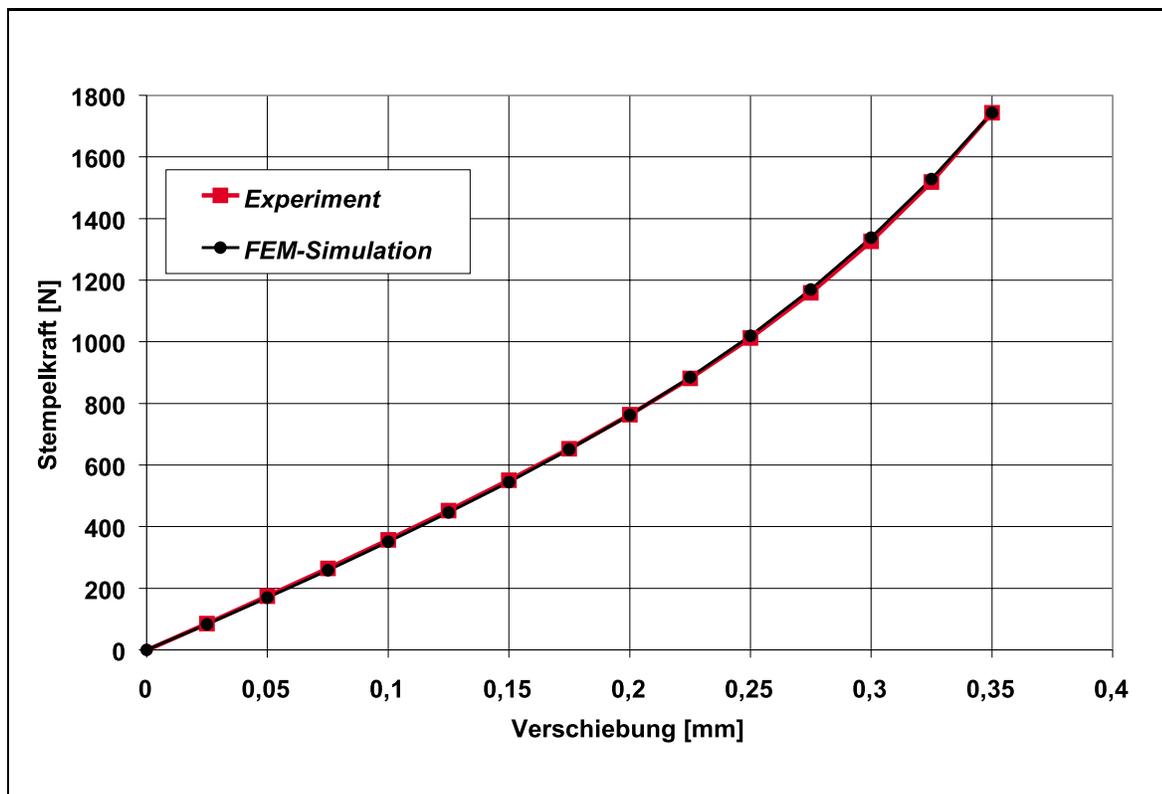


Abbildung 12: Druckversuch an einem Gummi-Cord-Ply, Vergleich zwischen FE-Simulation und Experiment

5 Stoffgesetze für den Gummi

Bei den Finite-Element Rechnungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, kamen unterschiedliche Stoffgesetze zur Anwendung. Bei der ersten Gruppe werden dissipative Effekte nicht berücksichtigt. Es handelt sich um Gesetze, die als Potentiale formulierbar sind wie z.B. das Mooney-Rivlin und das Alexander-Smith Stoffgesetz. Da es sich um Potentiale handelt, fallen Belastungs- und Entlastungspfad zusammen. Im zweiten Fall wird zusätzlich eine Abhängigkeit von der Verformungsgeschichte modelliert, wodurch eine Pfadabhängigkeit des Spannungs- Dehnungsverhaltens impliziert wird.

Die Stoffgesetze der ersten Gruppe gehen von einem isotropen hyperelastischen Materialverhalten aus. Damit ist das existierende Potential, aus dem sich die Spannungen ableiten lassen, eine Funktion der Hauptinvarianten des rechten bzw. linken Cauchy-Green-Tensors $\underline{\underline{C}}$ bzw. $\underline{\underline{b}}$. Die Hauptinvarianten dieser beiden Tensoren stimmen überein.

rein, da sie sich lediglich durch eine Drehung voneinander unterscheiden. Im Fall der hier betrachteten Gummistoffgesetze ist die Inkompressibilität zu berücksichtigen, womit sich die Forderung

$$I_3 = \det [C_{ab}] = 1 \quad (72)$$

verbindet. In Lagrangscher Betrachtungsweise läßt sich der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor berechnen zu-

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \left[\frac{d\Phi}{dI_1} \underline{\underline{E}} + \frac{d\Phi}{dI_2} (I_1 \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{C}}) \right] + p \underline{\underline{B}}. \quad (73)$$

Gleichfalls läßt sich die vorliegende Formulierung in Form eines Potentials einfach in die Eulersche Betrachtungsweise übertragen, so daß für den Cauchy-Spannungstensor folgt:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left[\frac{d\Phi}{dI_1} \underline{\underline{b}} + \frac{d\Phi}{dI_2} (I_1 \underline{\underline{b}} - \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}) \right] + p \underline{\underline{E}}. \quad (74)$$

Hierbei ist p ein noch unbestimmter Druck, der an die Randbedingungen anzupassen ist. Durch den 1. Term erhält man beispielsweise im einachsigen Zugversuch auch Spannungen senkrecht zur Belastungsrichtung. In diesem Fall ist p so anzupassen, daß diese Spannungen zu Null werden.

Zur Berechnung der Spannungen sind, wie aus den Gleichungen 73 und 74 ersichtlich ist, die Potentialfunktionen nach den Invarianten abzuleiten.

5.1 Messungen am Gummimaterial

An der Gummimischung, die bei Luftfedern der Firma ContiTech zum Einsatz kommt, wurden im Rahmen des BRITE-Projektes [4] zyklische Scher- und Zugversuche durchgeführt. Hierbei wurden sowohl im Zug- als auch im Scherversuch die Proben bis zu einem vorgegebenen Weggrenzwert belastet und gleich wieder entlastet. In den anfänglichen Zyklen zeigten sich abweichende Spannungsverläufe. Aus diesem Grund wurden die Versuchszyklen solange wiederholt, bis sich ein stationärer Kurvenverlauf im Kraft-

Verschiebungsdiagramm einstellte. Anschließend wurde der Weggrenzwert erhöht und auf gleiche Weise ein stationärer Zyklus gemessen. Beispielhaft sind für den Zugversuch die ermittelten stationären Zyklen in der Abb. 13 dargestellt. Aufgetragen ist die Cauchyspannung über dem Deformationsmaß λ . Deutlich sind die gummispezifischen dissipativen Effekte innerhalb des Gummis durch die Ausbildung von Hystereseschleifen erkennbar.

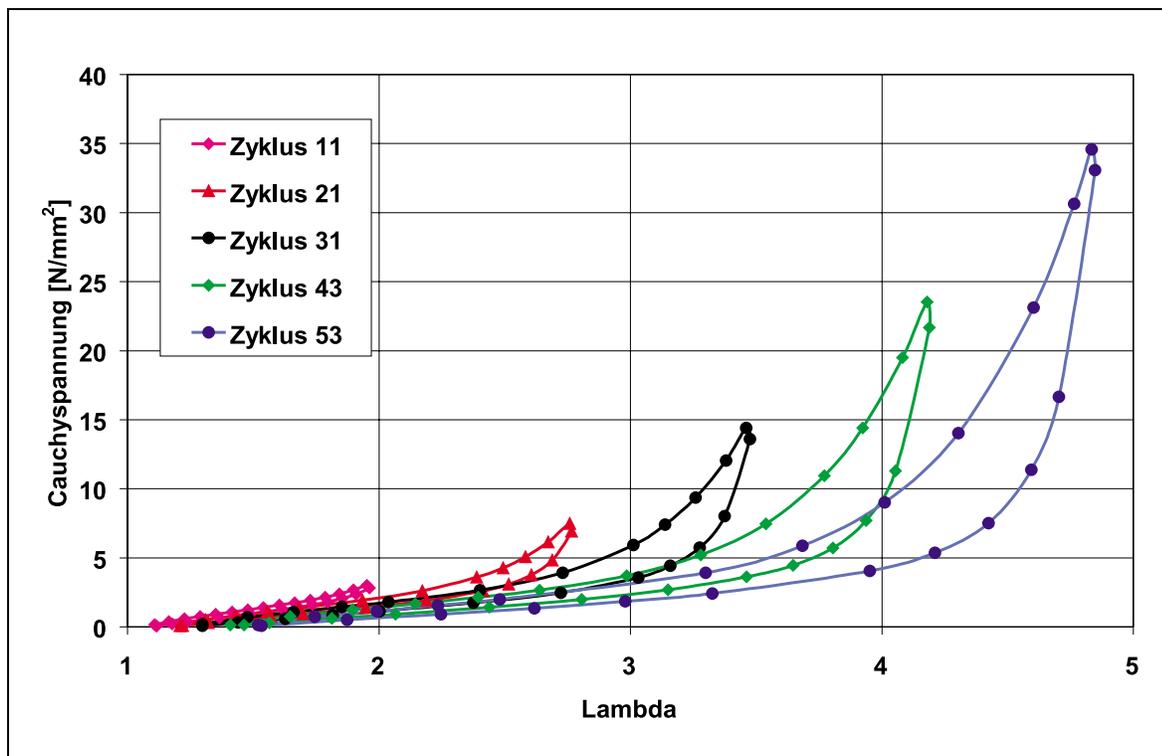


Abbildung 13: Stationäre Zyklen im Zugversuch am Gummi

In beiden Versuchen läßt sich darüberhinaus ein Entfestigungseffekt beobachten, der mit zunehmendem Weggrenzwert stärker ausgebildet ist. Die Kurven haben zunächst einen flacheren Verlauf, bis der Weggrenzwert des vorhergehenden stationären Zyklus überschritten wird und die Belastungskurve progressiv ansteigt. Die Vorgehensweise bei Durchführung dieser Versuche ist eingehend in der Arbeit von Ihlemann[20] beschrieben. Dort wird auch eine Stoffgesetzformulierung vorgestellt, die in der Lage ist, sowohl den Entfestigungseffekt als auch das Hystereseverhalten nachzubilden. Im folgenden soll nur auf die stationären Zyklen eingegangen werden. Diese wurden im Rahmen der Parameteridentifikation für die einzelnen Stoffgesetze zugrunde gelegt.

5.2 Mooney–Rivlin Stoffgesetz

Das wohl bekannteste und am häufigsten verwandte Gummistoffgesetz basiert auf einer Formulierung von Mooney und Rivlin. In seinem Ansatz von 1940 formuliert Mooney[31] folgendes Potential:

$$\Phi = \alpha(I_1 - 3) + \beta(I_2 - 3) . \quad (75)$$

Er stellt dabei folgende Forderungen an das Material:

- Isotropie des Materials,
- Inkompressibilität des Materials,
- Proportionalität der Schubspannungen zu den Verzerrungen im einfachen Schubversuch.

In der Potentialformulierung, die Rivlin [41] angibt, ist zusätzlich ein Anteil für den hydrostatischen Druck p enthalten, über den die Einhaltung der Inkompressibilität gewährleistet wird.

$$\Phi = \alpha(I_1 - 3) + \beta(I_2 - 3) + \frac{1}{2}p(I_3 - 1) \quad (76)$$

Zur Berechnung der Spannungen sind die Ableitungen des Potentials nach den Invarianten zu bilden. Für das Potential nach Gleichung 75 ergibt sich:

$$\frac{d\Phi}{dI_1} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi}{dI_2} = \beta . \quad (77)$$

Für den einfachen Zugversuch und den Scherversuch ergeben sich die Invarianten zu:

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad \text{und} \quad I_2 = 2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \quad (78)$$

bzw.

$$I_1 = K^2 + 3 \quad \text{und} \quad I_2 = I_1 . \quad (79)$$

Für die Cauchy-Spannungen im Zug- und Scherversuch folgen so:

$$\sigma = 2\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\alpha + \frac{1}{\lambda}\beta\right) \quad (80)$$

bzw.

$$\tau = 2(\alpha + \beta)K . \quad (81)$$

Die geforderte Linearität im Scherversuch ist erkennbar, wobei K das Maß ist, um welches die Probe verschert wurde. Dies ist in der Abb. 14 verdeutlicht. Gleichzeitig ist aus dieser Beziehung der bekannte Schubmodul G identifizierbar mit:

$$G = 2(\alpha + \beta) . \quad (82)$$

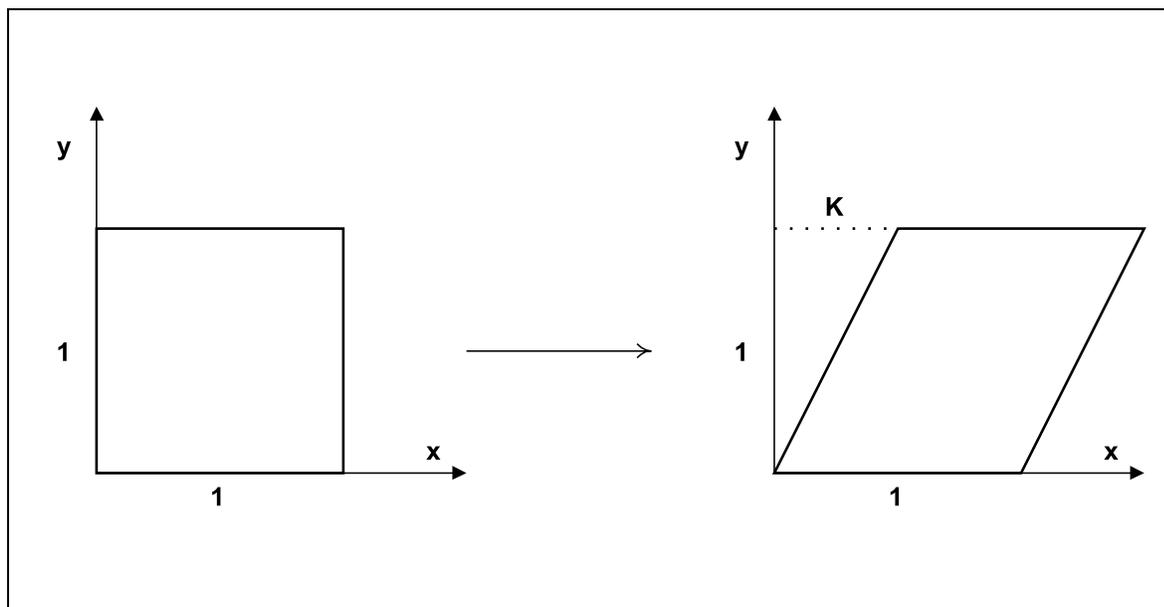


Abbildung 14: Schematische Darstellung des einfachen Scherversuches

Im Rahmen der durchgeführten FE-Rechnungen wurden die Parameter α und β an die obengenannten Experimente angepaßt. Aus der Optimierung der Stoffgesetzparameter mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ergaben sich folgende Parameter:

$\begin{aligned}\alpha &= 0.3403 \frac{N}{mm^2} \\ \beta &= 0.0127 \frac{N}{mm^2}\end{aligned}$

5.3 Alexander-Smith Stoffgesetz

In seiner Untersuchung [2] stellt Alexander für den im Bereich des Ballonflugs zum Einsatz kommenden Werkstoff Neopren die folgende Potentialformulierung vor [46]. Er entwickelt seine Form einer Energiedichtefunktion auf der Basis der Formulierung von Rivlin und Saunders [40].

$$\Phi(I_1, I_2) = K_1 \int e^{k(I_1 - 3)^2} dI_1 + K_2 \ln\left(\frac{(I_2 - 3) + \gamma}{\gamma}\right) + K_3 (I_2 - 3) \quad (83)$$

In der vorliegenden Arbeit wird ein modifiziertes Alexander-Smith Stoffgesetz verwendet, wobei γ zu 3 gesetzt wird.

$$\Phi(I_1, I_2) = K_1 \int e^{k(I_1 - 3)^2} dI_1 + K_2 \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) + K_3 (I_2 - 3) \quad (84)$$

Die für die Spannungsermittlung erforderlichen Ableitungen nach den Invarianten ergeben sich hier zu:

$$\frac{d\Phi}{dI_1} = K_1 e^{k(I_1 - 3)^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\Phi}{dI_2} = \frac{K_2}{I_2} + K_3. \quad (85)$$

Ebenso wie im vorangegangenen Kapitel lassen sich die Cauchy-Spannungen für den Zugversuch und den einfachen Scherversuch angeben:

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left\{ K_1 e^{k(I_1 - 3)^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{K_2}{I_2} + K_3 \right) \right\} \quad (86)$$

und

$$\tau = 2K \left\{ K_1 e^{k(I_1 - 3)^2} + \frac{K_2}{I_2} + K_3 \right\}. \quad (87)$$

Auch für diese Stoffgesetzformulierung wurden die Parameter anhand der genannten Versuche angepaßt. Die Parameter ergaben sich zu:

K_1	=	0.02438	$\frac{N}{mm^2}$
K_2	=	-0.18359	$\frac{N}{mm^2}$
K_3	=	0.3955	$\frac{N}{mm^2}$
k	=	0.05092	

In den Abb. 15 und 16 wird am Beispiel des Zug-, Druck- und Scherversuches die größere Flexibilität des Alexander-Smith Stoffgesetzes gegenüber der Mooney-Rivlin Formulierung deutlich. Aus diesem Grund wurden die meisten Rechnungen in dieser Arbeit unter Verwendung des Alexander-Smith Stoffgesetzes durchgeführt.

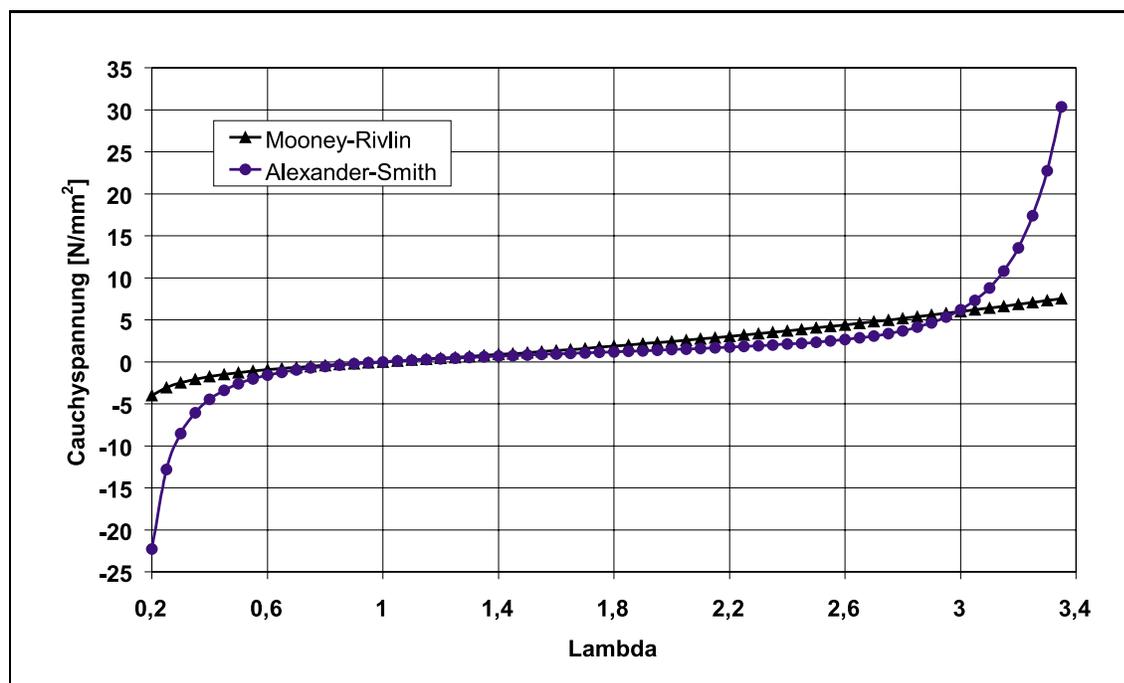


Abbildung 15: Vergleich Mooney-Rivlin und Alexander-Smith Stoffgesetz im Zug-Druckversuch

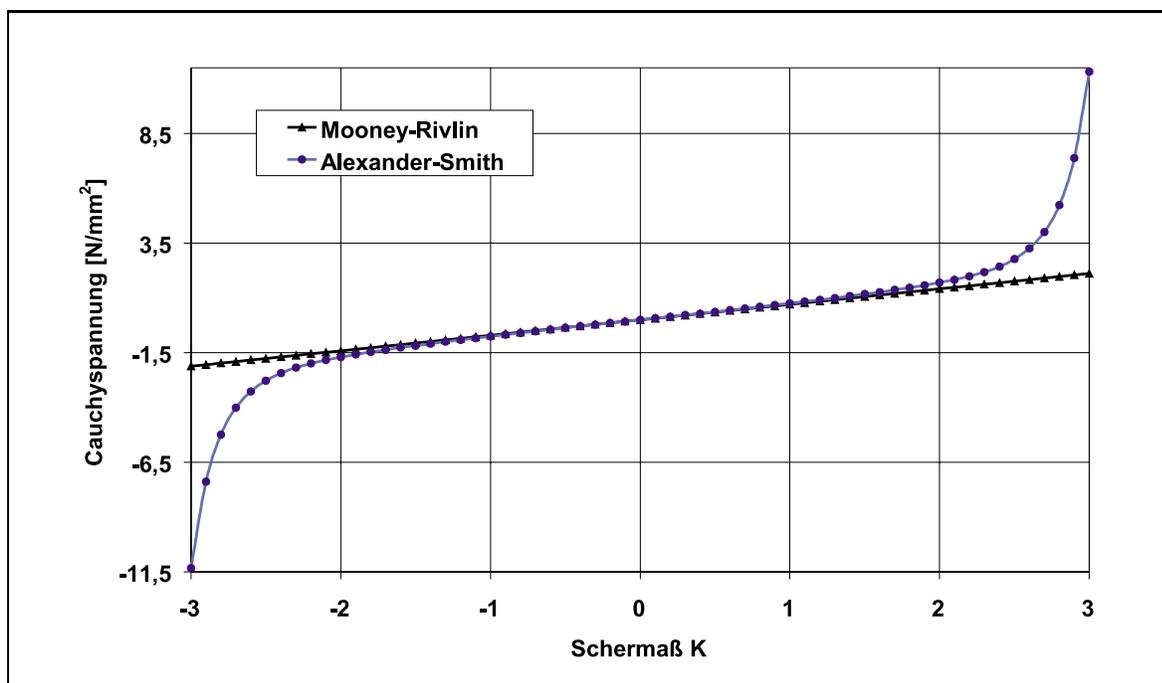


Abbildung 16: Vergleich Mooney-Rivlin und Alexander-Smith Stoffgesetz im Scherverversuch

5.4 Reduziertes Alexander-Smith Stoffgesetz mit Berücksichtigung der Vorverformung

Anhand der zyklischen Zug- und Scherverversuche der Fa. AKZO waren bereits in [23] erste Schritte unternommen worden, die Parameter im Alexander-Smith Stoffgesetz in Abhängigkeit einer Vergleichsgröße zu bestimmen. Diese Vergleichsgröße ist ein Maß dafür, wie weit das Gummimaterial in seiner Vorgeschichte bereits vorgereckt wurde, und wird auch als „Schleppzeiger“ bezeichnet. Hierbei wurde zunächst der Wert λ_{max} vorgeschlagen, der sich aus dem größten Hauptwert des zugehörigen Deformationstensors berechnet. Weitergeführt wurden diese Gedanken von Warnecke[51]. In diesem Ansatz wird die Potentialformulierung zunächst auf

$$\Phi(I_1, I_2) = K \int e^{k(I_1 - 3)^2} dI_1 \quad (88)$$

reduziert. Auf diese Weise verringert sich die Anzahl der zu bestimmenden Parameter auf zwei. Diese werden in Abhängigkeit des Schleppzeigers formuliert und berechnen sich nach einem hyperbolischen Ansatz zu:

$$K = \frac{a_1}{a_3 + b_{vM}} \quad \text{und} \quad k = \frac{a_2}{a_4 + b_{vM}}. \quad (89)$$

Das Vergleichsmaß b_v berechnet sich in Anlehnung an die Berechnung der Vergleichsspannung nach v.Mises aus den Koordinaten von \underline{b} zu:

$$b_v = \sqrt{b_{11}^2 + b_{22}^2 + b_{33}^2 + 3(b_{12}^2 + b_{13}^2 + b_{23}^2) - b_{11}(b_{22} + b_{33}) - b_{22}b_{33}} \quad (90)$$

Die Parameter a_1 , a_2 , a_3 und a_4 wurden an die Messungen angepaßt und ergeben sich zu

a_1	=	2,7195	$\frac{N}{mm^2}$
a_2	=	0,1257	$\frac{N}{mm^2}$
a_3	=	4,2692	
a_4	=	0,0001	

Bei der hier vorgestellten Formulierung des Stoffgesetzes muß hinzugefügt werden, daß es sich nicht mehr um eine Potentialformulierung handelt. Auf diese Weise weichen beispielsweise im Zugversuch der Be- und Entlastungspfad voneinander ab. In Abb. 17 sind die ermittelten Kurven bei Simulation des Zugversuches mit diesem Stoffgesetz dargestellt. Es wird deutlich, daß der oben angesprochene Entfestigungseffekt bei größer werdenden Vorreckungen modelliert werden kann. Die in der Grafik dargestellten Kurven unterscheiden sich bezüglich der maximalen Vorreckung, die das Gummimaterial bereits erfahren hat ($\lambda_0 = 2$, $\lambda_0 = 3$, $\lambda_0 = 4$, $\lambda_0 = 5$). Die Kurve, die keine Vorreckung spezifiziert, ergibt sich, wenn ein vorher unbelastetes Material kontinuierlich belastet wird. Hierbei steigt der Wert b_{vm} ebenfalls kontinuierlich an. Das vorgestellte Stoffgesetz wurde im Finite-Element-Paket „FENO“ des IfM implementiert und konnte so bei Berechnungen am Makroelement der Luftfeder verwendet werden. Ein Rechenbeispiel hierzu ist im Anhang dieser Arbeit zu finden. Hierbei zeigten sich bei qualitativ gleich guten Ergebnissen bezüglich des simulierten Entfestigungseffektes deutliche Rechenzeitvorteile gegenüber der Verwendung der Stoffgesetzformulierung nach [22], da auf die Modellierung der Hystereseigenschaften verzichtet wurde. Auf diese Weise entfällt die rechenintensive Zeitintegration im Rahmen der FE-Rechnung.

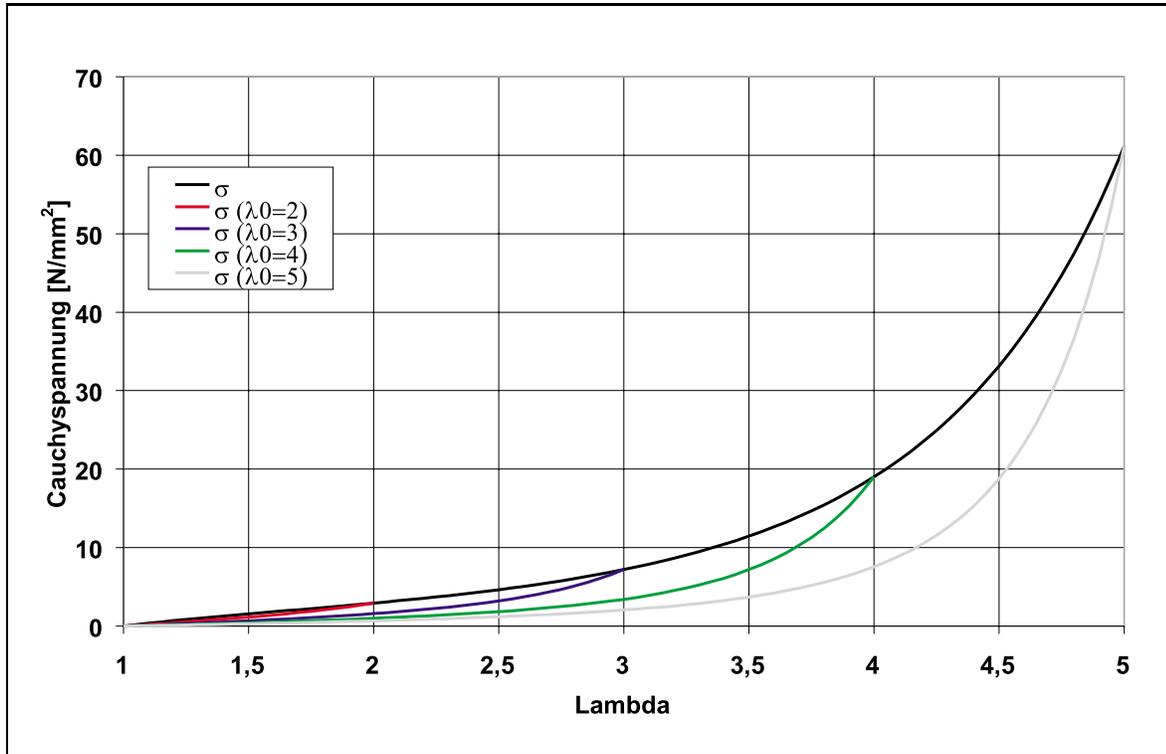


Abbildung 17: Zugversuch mit dem reduzierten Alexander-Smith Stoffgesetz

5.5 Numerische Besonderheiten

Im Rahmen der Berechnung von inkompressiblem und nahezu inkompressiblem Materialverhalten mittels Finiten Elemente entstehen numerische Probleme, die umgangen werden können, wenn innerhalb des Stoffgesetzes eine Trennung von Volumen- und Gestaltänderung durchgeführt wird. Hierzu werden die Stoffgesetzformulierungen modifiziert, indem andere Invarianten Verwendung finden.

$$J_1 = I_1 I_3^{-\frac{1}{3}} \quad J_2 = I_2 I_3^{-\frac{2}{3}} \quad I_3 = I_3^{\frac{1}{2}} \quad (91)$$

In Anlehnung an die Formulierung von Sussmann und Bathe [46] wurden sämtliche Stoffgesetze, wie sie für nahezu inkompressibles Materialverhalten verwandt werden, im Finite-Element-Programm „FENO“ mit einer sogenannten Sussmann-Bathe Erweiterung versehen. So lautet beispielsweise das Mooney-Rivlin Stoffgesetz mit dieser Erweiterung:

$$\Phi = \alpha(J_1 - 3) + \beta(J_2 - 3) + \frac{K}{2}(J_3 - 1)^2 . \quad (92)$$

Hierbei ist K der Kompressionsmodul des Materials. In Messungen der ContiTech[54] wurde dieser Modul für die in Luftfedern zum Einsatz kommende Gummimischung zu $K = 4238 \frac{N}{mm^3}$ bestimmt. Hieraus folgt mit einem Schubmodul von $G = 0,706 \frac{N}{mm^2}$ eine Querkontraktionszahl von $\nu = 0,4997$. Vollständige Inkompressibilität läge bei einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0,5$ vor.

6 Entwicklung eines homogenisierten Stoffgesetzes

6.1 Allgemeines

Wie bei anderen Bauteilen, die ein Gummi-Cord-Komposit darstellen, ist auch bei der Luftfeder der Grundbaustein die einzelne unidirektionale Gummi-Cord-Lage. Bei der Luftfeder werden zwei solcher Lagen mit gleichen aber zur Umfangsrichtung entgegengesetzt gerichteten Winkeln in der Balgwand angeordnet. Die Struktur eines Reifens ergibt sich ebenfalls durch die Schichtung vieler Gummi-Cord-Lagen unter bestimmten, die globalen Reifeneigenschaften beeinflussenden Winkeln. Die einzelne Gummi-Cord-Lage stellt eine anisotrope inhomogene Struktur dar, deren Charakterisierung weitaus komplexer ist, als die von Gummi oder Cord allein.

Will man eine Luftfeder mit Finiten Elementen berechnen, ist es nicht sinnvoll, jeden einzelnen Cord und die verschiedenen Gummibereiche einzeln zu diskretisieren. Eine solche Vorgehensweise läßt die Anzahl der Elemente und der Knoten und damit auch die Anzahl der Freiheitsgrade derart in die Höhe schnellen, daß auch Großcomputer an ihre Leistungsgrenze stoßen. Um trotzdem das Komposit aus Gummi und Cord einer Berechnung zugänglich zu machen, werden die inhomogenen Schichten, das heißt die Lagen, in denen die Corde im Gummi eingebettet sind, durch ein homogenisiertes Ersatzmaterial dargestellt. Damit werden die Materialunstetigkeiten pro Schicht verschmiert. Diese Methode der Homogenisierung wird seit langem in der klassischen Verbundtheorie angewandt [24]. Der in der mikroskopischen Betrachtung vollkommene Verbund der benachbarten Materialien führt zu kontinuierlichen Verschiebungsfeldern mit großen Verzerrungsgradienten. Die Spannungsfelder, insbesondere die Normalspannungen, weisen an den Materialübergängen Sprünge in der Größenordnung der Verhältnisse der Elastizitätsmoduln der benachbarten Materialien auf. Die Erfassung aller Einflüsse ist für eine die Struktur kennzeichnende Grundzelle möglich, verlangt aber schon für einen solchen kleinen Materialausschnitt einen erheblichen numerischen Aufwand. Für die Gesamtstruktur bleibt daher der Weg, den Verbundwerkstoff durch ein homogenisiertes Ersatzmaterial zu repräsentieren.

In der klassischen Komposittheorie wird die homogenisierte Schicht durch ein lineares orthotropes Materialverhalten charakterisiert. Das bedeutet, daß es im Material drei bevorzugte Richtungen gibt. Die erste Richtung weist in Richtung der Verstärkungs-

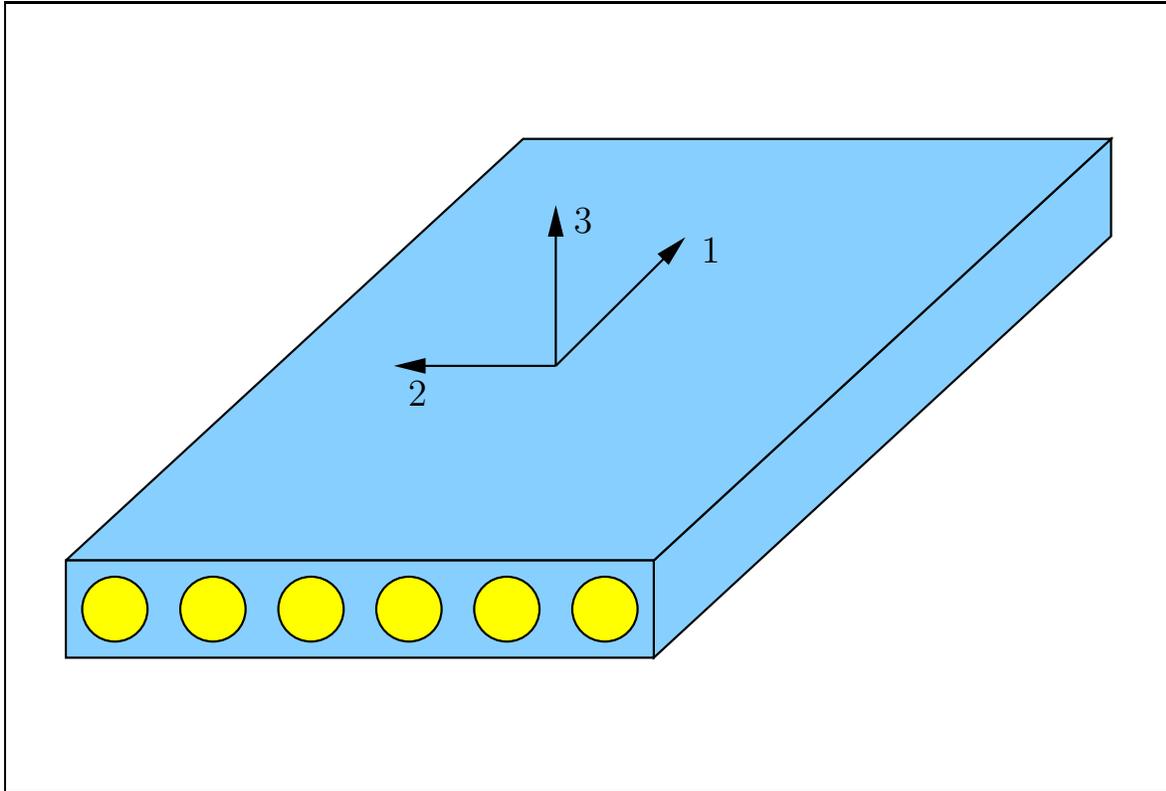


Abbildung 18: Gummi-Cord-Lage

einlagen, die zweite steht senkrecht zu den Corden innerhalb der Lage und die dritte Richtung weist in Dickenrichtung der Lage und steht auf den ersten beiden Richtungen senkrecht.

In der Literatur wird für eine verschmierte Materialbeschreibung solcher Plies vielfach auf ein verallgemeinertes Hooksches Stoffgesetz zurückgegriffen, womit von einem linear elastischen Spannungs-Dehnungsverhalten ausgegangen wird. Es gilt hier:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{D}}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (93)$$

bzw. in Koordinatenschreibweise

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} . \quad (94)$$

Hierbei ist $\underline{\underline{\underline{D}}}$ ein vierstufiger symmetrischer Materialtensor. Aufgrund dieser Symmetrien kann Gleichung 94, wie bereits erwähnt, verkürzt mit der Voigtschen Indizierung

geschrieben werden. Hierbei kann der Materialtensor mit seinen 81 Koordinaten auf eine 6 x 6 Matrix reduziert werden. Für die Beziehung zwischen den Spannungen und Dehnungen gilt dann:

$$(\sigma_A) = (D_{AB}) (\varepsilon_B) , \quad A, B = 1, \dots, 6 \quad (95)$$

Hierbei sind:

$$(\sigma_A)^T = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{xy}) \quad (96)$$

und

$$(\varepsilon_A)^T = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}) . \quad (97)$$

Die Matrix D_{AB} wird häufig auch als Materialsteifigkeitsmatrix oder Materialtangente bezeichnet. Durch Inversion der Gleichung 95 läßt sich die Abhängigkeit der Dehnungen von den Spannungen ausdrücken:

$$(\varepsilon_a) = (N_{AB}) (\sigma_B) , \quad (98)$$

wobei N_{AB} als Materialnachgiebigkeitsmatrix bezeichnet wird. Es gilt:

$$D_{AB} = N_{AB}^{-1} . \quad (99)$$

Im Fall des verallgemeinerten Hookschen Gesetzes gilt für orthotropes Materialverhalten folgende bekannte Materialnachgiebigkeitsmatrix:

$$(N_{AB}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{pmatrix} . \quad (100)$$

Im Fall der Orthotropie enthält die 6x6 Matrix 9 voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten: Drei Elastizitätsmoduln E_1 , E_2 , E_3 , drei Schubmoduln G_{12} , G_{13} , G_{23} und drei Querkontraktionszahlen ν_{12} , ν_{13} , ν_{23} . Diese effektiven Moduln hängen sowohl von den Moduln der einzelnen Materialien, hier also Gummi und Cord, als auch vom Volumenverhältnis der einzelnen Phasen innerhalb der Schicht ab. Einige Autoren [35-38] formulieren die homogenisierten Elastizitätskonstanten analytisch. Einfache, aber für faserverstärkte Materialien bei kleinen Deformationen ausreichende, Zusammenhänge werden von Halpin-Tsai[17], Gough [15] und Akasako-Hirano [1] angegeben. Die folgenden Angaben betrachten lediglich eine einzelne Lage und lassen das Materialverhalten in Dickenrichtung der Lage unbetrachtet.

Halpin-Tsai

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_c V_c + E_r (1 - V_c) \\
 E_2 &= E_r \frac{(1 + 2V_c)}{(1 - V_c)} \\
 G_{12} &= G_r \frac{G_c + G_r + (G_c - G_r)V_c}{G_c + G_r - (G_c - G_r)V_c} \\
 \nu_{12} &= \nu_c V_c + \nu_r (1 - V_c) \\
 \nu_{21} &= \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}
 \end{aligned} \tag{101}$$

Gough-Tangorra

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c V_c + E_r (1 - V_c) \\
E_2 &= 4E_r (1 - V_c) \frac{E_c V_c + E_r (1 - V_c)}{3E_c V_c + 4E_r (1 - V_c)} \\
G_{12} &= G_r (1 - V_c) \\
\nu_{12} &= 0,5 \\
\nu_{21} &= 0
\end{aligned} \tag{102}$$

Akasaka-Hirano

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_c V_c \\
E_2 &= 4E_r / 3 \\
G_{12} &= G_r \\
\nu_{12} &= 0,5 \\
\nu_{21} &= 0
\end{aligned} \tag{103}$$

Hierin sind:

E_1, E_2	Homogenisierte Elastizitätsmoduln der Lage in Cordrichtung und senkrecht dazu in der Lagenebene,
G_{12}	Homogenisierter in-plane Schubmodul der Gummi-Cord-Lage,
ν_{12}, ν_{21}	Homogenisierte in-plane Querkontraktionszahlen der Verstärkungslage,
E_c, E_r	Elastizitätsmoduln des Gummis und der Corde in Längsrichtung,
G_c, G_r	Schubmoduln des Cordes und des Gummis,
ν_c, ν_r	Querkontraktionszahlen der Corde und des Gummis,
V_c	Volumenanteil des Cordmaterials am Gesamtvolumen der Gummi-Cord-Lage.

Auch bei der Beschreibung von Gummi-Cord Schichten innerhalb von Reifensystemen werden derartige Modelle verwendet [38], [35], [49], [42], [50], [9], [32], [44], [43], [34], [10], [29], [21]. Eine gute Zusammenstellung über Forschungsarbeiten im Bereich von Gummi-Cord Kompositen findet man bei Walter [50].

Im Fall einer Rollbalgluftfeder hat man es jedoch mit großen Verformungen von zum Teil mehreren hundert Prozent zu tun, so daß die aufgeführten Beziehungen für eine Materialbeschreibung unzureichend sind. Bei den betrachteten Luftfedern beträgt die Teilung 0,736 mm und der mittlere Corddurchmesser wird mit 0,55 mm angegeben. Diese Verhältnisse bewirken ein stark progressives Ansteigen der Kraft-Verschiebungskennlinie bei Druck innerhalb der Lage, wobei dieser Effekt im wesentlichen durch die hohe Corddichte hervorgerufen wird [13]. Derartige Effekte lassen sich nicht mehr mit linearen Stoffgesetzen wie dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz adäquat beschreiben. Für das nichtlineare Stoffgesetz sind nun nicht mehr homogenisierte Materialkonstanten sondern Funktionen zu ermitteln, die die Abhängigkeit der Materialsteifigkeiten bzw. Materialnachgiebigkeiten von den Deformationen nichtlinear repräsentieren. Damit ergibt sich ein Materialsteifigkeitstensor, dessen Koordinaten selbst wieder Funktionen der Dehnungen sind.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (104)$$

Die grundsätzliche Vorgehensweise zur Ermittlung eines Ersatzstoffgesetzes für die Kompositlage ist durch folgende Schritte gekennzeichnet:

- Identifizierung der Struktur,
- Idealisierung der Struktur,
- Auswahl einer Grundzelle als charakteristischen Materialausschnitt,
- Modellierung des Ausschnittes mittels Finiten Elemente,
- Auswahl geeigneter Belastungsfälle und Durchführung von FE-Rechnungen zur Ermittlung der Spannungsdehnungsbeziehung der Schicht.

6.2 Identifizierung und Idealisierung der Struktur

Der Schnitt durch die Luftfederbalgwand zeigt die Schichtung des Komposites. Um die grundlegenden geometrischen Verhältnisse wie z.B. die Cordabstände deutlich zu machen, wurde in der schematischen Darstellung in Abb. 19 die obere Cordlage gedreht, so daß sämtliche Corde parallel zueinander angeordnet sind.

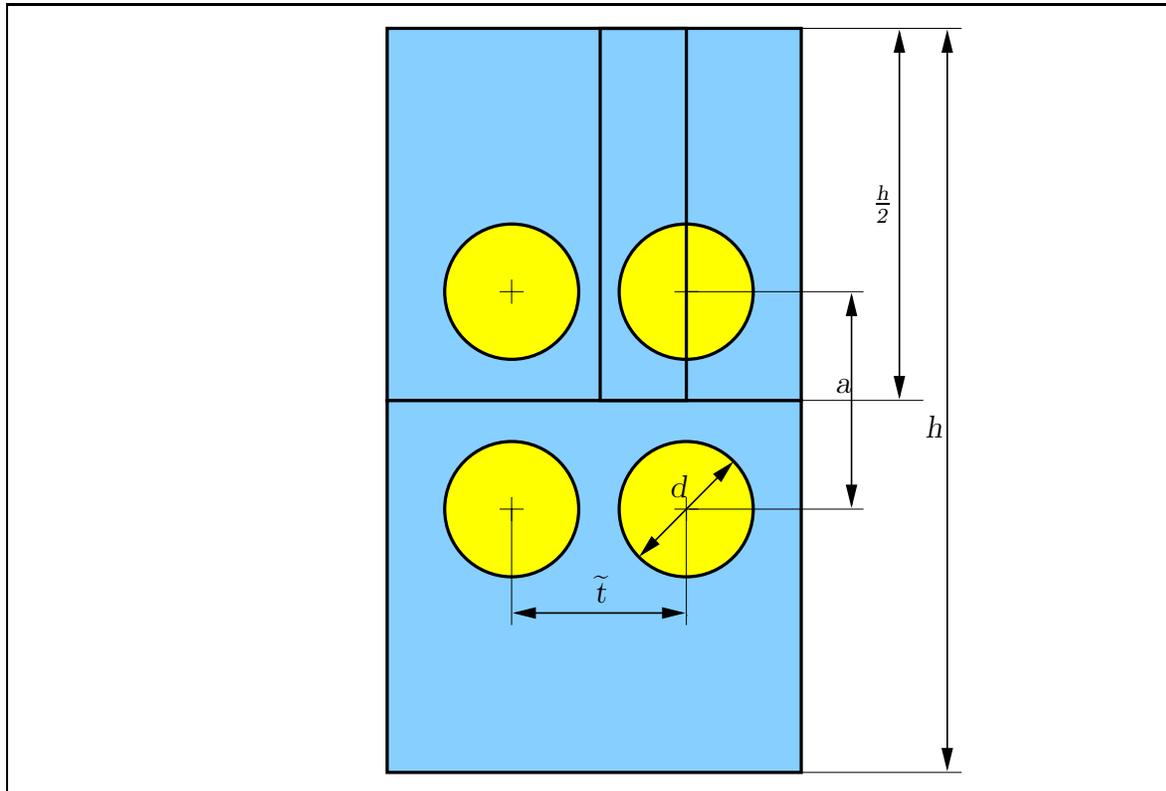


Abbildung 19: Schematische Darstellung des Balgwandaufbaus

Deutlich sind die beiden Gummi-Cord-Lagen erkennbar, die durch eine mittlere Gummischicht voneinander getrennt und von zwei äußere Gummilagen umgeben sind. Die geometrischen Abmaße der Balgwand sind für die in dieser Arbeit untersuchten Luftfedern mit Nutzfahrzeuggewebe in folgender Tabelle angegeben.

$$\begin{aligned}
 a &= 0,9 \text{ mm} \\
 d &= 0,55 \text{ mm} \\
 \tilde{t} &= 0,736 \text{ mm} \\
 h &= 3,08 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Um Rechnungen mit Hilfe der Finiten Elemente durchzuführen, wurden folgende idealisierende Annahmen der Modellbildung zugrunde gelegt:

- Der Querschnitt eines Cordes, der aus zwei vertwisteten Garnen mit jeweils 140 Filamenten besteht, wird im Model beim senkrechten Schnitt durch den Cord durch eine Kreisfläche dargestellt.

- Die Corde in der Luftfeder sind von einer Dipschicht umgeben. Diese wird im idealisierten Modell nicht berücksichtigt.
- Im Modell wird von einer idealen Haftung zwischen dem Gummi und den Corden ausgegangen.

6.3 Definition geeigneter Substrukturen

Da die unidirektionale Gummi-Cord-Lage nur bedingt experimentellen Messungen zugänglich ist, werden zur Ermittlung der Materialcharakteristika für ein verschmiertes Stoffgesetz numerische Experimente durchgeführt. Diese werden in Form von Finite-Element-Rechnungen an Substrukturen vorgenommen. Hierbei werden die Parameter für das die Gummi-Cord-Lage repräsentierende homogenisierte Materialgesetz identifiziert. Zur Definition geeigneter Substrukturen innerhalb der Luftfederbalgwand werden die Symmetrieeigenschaften des Balgwandaufbaus ausgenutzt. Die Gesamtstruktur der Luftfederbalgwand läßt sich aus Makroelementen aufbauen, welche aus zwei sich kreuzenden Corden bestehen. Ein Makroelement läßt sich in der Hälfte seiner Dicke wiederum unterteilen. Ein nochmaliges Teilen der so entstandenen Struktur in seiner Breite ergibt schließlich eine Substruktur. Aus der Substruktur kann durch Spiegelung und Drehung ein Makroelement und aus Makroelementen wiederum die gesamte Luftfeder aufgebaut werden. In Abb. 20 ist dieser Zusammenhang schematisch dargestellt.

6.4 Schichtdicke der homogenisierten Gummi-Cord-Lage

Zur Realisierung von FE-Rechnungen an der gesamten Luftfeder muß wie oben erwähnt eine Homogenisierung der Gummi-Cord-Lage vorgenommen werden. Intention für diese Rechnungen auf globaler Ebene ist es, das oben erwähnte Makroelement der Luftfederbalgwand durch ein einfaches fünflagiges Ersatzmodell zu realisieren. In Abb. 21 sind Makroelement und fünflagiges Ersatzmodell einander gegenübergestellt.

Das Ersatzmodell besteht aus 3 Gummilagen und zwei Lagen, die durch das homogenisierte Materialgesetz modelliert werden. Vorgabe ist, daß innerhalb der Gummilagen mit einem reinen nicht modifizierten Gummistoffgesetz gerechnet werden kann, dessen Parameter vorab durch Vergleich von Rechnungen und Experimenten an Gummiprüfproben

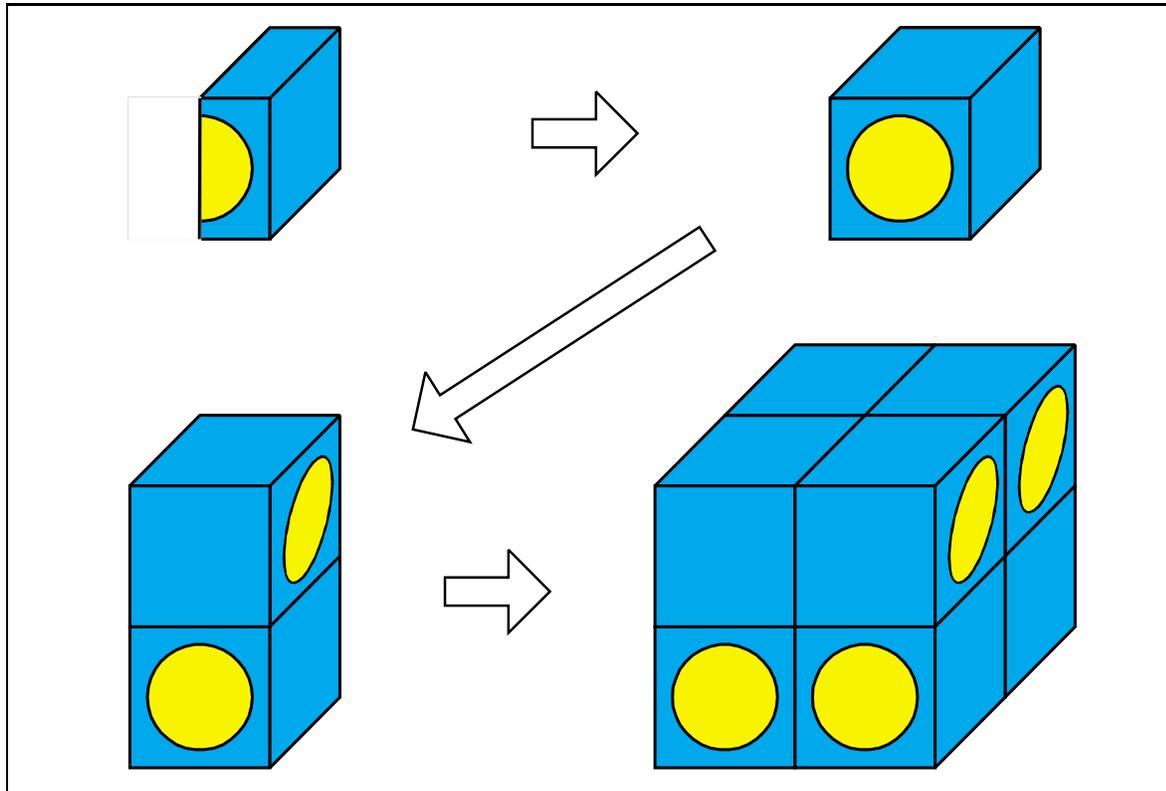


Abbildung 20: Aufbau der Luftfederbalgwand aus Substrukturen

ermittelt wurden. Diese Forderung bedingt, daß die Dicken der Verstärkungsschichten im fünfflagigem Ersatzmodell geringer ausfallen müssen als der Durchmesser eines Cordes. Nur so ist es realisierbar, daß das fünfflagige Modell dieselbe Gesamtsteifigkeit wie das Makroelement aufweist.

Für die Festlegung der Schichtdicke einer mittels eines verschmierten Stoffgesetzes modellierten Gummi-Cord-Lage wurde das Makroelement durch Finite Elemente diskretisiert. Anschließend wurden Scherversuche durchgerechnet. Diese wurden mit parallel durchgeführten Rechnungen am fünfflagigem Ersatzmodell verglichen, das durch fünf Finite Elemente diskretisiert wurde. In diesen Rechnungen wurden die Gewebeschichten durch das in Kap. 4 beschriebene Cordstoffgesetz modelliert. Hierbei wird davon ausgegangen, daß die Schersteifigkeiten des später einzusetzenden verschmierten Stoffgesetzes sich nicht wesentlich von denen des oben beschriebenen Cordstoffgesetzes unterscheiden. Beide FE-Strukturen hatten dieselben äußeren geometrischen Abmessungen. Durch Vergleich der resultierenden Scherkräfte auf den Deckflächen der beiden Strukturen ergaben sich Hinweise, in welcher Richtung die Schichtdicke der Verstärkungslage

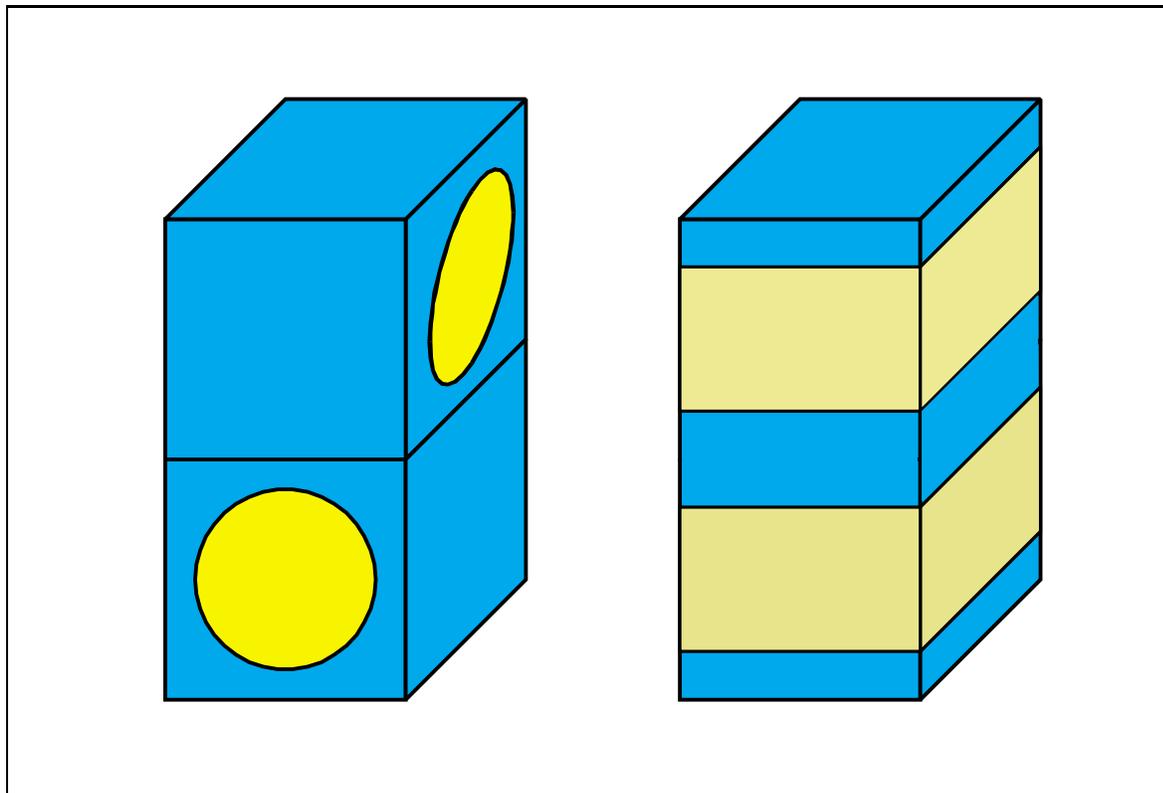


Abbildung 21: Gegenüberstellung von Makroelement und fünfflagigem Ersatzmodell.

im fünflagen Modell zu verändern war. In einem iterativen Prozeß wurden die Schichtdicken der beiden Verstärkungslagen so weit reduziert, daß sich gleiche Scherkräfte einstellen. Die erforderliche Schichtdicke für gleiche resultierende Scherkräfte auf der Deckfläche ergab sich zu 0,439 mm. Demgegenüber hat der Cord einen Durchmesser von 0,55 mm. In Abb. 22 sind die deformierten FE-Netze des diskretisierten Makroelementes und des fünfflagigen Ersatzmodelles im Scherversuch einander gegenübergestellt.

6.5 Finite Elementmodellierung der Substruktur

Im ersten Augenblick scheint es naheliegend, für die Identifizierung der Stoffgesetzparameter einer verschmierten Schicht auch nur diese Schicht in ihrer Geometrie durch Finite Elemente zu modellieren. Eine solche Struktur besäße genau die oben ermittelte Schichtdicke und würde die Cord- und Gummielemente getrennt repräsentieren. Hier entsteht jedoch das Problem, daß die Randbedingungen an einer solchen Struk-

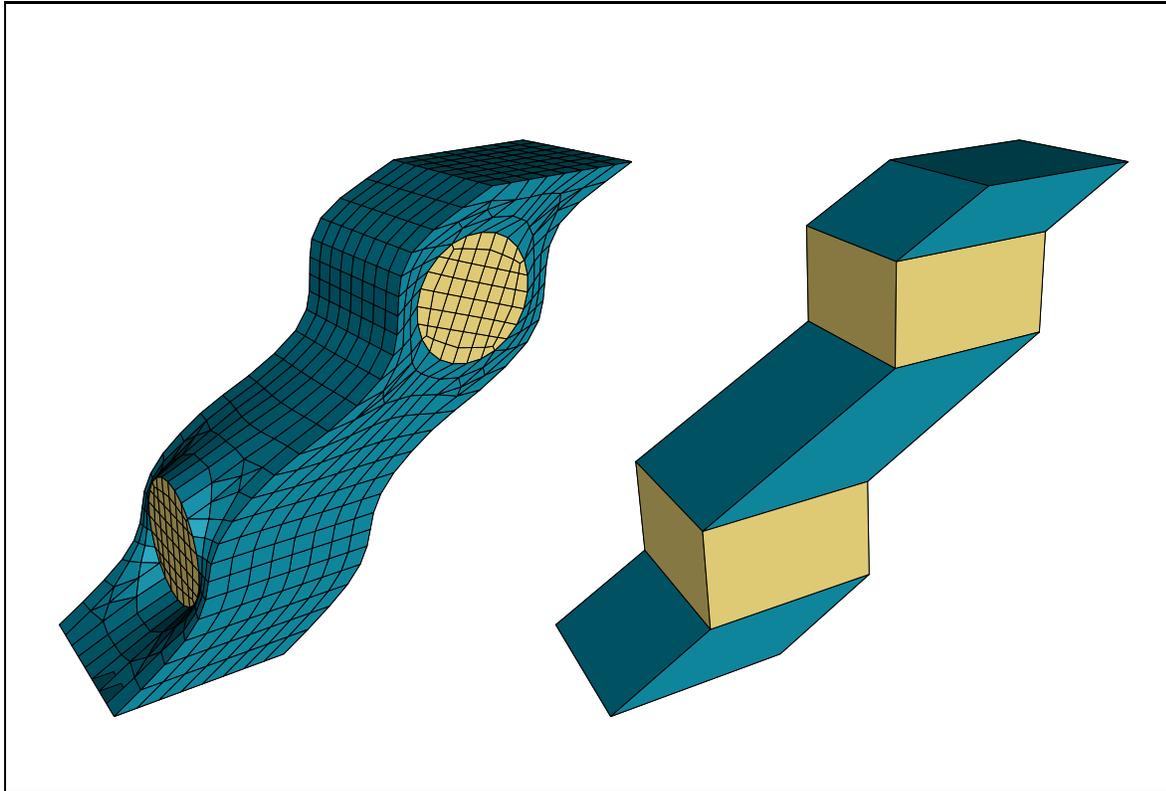


Abbildung 22: Gegenüberstellung der FE-Netze im Scherversuch

tur nicht in geeigneter Weise vorgegeben werden können. Für eine FE-Rechnung ist es erforderlich, für jeden Knoten der Struktur entweder Kraft- oder Verschiebungsrandbedingungen zu formulieren. Dies ist hier jedoch ohne weiteres nicht möglich, da beispielsweise die einfach vorgebbare Bedingung eines Ebenbleibens von Querschnitten oder der Außenflächen der Struktur mit die realen Deformationen der Gummi-Cordlage innerhalb der Gesamtluftfeder auch nicht näherungsweise wiedergibt. Eine Forderung nach ebenen Begrenzungsflächen der Struktur würde dem System also zusätzliche Zwänge auferlegen und daher in das System zusätzliche Steifigkeiten einbringen, die in der Realität nicht vorhanden sind. Demgegenüber sind die Randbedingungen an Symmetrieebenen der Gesamtstruktur eindeutig vorgebar, oder es lassen sich Vorgaben über periodische Randbedingungen machen. Aus diesem Grund werden die Rechnungen an Substrukturen durchgeführt, die die Gummi-Cordlage vollständig enthalten und durch Symmetrieebenen begrenzt sind.

In Voruntersuchungen (vgl. Kap. 7) wurde an dem Doppelwürfel bzw. Makroelement gerechnet, welches in Abb. 21 und 22 gezeigt wurde. Es handelt sich um den bereits an-

gesprochenen Ausschnitt aus der Luftfederbalgwand mit zwei sich kreuzenden Corden. Aus diesen Rechnungen ergeben sich direkt Hinweise, inwieweit sich die sich kreuzenden Cordlagen bei den typischen Verformungsmechanismen innerhalb der Luftfeder über die Dickerichtung der Balgwand gegenseitig beeinflussen.

Zur Identifikation der Stoffgesetzparameter eines verschmierten Stoffgesetzes für die Gummi-Cord-Lage wird das Makroelement zunächst bezüglich seiner Dicke in zwei Hälften geteilt. Anschließend läßt sich die Struktur wiederum bezüglich ihrer Breite in zwei Hälften teilen. Die resultierende Struktur beinhaltet dann nur noch einen halben Corddurchmesser. Auch reicht es für die Untersuchungen aus, die Tiefe der entstandenen Struktur durch eine Elementreihe zu modellieren.

Abb. 23 zeigt das Finite-Element-Netz, an dem die meisten Substrukturechnungen durchgeführt wurden. Mit Hilfe dieser Struktur können bis auf wenige Ausnahmen alle wesentlichen Charakteristika eines die Gummi-Cord-Lage repräsentierenden verschmierten Stoffgesetzes gewonnen werden. Die Abmaße der Struktur wurden oben in Bezug auf die Abb. 19 bereits erläutert. Die Tiefe der Struktur in y -Richtung ist für die Rechnung nicht erheblich. Sie wurde zu 0,1 mm gewählt.

6.6 Auswahl geeigneter Belastungsfälle

Bei der Auswahl der Lastfälle müssen die grundlegenden Effekte berücksichtigt werden, die typisch für die Deformation innerhalb einer Luftfeder sind. Zu nennen sind hier:

- Cordwinkeländerung und damit verbundene Teilungsänderungen innerhalb einer Gummi-Cord-Lage,
- Scherung des Gummimaterials innerhalb einer Gummi-Cord-Lage bei Scherungen parallel zu den Corden,
- Dehnung der Gummi-Cord-Lagen aufgrund der Innendruckbeanspruchung innerhalb der Luftfeder.

Es muß untersucht und berücksichtigt werden, inwieweit sich die genannten Lastfälle gegenseitig beeinflussen. Dabei ist es erforderlich, daß die unternommenen Substrukturechnungen den Deformationsbereich, der innerhalb der Luftfeder auftritt, sicher

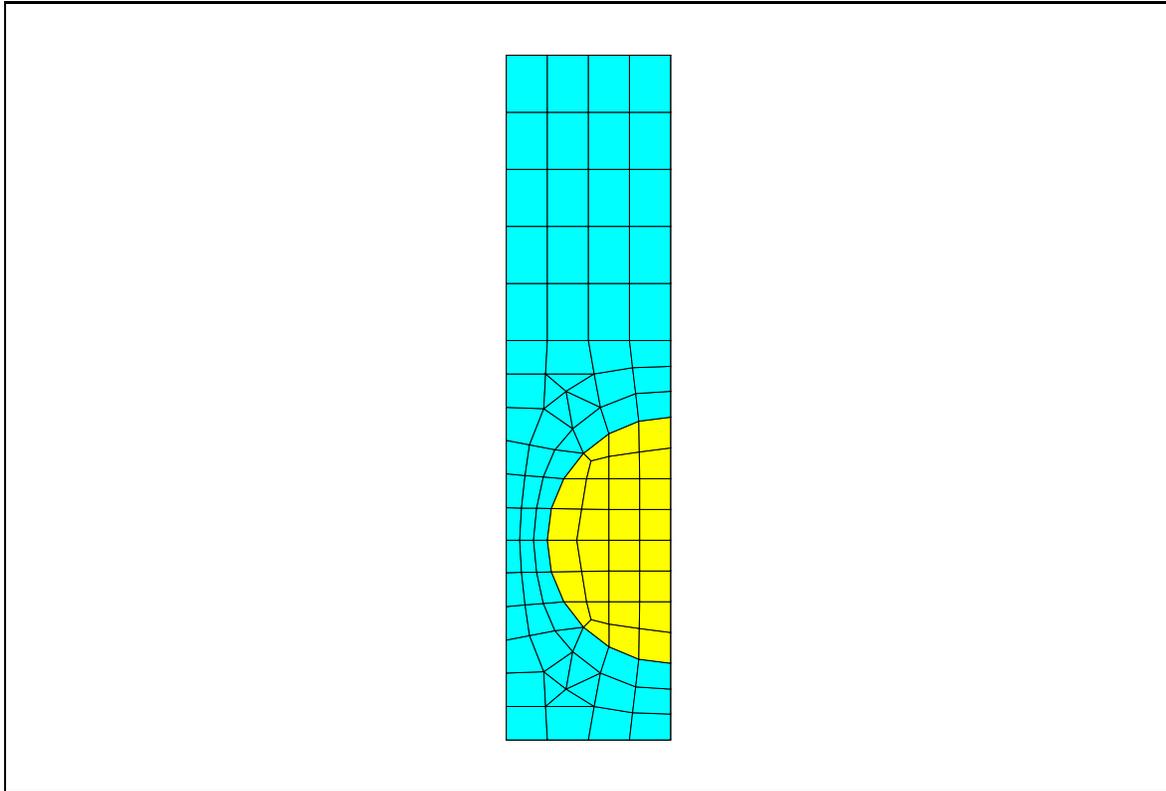


Abbildung 23: FE-Netz der Substruktur

abdecken. Die von der ContiTech [54] untersuchten Luftfederbälge unterscheiden sich hinsichtlich ihres Referenzcordwinkels ($47,5^\circ$, $50,5^\circ$ und $53,5^\circ$). Bei einem Kolbenhub auf dem Lebensdauerprüfstand ändert sich der Cordwinkel in einem Bereich von ca. $20 - 25^\circ$. In Gleichung 105 ist eine Übersichtsformel angegeben, mit der in Abhängigkeit vom Referenzcordwinkel $\tilde{\alpha}$, dem aktuellen Cordwinkel α und der Ausgangsteilung \tilde{t} die aktuelle Teilung t_{akt} berechnet werden kann.

$$t_{akt} = (1 + \epsilon_c) \tilde{t} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\alpha}} \quad (105)$$

Hierin stellt ϵ_c die Dehnung der Corde dar. Geht man vereinfachend von einer Corddehnung von Null aus, lassen sich mit dieser Beziehung sinnvolle Grenzen festlegen, in denen die Teilung im Rahmen der Substrukturrechnungen zu variieren ist. Der Zusammenhang ist in Abb. 24 graphisch dargestellt. Es ist zu erkennen, daß ausgehend von der Referenzlage die Teilung sich bei einer Verringerung des Cordwinkels zunächst geringfügig vergrößert und dann stark abnimmt. Sie beträgt bei einer Winkeländerung

von 25° nur noch 70 – 80% der Referenzteilung.

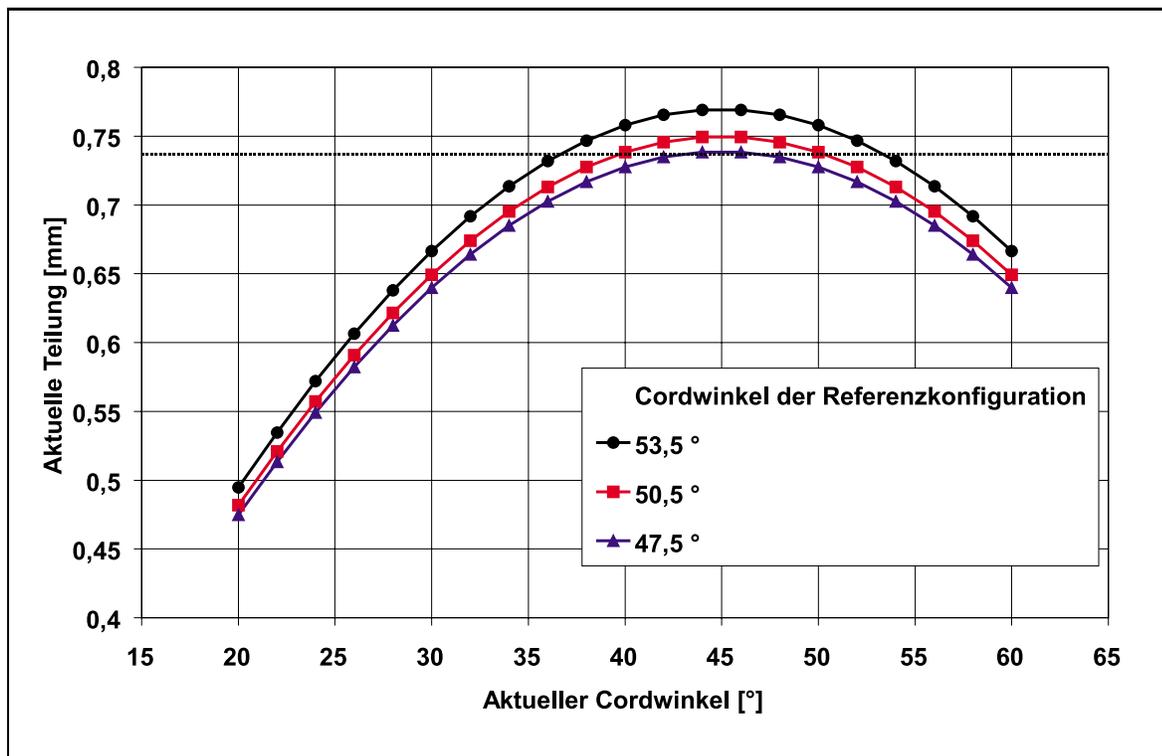


Abbildung 24: Abhängigkeit der aktuellen Teilung vom aktuellen Cordwinkel bei einer Ausgangsteilung von 0,736 mm

Das zu entwickelnde homogenisierte Stoffgesetz für die Gummi-Cord-Lage hat orthotrope Eigenschaften. Im linearen Fall ergeben sich für die drei ausgezeichneten Materialrichtungen 9 Materialkonstanten: Drei Elastizitätsmoduln, drei Schubmoduln und drei Querkontraktionszahlen. In Abb. 25 sind die Grundversuche [53] aufgezeigt, die erforderlich sind, um die Abhängigkeiten des Stoffverhaltens von den Deformationen zu identifizieren.

Das verschmierte Stoffgesetz für die Luftfeder soll in der Lage sein, die wesentlichen Effekte innerhalb der Gummi-Cord-Lage zu simulieren, die beim Abrollen der Balgwand auf dem Abrollkolben auftreten. Folgende Forderungen werden erhoben:

- In Richtung der Festigkeitsträger der Gummi-Cord-Lage wird der Zugversuch als relevant angesehen, da die Corde in der Luftfeder ausschließlich auf Zug beansprucht werden. Der im verschmierten Stoffgesetz gewählte Ansatz muß dieses Verhalten möglichst genau wiedergeben.

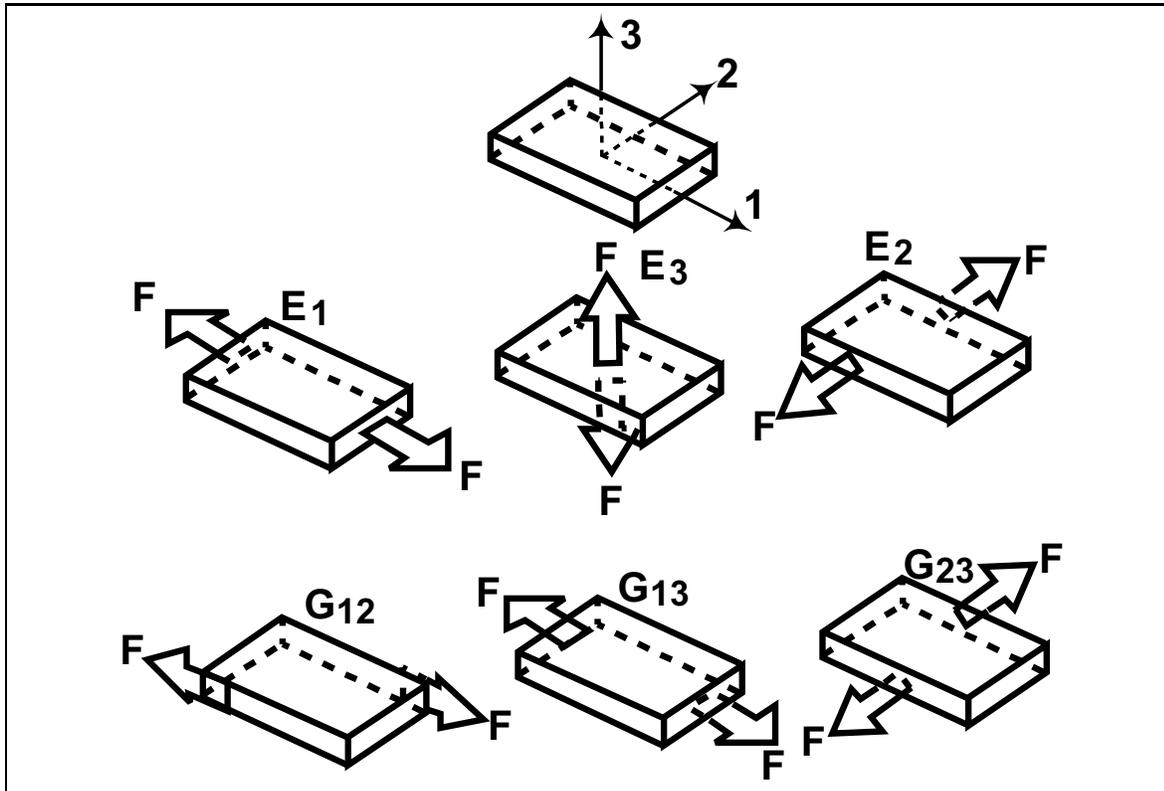


Abbildung 25: Erforderliche Belastungsfälle zur Ermittlung der Stoffgesetzcharakteristika

- In der Richtung senkrecht zu den Festigkeitsträgern innerhalb der Gummi-Cord-Lage ist der wesentliche Effekt die stark zunehmende Steifigkeit der Lage bei Verringerung der Teilung zwischen zwei Corden, die infolge der Cordwinkeländerung auftritt. Aus diesem Grund wird in dieser Richtung ein Druckversuch an der Substruktur durchgerechnet, an dessen Ergebnisse der Ansatz im verschmierten Stoffgesetz angepaßt wird.
- In Dickenrichtung der Lage wird die Luftfeder auf Druck beansprucht. Daher wird auch hier ein Druckversuch an der Substruktur durchgerechnet.
- Aus den genannten Versuchen kann gleichzeitig das Querdehnungsverhalten der verschmierten Schicht und damit die Koppelung der drei Materialhauptrichtungen bestimmt werden.
- Wesentlich ist ferner das Scherverhalten innerhalb einer Cordlage bei Scherung parallel zu den Corden. Bei der Cordwinkeländerung innerhalb der Luftfeder

kommt es neben der schon angesprochenen Teilungsveränderung auch zu erheblichen Scherungen des Gummis innerhalb der Gewebelage. Es wird gefordert, daß das homogenisierte Materialgesetz in der Lage ist, die gefundenen Spezifika möglichst genau wiederzugeben.

6.7 FE-Rechnungen an der Substruktur

6.7.1 Definition von Bereichen der Substruktur

Die in Abb. 23 dargestellte Substruktur wird in unterschiedliche Bereiche eingeteilt. Im FE-Modell lassen sich die an den Bereichen beteiligten Knoten ermitteln. Die Knoten eines Bereiches werden zu sogenannten Knotengruppen oder Gruppen zusammengefaßt. Innerhalb des Finite-Element-Programmpaketes „FENO“ des Instituts für Mechanik lassen sich über die so definierten Gruppen Rand- und Koppelbedingungen für die FE-Rechnung vorgeben. Darüber hinaus ist es möglich, für alle an einer Gruppe beteiligten Knoten die resultierenden Knotenkraftsummen in Richtung gleicher Knotenfreiheiten zu dokumentieren. Ebenso läßt sich für jedes Inkrement innerhalb der FE-Rechnung die zugehörige Verschiebung des Bereiches ermitteln. Werden nun die Knotenkraftsummen innerhalb eines Bereiches ermittelt und über den zugehörigen Verschiebungen aufgetragen, ergeben sich Kraft-Verschiebungskennlinien, die charakteristisch für die Substruktur sind.

Bei der Einteilung des Finite-Element-Netzes in Bereiche werden die Gruppen so definiert, daß die Kräfte und Verschiebungen bestimmt werden können, die später einer „verschmierten“ Gummi-Cord-Lage zuordenbar sind. Das zu entwickelnde homogenisierte Materialgesetz muß dann in der Lage sein, diese Kennlinien möglichst genau abzubilden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden in Abb. 26 die definierten Bereiche an einer schematischen Darstellung der Substruktur erläutert. Die dargestellten Bereiche sind wie folgt definiert:

- Bereich 1: Dieser Bereich umfaßt alle Außenflächen der Substruktur, die durch einen Normalenvektor in negativer x-Richtung (positive z-Richtung in Abb. 18) gekennzeichnet sind.
- Bereich 2: Der Bereich umfaßt analog zum Bereich 1 alle Außenflächen der Struk-

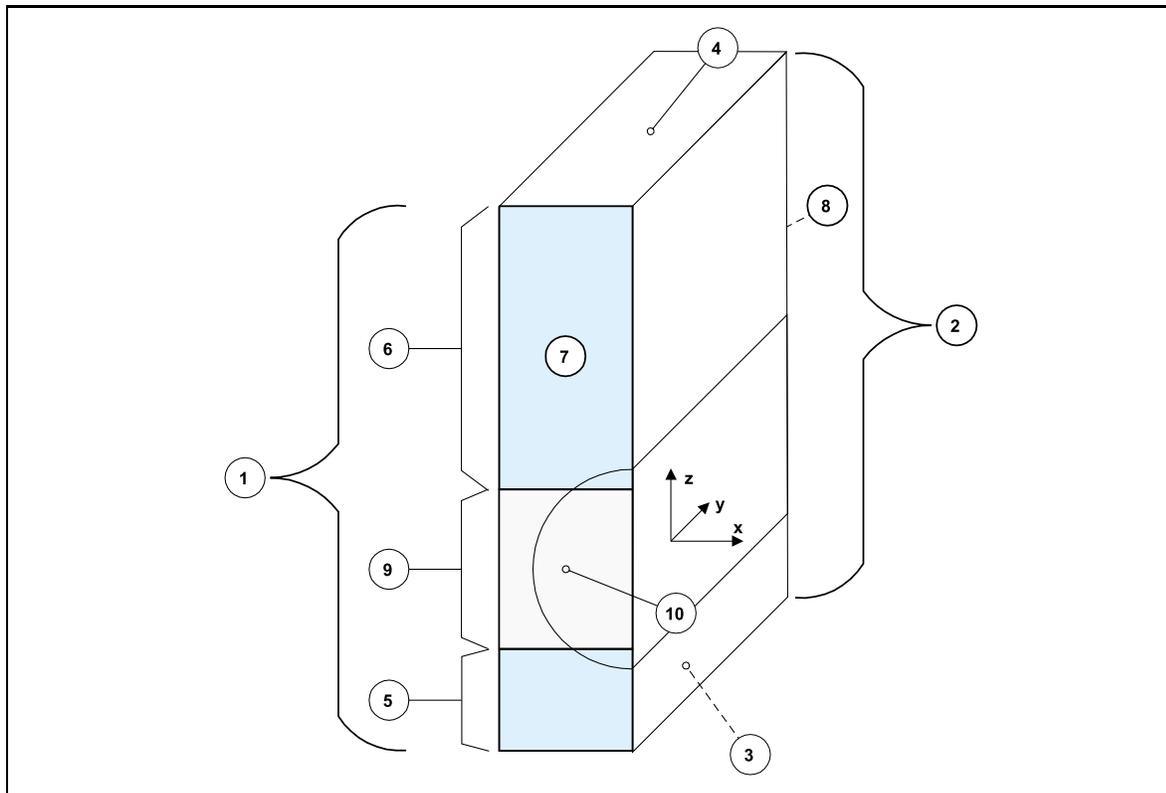


Abbildung 26: Definition von Bereichen an der Substruktur

tur mit einem Normalenvektor in positiver x-Richtung (negative 2-Richtung in Abb. 18).

- Bereich 3: Der Bereich spezifiziert die Außenfläche der Struktur mit einem Normalenvektor in negativer z-Richtung (negative 3-Richtung in Abb. 18).
- Bereich 4: Der Bereich spezifiziert die Außenfläche der Struktur mit einem Normalenvektor in positiver z-Richtung (positiven 3-Richtung in Abb. 18).
- Bereich 5: In diesem Bereich ist die negative x-Richtung (positive 2-Richtung in Abb. 18) Flächennormale. Die Höhe des Bereiches reicht vom unteren Ende der Struktur bis zur Höhe, in der die „verschmierte“ Verstärkungslage später beginnen soll.
- Bereich 6: Dieser Bereich besitzt als Flächennormale ebenfalls die negative x-Richtung (positive 2-Richtung in Abb. 18) und schließt oben an den Bereich für die „verschmierte“ Verstärkungslage an.

- Bereich 7: Innerhalb dieses Bereiches sind sämtliche Außenflächen der Struktur mit der negativen y -Richtung (negative 1-Richtung in Abb. 18) als Flächennormale zusammengefaßt.
- Bereich 8: Als Pendant zum Bereich 7 werden hier alle Außenflächen der Struktur mit der positiven y -Richtung (positive 1-Richtung in Abb. 18) als Flächennormale zusammengefaßt.
- Bereich 9: Die negative x -Richtung (positive 2-Richtung in Abb. 18) ist hier Flächennormale des Bereiches. Die Höhe des Bereiches ist durch die Schichtdicke der später „verschmierten“ Verstärkungslage definiert. Es ist erkennbar, daß der in der Darstellung angedeutete Cord durch diesen Bereich in seiner Höhe oben und unten abgeschnitten wird.
- Bereich 10: Hier wird eine Außenfläche der Struktur definiert, die in ihrer Höhe der verschmierten Verstärkungslage entspricht. Flächennormale ist hier die negative y -Richtung (negative 1-Richtung in Abb. 18).

Die beschriebenen Bereiche werden auf das FE-Modell der Substruktur übertragen. Sämtliche FE-Knoten, die innerhalb der beschriebenen Bereiche liegen, werden zu Knotengruppen zusammengefaßt. Im Rahmen der Simulationsrechnungen lassen sich dann die Knotenkraftsummen für jeden Bereich ermitteln und den zugehörigen Verschiebungen zuordnen. Auf diese Weise entstehen die bereits erwähnten, für die verschmierte Verstärkungslage charakteristischen Kraft-Verschiebungskennlinien. In den Fällen, wo Knoten der Finiten Elemente auf den definierten Bereichsgrenzen liegen, werden diese Knoten bezüglich ihrer Knotenkräfte anteilig den angrenzenden Bereichen zugeordnet.

6.7.2 Durchführung der Substrukturechnungen

Im folgenden werden die durchgeführten FE-Rechnungen beschrieben und die Ergebnisse erläutert. Die Randbedingungen, denen die Außenflächen der Substruktur genügen müssen, werden so gewählt, daß beim gedachten Zusammensetzen mehrerer verformter Substrukturen keine Klaffungen bzw. Überlappungen an den Rändern auftreten.

1. Druckversuch in x -Richtung:

Sämtliche Knoten des Bereiches 1 werden um $0,103\text{ mm}$ in positiver x -Richtung

verschoben. Dies entspricht einer Verringerung der Teilung auf 72% und einer Cordwinkeländerung von ca. 28° . Auf diese Weise wird der in der Realität auftretende Winkelbereich und die damit einhergehende Teilungsveränderung durch die FE-Rechnung vollständig erfaßt. Der unterste unter Bezug auf Abb. 26 rechte Eckknoten der Substruktur ist in allen drei Raumrichtungen fixiert. Sämtliche Knoten des Bereiches 2 sind in x-Richtung miteinander gekoppelt und damit in dieser Richtung durch den Eckknoten fixiert. In z- und y-Richtung können sich die Knoten des Bereiches 2 frei einstellen. Alle Knoten des Bereiches 4 können sich in der z-Richtung frei einstellen, so daß eine Verwölbung der Außenfläche möglich wird. Die Knoten des Bereiches 3 sind in z-Richtung fixiert. Die Knoten der Bereiche 7 und 8 mit gleicher x- und z-Koordinate sind paarweise bezüglich ihrer sämtlichen Freiheiten miteinander gekoppelt. Auf diese Weise erfahren beide Außenflächen der Struktur die gleiche Verwölbung. Als ein Ergebnis der Rechnung ist in Abb. 27 die charakteristische Kraft-Verschiebungskennlinie für den Bereich 9 dargestellt. Ein geeigneter Ansatz im homogenisierten Stoffgesetz muß in der Lage sein, dieses Verhalten zu simulieren.

2. Zugversuch in y-Richtung

Sämtliche Knoten des Bereiches 8 werden in positiver y-Richtung um $0,01\text{ mm}$ verschoben, was einer Verlängerung der Substruktur in y-Richtung um 10% entspricht. Wiederum wird der rechte untere Knoten der Substruktur dazu benutzt, die Gesamtstruktur in allen drei Raumrichtungen zu fixieren. Alle Knoten des Bereiches 7 werden in y-Richtung fixiert. Die Knoten des Bereiches 1 können sich beim Zusammenziehen der Struktur infolge der Querkontraktion nur um ein gleiches Maß in x-Richtung bewegen. Die Knoten des Bereiches 4 können sich nur um ein gleiches Maß in z-Richtung bewegen. Die Knoten des Bereiches 3 sind sämtlich in z-Richtung fixiert. Bei diesem numerischen Experiment wird die zu der aufgebrachten Verschiebung zugehörige resultierende Kraft der Elementknoten im Bereich 10 registriert. In Abbildung 28 ist die ermittelte charakteristische Kennlinie für die „verschmierte“ Gummi-Cord-Lage dargestellt.

3. Druckversuch in z-Richtung

Die Struktur wird in z-Richtung gestaucht, indem sämtliche Knoten des Bereiches 4 um ein gleiches Maß in negativer z-Richtung verschoben werden. Die Knoten des Bereiches 3 sind sämtlich in z-Richtung fixiert. Die Knoten im Bereich 2 sind

in x-Richtung festgehalten, während sich alle Knoten des Bereiches 1 nur um ein gleiches Maß in x-Richtung verschieben können. In diesem Versuch wird die resultierende Knotenkraft in z-Richtung des Bereiches 4 registriert. In dieser Richtung wird im homogenisierten Stoffgesetz ein linearer Ansatz zugrunde gelegt, so daß aus diesem Versuch ein effektiver Elastizitätsmodul bestimmt werden kann.

4. Scherung in der x-y-Ebene

Entsprechend der durch die Cordwinkeländerung hervorgerufene Scherung innerhalb der Gummi-Cord-Lage wird an der Substruktur ein Scherversuch durchgerechnet. Alle Knoten des Bereiches 1 werden hierbei um ein gleiches Maß 0,736 mm in y-Richtung verschoben. Hierdurch ergibt sich eine globale Verschiebung der Kompositlage von zwei. Als globale Scherung wird das Verhältnis der Verschiebung in y-Richtung zur Ausgangsbreite (0,368 mm) der Substruktur verstanden. Sämtliche Knoten des Bereiches 2 werden hierbei in y-Richtung fixiert. Innerhalb dieses Versuches wird die in y-Richtung resultierende Knotenkraftsumme des Bereiches 9 ermittelt.

Es zeigt sich, daß die ermittelten Scherkräfte nicht nur von der aufgebrauchten Verschiebung, sondern ebenfalls davon abhängig sind, wie weit die Substruktur zuvor in x-Richtung zusammengestaucht wurde. Aus den Rechnungen ist eine zunehmende Schersteifigkeit in Abhängigkeit von der Stauchung in x-Richtung zu verzeichnen. In Abb. 29 sind für unterschiedliche Verhältnisse von aktueller Teilung t zu Ausgangsteilung \tilde{t} die verschiedenen Scherkraft-Verschiebungskennlinien dargestellt. Noch ausgeprägter ist dieser versteifende Effekt zu beobachten, wenn die zugehörigen Spannungen über den Deformationsmaßen aufgetragen werden, wie dies in Kap. 6.8.5 in Abb. 30 geschieht.

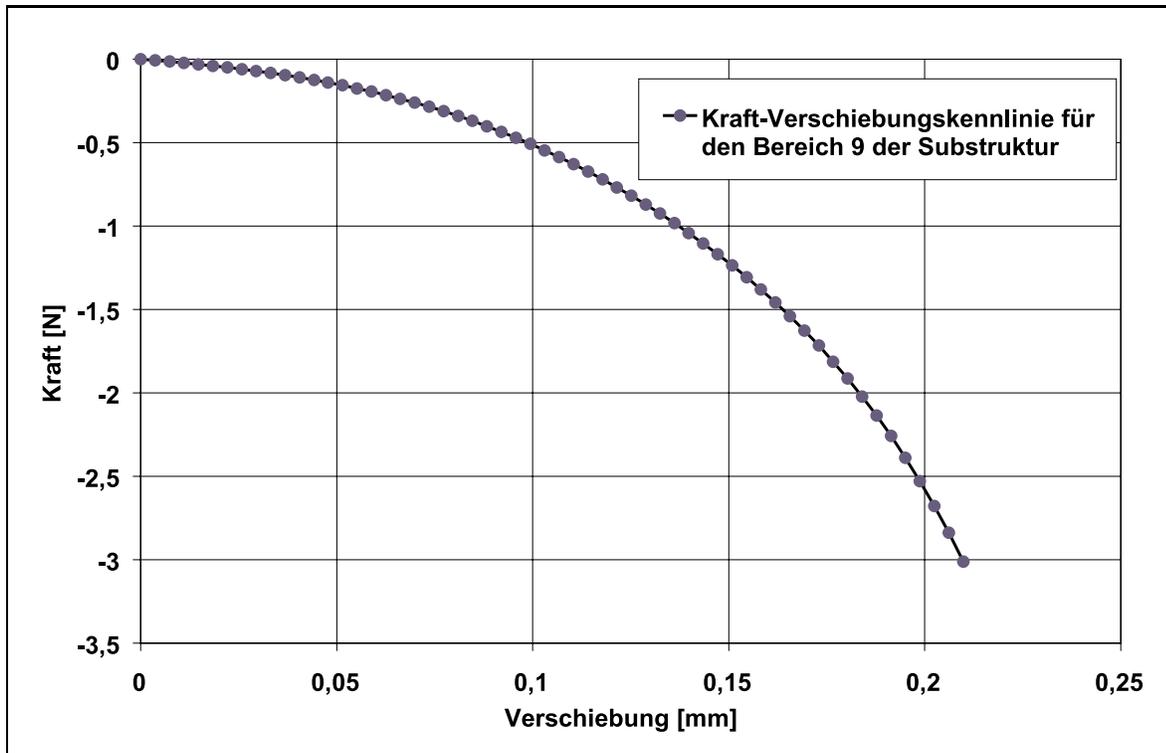


Abbildung 27: Charakteristische Kennlinie aus dem Druckversuch in x-Richtung

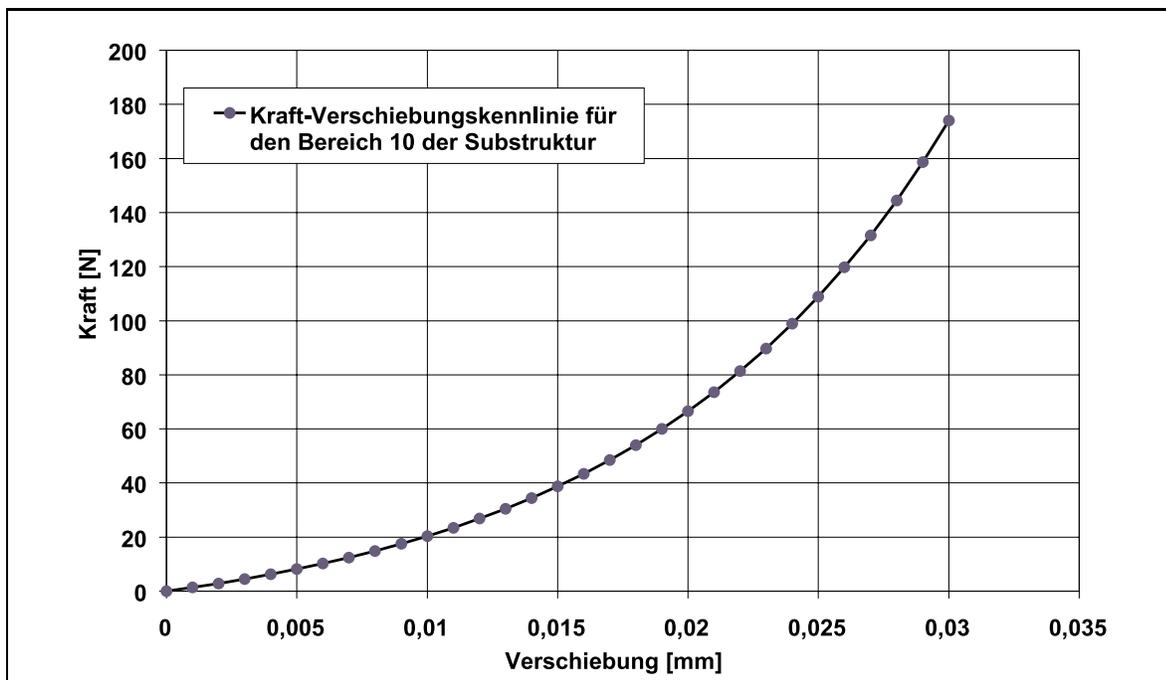


Abbildung 28: Charakteristische Kennlinie aus dem Zugversuch in y-Richtung

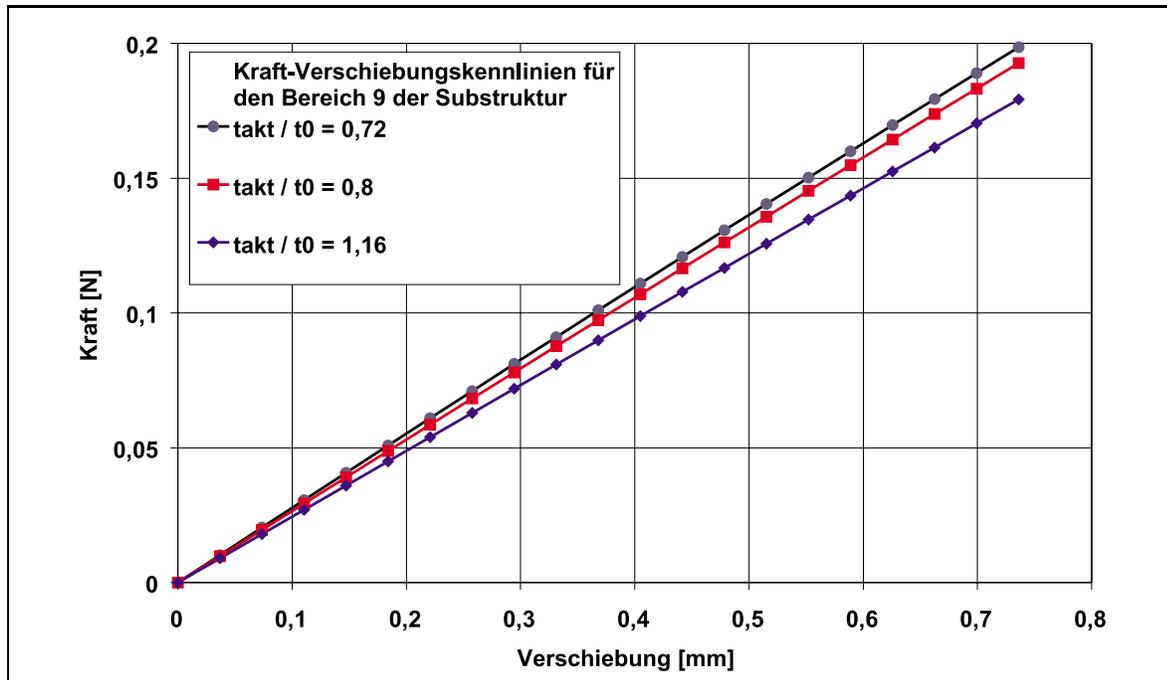


Abbildung 29: Charakteristische Kennlinien für Scherversuche bei unterschiedlichen Teilungen

6.8 Potentialfunktion für ein homogenisiertes Materialgesetz

Bei dem aufgestellten Stoffgesetz für die Gummi-Cord-Gewebelage handelt es sich um ein elastisches Materialgesetz, welches aus einem Potential abgeleitet wird. Das Gesamtpotential entsteht aus der additiven Überlagerung von Einzelpotentialen, die das Materiallängsverhalten in den drei Hauptrichtungen, das Scherverhalten und das Querdehnungsverhalten der „verschmierten“ Gewebelage beschreiben:

$$\Phi_{ges} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_k + \Phi_{s1} + \Phi_{s2} + \Phi_{s3} . \quad (106)$$

Wie in den vorangegangenen Kapiteln wird auch in den folgenden Darstellungen wieder die Voigtsche Indizierung verwendet.

6.8.1 Materialverhalten in Richtung der Corde

Aus den Berechnungen an der Substruktur (vgl. Kap. 6.7) zeigte sich, daß das Materialverhalten in Richtung der Corde im Zugversuch durch eine stark progressive Kennlinie gekennzeichnet ist. Diese Kennlinie ist in der Abb. 28 dargestellt.

Eine Potentialformulierung, die in der Lage ist, solch ein Materialverhalten wiederzugeben, wird in Anlehnung an die Formulierung aus Kap. 4 gewählt zu:

$$\Phi_1 = \frac{a}{2b} \left(\frac{e^{a(C_1-1)}}{b} - C_1 \right). \quad (107)$$

Hierbei entspricht C_1 dem entsprechenden Element des rechten Cauchy–Green-Tensors $\underline{\underline{C}}$. a und b sind Konstanten, die an die Ergebnisse der Substrukturechnung anzupassen sind. Die zugehörige Spannungsdehnungsfunktion ergibt sich aus der Ableitung des Teilpotentials nach der entsprechenden Komponente von $\underline{\underline{C}}$ zu :

$$\tilde{T}_1(\Phi_1) = 2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial C_1} = \frac{a}{b} (e^{b(C_1-1)} - 1). \quad (108)$$

Der entsprechende Platz in der Materialsteifigkeitsmatrix ergibt sich aus den zweiten partiellen Ableitungen des Potentials nach den Koordinaten des rechten Cauchy-Green Tensors. Für das gewählte Teilpotential Φ_1 ergibt sich nur bei den Ableitungen nach C_1 ein von Null verschiedener Wert:

$$D_{11}(\Phi_1) = 4 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial C_1^2} = 2ae^{b(C_1-1)}. \quad (109)$$

6.8.2 Materialverhalten quer zur Richtung der Corde

Für den Druckversuch senkrecht zur Richtung der Corde ergibt sich aus den Rechnungen an der Substruktur ebenfalls eine progressive Kennlinie, die genau wie oben durch einen Exponentialansatz in einem zweiten Teilpotential Φ_2 realisiert wird. Diese Kennlinie ist oben in Abb. 27 dargestellt. Der gewählte Potentialansatz lautet:

$$\Phi_2 = \frac{c}{2d} \left(\frac{e^{d(C_2-1)}}{d} - C_2 \right). \quad (110)$$

Wie oben läßt sich aus der Ableitung nach den Deformationen die zweite Komponente des 2.Piola-Kirchhoff-Spannungstensors berechnen.

$$\tilde{T}_2(\Phi_2) = 2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial C_2} = \frac{c}{d} (e^{d(C_2-1)} - 1) . \quad (111)$$

Auch in diesem Fall ist nur die zweite Ableitung des Teilpotentials nach der Komponente C_2 von Null verschieden. Für die Steifigkeit folgt analog zu oben:

$$D_{22}(\Phi_2) = 4 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial C_2^2} = 2ce^{d(C_2-1)} . \quad (112)$$

Im Rahmen der Parameteranpassung bleiben c und d zu bestimmende Konstanten des Ansatzes.

6.8.3 Materialverhalten in Dickenrichtung

Senkrecht zur Cordlage wird ein linear elastisches Materialverhalten simuliert. Ein solches Modell ist ausreichend, da in Dickenrichtung der Lage keine besonderen Effekte abzubilden sind. Damit folgt ein drittes Teilpotential mit

$$\Phi_3 = \frac{1}{8} E_3 (C_3 - 1)^2 . \quad (113)$$

Für die Komponente des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors und die Materialsteifigkeit folgen damit:

$$\tilde{T}_3(\Phi_3) = 2 \frac{\partial \Phi_3}{\partial C_3} = \frac{1}{2} E_3 (C_3 - 1) \quad (114)$$

und

$$D_{33}(\Phi_3) = E_3 . \quad (115)$$

Hierbei entspricht E_3 dem effektiven Elastizitätsmodul in Dickenrichtung der Gummi-Cord-Lage, der an die Substrukturechnung anzupassen ist.

6.8.4 Koppelung der Materialhauptrichtungen

Durch die bisher vorgestellten Teilpotentiale findet noch keine Koppelung zwischen den Hauptrichtungen des homogenisierten Materials statt. Daß heißt, wenn z.B. in einer gezogen wird, zieht sich das Material nicht in den senkrecht dazu stehenden Richtungen zusammen. Aus diesem Grund wird ein Teilpotential eingeführt, welches eine Koppelung der Materialhauptrichtungen realisiert:

$$\begin{aligned}\Phi_k &= \frac{1}{4}k_1(C_1 - 1)(C_2 - 1) \\ &\quad + \frac{1}{4}k_2(C_1 - 1)(C_3 - 1) \\ &\quad + \frac{1}{4}k_3(C_2 - 1)(C_3 - 1) .\end{aligned}\tag{116}$$

Hierin sind k_1 , k_2 und k_3 Materialkonstanten. Da dieses Teilpotential von drei Koordinaten des rechten Cauchy-Green-Tensors abhängt, ergeben sich bei der partiellen Differentiation folgende drei Spannungskoordinaten:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_1(\Phi_k) &= 2\frac{\partial\Phi_k}{\partial C_1} = \frac{1}{2}k_1(C_2 - 1) + \frac{1}{2}k_2(C_3 - 1) \\ \tilde{T}_2(\Phi_k) &= 2\frac{\partial\Phi_k}{\partial C_2} = \frac{1}{2}k_1(C_1 - 1) + \frac{1}{2}k_3(C_3 - 1) \\ \tilde{T}_3(\Phi_k) &= 2\frac{\partial\Phi_k}{\partial C_3} = \frac{1}{2}k_2(C_1 - 1) + \frac{1}{2}k_3(C_2 - 1) .\end{aligned}\tag{117}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen nach den Komponenten von $\underline{\underline{C}}$ liefern folgende konstante Anteile für die Materialsteifigkeit:

$$\begin{aligned}D_{12}(\Phi_k) &= D_{21}(\Phi_k) = k_1 \\ D_{13}(\Phi_k) &= D_{31}(\Phi_k) = k_2 \\ D_{23}(\Phi_k) &= D_{32}(\Phi_k) = k_3 .\end{aligned}\tag{118}$$

6.8.5 Modellierung des Scherverhaltens

Für die Scherung in den Ebenen „23“ und „13“ wird von einem linearen Spannungsdehnungsverhalten ausgegangen. Daher ergeben sich quadratische Anteile in diesen beiden Teilpotentialen:

$$\Phi_{s1} = \frac{1}{2}G_4C_4^2 \quad \text{und} \quad \Phi_{s2} = \frac{1}{2}G_5C_5^2. \quad (119)$$

Hierin bedeuten G_4 und G_5 die zugehörigen Schubmoduli. Damit folgen für die Koordinaten des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors:

$$\tilde{T}_4(\Phi_{s1}) = G_4C_4 \quad \text{und} \quad \tilde{T}_5(\Phi_{s2}) = G_5C_5. \quad (120)$$

Für die Matrix der Materialsteifigkeit ergeben sich aus diesen Teilpotentialen folgende von Null verschiedene Plätze:

$$D_{44}(\Phi_{s1}) = G_4 \quad \text{und} \quad D_{55}(\Phi_{s2}) = G_5. \quad (121)$$

Die Rechnungen an der Substruktur zeigen, daß für die Scherung in der Ebene der Verstärkungscorde ein lineares Modell nicht ausreicht. Aus diesem Grund wird ein komplizierterer Ansatz gewählt. Es zeigte sich, daß die Steigung der Scherkraft-Verschiebungskennlinie abhängig von der aktuellen Teilung ist. Noch deutlicher wird dieser versteifende Effekt, wenn die 2. Piola-Kirchhoff-Spannung über der Scherung dargestellt wird. Je enger die aktuelle Teilung ist, die als Parameter für die Kurven gewählt wurde, desto steiler verlaufen die Kennlinien. In Abb. 30 ist dies dargestellt. Geht man davon aus, daß die Spannungen und Dehnungen über einen nichtlinear von der Teilung abhängigen Schubmodul miteinander gekoppelt sind, läßt sich die Größe des Schubmoduls G_6 als Funktion der Teilung auftragen. Dieser Zusammenhang ist in der Abb. 31 dargestellt. Ein Teilpotential, das solch ein Materialverhalten abbilden kann, wird durch folgenden Ansatz beschrieben:

$$\Phi_{s3} = \frac{1}{5} \frac{G_6 C_1^3}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{5/2}} - 0,1 G_6 C_1 + 0,5 G_6 C_2. \quad (122)$$

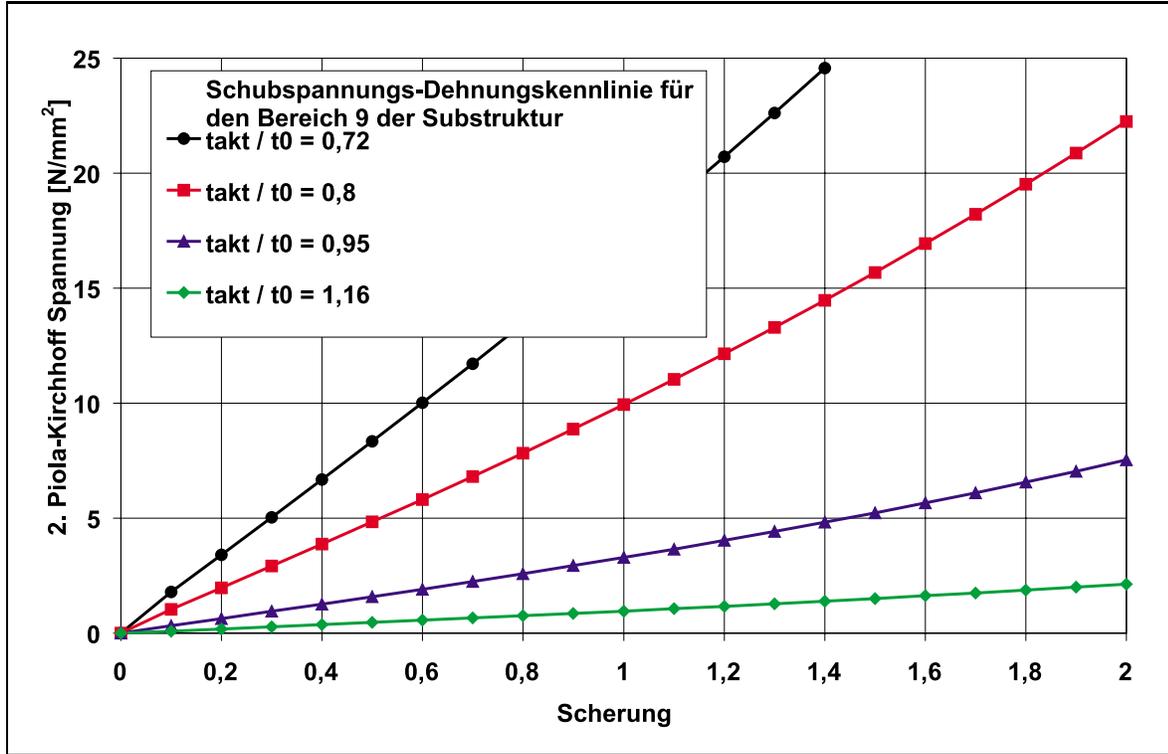


Abbildung 30: Abhängigkeit der Schubspannung von der Teilung

Die Ableitungen nach den verschiedenen Koordinaten von $\underline{\underline{C}}$ führen auf folgende Koordinaten des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors.

$$\tilde{T}_1(\Phi_{s3}) = \frac{6}{5} \frac{G_6 C_1^2}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{5/2}} - \frac{G_6 C_1^3 C_2}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{7/2}} - 0,2 G_6$$

$$\tilde{T}_2(\Phi_{s3}) = \frac{-G_6 C_1^4}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{7/2}} + G_6 \quad (123)$$

$$\tilde{T}_6(\Phi_{s3}) = \frac{G_6 C_1^3 C_6}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{7/2}}.$$

Aus den zweiten partiellen Ableitungen nach den Koordinaten von $\underline{\underline{C}}$ ergeben sich entsprechend viele von Null verschiedene Plätze in der Matrix der Materialsteifigkeit:

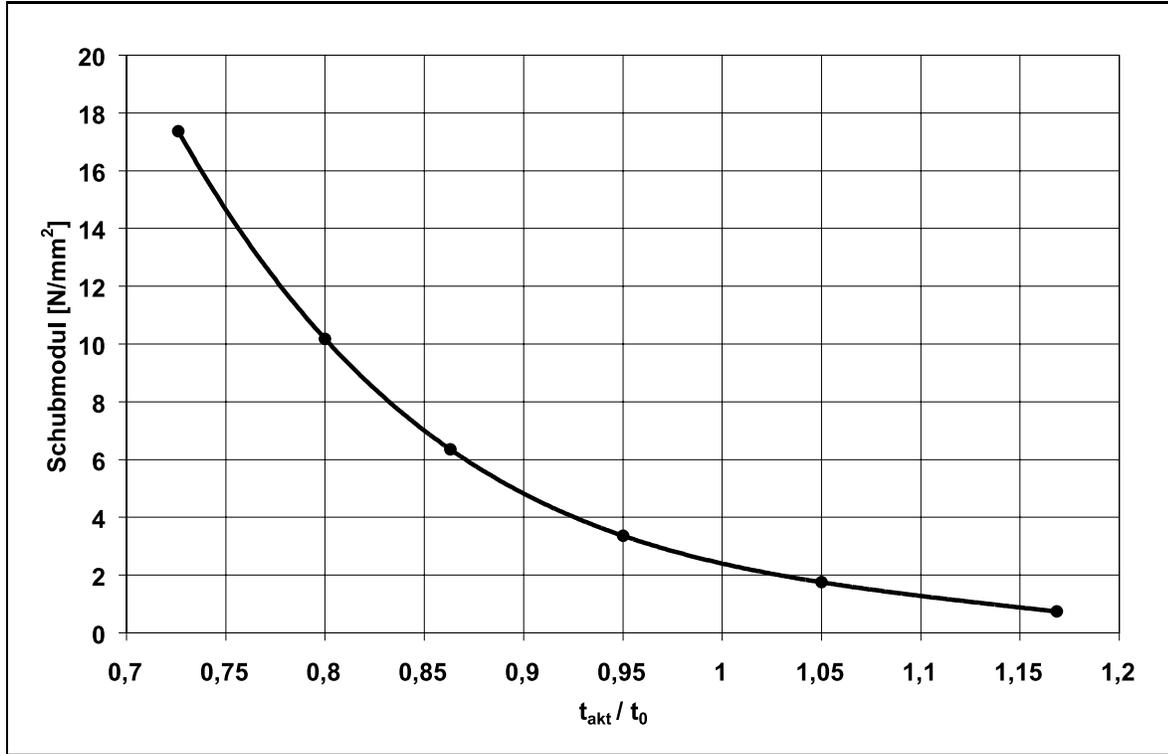


Abbildung 31: Abhängigkeit des Schubmoduls von der Teilung

$$D_{11}(\Phi_{s3}) = \frac{24}{5} \frac{G_6 C_1}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{5/2}} - 12 \frac{G_6 C_1^2 C_2}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{7/2}} + 7 \frac{G_6 C_1^3 C_2^2}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{9/2}} \quad (124)$$

$$D_{12}(\Phi_{s3}) = D_{21}(\Phi_{s3}) = -2 \frac{G_6 C_1^3}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{7/2}} + \frac{7}{4} \frac{G_6 C_1^4 C_2}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{9/2}} \quad (125)$$

$$D_{16}(\Phi_{s3}) = D_{61}(\Phi_{s3}) = 3 \frac{G_6 C_1^2 C_6}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{7/2}} - \frac{7}{2} \frac{G_6 C_1^3 C_2 C_6}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{9/2}} \quad (126)$$

$$D_{22}(\Phi_{s3}) = \frac{7}{4} \frac{G_6 C_1^5}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{9/2}} \quad (127)$$

$$D_{26}(\Phi_{s3}) = D_{62}(\Phi_{s3}) = -\frac{7}{2} \frac{G_6 C_1^4 C_6}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{9/2}} \quad (128)$$

$$D_{66}(\Phi_{s3}) = 7 \frac{G_6 C_1^3 C_6^2}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{9/2}} + \frac{C_1^3}{(C_1 C_2 - C_6^2)^{7/2}}. \quad (129)$$

Der Gesamtvektor der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen ergibt sich nun aus der additiven Überlagerung sämtlicher aus den vorgestellten Teilpotentialen abgeleiteten Spannungskomponenten. Entsprechend wird bei der Ermittlung der Materialtangente verfahren. Die folgende Tabelle stellt den Parametersatz dar, der für das homogenisierte Stoffgesetz anhand der beschriebenen Substrukturrechnungen identifiziert wurde.

a	$=$	$383,65 \frac{N}{mm^2}$
b	$=$	$2,914$
c	$=$	$6,4590 \frac{N}{mm^2}$
d	$=$	$-5,656$
E_3	$=$	$1,365 \frac{N}{mm^2}$
k_1	$=$	$0,465 \frac{N}{mm^2}$
k_2	$=$	$1,780 \frac{N}{mm^2}$
k_3	$=$	$3,728 \frac{N}{mm^2}$
G_4	$=$	$45 \frac{N}{mm^2}$
G_5	$=$	$45 \frac{N}{mm^2}$
G_6	$=$	$2,911 \frac{N}{mm^2}$

Für den einfachen Scherversuch lautet der Deformationsgradient:

$$(F_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (130)$$

Hierin wird die Scherung durch die Komponente F_{12} beschrieben. Die aktuelle Teilung zwischen zwei Corden innerhalb der Lage korrespondiert mit der Komponente F_{22} . Damit folgt für den zugehörigen rechten Cauchy-Green-Tensor:

$$(C_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{12}^2 + F_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (131)$$

Mit den aufgeführten Parametern wird in der Abb. 32 der Zusammenhang zwischen der Teilungsänderung und der Scherung für die zugehörige 2. Piola-Kirchhoff-Spannung dargestellt. Deutlich ist erkennbar, daß die Fläche in denjenigen Bereichen wesentlich flacher verläuft, in denen die Komponente F_{22} Werte über 1 annimmt. In Abb. 33 ist

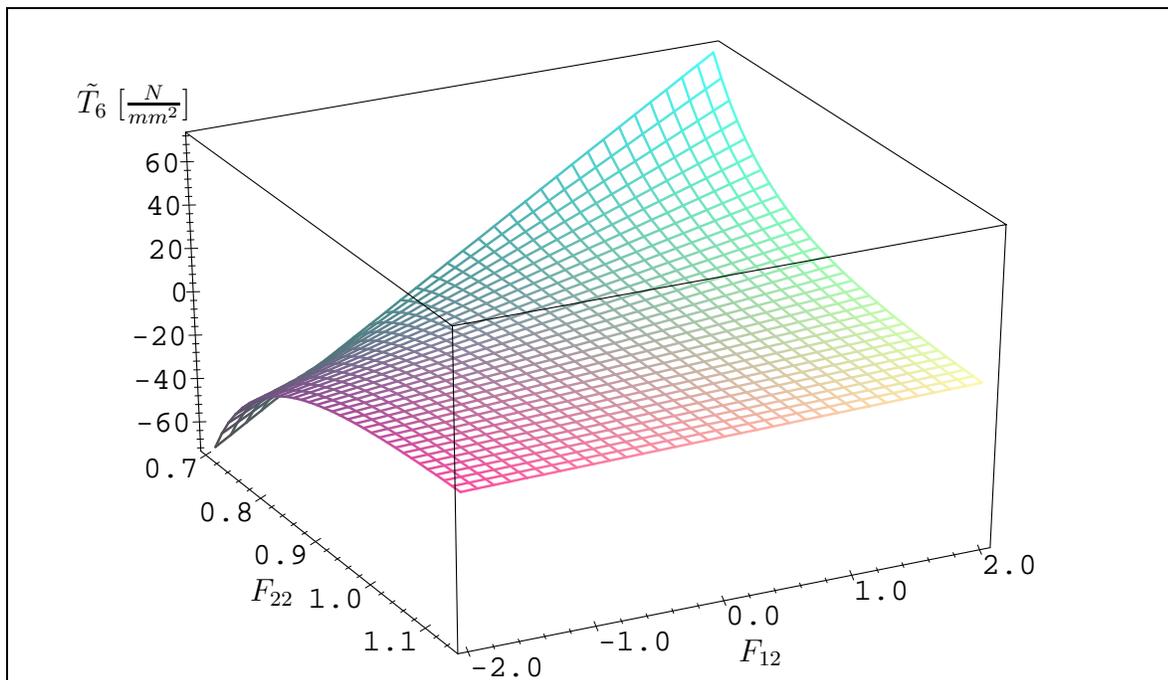


Abbildung 32: Scherversuch: Abhängigkeit der 2.Piola-Kirchhoffspannung \tilde{T}_6 [N/mm^2] von Schermaß F_{12} [-] und Teilung F_{22} [-]

die vorgestellte Formulierung des Gesamtpotentials in Abhängigkeit von F_{12} und F_{22} dargestellt. Anhand der Höhenlinien ist sehr gut erkennbar, daß das Potential im Punkt ($F_{22} = 1, F_{12} = 0$) wie erforderlich ein Minimum besitzt.

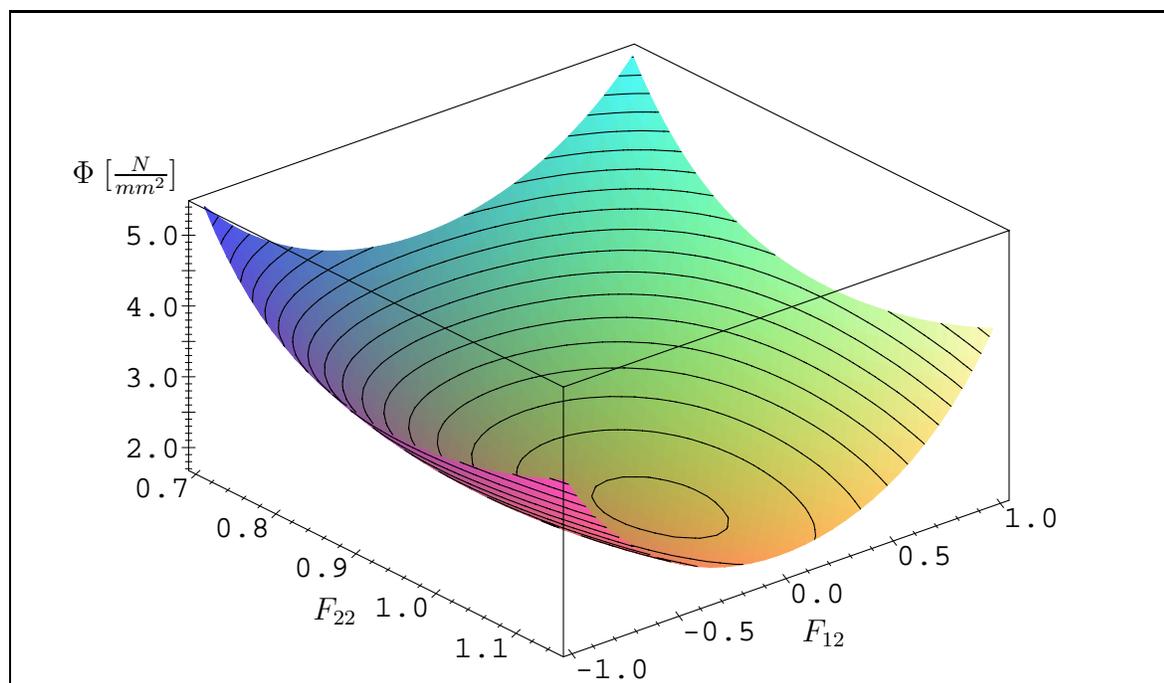


Abbildung 33: Scherversuch: Abhängigkeit des Gesamtpotentials von Schermaß F_{12} [-] und Teilung F_{22} [-]

7 Rechnungen am Makroelement

7.1 Allgemeines

Um Aussagen bezüglich der Deformationen auf mikroskopischer Ebene und der auftretenden Spannungen innerhalb einer eingebauten Luftfeder machen zu können, wurden FE-Rechnungen am Makroelement der Luftfeder durchgeführt. Es handelt sich hierbei um einen Quader, der einen Grundbaustein der Luftfederbalgwand darstellt. Dieses Makroelement wird aus zwei Würfeln gebildet und ist in der Abb. 34 dargestellt.

Im Rahmen der Berechnungen waren zunächst die Lasten und Randbedingungen an dieser FE-Struktur geeignet aufzubringen, um die realen Verhältnisse innerhalb der Luftfederbalgwand im eingebauten Zustand möglichst genau abzubilden. D.h., neben dem Innendruck waren die Vordehnung in den Corden und die Cordwinkeländerung innerhalb der Cordlagen, die mit dem Abrollvorgang der Balgwand auf dem Abrollkolben einhergeht, zu simulieren. Im Rahmen der Berechnungen wurde der dargestellte Ausschnitt aus der Luftfederwand durch verschiedene Elementierungen mittels Fini-

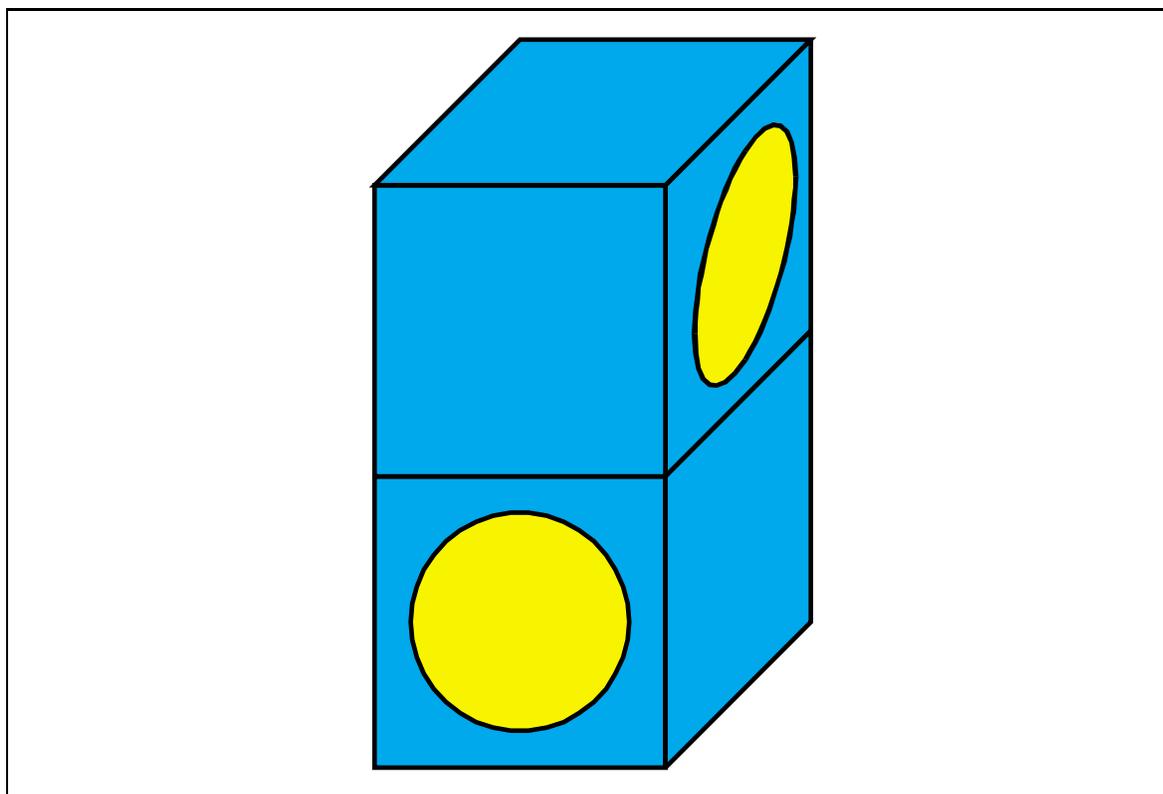


Abbildung 34: Makroelement der Luftfederbalgwand

ter Elemente modelliert. Bei der Untersuchung der Berechnungsergebnisse wurde das Augenmerk auf folgende Aspekte gerichtet:

- Wie hängen die in den Rechnungen ermittelten Ergebnisse für die Deformationen und Spannungen von der Elementierung ab?
- Wie lassen sich durch geschickte Wahl der FE-Netze und der Anordnung der Knoten vernünftige Ergebnisse erzielen, ohne die Rechenzeit zu lang werden zu lassen?
- In wieweit ist eine gegenseitige Beeinflussung der beiden Gewebelagen zu erkennen?

7.2 Optimierung der Diskretisierung

Die Luftfeder wird mit Innendruck beaufschlagt. Die aus dem Innendruck resultierenden Kräfte werden jeweils zur Hälfte von einer Cordlage aufgenommen. Für die in

Abb. 34 dargestellte FE-Struktur werden deshalb auf der Unterseite des Doppelwürfels Druckelemente angebracht. Es handelt sich hierbei um zweidimensionale 8-Knoten Flächenelemente, die den Druck sowohl in seiner Größe als auch seiner Richtung durch Oberflächenkräfte realisieren. Die Gegenkräfte zu der aus diesen Elementen resultierenden Kraftkomponente werden dadurch erzeugt, daß innerhalb der Corde jedes Finite Element mit einem zusätzlichen Belastungselement überlagert wird. Hierbei handelt es sich um dreidimensionale Brick- und Dreiecksprismaelemente, die Volumenkräfte realisieren können.

Auch wenn innerhalb dieser Darstellungen immer wieder von einem „Doppelwürfel“ die Rede ist, heißt dies nicht, daß seine Außenkanten unbedingt rechtwinklig zueinander stehen. Die Kanten werden vielmehr am Cordwinkel der Luftfeder, der im Vulkanisationszustand gewählt wurde, ausgerichtet. So verlaufen in der dargestellten Struktur die Kanten parallel zu den Corden und repräsentieren damit unmittelbar den Cordwinkel im Konfektionierungszustand der Luftfeder. Nur im Falle einer Luftfeder mit einem zur Umfangsrichtung gewählten Cordwinkel von 45° liegen tatsächlich rechte Winkel vor. Bei einer Konfiguration, in der kein rechter Winkel vorliegt, schneiden die Außenflächen des Makroelementes die Corde nicht senkrecht, so daß die entstehenden Schnittflächen keine Kreise, sondern Ellipsen darstellen.

Um die erforderlichen Volumenkräfte für die Lastelemente in den Corden einzustellen, muß zunächst das Volumen der Corde überschlägig bestimmt werden. Durch die genannte elliptische Schnittfläche, aber auch durch die Abweichung der Corde von der für die Diskretisierung idealisiert angenommenen Zylinderform ist eine genaue Bestimmung des Cordvolumens nicht innerhalb eines einzigen Schrittes möglich. Um die Abweichungen bei der Bestimmung der Cordvolumina abzuschätzen, wird in einer ersten FE-Rechnung ein Knoten der Deckfläche der Struktur festgehalten. Nachdem am Ende der Rechnung der Innendruck vollständig aufgebracht ist, wird die sich einstellende Knotenkraft an diesem Knoten kontrolliert. Ziel ist es, die Kraft dieses Knotens auf Null zu reduzieren. Wenn dieser Knoten keine Kraft mehr in Dickenrichtung der Struktur erfährt, wird der Innendruck wie gewünscht vollständig durch die zwei Cordlagen kompensiert. Erreicht wurde dies, indem nach einer ersten Testrechnung die Volumenkraft der Lastelemente entsprechend modifiziert wurde.

Am Makroelement der Luftfeder wurden in einer ersten Diskretisierung zunächst Vorstudien bezüglich der Randbedingungen durchgeführt. Hierbei stellte sich heraus, daß

das FE-Netz aufgrund seiner groben Diskretisierung (vgl. Abb. 35) nicht in der Lage ist, folgenden Effekt wiederzugeben: In dem Augenblick, in dem in der Luftfeder Innendruck aufgebracht wird, versucht der Druck das Gummi, das sich zwischen den Corden der innen liegenden Verstärkungslage befindet, in die Zwischenräume zwischen den Corden der außen liegenden Verstärkungslage hineinzuzuquetschen.

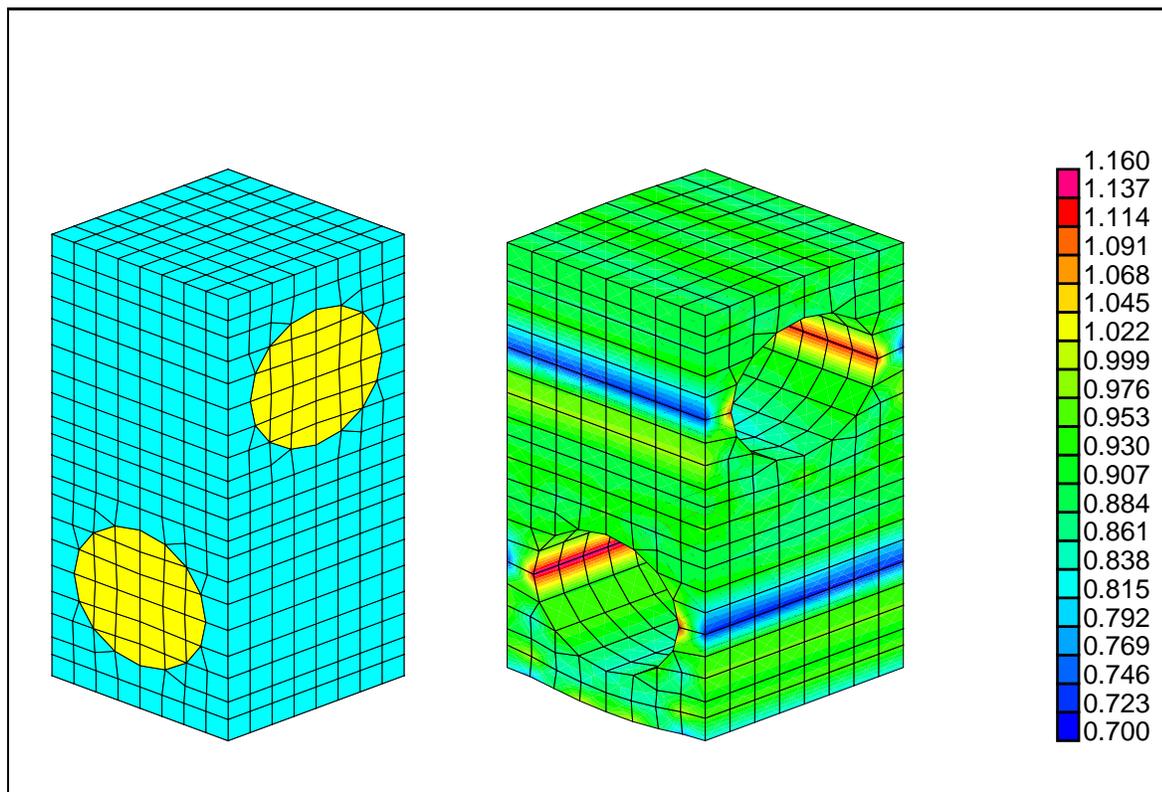


Abbildung 35: Zu grobes FE-Netz, Darstellung der dritten Invariante I_3 [-] des rechten Cauchy-Green-Tensors

Das in Abb. 35 gezeigte FE - Netz ermöglicht eine solche Bewegung des Gummis jedoch nicht, da neben den Corden jeweils nur eine Elementreihe generiert ist. Diese Elemente werden jedoch durch die äußeren Randbedingungen und die unmittelbar angrenzenden Corde an einer solchen Bewegung gehindert. Abhilfe wurde hier geschaffen, indem weitere FE-Netze generiert wurden, die die beschriebenen Zonen durch drei Reihen von Gummielementen modellieren. Die grobe Diskretisierung in Abb. 35 erweist sich zudem als unbrauchbar, wenn es darum geht, Spannungen oder Dehnungen innerhalb der Struktur zu ermitteln. Dies verdeutlicht die rechte Bildhälfte von Abb. 35, in der die dritte Invariante I_3 des rechten Cauchy-Green-Tensors dargestellt ist. Diese Invariante

hat bei inkompressiblen Materialien -wie hier verwendet- den Wert 1. Im Ergebnis der FE-Rechnung sind jedoch signifikante Abweichungen vom Wert 1 festzustellen. Der Wert für I_3 schwankt in den Elementen neben den Corden in einem Bereich zwischen 0,7 und 1,16. Auch in anderen Bereichen des generierten Netzes sind die Abweichungen erheblich.

Aus den genannten Gründen wurden weitere FE-Netze entwickelt und generiert. Ausgegangen wurde bei dieser Untersuchung der Diskretisierungseinflüsse von einer Struktur, in der die beiden Corde einen rechten Winkel bilden. Im Rahmen dieser Vorstudien wurde zunächst lediglich der Lastfall Innendruck an verschiedenen diskretisierten Netzen des Makroelementes untersucht. Die gefundene optimierte Diskretisierung wurde den weiteren FE-Studien zugrunde gelegt.

Die hier vorgestellten Netze unterscheiden sich daher durch die Anzahl der modellierten Elemente und die Anzahl der Knoten. In einigen Netzen wurden zusätzlich zu den Eckknoten der Elemente Kantenmittenknoten generiert. Neben den Angaben bezüglich der Diskretisierung der Netze sind im folgenden auch die Rechenzeiten angegeben, die auf einer Workstation HP-735 benötigt wurden, um innerhalb von zehn Inkrementen die Innendruckbelastung aufzubringen. Gerechnet wurde mit dem im Kap. 4 dargestellten Cordstoffgesetz und mit einem Gummistoffgesetz nach Mooney-Rivlin. Folgende Netze wurde zur Berechnung verwendet:

- Netz 1:
 - Verwendete Elementtypen: 8-Knoten Brickelemente, 6-Knoten Dreieckprismen
 - Anzahl der Elemente: 3840
 - Anzahl der Knoten: 5325
 - Seitenmittenknoten: keine
 - Rechenzeit: 0:41:49,54 [h:m:s]

- Netz 2:
 - Verwendete Elementtypen: 16-Knoten Brickelemente, 12-Knoten Dreieckprismen
 - Anzahl der Elemente: 3840

- Anzahl der Knoten: 8095
- Seitenmittenknoten auf allen Kanten der Elementflächen, die Stirnflächen des Quaders sind
- Rechenzeit: 4:42:24,25 [h:m:s]

- Netz 3:
 - Verwendete Elementtypen: 8-Knoten Brickelemente
 - Anzahl der Elemente: 4660
 - Anzahl der Knoten: 6287
 - Seitenmittenknoten: keine
 - Rechenzeit: 3:36:53,87 [h:m:s]

- Netz 4:
 - Verwendete Elementtypen: 8-Knoten und 14-Knoten Brickelemente, 10-Knoten und 12-Knoten Dreieckprismen
 - Anzahl der Elemente: 3840
 - Anzahl der Knoten: 6547
 - Seitenmittenknoten auf allen Kanten der Elementflächen, die Stirnflächen der Elemente sind
 - Rechenzeit: 0:59:45,06 [h:m:s]

- Netz 5:
 - Verwendete Elementtypen: 8-Knoten Brickelemente, 10-Knoten Dreieckprismen
 - Anzahl der Elemente: 3648
 - Anzahl der Knoten: 5339
 - Seitenmittenknoten: nur in Gummidreiecksprismen, in denen starke Verzerrungen auftreten
 - Rechenzeit: 0:44:30,10 [h:m:s]

Auf den Abb. 36 bis 38 sind die Ergebnisse der FE-Rechnungen dargestellt. Die Netze sind hierbei in ihrer Frontalansicht abgebildet, wobei auf eine perspektivische Darstellung verzichtet wurde. Daher erscheint die Struktur zweidimensional. Die Corde wurden für die Ergebnisdarstellung ausgeblendet.

Die Ausblendung der Corde in der Ergebnisdarstellung ist erforderlich, da in ihnen aufgrund ihrer im Vergleich zum Gummi um Zehnerpotenzen höheren Steifigkeit wesentlich höhere Spannungen auftreten. Stellt man die Spannungen im Gummi- und Cordmaterial gleichzeitig in einem Ergebnisplot dar und orientiert sich bei der Skalierung an den in der Gesamtstruktur auftretenden Maximal- und Minimalwerten, lassen sich die Spannungen im Gummi nicht mehr differenziert ausweisen. Bei der Spannungsanalyse an Kompositstrukturen ist zudem darauf zu achten, daß eine Interpolation von skalar dargestellten Spannungskomponenten nicht über die Grenzflächen der Materialien hinweg geschehen darf. Aus diesen Gründen wird bei der Untersuchung von Spannungen und Dehnungen immer nur eines der Materialien im Ergebnis dargestellt.

Als Ergebnis der Berechnungen ist jeweils die Spannung σ_{zz} in Dickenrichtung dargestellt, die aufgrund des an der Bodenfläche durch Lastelemente simulierten Druckes hervorgerufen wird. Der Höhe des Druckes entsprechend wird eine einheitliche Spannung von $0,98 \frac{N}{mm^2}$ an der Bodenfläche der Struktur aufgegeben.

- Das Netz 1 zeigt, daß die Diskretisierung der Struktur in diesem Fall unzureichend ist. Deutlich läßt sich erkennen, daß die in der Struktur modellierten Dreiecksprismen eine Blockade bewirken. Dies kommt dadurch zustande, daß sie aufgrund ihrer geringen Knotenanzahl -es sind keinerlei Kantenmittenknoten vorgesehen- praktisch keine Freiheiten mehr besitzen, um sich durch eine Deformation der äußeren Belastung anzupassen. So entstehen symmetrisch um den Cord herum Blockadekeile. Innerhalb dieser Blockadezonen springen die Spannungen von Element zu Element extrem hin und her. Auch wenn die Rechenzeit für dieses Netz die geringste von allen Netzen ist, ist die Analyse von Spannungen mit einer solchen Diskretisierung des Makroelementes nicht sinnvoll möglich. Die Rechenzeit für dieses Netz beträgt ca. 42 Minuten.
- Das Netz 2 zeigt demgegenüber keine Blockadeeffekte mehr. Es liefert einen harmonischen kontinuierlichen Verlauf in den Spannungen und ist daher zur Analyse von Spannungen innerhalb der den Cord umgebenden Gummimatrix gut geeig-

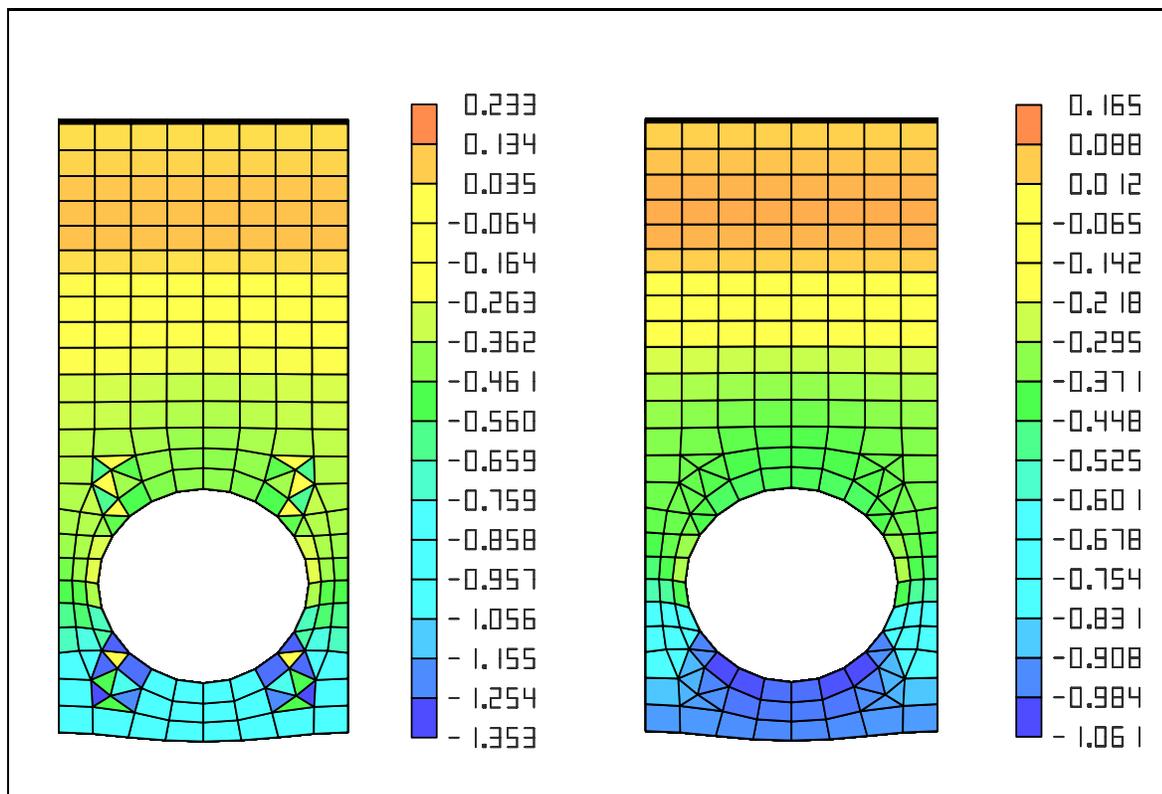


Abbildung 36: Darstellung der Spannung $\sigma_{zz} \left[\frac{N}{mm^2} \right]$ für die Diskretisierung durch Netz 1 (links) und Netz 2 (rechts)

net. Der Nachteil an dieser Modellierung ist die deutlich höhere Rechenzeit, die aufgrund der generierten Seitenmittenknoten der Elemente und der beträchtlichen Zunahme der Knoten und damit der Knotenfreiheiten resultiert. Das hier gewählte Netz liefert das genaueste Ergebnis bezüglich der ermittelten Spannungen. Die Rechenzeit für dieses Netz beträgt ca. 4 Stunden und 42 Minuten.

- Im Netz 3 wurde versucht, die Zahl der Knoten für den zu modellierenden Luftfederausschnitt zu reduzieren. Seitenmittenknoten wurden nicht verwendet. Um jedoch die durch die Dreiecksprismen verursachten Blockierungen auszuschließen, wurde das gesamte Netz durch 8-Knoten Brickelemente aufgebaut, bei deren Verwendung derartige Effekte nicht auftreten. Auf diese Weise ließen sich gegenüber dem Netz 2 ca. 1800 Knoten einsparen. Die ausschließliche Verwendung von Brickelementen hat jedoch den Nachteil, daß die Bodenfläche der Struktur durch 10 Elemente über die Breite modelliert werden mußte. Bei der Verwendung von Dreiecksprismen reichten hier 8 Elemente über die Breite aus. Die Anzahl der

Elemente steigt so um 820 Elemente an. Bei der Untersuchung des Ergebnisses zeigt sich, daß die Spannungen innerhalb des Netzes kontinuierlich verlaufen. Allerdings liegen die Maximal- und Minimalwerte etwas anders als im Fall des Netzes 2, welches aufgrund der verwendeten Seitenmittenknoten das genaueste Ergebnis liefert. Die Rechenzeit für dieses Netz beträgt ca. 3 Stunden und 40 Minuten.

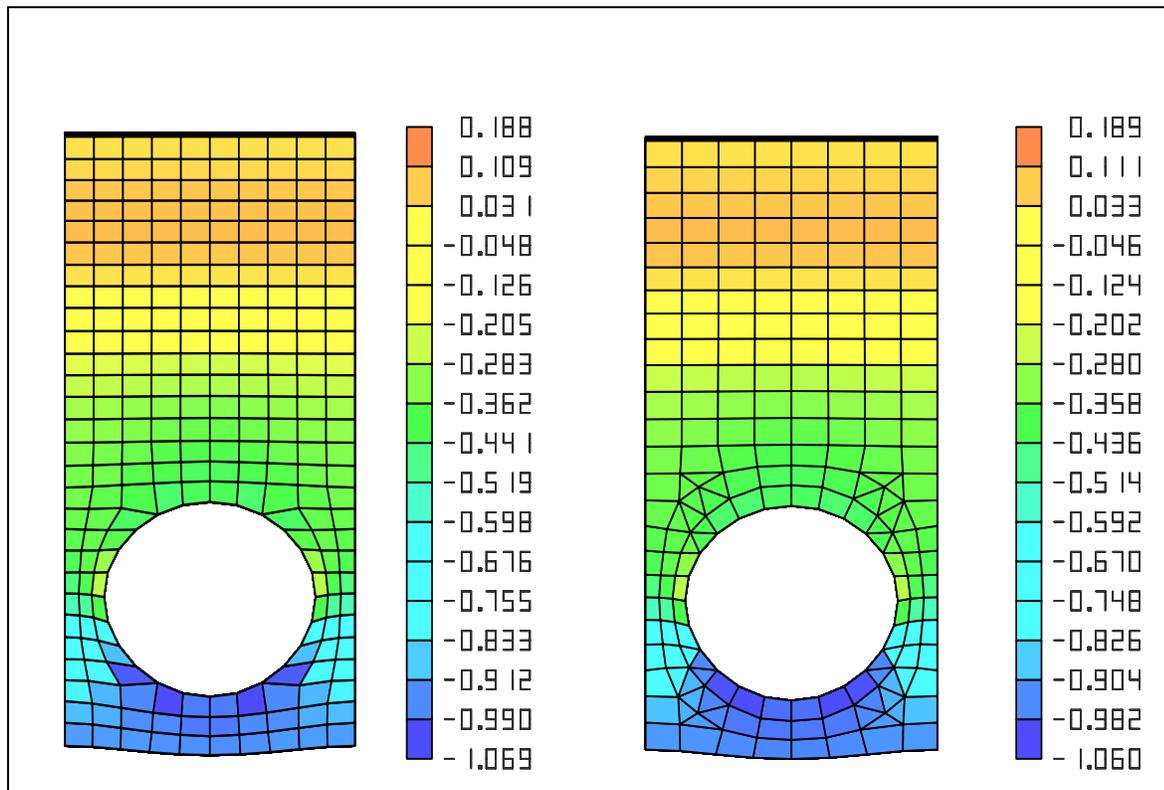


Abbildung 37: Darstellung der Spannung $\sigma_{zz} \left[\frac{N}{mm^2} \right]$ für die Diskretisierung durch Netz 3 (links) und Netz 4 (rechts)

- Im Netz 4 wurde ausgehend vom Netz 2 versucht, die Rechenzeit zu verkürzen, indem nicht mehr alle Elemente Kantenmittenknoten erhielten. Durch die Reduzierung der Knoten konnte die Rechenzeit auf knapp 1 Stunde verkürzt werden. Die im Ergebnis in Abb. 37 dargestellten Spannungen liegen mit ihren Maximal- und Minimalwerten im gleichen Bereich, wie im Netz 3. Die Spannungsverläufe sind ebenfalls kontinuierlich, womit die Diskretisierung für die Analyse von Spannungen geeignet ist. Die Rechenzeit für dieses Netz beträgt ca. 60 Minuten.
- Beim Netz 5 wurde die Anzahl der Seitenmittenknoten ausgehend vom Netz 4

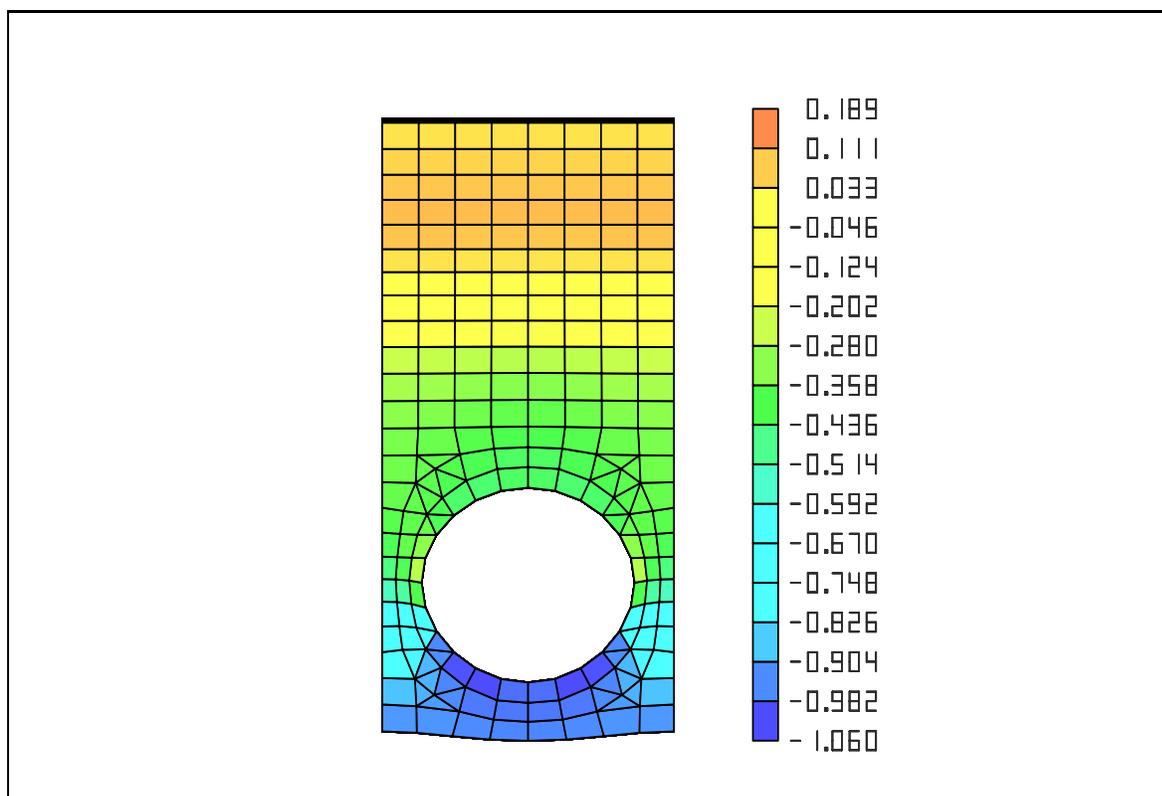


Abbildung 38: Darstellung der Spannung σ_{zz} $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$ für die Diskretisierung durch Netz 5

noch einmal weiter reduziert. Bei gleichbleibend guten Ergebnissen für die betrachteten Spannungen konnte so die Rechenzeit auf knapp 45 Minuten weiter verringert werden. Damit stellt dieses Finite-Elemente-Netz den optimalen Ausgangspunkt für die Analyse von Spannungen in der Luftfederbalgwand dar. Es wird für die im folgenden beschriebenen Analysen verwendet.

7.3 Simulation der wesentlichen Lastfälle

Im folgenden werden die FE-Rechnungen vorgestellt und diskutiert, die mit der oben beschriebenen optimierten Diskretisierung durch das Netz 5 (vgl. Abb. 38) für das Makroelement durchgeführt wurden. Die relevanten Lastfälle wurden bereits angesprochen. Es sind

- Belastung durch Innendruck
- Vordehnung der Verstärkungscorde
- Cordwinkeländerung beim Durchlaufen der Rollfalte

Die Simulation des Lastfalles Innendruck wurde im vorangegangenen Kapitel beschrieben. Infolge des Innendruckes in der Luftfeder kommt es zu einer Längsdehnung der Corde. Diese Dehnung ist für eine realistische Simulation am Makroelement zu realisieren. Zu diesem Zweck werden auf den die Stirnflächen des Doppelwürfels repräsentierenden Flächen definierte Verschiebungen in Cordlängsrichtung vorgegeben. Das FE-Paket FENO bietet hierzu eine einfache Möglichkeit über die bereits im Kap. 6.8 angesprochene Definition von Knotengruppen. Sämtliche Knoten der vier die Corde schneidenden Außenflächen des Makroelementes werden zu je einer Knotengruppe zusammengefaßt. Über im Programm realisierte Koppel- und Periodizitätsbedingungen ist es anschließend möglich, für lediglich je einen Knoten der Gruppen Randbedingungen vorzugeben, die dann für sämtliche Knoten der Gruppe gelten. Diese Möglichkeit der Gruppenbildung vereinfacht die Vorgabe von Randbedingungen erheblich. In vielen kommerziellen FE-Paketen ist eine solche Komfortabilität nicht gegeben. Die aus dem Innendruck resultierende Vordehnung der Corde wird realisiert, indem die gegenüberliegenden Flächen um das gewünschte Maß voneinander entfernt werden.

Zur Simulation des Lastfalles Cordwinkeländerung wird ebenfalls von der Möglichkeit der Koppelbedingungen im FE-Paket FENO Gebrauch gemacht. Die Knoten der Stirnflächen der Corde werden als Knotengruppen definiert. Anschließend wird je einem Knoten der Gruppe eine Verschiebung vorgegeben. Diese Verschiebungsvorgabe geschieht durch eine geeignete Kombination von Winkelfunktionen, die den Knoten auf einer Kreisbahn führt. Gleichzeitig wird dafür gesorgt, daß sich die Verstärkungscorde innerhalb des Makroelementes gegenläufig bewegen, bis sich die gewünschte Winkeländerung eingestellt hat.

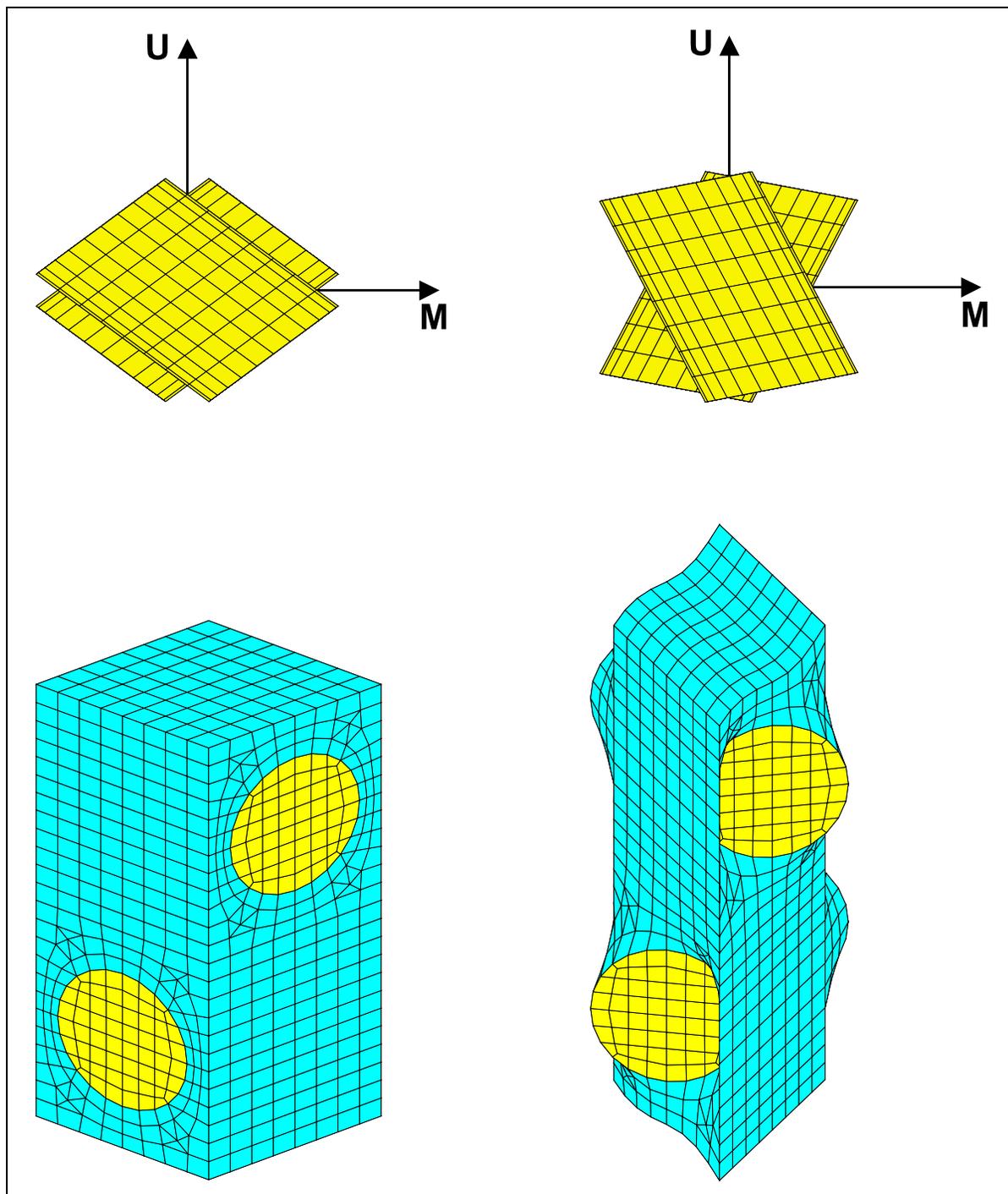


Abbildung 39: FE-Simulation einer Cordwinkeländerung am Makroelement

Für eine realistische Simulation des Verformungsmechanismus innerhalb der Luftfederbalgwand sind am Makroelement die genannten Lastfälle gleichzeitig zu realisieren.

Hierzu wird die FE-Simulation in zwei Rechnungen unterteilt. In einem ersten Rechenlauf wird der Innendruck und die Vordehnung der Cordabschnitte erzeugt. Am Ende der Rechnung wird der erreichte Deformationszustand eingefroren. Hierbei werden sämtliche Knotenkräfte und Knotenverschiebungen gespeichert. Im zweiten Schritt wird von diesem Zustand ausgehend eine Folgerechnung gestartet, wobei vorab die neuen Randbedingungen für die Cordwinkeländerung zu modellieren sind.

In Abb. 39 ist für das Makroelement einer Luftfeder mit einem Referenzcordwinkel von $53,5^\circ$ eine Cordwinkeländerung von 24° dargestellt. Der simulierte Innendruck beträgt 9,8 bar, die Corde wurden um 6 % vorgedehnt.

Auf der linken Seite ist die undeformierte Konfiguration, auf der rechten Seite die deformierte Struktur dargestellt. Im oberen Bildteil wird die Draufsicht auf die Corde gezeigt. Die Meridian- (M) und Umfangsrichtung (U) innerhalb der Luftfeder sind angegeben. In der unteren Bildhälfte ist aus einem anderen Blickwinkel das jeweils zugehörige Makroelement zur darüberliegenden Winkelkonstellation abgebildet. Hier werden die erheblichen Deformationen innerhalb der Gummimatrix deutlich. Die Deformationen des Gummis neben den Corden repräsentieren die eklatanten Scherungen, die im Gummi zwischen den Corden einer Gummi-Cord-Lage beim Durchlaufen der Rollfalte auftreten. Demgegenüber zeigen die Cordelemente der Makrostruktur kaum merkliche Deformationen, was auf ihre wesentlich höhere Schersteifigkeit zurückzuführen ist. In Abb. 40 sind nach Ausblenden der Cordelemente die ermittelten Vergleichspannungen nach Tresca dargestellt. Im Gegensatz zu den im vorangegangenen Kapitel diskutierten Spannungen infolge Innendruck treten hier infolge der Cordwinkeländerung zusätzliche Spannungen auf, die um ein Vielfaches größer sind. Es zeigt sich, daß die Effekte, die aus dem Innendruck resultieren, vollständig überlagert werden. Eine Konzentration der Spannungen ergibt sich wie erwartet aufgrund der krassen Teilungsänderung und Scherung in den unmittelbar neben den Corden liegenden Gummibereichen. Die Effekte innerhalb jeder einzelnen Verstärkungslage der Luftfeder sind demnach so stark, daß von einer nennenswerten gegenseitigen Beeinflussung der Cordlagen über die Dicke des Makroelementes nicht gesprochen werden kann.

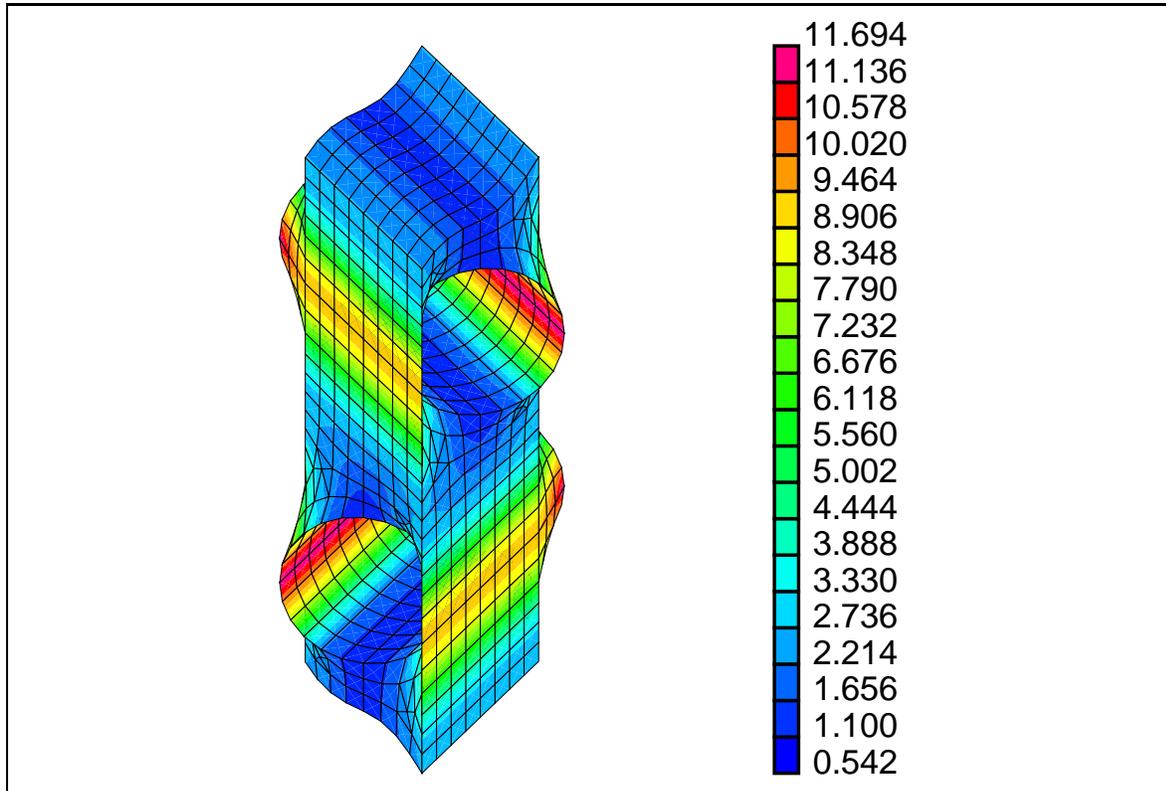


Abbildung 40: Vergleichspannung nach Tresca $\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$ am Makroelement infolge Cordwinkelländerung

8 Rechnungen auf globaler Ebene

8.1 Durchführung der FE-Rechnungen an der Gesamtluftfeder

Die Berechnungen an der gesamten Luftfeder wurden an einem rotationssymmetrischen Finite-Element-Modell durchgeführt. Hierbei stellt der Meridianschnitt durch die Luftfederbalgwand einen schmalen rechteckigen Streifen dar. Die Knoten der Finite-Elemente haben demnach zwei Koordinaten (r , z) für die Geometrie. Sie besitzen jedoch drei Freiheitsgrade. Ihnen ist daher neben den Verschiebungen in den genannten Richtungen auch eine Verschiebung in Umfangsrichtung möglich. Die in Abb. 41 dunkel dargestellten 8-Knotenelemente repräsentieren die Gummischichten der Luftfeder, während die hell dargestellten 8-Knotenelemente die sich kreuzenden Gummi-Cordlagen repräsentieren.

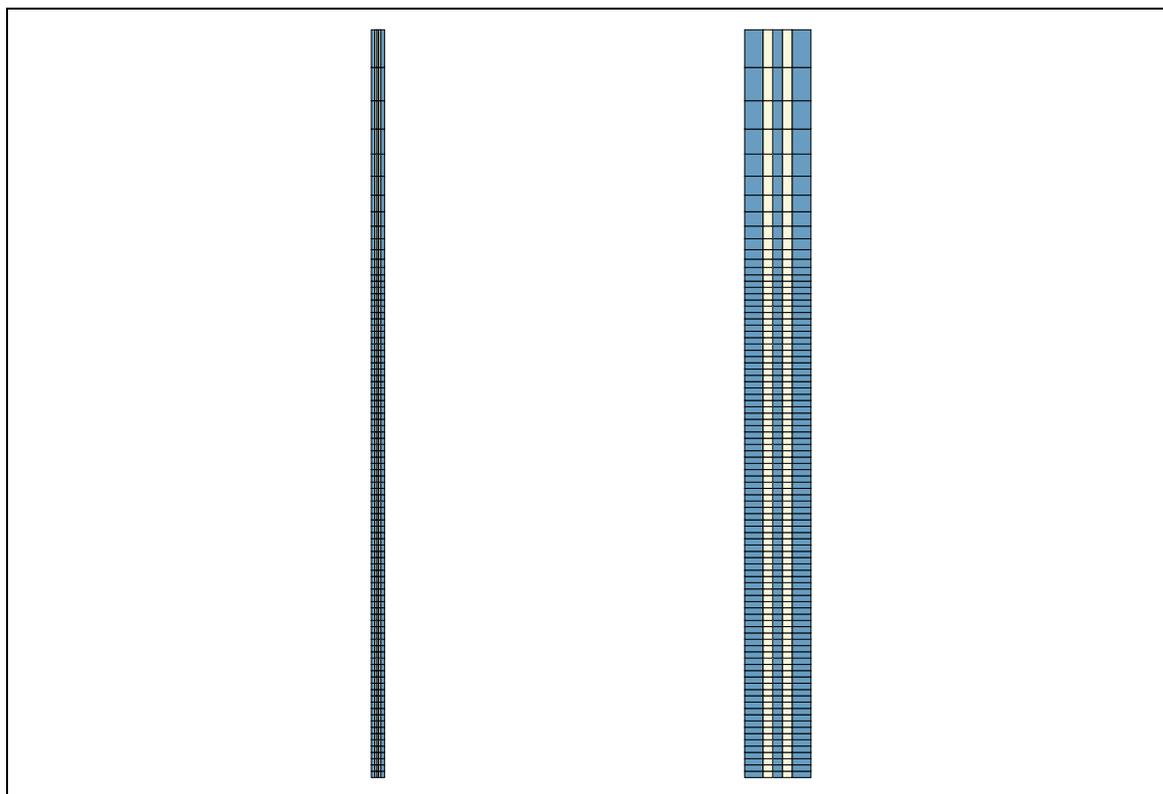


Abbildung 41: FE-Struktur eines Balgwandausschnittes für die Berechnungen auf globaler Ebene (links: maßstäblich Darstellung, rechts: Breite überhöht dargestellt)

Für das Gummimaterial wurde mit einem Alexander-Smith Stoffgesetz gerechnet. Das Stoffgesetz ist, wie oben erwähnt, mit einer Zusatzformulierung nach Sussmann-Bathe versehen (vgl. Kap. 5.5), welches durch eine getrennte Interpolation des hydrostatischen Druckes der quasi Inkompressibilität des Gummimaterials Rechnung trägt. Die Verstärkungslagen werden mit dem in Kap. 6.8 entwickelten homogenisierten Stoffgesetz modelliert, wobei die Elementbreite einer solchen Lage der in Kap. 6.4 ermittelten Schichtdicke von 0,439 mm entspricht. Die Gesamtdicke des Streifens beträgt 3,08 mm (vgl. Kap. 6.8), bei der Höhe des Streifens wurde ein Ausschnitt von 120 mm modelliert.

Um die Belastungen und die Verformungen einer auf einem Kolben abrollenden Luftfeder zu simulieren, wurden auf der Innenseite der FE-Struktur linienhafte 3-Knoten-Belastungselemente angebracht. Hierbei handelt es sich um eulersch formulierte Druckelemente, die mit nachfolgenden Lasten arbeiten. Dies bedeutet, daß der Lastvektor, hier der Innendruck der Luftfeder, in jedem Augenblick senkrecht auf der Balgwand steht. Um den Abrollvorgang auf dem Kolben zu simulieren, wurden an der Außenseite der Struktur Kontaktelemente angebracht, die beim Abrollen auf dem durch eine Gerade mit zwei Knoten modellierten Kolben zum Anliegen kommen.

Der Innendurchmesser der durch den Streifen modellierten Luftfeder entspricht in der Referenzkonfiguration dem Innendurchmesser der Luftfeder im Heiz- oder Vulkanisationszustand (65 mm). Der Abrollkolben hat einen Außendurchmesser von 62 mm.

Für die Simulation des Abrollvorganges wurden folgende Rechnungen nacheinander durchgeführt:

- Aufbringen des Innendrucks innerhalb von 20 Inkrementen. Hierbei wurden die Innen- und Außenseite der Balgwand über Koppelbedingungen eben gehalten, so daß für alle Knoten dieser Oberflächen nur eine gleiche Bewegung in radialer Richtung möglich war. Die Knoten der Stirnseiten, d.h. die kurzen Seiten des rechteckigen Streifens wurden in z-Richtung eben gehalten.
- In einer anschließenden Folgerechnung wurde ausgehend von dem sich unter dem Innendruck einstellenden Außendurchmesser der Luftfeder die untere Stirnfläche des zylindrischen Streifens auf einem Kreisbogen so nach innen geführt, daß die ursprüngliche Balgwandaußenseite auf dem Abrollkolben zum Anliegen kommt. Im Rahmen dieses Umkrepelvorganges stellt sich die Rollfalte in ihrer Kontur abhängig vom Cordwinkel von selbst ein.

- In einer weiteren Folgerechnung konnte durch eine Verschiebungsvorgabe der oberen Stirnfläche des Balges ein Abrollvorgang der Luftfeder beim Einfedern simuliert werden. Diese Verschiebung wurde mit 16,4 mm vorgegeben und entspricht damit genau dem Hub, der auf dem Prüfstand für die Lebensdauerversuche realisiert wurde. In dieser Rechnung stellen sich dann Außenkonturen der Balgwand ein, die mit den in Versuchen von Wode [54] gemessenen Konturen, die durch einen Konturabtaster aufgenommen wurden, verglichen werden können.

In Abb. 42 ist die FE-Simulation eines Abrollvorganges dargestellt. In dieser Abb. ist für eine verständlichere Darstellung das Finite-Element-Netz an der Luftfederachse gespiegelt worden. Nachträglich wurden ebenfalls der schematisch dargestellte Abrollkolben und die Klemmringe, mit denen der Luftfederbalg auf dem Abrollkolben gehalten wird, in das Bild eingefügt.

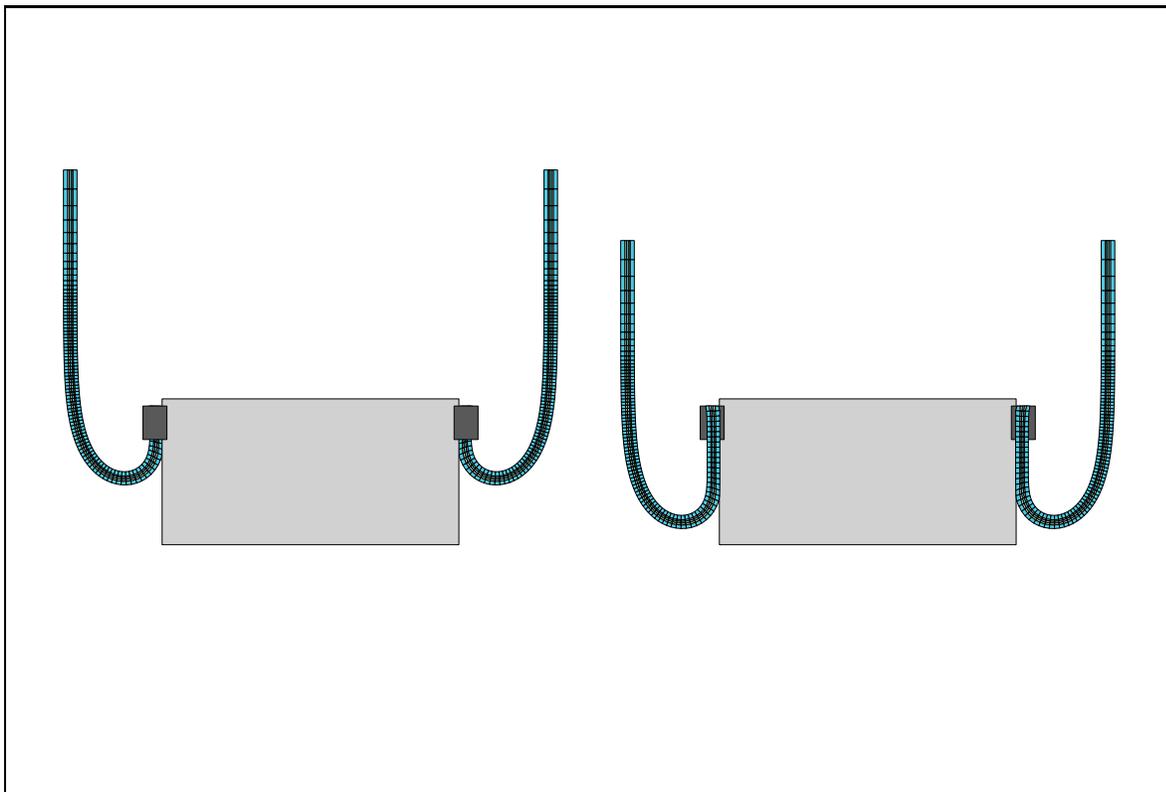


Abbildung 42: FE-Simulation des Abrollvorganges

Die Kantenlänge der Finiten Elemente, die bei ausgeprägter Rollfalte in dieser zum Liegen kommen, oder die während des Abrollvorganges dieselbe durchlaufen, beträgt

1 mm. Die sich einstellende Rollfalte hat, wenn man näherungsweise von einer Kreisform ausgeht, eine Bogenlänge von ca. 32 mm. Sie wird dabei durch ca. 32 Finite Elemente dargestellt. Der Winkel von 180° , der durch die gesamte Rollfalte beschrieben wird, teilt sich demnach auf 32 Elemente auf. Dies bedeutet, bei Annahme einer halbkreisförmigen Rollfalte, daß die Elemente in ihrer Mittelebene eine Krümmung von etwa $5,6^\circ$ erfahren. Dies ist für ein 8-Knoten Element durchaus zulässig. In den Bereichen des modellierten Ausschnittes, die nicht durch die Rollfalte laufen, wurde die Kantenlänge mit zunehmender Höhe vergrößert. Auf diese Weise konnten Elemente und damit Rechenzeit gespart werden.

Die Ausprägung einer Rollfalte stellte innerhalb der FE-Rechnungen erhebliche Probleme dar. Ein Umkrepeln des zylindrischen FE-Modells nach innen zum Erzeugen einer Rollfalte ließ sich, ohne das vorab ein Innendruck aufgebracht wurde, nicht realisieren. Der Abrollkolben hat einen Radius von 31 mm, der Innenradius im Vulkanisationszustand der Luftfeder beträgt 32,5 mm. Demnach hätte der durch die Stirnseite während des Umkrepelns zu beschreibende Kreis einen Radius von 1,5 mm. Die gesamte Bogenlänge der Rollfalte, die durch die Finiten Elemente auszubilden ist, beträgt hierbei nur noch 4,7 mm, was bedeutet, daß nur 5 Finite Elemente einen Winkel von 180° Grad zu realisieren hätten. Für ein Element dieser sehr engen Rollfalte bedeutet dies eine Krümmung von ca. $38,2^\circ$. Dies ist mit den benutzten 8 Knotenelementen nicht realisierbar.

Das vorherige Aufbringen des Innendrucks in einer ersten Rechnung schafft hier den erforderlichen Spielraum der Luftfeder für den Umkrepelvorgang. Dennoch stellten sich während der Ausbildung der Rollfalte immer wieder Instabilitäten ein, woraufhin die Rechnung abbrach. Dieses Verhalten ist sehr einfach erklärbar, vergleicht man die Realität im Experiment mit der Simulation durch Finite Elemente: In der Praxis läßt sich eine Struktur wie der Luftfederbalg leicht einkrepeln, indem man die Balgwand zunächst an einer Stelle einschlägt und dann den eingekrepelten Bereich allmählich vergrößert. (Ähnlich verhält es sich beim Aufziehen eines Fahrradmantels auf eine Felge.) Eine Modellierung durch rotationssymmetrische Elemente versucht demgegenüber die Balgwand in allen Bereichen gleichzeitig einzuschlagen, was sich wesentlich schwieriger darstellt. Ein Ausweg wurde schließlich dadurch gefunden, daß die unterste Elementreihe der FE-Struktur mit einem speziellen Material modelliert wurde. Dieses Sondermaterial ist ein rein fiktives, wird linear elastisch modelliert und besitzt

folgende orthotrope Eigenschaften:

- Der Elastizitätsmodul in z-Richtung ist wesentlich größer als der E-Modul von Gummi. Er liegt in der Größenordnung von $10000 \frac{N}{mm^2}$. Auf diese Weise ermöglichen die Sonderelemente eine gute Führung des restlichen Streifens bei der Bewegung auf der Kreisbahn zum Ausbilden der Rollfalte. Dies ist etwa so, als hielte man das Ende der Luftfeder mit einer Zange fest und realisierte dann den Umkrepelvorgang.
- Der Elastizitätsmodul des Sondermaterials in Umfangsrichtung wird kleiner als der von Gummi gewählt. Dadurch setzt das Material einer Dehnung in Umfangsrichtung kaum einen Widerstand entgegen. Dies ist wichtig, weil bei der Durchmesserverkleinerung des Rollbalges Stauchungen in Umfangsrichtung zu erwarten sind. So werden die Deformationen der oben anschließenden Gummielemente nicht durch ein zu steifes Sondermaterial künstlich verhindert.
- Die Querkontraktionszahlen für das Sondermaterial wurden ebenfalls so angepaßt, daß sich die Querdehnung der benachbarten Gummi- und Cordelemente in der darüberliegenden Elementreihe frei einstellen konnten.

8.2 Vergleich von Konturmessungen mit errechneten Luftfederkonturen

Im Rahmen der Verifizierung des entwickelten Stoffgesetzes für die homogenisierte Verstärkungslage wurden Rechnungen an ganzen Luftfedern durchgeführt. Zunächst wurde die sich einstellende Geometrie der Luftfederbalgwand mit in Experimenten gemessenen Balgwandkonturen verglichen. Zur Erstellung einer solchen experimentell ermittelten Vergleichsbasis von Konturen wurde von der ContiTech ein Konturabtaster entwickelt. Es handelt sich hierbei um ein Gerät, welches im Aufbau einer Parallelogram-Schreibtischleuchte ähnelt. An einem Ende der Konstruktion, die in Abb. 43 zu sehen ist, befindet sich ein gebogener austauschbarer Taststift, der um seine Längsachse drehbar gelagert ist. Durch die gebogene Tastspitze ist es möglich, daß auch leichte Hinterschneidungen ausgemessen werden können, wie sie in der Rollfalte der Luftfeder vorliegen.

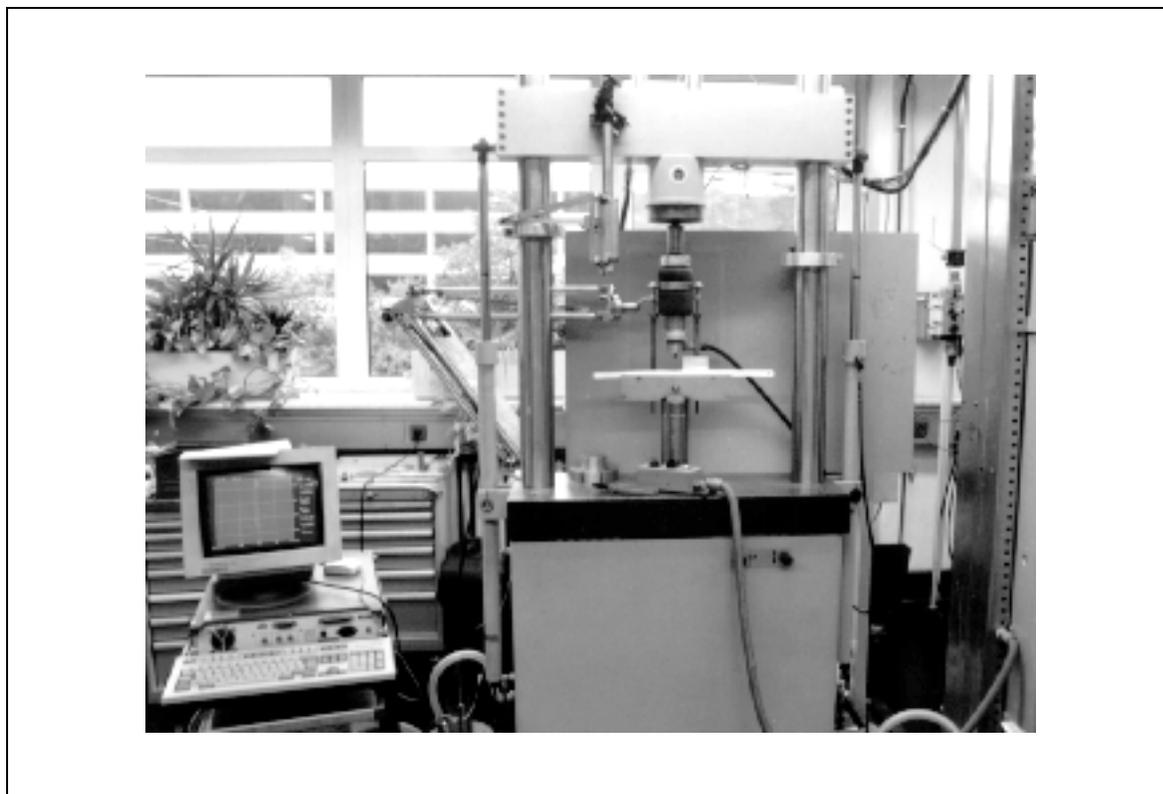


Abbildung 43: Konturabtaster und Hydropulser (Foto ContiTech)

Die geometrische Position der Meßspitze beim Abtasten der Balgwand wird aus der

Armgeometrie und den beiden Armwinkeln berechnet, die über Winkelaufnehmer gemessen und in einem Rechner weiterverarbeitet werden. Während der Messungen wird in einem Abstand von 0,4 mm die Geometrie der Luftfederbalgwand erfaßt. Ein typischer Kurvenzug als Ergebnis einer solchen Messung ist zusammen mit der auf dem Hydropulser montierten Rollbalgluftfeder in Abb. 44 dargestellt.

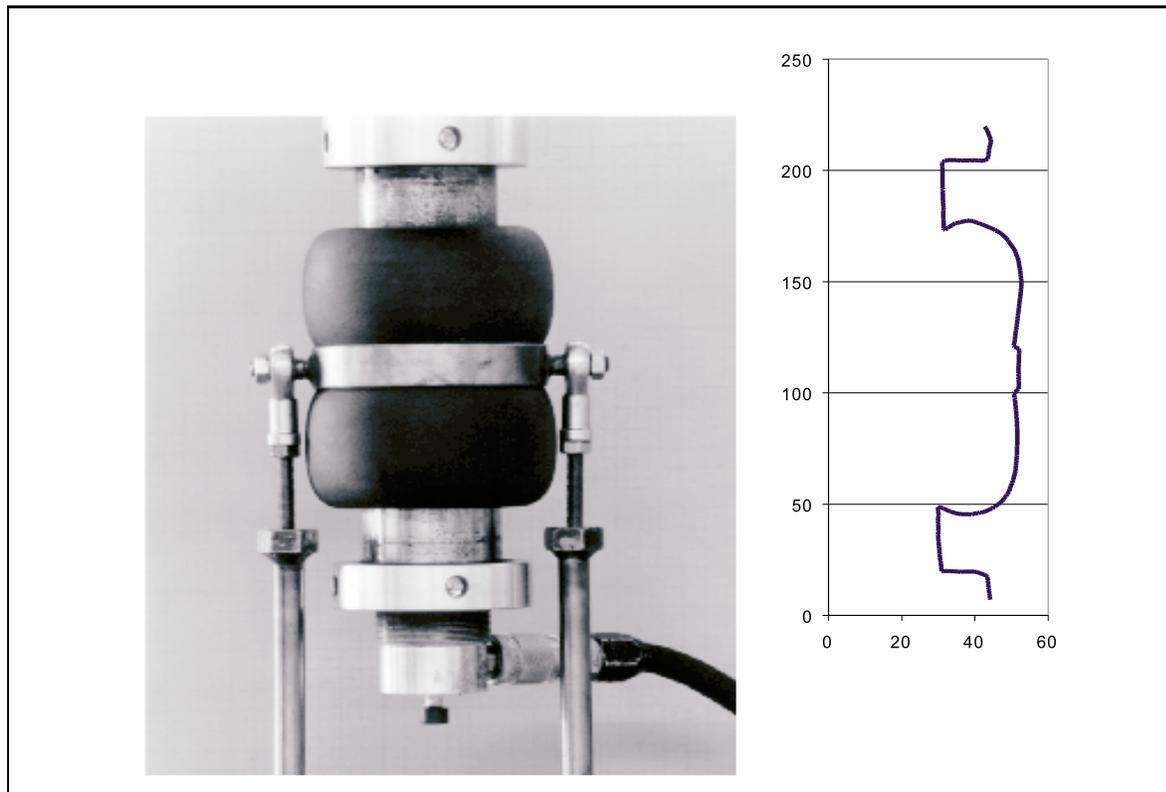


Abbildung 44: Luftfeder und zugehöriger Kurvenzug einer Balgwandkonturmessung

Für die Verifizierung der mittels eines verschmierten Stoffgesetzes berechneten Balggeometrien wurden Experimente und Messungen an folgenden Luftfederbälgen vorgenommen. Es handelt sich um Luftfedern, die mit dem bereits oben erwähnten Nutzfahrzeuggewebe ausgestattet sind. Gemessen wurden die Balgkonturen von Luftfedern mit einem Referenzcordwinkel von $50,5^\circ$ und $53,5^\circ$ bei je drei unterschiedlichen Druckstufen von 9,8 bar, 10,8 bar und 11,8 bar.

In Abb. 45 und Abb. 46 sind die Ergebnisse der Versuche und der FE-Simulation einander gegenübergestellt. Die gemessenen Balgkonturen sind auf diesen Abbildungen als schmale schwarze Linienzüge erkennbar, an die sich die FE-Netze anschmiegen.

Generell läßt sich feststellen, daß sich bei gleichem Referenzcordwinkel (Konfektions-

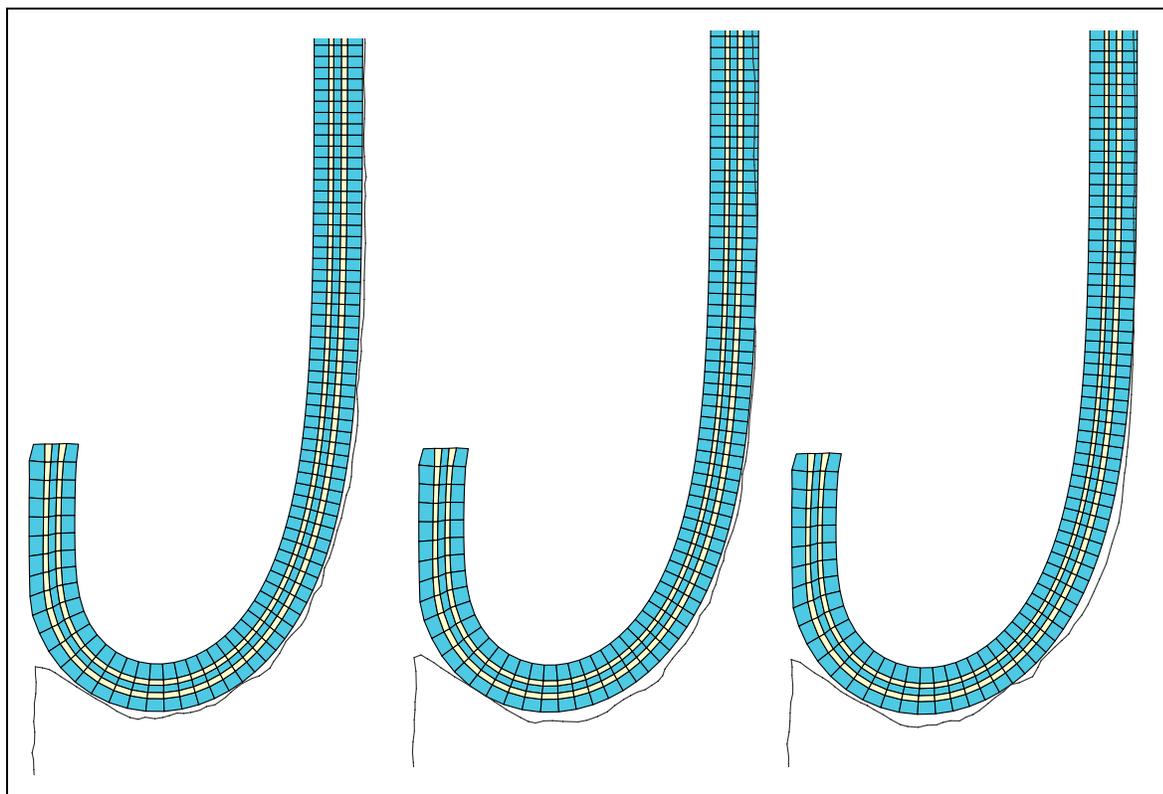


Abbildung 45: Vergleich Konturmessung mit FE-Rechnung. Konfektionsfadenwinkel $50,5^\circ$, Innendruck 9,8 bar (links), Innendruck 10,8 bar (mitte) und Innendruck 11,8 bar (rechts)

cordwinkel) mit zunehmendem Innendruck eine größere Rollfalte ausbildet. Auch eine Variation des Referenzcordwinkels hat einen maßgeblichen Einfluß auf die Form der Rollfalte und der Balgwandkontur. So läßt eine Vergrößerung des Winkels ebenfalls eine Rollfalte mit größerem Durchmesser entstehen. Der Vergleich der FE-Simulation mit den gemessenen Konturen zeigt, daß beide Effekte sehr gut durch die Rechnung wiedergegeben werden.

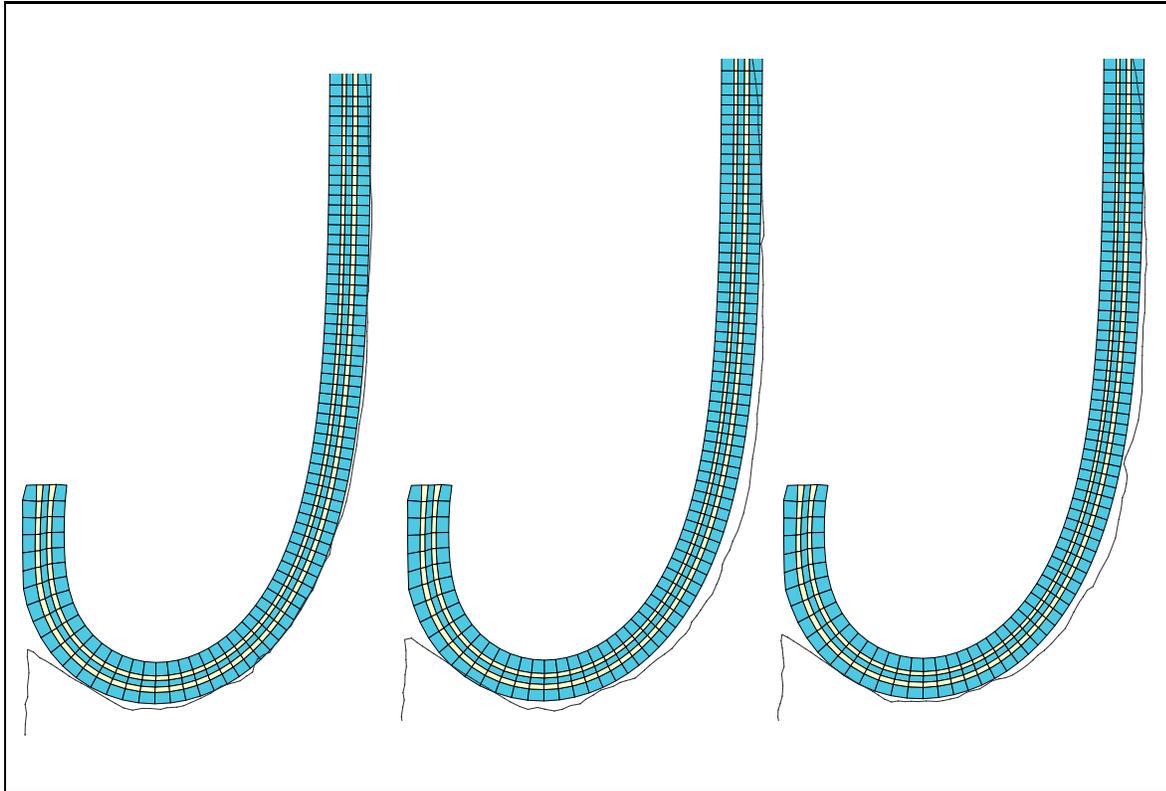


Abbildung 46: Vergleich Konturmessung mit FE-Rechnung. Konfektionsfadenwinkel $53,5^\circ$, Innendruck 9,8 bar (links), Innendruck 10,8 bar (mitte) und Innendruck 11,8 bar (rechts)

9 Übertragung der FE-Ergebnisse von der Gesamtluftfeder auf das Makroelement

9.1 Allgemeines

Üblicherweise wird bei der Beanspruchungsanalyse von Kompositmaterialien so vorgegangen, daß innerhalb einer FE-Rechnung mittels eines geeigneten homogenisierten Materialgesetzes für die Kompositlage die globalen Deformationen der Gesamtstruktur ermittelt werden. Aus dieser Gesamtdeformation lassen sich dann Randbedingungen ableiten, die in weiteren Rechnungen an einer geeigneten Substruktur aufgebracht werden. In dieser Substruktur werden die am Aufbau des Komposits beteiligten Materialien getrennt durch Finite Elemente mit unterschiedlichem Stoffverhalten modelliert. Auf diese Weise können in einer solchen Folgerechnung Beanspruchungsmaxima ermittelt werden, die zumeist an den Phasenübergängen der beteiligten Materialien auftreten. Im folgenden wird ein Weg aufgezeigt, wie schon bei der Rechnung auf globaler Ebene Rückschlüsse auf Beanspruchungsmaxima innerhalb des Makroelementes gezogen werden können, ohne daß eine neuerliche Nachrechnung am Makroelement erforderlich wird. Hierzu wird eine Datenbasis verwandt, die im Rahmen von Substrukturechnungen (vgl. Kap. 6.7) systematisch aufgebaut wurde. Durch Interpolation innerhalb dieser Datenbasis können die innerhalb der Gummimatrix auftretenden Beanspruchungsmaxima sehr genau ermittelt werden.

9.2 Aufbau einer Datenbasis mit Ergebnissen aus Substrukturechnungen

Bei der Durchführung der Substrukturechnungen (vgl. Kap. 6.7) waren zwei Zielstellungen wesentlich: Zum einen sollten die charakteristischen Materialeigenschaften für die verschmierte Gummi-Cord-Lage definiert werden, indem aus numerischen Experimenten charakteristische Kennlinien aufgezeichnet wurden. Auf der anderen Seite sollte eine Datenbasis geschaffen werden, aufgrund derer schon bei globalen Rechnungen an der Gesamtluftfeder auf Beanspruchungsmaxima innerhalb der Kompositstruktur geschlossen werden kann. Zu diesem Zweck wurden sehr viele unterschiedliche FE-Rechnungen durchgeführt. Für jede Berechnung wurden charakteristische Ergebnisse

ermittelt und in einer Datenbasis hinterlegt. Diese Datenbasis dient in Berechnungen an der Gesamtluftfeder dann als Grundlage zur Interpolation von Ergebnissen aufgrund vorab in Substrukturechnungen auf mikroskopischer Basis ermittelter Beanspruchungsmaxima im Gummi innerhalb der Verstärkungslage.

Die typischen innerhalb der Luftfeder auftretenden Verformungsmechanismen wurden an der Substruktur simuliert und die Beanspruchungsmaxima innerhalb des Gummimaterials wurden ermittelt. Variiert wurden folgende Größen:

- Die Dehnung der Corde innerhalb der Lage wurde durch drei verschiedene Vorreckungen realisiert (0%, 5%, 10%). Aus Experimenten an Luftfederbälgen ist bekannt, daß die Dehnungen der Corde in der Luftfeder maximal bei 8% liegen.
- Die Variation der Cordwinkel innerhalb eines Balgwandausschnittes beim Durchlaufen der Rollfalte bedingt eine Änderung der Teilung zwischen den Corden der Lage und eine Scherung innerhalb der einzelnen Gummi-Cordlage in Richtung der Corde. Die Teilung wurde in elf äquidistanten Schritten von $t_{akt}/\tilde{t} = 1,16$ bis $t_{akt}/\tilde{t} = 0,72$ variiert. Diese Teilungsverringerung entspricht einer Änderung des Cordwinkels um mehr als 30° . Beim Durchlaufen der Rollfalte kommt es, wie in Abb. 24 ersichtlich, auch kurzzeitig zu einer geringen Vergrößerung der Teilung. Diesem Effekt wird hier ebenfalls Rechnung getragen. Auf diese Weise wird der für die Luftfedern erforderliche Bereich für die Variation der Cordwinkel sicher abgedeckt (vgl. Abb. 24).
- Die Variation der globalen Scherung s innerhalb der Gummi-Cord-Lage erfolgte in 21 äquidistanten Schritten von 0 bis 2.

Insgesamt ergeben sich so 693 Rechnungen an der Substruktur. Im dreidimensionalen Raum läßt sich jede FE-Rechnung als Punkt eines Gitternetzes darstellen. Die Kanten dieses Netzes werden durch die aktuelle Teilung, die mittlere Scherung und die aktuelle Vorreckung in Cordlängsrichtung definiert. Ein Ausschnitt aus diesem Gitternetz ist in Abb. 47 schematisch dargestellt. Aus den Substrukturechnungen wurden charakteristische Größen definiert, anhand derer später Vergleiche zwischen in Versuchen ermittelten Lebensdauern von Rollbalgluftfedern und Berechnungsergebnissen an der Gesamtluftfeder vorgenommen werden konnten. Ziel dieser Vergleiche war es, Ausfallphänomene und Schäden, die an Luftfedern in Lebensdauerversuchen registriert

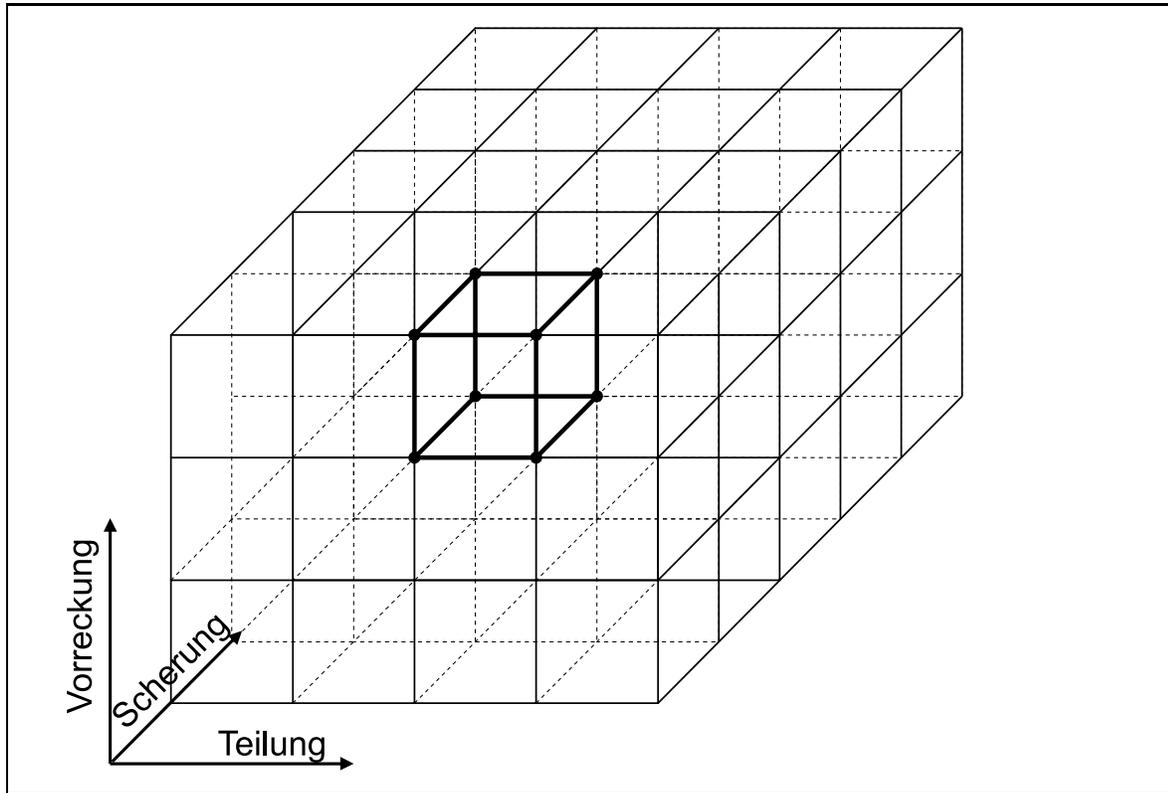


Abbildung 47: Gitternetz der Substrukturechnungen

wurden, mit den Ergebnissen der FE-Rechnungen zu korrelieren. Die Ergebnisse der Lebensdaueruntersuchungen weisen darauf hin, daß erste Schäden innerhalb der Luftfeder immer im Gummi der inneren Gummi-Cord-Lage entstehen. Aus diesem Grund werden die Beanspruchungmaxima im Gummi für jede Substrukturechnung dokumentiert. Folgende Größen wurden für jeden Gitterpunkt durch FE-Rechnungen an der Substruktur ermittelt und innerhalb der Datenbasis abgelegt:

- Vergleichsspannung nach von Mises $\sigma_{v_{Mises}}$:

Diese Größe berechnet sich aus den Eigenwerten des Cauchy-Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$ zu:

$$\sigma_{v_{Mises}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} . \quad (132)$$

Der größte im Gummimaterial auftretende Wert

$$MSM = \max(\sigma_{v_{Mises}}) \quad (133)$$

wird in der Datenbasis hinterlegt.

- Vergleichsspannung nach Tresca $\sigma_{v_{Tresca}}$:

Die Größe berechnet sich aus den Eigenwerten des Cauchy-Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$ zu:

$$\sigma_{v_{Tresca}} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) . \quad (134)$$

Auch hier wird der im Gummimaterial registrierte Maximalwert

$$MST = \max(\sigma_{v_{Tresca}}) \quad (135)$$

innerhalb der Datenbasis abgelegt.

- Hauptspannung σ_I :

Die Größe entspricht dem größten Eigenwert σ_I des Cauchy-Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$.
Der größte im Gummi identifizierte Wert

$$MHN = \max(\sigma_I) \quad (136)$$

wird innerhalb der Datenbasis abgespeichert.

- Hauptdehnung L_I :

Diese Größe berechnet sich aus dem Eigenwert λ_I des Green-Lagrangeschen-Deformationstensors $\underline{\underline{\gamma}}$ zu

$$L_I = \sqrt{\lambda_I^2} . \quad (137)$$

Der größte im Gummimaterial der Verstärkungslage auftretende Wert

$$MHD = \max(L_I) \quad (138)$$

wird innerhalb der Datenbasis abgespeichert.

- Maximale Scherung S_{max} :

Diese Größe berechnet sich aus dem größten und kleinsten Eigenwert des Green-Lagrangischen-Deformationstensors $\underline{\underline{\gamma}}$ zu:

$$S_{max} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_I^2 - \lambda_{III}^2}{\lambda_I \lambda_{III}} . \quad (139)$$

Anschaulich ist unter dieser Größe die maximale Winkeländerung zwischen zwei ursprünglich senkrecht zueinander stehenden materiellen Linien im Gummimaterial zu verstehen. Diese maximale Winkeländerung geschieht hierbei zwischen den Linien, die zu den Hauptdehnungsrichtungen im Winkel von 45° stehen. Dargestellt ist dieser Zusammenhang in der Abb. 48. Im linken Bildteil ist die

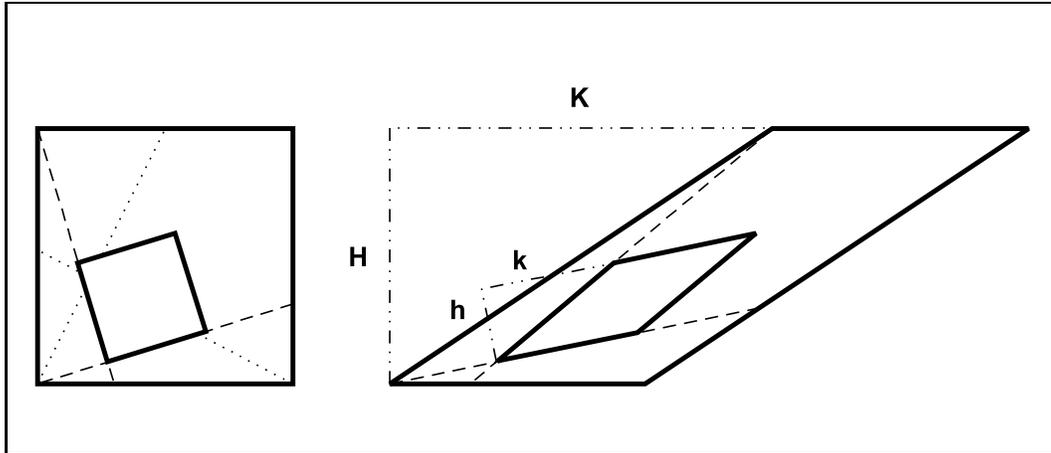


Abbildung 48: Veranschaulichung der maximalen Scherung

undeformierte Referenzkonfiguration aufgezeigt. Eingezeichnet sind die für die deformierte Konfiguration rechts ermittelten Hauptdehnungsrichtungen (punktirierte Linien) sowie unter 45° dazu zwei Referenzlinien (gestrichelte Linien). Diese Linien sind gleichzeitig Begrenzungslinien für ein Quadrat. Alle Linien werden als körperfest betrachtet. Im rechten Bildteil ist die deformierte Struktur im einfachen Scherversuch dargestellt. Die Hauptstruktur wurde um das Maß K verschert. Hierbei erfährt das angesprochene kleine Quadrat eine Verscherung um das Maß k . Werden nun diese Scherwege auf die Ausgangshöhen H bzw. h bezogen, ergibt sich für das kleine Quadrat eine größere Scherdeformation:

$$\frac{K}{H} = 1,49 < \frac{k}{h} = 1,86 . \quad (140)$$

Innerhalb der Datenbasis wird der Maximalwert der innerhalb der Gummimatrix der Substruktur ermittelten maximalen Scherung hinterlegt.

$$MSX = \max(S_{max}) \quad (141)$$

In der Abb. 49 ist beispielhaft das Rechenergebnis für einen Gitterpunkt des Interpolationsnetzes dargestellt. Das Ergebnis für die maximale Hauptdehnung an diesem Gitterpunkt wird aufgezeigt. Die globale Scherung für diesen Punkt beträgt $s = 1,5$, was bedeutet, daß die Substruktur um das 1,5-fache ihrer Ausgangsbreite verschert wird. In diesem Punkt beträgt die aktuelle die Teilung 0,72% der Ausgangsteilung im Referenzzustand. Dargestellt sind die undeformierte und die deformierte Substruktur, sowie die Werte der Hauptdehnung an der deformierten Struktur. Der Maximalwert im Gummi, der sich direkt am Phasenübergang zwischen Gummi und Cordmaterial einstellt, wird dann innerhalb der Datenbasis abgelegt. Für diese Ergebnisdarstellung wurden sämtliche Cordelemente ausgeblendet.

Im Rahmen der erwähnten Ergebnisinterpolation wird wie folgt vorgegangen: Innerhalb der FE-Berechnung an der Gesamtluftfeder wird die Gummi-Cordlage mit dem verschmierten Materialgesetz modelliert. Für jedes Element der homogenisierten Schicht läßt sich nach jedem ausiterierten Lastschritt ein Tripel bestimmen, das die aktuelle Vorreckung in Richtung der Verstärkungscorde, eine mittlere Scherung innerhalb der Verstärkungslage und eine aktuelle Teilung beinhaltet. Dieses Zahlentripel bildet den Ausgangspunkt für die Interpolation innerhalb des oben beschriebenen Gitternetzes. Es wird festgestellt, welche Zelle für den aktuellen Berechnungspunkt relevant ist. In Anlehnung an die Formfunktionen von Finiten Elementen [56] wird der Berechnungspunkt innerhalb der ermittelten Zelle durch lokale Koordinaten (ξ, η, ζ) beschrieben. Diese Koordinaten laufen in jeder Zelle von -1 bis $+1$ (vgl. Abb. 50).

Aufgrund der an den 8 Eckpunkten der relevanten Zelle in der Datenbasis abgelegten Rechenergebnisse aus den Substrukturechnungen wird nun der gewünschte Ergebniswert (MSM, MST, MHN, MHD, MSX) für das Zahlentripel berechnet. Es gilt:

$$Erg(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot Erg_i, \quad (142)$$

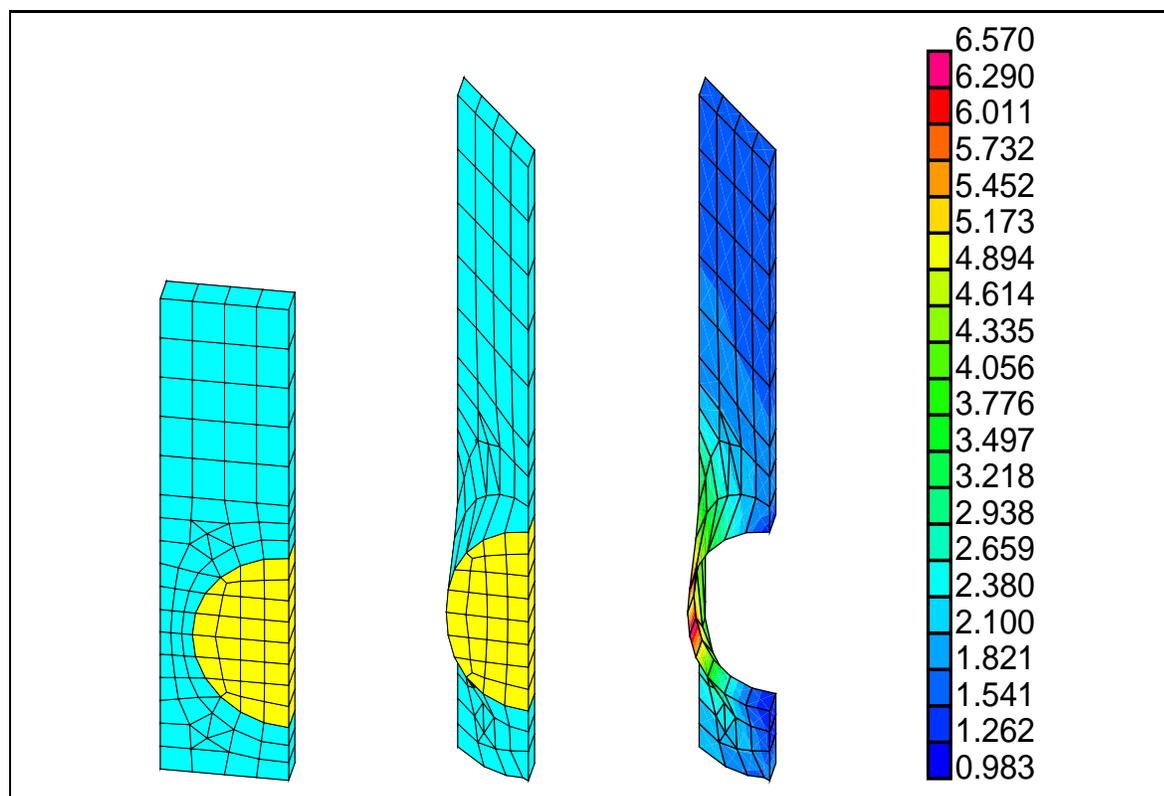


Abbildung 49: Darstellung der Hauptdehnungen im Gummi für einen Punkt des Gitternetzes aus Abb. 47

wobei die Formfunktionen definiert sind zu:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)$$

mit

$$\xi_0 = \xi \xi_i \quad (143)$$

$$\eta_0 = \eta \eta_i \quad (144)$$

$$\zeta_0 = \zeta \zeta_i \quad (145)$$

Auf diese Weise ist es möglich, die Ergebnisse der Substrukturrechnungen auf die Berechnung auf globaler Ebene zu übertragen. Es lassen sich schon bei Berechnungen an

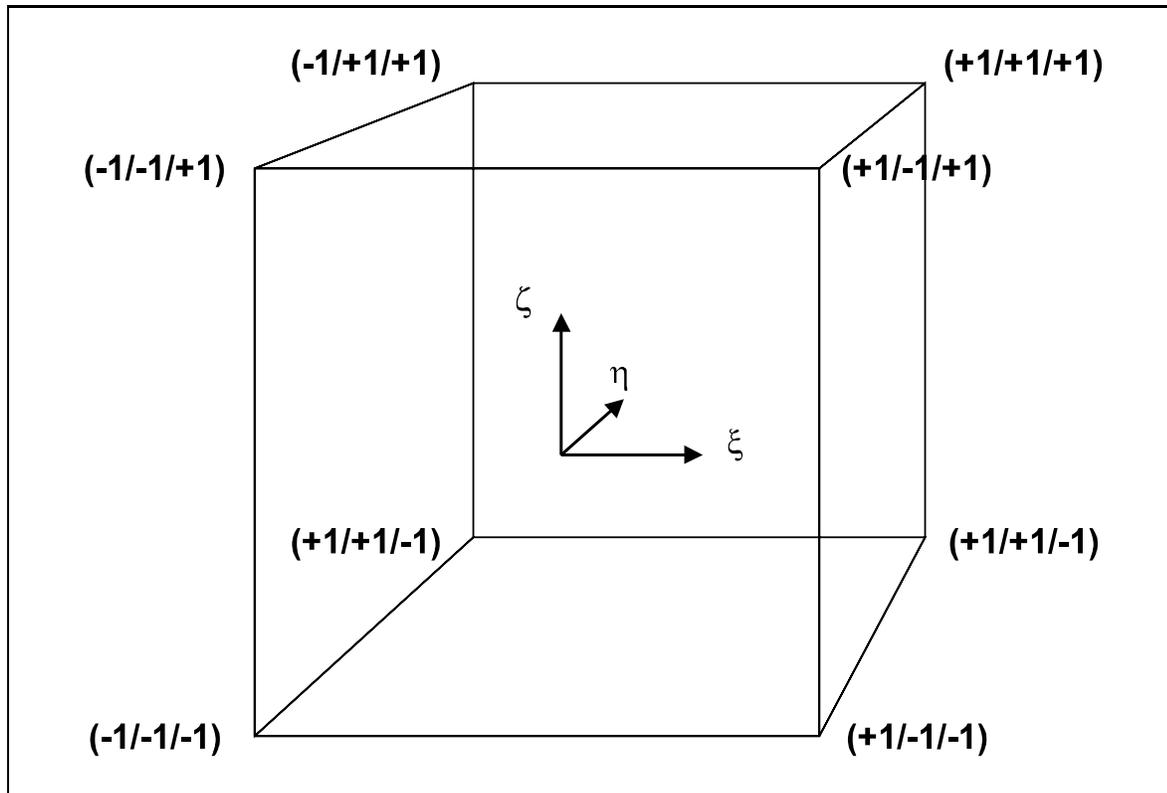


Abbildung 50: Lokale Koordinaten zur Interpolation der Ergebniswerte

der gesamten Luftfeder Aussagen bezüglich mikroskopischer Beanspruchungsmaxima im Gummi innerhalb der Gummi-Cord-Lage machen, indem auf die in der Datenbasis abgelegten Ergebnisse der Substrukturechnungen zugegriffen wird. Diese Vorgehensweise wurde durch verschiedenartige Nachrechnungen verifiziert und im folgenden Kapitel anhand eines Beispiels belegt.

9.3 Verifikation der Interpolationsroutine

9.3.1 Ermittlung von Randbedingungen für Rechnungen am Makroelement

Für die Beschreibung des Materialverhaltens einer Verstärkungslage innerhalb der Balgwand wurde ein körperfestes Koordinatensystem eingeführt, welches seine 1-Richtung parallel zu den Corden, seine 2-Richtung senkrecht dazu in der Ebene der Kompositlage und die 3-Richtung in Dickenrichtung der Lage hat. Aus den Rechnungen an der Gesamtluftfeder lassen sich die erforderlichen Randbedingungen ermitteln, die für den Ausschnitt des Doppelwürfels angesetzt werden müssen, um auf der Makroebene den Deformationszustand zu simulieren, dem ein solcher Ausschnitt ausgesetzt ist. Wichtig sind hier folgende Informationen:

- Der aktuelle Cordwinkel einer jeden Gewebelage
- Die Vordehnung der Corde innerhalb einer Gewebelage

Für die Berechnung des aktuellen Cordwinkels wird in der Referenzkonfiguration zusätzlich ein Vektor $\tilde{\underline{u}}$ in Umfangsrichtung der Luftfeder eingeführt. Der Vektor in Cordlängsrichtung der undeformierten Referenzlage sei $\tilde{\underline{l}}_c$. Aus diesen Vektoren lassen sich über den Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$ die zugehörigen Vektoren der aktuellen Konfiguration bestimmen:

$$\underline{l}_c = \underline{\underline{F}} \cdot \tilde{\underline{l}}_c \quad \text{und} \quad \underline{u} = \underline{\underline{F}} \cdot \tilde{\underline{u}}. \quad (146)$$

Der Winkel α zwischen beiden Vektoren der aktuellen Konfiguration läßt sich nun über das Skalarprodukt berechnen. Es gilt:

$$\cos(\underline{l}_c, \underline{u}) = \frac{\underline{l}_c \cdot \underline{u}}{|\underline{l}_c| \cdot |\underline{u}|}. \quad (147)$$

Unter Verwendung des Deformationsgradienten folgt für den Zähler:

$$\underline{l}_c \cdot \underline{u} = \tilde{\underline{l}}_c \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \tilde{\underline{u}} \quad (148)$$

$$= \tilde{\underline{l}}_c \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \tilde{\underline{u}}. \quad (149)$$

Für den Betrag eines Vektors gilt:

$$|\underline{l}_c| = \sqrt{\tilde{\underline{l}}_c \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \tilde{\underline{l}}_c}. \quad (150)$$

Damit berechnet sich der aktuelle Cordwinkel schließlich zu

$$\alpha = \arccos \frac{\tilde{\underline{l}}_c \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \tilde{\underline{u}}}{\sqrt{(\tilde{\underline{l}}_c \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \tilde{\underline{l}}_c) (\tilde{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \tilde{\underline{u}})}}. \quad (151)$$

Die Ermittlung der Vorreckung in Längsrichtung der Verstärkungscorde ergibt sich innerhalb der FE-Rechnung unmittelbar aus dem Wert C_{11} des rechten Cauchy-Green-Tensors $\underline{\underline{C}}$ in den Koordinaten des in Materialrichtung zeigenden Koordinatensystems für die Gewebelage zu $1/2(C_{11} - 1)$. Die Verifizierung der entwickelten Interpolationsroutine wird durch den Vergleich von Rechenergebnissen an einer Gesamtluftfeder mit Rechnungen an einem Makroelement möglich. Untersucht wurde eine Luftfeder, die mit einem Cordwinkel von $53,5^\circ$ konfektioniert wurde. Die Rechnung am rotationssymmetrischen Finite-Element-Modell liefert die Randbedingungen, die am Makroelement zu realisieren sind. Für den Vergleich wird ein Ausschnitt aus der Luftfederbalgwand betrachtet, der sich nach dem Ausfedern des Rollbalges im zylindrischen Bereich der Luftfederwand befindet. Bei einem Innendruck von 9,8 bar stellt sich eine Cordwinkeländerung von $24,03^\circ$ ein. Die beiden Gewebelagen erfahren außerdem eine Dehnung der Corde. Hierbei wird die Innenlage mit 6,47% etwas stärker gedehnt als die Außenlage, die eine Dehnung von 6,11% erfährt. In Abb. 51 sind die Ergebnisse der Berechnungen an beiden Strukturen einander gegenübergestellt. Beispielhaft wurden hier die Resultate für die maximale Scherung ausgewählt. Im linken Bildbereich ist die deformierte Gesamtluftfeder mit ihren Verstärkungslagen dargestellt, wobei die reinen Gummilagen ausgeblendet wurden. Der mittlere Bereich stellt eine Ausschnittsvergrößerung der Gesamtstruktur dar. Auf der rechten Seite ist die zugehörige deformierte Struktur des Makroelementes abgebildet. Die reinen Cordelemente sind dort ausgeblendet. Die an der globalen Struktur für die Gummibereiche innerhalb der Verstärkungsschicht ermittelten Werte zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Maximalwerten, die an der Makrostruktur in den Gummielementen unmittelbar neben den Corden berechnet wurden. Für die oben definierten anderen skalaren Größen, die in der Datenbasis abgespeichert sind, wurden ebenfalls gute Übereinstimmungen festgestellt. Aus diesem

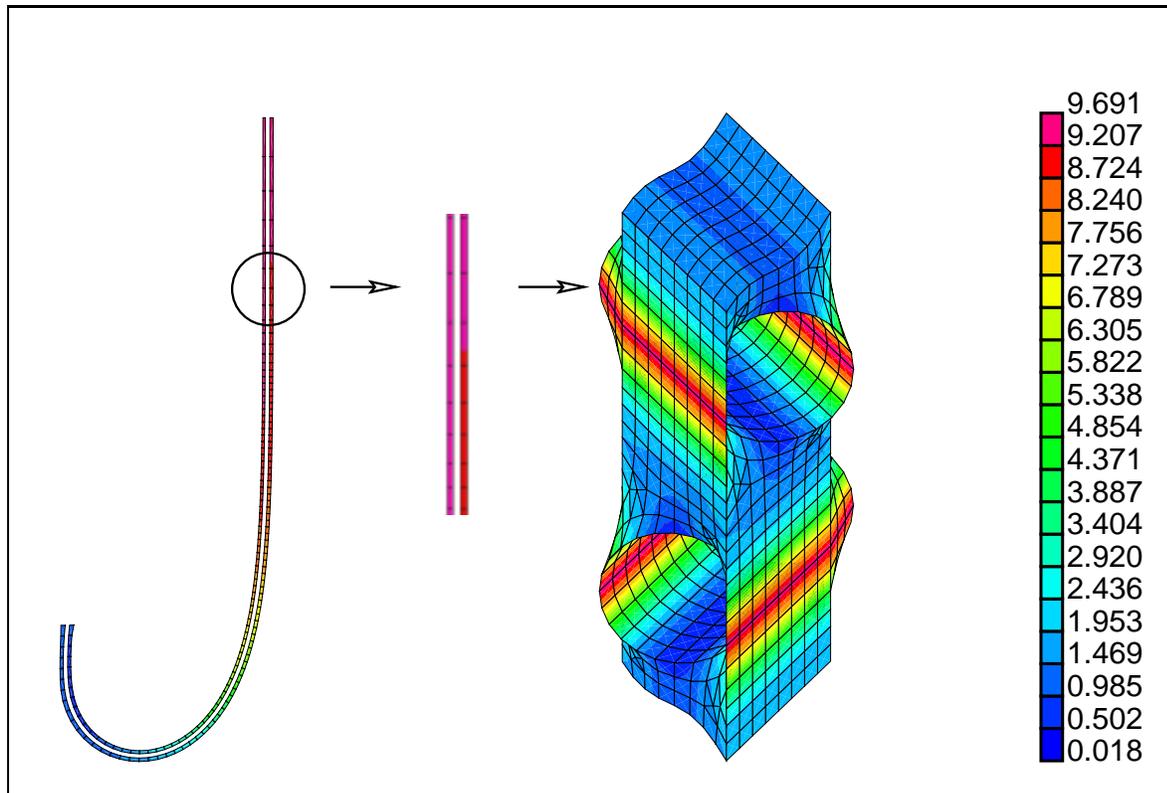


Abbildung 51: Vergleich globale Rechnung mit Rechnung am Makroelement (*MSX*)

Grund kann die beschriebene Vorgehensweise zur Ermittlung von Beanspruchungsmaxima im Gummi einer Verstärkungslage als verifiziert gelten.

10 Vergleich zwischen FE-Simulationen und Lebensdaueruntersuchungen

10.1 Allgemeines

Im folgenden werden die Ergebnisse von FE-Berechnungen mit den Ergebnissen der von Wode [54] durchgeführten Lebensdaueruntersuchungen an Rollbalgluftfedern korreliert.

Für die Vergleiche liegen Experimente mit Cordwinkeln von $50,5^\circ$ und $53,5^\circ$ bei einer Druckstufe von 10,8 bar vor. Für die Druckstufen 10,8 und 11,8 bar liegen zusätzlich Konturmessungen der Balgwand für die Cordwinkel von $50,5^\circ$ und $53,5^\circ$ vor. Die Ergebnisse der Konturmessungen wurden bereits im Kapitel 8.2 vorgestellt und zur Verifikation herangezogen. Aus den Rechnungen auf globaler Ebene an einem Balgwandausschnitt der Gesamtluftfeder (vgl. Abb. 41) läßt sich feststellen, daß das Gummi innerhalb der Gewebelagen die größten Hauptdehnungen und Scherungen ertragen muß. Hier treten demzufolge auch die größten Spannungen auf. In der Abb. 52 werden für die Referenzcordwinkel $50,5^\circ$ und $53,5^\circ$ die Ergebnisse für die maximale Scherung MSX bei einer Druckstufe von 10,8 bar einander gegenübergestellt. Für eine übersichtliche Darstellung sind lediglich die mit dem verschmierten Stoffgesetz modellierten Gummi-Cord-Lagen dargestellt. Abb. 53 stellt die Ergebnisse für die größten Hauptdehnungen MHD gegeneinander. Die Abb. 54 und Abb. 55 stellen bei gleicher Druckstufe von 10,8 bar die Ergebnisse der FE-Simulation für die maximalen Hauptnormalspannungen (MHN) und die größten von Mises Vergleichsspannungen (MSM) dar. Auf den gezeigten Abbn. 52 bis 55 ist übereinstimmend zu erkennen, daß sowohl die Deformationen als auch die Spannungen im Verlauf der Rollfalte vom Abrollkolben bis hin zum zylindrischen Außenbereich der Luftfeder zunehmen. Ebenfalls ist erkennbar, daß die Beanspruchungen in der inneren Gummi-Cord-Lage schneller anwachsen als in der äußeren Gummi-Cord-Lage. Auch die Maximalwerte werden in der inneren Lage erreicht. Diese Ergebnissen passen sehr gut zu den von Wode [54] beobachteten Ausfallphänomenen an Luftfederbälgen, die von ihm im Rahmen der Lebensdaueruntersuchungen beobachtet wurden. Dort zeigte sich, daß erste Schädigungen der Luftfederbalgwand immer in Form von Anrissen innerhalb des Gummis der inneren Gummi-Cord-Lage auftraten. Von dieser Rißinitialisierung ausgehend, wandern die Risse in Richtung der Gummilage zwischen den Verstärkungslagen und führen, sobald

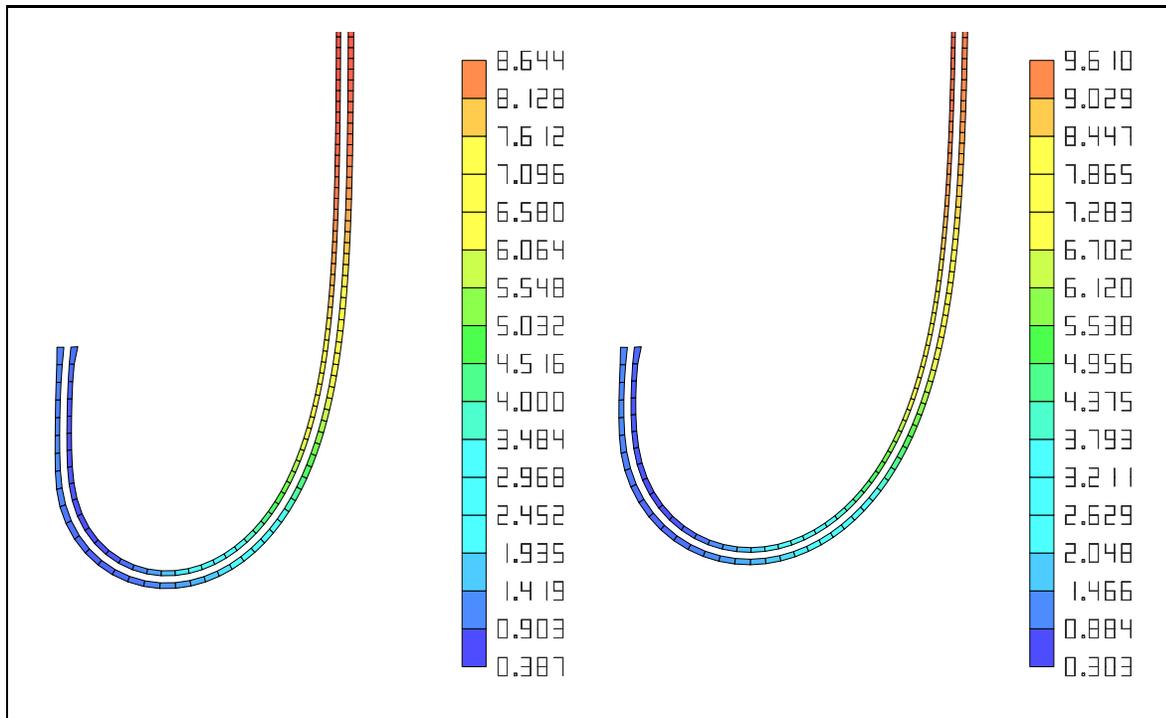


Abbildung 52: Ergebnis für die maximale Scherung MSX (Referenzcordwinkel $50,5^\circ$ links, $53,5^\circ$ rechts, Druckstufe 10,8 bar)

sich der Riß bis zur äußeren Deckschicht der Balgwand fortgesetzt hat, schließlich zur Undichtigkeit und damit zum Versagen der Luftfeder. In Abb. 56 ist ein Ausschnitt aus einer Luftfederbalgwand dargestellt, in dem eine Lösung der Lagen, eine sogenannte Delamination, deutlich erkennbar ist. Die innere Cordlage liegt bei dieser Abbildung unten. Während die Corde der äußeren Lage (oben in der Abbildung) noch in der Gummimatrix eingebettet sind, liegen die der inneren Gewebelage in weiten Bereichen frei. Noch deutlicher ist dies an den zwei in Abb. 57 dargestellten Ausschnittvergrößerungen erkennbar. Wie die Ergebnisse der Simulation zeigen, sind im zylindrischen Bereich der Luftfeder also außerhalb der Rollfalte die Deformationen und damit auch die zugehörigen Spannungen im Gummimaterial zwischen den Corden einer Lage am größten. Dennoch entstehen erste Anrisse und schließlich ein Versagen der Luftfeder in Bereichen der Balgwand, die während eines Einfederungsvorganges die Rollfalte passieren. Hierzu ist folgendes anzumerken: Ein Gummiteilchen, welches nach Aufgeben des Innendruckes auch während des Einfederungsvorganges im zylindrischen Bereich des Balges verbleibt, hat die Möglichkeit durch plastische Verformungen Spannungspitzen abzubauen. Darüberhinaus kann davon ausgegangen werden, daß es sich in diesen Be-

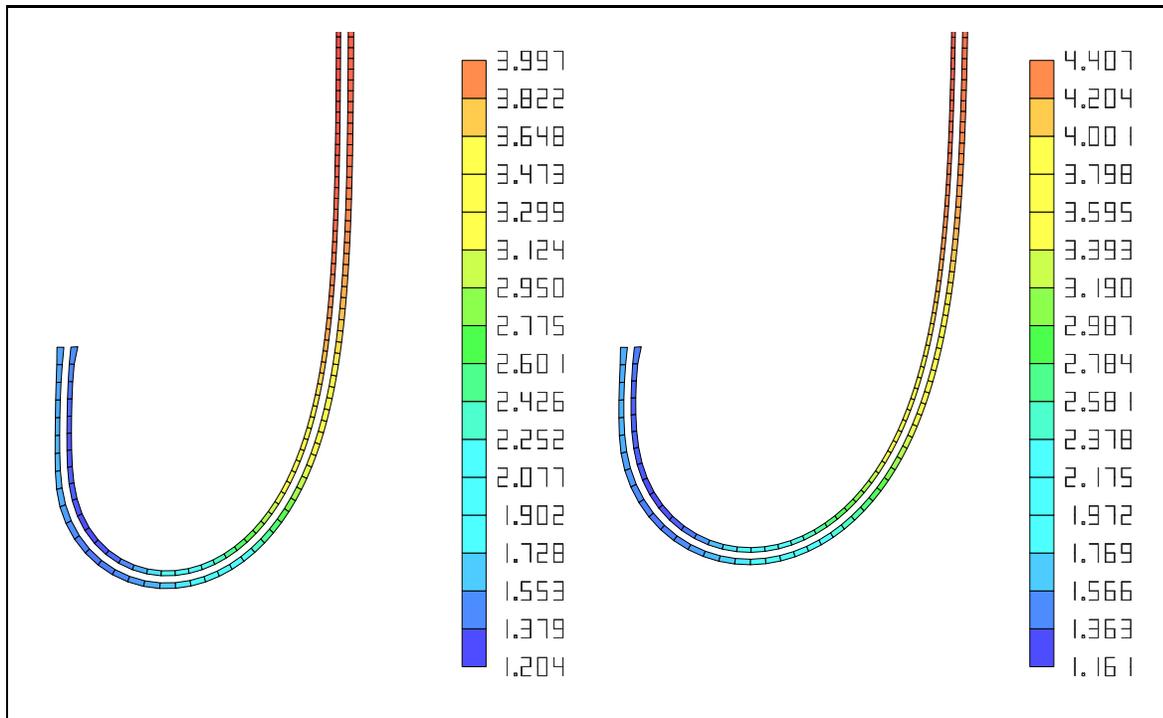


Abbildung 53: Ergebnis für die größte Hauptdehnung MHD (Referenzcordwinkel 50° , 5° links, 53° , 5° rechts, Druckstufe 10,8 bar).

reichen nicht um eine dynamisch veränderliche Beanspruchung innerhalb der Balgwand handelt. Dies wird dadurch belegt, daß der aktuelle Cordwinkel in großen Bereichen des zylindrischen Bereiches nahezu konstant bleibt. In Abb. 58 sind hierzu die Ergebnisse, die den aktuellen Cordwinkel darstellen, für die Bälge mit einem Referenzcordwinkel von $50,0^\circ$ und $53,5^\circ$ bei der Druckstufe von 10,8 bar einander gegenübergestellt.

Eine kritische Belastung erfahren demgegenüber die Gummiteilchen innerhalb einer Gummi-Cord-Lage, die beim Ein- und Ausfedern der Luftfeder die Rollfalte durchlaufen und dabei auch in den zylindrischen Außenbereich der Luftfeder gelangen. Diese Teilchen unterliegen einer ständigen Wechselbeanspruchung, die durch die großen zyklischen Cordwinkeländerungen verursacht wird. Hierbei kann festgestellt werden, daß der Gummi zwischen den Corden der inneren Verstärkungslage mehr arbeitet, als in der äußeren Gewebelage. In den von Wode [54] durchgeführten Lebensdaueruntersuchungen wurde dies ebenfalls bestätigt. Zusammenfassend kann bezüglich der Lokalisationen der Beanspruchungsmaxima eine gute Übereinstimmung zwischen den von Wode durchgeführten Versuchen und den FE-Simulationen festgestellt werden.

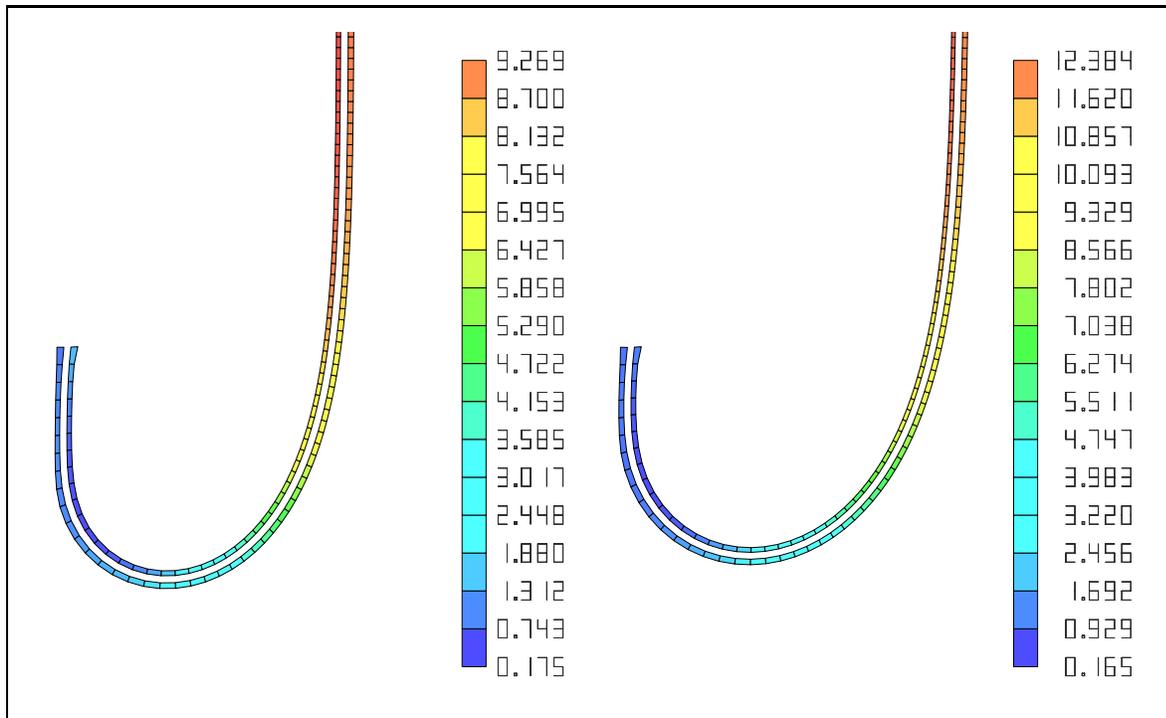


Abbildung 54: Ergebnis für die größte Hauptnormalspannung MHN (Referenzcordwinkel $50,5^\circ$ links, $53,5^\circ$ rechts, Druckstufe 10,8 bar).

In den in diesem Kapitel gezeigten Resultaten der FE-Simulationen auf globaler Ebene werden jeweils für eine ausgewählte Größe (MSX , MHD , MSM , MHN) die Ergebnisse für zwei unterschiedliche Referenzcordwinkel einander gegenübergestellt. Hier kann generell festgestellt werden, daß die Höhe der Beanspruchungen für die Bälge mit dem Referenzcordwinkel von $53,5^\circ$ stets größer sind, als für die Bälge mit einem Referenzcordwinkel von $50,5^\circ$. Dieses Ergebnis deckt sich mit den Untersuchungen von Wode [54]. Hier konnte eine deutliche Abnahme der ertragbaren Lastwechselzahlen bei einer Variation des Referenzcordwinkels von $50,5^\circ$ auf $53,5^\circ$ festgestellt werden. Abb. 59 zeigt die in den Experimenten erreichten Lastspielzahlen bei einer Druckstufe von 10,8 bar. Die Versuche verliefen isobar mit einer Prüffrequenz von 7 Hz. Geprüft wurden 3 Bälge mit einem Referenzcordwinkel von $53,5^\circ$ und vier Bälge mit einem Winkel von $50,5^\circ$. In Abb. 60 wird zusammenfassend die prozentuale Zunahme der innerhalb der FE-Simulationen ermittelten Maximalwerte der Beanspruchungen im Gummi der inneren Gummi-Cord-Lage bei einer Vergrößerung des Referenzcordwinkels dargestellt. Aufgezeigt sind die Ergebnisse für die maximale Scherung (MSX), die größte Hauptdehnung (MHD), die größte von Mises Vergleichsspannung (MSM), die

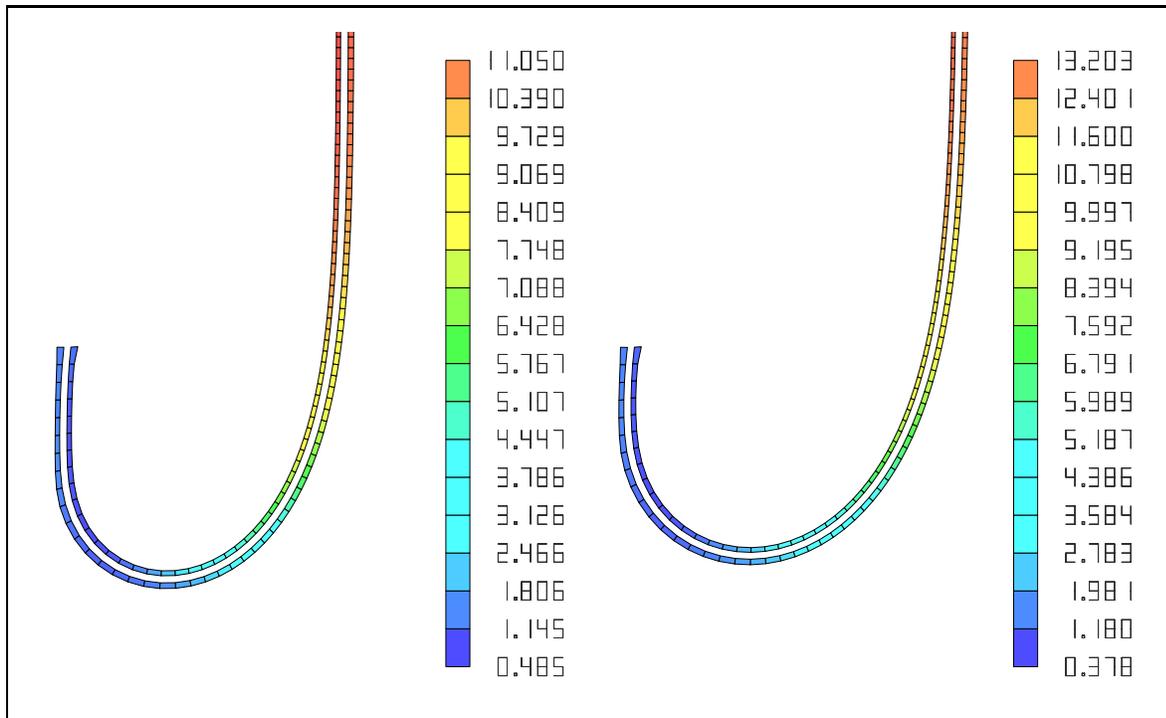


Abbildung 55: Ergebnis für die größte von Mises Vergleichsspannung MSM (Referenzcordwinkel $50,5^\circ$ links, $53,5^\circ$ rechts, Druckstufe 10,8 bar).

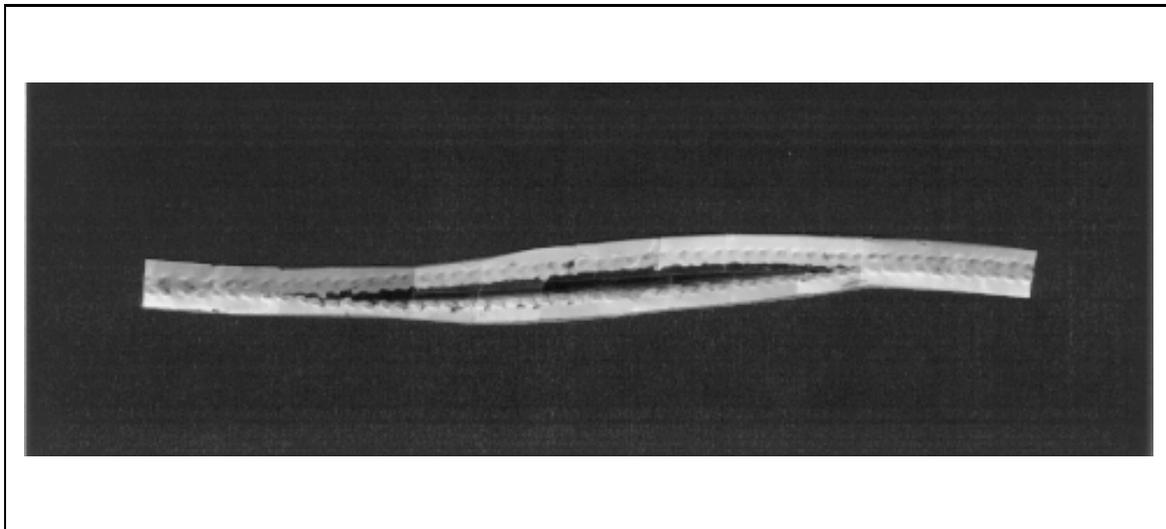


Abbildung 56: Delaminierte Luftfederbalgwand

größte Hauptnormalspannung (MHN) und schließlich die gegenüber dem Referenzcordwinkel innerhalb der Balgwand ermittelte maximale Änderung des Cordwinkels ($\Delta Wink$) bei einer Druckstufe von 10,8 bar. Es zeigt sich, daß die Corde inner-

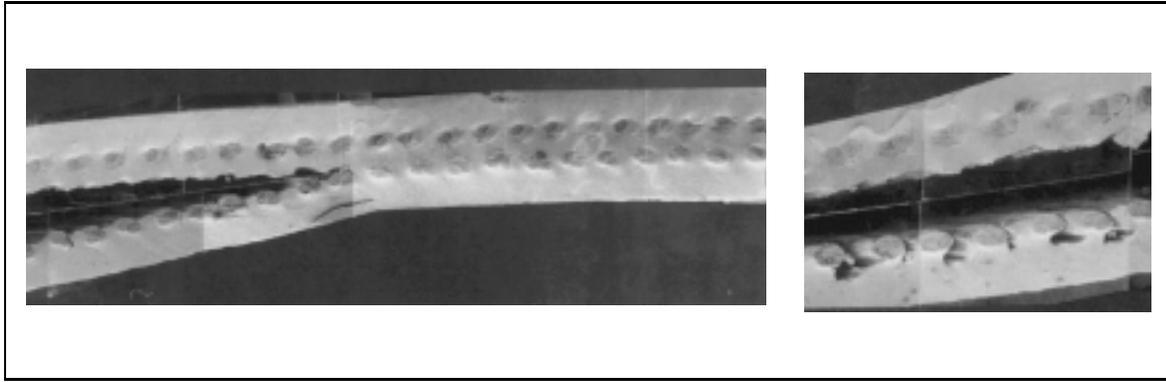


Abbildung 57: Vergrößerte Ausschnitte der delaminierten Luftfederbalgwand in Abb.56

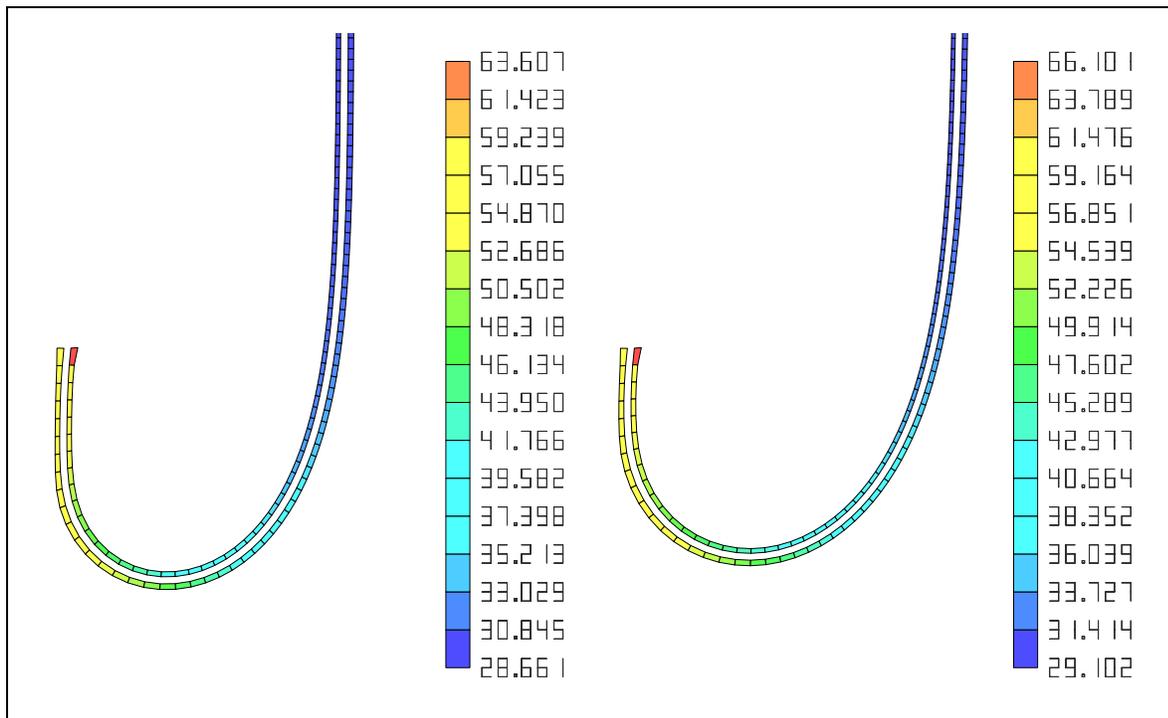


Abbildung 58: Verteilung der aktuellen Cordwinkel innerhalb der Luftfederbalgwand (Referenzcordwinkel 50,5° links, 53,5° rechts, Druckstufe 10,8 bar).

halb der Luftfeder mit einem Referenzcordwinkel von 53,5° beim Einfederungsvorgang größeren Winkeländerungen unterworfen sind als bei einem Referenzcordwinkel von 50,5°.

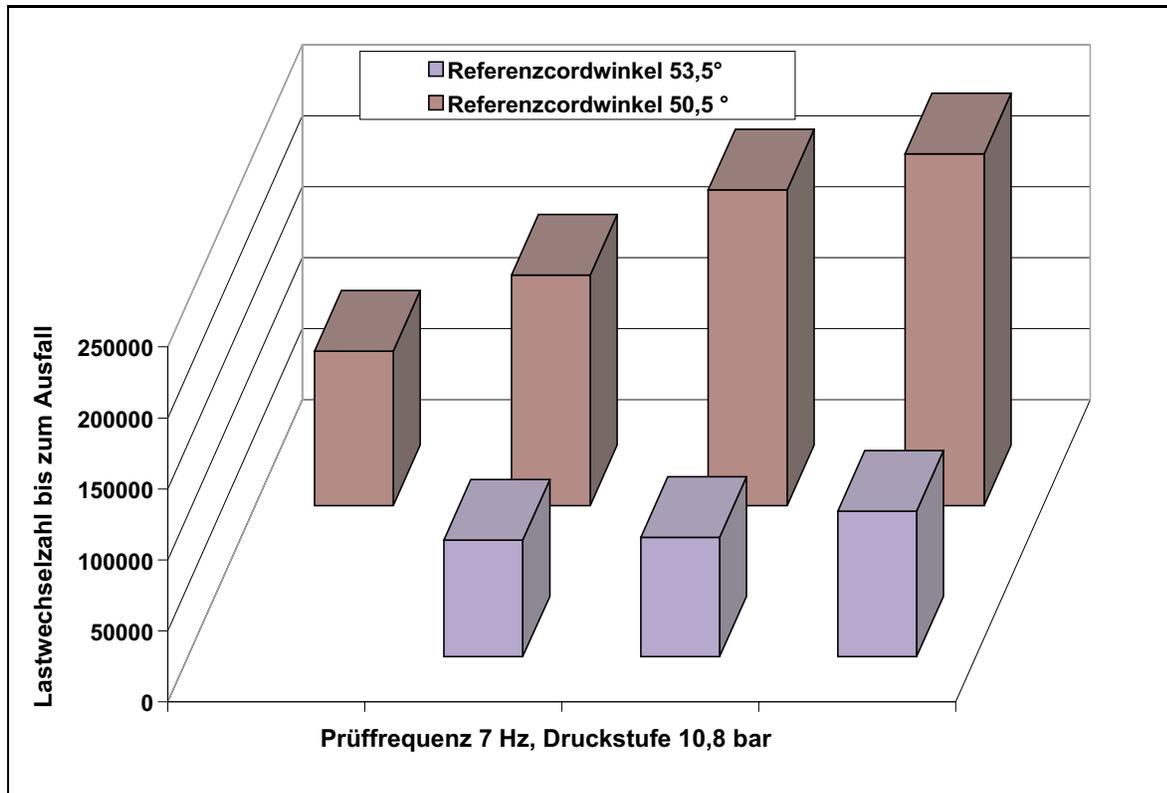


Abbildung 59: Ergebnisse der Lebensdaueruntersuchung für unterschiedliche Referenzcordwinkel bei einer Druckstufe von 10,8 bar

Übereinstimmend kann festgestellt werden, daß die geringeren Lebensdauern bei Bälgen mit einem Konfektionswinkel von $53,5^\circ$ mit der Zunahme der ermittelten maximalen Beanspruchungsgrößen im Gummi der inneren Verstärkungslage dieser Bälge korrelieren.

10.2 Konsequenzen der Untersuchungsergebnisse

Um die starken Scherbeanspruchungen des Gummis innerhalb der Verstärkungslagen zu reduzieren und damit die Möglichkeit eines Anreißen und daraus resultierenden Ausfalls zu verringern, bieten sich zwei Möglichkeiten an:

- Es besteht grundsätzlich die Möglichkeit, zum Aufbau der Luftfederbalgwand nicht nur eine Gummimischung zu verwenden. Innerhalb der Verstärkungslage, also im Gummi zwischen den Corden, bietet es sich an, eine wesentlich weichere

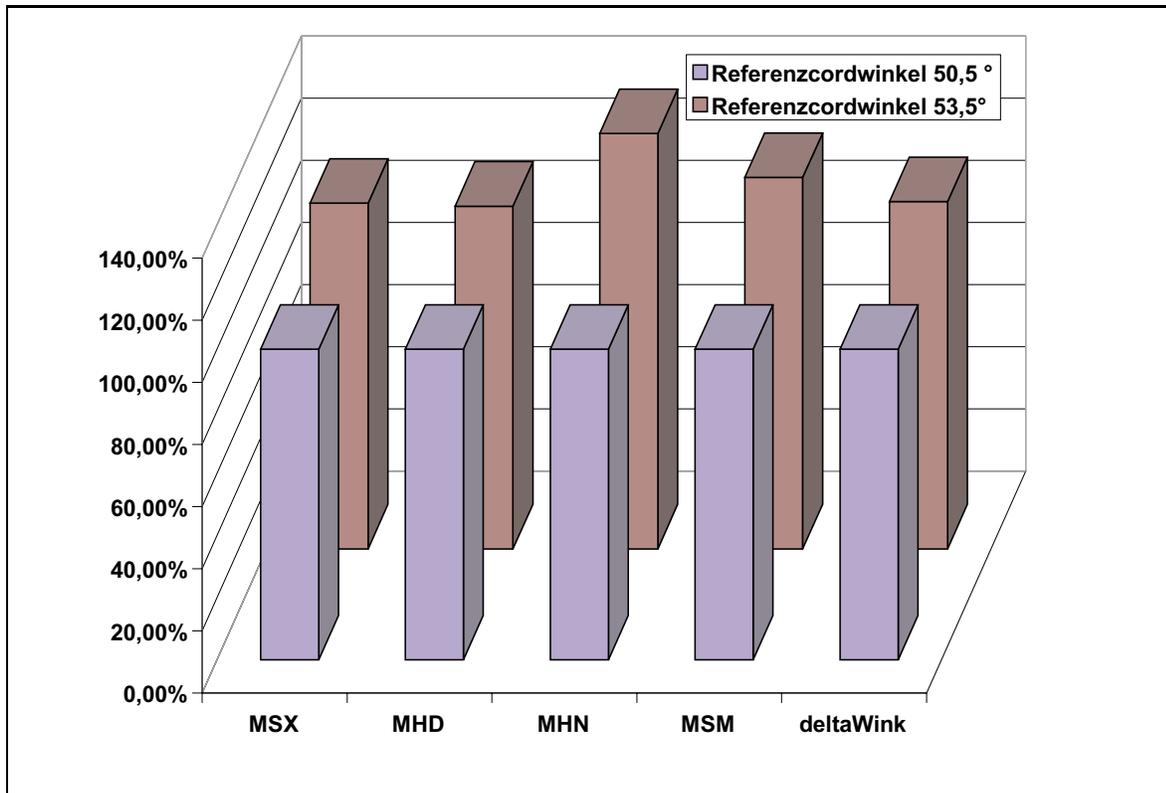


Abbildung 60: Prozentuale Erhöhung von Maximalwerten in Abhängigkeit vom Referenzcordwinkel bei einer Druckstufe von 10,8 bar

Gummimischung (also eine Mischung mit geringerer Shorehärte und damit kleinerem G-Modul) als in den äußeren und inneren Deckschichten der Balgwand zu verwenden, wodurch sich die auftretenden Spannungen reduzieren lassen. Das Gummi nimmt zwar, da die Scherwege durch die Cordwinkeländerungen vorgegeben sind, die gleichen Deformationen auf, aber er setzt durch seine geringere Eigensteifigkeit der Zwangsbewegung geringere Widerstandskräfte entgegen. Hierbei dient ein solcher Gummi im wesentlichen nur noch als Abstandshalter zwischen den Corden einer Lage. Durch die Verringerung der Spannungen im Gummi der Gewebelage entstehen nicht so schnell Anrisse, die Ausgangspunkt für ein Versagen der Luftfeder sind.

- Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Konstruktion der Luftfeder von vornherein zu verändern. Die FE-Rechnungen haben gezeigt, daß sich bei den untersuchten Cordwinkeln ($50,5^\circ$, $53,5^\circ$ und $47,5^\circ$) im Betriebszustand Cordwinkeländerungen bis ca. 25° ergeben. Hier könnte durch eine Veränderung des Cord-

winkels im Referenzzustand in Richtung des sich im zylindrischen Bereich der Balgwand einstellenden Winkels eine Entlastung des Gummis erreicht werden. Die Winkeländerungen im Betrieb wären nicht mehr so groß und damit auch die Scherwege, denen das Gummimaterial innerhalb einer Verstärkungslage unterworfen ist, geringer.

11 Zusammenfassung und Ausblick

Der typische Balgwandaufbau einer Luftfeder besteht aus einer inneren und äußeren Deckschicht aus Gummi, zwischen denen sich zwei kreuzende Verstärkungslagen befinden. Diese Verstärkungslagen bestehen aus den Festigkeitsträgern, Corden aus Polyamid, die in Gummi einvulkanisiert sind. Im Zuge der Abrollbewegung beim Einfedern der Luftfeder kommt es durch die Änderung des Cordwinkels zu erheblichen Deformationen innerhalb der die Corde umgebenden Gummimatrix. Das Gummimaterial unmittelbar zwischen den Corden erfährt hierbei eine kombinierte Zug-, Druck- und Scherbeanspruchung. Beanspruchungsmaxima lassen sich in diesen Bereichen nachweisen.

Lebensdaueruntersuchungen an Rollbalgluftfedern [54] haben gezeigt, daß es aufgrund der dem Gummi aufgezwungenen Deformationszustände innerhalb der inneren Verstärkungslage zu ersten Anrissen zwischen den Corden und dem umgebenden Gummi kommt. Diese Anrisse werden schnell größer, wachsen zusammen und führen zu Delaminationen zwischen den Verstärkungslagen. Setzt sich ein solcher Riß über die äußere Verstärkungslage durch die Gummideckschicht der Luftfeder fort, kommt es zur Undichtigkeit und damit zum Versagen der Luftfeder.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der rechen-technischen Simulation von Einfederungsvorgängen bei Rollbalgluftfedern. Hierzu werden die Luftfederbalgwand und geeignete Substrukturen auf drei Modellierungsebenen durch Finite Elemente abgebildet. Zum einen wird an einer Substruktur gerechnet, die einen halben Cord in einer umgebenden Gummimatrix darstellt (vgl. Abb. 23). Davon ausgehend wird an einem Makroelement gerechnet, welches aus zwei sich kreuzenden Corden besteht. Schließlich wird auf globaler Ebene an einem größeren Abschnitt der Luftfederbalgwand gerechnet. Im Rahmen der Rechnungen am Makroelement wird ausführlich auf das Problem einer geeigneten Diskretisierung durch Finite Elemente eingegangen. Es werden unterschiedliche Modellierungen vorgestellt, wobei das Ziel ist, ein optimales FE-Netz zu finden, das einerseits einen nicht zu hohen Aufwand an Rechenzeit erfordert, sich jedoch als geeignet für Beanspruchungsanalysen erweist.

Für die Durchführung der Simulationsrechnungen wird das Finite Element Paket „FENO“ des Instituts für Mechanik der Universität Hannover verwendet. Um die Simulation realitätsnah zu gestalten, wurden Stoffgesetze in das Programmpaket im-

plementiert, getestet und mit ihren Parametern angepaßt. Für das Materialverhalten der Verstärkungscorde wird auf eine Formulierung von Steinbeck [45] und Jacob [22] zurückgegriffen, die in einer weiterentwickelten Form zur Anwendung kommt (vgl. Kap. 4). Es handelt sich um eine Potentialformulierung, die ausgehend von einem isotropen Grundpotential, die Modellierung der wesentlichen Cordeffekte durch eine additive Überlagerung von Teilpotentialen ermöglicht. Als wesentliche Effekte sind hier das nichtlineare Verhalten der Corde bei Querkompression und bei Zug in Längsrichtung zu nennen. Die Potentiale werden in einem körperfesten Cordkoordinatensystem formuliert, was zwar in der Rechnung den Transformationsaufwand etwas erhöht, aber eine übersichtlichere Darstellung ermöglicht. Für die Modellierung des Materialverhaltens des Gummis wird neben dem Mooney-Rivlin Stoffgesetz [31] auch das wesentlich flexiblere Stoffgesetz nach Alexander-Smith [2] angepaßt und verwendet. Um Berechnungen auf globaler Ebene durchzuführen, wird ein orthotropes Stoffgesetz (vgl. Kap. 6.8) entwickelt, welches die Materialeigenschaften einer Gummi-Cord-Lage verschmiert darstellt. Auch diese Stoffgesetzformulierung wird in lokalen Koordinaten einer Verstärkungslage dargestellt. Es handelt sich ebenfalls um eine Potentialformulierung, wobei das Gesamtpotential durch eine Überlagerung von einzelnen Teilpotentialen gebildet wird. Abgeleitet wird das Stoffgesetz aus numerischen Experimenten an der Substruktur, in denen die wesentlichen Materialcharakteristika der Verstärkungslage identifiziert wurden.

Ziel der Berechnungen ist die Ermittlung von Beanspruchungsmaxima innerhalb der inneren Verstärkungslage, die in den genannten Lebensdaueruntersuchungen anhand von Analysen ausgefallener Luftfedern als Ausgangsgebiet von Rissen identifiziert wurden. Zu diesem Zweck wird das im Rahmen eines Abrollvorganges typische Deformationsfeld der Struktur ermittelt. Im Rahmen von Substrukturechnungen wird dieses Deformationsfeld für 693 Parameterkombinationen systematisch nachgerechnet. Die Beanspruchungsmaxima im Gummimaterial zwischen den Corden werden ermittelt und charakteristische Größen, wie z.B. die maximale Scherung und die maximale Hauptnormalspannung, innerhalb einer Datenbasis abgelegt. Diese Datenbasis ermöglicht schon bei Berechnungen auf globaler Ebene, Aussagen über die Beanspruchungsmaxima im Gummimaterial zwischen den Corden zu machen. Zu diesem Zweck wird ein Interpolationsverfahren vorgestellt, welches die gewünschten Ergebnisse abhängig vom Abstand der Corde innerhalb der Verstärkungslage (der aktuellen Teilung), der Dehnung in

Längsrichtung der Verstärkungslage und der globalen Scherung innerhalb der Lage ermittelt. Das Interpolationsverfahren wird anhand von Rechnungen am Makroelement der Luftfeder verifiziert.

Die Ergebnisse der globalen Rechnungen zeigen eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Untersuchungen [54] bezüglich der gefundenen Orte der maximalen Beanspruchungen im Gummi der inneren Verstärkungslage. Auch lassen sich die mit dem homogenisierten Stoffgesetz an der Gesamtluftfeder errechneten Balggeometrien sehr gut mit gemessenen Balgwandkonturen in Einklang bringen. Darüberhinaus korrelieren die experimentell festgestellten kürzeren Lebensdauern der Balgprüflinge bei einer Veränderung des Konfektionscordwinkels von $50,5^\circ$ auf $53,5^\circ$ mit den Simulationsergebnissen der FE-Berechnungen.

Für eine weitergehende, über die Zielstellung dieser Arbeit jedoch hinausgehende Untersuchung der Ausfallphänomene bei Gummi-Cord-Kompositen scheint es sinnvoll, die Berechnung der sogenannten „Tearing Energy“ in eine Finite Element Analyse zu integrieren. Diese von Rivlin und Thomas [39] eingeführte Größe wird im Rahmen von Versagensanalysen in Bezug auf Gummikomposite von verschiedenen Autoren verwendet ([7], [55], [8], [6], [19],[36], [37], [25]). In diesem Zusammenhang sei auch auf weitere Arbeiten auf dem Gebiet des Versagens von Gummi bzw. Gummi-Cord-Kompositen hingewiesen, die für weiterführende Untersuchungen von Nutzen sein können. Zu nennen sind hier beispielsweise Artikel von Clark [11], Lee [27], [26], [28], Pidaparti [38], Thionnet [48], Watanabe [52], Du [13], Harrison [18], Huang [19] und Gent [14].

Literatur

- [1] Akasaka, T.; Hirano, M.: Approximate elastic constants of fibre reinforced rubber sheet and its composite laminate. *Composite Materials and Structures 1* (1972), 70–76.
- [2] Alexander, H.: A constitutive relation for rubber-like-materials. *Int. J. Engng Sci.* (6 1968), 549–563.
- [3] Besdo, D.: *Skriptum zur Vorlesung Tensoren der Mechanik I/II*. Universität Hannover, unveröffentlicht, 1990/1991.
- [4] Besdo, D.; Elkin, F.; Jacob, H.-G.; Maßmann, C.; Michelis, P.; Polley, A.; Willemssen, W.; Wode, S.: BRITE / EURAM: Fatigue mechanisms and failure criteria in rolling air springs. Tech. Rep., European Community, BRITE/EIRAM Programme, Project No. BE 3270, Akzo Nobel, Industrial Fibres, Arnhem (NL); ContiTech Luftfedersysteme GmbH, Hannover (D); Institute of Mechanics of Materials and Geotechnics, Pendel (GR); Universität Hannover, Institut für Mechanik, Hannover (D), June 1995.
- [5] Betten, J.: *Elastizitäts- und Plastizitätslehre*. Vieweg, 1985.
- [6] Borowczak, M.; Causa, A. G.: Fatigue behaviour of cord-reinforced rubber composites. *Polymers & Polymer Composites 1*, 3 (1993), 211–217.
- [7] Breidenbach, R. F. ; Lake, G. J.: Mechanics of fracture in two-ply laminates. *Rubber Chemistry and Technology 52* (1979), 99–109.
- [8] Breidenbach, R. F. ; Lake, G. J.: Application of fracture mechanics to rubber articles, including tyres. *Philosophical Trans. Royal Soc. London A299* (1981), 189–202.
- [9] Cembrola, R. J. ; Dudek, G. J.: Cord/rubber material properties. *Rubber Chemistry and Technology 58* (1985), 830 ff.
- [10] Cesar de Sa, J. M. A.; Owen, D. R. J.: Finite element analysis of reinforced rubber shells. *Eng. Comput. 4* (1987), 319–331.

- [11] Clark, S. K.: Adhesion loss in cord-rubber composites. In: *Advances in Adhesively Bonded Joints* (Dec 1988), American Society of Mechanical Engineers, Materials Division, 59–64.
- [12] ContiTech: Conti luftfedern. *Firmenkatalog der ContiTech Luftfedersysteme* (1992).
- [13] Du, X. W.; Qu, W.; Wan, Z. M.; Ma, H.; Yao, M.; Jiang, J. Y.: Reinforcing function of polymer cords embedded in rubber under compression. *Tire Science & Technology* 20, 4 (Oct-Dec 1992), 254–264.
- [14] Gent, A. N.; Lindley, P. B.; Thomas, A. G.: Cut growth and fatigue of rubbers. i. the relationship between cut growth and fatigue. *Journal of Applied Polymer Science* 8 (1964), 455–466.
- [15] Gough, V. E.: Stiffness of cord and rubber constructions. *Rubber Chemistry and Technology* 41 (1968), 988–996.
- [16] Green A.E.; Zerna, W.: *Theoretical Elasticity*. Claredou Press, Oxford, 1968.
- [17] Halpin, J. C.; Tsai, S. W.: Effects of environmental factors on composite materials. *AFML-TR 51* (1969), 67–423.
- [18] Harrison, A.: Generalized fatigue modelling of buckled reinforcement in corded composites using ndt sensor data. In: *Conference: NDT '91, Melbourne, Australia* (Aug 1992), 19–21.
- [19] Huang, Y. S.; Yeoh, O. H.: Crack initiation and propagation in model cord-rubber composites. *Rubber Chemistry and Technology* 62, 4 (Sep-Oct 1989), S.709–731.
- [20] Ihlemann, J.: *Berücksichtigung inelastischer Effekte in Stoffgesetzen bei großen Deformationen für Gummimaterialien*. Diplomarbeit D6-194/93, Universität Hannover, Institut für Mechanik, unveröffentlicht, 1993.
- [21] Ishihara, K.: Development of a three-dimensional membrane element for the finite element analysis of tires. *Tire Science & Technology* 19, 1 (Jan-Mar 1991), 23–36.
- [22] Jacob, H.-G.: *Zur Berechnung lokaler Deformationen in Luftfederbalgwänden*. Dissertation Universität Hannover, 1995.

-
- [23] Jacob, H.-G.; Polley, A.: BRITE / EURAM: Fatigue mechanisms and failure criteria in rolling air springs. Tech. Rep., European Community, BRITE/EURAM Programme, Project No. BE 3270,, unveröffentlicht, 6. Progress Report 1993.
- [24] Jones, R. M.: *Mechanics of Composite Materials*. McGraw Hill, Tokyo, Auckland, Düsseldorf, 1975.
- [25] Lake, G. J.: Aspects of fatigue and fracture of rubber. In: *Progress of Rubber Technology* (1983), Applied Science Publishers Ltd., 89–143.
- [26] Lee, B.; Medzorian, J.; Hippo, P. K.; Liu, D. S.; Ulrich, P. C.: Fatigue lifetime prediction of angle-ply fiber-reinforced elastomer composites as pneumatic tire materials. In: *ASTM Special Technical Publication n 1211* (1993), 203–235.
- [27] Lee, B. L.; Liu, D. S.: Cumulative damage of fiber-reinforced elastomer composites under fatigue loading. *Journal of Composite Materials* 28, 13 (1994), 1261–1286.
- [28] Lee, B. L.; Song, J. W.; Ward, J. E.: Failure of spectra polyethylene fiber-reinforced composites under ballistic impact loading. *Journal of Composite Materials* 28, 13 (1994), S.1202–1226.
- [29] Liu, G. Q. ; Owen, D.: The computer simulation of rubber components and composites. *Composites Science and Technology* 36 (1989), 267–281.
- [30] Maßmann, C.: *Simulation des Verhaltens von textilen Festigkeitsträgern in Cord-Gummi-Kompositen*. Dissertation Universität Hannover, 1995.
- [31] Mooney, M.: A theory of large elastic deformation. *Journal of Applied Physics* 11 (1940).
- [32] Patel, H.; Turner, J.; Walter, J.: Radial tire cord-rubber composites. *Rubber Chemistry and Technology* 49 (1976), 1095–1110.
- [33] Pidaparti, R.: Stiffness characteristics of twisted cords for cord-rubber composites. *Composite Structures* 24 (1993), 291–298.
- [34] Pidaparti, R. M. V.; Kakarla, V. P.: Stress analysis of two-ply cord-rubber composites. In: *Proceedings of the American Society for Composites 1994* (1994), 399–408.

- [35] Pidaparti, R. M. V.; May, A. W.: Prediction of cord-rubber composite properties using a micromechanical model. In: *Recent Advances in Structural Mechanics American Society of Mechanical Engineers, Pressure Vessels and Piping Division (Publication)* (1994).
- [36] Pidaparti, R. M. V.; Yang, H. T. J.; Soedel, W.: A plane stress finite element method for the prediction of rubber fracture. *International Journal of Fracture* 39 (1989), 255–268.
- [37] Pidaparti, R. M. V.; Yang, H. T. J.; Soedel, W.: Modeling and fracture prediction of single ply cord-rubber composites. *Journal of Composite Materials* 26 (1992), 152–170.
- [38] Pidaparti, R. M. V.; Kakarla, V. P.: Three-dimensional stress analysis of two-ply cord-rubber composite laminates. *Composite Structures* 28, 4 (1994), 433–440.
- [39] Rivlin, R. S.; Thomas, A.: Rupture of rubber. *Journal of Polymer Science* 10 (1953), 291–318.
- [40] Rivlin, R. S.; Saunders, D. N.: Large elastic deformations of isotropic materials. *Phil. Trans. Roy.* 243 (1948), 251–298.
- [41] Rivlin, R. S.: Large elastic deformations of isotropic materials. *Phil. Trans. Roy.* 240 (1948), 459–490.
- [42] Rothert, H.; Winkelmann, T.; Domscheid, A.: *Mitteilungen des Instituts für Statik, Berechnung von Reifensystemen*. Universität Hannover, Institut für Statik, Hannover, 1988.
- [43] Rothert, H.; Gall, R.: On the three-dimensional computation of steel-belted tires. *Tire Sciences and Technology* 14 (1986), 243–260.
- [44] Rothert, H.; Nguyen; Gall, R.: Comparative study on the incorporation of composite material for tyre analysis. *Composite Structures* (1983), 504–567.
- [45] Steinbeck, C.: *Erstellung eines tensoriellen Stoffgesetzes für einen Fadenwerkstoff unter Berücksichtigung transversaler Effekte*. Diplomarbeit D6-190/93, Universität Hannover, Institut für Mechanik, unveröffentlicht, 1993.

-
- [46] Sussmann, T.; Bathe, K.-J.: A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *Computers and Structures* 26, 1/2 (1987), 357–409.
- [47] Szabo, I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser, Basel, 1987.
- [48] Thionnet, A.; Renard, J.: Laminated composites under fatigue loading. a damage development law for transverse cracking. *Composites Science Technology* 52, 2 (1994), 173–181.
- [49] Walter, J. D.; Patel, H. P.: Approximate expressions for the elastic constants of cord-rubber laminates. *Rubber Chemistry and Technology* 51 (1978), 525–576.
- [50] Walter, J. D.: Cord reinforced rubber. In: *Mechanics of Pneumatic Tires* (1981), U.S. Department of Transportation National Highway Traffic Safety Administration, 123–202.
- [51] Warnecke, U.: *Ansatz zur Entwicklung eines einfachen, vorreckungsabhängigen Gummistoffgesetzes*. Seminarvortrag, Universität Hannover, unveröffentlicht, 1994.
- [52] Watanabe, H.; Takata, T.: Experimental study on fatigue mechanism. fatigue of pet cords in compounds. *Rubber World* 203, 4 (Jan 1991), 26–31.
- [53] Whitney, J. M.; McCullough, R. L.: *Delaware Composites Design Encyclopedia-Volume 2/Micromechanical Materials Modeling*. Technomic Publishing Co. Inc., Lancaster, Basel, 1990.
- [54] Wode, S.: *Experimentelle Untersuchungen zum Ermüdungsverhalten von Rollbalg-Luftfedern*. Dissertation Universität Hannover, 1995.
- [55] Young, D. G.: Fatigue crack propagation in elastomer compounds: Effects of strain rate, temperature, strain level and oxidation. *Rubber Chemistry and Technology* 59 (1986), 809–825.
- [56] Zienkiewicz, O. C.: *Methode der Finiten Elemente*, 2.Aufl. Carl Hanser Verlag, München, 1984.
- [57] Zurmühl, R.: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. Springer, Berlin, Göttingen, 1965.

12 Anhang

In Abb. 61 und Abb. 62 ist eine Rechnung am Makroelement unter Verwendung des reduzierten Alexander-Smith Stoffgesetzes aus Kapitel 5.4 dargestellt. Es handelt sich um die Belastung infolge unterschiedlicher Cordwinkeländerungen. In Abb. 61 ist dieser Belastungszyklus in vier Konfigurationen von links nach rechts dargestellt. In der oberen Bildhälfte sind zugehörigen Stellungen der Verstärkungscorde dargestellt. Die Meridianrichtung (M) und die Umfangsrichtung (U) in Bezug auf die Luftfederbalgwand sind gekennzeichnet. Ausgehend von der unbelasteten Referenzkonfiguration wird zunächst eine Cordwinkelverkleinerung von 15° in Umfangsrichtung realisiert. Das zugehörige deformierte FE-Netz ist in der zweiten Konfiguration dargestellt. Von dieser Konfiguration ausgehend wird der Cordwinkel in Bezug auf die Umfangsrichtung um 35° vergrößert, was einer Vergrößerung des Cordwinkels in Bezug auf die Referenzkonfiguration um 20° entspricht. Das zugehörige FE-Netz ist in der dritten Konfiguration von links dargestellt. Anschließend wird davon ausgehend wieder der Zustand der zweiten Konfiguration angesteuert. Für jede Konfiguration werden die auftretenden Spannungen ermittelt. In Abb. 62 werden die von Mises Vergleichspannungen der gleichen Deformationszustände der zweiten und vierten Konfiguration einander gegenübergestellt. Es zeigt sich eine deutliche Abnahme der Spannungen um ca. 20%, was daraus resultiert, daß in der dritten Konfiguration die Deformationen deutlich größer als in der zweiten Konfiguration sind und daher der in Kapitel 5.4 eingeführte Schleppzeiger größer ist. Hiermit geht wie oben erörtert eine Verringerung der Materialsteifigkeit einher. Auf diese Weise läßt sich der Einfluß der Belastungsgeschichte, der sich in den Versuchen am Gummi zeigt (vgl. Kapitel 5.1), durch Verwendung des schleppzeigerabhängigen reduzierten Alexander-Smith Stoffgesetzes im Rahmen von FE-Rechnungen modellieren.

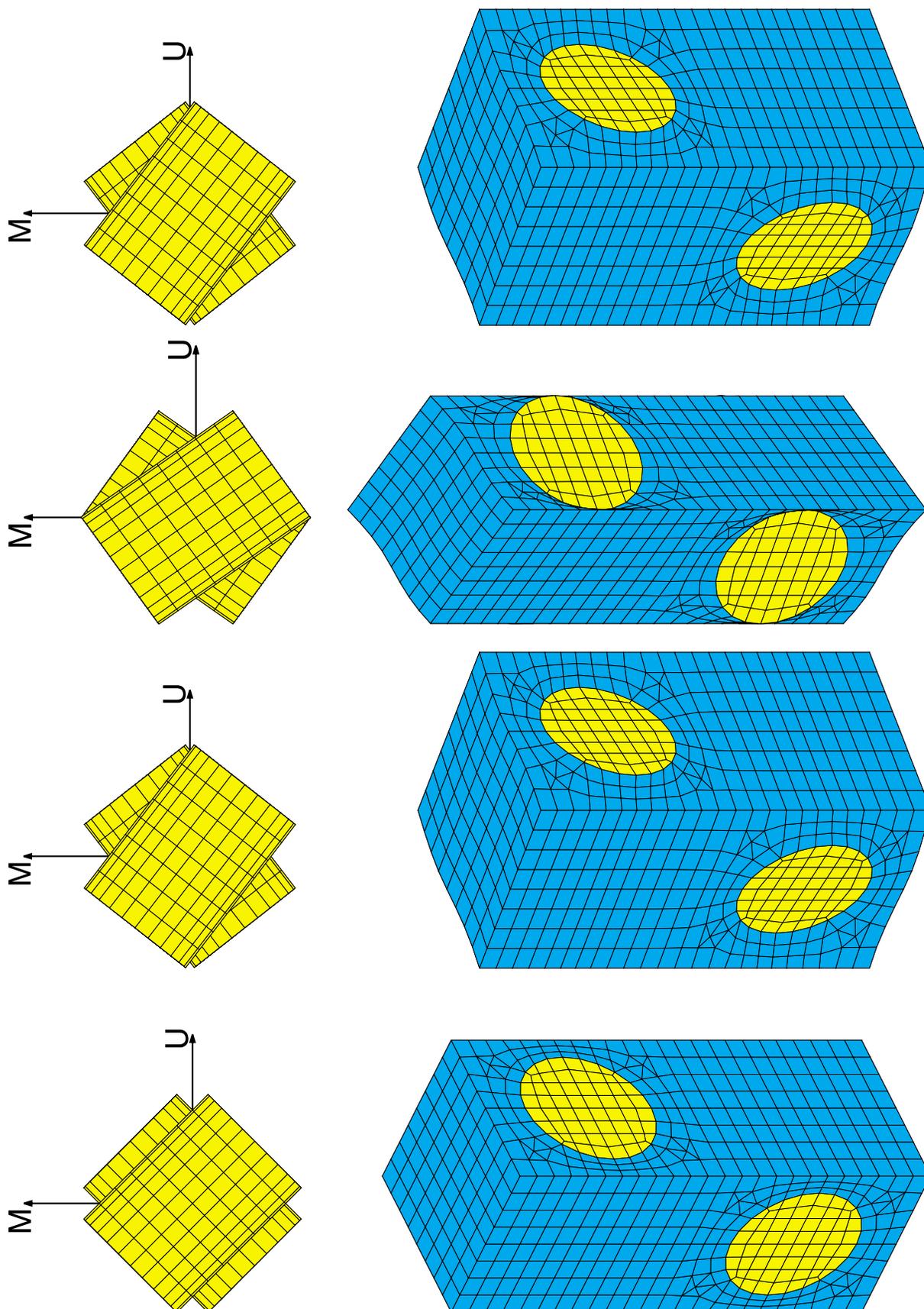


Abbildung 61: Berechnung unterschiedlicher Belastungen infolge Cordwinkeländerungen am Makroelement

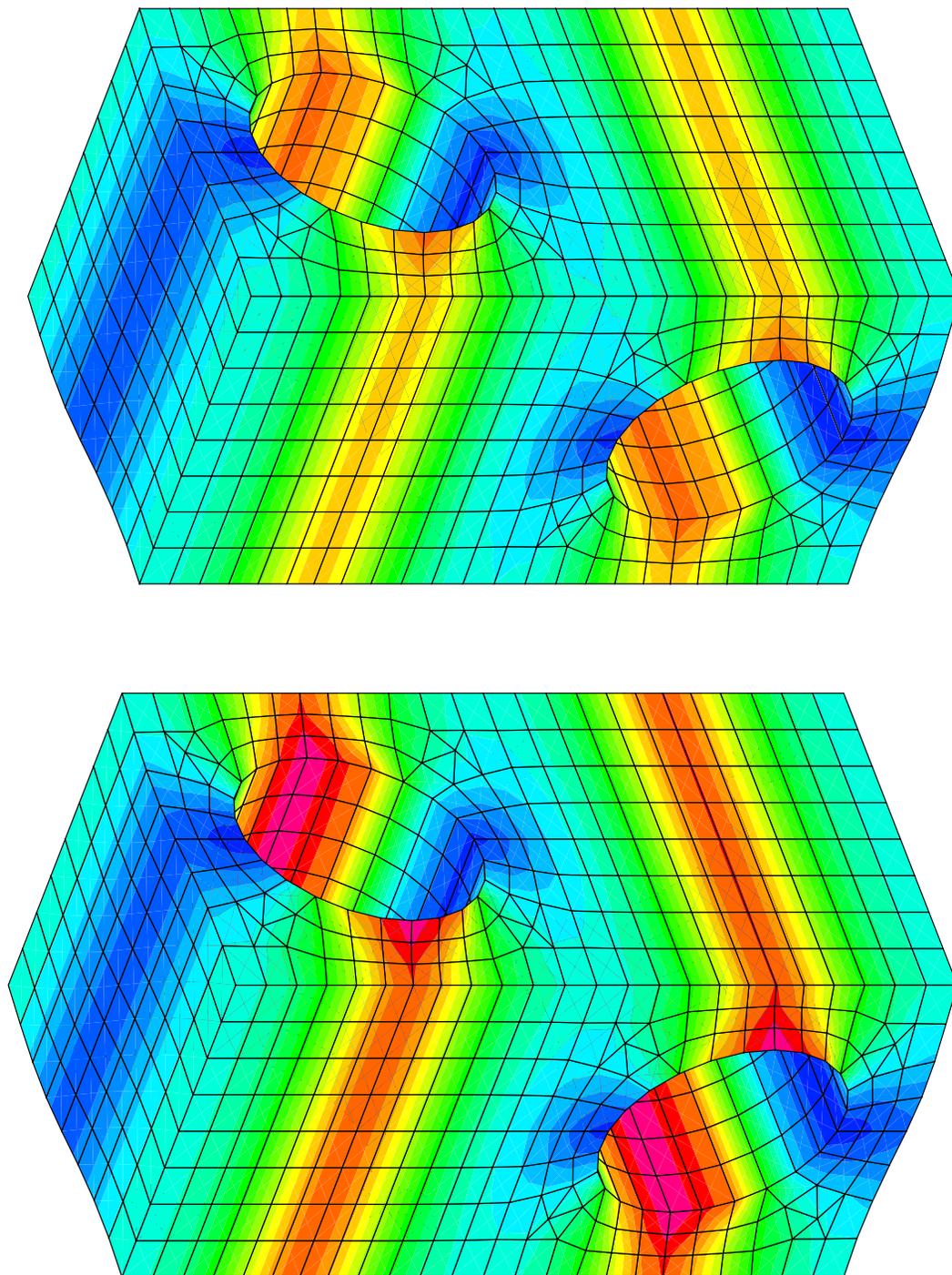
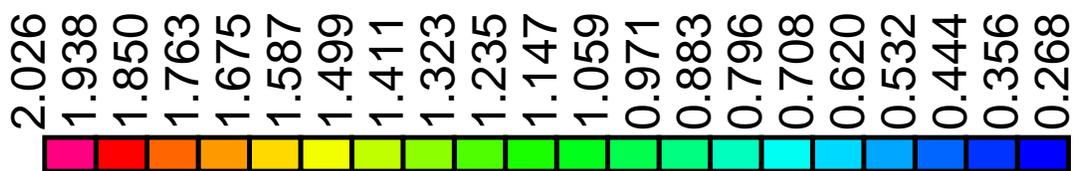


Abbildung 62: Reduziertes Alexander-Smith Stoffgesetz: Abnahme der von Mises Vergleichsspannung $[N/mm^2]$ der zweiten und vierten Konfiguration aus Abb. 61