

Stoßwellen in zweidimensionalen Plasmaströmungen mit Objekten

Entwicklung eines numerischen
Verfahrens und Methoden
zur Auswertung der Daten

Dem Fachbereich Physik der Universität Hannover

zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Phys. Harald Wallus
geboren am 28. August 1961 in Berlin-Reinickendorf

Tag der Promotion: 26. Mai 1998

Referent: Prof. Dr. Demmig

Koreferent: Prof. Dr. Böttcher

Stoßwellen in zweidimensionalen Plasmaströmungen mit Objekten

Entwicklung eines numerischen Verfahrens und Methoden zur Auswertung der Daten

In die Modellierung von Überschallströmungen mit Stoßwellen wird die Umströmung von Objekten einbezogen. Das verwendete numerische Verfahren muß mit einem unstrukturierten Rechennetz arbeiten, weil das Netz den Verlauf der Randflächen der Objekte folgen muß.

Eine Untersuchung zeigt, daß Verfahren wie die konventionelle Finite-Elemente-Methode und das konventionelle Finite-Volumen-Verfahren nicht zur Berechnung von Überschallströmungen auf unstrukturierten Netzen geeignet sind: Denn das durch das Gitter bestimmte Ko- bzw. Kontrollvolumen eines Gitterpunktes berücksichtigt nicht dessen physikalisches Einflußgebiet, welches durch die Charakteristiken begrenzt wird.

Es wird ein neues zweidimensionales Verfahren zur Modellierung von Überschallströmungen konstruiert: Das Verfahren berechnet die Flüsse für die Finite-Differenzen-Approximation mit Hilfe eines Bicharakteristikenverfahrens und kann somit im Gegensatz zu den TVD-Verfahren auch isentrope Strömungen berechnen. Die von dem neuen Verfahren in Fußpunkten benötigten Werte werden durch eine nicht-oszillierende Interpolation bestimmt, die eine Erweiterung der UNO-Interpolation für ein unstrukturiertes Netz auf Basis einer Thiessen- bzw. Delaunay-Triangulation ist.

Die für die Randflächen der Objekte benötigten Randbedingungen werden auf der Basis der statistischen Beschreibung der Bewegung eines Fluidteilchens entwickelt. Ihr Algorithmus läßt sich homogen in das Verfahren einbauen.

Die zur Interpretation der Modellergebnisse nötige Detektion von Diskontinuitäten in der Strömung (z.B. Stoßfronten, Kompressionswellen, Kontaktunstetigkeiten und tangential Unstetigkeiten der Gasgeschwindigkeit) wird verbessert und für die Anwendung auf unstrukturierte Rechennetze erweitert.

Im Vergleich mit einer konvergierenden, fragmentierenden Stoßwelle zeigt das neukonstruierte Verfahren besonders an dem sich an die Stoßfront anschließenden Hinterland eine deutliche Steigerung der Genauigkeit gegenüber dem UNO-Verfahren.

Die exemplarische Berechnung einer Kanaldurchströmung zeigt die Entwicklung der Strömung bis zum stationären Zustand hin. Obwohl sich die Strömung kurz vor und in der Stationarität kaum auf Grund ihrer Stoßfrontposition unterscheiden läßt, weisen die im Experiment nur schwer zu messenden Größen wie Dichte, Energiedichte und das Geschwindigkeitsfeld deutliche Unterschiede auf.

Schlagwörter: Instationäre Stowellen, numerische Modellierung, nicht-oszillierende Algorithmen.

Wallus, Harald

Shockwave in twodimensional plasmaflow about objekts

Development of numerical method and interpretation of numerical results

The modelling of hypersonic flow within a shockwave is broaded to include flow about objects. The used numerical method works on an unstructured grid, because the mesh should fit the shape of the object. The examination of traditional finite element method and traditional finite volume method shows, that these methods are not suitable to compute hypersonic flows on unstructured mesh: The co- or control-volume of meshpoints does not recognize the domain of dependency, which is described by the characteristics.

A new two dimensional method is developed for modelling hypersonic flows. The values in the footpoints, needed by the new method, are calculated by a non-oscillation interpolation, which concept is taken from UNO interpolation and is broaded to work on Thiessen- or Delaunay-triangulation of an unstructured grid. The boundary conditions along the surface of objects are based on the kinetic of fluid partical in statistical description. The algorithm can be easily introduced into the new method.

To interprete results of modelling the necessary detection of discontinuity within flows (e.g. shock fronts, compression waves and slip lines) is improved and increased for applications on unstructured meshing.

The comparison of the results testet for convergent, fragmenting shock front shows, that the new constructed method is much more accurate than the UNO method especialy in the downstream region directly behind the shock. An Example of modelling channelflow shows the development from unsteady flow till stationary flow. It is shown that the position of shock front in nearly stationary flow variies small, while the values of density, energy density and the properties of the velocity field have strong differences.

Key words: Instationary shock fronts, numeric modelling, non oscillating algorithm.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Gasdynamische Gleichungen und numerische Verfahren	11
2.1	Finite-Differenzen-Verfahren	11
2.2	Charakteristikenverfahren	12
2.3	Moderne FD-Verfahren	13
2.4	Entdimensionierung	15
3	Die Finite-Elemente-Methode	16
3.1	Das finite Element	16
3.2	Die Galerkin-Methode	17
3.3	Orthogonale Finite-Elemente-Methode	18
4	Fehler durch die Anwendung von volumen-orientierten numerischen Verfahren auf hyperbolische Differentialgleichungen	20
4.1	Das Abhängigkeitsgebiet eines Gitterpunktes	21
4.2	Der Einfluß des Netzes auf die Rechnungen	22
5	Nichtoszillierende Interpolation	25
5.1	Fehler der quadratischen Interpolation	25
5.2	Quadratische nichtoszillierende Interpolation des UNO-Verfahrens	27
5.3	Erweiterung auf nichtäquidistante Netze	30
5.4	Bemerkungen zum Prinzip nichtoszillierender Interpolation	34
6	Nichtoszillierende Interpolation in zwei Dimensionen	35
6.1	Qualität einer gegebenen Stützpunktwahl	35
6.2	Biquadratische Interpolationsformel für ein unstrukturiertes Netz	36
6.3	Aufstellen der nichtoszillierenden Interpolation für unstrukturierte Netze	40
7	Das charakteristisch-konservative Verfahren	43
7.1	Konstruktion des charakteristisch-konservativen Verfahrens	43
8	Randflächen im Rechengebiet	47
8.1	Offene Ränder	47
8.2	Ränder an Objekten	47

9	Verfahrensvergleich	52
9.1	Ebene Stoßwelle	52
9.2	Symmetrische konvergente Stoßwelle	56
9.3	Fragmentierende konvergente Stoßwellen	64
9.4	Unstrukturiertes Gitter	76
9.5	Ergebnis des Vergleichs	79
10	Mustererkennung	80
11	Berechnung der instationäre Umströmung von Objekten	83
11.1	Modell der Kanaldurchströmung	83
11.2	Ergebnisse der Kanaldurchströmung	84
11.3	Schlußbemerkung	85
12	Zusammenfassung	93
A	Fehler der numerischen Approximation in der Galerkin-Methode	95
B	Schwerpunktkoordinaten	97

Abbildungsverzeichnis

1	Charakteristischer Kegel	13
2	Formfunktionen für ein lineares Einheitselement	16
3	Kontrollvolumen in einem kartesischen Netz	20
4	Gitter für die Berechnung der Finite-Elemente-Methode	23
5	Ebene Stoßwelle berechnet mit FEM	23
6	Kreisförmige Stoßwelle berechnet mit FEM	24
7	Interpolation in 2. Ordnung	26
8	Analytische Fortsetzung des $\operatorname{atan}(4x)$	26
9	Diagramm zu den linksseitigen, zentrischen und rechtsseitigen Elementen	30
10	Allgemeine Interpolationsformeln 2. Ordnung	31
11	Diagramm zur Auswahl der Interpolation des Zustands 2	32
12	Diagramm zur Auswahl der Interpolation des Zustands 6	32
13	Vergleich der Interpolationen des $\operatorname{atan}(4x)$	33
14	Einfacher mißratender Interpolationsstern	35

15	Thiessen- bzw. Delaunay-Triangulation	37
16	Vergleich der Interpolationen vom $\text{atan}(40(x + 0.25))$. . .	42
17	Vergleich der Interpolationen einer Diskontinuität	42
18	Diagramm der Grundfläche des charakteristischen Kegels	45
19	Verfahrensschritten des Charakteristikenverfahrens	46
20	Diagramm der Basis des charakteristischen Kegels für den Randschritt	49
21	Verfahrensschritte des charakteristischen Randschritts . . .	50
22	Verfahrensschritte des Randschritts in den Erhaltungs- größen.	51
23	Dichteverlauf der Expansionsstoßwelle berechnet mit UNO, CCU und FEM	54
24	Gasgeschwindigkeit in der Expansionsstoßwelle berechnet mit UNO, CCU und FEM zur Zeit $t = 0.7$	55
25	Vergleich der Dichteverläufe bei $y = 0$ von UNO- und CCU-Verfahren für eine konvergente Stoßwelle.	58
26	Symmetrische konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.2$	59
27	Symmetrische konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.32$. . .	60
28	Symmetrische konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.4$	61
29	Symmetrische konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.52$. . .	62
30	Symmetrische konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.66$. . .	63
31	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.2$. . .	66
32	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.32$. .	67
33	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.4$. . .	68
34	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.52$. .	69
35	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.66$. .	70
36	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.2$ (doppelte Auflösung).	71
37	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.32$ (doppelte Auflösung)	72
38	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.4$ (doppelte Auflösung)	73
39	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.52$ (doppelte Auflösung)	74
40	Fragmentierende konvergente Stoßwelle zur Zeit $t = 0.66$ (doppelte Auflösung)	75
41	Unstrukturiertes Netz	77
42	Vergleich zwischen strukturiertem und unstrukturiertem Netz	78

43	Rechengebiet der Kanaldurchströmung	86
44	Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.15$	87
45	Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.175$	88
46	Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.2$	89
47	Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.225$	90
48	Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.275$	91
49	Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.325$	92

1 Einleitung

Im Alltag begegnen uns Stoßwellen z.B. beim durch ein Gewitter ausgelösten Donnerrollen oder auch beim sogenannten Überschallknall, der durch den Überschallflug eines Jets ausgelöst wird. In der Medizin gehört die Lithotrypsie, die Nierensteinzertrümmerung, zu einer wohlausgereiften Technik der Anwendung von konvergenten Stoßwellen. Es wird auch an einer Methode gearbeitet, Medikamente, wie z.B. Impfstoffe, mittels Stoßwellen direkt ins Muskelgewebe zu injizieren, um eine mögliche Infektion durch eine infizierte Nadel zu vermeiden. Stoßwellen treten auch auf bei Verbrennungsvorgängen im Kolbenraum von Motoren, bei der Durchfahrt eines Hochgeschwindigkeitszuges durch einen Tunnel oder beim Startvorgang von Entladungslampen mit großen Strömen. Weitere bekannte Bereiche, in denen Stoßwellen erzeugt werden, sind die Materialbearbeitung, die Laserfusion und Supernovaexplosionen.

Durch verbesserte Meßmethoden, aber auch die Weiterentwicklung von numerischen Modellen und die immer leistungsstärker werdenden Computer, lassen sich die stark nichtlinearen Vorgänge, die mit der Entstehung und der Ausbreitung von Stoßwellen verbunden sind, in physikalischen Modellen fassen und somit auch der technischen Entwicklung zugänglich machen. Vor allen Dingen für die Raumfahrt, die an der Konstruktion von Hyperschall-Flugkörpern interessiert ist, ist die Erforschung von Stoßwellenphänomenen unumgänglich: Nicht nur die Form eines Hyperschall-Flugkörpers oder auch die Wechselwirkung zwischen einem Trägerflugzeug und einem davon startenden Orbiter, sondern auch die Triebwerkskonstruktion, sowohl die Ausführung der Brennkammer als auch der Auslaßstutzen, muß dem besonderen Verhalten der Stoßwellen Rechnung tragen. Hier sind vor allem zu nennen: Die Stabilität der Machkonfiguration, Wechselwirkungen von Stoßwellen untereinander und mit Randschichten, der Einfluß chemischer Reaktionen. Durch Stoßwellen verursachte Phänomene laufen in Laborexperimenten in Zeiten von einigen Mikrosekunden ab. Die Messung der für die Strömungsmechanik charakteristischen Größen ist daher äußerst schwierig. Der numerischen Modellierung zur Beschreibung der Vorgänge kommt in solchen Experimenten größte Bedeutung zu. In meiner Diplomarbeit habe ich Methoden entwickelt, die es erlauben, zeitaufgelöste Aufnahmen von konvergenten Stoßwellen mit Modellrechnungen qualitativ und quantitativ zu vergleichen.

Das Ziel für diese Dissertation ist, der Entwicklung in den experimentellen Aufbauten Rechnung zu tragen und komplexe Geometrien zu modellieren. Dafür ist es nötig, ein numerisches Verfahren zu realisieren, das sich auf die jeweiligen experimentellen Konfigurationen wie ein Werkzeug anwenden läßt, wie es aus anderen Fachrichtungen, z.B. der Baustatik und anderen Ingenieursfachrichtungen bekannt ist.

Die Finite-Elemente-Methode (FEM), in einschlägigen Fachzeitschriften

und Handbüchern als die Methode der Wahl geltend, ist hingegen nicht geeignet.

Daher ist es nötig, von Grund auf eine Methode zu entwickeln, die es ermöglicht, ein Werkzeug zur Modellierung komplexer experimenteller Aufbauten zu erarbeiten. In Anlehnung an das weithin verwendete UNO-Verfahren habe ich dessen Grundprinzipien für die Anwendung auf nichtäquidistante Netze erweitert. Mit dieser Erweiterung der Interpolation lassen sich die numerischen Flußterme des konservativen Verfahrens mit einem Bicharakteristikenverfahren berechnen. Somit wird auch die Isentropie in der Strömung berücksichtigt und Stoßfronten können verarbeitet werden.

Dieses Verfahren erlaubt die problemlose Erweiterung der Mustererkennung auf unstrukturierte Gitter. Denn mit der Interpolation für unstrukturierte Gitter können die für das Erkennen von Diskontinuitäten (z.B. Stoßfronten, Kompressionswellen, Kontaktunstetigkeiten und Tangentiale Unstetigkeiten der Gasgeschwindigkeit) benötigten physikalischen Werte einfach beschafft werden.

Exemplarisch für die Modellierung der Überschallströmung um Objekte und für die Anwendung von Mustererkennungsverfahren stelle ich eine instationäre Kanaldurchströmung vor. Mit diesem Modell zeige ich die Möglichkeit auf, instationäre Strömungszustände und ihre Entwicklung bis hin zum stationären Zustand zu erläutern.

2 Gasdynamische Gleichungen und numerische Verfahren

Zur Beschreibung der Gasströmung werden die instationären Eulergleichungen verwendet, die die reibungsfreie Strömung ohne Wärmeleitung und Reibung beschreiben.

2.1 Finite-Differenzen-Verfahren

Die Erhaltungssatzform wird von den meisten Finite-Differenzen-Verfahren (FD) verwendet. Die Eulergleichungen lauten in der Erhaltungssatzform

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ n \\ e \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} m \\ mm/\rho + p \\ mn/\rho \\ (e+p)m/\rho \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} n \\ nm/\rho \\ nn/\rho + p \\ (e+p)n/\rho \end{pmatrix}$$

In der vektoriellen Schreibweis sind \vec{F} und \vec{G} die Flüsse, mit denen sich die Gleichung einfacher schreiben läßt:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} \quad (1)$$

Hierbei sind die primitiven Variablen die Impulsdichten in x-Richtung $m = \rho u$ und in y-Richtung $n = \rho v$, sowie die totale spezifische Energie $e = \epsilon + 1/2u^2$. Der Druck p läßt sich aus der Gleichung $p = (\gamma - 1)[e - 1/2(m^2 + n^2)]/\rho$ bestimmen. Der Adiabaten-Koeffizient γ ist konstant auf 1.4 gesetzt (der Einfluß von Molekülschwingungen ist gewöhnlich gering und wird hier wegen des Ziels der Verfahrensentwicklung vernachlässigt). Für Machzahlen unter 3 ist der Einfluß der Vibrationsrelaxation auf die Ausbreitung der Stoßwellen zu vernachlässigen (s.a. [Kruber (1991)]). Der wesentliche Vorteil der Erhaltungssatzform besteht darin, daß die Differentialgleichung als eine Bilanzgleichung im FD-Verfahren

$$\vec{U}^{n+1}(x, y) = \vec{U}^n - \Delta t \left(\frac{\vec{F}^n(x + 1/2\Delta x, y) - \vec{F}^n(x - 1/2\Delta x, y)}{\Delta x} + \frac{\vec{G}^n(x, y + 1/2\Delta y) - \vec{G}^n(x, y - 1/2\Delta y)}{\Delta y} \right) \quad (2)$$

behandelt werden kann. Hier sind die Vektoren mit dem Index n für die Zeit t zu nehmen, und der Vektor \vec{U}^{n+1} ist das Ergebnis der Rechnung für die Zeit $t + \Delta t$.

Die in den Anfangswerten vorhandenen und mit der Zeit entstehenden Diskontinuitäten sind innere bewegliche Ränder in der Lösung. Für sie existieren jeweils eine rechte und eine linke Seite der Lösung, die über die Randbedingungen gekoppelt werden müssen. Die Transformation der Gleichungen in die Erhaltungssatzform erlaubt nun, die Diskontinuitäten mit Hilfe einer Bilanz der rechten und linken Seite numerisch

zu verarbeiten. Daraus könnte man schließen, daß keine weiteren Maßnahmen im Programm nötig sind. In der Praxis werden jedoch durch die Diskontinuitäten wellenförmige Störungen verursacht, für die in dem jeweiligen FD-Verfahren besondere Maßnahmen vorgenommen werden müssen. Dieses Verhalten an den Diskontinuitäten läßt sich mit dem eines elektronischen Tiefpasses vergleichen: das Antwortsignal auf eine Sprungfunktion weist ebensolche Schwingungen auf.

Die Aufgabe der Entwickler von FD-Verfahren ist es nun, diese Überschwinger an den Diskontinuitäten zu vermeiden, ohne daß die Qualität der berechneten Werte darunter leidet. Dies gelingt nicht im gewünschten Maße. Die Stoßfront wird von diesen Verfahren über einige Maschen des Netzes verschmiert. Dem Vorteil, daß für das gesamte Rechengebiet dasselbe Verfahren verwendet werden kann, also auch die Berechnung der Diskontinuitäten mit demselben Verfahren behandeln werden, stehen folgende Nachteile entgegen: Daß zum einen die Position der Stoßfront zu einem gegebenen Zeitschritt nicht mehr exakt bekannt ist und deshalb ihre Position aus den verschmierten Werten mit einem gesonderten Algorithmus ermittelt werden muß. Zum anderen, daß selbst die Geschwindigkeit der Stoßfront gesondert ermittelt werden muß, was in der Praxis größere Ungenauigkeiten, genauer, Schwankungen in den Geschwindigkeitswerten, zur Folge hat.

Weil diese Verfahren die Diskontinuitäten in einen rechts- und in einen linksseitigen Wert einschließen, werden sie auch "shock capturing"-Verfahren genannt.

2.2 Charakteristikenverfahren

Die Eulergleichungen sind quasilinear und lassen sich somit in der charakteristischen Normalform schreiben (s. [Meier (1997)]):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0 P - \gamma \mathbf{D}_0 \rho = 0 \quad \text{auf} \quad \vec{\mathcal{C}}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \\ \mathbf{D}_{\mathcal{B}}(\vec{g}\vec{v}) - \frac{a}{\gamma} \mathbf{D}_{\mathcal{B}} P = a(\nabla \vec{v} - (\vec{g}\nabla)(\vec{g}\vec{v})) \quad \text{auf} \quad \vec{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} - a\vec{g} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Hierbei ist \mathcal{C}_0 die Teilchenbahn und die Größe \mathcal{B} heißt Bicharakteristik. Der Richtungsableitungsoperator \mathbf{D}_0 längs der Teilchenbahn \mathcal{C}_0 (vgl. Abb. 1)

$$\mathbf{D}_0 = \vec{\mathbf{D}}_0 \nabla = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \nabla \end{pmatrix} = \partial_t + (\vec{v}\nabla) = \mathbf{D}_t \quad (4)$$

ist identisch mit der substantiellen Ableitung \mathbf{D}_t . Der Richtungsableitungsoperator $\mathbf{D}_{\mathcal{B}}$ ist längs der durch den Vektor \vec{g} ausgewählten Bicharakteristik \mathcal{B} (vgl. Abb. 1)

$$\mathbf{D}_{\mathcal{B}} = \vec{\mathcal{B}} \nabla = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{v} - a\vec{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \nabla \end{pmatrix} = \partial_t + ((\vec{v} - a\vec{g})\nabla) = \mathbf{D}_t \quad (5)$$

definiert. Die weiteren Größen sind die Schallgeschwindigkeit a , die zweidimensionale Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} , der logarithmische Druck $P = \ln p$, die Dichte ρ und der Adiabatenkoeffizient γ .

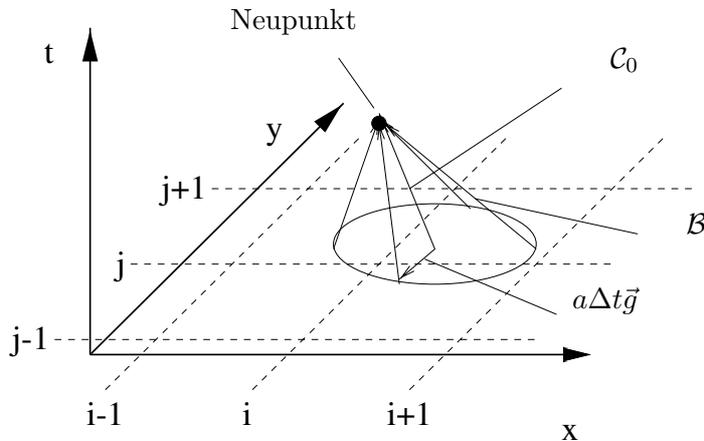


Abbildung 1: Charakteristischer Kegel. Eingezeichnet sind die \mathcal{C}_0 , vier Bicharakteristiken \mathcal{B} , sowie der Auswahlvektor $a\Delta t\vec{g}$. Die Werte in der neuen Zeitebene werden für den Neupunkt berechnet.

Die charakteristische Normalform zur Konstruktion eines numerischen Verfahrens bietet den Vorteil, daß durch die Charakteristiken das Abhängigkeitsgebiet in t von einem in $t + \Delta t$ zu berechnenden Neupunktes bestimmt ist. Dies erlaubt eine sehr effiziente Konstruktion des Charakteristikenverfahrens. Jedoch ist eine Behandlung der Diskontinuitäten, so wie in den FD-Verfahren in Erhaltungssatzform, nicht möglich: Weil die Isentropie in den Gleichungen verankert ist und damit keine Entropieerzeugung möglich ist, müssen Diskontinuitäten, wie eine Stoßwelle, als ein innerer Rand behandelt werden. Natürlich bietet das den Vorteil, die physikalischen Gegebenheiten an dieser Stoßfront recht genau verfolgen zu können. In der Praxis tritt jedoch das Problem auf (z.B., wenn sich Stoßwellen durchdringen), daß die Berechnung der inneren Randbedingungen wegen der vielen Fallunterscheidungen und der komplizierten Gleichungen für die inneren Ränder äußerst schwierig und fehleranfällig ist. Das Einpassen der inneren Ränder wird auch 'shock fitting' genannt.

Für die Aufgabe der Modellierung einer komplexen experimentellen Situation ist die größere Differenzierung der shock-fitting-Verfahren im Vergleich zu der Verwendung moderner FD-Verfahren ein Nachteil. Die Ergebnisse beider Verfahren hingegen ergänzend zu betrachten ist äußerst fruchtbar.

2.3 Moderne FD-Verfahren

Das in H. Wallus (1993) verwendete moderne FD-Verfahren zur Modellierung der an dem Stoßwellenlabor, RWTH Aachen, und an dem Insti-

tute of Fluid Science, Tohoku University, Sendai, Japan, durchgeführten Experimente ist das UNO-Verfahren (uniformly non-oscillatory) (s. [Harten, Osher (1987)]). Es gehört zur Familie der TVD-Verfahren (total-variation-diminishing), die zur numerischen Lösung hyperbolischer Differentialgleichungen mit inneren Unstetigkeiten von mehreren Autoren entwickelt worden ist¹. Die ‘total variation’, die totale Variation $TV = \sum_i |u_{i+1} - u_i|$, läßt sich als Norm der Stoßwellenentwicklung sehen: Harten postulierte die TVD-Bedingung $TV^{n+1} \leq TV^n$, daß also die totale Variation nicht von einer Zeitebene zur folgenden zunehmen darf und zwar auf Grund der Tatsache, daß während der zeitlichen Entwicklung des Riemann-Problems keine weiteren Maxima oder Minima auftreten. Sofort einsichtig ist, daß ein upwind-Verfahren 1. Ordnung der TVD-Bedingung genügt:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n + a(u_i^n - u_{i-1}^n) & \text{mit } a \geq 0 \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + a(u_{i+1}^n - u_i^n) & \text{mit } a < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Diese Gleichung gilt nur für eine eindimensionale hyperbolische Modellgleichung der Form $\partial_t u = -\partial_x f(u)$, wobei u die Erhaltungsgröße der Gleichung, u_i deren Wert am Gitterpunkt i , $f(u)$ der Fluß in Abhängigkeit von u und $a = \partial f / \partial u$ die charakteristische Geschwindigkeit ist.

Ein TVD-Verfahren höherer Ordnung verwendet statt $f(u)$ einen “numerischen” Fluß $\hat{f}_{i\pm 1/2}(u)$, der die Größe des Flusses in höherer Ordnung in der Mitte zwischen den Gitterpunkten i und $i + 1$, bzw. $i - 1$ und i angibt, in der Verfahrensformel

$$u_i^{n+1} = u_i^n + dt/dx(\hat{f}_{i+1/2}(u) - \hat{f}_{i-1/2}(u)) \quad (7)$$

Durch einen sogenannten TVD-Limiter wird dann von der Verfahrensformel (7) zu (6) geschaltet, wenn die TVD-Bedingung verletzt würde. Daher sind TVD-Verfahren an den Diskontinuitäten nur von erster Ordnung. Die verschiedenen TVD-Verfahren unterscheiden sich in der Funktionsweise des verwendeten Limiters (s.a. [Hirsch (1990)]).

Für die numerische Behandlung der eindimensionalen Gasströmung muß jedoch das dreidimensionale Differentialgleichungssystem der Eulergleichungen verarbeitet werden. Dazu berechnet man im TVD2-Verfahren die numerischen Flüsse durch eine Variableninterpolation in den Riemann-Variablen. Für diese Variableninterpolation wird ein TVD-Limiter verwendet. Diese Transformation ist nur für homentropen Strömungen möglich². Wegen dieser Einschränkung halte ich es nicht für zweckmäßig, neue, in bestimmten Situationen “besser” geeignete TVD-Limiter zu konstruieren (vgl. [Hong Luo et al (1995)]).

Das UNO-Verfahren unterscheidet sich vom TVD2-Verfahren dadurch, daß der Limiter nicht auf die erste Ordnung zurückschaltet, sondern

¹Eine Übersicht ist bei A. Harten, On the nonlinearity of modern shock-capturing schemes, in Chorin zu finden (s. [Chorin, Majda (1987)], p. 147–201).

²Zudem muß zur korrekten Berechnung der Größen an der Stoßfront eine Linearisierung nach Roe durchgeführt werden (s.a. [Yee et al (1985)]).

zu einer modifizierten Interpolation 2. Ordnung schaltet. Wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung für meine Arbeit, werde ich die modifizierte Interpolation im späteren Abschnitt ausführlicher erläutern. Die Zweidimensionalität wird durch ein Operatorsplitting erreicht. Das UNO-Verfahren ist nach Meinung von H.-H. Hehmsoth das geeignetste Verfahren zur Modellierung zweidimensionaler, konvergenter Stoßwellen (s. [Hehmsoth (1993)]).

Weiterentwicklungen des UNO-Verfahrens sind die ENO-Verfahren (essentiell non-oscillatory). Ihre Interpolation beruht auf der Auswahl von Differenzen zur Konstruktion des Interpolationspolynoms. Mit ihnen ist es möglich, räumlich in beliebiger Genauigkeit zu rechnen. Eine ausführliche Beschreibung des Konstruktionsprinzips ist in H.-H. Hehmsoth (1991) angegeben. In der Praxis ist das ENO-Schema gegenüber dem UNO-Verfahren sehr rechenintensiv. Zudem ist auch die Ausweitung der Interpolation auf eine größere Ordnung fragwürdig: Damit verbunden ist nämlich auch stets eine höhere Anzahl von verwendeten Fußpunkten. Besonders im Zweidimensionalen, z.B. bei sich durchkreuzenden Stoßfronten, kann es durch die Auswahl der Fußpunkte zu gravierenden Interpolationsfehlern kommen.

2.4 Entdimensionierung

Die Entdimensionierung erfolgt für die FD-Verfahren nach S. Abarbanel und M. Goldberg (1972):

$$p = p_0 p' \quad \rho = \rho_0 \rho' \quad u = u_0 u' \quad v = u_0 v' \quad r = r_0 r' \quad t = t_0 t' \quad (8)$$

wobei die mit 0 indizierten Variablen Vorlandgrößen sind und die entdimensionierten Größen gestrichen sind. Die Größe u_0 ist die mit $\sqrt{\gamma}$ dividierte Schallgeschwindigkeit des Vorlands; durch diese Definition bleibt die Form der Differentialgleichungen bei der Entdimensionierung unverändert. Für die Größe r_0 wird eine typische Länge des Experiments gewählt, z.B. der mittlere Anfangsradius einer konvergenten Stoßwelle oder die Breite eines durchströmten Kanals.

Die Differentialgleichungen für das Charakteristikenverfahren werden nach R. B. Payne (1957) entdimensioniert. Hier wird für die Größe u_0 die tatsächliche Schallgeschwindigkeit des Vorlands a_0 eingesetzt. Damit bleiben die Größen der Geschwindigkeiten, wie u und v , aber auch die charakteristischen Eigenwerte unverändert.

3 Die Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) bezeichnet eine Gruppe von Verfahren, deren Entwicklung in den fünfziger Jahren für die computergestützte Berechnung in der Strukturmechanik begann und schon bald auf die Kontinuumsmechanik angewendet wurde. Eine ausführliche Diskussion der Ansätze der FEM aus dem Ritzschen Verfahren und dem Hamiltonschen Prinzip enthält T. E. Simkins (1980). Die in der Strömungsmechanik hauptsächlich verwendeten Methoden basieren auf der Galerkin-FEM. Im folgenden wird die Galerkin-FEM und ihre Erweiterung zur orthogonalen FEM dargestellt und in Abschnitt 4 gezeigt, warum die Galerkin-FEM prinzipiell nicht zur Behandlung der Strömungsmechanik geeignet ist.

3.1 Das finite Element

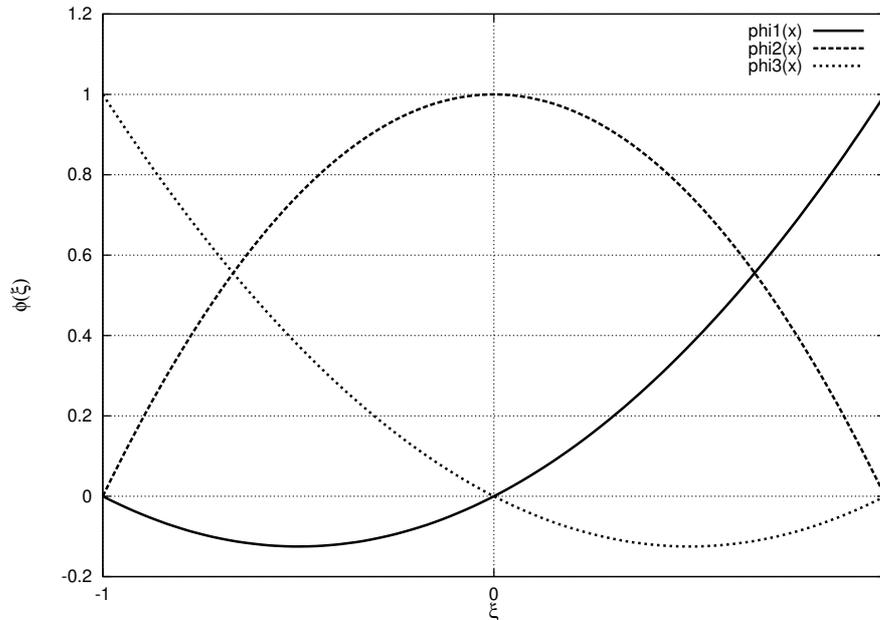


Abbildung 2: Formfunktionen für ein lineares Einheitselement 2. Ordnung. Für die Funktionen ϕ_1 , ϕ_2 und ϕ_3 gilt $\phi_i(x_j) = \delta(x_i, x_j)$, wobei die Indizes i und j den jeweiligen Knoten im Element bezeichnen.

Ein Element, bestehend aus k Gitterpunkten (Knoten) ist eine Interpolationsfunktion $(k - 1)$. Ordnung auf diesen Knoten. Z.B. seien in einer Dimension 3 Knoten gegeben (jeweils Ort und Wert). Damit lassen sich die Koeffizienten einer Taylor-Entwicklung 2. Grades $f_{Tay}(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2$ bestimmen. Diese Interpolation läßt sich schreiben als Multiplikation eines Koeffizientenvektors mit dem Vektor der Kno-

tenwerte (s.a. [Frahner (1997)]):

$$f_{FEM}(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \phi_3(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \vec{\phi}(x) \cdot \vec{u} \quad (9)$$

Die Funktionen $\phi_k(x)$ werden Formfunktionen genannt. Für die Strömungsmechanik wird hauptsächlich die Galerkin-FEM verwendet, die sich zur orthogonalen FEM weiterentwickeln läßt.

3.2 Die Galerkin-Methode

Ein numerisches Verfahren zur Lösung eines Anfangswertproblems läßt sich durch einen Entwicklungsoperator \mathcal{E} beschreiben:

$$v^{i+1} = \mathcal{E}v^i \quad \text{bzw. für ein diskretes Gitter} \quad v_n^{i+1} = \mathcal{E}_i v_n^i \quad (10)$$

Der Index n zeigt an, daß die räumliche Auflösung beschränkt ist, der Index i bezeichnet den Zeitschritt. Zur Bestimmung des diskreten Entwicklungsoperators verwendet die Galerkin-Methode einen Projektor \mathcal{P}_n , mit dem sich die Differentialgleichung in der Basis des durch die Knoten gegebenen diskreten Raums schreiben läßt:

$$\mathcal{P}_n(\mathcal{E}v^i - v^{i+1}) = 0 \quad (11)$$

In einem Element ist die Interpolation durch den Vektor $\vec{\phi}_n$ bestimmt. So haben wir für v^{i+1} und v^i die Interpolationen

$$v_n^i = \vec{\phi}_n v^i \quad v_n^{i+1} = \vec{\phi}_n v^{i+1} \quad (12)$$

Der Projektor \mathcal{P}_n ist für ein Intervall Ω eines Elements wie folgt zu definieren:

$$\mathcal{P}_n = \int_{\Omega} dx \vec{\phi}^T \quad (13)$$

Der Vektor $\vec{\phi}^T$ der Testfunktionen ist der transponierte Vektor der Formfunktionen. Die Testfunktionen können aber auch für eine verallgemeinerte Galerkin-Methode verschieden von den Formfunktionen gewählt werden. Der durch die Funktionen $\vec{\phi}$ aufgespannte Raum hat die Metrik:

$$\mathbf{M} = \mathcal{P}_n \vec{\phi} = \int_{\Omega} dx \vec{\phi}^T \vec{\phi} \quad (14)$$

Die Gleichung (11) läßt sich in diesem Raum umformulieren zu:

$$\mathcal{P}_n v^{i+1} = \mathcal{P}_n (\mathcal{E} v^i) \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} dx \vec{\phi}^T \vec{\phi} \cdot \vec{v}_n^{i+1} = \int_{\Omega} dx \vec{\phi}^T \mathcal{E} \vec{\phi} \vec{v}_n^i \quad (16)$$

$$\mathbf{M} \vec{v}_n^{i+1} = \mathbf{R}_{\mathcal{E}} \vec{v}_n^i \quad (17)$$

Weil die Integration über Ω unabhängig von den Werten der Knotenvektoren \vec{v} ist, können die Knotenvektoren aus der Integration herausgezogen werden. Es genügt also, für ein konkretes Gitter und eine konkrete Knoten-Element-Zuordnung im Programm die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{R} einmal zu berechnen. Die jeweils neue Zeitebene erhält man durch das Lösen der Gleichung (17). In der Galerkin-FEM wird \mathbf{M} die Mass-Matrix und $\mathbf{R}_{\mathcal{E}}$ die Residuen-Matrix genannt.

Mathematisch vollständig und kurzgefaßt ist die Galerkin-Methode wie folgt definiert:

Seien \mathbf{X} und \mathbf{Y} Banachräume, \mathbf{T} ein linearer Operator von $D(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{X}$ auf $R(\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{Y}$,

\mathbf{X}_n eine Folge linearer Unterräume in \mathbf{X} mit $\mathbf{X}_n \subseteq D(\mathbf{T})$,

\mathbf{Y}_n eine Folge linearer Unterräume in \mathbf{Y} ,

$P_n^2 \mathbf{Y} = P_n \mathbf{Y} = \mathbf{Y}_n$ ein idempotenter Projektor.

Dann kann man anstelle der Gleichung $\mathbf{T}x = y$ folgende Aufgabe lösen:

Gesucht ist ein $x_n \in \mathbf{X}$ mit $P_n(\mathbf{T}x - y) = 0$.

Sind $\mathbf{X} = \mathbf{H}$ und $\mathbf{Y} = \mathbf{K}$ separable Hilberträume $D(\mathbf{T})$ dicht in \mathbf{X} ,

dann gibt es in \mathbf{X} ein Koordinatensystem $u_1, \dots, (u_k \in D(\mathbf{T}))$ und

in \mathbf{K} ein Koordinatensystem v_1, \dots

Ist $\mathbf{X}_n = L(u_1, \dots, u_n)$ und $\mathbf{Y}_n = L(v_1, \dots, v_n)$,

dann ist $x_n = \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} u_i$, wobei die $a_i^{(n)}$ den Galerkin-Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{T}u_i, v_k) a_i^{(n)} = (y, v_k) \quad k = 1, \dots, n \quad (18)$$

genügt. Die typische Anwendung der Galerkin-FEM auf die instationäre Strömungsmechanik ist z.B. von R. C. Mehta et al (1991), T. J. Chung (1978) und R. A. Shapiro (1991) beschrieben. Ein interessanter, iterativer Algorithmus zur Lösung der Matrix-Gleichung auf der Basis des Runge-Kutta-Verfahrens ist in A. Jameson und T. J. Baker (1983) beschrieben: Er erhöht die Ordnung in der Zeit.

3.3 Orthogonale Finite-Elemente-Methode

Die orthogonale FEM wird mit Hilfe einer Modifikation der Testfunktion aus der Galerkin-FEM hergeleitet. Betrachten wir die Gleichung (17) in ihrer ausgeschriebenen Form für einen beliebigen Operator \mathcal{O} , so können wir die Anwendung der Projektion auf diesen Operator $\mathcal{P}_n \mathcal{O}$ als die schwache Formulierung des Operators sehen:

$$\int dx \vec{\phi}^T \vec{\phi} \quad \begin{array}{l} \text{Ergebnis} \\ \vec{v}^{n+1} \end{array} = \overbrace{\int dx \vec{\phi}^T \mathcal{O}}^{\text{schwache Formulierung}} \quad \overbrace{\vec{\phi} \vec{u}}^{\text{Interpolation}} \quad (19)$$

$$\mathbf{M} \quad \vec{v}^{n+1} = \mathbf{R}_{\mathcal{O}} \quad \vec{v}^n \quad (20)$$

Beschränken wir die Betrachtung auf ein Element (im nächsten Kapitel werden wir sehen, daß dies für die Eulergleichungen sogar notwendig ist).

Dann können wir obige Gleichung mit der Inversen der Massen-Matrix \mathbf{M}^{-1} von links multiplizieren:

$$\vec{v}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}_{\mathcal{O}} \vec{v} = \hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{O}} \vec{v} \quad (21)$$

Wir erhalten das Ergebnis der Anwendung des Operators \mathcal{O} direkt. Weil die Massen-Matrix und ihre Inverse im konkreten Fall nur aus den durch das Gitter bestimmten Konstanten besteht, ist es möglich sie erst mit den Testfunktionen zu multiplizieren, bevor das Residuen-Integral ausgeführt wird. Die Testfunktionen $\vec{\phi}^T$ werden zu orthogonalen Testfunktionen transformiert. Die so erzeugte Residuen-Matrix $\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{O}}$ vereinfacht die Matrix-Gleichung (17) erheblich: Wir erhalten den Ergebnisvektor v^{n+1} direkt durch die Anwendung der Residuen-Matrix $\hat{\mathbf{R}}_{\mathcal{O}}$. Obwohl die orthogonale FEM sehr elegant ist und ein sehr effizienter numerischen Algorithmus resultiert (s.a. [Spradly et al (1985)]), ist sie wenig bekannt. Der Vergleich zwischen Finite-Differenzen-, Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Methode ist über die orthogonale FEM möglich (s. [Prozan et al (1977)]). H. Frahnert (1997) hat mit der orthogonalen FEM ein Finite-Differenzen-Verfahren nach Lax-Wendroff realisiert. Zudem zeigt er auf, daß die Anwendung der isoparametrischen Elemente nur sehr begrenzt möglich ist und gibt eine Methode an, die die Integration der FEM-Operatoren für allgemeine Elemente befriedigend durchführt.

Eine Anwendung der orthogonalen FEM ist die Bestimmung von Interpolationsfunktionen:

Setzen wir für den Operator \mathcal{O} eine räumliche Verschiebung $x \rightarrow x - dx$ ein, so erhalten wir als Residuenoperator einen Interpolationsoperator auf den Knotenpunkten des Elements:

$$\vec{v}(x; n) = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - d\mathbf{x}} \vec{v} \quad (22)$$

Für einen Knoten i , der auf dem Rand eines Elements liegt, erhält man eine gerichtete Interpolation $v_i(x; n)$ (z.B. für P_{11} in Abb. 3). Für ein Element im Zentrum erhält man eine zentrale Interpolation (für P_{22} in Abb. 3).

So können spezielle Interpolationen für eine gegebene Anzahl von Stützpunkten konstruiert werden.

4 Fehler durch die Anwendung von volumen-orientierten numerischen Verfahren auf hyperbolische Differentialgleichungen

In der März-Ausgabe 1997 heißt es in einer Überschrift der Zeitschrift "Spektrum der Wissenschaften" auf Seite 96 "Von Rauchwölkchen zur Sternentstehung: FEM an der Front der Forschung". Diese Einschätzung kann ich jedoch nicht teilen: ich werde zeigen, daß konventionelle Finite-Elemente-Verfahren, ebenso wie konventionelle Finite-Volumen-Verfahren nicht zur Berechnung instationärer Probleme der Strömungsmechanik geeignet sind.

Zudem ist es augenfällig, daß die numerischen Verfahren für die instationäre Gasdynamik in den letzten zwei Jahren kaum noch unstrukturierte Netze verwenden. Statt dessen werden, um die Geometrie zu berücksichtigen, "transformierte" Netze verwendet, die z.B. mit Hilfe einer konformen Abbildung aus dem kartesischen Koordinatensystem erzeugt werden. Für komplexere Geometrien werden einzelne solcher transformierten Teilnetze aneinander "geklebt". Das Aneinandersetzen der einzelnen Teilnetze wird i.a. nicht problematisiert (s.a. [Meinke (1993)]). Dies weist auf die größere numerische Viskosität der verwendeten TVD-Limiter hin. Die so konstruierten Verfahren zeigen im wesentlichen unabhängig von der gewählten TVD-Methode eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Sachverhalten.

Berechnungen instationärer Gasströmungen mit Finite-Volumen-Verfahren

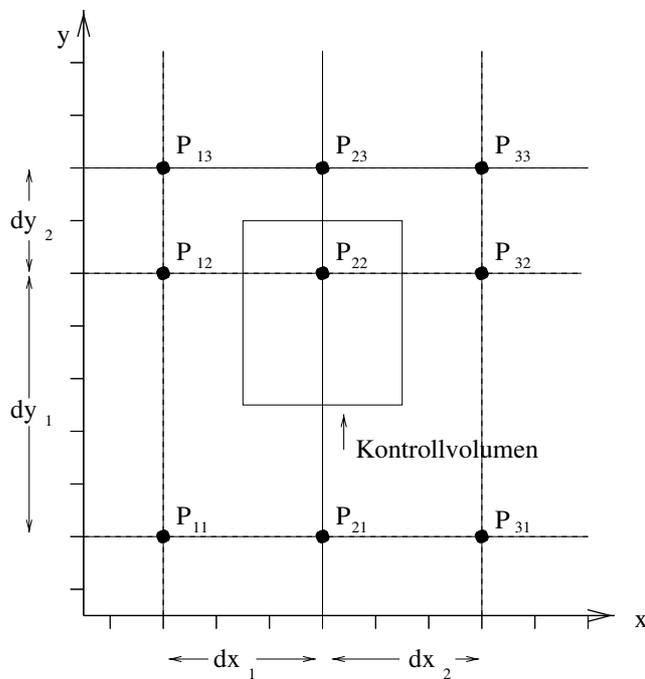


Abbildung 3: Kontrollvolumen in einem kartesischen Netz.

für unstrukturierte Netze zeigen hingegen in bestimmten, kritischen Bereichen erhebliche Abweichungen von den jeweiligen experimentellen Ergebnissen. V. Daru, G. Fernandez und C. Tenaud, vom Laboratoire SI-NUMEF, Paris, (s. [Daru et al (vorauss. 1998)]) sagen explizit, daß ihre Modellierungsergebnisse von der Struktur des gewählten Netzes beeinflußt werden. Um das verwendete Verfahren zu testen, haben sie ihre Gitterstruktur immer weiter verfeinert und dabei beobachtet, daß sich auf den Strömungsbildern keine physikalische Struktur ausbildet, sondern die Struktur der verwendeten Zellen sichtbar wird. Das Strömungsmuster richtet sich nach der Netzstruktur. Dies entspricht meinen eigenen Erfahrungen (vgl. das Beispiel im Abschnitt 4.2).

Das Versagen der traditionellen FVM und der FEM auf unstrukturierten Netzen ist von prinzipieller Natur.

4.1 Das Abhängigkeitsgebiet eines Gitterpunktes

Betrachten wir ein Kontrollvolumen-Verfahren (KV-Verfahren). In der Abb. 3 ist als Beispiel eine einfache Konstruktion eines solchen Kontrollvolumens gezeigt: Die Ränder des Volumens liegen jeweils auf den Seitenhalbierenden der Verbindungslinien zweier benachbarter Punkte. Die x-Ableitung des Flusses in x-Richtung wird durch die Differenz der beiden Flüsse links und rechts, dividiert durch die Fläche des Kontrollvolumens genommen. Je größer die Strecke dy_1 im gegebenen Gitter ist, desto mehr Einfluß erhalten die Werte der Punkte 11, 21 und 31 auf die Differenz.

Dieses Verhalten des KV-Verfahrens ist jedoch nicht physikalisch: Denn das Einflußgebiet des Punktes 22 wird durch die Charakteristiken bestimmt, also durch die Schallgeschwindigkeit und die Strömungsgeschwindigkeit im Falle der einfachen Gasdynamik. Die Berechnung der Flußdifferenz ist beim KV-Verfahren ganz wesentlich von der Netzgeometrie beeinflußt. Dieser Effekt kann in Fällen mit großen Gradienten in den physikalischen Werten dominant werden und die Rechenergebnisse stark verfälschen, wie z.B. für Gitterpunkte in der Nähe von Objekten in einer Überschallströmung.

Weil dieser Sachverhalt in der einschlägigen Literatur äußerst selten erwähnt wird, möchte ich angesichts seiner Bedeutung kurz zusammenfassen:

- Für die instationäre Gasdynamik ist es notwendig, das Einflußgebiet entsprechend den gegebenen physikalischen Größen zu wählen und nicht nach den Gegebenheiten der Netzgeometrie.
- Die Verwendung von volumen-orientierten Verfahren wie traditionelle Finite-Volumen- und Finite-Elemente-Verfahren sind nicht für die Behandlung von instationären hyperbolischen Differentialgleichungen geeignet.

4.2 Der Einfluß des Netzes auf die Rechnungen

Ein einfaches Beispiel wird in den Abb. 4 bis Abb. 6 veranschaulicht. Das Programm ist ein FEM-Verfahren, für das die Matrixgleichung (17) mit Hilfe eines Runge-Kutta-Mehrschrittverfahrens behandelt wird (s. [Jameson, Baker (1983)]). Das Gitter in Abb. 4 ist ein einfaches, gleichmäßig strukturiertes, aus dreieckigen Elementen konstruiertes Gitter. Um die Überschwinger zu vermindern, ist eine künstliche Viskosität verwendet worden, die auf normierten zweiten Differenzen beruht (s. [Sod (1978)]).

Eine einfache, ebene Stoßwelle mit konstantem Hinterland, die in $x = 1$ mit der Machzahl $M = 2.5$ initialisiert wurde, zeigt bis zum Zeitpunkt $t = 0.7$ (s. Abb. 5) keine besonderen Abweichungen von dem erwarteten Ergebnis. Leichte Wellen im Hinterland der Stoßwelle sind typische Erscheinungen der verwendeten numerischen Methode: Das verwendete Verfahren ähnelt einem auf zentralen Differenzen basierenden Finite-Differenzen-Verfahren.

Auf dem gleichen Gitter initialisieren wir nun eine kreisförmige konvergente Stoßwelle mit der gleichen Machzahl $M = 2.5$ und ebenfalls konstantem Hinterland. Die Abb. 6 zeigt diese Stoßwelle zum Zeitpunkt $t = 0.2$. Deutlich ist die Struktur des Netzes zu erkennen, das durch seine links-unten – rechts-oben-Struktur eine Richtung bevorzugt.

Die Strömung einer ebenen Stoßwelle durchläuft die geometrischen Berandungen der Elemente stets mit etwa gleichen physikalischen Werten. Beim Passieren einer Diagonalen wird die ebene Stoßfront zwar verzerrt, aber dieser Einfluß ist durch den Einfluß der nachfolgenden Diagonalen und der künstlichen Viskosität nicht sichtbar.

Für die Kreisstoßwelle gilt dies nicht mehr: Die Konvergenz der Stoßwelle bedingt, daß die Stoßfront die diagonalen Ränder der Elemente stets unter einem anderen Winkel passiert. Das hat einen Massenstrom zur 45° -Linie zur Folge, was der eigentlich symmetrischen Kreisstoßwelle "Ohren" verleiht. Nun kann man ein Gitter konstruieren, das abwechselnd aus "linken" und "rechten" Diagonal-Elementen besteht: So läßt sich auch für eine konvergente Kreisstoßwelle ein besseres Ergebnis erzielen. In jedem Fall sollte die Wahl der Form und Art der Gitter unabhängig von der Gasströmung sein, zumal man bei der Einbeziehung von Objekten in das Netz in der Wahl der Form der Elemente i.a. stark eingeschränkt ist.

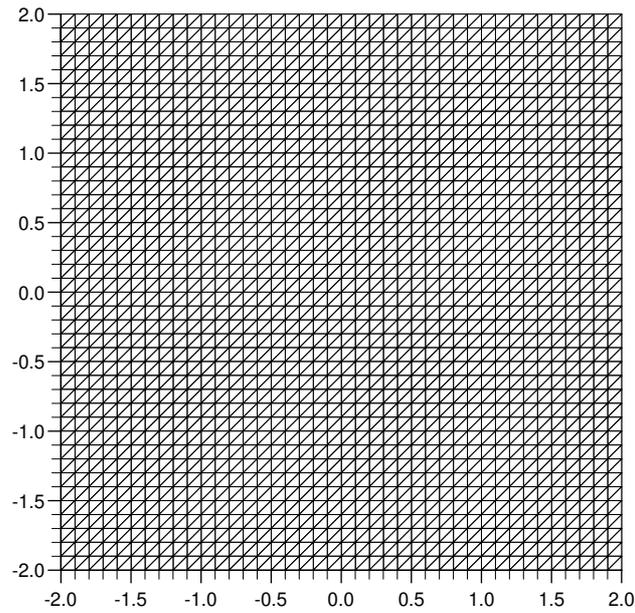


Abbildung 4: Gitter für die Berechnung der Finite-Elemente-Methode.

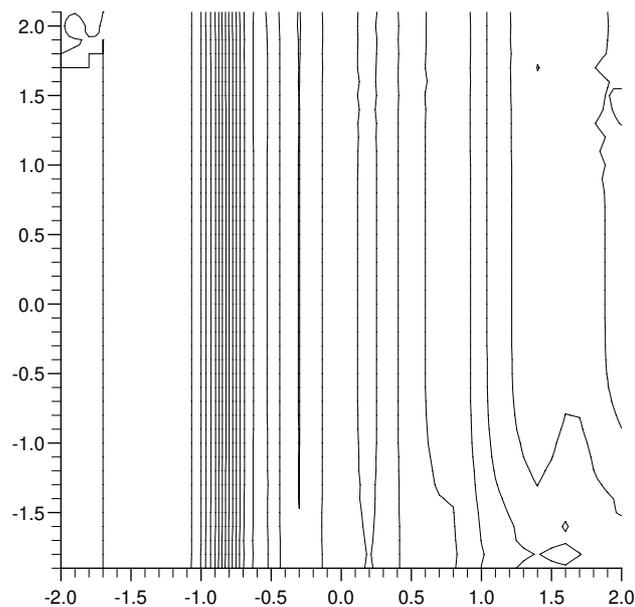


Abbildung 5: Ebene Stoßwelle mit der Machzahl $M = 2.5$ zur Zeit $t = 0.7$ initialisiert bei $x = 1$. Dargestellt sind die Höhenlinien der Dichte in normierten Einheiten. Die im Hinterland der Stoßfront zu sehenden leichten Wellen sind für ein auf quasizentralen Differenzen basierendes Verfahren typisch, das mit einer künstlichen Viskosität stabilisiert wird.

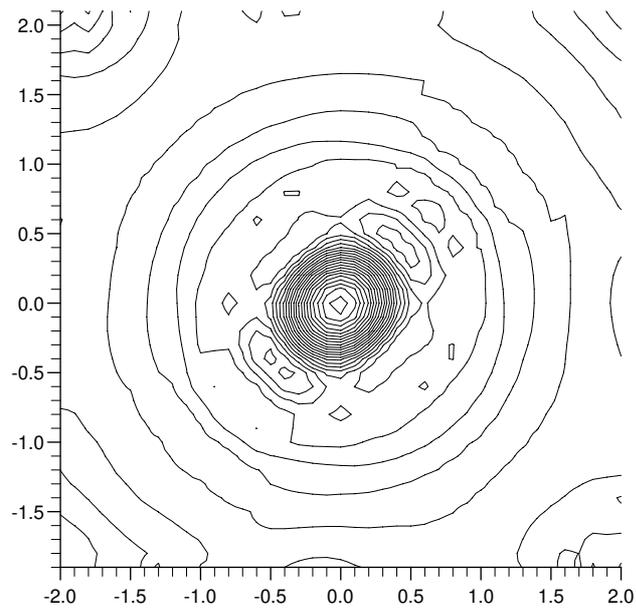


Abbildung 6: Kreisförmige Stoßwelle mit der Machzahl $M = 2.5$ zur Zeit $t = 0.2$ initialisiert bei $r = 1$. Dargestellt sind die Höhenlinien der Dichte in normierten Einheiten. Deutlich ist in diesem Stadium der konvergenten Stoßwelle die Abweichung von der Kreisform zu sehen. Die Struktur des Rechnernetzes bevorzugt die Richtung links-unten nach rechts-oben.

5 Nichtoszillierende Interpolation

Auch wenn es nicht augenscheinlich ist, so kann jedes numerische Verfahren, basierend auf finiten Differenzen, aus der Taylorreihe konstruiert gedeutet werden (vgl. [Hirsch (1990)], p. 167). Die Bestimmung einer Taylorreihe aus Stützstellen ist einer Interpolation ähnlich. Somit kann das Auftreten von Oszillationen bei Verfahren 2. Ordnung mit den Fehlern von Interpolationen an Unstetigkeitsstellen verglichen werden. Bei Verwendung eines Verfahrens auf der Basis von Charakteristiken, wie z.B. dem Hartree-Verfahren (s. [Hartree (1953)]), wird die Interpolation direkt angewendet: Die physikalischen Werte in den Fußpunkten der Charakteristiken müssen interpoliert werden.

Welche unerwartete Schwierigkeit die Interpolation in ihrer Anwendung darstellt, wird im folgenden veranschaulicht. Diese Schwierigkeit kann mit Hilfe der nichtoszillierenden Interpolation umgangen werden. Dessen Anwendung wird hier für nichtäquidistante Gitterpunkte erweitert.

5.1 Fehler der quadratischen Interpolation

Nehmen wir als die zu interpolierende Funktion eine analytisch gegebene als Ausgangspunkt der Betrachtung, z.B. $\operatorname{atan}(4x)$: Diese Funktion ähnelt im Intervall $[-2, 2]$ dem Aussehen einer "verschmierten" Stoßfront, wie sie numerischen Verfahren mit shock-capturing eigen ist. Zudem ist sie im mathematischen Sinn sehr gutmütig: Monoton steigend und beliebig oft differenzierbar.

Die Gitterpunkte sollen in diesem Beispiel im Abstand 0.5 jeweils an den x-Koordinaten $[-0.5, 0.0, 0.5, 1.0, 1.5]$ liegen. Angenommen, wir benötigen für einen Rechenschritt den Wert an der Stelle $x = 0.6$ in 2. Ordnung. Als erstes wird man durch die Stützpunkte $[0.0, 0.5, 1.0]$ eine quadratische Interpolationsfunktion legen. In Abb. 7 ist diese Interpolation als zentrische Interpolation im Vergleich zum $\operatorname{atan}(4x)$ aufgetragen. Deutlich ist die Überhöhung des gesuchten Wertes durch die zentrische Interpolation zu sehen. Ein "Überschwinger" wäre die Folge. Die rechtsseitige Interpolation mit den Stützstellen $[0.5, 1.0, 1.5]$ ergibt einen wesentlich besseren Wert. Die geeignete spezifische Wahl der Stützpunkte bietet also eine erhebliche Verbesserung eines numerischen Verfahrens.

Die Ursache des Interpolationsfehlers läßt sich begründen: Angenommen, die Stützwerte sind von einer unbekanntem Funktion genommen; diese Funktion können wir im Komplexen fortsetzen, weil sie reell und differenzierbar sein muß. Ein Ausschnitt einer Fortsetzung vom $\operatorname{atan}(4x)$ in das Komplexe ist in Abb. 8 zu sehen: Eigentlich müßte man ein Höhenlinienbild vom Realteil und vom Imaginärteil angeben, was aber ein wenig unanschaulich ist. Daher wird zur Darstellung der Betrag in Abhängigkeit von x und iy verwendet. Die Multiplikation mit der Vorzeichenfunktion $\operatorname{sign}(x)$ erlaubt, daß der $\operatorname{sign}(x) \cdot |\operatorname{atan}(4(x + iy))|$ für reelle Argumente ($y = 0$) der Funktion $\operatorname{atan}(4x)$ entspricht. In der Abb. 8

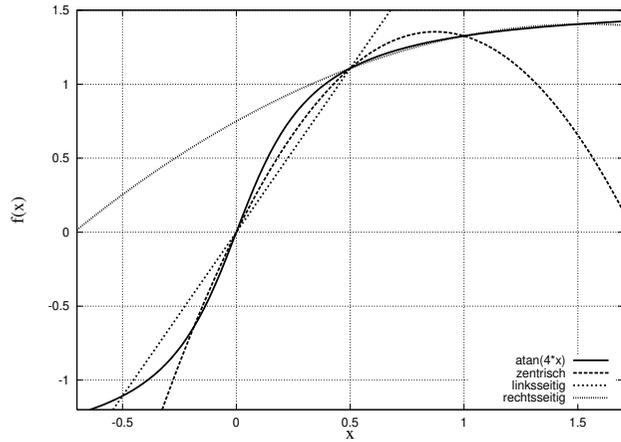


Abbildung 7: Interpolation in 2. Ordnung der Funktion $\text{atan}(4x)$ mit einer linksseitigen (Stützpunkte= $[-0.5, 0.0, 0.5]$), zentrischen (Stützpunkte= $[0.0, 0.5, 1.0]$) und rechtsseitigen (Stützpunkte= $[0.5, 1.0, 1.5]$) Stützpunktwahl.

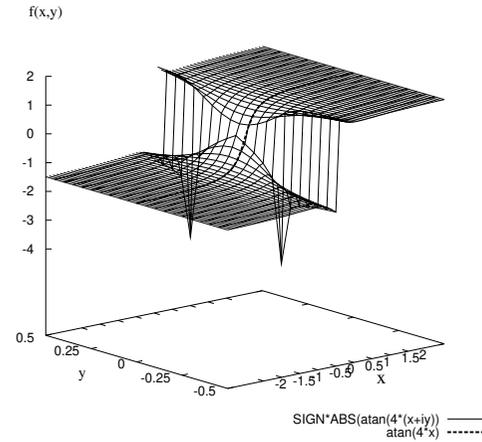


Abbildung 8: Betrag der analytischen Fortsetzung des $\text{atan}(4x)$ in die komplexe Ebene. Die x-Achse bezeichnet den Realteil des Arguments, die y-Achse den imaginären. Wegen des Produktes mit der $\text{sign}(x)$ -Funktion bleibt der Funktionsverlauf für ein rein reelles Argument ($y = 0$) vom Betrag unbeeinflusst. Der Verlauf der reellen Funktion $\text{atan}(4x)$ kann also bei $y = 0$ abgelesen werden.

lassen sich zwei Polstellen vermuten, die tatsächlich an den Punkten $[x = 0, y = \pm 0.25]$ existieren. Nun folgt aus der "Grundtatsache der Potenzreihenkonvergenz" (vgl. [Jänich (1983)], p. 35), daß Reihenentwicklungen nur innerhalb einer im Komplexen liegenden Kreisscheibe konvergieren. Der Radius der Kreisscheibe wird in unserem Beispiel durch die Polstellen begrenzt. Damit wird auch das Konvergenzverhalten der Koeffizienten der Taylorreihe verschlechtert: Je kleiner der Radius der Kreisscheibe ist, desto größer wird der Betrag der Koeffizienten höherer Ordnung. Bei der rechtsseitigen Interpolation des Beispiels liegt die Kreisscheibe der Konvergenz günstiger: Ihr Radius ist weitaus größer, nämlich um den Betrag von ca. 0.47, das entspricht nahezu 200% .

Das Auftreten von Polstellen in der Nähe der Wendepunkte einer differenzierbaren Funktion liegt in der Natur der analytischen, komplexen Funktionen. Dies läßt sich wie folgt nachweisen: Für jede komplexe, analytische Funktion gilt das Maximumsprinzip, das heißt, in einer offenen Überdeckung existiert kein Betragsmaximum. Sonst ist eine Abbildung, wie eine Differenzierung der Funktion, nicht überall gebietstreu und damit ist sie nicht analytisch. Der Fundamentalsatz der Algebra fordert jedoch die Existenz von Nullstellen. Das sind naturgemäß Betragsminima. Damit die Funktion dem Maximumsprinzip genügt, muß zwischen zwei Nullstellen eine Polstelle existieren (vgl. [Jänich (1983)]).

5.2 Quadratische nichtoszillierende Interpolation des UNO-Verfahrens

Die von A. Harten und S. Osher entwickelte Interpolation, die eine Grundlage des UNO-Verfahrens ist (s. [Harten, Osher (1987)]), soll für unsere Verwendung auf unstrukturierte Gitterabstände erweitert werden. Das Konzept dieser Interpolation wird hier kurz erläutert:

Die nichtoszillierende Interpolation basiert auf drei Prinzipien:

1. Das zu konstruierende Verfahren verwendet ein Betragsintegral, wie es für ein Godunov-Verfahren verwendet wird.

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} u(y) dy \quad (23)$$

Weil bei der Integration die Ordnung der Interpolation für u um eins erhöht wird, so genügt es, u in 1. Ordnung zu interpolieren.

2. Für die Interpolation wird die Funktion

$$L(x; u) = u_j + S_j(x - x_j)/h \quad \text{für} \quad |x - x_j| < \frac{1}{2}h \quad (24)$$

mit

$$S_j = h \cdot \text{minmod}(S^-, S^+) \quad (25)$$

wobei S^- und S^+ die Interpolation jeweils linksseitig bzw. rechtsseitig durch die Ableitung der Funktion Q , die eine Näherung der zu interpolierenden Funktion ist, definiert:

$$S^- = h \frac{d}{dx} Q(x_{j-0}; u) \quad S^+ = h \frac{d}{dx} Q(x_{j+0}; u) \quad (26)$$

Die Funktion *minmod* ist definiert durch:

$$\text{minmod}(a, b) = \frac{1}{2}(\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \cdot \min(|a|, |b|) \quad (27)$$

3. Die Autoren A. Harten und S. Osher nehmen für die Funktionen S^- und S^+ folgende Formel an, für die sie nachweisen, daß die so erzeugte Interpolation in zweiter Ordnung ist:

$$S_j^- = d_{j-1/2} \bar{u} + \frac{1}{2} D_{j-1/2} \bar{u} \quad S_j^+ = d_{j+1/2} \bar{u} - \frac{1}{2} D_{j+1/2} \bar{u} \quad (28)$$

mit

$$D_{j-1/2}(u) = \text{minmod}(u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}, u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) \quad (29)$$

Der Term S_j kennt somit 6 Zustände, die von den konkreten Zahlenwerten in den Knotenpunkten abhängen.

S	D	Z	ergibt	vereinfacht
S^-	D_{j-1}	1	$u_j - u_{j-1} + 1/2 \cdot (u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2})$	$3/2u_j - 2u_{j-1} + 1/2u_{j-2}$
	D_j	2	$u_j - u_{j-1} + 1/2 \cdot (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$	$1/2(u_{j+1} - u_{j-1})$
	0	3	$(u_j - u_{j-1})$	$u_j - u_{j-1}$
S^+	D_j	4	$u_{j+1} - u_j - 1/2 \cdot (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1})$	$1/2(u_{j+1} - u_{j-1})$
	D_{j+1}	5	$u_{j+1} - u_j - 1/2 \cdot (u_{j+2} - 2u_{j+1} + u_j)$	$-1/2u_{j+2} + 2u_{j+1} - 3/2u_j$
	0	6	$(u_{j+1} - u_j)$	$u_{j+1} - u_j$
0		7		

Die Nummern in der Spalte Z erleichtern die Zuordnung auf den entsprechenden Zustand.

Mit der in Schritt 2 und 3 definierten Interpolationsfunktion L muß die Integration, Schritt 1, durchgeführt werden. O.B.d.A. können wir $x_j \equiv 0$ setzen. Die integrierte Funktion \bar{L} lautet unbestimmt:

$$\bar{L}_j(y; u) = u_j \cdot y/h + \frac{y^2}{2h} S_j + \text{const}_j \quad (30)$$

Die Integration soll von $dx + h/2$ bis $dx - h/2$ erfolgen, wobei dx der Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte ist. Nehmen wir an, daß $dx < 0$, dann ist es sinnvoll, für die untere Grenze die Funktion $\bar{L}_{j-1}(dx' + h; u)$ zu nehmen. Mit $dx' = dx - h$ bzw. $dx - h/2 = dx' + h/2$ und $\frac{1}{8}(S_j - S_{j-1}) - \frac{1}{2}(u_j - u_{j-1}) + \text{const}_j - \text{const}_{j-1} \equiv u_j$ wird die Interpolation für negative dx zu:

$$u(dx, \bar{u}) = u_j + \frac{dx}{h}(u_j - u_{j-1}) + \frac{1}{2h^2} dx(1 - dx)(S_j - S_{j-1}) \quad (31)$$

Für positive dx erhalten wir entsprechend:

$$u(dx, \bar{u}) = u_j + \frac{dx}{h}(u_{j+1} - u_j) + \frac{1}{2h^2}dx(1 - dx)(S_{j+1} - S_j) \quad (32)$$

Für die in Abb. 8 dargestellte Funktion $\tan(4x)$ ist das Auswahlverfahren der Stützpunkte für den Interpolationsbereich zwischen $x=0.5$ und $x=1.0$ in Abb. 11 für die linke lineare Interpolationsfunktion und in Abb. 12 für die rechte lineare Interpolationsfunktion in einem Ablaufdiagramm dargestellt. Die resultierende nichtoszillierende Interpolation des UNO-Verfahrens ist zusammen mit den beiden linearen Interpolationsfunktionen in Abb. 13 dargestellt.

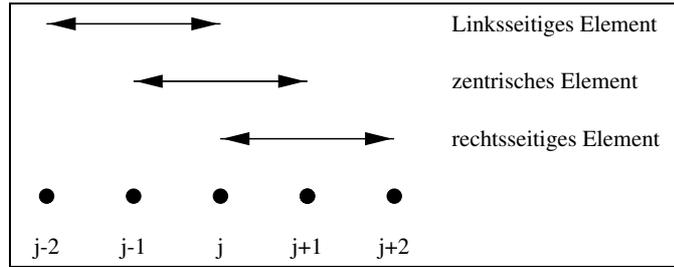


Abbildung 9: Diagramm zu den linksseitigen, zentralen und rechtsseitigen Elementen.

5.3 Erweiterung auf nichtäquidistante Netze

Vergleichen wir nun dieses Ergebnis mit der allgemeinen Interpolation 2. Ordnung. Dazu berechnen wir die linksseitige Interpolation des Elements aus den Knoten $(j-2, j-1, j)$, die zentrale Interpolation des Elements aus den Knoten $(j-1, j, j+1)$ und die rechtsseitige Interpolation des Elements aus den Knoten $(j, j+1, j+2)$ (s. Abb. 9) mit Hilfe der orthogonalen FEM. Die Formeln sind in Abb. 10 zu finden.

Betrachten wir nun den Spezialfall konstanter Knotenabstände: Es zeigt sich, daß es zwischen der allgemeinen Interpolation und dem Ausdruck S_j/h für die Zustände 1, 2, 4 und 5 Übereinstimmungen gibt. Diese sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Z	Element-Nr	für Knoten	Interpolation	Kurzbez.
1	$j - 1$	rechts	linksseitig	S_j^l
2 und 4	j	Mitte	zentrisch	S_j^c
5	$j + 1$	links	rechtsseitig	S_j^r
3			linear	$S_j^d \equiv (u_j - u_{j-1})$
6			linear	$S_j^u \equiv (u_{j+1} - u_j)$
7				$S_j^0 \equiv 0$

Die Interpolation für ein nichtäquidistantes Gitter läßt sich somit wie folgt definieren, für positive dx :

$$u(x) = u_j + (u_{j+1} - u_j) \cdot dx/h_{j+1/2} - \frac{1}{2} dx/h_{j+1/2} (1 - dx) \cdot (S_{j+1}^k - S_j^k) \quad (33)$$

Für negative dx :

$$u(x) = u_j + (u_j - u_{j-1}) \cdot dx/h_{j-1/2} + \frac{1}{2} dx/h_{j-1/2} (1 + dx) \cdot (S_j^k - S_{j-1}^k) \quad (34)$$

wobei S_j^k in den Fällen $Z = 1, 2$ und 5 der lineare Anteil der jeweiligen allgemeinen Interpolation ist. Die Zustände $Z = 3, 6$ und 7 treten nur bei Extremstellen der zu interpolierenden Funktion auf. Hierfür haben A. Harten und S. Osher nachgewiesen, daß dort ebenfalls die zweite Ordnung erfüllt ist. Diese linearen Interpolationen und die daraus resultierende UNO-Interpolation sind in Abb. 13 gezeigt.

Allgemeine Interpolationsformeln 2. Ordnung

linksseitig:

$$\begin{aligned}
f(dx; u) = & u_j + dx \cdot \left(- u_{j-2} \cdot \frac{x_j - x_{j-1}}{(x_j - x_{j-2})(x_{j-1} - x_{j-2})} \right. \\
& + u_{j-1} \cdot \frac{x_j - x_{j-2}}{(x_j - x_{j-1})(x_{j-1} - x_{j-2})} \\
& \left. - u_j \cdot \frac{2x_j - x_{j-1} - x_{j-2}}{(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j-2})} \right) \\
& + dx^2 \cdot \left(u_{j-2} \cdot \frac{1}{(x_j - x_{j-2})(x_{j-1} - x_{j-2})} \right. \\
& - u_{j-1} \cdot \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_{j-1} - x_{j-2})} \\
& \left. + u_j \cdot \frac{1}{(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j-2})} \right)
\end{aligned}$$

zentrisch:

$$\begin{aligned}
f(dx; u) = & u_j + dx \cdot \left(u_{j-1} \cdot \frac{x_{j+1} - x_j}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_j - x_{j-1})} \right. \\
& - u_j \cdot \frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{(x_{j+1} - x_j)(x_j - x_{j-1})} \\
& \left. - u_{j+1} \cdot \frac{x_j - x_{j-1}}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)} \right) \\
& + dx^2 \cdot \left(u_{j-1} \cdot \frac{1}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_j - x_{j-1})} \right. \\
& - u_j \cdot \frac{1}{(x_{j+1} - x_j)(x_j - x_{j-1})} \\
& \left. - u_{j+1} \cdot \frac{1}{(x_{j+1} - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)} \right)
\end{aligned}$$

rechtsseitig:

$$\begin{aligned}
f(dx; u) = & u_j + dx \cdot \left(u_j \cdot \frac{x_{j+2} + x_j - 2x_j}{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+1} - x_j)} \right. \\
& - u_{j+1} \cdot \frac{x_{j+2} - x_j}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})} \\
& \left. + u_{j+2} \cdot \frac{x_{j+1} - x_j}{(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+2} - x_j)} \right) \\
& + dx^2 \cdot \left(u_j \cdot \frac{1}{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+1} - x_j)} \right. \\
& - u_{j+1} \cdot \frac{1}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})} \\
& \left. + u_{j+2} \cdot \frac{1}{(x_{j+2} - x_{j+1})(x_{j+2} - x_j)} \right)
\end{aligned}$$

Abbildung 10: Allgemeine Interpolationsformeln 2. Ordnung für linksseitige, zentrische und rechtsseitige Interpolation. Die Terme sind nach ihrer Ordnung sortiert.

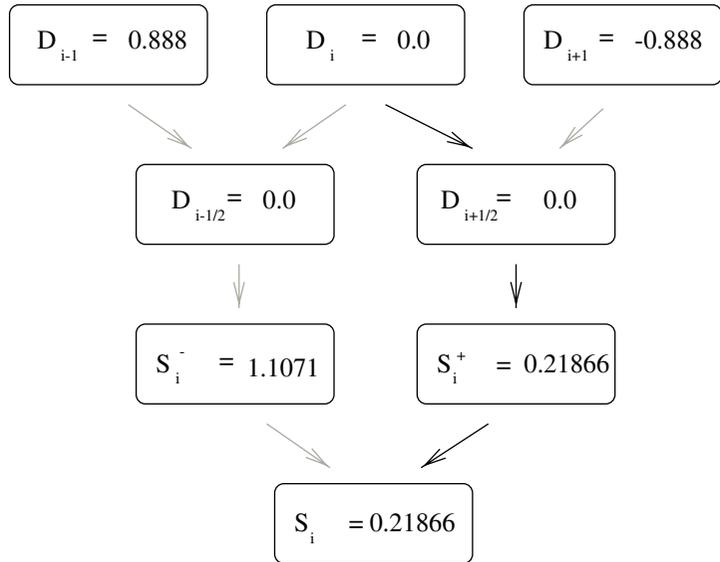


Abbildung 11: Diagramm zur Auswahl der Interpolation für den Knoten bei $x = 0.5$. Die schwarzen Pfeile sind die von der Interpolation gewählten. Dies entspricht dem Zustand 2, einer zentrischen Interpolation.

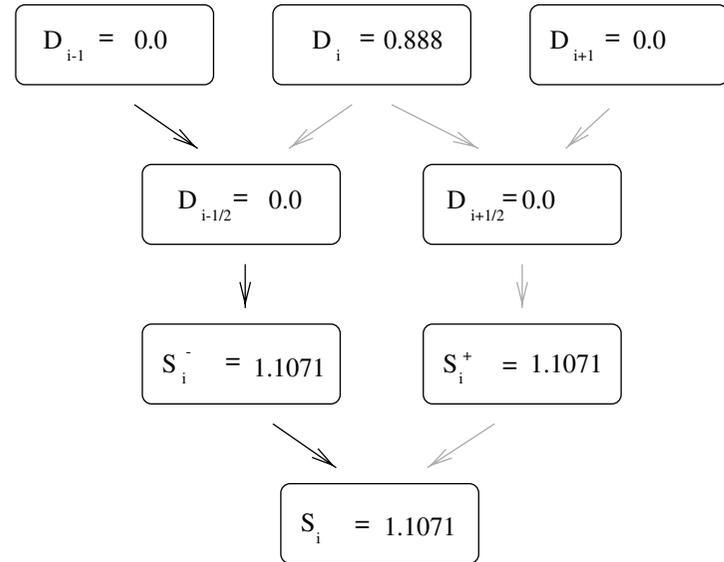


Abbildung 12: Diagramm zur Auswahl der Interpolation für den Knoten bei $x = 0.0$. Die schwarzen Pfeile sind die von der Interpolation gewählten. Dies entspricht dem Zustand 6, einer linksseitigen Interpolation.

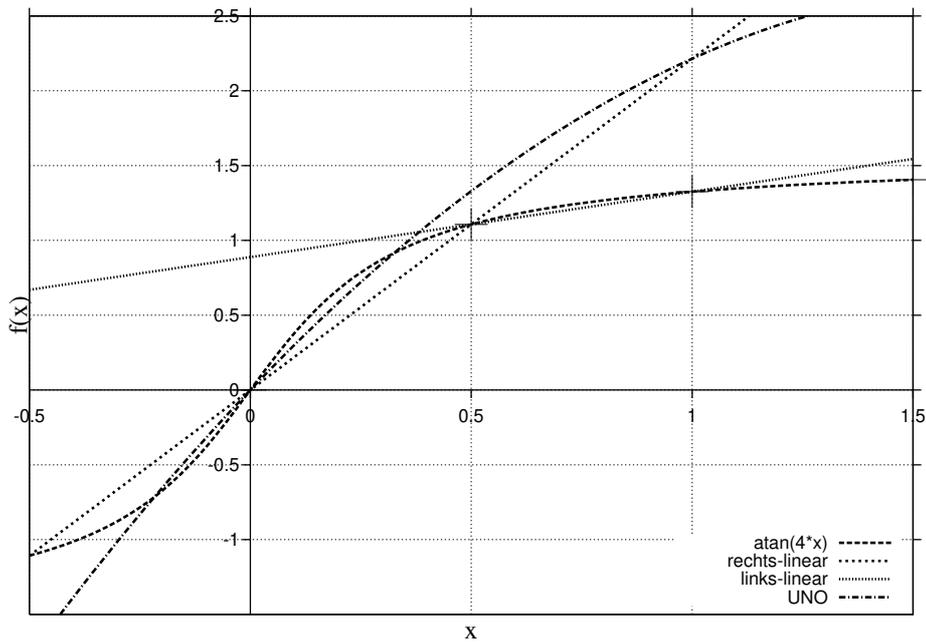


Abbildung 13: Interpolation des $\text{atan}(4x)$ durch die nichtoszillierende Interpolation. Die Geraden sind die linearen Interpolationen an den Knoten $x = 0.0$ und $x = 0.5$.

5.4 Bemerkungen zum Prinzip nichtoszillierender Interpolation

Wie im Abschnitt 5.1 aufgezeigt, nimmt der Interpolationsfehler in dem Bereich eines Wendepunktes beträchtlich zu. Mit diesem Interpolationsfehler geht eine Verschlechterung der Konvergenz der Taylorentwicklung einher. Wir benötigen für eine quadratische Interpolation eine Approximation der entsprechenden Taylorkoeffizienten. Für einen zwischen den Stützpunkten i und $i + 1$ liegenden zu interpolierenden Wert kann der quadratische Term auf den Stützstellentripeln $(i - 1, i, i + 1)$ oder $(i, i + 1, i + 2)$ basieren. Abhängig von dem Konvergenzverhalten der in den Stützstellen gegebenen Funktion, läßt sich eine Entscheidung über die günstigere Auswahl der Stützpunkte treffen.

Die Konstruktion der nichtoszillierenden Interpolation geht jedoch noch einen Schritt weiter. Die quadratische Interpolation wird aus der Differenz zweier linearen Interpolationen 2. Ordnung gebildet. Damit ist zum einen der Bereich der Stützpunktwahl erweitert und zum anderen ist ein einfaches Argument für die Auswahl gegeben. Die Stützstellen der linksseitigen und rechtsseitigen linearen Interpolationen sind so zu wählen, daß der Absolutbetrag ihrer jeweiligen Steigung möglichst gering ausfällt. Haben die für die links- bzw. rechtsseitigen linearen Interpolationen möglichen Stützpunktahlen Neigungen mit unterschiedlichem Vorzeichen zur Folge, so befindet sich dort ein lokales Extremum. In diesem Fall ist eine konstante Funktion exakter als eine lineare.

Die Anwendung dieser nichtoszillierenden Funktion ist nicht auf numerische Verfahren beschränkt. So können ebenso die Tabellenwerte von Meßdaten mit geringen Fehlern interpoliert werden. Genauso ist für physikalische Gesetze, die sich aus Reihenentwicklungen herleiten, zu prüfen, inwieweit die verwendete Reihenentwicklung wirklich konvergiert. Auch für Grafikprogramme ist die nichtoszillierende Eigenschaft von großem Vorteil. Hierfür muß die Interpolation auf mehrere Dimensionen erweitert werden, was jedoch sehr einfach möglich ist, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

6 Nichtoszillierende Interpolation in zwei Dimensionen

Bei der Verwendung der Prinzipien der eindimensionalen nichtoszillierenden Interpolation auf ein unstrukturiertes zweidimensionales Gitter treten Schwierigkeiten auf. Zum einen müssen für den zu interpolierenden Wert die maßgeblichen Stützpunkte bestimmt werden; es müssen diejenigen Stützpunkte gefunden werden, die in dem in Frage kommenden Raumbereich liegen. Noch aufwendiger ist die Wahl der Stützpunkte für eine einseitige, links- oder rechtsgerichtete Interpolation. Zum anderen kann eine spezielle Wahl der Stützpunkte im Zweidimensionalen pathologisch sein, auch wenn die Punkte den zu interpolierenden Bereich scheinbar gut erfassen.

Ich gebe eine einfache Methode an, die die Qualität einer gegebenen Stützpunktwahl bestimmt und es erlaubt, die Konvergenz der resultierenden Interpolation zu bestimmen.

Die Überprüfung der Konditionszahl jeder Wahl eines Stützpunktupels kann nicht numerisch effektiv sein. Die Wahl des Netzes in der Form einer Triangulation macht die Stützpunktwahl überflüssig. Die resultierenden Formeln werden durch das geschickte Ausnutzen der physikalischen Situation stark vereinfacht und vor allen Dingen numerisch gut handhabbar.

6.1 Qualität einer gegebenen Stützpunktwahl

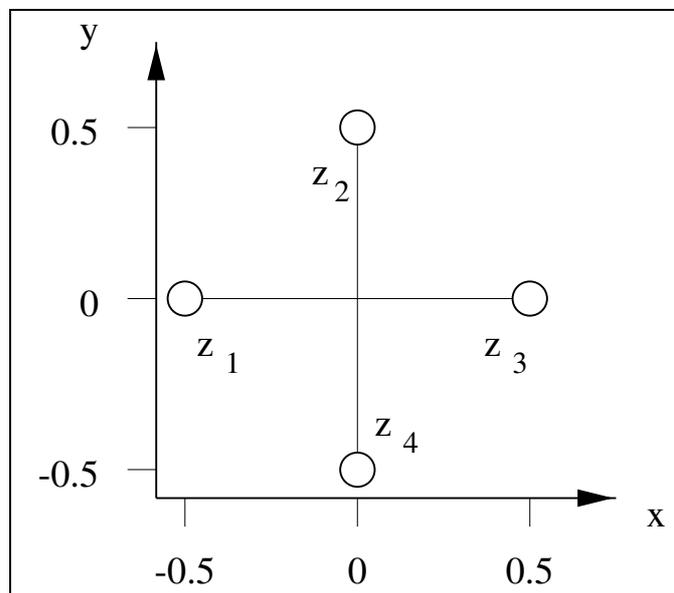


Abbildung 14: Einfacher Interpolationsstern auf einer Einheitsfläche für eine bilineare Interpolation, dessen Determinante der Matrix \mathbf{A} verschwindet. Die Interpolation hat somit keine Konvergenz.

Als einfaches Beispiel für eine Interpolation auf einem unstrukturierten Netz, nehmen wir eine bilineare Funktion $z(x, y)$ der Form:

$$z(x, y) = a_1 + a_2 * x + a_3 * y + a_4 * x * y \quad (35)$$

Für die Bestimmung der Koeffizienten a_i benötigen wir also 4 Gleichungen, die für 4 Stützstellen mit den Werten z_i an den Orten (x_i, y_i) lauten:

$$z_i = a_1 + a_2 * x_i + a_3 * y_i + a_4 * x_i * y_i \quad \text{für } i = 1..4 \quad (36)$$

Bzw. in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = \mathbf{A} \vec{a} \quad (37)$$

Die Matrix \mathbf{A} bzw. ihre Inverse \mathbf{A}^{-1} haben eine besondere Bedeutung: Die Matrix \mathbf{A}^{-1} bildet den Punktraum der Stützwerte \vec{z} auf den Raum der Koeffizienten \vec{a} ab, und die Matrix \mathbf{A} bildet die Koeffizienten \vec{a} auf den Punktraum der Stützpunkte \vec{z} ab:

$$\vec{z} \xRightarrow{\mathbf{A}^{-1}} \vec{a} \xRightarrow{\mathbf{A}} \vec{z} \quad (38)$$

Ist die Determinante der Matrix \mathbf{A} gleich 0, so sind mindestens zwei Zeilen oder zwei Spalten linear abhängig. Solange die Orte der Stützstellen paarweise verschieden sind, kann keine lineare Abhängigkeit von zwei Zeilen bestehen. Jedoch kann dieses für die Spalten nicht ausgeschlossen werden. Jeder gewählte Interpolationsstern muß gesondert untersucht werden, wofür es zweckmäßig ist, die Interpolationsfläche auf eins zu normieren und den Ursprung auf die Koordinaten $(0, 0)$ zu transformieren. Verschwindet die Determinante der Matrix \mathbf{A} , so ist das gleichbedeutend mit dem Verlust einer Dimension bei der Transformation vom Punktraum der Stützstellen in den Raum der Koeffizienten. Die resultierende Interpolation hat somit keine Konvergenz. Abbildung 14 zeigt eine Beispielwahl der Stützpunkte auf einer Einheitsfläche, für die die Determinante der Matrix \mathbf{A} verschwindet (vgl. [Abramowitz, Stegun (1964)]). Im eindimensionalen Fall kann die Determinante der Matrix \mathbf{A} nur dann gleich 0 sein, wenn die Orte der Stützstellen x_i nicht paarweise verschieden sind. Im zwei- und mehrdimensionalen Fall beschreibt die Konditionszahl $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ die Qualität der Stützpunktwahl.

Im Falle der eindimensionalen Interpolation heißt die Matrix \mathbf{A} Vandermondsche Matrix. Dort wird sie nur zur Bestimmung der Interpolation benutzt.

6.2 Biquadratische Interpolationsformel für ein unstrukturiertes Netz

Das Problem der Wahl der Stützstellen läßt sich durch Interpolationsverfahren auf der Basis einer Netztriangulation vermeiden. Für ein solches

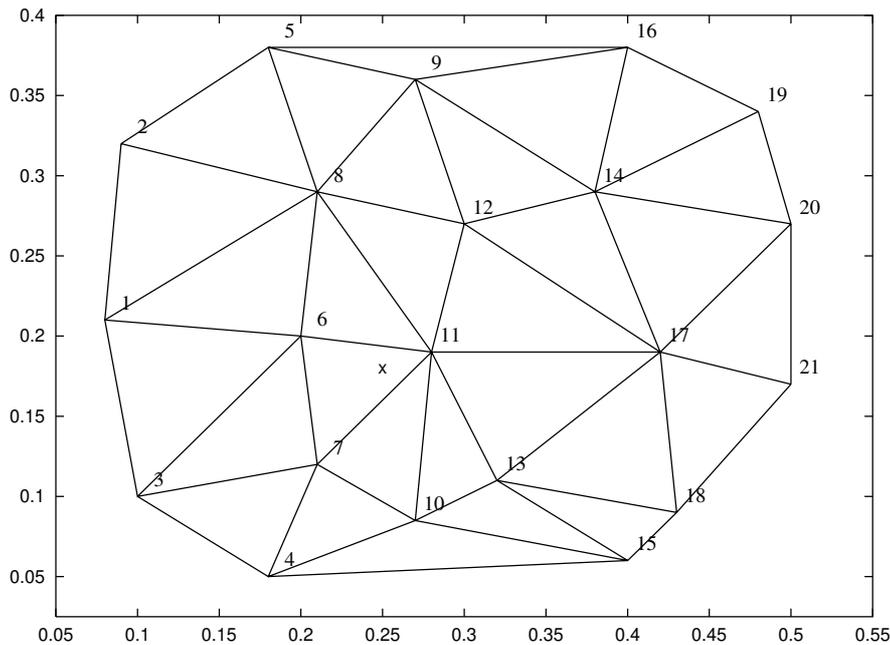


Abbildung 15: Eine Thiessen- bzw. Delaunay-Triangulation auf willkürlich verteilte numerierte Gitterpunkte. Das x bezeichnet eine gewünschte Interpolationsstelle.

Interpolationsverfahren läßt sich zeigen, daß immer eine Lösung existiert (s. [Späth (1995)], p. 6).

Die Triangulation der willkürlich verteilten Gitterpunkte wird so durchgeführt, daß die Winkel der Triangel möglichst groß sind. Eine solche Triangulation wird Thiessen- oder Delaunay-Triangulation genannt. Zur Durchführung der Triangulation verwende ich die Routinen REORDER und TRMESH des Software-Pakets von R. J. Renka (1984), das ich nach FORTRAN90 portiert habe. Auf Grund der bei mir vorliegenden Vereinfachungen in der Knotenauswahl kann ich die Ablaufgeschwindigkeit der Unterprogramme teilweise verbessern.

Das Software-Paket beinhaltet auch verschiedene Routinen zur Berechnung der Ableitungen in den Stützstellen. Diese Routinen neigen jedoch zu einer zu "globalen" Ableitung; der Wert für eine Stützstelle wird mit Hilfe von Tangenten approximierter Funktionen in den benachbarten Stützstellen bestimmt. Teilweise sind diese Routinen numerisch instabil. Die Ableitungen werden daher von einer weiter unten beschriebenen Routine bestimmt.

Von der Darstellung der eindimensionalen nichtoszillierenden Interpolation (s. Abschnitt 5.4) können wir die Idee übernehmen, daß sich die quadratische Interpolation aus der Differenz zweier linearer Interpolationen in zweiter Ordnung konstruieren läßt, die wegen ihrer erweiterten Interpolationsbasis ein erheblich verbessertes Verhalten bezüglich der Oszillationen aufweist. Somit erhält das Verfahren die Struktur eines

Godunov-Verfahrens mit Variablenextrapolation.

Jedoch ist es auf einem unstrukturierten Netz nur eingeschränkt möglich, die Basis der Interpolation auf günstigere Stützstellen zu verlegen. Betrachten wir zum Beispiel das Netz in Abb. 15, in dem wir zur Berechnung des Wertes in P_{11} für die neue Zeitebene den interpolierten Wert an der Stelle x im Triangel (11,6,7) benötigen. Ähnlich wie bei der eindimensionalen nichtoszillierenden Interpolation, wo die Stützpunkte die zu interpolierende Stelle einschließen, ist auch für den zweidimensionalen Fall zu fordern, daß die Punkte P_{11} , P_6 und P_7 zur Interpolation herangezogen werden sollen. Die Auswahl der weiteren Stützstellen ist wegen der Vielzahl der Möglichkeiten und damit verbundenen Prüfung der Funktionsfähigkeit einer Auswahl sehr aufwendig und fehleranfällig.

Wie später ausgeführt wird, will ich den charakteristischen Schritt wie U. Meier (1997) verwenden (vgl. Abb. 19 und 18, 46). Wir benötigen dazu von einem Aufsatzpunkt (x_k, y_k) des charakteristischen Kegels, der durch die Gasgeschwindigkeit u in x-Richtung und v in y-Richtung und die Zeitschrittweite bestimmt ist und weiterhin die Werte in den Punkten $(x_k \pm a\Delta t, y_k)$ und $(x_k, y_k \pm a\Delta t)$ ($a\Delta t$ ist das Produkt aus Schallgeschwindigkeit und Zeitschrittweite) (s. Abb. 18). Es muß nur längs Linien in den zweidimensionalen Flächen interpoliert werden, die zudem in den natürlichen Richtungen des Koordinatensystems liegen, nämlich parallel zur x- und y-Richtung.

Analog zum eindimensionalen Fall muß zunächst der lineare Anteil der quadratischen Interpolation in dem Triangel (11,6,7) bestimmt werden. Mit dem Konzept zur Konstruktion von Spline-Funktionen läßt sich folgende Herleitung finden:

Für die Interpolation

$$z(x, y) = a_1 + a_2 * x + a_3 * y + a_4 * x * y + a_5 * x * x + a_6 * y * y \quad (39)$$

benötigen wir sechs Gleichungen für die Koeffizienten. In einem Triangel haben wir drei Stützstellen. Mit der Forderung, daß die Interpolation mit den Werten in den Stützstellen übereinstimmt, folgen drei Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + a_2 * x_1 + a_3 * y_1 + a_4 * x_1 * y_1 + a_5 * x_1 * x_1 + a_6 * y_1 * y_1 \\ z_2 &= a_1 + a_2 * x_2 + a_3 * y_2 + a_4 * x_2 * y_2 + a_5 * x_2 * x_2 + a_6 * y_2 * y_2 \\ z_3 &= a_1 + a_2 * x_3 + a_3 * y_3 + a_4 * x_3 * y_3 + a_5 * x_3 * x_3 + a_6 * y_3 * y_3 \end{aligned} \quad (40)$$

Die fehlenden drei Gleichungen können durch die Ableitungen in den drei Stützstellen festgelegt werden. Zunächst soll die Interpolation für die Linie in x-Richtung bestimmt werden. Wir fordern daher, daß die Werte der x-Ableitungen der Interpolation mit den Stützstellen übereinstimmt; daraus folgen die weiteren drei Gleichungen:

$$\partial_x z_1 = a_2 + a_4 * y_1 + a_5 * 2 * x_1$$

$$\begin{aligned}\partial_x z_2 &= a_2 + a_4 * y_2 + a_5 * 2 * x_2 \\ \partial_x z_3 &= a_2 + a_4 * y_3 + a_5 * 2 * x_3\end{aligned}\quad (41)$$

Insgesamt erhalten wir die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \partial_x z_1 \\ \partial_x z_2 \\ \partial_x z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1 x_1 & y_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2 x_2 & y_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & x_3 x_3 & y_3 y_3 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 & 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y_3 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}}_{= \mathbf{B}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Die Interpolation ist nun:

$$z(x, y) = \underbrace{(1, x, y, xy, xx, yy)}_{\vec{\phi}(1, x, y, xy, xx, yy)} \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \partial_x z_1 \\ \partial_x z_2 \\ \partial_x z_3 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Die daraus resultierende Formel ist für die Realisierung in einem numerischen Verfahren viel zu kompliziert: allein ihre Auflistung nimmt mehrere Seiten in Anspruch. Was uns interessiert, ist nur der lineare Anteil in x der jeweiligen Formfunktion ϕ , die von erstaunlich einfacher Struktur ist: Es ist eine Interpolation auf der Basis baryzentrischer Koordinaten (Schwerpunktkoordinaten). Die Routine zur Bestimmung der baryzentrischen Koordinaten und die Formel zur Berechnung eines Interpolationswertes ist im Anhang B dargestellt.

6.3 Aufstellen der nichtoszillierenden Interpolation für unstrukturierte Netze

Die nichtoszillierende Interpolation für unstrukturierte Netze soll kurz NOI-Interpolation genannt werden. Mit der Netzerzeugung wird für jeden Gitterpunkt ein typischer Wert x_T für die Länge der Triangel in x-Richtung bzw. y_T in y-Richtung erstellt. Wie später ersichtlich wird, kommt es für diese Werte nicht auf exakte Maße an; eine Ungenauigkeit bis zu 10% des Gitterabstandes ist tolerierbar.

Weiterhin definieren wir folgende Größen: Zu einem Gitterpunkt i mit den Koordinaten (x_i, y_i) sind alle Nachbarn entsprechend einer Thiessen-Triangulation bekannt. So können wir für die Koordinaten:

$$\begin{aligned} (x_+, y_i) & \text{ mit } x_+ = x_i + 1/2 * x_T \\ (x_-, y_i) & \text{ mit } x_- = x_i - 1/2 * x_T \end{aligned} \tag{44}$$

die Gitterpunkte der die Koordinaten jeweils umgebenden Triangel recht einfach auffinden. Mit der baryzentrischen Interpolation können wir in (x_{\pm}, y_i) die Größen

$$zx_{\pm} = z(z_i \text{ und Nachbarn}) \tag{45}$$

bestimmen, wobei die z_i die Stützstellen auf den Gitterpunkten sind. Der Zusatz x in der Bezeichnung zx soll andeuten, daß es sich um Werte längs einer Linie in Richtung $\pm x$ handelt.

Die Ableitungen in x-Richtung in den Gitterpunkten lassen sich dann wie folgt bestimmen:

$$z'x_i = \frac{zx_+ - zx_-}{x_T} \tag{46}$$

Entsprechend können wir die Ableitungen in den Gitterpunkten in y-Richtung bestimmen. Mit dieser Formel lassen sich auch die erforderlichen Ableitungen der Flüsse für die Erhaltungssatzform berechnen.

Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, benötigen wir für das neu zu konstruierende Verfahren nur Interpolationen längs Linien in den natürlichen Richtungen des Koordinatensystems, jedoch liegt ihr Ursprung (x_k, y_k) i.a. nur in der Nähe eines Knotenpunktes. Für ihre Konstruktion brauchen wir folgende Größen, die nach dem oben beschriebenen Verfahren bestimmt werden:

$$zx_{\pm}(x_k \pm x_T, y_k) \quad zx_0(x_k, y_k) \quad z'x_{\pm}(x_k \pm x_T, y_k) \quad z'x_0(x_k, y_k) \tag{47}$$

Die nichtoszillierende Interpolation z_{NOI} für den Funktionswert ξ im Aufpunkt (x_k, y_k) ist nun:

$$\begin{aligned} D2 &= \minmod(z'x_0 - z'x_-, z'x_+ - z'x_0) \\ z_{NOI} &= zx_0 + \frac{zx_0 - zx_-}{x_T} \xi + \frac{1}{4} \frac{D2}{x_t} \xi^2 \quad \text{wenn } \xi \geq 0 \\ z_{NOI} &= zx_0 + \frac{zx_+ - zx_0}{x_T} \xi + \frac{1}{4} \frac{D2}{x_t} \xi^2 \quad \text{wenn } \xi < 0 \end{aligned} \tag{48}$$

wobei *minmod* die vom UNO-Verfahren beschriebene Funktion in Gleichung (27) ist.

In den Abb. 16 und 17 ist die NOI-Interpolation mit der UNO-Interpolation und der quadratischen Lagrange-Interpolation verglichen. Die Stützstellenwerte in Abb. 16 sind durch die Funktion $\text{atan}(40(x + 0.25))$ gegeben, die einer realistisch geformten Stoßfront gleicht. Die NOI- und die UNO-Interpolation bieten nur in Details einen unterschiedlichen Verlauf. Während jedoch die eindimensionale UNO-Interpolation auf sieben Stützstellen zurückgreift, verwendet die NOI-Interpolation nur fünf Stützstellen und ist zudem eine Interpolation in zwei Dimensionen. Im Vergleich mit der quadratischen Interpolation, die jeweils auf drei Stützstellen zentrisch interpoliert, wird der geringe Unterschied zwischen UNO- und NOI-Interpolation besonders deutlich. Die Interpolation an den x-Werten -0.05 bzw. 0 zeigt ein deutlich sichtbares “Überschwingen” bzw. “Unterschwingen”.

Noch deutlicher wird dieser Vergleich in der Abb. 17: Während UNO- und NOI-Interpolation auf einer Linie liegen, weist die quadratische Interpolation an den x-Werten größer als -0.35 und kleiner als 0.3 offensichtlich übersteuerte Werte auf.

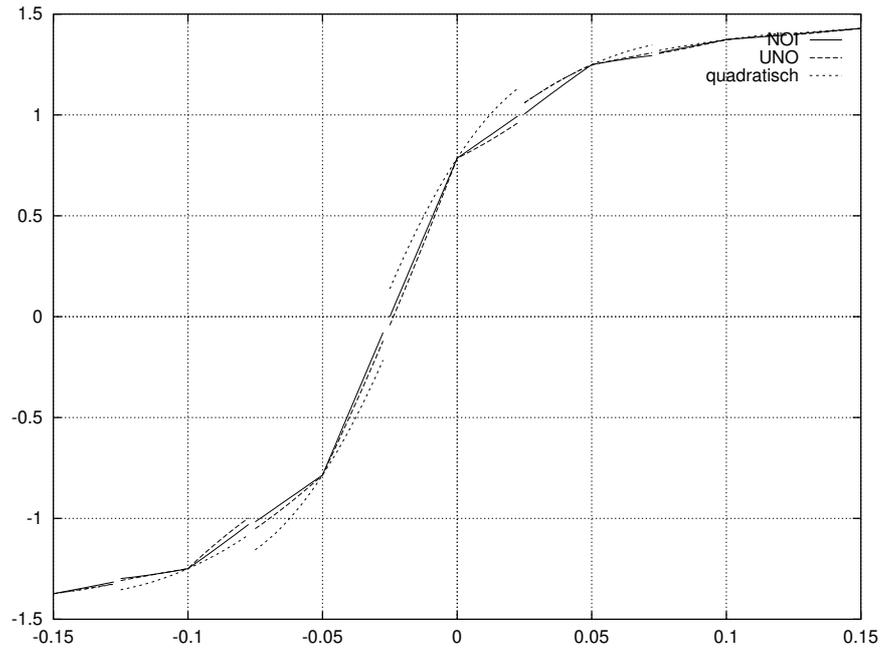


Abbildung 16: Vergleich der Interpolation des NOI- und des UNO-Verfahrens mit der quadratisch-zentrischen Lagrange-Interpolation. Die Stützwerte sind durch die Funktion $\arctan(40(x + 0.25))$ an den Achsmarken der x-Achse gegeben.

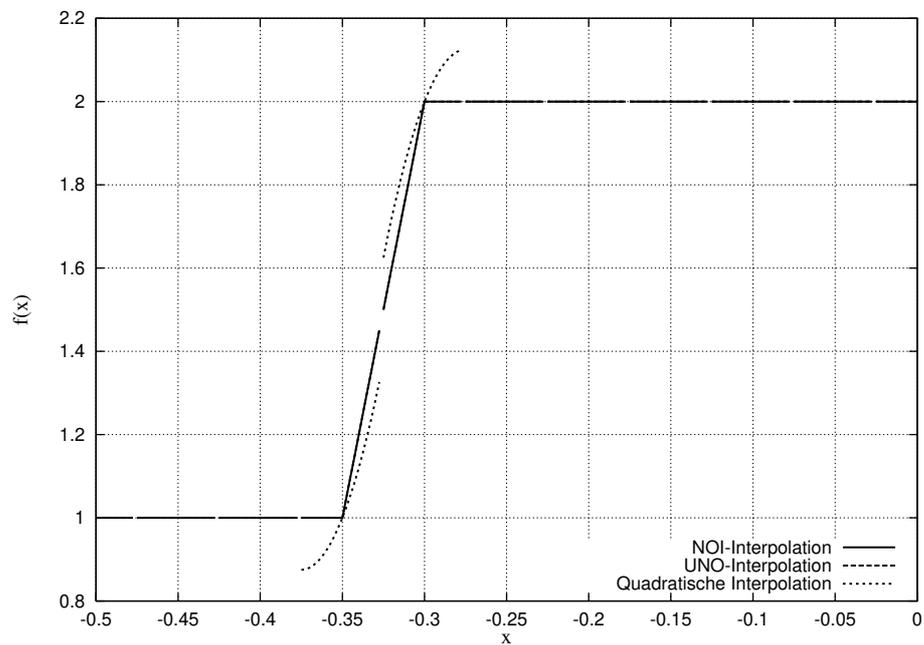


Abbildung 17: Vergleich der Interpolation des NOI- und des UNO-Verfahrens mit der quadratisch-zentrischen Lagrange-Interpolation. Die Stützwerte sind durch eine Diskontinuität zwischen -0.35 und -0.3 gegeben.

7 Das charakteristisch-konservative Verfahren

Nach dem bisher Gesagten, bestehen folgende Forderungen an ein Verfahren, das die Modellierung von Stoßwellen mit den Eulergleichungen in komplexen Geometrien, wie z.B. der instationären Umströmung eines Objekts, ermöglicht:

1. Das Verfahren muß für unstrukturierte Netze geeignet sein,
2. das Einflußgebiet für jeden neu zu berechnenden Gitterpunkt soll in jeder physikalischen Abhängigen korrekt berücksichtigt werden,
3. das Verfahren muß jedoch auch die Berechnung der Diskontinuitäten ohne weitere nötige Maßnahmen korrekt durchführen,

und – bisher noch nicht besprochen –

4. die numerisch umgesetzten Randbedingungen auf den Randflächen sollen die selben Verfahrenseigenschaften besitzen und zudem auch physikalisch einwandfrei sein (s.u.).

Die TVD-Verfahren sind, wie in Abschnitt 2.3 bereits erwähnt, streng nur für die Berechnung eindimensionaler Differentialgleichungen geeignet. Für die Berechnung der Eulergleichungen werden die Riemannvariablen zur Berechnung der Flüsse benutzt. Weil die Riemannvariablen nicht für zweidimensionale Strömungen existieren, ist es nicht möglich auf diesen Größen basierend ein in sich geschlossenes zweidimensionales Verfahren zu konstruieren. Eine durch das Operatorsplitting mögliche Erweiterung zur Berechnung zweidimensionaler Strömungen ist jedoch nicht korrekt: In einer Strömung vorliegende unterschiedliche Entropiewerte werden nicht in genügendem Maße berücksichtigt und damit wird die Wirbelentstehung nicht richtig berechnet. Denn nach dem Croccoschen Wirbelsatz gilt: “Daß jede wirbelfreie, isoenergetische Strömung homentrop ist Umgekehrt muß je eine nichthomentrope, isoenergetische Strömung notwendigerweise wirbelbehaftet sein” ([Becker (1966)], p. 71).

Jedoch läßt sich auch ein vollständiges Charakteristikenverfahren für die Berechnung der Variablen der Flüsse verwenden. Damit ist das resultierende Verfahren zweidimensional und ließe sich auch für drei Dimensionen korrekt konstruieren.

Das Verfahren bezeichne ich kurz mit drei Buchstaben, die sich aus der englischen Übersetzung ergibt:

The conservative flux is compute by a characteristic method for unstructured grids – CCU.

7.1 Konstruktion des charakteristisch-konservativen Verfahrens

Die Erhaltungssatzform läßt sich wie für die TVD-Verfahren als Bilanz der numerischen Flüsse

$$u_i^{n+1} = u_i^n + dt/dx(\hat{f}_{i+1/2}(u) - \hat{f}_{i-1/2}(u)) \quad (49)$$

definieren. Jedoch verwende ich im Unterschied zum UNO-Verfahren die numerischen Flußterme von $\vec{F}^n(x \pm 1/2\Delta x, y)$ und $\vec{G}^n(x, y \pm 1/2\Delta y)$, die durch ein Charakteristikenverfahren bestimmt werden. Sie geschieht in Anlehnung an ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren. In dem Prädiktorschritt werden die Werte für die neue Zeitebene in erster Ordnung in der Zeit und in zweiter Ordnung im Raum durch das Bicharakteristikenverfahren berechnet. Das Bicharakteristikenverfahren ist in den Abb. 18 und 19 erläutert. Die für das Bicharakteristikenverfahren nötige Interpolation wird mit der nichtoszillierenden Interpolation des Abschnitts 6.3 durchgeführt. Der Korrektorschritt besteht dann aus den Teilschritten

1. Berechnung des Flusses in der alten Zeitebenen \vec{F}^i und in der neuen Zeitebene \vec{F}^{i+1} für jeden Gitterpunkt,
2. die Bestimmung der zeitlich gemittelten Änderung des Flusses

$$\hat{\vec{F}} = \vec{F}^i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\vec{F}^{i+1} - \vec{F}^i) \quad (50)$$

ebenfalls für jeden Gitterpunkt,

3. Interpolation des numerischen Flusses an den Stellen $x \pm 1/2\Delta x$ für jeden Gitterpunkt,
4. und mit der Gleichung (49) die Werte in der neuen Zeitebene errechnen.

Die auf einem Gitter berechneten physikalischen Werte der Strömung sind naturgemäß nur Näherungen an die tatsächlichen Werte. Die Diskretisierung verursacht, daß ein im Grenzfall unendliche kleiner Gitterabstände richtig funktionierender Algorithmus die Werte für den endlichen Zeitschritt nicht exakt berechnen kann. Das kann in Gebieten mit großen Gradienten wie der Stoßfront dazu führen, daß sich lokale Extremstellen bilden. Z.B. hinter der Stoßfront ergibt sich eine auf drei Schritten beschränkte Senke. Im folgenden Zeitschritt wird sich durch die höhere Schallgeschwindigkeit der Stoßfront sich schneller entwickeln, als das Gebiet der Senke. Ein Schwinger ist entstanden. Das UNO-Verfahren verhindert das Auftreten dieser lokalen Extremstellen dadurch, daß es die Gitterpunkte um die lokale Extremstelle nicht berücksichtigt. Daher benötigt das eindimensionale UNO-Verfahren einen Rechenstern mit 7 Gitterpunkte um einen Neupunkt zu berechnen. Für ein unstrukturiertes Gitter ist es nur mit großem Aufwand möglich ein entsprechend großes Gebiet bereitzustellen, zumal die für ein zweidimensionales Gebiet benötigten Gitterpunkte quadratisch anwachsen.

Dieses Problem läßt sich wie folgt lösen: Wenn sich eine lokale Extremstelle bildet, so wird diese Gitterpunkt mit den Nachbarn gemittelt:

1. Bestimme für jeden Gitterpunkt die Werte an den Stellen $x \pm 1/2\Delta x$,
2. wenn der Gitterpunkt ein lokales Extremum ist, berechne die Differenz zwischen dem aktuellen Wert des Gitterpunktes und seiner Mittelung mit den Nachbarwerten,

3. das gleiche in y -Richtung durchführen,
4. die Summe der Differenzen zum Wert des Gitterpunktes zufügen.

Nach meinen Untersuchungen mit dem neukonstruierten Verfahren ist durch diese Glättung verursachte Nichterhaltung der physikalischen Größen nicht merkbar.

Somit ist es gelungen, ein numerisches Verfahren für die Berechnung der instationären Eulergleichungen auf unstrukturierten Netzen herzuleiten, das in dem Aufbau seiner Teilschritte stets physikalisch bzw. mathematisch begründet ist. Die Erweiterung für drei Dimensionen dürfte m.E. keine größeren Schwierigkeiten bereiten.

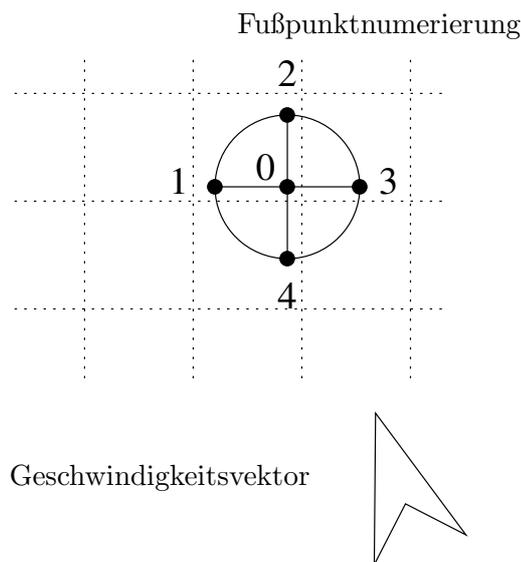


Abbildung 18: Diagramm der Grundfläche des charakteristischen Kegels. Die Zahlen geben die Fußpunkte der jeweiligen Charakteristiken an: In 0 ist der Fußpunkt der Teilchenbahn, in 1 bzw. 3 sind die Fußpunkte der Bicharakteristiken mit dem \vec{g} -Vektor für $u \pm a$ und in 2 bzw. 4 die Fußpunkte der Bicharakteristiken mit dem \vec{g} -Vektor für $v \pm a$ (vgl. Abb. 19).

Verfahrensschritte des Charakteristikenverfahrens

Alle Größen sind hier gemäß Payne entdimensioniert (s. 2.4) Bestimmung der Position der Fußpunkte (vgl. Abb. 18):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i - u * \Delta t \\ y_i - v * \Delta t \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i - (u - a) * \Delta t \\ y_i - v * \Delta t \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i - u * \Delta t \\ y_i - (v - a) * \Delta t \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i - (u + a) * \Delta t \\ y_i - v * \Delta t \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i - u * \Delta t \\ y_i - (v + a) * \Delta t \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{51}$$

Hier ist u und v die Gasgeschwindigkeit in x- und y-Richtung. Die Verfahrensformeln lauten:

$$\begin{aligned}
 u_{neu} &= \frac{1}{2}(u_1 + u_3 + \frac{a}{\gamma}(P_3 - P_1)) \\
 v_{neu} &= \frac{1}{2}(v_2 + v_4 + \frac{a}{\gamma}(P_4 - P_2)) \\
 P_{neu} &= \frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + (u_3 - u_1 + v_4 - v_2)\frac{\gamma}{a}) - P_0 \\
 d_{neu} &= d_0 + \frac{1}{2}(P_{neu} - P_0)
 \end{aligned} \tag{52}$$

Die Indizes bezeichnen die Werte für die jeweiligen Fußpunkte, der Index *neu* bezeichnet die Werte in der neuen Zeitebene. P ist der Logarithmus des Drucks, d der Logarithmus der Dichte.

Abbildung 19: Verfahrensschritte des Charakteristikenverfahrens.

8 Randflächen im Rechengebiet

Die Ränder des Rechengebietes sind für die in dieser Arbeit avisierten Modellierungen in drei Gruppen zu unterteilen: In die offenen Ränder, die inneren beweglichen Ränder und die festen Ränder der Oberflächen der Objekte. Die inneren beweglichen Ränder sind die Diskontinuitäten wie Stoßfronten, Querwellen oder sekundäre Stoßfronten, Kontaktunstetigkeiten und tangential Unstetigkeiten der Gasgeschwindigkeit. Diese inneren Ränder benötigen bei der Verwendung von konservativen Verfahren wie dem UNO-Verfahren und dem CCU-Verfahren keine besonderen Algorithmen.

Die Verarbeitung der offenen Ränder und der Randflächen ist in den folgenden Abschnitten erläutert.

8.1 Offene Ränder

Das Rechengebiet ist in seiner Größe beschränkt. Die Außenflächen des Rechengebietes, in die Gas einströmt oder ausströmt heißen offene Ränder. Die Werte der Randpunkte können i.a. nicht von dem Verfahrensschritt mitbehandelt werden; es muß also ein gesonderter Algorithmus angewandt werden. Es zeigt sich, daß die Auswahl des Algorithmus zum einem von der zu modellierenden Strömung abhängig ist, zum anderen aber auch vom verwendeten Verfahren. Für das CCU- sowie für das UNO-Verfahren hat sich für die Modellierung der konvergenten Stoßwellen die zweifache lineare Extrapolation bewährt:

$$\begin{aligned}\vec{U}_{n-1} &= \text{Extrapolation}(\vec{U}_{n-2}, \vec{U}_{n-3}) \\ \vec{U}_n &= \text{Extrapolation}(\vec{U}_{n-1}, \vec{U}_{n-2})\end{aligned}\quad (53)$$

wobei U_n der Randpunkt ist und die Indizes $n - 1$ die Punkte längs einer natürlichen Koordinate senkrecht zum Rand bezeichnen. Bei der Modellierung auf rechteckigen Gittern neigen beide Verfahren bei der Modellierung konvergenter Stoßwellen in den Ecken des Netzes zu Schwingungen. Diese unterdrücke ich mit einer einfachen Mittelung der Eckwerte durch die benachbarten Randpunkte.

Unabhängig von der Wahl des Algorithmus für die Berechnung der Randwerte müssen jeweils die physikalischen Auswirkungen auf die Berechnung untersucht werden. Als Alternative zu den oben genannten hat F. Demmig (1997) nicht reflektierende Randbedingungen untersucht und als sehr geeignet bewertet.

8.2 Ränder an Objekten

Werden Objekte in die zweidimensionale Strömung eingesetzt, müssen für die entstehenden Randflächen spezielle Verfahrensschritte angewendet werden. In der Literatur werden verschiedene Verfahrensschritte beschrieben. Für die Modellierung einer festen, räumlich ausgedehnten

Achse im Zentrum der Konvergenz einer symmetrisch einlaufenden Stoßwelle haben wir im UNO-Verfahren ein Kontrollzylinderverfahren verwendet. Zuletzt hat R. Steinfeldt (1996) verschiedene Kontrollzylinderverfahren bei der Anwendung der Reflexion konvergenter Stoßwellen im Konvergenzzentrum miteinander und mit dem eindimensionalen Programm CAR verglichen. Im Kontrollzylinderverfahren wird die Bilanz der Erhaltungsgrößen über die Oberfläche des Kontrollvolumens (in diesem Fall hat es die Form eines Zylinders) verwendet und als Randbedingung das Verschwinden der Geschwindigkeit in Richtung der Normalen im Randpunkt. Es ergeben sich die Werte auf der Achse in der neuen Zeitebene.

Aus den in Abschnitt 4 genannten Gründen ist meiner Ansicht nach ein Randschritt auf der Basis eines Kontrollvolumens nicht für unstrukturierte Gitter geeignet. Dies trifft natürlich auch auf die Randschrittverfahren der FEM zu.

In der einschlägigen Fachliteratur sind nur wenige Angaben zu nichtvolumenbezogenen Randbehandlung mit konkreten Verfahrensschritten zu finden. R. A. Shapiro (1991) schlägt vor, die Flußkomponenten nach einer von ihm genannten, wahrscheinlich empirisch bestimmten Formel, zu verstärken, nachdem die Normalkomponente der Geschwindigkeit im Randpunkt auf Null gesetzt worden ist. In meinen Untersuchungen zeigen diese Randbedingungen ein unphysikalisches Verhalten.

Auf der Basis der Charakteristikenverfahren ist es möglich, physikalisch plausible Randbedingungen zu bestimmen. Durch die Wahl des Auswahlvektors \vec{j} , nämlich tangential bzw. normal zur Randfläche liegend, läßt sich mit Hilfe des Verschwindens der Normalengeschwindigkeit der Randschritt herleiten (s. Abb. 20 und 21). In der Praxis zeigen sich jedoch bei der Anwendung eines solchen charakteristischen Randschritts unerwartete Probleme: In Verbindung mit bestimmten Interpolationsformeln treten Instabilitäten auf (vgl. [Spieß (1994)] und [Kiene (1991)]).

Im Rahmen des hier vorgestellten Verfahrens ist jedoch der charakteristische Randschritt sehr homogen als Praediktor-Schritt in das CCU-Verfahren einzubinden. Die Schwingneigung läßt sich mit der Verwendung der nichtoszillierenden Interpolation zur Bestimmung der Werte in den Fußpunkten der Teilchenbahn \mathcal{C}_0 und der Bicharakteristiken \mathcal{B} vermeiden.

Für die Konstruktion des Korrektorschritts in den Erhaltungsgrößen wird folgende Betrachtung angestellt: Ein Fluidvolumen, dessen Mittelpunkt eine gemittelte Bewegung in der Strömung und dessen Ausdehnung die Schwankung um diese mittlere Bewegung beschreibt, soll sich auf eine Randfläche zubewegen (s. Abb. 22). In einem diskreten Zeitschritt Δt , dessen Berechnung sich mit einer einseitigen Differenz ausführen läßt, wird ein Teil des Fluidvolumens über den Rand hinausgehen. Weil jedoch die Normalkomponente der Geschwindigkeit im Randpunkt Null sein soll, muß der statistische Anteil der Bewegung, der durch den diskreten Zeitschritt im Rand zu liegen kommt, in eine Erhöhung der mittleren Dichte und der Energiedichte transformiert werden. Die

Verfahrensformeln sind für den zweidimensionalen Fall in Abb. 22 aufgeführt. Sie berücksichtigen, daß ein abströmendes Fluidvolumen keiner Korrektur der Größen bedarf. Der in den Verfahrensformeln angegebene Druck zur Berechnung der Korrektur der Energiedichte entspricht in seiner Art der Formel zur Berechnung des Staudrucks eines angeströmten Körpers. Die Randbedingungen sollen anhand der Reflexion einer ebenen Stoßwelle an einem Endflansch eines Stoßrohres erläutert werden: Hat die ebene Stoßwelle den Endflansch erreicht und beginnt das Gas, in die entgegengesetzte Richtung zu expandieren, so bleibt auf dem Randpunkt ein hoher Dichtewert zurück, der sich nur langsam abbaut. In der Näherung der sich langsam ändernden Größen gilt die Kesselenthalpie. Dies ist grundsätzlich anders, wenn das Fluidteilchen eine der statistischen Verteilung genügende Anzahl von Molekülen beinhaltet, aber noch klein ist gegenüber der Dimension der Strömung. Beim "Auftreffen" auf eine Randfläche eines solchen Fluidvolumens müssen die Dichte und die Energiedichte erhöht werden. Für ein abströmendes Fluidelement müssen diese beiden Größen wieder expandiert werden. Dies widerspricht jedoch der Forderung, daß die Kesselenthalpie in der oben beschriebenen Näherung konstant sein muß. In meinen Untersuchungen ergeben sich bei der Anwendung dieser Randbedingung unphysikalische "Ringe" um die Randflächen.

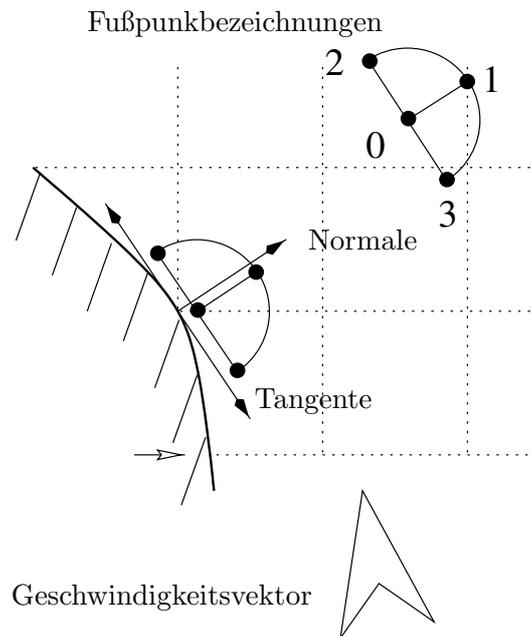


Abbildung 20: Diagramm der Basis des charakteristischen Kegels für den Randschritt. Die Numerierung der Fußpunkte ist in der Zeichnung oben angegeben: In 0 ist der Fußpunkt der Teilchenbahn, in 1 ist der Fußpunkt der Bicharakteristik mit dem \vec{g} -Vektor $u_{\perp} + a$, in 2 und 3 sind die Fußpunkte der Bicharakteristiken mit dem \vec{g} -Vektor $u_{\parallel} \pm a$ (s. Abb. 21).

Verfahrensschritte des charakteristischen Randschritts

Die Fußpunkte werden bestimmt:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i - \Delta t * u \\ y_i - \Delta t * v \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i - \Delta t * (u - aN_x) \\ y_i - \Delta t * (v - aN_y) \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i - \Delta t * (u - aT_x) \\ y_i - \Delta t * (v - aT_y) \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_i - \Delta t * (u + aT_x) \\ y_i - \Delta t * (v + aT_y) \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{54}$$

Der Tangentenvektor \vec{T} läßt sich aus dem Normalenvektor \vec{N} berechnen:

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N_y \\ N_x \end{pmatrix} \tag{55}$$

Die Verfahrensformeln lauten:

$$\begin{aligned}
 u_{zw} &= N_y * (u_2 + u_3) - N_x * (v_3 + v_2) + \frac{a}{\gamma} * (P_2 - P_3) \\
 u_{neu} &= \frac{1}{2} N_y \cdot u_{zw} \\
 v_{neu} &= -\frac{1}{2} N_x \cdot u_{zw} \\
 P_{neu} &= N_x (u_{neu} - u_1) \frac{\gamma}{a} + N_y (v_{neu} - v_1) \frac{\gamma}{a} + P_1 \\
 d_{neu} &= d_0 + (P_{neu} - P_0) / \gamma
 \end{aligned} \tag{56}$$

Hierbei bezeichnen die Indizes die jeweiligen Werte in den Fußpunkten und der Index *neu* die Werte in der neuen Zeitebene:

u bzw. v ist die Strömungsgeschwindigkeit in x- bzw. y-Richtung, P der Logarithmus des Drucks und d der Logarithmus der Dichte.

Abbildung 21: Verfahrensschritte des charakteristischen Randschritts (s. Abb. 20).

Verfahrensschritte des Randschritts in den Erhaltungsgrößen

1. Berechnung der Größen im Randpunkt für die neue Zeitebene mit einseitigen Differenzen.
2. Die Geschwindigkeitskomponente normal zum Rand wird auf Null gesetzt:

$$\begin{aligned} u_{Rand} &= u * (1 - N_x^2) - v * N_x * N_y \\ v_{Rand} &= v * (1 - N_y^2) - u * N_x * N_y \end{aligned} \quad (57)$$

Hierbei sind u und v die Komponenten der im vorhergehenden Schritt berechneten Geschwindigkeit im Randpunkt und N_x und N_y die Komponenten des Normalenvektors, der im Randpunkt senkrecht auf dem Rand steht.

3. Berechnung der Druckkorrektur, die durch das Abstoppen des Fluidelements verursacht ist:

$$\begin{aligned} p_x &= ABS(MIN(0, SIGN(N_x) * (u - u_{Rand})) * \rho * \frac{\Delta x}{\delta t}) \\ p_y &= ABS(MIN(0, SIGN(N_y) * (v - v_{Rand})) * \rho * \frac{\Delta y}{\delta t}) \end{aligned}$$

Die Druckzunahme spaltet sich in zwei Anteile p_x und p_y auf.

4. Nun kann die Korrektur durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{Rand} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \cdot \left(\left(\frac{p_x}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{p_y}{\Delta y} \right)^2 \right) \\ n &= u_{Rand} * \rho \\ m &= v_{Rand} * \rho \\ e &= e + \Delta t * \left(\frac{P_x |u|}{\Delta x} + \frac{P_y |v|}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

Die Massenflußdichten n und m sind die primitiven Variablen der Erhaltungssatzform.

Abbildung 22: Verfahrensschritte des Randschritts in den Erhaltungsgrößen.

9 Verfahrensvergleich

Ich vergleiche im folgenden die Ergebnisse des CCU-, des UNO- und des FEM-Verfahrens (s.o. 4.2) am Beispiel einer durch ein ebenes Stoßrohr erzeugten Stoßwelle und das CCU- und das UNO-Verfahren an dem Beispiel einer symmetrischen, konvergierenden Stoßwelle und einer fragmentierenden, konvergierenden Stoßwelle. Der Vergleich mit der Expansionswelle in einem Stoßrohr erlaubt den Vergleich mit einer analytischen Lösung. Jedoch zeigt die Erfahrung, daß die konvergenten Stoßwellen erheblich höhere Ansprüche an das numerische Verfahren stellen und somit einen wichtigen Test darstellen. Die Rechnungen mit einer verformten symmetrischen Kontur sollen den Vergleich der letztgenannten Verfahren bezüglich der Entstehung neuer Diskontinuitäten ermöglichen und damit die Qualität des CCU-Verfahrens für Modellrechnungen belegen.

9.1 Ebene Stoßwelle

Als Anfangsbedingungen wähle ich die Werte eines Riemann-Problems, das in der Literatur als ‘Sods problem’ zitiert wird (s. [Sod (1978)]). Die Werte sind entsprechend dem Abschnitt 2.4 entdimensioniert und betragen im Niederdruckteil $P_v = 1.0$, $\rho_v = 1.0$ und im Hochdruckteil $P_h = 10.0$, $\rho_h = 8.0$.

In den Grafiken Abb. 23 und 24 sind jeweils die Dichten und Geschwindigkeiten der drei verschiedenen Verfahren gegenüber der analytischen Lösung aufgetragen. Die Auflösung beträgt 81 Gitterpunkte von -4 bis 4, also $\Delta x = 0.1$.

Das UNO-Verfahren entwickelt die Stoßfront etwas zu schnell gegenüber der analytischen Lösung, die in der Graphik mit SOD bezeichnet ist (s. Abb. 23). Im weiteren zeitlichen Verlauf bleibt der Abstand zwischen der vom UNO-Verfahren berechneten Stoßfront und der analytischen Lösung innerhalb der Fehlertoleranz von einigen Gitterpunkten, so daß die Stoßfrontposition durchaus richtig berechnet wird, zumal sie verfahrensbedingt auf 5–7 Stoßfrontpunkte verschmiert ist.

Der Knick im Dichteverlauf kurz vor der Membran ist ein für das Verfahren typisches Verhalten, das sich durch ein entsprechendes Verschmieren der Stoßwelle in den Startwerten vermeiden läßt. Der Expansionsbereich der ebenen Welle wird vom UNO-Verfahren ebenfalls stets etwas zu stark berechnet. Diese Eigenschaft ist den TVD-Verfahren eigen, die wie das UNO-Verfahren auf Variablenextrapolation in den charakteristischen Variablen basieren.

Der Expansionsbereich wird durch das FEM-Verfahren mit geringerer Abweichung zur analytischen Lösung als beim UNO-Verfahren berechnet. Die Stoßfront ist auf 10–12 Gitterpunkte verschmiert und ist somit nicht so steil berechnet wie durch das UNO-Verfahren, aber in seiner zeitlichen Entwicklung ebenfalls näher an der analytischen Lösung. Die für das Verfahren typischen Überschwinger hinter der Stoßfront verschlechtern die Ergebnisse erheblich: Sowohl für die Darstellung der Dichte

durch Höhenlinien oder Konturflächen, als auch für die Anwendung der Mustererkennung sind diese Überschwinger sehr störend.

Betrachten wir das CCU-Verfahren: Die Stoßfront ist wie die des FEM-Verfahrens auf 10–12 Gitterpunkte verschmiert, jedoch ohne dessen störende Überschwinger. Wie das UNO-Verfahren zeigt es ebenfalls den charakteristischen Knick im Dichteverlauf nahe der Membran. Die Berechnung des Expansionsbereichs ist genauer als die Berechnung des UNO-Verfahrens.

Der Vergleich der Verläufe der Gasgeschwindigkeit der drei Verfahren führt zu den gleichen Ergebnissen, jedoch ist der größere Fehler des UNO-Verfahrens an der Stoßfront deutlicher zu erkennen.

Die Unterschiede in den Ergebnissen des CCU- und des UNO-Verfahrens sind zum Teil in der Anwendung der Roe-Linearisierung beim UNO-Verfahren begründet (s. [Yee et al (1985)]): Durch eine spezielle Mittelung der Werte auf dem Gitter kann eine stationäre Stoßfront korrekt behandelt werden. Wie aus dem Vergleich hervorgeht, lassen sich jedoch die Berechnungen der instationären Stoßwellen nur mit Einschränkungen verbessern. Die Roe-Linearisierung ist nur für den eindimensionalen Fall anwendbar und somit auf das allgemeinere, mehrdimensionale CCU-Verfahren nicht übertragbar.

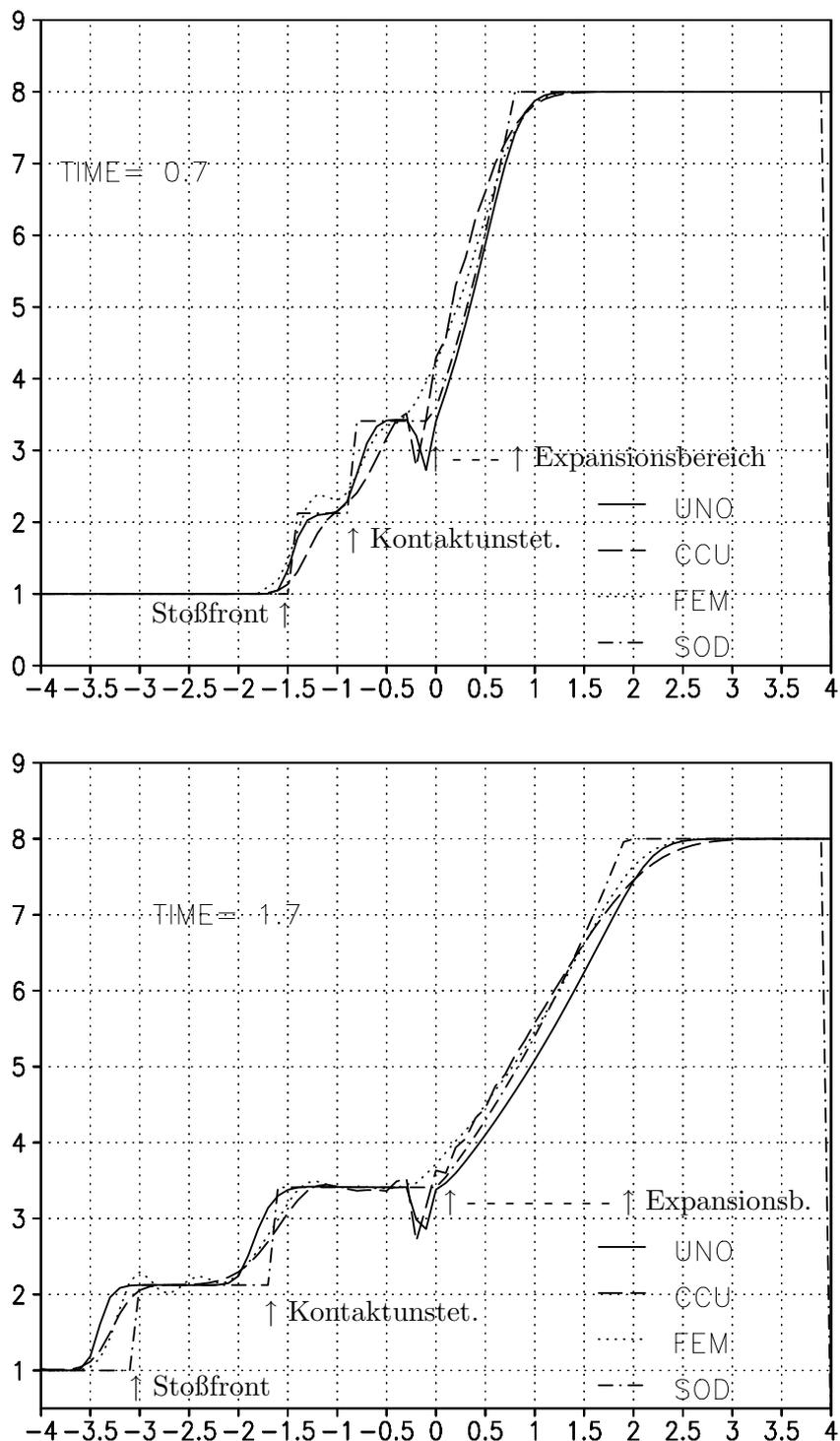


Abbildung 23: Dichteverlauf der Expansionsstoßwelle berechnet mit UNO, CCU und FEM im Vergleich mit der analytischen Lösung (SOD) zur Zeit $t = 0.7$ (oben) und zur Zeit $t = 1.7$ (unten). Die Gitterschrittweite beträgt 0.1. Durch Pfeile sind die Position der Stoßfront, die Position der Kontaktfront und der Expansionsbereich gekennzeichnet.

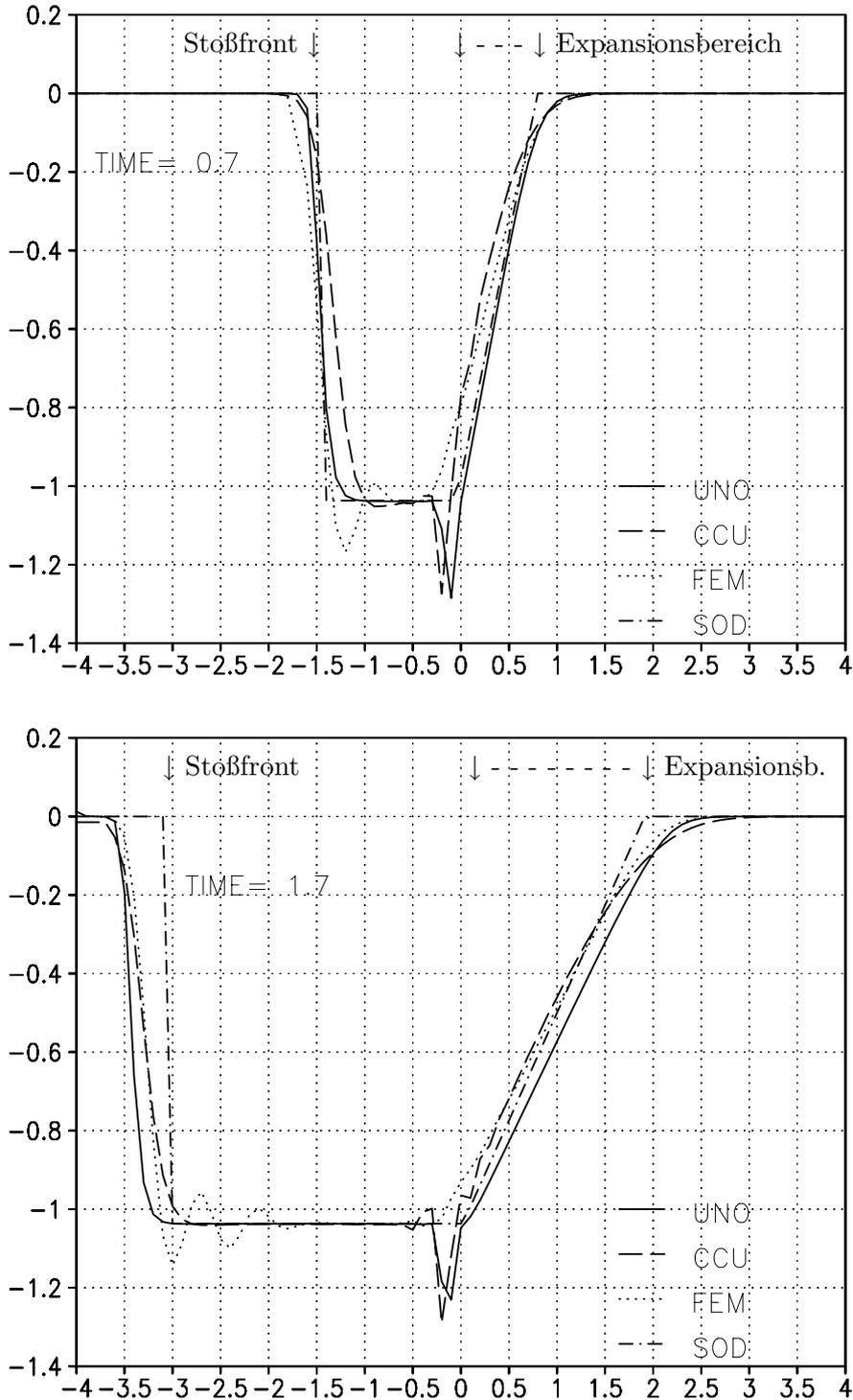


Abbildung 24: Gasgeschwindigkeit in der Expansionsstoßwelle berechnet mit UNO, CCU und FEM im Vergleich mit der analytischen Lösung (SOD) zur Zeit $t = 0.7$ (oben) und zur Zeit $t = 1.7$ (unten). Durch Pfeile sind die Positionen der Stoßfront und der Expansionsbereich gekennzeichnet.

9.2 Symmetrische konvergente Stoßwelle

Für zwei Dimensionen wird eine konvergente Stoßwelle mit der Anfangsmachzahl $M_S = 2.5$ mit konstantem Hinterland als Anfangsbedingung verwendet. Der Anfangsradius der Stoßfront ist auf 1 normiert, das Rechengebiet reicht von -2 bis +2 sowohl in x- als auch in y-Richtung. Das Netz besteht aus 81 mal 81 Gitterpunkten mit gleichem Abstand. Der Abstand zwischen zwei Punkten beträgt 0.05. Meiner Erfahrung nach stellen konvergente Stoßwellen erheblich höhere Anforderungen an das numerische Verfahren als ebene Stoßwellen, wahrscheinlich wegen des Geometriefaktors der Konvergenz, der die Stoßwelle verstärkt. Mit der Lösung nach Guderley (1942) steht auch hier eine analytische Lösung zur Verfügung, die aber im Vergleich zu von uns behandelten Experimenten ein sehr starkes Hinterland aufweist. Weil jedoch die offenen Randbedingungen am äußeren Rand des Rechengebietes stets problematisch sind, und das starke Hinterland dieses verschärfen würde, wird auf den Vergleich mit dieser analytischen Lösung verzichtet.

Ich vergleiche daher nur zwischen dem CCU- und dem UNO-Verfahren, die ich beide auf äquidistanten, kartesischen Gittern rechnen lasse. Das UNO-Verfahren ist sehr ausgiebig zur Modellierung verwendet worden und hat dabei seine Qualitäten unter Beweis gestellt: In meiner Diplomarbeit (s. [Wallus (1993)]) und auch in den Diplomarbeiten von J. Meier (1994) und R. Steinfeldt (1996) wurden Rechnungen des UNO-Verfahrens im direkten Vergleich mit Experimenten durchgeführt. Zudem haben R. Steinfeldt und U. Meier (1997) auch Vergleiche mit dem Programm CAR angestellt, das die Berechnung einer kreissymmetrischen konvergenten Stoßwelle quasiaeindimensional auf der Basis von Charakteristiken und eingepaßter Stoßfrontschritte ('shock fitting') durchführt; dieses Programm hat in unserer Arbeitsgruppe den Status eines Standards. In meiner Untersuchung steht beim Vergleich zwischen CCU- und UNO-Verfahren das Verhalten an den Diskontinuitäten im Vordergrund und zwar in Hinblick auf die Qualität der Ergebnisse für die graphische Darstellung und die Anwendung der Mustererkennung zur Interpretation strömungsmechanischer Phänomene.

Der Vergleich mit einer kreissymmetrischen Stoßwelle zeigt den Einfluß des kartesischen Gitters auf die Lösung.

Beim Vergleich zwischen dem CCU- und dem UNO-Verfahren zeigt sich ein ähnliches Bild wie bei der ebenen Stoßwelle. Das UNO-Verfahren eilt stets ein Stück voraus; die Stoßfront wird nur auf ca. 8 Punkte verschmiert. Jedoch hat sich beim Vergleich mit dem Bicharakteristikenverfahren gezeigt, daß das UNO-Verfahren im oberen Bereich der Stoßfront den Dichteverlauf etwas zu steil bestimmt. Die vom CCU-Verfahren berechnete Stoßfront ist hingegen auf ca. 10 Punkte verschmiert, also nicht so steil berechnet. Hervorragend ist bei beiden Verfahren die Symmetrie der Konturlinien: Obwohl sie auf einem kartesischen Gitter rechnen, besitzen die Konturlinien beider Verfahren eine nahezu perfekte Kreisform. Durch das stärkere Verschmieren bedingt, erreicht die Stoßfront

des CCU-Verfahrens den Konvergenzpunkt früher als die Stoßfront des UNO-Verfahrens. Auch ist die Höhe der maximal erreichten Dichte beim UNO-Verfahren wesentlich größer. Der Zeitpunkt ist bei beiden Verfahren gleich.

Die durch die Eulergleichungen modellierten kreissymmetrischen Stoßwellen werden kurz vor der Konvergenz selbständig und schließlich in der Konvergenz singular; ein numerisches Verfahren kann aber eine Singularität nicht ohne besondere Maßnahmen berechnen: Der Algorithmus wird abbrechen. Das Modell muß für die Beschreibung realer Gase um die Viskosität, Strahlungstransport und chemische Prozesse erweitert werden, die diese unnatürliche Singularität verhindern. Für nicht zu starke Stoßwellen ist der Einfluß der chemischen Prozesse und des Strahlungstransports zu vernachlässigen. Die in den Algorithmen vorhandene numerische Viskosität verhindert die Singularität der Stoßwellen und erlaubt die Modellierung über diesen Zeitpunkt hinaus.

Die Singularität der kreissymmetrischen Stoßwelle in der Konvergenz ließe sich auch durch das Einsetzen einer dünnen, festen Achse im Konvergenzzentrum umgehen (vgl. [Wallus, Demmig (1995)]). Dies würde den Einfluß der stark nichtlinearen, verfahrensabhängigen, numerischen Viskosität auf die physikalischen Größen während der Konvergenz stark vermindern. Insofern ist der Unterschied im Betrag der Ergebnisse beider Verfahren im Konvergenzbereich nicht relevant.

Auffällig ist der Unterschied im Verlauf des sich an die Stoßfront anschließenden Hinterlands. U. Meyer (1997) hat diese Abweichung (Überzeichnung) im Vergleich mit Bicharakteristikenverfahren in der Berechnung des UNO-Verfahrens ebenfalls festgestellt. Diese Überzeichnung der einer Stoßfront nachfolgenden Werte ist wohl auf die Anwendung der Roe-Linearisierung zurückzuführen. Beide Verfahren sind konservativ, so daß nach der Reflexion der Stoßfronten im Zentrum die von beiden Verfahren berechneten Werte wieder physikalisch sind, solange keine chemischen Prozesse die Eigenschaften des Gases verändert haben.

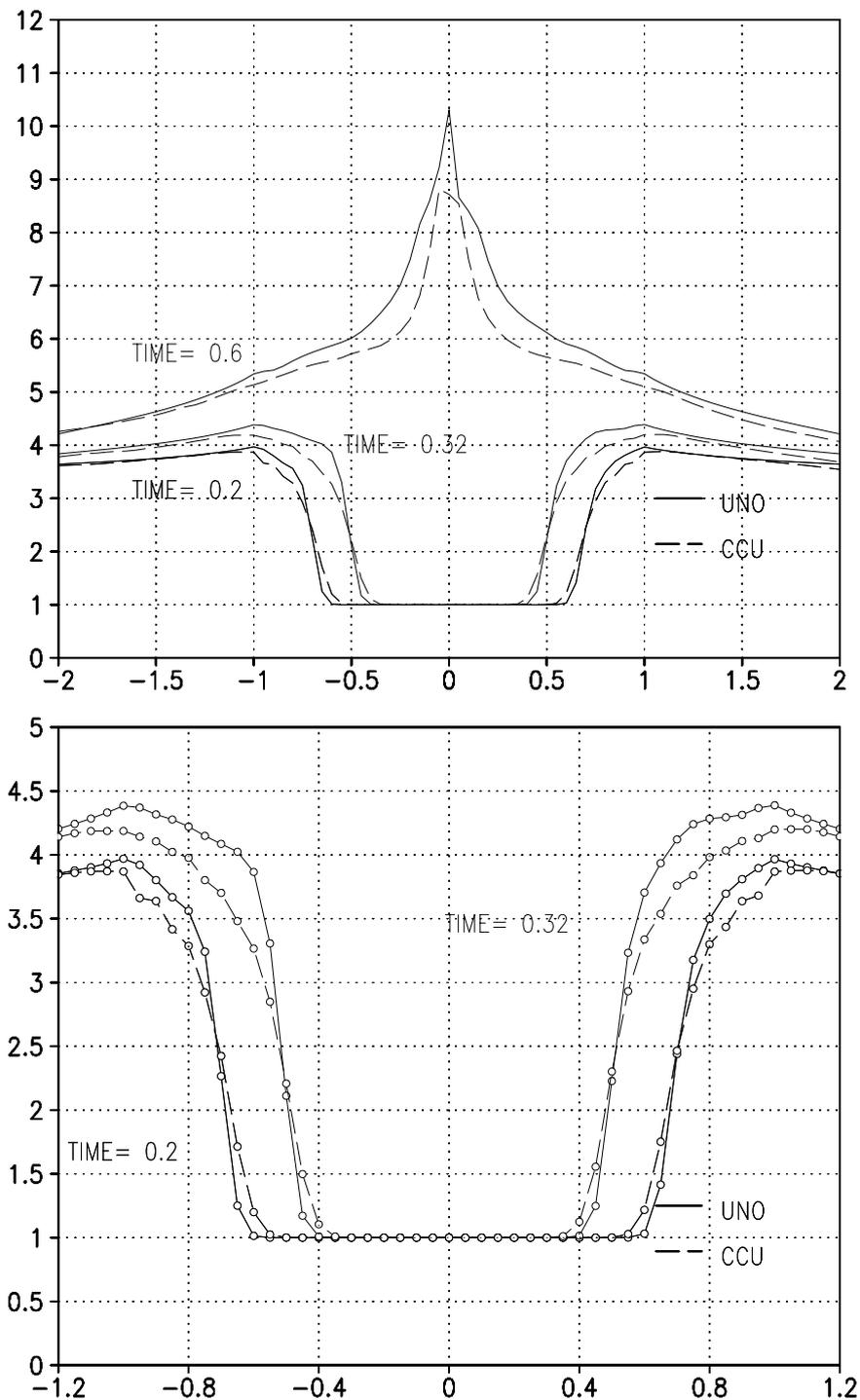


Abbildung 25: Vergleich der Dichteverläufe bei $y = 0$ von UNO- und CCU-Verfahren für eine konvergente Stoßwelle. Der Gitterabstand beträgt 0.05. Die Werte des UNO-Verfahrens zeigen eine weniger verschmierte Stoßfront, jedoch ist der Verlauf der Stoßfront im oberen Bereich des CCU-Verfahrens realistischer als beim UNO-Verfahren. Auch der Verlauf des an die Stoßfront anschließenden Hinterlandes wird durch das CCU-Verfahren realistischer berechnet.

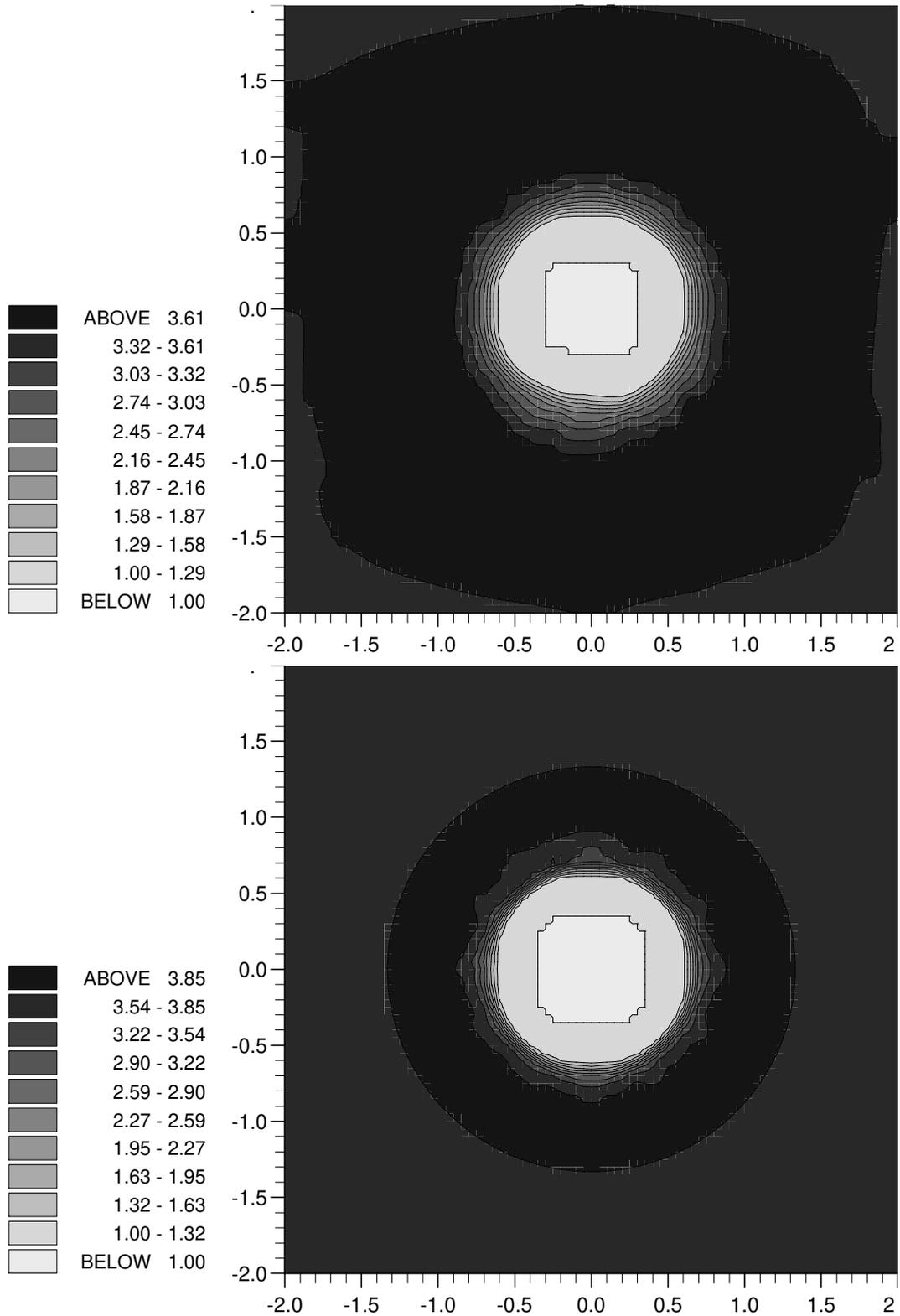


Abbildung 26: Symmetrische konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.2$.

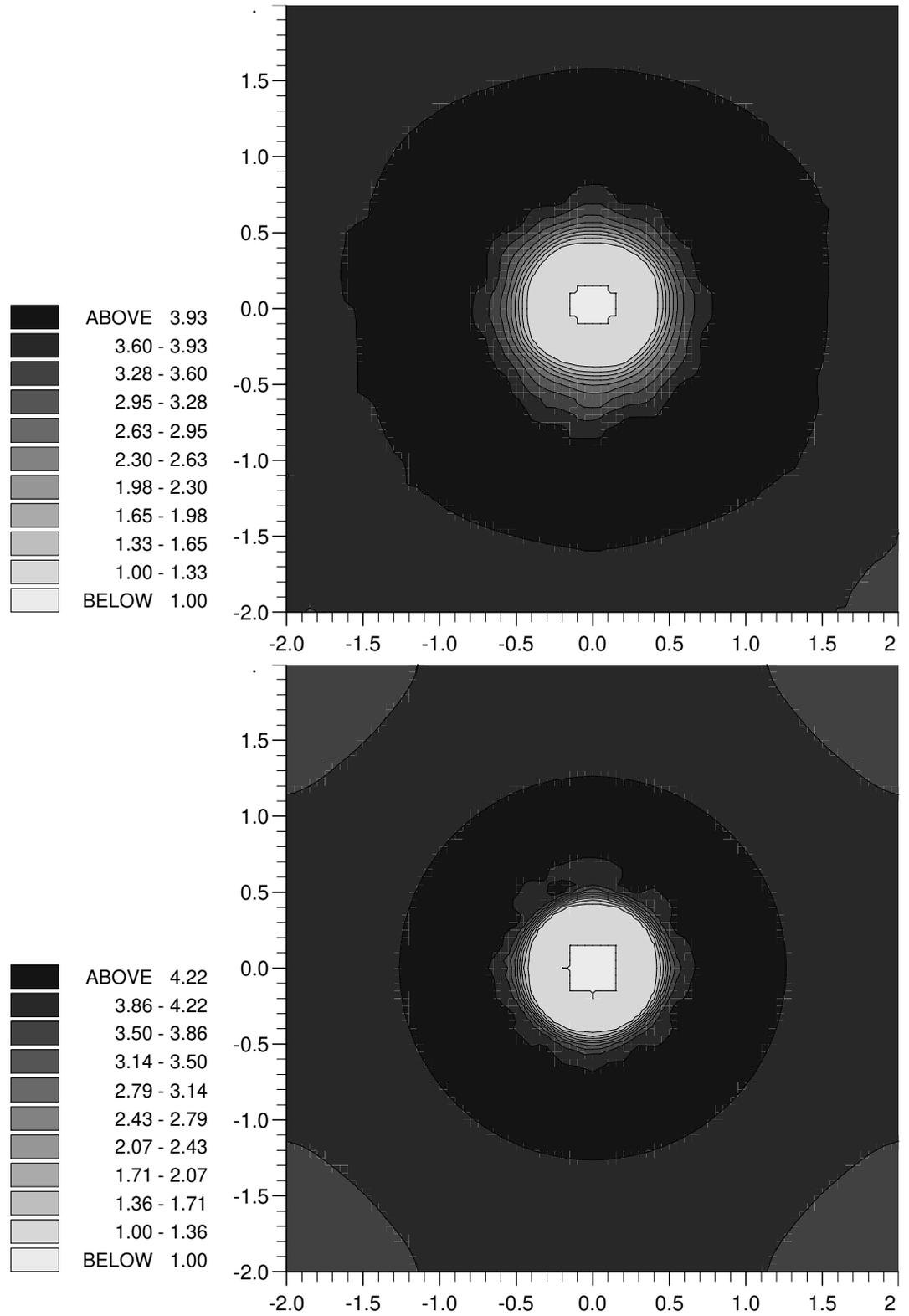


Abbildung 27: Symmetrische konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.32$

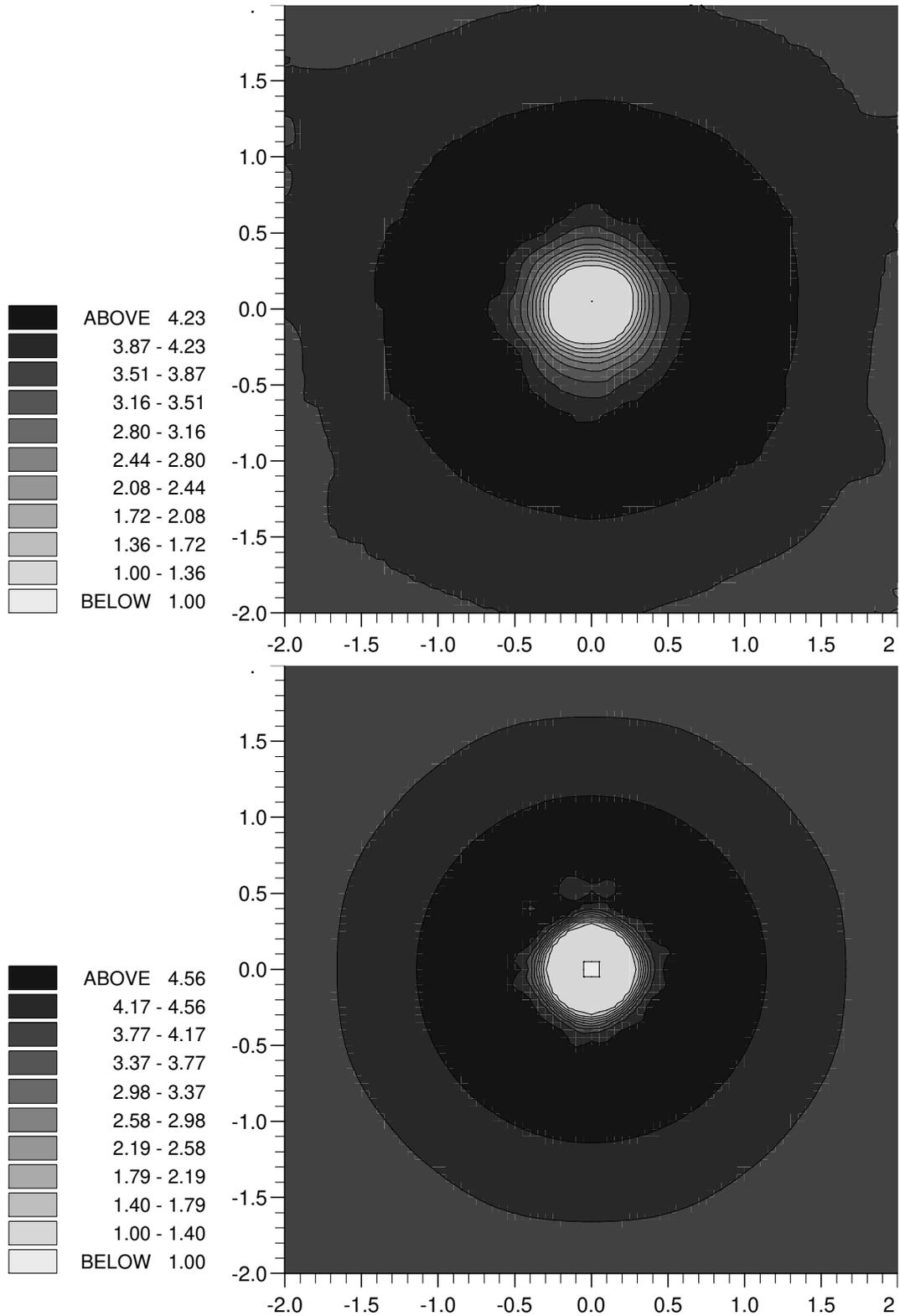


Abbildung 28: Symmetrische konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.4$

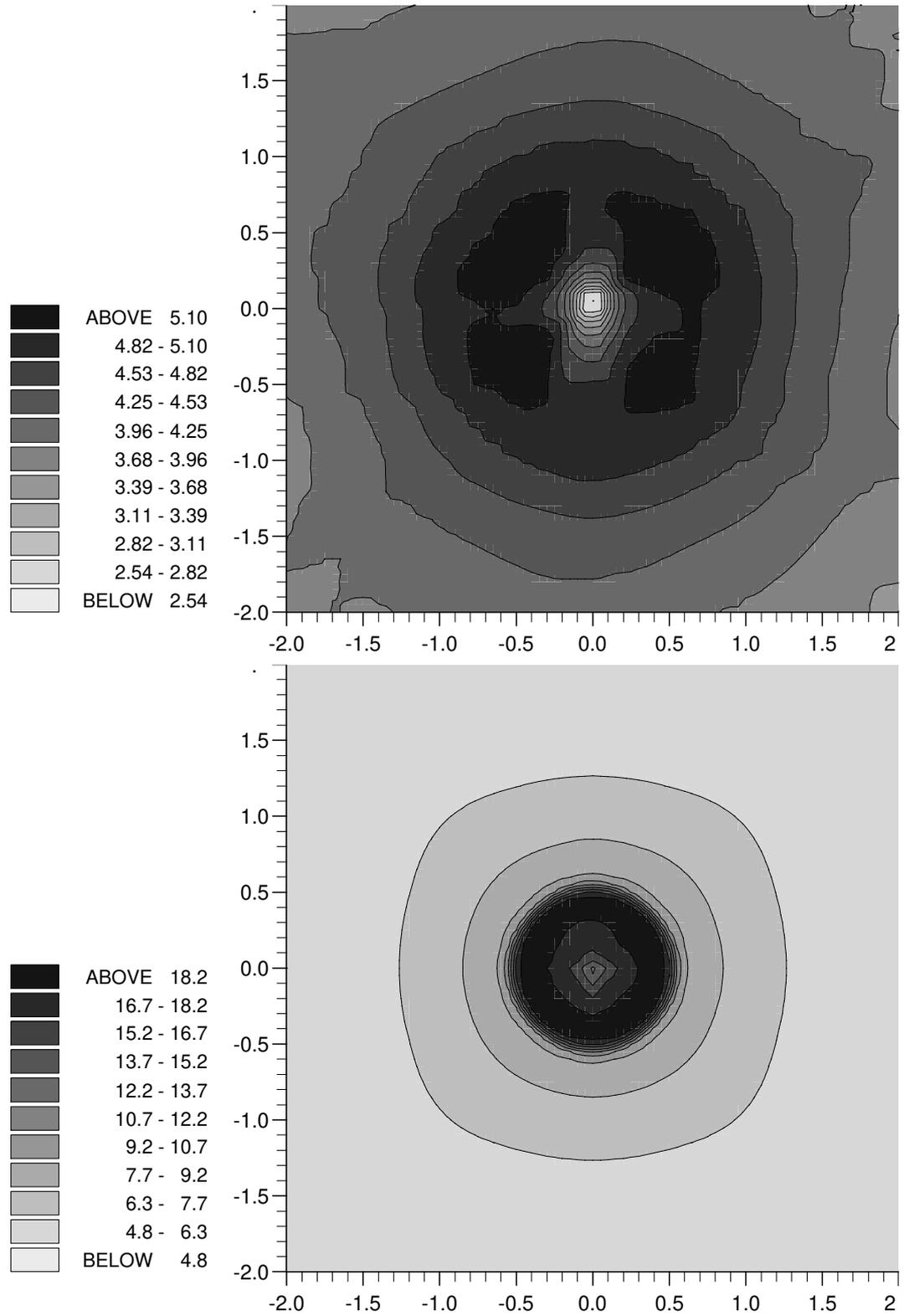


Abbildung 29: Symmetrische konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.52$

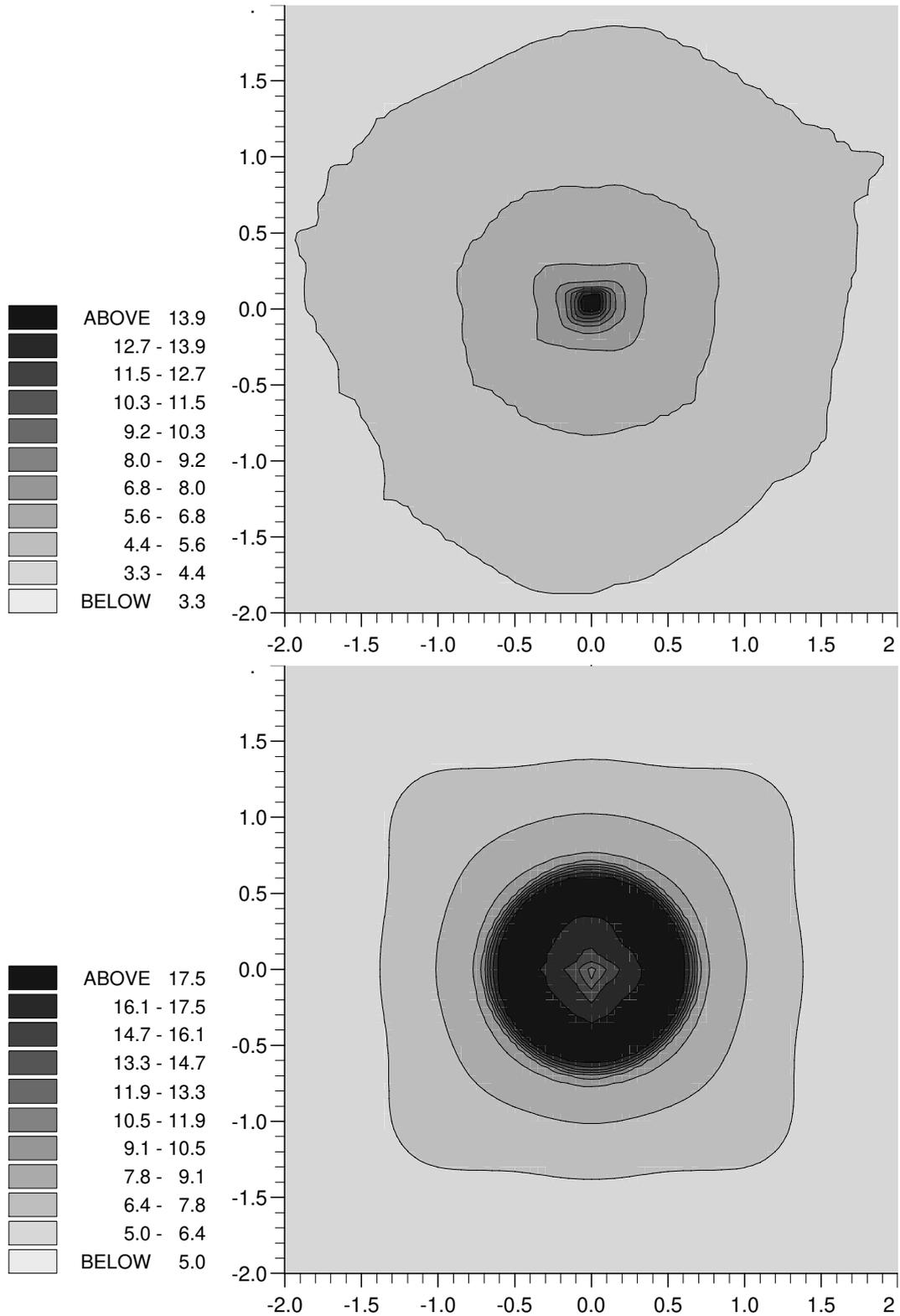


Abbildung 30: Symmetrische konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.66$

9.3 Fragmentierende konvergente Stoßwellen

Der Vergleich der Modellierungen von fragmentierenden Stoßwellen gibt einen differenzierteren Aufschluß über die Unterschiede zwischen dem CCU- und UNO-Verfahren. Denn bei den fragmentierenden, konvergen-ten Stoßwellen treten im Hinterland Bereiche verschiedener Entropie auf. Die Stoßkontur wird gemäß der Funktion zu

$$r = r_0 + A|\sin^3(2\phi + \psi)| \quad (59)$$

mit einer Machzahlvariation

$$M_S = M_0 + B|\sin^3(2\phi + \psi)| \quad (60)$$

(s. [Demmig, Petersen (1991)]). Für die hier vorgestellten Modellrechnungen ist $M_0 = 2.5$, $A = 0.05$, $B = -0.07$ und $\psi = 45^\circ$. Das Hinterland wird radial konstant gesetzt und erhält den jeweiligen Wert auf der Stoßfront im Winkel ϕ . Das Netz besteht für beide Verfahren aus einem regelmäßigen Gitter mit $\Delta x = \Delta y = 0.05$, das sich von -2 bis +2 in beiden Dimensionen erstreckt, also insgesamt 80×80 -Schritten.

Die Ergebnisse der Modellrechnungen sind in den Abb. 31 bis 35 dargestellt, wobei in der oberen Grafik die Ergebnisse des CCU-Verfahrens, in der unteren die des UNO-Verfahrens zu sehen sind.

Dichteberge haben sich bereits zum Zeitpunkt $t = 0.2$ (s. Abb. 31) bei beiden Verfahren auf den Winkelhalbierenden gebildet. Die Dichtewerte des CCU-Verfahrens sind jedoch ein wenig höher als die des UNO-Verfahrens. Dieses steht im Gegensatz zu den Untersuchungsergebnissen mit den vollständig kreissymmetrischen Stoßwellen: Dort sind die Dichtewerte des UNO-Verfahrens höher. Die Verschmierung der Stoßfront ist beim CCU-Verfahren wiederum größer als beim UNO-Verfahren. Insgesamt kann man feststellen, daß die Stoßfront in ihrer Form beim CCU-Verfahren mehr durch das Hinterland beeinflusst wird, als dies beim UNO-Verfahren der Fall ist: Die Stoßkontur wirkt rechteckiger.

Dies wird in der Abb. 32 noch deutlicher³. Obwohl die Dichtewerte in den Dichteerhebungen in Abb. 31 von 3.5–3.7 auf 4.0–4.24 in Abb. 32 gestiegen sind, zeigt die Stoßfrontkontur des UNO-Verfahrens kaum eine Änderung ihrer Form.

Sogar noch zum Zeitpunkt $t = 0.4$ (s. Abb. 34) zeigt die Form der Stoßkontur des UNO-Verfahrens kaum einen Einfluß des mittlerweile stark variierenden Hinterlands. Beim CCU-Verfahren läuft der Dichteberg zur Stoßfront spitz zusammen, was durch die tangentielle Komponente des

³Hier ist beim UNO-Verfahren eine kleine Abweichung bei $x = 0.0$ und $y = 0.75$ im Verlauf der Stoßfront zu sehen. Solche Abweichungen sind in den Verfahrensschaltern begründet. Auch beim CCU-Verfahren läßt sich durch die unterschiedlichen Verläufe der Höhenlinien an den Dichtebergen auf solche, durch die Verfahrensschalter verursachte Abweichungen schließen. Beim CCU-Verfahren ist das Rechengitter jedoch in unterschiedlich ausgerichtete Dreiecke zerlegt, so daß nicht so deutliche Abweichungen wie beim UNO-Verfahren in Erscheinung treten. Diese Abweichungen sind im Rahmen der Fehlerkonvergenz nicht als Fehler zu werten.

Massenstroms an der Stoßfront verursacht ist. Diese Entwicklung ist beim UNO-Verfahren in diesem Zeitpunkt nicht zu erkennen.

Der nächste dargestellte Zeitpunkt, Abb. 35, zeigt einen weiteren Unterschied zwischen den beiden Verfahren auf: Während das CCU-Verfahren noch kurz vor der Konvergenz steht, ist die Stoßfront des UNO-Verfahrens bereits konvergiert. Dieses Vorschnellen des UNO-Verfahrens ist auf die Roe-Linearisierung zurückzuführen.

Charakteristisch ist der auch in Experimenten beobachtete Wechsel der Dichteberge von den Winkelhalbierenden zu den Koordinatenachsen kurz vor der Reflexion (vgl. [Takayama et al (1984)] und [Takayama et al (1987)]). In Abb. 35 steht in der Grafik des CCU-Verfahrens der Wechsel gerade bevor, die Stoßkontur ist auf den Koordinatenachsen bereits näher an das Zentrum herangerückt als auf den Winkelhalbierenden. In der unteren Grafik des vorausseilenden UNO-Verfahrens ist der bereits vollzogene Wechsel an der Farbe der Konturflächen zu erkennen.

Zum Vergleich habe ich diese Rechnungen mit doppelter Auflösung durchgeführt, also 181×181 -Schritten. Der Gitterabstand beträgt nun 0.025. Die Ergebnisse sind in den Abb. 36 bis 40 zu den gleichen Zeitpunkten gezeigt. Der Vergleich zwischen den verschiedenen Auflösungen zeigt die besseren Qualitäten des CCU-Verfahrens. Z.B. hat sich die Form der Dichteerhebungen des UNO-Verfahrens von der Abb. 32 mit niedriger Auflösung zu der Abb. 37 mit hoher Auflösung der Form des CCU-Verfahrens angeglichen.

Ein zweites Beispiel ergibt sich beim Vergleich der Abb. 34 mit niedriger Auflösung und der Abb. 39 mit hoher Auflösung zum Zeitpunkt $t = 0.52$. Beim UNO-Verfahren ist die Stoßwelle in der niedrigen Auflösung nahezu konvergiert, während sie in der höheren Auflösung noch kurz vor der Konvergenz steht und entspricht mehr der Berechnung des CCU-Verfahrens. Das CCU-Verfahren berechnet für beide Auflösungen die gleiche Stoßfrontposition.

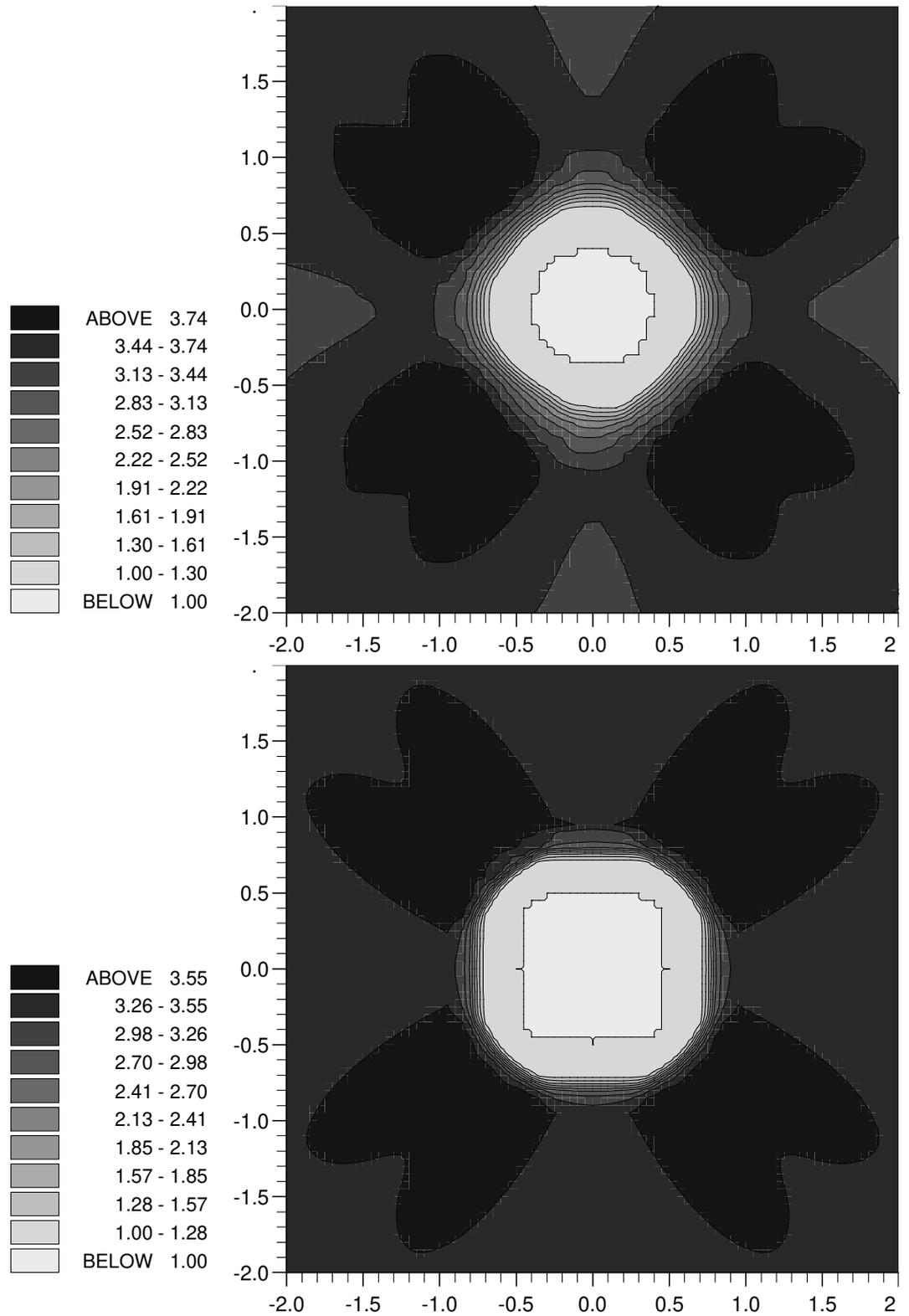


Abbildung 31: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.2$.

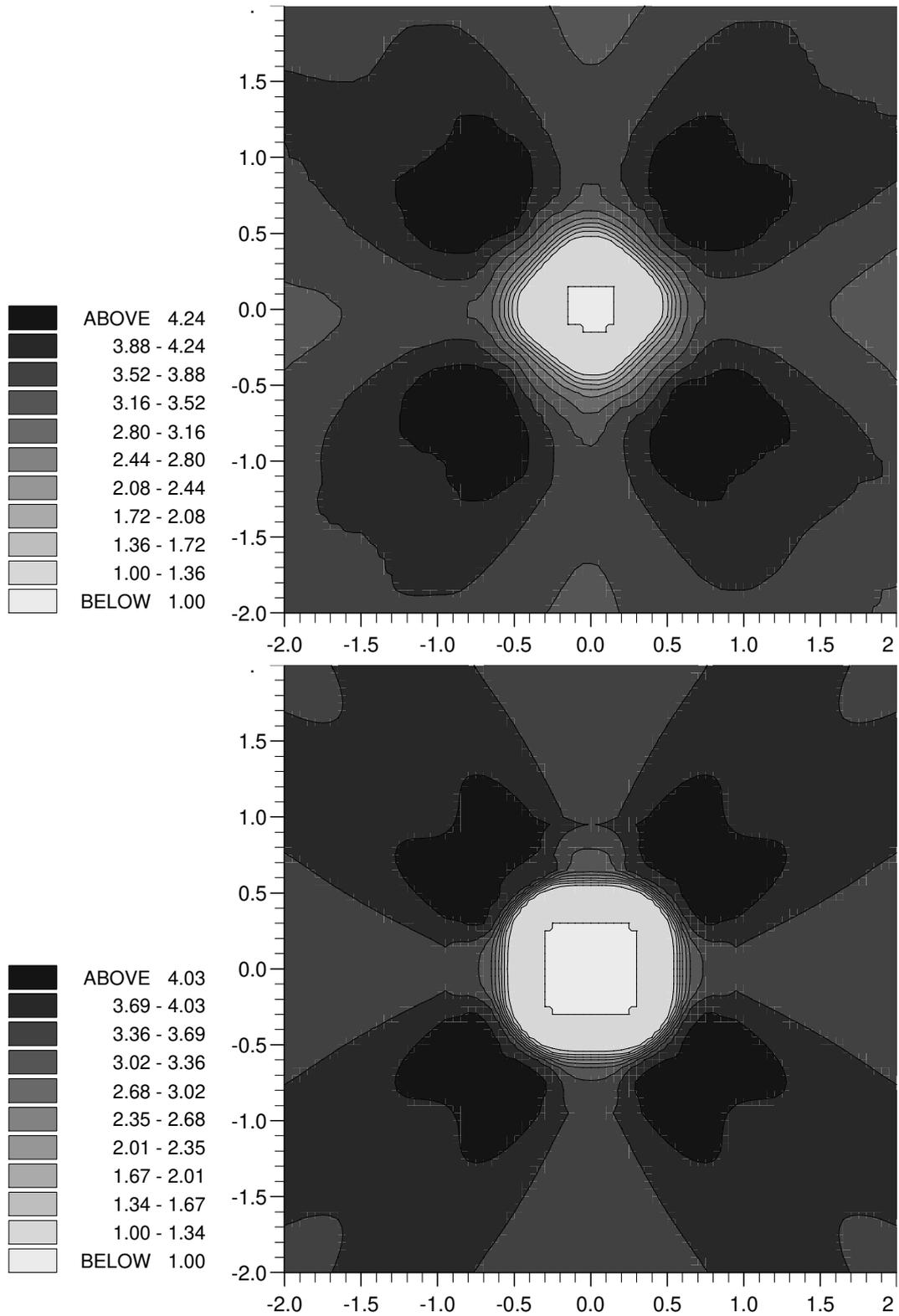


Abbildung 32: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.32$

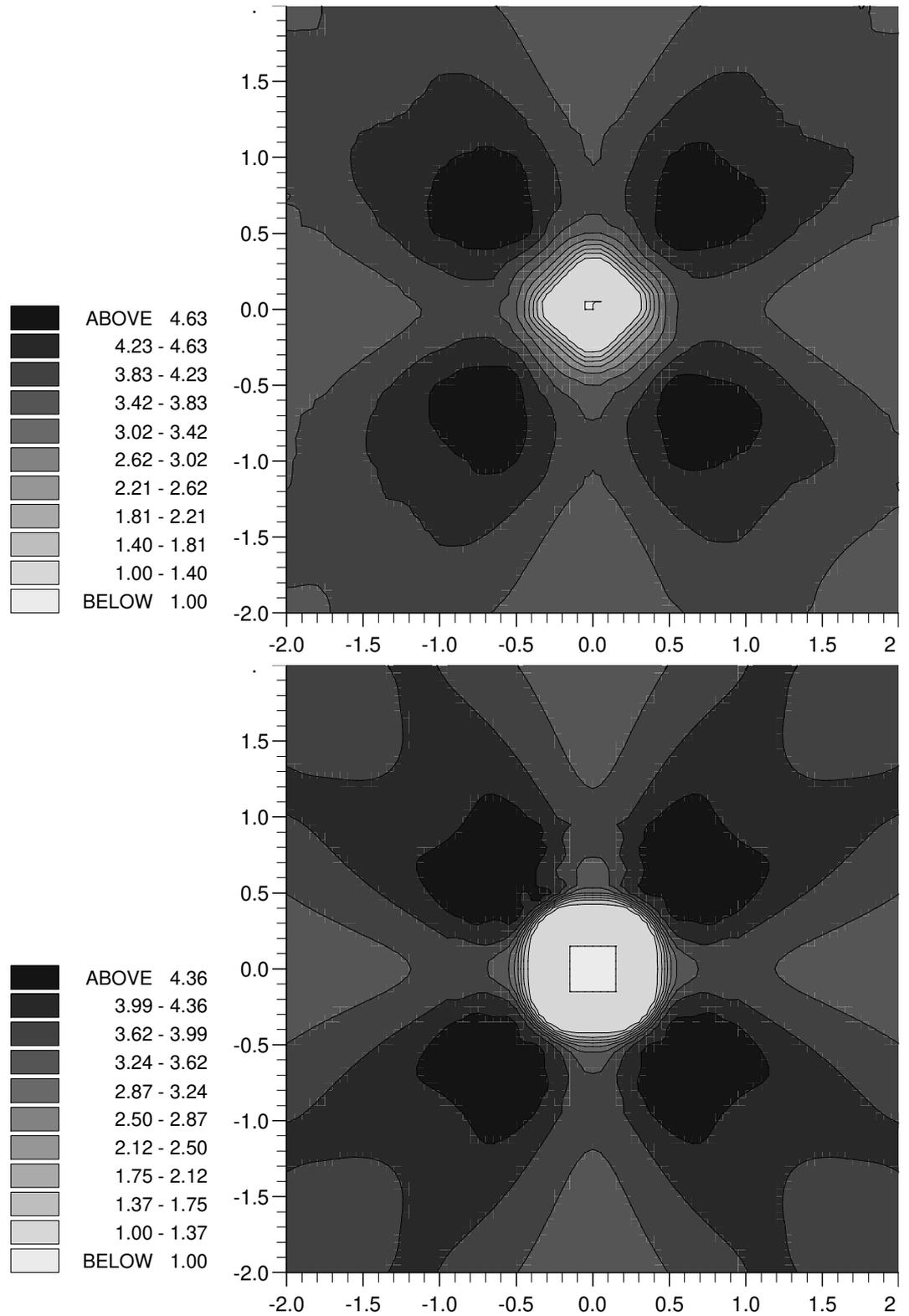


Abbildung 33: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.4$

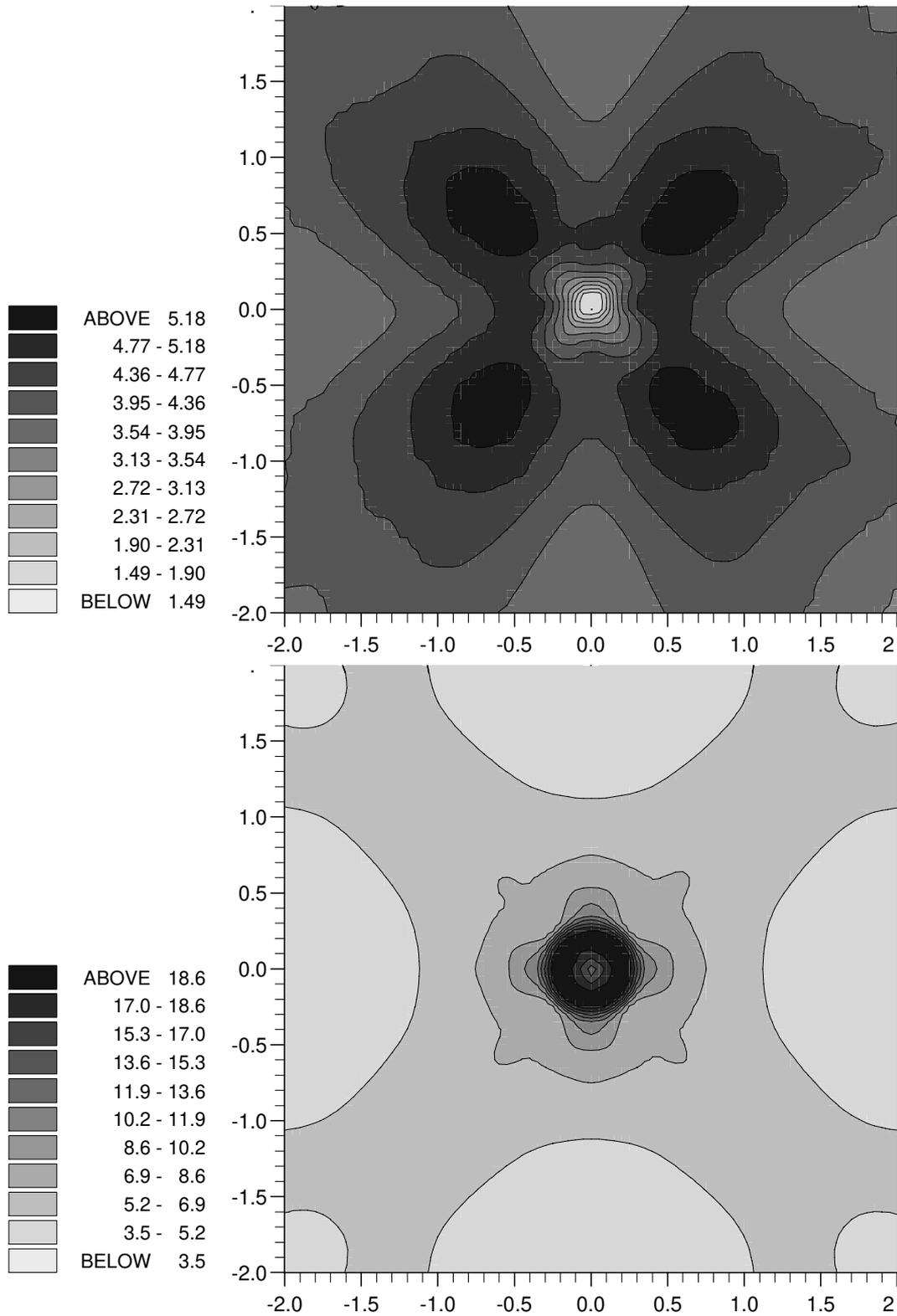


Abbildung 34: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.52$

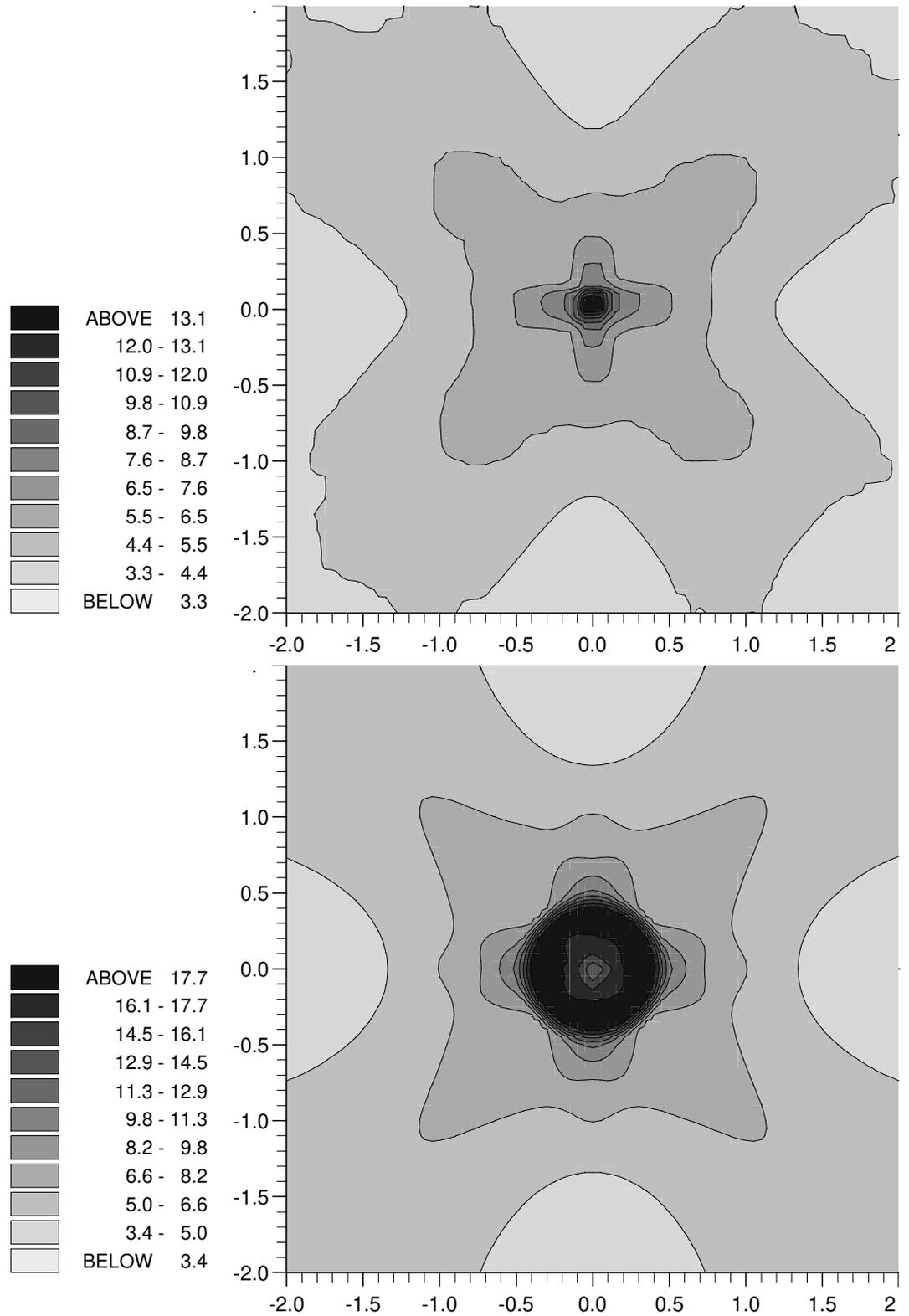


Abbildung 35: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.66$

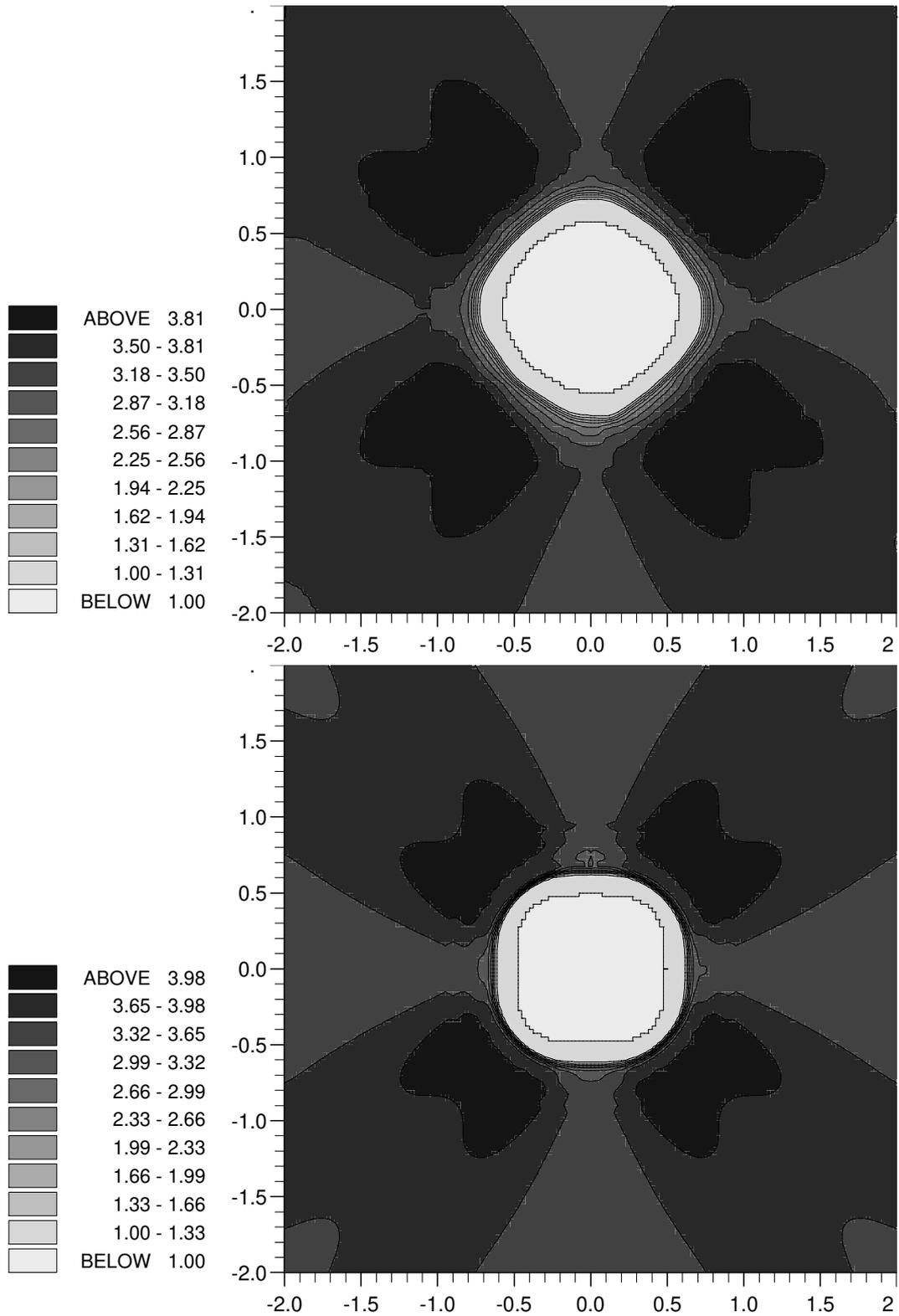


Abbildung 36: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.2$ (doppelte Auflösung).

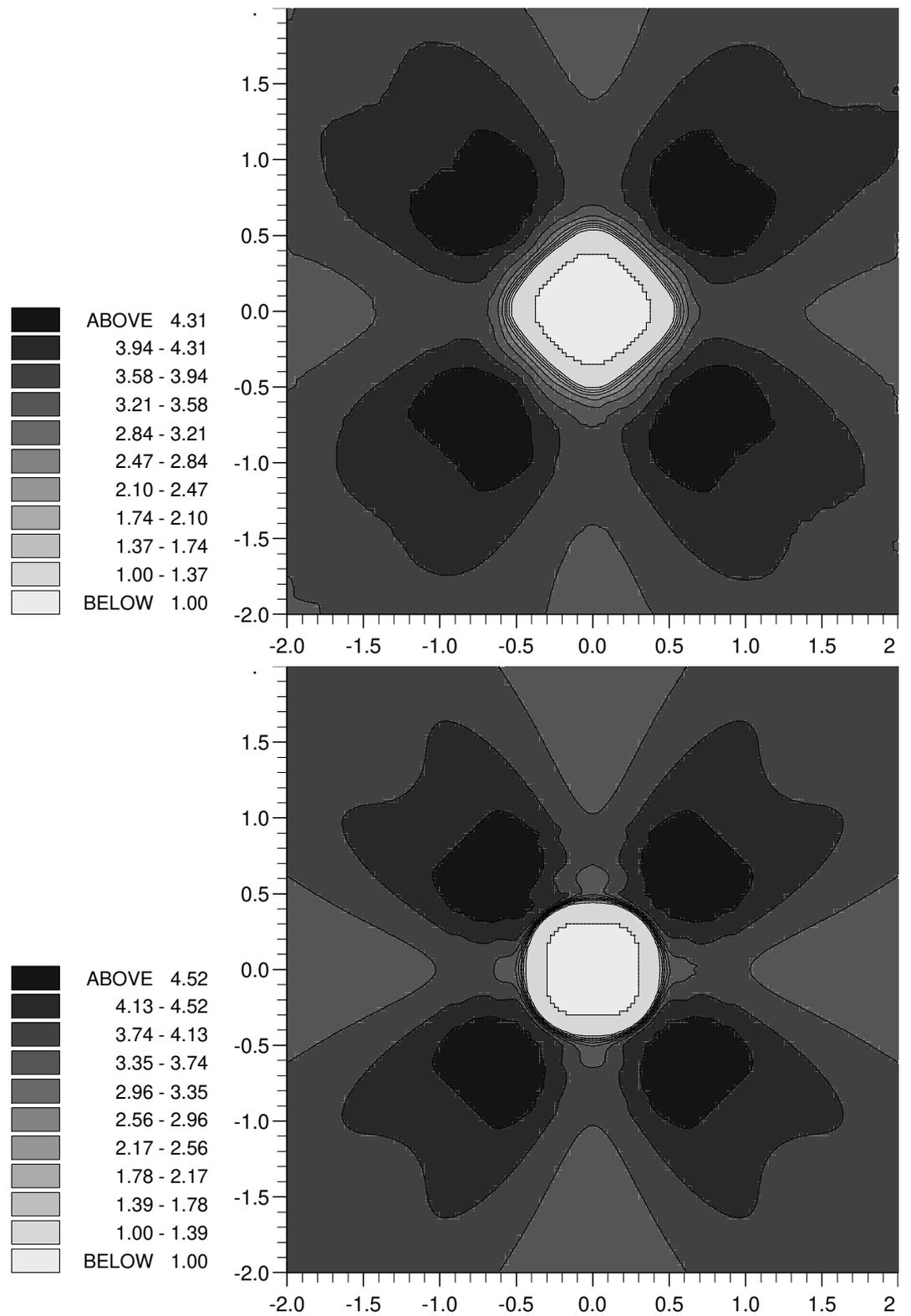


Abbildung 37: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.32$ (doppelte Auflösung).

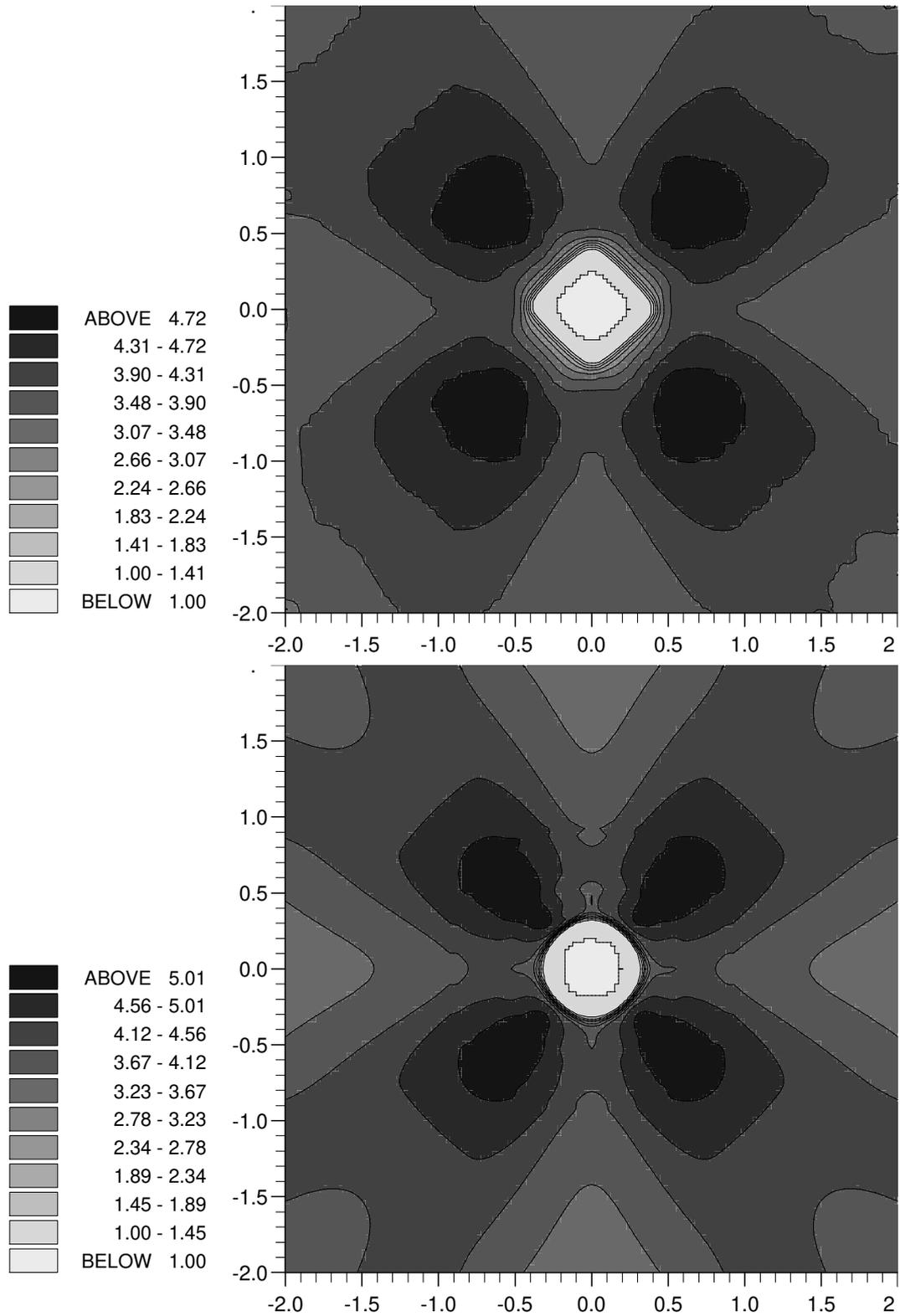


Abbildung 38: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.4$ (doppelte Auflösung).

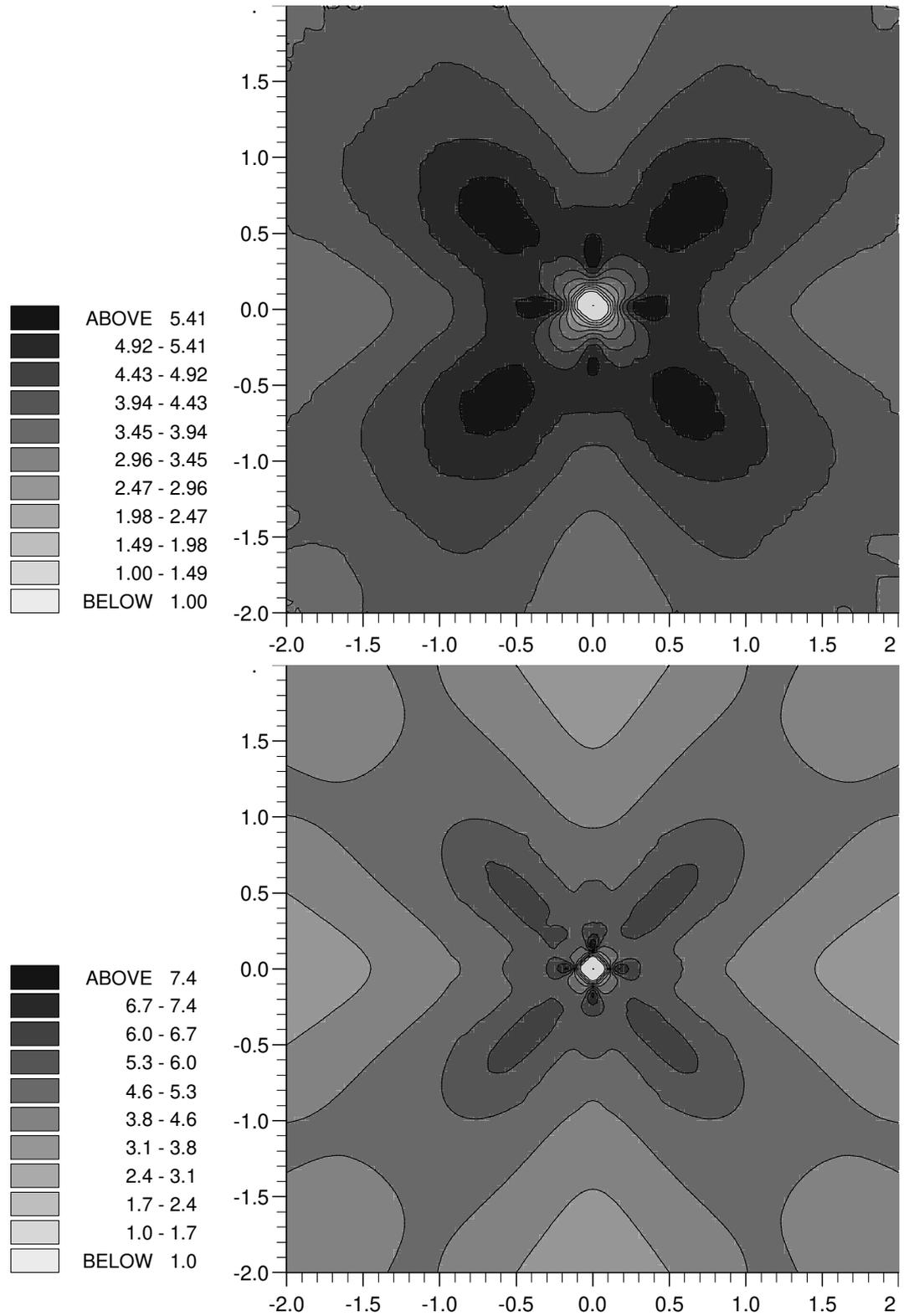


Abbildung 39: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.52$ (doppelte Auflösung)

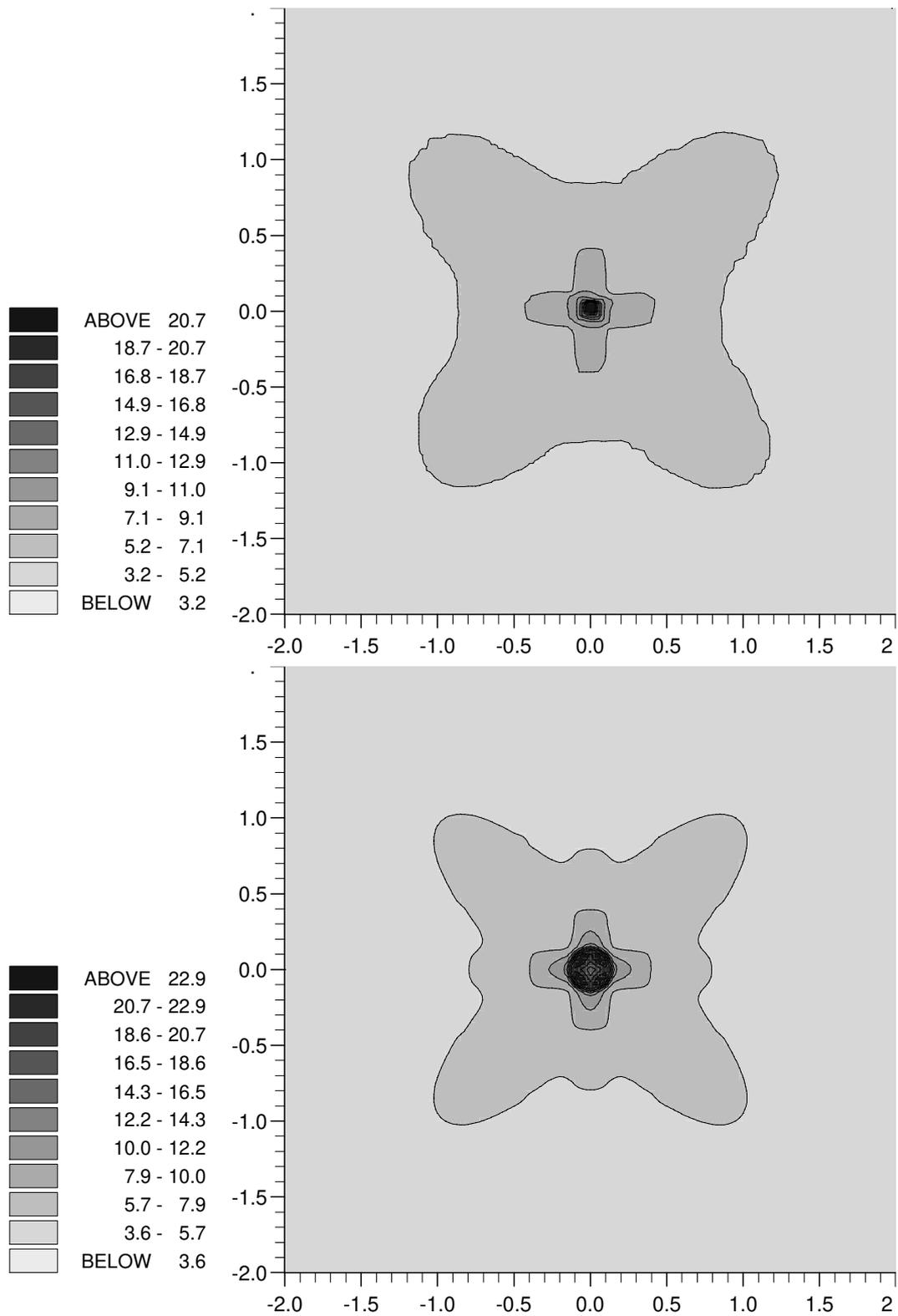


Abbildung 40: Fragmentierende konvergente Stoßwelle (oben CCU, unten UNO) zur Zeit $t = 0.66$ (doppelte Auflösung).

9.4 Unstrukturiertes Gitter

Die Fähigkeit des CCU-Verfahrens, die Entwicklung von Stoßwellen auf einem unstrukturierten Gitter zu berechnen, wird hier exemplarisch für die symmetrische, konvergente Stoßwelle wie in Abschnitt 9.2 gezeigt. Die Anfangsmachzahl beträgt $M_s = 2.5$, der Anfangsradius $r_0 = 1$. In der Abb. 41 ist das unstrukturierte Rechengitter dargestellt. Es ist in seiner Auflösung asymmetrisch gewählt, um Abweichungen des Verfahrens auf Grund des Gitters zu erkennen. Die mittlere Auflösung ist mit der des regelmäßigen Rechengitters identisch. Die ersten drei Gitterpunkte, jeweils vom Rand aus gesehen, sind unverändert gegenüber dem regelmäßigen Netz: Damit können für beide Verfahren die gleichen Randbedingungen verwendet werden.

In der Abb. 42 sind zum Vergleich die Dichtekonturen für die Berechnung auf dem unstrukturierten Netz und die Dichtelinien für das regelmäßige Netz gezeigt.

Die Stoßfront hat im unstrukturierten Netz bereits Bereiche mit unterschiedlicher Auflösung durchschritten; der Einfluß des Gitters ist zu diesem Zeitpunkt am auffälligsten.

Die Unterschiede in den Dichtelinien sind recht klein; sie lassen sich auf die Abweichungen zurückführen, die sich aus den unterschiedlichen Auflösungen und damit unterschiedlichen Auflösungen der berechneten Werte ergeben müssen.

Somit ist sichergestellt, daß das CCU-Verfahren die Überschallströmungen entsprechend der Auflösung des Gitters richtig berechnet. Weiterhin ist es somit möglich, die Auflösung des Rechenetzes für die Modellierung eines komplexen Experiments den jeweiligen Erfordernissen anzupassen, die sich aus den Gradienten der Strömung und der gewünschten Auflösung der Ergebnisse ergeben.

Beachtet werden muß, daß sich die Maschengrößen des Rechenetzes nur langsam ändern darf. Mehr als 25% sollen sich die Abstände benachbarter Gitterpunkte auf keinen Fall ändern. Die NOI-Interpolation kann für stärker variierende Gitterabstände die nichtmehr die korrekten Werte berechnen.

Zudem sollte in allen kritischen Bereichen möglichst konstante Abstände beibehalten werden. Dazu gehören neben Bereichen mit großen Gradienten in der Strömung auch der Rand in den oben durchgeführten Berechnungen konvergenter Stoßwellen. Die Wechselwirkung der linearen Extrapolation (s. Gl(53)) mit dem CCU-Verfahren mit einem unregelmäßigen Maschennetz, wie es z.B. in Abb. 41 zusehen ist, sind doch in den Ergebnisdaten spürbar.

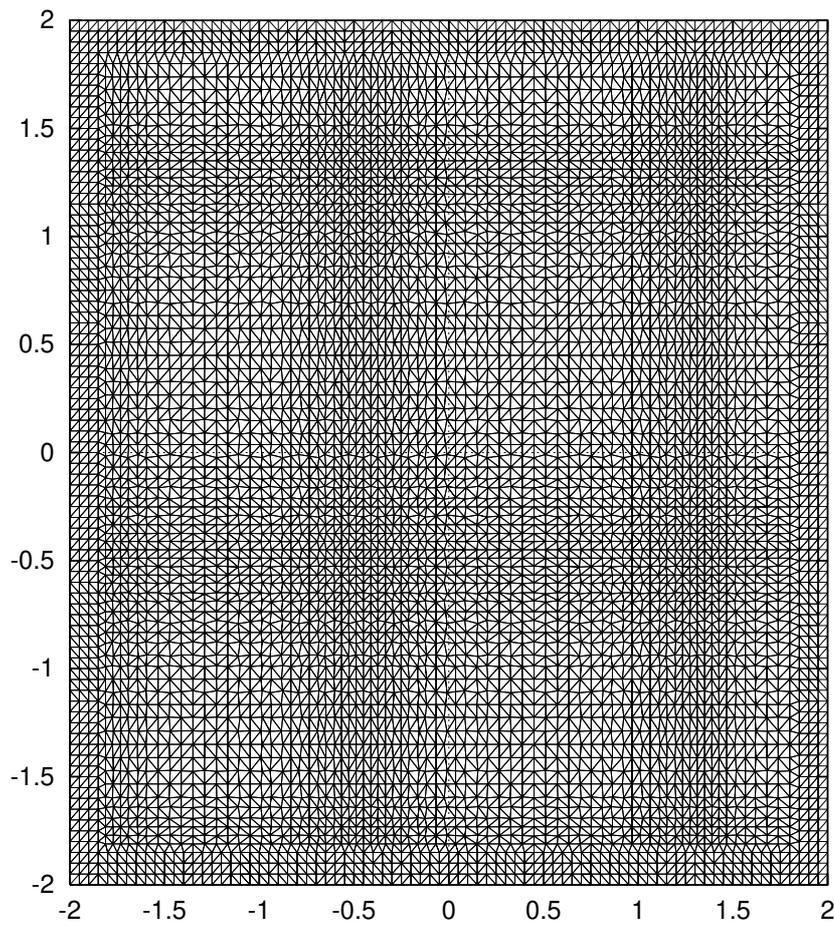


Abbildung 41: Unstrukturiertes Netz für eine exemplarische Berechnung mit dem CCU-Verfahren.

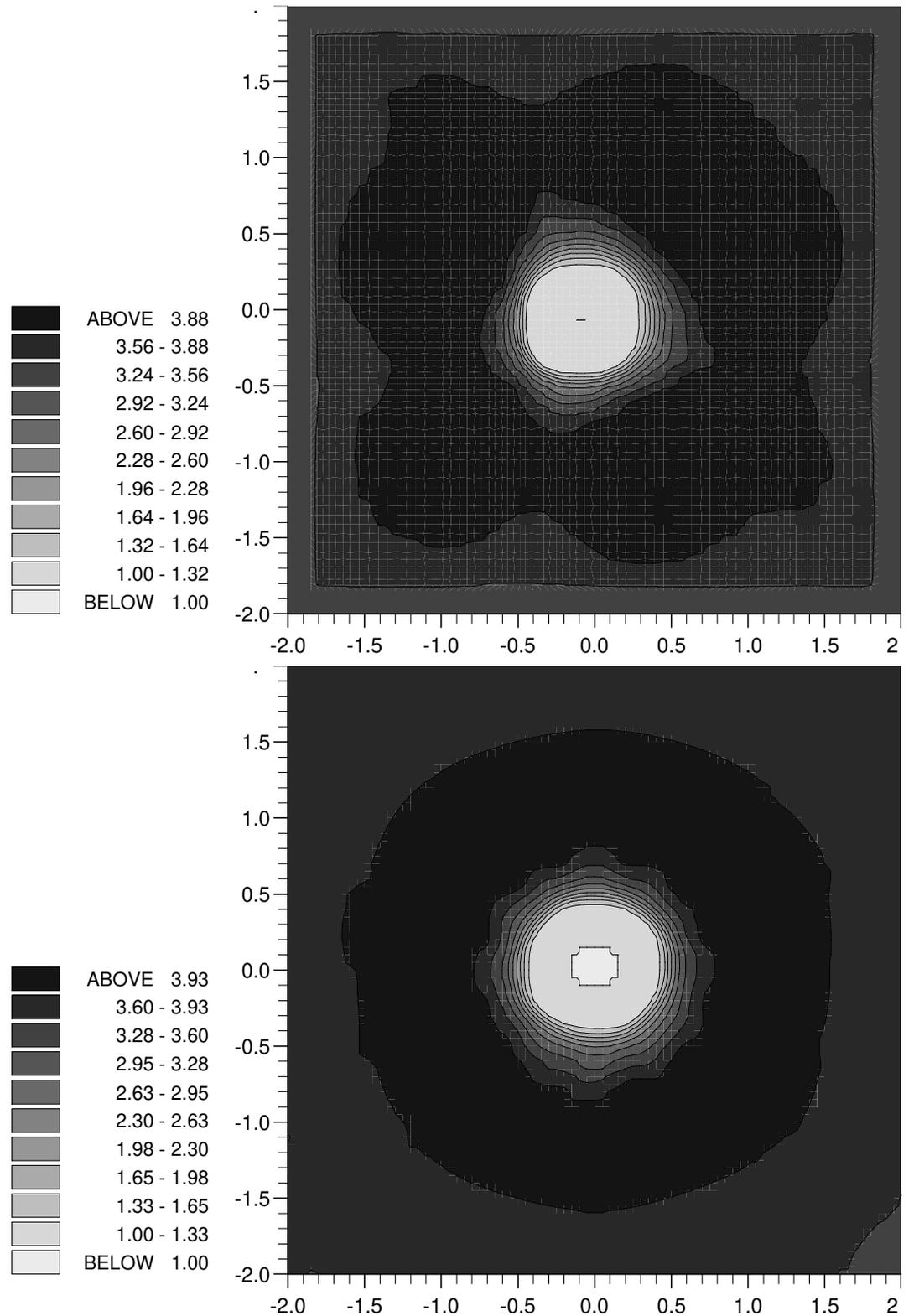


Abbildung 42: Vergleich zwischen strukturiertem und unstrukturiertem Netz. Das Ergebnis der Berechnung der konvergenten, symmetrischen Stoßwelle (s. Abschnitt 9.2) ist in der oberen Grafik auf dem unstrukturiertem Netz (s. Abb.41) und unten auf dem regelmäßigen Netz berechnet (Zeit $t = 0.32$).

9.5 Ergebnis des Vergleichs

Für die Modellierung der ebenen Stoßwelle und der kreissymmetrischen, konvergenten Stoßwelle zeigen sich zwischen dem CCU- und dem UNO-Verfahren wenige Unterschiede in den Verfahrensergebnissen:

Die Stoßfront wird vom UNO-Verfahren geringer verschmiert als beim CCU-Verfahren, dagegen berechnet das UNO-Verfahren den Expansionsbereich der ebenen Stoßwelle nicht so exakt wie das CCU-Verfahren. Dies gilt auch für das sich an der Stoßfront anschließende Hinterland.

Auffällig sind hingegen die Unterschiede zwischen dem CCU- und dem UNO-Verfahren für die Modellierung der fragmentierenden, konvergenten Stoßwelle. Die Berechnung der zur Stoßfront gerichteten Flanken der Dichteerhebungen differiert:

Während sich beim CCU-Verfahren für die Form dieser Flanken zwischen der Berechnung in einfacher und doppelter Auflösung kaum Unterschiede ergeben, sind die Flanken in der einfachen Auflösung erheblich breiter in ihrem Aussehen, und in der doppelten Auflösung schmäler als bei den Ergebnissen des CCU-Verfahrens.

Dies weist auf einen Mangel des UNO-Verfahrens hin: Die Konstruktion des UNO-Verfahrens mit Hilfe von Riemannvariablen beschränkt das Verfahren auf Berechnungen homentropen Strömungen und auf die Eindimensionalität. Erst mit Einsatz des Operatorsplittings können auch zweidimensionale Strömungen berechnet werden. Im Gegensatz dazu ist das CCU-Verfahren von sich aus zweidimensional und kann isentrope Strömungen berechnen.

10 Mustererkennung

Nachdem die Modelldaten berechnet sind, folgt die Auswertung der Ergebnisse: Die Höhenliniendiagramme, Konturplots, Gittermodelle und Geschwindigkeitsfelder machen es möglich, die Entwicklung in der Strömung zu interpretieren und zu verstehen.

Für die Modellierung von Überschallströmungen sind darüber hinaus die Informationen zu den Positionen der Unstetigkeiten, z.B. der Stoßfront, der Kompressionsfront, der Kontaktunstetigkeiten oder der Tangentialen Unstetigkeit der Gasgeschwindigkeit, zur Interpretation der Ergebnisdaten unerlässlich. Diese Informationen können mit einem Mustererkennungsalgorithmus aus den Ergebnisdaten herausgefiltert werden.

Von J. Petersen (1991) wurde der Algorithmus nach E.V. Vorozhtsov (1987 u. 1990) implementiert (vgl. [Demmig, Petersen (1991)]). Dieser Algorithmus hat jedoch den Nachteil, daß seine Funktionsweise von Parametern abhängig ist, die für jeden Datensatz (Zeitschnitt) optimiert werden müssen.

Während meiner Untersuchungen des Prinzips des UNO-Verfahrens gelang es mir, die Methode der Mustererkennung insoweit zu verbessern, daß keine Parameter mehr optimiert werden müssen. Die Auswahl der zu untersuchenden Gebiete kann mit Hilfe der zweiten Ableitungen von der Dichte stark vereinfacht werden: Zunächst wird für jeden Knoten die Richtung der größten Steigung in der Dichte \vec{g}_{\max} bestimmt. Die zweiten Ableitungen f''_i und f''_{i+1} bestimme ich mit Hilfe zweiter Differenzen in Richtung von \vec{g}_{\max} , deren Stützpunkte mit den typischen Gitterabständen x_T und y_T (s.o. 6.2) berechnet werden:

$$\begin{aligned} f''_i &= (\vec{g}_{\max} \cdot \nabla) \rho(x = x_i, y = y_i) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_T^2 + y_T^2}} \rho(x_{-1}, y_{-1}) + \rho(x_i, y_i) + \rho(x_{+1}, y_{+1}) \\ f''_{i+1} &= (\vec{g}_{\max} \cdot \nabla) \rho(x = x_i * (\vec{g}_{\max})_x * x_T, y = y_i * (\vec{g}_{\max})_y * y_T) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(x_T^2 + y_T^2)}} \rho(x_i, y_i) + \rho(x_{+1}, y_{+1}) + \rho(x_{+2}, y_{+2}) \end{aligned} \quad (61)$$

Die Koordinaten x und y und die Dichtewerte lassen sich mit Hilfe der zum CCU-Verfahren gehörenden Routinen einfach als die Orte

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(i) - (\vec{g}_{\max})_x * x_T \\ y(i) - (\vec{g}_{\max})_y * y_T \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{+1} \\ y_{+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(i) + (\vec{g}_{\max})_x * x_T \\ y(i) + (\vec{g}_{\max})_y * y_T \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{+2} \\ y_{+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(i) + 2 * (\vec{g}_{\max})_x * x_T \\ y(i) + 2 * (\vec{g}_{\max})_y * y_T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

schreiben, wobei $(x(i), y(i))$ die Koordinate des Gitterpunktes selbst ist. Ist nun

$$f''_i \geq 0 \quad \text{und} \quad f''_{i+1} < -0.01 \quad (63)$$

so kann eine Unstetigkeit in Richtung von \vec{g}_{\max} nahe dem Gitterpunkt liegen.

Nun lassen sich die physikalischen Werte vor und hinter diesem Punkt bestimmen, z.B. für den Druck p :

$$\begin{aligned} p_1 &= p(x(i) - (\vec{g}_{\max})_x * x_T * \text{weg}, y(i) - (\vec{g}_{\max})_y * y_T * \text{weg}) \\ p_2 &= p(x(i) + (\vec{g}_{\max})_x * x_T * \text{weg}, y(i) + (\vec{g}_{\max})_y * y_T * \text{weg}) \end{aligned} \quad (64)$$

Entsprechend für die Dichte ρ , die Entropie s , die Geschwindigkeitskomponenten u und v und die Energiedichte e . Der Parameter ‘weg’ ist vom Verfahren abhängig und soll ungefähr die halbe Anzahl der Schritte betragen, über die die Diskontinuitäten verschmiert sind. Ihr Wert ist aber nicht sehr kritisch.

Mit den Hilfsgrößen

$$p_{12} = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{und} \quad \rho_{12} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (65)$$

lassen sich mit zwei Formeln zwei Machzahlen für jeden zu untersuchenden Punkt berechnen:

$$M_a = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\rho_{12} p_{12} - 1}{\rho_{12} - 1}} \quad (66)$$

$$M_b = \sqrt{\frac{p_{12}(\gamma + 1) + \gamma - 1}{2\gamma}} \quad (67)$$

Für beide Formeln sind die in den Gleichungen (64) bestimmten Werte im Falle kleiner Machzahlen zu ungenau. Für Machzahlen von 1 bis 1.5 geben diese Formeln nur Schätzwerte an. Daher kann man nicht sehr scharf zwischen Kompressionswellen und Stoßwellen unterscheiden.

Eine Stoßwelle wird dann detektiert, wenn gilt

$$M_a > 1.0 \quad \text{und} \quad M_b > 1.05 \quad (68)$$

Der Ort der Stoßfront ist der Wendepunkt.

Eine Kontaktunstetigkeit liegt vor, wenn der Dichtesprung erheblich größer ist als der Drucksprung:

$$\frac{\rho_{12}}{p_{12}} > 1.3 \quad (69)$$

Für die Kompressionswelle wird gefordert, daß der Druck- und Dichtesprung in etwa gleich groß sind, kein Entropiesprung vorliegt und die Strömung entgegen der Richtung der größten Steigung der Dichte \vec{g}_{\max} fließt:

$$\left| \frac{\rho_{12}}{p_{12}} - 1 \right| < 0.2 \quad \text{und} \quad \left| \frac{s_2}{s_1} - 1 \right| < 0.2 \quad \text{sowie} \quad (70)$$

$$\text{SIGN}(u) = -\text{SIGN}(\vec{g}_{\max})_x, \quad \text{SIGN}(v) = -\text{SIGN}(\vec{g}_{\max})_y \quad (71)$$

Demgegenüber gilt für die Kontaktunstetigkeit, daß der Dichtesprung größer als der Drucksprung ist:

$$\left| \frac{\rho_{12}}{p_{12}} \right| < 1.2 \quad \text{und} \quad (72)$$

Für die Tangentiale Unstetigkeit der Gasgeschwindigkeit liegt ein Sprung in dem Betrag der Geschwindigkeiten vor, aber kein Drucksprung:

$$\left| \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} - 1 \right| < 0.2 \quad \text{und} \quad \left| \frac{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} - 1 \right| < 0.2 \quad (73)$$

Bereits M. Klingspohn (1994) hat darauf hingewiesen, daß sich die Parallelität der Strömung längs der tangentialen Unstetigkeit auf einem diskreten Gitter nicht nachweisen läßt. In der Praxis hat sich der in Gleichung (73) verwendete Ansatz bewährt, nämlich nur den Betrag der Strömungsgeschwindigkeit zu Grunde zu legen.

11 Berechnung der instationäre Umströmung von Objekten

Experimente zur Untersuchung der Überschallumströmung von Objekten haben verschiedene Schwierigkeiten zu bewältigen: Eine Überschallströmung kann nur für eine begrenzte Zeit aufrechterhalten werden; zudem ist die erzeugte Strömung oft nicht homogen. Es können auch kleine Abweichungen in den experimentellen Bedingungen bestehen, die durch starke Nichtlinearitäten der physikalischen Vorgänge zu veränderten Ergebnissen führen (vgl. [Brück, Hannemann (vorauss. 1998)]). Die jeweiligen experimentellen Ergebnisse gelten daher im Prinzip nur für den jeweiligen experimentellen Aufbau. Daher ist es kaum möglich, nur mit Hilfe von Experimenten bestimmte Strömungsmuster z.B. die Machkonfiguration auf ihre Stabilität gegenüber Störungen hin zu testen. Die instationäre Berechnung der Strömung kann hier die Interpretation des Experiments erheblich verbessern. Allerdings müssen Daten für den Vergleich zwischen Experiment und numerisches Modell, aber auch für die Initialisierung des Modells, beschafft werden. Dies ist insbesondere für die Überschallströmung wegen der sich schnell ändernden physikalischen Situation in der Strömung äußerst schwierig. Jedoch hat die Meßtechnik in letzter Zeit große Fortschritte erzielt: Es gelingt mittlerweile, tomographische Aufnahmen von der Dichte- oder Druckverteilung einer Strömung zu machen (s. [Morton et al (vorauss. 1998)]) Diese Technik vereinfacht den Vergleich zwischen dem Experiment und der numerischen Modellierung erheblich.

11.1 Modell der Kanaldurchströmung

Als erste Untersuchung modelliere ich die zweidimensionale Strömung durch einen von zwei Barrieren verengten Kanal: Eine Stoßwelle mit der Machzahl $M_s = 1.5$ mit konstanten Hinterland läuft von rechts nach links durch diesen Kanal. Die konstante Einströmung in das Rechengebiet wird dadurch erreicht, daß die Randbedingungen am rechten Rand die physikalischen Größen konstant auf dem Anfangswert halten. Am linken Rand werden stets die Vorlandwerte der Stoßwelle gesetzt. Die Strömung wird ‘geschluckt’. An dem oberen und unteren Rand werden die Werte für die Gitterpunkte (vgl. Gl. 53) extrapoliert; diese beiden Ränder sind also offen.

Der Kanal ist in ein größeres Rechengebiet (vgl. Abb. 43) eingesetzt. Die Wände des Kanals sind als unendlich dünn⁴ angenommen; sie behindern nicht das parallel zur x-Achse strömenden Gas. Damit besteht zwischen dem Einlaß des Kanals und den rechten Randbedingungen ein “Überlastventil”. Dieses Überlastventil verhindert, daß der Rückstau der

⁴Die Kanalwände sind eine Gitterschrittweite breit. Die Normalenvektoren sind am Eingang und am Ausgang des Kanals nur in positiver y-Richtung bzw. negativer y-Richtung gewählt, nicht jedoch in x-Richtung. Ein nur in x-Richtung strömendes Gas wird nicht durch die Kanalwände gestört.

Strömung im Kanal zu den rechten Randbedingungen vordringt. In Voruntersuchungen mit einem erweiterten UNO-Verfahren hat sich gezeigt, daß ein solcher Rückstau erhebliche Stabilitätsprobleme am Rand des Rechengebietes verursacht und zudem zu unphysikalischen Ergebnissen führt. Daher muß die Menge des einströmenden Gases in Abhängigkeit zur Position des Rückstaus geregelt werden. Ob sich dann eine stationäre Strömung einstellen läßt, ist sehr fraglich. Das Umgehen des Problems der Wechselwirkung von Rückstau und Randbedingungen durch ein Überlastventil bietet auch den Vorteil, daß es verfahrensunabhängig ist.

11.2 Ergebnisse der Kanaldurchströmung

Die Ergebnisse werden für 6 Zeitpunkte $t = (0.15, 0.175, 0.2, 0.225, 0.275 \text{ und } 0.325)$ in den Abb. 44 bis 49 dargestellt. Ein Konturbild zeigt die Dichtewerte ρ in der Strömung, ein Geschwindigkeitsfeld die Werte für u und v und die Schattierung der Geschwindigkeitsvektoren die Energiedichte ϵ an⁵. Ein Diagramm zeigt die Position der Stoßfront, wie sie aus der Mustererkennung bestimmt wird.

In Abb. 44 (Zeit $t = 0.15$) passiert die Stoßwelle gerade die beiden symmetrisch zur Kanalmitte angeordneten Barrieren. Die Strömungsgeschwindigkeit des einkommenden Gases beträgt in der Kanalmitte 0.82. Auf der angeströmten Seite der Barrieren ist ein starker Dichteanstieg zu erkennen; die Dichte erreicht Werte bis zu 2.35. Die Strömung wird an den Barrieren abgestoppt. Infolge dessen steigt die Energiedichte vor den Barrieren auf 8.45 an. Deutlich ist links die ursprüngliche Stoßfront der Strömung zu erkennen, die die Kanalverengung passiert hat. Die an der vorderen Flanke der Dichteerhebung vor den Barrieren entstandene Stoßfront wandert entgegen der Strömung nach rechts. An den Ecken der Barrieren sind Ansätze von Machschen Linien zu erkennen. Die Machzahlen der im Rückstau erzeugten Stoßwelle bzw. in den Machschen Linien sind nahe 1.

Der Einfluß der Barrieren auf die Strömung hat sich in der Abb. 45 (Zeit $t = 0.175$) verstärkt. Zwischen den Barrieren beschleunigt das Gas auf Geschwindigkeiten von über 1.0. Entsprechend nimmt dort die Energiedichte ab auf Werte um 6.85, im Gebiet links von den Barrieren fällt die Energiedichte in der Strömung auf Werte unter 6.0. Die Dichteerhebung rechts von den Barrieren ist im Begriff, sich über die ganze Kanalbreite auszudehnen; die an der Vorderseite liegende Stoßfront ist zu einer Linie zusammengewachsen.

Die Abb. 46 (Zeit $t=0.2$) und 47 (Zeit $t=0.225$) zeigen die Weiterentwicklung der Strömung. Durch die spezielle Form der Stoßfront an der vorderen Flanke der Dichteerhebung entsteht ein Massenfluß in die Kanalmitte (der Ort liegt bei $x=0.44$). Infolgedessen entsteht in der Mitte

⁵Die Größen sind jeweils in der Normierung der primitiven Variablen des CCU-Verfahrens angegeben. Die Energiedichte ϵ entspricht nicht der totalen Energiedichte, es gilt die Beziehung $e = \epsilon + 1/2 * (u^2 + v^2) * \rho$.

ein Dichtemaximum mit Werten um 2.5, die Energiedichte erreicht dort Werte um 9.6. Wegen dieser hohen Werte beschleunigt das Gas beim Expandieren links von der Barriere auf Geschwindigkeiten bis zu 1.2! Die vordere Stoßfront befindet sich bei $x=0.48$.

In der folgenden Entwicklung ändern sich die Strömungszustände langsamer, so daß ich für die nächsten beiden Abbildungen größere Abstände gewählt habe. In Abb. 48 (Zeit $t=0.275$) beginnt sich die Strömung zu stabilisieren. Die linke Stoßfront verläßt gerade den Kanal. Das Dichtemaximum in der Kanalmitte befindet sich nun bei $x=0.455$ und hat eine maximale Dichte von 2.6, eine Energiedichte von 9.5, die Strömungsgeschwindigkeit beträgt 0.4. Die vordere Stoßfront befindet sich bei $x=0.49$.

Die Strömung in Abb. 49 hat nahezu den stationären Zustand erreicht. Die vordere Stoßfront hat die Position $x=0.5$ erreicht. In der weiteren Modellrechnung verändert sich ihre Position nicht mehr. Das Dichtemaximum in der Kanalmitte befindet sich nun bei $x=0.46$ und hat eine maximale Dichte von 2.62, eine Energiedichte von 9.8, die Strömungsgeschwindigkeit beträgt weiterhin 0.4.

Die Ergebnisse in den Abb. 44 bis 49 sind nicht spiegelsymmetrisch zur Linie $y = 0$. Die Ursache für diese Assymetrie liegt in den nichtlinearen Verfahrensschaltern zur Auswahl der Interpolationsstützpunkte begründet, die sich wegen des unterschiedlichen Vorzeichens der Normalenvektoren an der oberen und unteren Kanalwand und der hohen Dichte und Energiedichte bei geringer Strömungsgeschwindigkeit besonders stark auswirkt⁶. Bei höheren Auflösung vermindern sich die Abweichungen.

11.3 Schlußbemerkung

Vor allen Dingen die letzten beiden dargestellten Zeitpunkte zeigen, wie stark sich die physikalischen Werte in der Berechnung nahe der Stationarität der Strömung verändern können, obwohl sich die Stoßfrontposition nur unwesentlich ändert. Es zeigt sich, daß sich die Strömung kurz vor und in der Stationarität kaum aufgrund ihrer Stoßfrontposition unterscheiden läßt. Trotzdem zeigen die Dichte und Energiedichte, sowie das Geschwindigkeitsfeld größere Unterschiede.

Damit wird deutlich, wie schwierig es für einen Experimentator ist, die Stationarität der Strömung zu prüfen. Dies ist aber unbedingt notwendig, denn die Werte aus physikalischen Messungen bei der nahezu stationären Strömung unterscheiden sich eindeutig von den stationären. Dies kann in den Experimenten zu Fehlinterpretationen über die Stabilität der stationären Strömung führen.

⁶Zur Rechenzeiteinsparung wäre es auch möglich, nur eine Hälfte des symmetrischen Kanal zu berechnen und die Ergebnisse anschließend zu spiegeln.

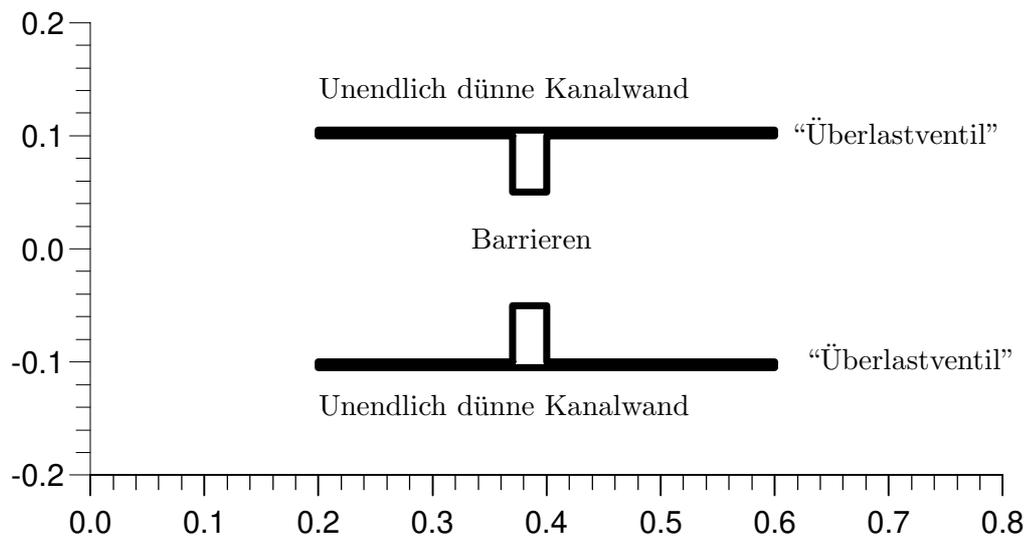


Abbildung 43: Rechengebiet der Kanaldurchströmung. Der eigentliche Kanal ist in ein größeres Rechengebiet eingesetzt. Die Gebiete um den Kanal verhindern Wechselwirkungen der Kanalströmung mit den Rändern. Die Schrittweite des Gitters beträgt 0.005. Der Kanal hat eine Länge von 0.4 und eine Breite von 0.2 Die Objekte haben eine Länge von 0.035 und eine Höhe von 0.05.

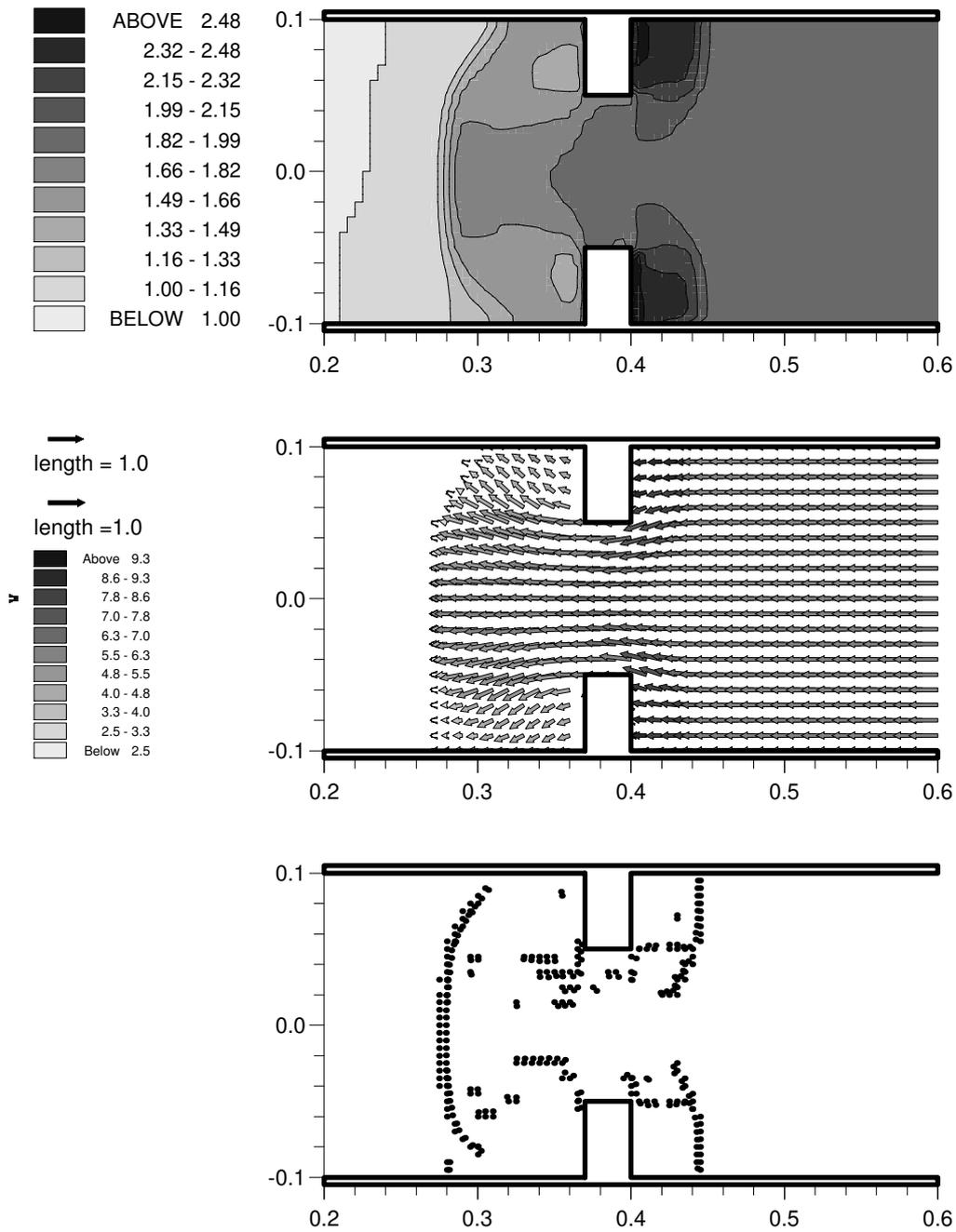


Abbildung 44: Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.15$.

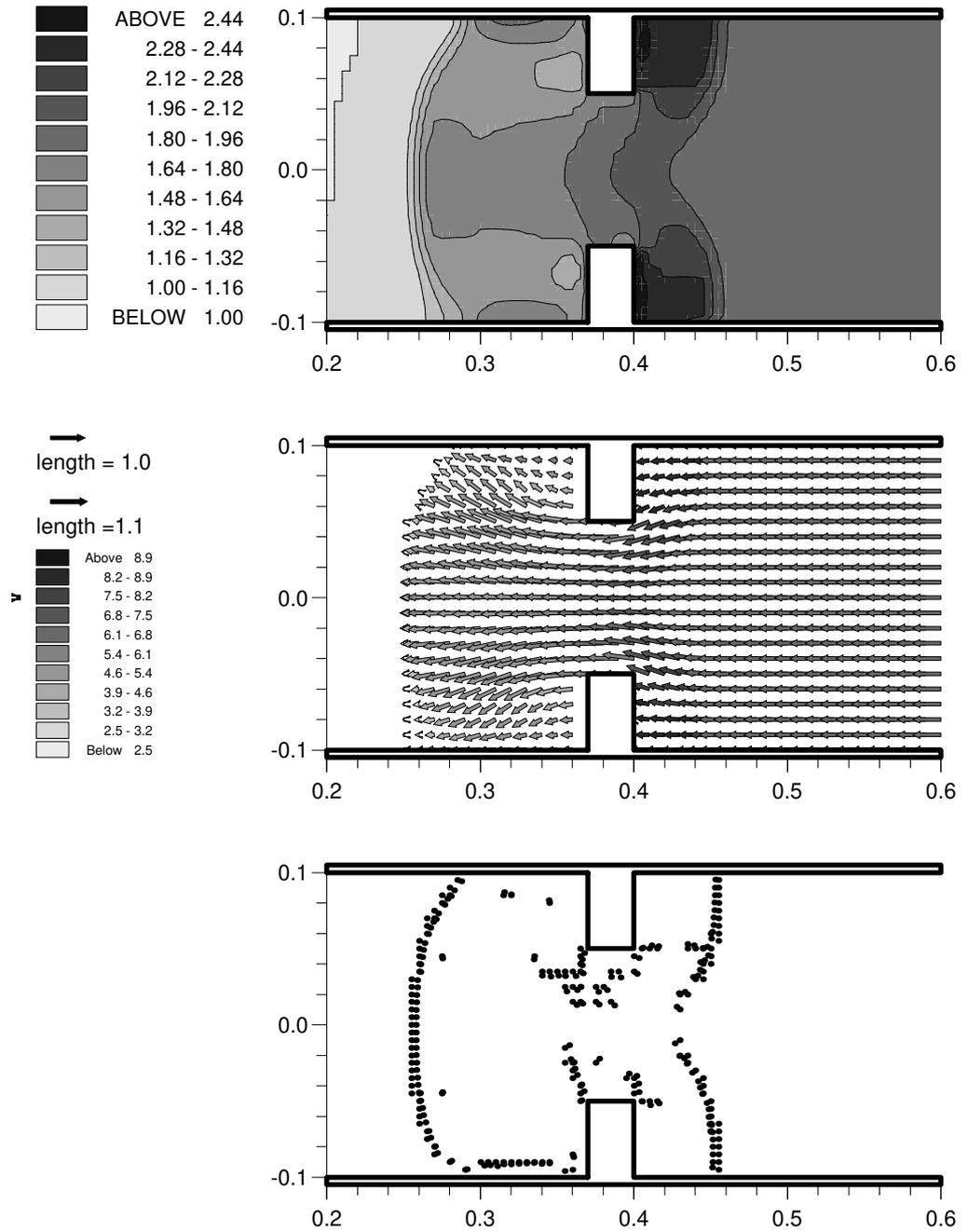


Abbildung 45: Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.175$.

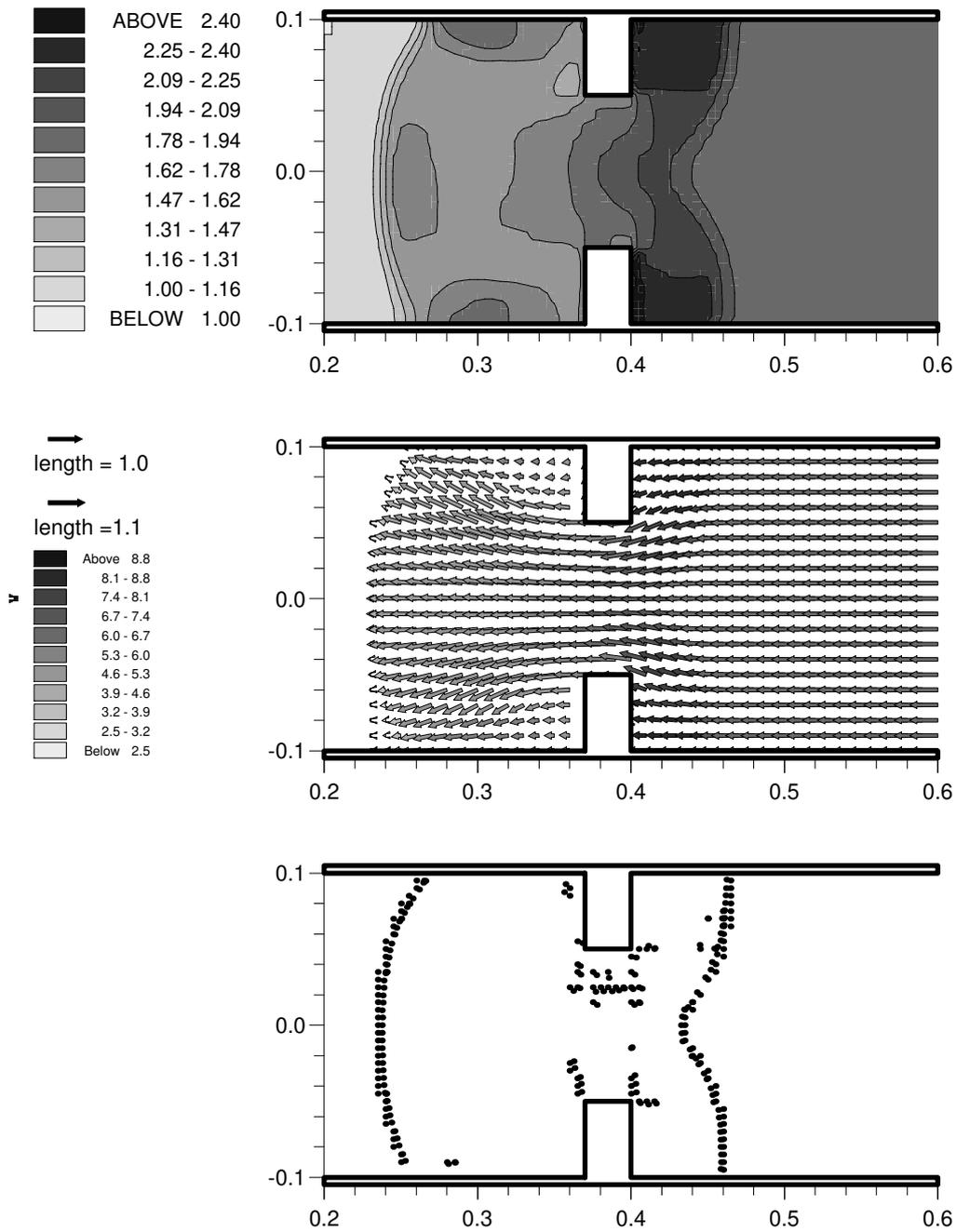


Abbildung 46: Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.2$

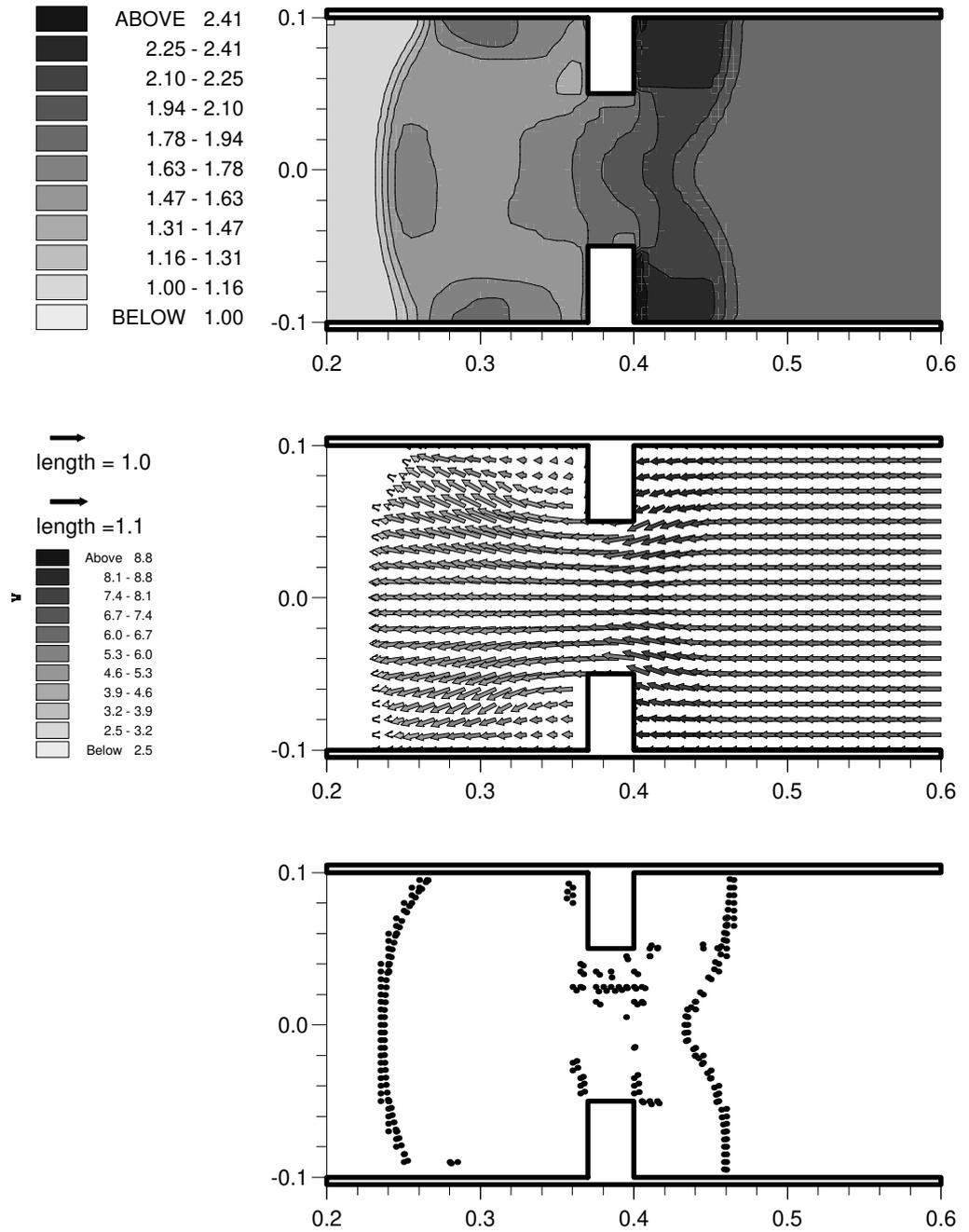


Abbildung 47: Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.225$.

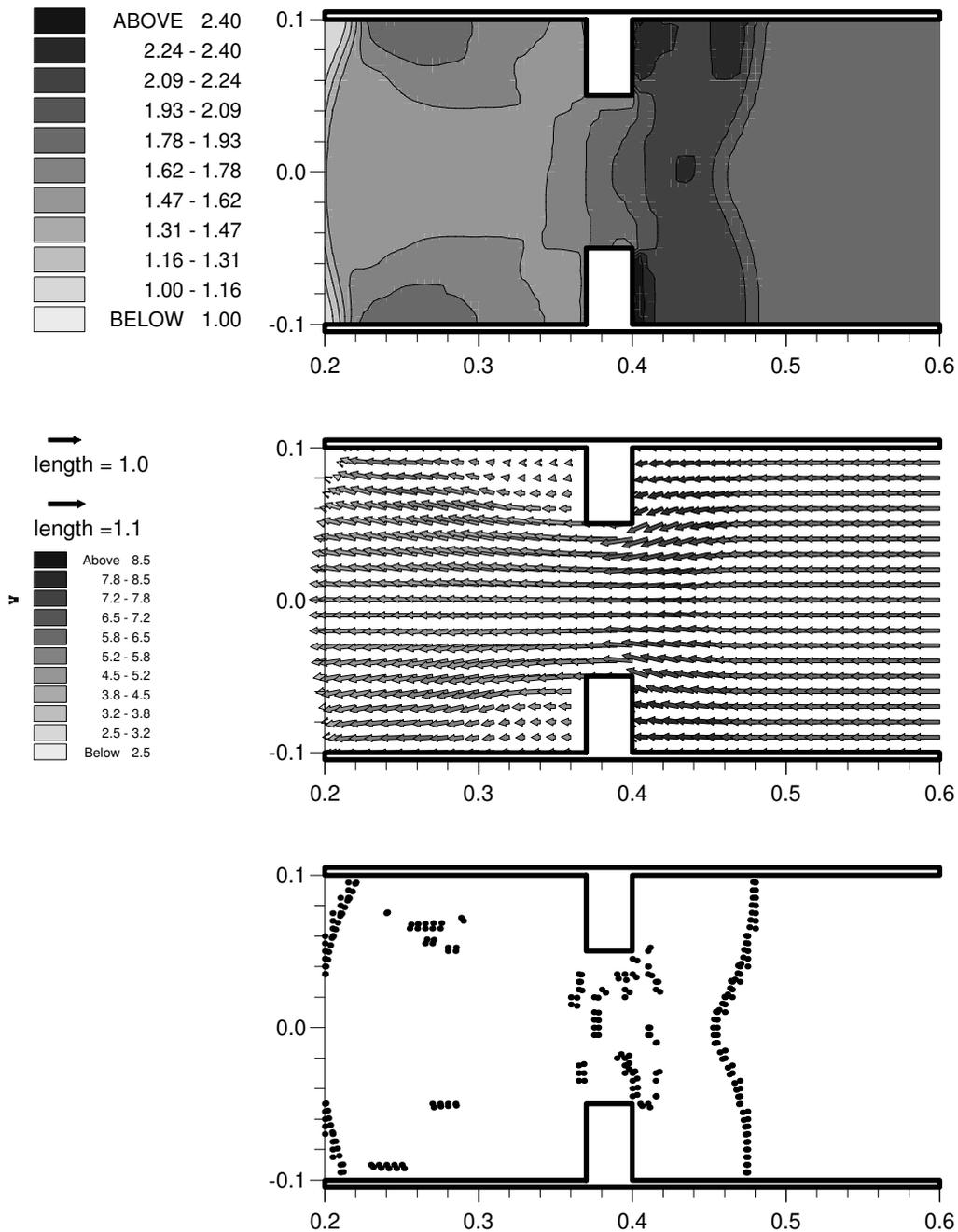


Abbildung 48: Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.275$.

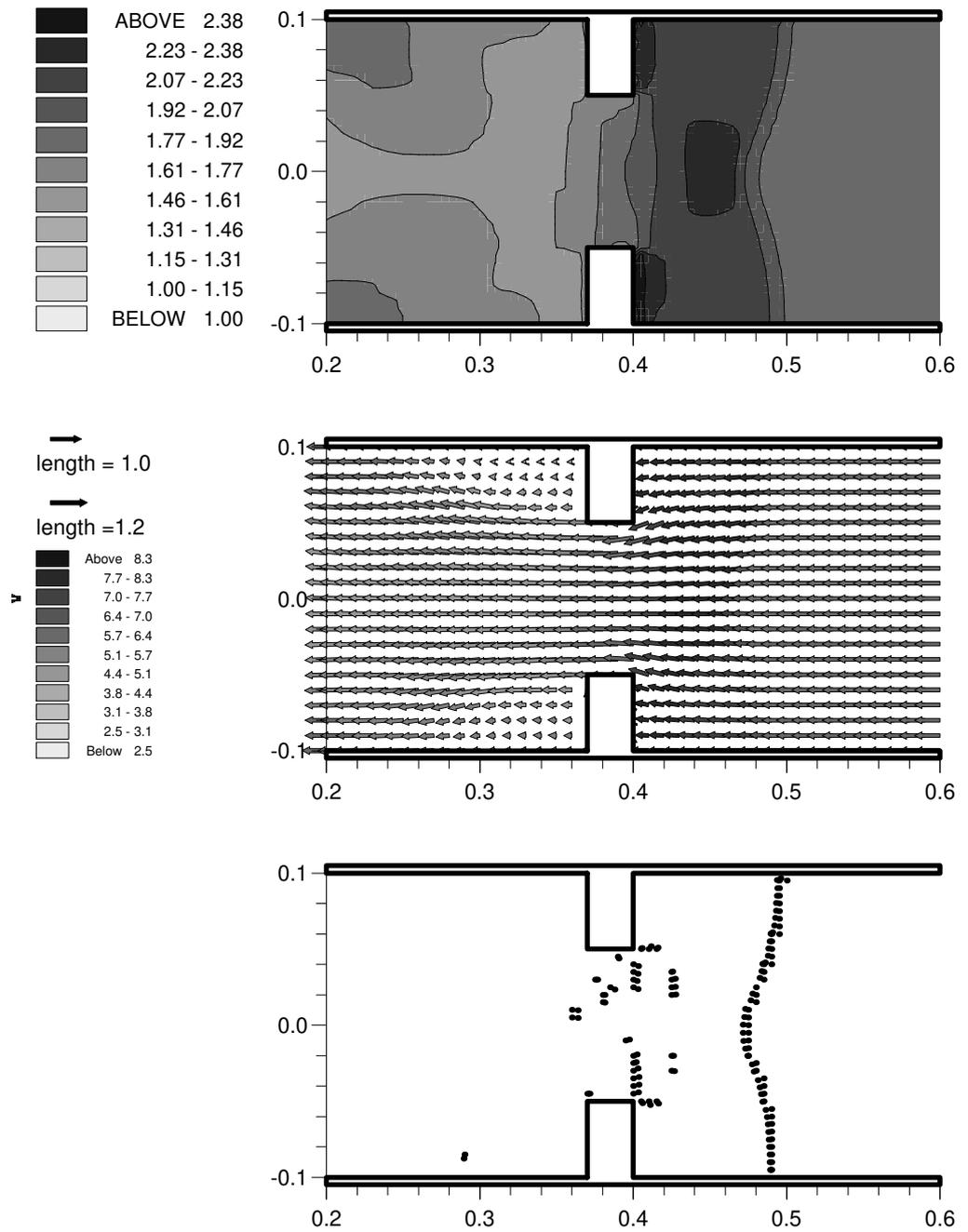


Abbildung 49: Kanaldurchströmung zur Zeit $t = 0.325$.

12 Zusammenfassung

Das Ziel meiner Arbeit ist die Modellierung von Überschallströmungen für komplexe Experimente mit eingesetzten, umströmten Objekten. Eine solche Modellierung erfordert auf jeden Fall die Anpassung der Geometrie des Rechnernetzes: Neben der Aufgabe, in Bereichen mit großen Gradienten in den strömungsphysikalischen Werten die Geometrie des Rechnernetzes zu optimieren, muß für das Einsetzen von beliebig geformten Objekten unbedingt ein unstrukturiertes Netz verwendet werden.

Die von mir untersuchten Finite Elemente- und Finite Volumen-Verfahren sind nicht zur Berechnung von Überschallströmungen auf unstrukturierten Gittern geeignet: Das von volumenorientierten Verfahren verwendete Ko- bzw. Kontrollvolumen zu einem Gitterpunkt berücksichtigt nicht das physikalische Einflußgebiet des Gitterpunktes, das durch die Charakteristiken begrenzt wird.

Die vorliegenden TVD-Verfahren, wie das UNO-Verfahren, sind mit ihrer effektiven Beschränkung auf homentropen Strömungen und ihrer Eindimensionalität für die Berechnung von Umströmungen schlecht geeignet.

Meine grundlegende Untersuchung des UNO-Verfahrens, insbesondere der nicht oszillierenden UNO-Interpolation gibt die Basis des neukonstruierten Verfahrens. Die nichtoszillierende UNO-Interpolation führe ich auf einfache Grundprinzipien zurück und erweitere die Interpolation anschließend mit Hilfe von Elementen der Splinetheorie auf unstrukturierte zweidimensionale Netze. Diesen Netzen liegt eine Thiessen- bzw. Delaunay-Triangulation zu Grunde.

Die Flüsse für die Erhaltungssatzform werden nicht wie bei den TVD-Verfahren durch die Verwendung der Riemannvariablen bestimmt, sondern durch ein Bicharakteristikenverfahren, so daß die Voraussetzung schlechthin konstanter Entropie entfällt.

Somit wird auch die Isentropie einer Strömung berücksichtigt. Weil das Verfahren aber weiterhin ein konservatives Verfahren ist, lassen sich weitere Größen wie Viskosität, Relaxationsterme und andere physikalische Größen wie z.B. die Schwerkraft durch ein Operatorsplitting wie bei den TVD-Verfahren berücksichtigen.

Allen Differenzenverfahren ist eigen, daß sie die Stoßfront verschmieren. Dieses Verschmieren fällt bei dem UNO-Verfahren etwas geringer aus als bei dem von mir entwickelten Verfahren. Dies ist darin begründet, daß das UNO-Verfahren die Roe-Linearisierung anwendet, was jedoch für die Berechnung von Expansionsbereichen nachteilig ist.

Durch einen weiteren Ausbau des Verfahrens ließe sich der numerische Stoßbereich noch verkleinern: Das Charakteristikenverfahren kann in zweiter Ordnung ausgeführt werden, die Integration der Flüsse der Erhaltungssatzform kann variiert werden.

Von besonderer Bedeutung bei Modellrechnungen ist die Entwicklung von geeigneten Randbedingungen für feste Oberflächen in der Strömung. Die konkreten nachvollziehbaren Vorschläge in der Literatur sind sehr begrenzt und führen nicht zu befriedigenden Ergebnissen. Die hier auf der Basis statistischer Beschreibung der Bewegung eines Fluidteilchens gegründeten Randbedingungen zeigen ein physikalisches Verhalten. Ihr Algorithmus läßt sich homogen in das Verfahren einbauen und arbeitet stabil.

Exemplarisch habe ich für die Modellierung der Überschallströmung um Objekte und für die Anwendung des Mustererkennungsverfahrens eine instationäre Kanaldurchströmung vorgestellt. Mit diesem Modell zeige ich mit Hilfe von Dichtekonturen, Geschwindigkeitsfeldern und den Ergebnissen der Stoßfrontdetektion die Entwicklung der zunächst instationären Strömung zu ihrem stationären Zustand hin. Es zeigt sich, daß sich die Strömung kurz vor und in der Stationarität kaum aufgrund ihrer Stoßfrontposition unterscheiden läßt. Trotzdem zeigen Dichte und Energiedichte sowie das Geschwindigkeitsfeld größere Unterschiede. Diese Differenzen können zu Fehlinterpretationen bezgl. der Stabilität einer stationären Strömung eines Experimentes führen und zeigt auf, wie wichtig die instationäre Modellierung von stationären Experimenten ist.

A Fehler der numerischen Approximation in der Galerkin-Methode

Sei eine Funktion

$$u(x) \in H^m(\Omega)$$

ein Element des Hilbertraumes und eine numerische Approximation⁷

$$\tilde{u}(x) = c^j \phi_j(x)$$

gegeben, wobei die Koeffizienten c^j die Werte der lokalen Ableitungen von

$$u(x) \quad \text{nach} \quad \phi_j(x) \quad \text{sind.}$$

Die $\phi_j(x)$ bilden einen Unterraum $S_h(\Omega) \in H^m(\Omega)$.

Mit dem inneren Produkt des Unterraumes

$$(\phi_i, \phi_j) = g_{ij} \quad \text{lassen sich mit} \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$$

die dualen Basisfunktionen

$$\phi^i = g^{ij} \phi_j \quad \text{definieren, für die gelten} \quad (\phi^i, \phi_j) = \delta_j^i$$

und die Koeffizienten c^j sich gemäß

$$(\tilde{u}, \phi^i) = c^j (\phi_j, \phi^i) = c^j \delta_j^i = c^i$$

bestimmen lassen.

Im dreidimensionalen euklidischen Raum sind z.B.

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die ϕ_j die Spaltenvektoren und die ϕ^j die entsprechenden Zeilenvektoren. Im euklidischen Fall gilt

$$g_{ij} = (g_{ij})^{-1} = g^{ji} = \mathbf{E}.$$

Als nächstes definieren wir den Projektor $\Pi = \Pi_p \Pi_r$, wobei Π_r als Elemente die Koeffizienten enthält:

$$\Pi_r u = [(u, \phi^1), (u, \phi^2), \dots] = (u^1, u^2, \dots) \quad \text{mit} \quad u^i = (u, \phi^i)$$

und Π_p :

$$\Pi_p(u^1, u^2, \dots) = u^i \phi_i$$

der Projektor auf eine Basisfunktion des Unterraumes $S_h(\Omega)$ ist.

⁷Es gilt hier die Einsteinsche Summenkonvention.

Betrachten wir nun den Abstand zwischen der Funktion u und ihrer numerischen Approximation:

$$\|u - \tilde{u}\|_{H^s}^2 = \|u\|_{H^s}^2 - 2c^i(u, \phi_i) + c^i c^j(\phi_i, \phi_j)$$

deren lokales Minimum sich zu

$$\frac{\partial}{\partial c^i} (\|u - \tilde{u}\|^2) = 0 = (u, \phi_i) - c^j g_{ij}$$

ergibt, wobei für die

$$c^j = g^{ij}(u, \phi_i) = (u, g^{ij}\phi_i) = (u, \phi^j) = u^j$$

gilt. Wegen $u^i \phi_i = \Pi u$ kann man sagen, daß der minimale Fehler

$$\inf_{\tilde{u} \in S_h} \|u - \tilde{u}\|_{H^s} = \|u - \Pi u\|_{H^s}$$

ist.

Für den Fehler der numerischen Approximation $E = u - \Pi u$ gilt nun:

$$(E, \tilde{u}) = (u - u^i \phi_i, c^j \phi_j) = c^j [(u, \phi_j) - u^i g_{ij}]$$

$$= c^j [(u, g_{jk} \phi^k) - u^i g_{ij}] = c^j g_{ik} [u^k - u^i] = 0$$

Der Fehler steht also senkrecht auf dem Raum der Interpolationsfunktionen.

B Schwerpunktkoordinaten

Routine zur Bestimmung der baryzentrischen Koordinaten und ihre Anwendung bei der Interpolation. Hierbei sind die $U(I)$ die Werte in den Stützstellen und $ZX(I)$ ihre berechneten Ableitungen, (XK, YK) der Ort des gesuchten interpolierenden Wertes im Triangel $(I1, I2, I3)$.

```

SUBROUTINE COORDS (X, Y, X1, X2, X3, Y1, Y2, Y3, R, IER)
INTEGER :: IER
DOUBLE PRECISION :: X, Y, X1, X2, X3, Y1, Y2, Y3, R (3)
!
!*****
!
!                                ROBERT RENKA
!                                OAK RIDGE NATL. LAB.
!                                (615) 576-5139
! CONVERTED TO FORTRAN90 AND MODIFIED BY HARALD WALLUS (1997)
!
! THIS ROUTINE COMPUTES THE THREE BARYCENTRIC COORDINATES
! OF A POINT IN THE PLANE FOR A GIVEN TRIANGLE.
!
! INPUT PARAMETERS - X,Y - X AND Y COORDINATES OF THE POINT
!                   WHOSE BARYCENTRIC COORDINATES ARE
!                   DESIRED.
!
!                   X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3 - COORDINATES OF THE VERTICES OF
!                   THE TRIANGLE.
!
! INPUT PARAMETERS ARE NOT ALTERED BY THIS ROUTINE.
!
! OUTPUT PARAMETERS - R - 3-VECTOR OF BARYCENTRIC COORDI-
!                   NATES UNLESS IER = 1. NOTE THAT
!                   R(I) .LT. 0. IFF (X,Y) IS TO THE
!                   RIGHT OF THE VECTOR FROM VERTEX
!                   I+1 TO VERTEX I+2 (CYCLICAL
!                   ARITHMETIC).
!
!                   IER - ERROR INDICATOR
!                   IER = 0 IF NO ERRORS WERE
!                   ENCOUNTERED.
!                   IER = 1 IF THE VERTICES OF THE
!                   TRIANGLE ARE COLLINEAR.
!
! MODULES REFERENCED BY COORDS - NONE
!
!*****
DOUBLE PRECISION :: U (3), V (3), AREA, XP, YP
!
! LOCAL PARAMETERS -
!
! U(K),V(K) = X AND Y COMPONENTS OF THE VECTOR REPRESENTING
!           THE SIDE OPPOSITE VERTEX K FOR K = 1,2,3.
! AREA = TWICE THE AREA OF THE TRIANGLE.
! XP,YP = X-X1, Y-Y1
!
U (1) = X3 - X2
U (2) = X1 - X3
U (3) = X2 - X1
!
V (1) = Y3 - Y2
V (2) = Y1 - Y3
V (3) = Y2 - Y1
!
! AREA = 3-1 X 3-2
!
AREA = U (1) * V (2) - U (2) * V (1)
IF (AREA.EQ.0.) GOTO 1
!
! R(1) = (2-3 X 2-(X,Y))/AREA, R(2) = (1-(X,Y) X 1-3)/AREA,
!   R(3) = (1-2 X 1-(X,Y))/AREA
!
R (1) = (U (1) * (Y - Y2) - V (1) * (X - X2) ) / AREA
XP = X - X1
YP = Y - Y1
R (2) = (U (2) * YP - V (2) * XP) / AREA
R (3) = (U (3) * YP - V (3) * XP) / AREA
IER = 0
RETURN
!
! VERTICES ARE COLLINEAR
!
1 IER = 1
RETURN
END SUBROUTINE COORDS

```

Der zu interpolierende Wert wird dann durch die Zeile

$$Z(XK, YK) = R(1) * U(I1) + R(2) * U(I2) + R(3) * U(I3)$$

bzw ihre Ableitung

$$dxZ(XK, YK) = R(1) * ZX(I1) + R(2) * ZX(I2) + R(3) * ZX(I3)$$

bestimmt.

Literatur

- [Abarbanel, Goldberg (1972)] S. Abarbanel, M. Goldberg, Numerical solution of quasi-conservative hyperbolic systems — the cylindrical shock problem, *J. Comput. Phys.* 10:1-21 (1972)
- [Abramowitz, Stegun (1964)] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions, National Bureau of Standards, Applied Math. Series No. 55 (1964)
- [Becker (1966)] E. Becker, Gasdynamik, Unveränderter Nachdruck der 1., 1966 erschienenen Auflage, Stuttgart (1966)
- [Ben Dor (1992)] G. Ben Dor, Shock Wave Reflection Phenomena, Springer Verlag, (1992)
- [Bronstein (1985)] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew (1985), Taschenbuch der Mathematik, 22. Auflage, Thun und Frankfurt/Main
- [Brück, Hannemann (vorauss. 1998)] S. Brück, K. Hannemann, The effect of free-stream disturbance on shock-boundary-layer interaction, Proceedings of the 21st Int. Symp. Shock Waves, noch nicht erschienen.
- [Chorin, Majda (1987)] A.J. Chorin, A.J. Majda, Wave Motion: Theory, Modelling, and Computation, Springer-Verlag (1987)
- [Chung (1978)] T. J. Chung, Finite Element analysis in Fluid dynamics, McGraw-Hill, N.Y. (1978)
- [Courant, Hilbert (1962)] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol. II, Interscience Publishers New York (1962)
- [Daru et al (vorauss. 1998)] V. Daru, G. Fernandez, C. Tenaud, On CFD to investigate bifurcated shock wave pattern, Proceedings of the 21st Int. Symp. Shock Waves, noch nicht erschienen.
- [Demmig (1973)] F. Demmig, Die Anwendung eines expliziten Charakteristikenverfahrens zweiter Ordnung auf Probleme der Gas- und Plasmadynamik, BMFT-FB-K73-24 (1973)
- [Demmig et al (1995)] F. Demmig, H. Grönig, H. Kleine, H. Wallus, Experiments and model computation of cylindrical shock waves with time-resolved deformation and fragmentation, Proc 20th Int. Symp. Shock Tubes and Waves, Marseille, (1995)

- [Demmig (1997)] F. Demmig, persönliche Mitteilung
- [Demmig, Hehmsoth (1991)] F. Demmig, H.-H. Hehmsoth, Application of ENO-schemes to converging cylindrical shock waves including non-equilibrium effects, In Proc. 18. Int. Symp. Shock Waves, Jul 21-26, Sendai, Japan (1991)
- [Demmig, Petersen (1991)] F. Demmig, J. Petersen, Two Dimensional model Computations of converging shock wave propagation, fragmentation and reflection accounting for nonequilibrium processes, In Proc Int. Workshop on Strong Shock Waves, Chiba, Japan (1991)
- [v. Endt (1995)] A. v. Endt, Ein Differenzenverfahren mit Stoßfronteinpassung und dessen Anwendung zur numerischen Berechnung konvergenter Stoßwellen in Molekülgasen, Diplomarbeit, Hannover (1995)
- [Frahner (1997)] H. Frahnert, Die Untersuchung und Erweiterung der Finite Elemente Methode und ihre Anwendung zur Modellierung zweidimensionaler Stoßwellen, Diplomarbeit, Hannover (1997)
- [Guderley (1942)] G. Guderley, Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse, Luftfahrtforschung, 19 (1942), pp. 302–312
- [Hartree (1953)] D. R. Hartree, "Some practical methods of using characteristics in the calculation of non-steady compressible flows", US Atomic Energy Comm. Report AECU-2713 (1953)
- [Harten (1987)] A. Harten, On the nonlinearity of modern shock-capturing schemes, in Wave motion: Theory, Modelling, and Computation, ed. Chorin A J (1987)
- [Harten, Osher (1987)] A. Harten, S. Osher (1987) Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. SIAM J. Numer. Anal., 24(2), p. 279-309
- [Hehmsoth (1993)] persönliche Mitteilung
- [Hehmsoth (1991)] H.-H. Hehmsoth, Zweidimensionale Modellierung und Berechnung konvergenter Stoßwellen unter Einschluß von Nichtgleichgewichtseffekten, Dissertation, Hannover, (1991)
- [Hirsch (1990)] Ch. Hirsch, Numerical computations of internal and external flows, Wiley series in numerical methods in engineering,

- Vol. 1 John Wiley and Sons, Inc., Chichester (1990)
- [Hirsch (1990)] Ch. Hirsch, Numerical computations of internal and external flows, Wiley series in numerical methods in engineering, Vol. 2 John Wiley and Sons, Inc., Chichester (1990)
- [Hirsch, Warzee (1978)] Ch. Hirsch, G. Warzee (1978) An orthogonal finite element method for transonic flow calculations, Proc. 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Volume 90, Springer Verlag, N.Y.
- [Jameson, Baker (1983)] A. Jameson, T. J. Baker, Solution of the Euler Equation for complex configurations, AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting, AIAA-84-0093 (1984)
- [Jänich (1983)] K. Jänich, Analysis für Physiker und Ingenieure, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1983)
- [Kiene (1991)] H. J. Kiene, Numerische Simulation der Stoßfrontunterdrückung in MHD-Profilumströmungen, Diplomarbeit, Institut für Plasmaphysik, Hannover (1991)
- [Kleine (1986)] H. Kleine, Kurzzeitphotographie der Fokussierung zylindrischer Stoßwellen, Diplomarbeit, Stoßwellenlabor RWTH Aachen (1986)
- [Klingspohn (1994)] M. Klingspohn, Diploma Thesis, Universität Hannover (1994)
- [Kruber (1991)] S. Kruber, Modellierung und Berechnung der Vibration in zweidimensionalen Zylinderstoßwellen, Diplomarbeit, Hannover (1991)
- [Lax, Wendroff (1960)] P. D. Lax, B. Wendroff, Systems of conservation laws, Comm. Pure and Applied Mathematics, 13, (1960), pp. 217–37
- [Hong Luo et al (1995)] H Luo, J D Baum, R Löhner, A Comparison Study of Two Finite-Element Schemes for Computation of Shock Waves, Proc 20th Int. Symp. Shock Tubes and Waves, Marseille, (1995), pp. 401–406
- [Löhner et al (1984)] Löhner, R, Morgan, K, Zienkiewicz, C The solution of non-linear hyperbolic equation systems by finite element method,

- International journal for numerical methods in fluids, Vol. 4, (1984), pp. 1043–1063
- [Manson, Wallis (1996)] J.R. Manson, S.G. Wallis, Accuracy Characteristics of Traditional Finite Volume Discretizations for Unsteady Computational Fluid Dynamics, A Note in: J. Comp. Phys. 132, (1997), pp. 149–153
- [Mehta et al (1991)] R. C. Mehta, T. Jayachandran, V. M. Sastri, Numerical Solution of the Navier-Stokes equations using Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. in Fluids, Vol. 13, (1991), pp. 481–489
- [Meier (1993)] U. Meier, Die Lösung instationärer Stoßwellenprobleme mit zweidimensionalen Charakteristikenverfahren, Diplomarbeit, Hannover (1993)
- [J. Meier (1994)] J. Meier, Konvergente Stoßwellen im Bereich der Fragmentation und Reflexion, Diplomarbeit, Hannover (1994)
- [Meier (1997)] U. Meier, Ein Bicharakteristikenverfahren zur numerischen Behandlung hyperbolischer Probleme der Plasmaphysik, Dissertation, Hannover (1997)
- [Meier, Demmig (1997)] U. Meier, F. Demmig, A Bicharacteristic Scheme for the Numerical Computation of Two-Dimensional Converging Shock Waves, Proceedings of the JSME Centennial Congress, Tokio, Japan (1997)
- [Meinke (1993)] M. Meinke, Numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen für instationäre Strömungen mit Hilfe der Mehrgittermethode, Dissertation, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen (1993)
- [Morton et al (vorauss. 1998)] J. W. Morton, A. F. P. Houwing, R. R. Boyce, D. J. Bone, Tomographic reconstruction of jet and shock layer flows, Proceedings of the 21st Int. Symp. Shock Waves, noch nicht erschienen.
- [Ostkamp (1995)] S. Ostkamp, Multidimensional Characteristic Galerkin Schemes and Evolution Operators for Hyperbolic Systems, Dissertation Universität Hannover, DLR-Forschungsbericht 95-20, (1995)
- [Prozan et al (1977)] R.J. Prozan, L.W. Spradley, P.G. Anderson, M.L. Pearson, The General Interpolation Method, LMSC-HREC TB D497112

- und AIAA Paper 77-642, Lockheed Missiles & Space Company, Huntsville, Ala. (1977)
- [Payne (1957)] R. B. Payne, A numerical method for a converging cylindrical shock, *J. Fluid. Mech.*, 2, (1957), pp. 185–200
- [Petersen (1991)] J. Petersen, Stoßfrontkonfigurationen in zweidimensionalen, konvergenten Stoßwellen Diplomarbeit, Hannover (1991)
- [Renka (1984)] R.J. Renka, Algorithm 624: Triangulation and Interpolation at arbitrarily distributed points in the plane, *ACM Trans. Math. Software* 10, (1984), pp. 440–442
- [Rosendahl 1995] U. Rosendahl, Diploma Thesis, Universität Hannover (1995)
- [Schwarze (1995)] R. Schwarze, Die Berechnung instationärer Sternmodelle mit Charakteristikenverfahren, Diplomarbeit, Hannover (1995)
- [Shapiro (1991)] R. A. Shapiro, Adaptive Finite Element Solution Algorithm for the Euler Equations, Notes on numerical fluid mechanics, Vol. 32, Braunschweig (1991)
- [Shu, Osher (1988)] C.-W. Shu, S. Osher, Efficient Implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, *J. Comp. Phys.* 77, (1988), pp. 439–471
- [Shu, Osher (1989)] C.-W. Shu, S. Osher, Efficient Implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II, *J. Comp. Phys.* 83, (1989), pp. 32–78
- [Simkins (1980)] T.E. Simkins, Finite Elements for Initial Value Problems in Dynamics, Contract-No.: 1L161102AH60, Report-Nr.: AD-A095 344, Report-Nr.: ARLCB-TR-80047, Report-Nr.: AD-E440 107, (1980)
- [Sod (1978)] G. A. Sod, A survey of several finite difference methods for system of nonlinear hyperbolic conservation laws, *Journal Computational Physics*, 27, (1978), pp. 1–31
- [Späth (1995)] H. Späth, Two dimension spline interpolation algorithms, Massachusetts (1995)
- [Spieß (1994)] P. Spieß, Modellierung magnetohydrodynamischer Profilmströmungen und Vergleich der Eignung verschiedener numerischer Verfahren, Diplomarbeit, Hannover (1994)

- [Spradly et al (1985)] L. W. Spradly, J. F. Stalnaker, M. A. Robinson, K. E. Xiques K E Finite element algorithms for compressible flow computation on a supercomputer. Finite elements in fluids, Chichester, (1985), pp. 135–156
- [Steinfeldt (1996)] R. Steinfeldt, Untersuchung der Strukturen im Nachreflexionsgebiet konvergenter Stoßwellen, Diplomarbeit, Universität Hannover, (1996)
- [Takayama et al (1987)] K. Takayama H. Kleine, H. Gröning, An experimental investigation of the stability of converging cylindrical shock waves in air, *Experim. Fluids* 5, (1987)
- [Takayama et al (1984)] K. Takayama O. Ondera, Y. Hoshizawa, Experiments on the stability of converging shock waves, *Th. Appl Mech.* 32, pp. 117-127 (1984)
- [Wallus (1993)] H. Wallus, Modellrechnungen zur Ausbreitung konvergenter Stoßwellen auf der Grundlage zeitaufgelöster Experimente, Diplomarbeit, Hannover (1993)
- [Wallus, Demmig (1995)] H. Wallus, F. Demmig, Converging shock waves - modeling and analysis of structures, *Proc 20th Int. Symp. on Shock Waves*, Vol. 1, Pasadena (1995), pp. 661–666
- [Vorozhtsov (1987)] E.V. Vorozhtsov, On shock localization by digital image processing techniques, *Comp. & Fluids*, Vol. 15, No. 1, (1987), pp. 13–45
- [Vorozhtsov (1990)] E.V. Vorozhtsov, On the classification of discontinuities by pattern recognition methods, *Comp. & Fluids*, Vol. 18, No. 1, (1990), pp. 35–74
- [Watanabe, Takayama (1991)] M. Watanabe, K. Takayama, Stability of converging cylindrical shock waves, *Shock waves*, Springer Verlag (1991), p. 149-160
- [Yee et al (1985)] H. C. Yee, R. F. Warming, A. Harten, Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations, *J. Comp. Physics*, Vol 57 (3), (1985), pp. 327–360
- [Zienkiewicz (1977)] O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, Mc-Graw-Hill, New York (1977)

[Žukov (1960)]

A. I. Žukov Primenenie metoda charakteristik k čislennomu rešeniju odnornych zadač gazovoj dinamiki (Anwendung des Charakteristikenverfahrens zur numerischen Lösung eindimensionaler gasdynamischer Probleme), Trudy matematičescogu instituta im. V.A. Steklova Nr 58, Akad. Nauk SSSR 1960, NASA translation (1967) TTF-298

Lebens- und Bildungsgang

Zur Person Harald Wallus
geb. 28.8.61 in Berlin
verheiratet, 2 Kinder
Ehefrau: Dipl.-Theol. Regina Wallus
Beruf: Physiker

Ausbildung
Schulausbildung Grundschohle in Kassel und Koblenz
1968-1981
Hochschulstudium Diplomphysik an der Universität Oldenburg
1982-1986
1986-1993 Diplomphysik an der Universität Hannover
Abschluß: Diplomphysiker

Berufstätigkeit
StKpFmStab 94, Daun Wehrdienst
7/81-9/82
Institut für Plasmaphysik, Hannover Wissenschaftliche Hilfskraft bei
10/91-12/93 Herrn Prof. Dr. F. Demmig
Land Niedersachsen Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Uni-
Seit 1/94 versität Hannover, im Institut für Atom- und
Molekülphysik, Abteilung Plasmaphysik bei
Herrn Prof. Dr. F. Demmig

Veröffentlichungen

- Lit 1: Demmig F, Gronig H, Kleine H, Wallus H (1995)
Experiments and model computation of cylindrical shock waves with
time-resolved deformation and fragmentation.
Shock Waves @ MarseilleIV, Springer Verlag, 87-92
- Lit 2: Wallus H, Demmig F (1995)
Converging shock waves - modeling and analysis of structures.
Proc 20th Int. Symp. on Shock Waves, Vol. 1, p. 661-666, Pasadena
- Lit 3: Wallus H, Demmig F (1998)
Modeling of converging shock waves around objects - computation with
a finite element method
Proc 21th Int. Symp. on Shock Waves, im Druck, Great Keppel, Queens-
land

Gehrden, 24. Mai 1999

Dank

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Atom- und Molekülphysik, Abteilung Plasmaphysik, der Universität Hannover angefertigt. Allen Mitarbeitern danke ich für ihre Hilfsbereitschaft und ihr Interesse, besonders aber für die angenehme und freundliche Atmosphäre.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. F. Demmig für die intensive Begleitung meiner Arbeit, die vielen hilfreichen Anregungen und Diskussionen und seine menschliche Unterstützung.

Danken möchte ich Herrn Dr. U. Meier für die Diskussionen und Gespräche, besonders in Bezug auf die Charakteristikenverfahren.

Meiner Frau Regina danke ich für das Ermöglichen der Arbeit und für die Durchsicht des Textes.

Hanover, 24. Mai 1999

Eidesstattliche Erklärungen

Ich versichere, früher oder gleichzeitig kein Promotionsverfahren bei einer anderen Hochschule oder einem anderen Fachbereich beantragt zu haben.

14. April 1998

Ich versichere, daß ich die Dissertation selbständig verfaßt habe und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

14. April 1998

Ich versichere, daß ich die Dissertation nicht schon als Diplomarbeit oder ähnliche Prüfungsarbeit verwendet habe.

14. April 1998