Über projektiv eingebettete Inzidenzgruppen

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Hannover

zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Math. Joachim Otto,
geboren am 17.12.1965 in Freiburg/Br.

1999

Referent: Prof. Dr. Herbert Hotje, Universität Hannover
Korreferent: Prof. Dr. Dr. h.c. Helmut Karzel, TU München
Tag der Promotion: 17.12.1998
Datum der Veröffentlichung: Februar 1999

Zusammenfassung

Zur Verallgemeinerung geschlitzter, 2-geschlitzter und einer Reihe weiterer Inzidenzgruppen (vgl. etwa [2] oder [5]) wird in der vorliegenden Arbeit der Begriff der *l-eingebetteten* Inzidenzgruppe eingeführt; darunter ist eine Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ zu verstehen, zu der ein projektiver Raum $(P, \mathcal{L})$ mit den folgenden Eigenschaften existiert:

(LE 1) $(G, \mathcal{G})$ ist *projektiv-eingebettet* in $(P, \mathcal{L})$, d.h. $(G, \mathcal{G})$ ist ein Spurraum von $(P, \mathcal{L})$, und für jedes $l \in \mathcal{L}$ gilt $|l \cap G| \neq 1$.

(LE 2) Jede Linksmultiplikation von $(G, \cdot\,)$ kann zu einem Automorphismus von $(P, \mathcal{L})$ fortgesetzt werden.

Ist darüber hinaus auch jede Rechtsmultiplikation von $(G, \cdot\,)$ zu einem Automorphismus von $(P, \mathcal{L})$ fortsetzbar, heißt die Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ *l-r-eingebettet*.

Im ersten Kapitel untersuchen wir zunächst mit Blick auf das Axiom (LE 2), unter welchen Bedingungen man Bijektionen projektiv-eingebetteter Räume zu Automorphismen zugehöriger projektiver Räume fortsetzen kann. Anschließend wird gezeigt, daß l-eingebettete Inzidenzgruppen im desarguesschen Fall gerade durch die hier eingeführten *unvollständigen Algebren* darstellbar sind; das dazu angewandte Verfahren entspricht dem von der algebraischen Beschreibung projektiver und geschlitzter Inzidenzgruppen her bekannten und führte dort zur Definition normaler Fastkörper bzw. normaler lokaler Fastmoduln. Schließlich charakterisieren wir noch solche unvollständigen Algebren, die sich bereits als Algebren auffassen lassen.

Motiviert durch Ergebnisse aus [18] und [11], wird im zweiten Kapitel der Frage nachgegangen, welche linear gefaserten l-eingebetteten Inzidenzgruppen zweiseitig oder sogar l-r-eingebettet sind. Wir geben verschiedene, zum Teil äquivalente Bedingungen für die Zweiseitigkeit an sowie zwei spezielle Klassen, deren Inzidenzgruppen stets l-r-eingebettet sind.

Im dritten Kapitel wird untersucht, wann unvollständige Algebren l-r-eingebetteter Inzidenzgruppen bereits als Algebren aufgefaßt werden können. Für zwei spezielle Klassen, die u.a. den 2-geschlitzten Fall und die in [2] betrachteten kinematischen Räume umfassen, kann dieses Problem vollständig gelöst werden.

Schlagworte: Inzidenzgruppen, algebraische Darstellung, in projektive Räume einbettbare Inzidenzstrukturen

Abstract

In order to generalize slit, porous, and various other incidence groups (cf. e.g. [2] or [5]), this thesis introduces the notion of an *l-embedded* incidence group. An incidence group $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ is called *l-embedded* if there exists a projective space $(P, \mathcal{L})$ with the following properties:

(LE 1) $(G, \mathcal{G})$ is *projectively embedded* in $(P, \mathcal{L})$, i.e., $(G, \mathcal{G})$ is a trace space of $(P, \mathcal{L})$ and $|l \cap G| \neq 1$ for all $l \in \mathcal{L}$.

(LE 2) Every left multiplication of $(G, \cdot\,)$ can be extended to an automorphism of $(P, \mathcal{L})$.

If, in addition, every right multiplication of $(G, \cdot\,)$ is extendable to an automorphism of $(P, \mathcal{L})$, then the incidence group $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ is called *l-r-embedded*.

With regard to axiom (LE 2), we give in the first chapter conditions for automorphisms of projectively embedded spaces to be extendable to automorphisms of the projective spaces. We then show that l-embedded incidence groups can—in the desarguesian case—be described by so-called *incomplete algebras*. The procedure used here is the same as for projective or slit incidence groups and has in the latter cases led to the definition of normal near-fields and normal local near-moduls, respectively. Finally, we characterize those incomplete algebras that can already be considered as algebras.

Motivated by results of [18] and [11], we investigate in the second chapter which fibered l-embedded incidence groups are two-sided or even l-r-embedded. Several sufficient conditions for two-sidedness are given, some of them are also necessary. Furthermore, two special classes are shown to be always l-r-embedded.

The third chapter deals with the question which incomplete algebras of l-r-embedded incidence groups are already algebras. For two special classes, containing e.g. the porous case and the kinematic spaces of [2], we solve this problem completely.

Keywords: incidence groups, algebraic representation, incidence structures embeddable into projective spaces

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Um die eigentliche Bewegungsgruppe $\mathcal{B}_2^+$ der reellen euklidischen Ebene algebraisch zu beschreiben, führte E. Study 1904 die nach ihm benannten *Study-Quaternionen* $\mathbb{H}_S$ ein, eine vierdimensionale reelle Algebra mit Basis $1, \mathrm{i}, \varepsilon, \mathrm{i}\varepsilon$ und der durch $\mathrm{i}^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$ und $\varepsilon\mathrm{i} = -\mathrm{i}\varepsilon$ definierten Multiplikation. $\mathbb{H}_S$ ist lokal mit dem maximalen Ideal $N := \mathbb{R}\varepsilon + \mathbb{R}\mathrm{i}\varepsilon$ und der Einheitengruppe $E_S := \mathbb{H}_S \setminus N$. Setzt man nun

$$\mathbb{H}_{S1} := \{\, \alpha_1 + \alpha_2\mathrm{i} + \alpha_3\varepsilon + \alpha_4\mathrm{i}\varepsilon \in \mathbb{H}_S \mid {\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 = 1 \,\}$$

und identifiziert die Ebene $\mathbb{R}^2$ über $\;:(x,y) \mapsto \mathrm{i} + x\varepsilon + y\mathrm{i}\varepsilon$ mit ihrem Bild in $\mathbb{H}_S$, so kann für jeden Vektor $\mathfrak{a} = \alpha_1 + \alpha_2\mathrm{i} + \alpha_3\varepsilon + \alpha_4\mathrm{i}\varepsilon \in \mathbb{H}_{S1}$ die Abbildung

$$\mathfrak{a}_\imath \colon \mathrm{i} + x\varepsilon + y\mathrm{i}\varepsilon \mapsto \mathfrak{a} \cdot (\mathrm{i} + x\varepsilon + y\mathrm{i}\varepsilon) \cdot \mathfrak{a}^{-1}$$

als eigentliche Bewegung der reellen euklidischen Ebene aufgefaßt werden: $\mathfrak{a}_\imath$ entspricht der Hintereinanderausführung der Drehung um $(0,0)$ mit dem durch $\alpha_1 = \cos\varphi$ und $\alpha_2 = \sin\varphi$ bestimmten Winkel 2φ und der Translation mit dem Vektor $2(\alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3, \alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3)$.

Da jede Bewegung aus $\mathcal{B}_2^+$ durch eine der Abbildungen $\mathfrak{a}_\imath$ dargestellt werden kann, ist $\mathcal{B}_2^+$ zu der Faktorgruppe $\mathbb{H}_{S1}/\{-1,1\}$ und damit zu $E_S/\mathbb{R}^*$ isomorph. – Identifiziert man nun $\mathcal{B}_2^+$ mit $E_S/\mathbb{R}^*$, so ist $\mathcal{B}_2^+$ eine Teilmenge der Punktmenge des dreidimensionalen reellen projektiven Raumes ${\mathbb{H}_S}^*/\,\mathbb{R}^* = \{\, \mathbb{R}^*\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x} \in {\mathbb{H}_S}^* \,\}$ und füllt diesen wegen $\mathbb{H}_S \setminus E_S = \mathbb{R}\varepsilon + \mathbb{R}\mathrm{i}\varepsilon$ bis auf die Punkte einer Geraden aus.

Auch die Bewegungsgruppen der anderen klassischen metrischen Ebenen können durch vierdimensionale reelle Algebren dargestellt und in den dreidimensionalen reellen projektiven Raum eingebettet werden: Im elliptischen Fall erhält man den Quaternionenschiefkörper, und die Bewegungsgruppe entspricht dem gesamten Raum $\mathbb{R}^{4^*}/\,\mathbb{R}^*$. Die hyperbolische Bewegungsgruppe wird durch reelle 2×2-Matrizen beschrieben und füllt $\mathbb{R}^{4^*}/\,\mathbb{R}^*$ bis auf ein einschaliges Hyperboloid aus. Im Minkowskischen Fall schließlich ist die eigentliche Bewegungsgruppe durch eine bilokale reelle Algebra darstellbar und erfaßt alle Punkte des Raumes $\mathbb{R}^{4^*}/\,\mathbb{R}^*$ bis auf die zweier Hyperebenen.

Bezeichnet man mit $(G,\cdot\,)$ eine der vier eben genannten Bewegungsgruppen und mit $\mathcal{G}$ die Menge der Spurgeraden von G in $\mathbb{R}^{4^*}/\,\mathbb{R}^*$, so hat das Tripel $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ die folgenden Eigenschaften:

(i) $(G, \cdot\,)$ ist eine Gruppe.

(ii) $(G, \mathcal{G})$ ist ein Inzidenzraum.

(iii) Für alle $a \in G$ ist die Linksmultiplikation $a_l\colon x \mapsto ax$ ein Automorphismus von $(G, \mathcal{G})$.

(iv) Für alle $a \in G$ ist die Rechtsmultiplikation $a_r\colon x \mapsto xa$ ein Automorphismus von $(G, \mathcal{G})$.

(v) Jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ mit $1 \in g$ ist eine Untergruppe von $(G, \cdot\,)$.

Beim Studium elliptischer Gruppenräume führten E. Ellers und H. Karzel 1961/63 (vgl. [3] und [4]) für ein Tripel $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$, das die Eigenschaften (i) – (iii) erfüllt, den Begriff *Inzidenzgruppe* ein. Eine Inzidenzgruppe heißt *zweiseitig*, wenn (iv), und *linear gefasert*, falls (v) gilt. Motiviert durch den Umstand, daß die Gruppenräume der oben genannten klassischen Bewegungsgruppen zweiseitig und linear gefasert sind, bezeichnete H. Karzel Inzidenzgruppen mit diesen beiden Eigenschaften 1973 als *kinematische Räume*.

Zunächst konzentrierte man sich auf Inzidenzgruppen mit desarguesschen projektiven Räumen. Nach dem Darstellungssatz der projektiven Geometrie kann ein solcher Raum als projektive Koordinatengeometrie und jeder seiner Automorphismen als semilineare Abbildung des zugehörigen Vektorraums aufgefaßt werden. Damit zeigten E. Ellers und H. Karzel in [4], daß sich diese Inzidenzgruppen algebraisch gerade durch *normale Fastkörper* beschreiben lassen.

1967 gelang H. Wähling in [26] der Nachweis, daß ein normaler (mindestens dreidimensionaler) Fastkörper mit zweiseitiger Inzidenzgruppe stets eine Divisionsalgebra ist. Für den Fall einer kommutativen Inzidenzgruppe hatte H. Karzel dies bereits 1964 gezeigt (vgl. [7]).

Ebenfalls 1967 begannen H. Karzel und H. Meissner mit der Untersuchung sogenannter *geschlitzter Inzidenzgruppen* (vgl. [13]), deren Inzidenzraum durch „Entfernung eines Teilraums“ aus einem projektiven Raum entsteht. Zu diesen Inzidenzgruppen gehört auch der Gruppenraum der Bewegungsgruppe $\mathcal{B}_2^+$.

Bei der algebraischen Beschreibung der geschlitzten Inzidenzgruppen machte man sich zunutze, daß die Linksmultiplikationen stets zu Automorphismen des zugehörigen projektiven Raumes fortsetzbar sind und sich somit – im desarguesschen Fall – wieder durch semilineare Abbildungen darstellen lassen. Dies führte zur Definition der *normalen lokalen Fastmoduln*.

I. Pieper bewies (vgl. [22], [23]), daß die mindestens zweidimensionalen zweiseitigen desarguesschen geschlitzten Inzidenzgruppen Translationsräume über echten Schiefkörpern sind oder durch lokale Algebren beschrieben werden können.

In [2] betrachtete L. Bröcker eine Klasse kinematischer Räume; die zugrunde liegenden geometrischen Strukturen sind hier stets Spurräume desarguesscher projektiver Räume und erfüllen außerdem noch gewisse Minimalbedingungen. Er zeigte, daß diese kinematischen Räume – bis auf zwei leicht zu beschreibende Ausnahmeklassen – durch (*kinematische*) Algebren darstellbar sind.

G. Kist beschrieb *punktiert-affine Inzidenzgruppen* durch *Fastkörpererweiterungen* (vgl. [15]), und J. Hörwick untersuchte in [5] eine Klasse kinematischer Räume, die ebenfalls Spurräume projektiver Räume sind.

Verallgemeinerungen des Begriffs der Inzidenzgruppe gingen unter anderem von H. Wähling aus, der in [27] und [28] projektive *Inzidenzloops* und *-gruppoide* betrachtete. *2-geschlitzte* Inzidenzloops wurden in [18] und [11] untersucht; dabei ergab sich beispielsweise, daß linear gefaserte 2-geschlitzte Inzidenzloops mit bestimmten Zusatzeigenschaften, die etwa von Gruppen stets erfüllt werden, kinematisch sind.

In der vorliegenden Arbeit werden Inzidenzgruppen betrachtet, deren geometrische Struktur lediglich ein *projektiv-eingebetteter* Raum ist. Darunter ist ein Spurraum $(G, \mathcal{G})$ eines projektiven Raumes $(P, \mathcal{L})$ zu verstehen, bei dem für jede Gerade $l \in \mathcal{L}$ gilt: $|l \cap G| \neq 1$.

Projektiv-eingebettete Räume sind wesentlich allgemeiner als geschlitzte oder 2-geschlitzte. Im Unterschied zu diesen kann beispielsweise in einem projektiv-eingebetteten Raum im allgemeinen nicht mehr jeder Automorphismus zu einem Automorphismus des projektiven Raumes fortgesetzt werden. Um trotzdem die geometrischen Eigenschaften des projektiven Raumes nutzen zu können, fordere ich zusätzlich, daß die Linksmultiplikationen der Inzidenzgruppen zu Automorphismen des projektiven Raumes fortsetzbar sind; solche Inzidenzgruppen nenne ich *l-eingebettet*.

Eine l-eingebettete Inzidenzgruppe, für die auch jede Rechtsmultiplikation zu einem Automorphismus des projektiven Raumes fortsetzbar ist, heißt *l-r-eingebettet*.

Im ersten Kapitel wird das Problem der Fortsetzbarkeit von Automorphismen projektiv-eingebetteter Räume behandelt. Außerdem zeige ich, daß l-eingebettete Inzidenzgruppen im desarguesschen Fall gerade den von mir hier eingeführten *unvollständigen Algebren* entsprechen, und untersuche anschließend, welche unvollständigen Algebren man als Algebren auffassen kann.

Der Frage, wann linear gefaserte l-eingebettete Inzidenzgruppen zweiseitig sind, wird im zweiten Kapitel nachgegangen. Ich gebe verschiedene, zum Teil äquivalente Bedingungen für die Zweiseitigkeit an und beweise für zwei spezielle Klassen, daß diese sogar immer l-r-eingebettet sind.

Gegenstand des dritten Kapitels ist die Frage, wann unvollständige Algebren l-r-eingebetteter Inzidenzgruppen bereits als Algebren aufgefaßt werden können. Dieses Problem wird u.a. für den 2-geschlitzten Fall gelöst.

Herrn Prof. Dr. H. Hotje danke ich herzlich für seine Hilfe bei der Auswahl des Themas und die Betreuung bei der Entstehung dieser Dissertation. Durch zahlreiche Anregungen und wertvolle Ratschläge hat er die Anfertigung dieser Arbeit wesentlich gefördert.

Kapitel 1

Grundlagen

Im ersten Kapitel führen wir die in dieser Arbeit benutzten Begriffe ein und beweisen grundlegende Aussagen, die auch im folgenden benutzt werden.

Nachdem im ersten Abschnitt die hier verwendeten allgemeinen Bezeichnungen angegeben werden, definieren wir im zweiten Abschnitt Inzidenzräume und Inzidenzgruppen und beweisen einige einfache Aussagen.

Der Begriff des projektiv-eingebetteten Inzidenzraumes wird im dritten Abschnitt eingeführt. Wir beweisen verschiedene Fortsetzungssätze und betrachten einige spezielle projektiv-eingebettete Räume.

Im vierten Abschnitt folgt die Definition von l- und l-r-eingebetteten Inzidenzgruppen. Es werden Beispiele angeführt und einige Aussagen bewiesen.

Schließlich zeigen wir im fünften Abschnitt, daß l-eingebettete Inzidenzgruppen, sofern ein zugehöriger desarguesscher projektiver Raum existiert, algebraisch den hier eingeführten unvollständigen Algebren entsprechen (vgl. (1.16) und (1.18)). Danach wird untersucht, welche unvollständigen Algebren sich aus unitären Algebren gewinnen lassen (siehe (1.19)).

1.1 Bezeichnungen und Vereinbarungen

Ist $\sigma\colon A \to B$ eine Abbildung und $X \subseteq A$, so wird die Restriktion von σ auf X mit $\sigma_{|X}$ bezeichnet. – Für eine additiv geschriebene Gruppe $(M,+)$ mit neutralem Element 0 setzen wir $M^* := M \setminus \{0\}$.

In einer Gruppe $(G,\cdot)$ ist $[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$ der Kommutator von $a,b \in G$. Für eine Teilmenge $S \subseteq G$ bezeichnet $\mathrm{H}(S)$ die von S in $(G,\cdot)$ erzeugte Untergruppe und $\mathrm{Z}(S)$ ihren Zentralisator. Sind $a_1,\ldots,a_n \in G$, so schreiben wir wie üblich $\mathrm{Z}(a_1,\ldots,a_n)$ statt $\mathrm{Z}(\{a_1,\ldots,a_n\})$.

$\mathcal{A}(V,K)$ bezeichnet die affine und $\Pi(V,K)$ die projektive Koordinatengeometrie eines Linksvektorraumes (V,K) (zur Definition der Koordinatengeometrien vergleiche etwa (9.14) und (9.15) in [14]); weiter ist $\varphi\colon V^* \to V^*/K^*$ die durch $\varphi(\mathfrak{x}) := K^*\mathfrak{x}$ definierte Abbildung, $\langle S\rangle$ die lineare Hülle von $S \subseteq V$ und $\langle \mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n\rangle := \langle\{\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n\}\rangle$ für $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n \in V$. – Die direkte Summe zweier K-Linksvektorräume V_1, V_2 wird mit $V_1 \oplus V_2$ bezeichnet.

Für die Ordnung eines projektiven Raumes $(P,\mathcal{L})$ schreiben wir $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L})$ und $\mathrm{char}(K)$ für die Charakteristik eines Körpers $(K,+,\cdot)$. $\mathrm{Aut}(X)$ ist die Automorphismengruppe eines in Frage kommenden X.

Die Kommutativität wird für Körper in dieser Arbeit nicht vorausgesetzt. Algebren sind stets assoziativ.

1.2 Inzidenzräume und Inzidenzgruppen

Definition. (a) Es sei G eine Menge und $\mathcal{G}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von G. Das Paar $(G, \mathcal{G})$ heißt *Inzidenzraum*, wenn folgende Axiome gelten:

(I 1) Zu $a, b \in G$ mit $a \neq b$ gibt es genau ein $g \in \mathcal{G}$ mit $a, b \in g$.

(I 2) Für jedes $g \in \mathcal{G}$ gilt $|g| \geq 2$.

In einem Inzidenzraum $(G, \mathcal{G})$ werden die Elemente von G *Punkte* und die von $\mathcal{G}$ *Geraden* genannt; die nach (I 1) zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in G$ eindeutig bestimmte Gerade $g \in \mathcal{G}$ mit $a, b \in g$ heißt *Verbindungsgerade* von a und b und wird mit $\overline{a, b}$ bezeichnet.

(b) $(G, \mathcal{G})$ sei ein Inzidenzraum.
$T \subseteq G$ heißt *Teilraum* von $(G, \mathcal{G})$, wenn $\overline{a, b} \subseteq T$ für alle $a, b \in T$ mit $a \neq b$ gilt.
Für $B \subseteq G$ sei $\mathcal{G}_B := \{\, g \cap B \mid g \in \mathcal{G},\ |g \cap B| \geq 2 \,\}$ und $\mathcal{T}_B$ die Menge der Teilräume von $(G, \mathcal{G})$, die B enthalten; dann wird $(B, \mathcal{G}_B)$ der *Spurraum* und $\overline{B} := \bigcap \mathcal{T}_B$ die *Hülle* von B in $(G, \mathcal{G})$ genannt. Für $a_1, \ldots, a_n \in G$ setzen wir $\overline{a_1, \ldots, a_n} := \overline{\{a_1, \ldots, a_n\}}$.

(c) Sind $(G, \mathcal{G})$ und $(G', \mathcal{G}')$ Inzidenzräume, so heißt $(G, \mathcal{G})$ *isomorph* zu $(G', \mathcal{G}')$, wenn es eine Bijektion $\sigma\colon G \to G'$ mit $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}'$ gibt; eine solche Abbildung σ wird *Isomorphismus*, im Fall $(G, \mathcal{G}) = (G', \mathcal{G}')$ *Automorphismus* oder *Kollineation* genannt.

Bemerkung. Ist $(G, \mathcal{G})$ ein Inzidenzraum und $B \subseteq G$, so ist der Spurraum $(B, \mathcal{G}_B)$ offenbar wieder ein Inzidenzraum und $\overline{B}$ der kleinste Teilraum von $(G, \mathcal{G})$, der B enthält. Beachte, daß B selbst genau dann ein Teilraum von $(G, \mathcal{G})$ ist, wenn $\mathcal{G}_B \subseteq \mathcal{G}$ gilt. – Außerdem sieht man leicht, daß die Umkehrabbildung eines Isomorphismus wieder ein Isomorphismus ist und die Menge der Kollineationen eines Inzidenzraumes eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung bildet.

Definition. (a) Ein Tripel $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ heißt *Inzidenzgruppe*, wenn gelten:

(IG 1) $(G, \mathcal{G})$ ist ein Inzidenzraum.

(IG 2) $(G, \cdot\,)$ ist eine Gruppe.

(IG 3) Für jedes $a \in G$ ist $a_l\colon \begin{cases} G & \to & G \\ x & \mapsto & ax \end{cases}$ eine Kollineation von $(G, \mathcal{G})$.

(b) Eine Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ wird *zweiseitig* genannt, wenn auch $a_r\colon \begin{cases} G & \to & G \\ x & \mapsto & xa \end{cases}$ für jedes $a \in G$ eine Kollineation von $(G, \mathcal{G})$ ist; sie heißt *linear gefasert*, wenn jede Gerade durch das neutrale Element 1 eine Untergruppe von $(G, \cdot\,)$ ist, und *kinematischer Raum*, wenn sie zweiseitig und linear gefasert ist. – Schließlich bezeichnen wir $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ als *projektiv* oder *kommutativ*, wenn $(G, \mathcal{G})$ oder $(G, \cdot\,)$ projektiv bzw. kommutativ ist; entsprechend verfahren wir bei anderen Eigenschaften.

(c) Ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ eine Inzidenzgruppe, so wird ein Teilraum U von $(G, \mathcal{G})$, der auch eine Untergruppe von $(G, \cdot\,)$ ist, *Inzidenzuntergruppe* von $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ genannt.

(d) Sind $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ und $(G', \mathcal{G}', *\,)$ Inzidenzgruppen, so heißt $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ *isomorph* zu $(G', \mathcal{G}', *\,)$, wenn es einen Isomorphismus von $(G, \mathcal{G})$ auf $(G', \mathcal{G}')$ gibt, der zugleich ein Isomorphismus von $(G, \cdot\,)$ auf $(G', *\,)$ ist.

Beispiele. (a) Für einen Linksvektorraum (V, K) sei $\mathcal{G}$ die Geradenmenge von $\mathcal{A}(V, K)$ und $(V, +\,)$ die Gruppe der Vektoren bezüglich der Vektoraddition. Dann ist $(V, \mathcal{G}, +\,)$ ein kommutativer kinematischer Raum.

(b) (A, K) sei eine unitäre Algebra mit Einheitengruppe $(E_A, \cdot\,)$, K ein Teilkörper von A und $E < (E_A, \cdot\,)$; außerdem sei $\mathcal{G}$ die Geradenmenge von $\mathcal{A}(A, K)$ und $(P, \mathcal{L}) := \Pi(A, K)$.

(i) Dann ist $(E, \mathcal{G}_E, \cdot\,)$ eine zweiseitige Inzidenzgruppe, die die *affine Ableitung* von (A, K) nach E genannt wird.

(ii) $\varphi_{|E_A}$ ist der kanonische Homomorphismus von $(E_A, \cdot\,)$ auf die Faktorgruppe $(E_A/K^*, \cdot\,)$ und $\varphi(E)$ damit eine Untergruppe von $(E_A/K^*, \cdot\,)$. Bezüglich dieser Multiplikation ist $(\varphi(E), \mathcal{L}_{\varphi(E)}, \cdot\,)$ eine zweiseitige Inzidenzgruppe, die die *projektive Ableitung* von (A, K) nach E genannt wird.

Da in einer Inzidenzgruppe für zwei verschiedene Punkte a, b offenbar $\overline{a, b} = a \cdot \overline{1, a^{-1}b}$ gilt, erhält man unmittelbar

(1.1) *Eine Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ist genau dann zweiseitig, wenn $\overline{1, a} \cdot b \subseteq \overline{b, ab}$ für alle $a, b \in G$ gilt.*

Die folgenden Aussagen (a) und (b)(i) werden bereits in [8] gezeigt (vgl. [8], die Sätze 21 und 22).

(1.2) *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sei eine zweiseitige Inzidenzgruppe und $g \in \mathcal{G}$ mit $1 \in g$.*

(a) *g ist genau dann eine Untergruppe von $(G, \cdot\,)$, wenn ein $a \in g \setminus \{1\}$ mit $a^2 \in g$ existiert.*

(b) *Ist g keine Untergruppe von $(G, \cdot\,)$, so gelten:*

(i) Für alle $a, b \in g$ ist $ab = ba$.

(ii) Für $a, b \in g \setminus \{1\}$ mit $a \neq b$ ist $\overline{1, a^{-1}} \neq \overline{1, b^{-1}}$.

Beweis. *Zu (a):* Sei $a \in g \setminus \{1\}$ mit $a^2 \in g$; dann gilt $g = \overline{1, a}$. Für $b, c \in g$ folgt daher $ba \in ga = \overline{a, a^2} = g$, also

$$b^{-1}c \in b^{-1} \cdot g = b^{-1} \cdot \overline{b, ba} = \overline{1, a} = g$$

und damit $g < (G, \cdot\,)$. – Die andere Richtung von (a) ist trivial.

Zu (b): Es seien $a, b \in g \setminus \{1\}$ mit $a \neq b$. Dann gilt $ag = \overline{a, a^2} = ga$ und analog $bg = gb$, also $ab, ba \in ag \cap bg$. Nun sind ag und bg verschieden, denn sonst folgt $a^2 \in ag = \overline{a, b} = g$ und damit nach (a) $g < (G, \cdot\,)$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $ab = ag \cap bg = ba$, was zunächst (i) zeigt. – Aus $ag \neq bg = gb$ erhält man weiter

$$\overline{1, a^{-1}} = a^{-1} \cdot g \neq g \cdot b^{-1} = \overline{1, b^{-1}}\,,$$

und damit folgt (ii). □

1.3 Projektiv-eingebettete Inzidenzräume

Definition. $(P, \mathcal{L})$ sei ein projektiver Raum. Ein Spurraum $(G, \mathcal{G})$ von $(P, \mathcal{L})$ heißt *projektiv-eingebettet* in $(P, \mathcal{L})$, wenn für jedes $l \in \mathcal{L}$ gilt: $|l \cap G| \neq 1$. In diesem Fall werden die Punkte und Teilmengen von $P \setminus G$ *singulär* und die von G *regulär* (bezüglich $(P, \mathcal{L})$) genannt; außerdem bezeichnen wir mit $\overline{S}$ die Hülle von $S \subseteq G$ in $(G, \mathcal{G})$ und mit $\langle S \rangle$ die von $S \subseteq P$ in $(P, \mathcal{L})$.

Bemerkungen. (a) Ist $(G, \mathcal{G})$ ein Spurraum von $(P, \mathcal{L})$ und bezeichnet $\overline{}$ die Hüllenabbildung in $(G, \mathcal{G})$ und $\langle\ \ \rangle$ die in $(P, \mathcal{L})$, so gilt für $S \subseteq G$ stets $\overline{S} \subseteq \langle S \rangle$, da $\langle S \rangle \cap G$ offenbar ein Teilraum von $(G, \mathcal{G})$ ist, der S enthält; damit folgt $\langle \overline{S} \rangle \subseteq \langle S \rangle$, und wir erhalten $\langle \overline{S} \rangle = \langle S \rangle$.

(b) Ist $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ und $l \in \mathcal{L}$ nicht singulär, so folgt wegen $|l \cap G| \neq 1$ zunächst $|l \cap G| \geq 2$ und damit $l \cap G \in \mathcal{G}$; die nicht-singulären Geraden aus $\mathcal{L}$ bilden also genau die Spurgeraden von $(G, \mathcal{G})$. – Für $G \neq \emptyset$ gilt außerdem $P = \langle G \rangle$.

(c) Ist ein Inzidenzraum $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet in die projektiven Räume $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$, so sind diese nicht notwendig isomorph: Es sei etwa $(P, \mathcal{L})$ der projektive Abschluß der reellen affinen Koordinatenebene und $(P', \mathcal{L}')$ der der Moulton-Ebene (zur Definition siehe etwa [14]); dann ist der Spurraum der Menge $G := \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 0 \,\}$ in $(P, \mathcal{L})$ sowohl in $(P, \mathcal{L})$ als auch in $(P', \mathcal{L}')$ projektiv-eingebettet, aber $(P, \mathcal{L})$ ist nicht zu $(P', \mathcal{L}')$ isomorph.

Beispiele. (a) Einfache Beispiele projektiv-eingebetteter Inzidenzräume (sogenannte *geschlitzte Räume*) erhält man, wenn die Punktmenge eines projektiven Raumes um einen Teilraum vermindert und der zugehörige Spurraum betrachtet wird. So sind z.B. alle affinen Räume projektiv-eingebettet in ihren projektiven Abschluß. – Je nach Ordnung des projektiven Raumes entstehen auch durch Herausnahme von mehr als einem Teilraum noch projektiv-eingebettete Inzidenzräume.

(b) Ist $(P, \mathcal{L})$ eine projektive Koordinatengeometrie über einem von $\mathbb{Z}_2$ verschiedenen kommutativen Körper und Q eine Quadrik von $(P, \mathcal{L})$, so ist der Spurraum von $P \setminus Q$ projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$.

Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen eine Kollineation eines projektiv-eingebetteten Inzidenzraumes zu einer Kollineation eines zugehörigen projektiven Raumes fortgesetzt werden kann. Mit Blick auf die Frage, für welche projektiv-eingebetteten Inzidenzräume ein zugehöriger projektiver Raum (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt ist, gehen wir dabei etwas allgemeiner vor.

Im folgenden wird die Hüllenabbildung von $(P,\mathcal{L})$ wie bisher mit $\langle\ \ \rangle$, die von $(P',\mathcal{L}')$ hingegen mit $\langle\!\langle\ \ \rangle\!\rangle$ bezeichnet. – Zunächst gilt:

(1.3) *$(P,\mathcal{L})$ und $(P',\mathcal{L}')$ seien projektive Räume mit Isomorphismen $\sigma_1,\sigma_2\colon P\to P'$, und es gelte $\dim(P,\mathcal{L})\geq 2$. Ist $(G,\mathcal{G})$ projektiv-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$ mit $G\neq\emptyset$ und stimmen σ_1 und σ_2 auf G überein, so folgt $\sigma_1=\sigma_2$.*

Beweis. Es sei $x\in P\setminus G$. Wegen $G\neq\emptyset$ gibt es ein $a\in G$, und aus $\dim(P,\mathcal{L})\geq 2$ folgt die Existenz einer Geraden $l\in\mathcal{L}$, die a, aber nicht x enthält. Da $(G,\mathcal{G})$ projektiv-eingebettet ist in $(P,\mathcal{L})$, existieren von a verschiedene Punkte $b,c\in G$ mit $b\in\langle a,x\rangle$ und $c\in l$; außerdem gibt es ein $d\in\langle c,x\rangle\cap G$ mit $d\neq c$. Nun folgt

$$\sigma_1(x)=\langle\!\langle\sigma_1(a),\sigma_1(b)\rangle\!\rangle\cap\langle\!\langle\sigma_1(c),\sigma_1(d)\rangle\!\rangle=\langle\!\langle\sigma_2(a),\sigma_2(b)\rangle\!\rangle\cap\langle\!\langle\sigma_2(c),\sigma_2(d)\rangle\!\rangle=\sigma_2(x)$$

und damit $\sigma_1=\sigma_2$. □

(1.4) *$(G,\mathcal{G})$ sei projektiv-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$ und $(P',\mathcal{L}')$. Außerdem sei $\sigma\colon G\to G$ surjektiv, $G\neq\emptyset$ und $\dim(P,\mathcal{L})\geq 2$. Gilt für $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in G$ mit $a_i\neq b_i$ für $i=1,2,3$ stets*

$$\bigcap_{i=1}^{3}\langle a_i,b_i\rangle\neq\emptyset\quad\Longleftrightarrow\quad\bigcap_{i=1}^{3}\langle\!\langle\sigma(a_i),\sigma(b_i)\rangle\!\rangle\neq\emptyset\,,$$

so folgt:

(a) σ ist eine Kollineation von $(G,\mathcal{G})$.

(b) σ kann zu einer Bijektion $\widetilde{\sigma}\colon P\to P'$ mit der folgenden Eigenschaft fortgesetzt werden: $l\subseteq P$ ist genau dann eine nicht-singuläre Gerade aus $\mathcal{L}$, wenn $\widetilde{\sigma}(l)$ eine nicht-singuläre Gerade aus $\mathcal{L}'$ ist. – Insbesondere gilt also $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L})=\mathrm{Ord}(P',\mathcal{L}')$.

Beweis. $a,b,c\in G$ seien paarweise verschieden. Setzt man $a_1:=b_3:=a$, $a_2:=b_1:=b$ und $a_3:=b_2:=c$, so folgt

$$\begin{aligned} c\in\overline{a,b}\quad&\Longleftrightarrow\quad\bigcap_{i=1}^{3}\langle a_i,b_i\rangle\neq\emptyset\quad\Longleftrightarrow\quad\bigcap_{i=1}^{3}\langle\!\langle\sigma(a_i),\sigma(b_i)\rangle\!\rangle\neq\emptyset\quad\Longleftrightarrow\\ &\Longleftrightarrow\quad\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c)\text{ sind kollinear in }(P',\mathcal{L}')\,.\end{aligned}$$

Dies ergibt zunächst die Injektivität von σ – wegen $\dim(P,\mathcal{L})\geq 2$ kann $c\notin\overline{a,b}$ gewählt werden – und damit $\sigma(\mathcal{G})\subseteq\mathcal{G}$, da σ nach Voraussetzung surjektiv ist. Also gilt (a) und außerdem $\dim(P',\mathcal{L}')\geq 2$.

Nun definieren wir die Fortsetzung $\widetilde{\sigma}$ von σ: Für $x\in G$ sei $\widetilde{\sigma}(x):=\sigma(x)$. Zu $x\in P\setminus G$ gibt es zunächst paarweise verschiedene Punkte $a,b,c,d\in G$ mit $c\notin\langle a,x\rangle$, $b\in\langle a,x\rangle$ und $d\in\langle c,x\rangle$; wir setzen $\widetilde{\sigma}(x):=\langle\!\langle\sigma(a),\sigma(b)\rangle\!\rangle\cap\langle\!\langle\sigma(c),\sigma(d)\rangle\!\rangle$. Aus den Voraussetzungen und (a) folgt sofort, daß $\widetilde{\sigma}(x)$ existiert und unabhängig von der Wahl der Punkte a, b, c, d ist; die so konstruierte Abbildung $\widetilde{\sigma}: P \to P'$ ist also wohldefiniert. – Wegen der Bijektivität von σ und $\dim(P', \mathcal{L}') \geq 2$ existiert σ^{-1} und kann analog zu einer bijektiven Abbildung $\overline{\sigma^{-1}}: P' \to P$ fortgesetzt werden. Da offenbar $\overline{\sigma^{-1}} = \widetilde{\sigma}^{-1}$ gilt, folgt (b) nun mit (a) und der Definition von $\widetilde{\sigma}$ bzw. $\overline{\sigma^{-1}}$. □

Bemerkung. Die Aussage (a) aus (1.4) folgt mit dem dortigen Beweis bereits dann, wenn $(G, \mathcal{G})$, statt projektiv-eingebettet zu sein, lediglich ein nicht-kollinearer Spurraum von $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$ ist.

Wir zeigen nun, daß die Abbildung $\widetilde{\sigma}$ aus (1.4)(b) immer dann schon ein Isomorphismus von $(P, \mathcal{L})$ auf $(P', \mathcal{L}')$ ist, wenn die beiden projektiven Räume desarguessch sind.

(1.5) Satz. *$(G, \mathcal{G})$ sei in die desarguesschen projektiven Räume $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$ projektiv-eingebettet, und es gelte $G \neq \emptyset$ sowie $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 2$. Dann sind für jede surjektive Abbildung $\sigma: G \to G$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) σ läßt sich zu einem Isomorphismus von $(P, \mathcal{L})$ auf $(P', \mathcal{L}')$ fortsetzen.

(ii) Sind $a_i, b_i \in G$ mit $a_i \neq b_i$ für $i = 1, 2, 3$, so gilt:

$$\bigcap_{i=1}^{3} \langle a_i, b_i \rangle \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{3} \langle\!\langle \sigma(a_i), \sigma(b_i) \rangle\!\rangle \neq \emptyset.$$

Beweis. Wir zeigen nur „(ii) $\Rightarrow$ (i)“, denn die andere Richtung ist trivial. Es sei also $\sigma: G \to G$ surjektiv. Dann folgt zunächst $\dim(P', \mathcal{L}') \geq 2$. Nach (1.4) ist σ eine Kollineation von $(G, \mathcal{G})$ und kann zu einer Bijektion $\widetilde{\sigma}: P \to P'$ mit der folgenden Eigenschaft fortgesetzt werden:

(1) $l \subseteq P$ ist genau dann eine nicht-singuläre Gerade aus $\mathcal{L}$, wenn $\widetilde{\sigma}(l)$ eine nicht-singuläre Gerade aus $\mathcal{L}'$ ist;

außerdem gilt $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) = \mathrm{Ord}(P', \mathcal{L}')$. – Wir wollen zeigen, daß $\widetilde{\sigma}$ der gesuchte Isomorphismus ist, und beweisen dazu

(2) Sind $x, y, z \in P$ paarweise verschiedene Punkte einer singulären Geraden aus $\mathcal{L}$, so sind $\widetilde{\sigma}(x), \widetilde{\sigma}(y), \widetilde{\sigma}(z)$ kollinear in $(P', \mathcal{L}')$.

Dann gilt nämlich für die nach (1.4)(b) existierende Fortsetzung $\overline{\sigma^{-1}}: P' \to P$ von σ^{-1} die (2) entsprechende Aussage, und damit folgt wegen $\overline{\sigma^{-1}} = \widetilde{\sigma}^{-1}$ und (1) schließlich $\widetilde{\sigma}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{L}'$.

Wir überlegen uns zunächst, daß (2) für den Fall $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) = \mathrm{Ord}(P', \mathcal{L}') = 2$ gilt: Erfüllen x, y, z die Voraussetzungen von (2), so wähle $a, b, c \in G$ mit $\langle a, x \rangle = \langle a, b \rangle$ und $\langle a, y \rangle = \langle a, c \rangle$. Dann gilt $z \in \langle b, c \rangle$, und damit liegen die Punkte $\widetilde{\sigma}(x)$, $\widetilde{\sigma}(y)$, $\widetilde{\sigma}(z)$ in der Ebene $\langle\!\langle \widetilde{\sigma}(a), \widetilde{\sigma}(b), \widetilde{\sigma}(c) \rangle\!\rangle$. Wegen (1) ist nun mit $\langle x, y \rangle$ auch $\langle\!\langle \widetilde{\sigma}(x), \widetilde{\sigma}(y) \rangle\!\rangle$ singulär; da unter den sieben Punkten der Ebene $\langle\!\langle \widetilde{\sigma}(a), \widetilde{\sigma}(b), \widetilde{\sigma}(c) \rangle\!\rangle$ vier reguläre sind, ist $\langle\!\langle \widetilde{\sigma}(x), \widetilde{\sigma}(y) \rangle\!\rangle$ also gerade die Menge ihrer singulären Punkte, die somit auch $\widetilde{\sigma}(z)$ enthält.

Im folgenden sei $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L}) \geq 3$. – Die Idee ist, in $(P,\mathcal{L})$ eine Desargues-Konfiguration mit Achse $\langle x,y\rangle$ zu finden, die durch $\widetilde{\sigma}$ auf eine entsprechende Figur in $(P',\mathcal{L}')$ abgebildet wird; die Punkte $\widetilde{\sigma}(x), \widetilde{\sigma}(y), \widetilde{\sigma}(z)$ liegen dann auf der Achse dieses Bildes und sind somit kollinear.

x, y, z seien so gewählt, daß die Voraussetzungen von (2) erfüllt sind; weiter sei $y' \in \langle x,y\rangle$ von x, y, z verschieden – ein solcher Punkt existiert wegen $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L}) \geq 3$. Wir zeigen, daß einer der Punkte $\widetilde{\sigma}(y)$, $\widetilde{\sigma}(y')$ aus $\langle\!\langle \widetilde{\sigma}(x), \widetilde{\sigma}(z)\rangle\!\rangle$ ist; dann folgt analog, daß $\widetilde{\sigma}(z)$ oder $\widetilde{\sigma}(y')$ auf $\langle\!\langle \widetilde{\sigma}(x), \widetilde{\sigma}(y)\rangle\!\rangle$ liegt, und das liefert die behauptete Kollinearität von $\widetilde{\sigma}(x), \widetilde{\sigma}(y), \widetilde{\sigma}(z)$.

Wir definieren nun die Punkte für unsere Desargues-Konfiguration: Es seien $a_1, a_2, b_1 \in G$ paarweise verschieden mit $a_2 \in \langle a_1, x\rangle$ und $b_1 \in \langle a_2, z\rangle$; außerdem setze $c_3 := x$ und $c_1 := z$. Schließlich wählen wir $c_2 \in \{y, y'\}$ mit $c_2 \notin \langle a_1, b_1\rangle$ sowie

$$\begin{aligned} a_3 := \langle a_1, c_2\rangle \cap \langle a_2, c_1\rangle, \quad & b_3 \in \langle b_1, c_2\rangle \cap G \text{ mit } b_3 \neq b_1 \\ \text{und} \quad & b_2 := \langle b_1, c_3\rangle \cap \langle b_3, c_1\rangle. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, daß alle genannten Punkte existieren. Außerdem sind a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 jeweils nicht kollinear, und es gilt

$$c_1 = \langle a_2, a_3\rangle \cap \langle b_2, b_3\rangle, \quad c_2 = \langle a_1, a_3\rangle \cap \langle b_1, b_3\rangle, \quad c_3 = \langle a_1, a_2\rangle \cap \langle b_1, b_2\rangle.$$

Da mit dem Satz von Desargues in $(P,\mathcal{L})$ auch seine Umkehrung gilt, existiert ein Punkt $c \in P$, der auf den drei verschiedenen Geraden $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$ und $\langle a_3, b_3\rangle$ liegt – beachte, daß $a_i \neq b_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt. Wegen $a_1, a_2, b_1, b_3 \in G$ folgt mit (1), daß die Geraden $\langle\!\langle \widetilde{\sigma}(a_i), \widetilde{\sigma}(b_i)\rangle\!\rangle$ für $i = 1, 2, 3$ dann ebenfalls paarweise verschieden sind und sich in $\widetilde{\sigma}(c)$ schneiden. Nun ergibt sich mit (1) und dem Desargues für $(P',\mathcal{L}')$ die Kollinearität der Punkte

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}(c_1) &= \langle\!\langle \widetilde{\sigma}(a_2), \widetilde{\sigma}(a_3)\rangle\!\rangle \cap \langle\!\langle \widetilde{\sigma}(b_2), \widetilde{\sigma}(b_3)\rangle\!\rangle\,, \\ \widetilde{\sigma}(c_2) &= \langle\!\langle \widetilde{\sigma}(a_1), \widetilde{\sigma}(a_3)\rangle\!\rangle \cap \langle\!\langle \widetilde{\sigma}(b_1), \widetilde{\sigma}(b_3)\rangle\!\rangle\,, \\ \widetilde{\sigma}(c_3) &= \langle\!\langle \widetilde{\sigma}(a_1), \widetilde{\sigma}(a_2)\rangle\!\rangle \cap \langle\!\langle \widetilde{\sigma}(b_1), \widetilde{\sigma}(b_2)\rangle\!\rangle\,, \end{aligned}$$

und daraus folgt wegen $c_2 \in \{y, y'\}$ wie angekündigt, daß einer der Punkte $\widetilde{\sigma}(y), \widetilde{\sigma}(y')$ auf $\langle\!\langle \widetilde{\sigma}(x), \widetilde{\sigma}(z)\rangle\!\rangle$ liegt. □

Problem. Gibt es Beispiele, für die die Abbildung $\widetilde{\sigma}$ aus (1.4)(b) kein Isomorphismus ist? – Kann man in (1.5) die Forderung „desarguessch“ zumindest für einen der Räume $(P,\mathcal{L})$, $(P',\mathcal{L}')$ abschwächen?

Für den Fall, daß die projektiven Räume mindestens dreidimensional sind, können wir (ii) aus (1.5) durch eine andere Aussage ersetzen.

(1.6) Satz. *$(G,\mathcal{G})$ sei projektiv-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$ und $(P',\mathcal{L}')$; weiter gelte $G \neq \emptyset$ und $\dim(P,\mathcal{L}) \geq 3$. Dann sind für jede surjektive Abbildung $\sigma\colon G \to G$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) σ läßt sich zu einem Isomorphismus von $(P,\mathcal{L})$ auf $(P',\mathcal{L}')$ fortsetzen.

(ii) Für $a, b, c, d \in G$ gilt: $\dim\langle a, b, c, d\rangle = 2 \iff \dim\langle\!\langle \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d)\rangle\!\rangle = 2.$

Beweis. Wir zeigen „(ii) $\Rightarrow$ (i)“; die andere Richtung ist wieder trivial. Es sei also $\sigma: G \to G$ surjektiv. Für $a, b, c \in G$ und $d := c$ ergibt (ii)

$$\dim\langle a, b, c\rangle = 2 \iff \dim\langle\!\langle \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\rangle\!\rangle = 2\,;$$

hieraus folgt – wenn $a \neq b$ und $c \notin \langle a, b\rangle$ gewählt wird – zunächst die Injektivität von σ und damit dann $\sigma(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{G}$, da σ nach Voraussetzung surjektiv ist. Also ist σ eine Kollineation von $(G, \mathcal{G})$, und für $a, b, c, d \in G$ gilt $\dim\langle a, b, c, d\rangle = \dim\langle\!\langle \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d)\rangle\!\rangle$.

Da wegen $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$ Punkte $a, b, c, d \in G$ mit $\dim\langle a, b, c, d\rangle = 3$ existieren, folgt nun auch $\dim(P', \mathcal{L}') \geq 3$; insbesondere sind $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$ also desarguessch. – Wir weisen nach, daß (ii) aus (1.5) erfüllt ist, denn dann folgt sofort (i); da σ bijektiv ist, reicht es, die folgende Aussage zu zeigen:

$(*)$ Sind $a_i, b_i \in G$ für $i = 1, 2, 3$ mit $a_i \neq b_i$ und $\bigcap_{i=1}^{3} \langle a_i, b_i\rangle \neq \emptyset$, so gilt $\bigcap_{i=1}^{3} \langle\!\langle \sigma(a_i), \sigma(b_i)\rangle\!\rangle \neq \emptyset$.

Es seien also $a_i, b_i \in G$ so gewählt, daß die Voraussetzungen von $(*)$ erfüllt sind; da σ eine Kollineation ist und (ii) gilt, nehmen wir an, daß die $\langle a_i, b_i\rangle$ paarweise verschieden sind und sich in dem singulären Punkt x schneiden. $(*)$ folgt, wenn wir zeigen können, daß die nach (ii) zu $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ existierenden Punkte

$$y_i := \langle\!\langle \sigma(a_j), \sigma(b_j)\rangle\!\rangle \cap \langle\!\langle \sigma(a_k), \sigma(b_k)\rangle\!\rangle$$

identisch sind. Zunächst gilt offenbar $y_1, y_2, y_3 \in \langle\!\langle \sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(b_1)\rangle\!\rangle$.

1. Fall: $a_3 \notin \langle a_1, a_2, b_1\rangle$. Dann folgt mit (ii) $\sigma(a_3) \notin \langle\!\langle \sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(b_1)\rangle\!\rangle$; also gilt $y_1 = y_2$, denn andernfalls erhält man $\sigma(a_3) \in \langle\!\langle y_1, y_2\rangle\!\rangle \subseteq \langle\!\langle \sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(b_1)\rangle\!\rangle$. Damit ist auch $y_1 = y_3$.

2. Fall: $a_3 \in \langle a_1, a_2, b_1\rangle$. Dann ergibt (ii) $\sigma(a_3) \in \langle\!\langle \sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(b_1)\rangle\!\rangle$. Wegen $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$ existieren $a_0, b_0 \in G$ mit $a_0 \notin \langle a_1, a_2, b_1\rangle$ und $x \in \langle a_0, b_0\rangle$. Einerseits folgt nun mit dem 1. Fall $y_1, y_2, y_3 \in \langle\!\langle \sigma(a_0), \sigma(b_0)\rangle\!\rangle$, andererseits liefert (ii) $\sigma(a_0) \notin \langle\!\langle \sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(b_1)\rangle\!\rangle$; also erhält man auch hier $y_1 = y_2 = y_3$. □

Da man in einem projektiv-eingebetteten Inzidenzraum $(G, \mathcal{G})$ für eine Teilmenge $S \subseteq G$ im allgemeinen nur $\overline{S} \subseteq \langle S\rangle \cap G$ erhält, erscheint es etwa im Hinblick auf (ii) aus (1.6) sinnvoll, diejenigen Räume auszuzeichnen, für die stets auch $\langle S\rangle \cap G \subseteq \overline{S}$ und damit $\overline{S} = \langle S\rangle \cap G$ gilt. Wie wir in (1.7) sehen werden, geschieht dies durch die folgende

Definition. $(P, \mathcal{L})$ sei ein projektiver Raum. Ein Spurraum $(G, \mathcal{G})$ von $(P, \mathcal{L})$ heißt *lokal vollständig* in $(P, \mathcal{L})$, wenn es zu jedem nicht-leeren Teilraum S von $(G, \mathcal{G})$ genau einen Teilraum T von $(P, \mathcal{L})$ mit $S = T \cap G$ gibt.

Bemerkungen. (a) Jeder lokal vollständige Spurraum eines projektiven Raumes ist ein Austauschraum (vgl. etwa (1.6) in [5]).

(b) In [25] wird gezeigt, daß sich jeder mindestens dreidimensionale angeordnete Raum, der das Axiom (O3) aus [25] erfüllt, als lokal vollständiger Spurraum eines projektiven Raumes, seines *Bündelraumes*, auffassen läßt (vgl. (5.11) und §2 in [25]). – Dieses Ergebnis ist in [20] verallgemeinert worden: Nach [20], (5.2) kann jeder mindestens dreidimensionale angeordnete Raum in einen projektiven Raum eingebettet werden; wenn (O3) nicht gilt, ist der angeordnete Raum allerdings nicht einmal mehr notwendig projektiv-eingebettet, wie etwa [20], (6.3) zeigt.

Nach [5], (4.28) ist auch jeder mindestens dreidimensionale projektiv angeordnete Raum, in dem jede Gerade mehr als drei Punkte enthält, ein lokal vollständiger Spurraum seines Bündelraumes.

(1.7) *$(G, \mathcal{G})$ sei ein Spurraum des projektiven Raumes $(P, \mathcal{L})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $(G, \mathcal{G})$ ist lokal vollständig in $(P, \mathcal{L})$.

(ii) $(G, \mathcal{G})$ ist projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$, und für jedes $S \subseteq G$ gilt $\overline{S} = \langle S \rangle \cap G$.

Beweis. Wir zeigen zunächst

(1) Ist $(G, \mathcal{G})$ lokal vollständig, so auch projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$.

Sei $(G, \mathcal{G})$ lokal vollständig in $(P, \mathcal{L})$, $l \in \mathcal{L}$ und $a \in l \cap G$. Wegen $\{a\} \cap G = \{a\}$ gilt dann $T \cap G \neq \{a\}$ für jeden Teilraum $T \neq \{a\}$ von $(P, \mathcal{L})$. Insbesondere ist daher $l \cap G \neq \{a\}$ und damit $|l \cap G| \geq 2$. Also gilt (1). – Die Äquivalenz von (i) und (ii) ergibt sich nun mit

(2) Ist $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$, $S \subseteq G$ nicht leer und T ein Teilraum von $(P, \mathcal{L})$ mit $\overline{S} = T \cap G$, so folgt $T = \langle S \rangle$.

Beweis von (2): Sei $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$, $S \subseteq G$ nicht leer und T ein Teilraum von $(P, \mathcal{L})$ mit $\overline{S} = T \cap G$. Wegen $S \subseteq T$ erhält man zunächst $\langle S \rangle \subseteq T$. Ist andererseits $x \in T \setminus S$, so wähle $a \in S$ und $b \in \langle a, x \rangle \cap G$ mit $b \neq a$; dies ist möglich, da $S \neq \emptyset$ gilt und $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet ist. Mit $a \in S \subseteq T$ folgt

$$b \in \langle a, x \rangle \cap G \subseteq T \cap G = \overline{S}\,,$$

also $x \in \langle a, b \rangle \subseteq \langle \overline{S} \rangle = \langle S \rangle$ und damit auch $T \subseteq \langle S \rangle$. □

Bemerkung. Nach [5], (1.5) ist ein projektiv-eingebetteter Inzidenzraum $(G, \mathcal{G})$ bereits dann lokal vollständig, wenn für jede Ebene S von $(G, \mathcal{G})$ gilt: $\langle S \rangle \cap G \subseteq S$ (vgl. dazu auch (1.5) in [20]).

Nach (1.7) ist jeder lokal vollständige Inzidenzraum bereits projektiv-eingebettet. Daß es umgekehrt jedoch projektiv-eingebettete Spurräume projektiver Räume gibt, die in diesen nicht lokal vollständig sind, zeigt das folgende Beispiel; es geht im wesentlichen auf eine Idee aus [20] zurück (vgl. (6.4) und (6.5) in [20]).

Beispiel. Zu einem Körper $(K, +, \cdot)$ mit $p := \mathrm{char}(K) \neq 0$ und $|K| \geq p^3$ wähle $m \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ und eine projektive Unterebene $(P_0, \mathcal{L}_0)$ von $(P, \mathcal{L}) := \Pi(K^m, K)$ mit $\mathrm{Ord}(P_0, \mathcal{L}_0) = p$; beachte, daß die projektive Koordinatenebene des Primkörpers von $(K, +, \cdot)$ stets als Spurraum von $(P, \mathcal{L})$ aufgefaßt werden kann. Nun setze $\mathcal{N} := \{\, l \in \mathcal{L} \mid |l \cap P_0| \geq 2 \,\}$, $G_1 := P \setminus \bigcup \mathcal{N}$ und

$G := G_1 \cup P_0$. Dann ist der Spurraum $(G, \mathcal{G})$ von G in $(P, \mathcal{L})$ projektiv-eingebettet, nicht aber lokal vollständig in $(P, \mathcal{L})$.

Um dies zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet ist in $(P, \mathcal{L})$: Sei $l \in \mathcal{L}$; wir nehmen $l \notin \mathcal{N}$ an, da andernfalls offenbar sogar $|l \cap G| = |l \cap P_0| = p + 1 \geq 3$ gilt. Dann schneidet l jede Gerade aus $\mathcal{N}$ in höchstens einem Punkt. Wegen $\mathrm{Ord}(P_0, \mathcal{L}_0) = p$ ist $|\mathcal{N}| = p^2 + p + 1$, daher folgt mit $|l| = |K| + 1 \geq p^3 + 1$ nun

$$|l \cap G| \geq |l \cap G_1| = |l \setminus \bigcup \mathcal{N}| \geq (p^3 + 1) - (p^2 + p + 1) = p(p(p-1) - 1) \geq p \geq 2\,.$$

Also ist $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$.

Bleibt noch nachzuweisen, daß $(G, \mathcal{G})$ nicht lokal vollständig in $(P, \mathcal{L})$ ist: Dazu seien $a, b, c \in P_0$ nicht kollinear. Aus Mächtigkeitsgründen gibt es dann eine Gerade $l \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{N}$ durch a, die in $\langle a, b, c\rangle$ liegt; nun existiert nach dem bereits Bewiesenen ein $x \in l \cap G$ mit $x \neq a$, und mit $l \notin \mathcal{N}$ folgt $x \notin P_0 = \overline{a, b, c}$. Wegen $x \in \langle a, b, c\rangle \cap G$ ist daher $\overline{a, b, c} \neq \langle a, b, c\rangle \cap G$, und wir erhalten aus (1.7), daß $(G, \mathcal{G})$ nicht lokal vollständig in $(P, \mathcal{L})$ ist.

(1.8) *$(P, \mathcal{L})$ sei ein projektiver Raum und $G \subseteq P$. Gilt für jede Gerade $l \in \mathcal{L}$ mit $l \cap G \neq \emptyset$*

- $2 + |l \setminus G| \leq |l \cap G|$, *falls* $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L})$ *endlich ist,*
- $|l \setminus G| \in \mathbb{N}_0$, *andernfalls,*

so ist der Spurraum $(G, \mathcal{G})$ von G lokal vollständig in $(P, \mathcal{L})$.

Beweis. Da $(G, \mathcal{G})$ offenbar projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ ist, bleibt nach (1.7) nur noch zu zeigen, daß $\overline{S} = \langle S\rangle \cap G$ für jedes $S \subseteq G$ gilt.

Sind $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ nicht singulär und endlich, so folgt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 4 + 2 \cdot |l_1 \setminus G| \leq 2 + |l_1 \setminus G| + |l_1 \cap G| = 2 + |l_1| = \\ = 2 + |l_2| = 2 + |l_2 \setminus G| + |l_2 \cap G| \leq 2 \cdot |l_2 \cap G|\,; \end{aligned}$$

also erhält man zunächst

(1) Ist $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) \in \mathbb{N}$, so gilt für alle nicht-singulären $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$: $2 + |l_1 \setminus G| \leq |l_2 \cap G|$.

Nun zeigen wir durch Vollständige Induktion

(2) Für $a_1, \ldots, a_n \in G$ gilt $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \cap G \subseteq \overline{a_1, \ldots, a_n}$.

Für $n = 1$ ist dies trivial, für $n = 2$ mit $a_1 \neq a_2$ folgt (2) nach Definition des Spurraums. (2) gelte also für ein $n \geq 2$, und es sei $a \in \langle a_1, \ldots, a_{n+1}\rangle \cap G$ mit $a \notin \langle a_1, \ldots, a_n\rangle, \langle a_1, a_{n+1}\rangle$. Dann gibt es ein $a' \in \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ mit $a \in \langle a', a_{n+1}\rangle$, und wegen $a_1 \neq a', a_{n+1}$ und $a \notin \langle a_1, a'\rangle$ existiert die Perspektivität f von $\langle a_1, a_{n+1}\rangle$ auf $\langle a_1, a'\rangle$ mit Zentrum a. Für $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) \in \mathbb{N}$ folgt aus (1), andernfalls direkt aus der Voraussetzung, daß ein regulärer Punkt $a_0 \in \langle a_1, a_{n+1}\rangle$ mit $a_0 \neq a_1$ und ${a_0}' := f(a_0) \in G$ existiert. Wegen $\langle a_1, a_{n+1}\rangle \neq \langle a_1, a'\rangle$ ist $a_0 \neq {a_0}'$. Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich

$${a_0}' \in \langle a_1, a'\rangle \cap G \subseteq \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \cap G \subseteq \overline{a_1, \ldots, a_n}\,,$$

also $a \in \overline{a_0, a_0{}'} \subseteq \overline{a_1, \ldots, a_{n+1}}$, und somit gilt (2).

Nun sei $S \subseteq G$. Zu $a \in \langle S \rangle \cap G$ existieren[1] $a_1, \ldots, a_n \in S$ mit $a \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, und nach (2) folgt dann $a \in \overline{a_1, \ldots, a_n} \subseteq \overline{S}$. Wegen $\overline{S} \subseteq \langle S \rangle \cap G$ gilt also $\overline{S} = \langle S \rangle \cap G$. □

Mit (1.6) beweisen wir nun:

(1.9) *$(G, \mathcal{G})$ sei lokal vollständig in $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$. Gelten $G \neq \emptyset$ und $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$, so läßt sich jede Kollineation von $(G, \mathcal{G})$ zu einem Isomorphismus von $(P, \mathcal{L})$ auf $(P', \mathcal{L}')$ fortsetzen.*

Beweis. σ sei eine Kollineation von $(G, \mathcal{G})$. Nach (1.7) ist $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$; außerdem erhält man für $a, b, c \in G$

$$\overline{a, b, c} = \langle a, b, c \rangle \cap G \quad \text{und} \quad \overline{\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)} = \langle\!\langle \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c) \rangle\!\rangle \cap G\,.$$

Wegen $\sigma \in \mathrm{Aut}(G, \mathcal{G})$ folgt damit für $d \in G$

$$d \in \langle a, b, c \rangle \iff d \in \overline{a, b, c} \iff \sigma(d) \in \overline{\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)} \iff \sigma(d) \in \langle\!\langle \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c) \rangle\!\rangle\,.$$

Also gilt $\dim\langle a, b, c, d \rangle = \dim\langle\!\langle \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d) \rangle\!\rangle$, und (1.6) ergibt die behauptete Fortsetzbarkeit. □

Aus [18] übernehmen wir:

Definition. $(P, \mathcal{L})$ sei ein projektiver Raum und $m \in \mathbb{N}_0$. Ein Spurraum $(G, \mathcal{G})$ von $(P, \mathcal{L})$ heißt *m-geschlitzt* in $(P, \mathcal{L})$, wenn für jede Gerade $l \in \mathcal{L}$ mit $l \cap G \neq \emptyset$ die Menge $l \setminus G$ nicht mehr als m Punkte enthält. – 1-geschlitzte Räume werden außerdem auch *geschlitzt* genannt.

Bemerkung. Ein Spurraum $(G, \mathcal{G})$ von $(P, \mathcal{L})$ ist offenbar genau dann geschlitzt, wenn $P \setminus G$ ein Teilraum von $(P, \mathcal{L})$ ist.

Beispiele. (a) Ist $m \in \mathbb{N}_0$ und sind $H_1, \ldots, H_m$ Teilräume eines projektiven Raumes $(P, \mathcal{L})$, so ist der Spurraum von $P \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} H_i)$ m-geschlitzt in $(P, \mathcal{L})$.

(b) Für eine Quadrik Q eines projektiven Raumes $(P, \mathcal{L})$ ist $P \setminus Q$ stets 2-geschlitzt in $(P, \mathcal{L})$.

(c) Jede der in der Einleitung aufgeführten klassischen Bewegungsgruppen ist 2-geschlitzt im projektiven Raum $\Pi(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, da sie diesen bis auf die Punkte einer Quadrik ausfüllt (vgl. hierzu etwa [10]).

Nun sei $(G, \mathcal{G})$ Spurraum eines projektiven Raumes $(P, \mathcal{L})$; wir formulieren die folgenden Aussagen

(2G2) $(G, \mathcal{G})$ ist projektiv-eingebettet und 2-geschlitzt in $(P, \mathcal{L})$.

(2G4) $(G, \mathcal{G})$ ist 2-geschlitzt in $(P, \mathcal{L})$, und für jedes $l \in \mathcal{L}$ mit $l \cap G \neq \emptyset$ enthält $l \cap G$ mindestens vier Punkte.

(EGU) Es gilt $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) \notin \mathbb{N}$, und für jedes $l \in \mathcal{L}$ mit $l \cap G \neq \emptyset$ ist $l \setminus G$ endlich.

[1] Vgl. etwa (8.4) in [14].

Bemerkungen. (a) Für $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) \geq 3$ braucht in (2G2) nicht gefordert zu werden, daß $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet ist. Außerdem folgt (2G2) aus (2G4) und für $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) \geq 5$ auch (2G4) aus (2G2). Gilt schließlich $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) \notin \mathbb{N}$, so ergibt sich (EGU) sowohl aus (2G2) als auch aus (2G4).

(b) (2G4) und (EGU) entsprechen den in [2] geforderten Eigenschaften (I) bzw. (II), wenn man davon absieht, daß dort ohnehin nur desarguessche projektive Räume betrachtet werden.

Aus (1.8) und (1.7) ergibt sich unmittelbar

(1.10) Folgerung. *$(G, \mathcal{G})$ sei ein Spurraum des projektiven Raumes $(P, \mathcal{L})$, für den (2G4) oder (EGU) gelten. Dann ist $(G, \mathcal{G})$ lokal vollständig, insbesondere also projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$.*

Für den ebenen Fall zeigen wir nun:

(1.11) *$(G, \mathcal{G})$ sei ein nicht-leerer Spurraum der projektiven Ebenen $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$. Gelten (2G2) oder (EGU) für $(G, \mathcal{G})$ in $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$, so ist jede Kollineation von $(G, \mathcal{G})$ zu einem Isomorphismus von $(P, \mathcal{L})$ auf $(P', \mathcal{L}')$ fortsetzbar.*

Beweis. Da $(G, \mathcal{G})$ offenbar auch dann projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ bzw. $(P', \mathcal{L}')$ ist, wenn (EGU) gilt, sind die Mengen $\{\, l \in \mathcal{L} \mid a \in l \,\}$ und $\{\, l' \in \mathcal{L}' \mid a \in l' \,\}$ für $a \in G$ stets gleichmächtig. Wegen $\dim(P, \mathcal{L}) = \dim(P', \mathcal{L}') = 2$ und $G \neq \emptyset$ folgt daher $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) = \mathrm{Ord}(P', \mathcal{L}')$ und damit eine der folgenden Aussagen:

(i) Für $(G, \mathcal{G})$ in $(P, \mathcal{L})$ und in $(P', \mathcal{L}')$ gilt (2G2).

(ii) Für $(G, \mathcal{G})$ in $(P, \mathcal{L})$ und in $(P', \mathcal{L}')$ gilt (EGU).

Nun sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(G, \mathcal{G})$. Wir weisen zunächst nach, daß die Voraussetzungen von (1.4) erfüllt sind; dazu reicht es wegen der Bijektivität von σ, die folgende Aussage zu zeigen:

(1) Sind $a_i, b_i \in G$ für $i = 1, 2, 3$ mit $a_i \neq b_i$ und $\bigcap\limits_{i=1}^{3} \langle a_i, b_i \rangle \neq \emptyset$, so gilt $\bigcap\limits_{i=1}^{3} \langle\!\langle \sigma(a_i), \sigma(b_i) \rangle\!\rangle \neq \emptyset$.

Zum Beweis von (1) nehmen wir an, daß Punkte $a_i, b_i \in G$ für $i = 1, 2, 3$ existieren, die zwar die Voraussetzungen von (1) erfüllen, für die aber $\bigcap_{i=1}^{3} \langle\!\langle \sigma(a_i), \sigma(b_i) \rangle\!\rangle = \emptyset$ gilt. Wegen $\sigma \in \mathrm{Aut}(G, \mathcal{G})$ und $\dim(P', \mathcal{L}') = 2$ sind die $\langle a_i, b_i \rangle$ dann paarweise verschieden und schneiden sich in einem singulären Punkt x; also existieren zu $1 \leq i < j \leq 3$ singuläre Punkte

$$y_{i,j} := \langle\!\langle \sigma(a_i), \sigma(b_i) \rangle\!\rangle \cap \langle\!\langle \sigma(a_j), \sigma(b_j) \rangle\!\rangle \,.$$

Gilt (i), so folgt nun $\langle\!\langle \sigma(a_1), \sigma(b_1) \rangle\!\rangle \setminus G = \{y_{1,2}, y_{1,3}\}$. Die Gerade $\langle\!\langle \sigma(a_1), y_{2,3} \rangle\!\rangle$ enthält einen von $\sigma(a_1)$ verschiedenen regulären Punkt $a_4{}'$, der damit auf keiner der Geraden $\langle\!\langle \sigma(a_i), \sigma(b_i) \rangle\!\rangle$ liegt; also gilt auch $a_4 := \sigma^{-1}(a_4{}') \notin \langle a_i, b_i \rangle$ für $i = 1, 2, 3$. Nun existiert ein $b_4 \in G$ mit $x \in \langle a_4, b_4 \rangle$, und da der Schnittpunkt von $\langle\!\langle \sigma(a_1), \sigma(b_1) \rangle\!\rangle$ und $\langle\!\langle \sigma(a_4), \sigma(b_4) \rangle\!\rangle$ ebenfalls singulär ist, dürfen wir etwa $y_{1,2} \in \langle\!\langle \sigma(a_4), \sigma(b_4) \rangle\!\rangle$ annehmen. Dann enthält die nicht-singuläre

Gerade $\langle\!\langle\sigma(a_3),\sigma(b_3)\rangle\!\rangle$ jedoch drei verschiedene singuläre Punkte, nämlich $y_{1,3}$, $y_{2,3}$ und ihren Schnittpunkt mit $\langle\!\langle\sigma(a_4),\sigma(b_4)\rangle\!\rangle$ – ein Widerspruch.

Gilt (ii), so existiert eine injektive Folge $(l_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nicht-singulärer Geraden aus $\mathcal{L}$, die sämtlich von $\langle a_1,b_1\rangle$ verschieden sind und x enthalten; zu $i\in\mathbb{N}$ wählen wir reguläre c_i,d_i mit $l_i=\langle c_i,d_i\rangle$. Wegen $x\in l_i$ ist der Schnittpunkt y_i von $\langle\!\langle\sigma(c_i),\sigma(d_i)\rangle\!\rangle$ mit $\langle\!\langle\sigma(a_1),\sigma(b_1)\rangle\!\rangle$ für jedes $i\in\mathbb{N}$ singulär. Da $\langle\!\langle\sigma(a_1),\sigma(b_1)\rangle\!\rangle$ nach Voraussetzung nur endlich viele singuläre Punkte enthält, dürfen wir etwa $y_1=y_i$ für unendlich viele, also o.B.d.A. sogar für alle $i\in\mathbb{N}$ annehmen. Wegen $y_{1,2}\neq y_{1,3}$ sei weiter $y_1\neq y_{1,2}$. Dann gilt aber, im Widerspruch zu (EGU), $|\,\langle\!\langle\sigma(a_2),\sigma(b_2)\rangle\!\rangle\setminus G\,|\notin\mathbb{N}$, denn die Schnittpunkte von $\langle\!\langle\sigma(a_2),\sigma(b_2)\rangle\!\rangle$ mit den Geraden $\langle\!\langle\sigma(c_i),\sigma(d_i)\rangle\!\rangle$ und $\langle\!\langle\sigma(c_j),\sigma(d_j)\rangle\!\rangle$ sind für $i\neq j$ verschieden und singulär. – In jedem Fall folgt also (1).

Wir zeigen nun, daß die nach (1.4)(b) existierende bijektive Fortsetzung $\widetilde{\sigma}$ von σ der gesuchte Isomorphismus ist. Da eine Bijektion zwischen projektiven Ebenen bereits dann ein Isomorphismus ist, wenn sie kollineare Punkte stets wieder auf kollineare Punkte abbildet, reicht es wegen (1.4)(b), die folgende Aussage nachzuweisen:

(2) Liegen $x,y,z\in P$ auf einer singulären Geraden aus $\mathcal{L}$, so sind $\widetilde{\sigma}(x)$, $\widetilde{\sigma}(y)$, $\widetilde{\sigma}(z)$ kollinear in $(P',\mathcal{L}')$.

Es sei $1\in G$ ausgezeichnet. Wir nehmen an, die Punkte x,y,z erfüllen die Voraussetzungen von (2), aber $\widetilde{\sigma}(x)$, $\widetilde{\sigma}(y)$, $\widetilde{\sigma}(z)$ sind nicht kollinear. Dann sind die Geraden $\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(x),\widetilde{\sigma}(y)\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(x),\widetilde{\sigma}(z)\rangle\!\rangle$ und $\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(y),\widetilde{\sigma}(z)\rangle\!\rangle$ nicht kopunktal und nach (1.4)(b) singulär; insbesondere ist also der Schnittpunkt von $\langle\!\langle 1,\widetilde{\sigma}(z)\rangle\!\rangle$ und $\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(x),\widetilde{\sigma}(y)\rangle\!\rangle$ ein von $\widetilde{\sigma}(z)$ verschiedener singulärer Punkt aus $\langle\!\langle 1,\widetilde{\sigma}(z)\rangle\!\rangle$, was auf $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L})=\mathrm{Ord}(P',\mathcal{L}')\geq 3$ führt.

Gilt (i), so kann nun eine Gerade $l\in\mathcal{L}'$ mit $1\in l$ gewählt werden, die keinen der Punkte $\widetilde{\sigma}(x)$, $\widetilde{\sigma}(y)$, $\widetilde{\sigma}(z)$ enthält und damit jede der singulären Geraden $\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(x),\widetilde{\sigma}(y)\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(x),\widetilde{\sigma}(z)\rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(y),\widetilde{\sigma}(z)\rangle\!\rangle$ in einem anderen Punkt schneidet. Dann liegen auf l aber mehr als zwei singuläre Punkte – ein Widerspruch.

Für (ii) wähle eine injektive Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_i\in\langle x,y\rangle\setminus\{x\}$. Nach (1.4)(b) ist $l_i:=\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(x),\widetilde{\sigma}(x_i)\rangle\!\rangle$ für alle $i\in\mathbb{N}$ singulär. Da $\langle\!\langle 1,\widetilde{\sigma}(y)\rangle\!\rangle$ nur endlich viele singuläre Punkte enthält und $\{\,l_i\mid i\in\mathbb{N}\,\}$ somit endlich ist, gelte also etwa $l_1=l_i$ für unendlich viele und damit o.B.d.A. sogar für alle $i\in\mathbb{N}$. Wegen $\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(x),\widetilde{\sigma}(z)\rangle\!\rangle\neq\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(x),\widetilde{\sigma}(y)\rangle\!\rangle$ darf außerdem $\widetilde{\sigma}(y)\notin l_1$ angenommen werden. Dann enthält $\langle\!\langle 1,\widetilde{\sigma}(x)\rangle\!\rangle$ jedoch, im Widerspruch zu (EGU), unendlich viele singuläre Punkte, nämlich die Schnittpunkte mit den singulären Geraden $\langle\!\langle\widetilde{\sigma}(y),\widetilde{\sigma}(x_i)\rangle\!\rangle$. – Damit folgt (2) auch für (ii). □

Bemerkung. Auf die Forderung $\dim(P',\mathcal{L}')=2$ in (1.11) kann verzichtet werden, denn mit den restlichen Voraussetzungen von dort gilt: Ist $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L})\geq 5$, so enthält jede Gerade aus $\mathcal{G}$ mindestens vier Punkte; also folgt mit (1.8), daß $(G,\mathcal{G})$ lokal vollständig in $(P,\mathcal{L})$ und $(P',\mathcal{L}')$ ist, und das ergibt $\dim(P',\mathcal{L}')=\dim(P,\mathcal{L})=2$. Ist $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L})\leq 4$, so gibt es zu $a\in G$ höchstens fünf Geraden aus $\mathcal{G}$ durch a; da $(G,\mathcal{G})$ projektiv-eingebettet in $(P',\mathcal{L}')$ ist, existieren dann auch nicht mehr als fünf Geraden aus $\mathcal{L}'$ durch a, und damit folgt hier ebenfalls $\dim(P',\mathcal{L}')=2$.

(1.12) Satz. *$(G, \mathcal{G})$ sei ein nicht-leerer Spurraum der projektiven Räume $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$. Ist $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 2$ und gelten (2G4) oder (EGU) für $(G, \mathcal{G})$ in $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$, so kann jede Kollineation von $(G, \mathcal{G})$ zu einem Isomorphismus von $(P, \mathcal{L})$ auf $(P', \mathcal{L}')$ fortgesetzt werden.*

Beweis. $(G, \mathcal{G})$ ist nach (1.10) lokal vollständig in $(P, \mathcal{L})$ und $(P', \mathcal{L}')$. Ist nun einer der Räume $(P, \mathcal{L})$, $(P', \mathcal{L}')$ mindestens dreidimensional, so folgt die Behauptung mit (1.9); andernfalls gilt $\dim(P, \mathcal{L}) = \dim(P', \mathcal{L}') = 2$, und man kann (1.11) anwenden. □

Bemerkungen. (a) Nach (1.12) und (1.3) kann in [2], Lemma 1 auf die Forderung, daß $(P, \mathcal{L})$ desarguessch ist (vgl. [2], Seite 245), verzichtet werden.

(b) Gilt $(P, \mathcal{L}) = (P', \mathcal{L}')$, so ergibt sich (1.12) für den 2-geschlitzten (mindestens dreidimensionalen) Fall aus dem in [17] ohne Beweis angegebenen Satz 3.

(c) Ist $(G, \mathcal{G})$ lokal vollständig in $(P, \mathcal{L})$ und gelten $G \neq \emptyset$ und $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$, so ist es nach (1.9) sinnvoll, $(P, \mathcal{L})$ als *den projektiven Abschluß* von $(G, \mathcal{G})$ zu bezeichnen. Dasselbe gilt wegen (1.12), wenn $(G, \mathcal{G})$ nicht-leerer Spurraum eines mindestens zweidimensionalen projektiven Raumes $(P, \mathcal{L})$ ist und (2G4) oder (EGU) erfüllt sind. (Siehe auch (1.11) und die daran anschließende Bemerkung.)

1.4 l-eingebettete Inzidenzgruppen

Definition. $(P, \mathcal{L})$ sei ein projektiver Raum. Eine Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ heißt *l-eingebettet* in $(P, \mathcal{L})$, wenn die folgenden Axiome gelten:

(LE 1) $(G, \mathcal{G})$ ist projektiv-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$.

(LE 2) Für jedes $a \in G$ ist a_l zu einer Kollineation von $(P, \mathcal{L})$ fortsetzbar.

Ist darüber hinaus für jedes $a \in G$ auch a_r zu einer Kollineation von $(P, \mathcal{L})$ fortsetzbar, so heißt $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ *l-r-eingebettet* in $(P, \mathcal{L})$.

Bemerkung. Beachte, daß jede l-r-eingebettete Inzidenzgruppe zweiseitig ist.

Beispiele. (a) (A, K) sei eine unitäre Algebra mit Einheitengruppe $(E_A, \cdot\,)$, K ein Teilkörper von A und $E < (E_A, \cdot\,)$ (vgl. Beispiel (b) auf Seite 6); außerdem sei wieder $\mathcal{G}$ die Geradenmenge von $\mathcal{A}(A, K)$ und $(P, \mathcal{L}) := \Pi(A, K)$.

(i) Für $K \neq \mathbb{Z}_2$ ist die affine Ableitung $(E, \mathcal{G}_E, \cdot\,)$ genau dann l-r-eingebettet in den projektiven Abschluß von $(A, \mathcal{G})$, wenn $A = 1 + K(E - 1)$ gilt.

(ii) Die projektive Ableitung $(\varphi(E), \mathcal{L}_{\varphi(E)}, \cdot\,)$ ist genau dann l-r-eingebettet in $\Pi(A, K)$, wenn $A = K + K^*E$ gilt. – $A = K + E_A$ folgt z.B. stets, wenn (A, K) lokal ist oder wenn $\dim(A, K) \in \mathbb{N}$ und $|K| \geq \dim(A, K) + 1$ gelten. Und auch für eine bilokale oder kinematische[2] Algebra (A, K) mit $K \neq \mathbb{Z}_2$ gilt $A = K + E_A$; im kinematischen Fall ist $(\varphi(E_A), \mathcal{L}_{\varphi(E_A)}, \cdot\,)$ sogar ein kinematischer Raum. – Die in der Einleitung aufgeführten Algebren der klassischen Bewegungsgruppen sind alle kinematisch, die Bewegungsgruppen selbst also l-r-eingebettete kinematische Räume.

[2]Eine Algebra (A, K) heißt nach [9] *kinematisch*, wenn $\mathfrak{x}^2 \in K + K\mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{x} \in A$ gilt.

(b) Der mindestens zweidimensionale projektive Raum $(P,\mathcal{L})$ sei (H_r,H_l)-transitiv für zwei nicht notwendig verschiedene Hyperebenen H_r und H_l. Wir definieren auf $G := P \setminus (H_r \cup H_l)$ eine Multiplikation wie folgt: Sei $1 \in G$ beliebig und $1_l := \mathrm{id}_P$. Für $a \in G\backslash\{1\}$ bezeichne a_l die (eindeutig bestimmte) Zentralkollineation von $(P,\mathcal{L})$ mit Achse H_l und Zentrum $\langle 1,a\rangle \cap H_r$, die 1 auf a abbildet. Nun setze $a{\cdot}b := a_l(b)$ für $a,b \in G$. – Es gelten (vgl. auch die Bemerkungen (b) hinter (1.13) und (a) zu (2.8)):

- $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ ist ein kinematischer Raum.
- $(G,\mathcal{G})$ ist 2-geschlitzt in $(P,\mathcal{L})$.
- Für $H_r = H_l$ oder $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L}) \geq 3$ ist $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ l-r-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$.

Gilt $H_r = H_l$, so heißt $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ *Translationsraum*; für $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L}) \geq 3$ ist $(G,\mathcal{G})$ in diesem Fall ein affiner Raum und $\{\, a_{l|G} \mid a \in G \,\}$ die zu $(G,\cdot\,)$ isomorphe abelsche Gruppe der Translationen von $(G,\mathcal{G})$. Ist $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ ein Translationsraum und $(P,\mathcal{L})$ desarguessch, so kann $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ wie in Beispiel (a) auf Seite 6 dargestellt werden. – Für $H_r \neq H_l$ und $\mathrm{Ord}(P,\mathcal{L}) \geq 3$ wird $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ *Strecktranslationsraum* genannt; im desarguesschen Fall ist $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ dann wie im Beispiel auf Seite 29 darstellbar, wenn man dort $K = E$ wählt.

Man überzeugt sich leicht davon, daß für desarguessche projektive Räume $(P,\mathcal{L})$ die hier eingeführten Translations- und Strecktranslationsräume mit den in [2] definierten übereinstimmen. – Am Beispiel der Translations- und Strecktranslationsräume erkennt man im übrigen, daß es l-r-eingebettete Inzidenzgruppen mit nicht-desarguesschen projektiven Räumen gibt.

Bemerkung. Ist $(P,\mathcal{L})$ ein mindestens zweidimensionaler projektiver Raum und $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ l-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$, so ist für $a \in G$ die Fortsetzung von a_l zu einer Kollineation von $(P,\mathcal{L})$ nach (1.3) eindeutig bestimmt; wir bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit a_l und setzen $ax := a \cdot x := a_l(x)$ für $x \in P$. Mit (1.3) folgt für $a,b \in G$ und $x \in P$ dann $(ab)x = a(bx)$. – Entsprechend verfahren wir mit a_r, wenn $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ sogar l-r-eingebettet ist; beachte, daß man für $a,b \in G$ und $x \in P$ in diesem Fall mit (1.3) $x(ab) = (xa)b$ und $(ax)b = a(xb)$ erhält.

Wir führen noch ein:

Definition. Die Inzidenzgruppe $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ sei l-eingebettet in den projektiven Raum $(P,\mathcal{L})$.

(a) Eine Menge $S \subseteq P$ oder ein Punkt $x \in P$ heißen *linksinvariant*, wenn $aS = S$ bzw. $ax = x$ für alle $a \in G$ gilt. S oder x werden *rechtsinvariant* genannt, wenn $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ l-r-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$ ist und $Sa = S$ bzw. $xa = x$ für jedes $a \in G$ gilt.

(b) Für $a \in G$ setze

$$G_a := \{\, b \in G \mid \dim\langle 1,a,b,ba\rangle = 3 \,\}\,.$$

Außerdem sei $G_0 := \{\, a \in G \mid G_a \neq \emptyset \,\}$.

Bemerkungen. $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ sei l-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$.

(a) Jeder linksinvariante echte Teilraum von $(P,\mathcal{L})$ ist singulär: Ist nämlich T ein linksinvarianter Teilraum von $(P,\mathcal{L})$ und existiert ein Punkt $a \in T \cap G$, so folgt für jedes $b \in G$:

$b = (ba^{-1})a \in (ba^{-1})T = T$; das ergibt $G \subseteq T$ und damit $T = P$, da $(G, \mathcal{G})$ projektiv-eingebettet und T ein Teilraum von $(P, \mathcal{L})$ ist. – Insbesondere sind alle linksinvarianten Punkte singulär, wenn $|P| \geq 2$ gilt. Entsprechende Aussagen erhält man für rechtsinvariante Punkte und Teilräume, wenn $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ ist.

(b) Beachte, daß die Mengen G_a und G_0 im allgemeinen von $(P, \mathcal{L})$ abhängen.

Beispiel. Es sei $(K, +, \cdot\,)$ ein kommutativer Körper, $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3)$ eine Basis und $\mathfrak{o}$ der Nullvektor des K-Linksvektorraumes $N := K^3$. Dann wird (N, K) durch distributive Fortsetzung von

$$\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_j := \begin{cases} \mathfrak{o}\,, & \{i,j\} \neq \{2,3\} \\ \mathfrak{e}_1\,, & (i,j) = (2,3) \\ -\mathfrak{e}_1\,, & (i,j) = (3,2) \end{cases} \quad , \qquad \text{für } 1 \leq i,j \leq 3$$

zu einer Algebra, in der $\mathfrak{x}^2 = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{y} \in K\mathfrak{e}_1$ für alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in N$ gilt. Also ist die direkte Summe $A := K \oplus N$ eine lokale K-Algebra mit maximalem Ideal N. Wir betrachten die projektive Ableitung von (A, K) nach $E := E_A = A \setminus N$, die wegen $A = K + N = K + E$ l-r-eingebettet in $\Pi(A, K)$ ist und mit $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ bezeichnet wird; es gilt $G = \varphi(E) = \{\, \varphi(1 + \mathfrak{x}) \mid \mathfrak{x} \in N \,\}$, und $(G, \mathcal{G})$ ist für $K \neq \mathbb{Z}_2$ ein affiner Raum. – Nun sollen die Mengen G_a und G_0 bestimmt werden.

Für $\mathfrak{x} \in N$ ist zunächst durch $\mathfrak{x}^\perp := \{\mathfrak{y} \in N \mid \mathfrak{y}\mathfrak{x} = 0\}$ ein Untervektorraum von (N, K) definiert, der $K\mathfrak{x} + K\mathfrak{e}_1$ enthält. Für $\mathfrak{x} \in K\mathfrak{e}_1$ gilt offenbar $\mathfrak{x}^\perp = N$; für $\mathfrak{x} \in N \setminus K\mathfrak{e}_1$ folgt $\{\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3\} \not\subseteq \mathfrak{x}^\perp$, also $\mathfrak{x}^\perp \neq N$ und damit aus Dimensionsgründen $\mathfrak{x}^\perp = K\mathfrak{x} + K\mathfrak{e}_1$. – Nun seien $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in N$ mit $\mathfrak{y} \notin \mathfrak{x}^\perp$. Da dann $\mathfrak{y}\mathfrak{x} \in K^*\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{x} \notin K\mathfrak{e}_1$ gelten, sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\mathfrak{x}$ wegen $\mathfrak{y} \notin \mathfrak{x}^\perp = K\mathfrak{x} + K\mathfrak{e}_1 = K\mathfrak{x} + K\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ linear unabhängig. Wir haben gezeigt

(∗) Für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in N$ gilt genau dann $\mathfrak{y} \notin \mathfrak{x}^\perp$, wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\mathfrak{x}$ linear unabhängig sind.

Damit folgt für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in N$ wegen $(1 + \mathfrak{y})(1 + \mathfrak{x}) = 1 + \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{y}\mathfrak{x}$:

$$\begin{aligned} \varphi(1+\mathfrak{y}) \in G_{\varphi(1+\mathfrak{x})} &\iff \dim\langle \varphi(1), \varphi(1+\mathfrak{x}), \varphi(1+\mathfrak{y}), \varphi(1+\mathfrak{y})\varphi(1+\mathfrak{x}) \rangle = 3 \iff \\ &\iff 1, 1+\mathfrak{x}, 1+\mathfrak{y}, (1+\mathfrak{y})(1+\mathfrak{x}) \text{ linear unabhängig } \iff \\ &\iff \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}\mathfrak{x} \text{ linear unabhängig } \overset{(*)}{\iff} \mathfrak{y} \notin \mathfrak{x}^\perp\,. \end{aligned}$$

Nun erhält man $G_{\varphi(1+\mathfrak{x})} = \emptyset$ für $\mathfrak{x} \in K\mathfrak{e}_1$ und

$$G_{\varphi(1+\mathfrak{x})} = \{\, \varphi(1+\mathfrak{y}) \mid \mathfrak{y} \in N \setminus (K\mathfrak{x} + K\mathfrak{e}_1) \,\}\,,$$

wenn $\mathfrak{x} \notin K\mathfrak{e}_1$ ist. Also gilt $G_0 = \{\, \varphi(1+\mathfrak{x}) \mid \mathfrak{x} \in N \setminus K\mathfrak{e}_1 \,\} \neq \emptyset$, d.h. G_0 füllt den Raum $(G, \mathcal{G})$ bis auf die Gerade $\{\, \varphi(1+\mathfrak{x}) \mid \mathfrak{x} \in K\mathfrak{e}_1 \,\}$ aus.

Im übrigen sieht man leicht, daß (A, K) eine kinematische Algebra und $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ damit sogar ein kinematischer Raum ist.

Welcher Zusammenhang zwischen den linksinvarianten Punkten einer l-eingebetteten Inzidenzgruppe und der Menge G_0 besteht, zeigt

(1.13) *Es sei $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ l-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ und $a \in G \setminus \{1\}$.*

(a) *Enthält $\langle 1, a\rangle$ einen linksinvarianten Punkt, so gelten $\overline{1,a} < (G, \cdot\,)$ und $a \notin G_0$.*

(b) *Für $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 2$ ist $x \in \langle 1, a\rangle \setminus \{1\}$ genau dann linksinvariant, wenn für alle $b \in G \setminus \overline{1,a}$ gilt: $x \in b\langle 1, a\rangle$.*

(c) *Ist $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$ und $a \notin G_0$, so enthält $\langle 1, a\rangle$ einen linksinvarianten Punkt.*

Beweis. *Zu (a):* Ist $x \in \langle 1, a\rangle$ linksinvariant, so wegen $a \neq 1$ auch singulär. Damit folgt für $b, c \in \overline{1,a}$

$$b^{-1}c \in b^{-1}\langle 1, a\rangle = b^{-1}\langle b, x\rangle = \langle 1, x\rangle = \langle 1, a\rangle\,;$$

daher gilt $\overline{1,a} < (G, \cdot\,)$. – Wegen $ba \in b\langle 1, x\rangle = \langle b, x\rangle \subseteq \langle 1, a, b\rangle$ für $b \in G$ ist $G_a = \emptyset$, also $a \notin G_0$.

Zu (b): Sei $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 2$ und $x \in \langle 1, a\rangle \setminus \{1\}$. Die Bedingung ist offenbar notwendig; wir zeigen, daß sie auch hinreichend ist: Es gelte also $x \in b\langle 1, a\rangle$ für alle $b \in G \setminus \overline{1,a}$. Sei zunächst $c \in \overline{1,a}$; wir wollen $x \in c\langle 1, a\rangle$ zeigen und dürfen dazu $c \neq 1$ annehmen. Ist $c^{-1} \in \overline{1,a}$, so folgt

$$x \in \langle 1, a\rangle = \langle c, 1\rangle = c\langle 1, c^{-1}\rangle = c\langle 1, a\rangle\,.$$

Ist hingegen $c^{-1} \notin \overline{1,a}$, so gilt nach Voraussetzung $x \in c^{-1}\langle 1, a\rangle$ und damit $cx \in \langle 1, a\rangle$; also erhält man wegen $x \neq 1$

$$x \in \langle 1, a\rangle = \langle c, cx\rangle = c\langle 1, x\rangle = c\langle 1, a\rangle\,.$$

Daher gilt $x \in b\langle 1, a\rangle$ für alle $b \in G$. – Nun sei $b \in G$ beliebig. Wegen $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 2$ existiert ein $c \in G \setminus \overline{1,a}$, und es gilt $x \in b^{-1}\langle 1, a\rangle$, $b^{-1}c\langle 1, a\rangle$. Damit folgt

$$bx = \langle 1, a\rangle \cap c\langle 1, a\rangle = x\,,$$

also ist x linksinvariant.

Zu (c): Wegen $a \notin G_0$ existiert zu jedem $b \in G \setminus \overline{1,a}$ der Punkt $x_{a,b} := \langle 1, a\rangle \cap b\langle 1, a\rangle$. – Nun seien $b, c \in G \setminus \overline{1,a}$; wir zeigen $x_{a,b} = x_{a,c} \neq 1$, denn dann ist $x_{a,b}$ nach (b) linksinvariant.

(i) Ist $c \notin \langle 1, a, b\rangle$, so folgt wegen $b\langle 1, a\rangle \subseteq \langle 1, a, b\rangle$: $c \notin b\langle 1, a\rangle$. Da dann $b^{-1}c \notin \overline{1,a}$ gilt, existiert der Punkt $x_{a,b^{-1}c}$, und man erhält

$$bx_{a,b^{-1}c} \in b\langle 1, a\rangle \cap c\langle 1, a\rangle \subseteq \langle 1, a, b\rangle \cap c\langle 1, a\rangle\,.$$

Also sind c, $bx_{a,b^{-1}c}$ und $x_{a,c}$ kollinear, was wegen $c \notin \langle 1, a, b\rangle$ auf $bx_{a,b^{-1}c} = x_{a,c}$ führt. Damit folgt $x_{a,c} = \langle 1, a\rangle \cap b\langle 1, a\rangle = x_{a,b}$.

(ii) Ist $c \in \langle 1, a, b\rangle$, so existiert wegen $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$ ein $d \in G \setminus \langle 1, a, b\rangle$, und mit (i) erhält man $x_{a,b} = x_{a,d} = x_{a,c}$.

(i) und (ii) ergeben nun zunächst $x_{a,b} = x_{a,c}$ für alle $b, c \in G \setminus \overline{1,a}$. Da zu beliebigem $b \in G \setminus \overline{1,a}$ wegen $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$ ein $c \in G \setminus \langle 1, a, b\rangle$ existiert und dann wie in (i) $bx_{a,b^{-1}c} = x_{a,c}$ folgt, gilt $bx_{a,b} = x_{a,b}$ und daher auch $x_{a,b} \neq 1$. □

Bemerkungen. (a) Aus Symmetriegründen gelten im l-r-eingebetteten Fall entsprechende Aussagen für rechtsinvariante Punkte.

(b) Translations- und Strecktranslationsräume sind nach (a) linear gefasert, und es gilt stets $G_0 = \emptyset$.

Unmittelbar aus (1.13)(c) und (a) erhält man noch

(1.14) Folgerung. *Ist* $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ *l-eingebettet in* $(P, \mathcal{L})$ *und* $\overline{1, a}$ *für ein* $a \in G$ *keine Untergruppe von* $(G, \cdot\,)$*, so gilt* $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$ *oder* $a \in G_0$.

1.5 Unvollständige Algebren

Zur algebraischen Darstellung der l-eingebetteten Inzidenzgruppen führen wir nun ein:

Definition. (a) Es seien F, E, K Mengen und $0 \in F$ mit $K \subseteq E \cup \{0\} \subseteq F$, weiter gebe es zwei Operationen $+ : F \times F \to F$ und $\cdot : (E \cup \{0\}) \times F \to F$. $(F, E, K, +, \cdot\,)$ heißt *unvollständige Algebra*, wenn die folgenden Axiome gelten:

(UA 1) $((F, +\,), (K, +, \cdot\,), \cdot\,)$ ist ein Linksvektorraum mit Nullvektor 0.

(UA 2) $(E, \cdot\,)$ ist eine Gruppe mit $K^* \lhd (E, \cdot\,)$.

(UA 3) Für alle $\mathfrak{a} \in E$ und alle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in F$ gilt: $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{y}$.

(UA 4) $F = K + E$.

(b) Sind $(F, E, K, +, \cdot\,)$ und $(F', E', K', +', *)$ unvollständige Algebren, so heißt $(F, E, K, +, \cdot\,)$ *isomorph* zu $(F', E', K', +', *)$, wenn es einen Gruppenisomorphismus $\Psi\colon (F, +\,) \to (F', +'\,)$ mit $\Psi(K) = K'$ gibt, für den auch $\Psi_{|E}\colon (E, \cdot\,) \to (E', *\,)$ ein Gruppenisomorphismus ist.

Beispiele. (a) $((A, +, \cdot\,), (K, +, \cdot\,), \cdot\,)$ sei eine unitäre Algebra mit $(K, +, \cdot\,) < (A, +, \cdot\,)$ und Einheitengruppe $(E_A, \cdot\,)$. Für $E < (E_A, \cdot\,)$ mit $K^* \subseteq E$ und $A = K + E$ ist $(A, E, K, +, \cdot\,)$ eine unvollständige Algebra. – Beachte, daß für $E < (E_A, \cdot\,)$ mit $A = K + K^*E$ die Menge $E' := K^*E$ eine Untergruppe von $(E_A, \cdot\,)$ mit $K^* \subseteq E'$ und $A = K + E'$ ist; die projektiven Ableitungen nach E bzw. E' sind wegen $\varphi(E) = \varphi(E')$ identisch. (Vgl. auch Beispiel (a)(ii) auf Seite 17.)

(b) $(\mathbb{H}, +, \cdot\,)$ bezeichne den Quaternionenschiefkörper mit der üblichen Basis $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ über $\mathbb{R}$. Setzt man $F := \mathbb{H}$, $K := \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathrm{i}$ und $E := \mathbb{C}^* \cup \mathbb{C}^*\mathrm{j}$, so ist $(F, E, K, +, \cdot\,)$ eine unvollständige Algebra.

(c) Die normalen lokalen Fastmoduln (in [13] als *normale Fastmoduln* eingeführt) sind gerade die unvollständigen Algebren, für die $F \setminus E$ ein Teilraum von (F, K) ist; insbesondere sind also alle normalen Fastkörper (zur Definition vgl. [4]) unvollständige Algebren. – Auch die normalen bilokalen Fastmoduln aus [24] sind unvollständige Algebren (für (UA 4) muß hier in einigen Fällen $K = \mathbb{Z}_2$ ausgeschlossen werden).

Wir zeigen nun zunächst den folgenden Hilfssatz:

(1.15) *$(F, E, K, +, \cdot)$ sei eine unvollständige Algebra.*

***(a)** Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E \cup \{0\}$ und $\mathfrak{x} \in F$ gilt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{x} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{x})$.*

***(b)** Für $\mathfrak{a} \in E$ ist die Abbildung $\mathfrak{a}_l : \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ eine bijektive semilineare Abbildung von (F, K) mit Begleitautomorphismus $\widetilde{\mathfrak{a}}: \lambda \mapsto \mathfrak{a}\lambda\mathfrak{a}^{-1}$.*

Beweis. Für jedes $\mathfrak{x} \in F$ gilt wegen (UA 1) $0 \cdot \mathfrak{x} = 0$; da andererseits aus (UA 3) sofort $\mathfrak{a} \cdot 0 = 0$ für alle $\mathfrak{a} \in E$ folgt, erhält man mit (UA 2), daß $(E \cup \{0\}, \cdot)$ eine Halbgruppe ist. Außerdem gilt (UA 3) auch dann noch, wenn man dort $\mathfrak{a} = 0$ zuläßt.

Zu (a): Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E \cup \{0\}$ und $\mathfrak{x} \in F$. Wegen (UA 4) existieren $\gamma \in K$, $\mathfrak{c} \in E$ mit $\mathfrak{x} = \gamma + \mathfrak{c}$; nun ergibt sich

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{x} &= (\mathfrak{a}\mathfrak{b})(\gamma + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\gamma + (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\gamma) + \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \\ &= \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\gamma + \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}(\gamma + \mathfrak{c})) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{x}) .\end{aligned}$$

Zu (b): Wir zeigen zunächst $\widetilde{\mathfrak{a}} \in \mathrm{Aut}(K, +, \cdot)$: Wegen (UA 2) ist $\widetilde{\mathfrak{a}}_{|K^*}$ ein Automorphismus von $(K^*, \cdot)$; da $\widetilde{\mathfrak{a}}(0) = 0$ gilt, ist $\widetilde{\mathfrak{a}}$ also bijektiv und mit der Multiplikation von $(K, +, \cdot)$ verträglich. Für $\lambda, \mu \in K$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda + \mu) &= \mathfrak{a}(\lambda + \mu)\mathfrak{a}^{-1} \overset{\text{(UA 1)}}{=} \mathfrak{a}(\lambda\mathfrak{a}^{-1} + \mu\mathfrak{a}^{-1}) \overset{\text{(UA 3)}}{=} \\ &= \mathfrak{a}\lambda\mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{a}\mu\mathfrak{a}^{-1} = \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) ,\end{aligned}$$

und damit folgt $\widetilde{\mathfrak{a}} \in \mathrm{Aut}(K, +, \cdot)$. – Nun sei $\mathfrak{x} \in F$. Für $\lambda \in K$ gilt $\mathfrak{a}\lambda = (\mathfrak{a}\lambda\mathfrak{a}^{-1})\mathfrak{a} = \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\mathfrak{a}$, also

$$\mathfrak{a}_l(\lambda\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}(\lambda\mathfrak{x}) \overset{\text{(a)}}{=} (\mathfrak{a}\lambda)\mathfrak{x} = (\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\mathfrak{a})\mathfrak{x} \overset{\text{(a)}}{=} \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) \cdot (\mathfrak{a}\mathfrak{x}) = \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) \cdot \mathfrak{a}_l(\mathfrak{x}) .$$

Wegen (UA 3) und $\widetilde{\mathfrak{a}} \in \mathrm{Aut}(K, +, \cdot)$ ist $\mathfrak{a}_l$ damit semilinear mit Begleitautomorphismus $\widetilde{\mathfrak{a}}$; die Abbildung $\mathfrak{a}_l$ ist außerdem bijektiv, denn $(\mathfrak{a}^{-1})_l$ ist wegen (a) ihre Umkehrabbildung. □

Jede unvollständige Algebra stellt eine l-eingebettete Inzidenzgruppe dar:

(1.16) Satz. *$(F, E, K, +, \cdot)$ sei eine unvollständige Algebra, $(\varphi(E), \mathcal{G})$ der Spurraum von $\varphi(E)$ in $\Pi(F, K)$ und $(\varphi(E), \cdot)$ die Faktorgruppe von $(E, \cdot)$ nach K^*. Dann ist $(\varphi(E), \mathcal{G}, \cdot)$ eine Inzidenzgruppe, die l-eingebettet ist in $\Pi(F, K)$.*

Beweis. Wegen $K^* \lhd (E, \cdot)$ ist $(\varphi(E), \cdot)$ zunächst eine Gruppe. Für $\mathfrak{a} \in E$ ist $\mathfrak{a}_l$ nach (1.15)(b) eine bijektive semilineare Abbildung von (F, K), induziert also eine Kollineation $\varphi(\mathfrak{a})_l{}^*$ auf $\Pi(F, K)$. Nun ist $\varphi(\mathfrak{a})_l$ gerade die Restriktion von $\varphi(\mathfrak{a})_l{}^*$ auf $\varphi(E)$ und damit eine Kollineation von $(\varphi(E), \mathcal{G})$; $(\varphi(E), \mathcal{G}, \cdot)$ ist daher eine Inzidenzgruppe, die (LE 2) bezüglich $\Pi(F, K)$ erfüllt. – (UA 4) ergibt, daß jede Gerade von $\Pi(F, K)$ durch $\varphi(1)$ einen weiteren Punkt aus $\varphi(E)$ enthält; da jede Gerade von $\Pi(F, K)$, die $\varphi(E)$ schneidet, in der Form $\varphi(\mathfrak{a})_l{}^*(l)$ für ein $\mathfrak{a} \in E$ und eine Gerade l von $\Pi(F, K)$ durch $\varphi(1)$ darstellbar ist, folgt nun auch (LE 1). □

Wir zeigen nun, daß der Isomorphiebegriff für unvollständige Algebren für unsere Zwecke sinnvoll gewählt ist:

(1.17) *$(F, E, K, +, \cdot\,)$ und $(F', E', K', +', *)$ seien unvollständige Algebren mit zugehörigen Inzidenzgruppen $(\varphi(E), \mathcal{G}, \cdot\,)$ bzw. $(\varphi(E'), \mathcal{G}', *\,)$; weiter gelte $\dim(F, K) \geq 3$. $(F, E, K, +, \cdot\,)$ ist genau dann zu $(F', E', K', +', *)$ isomorph, wenn es einen Isomorphismus ψ von $\Pi(F, K)$ auf $\Pi(F', K')$ gibt, für den $\psi_{|\varphi(E)}$ ein Isomorphismus von $(\varphi(E), \mathcal{G}, \cdot\,)$ auf $(\varphi(E'), \mathcal{G}', *\,)$ ist.*

Beweis. Ist $\Psi\colon F \to F'$ ein Isomorphismus von $(F, E, K, +, \cdot\,)$ auf $(F', E', K', +', *)$, so insbesondere eine bijektive semilineare Abbildung von (F, K) auf (F', K') mit Begleitisomorphismus $\Psi_{|K}$; also induziert Ψ einen Isomorphismus ψ von $\Pi(F, K)$ auf $\Pi(F', K')$. Da $\Psi_{|E}$ die Gruppe $(E, \cdot\,)$ isomorph auf $(E', *)$ abbildet, ist $\psi_{|\varphi(E)}$ schließlich auch ein Isomorphismus von $(\varphi(E), \mathcal{G}, \cdot\,)$ auf $(\varphi(E'), \mathcal{G}', *\,)$.

Nun sei ψ ein Isomorphismus von $\Pi(F, K)$ auf $\Pi(F', K')$, für den $\psi_{|\varphi(E)}$ ein Isomorphismus von $(\varphi(E), \mathcal{G}, \cdot\,)$ auf $(\varphi(E'), \mathcal{G}', *\,)$ ist. Wegen $\psi(\varphi(1)) = \varphi(1')$ gibt es nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie[3] dann eine bijektive semilineare Abbildung Ψ von (F, K) auf (F', K') mit $\Psi(1) = 1'$, die ψ induziert. – Wir zeigen, daß Ψ der gesuchte Isomorphismus der unvollständigen Algebren ist.

Zunächst ist Ψ offenbar ein Isomorphismus von $(F, +)$ auf $(F', +')$. Außerdem ergibt $\varphi(\Psi(E)) = \psi(\varphi(E)) = \varphi(E')$: $\Psi(E) = E'$, und mit dem Begleitisomorphismus δ von Ψ erhält man

$$\Psi(K) = \Psi(K \cdot 1) = \delta(K) * \Psi(1) = K' * 1' = K'\,.$$

Nun sei $\mathfrak{a} \in E$; wir zeigen $\Psi \circ \mathfrak{a}_l = \Psi(\mathfrak{a})_l \circ \Psi$, denn dann folgt für $\mathfrak{b} \in E$

$$\Psi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \Psi \circ \mathfrak{a}_l(\mathfrak{b}) = \Psi(\mathfrak{a})_l \circ \Psi(\mathfrak{b}) = \Psi(\mathfrak{a}) * \Psi(\mathfrak{b})$$

und damit, daß $\Psi_{|E}$ ein Isomorphismus von $(E, \cdot\,)$ auf $(E', *\,)$ ist. – Für $\mathfrak{b} \in E$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}\varphi(\Psi \circ \mathfrak{a}_l(\mathfrak{b})) &= \varphi(\Psi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})) = \psi(\varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})) = \psi(\varphi(\mathfrak{a})\varphi(\mathfrak{b})) = \psi(\varphi(\mathfrak{a})) * \psi(\varphi(\mathfrak{b})) = \\ &= \varphi(\Psi(\mathfrak{a})) * \varphi(\Psi(\mathfrak{b})) = \varphi(\Psi(\mathfrak{a}) * \Psi(\mathfrak{b})) = \varphi(\Psi(\mathfrak{a})_l \circ \Psi(\mathfrak{b}))\,.\end{aligned}$$

Also stimmen die von $\Psi \circ \mathfrak{a}_l$ und $\Psi(\mathfrak{a})_l \circ \Psi$ induzierten Isomorphismen auf $G = \varphi(E)$ und damit nach (1.3) sogar auf $\Pi(F, K)$ überein; wegen

$$\Psi \circ \mathfrak{a}_l(1) = \Psi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a}) * 1' = \Psi(\mathfrak{a}) * \Psi(1) = \Psi(\mathfrak{a})_l \circ \Psi(1)$$

folgt nun mit dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie unmittelbar die behauptete Identität. □

Mit dem Verfahren aus [4] beweisen wir nun:

(1.18) Satz. *$(P, \mathcal{L})$ sei ein desarguesscher projektiver Raum mit $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 2$ und $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ eine Inzidenzgruppe, die l-eingebettet ist in $(P, \mathcal{L})$. Dann existieren eine unvollständige Algebra $(F, E, K, +, \cdot\,)$ und ein Isomorphismus σ von $(P, \mathcal{L})$ auf $\Pi(F, K)$, für den $\sigma_{|G}$ ein Isomorphismus von $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ auf die zu $(F, E, K, +, \cdot\,)$ gehörende Inzidenzgruppe ist. – Unvollständige Algebren mit dieser Eigenschaft sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

[3] Vgl. etwa (1.5) in [8].

Beweis. Da $(P,\mathcal{L})$ desarguessch ist, existiert ein Linksvektorraum $((F,+),(K,+,\cdot),\cdot)$ mit $(P,\mathcal{L}) \cong \Pi(F,K)$. Wir identifizieren die beiden Räume miteinander, setzen $E := \varphi^{-1}(G)$ und wählen ein $\mathfrak{e} \in \varphi^{-1}(1)$. Weil $: \lambda \mapsto \lambda\mathfrak{e}$ einen Monomorphismus von $(K,+)$ in $(F,+)$ beschreibt, dürfen wir annehmen, daß $(K,+)$ eine Untergruppe von $(F,+)$ und $\mathfrak{e}$ das Einselement 1 von $(K,+,\cdot)$ ist.

Für $\mathfrak{a} \in E$ ist $\varphi(\mathfrak{a})_l \colon P \to P$ eine Kollineation von $\Pi(F,K)$; wegen

$$\varphi(\mathfrak{a})_l(\varphi(1)) = \varphi(\mathfrak{a}) \cdot \varphi(1) = \varphi(\mathfrak{a})$$

existiert dann nach dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie eine eindeutig bestimmte bijektive semilineare Abbildung $\mathfrak{a}_l$ von (F,K), die $\varphi(\mathfrak{a})_l$ induziert und für die $\mathfrak{a}_l(1) = \mathfrak{a}$ gilt. – Nun setzen wir für $\mathfrak{a} \in E \cup \{0\}$ und $\mathfrak{x} \in F$

$$\mathfrak{a} * \mathfrak{x} := \begin{cases} \mathfrak{a}_l(\mathfrak{x}), & \text{falls } \mathfrak{a} \in E, \\ 0, & \text{falls } \mathfrak{a} = 0. \end{cases}$$

Diese Operation kann als Fortsetzung der Skalarmultiplikation aufgefaßt werden, denn für $\lambda \in K^*$ und $\mathfrak{x} \in F$ gilt wegen der Eindeutigkeit von λ_l: $\lambda\mathfrak{x} = \lambda_l(\mathfrak{x}) = \lambda * \mathfrak{x}$; statt $\mathfrak{a} * \mathfrak{x}$ schreiben wir deshalb $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{a}\mathfrak{x}$. – Für $(F,E,K,+,\cdot)$ gelten zunächst offenbar (UA 1) und (UA 3).

Wir wollen zeigen, daß $(E,\cdot)$ eine Gruppe ist, und wählen dazu $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in E$ und $\mathfrak{x} \in F^*$. Es gilt

$$\varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{x}) = \varphi(\mathfrak{a}_l(\mathfrak{x})) = \varphi(\mathfrak{a})_l(\varphi(\mathfrak{x})) = \varphi(\mathfrak{a})\varphi(\mathfrak{x})\,. \tag{$*$}$$

Daraus erhält man zunächst $\mathfrak{a} \cdot E = E$, insbesondere also $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \in E$. Nun folgt weiter

$$\varphi((\mathfrak{a}\mathfrak{b})_l(\mathfrak{x})) = \varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \cdot \varphi(\mathfrak{x}) = (\varphi(\mathfrak{a}) \cdot \varphi(\mathfrak{b})) \cdot \varphi(\mathfrak{x}) = \varphi(\mathfrak{a}) \cdot (\varphi(\mathfrak{b}) \cdot \varphi(\mathfrak{x})) = \varphi(\mathfrak{a}_l \circ \mathfrak{b}_l(\mathfrak{x}))\,.$$

Damit induzieren die semilinearen Abbildungen $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})_l$ und $\mathfrak{a}_l \circ \mathfrak{b}_l$ dieselbe Kollineation auf $\Pi(F,K)$, und da sie auf 1 übereinstimmen, sind sie gleich; daher gilt

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{x} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})_l(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}_l \circ \mathfrak{b}_l(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{x})\,.$$

$(E,\cdot)$ ist somit eine Halbgruppe, wegen $1 \in E$, $\mathfrak{a} \cdot 1 = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} \cdot E = E$ also sogar eine Gruppe. Nun erhält man aus $(*)$ und $\varphi(E) = G$, daß $\varphi_{|E} \colon E \to G$ ein Epimorphismus ist. Also gilt $K^* = \mathrm{Kern}\varphi_{|E} \lhd (E,\cdot)$ und damit (UA 2); außerdem ist $(G,\cdot)$ die Faktorgruppe von $(E,\cdot)$ nach K^*.

(UA 4) folgt schließlich, weil jede Gerade aus $\Pi(F,K)$ durch $\varphi(1)$ noch mindestens einen weiteren regulären Punkt enthält. – Also ist $(F,E,K,+,\cdot)$ eine unvollständige Algebra, und es gilt $(G,\mathcal{G},\cdot) = (\varphi(E),\mathcal{G},\cdot)$. Die Eindeutigkeit von $(F,E,K,+,\cdot)$ ergibt sich aus (1.17). $\square$

Nach Beispiel (a) auf Seite 21 kann man aus unitären Algebren unter bestimmten Voraussetzungen unvollständige Algebren gewinnen. Es stellt sich die Frage, wie man diese unvollständigen Algebren kennzeichnen kann; unter welchen Bedingungen also ist die Multiplikation einer unvollständigen Algebra so fortsetzbar, daß eine Algebra entsteht. – Wir führen zunächst ein:

Definition. Es sei $(F, E, K, +, \cdot\,)$ eine unvollständige Algebra und $(\varphi(E), \mathcal{G}, \cdot\,)$ ihre Inzidenzgruppe.

(a) $(F, E, K, +, \cdot\,)$ heißt *zweiseitig*, wenn $(\varphi(E), \mathcal{G}, \cdot\,)$ l-r-eingebettet in $\Pi(F, K)$ ist, und *kinematisch*, wenn $(\varphi(E), \mathcal{G}, \cdot\,)$ zusätzlich noch linear gefasert ist.

(b) $(F, E, K, +, \cdot\,)$ heißt *fortsetzbar*, wenn die Operation „$\cdot$" so zu einer Multiplikation „$*$" fortgesetzt werden kann, daß $((F, +, *\,), (K, +, *\,), *\,)$ eine Algebra ist.

Der folgende Satz gibt Bedingungen für die Fortsetzbarkeit unvollständiger Algebren an.

(1.19) Satz. *Für eine unvollständige Algebra* $(F, E, K, +, \cdot\,)$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es existiert eine Operation* $*\colon F \times F \to F$ *derart, daß* $(F, +, *\,)$ *ein Ring ist und* $\mathfrak{a} * \mathfrak{x} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}$ *für alle* $\mathfrak{a} \in E\ \cup \{0\}$, $\mathfrak{x} \in F$ *gilt.*

(ii) *Für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E \cup \{0\}$ *und* $\mathfrak{c} \in E$ *mit* $1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in E$ *gilt:* $(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

Gilt (i), so ist $((F, +, *\,), (K, +, *\,), *\,)$ *für* $\dim(F, K) \geq 3$ *eine Algebra.*

Beweis. Die Richtung „(i) $\Rightarrow$ (ii)" ist trivial; wir zeigen „(ii) $\Rightarrow$ (i)". Ohne weiteren Hinweis wird im folgenden (1.15)(a) verwendet. – Zunächst erhält man mit (UA 3) und (UA 4) aus (ii)

(1) Für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E \cup \{0\}$, $\mathfrak{x} \in F$ mit $1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in E$ gilt: $(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{x} = \mathfrak{x} + \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{x}$.

Als nächstes zeigen wir

(2) Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in E \cup \{0\}$ mit $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_2$, so folgt für $\mathfrak{x} \in F$: $\mathfrak{a}_1\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_2\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_2\mathfrak{x}$.

Gilt $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 = 0$, so erhält man für $i = 1, 2$

$$\mathfrak{a}_i\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_i\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_i\mathfrak{x} + (-\mathfrak{a}_i)\mathfrak{x} = (1 + (-1))\mathfrak{a}_i\mathfrak{x} = 0\,.$$

Wir nehmen also $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1 \neq 0$ und daher etwa $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \neq 0$ an. Dann ergibt sich für $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_1{}^{-1}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b} := \mathfrak{a}_1{}^{-1}(-\mathfrak{b}_2)$ wegen $1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1{}^{-1}\mathfrak{a}_2 \in E$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_2\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{x} &\overset{(1)}{=} \mathfrak{a}_1(\mathfrak{x} + \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{x}) \overset{(\mathrm{UA}\,3)}{=} \\ &= \mathfrak{a}_1\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{x} + \mathfrak{b}_1\mathfrak{x} - \mathfrak{b}_2\mathfrak{x}\,, \end{aligned}$$

und damit folgt (2).

Nun definieren wir die Ringmultiplikation: Zu $\mathfrak{x} \in F$ existieren nach (UA 4) $\alpha \in K$, $\mathfrak{a} \in E$ mit $\mathfrak{x} = \alpha + \mathfrak{a}$; wir setzen $\mathfrak{x} * \mathfrak{y} := \alpha\mathfrak{y} + \mathfrak{a}\mathfrak{y}$, wenn $\mathfrak{y} \in F$ ist. Aus (2) folgt, daß diese Multiplikation wohldefiniert ist; außerdem gilt $\mathfrak{a} * \mathfrak{x} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{a} \in E \cup \{0\}$, $\mathfrak{x} \in F$. Es bleibt zu zeigen, daß $(F, +, *\,)$ ein Ring ist.

Mit (UA 3) folgt sofort das Linksdistributivgesetz $\mathfrak{x} * (\mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = \mathfrak{x} * \mathfrak{y} + \mathfrak{x} * \mathfrak{z}$. – Das Rechtsdistributivgesetz erhält man, wenn man zu $\alpha, \beta\ \in K$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ und $\mathfrak{x} \in F$ zunächst $\gamma \in K$ und $\mathfrak{c} \in E$ mit $\alpha + \beta + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \gamma + \mathfrak{c}$ wählt; dann folgt wegen $(\gamma - \alpha - \beta) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$:

$$\begin{aligned} ((\alpha + \mathfrak{a}) + (\beta + \mathfrak{b})) * \mathfrak{x} &= (\gamma + \mathfrak{c}) * \mathfrak{x} = \gamma\mathfrak{x} + \mathfrak{c}\mathfrak{x} = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{x} + (\gamma - \alpha - \beta)\mathfrak{x} + \mathfrak{c}\mathfrak{x} = \\ &\overset{(2)}{=} \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{x} + \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{x} = (\alpha + \mathfrak{a}) * \mathfrak{x} + (\beta + \mathfrak{b}) * \mathfrak{x}\,. \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{a} * \mathfrak{x} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ für $\mathfrak{a} \in E \cup \{0\}$, $\mathfrak{x} \in F$ gilt, ergibt sich mit dem Rechtsdistributivgesetz, wenn $\alpha, \beta \in K$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ und $\mathfrak{x} \in F$ sind:

$$\begin{aligned}((\alpha + \mathfrak{a}) * (\beta + \mathfrak{b})) * \mathfrak{x} &\overset{(\mathrm{UA}\,3)}{=} (\alpha(\beta + \mathfrak{b}) + \mathfrak{a}(\beta + \mathfrak{b})) * \mathfrak{x} = (\alpha\beta + \alpha\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\beta + \mathfrak{a}\mathfrak{b}) * \mathfrak{x} = \\ &= (\alpha\beta) * \mathfrak{x} + (\alpha\mathfrak{b}) * \mathfrak{x} + (\mathfrak{a}\beta) * \mathfrak{x} + (\mathfrak{a}\mathfrak{b}) * \mathfrak{x} = \alpha\beta\mathfrak{x} + \alpha\mathfrak{b}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}\beta\mathfrak{x} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x} \overset{(\mathrm{UA}\,3)}{=} \\ &= \alpha(\beta\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{x}) + \mathfrak{a}(\beta\mathfrak{x} + \mathfrak{b}\mathfrak{x}) = (\alpha + \mathfrak{a}) * ((\beta + \mathfrak{b}) * \mathfrak{x}) .\end{aligned}$$

Also ist $(F, +, *)$ ein Ring, und wir erhalten (i).

Nun gelte (i), und es sei $\dim(F, K) \geq 3$; wir zeigen, daß K im Zentrum von $(F, +, *)$ liegt. Da „$\cdot$“ und „$*$“ auf $(E \cup \{0\}) \times F$ übereinstimmen, folgt mit (UA 4) zunächst, daß der Ring $(F, +, *)$ unitär mit Einselement 1 ist und $(E, \cdot)$ eine Untergruppe seiner Einheitengruppe. Nun sei $\lambda \in K^*$. Wir definieren $\lambda_R \colon F \to F$ durch $\lambda_R(\mathfrak{x}) := \mathfrak{x} * \lambda$; offenbar reicht es, $\lambda_R = \lambda_l$ zu zeigen.

Für $\mu \in K$, $\mathfrak{x} \in F$ gilt

$$\lambda_R(\mu\mathfrak{x}) = (\mu\mathfrak{x}) * \lambda = (\mu * \mathfrak{x}) * \lambda = \mu * (\mathfrak{x} * \lambda) = \mu \cdot (\mathfrak{x} * \lambda) = \mu \cdot \lambda_R(\mathfrak{x}) .$$

Also folgt mit dem Rechtsdistributivgesetz und da λ eine Einheit von $(F, +, *)$ ist, daß λ_R eine bijektive lineare Abbildung von (F, K) ist. Die von λ_R auf $\Pi(F, K)$ induzierte Kollineation stimmt wegen $K^* \lhd (E, \cdot)$ auf $\varphi(E)$ und damit nach (1.3) auf ganz $\Pi(F, K)$ mit $\mathrm{id}_{\varphi(F^*)}$ überein. Andererseits induziert auch λ_l auf $\Pi(F, K)$ die Identität, und damit folgt wegen $\lambda_R(1) = \lambda = \lambda_l(1)$ aus dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie $\lambda_R = \lambda_l$. $\square$

Bemerkungen. (a) Die Multiplikation des Ringes $(F, +, *)$ in (i) ist wegen $F = K + E$ durch die Multiplikation der unvollständigen Algebra eindeutig bestimmt; außerdem ist der Ring $(F, +, *)$ stets unitär mit Einselement 1 und $(E, \cdot)$ eine Untergruppe seiner Einheitengruppe.

(b) Gilt $\dim(F, K) \leq 2$, so folgt aus (i) im allgemeinen nicht mehr, daß $(F, +, *)$ eine K-Algebra ist; für $\dim(F, K) = 2$ betrachte Beispiel (b) auf Seite 21, für $F = K$ wähle einen nicht-kommutativen Körper K und setze $E := K^*$.

(c) Man zeigt leicht: Ist eine kinematische unvollständige Algebra zu einer Algebra fortsetzbar, so ist diese kinematisch.

(d) Existiert zu $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in F$ stets ein $\lambda \in K$ mit $\lambda + \mathfrak{x}, -\lambda + \mathfrak{y} \in E \cup \{0\}$ – wie das z.B. der Fall ist, wenn der Spurraum von $\varphi(E)$ in $\Pi(F, K)$ die Voraussetzungen von G in (1.8) erfüllt (vgl. auch (1) im dortigen Beweis) –, so folgt (ii) und damit (i) aus (1.19) bereits, wenn $(1 + \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ für alle $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in E$ mit $1 + \mathfrak{b} \in E$ gilt: In diesem Fall ergibt sich nämlich zunächst

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(1 + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{c} + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in E$ mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in E$. Sind nun $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in E$ mit $1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in E$, so existiert ein $\lambda \in K$ mit $\lambda + \mathfrak{a}, 1 - \lambda + \mathfrak{b} \in E \cup \{0\}$, und damit erhält man

$$\begin{aligned}(1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{b})\mathfrak{c} &= ((\lambda + \mathfrak{a}) + (1 - \lambda + \mathfrak{b}))\mathfrak{c} = (\lambda + \mathfrak{a})\mathfrak{c} + (1 - \lambda + \mathfrak{b})\mathfrak{c} = \\ &= \lambda\mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} + (1 - \lambda)\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} .\end{aligned}$$

(1.20) Folgerung. *$(R, +, \cdot\,)$ sei ein unitärer Ring mit Einheitengruppe $(E_R, \cdot\,)$ und Teilkörper K. Ist der Linksvektorraum (R, K) mindestens dreidimensional und existiert eine Untergruppe E von $(E_R, \cdot\,)$ mit $K^* \lhd (E, \cdot\,)$ und $F = K + E$, so liegt K im Zentrum von $(R, +, \cdot\,)$.*

Beweis. Unter diesen Voraussetzungen ist $(R, E, K, +, \cdot\,)$ eine unvollständige Algebra, also $((R, +, \cdot\,), (K, +, \cdot\,), \cdot\,)$ nach (1.19) wegen $\dim(R, K) \geq 3$ eine Algebra. Damit liegt K im Zentrum von $(R, +, \cdot\,)$. $\square$

Bemerkungen. (a) (1.20) ist eine Variante des Satzes von Cartan-Brauer-Hua (vgl. [1]) für unitäre Ringe.

(b) Wie Beispiel (b) auf Seite 21 zeigt, kann auf die Forderung $\dim(R, K) \geq 3$ in (1.20) nicht verzichtet werden.

Kapitel 2

Linear gefaserte l-eingebettete Inzidenzgruppen

In diesem Kapitel wird untersucht, unter welchen Bedingungen eine linear gefaserte l-eingebettete Inzidenzgruppe zweiseitig oder sogar l-r-eingebettet ist.

Nach [11], (7.4) ist eine linear gefaserte 2-geschlitzte Inzidenzgruppe stets zweiseitig; dies gilt jedoch im allgemeineren l-eingebetteten Fall nicht mehr, wie das Beispiel hinter (2.1) zeigt. (2.7) gibt äquivalente Bedingungen für die Zweiseitigkeit linear gefaserter l-eingebetteter Inzidenzgruppen an; allerdings wird dort $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$ vorausgesetzt.

Im zweiten Abschnitt untersuchen wir linear gefaserte l-eingebettete Inzidenzgruppen mit $G_0 = \emptyset$. Gilt $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$, so sind die Linksmultiplikationen a_l einer solchen Inzidenzgruppe Zentralkollineationen mit einer festen, d.h. nicht von a abhängenden Achse. Die Lage der Zentren der a_l entscheidet darüber, ob die Inzidenzgruppe zweiseitig oder sogar l-r-eingebettet ist (vgl. (2.10)).

Der Fall $G_0 \neq \emptyset$ wird im dritten Abschnitt betrachtet. (2.11) zeigt, daß eine linear gefaserte l-eingebettete Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ mit dieser Eigenschaft bereits dann zweiseitig ist, wenn ein $a \in G_0$ mit $a_r \in \mathrm{Aut}(G, \mathcal{G})$ existiert. Gilt $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 4$ und ist G_0 normal, so ist sie nach (2.18) ebenfalls zweiseitig.

Schließlich weisen wir im vierten Abschnitt nach, daß jede linear gefaserte l-eingebettete Inzidenzgruppe mit (2G4) oder (EGU) bereits l-r-eingebettet ist (vgl. (2.21)); damit folgt hier noch einmal das Ergebnis aus [11], (7.4) für Inzidenzgruppen (beachte auch die Bemerkung hinter (2.20)).

2.1 Grundlegende Eigenschaften

Die folgenden Aussagen gelten zunächst allgemein für linear gefaserte Inzidenzgruppen (vgl. auch [18], (4.10)); in (2.2)(a), (b) werden sie dann auf den l-eingebetteten Fall übertragen.

(2.1) *Ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ eine linear gefaserte Inzidenzgruppe, so gelten für alle $a, b \in G$:*

(a) $b \cdot \overline{1, a} \cdot b \subseteq \overline{1, a, b}$.

(b) $\overline{1, a, b, ab} < (G, \cdot\,)$.

Beweis. *Zu (a):* Für $a, b \in G$ und $c \in \overline{1, a}$ sind $\overline{1, (cb)^{-1}}$ und $\overline{1, a}$ nach Voraussetzung Untergruppen von $(G, \cdot\,)$; daher folgt

$$bcb \in b \cdot \overline{1, (cb)^{-1}} = b \cdot \overline{1, b^{-1}c^{-1}} = \overline{b, c^{-1}} \subseteq \overline{1, a, b}\,.$$

Zu (b): Es gilt:

$$b^{-1}a \in b^{-1} \cdot \overline{1, a^{-1}} = \overline{b^{-1}, b^{-1}a^{-1}} = \overline{b^{-1}, (ab)^{-1}} \subseteq \overline{1, b, ab}\,.$$

Das ergibt einerseits $a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in \overline{1, b^{-1}a} \subseteq \overline{1, b, ab}$; andererseits folgt, da nach (a) $b^{-1}ab^{-1} \in \overline{1, a, b^{-1}} = \overline{1, a, b}$ gilt,

$$b^{-1}ab \in b^{-1}a \cdot \overline{1, b^{-1}} = \overline{b^{-1}a, b^{-1}ab^{-1}} \subseteq \overline{1, a, b, ab}\,.$$

Also erhält man

$$a^{-1} \cdot \overline{1, a, b, ab} = \overline{a^{-1}, 1, a^{-1}b, b} \subseteq \overline{1, a, b, ab}$$

und

$$b^{-1} \cdot \overline{1, a, b, ab} = \overline{b^{-1}, b^{-1}a, 1, b^{-1}ab} \subseteq \overline{1, a, b, ab}\,.$$

Nun sei $c \in \overline{1, a, b, ab}$ beliebig. Mit (a) folgt

$$ca \in a^{-1} \cdot \overline{1, c, a} \subseteq a^{-1} \cdot \overline{1, a, b, ab} \subseteq \overline{1, a, b, ab}$$

und analog $cb, cab \in \overline{1, a, b, ab}$. Also gilt

$$c \cdot \overline{1, a, b, ab} = \overline{c, ca, cb, cab} \subseteq \overline{1, a, b, ab}\,,$$

und daraus ergibt sich mit $c^{-1} \in \overline{1, c} \subseteq \overline{1, a, b, ab}$ die Behauptung von (b). □

Nun folgt das bereits angekündigte Beispiel. Es zeigt, daß nicht alle linear gefaserten l-eingebetteten Inzidenzgruppen zweiseitig sind. Die Idee, auf diese Weise eine linear gefaserte Inzidenzgruppe zu konstruieren, geht auf [21] zurück.

Beispiel. (W, E) sei ein mindestens zweidimensionaler Linksvektorraum und K ein von $\mathbb{Z}_2$ verschiedener Teilkörper von E. Wir nehmen $(E, +\,) < (W, +\,)$ an; da W auch ein K-Vektorraum ist, existiert dann eine Hyperebene V von (W, K) mit $W = K \oplus V$. – Für $\alpha, \beta \in K$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$ setze

$$(\alpha + \mathfrak{a}) \circ (\beta + \mathfrak{b}) := \alpha(\beta + \mathfrak{b}) + \mathfrak{a}\,;$$

die Abbildung $(\alpha + \mathfrak{a})_l\colon \begin{cases} W & \to & W \\ \mathfrak{x} & \mapsto & (\alpha + \mathfrak{a}) \circ \mathfrak{x} \end{cases}$ ist eine Strecktranslation der affinen Koordinatengeometrie $\mathcal{A}(W, E)$ mit Streckfaktor α und Translationsvektor $\mathfrak{a}$ und genau dann bijektiv, wenn $\alpha \neq 0$ ist. Die Multiplikation „$\circ$“ entspricht offenbar gerade der Hintereinanderausführung dieser Abbildungen, und $(G, \circ\,)$ mit $G := K^* + V$ ist eine Gruppe mit neutralem Element $1 \in K$. – Nun bezeichne $(P, \mathcal{L})$ den projektiven Abschluß von $\mathcal{A}(W, E)$ und $\mathcal{G}$ die Menge der Spurgeraden von G in $(P, \mathcal{L})$; wir zeigen zunächst:

(1) $(G, \mathcal{G}, \circ)$ ist eine linear gefaserte und in $(P, \mathcal{L})$ l-eingebettete Inzidenzgruppe.

Da $(\alpha + \mathfrak{a})_l$ für $\alpha \in K^*$, $\mathfrak{a} \in V$ zu einer Kollineation von $(P, \mathcal{L})$ fortsetzbar ist, bleibt noch nachzuweisen:

(i) Für $l \in \mathcal{L}$ gilt $|l \cap G| \neq 1$.

(ii) Für jedes $a \in G \setminus \{1\}$ ist $\overline{1, a} < (G, \circ)$.

Zu (i): Es sei $l \in \mathcal{L}$ mit $l \cap G \neq \emptyset$, etwa $l \cap W = (\alpha + \mathfrak{a}) + E(\beta + \mathfrak{b})$ für $\alpha, \beta \in K$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$ mit $\alpha, \beta + \mathfrak{b} \neq 0$. Wegen $K \neq \mathbb{Z}_2$ existiert dann ein $\lambda \in K^*$ mit $\alpha + \lambda\beta \neq 0$; also ist $(\alpha + \mathfrak{a}) + \lambda(\beta + \mathfrak{b})$ ein von $\alpha + \mathfrak{a}$ verschiedener Punkt aus $l \cap G$ und damit $|l \cap G| \geq 2$.

Zu (ii): Für $a \in G \setminus \{1\}$ ist a_l eine Dilatation von $\mathcal{A}(W, E)$, also $P \setminus W$ eine punktweise linksinvariante Hyperebene von $(P, \mathcal{L})$. Da $\langle 1, a \rangle$ dann einen linksinvarianten Punkt enthält, ergibt (1.13)(a) nun $\overline{1, a} < (G, \circ)$; also gilt (ii).

Für $\alpha \in K^*$ und $\mathfrak{a} \in V$ ist durch $(\alpha + \mathfrak{a})_r \colon \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{x} \circ (\alpha + \mathfrak{a})$ eine bijektive lineare Abbildung von (W, K), also eine Affinität von $\mathcal{A}(W, K)$ definiert; damit folgt

(2) Für $K = E$ ist $(G, \mathcal{G}, \circ)$ l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$.

Andererseits gilt

(3) Für $K \neq E$ ist $(G, \mathcal{G}, \circ)$ nicht zweiseitig.

Zum Beweis von (3) sei $K \neq E$. Wegen $\dim(W, E) \geq 2$ existiert dann ein $\mathfrak{a} \in V \setminus E$; wir nehmen an, daß die Einschränkung von $(1 + \mathfrak{a})_r$ auf G eine Kollineation von $(G, \mathcal{G})$ ist, und führen dies auf einen Widerspruch. Da $K \neq E$ gilt, gibt es einen von 0 verschiedenen Vektor $\mathfrak{x} \in E \cap V$; außerdem sei $\alpha \in K \setminus \{0, 1\}$. Wegen $\langle 1, 1 + \mathfrak{x} \rangle \cap W = 1 + E\mathfrak{x} = E$ ist $\alpha \in \overline{1, 1 + \mathfrak{x}}$. Unsere Annahme führt nun auf

$$
\begin{aligned}
\alpha(1 + \mathfrak{a}) = (1 + \mathfrak{a})_r(\alpha) \in (1 + \mathfrak{a})_r(\overline{1, 1 + \mathfrak{x}}) &= \overline{1 + \mathfrak{a}, 1 + \mathfrak{a} + \mathfrak{x}} \subseteq \\
&\subseteq 1 + \mathfrak{a} + E\mathfrak{x} = \mathfrak{a} + E\,,
\end{aligned}
$$

und wegen $\alpha \neq 1$ folgt daraus der Widerspruch $\mathfrak{a} \in E$. – Also gilt (3).

Bemerkung. Für $K = E$ erhält man aus dem letzten Beispiel eine Darstellung der Strecktranslationsräume für den desarguesschen Fall, denn $H_r := \langle V \rangle$ und $H_l := P \setminus W$ sind verschiedene Hyperebenen von $(P, \mathcal{L})$ mit $G = P \setminus (H_r \cup H_l)$, und für $a \in G \setminus \{1\}$ ist a_l eine Zentralkollineation von $(P, \mathcal{L})$ mit Achse H_l und Zentrum $\langle 1, a \rangle \cap H_r$.

Im restlichen Teil dieses Abschnitts sei $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ stets eine linear gefaserte l-eingebettete Inzidenzgruppe mit zugehörigem projektivem Raum $(P, \mathcal{L})$.

(2.2) *Für $a, b \in G$ gelten:*

(a) $b \cdot \overline{1, a} \cdot b \subseteq \langle 1, a, b \rangle$.

(b) $\langle 1, a, b, ab \rangle \cap G < (G, \cdot)$.

(c) $b \notin G_a \iff \langle 1,a,b\rangle \cap G < (G,\cdot\,)$.

(d) *Ist* $b \in G_a$*, so folgt* $d \in G_c$ *für alle* $c,d \in \langle 1,a,b\rangle \cap G$ *mit* $\langle 1,a,b\rangle = \langle 1,c,d\rangle$.

Beweis. Da $\overline{S} \subseteq \langle S\rangle$ für alle $S \subseteq G$ gilt, folgt (a) aus (2.1)(a). – Nun sei $c \in \langle 1,a,b,ab\rangle \cap G$ und $x \in \{a,b,ab\}$. Nach (2.1)(b) gilt $\overline{1,a,b,ab} < (G,\cdot\,)$, also

$$x^{-1}, x^{-1}a, x^{-1}b, x^{-1}ab \in \overline{1,a,b,ab} \subseteq \langle 1,a,b,ab\rangle\,.$$

Mit (a) erhält man daher

$$cx \in x^{-1}\cdot\langle 1,c,x\rangle \subseteq x^{-1}\cdot\langle 1,a,b,ab\rangle = \langle x^{-1},x^{-1}a,x^{-1}b,x^{-1}ab\rangle = \langle 1,a,b,ab\rangle\,,$$

und das liefert

$$c\cdot\langle 1,a,b,ab\rangle = \langle c,ca,cb,cab\rangle = \langle 1,a,b,ab\rangle\,.$$

Also gilt (b). – Mit $\overline{1,a} < (G,\cdot\,)$ erhält man weiter:

$$b \notin G_a \iff \dim\langle 1,a,b,ba\rangle \le 2 \iff ba \in \langle 1,a,b\rangle \overset{\text{(b)}}{\iff} \langle 1,a,b\rangle \cap G < (G,\cdot\,)\,;$$

das ergibt (c), und nun folgt auch unmittelbar (d). □

Bemerkung. Mit (2.2)(b) erhält man leicht: Ist (A,K) eine kinematische Algebra und gilt $K \ne \mathbb{Z}_2$, so ist $K + K\mathfrak{a} + K\mathfrak{b} + K\mathfrak{ab}$ für $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in A$ stets eine Unteralgebra.

(2.3) Folgerung. *Für* $a \in G$ *und* $b \in G_a$ *mit* $ab = ba$ *gilt* $a^2 = b^2 = 1$.

Beweis. Für solche a,b ergibt (2.2)(a) zunächst $ab^{-1}a, b^{-1}ab^{-1} \in \langle 1,b^{-1},a\rangle$; damit folgt

$$\begin{aligned} b^{-1}a = ab^{-1} &\in a^{-1}\langle 1,b^{-1},a\rangle \cap b\langle 1,b^{-1},a\rangle = \langle a^{-1},a^{-1}b^{-1},1\rangle \cap \langle b,1,ba\rangle = \\ &= \langle 1,a,ba\rangle \cap \langle 1,b,ba\rangle = \langle 1,ba\rangle, \end{aligned}$$

denn die Ebenen $\langle 1,a,ba\rangle$ und $\langle 1,b,ba\rangle$ sind wegen $b \in G_a$ verschieden. Nun erhält man

$$a^2 = ab^{-1}\cdot ba = \langle 1,a\rangle \cap \langle 1,ba\rangle = 1\,,$$

und da nach (2.2)(d) auch $a \in G_b$ gilt, folgt analog $b^2 = 1$. □

(2.4) *Für* $b \in G$ *und* $a \in G_b$ *gilt* $\overline{1,a}\cdot b = \overline{b,ab}$.

Beweis. Es sei $b \in G$ und $a \in G_b$. Mit (2.2)(a) folgt $\overline{1,a}\cdot b \subseteq b^{-1}\cdot\langle 1,a,b\rangle = \langle 1,b^{-1}a,b\rangle$, also gilt

$$\overline{1,a}\cdot b = a\cdot\overline{1,a}\cdot b \subseteq a\cdot\langle 1,b^{-1}a,b\rangle = a\cdot\langle 1,a^{-1}b,b\rangle = \langle a,b,ab\rangle.$$

Da die Ebenen $\langle 1,b^{-1}a,b\rangle$ und $\langle a,b,ab\rangle$ wegen $a \in G_b$ verschieden sind, ist $\overline{1,a}\cdot b$ kollinear und damit $\overline{1,a}\cdot b \subseteq \overline{b,ab}$. – Aus $a \in G_b$ folgt andererseits, daß $\langle 1,a,b\rangle \cap G$ und daher auch $\langle 1,b^{-1},b^{-1}ab\rangle \cap G$ keine Untergruppe von $(G,\cdot\,)$ ist; (2.2)(c) ergibt nun $b^{-1}ab \in G_{b^{-1}}$, also erhalten wir wie eben $\overline{1,b^{-1}ab}\cdot b^{-1} \subseteq \overline{b^{-1},b^{-1}a}$. Dann gilt

$$\overline{b,ab} = b\cdot\overline{1,b^{-1}ab} \subseteq b\cdot\overline{b^{-1},b^{-1}a}\cdot b = \overline{1,a}\cdot b$$

und damit $\overline{1,a}\cdot b = \overline{b,ab}$. □

(2.5) *Es sei* $\dim(P,\mathcal{L}) \geq 3$ *und* $a \in G \setminus \{1\}$.

(a) *Existiert zu* $d \in \overline{1,a}$ *ein* $c \in G \setminus \overline{1,a}$ *mit* $dc \in \overline{c,ac}$, *so gilt* $db \in \overline{b,ab}$ *für alle* $b \in G$.

(b) *Existiert ein* $c \in G \setminus \overline{1,a}$ *mit* $\overline{1,a} \cdot c \subseteq \overline{c,ac}$, *so gilt* $\overline{1,a} \cdot b \subseteq \overline{b,ab}$ *für alle* $b \in G$.

Beweis. Es reicht, (a) zu zeigen, da (b) dann unmittelbar folgt. – Sei $d \in \overline{1,a}$, $c \in G \setminus \overline{1,a}$ mit $dc \in \overline{c,ac}$ und $b \in G$.

1. Fall: $b \notin \langle 1,a,c\rangle$. Wegen (2.4) nehmen wir $a \notin G_b$ an. Für $x \in \{1,a,d\}$ folgt mit $dc \in \overline{c,ac}$

$$\begin{aligned} xb = xc \cdot c^{-1}b \in \overline{c,ac} \cdot c^{-1}b = c \cdot (c^{-1}b)^{-1} \cdot c^{-1}b \cdot \overline{1,c^{-1}ac} \cdot c^{-1}b &\overset{(2.2)(a)}{\subseteq} \\ \subseteq c \cdot (c^{-1}b)^{-1} \cdot \langle 1, c^{-1}ac, c^{-1}b\rangle = c \cdot \langle (c^{-1}b)^{-1}, b^{-1}ac, 1\rangle &= \\ = c \cdot \langle 1, c^{-1}b, c^{-1}a^{-1}b\rangle = \langle c, b, a^{-1}b\rangle \,. & \end{aligned}$$

Andererseits ist $\langle 1,a,b\rangle \cap G$ wegen $a \notin G_b$ nach (2.2)(c) eine Untergruppe von $(G,\cdot)$; damit folgt

$$xb \in \langle 1,a,b\rangle \cap \langle c,b,a^{-1}b\rangle\,,$$

und da $\langle 1,a,b\rangle$ und $\langle c,b,a^{-1}b\rangle$ wegen $b \notin \langle 1,a,c\rangle$ verschieden sind, ergibt dies die Kollinearität von b, ab und db.

2. Fall: $b \in \langle 1,a,c\rangle$. Wegen $\overline{1,a} < (G,\cdot)$ nehmen wir $b \notin \overline{1,a}$ an. Dann existiert aus Dimensionsgründen ein $b' \in G$ mit $b' \notin \langle 1,a,c\rangle$. Mit dem 1. Fall folgt $db' \in \overline{b',ab'}$. Da andererseits $\langle 1,a,b\rangle = \langle 1,a,c\rangle$ gilt, ist $b \notin \langle 1,a,b'\rangle$; also erhält man aus dem 1. Fall $db \in \overline{b,ab}$. □

Für $a \in G_0$ und $b \in G_a$ ergibt (2.2)(d) $a \in G_b$; also folgt $\overline{1,a} \cdot b = \overline{b,ab}$ nach (2.4). Da mit $G_0 \neq \emptyset$ auch $\dim(P,\mathcal{L}) \geq 3$ gilt, erhält man mit (2.5)(b) nun

(2.6) Folgerung. *Für* $a \in G_0$ *und* $b \in G$ *ist* $\overline{1,a} \cdot b \subseteq \overline{b,ab}$.

(2.6) ergibt zusammen mit (1.1) und (2.5)(b)

(2.7) Satz. $(G,\mathcal{G},\cdot)$ *sei eine linear gefaserte und in* $(P,\mathcal{L})$ *l-eingebettete Inzidenzgruppe. Gilt* $\dim(P,\mathcal{L}) \geq 3$, *so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $(G,\mathcal{G},\cdot)$ *ist zweiseitig.*

(b) *Es existieren* $a,b \in G \setminus \{1\}$ *mit* $b \notin \overline{1,a}$ *und* $a_r, b_r \in \mathrm{Aut}(G,\mathcal{G})$.

(c) *Zu jedem* $a \in G \setminus G_0$ *gibt es ein* $b \in G \setminus \overline{1,a}$ *mit* $\overline{1,a} \cdot b \subseteq \overline{b,ab}$.

Bemerkung. Mit (1) aus [6] erhält man, daß $(G,\mathcal{G},\cdot)$ genau dann zweiseitig ist, wenn die durch $\iota(a) := a^{-1}$ definierte Abbildung $\iota\colon G \to G$ eine Kollineation von $(G,\mathcal{G})$ ist. – Da für $a \in G$ stets $a_r = \iota \circ \iota(a)_l \circ \iota$ gilt, folgt: Kann ι zu einer Kollineation von $(P,\mathcal{L})$ fortgesetzt werden, so ist $(G,\mathcal{G},\cdot)$ l-r-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$.

Problem. Ist ι stets zu einer Kollineation von $(P,\mathcal{L})$ fortsetzbar, wenn $(G,\mathcal{G},\cdot)$ l-r-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$ ist?

2.2 Der Fall $G_0 = \emptyset$

Zunächst weisen wir darauf hin, daß eine in einen mindestens dreidimensionalen projektiven Raum $(P, \mathcal{L})$ l-eingebettete Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ mit $G_0 = \emptyset$ nach (1.14) stets linear gefasert ist. – Es gilt:

(2.8) *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sei l-eingebettet in den mindestens zweidimensionalen projektiven Raum $(P, \mathcal{L})$. Weiter sei H_l eine Hyperebene von $(P, \mathcal{L})$ und $a_l\colon P \to P$ für jedes $a \in G$ eine Zentralkollineation von $(P, \mathcal{L})$ mit Achse H_l. Schließlich bezeichne z_a das Zentrum von a_l für $a \in G \setminus \{1\}$ und $H_r := \{\, z_a \mid a \in G \setminus \{1\}\,\}$.*

(a) *Für $a \in G \setminus \{1\}$ ist z_a ein singulärer Punkt von $\langle 1, a\rangle$.*

(b) *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ist genau dann zweiseitig, wenn $z_a = z_b$ für alle $a, b \in G \setminus \{1\}$ mit $b \in \overline{1, a}$ gilt.*

(c) *Ist H_r eine Hyperebene von $(P, \mathcal{L})$ und $(P, \mathcal{L})$ (H_r, H_l)-transitiv, so ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$, und für $a \in G \setminus \{1\}$ ist $a_r\colon P \to P$ eine Zentralkollineation von $(P, \mathcal{L})$ mit Achse H_r und Zentrum $x_a := \langle 1, a\rangle \cap H_l$; außerdem gilt genau dann $H_l = H_r$, wenn $(G, \cdot\,)$ abelsch ist.*

(d) *Ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ und H' eine punktweise rechtsinvariante Hyperebene von $(P, \mathcal{L})$, so gilt $H' = H_r$.*

Beweis. *Zu (a):* Sei $a \in G \setminus \{1\}$. Als Fixpunkt von a_l ist z_a singulär; außerdem folgt aus $a \in a_l(\langle 1, z_a\rangle) = \langle 1, z_a\rangle$: $z_a \in \langle 1, a\rangle$.

Zu (b): Für $a, b \in G \setminus \{1\}$ mit $b \in \overline{1, a}$ und $c \in G \setminus \overline{1, a}$ gelten einerseits $ac \in \langle c, z_a\rangle$ und $bc \in \langle c, z_b\rangle$; andererseits folgt aus (a) $z_a, z_b \in \langle 1, a\rangle$. Damit erhält man

$$c, ac, bc \text{ sind kollinear} \iff \langle c, ac\rangle = \langle c, bc\rangle \iff \langle c, z_a\rangle = \langle c, z_b\rangle \iff$$
$$\iff z_a = \langle 1, a\rangle \cap \langle c, z_a\rangle = \langle 1, b\rangle \cap \langle c, z_b\rangle = z_b\,.$$

Mit $\overline{1, a} < (G, \cdot\,)$ und (1.1) ergibt dies (b).

Zu (c): Sei $a \in G \setminus \{1\}$. Aus der (H_r, H_l)-Transitivität folgt, daß $(P, \mathcal{L})$ auch (H_l, H_r)-transitiv ist; also existiert eine eindeutig bestimmte Zentralkollineation ρ_a mit Achse H_r, Zentrum x_a und $\rho_a(1) = a$. Für $b \in G \setminus \overline{1, a}$ folgt

$$ba = b\langle 1, x_a\rangle \cap b\langle a, z_b\rangle = \langle b, x_a\rangle \cap \langle a, z_b\rangle = \rho_a(\langle b, x_a\rangle) \cap \rho_a(\langle 1, z_b\rangle) = \rho_a(b)\,.$$

Ist $b \in \overline{1, a}$, so wähle $c \in G \setminus \overline{1, a}$. Da nach (1.13)(a) $\overline{1, a} < (G, \cdot\,)$ gilt, folgt $c^{-1}b \notin \overline{1, a}$ und damit $\rho_a(c) = ca$ und $\rho_a(c^{-1}b) = c^{-1}ba$. Wegen $c_l(H_r) = H_r$ und $c_l(x_a) = x_a$ ist $c_l\rho_a {c_l}^{-1}$ wie ρ_a eine Zentralkollineation mit Achse H_r und Zentrum x_a, die c auf ca abbildet; also gilt $c_l\rho_a {c_l}^{-1} = \rho_a$, und man erhält

$$ba = c \cdot c^{-1}ba = c \cdot \rho_a(c^{-1}b) = c_l\rho_a {c_l}^{-1}(b) = \rho_a(b)\,.$$

Mithin ist ρ_a eine Fortsetzung von a_r, und es bleibt zu zeigen, daß $H_l = H_r$ genau dann gilt, wenn $(G, \cdot\,)$ abelsch ist.

Aus $H_l = H_r$ folgt $a_l = a_r$ für $a \in G\setminus\{1\}$, denn die Zentralkollineationen a_l und a_r haben dann dieselbe Achse, dasselbe Zentrum und bilden 1 auf a ab; also ist $(G,\cdot\,)$ abelsch. – Ist $(G,\cdot\,)$ abelsch und $a \in G\setminus\{1\}$, so gilt $a_l = a_r \neq \mathrm{id}_P$; da die Achse von a_l eindeutig bestimmt ist, folgt daraus $H_l = H_r$.

Zu (d): Wegen $1 \notin H'$ und (a) braucht nur noch $H_r \subseteq H'$ gezeigt zu werden. Es sei $a \in G\setminus\{1\}$, $b \in G \setminus \overline{1,a}$ und $x_a{}' := \langle 1,a\rangle \cap H'$. Dann gilt

$$ab \in a_l(\langle b, z_a\rangle) \cap b_r(\langle 1, x_a{}'\rangle) = \langle b, z_a\rangle \cap \langle b, x_a{}'\rangle\,,$$

also folgt mit (a) $z_a = \langle 1,a\rangle \cap \langle b, ab\rangle = x_a{}' \in H'$. □

Bemerkungen. (a) Unter den Voraussetzungen von (2.8) ist $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ nach (1.13)(a) linear gefasert mit $G_0 = \emptyset$. Gelten zusätzlich noch die Voraussetzungen von (c), so ist $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ offenbar Inzidenzuntergruppe eines Translations- oder Strecktranslationsraumes. – Mit (c) erhält man im übrigen, daß Translations- und Strecktranslationsräume stets l-r-eingebettet sind.

(b) In [19], Theorem 4 findet man ähnliche Aussagen wie die von (2.8)(d) und dem zweiten Teil von (c).

Beispiel. Im Beispiel auf Seite 29 ist die Abbildung $(\alpha+\mathfrak{a})_l$ für $\alpha \in K^*$, $\mathfrak{a} \in V$ eine Dilatation von $\mathcal{A}(W,E)$ und damit eine Zentralkollineation von $(P,\mathcal{L})$ mit Achse $H_l := P \setminus W$; ihr Zentrum ist $\mathfrak{z}_{\alpha+\mathfrak{a}} := (1-\alpha)^{-1}\mathfrak{a}$ für $\alpha \neq 1$ und die Parallelenklasse $E\mathfrak{a}$, wenn $\alpha = 1$ und $\mathfrak{a} \neq 0$ ist.

Für $K = E$ ist die Hyperebene $H_r := \langle V\rangle$ gerade die Menge der Zentren der $(\alpha+\mathfrak{a})_l$; also erhält man mit (2.8)(c) erneut, daß $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ für $K = E$ l-r-eingebettet ist in $(P,\mathcal{L})$. – Dasselbe Ergebnis folgt auch mit der letzten Bemerkung (a), da $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ in diesem Fall ein Strecktranslationsraum ist.

Für $K \neq E$ wähle $\mathfrak{a} \in E \cap V^*$ und $\alpha \in K \setminus \{0,1\}$. Dann gilt

$$\alpha + \mathfrak{a} \in E = 1 + E(\alpha - 1) \subseteq \langle 1, \alpha\rangle\,,$$

aber $\mathfrak{z}_{\alpha+\mathfrak{a}} = (1-\alpha)^{-1}\mathfrak{a} \neq 0 = \mathfrak{z}_\alpha$. Mit (2.8)(b) erhält man nun wieder, daß $(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ für $K \neq E$ nicht zweiseitig ist.

(2.9) *$(G,\mathcal{G},\cdot\,)$ sei l-eingebettet in $(P,\mathcal{L})$ mit $G_0 = \emptyset$, und es gelte* $\dim(P,\mathcal{L}) \geq 3$. *Dann ist die Menge H_l der linksinvarianten Punkte eine Hyperebene von $(P,\mathcal{L})$, und $a_l\colon P \to P$ ist für jedes $a \in G$ eine Zentralkollineation von $(P,\mathcal{L})$ mit Achse H_l.*

Beweis. H_l ist singulär, und nach (1.13)(c) existiert zu jedem $a \in G\setminus\{1\}$ ein linksinvarianter Punkt $x_a \in \langle 1,a\rangle$; es reicht also zu zeigen, daß H_l ein Teilraum von $(P,\mathcal{L})$ ist. – Seien $x, y \in H_l$ verschieden und $z \in \langle x,y\rangle$. Die Gerade $\langle x,y\rangle$ ist als linksinvarianter echter Teilraum von $(P,\mathcal{L})$ singulär; damit gilt $z \neq 1$, also existiert ein $a \in G\setminus\{1\}$ mit $a \in \langle 1,z\rangle$. Wegen $\dim(P,\mathcal{L}) \geq 3$ gibt es außerdem einen Punkt $b \in G \setminus \langle 1,x,y\rangle$. Nun folgt

$$x_a = bx_a \in \langle 1,x,y\rangle \cap b\langle 1,x,y\rangle = \langle 1,x,y\rangle \cap \langle b,x,y\rangle = \langle x,y\rangle\,,$$

also $z = \langle 1,a\rangle \cap \langle x,y\rangle = x_a \in H_l$. □

Mit (2.8) und (2.9) können wir nun die folgende Aussage beweisen:

(2.10) Satz. *Die Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sei l-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ mit $G_0 = \emptyset$, und es gelte $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$. Dann existiert eine Hyperebene H_l von $(P, \mathcal{L})$ derart, daß a_l für jedes $a \in G$ eine Zentralkollineation mit Achse H_l ist. Bezeichnet z_a für $a \in G \setminus \{1\}$ das Zentrum von a_l, so gelten:*

- **(a)** *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ist genau dann zweiseitig, wenn $z_a = z_b$ für alle $a, b \in G \setminus \{1\}$ mit $b \in \overline{1, a}$ gilt.*
- **(b)** *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ist genau dann l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$, wenn $H_r := \{\, z_a \mid a \in G \setminus \{1\}\,\}$ ein Teilraum von $(P, \mathcal{L})$ ist.*

Beweis. Sei H_l die Menge der linksinvarianten Punkte. Für $a \in G$ ist $a_l \colon P \to P$ nach (2.9) eine Zentralkollineation von $(P, \mathcal{L})$ mit Achse H_l; also folgt (a) aus (2.8)(b). Außerdem ist z_a für $a \in G \setminus \{1\}$ nach (2.8)(a) ein singulärer Punkt von $\langle 1, a\rangle$. – Wir zeigen (b):

$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sei l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$. Wähle $a, b \in G \setminus \{1\}$ und $z \in \langle z_a, z_b\rangle \setminus \{z_a, z_b\}$. Da $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ insbesondere zweiseitig ist, folgt wegen $z_a \neq z_b$ nach (a) $b \notin \overline{1, a}$ und damit $z \neq 1$. Also existiert ein $c \in G \setminus \{1\}$ mit $c \in \langle 1, z\rangle$ und aus Dimensionsgründen ein $d \in G \setminus \langle 1, a, b\rangle$. Für $x \in \{a, b, c\}$ erhält man mit $xd \in \langle d, z_x\rangle$:

$$z_x \in \langle 1, x\rangle \cap \langle d, xd\rangle = \langle 1, x\rangle \cap \langle 1, x\rangle \cdot d \subseteq \langle 1, a, b\rangle \cap \langle 1, a, b\rangle \cdot d = \langle 1, a, b\rangle \cap \langle d, ad, bd\rangle\,,$$

also sind z_a, z_b, z_c wegen $\langle 1, a, b\rangle \neq \langle d, ad, bd\rangle$ kollinear. Es folgt $z = \langle 1, c\rangle \cap \langle z_a, z_b\rangle = z_c \in H_r$, und damit ist H_r ein Teilraum von $(P, \mathcal{L})$.

Nun sei H_r ein Teilraum von $(P, \mathcal{L})$. H_r ist singulär, also wegen $z_a \in \langle 1, a\rangle$ für $a \in G \setminus \{1\}$ dann sogar eine Hyperebene von $(P, \mathcal{L})$. Nun ergibt (2.8)(c) den zweiten Teil von (b). □

Probleme. (a) Gibt es l-r-eingebettete Inzidenzgruppen, die die Voraussetzungen von (2.8) erfüllen, für die aber die Menge H_r keine Hyperebene von $(P, \mathcal{L})$ ist? – Für eine solche Inzidenzgruppe gilt nach (2.10)(b) stets $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$.

(b) Erhält man für linear gefaserte Inzidenzgruppen, die in eine projektive Ebene l-eingebettet sind, ähnliche Aussagen wie die in (2.9) und (2.10)? – Vergleiche hierzu und zu (a) auch (2.19).

2.3 Der Fall $G_0 \neq \emptyset$

Zunächst folgt

(2.11) Satz. *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sei eine linear gefaserte und in $(P, \mathcal{L})$ l-eingebettete Inzidenzgruppe mit $G_0 \neq \emptyset$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- **(a)** *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ist zweiseitig.*
- **(b)** *Zu jedem $a \in G \setminus G_0$ gibt es ein $b \in G \setminus \overline{1, a}$ mit $\overline{1, a} \cdot b \subseteq \overline{b, ab}$.*
- **(c)** *Es existiert ein $b \in G_0$ mit $b_r \in \mathrm{Aut}(G, \mathcal{G})$.*

Beweis. Wegen $G_0 \neq \emptyset$ gilt $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$; damit ist nach (2.7) nur noch zu zeigen, daß (b) aus (c) folgt. – Es sei also $a \in G \setminus G_0$ mit $a \neq 1$, $b \in G_0$ mit $b_r \in \mathrm{Aut}(G, \mathcal{G})$ und $c \in G_b$. Dann sind $\langle 1, b\rangle$ und $c\langle 1, b\rangle$ disjunkt, aber wegen $c \notin G_a$ gilt $\langle 1, a\rangle \cap c\langle 1, a\rangle \neq \emptyset$. Also ist $b \notin \overline{1, a}$, und man erhält (b). □

Aus (2.11) erhalten wir die etwa bereits in [16] (vgl. [16], Satz 4) bewiesene

(2.12) Folgerung. *Jede linear gefaserte projektive Inzidenzgruppe ist ein kinematischer Raum.*

Beweis. $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sei eine linear gefaserte projektive Inzidenzgruppe; da sonst nichts zu zeigen ist, nehmen wir $\dim(G, \mathcal{G}) \geq 2$ an. Zu $a \in G \setminus \{1\}$ existiert dann ein $b \in G \setminus \overline{1, a}$, und wegen $\overline{1, a} < (G, \cdot\,)$ folgt $\overline{1, a} \cap b \cdot \overline{1, a} = \emptyset$ und damit $b \in G_a$. Also gilt $G_0 = G \setminus \{1\}$, mithin ist (b) aus (2.11) erfüllt. □

Im verbleibenden Teil dieses Abschnitts sei $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ stets eine linear gefaserte in $(P, \mathcal{L})$ l-eingebettete Inzidenzgruppe mit $G_0 \neq \emptyset$; insbesondere gilt dann $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$. – Unser Ziel ist der Beweis von (2.18), der ein hinreichendes Kriterium für die Zweiseitigkeit von $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ liefert. Wir zeigen zunächst:

(2.13) *Für $a \in G_0$ ist G die von G_a erzeugte Untergruppe* $\mathrm{H}(G_a)$, *d.h. es gilt* $G = \mathrm{H}(G_a)$.

Beweis. Sei $a \in G_0$ und $b \in G_a$. Wir wählen zunächst ein $c \in \langle 1, a, b\rangle \cap G$ mit $c \notin \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle$; nach (2.2)(d) ist $c \in G_a$ und $b^{-1} \in G_c$. Dann gilt $b^{-1}c \notin \langle 1, c, b^{-1}\rangle = \langle 1, a, b\rangle$, insbesondere also $c \notin b\langle 1, a\rangle$ und damit $b\langle 1, a\rangle \neq c\langle 1, a\rangle$. – Für $a' \in \overline{1, a}$ erhält man

$$\langle 1, a\rangle \cap ba'\langle 1, a\rangle = \langle 1, a\rangle \cap b\langle 1, a\rangle = \emptyset\,;$$

es folgt $\dim\langle 1, a, ba', ba'a\rangle = 3$, also $ba' \in G_a$ und damit

(1) $\overline{1, a} \subseteq \mathrm{H}(G_a)$.

Nun sei $x \in G$ beliebig; wir nehmen $x \notin \mathrm{H}(G_a)$ an. Dann ergibt (1) $x \notin \overline{1, a}$, und mit (2.2)(c) folgt $\langle 1, a, x\rangle \cap G < (G, \cdot\,)$; insbesondere gilt also $b, c \notin \langle 1, a, x\rangle$. Wegen $b^{-1}x, c^{-1}x \notin G_a$ schneidet $\langle 1, a\rangle$ die Geraden $b^{-1}x\langle 1, a\rangle$ und $c^{-1}x\langle 1, a\rangle$. Also existieren die Punkte

$$x_b := b\langle 1, a\rangle \cap x\langle 1, a\rangle \quad \text{und} \quad x_c := c\langle 1, a\rangle \cap x\langle 1, a\rangle\,;$$

sie sind wegen $\overline{1, a} < (G, \cdot\,)$ singulär. – Wir zeigen zunächst:

(2) Es gilt $x_b = x_c$.

Zum Beweis von (2) nehmen wir $x_b \neq x_c$ an. Da $x_b, x_c \in x\langle 1, a\rangle$ singulär sind, gibt es einen Punkt $y \in \langle 1, a, x\rangle \cap G$ mit $y \notin \langle 1, a\rangle, x\langle 1, a\rangle$; wir können nämlich etwa $x_b \notin \langle 1, a\rangle$ annehmen und $y \in \langle 1, x_b\rangle \cap G$ mit $y \neq 1$ wählen.

Es gilt $y \in \mathrm{H}(G_a)$, denn andernfalls existieren wie für x die dann ebenfalls in $\langle 1, a, x\rangle$ liegenden Punkte y_b und y_c, und wegen $b, c \notin \langle 1, a, x\rangle$ erhält man $y_b = x_b$ sowie $y_c = x_c$. Also folgt $x\langle 1, a\rangle = \langle x_b, x_c\rangle = y\langle 1, a\rangle$ und damit $y \in x\langle 1, a\rangle$, im Widerspruch zur Wahl von y.

Nun ist auch $xy \in \langle 1, a, x\rangle$ mit $xy \notin x\langle 1, a\rangle$, und wegen $y \in \mathrm{H}(G_a)$ und (1) folgt $xy \notin \langle 1, a\rangle$. Damit ergibt sich wie eben $xy \in \mathrm{H}(G_a)$, was auf den Widerspruch $x \in \mathrm{H}(G_a)$ führt. – Also gilt (2).

Wegen $x \notin \mathrm{H}(G_a)$ ist nun aber auch $xb \notin \mathrm{H}(G_a)$, und nach (2) gilt $(xb)_b = (xb)_c$. Es folgt $x_b, (xb)_b \in b\langle 1, a\rangle, c\langle 1, a\rangle$, also wegen $b\langle 1, a\rangle \neq c\langle 1, a\rangle$: $x_b = (xb)_b$. Das ergibt aber $x_b = x\langle 1, a\rangle \cap xb\langle 1, a\rangle$ und damit $\langle 1, a\rangle \cap b\langle 1, a\rangle \neq \emptyset$, im Widerspruch zu $b \in G_a$. Also ist unsere Annahme falsch, d.h. es gilt $x \in \mathrm{H}(G_a)$. □

(2.14) Folgerung. *Die Gruppe $(G, \cdot\,)$ ist genau dann abelsch, wenn sie vom Exponenten 2 ist.*

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend; wir zeigen, daß sie auch notwendig ist: $(G, \cdot\,)$ sei abelsch und $a \in G_0$. Nach (2.3) besteht G_a nur aus involutorischen Elementen, und nach (2.13) gilt $G = \mathrm{H}(G_a)$. Da $(G, \cdot\,)$ nach Voraussetzung abelsch ist, folgt $x^2 = 1$ für alle $x \in G$, d.h. $(G, \cdot\,)$ ist vom Exponenten 2. □

Beispiel. Wir betrachten die Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ aus dem Beispiel auf Seite 19: $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ist linear gefasert, und es gilt $G_0 \neq \emptyset$. Für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in N$ erhält man $\varphi(1+\mathfrak{x})\varphi(1+\mathfrak{y}) = \varphi(1+\mathfrak{x}+\mathfrak{y}+\mathfrak{x}\mathfrak{y})$, also wegen $\mathfrak{x}^2 = 0$ auch $\varphi(1+\mathfrak{x})^2 = \varphi(1+2\mathfrak{x})$. – Damit folgt: $(G, \cdot\,)$ ist genau dann abelsch, wenn die Halbgruppe $(N, \cdot\,)$ kommutativ ist. Dies ist nach Definition der Multiplikation von $(N, \cdot\,)$ offenbar äquivalent zu $\mathrm{char}(K) = 2$, was wiederum gerade bedeutet, daß $(G, \cdot\,)$ vom Exponenten 2 ist.

(2.15) *Es gilt $G = \mathrm{H}(G_0)$.*

Beweis. Wegen $G_0 \neq \emptyset$ existiert ein $a \in G_0$. (2.2)(d) ergibt $G_a \subseteq G_0$, und daraus folgt mit (2.13) $G = \mathrm{H}(G_a) \subseteq \mathrm{H}(G_0)$, also $G = \mathrm{H}(G_0)$. □

Wir führen noch eine weitere Bezeichnung ein:

Definition. Für $b \in G_0$ setze $U_b := \bigcap\limits_{a \in G_b} \langle 1, a, b, ab\rangle$.

Es gilt:

(2.16) *Es sei $b \in G_0$.*

- ***(a)*** *U_b ist ein Teilraum von $(P, \mathcal{L})$.*
- ***(b)*** *$U_b \cap G$ ist eine Inzidenzuntergruppe von $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$.*
- ***(c)*** *Gilt $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 4$, so ist $\dim U_b \leq 2$.*

Beweis. (a) ist trivial, und (b) folgt sofort mit (2.2)(b). – Wir zeigen (c): Es gelte $\dim U_b = 3$. Dann folgt $U_b = \langle 1, a, b, ab\rangle$ für alle $a \in G_b$, also $G_b \subseteq U_b \cap G$. Da nach (b) $U_b \cap G < (G, \cdot\,)$ gilt, ergibt (2.13)

$$G = \mathrm{H}(G_b) \subseteq U_b \cap G \subseteq U_b\,.$$

Nun folgt $P = U_b$, also $\dim(P, \mathcal{L}) = 3$ und damit (c). □

(2.17) *Es sei $b \in G_0$ und $a \in G$. Existieren in $\langle 1, a, b\rangle$ zwei linksinvariante Punkte, so gilt $a \in U_b$.*

Beweis. x_1 und x_2 seien verschiedene linksinvariante Punkte von $\langle 1, a, b\rangle$. Dann ist $\langle x_1, x_2\rangle$ linksinvariant und damit singulär, also $\langle 1, a, b\rangle = \langle 1, x_1, x_2\rangle$. Damit folgt für $c \in G_b$ wegen

$$cb \in c \cdot \langle 1, a, b\rangle = c \cdot \langle 1, x_1, x_2\rangle = \langle c, x_1, x_2\rangle \subseteq \langle 1, a, b, c\rangle$$

und $cb \notin \langle 1, b, c\rangle$ nun $a \in \langle 1, c, b, cb\rangle$, mithin gilt $a \in U_b$. □

Nun können wir zeigen:

(2.18) Satz. *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sei eine linear gefaserte in $(P, \mathcal{L})$ l-eingebettete Inzidenzgruppe mit $G_0 \neq \emptyset$; außerdem gelte $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 4$. Ist G_0 normal, d.h. gilt $aG_0a^{-1} = G_0$ für alle $a \in G$, so ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ zweiseitig.*

Beweis. Es sei $a \in G \setminus G_0$ mit $a \neq 1$. Wir zeigen, daß ein $b \in G \setminus \overline{1, a}$ mit $b \ \cdot \overline{1, a} = \overline{1, a} \cdot b$ existiert, denn dann folgt mit (2.11) sofort unsere Behauptung. – Zunächst enthält $\langle 1, a\rangle$ nach (1.13)(c) einen linksinvarianten Punkt x_a. Weiter gilt:

(1) Ist $b \in G$ und x_a der einzige linksinvariante Punkt in $\langle 1, a, b\rangle$, so folgt $b \cdot \overline{1, a} = \overline{1, a} \cdot b$.

Ist $b \in G$ und x_a der einzige linksinvariante Punkt in $\langle 1, a, b\rangle$, so folgt mit (1.13)(a) und (c) einerseits $\langle 1, a, b\rangle \cap (G \setminus G_0) = \overline{1, a}$; andererseits ist $\langle 1, a, b\rangle \cap G$ wegen $b \notin G_a$ nach (2.2)(c) eine Untergruppe von $(G, \cdot\,)$. Da mit G_0 auch $G \setminus G_0$ normal ist, erhält man nun $b \cdot \overline{1, a} = \overline{1, a} \cdot b$ und damit (1).

Wegen (1) nehmen wir nun an, daß in jeder Ebene, die $\langle 1, a\rangle$ enthält, mindestens zwei linksinvariante Punkte liegen. Sei $b \in G_0$ und $c \in G_b$; es gilt $b \notin \overline{1, a}$, und mit (2.2)(c) und (d) folgen $cb \in G_b$ bzw. $c \in G_0$. Da $\langle 1, a, b\rangle$ zwei verschiedene linksinvariante Punkte enthält, ergibt (2.17) $a \in U_b$. Mit (2.16)(c) erhält man aus Dimensionsgründen dann $U_b = \langle 1, a, b\rangle$, und analog folgt $U_c = \langle 1, a, c\rangle$. Wegen $U_b \cap G < (G, \cdot\,)$ gilt $c \notin U_b$, also $U_b \cap U_c = \langle 1, a\rangle$. – Als nächstes zeigen wir

(2) Für $d \in G \setminus G_0$ mit $d \in \langle 1, a, b\rangle \setminus \langle 1, a\rangle$ gilt $b \cdot \overline{1, d} = \overline{1, d} \cdot b$.

Für solch ein d enthält $\langle 1, d\rangle$ nach (1.13)(c) einen linksinvarianten Punkt x_d. $U_b \cap U_c = \langle 1, a\rangle$ ergibt außerdem $d \notin U_c$, und damit ist x_d nach (2.17) der einzige linksinvariante Punkt in $\langle 1, d, c\rangle$. Aus (1) folgt nun $c \cdot \overline{1, d} = \overline{1, d} \cdot c$, und da auch $cb \in G_b$ gilt, ergibt sich analog $cb \cdot \overline{1, d} = \overline{1, d} \cdot cb$. Mit c und cb liegt b dann ebenfalls im Normalisator von $\overline{1, d}$, und man erhält (2).

Da G_0 normal ist und $\overline{1, a} \cap G_0 = \emptyset$ gilt, folgt nun mit (2), daß $: x \mapsto bxb^{-1}$ die Menge $\langle 1, a, b\rangle \cap (G \setminus \overline{1, a})$ auf sich abbildet; also gilt auch $b \cdot \overline{1, a} = \overline{1, a} \cdot b$. □

Probleme. (a) Gibt es linear gefaserte l-eingebettete Inzidenzgruppen mit $G_0 \neq \emptyset$, die nicht zweiseitig oder l-r-eingebettet sind?

(b) Folgt in (2.18) sogar, daß $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ l-r-eingebettet ist? – Kann in (2.18) auf die Forderung $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 4$ verzichtet werden?

2.4 Spezielle linear gefaserte Inzidenzgruppen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß jede linear gefaserte l-eingebettete Inzidenzgruppe mit (2G4) oder (EGU) bereits l-r-eingebettet ist (vgl. (2.21)). – Zunächst betrachten wir den ebenen Fall:

(2.19) *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sei eine linear gefaserte Inzidenzgruppe und $(P, \mathcal{L})$ eine projektive Ebene. Gelten (2G2) oder (EGU), so ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ein Translations- oder Strecktranslationsraum in $(P, \mathcal{L})$, insbesondere also l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$.*

Beweis. Mit (1.11) folgt zunächst, daß $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ l-eingebettet ist in $(P, \mathcal{L})$.

Zu $a \in G \setminus \{1\}$ und $b, c \in G$ sind die Nebenklassen $b \cdot \overline{1, a}$, $c \cdot \overline{1, a}$ von $\overline{1, a} < (G, \cdot\,)$ gleich oder disjunkt; die Geraden $b\langle 1, a\rangle$, $c\langle 1, a\rangle$ schneiden sich also, wenn sie verschieden sind, wegen $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$ in einem singulären Punkt. Für $b \notin \overline{1, a}$ existiert damit der singuläre Punkt $x_{a,b} := \langle 1, a\rangle \cap b\langle 1, a\rangle$. – Wir zeigen zunächst

(1) Für $a \in G \setminus \{1\}$ und $b, c \in G \setminus \overline{1, a}$ gilt $x_{a,b} = x_{a,c}$.

Zum Beweis von (1) nehmen wir $x_{a,b} \neq x_{a,c}$ für entsprechende a, b, c an; insbesondere gilt also $b\langle 1, a\rangle \neq c\langle 1, a\rangle$. Für (2G2) folgt dann $\langle 1, a\rangle \setminus G = \{x_{a,b}, x_{a,c}\}$, und zu $x := b\langle 1, a\rangle \cap c\langle 1, a\rangle$ existiert wegen $x \notin G$ ein regulärer Punkt $d \in \langle 1, x\rangle$ mit $d \neq 1$. d liegt auf keiner der Geraden $\langle 1, a\rangle$, $b\langle 1, a\rangle$, $c\langle 1, a\rangle$, und wir dürfen etwa $x_{a,d} = x_{a,b}$ annehmen. Dann enthält die nicht-singuläre Gerade $c\langle 1, a\rangle$ jedoch drei verschiedene singuläre Punkte, nämlich $x_{a,c}$, x und ihren Schnittpunkt mit $d\langle 1, a\rangle$ – ein Widerspruch zu (2G2).

Für (EGU) sei $d \in G \setminus \overline{1, a}$ und $(d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine injektive Folge von Punkten $d_i \in \overline{1, d} \setminus \{1\}$; dann gilt $d_i\langle 1, a\rangle \neq d_j\langle 1, a\rangle$ für $i \neq j$. Da $\langle 1, a\rangle$ nach Voraussetzung nur endlich viele singuläre Punkte enthält, nehmen wir etwa $x_{a,d_1} = x_{a,d_i}$ für unendlich viele, also o.B.d.A. sogar für alle $i \in \mathbb{N}$ an. Wegen $x_{a,b} \neq x_{a,c}$ sei weiter $x_{a,b} \neq x_{a,d_1}$. Dann sind die Schnittpunkte der Geraden $b\langle 1, a\rangle$ mit $d_i\langle 1, a\rangle$ und $d_j\langle 1, a\rangle$ für $i \neq j$ verschieden und singulär, und wir erhalten $|\, b\langle 1, a\rangle \setminus G \,| \notin \mathbb{N}$, im Widerspruch zu (EGU). – Es gilt also in jedem Fall $x_{a,b} = x_{a,c}$ und damit (1).

Nach (1) ist für $a \in G \setminus \{1\}$ und $b \in G \setminus \overline{1, a}$ der Punkt $x_a := x_{a,b}$ unabhängig von der Wahl von b. Da x_a singulär ist, folgt mit (1.13)(b):

(2) Für $a \in G \setminus \{1\}$ ist x_a linksinvariant.

Als nächstes beweisen wir

(3) $l := \{\, x_a \mid a \in G \setminus \{1\} \,\} \in \mathcal{L}$.

Es reicht zu zeigen, daß drei verschiedene Punkte von l stets kollinear sind. Wir nehmen an, es existieren $a, b, c \in G \setminus \{1\}$ mit nicht-kollinearen x_a, x_b, x_c. Dann sind $\langle x_a, x_b\rangle$, $\langle x_a, x_c\rangle$ und $\langle x_b, x_c\rangle$ drei verschiedene linksinvariante und damit singuläre Geraden; insbesondere ist also der Schnittpunkt von $\langle 1, a\rangle$ mit $\langle x_b, x_c\rangle$ ein von x_a verschiedener singulärer Punkt, was auf $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) \geq 3$ führt. Für (2G2) kann nun eine Gerade $l \in \mathcal{L}$ gewählt werden, auf der 1, aber keiner der Punkte x_a, x_b, x_c liegt. l schneidet $\langle x_a, x_b\rangle$, $\langle x_a, x_c\rangle$ und $\langle x_b, x_c\rangle$ dann jedoch in drei verschiedenen singulären Punkten, im Widerspruch zu (2G2).

Für (EGU) existiert zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $d_i \in G \setminus \overline{1,a}$ so, daß $\overline{1,d_i} \neq \overline{1,d_j}$ für $i \neq j$ gilt. Die Geraden $l_i := \langle x_a, x_{d_i}\rangle$ sind sämtlich linksinvariant und damit singulär. Da $\langle 1, b\rangle$ nur endlich viele singuläre Punkte enthält, ist $\{\, l_i \mid i \in \mathbb{N}\,\}$ endlich; es gelte also etwa $l_1 = l_i$ für unendlich viele und damit o.B.d.A. sogar für alle $i \in \mathbb{N}$. Wegen $\langle x_a, x_b\rangle \neq \langle x_a, x_c\rangle$ dürfen wir außerdem $x_b \notin l_1$ annehmen. Dann enthält die Gerade $\langle 1, a\rangle$, im Widerspruch zu (EGU), unendlich viele singuläre Punkte, nämlich ihre Schnittpunkte mit den singulären Geraden $\langle x_b, x_{d_i}\rangle$. – Also gilt (3).

Nach (2) und (3) ist a_l für jedes $a \in G$ eine Zentralkollineation von $(P, \mathcal{L})$ mit Achse l. Für $a \in G \setminus \{1\}$ bezeichne z_a wieder das Zentrum von a_l; z_a ist nach (2.8)(a) ein singulärer Punkt von $\langle 1, a\rangle$. – Wir zeigen

(4) Für $a \in G \setminus \{1\}$ gilt $\langle 1, a\rangle \setminus G = \{x_a, z_a\}$.

Sei $a \in G \setminus \{1\}$ und $x \in \langle 1, a\rangle \setminus G$ mit $x \neq x_a$. Für (2G2) ist dann $x = z_a$, denn andernfalls folgt $ax \neq x$, und damit enthält $\langle 1, a\rangle$ mehr als zwei singuläre Punkte. Wir nehmen also an, daß (EGU) gilt, und wählen eine injektive Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Punkten $a_i \in \overline{1,a} \setminus \{1\}$. Als singuläre Teilmenge von $\langle 1, a\rangle$ ist $\{\, z_{a_i} \mid i \in \mathbb{N}\,\}$ endlich; wir dürfen also sogar etwa $z_{a_1} = z_{a_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ annehmen. Dann folgt $x = z_{a_1}$, denn andernfalls ist $\{\, a_i x \mid i \in \mathbb{N}\,\}$ wegen $x \notin l$ eine unendliche singuläre Teilmenge von $\langle 1, a\rangle$; analog erhält man $ax = z_{a_1}$. Nun ergibt sich $ax = x$ und damit $x = z_a$. – Also gilt (4).

Für $a, b \in G \setminus \{1\}$ mit $b \in \overline{1,a}$ folgt wegen $x_a = x_b$ mit (4) $z_a = z_b$; also ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ nach (2.8)(b) zweiseitig, nach (1.11) damit sogar l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$. Aus Symmetriegründen erhält man mit dem bereits Bewiesenen nun die Existenz einer punktweise rechtsinvarianten Geraden $l' \in \mathcal{L}$. Dann ergibt (2.8)(d) $l' = \{\, z_a \mid a \in G \setminus \{1\}\,\}$, und da nach (4) $G = P \setminus (l \cup l')$ gilt, folgt schließlich die Behauptung. □

Bemerkung. Die Aussage von (2.19) wird im wesentlichen bereits in [2] (vgl. [2], Satz 3) gezeigt. Eine genauere Analyse ergibt, daß bei geringer Modifikation der dortigen Beweise auf die Zweiseitigkeit von $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ verzichtet werden kann; und auch die Eigenschaft von $(P, \mathcal{L})$, desarguessch zu sein, ist nicht erforderlich, wenn man die Translations- und Strecktranslationsräume wie hier definiert und nicht über Vektorräume. – Für (2G2) wird (2.19) im wesentlichen auch in [12] bewiesen.

Im nicht-ebenen Fall erhält man

(2.20) *$(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sei eine linear gefaserte Inzidenzgruppe und $(P, \mathcal{L})$ ein mindestens dreidimensionaler projektiver Raum. Ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ 2-geschlitzt und l-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ oder gilt (EGU), so ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ zweiseitig.*

Beweis. Sei $a \in G \setminus G_0$ mit $a \neq 1$ und $b \in G \setminus \overline{1,a}$. Da mit (1.12) folgt, daß $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ auch für (EGU) l-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ ist, bleibt nach (2.7) noch $\overline{1,a} \cdot b \subseteq \overline{b, ab}$ zu zeigen. Wegen $b \notin G_a$ ergibt (2.2)(c): $G' := \langle 1, a, b\rangle \cap G < (G, \cdot\,)$. Also ist G' eine linear gefaserte

Inzidenzuntergruppe von $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$, die zusammen mit der projektiven Ebene $P' := \langle 1, a, b \rangle$ (2G2) oder (EGU) erfüllt. Nach (2.19) ist G' dann sogar l-r-eingebettet in P', und man erhält $\overline{1, a} \cdot b = \overline{b, ab}$. $\square$

Bemerkung. Mit (2.19) und (2.20) folgt nochmals (7.4) aus [11] für Inzidenzgruppen; in [11] wird die Zweiseitigkeit sogar für den allgemeineren Fall gezeigt, daß $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ eine linear gefaserte 2-geschlitzte Inzidenzloop mit gewissen Zusatzeigenschaften ist.

(2.21) Satz. $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ *sei eine linear gefaserte Inzidenzgruppe und* $(P, \mathcal{L})$ *ein mindestens zweidimensionaler projektiver Raum; außerdem gelte (2G4) oder (EGU). Dann ist* $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ *l-r-eingebettet in* $(P, \mathcal{L})$.

Beweis. Für $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$ folgt die Behauptung mit (2.19); es gelte also $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$. $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ist nach (1.12) l-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$, also wegen (2.20) zweiseitig. Mit (1.12) folgt nun, daß $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ sogar l-r-eingebettet ist in $(P, \mathcal{L})$. $\square$

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von (2.21) ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ein Translations- oder Strecktranslationsraum oder die projektive Ableitung einer kinematischen Algebra; insbesondere gilt also stets (2G4) (vgl. dazu (3.30) und die daran anschließende Bemerkung).

Kapitel 3

Zweiseitige unvollständige Algebren

In diesem Kapitel wird untersucht, unter welchen Bedingungen zweiseitige unvollständige Algebren fortsetzbar sind. Diese Frage ist vor allem im Hinblick auf (1.18) von Interesse. – Wir weisen noch darauf hin, daß es auch zweiseitige unvollständige Algebren gibt, die nicht fortsetzbar sind (siehe etwa die Bemerkung (a) hinter (3.9) oder das Beispiel auf Seite 49).

Im ersten Abschnitt werden zunächst verschiedene Aussagen zusammengestellt, die für das weitere Vorgehen benötigt werden. Außerdem führen wir die Mengen $E_{\mathfrak{a}}$ und E_0 für zweiseitige unvollständige Algebren ein; sie entsprechen den Mengen G_a und G_0 der zugehörigen Inzidenzgruppen. – Analog zum 2. Kapitel werden die Fälle $E_0 = \emptyset$ und $E_0 \neq \emptyset$ anschließend getrennt untersucht.

Im zweiten Abschnitt zeigen wir (vgl. (3.10)), daß eine zweiseitige unvollständige Algebra $(F, E, K, +, \cdot\,)$ mit $E_0 = \emptyset$ und $\dim(F, K) \geq 4$ genau dann fortsetzbar ist, wenn ihr Koordinatenkörper kommutativ ist.

Für den Fall $E_0 \neq \emptyset$ geben wir im dritten Abschnitt (vgl. (3.15)) drei äquivalente Bedingungen zur Fortsetzbarkeit zweiseitiger unvollständiger Algebren an, die im wesentlichen darauf hinauslaufen, daß die in (1.15)(b) bzw. Abschnitt 3.1 definierten Abbildungen $\mathfrak{a}_l$ und $\mathfrak{a}_r$ linear sind.

Im letzten Abschnitt betrachten wir zwei spezielle Klassen zweiseitiger Inzidenzgruppen (vgl. (3.18)), die – von Minimalfällen abgesehen – den desarguesschen 2-geschlitzten Fall umfassen. Es wird gezeigt, daß es sich bei ihnen stets um Translationsräume, Strecktranslationsräume oder projektive Ableitungen unitärer Algebren handelt. Damit ist insbesondere das Problem der algebraischen Beschreibung zweiseitiger desarguesscher 2-geschlitzter Inzidenzgruppen gelöst.

3.1 Grundlegende Eigenschaften

$(F, E, K, +, \cdot\,)$ sei in diesem Abschnitt stets eine zweiseitige unvollständige Algebra mit $\dim(F, K) \geq 3$. Wir setzen $(P, \mathcal{L}) := \Pi(F, K)$ und bezeichnen mit $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ die nach (1.16) zu $(F, E, K, +, \cdot\,)$ gehörende Inzidenzgruppe; sie ist, da $(F, E, K, +, \cdot\,)$ zweiseitig ist, l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$.

Sei $\mathfrak{a} \in E$. Mit $\varphi(\mathfrak{a})_r \in \mathrm{Aut}(P, \mathcal{L})$ und

$$\varphi(\mathfrak{a})_r(\varphi(1)) = \varphi(1) \cdot \varphi(\mathfrak{a}) = \varphi(1 \cdot \mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{a})$$

folgt aus dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, daß eine eindeutig bestimmte bijektive semilineare Abbildung $\mathfrak{a}_r$ von (F, K) existiert, die $\varphi(\mathfrak{a})_r$ induziert und für die $\mathfrak{a}_r(1) = \mathfrak{a}$ gilt. Für $\mathfrak{b} \in E$ erhält man nun

$$\varphi(\mathfrak{a}_r(\mathfrak{b})) = \varphi(\mathfrak{a})_r(\varphi(\mathfrak{b})) = \varphi(\mathfrak{b}) \cdot \varphi(\mathfrak{a}) = \varphi(\mathfrak{b}\mathfrak{a})\,;$$

also gibt es ein ebenfalls eindeutig bestimmtes Element $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} \in K^*$ mit $\mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}) = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Wir setzen noch $\alpha^{\mathfrak{a}}_0 := 1$ und definieren $\alpha^{\mathfrak{a}}\colon E \cup \{0\} \to E \cup \{0\}$ durch $\alpha^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) := \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}$. Ist $\rho_{\mathfrak{a}}$ der Begleitautomorphismus von $\mathfrak{a}_r$, so folgt für $\lambda \in K$:

$$\alpha^{\mathfrak{a}}(\lambda)\mathfrak{a} = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\lambda}\lambda\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_r(\lambda) = \mathfrak{a}_r(\lambda \cdot 1) = \rho_{\mathfrak{a}}(\lambda) \cdot \mathfrak{a}_r(1) = \rho_{\mathfrak{a}}(\lambda)\mathfrak{a}\,.$$

Damit gilt

(3.1) *Für $\mathfrak{a} \in E$ ist $\alpha^{\mathfrak{a}}{}_{|K}$ der Begleitautomorphismus von $\mathfrak{a}_r$.*

Ist $(F, E, K, +, \cdot\,)$ fortsetzbar, so gilt für $\mathfrak{a} \in E$, $\mathfrak{x} \in F$ wegen der Eindeutigkeit von $\mathfrak{a}_r$ offenbar stets $\mathfrak{a}_r(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}\mathfrak{a}$; also folgt mit (1.19) unmittelbar

(3.2) *$(F, E, K, +, \cdot\,)$ ist genau dann fortsetzbar, wenn $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = 1$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ gilt.*

Wir beweisen weitere Eigenschaften von $(F, E, K, +, \cdot\,)$:

(3.3) *Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ und $\lambda \in K^*$ gelten:*

(a) *$\mathfrak{a}_l = \mathfrak{a}_r$, falls $\varphi(\mathfrak{a})$ im Zentrum von $(G, \cdot\,)$ liegt.*

(b) *$\mathfrak{a}_r \circ \mathfrak{b}_l = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}_l \circ \mathfrak{a}_r$.*

(c) *$\mathfrak{a}_r \circ \mathfrak{b}_r = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a})_r$.*

(d) *$\lambda\mathfrak{a}_r = (\lambda\mathfrak{a})_r$.*

Beweis. Sämtliche Aussagen ergeben sich aus

(∗) Stimmen die von den bijektiven semilinearen Abbildungen σ, τ induzierten Kollineationen von $\Pi(F, K)$ auf G überein und gilt $\sigma(1) = \tau(1)$, so folgt $\sigma = \tau$.

Nach (1.3) sind zwei Kollineationen von $(P, \mathcal{L})$ bereits dann identisch, wenn sie auf G übereinstimmen; nun erhält man (∗) direkt aus dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. □

Wie wir aus (3.1) wissen, ist für $\mathfrak{a} \in E$ die Einschränkung von $\alpha^{\mathfrak{a}}$ auf K ein Körperautomorphismus. Wir können nun sogar beweisen:

(3.4) *Für jedes* $\mathfrak{a} \in E$ *ist die Abbildung* $\alpha^{\mathfrak{a}}{}_{|E}$ *ein Automorphismus von* $(E, \cdot\,)$ *mit Fixgruppe* $E^1_{\mathfrak{a}} := \{\, \mathfrak{b} \in E \mid \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = 1 \,\}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \in E$ beliebig. Da $E^1_{\mathfrak{a}}$ offenbar gerade die Menge der Fixpunkte von $\alpha^{\mathfrak{a}}{}_{|E}$ ist, braucht nur noch $\alpha^{\mathfrak{a}}{}_{|E} \in \mathrm{Aut}(E, \cdot\,)$ gezeigt zu werden.

$\alpha^{\mathfrak{a}}{}_{|E}$ ist ein Endomorphismus von $(E, \cdot\,)$, denn es gilt $\alpha^{\mathfrak{a}}(E) \subseteq E$ und mit (3.3)(b) folgt für beliebige $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in E$

$$\begin{aligned}\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{bc}}\mathfrak{bca} &= \mathfrak{a}_r(\mathfrak{bc}) = (\mathfrak{a}_r \circ \mathfrak{b}_l)(\mathfrak{c}) = (\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}_l \circ \mathfrak{a}_r)(\mathfrak{c}) = \\ &= \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}_l(\mathfrak{a}_r(\mathfrak{c})) = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}_l(\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{ca}) = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{ca}\end{aligned}$$

und daher $\alpha^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{bc}) = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{bc}}\mathfrak{bc} = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{c} = \alpha^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})\alpha^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{c})$.

Wegen $\varphi(\mathfrak{a}_r(E)) = \varphi(E) \cdot \varphi(\mathfrak{a}) = \varphi(E)$ gilt $\mathfrak{a}_r(E) = E$; also ist $\mathfrak{a}_{r|E} \colon E \to E$ bijektiv. Für $\mathfrak{b} \in E$ gilt außerdem $\alpha^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{a}^{-1}$, und damit ist auch $\alpha^{\mathfrak{a}}{}_{|E}$ bijektiv. $\square$

(3.5) *Sei* $\mathfrak{a} \in E$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Für alle* $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in E \cup \{0\}$ *mit* $1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \in E$ *gilt* $(1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{ba} + \mathfrak{ca}$.

(ii) *Für alle* $\mathfrak{b} \in E$ *ist* $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = 1$.

Beweis. Die Richtung „(ii)⇒(i)“ ist trivial. – Es gelte (i), und $\mathfrak{b} \in E$ sei beliebig.

1. Fall: $\mathfrak{b} \notin K^*$. Wegen $\dim(F, K) \geq 3$ und (UA 4) existiert dann ein $\mathfrak{d} \in E \setminus \langle 1, \mathfrak{b} \rangle$. Nun wählen wir nach (UA 4) $\epsilon \in K$, $\mathfrak{e} \in E$ mit $\mathfrak{d}^{-1}(1 + \mathfrak{b}) = \epsilon + \mathfrak{e}$ und setzen $\mathfrak{c} := -\mathfrak{d}\epsilon$. Damit gilt $1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{de} \in E$, außerdem ergibt $K^* \lhd (E, \cdot\,)$: $\mathfrak{c} = -\mathfrak{d}\epsilon\mathfrak{d}^{-1} \cdot \mathfrak{d} \in K\mathfrak{d}$; insbesondere sind also $1, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ linear unabhängig, falls $\mathfrak{c} \neq 0$ ist. Es folgen

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_r(1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) &= \alpha^{\mathfrak{a}}_{1+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}(1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})\mathfrak{a} \overset{(i)}{=} \alpha^{\mathfrak{a}}_{1+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}(\mathfrak{a} + \mathfrak{ba} + \mathfrak{ca})\,, \\ \mathfrak{a}_r(1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) &= \mathfrak{a}_r(1) + \mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}) + \mathfrak{a}_r(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a} + \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{ba} + \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}}\mathfrak{ca}.\end{aligned}$$

Für $\mathfrak{c} \neq 0$ sind mit $1, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ auch $\mathfrak{a}, \mathfrak{ba}, \mathfrak{ca}$, für $\mathfrak{c} = 0$ mit $1, \mathfrak{b}$ auch $\mathfrak{a}, \mathfrak{ba}$ linear unabhängig, da $\mathfrak{a}_r$ eine bijektive semilineare Abbildung von (F, K) ist. Also folgt mit Koeffizientenvergleich $1 = \alpha^{\mathfrak{a}}_{1+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}}$.

2. Fall: $\mathfrak{b} \in K^*$. Dann existiert ein $\mathfrak{c} \in E \setminus K$, und es gilt $\mathfrak{bc} \in E \setminus K$. Mit dem ersten Fall folgt $\mathfrak{c}, \mathfrak{bc} \in E^1_{\mathfrak{a}}$, und da $E^1_{\mathfrak{a}}$ nach (3.4) eine Untergruppe von $(E, \cdot\,)$ ist, ergibt sich nun $\mathfrak{b} \in E^1_{\mathfrak{a}}$ und damit auch hier $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = 1$. $\square$

(3.6) *Es gilt* $\mathrm{R}(E) := \{\, \mathfrak{a} \in E \mid E^1_{\mathfrak{a}} = E \,\} < (E, \cdot\,)$, *und für alle* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m \in \mathrm{R}(E)$ *mit* $\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_m \in E$ *folgt* $\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_m \in \mathrm{R}(E)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\mathrm{R}(E) < (E, \cdot\,)$: Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathrm{R}(E)$ und $\mathfrak{c} \in E$ folgt mit (3.3)(c)

$$(\mathfrak{ab})_r(\mathfrak{c}) = \alpha^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{ab})_r(\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}_r \circ \mathfrak{a}_r(\mathfrak{c}) = \mathfrak{b}_r(\mathfrak{ca}) = (\mathfrak{ca})\mathfrak{b} = \mathfrak{c}(\mathfrak{ab})\,,$$

und damit ist auch $\mathfrak{ab} \in \mathrm{R}(E)$.

Da man andererseits wegen $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{a}^{-1}} = 1$ aus (3.3)(c) $\mathfrak{a}_r \circ (\mathfrak{a}^{-1})_r = (\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a})_r = \mathrm{id}_F$ erhält, ist $(\mathfrak{a}^{-1})_r = (\mathfrak{a}_r)^{-1}$; damit folgt für $\mathfrak{c} \in E$

$$(\mathfrak{a}^{-1})_r(\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}_r)^{-1}((\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1})\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}_r)^{-1}(\mathfrak{a}_r(\mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1})) = \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}\,.$$

Also gilt $\mathfrak{a}^{-1} \in \mathrm{R}(E)$ und somit auch $\mathrm{R}(E) < (E, \cdot\,)$.

Zum Beweis des zweiten Teils unserer Behauptung seien nun $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_m \in \mathrm{R}(E)$ mit $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_m \in E$. Wir wollen zeigen, daß $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = 1$ für alle $\mathfrak{b} \in E$ gilt, und verwenden dazu (3.5): Es seien also $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in E \cup \{0\}$ mit $1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} \in E$. Für $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt dann wegen $\mathfrak{a}_i \in \mathrm{R}(E)$ nach (3.5)

$$(1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}\mathfrak{a}_i + \mathfrak{c}\mathfrak{a}_i\,;$$

damit folgt

$$\begin{aligned}(1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})\mathfrak{a} &\overset{(\mathrm{UA}\,3)}{=} (1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})\mathfrak{a}_1 + \ldots + (1 + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})\mathfrak{a}_m = \\ &= \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_m + \mathfrak{b}\mathfrak{a}_m + \mathfrak{c}\mathfrak{a}_m = \\ &= \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_m + \mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{b}\mathfrak{a}_m + \mathfrak{c}\mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{c}\mathfrak{a}_m \overset{(\mathrm{UA}\,3)}{=} \mathfrak{a} + \mathfrak{b}\mathfrak{a} + \mathfrak{c}\mathfrak{a}\,,\end{aligned}$$

und (3.5) ergibt nun $\mathfrak{a} \in \mathrm{R}(E)$. □

(3.7) *Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ mit $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = 1$ und $\lambda \in K^*$ gelten:*

(a) $\alpha^{\lambda\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = \alpha^{\lambda}_{\mathfrak{b}} = [\lambda, \mathfrak{b}]$.

(b) $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\lambda\mathfrak{b}} = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\lambda}$.

Beweis. Nach (3.3)(d) gilt $\lambda\mathfrak{a}_r = (\lambda\mathfrak{a})_r$, also folgt mit $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = 1$

$$\lambda\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}) = (\lambda\mathfrak{a})_r(\mathfrak{b}) = \alpha^{\lambda\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b}\lambda\mathfrak{a}$$

und damit $\alpha^{\lambda\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = \lambda\mathfrak{b}\lambda^{-1}\mathfrak{b}^{-1} = [\lambda, \mathfrak{b}]$. Wegen $\alpha^{1}_{\mathfrak{b}} = 1$ ist dann auch $\alpha^{\lambda}_{\mathfrak{b}} = [\lambda, \mathfrak{b}]$, und das ergibt (a). – Mit (3.4) folgt

$$\alpha^{\mathfrak{a}}_{\lambda\mathfrak{b}}\lambda\mathfrak{b} = \alpha^{\mathfrak{a}}(\lambda\mathfrak{b}) = \alpha^{\mathfrak{a}}(\lambda)\alpha^{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\lambda}\lambda\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{b} = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\lambda}\lambda\mathfrak{b}\,,$$

also $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\lambda\mathfrak{b}} = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\lambda}$, und damit gilt auch (b). □

Definition. Für $\mathfrak{a} \in E$ sei

$$E_{\mathfrak{a}} := \{\, \mathfrak{b} \in E \mid 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\mathfrak{a} \ \text{ linear unabhängig} \,\}\,.$$

Außerdem setze $E_0 := \{\, \mathfrak{a} \in E \mid E_{\mathfrak{a}} \neq \emptyset \,\}$ und $E_{nk} := \{\, \mathfrak{a} \in E \mid \mathfrak{a}^2 \notin \langle 1, \mathfrak{a} \rangle \,\}$.

Bemerkungen. (a) Offenbar gilt $E_{\mathfrak{a}} = \varphi^{-1}(G_{\varphi(\mathfrak{a})})$ für $\mathfrak{a} \in E$ und $E_0 = \varphi^{-1}(G_0)$. – Beachte, daß die Mengen $E_{\mathfrak{a}}$, E_0 und E_{nk} auch für nicht-zweiseitige unvollständige Algebren definiert werden können.

(b) Für $\mathfrak{a} \in E$ folgt mit (1.2)(a), daß genau dann $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ gilt, wenn $\overline{\varphi(1), \varphi(\mathfrak{a})}$ keine Untergruppe von $(G, \cdot\,)$ ist; $E_{nk} = \emptyset$ bedeutet also gerade, daß $(F, E, K, +, \cdot\,)$ kinematisch ist (vgl. die Definition auf Seite 25).

(3.8) ***(a)*** *Ist $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ mit $1+\mathfrak{a} \in E$, so gilt $\alpha_{1+\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}} = \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} = 1$.*
(b) *Für $\dim(F,K) \geq 4$ gilt $E_{nk} \subseteq E_0$.*

Beweis. (b) folgt sofort mit (1.14); wir zeigen (a). Für $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ mit $1+\mathfrak{a} \in E$ gelten

$$\begin{aligned}(1+\mathfrak{a})_r(1+\mathfrak{a}) &= (1+\mathfrak{a})_r(1) + (1+\mathfrak{a})_r(\mathfrak{a}) = 1+\mathfrak{a}+\alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2)\,,\\(1+\mathfrak{a})_r(1+\mathfrak{a}) &= \alpha_{1+\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}(1+\mathfrak{a})(1+\mathfrak{a}) = \alpha_{1+\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}(1+\mathfrak{a}+(1+\mathfrak{a})\mathfrak{a}) =\\&= \alpha_{1+\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}(1+\mathfrak{a}+(\alpha_{1+\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{a}_r(1+\mathfrak{a})) =\\&= \alpha_{1+\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}(1+\mathfrak{a}+(\alpha_{1+\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}})^{-1}(\mathfrak{a}+\alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^2)).\end{aligned}$$

Da $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2$ wegen $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ linear unabhängig sind, liefert Koeffizientenvergleich nun zunächst $1 = \alpha_{1+\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}$ und damit

$$1+\alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}} = 1+(\alpha_{1+\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}})^{-1} \quad \text{und} \quad \alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}} = (\alpha_{1+\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}}.$$

Also folgt auch $\alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} = 1$. □

3.2 Der Fall $E_0 = \emptyset$

In diesem Abschnitt sei $(F, E, K, +, \cdot\,)$ wieder eine zweiseitige unvollständige Algebra mit $\dim(F,K) \geq 3$, $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ ihre Inzidenzgruppe und $(P, \mathcal{L}) := \Pi(F,K)$. – Wir zeigen zunächst

(3.9) *H_l sei eine punktweise linksinvariante und H_r eine punktweise rechtsinvariante Hyperebene von $(P,\mathcal{L})$. Setzt man $U := \varphi^{-1}(H_l) \cup \{0\}$ und $V := \varphi^{-1}(H_r) \cup \{0\}$, so gelten:*

- ***(a)*** *$F = K \oplus U = K \oplus V$.*
- ***(b)*** *Zu $\mathfrak{a} \in E$ existiert ein $\lambda_{\mathfrak{a}} \in K^*$ mit $\mathfrak{a}_l(\mathfrak{u}) = \lambda_{\mathfrak{a}} u$ für alle $\mathfrak{u} \in U$, und der Begleitautomorphismus von $\mathfrak{a}_l$ ist $\;: \mu \mapsto \lambda_{\mathfrak{a}}\mu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}$.*
- ***(c)*** *Zu $\mathfrak{a} \in E$ existiert ein $\varrho_{\mathfrak{a}} \in K^*$ mit $\mathfrak{a}_r(\mathfrak{v}) = \varrho_{\mathfrak{a}}\mathfrak{v}$ für alle $\mathfrak{v} \in V$, und der Begleitautomorphismus von $\mathfrak{a}_r$ ist $\;: \mu \mapsto \varrho_{\mathfrak{a}}\mu(\varrho_{\mathfrak{a}})^{-1}$.*
- ***(d)*** *Für jedes $\mathfrak{a} \in E$ ist $\mathfrak{a} - \lambda_{\mathfrak{a}} \in V$ und $\mathfrak{a} - \varrho_{\mathfrak{a}} \in U$.*
- ***(e)*** *Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ gelten*

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\mathfrak{b} &= \lambda_{\mathfrak{a}}\varrho_{\mathfrak{b}}(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{a} + \lambda_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} - \lambda_{\mathfrak{a}}\varrho_{\mathfrak{b}},\\\mathfrak{b}_r(\mathfrak{a}) &= \varrho_{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1}\mathfrak{b} + \varrho_{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} - \varrho_{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}.\end{aligned}$$

- ***(f)*** *$(F, E, K, +, \cdot\,)$ ist genau dann fortsetzbar, wenn $(K, +, \cdot\,)$ kommutativ ist.*

Beweis. *Zu (a):* U und V sind Hyperebenen von (F,K), für die wegen $H_l, H_r \subseteq P \setminus G$ gilt $K \cap U = K \cap V = \{0\}$. Damit folgt (a).

Zu (b): Sei $\mathfrak{a} \in E$. Für $\mathfrak{u} \in U^*$ gilt wegen $\varphi(\mathfrak{u}) \in H_l$: $\varphi(\mathfrak{a}_l(\mathfrak{u})) = \varphi(\mathfrak{a})_l(\varphi(\mathfrak{u})) = \varphi(\mathfrak{u})$; also existiert ein $\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}} \in K^*$ mit $\mathfrak{a}_l(\mathfrak{u}) = \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}}\mathfrak{u}$.

Wir zeigen zunächst, daß für $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \in U^*$ stets $\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_1} = \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_2}$ gilt: Sind $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ linear unabhängig, so folgt mit Koeffizientenvergleich aus

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2}\mathfrak{u}_1 + \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2}\mathfrak{u}_2 = \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2}(\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2) = \mathfrak{a}_l(\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2) = \\ = \mathfrak{a}_l(\mathfrak{u}_1) + \mathfrak{a}_l(\mathfrak{u}_2) = \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_1}\mathfrak{u}_1 + \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_2}\mathfrak{u}_2\end{aligned}$$

$\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_1} = \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2} = \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_2}$. Sind $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ linear abhängig, so kann wegen $\dim(F,K) \geq 3$ ein $\mathfrak{u} \in U^* \setminus K\mathfrak{u}_1$ gewählt werden. Da dann $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}_2$ jeweils linear unabhängig sind, folgt $\lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_1} = \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}} = \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}_2}$. – Setzt man also $\lambda_{\mathfrak{a}} := \lambda_{\mathfrak{a},\mathfrak{u}}$ für irgendein $\mathfrak{u} \in U^*$, so folgt bereits der erste Teil der Behauptung.

Für $\mathfrak{u} \in U^*$ und $\mu \in K^*$ erhält man wegen $\mu\mathfrak{u} \in U$ weiter

$$\mathfrak{a}_l(\mu\mathfrak{u}) = \lambda_{\mathfrak{a}}\mu\mathfrak{u} = \lambda_{\mathfrak{a}}\mu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\lambda_{\mathfrak{a}}\mathfrak{u} = \lambda_{\mathfrak{a}}\mu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{a}_l(\mathfrak{u}),$$

und das ergibt den zweiten Teil von (b).

Zu (c): Der Beweis verläuft analog zu dem von (b).

Zu (d): Zunächst sei $\mu \in K^*$. Aus Dimensionsgründen existiert ein $\mathfrak{u} \in U^*$, und nun folgt mit (b) $\mu\mathfrak{u} = \mu_l(\mathfrak{u}) = \lambda_\mu\mathfrak{u}$, also $\mu - \lambda_\mu = 0 \in U$. Da nach (3.3)(a) $\mu_l = \mu_r$ gilt, ergibt sich analog $\mu - \rho_\mu = 0 \in V$.

Nun seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E \setminus K$. Wir wollen $\mathfrak{a} - \lambda_{\mathfrak{a}} \in V$ und $\mathfrak{b} - \varrho_{\mathfrak{b}} \in U$ simultan beweisen und dürfen dazu wegen $\dim(F,K) \geq 3$ und (UA 4) annehmen, daß $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ linear unabhängig sind. Nach (a) gibt es $(\mu, \mathfrak{v}) \in K \times V$ mit $\mathfrak{a} = \mu + \mathfrak{v}$ und $(\nu, \mathfrak{u}) \in K \times U$ mit $\mathfrak{b} = \nu + \mathfrak{u}$. Es gelten:

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_r(\mathfrak{a}) &= \mathfrak{b}_r(\mu + \mathfrak{v}) = \mathfrak{b}_r(\mu) + \mathfrak{b}_r(\mathfrak{v}) \overset{(c)}{=} \varrho_{\mathfrak{b}}\mu(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1}\mathfrak{b} + \varrho_{\mathfrak{b}}\mathfrak{v} = \\ &= \varrho_{\mathfrak{b}}\mu(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1}\nu + \varrho_{\mathfrak{b}}\mu(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1}\mathfrak{u} + \varrho_{\mathfrak{b}}\mathfrak{v}, \\ \mathfrak{b}_r(\mathfrak{a}) &= \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}_l(\nu + \mathfrak{u}) = \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}_l(\nu) + \mathfrak{a}_l(\mathfrak{u})) \overset{(b)}{=} \\ &= \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(\lambda_{\mathfrak{a}}\nu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{a} + \lambda_{\mathfrak{a}}\mathfrak{u}) = \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\nu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mu + \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\nu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{v} + \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\mathfrak{u}.\end{aligned}$$

Da mit $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ auch $1, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ linear unabhängig sind, liefert Koeffizientenvergleich:

$$\varrho_{\mathfrak{b}}\mu(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1}\nu = \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\nu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mu\,, \tag{i}$$

$$\varrho_{\mathfrak{b}}\mu(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1} = \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\,, \tag{ii}$$

$$\varrho_{\mathfrak{b}} = \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\nu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\,. \tag{iii}$$

Damit folgen

$$\varrho_{\mathfrak{b}}\mu(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1}\nu \overset{(i)}{=} \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\nu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mu \overset{(iii)}{=} \varrho_{\mathfrak{b}}\mu \tag{iv}$$

und

$$\alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\nu(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mu \overset{(i)}{=} \varrho_{\mathfrak{b}}\mu(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1}\nu \overset{(ii)}{=} \alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\nu\,. \tag{v}$$

(iv) und (v) ergeben $\varrho_{\mathfrak{b}} = \nu$ bzw. $\lambda_{\mathfrak{a}} = \mu$, also gelten $\mathfrak{a} - \lambda_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{v} \in V$ und $\mathfrak{b} - \varrho_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{u} \in U$.

Zu (e): Für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ gelten

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\mathfrak{b} &= \mathfrak{a}_l(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}_l(\varrho_{\mathfrak{b}}) + \mathfrak{a}_l(\mathfrak{b} - \varrho_{\mathfrak{b}}) \overset{(b),(d)}{=} \lambda_{\mathfrak{a}}\varrho_{\mathfrak{b}}(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{a} + \lambda_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b} - \varrho_{\mathfrak{b}}) = \\ &= \lambda_{\mathfrak{a}}\varrho_{\mathfrak{b}}(\lambda_{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{a} + \lambda_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} - \lambda_{\mathfrak{a}}\varrho_{\mathfrak{b}}\,, \\ \mathfrak{b}_r(\mathfrak{a}) &= \mathfrak{b}_r(\lambda_{\mathfrak{a}}) + \mathfrak{b}_r(\mathfrak{a} - \lambda_{\mathfrak{a}}) \overset{(c),(d)}{=} \varrho_{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1}\mathfrak{b} + \varrho_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a} - \lambda_{\mathfrak{a}}) = \\ &= \varrho_{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}(\varrho_{\mathfrak{b}})^{-1}\mathfrak{b} + \varrho_{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} - \varrho_{\mathfrak{b}}\lambda_{\mathfrak{a}}\,.\end{aligned}$$

Zu (f): Ist $(K, +, \cdot)$ kommutativ, so folgt mit (e) $\mathfrak{b}_r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ für alle $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$; also ist $(F, E, K, +, \cdot)$ nach (3.2) fortsetzbar. – Die andere Richtung von (f) ist trivial. □

Bemerkungen. (a) $((F, +), (K, +, \cdot), \cdot)$ sei ein mindestens dreidimensionaler Linksvektorraum mit Hyperebenen U, V und $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ ein Translations- bzw. Strecktranslationsraum von $\Pi(F, K)$ bezüglich $\varphi(V^*), \varphi(U^*)$; für $U \neq V$ sei noch $K \neq \mathbb{Z}_2$. Wir dürfen annehmen, daß $(K, +)$ eine Untergruppe von $(F, +)$ und $\varphi(1)$ das Einselement von $(G, \cdot)$ ist, und setzen $E := F \setminus (U \cup V)$; nun können wir wie im Beweis zu (1.18) die Skalarmultiplikation von (F, K) so auf $(E \cup \{0\}) \times F$ fortsetzen, daß $(F, E, K, +, \cdot)$ eine zu $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ und $(P, \mathcal{L})$ gehörende und damit zweiseitige unvollständige Algebra ist. Mit G_0 ist auch E_0 leer, und da $\varphi(V^*)$ nach (2.8)(c) punktweise rechtsinvariant ist, ist $(F, E, K, +, \cdot)$ nach (3.9) genau dann fortsetzbar, wenn der Körper $(K, +, \cdot)$ kommutativ ist. – Insbesondere existieren also zweiseitige unvollständige Algebren beliebiger Dimension mit $E_0 = \emptyset$, die nicht fortsetzbar sind.

(b) Unter den Voraussetzungen von (3.9) ist $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ wegen (2.8)(d) offenbar Inzidenzuntergruppe eines Translations- oder eines Strecktranslationsraumes. Man sieht leicht, daß $(F, E, K, +, \cdot)$ dann durch passende Fortsetzung der Multiplikation zur unvollständigen Algebra dieses Translations- bzw. Strecktranslationsraumes wird.

Nun können wir beweisen:

(3.10) Satz. $(F, E, K, +, \cdot)$ *sei eine zweiseitige unvollständige Algebra mit* $E_0 = \emptyset$ *und* $\dim(F, K) \geq 4$. *Dann gelten*

(a) *Die zu* $(F, E, K, +, \cdot)$ *gehörende Inzidenzgruppe ist Inzidenzuntergruppe eines Translations- oder Strecktranslationsraumes in* $\Pi(F, K)$.

(b) $(F, E, K, +, \cdot)$ *ist genau dann fortsetzbar, wenn* $(K, +, \cdot)$ *kommutativ ist.*

Beweis. Die zu $(F, E, K, +, \cdot)$ gehörende Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ ist l-r-eingebettet in $\Pi(F, K)$, außerdem gelten $G_0 = \emptyset$ und $\dim \Pi(F, K) \geq 3$. Nach (2.10) existiert eine Hyperebene H_l von $\Pi(F, K)$ mit der Eigenschaft, daß a_l für jedes $a \in G$ eine Zentralkollineation von $\Pi(F, K)$ mit Achse H_l ist; H_l ist damit punktweise linksinvariant. Bezeichnet z_a das Zentrum von a_l für $a \in G \setminus \{1\}$, so ist $H_r := \{ z_a \mid a \in G \setminus \{1\} \}$ nach (2.10)(b) ein Teilraum und damit wegen (2.8)(a) sogar eine Hyperebene von $(P, \mathcal{L})$. Also gilt (a), und da H_r nach (2.8)(c) punktweise rechtsinvariant ist, folgt (b) aus (3.9)(f). □

3.3 Der Fall $E_0 \neq \emptyset$

In diesem Abschnitt sei $(F, E, K, +, \cdot)$ stets eine zweiseitige unvollständige Algebra mit $E_0 \neq \emptyset$; insbesondere gilt dann $\dim(F, K) \geq 4$. $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ sei wieder die zu $(F, E, K, +, \cdot)$ gehörende Inzidenzgruppe und $(P, \mathcal{L}) := \Pi(F, K)$. – Beachte, daß man $E_0 \neq \emptyset$ im nicht-kinematischen Fall wegen (3.8)(b) nicht zu fordern braucht, wenn $\dim(F, K) \geq 4$ gilt.

Das folgende Beispiel zeigt, daß nicht-kinematische zweiseitige unvollständige Algebren mit $E_0 \neq \emptyset$ existieren, die nicht fortsetzbar sind. Dazu geben wir zunächst ein Verfahren zur Konstruktion l-eingebetteter Inzidenzgruppen an und betrachten dann die zugehörigen unvollständigen Algebren.

Beispiel. (V, K) sei ein Linksvektorraum mit $K \neq \mathbb{Z}_2$ und $(P, \mathcal{L})$ der projektive Abschluß von $\mathcal{A}(K \times V, K)$. Für $\alpha, \beta \in K$ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in V$ setze $(\alpha, \mathfrak{a}) * (\beta, \mathfrak{b}) := (\beta\alpha, \mathfrak{a} + \mathfrak{b})$. Weiter sei $U < (K^*, \cdot\,)$ von $\{1\}$ verschieden, $G := U \times V$ und $(G, \mathcal{G})$ der Spurraum von G in $(P, \mathcal{L})$. Dann ist $(G, *\,)$ offenbar eine Gruppe mit neutralem Element $(1, \mathfrak{o})$; außerdem gelten

(a) $(G, \mathcal{G}, *\,)$ ist eine in $(P, \mathcal{L})$ l-eingebettete Inzidenzgruppe.

(b) Ist U kommutativ, so ist auch $(G, \mathcal{G}, *\,)$ kommutativ und damit l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$.

(c) Für $(\alpha, \mathfrak{a}) \in G$ gilt genau dann $(\alpha, \mathfrak{a})^2 \in \overline{(1, \mathfrak{o}), (\alpha, \mathfrak{a})}$, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ oder $\alpha = 1$ ist.

Zu (a): Sei $l \in \mathcal{L}$ mit $(\alpha, \mathfrak{a}) \in l \cap G$. Dann existiert ein $(\beta, \mathfrak{b}) \in K \times V$ mit $(\beta, \mathfrak{b}) \neq (0, \mathfrak{o})$ und $l \cap (K \times V) = (\alpha, \mathfrak{a}) + K(\beta, \mathfrak{b})$. Für $\beta = 0$ ist $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$, also $(\alpha, \mathfrak{a} + \mathfrak{b})$ ein von $(\alpha, \mathfrak{a})$ verschiedener Punkt aus $l \cap G$. Für $\beta \neq 0$ sei $\alpha' \in U \setminus \{\alpha\}$; dann folgt

$$(\alpha, \mathfrak{a}) \neq (\alpha', \mathfrak{a} + (\alpha' - \alpha)\beta^{-1}\mathfrak{b}) = (\alpha, \mathfrak{a}) + (\alpha' - \alpha)\beta^{-1}(\beta, \mathfrak{b}) \in l \cap G$$

und damit (LE 1). – Andererseits gilt für $(\alpha, \mathfrak{a}) \in G$ und $(\beta, \mathfrak{b}) \in K \times V$

$$(\alpha, \mathfrak{a}) * (\beta, \mathfrak{b}) = (\beta\alpha, \mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = (\beta\alpha, \mathfrak{b}) + (0, \mathfrak{a})\,;$$

also wird durch $\;:(\beta, \mathfrak{b}) \mapsto (\alpha, \mathfrak{a}) * (\beta, \mathfrak{b})$ eine Kollineation von $\mathcal{A}(K \times V)$ beschrieben. Da $(\alpha, \mathfrak{a})_l$ somit zu einer Kollineation von $(P, \mathcal{L})$ fortgesetzt werden kann, folgt auch (LE 2) und damit (a).

Zu (b): Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen und (a).

Zu (c): Für $(\alpha, \mathfrak{a}) \in G$ gilt

$$(\alpha, \mathfrak{a})^2 \in \overline{(1, \mathfrak{o}), (\alpha, \mathfrak{a})} \iff (\alpha^2, 2\mathfrak{a}) \in (1, \mathfrak{o}) + K(\alpha - 1, \mathfrak{a}) \iff$$
$$(\,\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \text{ oder } \alpha^2 = 1 + 2(\alpha - 1)\,) \iff (\,\mathfrak{a} = \mathfrak{o} \text{ oder } \alpha = 1\,),$$

und damit folgt (c).

Wir wählen für K jetzt speziell einen nicht-kommutativen Körper und für U eine nichttriviale kommutative Untergruppe von $(K^*, \cdot\,)$; U sei etwa die multiplikative Gruppe eines Teilkörpers von K, der durch Adjunktion eines $\alpha \in K \setminus \mathrm{Z}(K)$ an das Zentrum $\mathrm{Z}(K)$ entsteht. Die Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, *\,)$ ist dann nach (b) kommutativ und l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$. Außerdem ist sie nicht kinematisch, und es gilt $G_0 \neq \emptyset$; für $\alpha \in U \setminus \{1\}$ und $\mathfrak{a} \in V^*$ ist $\overline{(1, \mathfrak{o}), (\alpha, \mathfrak{a})}$ nämlich nach (c) keine Untergruppe von $(G, *\,)$, und wegen $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$ folgt mit (1.14) $(\alpha, \mathfrak{a}) \in G_0$.

Nun betrachten wir die nach (1.18) zu dieser Inzidenzgruppe und $(P, \mathcal{L})$ gehörende unvollständige Algebra: Sie ist zweiseitig, da $(G, \mathcal{G}, *\,)$ l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$ ist, und nicht kinematisch, weil $(G, \mathcal{G}, *\,)$ es nicht ist. Wegen $G_0 \neq \emptyset$ gilt außerdem $E_0 \neq \emptyset$. Die unvollständige Algebra ist aber sicher nicht fortsetzbar, da sie einen zu K isomorphen Koordinatenkörper hat.

(3.11) *Für* $\mathfrak{b} \in E_{\mathfrak{a}}$ *mit* $1+\mathfrak{a}, 1+\mathfrak{b} \in E$ *gilt:* $\alpha_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}} = \alpha_{\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}} = \alpha_{1+\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = \alpha_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = 1$.

Beweis. Für solche $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$ gelten:

$$\begin{aligned}(1+\mathfrak{a})_r(1+\mathfrak{b}) &= (1+\mathfrak{a})_r(1) + (1+\mathfrak{a})_r(\mathfrak{b}) = 1+\mathfrak{a}+\alpha_{\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}}\mathfrak{b}(1+\mathfrak{a}) = \\ &= 1+\mathfrak{a}+\alpha_{\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}}\mathfrak{b}+\alpha_{\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}}\mathfrak{b}\mathfrak{a}\,, \\ (1+\mathfrak{a})_r(1+\mathfrak{b}) &= \alpha_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}}(1+\mathfrak{b})(1+\mathfrak{a}) = \alpha_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}}(1+\mathfrak{b}+(1+\mathfrak{b})\mathfrak{a}) = \\ &= \alpha_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}}(1+\mathfrak{b}+(\alpha_{1+\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{a}_r(1+\mathfrak{b})) = \\ &= \alpha_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}}(1+\mathfrak{b}+(\alpha_{1+\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}})^{-1}(\mathfrak{a}_r(1)+\mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}))) = \\ &= \alpha_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}}(1+\mathfrak{b}+(\alpha_{1+\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}})^{-1}(\mathfrak{a}+\alpha_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}\mathfrak{a}))\,.\end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{b} \in E_{\mathfrak{a}}$ sind $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ linear unabhängig; mit Koeffizientenvergleich folgt nun zunächst $\alpha_{1+\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}} = 1$, damit $\alpha_{\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}} = \alpha_{1+\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = 1$ und schließlich $\alpha_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = 1$. □

Wir übertragen nun (2.13) und (2.15) auf $(F, E, K, +, \cdot\,)$:

(3.12) *Ist* $(F, E, K, +, \cdot\,)$ *kinematisch, so gelten:*

(a) *Für jedes* $\mathfrak{a} \in E_0$ *ist* $E = \mathrm{H}(E_{\mathfrak{a}})$.

(b) $E = \mathrm{H}(E_0)$.

Beweis. Da $(F, E, K, +, \cdot\,)$ kinematisch ist, ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ linear gefasert. Nun sei $\mathfrak{a} \in E_0$. Dann gelten $\varphi(\mathfrak{a}) \in G_0$ und $G_{\varphi(\mathfrak{a})} = \varphi(E_{\mathfrak{a}})$; also folgt mit (2.13)

$$\varphi(E) = G = \mathrm{H}(G_{\varphi(\mathfrak{a})}) = \mathrm{H}(\varphi(E_{\mathfrak{a}})) = \varphi(\mathrm{H}(E_{\mathfrak{a}}))$$

und daher wegen $\mathrm{Kern}\varphi_{|E} = K^*$: $E = K^* \cdot \mathrm{H}(E_{\mathfrak{a}})$. Da für $\mathfrak{b} \in E_{\mathfrak{a}}$ offenbar $K^*\mathfrak{b} \subseteq E_{\mathfrak{a}}$ gilt, ist $K^* \subseteq \mathrm{H}(E_{\mathfrak{a}})$ und damit $E = \mathrm{H}(E_{\mathfrak{a}})$. Das zeigt (a). – Für $\mathfrak{b} \in E_{\mathfrak{a}}$ folgt mit (2.2)(d) $\mathfrak{a} \in E_{\mathfrak{b}}$, also $\mathfrak{b} \in E_0$; somit gilt $E_{\mathfrak{a}} \subseteq E_0$, und nun erhält man (b) aus (a). □

Bemerkung. Im Beweis zu (3.12) wurde nicht benutzt, daß $(F, E, K, +, \cdot\,)$ zweiseitig ist; die Aussagen (a) und (b) gelten also für jede unvollständige Algebra mit $E_0 \neq \emptyset$ und linear gefaserter Inzidenzgruppe.

Für den nicht-kinematischen Fall betrachten wir nicht die gesamte Menge E_0, sondern nur eine Teilmenge, nämlich E_{nk} (vgl. (3.8)(b)); wir zeigen

(3.13) $(F, E, K, +, \cdot\,)$ *sei nicht kinematisch, und jede Gerade aus* $\mathcal{G}$ *enthalte mindestens drei Punkte.*

(a) *Für* $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ *gilt* $E = \mathrm{H}(E_{\mathfrak{a}})$.

(b) *Jedes* $\mathfrak{b} \in E$ *kann als Summe von Elementen aus* $\mathrm{H}(E_{nk})$ *dargestellt werden.*

Beweis. *Zu (a):* Sei $\mathfrak{a} \in E_{nk}$. Nach (3.8)(b) gilt $\mathfrak{a} \in E_0$, also $E_{\mathfrak{a}} \neq \emptyset$. – Wir zeigen nun in mehreren Schritten, daß jedes Element aus E als Produkt von höchstens vier Elementen aus $E_{\mathfrak{a}}$ dargestellt werden kann.

(1) Jedes $\mathfrak{b} \in E \backslash \langle 1, \mathfrak{a} \rangle$ mit $\mathfrak{a}_r(\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle) \neq \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ ist Produkt von höchstens zwei Elementen aus $E_\mathfrak{a}$.

$\mathfrak{b}$ erfülle die Voraussetzungen von (1); wir nehmen $\mathfrak{b} \notin E_\mathfrak{a}$ an. Dann ist $\mathfrak{ba} \in \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$. Da jede Gerade aus $\mathcal{G}$ mindestens drei Punkte enthält, existiert ein $\mathfrak{c} \in \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \cap E$, das in keinem der Teilräume $\langle 1, \mathfrak{a} \rangle$, $\langle 1, \mathfrak{b} \rangle$, $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{ba} \rangle$ liegt; es gilt $\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{c} \rangle = \langle 1, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{ba} \rangle$. Wegen $\mathfrak{ba} \in \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ folgt aus

$$\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \neq \mathfrak{a}_r(\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle) = \mathfrak{a}_r(\langle 1, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle) = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{ba}, \mathfrak{ca} \rangle$$

nun $\mathfrak{ca} \notin \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$. Das liefert die lineare Unabhängigkeit von $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{ca}$ und die von $\mathfrak{c}, \mathfrak{ca}, \mathfrak{b}, \mathfrak{ba}$, also auch die von $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}, \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{ba}$. Es folgt $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b} \in E_\mathfrak{a}$, also wegen $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}$ die Behauptung von (1).

(2) Existiert ein $\mathfrak{b} \in E$ mit $\mathfrak{a}_r(\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle) = \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$, so ist $\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle \cap E$ eine Untergruppe von $(E, \cdot\,)$, die $\mathfrak{b}$ enthält.

Erfüllt $\mathfrak{b}$ die Voraussetzungen von (2), so gilt $\mathfrak{a}^2 \in \mathfrak{a}_r(\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle) = \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$, wegen $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ also $\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle$ und damit auch $\mathfrak{b} \in \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle$. Nun sei $\mathfrak{c} \in \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle \cap E$ beliebig. Mit $\mathfrak{a}_r(\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle) = \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle$ folgt dann $\mathfrak{ca}, \mathfrak{ca}^2 \in \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle$, und das ergibt

$$\mathfrak{c} \cdot \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle = \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{ca}, \mathfrak{ca}^2 \rangle = \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle\,.$$

Also gilt auch $\mathfrak{c}^{-1} \in \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle$ und damit $\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle \cap E < (E, \cdot\,)$.

(3) Jedes $\mathfrak{b} \in E$ mit $\mathfrak{a}_r(\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle) = \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ kann als Produkt von höchstens drei Elementen aus $E_\mathfrak{a}$ dargestellt werden.

$\mathfrak{b}$ erfülle die Voraussetzungen von (3); dann ist $\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle \cap E$ nach (2) eine $\mathfrak{b}$ enthaltende Untergruppe von $(E, \cdot\,)$. Nun sei $\mathfrak{c} \in E_\mathfrak{a}$. Mit $\mathfrak{c}$ liegt auch $\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}$ nicht in $\langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle$, also erfüllt $\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}$ nach (2) die Voraussetzungen von (1) und ist damit Produkt von höchstens zwei Elementen aus $E_\mathfrak{a}$. Wegen $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}$ folgt dann (3).

(4) Jedes $\mathfrak{b} \in \langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap E$ ist Produkt von höchstens vier Elementen aus $E_\mathfrak{a}$.

Sei $\mathfrak{b} \in \langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap E$ und $\mathfrak{c} \in E_\mathfrak{a}$. Es gilt $\langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap \mathfrak{c}\langle 1, \mathfrak{a} \rangle = \{0\}$, also $\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b} \notin \langle 1, \mathfrak{a} \rangle$; damit folgt aus (1) und (3), daß $\mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}$ als Produkt von höchstens drei Elementen aus $E_\mathfrak{a}$ dargestellt werden kann, und wegen $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{b}$ liefert dies (4).

Mit (1), (3) und (4) folgt nun $E = \mathrm{H}(E_\mathfrak{a})$.

Zu (b): Da $(F, E, K, +, \cdot\,)$ nach Voraussetzung nicht kinematisch ist, existiert ein $\mathfrak{a} \in E_{nk}$. Für $\lambda \in K^*$ gilt $\lambda\mathfrak{a} \in E_{nk}$, also folgt $K^* < \mathrm{H}(E_{nk})$. Nun sei $\mathfrak{b} \in E$ mit $\mathfrak{b} \notin K^*, E_{nk}$. Dann gibt es ein $\lambda \in K^*$ mit $\mathfrak{c} := \lambda + \mathfrak{b} \in E$, denn die Gerade $\overline{\varphi(1), \varphi(\mathfrak{b})}$ enthält nach Voraussetzung einen von $\varphi(1)$ und $\varphi(\mathfrak{b})$ verschiedenen Punkt. Wir nehmen $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c} \notin E_{nk}$ an, denn sonst folgt $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} \in \mathrm{H}(E_{nk})$, oder man erhält zunächst $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c} \in \mathrm{H}(E_{nk})$ und damit wegen $\mathfrak{b} = -\lambda + \mathfrak{c}$ die behauptete Darstellbarkeit von $\mathfrak{b}$. – Nach (1.2)(a) sind dann $\overline{\varphi(1), \varphi(\mathfrak{b})}$, $\overline{\varphi(1), \varphi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})}$ und $\overline{\varphi(1), \varphi(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c})}$ Untergruppen von $(G, \cdot\,)$; daher gelten

$$\langle 1, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{b}^{-1}, \mathfrak{c}^{-1} \rangle\,, \quad \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})^{-1} \in \langle 1, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} \rangle \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c})^{-1} \in \langle 1, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c} \rangle\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \in \mathfrak{a}_r(\langle 1, \mathfrak{b} \rangle) = \mathfrak{a}_r(\langle \mathfrak{b}^{-1}, \mathfrak{c}^{-1} \rangle) = \langle \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}, \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a} \rangle \subseteq \\ \subseteq \langle 1, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c} \rangle = \mathfrak{a}^{-1} \cdot \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle = \mathfrak{a}^{-1} \cdot \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle\,, \end{aligned}$$

also $\mathfrak{a}^2 \in \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ und damit $\mathfrak{b} \in \langle 1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2 \rangle$ wegen $\mathfrak{a} \in E_{nk}$. Nun erhält man mit $K^* < \mathrm{H}(E_{nk})$, daß $\mathfrak{b}$ tatsächlich als Summe von Elementen aus $\mathrm{H}(E_{nk})$ dargestellt werden kann. □

Bemerkungen. (a) Unter den Voraussetzungen von (3.13) ist nach (UA 4) und (b) jedes Element aus F als Summe von Elementen aus $\mathrm{H}(E_{nk})$ darstellbar.

(b) Für die Inzidenzgruppe $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ bedeutet (3.13): Enthält jede Gerade aus $\mathcal{G}$ mehr als zwei Punkte, so gilt $G = \mathrm{H}(G_a)$ für alle $a \in G$ mit $a^2 \notin \overline{1, a}$. Ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ zusätzlich noch nicht kinematisch, so folgt

$$G = \langle\, \mathrm{H}(\,\{a \in G \mid a^2 \notin \overline{1, a}\}\,)\,\rangle \cap G\,,$$

also auch $P = \langle\, \mathrm{H}(\,\{a \in G \mid a^2 \notin \overline{1, a}\}\,)\,\rangle$.

(c) Der Beweis zu (3.13)(b) folgt einer Idee aus [26] (vgl. [26], (5.4)).

(3.14) Folgerung. *Ist $(F, E, K, +, \cdot\,)$ kinematisch, so sei $E_0^+ := E_0$, andernfalls $E_0^+ := E_{nk}$. Enthält jede Gerade aus $\mathcal{G}$ mindestens drei Punkte, so gilt für $\mathfrak{a} \in E_0^+$ mit $1 + \mathfrak{a} \in E$ stets $E = K^* \cdot E_{\mathfrak{a}}^1$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{a} \in E_0^+$ mit $1 + \mathfrak{a} \in E$ und $\mathfrak{b} \in E$ beliebig. Mit (3.12)(a) und (3.13)(a) folgt $E = \mathrm{H}(E_{\mathfrak{a}})$. Da für $\mathfrak{c} \in E_{\mathfrak{a}}$ mit $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{c}\mathfrak{a}$ auch $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{c}^{-1}, \mathfrak{c}^{-1}\mathfrak{a}$ linear unabhängig sind und damit $\mathfrak{c}^{-1} \in E_{\mathfrak{a}}$ gilt, existieren also $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m \in E_{\mathfrak{a}}$ mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{c}_m$. Nun gibt es zu jedem $i \in \{1, \ldots, m\}$ ein $\lambda_i \in K^*$ mit $1 + \lambda_i \mathfrak{c}_i \in E$, denn nach Voraussetzung enthält $\overline{\varphi(1), \varphi(\mathfrak{c}_i)}$ einen von $\varphi(1)$ und $\varphi(\mathfrak{c}_i)$ verschiedenen Punkt. Dann gilt $\mathfrak{b}_i := \lambda_i \mathfrak{c}_i \in E_{\mathfrak{a}}$, also $\alpha_{\mathfrak{b}_i}^{\mathfrak{a}} = 1$ nach (3.11), und da $E_{\mathfrak{a}}^1$ nach (3.4) eine Untergruppe von $(E, \cdot\,)$ ist, folgt $\mathfrak{b}' := \mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_m \in E_{\mathfrak{a}}^1$. Aus $K^* \lhd (E, \cdot\,)$ ergibt sich nun die Existenz eines $\lambda \in K^*$ mit

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{c}_m = {\lambda_1}^{-1}\mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot {\lambda_m}^{-1}\mathfrak{b}_m = \lambda \cdot \mathfrak{b}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{b}_m = \lambda \mathfrak{b}'$$

und damit die Behauptung. □

Nun können wir beweisen:

(3.15) Satz. *$(F, E, K, +, \cdot\,)$ sei eine zweiseitige unvollständige Algebra mit $E_0 \neq \emptyset$, und jede nicht-singuläre Gerade von $\Pi(F, K)$ enthalte mindestens drei reguläre Punkte. Ist $(F, E, K, +, \cdot\,)$ kinematisch, so setze $E_0^+ := E_0$, andernfalls $E_0^+ := E_{nk}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$(F, E, K, +, \cdot\,)$ ist fortsetzbar.*

(ii) *Für alle* $\mathfrak{a} \in E$ *sind* $\mathfrak{a}_l$ *und* $\mathfrak{a}_r$ *linear.*

(iii) $(K, +, \cdot\,)$ *ist kommutativ, und für alle* $\mathfrak{a} \in E_0^+$ *und alle* $\mathfrak{b} \in E_\mathfrak{a}$ *mit* $1 + \mathfrak{a}, 1 + \mathfrak{b} \in E$ *sind* $\mathfrak{a}_r$ *und* $\mathfrak{b}_l$ *linear.*

(iv) *Für alle* $\mathfrak{a} \in E_0^+$ *und alle* $\mathfrak{b} \in E_\mathfrak{a}$ *gilt* $\alpha_\mathfrak{b}^\mathfrak{a} = 1$.

Beweis. *Zu „(i) ⇒ (ii)“:* Ist $(F, E, K, +, \cdot\,)$ zu einer Algebra fortsetzbar, so liegt K im Zentrum dieser Algebra. Für $\mathfrak{a} \in E$ ist $\mathfrak{a}_l$ also wegen (1.15)(b) linear; die Linearität von $\mathfrak{a}_r$ erhält man aus (3.1) und (3.2).

Zu „(ii) ⇒ (iii)“: Es sei $\lambda \in K^*$. Nach (ii) ist λ_l linear und damit $\widetilde{\lambda}\colon \mu \mapsto \lambda\mu\lambda^{-1}$ als der zugehörige Begleitautomorphismus die Identität auf K. Also ist $(K, +, \cdot\,)$ kommutativ. – Der zweite Teil der Aussage folgt unmittelbar aus (ii).

Zu „(iii) ⇒ (iv)“: Es sei $\mathfrak{a} \in E_0^+$ und $\mathfrak{b} \in E_\mathfrak{a}$. Da jede nicht-singuläre Gerade von $\Pi(F, K)$ nach Voraussetzung mindestens drei reguläre Punkte enthält, existieren Elemente $\lambda, \mu \in K^*$ mit $1 + \lambda\mathfrak{a}, 1 + \mu\mathfrak{b} \in E$. Wegen $\lambda\mathfrak{a} \in E_0^+$ und $\mu\mathfrak{b} \in E_{\lambda\mathfrak{a}}$ sind $(\lambda\mathfrak{a})_r$ und $(\mu\mathfrak{b})_l$ nach (iii) linear. Da $(K, +, \cdot\,)$ nach (iii) kommutativ ist, ergibt sich mit (1.15)(b) und $\mathfrak{b}\lambda\mathfrak{b}^{-1} \in K^*$ nun

$$\lambda = \widetilde{\mu\mathfrak{b}}(\lambda) = (\mu\mathfrak{b})\lambda(\mu\mathfrak{b})^{-1} = \mu \cdot \mathfrak{b}\lambda\mathfrak{b}^{-1} \cdot \mu^{-1} = \mathfrak{b}\lambda\mathfrak{b}^{-1}\,,$$

also $[\lambda^{-1}, \mathfrak{b}] = 1$. Mit (3.11) bzw. (3.1) folgt $\mu\mathfrak{b}, \mu \in E_{\lambda\mathfrak{a}}^1$; wegen $E_{\lambda\mathfrak{a}}^1 < (E, \cdot\,)$ erhält man daher $\mathfrak{b} \in E_{\lambda\mathfrak{a}}^1$ und damit nach (3.7)(a)

$$\alpha_\mathfrak{b}^\mathfrak{a} = \alpha_\mathfrak{b}^{\lambda^{-1}\cdot\lambda\mathfrak{a}} = [\lambda^{-1}, \mathfrak{b}] = 1.$$

Zu „(iv) ⇒ (i)“: Sei $\mathfrak{a} \in E_0^+$. Nach (iv) gilt dann $E_\mathfrak{a} \subseteq E_\mathfrak{a}^1$, und da $E_\mathfrak{a}^1$ nach (3.4) eine Untergruppe von $(E, \cdot\,)$ ist, folgt mit (3.12)(a) und (3.13)(a) $E = E_\mathfrak{a}^1$. Das ergibt $E_0^+ \subseteq \mathrm{R}(E)$ und damit $\mathrm{H}(E_0^+) \subseteq \mathrm{R}(E)$, denn nach (3.6) gilt $\mathrm{R}(E) < (E, \cdot\,)$. Nun folgt mit (3.12)(b) bzw. (3.13)(b), daß jedes $\mathfrak{b} \in E$ als Summe von Elementen aus $\mathrm{H}(E_0^+) \subseteq \mathrm{R}(E)$ dargestellt werden kann. Der zweite Teil von (3.6) liefert dann $E = \mathrm{R}(E)$, also ist $(F, E, K, +, \cdot\,)$ nach (3.2) fortsetzbar. □

(3.16) Folgerung. *Gilt*

$(*)$ *Zu jedem* $\mathfrak{a} \in E \setminus K$ *existiert ein* $\mu \in K$ *mit* $1 + \mu\mathfrak{a}, 1 + (1 + \mu)\mathfrak{a} \in E$,

so ist $(F, E, K, +, \cdot\,)$ *fortsetzbar.*

Beweis. Aus $(*)$ folgt zunächst, daß jede nicht-singuläre Gerade von $\Pi(F, K)$ mindestens drei reguläre Punkte enthält. Nun sei E_0^+ wie in (3.15) definiert, $\mathfrak{a} \in E_0^+$ und $\mathfrak{b} \in E_\mathfrak{a}$. Nach (3.15) haben wir $\alpha_\mathfrak{b}^\mathfrak{a} = 1$ zu zeigen.

1. Fall: $1 + \mathfrak{a} \in E$. Nach $(*)$ existiert ein $\mu \in K$ mit $1 + \mu\mathfrak{b}, 1 + (1 + \mu)\mathfrak{b} \in E$. Wegen $\mu\mathfrak{b}, (1 + \mu)\mathfrak{b} \in E_\mathfrak{a} \cup \{0\}$ ergibt (3.11) $\mu\mathfrak{b}, (1 + \mu)\mathfrak{b} \in E_\mathfrak{a}^1 \cup \{0\}$. Damit folgt

$$\mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}_r((1 + \mu)\mathfrak{b}) - \mathfrak{a}_r(\mu\mathfrak{b}) = (1 + \mu)\mathfrak{b}\mathfrak{a} - \mu\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}\,,$$

also $\alpha_\mathfrak{b}^\mathfrak{a} = 1$.

2. Fall: $1+\mathfrak{a} \notin E$. Gilt $1-\mathfrak{a} \in E$, so ergibt sich mit dem ersten Fall $\alpha_{\mathfrak{b}}^{-\mathfrak{a}} = 1$ und damit nach (3.7)(a) $\alpha_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = \alpha_{\mathfrak{b}}^{(-1)(-\mathfrak{a})} = [-1,\mathfrak{b}] = 1$. – Ist $1-\mathfrak{a} \notin E$, so folgt mit $(*)$, daß ein $\mu \in K\setminus\{0,-1\}$ mit $1+\mu\mathfrak{a}, 1+(1+\mu)\mathfrak{a} \in E$ existiert. Dann gelten $\mu\mathfrak{a}, (1+\mu)\mathfrak{a} \in E_0^+$ und $\mathfrak{b} \in E_{\mu\mathfrak{a}}, E_{(1+\mu)\mathfrak{a}}$; also erhält man mit dem ersten Fall $\alpha_{\mathfrak{b}}^{\mu\mathfrak{a}} = \alpha_{\mathfrak{b}}^{(1+\mu)\mathfrak{a}} = 1$ und daher mit (3.3)(d)

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}) &= (1+\mu)\mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}) - \mu\mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}) = ((1+\mu)\mathfrak{a})_r(\mathfrak{b}) - (\mu\mathfrak{a})_r(\mathfrak{b}) = \\ &= \mathfrak{b}(1+\mu)\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\mu\mathfrak{a} = \mathfrak{b}((1+\mu)\mathfrak{a} - \mu\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}\mathfrak{a}\,.\end{aligned}$$

Damit folgt auch hier $\alpha_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = 1$. □

Bemerkung. Die Aussage $(*)$ folgt aus (O1a) in [5]. – Da die in [5], (7.16) angegebene Struktur (V,E,K) im wesentlichen einer unvollständigen Algebra entspricht, erhält man aus (3.16) deren Fortsetzbarkeit zu einer (dann kinematischen) Algebra auch ohne das dortige Axiom (O2). Dazu beachte man, daß die Inzidenzgruppe $(S,\mathcal{G},\cdot)$ aus [5], (7.16) nach (1.7) und (1.9) l-eingebettet ist in $\Pi(V,K)$; die in [5] definierte Menge Sp ist wegen der Gültigkeit des dortigen Axioms (K) nicht leer, also folgt wegen $\mathrm{Sp} \subseteq S_0$ auch $S_0 \neq \emptyset$. (S_0 bezeichnet die G_0 entsprechende Menge der Inzidenzgruppe $(S,\mathcal{G},\cdot)$.) Da $a_r \in \mathrm{Aut}(S,\mathcal{G})$ nach [5], (6.3)(4) für alle $a \in \mathrm{Sp} \subseteq S_0$ gilt, ist $(S,\mathcal{G},\cdot)$ nach (2.11) und (1.9) sogar l-r-eingebettet in $\Pi(V,K)$. Schließlich sind die Axiome (O1) und (O1a) nach [5], (7.9) äquivalent.

Wir zeigen nun noch:

(3.17) *Jede nicht-singuläre Gerade von $\Pi(F,K)$ enthalte mindestens drei reguläre Punkte, und es sei $\mathfrak{a} \in E$ mit $1+\mathfrak{a} \in E$. Existiert ein $\mathfrak{b} \in E$, für das $1,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{b}\mathfrak{a},\mathfrak{a}^2$ linear unabhängig sind, so gilt $\mathfrak{a} \in \mathrm{R}(E)$; insbesondere ist $\mathfrak{a}_r$ dann linear.*

Beweis. Für $\mathfrak{b} \in E$ seien $1,\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{b}\mathfrak{a},\mathfrak{a}^2$ linear unabhängig; insbesondere gelten dann $\mathfrak{b} \in E_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{a} \in E_{nk}$. Nach (3.8)(a) folgt zunächst $\alpha_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{a}} = 1$. Da $\langle\varphi(1),\varphi(\mathfrak{b})\rangle$ mehr als zwei reguläre Punkte enthält, können wir o.B.d.A. $1+\mathfrak{b} \in E$ annehmen und erhalten aus (3.11) $\alpha_{\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}} = \alpha_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = 1$. – Wir zeigen, daß $\alpha_{\lambda}^{\mathfrak{a}} = 1$ für alle $\lambda \in K^*$ gilt. Dann folgt nämlich $K^* \subseteq E_{\mathfrak{a}}^1$, und damit erhält man wegen $E_{\mathfrak{a}}^1 < (E,\cdot)$ aus (3.14) $E = E_{\mathfrak{a}}^1$, also $\mathfrak{a} \in \mathrm{R}(E)$; außerdem liefert (3.1) die Linearität von $\mathfrak{a}_r$.

Sei $\lambda \in K^*$ beliebig. Dann ergibt (3.7)(b) $\alpha_{\lambda\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}} = \alpha_{\lambda}^{\mathfrak{a}}$ und $\alpha_{\lambda\mathfrak{b}}^{1+\mathfrak{a}} = \alpha_{\lambda}^{1+\mathfrak{a}}$, und wegen der linearen Unabhängigkeit von $1,\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ gilt $\mathfrak{x} := \mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b} \in F\setminus K$. Da $\langle\varphi(1),\varphi(\mathfrak{x})\rangle$ nach Voraussetzung mehr als zwei reguläre Punkte enthält, existiert ein $\mu \in K^*$ mit $\mu+\mathfrak{x} \in E$. Nun folgen

$$\begin{aligned}(1+\mathfrak{a})_r(\mu+\mathfrak{x}) &= (1+\mathfrak{a})_r(\mu) + (1+\mathfrak{a})_r(\mathfrak{a}) + (1+\mathfrak{a})_r(\lambda\mathfrak{b}) = \\ &= \alpha_{\mu}^{1+\mathfrak{a}}\mu(1+\mathfrak{a}) + \alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}\mathfrak{a}(1+\mathfrak{a}) + \alpha_{\lambda}^{1+\mathfrak{a}}\lambda\mathfrak{b}(1+\mathfrak{a}) = \\ &= \alpha_{\mu}^{1+\mathfrak{a}}\mu + (\alpha_{\mu}^{1+\mathfrak{a}}\mu + \alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}})\mathfrak{a} + \alpha_{\lambda}^{1+\mathfrak{a}}\lambda\mathfrak{b} + \alpha_{\lambda}^{1+\mathfrak{a}}\lambda\mathfrak{b}\mathfrak{a} + \alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^2\,, \\ (1+\mathfrak{a})_r(\mu+\mathfrak{x}) &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(\mu+\mathfrak{x})(1+\mathfrak{a}) = \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(\mu+\mathfrak{x}+(\mu+\mathfrak{x})\mathfrak{a}) = \\ &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(\mu+\mathfrak{x}+(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{a}_r(\mu+\mathfrak{x})) = \\ &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(\mu+\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}+(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}(\mathfrak{a}_r(\mu)+\mathfrak{a}_r(\mathfrak{a})+\mathfrak{a}_r(\lambda\mathfrak{b}))) = \\ &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(\mu+\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}+(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}(\alpha_{\mu}^{\mathfrak{a}}\mu\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2+\alpha_{\lambda}^{\mathfrak{a}}\lambda\mathfrak{b}\mathfrak{a})) = \\ &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(\mu+(1+(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\alpha_{\mu}^{\mathfrak{a}}\mu)\mathfrak{a}+\lambda\mathfrak{b}+(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\alpha_{\lambda}^{\mathfrak{a}}\lambda\mathfrak{b}\mathfrak{a}+(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\mathfrak{a}^2)\,.\end{aligned}$$

Da $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{b}\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, liefert Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \alpha_\mu^{1+\mathfrak{a}}\mu &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}\mu\,, && \text{(i)}\\ \alpha_\mu^{1+\mathfrak{a}}\mu + \alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}} &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(1+(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\alpha_\mu^{\mathfrak{a}}\mu)\,, && \text{(ii)}\\ \alpha_\lambda^{1+\mathfrak{a}}\lambda &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}\lambda\,, && \text{(iii)}\\ \alpha_\lambda^{1+\mathfrak{a}}\lambda &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\alpha_\lambda^{\mathfrak{a}}\lambda\,, && \text{(iv)}\\ \alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}} &= \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\,. && \text{(v)} \end{aligned}$$

Aus (iv) und (v) folgt dann $\alpha_\lambda^{1+\mathfrak{a}} = \alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}\alpha_\lambda^{\mathfrak{a}}$. Für den Spezialfall $\lambda = 1$ ergibt dies $\alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}} = 1$, also gilt $\alpha_\nu^{1+\mathfrak{a}} = \alpha_\nu^{\mathfrak{a}}$ für alle $\nu \in K^*$. Nun erhält man

$$\begin{aligned} \alpha_\mu^{\mathfrak{a}}\mu + 1 = \alpha_\mu^{1+\mathfrak{a}}\mu + \alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}} &\overset{(ii)}{=} \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(1+(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\alpha_\mu^{\mathfrak{a}}\mu) = \\ = \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}} + \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}}(\alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{\mathfrak{a}})^{-1}\alpha_\mu^{\mathfrak{a}}\mu &\overset{(i),(v)}{=} \alpha_\mu^{1+\mathfrak{a}} + \alpha_{\mathfrak{a}}^{1+\mathfrak{a}}\alpha_\mu^{\mathfrak{a}}\mu = \alpha_\mu^{\mathfrak{a}} + \alpha_\mu^{\mathfrak{a}}\mu\,, \end{aligned}$$

also $\alpha_\mu^{\mathfrak{a}} = 1$. Damit ergibt sich schließlich

$$\alpha_\lambda^{\mathfrak{a}} = \alpha_\lambda^{1+\mathfrak{a}} \overset{(iii)}{=} \alpha_{\mu+\mathfrak{x}}^{1+\mathfrak{a}} \overset{(i)}{=} \alpha_\mu^{1+\mathfrak{a}} = \alpha_\mu^{\mathfrak{a}} = 1\,.$$

□

Probleme. (a) Gibt es kinematische unvollständige Algebren mit $E_0 \neq \emptyset$, die nicht fortsetzbar sind?

(b) Gibt es zweiseitige unvollständige Algebren mit $E_0 \neq \emptyset$ und kommutativem Koordinatenkörper, die nicht fortsetzbar sind?

(c) Kann man in (3.15)(iii) darauf verzichten, die Kommutativität von $(K, +, \cdot)$ zu fordern?

3.4 Spezielle zweiseitige Inzidenzgruppen

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist der Beweis des folgenden Satzes:

(3.18) Satz. *$(G, \mathcal{G}, \cdot)$ sei eine zweiseitige Inzidenzgruppe und $(P, \mathcal{L})$ ein mindestens zweidimensionaler desarguesscher projektiver Raum mit (2G4) oder (EGU). Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

(i) $(P, \mathcal{L})$ ist nicht pappussch, und $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ ist ein Translationsraum in $(P, \mathcal{L})$.

(ii) $(P, \mathcal{L})$ ist nicht pappussch, und $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ ist ein Strecktranslationsraum in $(P, \mathcal{L})$.

(iii) $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ ist die projektive Ableitung einer unitären Algebra (F, K) nach ihrer Einheitengruppe, und es gilt $(P, \mathcal{L}) \cong \Pi(F, K)$.

Die Voraussetzungen von (3.18) sind beispielsweise für die Inzidenzgruppen aus (2.21) erfüllt, wenn $(P, \mathcal{L})$ desarguessch ist (vgl. auch (3.30)). Im kinematischen Fall stimmen die

Inzidenzgruppen aus (3.18) mit denen aus [2] überein; anders als dort betrachten wir hier aber auch zweiseitige Inzidenzgruppen, die nicht linear gefasert sind.

Für den kinematischen Fall erhält man aus (3.18) dann auch erneut den zweiten Teil von Theorem 1 aus [2]. (3.18) entsprechende Resultate für zweiseitige geschlitzte Inzidenzgruppen findet man in [22] (Sätze 5 und 7) und [23] (Satz 3). Schließlich sei noch auf [24], Satz 9 hingewiesen; dort wird gezeigt, daß NB-Fastmoduln zu bilokalen Algebren fortgesetzt werden können, wenn sie eine zweiseitige echt subaffine Inzidenzgruppe besitzen.

Wir bereiten den Beweis von (3.18) mit mehreren Hilfssätzen vor; dabei erweist sich der ebene nicht-kinematische Fall als besonders schwierig (vgl. (3.26)).

Sofern nicht anders angegeben, sei $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ im folgenden stets eine zweiseitige Inzidenzgruppe, $(P, \mathcal{L})$ ein mindestens zweidimensionaler desarguesscher projektiver Raum, und es gelte (2G4) oder (EGU). Nach (1.10) und (1.12) ist $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$; es sei also $(F, E, K, +, \cdot)$ eine nach (1.18) zu $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ und $(P, \mathcal{L})$ gehörende und damit sogar zweiseitige unvollständige Algebra und $\sigma: (P, \mathcal{L}) \to \Pi(F, K)$ ein dazu passender Isomorphismus. Zur Vereinfachung identifizieren wir $(P, \mathcal{L})$ via σ mit $\Pi(F, K)$ und damit auch G mit $\varphi(E)$. – Zunächst gilt:

(3.19) *Ist $(F, E, K, +, \cdot)$ zu einer Algebra fortsetzbar, so ist $(E, \cdot)$ deren Einheitengruppe.*

Beweis. Die Algebra (F, K) sei die Fortsetzung von $(F, E, K, +, \cdot)$ und habe die Einheitenmenge E'. Es gilt $E < (E', \cdot)$. Angenommen, es existiert ein $\mathfrak{a} \in E' \setminus E$. Dann ist $\mathfrak{a}_L: \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ eine bijektive lineare Abbildung des Vektorraumes (F, K), induziert also eine Kollineation $\varphi(\mathfrak{a})_L$ auf $(P, \mathcal{L}) = \Pi(F, K)$. Da E und $\mathfrak{a}E$ disjunkt sind, bildet $\varphi(\mathfrak{a})_L$ die regulären Punkte von $\langle \varphi(1), \varphi(\mathfrak{a}^{-1}) \rangle$ auf singuläre Punkte von $\langle \varphi(1), \varphi(\mathfrak{a}) \rangle$ ab, was sowohl für (2G4) als auch für (EGU) einen Widerspruch liefert. Also gilt $E = E'$. □

(3.20) ***(a)*** *Es gilt $(*)$ aus (3.16).*
(b) *Für $E_0 \neq \emptyset$ ist $(F, E, K, +, \cdot)$ fortsetzbar.*

Beweis. Nach (3.16) folgt (b) aus (a). – Wir zeigen (a). Sei $\mathfrak{a} \in E \setminus K$. Da auf der Geraden $\langle \varphi(1), \varphi(\mathfrak{a}) \rangle$ für (2G4) mindestens vier, für (EGU) unendlich viele reguläre Punkte liegen, enthält $K_r := \{ \lambda \in K \mid \varphi(1 + \lambda\mathfrak{a}) \in G \}$ mindestens drei bzw. unendlich viele Elemente. Andererseits besitzt $\langle \varphi(1), \varphi(\mathfrak{a}) \rangle$ nur höchstens zwei bzw. endlich viele singuläre Punkte, d.h. die Menge $K_s := \{ \lambda \in K \mid \varphi(1 + (1 + \lambda)\mathfrak{a}) \notin G \}$ ist höchstens zweielementig bzw. endlich. In jedem Fall existiert also ein $\mu \in K_r \setminus K_s$; nun gilt $1 + \mu\mathfrak{a}, 1 + (1 + \mu)\mathfrak{a} \in E$ und damit $(*)$ aus (3.16). □

(3.21) *Ist $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ Inzidenzuntergruppe eines Translations- oder Strecktranslationsraumes von $(P, \mathcal{L})$ bezüglich der Hyperebenen H_r, H_l, so gilt $G = P \setminus (H_r \cup H_l)$, und $(F, E, K, +, \cdot)$ ist genau dann fortsetzbar, wenn $(K, +, \cdot)$ kommutativ ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst $G = P \setminus (H_r \cup H_l)$. Die Inklusion $G \subseteq P \setminus (H_r \cup H_l)$ gilt offensichtlich; wir nehmen an, es existiert ein $x \in P \setminus G$ mit $x \notin H_r, H_l$. Für $a \in \langle 1, x \rangle \cap G$ mit $a \neq 1$ ist a_l eine Zentralkollineation von $(P, \mathcal{L})$ mit Achse H_l und Zentrum $z := \langle 1, x \rangle \cap H_r$.

Für verschiedene $a, b \in \langle 1, x\rangle \cap G$ gilt $a_l \neq b_l$, also sind ax, bx wegen $x \notin \{z\} \cup H_l$ verschiedene singuläre Punkte der nicht-singulären Geraden $\langle 1, x\rangle$. Damit existiert eine Injektion von $\langle 1, x\rangle \cap G$ in $\langle 1, x\rangle \setminus G$, was weder für (2G4) noch für (EGU) möglich ist. Also gibt es kein solches x, und wir erhalten $G = P \setminus (H_r \cup H_l)$.

Da mit (2.8)(c) folgt, daß H_r punktweise rechtsinvariant ist, erhält man den zweiten Teil der Behauptung aus (3.9)(f). □

Bemerkung. Für $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$ erhält man den ersten Teil von (3.21) direkt aus (2.19); und für $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$ folgt der zweite Teil wegen $G_0 = \emptyset$ bereits mit (3.10)(b).

In (3.22) bis (3.29) wird nun der ebene nicht-kinematische Fall untersucht.

(3.22) *Sei* $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$ *und* $a \in G$ *mit* $\overline{1, a} \not< (G, \cdot)$. *Dann gilt* $\mathrm{H}(\overline{1, a}) = G$.

Beweis. Wir nehmen an, es gibt ein Element $b \in G \setminus \mathrm{H}(\overline{1, a})$. Für $c \in \overline{1, a}$ gilt dann auch $cb \notin \mathrm{H}(\overline{1, a})$; also folgt mit $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$, daß ein singulärer Punkt $y_c := cb\langle 1, a\rangle \cap \langle 1, a\rangle$ existiert. Für $c \in \overline{1, a}$ mit $c \neq 1$ ist dann auch $x_c := c^{-1} y_c$ singulär, und es gilt

$$x_c = b\langle 1, a\rangle \cap c^{-1}\langle 1, a\rangle = b\langle 1, a\rangle \cap c^{-1}\langle 1, c\rangle = b\langle 1, a\rangle \cap \langle 1, c^{-1}\rangle\,.$$

Für verschiedene $c, d \in \overline{1, a} \setminus \{1\}$ folgt mit (1.2)(b)(ii) $\langle 1, c^{-1}\rangle \neq \langle 1, d^{-1}\rangle$, also auch $x_c \neq x_d$. Damit wird die reguläre Menge $\overline{1, a} \setminus \{1\}$ durch $\;: c \mapsto x_c$ injektiv in die Menge der singulären Punkte von $b\langle 1, a\rangle$ abgebildet, was sowohl für (2G4) als auch für (EGU) zu einem Widerspruch führt. □

(3.23) Folgerung. *Gilt* $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$ *und ist* $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ *kein kinematischer Raum, so ist* $(G, \cdot)$ *abelsch.*

Beweis. Da $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ nicht linear gefasert ist, existiert ein $a \in G$ mit $\overline{1, a} \not< (G, \cdot)$; nach (3.22) gilt dann $\mathrm{H}(\overline{1, a}) = G$. Nun sei $c \in \overline{1, a}$. Mit (1.2)(b)(i) folgt für den Zentralisator $\mathrm{Z}(c)$ von c in $(G, \cdot)$: $\overline{1, a} \subseteq \mathrm{Z}(c) < (G, \cdot)$; also gilt $\mathrm{Z}(c) = G$ und damit $\overline{1, a} \subseteq \mathrm{Z}(G)$. Da $\mathrm{Z}(G)$ ebenfalls eine Untergruppe von $(G, \cdot)$ ist, erhält man nun mit (3.22) $\mathrm{Z}(G) = G$. Mithin ist $(G, \cdot)$ abelsch. □

Bemerkung. In den Beweisen zu (3.22) und (3.23) wurde nicht benutzt, daß $(P, \mathcal{L})$ desarguessch ist.

(3.24) Folgerung. *Sei* $\dim(F, K) = 3$ *und* $E_{nk} \neq \emptyset$. *Dann gelten für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in E$:

(a) $\mathfrak{a}_l = \mathfrak{a}_r$

(b) $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$

(c) $E^1_{\mathfrak{a}} = \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$

Beweis. Es gilt $\dim(P, \mathcal{L}) = \dim \Pi(F, K) = 2$, und wegen $E_{nk} \neq \emptyset$ ist $(G, \mathcal{G}, \cdot)$ kein kinematischer Raum. Da $(G, \cdot)$ dann nach (3.23) abelsch ist, folgt (a) aus (3.3)(a). Nun erhält man

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_l(\mathfrak{b}) \overset{\text{(a)}}{=} \mathfrak{a}_r(\mathfrak{b}) = \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} \mathfrak{b}\mathfrak{a}\,;$$

das ergibt (b) und damit auch (c). □

Wir übertragen (3.22) auf $(F, E, K, +, \cdot)$:

(3.25) *Sei* $\dim(F, K) = 3$, $E' < (E, \cdot)$ *und* $\mathfrak{a} \in E_{nk}$. *Gilt* $\mathfrak{b} \in E'$ *für alle* $\mathfrak{b} \in \langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap E$ *mit* $\mathfrak{b} \notin K$, *so folgt* $E' = E$.

Beweis. $G' := \varphi(E')$ ist eine Untergruppe von $(G, \cdot)$, die $\overline{\varphi(1), \varphi(\mathfrak{a})}$ enthält. Wegen $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ ist $\overline{\varphi(1), \varphi(\mathfrak{a})}$ keine Untergruppe von $(G, \cdot)$; also ergibt (3.22) $G' = G$. Nun sei $\mathfrak{c} \in E$. Da dann $\varphi(\mathfrak{c}) \in G = \varphi(E')$ gilt, existieren $\lambda \in K^*$ und $\mathfrak{c}' \in E'$ mit $\mathfrak{c} = \lambda \mathfrak{c}'$. Aus $\mathfrak{a}, \lambda\mathfrak{a} \in E'$ folgt andererseits $\lambda \in E'$ und damit $\mathfrak{c} = \lambda \mathfrak{c}' \in E'$. $\square$

Als nächstes zeigen wir:

(3.26) *Gilt* $\dim(F, K) = 3$ *und ist* $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ *mit* $1 + \mathfrak{a} \in E$ *und* $\{1 - \mathfrak{a}, 1 + 2\mathfrak{a}\} \cap E \neq \emptyset$, *so folgt* $\langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$.

Beweis. $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ erfülle die Voraussetzungen. Wie in (1.15)(b) bezeichne $\widetilde{\mathfrak{b}}$ für $\mathfrak{b} \in E$ den Begleitautomorphismus von $\mathfrak{b}_l$; für $\lambda \in K$ gilt dann $\widetilde{\mathfrak{b}}(\lambda) = \mathfrak{b}\lambda\mathfrak{b}^{-1}$. Aus (3.24)(b) erhält man außerdem $[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] = \alpha_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}} \in K^*$ für $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in E$.

Die Menge $K_s := \{\nu \in K \mid 1 + \nu\mathfrak{a} \notin E\}$ enthält für (2G4) höchstens zwei, für (EGU) nur endlich viele Elemente. Ferner gelten $0, 1 \notin K_s$ und $\{-1, 2\} \not\subseteq K_s$. – Für $\lambda \in K \setminus K_s$ folgen

$$\begin{aligned}
(1 + \mathfrak{a})(1 + \lambda\mathfrak{a}) &= 1 + \mathfrak{a} + \widetilde{1 + \mathfrak{a}}(\lambda)(1 + \mathfrak{a})\mathfrak{a} = 1 + \mathfrak{a} + \widetilde{1 + \mathfrak{a}}(\lambda)[1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}](\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^2)\,, \\
(1 + \mathfrak{a})(1 + \lambda\mathfrak{a}) &= [1 + \mathfrak{a}, 1 + \lambda\mathfrak{a}](1 + \lambda\mathfrak{a} + (1 + \lambda\mathfrak{a})\mathfrak{a}) = \\
&= [1 + \mathfrak{a}, 1 + \lambda\mathfrak{a}](1 + \lambda\mathfrak{a} + [1 + \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{a}](\mathfrak{a} + \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\mathfrak{a}^2))\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ sind $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2$ linear unabhängig; also ergibt sich mit Koeffizientenvergleich zunächst $1 = [1 + \mathfrak{a}, 1 + \lambda\mathfrak{a}]$ und damit weiter

$$1 + \widetilde{1 + \mathfrak{a}}(\lambda)[1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \lambda + [1 + \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\,, \tag{i}$$

$$\widetilde{1 + \mathfrak{a}}(\lambda)[1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [1 + \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\,. \tag{ii}$$

Multipliziert man (i) von rechts mit $\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)$ und setzt dann (ii) ein, so ergibt sich

$$\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{1 + \mathfrak{a}}(\lambda)[1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) = \lambda\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{1 + \mathfrak{a}}(\lambda)[1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\,. \tag{iii}$$

Wir zeigen nun zunächst

(1) Aus $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{1 + \mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$ folgt $\langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$.

Um (1) zu beweisen, wählen wir ein $\lambda_1 \in K \setminus K_s$ mit $\lambda_1 \neq 0, 1$; solch ein λ_1 existiert, da die Gerade $\langle \varphi(1), \varphi(\mathfrak{a}) \rangle$ mindestens vier reguläre Punkte enthält. Nun folgt mit $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{1 + \mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$ aus (iii)

$$\lambda_1[1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}](\lambda_1 - 1) = \lambda_1(\lambda_1 - 1)\,,$$

wegen $\lambda_1 \neq 0, 1$ also $[1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 1$. Aus (i) erhält man damit $[1 + \lambda\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 1$ für alle $\lambda \in K \setminus K_s$. Da aus $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$ außerdem $K^* \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$ und somit auch $K^*\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$ folgt, ergibt sich schließlich $\langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$. – Also gilt (1).

In (2) und (3) wird $\langle 1, \mathfrak{a}\rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$ als nächstes für zwei Spezialfälle bewiesen.

(2) Ist $|K| = 4$ und $K_s \neq \emptyset$, so folgt $\langle 1, \mathfrak{a}\rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$.

Sei $|K| = 4$ und $K_s \neq \emptyset$; insbesondere gilt dann $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L}) = 4$. Da jede nicht-singuläre Gerade nach (2G4) mindestens vier reguläre Punkte enthält, ist $P \setminus G$ ein Teilraum von $(P, \mathcal{L})$, also $N := F \setminus E$ ein Untervektorraum von (F, K); außerdem existiert wegen $K_s \neq \emptyset$ ein $\lambda_0 \in K$ mit $K_s = \{\lambda_0\}$. Aus $0, 1 \notin K_s$ folgt nun $K = \{0, 1, \lambda_0, \lambda_0 + 1\}$, und es gilt ${\lambda_0}^2 = \lambda_0 + 1$.

Nach (1) ist $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{1+\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$ zu zeigen. Da mit $\mathfrak{a}$ auch $1 + \mathfrak{a}$ in E_{nk} liegt und außerdem $1 + (1 + \mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \in E$ gilt, erfüllt $1 + \mathfrak{a}$ ebenfalls die Voraussetzungen von (3.26); wegen $1 + {\lambda_0}^2(1 + \mathfrak{a}) \notin E$ reicht es also aus, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$ zu beweisen. – Wir nehmen $\widetilde{\mathfrak{a}} \neq \mathrm{id}_K$ an und konstruieren einen Widerspruch.

Wegen $\widetilde{\mathfrak{a}} \neq \mathrm{id}_K$ gilt $\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda_0+1) = \lambda_0$. Setzt man $\lambda_0+1 \in K \setminus K_s$ in (iii) ein und multipliziert das Resultat mit $\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_0) = \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_0 + 1)^{-1}$, so erhält man

$$\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_0)\lambda_0 + [1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\lambda_0 = \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_0)(\lambda_0+1)\lambda_0 + [1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\,;$$

es folgt $\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_0)(\lambda_0 + 1) = [1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}](\lambda_0 + 1)$ und damit $\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_0) = [1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$.

Wir setzen $\mathfrak{u} := 1 + \lambda_0\mathfrak{a} \in N$. Dann gilt $1 + \mathfrak{u}, {\lambda_0}^2 + \mathfrak{u} \in E$, und wir erhalten

$$\widetilde{1+\mathfrak{u}}({\lambda_0}^2) = \widetilde{\lambda_0\mathfrak{a}}(\lambda_0)^2 = \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda_0)^2 = (\lambda_0+1)^2 = \lambda_0\,.$$

Damit folgen

$$\begin{aligned}(1+\mathfrak{u})({\lambda_0}^2+\mathfrak{u}) &= [1+\mathfrak{u}, {\lambda_0}^2+\mathfrak{u}]({\lambda_0}^2+\mathfrak{u}+({\lambda_0}^2+\mathfrak{u})\mathfrak{u})\,,\\ (1+\mathfrak{u})({\lambda_0}^2+\mathfrak{u}) &= (1+\mathfrak{u}){\lambda_0}^2+(1+\mathfrak{u})\mathfrak{u} = \widetilde{1+\mathfrak{u}}({\lambda_0}^2)(1+\mathfrak{u})+(1+\mathfrak{u})\mathfrak{u} =\\ &= \widetilde{1+\mathfrak{u}}({\lambda_0}^2)+\widetilde{1+\mathfrak{u}}({\lambda_0}^2)\mathfrak{u}+(1+\mathfrak{u})\mathfrak{u} = \lambda_0+\lambda_0\mathfrak{u}+(1+\mathfrak{u})\mathfrak{u}\,.\end{aligned}$$

Da $K + N$ eine direkte Summe ist, erhält man daraus wegen $(1 + \mathfrak{u})\mathfrak{u}, ({\lambda_0}^2 + \mathfrak{u})\mathfrak{u} \in N$

$$\begin{gathered}[1+\mathfrak{u}, {\lambda_0}^2+\mathfrak{u}]{\lambda_0}^2 = \lambda_0\,,\\ [1+\mathfrak{u}, {\lambda_0}^2+\mathfrak{u}](\mathfrak{u}+({\lambda_0}^2+\mathfrak{u})\mathfrak{u}) = \lambda_0\mathfrak{u}+(1+\mathfrak{u})\mathfrak{u}\,.\end{gathered}$$

Also folgt zunächst $[1 + \mathfrak{u}, {\lambda_0}^2 + \mathfrak{u}] = [1 + \mathfrak{u}, {\lambda_0}^2 + \mathfrak{u}]{\lambda_0}^3 = {\lambda_0}^2$ und damit

$${\lambda_0}^2(\mathfrak{u}+({\lambda_0}^2+\mathfrak{u})\mathfrak{u}) = \lambda_0\mathfrak{u}+(1+\mathfrak{u})\mathfrak{u}\,. \tag{iv}$$

Weiter gelten wegen $\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_0) = [1 + \mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$

$$\begin{aligned}({\lambda_0}^2+\mathfrak{u})\mathfrak{u} &= \lambda_0(1+\mathfrak{a})(1+\lambda_0\mathfrak{a}) =\\ &= \lambda_0(1+\mathfrak{a}+\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_0)[1+\mathfrak{a},\mathfrak{a}]\mathfrak{a}(1+\mathfrak{a})) = \lambda_0(1+\mathfrak{a}+[1+\mathfrak{a},\mathfrak{a}]^2(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2))\,,\\ (1+\mathfrak{u})\mathfrak{u} &= \lambda_0\mathfrak{a}(1+\lambda_0\mathfrak{a}) = \lambda_0\mathfrak{a}+\lambda_0\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda_0)\mathfrak{a}^2 = \lambda_0\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2\,.\end{aligned}$$

Damit folgt aus (iv)

$${\lambda_0}^2(1+\lambda_0\mathfrak{a}+\lambda_0(1+\mathfrak{a}+[1+\mathfrak{a},\mathfrak{a}]^2(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2))) = \lambda_0(1+\lambda_0\mathfrak{a})+\lambda_0\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2\,.$$

Da $1, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2$ wegen $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ linear unabhängig sind, ergibt sich für den Koeffizienten vor $\mathfrak{a}^2$ $1 = {\lambda_0}^3[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]^2 = [1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]^2$ und damit $1 = [1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_0)$, im Widerspruch zu $\lambda_0 \neq 1$. Also gilt (2).

(3) Für $|K| = 8$ gilt $\langle 1, \mathfrak{a}\rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$.

Wir wollen wieder (1) anwenden und müssen dazu $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{1+\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$ zeigen. Zunächst existieren $s, t \in \{1, 2, 4\}$ mit $\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) = \lambda^s$ und $\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda) = \lambda^t$ für alle $\lambda \in K$. Mit (iii) folgt, daß das Polynom $p := [1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]x^{s+t} + x^{s+1} + x^s + [1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]x^t$ wegen $|K_s| \leq 2$ mindestens sechs verschiedene Nullstellen in K hat. Zu $m := \min\{s, t\}$ existiert nun ein $q \in K[x]$ mit $p = x^m q$, und q hat mindestens fünf Nullstellen in K. Da der Grad von q höchstens vier sein kann, ist q und damit auch p das Nullpolynom, und es folgt $s = t = 1$. Also gilt $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{1+\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$ und daher (3).

Sind $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda, \mu, \lambda+\mu \notin K_s$, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \\
&\qquad + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\mu)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\mu)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) = \\
&= \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda+\mu) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda+\mu)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda+\mu) \overset{\text{(iii)}}{=} \\
&= (\lambda+\mu)\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda+\mu) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda+\mu)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \\
&= \lambda\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \lambda\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \mu\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \mu\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\mu)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\,,
\end{aligned}$$

also mit (iii)

$$\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\mu)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) = \mu\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \lambda\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu)\,. \tag{v}$$

Damit gilt insbesondere für $\mu \in K$ mit $\mu, 1+\mu \notin K_s$

$$[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\mu)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mu + \widetilde{\mathfrak{a}}(\mu)\,. \tag{vi}$$

Sind $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda, \mu, 1+\lambda, 1+\mu, \lambda+\mu \notin K_s$, so erhält man durch Rechtsmultiplikation von (vi) mit $\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)$

$$[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu)\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\mu)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) = \mu\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{\mathfrak{a}}(\mu)\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\,,$$

und wenn man λ und μ vertauscht

$$[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) = \lambda\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu)\,.$$

Addition der letzten beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned}
&[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}](\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu)\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu)) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\mu)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) = \\
&\quad = \widetilde{\mathfrak{a}}(\mu)\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu) + \mu\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \lambda\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu)\,.
\end{aligned}$$

Mit (v) folgt daraus $[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\mu\lambda + \lambda\mu) = \widetilde{\mathfrak{a}}(\mu\lambda + \lambda\mu)$, also

$$[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 1 \quad \text{oder} \quad \mu\lambda + \lambda\mu = 0\,. \tag{vii}$$

Wir zeigen nun

(4) Gilt $[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 1$, so folgt $\langle 1, \mathfrak{a}\rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$.

Nach (1) ist $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{1+\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$ zu beweisen. Für $\lambda \in K$ mit $\lambda, 1+\lambda \notin K_s$ folgt wegen $[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 1$ aus (vi) $\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda) = \lambda$; mit (iii) ergibt sich dann, daß diese λ auch Fixpunkte von $\widetilde{\mathfrak{a}}$ sind. Wir dürfen also annehmen, daß K_s nicht leer ist; außerdem sei $(K, +, \cdot)$ kein Primkörper, und wegen (2) und (3) gelte $|K| \neq 4, 8$.

1. Fall: $|K| \notin \mathbb{N}$. Da K_s endlich ist, stimmen $\widetilde{\mathfrak{a}}$ und $\widetilde{1+\mathfrak{a}}$ dann bis auf endlich viele Punkte mit id_K überein. Also ist jedes Element von K Summe zweier Fixpunkte von $\widetilde{\mathfrak{a}}$ und $\widetilde{1+\mathfrak{a}}$, und es folgt $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{1+\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$.

2. Fall: $9 \leq |K| \in \mathbb{N}$. Wegen $|K_s| \leq 2$ besitzen $\widetilde{\mathfrak{a}}$ und $\widetilde{1+\mathfrak{a}}$ dann mindestens fünf Fixpunkte. Damit kann auch hier jedes Element von K als Summe zweier Fixpunkte von $\widetilde{\mathfrak{a}}$ und $\widetilde{1+\mathfrak{a}}$ dargestellt werden, und man erhält wieder $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{1+\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$.

Also gilt (4).

Wegen $\{-1, 2\} \not\subseteq K_s$ gilt (vi) für einen der Werte $-1, 1$; man erhält also in jedem Fall $2[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 2$. Da damit für $\mathrm{char}(K) \neq 2$ aus (4) bereits die Behauptung folgt, nehmen wir im folgenden $\mathrm{char}(K) = 2$ an. Wegen (vii) und (4) gelte außerdem $\mu\lambda + \lambda\mu = 0$, also $\mu\lambda = \lambda\mu$ für alle $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda, \mu, 1+\lambda, 1+\mu, \lambda+\mu \notin K_s$. – Wir zeigen als nächstes

(5) $(K, +, \cdot\,)$ ist kommutativ.

Zum Beweis von (5) nehmen wir $|K| \notin \mathbb{N}$ an. Da K_s endlich ist, kann man zu allen $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ Elemente $\mu_{1,1}, \mu_{1,2}, \mu_{2,1}, \mu_{2,2} \in K$ mit $\mu_{i,j}, 1+\mu_{i,j} \notin K_s$ finden, für die

$$\lambda_i = \mu_{i,1} + \mu_{i,2} \quad \text{und} \quad \mu_{1,1}+\mu_{2,1}, \mu_{1,1}+\mu_{2,2}, \mu_{1,2}+\mu_{2,1}, \mu_{1,2}+\mu_{2,2} \notin K_s$$

gelten. Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= (\mu_{1,1}+\mu_{1,2}) \cdot (\mu_{2,1}+\mu_{2,2}) = \mu_{1,1}\mu_{2,1} + \mu_{1,1}\mu_{2,2} + \mu_{1,2}\mu_{2,1} + \mu_{1,2}\mu_{2,2} = \\ &= \mu_{2,1}\mu_{1,1} + \mu_{2,2}\mu_{1,1} + \mu_{2,1}\mu_{1,2} + \mu_{2,2}\mu_{1,2} = (\mu_{2,1}+\mu_{2,2}) \cdot (\mu_{1,1}+\mu_{1,2}) = \lambda_2 \cdot \lambda_1\,, \end{aligned}$$

und damit gilt (5).

Setzt man für $\lambda \in K^*$ mit $\lambda^{-1} \notin K_s$ nun λ^{-1} in (iii) ein und multipliziert diese Gleichung mit $\lambda \cdot \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) \cdot \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)$, so erhält man wegen der Kommutativität von $(K, +, \cdot\,)$

$$\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)\lambda + [1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\lambda = \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda) + [1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\lambda\,, \tag{viii}$$

was offenbar auch für $\lambda = 0$ gilt. Also ergibt sich für $\lambda \in K$ mit $\lambda \notin K_s, {K_s}^{-1}$

$$\begin{aligned} \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)^2(\lambda+1) &= \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda) \cdot \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)(\lambda+1) \overset{\text{(viii)}}{=} \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda) \cdot [1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}](1+\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda))\lambda = \\ &= \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}](1+\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)) \cdot \lambda \overset{\text{(iii)}}{=} (\lambda+1)\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) \cdot \lambda = \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\lambda(\lambda+1) \end{aligned}$$

und damit

$$\widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)^2 = \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\lambda\,. \tag{ix}$$

Ist $\lambda \in K$ mit $\lambda, \lambda+1 \notin K_s, {K_s}^{-1}$, so folgt

$$\begin{aligned} \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)^2 + 1 &= \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda+1)^2 \overset{\text{(ix)}}{=} \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda+1)(\lambda+1) = \\ &= \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda)\lambda + \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \lambda + 1 \overset{\text{(ix)}}{=} \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda)^2 + \widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) + \lambda + 1\,, \end{aligned}$$

also $\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) = \lambda$; mit (ix) ergibt sich für solche λ damit

$$\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda) = \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda) = \lambda\,. \tag{x}$$

Wir zeigen nun $\langle 1, \mathfrak{a}\rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$. Wegen (1) und (x) bzw. (2) und (3) darf wieder angenommen werden, daß $K_s \neq \emptyset$ und $|K| \neq 4, 8$ gelten.

1. Fall: $|K| \notin \mathbb{N}$. Wegen $|K_s| \in \mathbb{N}$ und (x) ist dann wieder jedes Element von K Summe zweier Fixpunkte von $\widetilde{\mathfrak{a}}$ und $\widetilde{1+\mathfrak{a}}$. Also gilt $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{1+\mathfrak{a}} = \mathrm{id}_K$, und wir können (1) anwenden.

2. Fall: $16 \leq |K| \in \mathbb{N}$. Wegen $|K_s| \leq 2$ haben $\widetilde{\mathfrak{a}}$ und $\widetilde{1+\mathfrak{a}}$ dann nach (x) mindestens acht gemeinsame Fixpunkte; also existiert ein $\lambda_1 \in K \setminus \{0, 1\}$ mit $\widetilde{\mathfrak{a}}(\lambda_1) = \widetilde{1+\mathfrak{a}}(\lambda_1) = \lambda_1$. Aus (iii) erhält man

$$\lambda_1[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}](\lambda_1 + 1) = \lambda_1(\lambda_1 + 1)\,,$$

wegen $\lambda_1 \neq 0, 1$ also $[1+\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 1$. Nun folgt die Behauptung aus (4). □

(3.27) *Es sei* $\dim(F, K) = 3$. *Dann gilt* $\langle 1, \mathfrak{a}\rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$ *für jedes* $\mathfrak{a} \in E_{nk}$.

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten und zeigen zunächst

(1) Für $E_{nk} \neq \emptyset$ ist $(K, +, \cdot\,)$ kommutativ.

K sei nicht endlich; dann ist auch $\mathrm{Ord}(P, \mathcal{L})$ unendlich, und damit gilt (EGU). Nach Voraussetzung existiert ein $\mathfrak{a} \in E_{nk}$. Da $\langle \varphi(1), \varphi(\mathfrak{a})\rangle$ nur endlich viele singuläre Punkte enthält, ist auch

$$K_1 := \{\, \lambda \in K \mid 1 + \lambda\mathfrak{a} \notin E \quad \text{oder} \quad 1 - \lambda\mathfrak{a} \notin E \,\}$$

endlich; für $\mu \in K \setminus K_1$ folgt wegen $\mu\mathfrak{a} \in E_{nk}$ nach (3.26) $\langle 1, \mu\mathfrak{a}\rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mu\mathfrak{a})$, also insbesondere $K^* \subseteq \mathrm{Z}(\mu\mathfrak{a})$. Damit erhält man für $\mu_1, \mu_2 \in K \setminus K_1$

$$\mu_1(\mu_2\mathfrak{a}) = (\mu_2\mathfrak{a})\mu_1 = \mu_2\mu_1^{-1}(\mu_1\mathfrak{a})\mu_1 = \mu_2\mu_1^{-1}\mu_1(\mu_1\mathfrak{a}) = \mu_2(\mu_1\mathfrak{a})\,,$$

also $\mu_1\mu_2 = \mu_2\mu_1$. Da K unendlich und K_1 endlich ist, kann jedes $\mu \in K$ als Summe von Elementen aus $K \setminus K_1$ dargestellt werden, und wir erhalten (1).

(2) Zu $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ existiert ein $\lambda \in K^*$ mit $1 + \lambda\mathfrak{a} \in E$ und $\{1 - \lambda\mathfrak{a}, 1 + 2\lambda\mathfrak{a}\} \cap E \neq \emptyset$.

Zum Beweis von (2) sei $\mathfrak{a} \in E_{nk}$. Wir nehmen an, daß kein $\lambda \in K^*$ mit $1 + \lambda\mathfrak{a}, 1 - \lambda\mathfrak{a} \in E$ existiert. Dann ist K endlich, $(G, \mathcal{G})$ also 2-geschlitzt in $(P, \mathcal{L})$. Da die Gerade $\langle \varphi(1), \varphi(\mathfrak{a})\rangle$ mindestens vier reguläre Punkte enthält, existieren $\mu_1, \mu_2 \in K^*$ mit $\mu_1 \neq \mu_2$ und $1 + \mu_i\mathfrak{a} \in E$. Mit unserer Annahme folgt nun $K = \{0, \mu_1, \mu_2, -\mu_1, -\mu_2\}$, also $K = \mathbb{Z}_5$. Wegen $\mu_1 \neq \mu_2$ ist $2\mu_1 + \mu_2 \neq 2\mu_2 + \mu_1$, also etwa $2\mu_1 + \mu_2 \neq 0$. Dann gilt $2\mu_1 \neq -\mu_2$, d.h. $2\mu_1 = \mu_2$ und damit $1 + 2\mu_1\mathfrak{a} = 1 + \mu_2\mathfrak{a} \in E$. – Also folgt (2).

(3) Es gilt $E_{nk} \subseteq \mathrm{Z}(K^*)$.

Sei $\mathfrak{a} \in E_{nk}$. Wir wählen ein $\lambda \in K^*$ mit den Eigenschaften aus (2). Wegen $\lambda\mathfrak{a} \in E_{nk}$ folgt dann aus (3.26) $\langle 1, \lambda\mathfrak{a}\rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\lambda\mathfrak{a})$, insbesondere gilt also $K^* \subseteq \mathrm{Z}(\lambda\mathfrak{a})$. Mit (1) erhält man daher $\lambda, \lambda\mathfrak{a} \in \mathrm{Z}(K^*)$, also $\mathfrak{a} \in \mathrm{Z}(K^*)$ und damit (3).

Nun beweisen wir die eigentliche Behauptung. Sei also $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ und $\mathfrak{b} \in \langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap E$. Da $\overline{\varphi(1), \varphi(\mathfrak{a})}$ keine Untergruppe von $(G, \cdot\,)$ ist, folgt mit (1.2)(a) $\mathfrak{b} \in K^* \cup E_{nk}$; wegen (1) bzw. (3) gilt also $\mathfrak{b} \in \mathrm{Z}(K^*)$. Nach (2) existiert ein $\lambda \in K^*$, für das $\lambda\mathfrak{a}$ die Voraussetzungen von (3.26) erfüllt; nun erhält man $\mathfrak{b} \in \mathrm{Z}(\lambda\mathfrak{a})$ und damit $\lambda, \lambda\mathfrak{a} \in \mathrm{Z}(\mathfrak{b})$, also auch $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$. □

(3.28) *Gelten* $\dim(F, K) = 3$ *und* $E_{nk} \neq \emptyset$, *so ist* $(E, \cdot\,)$ *abelsch.*

Beweis. Für $\mathfrak{a} \in E_{nk}$ gilt nach (3.27) $\langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap E \subseteq \mathrm{Z}(\mathfrak{a})$, also $\mathrm{Z}(\mathfrak{a}) = E$ nach (3.25); damit folgt $E_{nk} \subseteq \mathrm{Z}(E)$. – Nach Voraussetzung existiert ein $\mathfrak{a} \in E_{nk}$. Sei $\mathfrak{b} \in \langle 1, \mathfrak{a} \rangle \cap E$ mit $\mathfrak{b} \notin K$. Mit (1.2)(a) folgt wieder $\mathfrak{b} \in E_{nk}$, also ist $\mathfrak{b} \in \mathrm{Z}(E)$. (3.25) ergibt nun direkt $\mathrm{Z}(E) = E$. □

Mit (1.19), (UA 4) und (3.19) folgt aus (3.28)

(3.29) Folgerung. *Gelten* $\dim(F, K) = 3$ *und* $E_{nk} \neq \emptyset$, *so ist* $(F, E, K, +, \cdot\,)$ *zu einer kommutativen Algebra mit Einheitengruppe* $(E, \cdot\,)$ *fortsetzbar.*

Nun können wir (3.18) beweisen.

Beweis von (3.18): Wir halten zunächst fest, daß $(P, \mathcal{L}) = \Pi(F, K)$ genau dann pappussch ist, wenn $(K, +, \cdot\,)$ kommutativ ist. – Da der Koordinatenkörper einer unitären Algebra stets kommutativ ist, schließen sich die Aussagen (i), (ii) und (iii) also paarweise aus. Wegen (3.19) folgt (iii) im übrigen bereits dann, wenn $(F, E, K, +, \cdot\,)$ fortsetzbar ist.

Wir nehmen $E_0 = \emptyset$, denn für $E_0 \neq \emptyset$ ist $(F, E, K, +, \cdot\,)$ nach (3.20)(b) fortsetzbar. Ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ linear gefasert, so folgt mit (2.19) für $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$ und (3.10)(a) für $\dim(P, \mathcal{L}) \geq 3$, daß $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ Inzidenzuntergruppe eines Translations- oder eines Strecktranslationsraumes in $(P, \mathcal{L})$ ist; also erhält man mit (3.21) die Behauptung für diesen Fall.

Schließlich sei $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ nicht linear gefasert. Da mit E_0 auch G_0 leer ist, erhält man mit (1.14) $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$, also $\dim(F, K) = 3$. Außerdem folgt mit (1.2)(a) $E_{nk} \neq \emptyset$; damit ergibt sich (iii) aus (3.29). □

Für die Inzidenzgruppen aus (2.21) erhalten wir nun, auch ohne daß $(P, \mathcal{L})$ desarguessch zu sein braucht:

(3.30) Folgerung. $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ *sei eine linear gefaserte Inzidenzgruppe und* $(P, \mathcal{L})$ *ein mindestens zweidimensionaler projektiver Raum mit (2G4) oder (EGU). Dann ist* $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ *l-r-eingebettet in* $(P, \mathcal{L})$, *und es gilt genau eine der Aussagen (i), (ii), (iii) aus (3.18).*

Beweis. Nach (2.21) ist $(G, \mathcal{G}, \cdot\,)$ l-r-eingebettet in $(P, \mathcal{L})$. – Ist $(P, \mathcal{L})$ desarguessch, können wir nun (3.18) anwenden. Ist $(P, \mathcal{L})$ nicht desarguessch, so gilt $\dim(P, \mathcal{L}) = 2$, und $(P, \mathcal{L})$ ist keine Koordinatengeometrie; da $(P, \mathcal{L})$ dann auch nicht pappussch ist, folgt mit (2.19) eine und damit genau eine der Aussagen (i), (ii). □

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von (3.30) gilt stets sogar (2G4): Für (i) oder (ii) ist dies trivial; für (iii) ist die Algebra (F, K) kinematisch, und man kann wie in [2], Satz 5 argumentieren.

Literaturverzeichnis

[1] R. Brauer: On a theorem of H. Cartan. Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 619–620

[2] L. Bröcker: Kinematische Räume. Geometriae Dedicata 1 (1973), 241–268

[3] E. Ellers, H. Karzel: Involutorische Geometrien. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 25 (1961), 93–104

[4] E. Ellers, H. Karzel: Kennzeichnung elliptischer Gruppenräume. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 26 (1963), 55–77

[5] J. Hörwick: Über eine Klasse kinematischer Räume. Dissertation TU München 1986

[6] H. Hotje: Allgemeine kinematische Räume. Mitt. Math. Ges. Hamburg XII, Heft 3 (1991), 785–791

[7] H. Karzel: Ebene Inzidenzgruppen. Arch. Math. 15 (1964), 10–17

[8] H. Karzel: Bericht über projektive Inzidenzgruppen. Jahresbericht DMV 67 (1964), 58–92

[9] H. Karzel: Kinematic spaces. Symposia Mathematica Ist. Naz. di Alta Matematica 11 (1973), 413–439

[10] H. Karzel: Kinematische Algebren und ihre geometrischen Ableitungen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 41 (1974), 158–171

[11] H. Karzel, G. Kist: Kinematic algebras and their geometries. In: Rings and Geometry. NATO ASI Series. Ser. C, Vol. 160, Dordrecht/Holland (1985), 437–509

[12] H. Karzel, M. Marchi: Plane fibered incidence groups. J. Geometry 20 (1983), 192–201

[13] H. Karzel, H. Meissner: Geschlitzte Inzidenzgruppen und normale Fastmoduln. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 31 (1967), 69–88

[14] H. Karzel, K. Sörensen, D. Windelberg: Einführung in die Geometrie. Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen 1973

[15] G. Kist: Punktiert-affine Inzidenzgruppen und Fastkörpererweiterungen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 44 (1975), 233–248

[16] G. Kist: Kinematische punktiert-affine Inzidenzgruppen. Proc. Symp. on Geometric Algebra, Duisburg. Erschienen in „Beiträge zur Geometrischen Algebra“, Birkhäuser 1977, 179–183

[17] G. Kist: Projektiver Abschluß 2-gelochter Räume. Resultate der Mathematik 3 (1980), 192–211

[18] G. Kist: Theorie der verallgemeinerten kinematischen Räume. Habilitationsschrift TU München 1980.

[19] G. Kist, S. Pianta, E. Zizioli: Dilatation spaces. Results in Mathematics Vol. 28 (1995), 86–99

[20] A. Kreuzer: Zur Einbettung von Inzidenzräumen und angeordneten Räumen. J. Geometry 35 (1989), 132–151

[21] M. Marchi: Fibered incidence groups which are not kinematic. J. Geometry 20 (1983), 95–100

[22] I. Pieper: Darstellung zweiseitiger geschlitzter Inzidenzgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32 (1968), 97-126

[23] I. Pieper: Zur Darstellung zweiseitiger affiner Inzidenzgruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 35 (1970), 121-130

[24] E. M. Schröder: Zur Theorie subaffiner Inzidenzgruppen. J. Geometry 3 (1973), 31–69

[25] K. Sörensen: Projektive Einbettung angeordneter Räume. Beiträge zur Geometrie und Algebra 15, TUM-M8612 (1986), 8–35

[26] H. Wähling: Darstellung zweiseitiger Inzidenzgruppen durch Divisionsalgebren. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 30 (1967), 220–240

[27] H. Wähling: Projektive Inzidenzgruppoide und Fastalgebren. J. Geometry 9 (1977), 109–126

[28] H. Wähling: Fastalgebren mit zweiseitigem bzw. kommutativem Inzidenzgruppoid. J. Geometry 27 (1986), 94–101

Lebenslauf

17.12.1965	geboren in Freiburg/Br.
1986 – 1994	Studium der Mathematik mit Nebenfach Chemie an der Universität Hannover
1988 – 1991	wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität Hannover
Februar 1994	Diplom
1995 – 1999	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Hannover
Dezember 1998	Promotion

Hannover, im Februar 1999