

Effizientes Breitband-Netzwerkmodell zur Simulation von Spannungsversorgungsstrukturen auf Leiterplatten

Dipl. Ing. A. Mantzke, Prof. Dr. Ing. M. Leone, Dipl. Ing. (FH) M. Friedrich
Otto von Guericke Universität Magdeburg – Lehrstuhl Theoretische Elektrotechnik

1. Einleitung

Das Hochfrequenzverhalten planparalleler Plattenstrukturen, wie sie in mehrlagigen Platinen (PCB) für Spannungsversorgungslagen Verwendung finden, ist für die EMV des Gesamtsystems häufig von entscheidender Bedeutung. Aufgrund der schnellen, transienten Versorgungsströme, die durch Schaltvorgänge digitaler Komponenten entstehen, werden die strukturellen Resonanzen der Plattenpaare angeregt, was eine Verschlechterung der Signalintegrität und die verstärkte Abstrahlung der Struktur hervorruft [1]. Ähnliche Effekte treten zwischen den Versorgungslagen von Motherboard-Subboard-Strukturen [2], PCB Masseebenen und Gehäuse oder zwischen Kühlkörpern und Masse auf. Zur Analyse des elektromagnetischen Verhaltens solcher planparalleler Strukturen wurde neben der direkten Feldsimulation mit verschiedenen Methoden (FEM, FD, FIT, MOM...) [4]-[7] ein analytischer Ansatz zur Lösung der zugrunde liegende 2D Helmholtz-Gleichung entwickelt, basierend auf einem Hohlraummodell mit ideal magnetisch leitenden Seitenwänden. Dieses Hohlraummodell wurde mehrmals durch Impedanzmessung über einen großen Frequenzbereich validiert [3],[11]. Die analytische Lösung der Helmholtz-Gleichung kann für elementare Plattengeometrien durch einen Spiegelungsansatz [8] oder eine Orthogonalreihenentwicklung [9] berechnet werden, führt aber zu einer schlecht konvergierenden Summe, die für eine breitbandige Analyse ungeeignet ist. Um das Konvergenzverhalten zu verbessern, wurden diverse Impedanzformulierungen entwickelt ([10],[11],[13]), die aber nicht als Ersatzschaltbild interpretierbar sind, keine hinreichende Beschleunigung bieten oder nicht auf beliebige Geometrien anwendbar sind.

In diesem Beitrag wird ein alternativer Modellierungsansatz für beliebig berandete Parallelplattenstrukturen präsentiert. Dieser basiert auf einer allgemeinen und schnell konvergierenden Impedanzlösung für runde Ports, welche direkt in ein äquivalentes Foster-Ersatzschaltbild überführt werden kann. Das Ersatzschaltbild enthält neben der statischen Kapazität und der Port-Induktivitäten eine begrenzte Anzahl Parallelschwingkreise für die betrachteten Hohlraum-Moden. Die Bestimmung der Netzwerkelemente basiert auf einer modalen und einer quasistatischen Analyse. Beide Analysen werden mit einem neuartigen Finite-Differenzenverfahren (FD) durchgeführt. Die Validierung erfolgt über 3D-Vollwellensimulationen im Frequenz- und Zeitbereich.

2. Portimpedanz mit beschleunigter Konvergenz

Die Transferimpedanz zwischen zwei runden Ports i, j mit Umfang c_i und c_j in einer PCB-Anordnung (Bild 1(a)) ergibt sich mit der zugehörigen Green'schen Funktion zu:

$$Z_{ij} = \frac{1}{c_i c_j} \oint_{c_i} \oint_{c_j} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds ds' , \quad (1)$$

was die Eingangsimpedanz einschließt wenn $i = j$ gilt. Zur Modellierung von Multilayer-Strukturen mit mehreren übereinander angeordneter Platten können die Impedanzmatrizen der einzelnen Lagenpaare seriell verschaltet werden [14],[15].

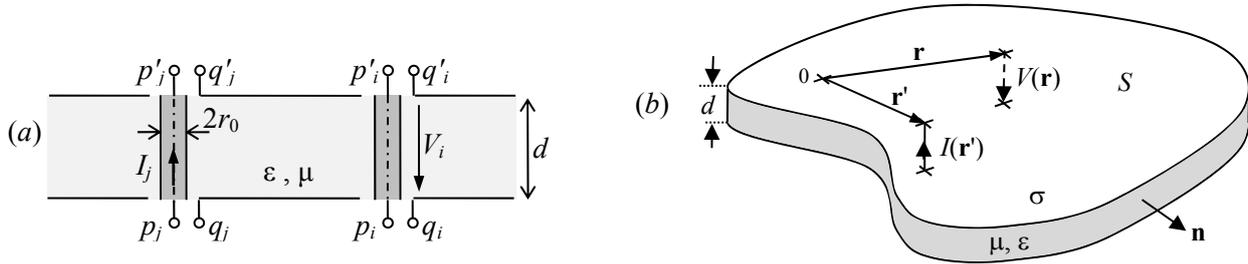


Bild 1: (a) Zwei Ports j und i mit zugehörigen Anschlüssen zur oberen/unteren Platte
 (b) Parallelplattenstruktur beliebiger Geometrie mit Stromfilament am Quellpunkt \mathbf{r}' und Spannung im Aufpunkt \mathbf{r}

Für (1) gilt, dass der Strom vertikal ausgerichtet und homogen entlang des Portumfangs verteilt ist. Bild 1(b) zeigt den prinzipiellen Aufbau einer unregelmäßig berandeten Struktur mit zwei Platten der Fläche S , die von einem Dielektrikum mit Permittivität ϵ , Permeabilität μ und Höhe d separiert werden. Die Spannungsverteilung $V(\mathbf{r})$ auf der Struktur kann durch die 2D-Helmholtz-Gleichung mit Neumann-Randbedingung (mit $\partial V/\partial n = 0$) beschrieben werden [9]:

$$(\nabla_S^2 + k^2)V = -j\omega\mu d J. \quad (2)$$

In [12] wird die Impedanzformulierung (1), die sich auf (2) bezieht, für punktuelle Anregungen über eine Eigenfunktionenentwicklung der Green'schen Funktion aufgestellt:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega\mu d \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(\mathbf{r})\phi_n(\mathbf{r}')}{k_n^2 - k^2}. \quad (3)$$

Hierbei bezeichnet ω die Kreisfrequenz, k die komplexe Wellenzahl und Q die Güte zur Berücksichtigung kleiner Verluste [9]

$$k \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 - j\frac{1}{2Q} \right) \quad \text{mit} \quad Q = \left(\tan\delta + \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \right)^{-1} \quad (4)$$

und k_n den zur Eigenfunktion ϕ_n korrespondierenden Eigenwert. Q setzt sich aus einem Anteil für den Verlustwinkel δ des Dielektrikums und einem Teil für die ohm'schen Verluste infolge der Leitfähigkeit σ (Skin-Effekt) zusammen. Die Lösung (3) ist nicht geeignet für Breitbandanalysen mit vielen Ports, da sie schlecht konvergiert, was sich besonders zwischen den Resonanzfrequenzen

$$f_n \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} k_n \quad (5)$$

zeigt, die über die Nullstellen des Nenners in (3) mit (4) bestimmt sind. Für die Beschleunigung der Green'schen Funktion (3) wird zuerst der Term 0.ter Ordnung mit $k_0 = 0$; $\phi_0 = 1/\sqrt{S}$ extrahiert, der die statische Kapazität C_0 mit Verlusten (R_0) darstellt:

$$C_0 = \epsilon S/d \quad ; \quad R_0 = \frac{Q}{\omega C_0}. \quad (6)$$

Führt man außerdem die statische Green'sche Funktion $G_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ für $k \rightarrow 0$ ein, so lässt sich eine alternative Form der Green'schen Funktion aus (3) ableiten [12]:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{j\omega C_0 + 1/R_0} + j\omega d G_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + j\omega \mu d \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{k_n^2 - k^2} - \frac{1}{k_n^2} \right). \quad (7)$$

Durch die statische Green'sche Funktion $G_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ konvergiert (7) wenn gilt: $k_N^2 > |k|^2$. Die Anzahl N der zu betrachtenden Summationsterme für eine vorgegebene Maximalfrequenz f_{\max} kann mit (5) wie folgt abgeschätzt werden:

$$k_N \geq 2\pi \sqrt{\mu \varepsilon} f_{\max}. \quad (8)$$

Die Integration (1) der statischen Green'schen Funktion in (7) ergibt die statischen Eigen- und Koppelinduktivitäten der Ports:

$$L_{ij} = \frac{d}{c_i c_j} \oint_{c_i} \oint_{c_j} G_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds_j ds_i. \quad (9)$$

Ausgehend davon, dass zwei Ports mit Radius r_0 mindestens um den zweifachen Durchmesser voneinander entfernt sind (es gilt $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg r_0$), kann die statische Green'sche Funktion linear in der Umgebung der Ports approximiert werden. Man erhält für die Gegeninduktivitäten die einfache Näherung [12]:

$$L_{ij} \approx d \cdot G_0^A(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j), \quad i \neq j. \quad (10)$$

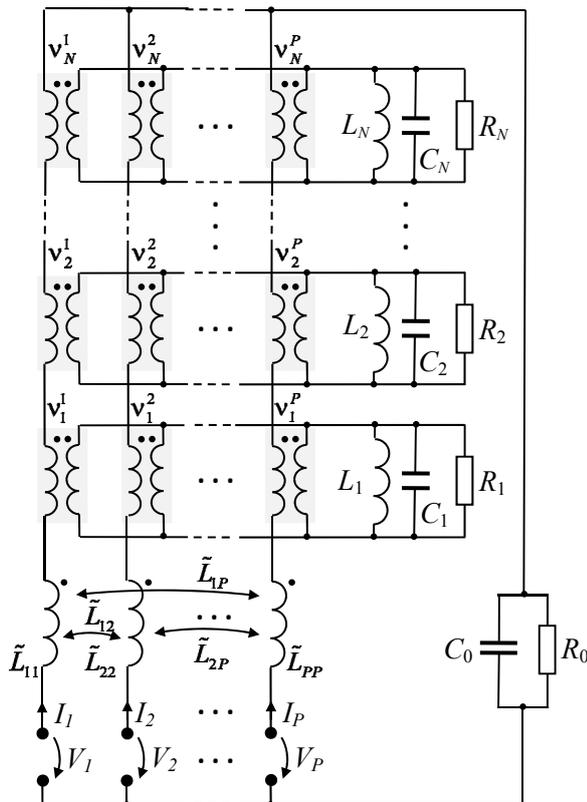


Bild 2: Beschleunigtes Netzwerkmodell für eine Multiport-Parallelplattenstruktur

Ist der Port weit genug vom Rand entfernt, kann angesetzt werden, dass die Green'sche Funktion sich nur unwesentlich entlang des Portumfangs ändert [2]. Somit lässt sich die Eigeninduktivität L_{ii} mit $\mathbf{r}_j \rightarrow \mathbf{r}_i(1 + r_0/|\mathbf{r}_i|)$ in (10) berechnen. Für die Doppelintegration des dritten Terms in (7) werden die Eigenfunktionen in Portnähe ebenfalls linear genähert, unter der Voraussetzung, dass die kleinste betrachtete Wellenlänge viel größer ist als die Portradien ($2\pi/k_N \gg r_0$, mit größtem Eigenwert k_N). Die Integration des dritten Terms aus (7) liefert dann die modifizierte modale Summe mit der begrenzten Ordnung N :

$$\tilde{Z}_{ij}^N = j\omega \mu d \sum_{n=0}^N \phi_n(\mathbf{r}_i) \phi_n(\mathbf{r}_j) \left(\frac{1}{k_n^2 - k^2} - \frac{1}{k_n^2} \right), \quad (11)$$

womit die beschleunigte Impedanzlösung wie folgt resultiert:

$$Z_{ij} = \frac{1}{j\omega C_0 + 1/R_0} + j\omega L_{ij} + \tilde{Z}_{ij}^N. \quad (12)$$

3. Effiziente Netzwerkdarstellung für Multiportstrukturen

Um die Impedanzlösung (12) in ein äquivalentes Netzwerk umzuwandeln, wird die Übereinstimmung der Summenterme aus (11) mit der Impedanz von Parallelschwingkreisen genutzt:

$$\frac{j\omega\mu d}{S} \frac{1}{k_n^2 - k^2} = \frac{S}{\frac{1}{j\omega L_n} + j\omega C_n + 1/R_n}, \text{ mit } C_n = C_0; L_n = \frac{\mu d}{k_n^2 S}; R_n = \frac{Q(\omega_n)}{\omega_n C_0}. \quad (13)$$

Hieraus folgt, dass der zweite Summenterm in (11) mit $-j\omega L_n$ für den Fall $k, \omega \rightarrow 0$ übereinstimmt. Durch Zusammenfassen erhält man die äquivalente Netzwerkdarstellung:

$$Z_{ij} = \frac{1}{j\omega C_0 + 1/R_0} + j\omega \tilde{L}_{ij} + \sum_{n=1}^N \frac{v_n^i v_n^j}{\frac{1}{j\omega L_n} + j\omega C_n + 1/R_n}, \quad (14)$$

$$\text{mit } \tilde{L}_{ij} = L_{ij} - \sum_{n=1}^N v_n^i v_n^j L_n, \quad (15)$$

sowie den ortsabhängigen modalen Kopplungsfaktoren $v_n^i = \sqrt{S} \phi_n(\mathbf{r}_i)$. Die netzwerkmäßige Umsetzung von (14) ist in Bild 2 gezeigt, wobei die modalen Koppelfaktoren v_n^i als Übersetzungsverhältnisse idealer Transformatoren zum entsprechenden Parallelschwingkreis (Mode) interpretiert werden. Um eine komplizierte Implementation des frequenzabhängigen Verlustwiderstandes R_0 (6) zu vermeiden, wird dieser durch den Wert bei der Mittenfrequenz $\omega_1/2$ approximiert. Der praktische Nutzen des entwickelten Netzwerkmodells besteht darin, dass es in jedem Schaltungssimulator (SPICE) genutzt werden kann, um Simulationen im Frequenz- und Zeitbereich bei beliebiger Beschaltung durchzuführen. Dabei werden für jeden zusätzlichen Port eine gekoppelte Induktivität und N ideale Übertrager in das Netzwerk eingeführt, womit die Anzahl der Netzwerkelemente und unbekanntes Ströme linear mit der Anzahl der Ports steigt.

3.1 Numerische Bestimmung der Netzwerkelemente

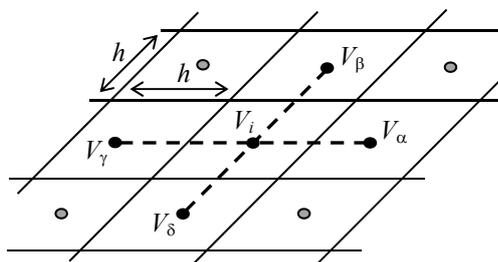


Bild 3: FD-Diskretisierungsschema

Die für die Bestimmung der Netzwerkelemente erforderliche Eigenwertanalyse und Induktivitätsberechnung wird mit der Methode der Finite-Differenzen (FD) durchgeführt. Die Eigenfunktionen ϕ_n und Eigenwerte k_n ergeben sich als Lösung der homogenen, verlustlosen Helmholtz-Gleichung (2) ($J=0$) mit realer Wellenzahl k . Die Struktur wird durch insgesamt N_s quadratische Zellen der Kantenlänge h

vernetzt. Der Laplace-Operator wird dann durch den Fünf-Punkte Operator [7]

$$\Delta V \approx V_{\alpha(i)} + V_{\beta(i)} + V_{\gamma(i)} + V_{\delta(i)} - 4V_i / h^2, \quad (16)$$

mit der Spannung V_i im Mittelpunkt der i -ten Zelle in Bezug zu den Spannungen $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ und V_δ der Nachbarzellen angenähert (Bild 3). Wendet man (16) auf alle Zellen der Vernetzung an und berücksichtigt die Neumann'sche Randbedingung indem man

$V_i = V_{i+}$ setzt, wobei V_i die Spannung einer Randzelle und V_{i+} die der Nachbarzelle außerhalb der Struktur ist, so ergibt sich die diskrete Form des Eigenwertproblems:

$$\{[\Delta] - k_n^2 [\mathbf{I}]\} \mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Hierbei ist $[\Delta]$ die FD-Matrix und $[\mathbf{I}]$ die Einheitsmatrix. Die Eigenvektoren \mathbf{u}_n stellen die diskrete Lösung der Eigenfunktionen dar und k_n die zugehörigen Eigenwerte, die mit den Resonanzfrequenzen ω_n über Gl. (5) korrespondieren. Gl. (17) kann durch gängige Algorithmen für dünn besetzte Matrizen gelöst werden. Für das Netz gilt, dass die Zellenlänge h kleiner als ein Zehntel der kleinsten Wellenlänge sein soll:

$$h \leq \frac{2\pi}{10 \cdot k_N}. \quad (18)$$

Die statische Green'sche Funktion $G_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ wird über die Lösung der quasistatischen Poisson-Gleichung mit homogener Neumann'sche Randbedingung $\partial G_0^A / \partial n = 0$ bestimmt:

$$\nabla_S^2 G_0^A = \mu(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - 1/S). \quad (19)$$

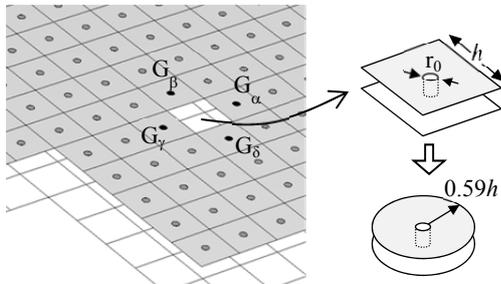
Wie in [18] gezeigt wird, beschreibt der Term $1/S$ den für ein quasistatisches 2D-Problem notwendigen Strompfad. Es kann gezeigt werden, dass $G_0^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ mittelwertfrei sein muss [18], was zu einer weiteren Bedingung für die Lösung von (19) führt. Die diskrete Darstellung von (19) setzt sich aus der Green'schen Matrix $[\mathbf{G}]$ und der Anregungsmatrix $[\mathbf{E}]$ zusammen:

$$[\Delta][\mathbf{G}] = [\mathbf{E}] \quad \text{mit} \quad E_{ij} = \frac{\mu}{h^2} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{N_S} \right). \quad (20)$$

Da die Lösung von (19) bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist, kann eine Zeile des Gleichungssystems (20) frei gewählt und somit genutzt werden um die Mittelwertfreiheit von $[\mathbf{G}]$ wie folgt zu implementieren:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= 1 \\ E_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad \text{für ein } i \text{ und } j = 1 \dots N_S. \quad (21)$$

Beachtet man Gl.(10), so entspricht die Koppelinduktivität L_{ij} zwischen zwei Ports mit Koordinaten \mathbf{r}_i bzw. \mathbf{r}_j dem jeweiligen Eintrag in der Matrix $[\mathbf{G}]$, d.h.: $L_{ij} = d \cdot G_{ij}$. Für die Eigeninduktivität eines runden Ports berechnet man zuerst die Eigeninduktivität der quadratischen Zelle mit den Maßen $h \times h$, indem die Integration (9) entlang der Kanten diskret ausgeführt wird (Bild 4). Dazu werden die Werte der Green'schen Funktion auf den Zellenkanten mithilfe der Werte auf den Nachbarzellen interpoliert:



$$L_{ii}^S \approx \frac{d}{8} (4G_{ii} + G_{\alpha(i)} + G_{\beta(i)} + G_{\gamma(i)} + G_{\delta(i)}) \quad (22)$$

Für den realen, runden Portquerschnitt mit Radius r_0 wird folgender analytischer Ansatz gewählt [19]:

$$L_{ii} \approx L_{ii}^S + L_{ii}^P, \quad (23)$$

wobei L_{ii}^P die Induktivität darstellt, die von der Energie innerhalb der quadratischen Portzelle abhängt, in der sich auch der runde Port befindet (Bild 4). L_{ii}^P wurde in [19] über den

äquivalenten Radius $r_{eq} \approx 0.59h$ für eine quadratische Zelle hergeleitet, womit sich ergibt:

$$L_{ii} = L_{ii}^S + \frac{\mu d}{2\pi} \ln(0.59h/r_0). \quad (24)$$

Befindet sich ein Port nicht im Zellenmittelpunkt, so kann seine Induktivität interpoliert werden. Der Vorteil des analytischen Portmodells besteht darin, dass für die modale und quasistatische Analyse die gleiche grobe Vernetzung genutzt werden kann, ohne das Netz in Portnähe verfeinern zu müssen. Zudem kann mit einer Vernetzung die Zahl und Anordnung der Ports beliebig variiert werden.

3.2 Validierungsbeispiel

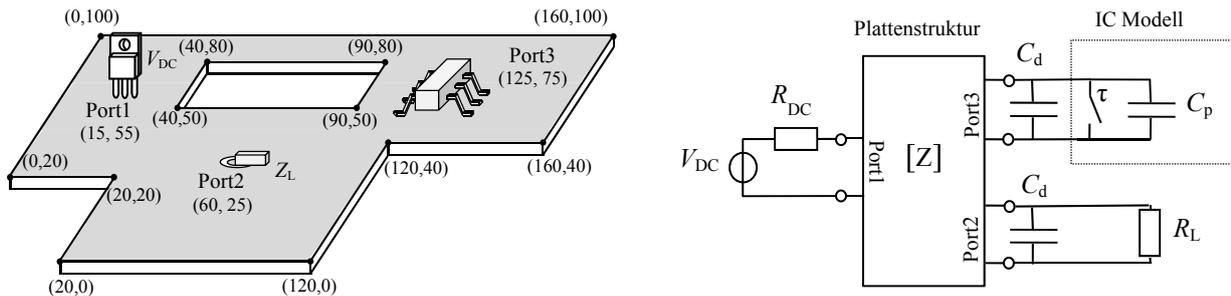


Bild 5: Transientes Simulationsbeispiel mit schnell schaltender Störquelle ($\tau = 1\text{ ns}$)

Als realitätsnahes Beispiel wird eine schnell schaltende Störquelle auf einer unregelmäßigen berandeten Plattengeometrie betrachtet (Bild 5). Das Dielektrikum hat die Dicke $d = 1.6\text{ mm}$, eine relative Permittivität von $\epsilon_r = 4$ und einen konstanten Verlustwinkel mit $\tan \delta = 0.01$. Um den Aufwand der 3D-Referenzsimulation zu minimieren werden die Platten als ideal leitfähig (PEC) angesetzt. Es werden drei Ports mit Radius $r_0 = 0.6\text{ mm}$ betrachtet. Die Struktur wird an Port 1 mit einer Gleichspannungsquelle mit $V_{DC} = 5\text{ V}$ und $R_{DC} = 0.1\ \Omega$ gespeist. Das schaltende Bauelement an Port 3 wird durch einen Schalter parallel zur Kapazität $C_p = 40\text{ pF}$ modelliert, was den Stromfluss während des Wechsels des logischen Zustandes einer CMOS-Ausgangsstufe nachbildet. Der Schalter wird bei $t = 131.25\text{ ns}$ für die Dauer $\tau = 1\text{ ns}$ geschlossen. Eine konservative Abschätzung der benötigten Bandbreite des Netzwerkmodells erfolgt mit $3/\tau = 3\text{ GHz}$ [17], was durch die Verwendung von 40 Moden mit $f_{max} = 4.2\text{ GHz}$ gut abgedeckt wird.

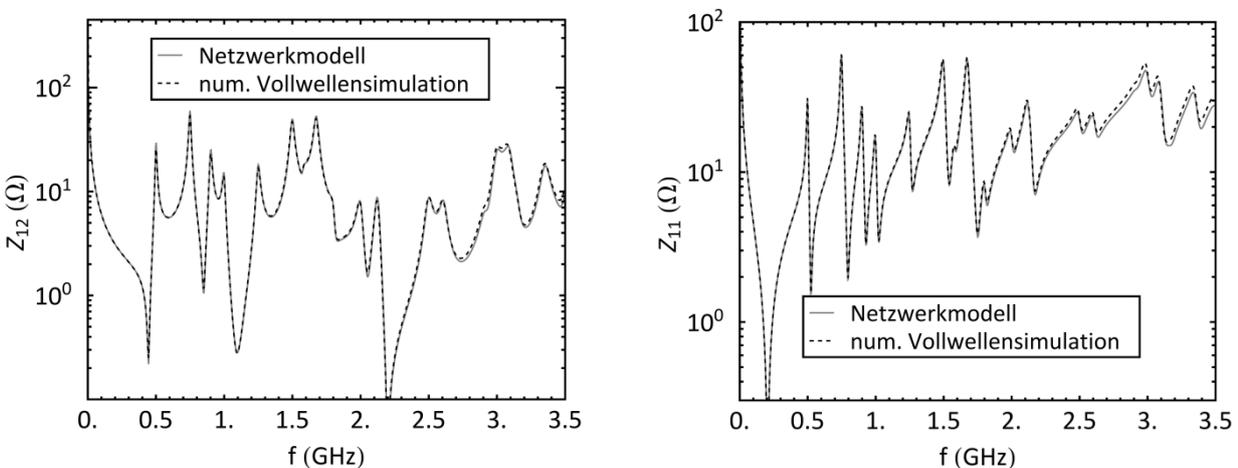


Bild 6: Transfer- (links) und Eingangsimpedanz (rechts) Z_{12} bzw. Z_{11}

Zur Einhaltung der Bedingung (18) wurde eine Vernetzung mit Kantenlänge $h = 2$ mm gewählt, was insgesamt $N_S = 3125$ Zellen ergibt. Die Störspannung wird an Port 2 über $R_L = 50 \Omega$ erfasst. Weiterhin sind wahlweise zwei Entstörkondensatoren $C_d = 10$ nF mit $ESL = 1$ nH und $ESR = 130$ m Ω zusätzlich parallel an Port 2 und 3 angeschlossen. Für eine Validierung im Frequenzbereich wurden die Impedanzparameter der unbestückten Platine mit kommerzieller Referenzsoftware [16] validiert. Wie man in Bild 6 erkennt, liegt eine nahezu ideale Übereinstimmung vor. Für die transiente Simulation wurde die Spannung an Port 2 (Bild 7) und Port 3 (Bild 8) betrachtet. Wie man erkennt, zeigt sich nach dem Spannungshub an Port 3 eine oszillierende Störspannung auf der Versorgungsebene infolge des Schaltvorgangs. Durch Hinzufügen der Entstörkondensatoren wird nicht nur die Resonanzfrequenz dieser Oszillation erhöht, es erhöht sich außerdem die Amplitude der Oszillation an Port 3, während sie an Port 2 wie erwartet abnimmt. Man sieht, dass die transiente Simulation des Netzwerkmodells sehr gut mit der Referenz übereinstimmt. Die Berechnung mit dem Netzwerkmodell dauert ca. 1 min, während die 3D-Vollwellensimulation 20.5 min benötigt (Rechenzeiten bezogen auf eine Intel XEON-Plattform, 2.4-GHz CPU, 8-GB RAM).

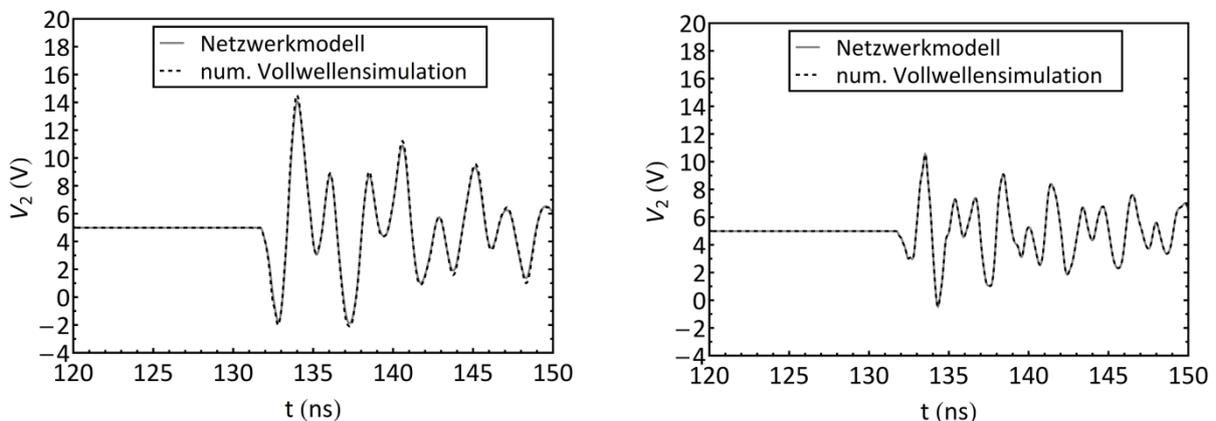


Bild 7: Spannungsverlauf an Port 2 ohne (links) und mit (rechts) Entstörkondensatoren

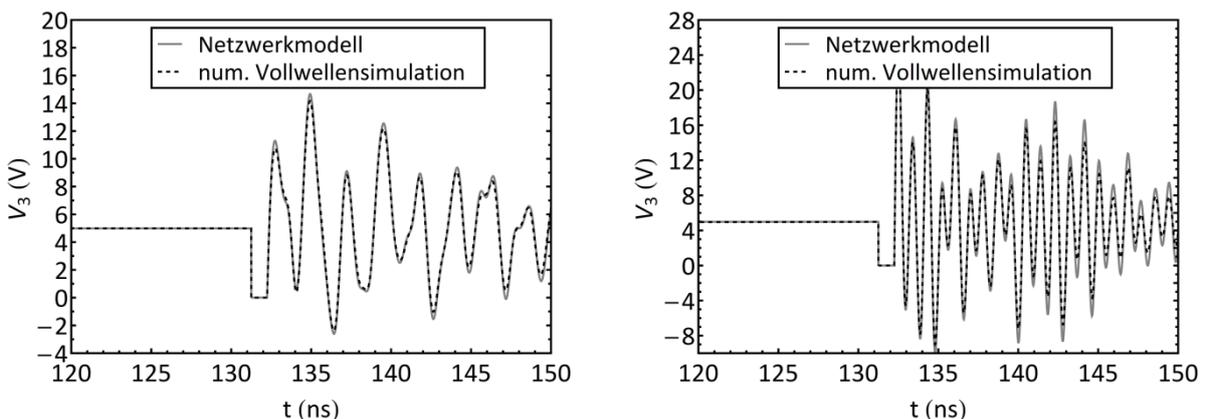


Bild 8: Spannungsverlauf an Port 3 ohne (links) und mit (rechts) Entstörkondensatoren

4. Zusammenfassung

Ein neuartiges, effizientes und stabiles Netzwerkmodell zur Simulation von Parallelplattenstrukturen beliebiger Geometrie wurde entwickelt. Es basiert auf einer neuen, schnell konvergierenden Lösung für die Impedanzparameter. Das Netzwerk beinhaltet die Plattenkapazität, die statischen Eigen- und Gegeninduktivitäten sowie modale Schwingkreise, deren Anzahl über die erforderliche Frequenzbandbreite

abgeschätzt werden kann. Zur Berechnung der Netzwerkelemente dient ein neuartiger numerischer Finite-Differenzen-Ansatz, der mit einer homogenen Vernetzung auskommt, die lediglich an die kürzeste zu betrachtende Wellenlänge anzupassen ist. Für eine gegebene Plattengeometrie kann damit eine beliebige Anzahl und Anordnung der Ports ohne Neuvernetzung analysiert werden. Zeit- und Frequenzbereichsrechnungen können mit herkömmlicher Schaltungssimulation bei beliebiger Beschaltung durchgeführt werden (linear/nicht-linear, aktiv/passiv). Die Validierung des vorgestellten Netzwerkmodells mittels 3D-Vollwellensimulation zeigt eine sehr gute Übereinstimmung, bei erheblich geringerem Modellierungs- und Rechenaufwand. Damit eignet sich der entwickelte Netzwerkmodell besonders gut für die praktische Anwendung, wie z.B. zur Optimierung von Spannungsversorgungslagen auf mehrlagigen Leiterplatten.

5. Literatur

- [1] M. Leone, "The radiation of a rectangular power-bus structure at multiple cavity-mode resonances," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 45, no. 3, pp. 486–492, Aug. 2003.
- [2] M. Friedrich, M. Leone, "Inductive network model for the radiation analysis of electrically small parallel-plate structures," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 43, no. 4, pp. 1015–1024, Nov. 2011.
- [3] J. Kim, L. Ren, and J. Fan, "Physics-based inductance extraction for via arrays in parallel planes for power distribution network design," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 58, no. 9, pp. 2434–2447, Sep. 2010.
- [4] J. Fan, J. L. Drewniak, H. Shi, and J. L. Knighten, "DC power-bus modeling and design with a mixed-potential integral-equation formulation and circuit extraction," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 43, no. 4, pp. 426–436, Nov. 2001.
- [5] Ye Xiaoning, M. Y. Koledintseva, Li Min, and J. L. Drewniak, "DC powerbus design using FDTD modeling with dispersive media and surface mount technology components," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 43, no. 4, pp. 579–587, Nov. 2001.
- [6] M. Stumpf and M. Leone, "Efficient 2-D integral equation approach for the analysis of power bus structures with arbitrary shape," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 51, no. 1, pp. 38–45, Feb. 2009.
- [7] M. Swaminathan, C. Daehyun, S. Grivet-Talocia, K. Bharath, V. Laddha, and X. Jianyong, "Designing and modeling for power integrity," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 52, no. 2, pp. 288–310, May 2010.
- [8] J. C. Parker, "Via coupling between parallel rectangular plates," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 39, no. 1, pp. 17–23, Feb. 1997.
- [9] T. Okoshi, *Planar Circuits for Microwaves and Lightwaves*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 1985.
- [10] A. Benalla and K. C. Gupta, "Faster computation of Z-matrices for rectangular segments in planar microstrip circuits," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-34, no. 6, pp. 733–736, Jun. 1986.
- [11] C. Wang, J. Mao, G. Selli, S. Luan, L. Zhang, J. Fan, D. J. Pommerenke, R. E. DuBroof, and J. L. Drewniak, "An efficient approach for power delivery network design with closed-form expressions for parasitic interconnect inductances," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 29, no. 2, pp. 320–334, May 2006.
- [12] M. Leone, M. Friedrich, A. Mantzke: Efficient Broadband Circuit-Modeling Approach for Parallel-Plane Structures of Arbitrary Shape. In: *Electromagnetic Compatibility, IEEE Trans.*, Vol. PP (2013), Nr. 99, S. 1–8
- [13] J. Trinkle and A. Cantoni, "Impedance expressions for unloaded and loaded power ground planes," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 50, no. 2, pp. 390–398, May 2008.
- [14] G. Selli, C. Schuster, Y. H. Kwark, M. B. Ritter, and J. L. Drewniak, "Developing a physical via model for vias—Part II: Coupled and ground return vias," presented at the Proc. DesignCon, Santa Clara, CA, Jan. 29–Feb. 1 2007.
- [15] C. Schuster, Y. Kwark, G. Selli, and P. Muthana, "Developing a 'physical' model for vias," presented at the Proc. DesignCon, Santa Clara, CA, Feb. 6–9, 2006.
- [16] Microwave Studio, Computer Simulation Technology (CST). (2011). [Online]. Available: www.cst.de
- [17] C. R. Paul, *Introduction to Electromagnetic Compatibility*, 2nd ed. New York: Wiley, 2006.
- [18] M. Friedrich and M. Leone, "Quasi-static inductance of vertical interconnections in parallel-plane structures," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 54, no. 6, pp. 1302–1305, Dec. 2012.
- [19] M. Friedrich, A. Mantzke, and M. Leone, "Efficient finite-difference method with analytical port model for the analysis of power-plane applications," presented at the EMC Europe 2012 Intern. Symp. Electromagn. Compat., Rome, Italy, Sep. 2012.