

Anwendung von Basisfunktionen höherer Ordnung auf gekrümmten Netzelementen zur beschleunigten Analyse von EMV Problemen mit der Momentenmethode

Dr. Ulrich Jakobus, Dr. Johann van Tonder
EM Software & Systems – S.A. (Pty) Ltd, Stellenbosch, Südafrika

1. Einleitung

Dieser Beitrag befasst sich mit einer Erweiterung des kommerziellen Feldberechnungsprogramms FEKO [1] wo im Rahmen der Momentenmethode (MoM) und der beschleunigten Version der schnellen Multipolmethode (MLFMM = *multilevel fast multipole method*) Basisfunktionen höherer Ordnung auf gekrümmten Oberflächenelementen zum Einsatz kommen. Konkret werden hierarchische Basisfunktionen höherer Ordnung (HOBFs = *higher order basis functions*) gemäß [2,3] eingeführt, die die traditionellen RWG (Rao-Wilton-Glisson) Basisfunktionen nach [4] ergänzen. Neben einer genaueren Modellierung ist das primäre Ziel die Einsparung von Rechenzeit und Speicherplatz.

2. Hierarchische Basisfunktionen höherer Ordnung (HOBFs)

Eine detaillierte Übersicht von HOBFs wird durch Notaros in [5] gegeben. Der Einsatz von HOBFs gestattet die Verwendung größerer Elemente bei der Vernetzung (dreieckförmige Flächenelemente für Oberflächen) um die Strom- und Ladungsverteilung mit gleicher Genauigkeit nachzubilden. Diese größeren Netze resultieren in weniger Dreiecke und insgesamt auch weniger Unbekannte, was sich direkt in der Größe der MoM Matrix widerspiegelt. Divergenz-konforme HOBFs [6] können aus dem Vektorprodukt des Normalenvektors mit den rotations-konformen HOBFs [3] hergeleitet werden. Wir verwenden in FEKO hierarchische HOBFs bis zur Ordnung 3,5. Kanten- und flächenbasierte HOBFs auf dreieckförmigen Flächenelementen sind in den Bildern 1 und 2 dargestellt. Kantenbasierte Basisfunktionen der Ordnung 0,5 (Bild 1 oben links) entsprechen dabei den traditionellen RWG Basisfunktionen in [4].

Die Tabelle 1 zeigt eine Übersicht wie die Ordnung der Basisfunktionen auf einem Dreieck mit der Zahl der daraus resultierenden Unbekannten pro Dreieck verknüpft ist. Es wird außerdem die empfohlene Vernetzungsgröße (relativ zur Wellenlänge λ) sowie die Zahl der internen Punkte pro Dreiecke bei der numerischen Integration angegeben (die beiden letztgenannten werden in FEKO automatisch gewählt).

Tabelle 1: Parameter für Basisfunktionen höherer Ordnung.

Ordnung	Unbekannte pro Dreieck	Kantenlänge für Vernetzung	Integrationspunkte pro Dreieck
0,5	3	0,1 λ	6
1,5	8	0,3 λ	12
2,5	15	0,5 λ	16
3,5	24	0,8 λ	25

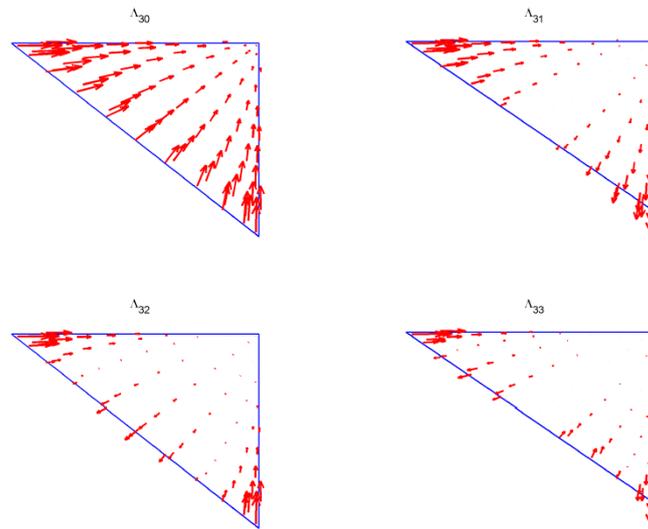


Bild 1: Kantenbasierte Basisfunktionen der Ordnung 0,5 (oben links), 1,5 (oben rechts), 2,5 (unten links) und 3,5 (unten rechts).

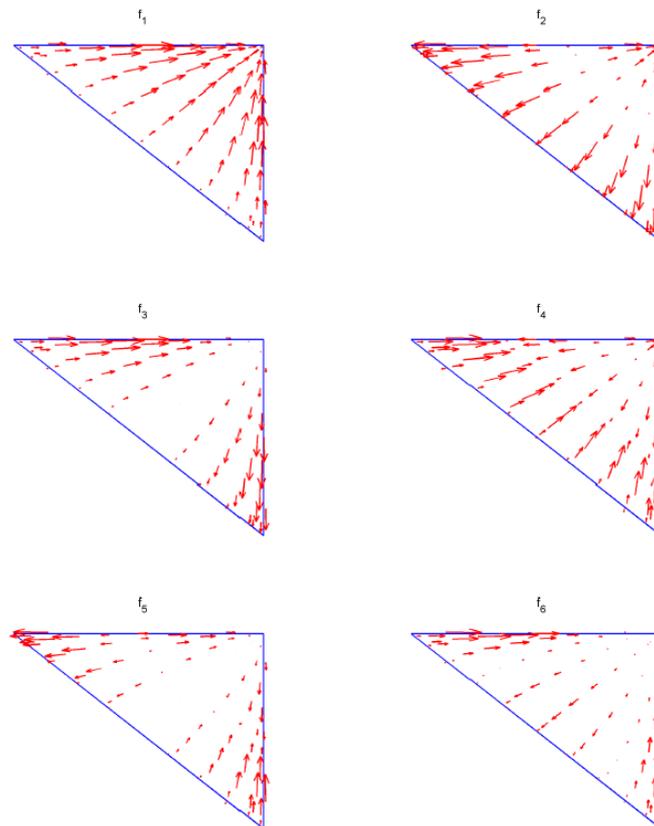


Bild 2: Flächenbasierte Basisfunktionen höherer Ordnung bis zur Ordnung 3,5.

Hierarchische HOBFs erlauben die Verwendung einer unterschiedlichen Ordnung in den verschiedenen Dreiecken des gleichen Modells, was sehr vorteilhaft ist in Bezug auf lokale Fehlerabschätzungsalgorithmen mit der dann daran gekoppelten lokalen Erhöhung der Ordnung. Ein solches Vorgehen ist mit interpolationsbasierten HOBFs [2] nicht möglich.

3. Krummlinige dreieckförmige Flächenelemente

FEKO verwendet krummlinige Flächenelemente zweiter Ordnung, wo Dreiecke gemäß Bild 3 durch 6 Punkte (3 Eckpunkte und 3 Mittelpunkte der Kanten) beschrieben werden.

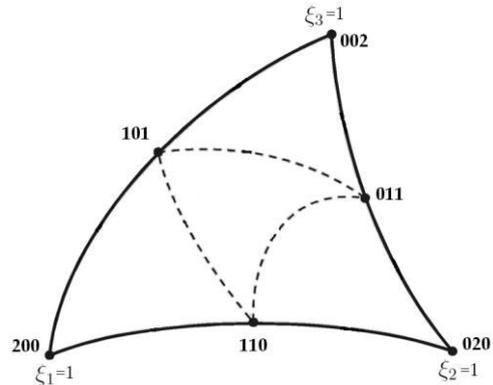
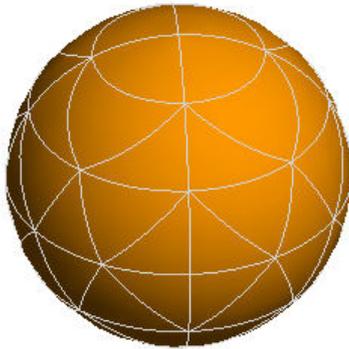


Bild 3: Anwendung krummliniger dreieckförmiger Flächenelemente zweiter Ordnung.

Die Behandlung der singulären Integrale im Rahmen der MoM erfordert besondere Sorgfalt, vgl. Bild 4. Erst muss über einen 2-D Newton-Raphson Algorithmus für einen Aufpunkt \mathbf{r} der am nächsten gelegene Punkt \mathbf{P} auf der Oberfläche des gekrümmten Dreiecks gefunden werden. Falls \mathbf{P} im Rahmen der Suche außerhalb des Dreiecks zu liegen kommt muss er auf die Kante bzw. in einen Eckpunkt verschoben werden. In diesem Punkt \mathbf{P} wird dann ein tangential liegendes ebenes Dreieck definiert, das gemäß Bild 5 die Grundlage zur Extraktion der Singularitäten bildet, vgl. auch [7-9].

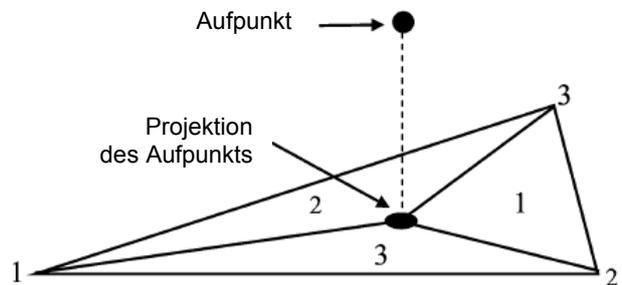
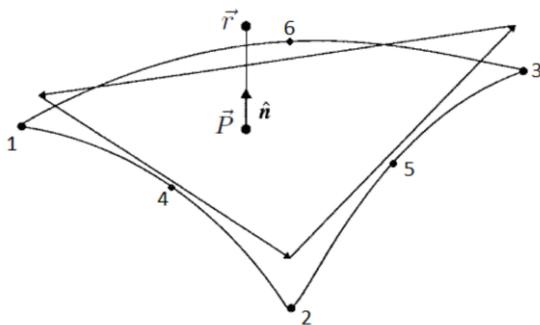
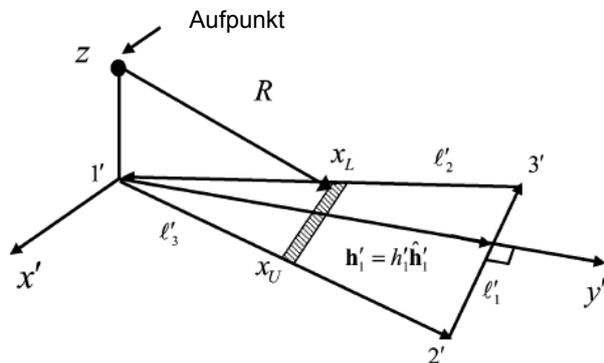


Bild 4: Projektion eines Aufpunkts \mathbf{r} auf das gekrümmte Dreieck und Definition eines planaren tangentialen Elements.



$$\begin{aligned}
 I_k &= \int_0^h \int_{x_L(y)}^{x_U(y)} f(\mathbf{r}') g(R) \frac{1}{R^n} dx dy \\
 &= \int_0^h \int_{y \cot \Phi_L}^{y \cot \Phi_U} f(\mathbf{r}') g(R) \frac{1}{R^n} dx dy \\
 &= \int_{v_L}^{v_U} \int_{u_L}^{u_U} f(\mathbf{r}') g(R) \frac{J(u, v)}{R^n} du dv
 \end{aligned}$$

Bild 5: Extraktion der singulären Terme auf dem ebenen tangentialen Dreieck.

4. Beispiele zur Anwendung von HOBFs im Rahmen der MoM

4.1 Validierungsbeispiel für eine verlustbehaftete dielektrische Kugel

Ein erstes Validierungsbeispiel zur Anwendung von HOBFs im Rahmen der MoM ist in Bild 6 zu sehen. Dort wird das elektrische Nahfeld innerhalb einer verlustbehafteten dielektrischen Kugel (Radius 9 cm, komplexe Dielektrizitätszahl $\epsilon_r = 44 - j19$) unter Anregung einer einfallenden ebenen Welle bei 900 MHz bestimmt. Eine analytische Lösung basierend auf den Mie Formeln dient als Referenz. Der relative Fehler bezüglich dieser Referenzlösung wird für die traditionelle RWG (ebene Dreiecke) und die neue HOBFs Formulierung (krummlinige Dreiecke) verglichen. Man erkennt, dass die HOBFs Formulierung gemittelt etwa eine Zehnerpotenz genauere Ergebnisse liefert.

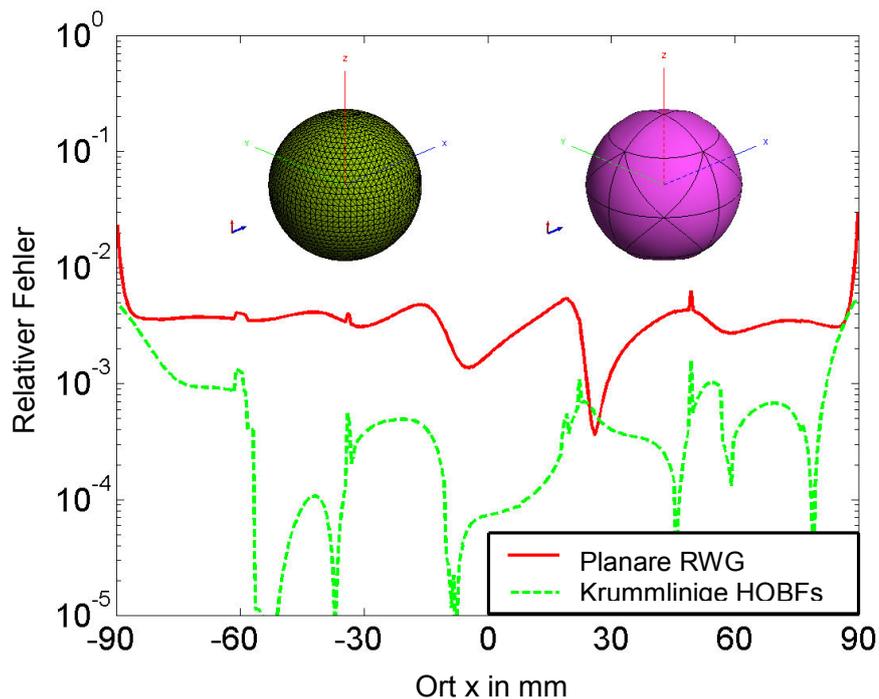


Bild 6: Relativer Fehler (bezogen auf die exakte analytische Lösung) der RWG und der HOBFs Lösungen für das elektrische Nahfeld innerhalb einer verlustbehafteten dielektrischen Kugel.

4.2 Beispiel aus dem Automobilbereich bei 433 MHz

Ein Beispiel aus der EMV Praxis ist die Berechnung der Nahfeldverteilung in einem Kfz bei 433 MHz. Bild 7 vergleicht hierzu die Ergebnisse bei der Verwendung der traditionellen RWG Basisfunktionen auf einem feinen Netz mit HOBFs auf krummlinigen Dreiecken. Eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse ist erkennbar.

Für den RWG Ansatz besteht das Netz aus 11 143 Dreiecken, die zu 16 520 Unbekannten führen. Die Rechenzeit beträgt 0,2 Stunden und der Speicherplatzbedarf ist 2,04 GByte.

Beim Einsatz von HOBFs der Ordnung 3,5 sind lediglich 753 krummlinige Dreiecke bei der Vernetzung erforderlich, die zu 9 153 Unbekannten führen. Dies hat einen um den Faktor 3,3 reduzierten Speicherplatz von 0,63 GByte zur Folge. Allerdings ist hier bei diesem relativ kleinen Beispiel die Rechenzeit mit 0,4 Stunden doppelt so lange. Dies liegt

an der aufwändigeren Berechnung der Matrixelemente für HOBFs mit gekrümmten Flächenelementen. Auch steigt gemäß Tabelle 1 die Zahl der pro Dreieck zu verwendenden Integrationspunkte mit der Ordnung bzw. der Dreiecksgröße an. Für größere Beispiele wird der Vorteil von HOBFs gegenüber RWG auch in der Rechenzeit sichtbar, wenn die Lösung des linearen Gleichungssystems (skaliert kubisch mit der Zahl der Unbekannten) gegenüber der Zeit zur Aufstellung der Matrixelemente (skaliert quadratisch mit der Zahl der Unbekannten) dominiert.

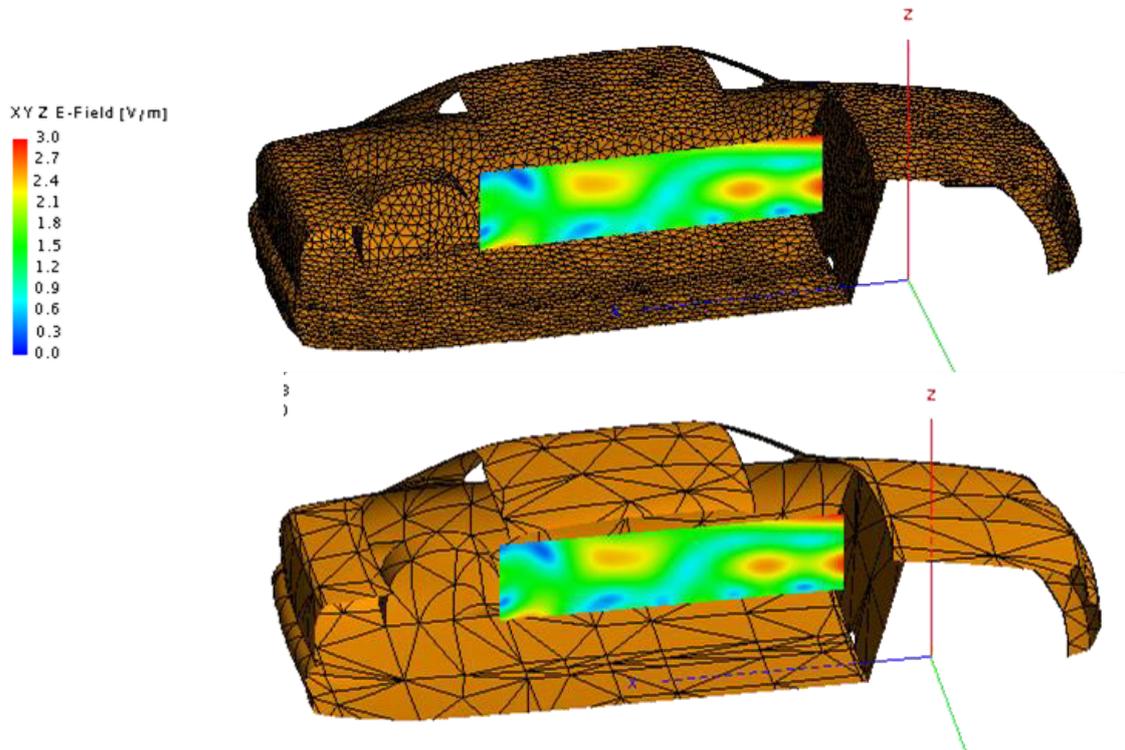


Bild 7: Nahfeldverteilung in einem Kfz Modell bei 433 MHz berechnet mit der MoM: Traditionelle RWG Formulierung (oben) und Verwendung von HOBFs der Ordnung 3,5 auf gekrümmten Flächenelementen (unten).

5. Anwendung von HOBFs im Rahmen der schnellen Multipolmethode

5.1 Beschreibung der schnellen Multipolmethode (MLFMM)

Die mehrstufige schnelle Multipolmethode (MLFMM) ist eine Beschleunigung der MoM [10], wo Basisfunktionen in Boxen gruppiert werden und die MoM Matrix nie explizit voll berechnet wird. Die Kopplung der diversen Basis- und Gewichtungsfunktionen wird stattdessen über die Phasen der Aggregation, Translation und Disaggregation ermittelt, vgl. graphische Darstellung in Bild 8.

Ähnlich zur MoM wurde auch hier die Erweiterung auf Basisfunktionen höherer Ordnung in Verbindung mit krummlinigen Flächenelementen durchgeführt. Es ergeben sich allerdings Abhängigkeiten zwischen Ordnung und zu wählender Boxgröße, die im nachstehenden Beispiel konkret erläutert werden.

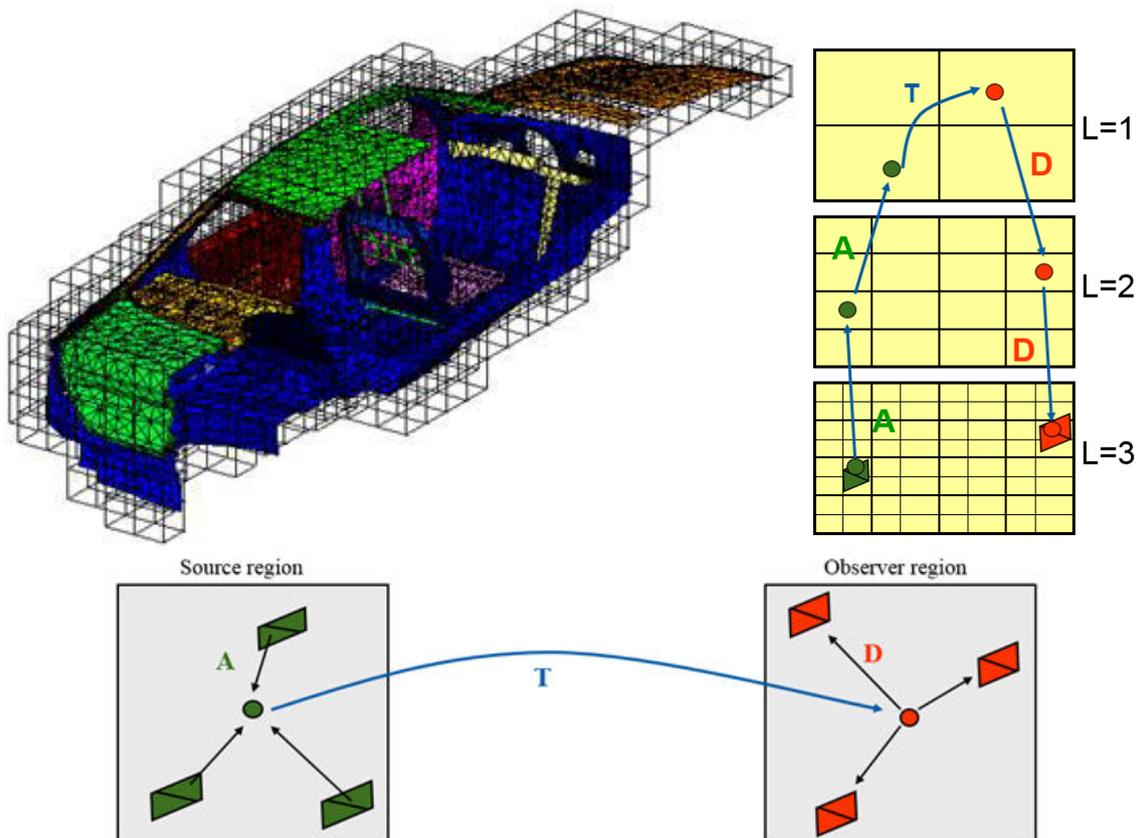


Bild 8: Illustration der Gruppierung in Boxen (oben links) sowie hierarchische mehrstufige Aggregation (A), Translation (T) und Disaggregation (D) bei der schnellen Multipolmethode MLFMM.

5.2 Beispiel aus dem Automobilbereich bei 1 GHz

Das gleiche Beispiel, das im Abschnitt 4.2 mit der MoM bei 433 MHz berechnet wurde, soll hier wieder aufgegriffen werden, allerdings bei einer Frequenz von 1 GHz. In Tabelle 2 werden verschiedene Ordnungen von Basisfunktionen mit den resultierenden MLFMM Boxgrößen verglichen (da mit zunehmender Ordnung die Dreiecke im Netz größer werden muss die Boxgröße entsprechend angepasst werden). Allerdings wird dadurch die dichtbesetzte Nahfeldmatrix der MLFMM größer was zu einem Anstieg des Speicherplatzbedarfs führt. Für dieses Beispiel ist eine Ordnung von 1,5 der beste Kompromiss (bei der MoM dagegen ist es besser die Ordnung so hoch wie möglich mit einer entsprechend groben Vernetzung zu wählen).

Tabelle 2: Zusammenhang der Ordnung der HOBFs und der optimalen Boxgröße für die MLFMM und die daraus resultierende Größe der Nahfeldmatrix sowie der gesamte Speicherbedarf für das Kfz Beispiel bei 1 GHz.

	RWG	HOBFs 1,5	HOBFs 2,5	HOBFs 3,5
MLFMM Boxgröße	$0,23 \lambda$	$0,4 \lambda$	$0,6 \lambda$	$0,9 \lambda$
Nahfeldmatrix in Prozent der Gesamtmatrix	0,29 %	0,87 %	1,92 %	3,99 %
Speicherbedarf [MByte]	664	135	348	613

Analog zu Bild 7 zeigt Bild 9 die Nahfeldverteilung im Inneren des Kfz bei Anwendung der MLFMM für 1 GHz. Verglichen werden RWG und HOBFs mit Ordnung 1,5. Für die RWG Formulierung werden 94 871 ebene Dreiecke verwendet, die zu 141 730 Unbekannten führen. Für HOBFs ergeben sich 7 419 krummlinige Dreiecke und 36 770 Unbekannten (Reduktion um Faktor 3,85, was zu einer Speicherplatzreduzierung um den Faktor 5 führt – für die MLFMM nicht quadratisch wie bei der MoM).

Der Anstieg der Größe der Nahfeldmatrix von 0,29% (RWG) auf 0,8% (HOBFs der Ordnung 1,5) gemäß Tabelle 2 kann möglicherweise durch sphärische Modenentwicklungen wie in [11,12] vorgeschlagen eingedämmt werden, was Gegenstand zukünftiger Forschungen ist.

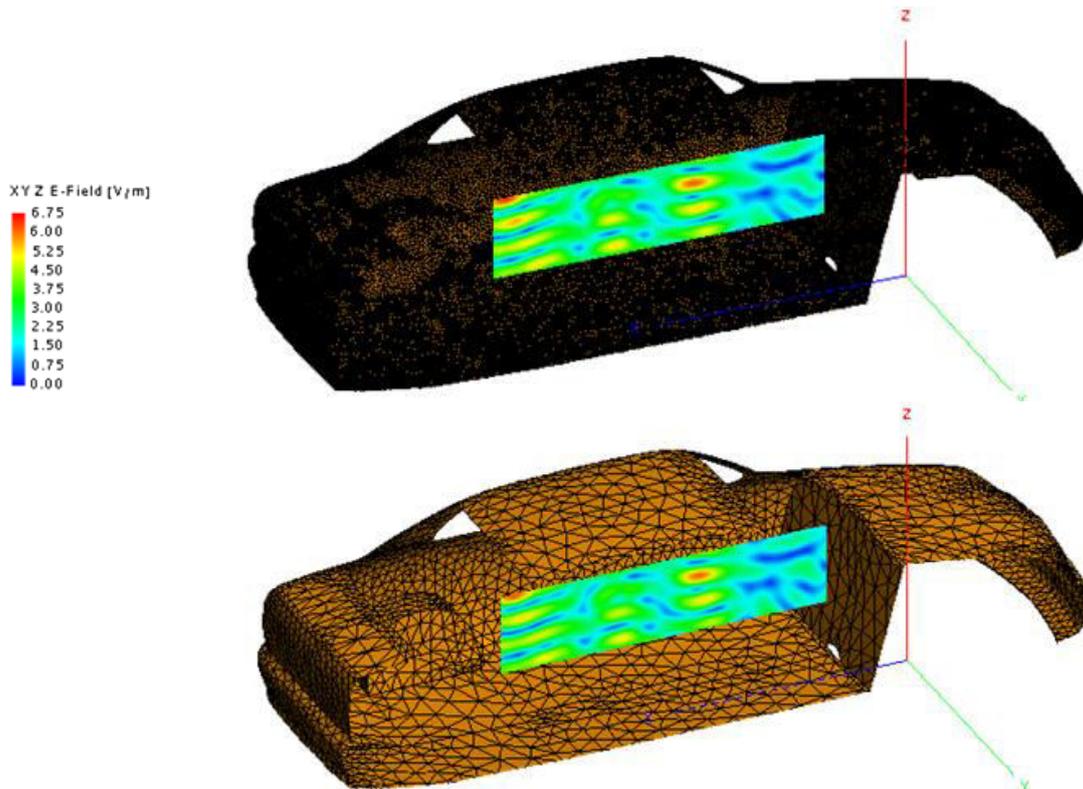


Bild 9: Nahfeldverteilung in einem Kfz Modell bei 1 GHz berechnet mit der MLFMM: Traditionelle RWG Formulierung (oben) und Verwendung von HOBFs der Ordnung 1,5 auf gekrümmten Flächenelementen (unten).

6. Zusammenfassung

Im Rahmen dieses Beitrags wurden Basisfunktionen höherer Ordnung für die MoM und die MLFMM auf krummlinigen dreieckförmigen Flächenelementen zweiter Ordnung im Feldberechnungsprogramm FEKO eingeführt. Die Extraktion der Singularitäten wird auf ebenen Dreiecken tangential zu den krummlinigen Flächenelementen vollzogen. Praxisbezogene EMV Beispiele haben die Genauigkeit dieses Verfahrens sowie das daraus resultierende Einsparpotential an Netzelementen und Unbekannten gezeigt, was direkt mit dem Speicherplatzbedarf und der Rechenzeit in Verbindung steht.

7. Literaturverzeichnis

- [1] FEKO (www.feko.info), EM Software & Systems - S.A. (Pty) Ltd, PO Box 1354, Stellenbosch, 7599, Südafrika.
- [2] Roberto D. Graglia, Donald R. Wilton and Andrew F. Peterson, "Higher Order Interpolatory Vector Bases for Computational Electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-45, Nr. 3, S. 329-342, Mar. 1997.
- [3] Roberto D. Graglia, Andrew F. Peterson and Francesco P. Andriulli, "Curl-Conforming Hierarchical Vector Bases for Triangles and Tetrahedra," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-59, Nr. 3, S. 950-959, Mar. 2011.
- [4] Sadasiva M. Rao, Donald R. Wilton and Allen Glisson, "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-30, Nr. 3, S. 409-418, May 1982.
- [5] Branislav M. Notaros, "Higher Order Frequency-Domain Computational Electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-56, Nr. 8, S. 2251-2276, Aug. 2008.
- [6] Li Ping Zha, Yun Qin Hu and Ting Su, "Efficient Surface Integral Equation Using Hierarchical Vector Bases for Complex EM Scattering Problems," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-60, Nr. 2, S. 952-957, Feb. 2012.
- [7] Ismatullah and Thomas F. Eibert, "Adaptive Singularity Cancellation for Efficient Treatment of Near-Singular and Near-Hypersingular Integrals in Surface Integral Equation Formulations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-56, Nr. 1, S. 950-959, Jan. 2008.
- [8] Michael A. Khayat and Donald R. Wilton, "Numerical Evaluation of Singular and Near-Singular Potential Integrals," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. AP-53, Nr. 10, S. 3180-3190, Oct. 2005.
- [9] Michael A. Khayat, Donald R. Wilton and Patrick W. Fink, "An Improved Transformation and Optimized Sampling Scheme for the Numerical Evaluation of Singular and Near-Singular Potentials," *IEEE Transactions Antennas and Wireless Propagation Letters*, Vol. 7, S. 377-380, Nov. 2008.
- [10] U. Jakobus und J. van Tonder, "Erweiterung der Schnellen Multipolmethode auf Dielektrika und Konvergenzbeschleunigung durch andere Integralgleichungsansätze," in *Elektromagnetische Verträglichkeit, Tagungsband EMV 2006, Düsseldorf*, VDE-Verlag, März 2006.
- [11] K. Donepudi, J. Song, J.-M. Jin, G. Kang and W. Chew, "A novel implementation of multilevel fast multipole algorithm for higher order Galerkins method", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-48, no. 8, S. 1192–1197, August 2000.
- [12] Ismatullah and Thomas F. Eibert, "Surface Integral Equation Solutions by Hierarchical Vector Basis Functions and Spherical Harmonics Based Multilevel Fast Multipole Method", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-57, no. 7, S. 2084–2093, July 2009.