

Anwendung der Leitungssupertheorie auf verdrehte Leitungen

Dr.-Ing. Mathias Magdowski, OvG-Universität Magdeburg, Lehrstuhl für EMV
 Prof. Dr.-Ing. Ralf Vick, OvG-Universität Magdeburg, Lehrstuhl für EMV

1 Einleitung

Die sogenannte Leitungssupertheorie (engl. Transmission-Line Supertheory, TLST oder Full-Wave Transmission Line Theory, FWTLT) ist eine Verallgemeinerung der klassischen Leitungstheorie für ungleichförmige Leitungen [2], mit der viele Einschränkungen und Vereinfachungen der klassischen Leitungstheorie aufgehoben werden können. Dazu zählen die exakte Berücksichtigung von Ungleichförmigkeiten und die Anwendbarkeit über einen weiteren Frequenzbereich. Da sich auch die Einkopplung externer Felder durch entsprechende Quellterme berücksichtigen lässt, eignet sich die TLST als alternatives Analysewerkzeug für viele praktische EMV-Probleme. Im Rahmen des Beitrags wird die TLST auf eine verdrehte Doppelleitung angewendet, die in vielen Bereichen der Signalübertragung, der Kommunikations- und der Informationstechnik Anwendung findet.

2 Beschreibung der verdrehten Doppelleitung

Die Geometrie der betrachteten Leitung ist in Abbildung 1 dargestellt. Zur Modellierung der Verdrehung wird wie in [1, 4] eine bifilare Helix benutzt. Die Leitung zeigt in x -Richtung. Der Anfang der Leitung befindet sich bei $x = 0$, das Ende bei $x = l$. Der Leiterdurchmesser wird mit $d_0 = 2r_0$, die Schlaglänge der Verdrehung mit P bezeichnet. Zur längenunabhängigen Beschreibung der Verdrehung wird der Verdrehungswinkel δ gemäß $\tan \delta = \frac{P}{2\pi h}$ eingeführt, wobei h den halben Abstand zwischen dem Hin- und Rückleiter kennzeichnet. Der positionabhängige Verdrehwinkel $\psi = \frac{2\pi x}{P}$ steigt linear von $\psi_0 = 0$ am Anfang der Leitung auf $\psi_l = \frac{2\pi l}{P}$ am Ende der Leitung an. Ebenfalls dargestellt ist das externe Feld, angenähert durch eine ebene Welle mit der elektrischen und magnetischen Feldstärke \mathbf{E} und \mathbf{H} und dem Wellenvektor \mathbf{k} .

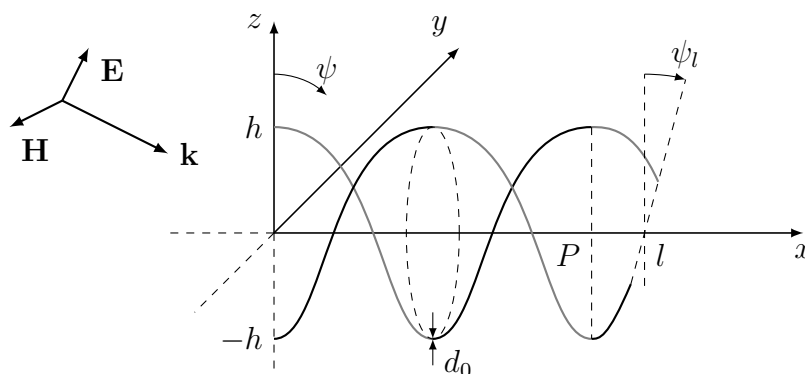


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Geometrie der verdrehten Doppelleitung

Gemäß Abbildung 1 ergeben sich für die Koordinaten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 des Hin- und Rückleiters in Abhängigkeit des Verdrehwinkels ψ die folgenden Ausdrücke.

$$\mathbf{r}_1(\psi) = \begin{pmatrix} r_{1x}(\psi) \\ r_{1y}(\psi) \\ r_{1z}(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P}{2\pi}\psi \\ h \sin \psi \\ h \cos \psi \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_2(\psi) = \begin{pmatrix} r_{2x}(\psi) \\ r_{2y}(\psi) \\ r_{2z}(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P}{2\pi}\psi \\ -h \sin \psi \\ -h \cos \psi \end{pmatrix} \quad (1)$$

Für die weitere Betrachtung ist aber eine längenabhängige Angabe von \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 sinnvoll. Dazu wird die Kurvenlänge L des Hin- und Rückleiters berechnet.

$$L = \int_{\psi_0}^{\psi_l} \sqrt{\left(\frac{dr_{1x}(\psi)}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dr_{1y}(\psi)}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dr_{1z}(\psi)}{d\psi}\right)^2} d\psi = (\psi_l - \psi_0) \underbrace{\sqrt{\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 + h^2}}_{\ell_\psi} \quad (2)$$

Somit kann der Verdrehwinkel $\psi = \frac{\ell}{\ell_\psi}$ durch die dazugehörige Längenposition ℓ auf dem Hin- und Rückleiter ausgedrückt werden. Die Größe ℓ_ψ dient zur Verkürzung der Schreibweise. Aus der Betrachtung der Kurvenlänge ergeben sich auch die Ausdrücke $\sin \delta = \frac{h}{L}$ und $\cos \delta = \frac{P}{L}$ für den Verdrillungswinkel δ . Die Koordinaten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 des Hin- und Rückleiters können nun in Abhängigkeit der Längenposition ℓ formuliert werden. Mittels $\mathbf{e}_{t1}(\ell) = \frac{d\mathbf{r}_1(\ell)}{d\ell}$ und $\mathbf{e}_{t2}(\ell) = \frac{d\mathbf{r}_2(\ell)}{d\ell}$ erhält man die tangentialen Einheitsvektoren, wie sie bereits in [4, Gleichung (6)] angegeben sind.

3 Formulierung der Leitungsgleichungen

Das gesamte elektrische Feld \mathbf{E} an jedem Punkt \mathbf{r} setzt sich aus drei Anteilen zusammen.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) - j\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

Dabei bezeichnet φ das elektrische Skalarpotential, \mathbf{A} das magnetische Vektorpotential, ω die Kreisfrequenz und \mathbf{E}_{ext} die externe elektrische Feldstärke. Bei der verdrillten Leitung befinden sich die Ladungsdichten q'_1 und q'_2 sowie die Ströme I_1 und I_2 nur innerhalb der Leiter, so dass die Potentiale durch Linienintegrale ausgedrückt werden können.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1(\ell')) \cdot q'_1(\ell') + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2(\ell')) \cdot q'_2(\ell') d\ell' \quad (4)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int_0^L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1(\ell')) \cdot \mathbf{e}_{t1}(\ell') \cdot I_1(\ell') + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2(\ell')) \cdot \mathbf{e}_{t2}(\ell') \cdot I_2(\ell') d\ell' \quad (5)$$

Hierbei ist μ die Permeabilität und ε die Permittivität im Freiraum. Die Greensche Funktion verknüpft den Beobachtungspunkt \mathbf{r} mit dem Quellpunkt \mathbf{r}_q .

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|} \approx \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}_q|} \quad (6)$$

Die statische Näherung gilt für kleine Wellenzahlen $k = \frac{\omega}{c}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\frac{dI}{d\ell} = -j\omega q'$ bzw. $q' = -\frac{1}{j\omega} \frac{dI}{d\ell}$, können die Ladungen in Gleichung (4) durch die örtlichen Ableitungen der Ströme ersetzt werden.

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \int_0^L G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1(\ell')) \cdot \frac{dI_1}{d\ell}(\ell') + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2(\ell')) \cdot \frac{dI_2}{d\ell}(\ell') d\ell' \quad (7)$$

Da nur die Ströme an den Leitungsenden berechnet werden sollen, reicht eine Betrachtung des Gegentaktmodes aus. Mit $I_1 = -I_2 = I$ vereinfachen sich Gleichung (7) und (5).

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \int_0^L [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1(\ell')) - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2(\ell'))] \frac{dI}{d\ell}(\ell') d\ell' \quad (8)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int_0^L [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1(\ell')) \cdot \mathbf{e}_{t1}(\ell') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2(\ell')) \cdot \mathbf{e}_{t2}(\ell')] \cdot I(\ell') d\ell' \quad (9)$$

Die gesamte elektrische Feldstärke aus Gleichung (3) kann nun mit dem tangentialen Einheitsvektor \mathbf{e}_{t1} oder \mathbf{e}_{t2} multipliziert werden. Die erhaltene tangentielle elektrische Gesamtfeldstärke verschwindet auf der Oberfläche \mathbf{r}_{s1} des Hinleiters.

$$\mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_{s1}(\ell)) = -\mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \text{grad} \varphi(\mathbf{r}_{s1}(\ell)) - j\omega \mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_{s1}(\ell)) + \mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_{s1}(\ell)) = 0 \quad (10)$$

Mit $\mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \text{grad} \varphi(\mathbf{r}_{s1}(\ell)) = \frac{d\varphi(\mathbf{r}_{s1}(\ell))}{d\ell}$ und der Verkürzung $\varphi(\mathbf{r}_{s1}(\ell)) = \varphi_1(\ell)$ erhält man

$$\frac{d\varphi_1(\ell)}{d\ell} = -j\omega\mu \mathbf{e}_{t1}(\ell) \int_0^L [G(\mathbf{r}_{s1}(\ell), \mathbf{r}_1(\ell')) \cdot \mathbf{e}_{t1}(\ell') - G(\mathbf{r}_{s1}(\ell), \mathbf{r}_2(\ell')) \cdot \mathbf{e}_{t2}(\ell')] \cdot I(\ell') d\ell' + \mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_{s1}(\ell)) \quad (11)$$

durch Einsetzen von Gleichung (9) in Gleichung (10). Das Gleiche gilt mit $\varphi(\mathbf{r}_{s2}(\ell)) = \varphi_2(\ell)$ auf der Oberfläche \mathbf{r}_{s2} des Rückleiters. Aus Symmetriegründen gilt $\varphi_1(\ell) = -\varphi_2(\ell)$. Die Differenz der Potentiale lässt sich als Spannung $U(\ell) = \varphi_1(\ell) - \varphi_2(\ell) = 2\varphi_1(\ell)$ schreiben. Da die Wichtung des Stromes entlang der Leitung durch die Greenschen Funktionen hauptsächlich so erfolgt, dass nur die Werte an der Stelle $\ell = \ell'$ von Bedeutung sind, kann man den Strom aus dem Integral ziehen.

$$\frac{dU(\ell)}{d\ell} = -j\omega 2\mu \mathbf{e}_{t1}(\ell) \underbrace{\int_0^L [G(\mathbf{r}_{s1}(\ell), \mathbf{r}_1(\ell')) \cdot \mathbf{e}_{t1}(\ell') - G(\mathbf{r}_{s1}(\ell), \mathbf{r}_2(\ell')) \cdot \mathbf{e}_{t2}(\ell')] d\ell'}_{L'(\ell)} \cdot I(\ell) + \underbrace{\mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_{s1}(\ell)) - \mathbf{e}_{t2}(\ell) \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}_{s2}(\ell))}_{U'_{\text{ext}}(\ell)} \quad (12)$$

Diese Näherung ist nicht in jedem Fall gültig, wird im Rahmen der TLST aber ebenfalls für die Bestimmung der Startwerte eines Iterationsalgorithmus benutzt, mit dem die Näherung

aufgehoben werden kann [2]. Die eingeführten Ausdrücke L' und U'_{ext} entsprechen dem positionsabhängigen Induktivitätsbelag und der längenbezogenen Quellspannung durch das externe Feld. Auf die gleiche Art und Weise kann Gleichung (8) zu

$$U(\ell) = -\frac{2}{j\omega\varepsilon} \int_0^L [G(\mathbf{r}_{s1}(\ell), \mathbf{r}_1(\ell')) - G(\mathbf{r}_{s1}(\ell), \mathbf{r}_2(\ell'))] d\ell' \cdot \frac{dI(\ell)}{d\ell} \quad (13)$$

umgeformt und in Richtung der örtlichen Ableitung des Stromes umgestellt werden.

$$\frac{dI(\ell)}{d\ell} = -j\omega \underbrace{\left\{ \frac{2}{\varepsilon} \int_0^L [G(\mathbf{r}_{s1}(\ell), \mathbf{r}_1(\ell')) - G(\mathbf{r}_{s1}(\ell), \mathbf{r}_2(\ell'))] d\ell' \right\}^{-1}}_{C'(\ell)} \cdot U(\ell) \quad (14)$$

Mit dem positionsabhängigen Kapazitätsbelag C' ergeben sich die Leitungsgleichungen.

$$\frac{d}{d\ell} \begin{bmatrix} U(\ell) \\ I(\ell) \end{bmatrix} = -j\omega \begin{bmatrix} 0 & L'(\ell) \\ C'(\ell) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(\ell) \\ I(\ell) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U'_{\text{ext}}(\ell) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

4 Berechnung der Leitungsparameter

Zur Bestimmung der Leitungsparameter müssen die Integrale in Gleichung (12) und (14) berechnet werden. Eine ähnliche Vorgehensweise ist in [3] beschrieben. Zunächst wird der Abstand zwischen zwei Punkten $\mathbf{r}_1(\ell)$ und $\mathbf{r}_1(\ell')$ am Hinleiter betrachtet.

$$|\mathbf{r}_1(\ell) - \mathbf{r}_1(\ell')| = h \sqrt{\left(\tan \delta \frac{\ell - \ell'}{\ell_\psi} \right)^2 + \left(\sin \frac{\ell}{\ell_\psi} - \sin \frac{\ell'}{\ell_\psi} \right)^2 + \left(\cos \frac{\ell}{\ell_\psi} - \cos \frac{\ell'}{\ell_\psi} \right)^2} \quad (16)$$

Mit $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ und $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ ergibt sich

$$|\mathbf{r}_1(\ell) - \mathbf{r}_1(\ell')| = \sqrt{(\sin \delta (\ell - \ell'))^2 + \left(2h \sin \left(\frac{\ell - \ell'}{2\ell_\psi} \right) \right)^2} \quad (17)$$

für den Abstand, was mit $\sin \alpha \approx \alpha$ für $\alpha \ll 1$ weiter vereinfacht werden kann.

$$|\mathbf{r}_1(\ell) - \mathbf{r}_1(\ell')| \approx \sqrt{(\sin \delta (\ell - \ell'))^2 + (\cos \delta (\ell - \ell'))^2} = \ell - \ell' \quad (18)$$

Für den Abstand zwischen einem Punkt \mathbf{r}_1 im Zentrum und einem Punkt \mathbf{r}_{s1} auf der Oberfläche des Hinleiter ergibt sich somit folgender Ausdruck. Die Vorgehensweise beim Rückleiter ist analog.

$$|\mathbf{r}_{s1}(\ell) - \mathbf{r}_1(\ell')| \approx \sqrt{(\ell - \ell')^2 + r_0^2} \quad (19)$$

Weiterhin wird der Abstand zwischen zwei Punkten am Hin- und Rückleiter untersucht.

$$|\mathbf{r}_1(\ell) - \mathbf{r}_2(\ell')| = h \sqrt{\left(\tan \delta \frac{\ell - \ell'}{\ell_\psi}\right)^2 + \left(\sin \frac{\ell}{\ell_\psi} + \sin \frac{\ell'}{\ell_\psi}\right)^2 + \left(\cos \frac{\ell}{\ell_\psi} + \cos \frac{\ell'}{\ell_\psi}\right)^2} \quad (20)$$

Mit $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ und $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ erhält man

$$|\mathbf{r}_1(\ell) - \mathbf{r}_2(\ell')| = h \sqrt{\left(\tan \delta \frac{\ell - \ell'}{\ell_\psi}\right)^2 + \left(2 \cos \left(\frac{\ell - \ell'}{2\ell_\psi}\right)\right)^2}. \quad (21)$$

Im Integral in Gleichung (12) tauchen auch die Skalarprodukte der Tangentialvektoren auf. Das Skalarprodukt von $\mathbf{e}_{t1}(\ell)$ und $\mathbf{e}_{t1}(\ell')$ am Hinleiter ist

$$\mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \mathbf{e}_{t1}(\ell') = \sin^2 \delta + \cos^2 \delta \left(\cos \frac{\ell}{\ell_\psi} \cos \frac{\ell'}{\ell_\psi} + \sin \frac{\ell}{\ell_\psi} \sin \frac{\ell'}{\ell_\psi}\right), \quad (22)$$

das mit $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ und $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ weiter vereinfacht werden kann.

$$\mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \mathbf{e}_{t1}(\ell') = \sin^2 \delta + \cos^2 \delta \cos \left(\frac{\ell - \ell'}{\ell_\psi}\right) \quad (23)$$

Für geringe Abstände $\ell - \ell'$ kann die Cosinusfunktion entsprechend $\cos \alpha \approx 1$ für $\alpha \ll 1$ ersetzt werden. Für das Skalarprodukt der Tangentialvektoren am Hinleiter ergibt sich die Näherung $\mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \mathbf{e}_{t1}(\ell') \approx \sin^2 \delta + \cos^2 \delta = 1$. Weiterhin wird das Skalarprodukt der Tangentialvektoren am Hin- und Rückleiter betrachtet, für das sich folgender Ausdruck ergibt.

$$\mathbf{e}_{t1}(\ell) \cdot \mathbf{e}_{t2}(\ell') = \sin^2 \delta - \cos^2 \delta \cos \left(\frac{\ell - \ell'}{\ell_\psi}\right) \quad (24)$$

Das Integral über die Erste der Greenschen Funktionen kann somit analytisch gelöst werden.

$$\int_0^L G(\mathbf{r}_{s1}(\ell), \mathbf{r}_1(\ell')) d\ell' = \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{arcsinh} \left(\frac{L - \ell}{r_0}\right) + \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\ell}{r_0}\right) \right] \quad (25)$$

Für die Integrale über die Zweite der Greenschen Funktion in Gleichung (12) und (14) existieren keine geschlossenen Lösungen, deshalb werden diese Ausdrücke für die weitere Auswertung numerisch integriert.

5 Lösung der Leitungsgleichungen

Die Lösung der Leitungsgleichungen (15) kann mit Hilfe des Produktintegrals $\mathcal{M}_{\ell_0}^{\ell} \{ \dots \}$ zwischen zwei Positionen ℓ_0 und ℓ sehr kompakt formuliert werden [2].

$$\begin{bmatrix} U(\ell) \\ I(\ell) \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{\ell_0}^{\ell} \left\{ -j\omega \begin{bmatrix} 0 & L' \\ C' & 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} U(\ell_0) \\ I(\ell_0) \end{bmatrix} + \int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{M}_{\ell'}^{\ell} \left\{ -j\omega \begin{bmatrix} 0 & L' \\ C' & 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} U'_{\text{ext}}(\ell') \\ 0 \end{bmatrix} d\ell' \quad (26)$$

Zur Berechnung des Produktintegrals wird das Intervall von ℓ_0 bis ℓ in N Teilintervalle aufgeteilt, in denen die Leitungsparameter L'_n und C'_n näherungsweise konstant sind [5]. Idealerweise werden dazu die gleichen Intervalle wie bei der numerischen Integration zur Bestimmung der Leitungsparameter benutzt. Aus dem Produktintegral wird nun ein Produkt

$$\mathcal{M}_{\ell_0}^{\ell} \left\{ -j\omega \begin{bmatrix} 0 & L' \\ C' & 0 \end{bmatrix} \right\} = \prod_{n=1}^N \mathcal{M}_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \left\{ -j\omega \begin{bmatrix} 0 & L'_n \\ C'_n & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (27)$$

dessen Faktoren mit Hilfe des Matrixexponentials $e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ mit der Laufvariable k bestimmt werden können. Dafür existiert z. B. in MATLAB die Funktion `expm`. Die Matrix X muss dabei nicht notwendigerweise einheitenlos sein. Es genügt, wenn sich die Einheiten der einzelnen Elemente durch die Potenzierung der Matrix nicht ändern, wozu die Elemente auf der Hauptdiagonale aber zwangsweise einheitenlos sein müssen.

$$\mathcal{M}_{\ell_n}^{\ell_{n+1}} \left\{ -j\omega \begin{bmatrix} 0 & L'_n \\ C'_n & 0 \end{bmatrix} \right\} = e^{-j\omega \begin{bmatrix} 0 & L'_n \\ C'_n & 0 \end{bmatrix} \cdot (\ell_{n+1} - \ell_n)} \quad (28)$$

Aus Gleichung (26) für $\ell_0 = 0$ und $\ell = L$, also für das Intervall vom Leitungsanfang bis zum Leitungsende, wird somit folgende kompakte Gleichung. Die Matrixelemente M_{11} und M_{22} sind einheitenlos, M_{12} hat die Einheit Ω , M_{21} die Einheit S.

$$\begin{bmatrix} U(L) \\ I(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U(0) \\ I(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Zur Bestimmung einer konkreten Lösung müssen Randbedingungen vorgegeben werden, z. B. der Abschluss mit einer Impedanz Z_1 am Anfang und Z_2 am Ende der Leitung.

$$U(0) = U_{t1} - I(0)Z_1 \qquad U(L) = U_{t2} + I(L)Z_2 \quad (30)$$

Die transversalen Spannungen U_{t1} und U_{t2} ergeben sich entsprechend [4, Gleichung (3)]. Durch Einsetzen der Randbedingungen (30) in Gleichung (29) und entsprechendes Umstellen können die Ströme am Anfang und Ende der Leitung bestimmt werden.

$$I(0) = -\frac{U_{t2} - M_{11}U_{t1} + Z_2U_{q2} + Z_2M_{21}U_{t1} - U_{q1}}{Z_2M_{22} - Z_2M_{21}Z_1 + M_{11}Z_1 - M_{12}} \quad (31)$$

$$I(L) = \frac{M_{21}Z_1(U_{t2} - U_{q1}) - M_{22}(U_{t2} + M_{11}U_{t1} + U_{q1}) + U_{q2}(M_{11}Z_1 - M_{12}) - M_{21}U_{t1}M_{12}}{Z_2M_{22} - Z_2M_{21}Z_1 + M_{11}Z_1 - M_{12}} \quad (32)$$

6 Simulationsbeispiel

Als Beispiel wird eine $l = 1$ m lange Leitung mit einem Leiterabstand von $2h = 4$ mm und einem Leiterdurchmesser von $d_0 = 0,5$ mm betrachtet. Die Schlaglänge wird auf $P = 10$ cm bzw. $P = 20$ cm festgelegt. Die Anregung erfolgt durch eine ebene Welle [4, Gleichung (1)]

mit einem Effektivwert der elektrischen Feldstärke von $E_0 = 1 \frac{V}{m}$. Die Einfallsrichtung ist durch [4, Gleichung (2)] mit dem Polarwinkel $\vartheta = 45^\circ$, dem Azimutwinkel $\varphi = 90^\circ$ und dem Polarisationswinkel $\alpha = 90^\circ$ gegeben. Der Phasenwinkel beträgt $\beta = 0$. Die Leitung ist an beiden Enden mit 200Ω fehlangepasst abgeschlossen. Zur numerische Bestimmung der Leitungsparameter nach Gleichung (12) und (14) wurde die Leitung in 500 Elemente aufgeteilt.

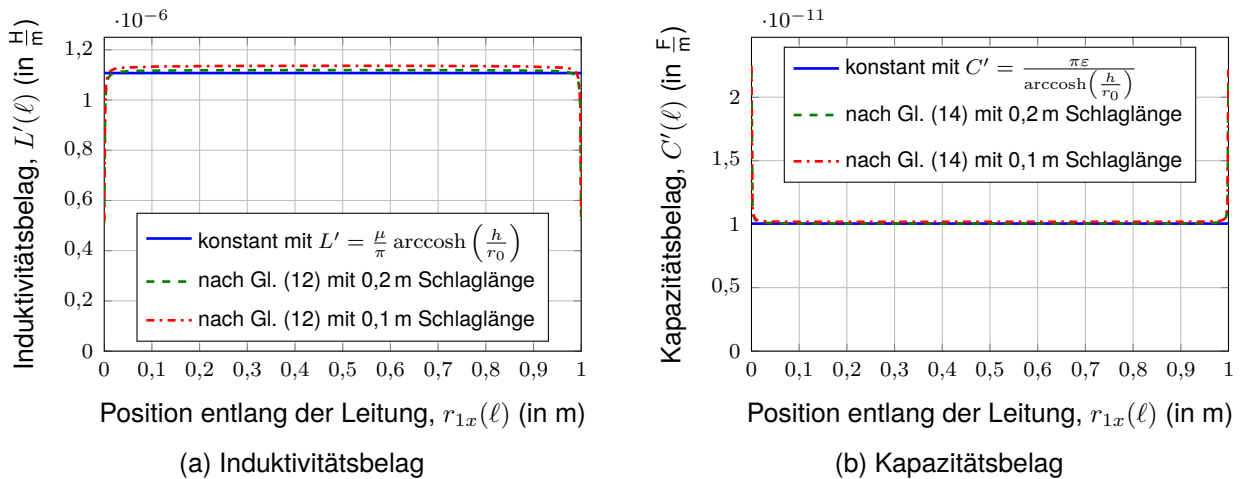


Abbildung 2: Leitungsbeläge der verdrehten Leitung

Abbildung 2 zeigt den positionsabhängigen Induktivitätsbelag und Kapazitätsbelag der verdrehten Leitung. Zur Berechnung wurde die statische Näherung der Greenschen Funktion verwendet, deshalb sind die Parameter auch rein reell. Trotzdem erkennt man eine Abhängigkeit der Parameter von der Position entlang der Leitung und von der Stärke der Verdrehung. Gegenüber den Parametern der klassischen Leitungstheorie sinkt der Induktivitätsbelag am Leitungsende auf etwa die Hälfte des Wertes in der Mitte der Leitung ab. Demgegenüber steigt der Kapazitätsbelag am Leitungsende auf etwa das Doppelte des Wertes in der Mitte der Leitung an. Beide Effekte wurden bereits in [2, Abschnitt 5.1] für eine endliche Einfachleitung über einer leitfähigen Ebene diskutiert.

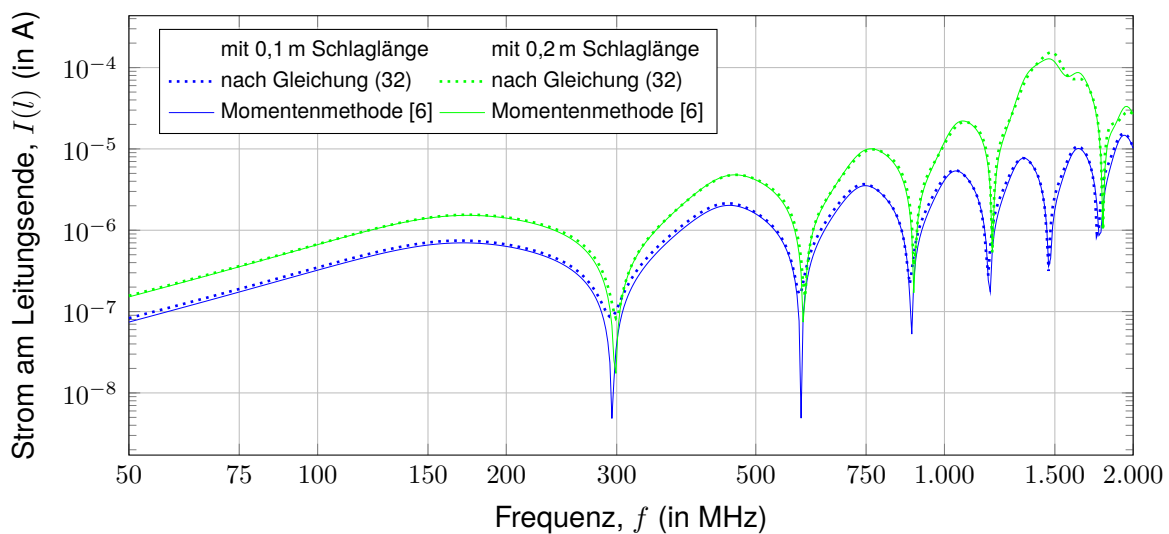


Abbildung 3: Betrag des eingekoppelten Stromes am Ende der verdrehten Leitung

In Abbildung 3 ist der Betrag des eingekoppelten Stromes am Leitungsende in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Neben der Lösung nach Gleichung (32) ist auch eine Vergleichslösung auf Basis der Momentenmethode [6] gezeigt, die eine gute Übereinstimmung aufweist. Aus dem Verlauf sind die Leitungsresonanzen ablesbar. Außerdem ist erkennbar, dass in die weniger stark verdrillte Leitung ein größerer Strom eingekoppelt wird, der bei den gewählten Abmessungen bei einer Frequenz von 1,5 GHz ein Maximum erreicht. Die Simulationszeit betrug für 500 Frequenzpunkte etwa 30 s bei der leitungstheoretischen Lösung und etwa 5 min bei der Momentenmethode.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Am Beispiel einer verdrillten Doppelleitung wurde die grundlegende Vorgehensweise der Leitungssupertheorie dargestellt. Die erhaltenen Leitungsparameter sind ortsabhängig und ändern sich entlang der Leitung entsprechend der Verdrillung. Die Lösung der Leitungsgleichungen erfolgt mit Hilfe des Matrixexponentials unter Einbeziehung von bestimmten Randbedingungen. Um das gesamte Konzept der Leitungssupertheorie umzusetzen, muss die retardierte Greensche Funktion benutzt werden, die zu komplexwertigen Leitungsparametern führt, welche die Abstrahlungsverluste der Leitung charakterisieren. Bei sehr hohen Frequenzen hängen die Leitungsparameter dann nicht mehr nur von den Abmessungen der Leitung, sondern auch vom Strom ab und müssen damit iterativ bestimmt werden.

Literatur

- [1] ARMENTA, Roberto B. ; SARRIS, Costas D.: Efficient Evaluation of the Terminal Response of a Twisted-Wire Pair Excited by a Plane-Wave Electromagnetic Field. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 49 (2007), Nr. 3, S. 698 – 707. <http://dx.doi.org/10.1109/TEMC.2007.902177>. – DOI 10.1109/TEMC.2007.902177. – ISSN 0018–9375
- [2] HAASE, Heiko: *Full-Wave Field Interactions of Nonuniform Transmission Lines*. 1. Magdeburg : Nitsch, Jürgen and Styczynski, Zbigniew Antoni, 2005 (Res Electricae Magdeburgenses, Magdeburger Forum zur Elektrotechnik 9). – ISBN 3–929757–78–8
- [3] HASSOUN, F. ; TARAFI, R. ; ZEDDAM, A.: Calculation of per-unit-length parameters for shielded and unshielded twisted pair cables. In: *17th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility*. Zürich, Schweiz, 2006, S. 250 – 253
- [4] MAGDOWSKI, Mathias ; TKACHENKO, Sergey V. ; VICK, Ralf: Einkopplung stochastischer Felder in eine verdrillte und ungeschirmte Leitung. In: GONSCHOREK, Karl-Heinz (Hrsg.): *EMV 2010 Internationale Fachmesse und Kongress für Elektromagnetische Verträglichkeit*. Düsseldorf : VDE Verlag, März 2010. – ISBN 978–3–8007–3206–7, S. 677 – 684
- [5] STEINMETZ, Torsten: *Ungleichförmige und zufällig geführte Mehrfachleitungen in komplexen, technischen Systemen*. 1. Magdeburg : Nitsch, Jürgen and Styczynski, Zbigniew Antoni, 2006 (Res Electricae Magdeburgenses, Magdeburger Forum zur Elektrotechnik 12). – ISBN 978–3–929757–98–2. – Nummerierung geändert
- [6] TECHNISCHE UNIVERSITÄT HAMBURG-HARBURG: *CONCEPT-II, Version 12.0*. <http://www.tet.tu-harburg.de/concept>