

# Effizientes Netzwerkmodell zur Breitbandsimulation der Feldeinkopplung auf inhomogenen Leitungen

M. Sc. Sebastian Südekum, Dipl.-Ing. Andreas Mantzke, Prof. Dr.-Ing. Marco Leone  
 Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg - Lehrstuhl Theoretische Elektrotechnik

## 1 Einleitung

Das Hochfrequenzverhalten elektrischer Leitungen unter dem Einfluss eines äußeren elektromagnetischen Feldes ist ein wichtiger Teil der EMV-Analyse, da die Signal- und Versorgungsintegrität elektrischer Systeme stark durch die induzierten Ströme und Spannungen beeinträchtigt werden können (Abb. 1). Zur quantitativen Beurteilung des Verhaltens wurden in den letzten Jahren zahlreiche Modelle für den Spezialfall der homogenen Leitung mit linearer und nichtlinearer Beschaltung entwickelt (z.B. [1], [2]). In der Praxis treten aber auch häufig inhomogene Leitungsstrukturen (z.B. eine durchhängende Freileitung) auf, wobei die Anzahl der Modelle hierfür deutlich geringer ist. Viele Ansätze beschränken sich auf den Frequenzbereich und ein transientes Systemverhalten wird dabei durch eine IFFT ermittelt ([3], [4]), was die Verwendung nichtlinearer Bauelemente ausschließt.

In diesem Beitrag wird das modale Ersatzschaltbild einer inhomogenen Leitung aus [5] durch modale Quellen erweitert, welche den Einfluss des einkoppelnden elektromagnetischen Feldes berücksichtigen. Durch eine quasistatische Analyse kann die Konvergenz des Modells beschleunigt werden, sodass die begrenzte Anzahl der Parallelschwingkreise sicher abgeschätzt werden kann. Da die Netzwerkparameter im Allgemeinen nicht analytisch vorliegen, werden diese mit Hilfe der Methode der Finiten Differenzen numerisch bestimmt. Das resultierende inhärent stabile Netzwerkmodell wird anhand eines transienten Beispiels mit nichtlinearer Beschaltung durch ein kommerzielles Feldberechnungsprogramm, welches durch eine aufwendige 3D-Vollwellensimulation, den Vector Fitting Algorithmus und anschließender Reduktion der Modellordnung ebenfalls ein Ersatzschaltbild aufstellt [6], validiert.

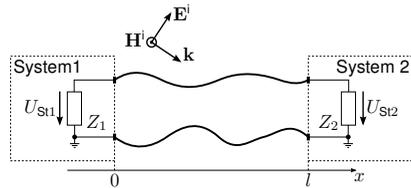


Abb. 1: Einkopplung eines elektromagnetischen Feldes in eine inhomogene Leitung der Länge  $l$  und Erzeugung der Störspannungen  $U_{S11}$ ,  $U_{S12}$

## 2 Äquivalente modale Ersatzschaltbildarstellung einer inhomogenen Leitung

Es wird eine beliebig inhomogene Leitung betrachtet, die durch die Länge  $l$  und die ortsabhängigen Leitungsparameter  $L'(x)$ ,  $C'(x)$ ,  $R'(x)$  und  $G'(x)$  charakterisiert wird. Mit der Einspeisung des Stroms  $I_j$  in  $x_j$ , der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Delta-Distribution  $\delta(x)$  erfüllt die Spannung  $U(x)$  entlang der Leitung nach [5] das Randwertproblem

$$\frac{1}{C'(x)} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{L'(x)} \frac{d}{dx} \right) U(x) + \omega^2 U(x) = -\frac{j\omega I_j}{C'(x)} \delta(x - x_j) \quad (1) ; \quad \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=0,l} = 0. \quad (2)$$

Gemäß [5] kann der Differentialoperator aus (1) als Sturm-Liouville-Operator identifiziert werden. Demnach existiert ein vollständiges System von reellen Eigenfunktionen  $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  für  $x \in [0, l]$ , die die Randbedingung aus (2) und die folgenden Relationen erfüllen:

$$\frac{1}{C'(x)} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{L'(x)} \frac{d}{dx} \right) \phi_n(x) = -\omega_n^2 \phi_n(x) \quad (3) ; \quad \int_0^l C'(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \chi_n^{-2} \delta_{nm}. \quad (4)$$

Dabei bezeichnen  $\omega_n^2$  die Eigenwerte bzw. die Quadrate der Resonanzkreisfrequenzen,  $\delta_{nm}$  das Kronecker-Delta und  $\chi_n$  die Skalierungsfaktoren aus (4). Mit diesen Eigenschaften wird (1) formal gelöst und man erhält die Impedanz zwischen dem Port  $i$  und  $j$ , die dem Ersatzschaltbild aus Abb. 2 entspricht [5]:

$$Z_{ij} = \frac{1}{j\omega C_0 + G_0} + j\omega \tilde{L}_{ij} + \sum_{n=1}^N \frac{\nu_n^i \nu_n^j}{\frac{1}{j\omega L_n} + j\omega C_n + G_n}. \quad (5)$$

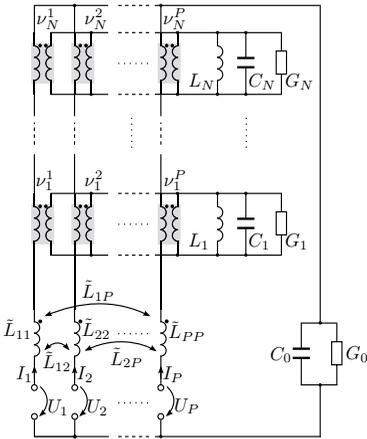


Abb. 2: Beschleunigtes modales Ersatzschaltbild für eine inhomogene Leitung mit  $P$  Ports

Die Ersatzschaltbildparameter sind gegeben durch [5]:

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_0^l C'(x) dx & G_n &= \frac{\omega_n C_n}{Q_0(\omega_n)} \\ G_0 &= \frac{\frac{\omega_1}{2} C_0}{Q_0(\frac{\omega_1}{2})} & L_n &= \frac{\chi_n^2}{\omega_n^2} \\ L_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n^2 \phi_n(x_j) \phi_n(x_i)}{\omega_n^2} & C_n &= \frac{1}{\chi_n^2} \\ \tilde{L}_{ij} &= L_{ij} - \sum_{n=1}^N \nu_n^i \nu_n^j L_n & \nu_n^i &= \phi_n(x_i). \end{aligned} \quad (6)$$

Durch die Einführung der quasistatischen Induktivitäten  $L_{ij}$  wird die Konvergenz des Modells beschleunigt, sodass für eine gegebene Bandbreite  $f_{\max}$  die Anzahl der notwendigen modalen Schwingkreise mit

$$N > 2l f_{\max} \max_{x \in [0, l]} \left\{ \sqrt{L'(x) C'(x)} \right\} \quad (7)$$

sicher abgeschätzt werden kann. Des Weiteren setzt das Modell geringe Verluste voraus, sodass der Gütefaktor

$$Q_0(\omega) = \left( \frac{\overline{R'(x)}}{\omega L'(x)} + \frac{\overline{G'(x)}}{\omega C'(x)} \right)^{-1} \quad (8)$$

durch die mittleren Leitungsparameter bestimmt werden kann, wobei dieser an diskreten Frequenzen ausgewertet wird. Diese Methode hat sich als eine sehr gute Approximation erwiesen [5]. Im Allgemeinen ist die analytische Bestimmung der Eigenfunktionen, Eigenwerte, Induktivitäten und der weiteren Ersatzschaltbildparameter nur für wenige Leitungsgeometrien möglich. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Methode der Finiten Differenzen (FDM) verwendet [7], um für beliebige Geometrien die erforderliche modale und quasistatische Analyse numerisch durchzuführen.

## 2.1 Numerische Modalanalyse

Für die numerische Modalanalyse werden alle Quellen vernachlässigt und die Leitung wird äquidistant mit der Zellenlänge  $d$  diskretisiert. Somit kann das Randwertproblem (1) für einen Punkt  $x_i \in (0, l)$  mit der Abkürzung  $f(x_i) = f_i$  approximiert werden [5]:

$$\frac{1}{L'_i C'_i} \left[ \left( \frac{1}{d^2} + \frac{\Psi_i}{2d} \right) U_{i-1} - \frac{2}{d^2} U_i + \left( \frac{1}{d^2} - \frac{\Psi_i}{2d} \right) U_{i+1} \right] + \omega^2 U_i = 0 \quad (9)$$

$$\text{mit } \Psi_i = \frac{1}{L'(x)} \frac{dL'(x)}{dx} \Big|_{x=x_i}. \quad (10)$$

Nach [5] sollte bei der Frequenz  $f_{\max}$  die Zellenlänge  $d$  kleiner sein als ein Zehntel der kürzesten Wellenlänge entlang der Leitung:

$$d < \min_{x \in [0, l]} \left\{ \frac{1}{10 f_{\max} \sqrt{L'(x) C'(x)}} \right\}. \quad (11)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen aus (2) geht der Operator (9) für die Leitungsenden  $x_1 = 0$  und  $x_M = l$  über in

$$\frac{1}{L'_1 C'_1} \left[ \left( \frac{\Psi_1}{2d} - \frac{1}{d^2} \right) U_1 + \left( \frac{1}{d^2} - \frac{\Psi_1}{2d} \right) U_2 \right] + \frac{\omega^2}{2} U_1 = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{L'_M C'_M} \left[ \left( \frac{\Psi_M}{2d} + \frac{1}{d^2} \right) U_{M-1} - \left( \frac{1}{d^2} + \frac{\Psi_M}{2d} \right) U_M \right] + \frac{\omega^2}{2} U_M = 0. \quad (13)$$

Wendet man diese Approximation auf jeden diskreten Punkt an, kann das homogene Randwertproblem (1) als Matrixgleichung formuliert werden:

$$([\mathcal{L}^U] + \omega^2 [\mathbf{P}]) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad [\mathcal{L}^U] \phi_n = -\omega_n^2 [\mathbf{P}] \phi_n. \quad (14)$$

Hierbei bezeichnen  $\mathbf{U}$  den Spannungsvektor,  $\mathbf{0}$  den Nullvektor,  $[\mathcal{L}^U]$  die Operatormatrix und  $[\mathbf{P}]$  die Koeffizientenmatrix. Gleichung (14) entspricht einem verallgemeinerten Eigenwertproblem, aus dem die Eigenwerte  $\omega_n^2$  und die diskrete Darstellung der Eigenfunktionen als Vektor  $\phi_n$  hervorgehen.

## 2.2 Quasistatische Analyse

Die Entwicklung der Induktivität  $L_{ij}$  in den Eigenfunktionen aus (6) besitzt eine schlechte Konvergenz, sodass die Berechnung weitaus mehr Eigenfunktionen benötigen würde als für das Netzwerkmodell aus Abb. 2 notwendig sind [5]. Deshalb wird eine direkte Berechnung vorgezogen, basierend auf das folgende quasistatische Randwertproblem für eine Anregung in  $x_j$  [5]:

$$\frac{1}{C'(x)} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{L'(x)} \frac{d}{dx} \right) L_j(x) = -\frac{1}{C'(x)} \delta(x - x_j) + \frac{1}{C_0} \quad ; \quad \text{mit } L_{ij} = L_j(x_i). \quad (15)$$

Der Differentialoperator und die Randbedingungen sind analog zu (1) und (2), sodass die gleiche FD-Approximation angewendet werden kann. Man erhält für das quasistatische Randwertproblem die Matrixgleichung:

$$[\mathcal{L}^U] \mathbf{L}_j = \mathbf{S}_j \quad ; \quad \text{mit } S_{ij} = -\frac{1}{C'(x_i)} \delta_{ij} + \frac{1}{C_0}. \quad (16)$$

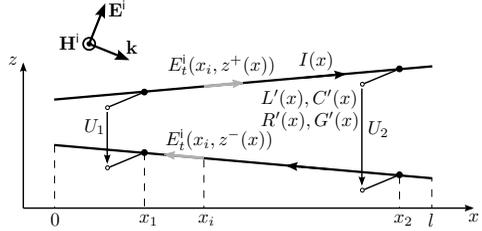
Dabei ist  $[\mathcal{L}^U]$  die in (14) verwendete Operatormatrix und  $\mathbf{L}_j$  der Vektor der Induktivitäten. Die Differentialgleichung aus (15) ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Damit die Induktivität  $L_{ij}$  als Lösung von (15) der Reihenentwicklung aus (6) entspricht, muss zusätzlich die Bedingung

$$\int_0^l C'(x) L_j(x) dx = 0 \quad ; \quad \text{diskret: } \sum_{i=1}^M C'(x_i) L_j(x_i) d = 0 \quad (17)$$

gelten [5]. Diese ersetzt eine Zeile des Gleichungssystems aus (16), außer der Zeile der Einspeisung, und somit können die quasistatischen Induktivitäten  $L_{ij}$  mit Hilfe der FDM direkt bestimmt werden.

### 3 Einkopplung eines äußeren elektromagnetischen Feldes

Die Einkopplung eines äußeren elektromagnetischen Feldes  $\mathbf{E}^i$ ,  $\mathbf{H}^i$  kann im Rahmen der Leitungstheorie durch drei äquivalente Formulierungen beschrieben werden, die sich durch die Art der verteilten Quellen und der zu berechnenden Größen unterscheiden (Streugröße oder totale Größe). Dies sind die Formulierungen nach Taylor, Agrawal und Rachidi [8]. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird im Folgenden das Modell nach Agrawal verwendet, welches die tangentielle Komponente  $E_t^i$  des einfallenden elektrischen Feldes am Hin- und Rückleiter betrachtet (Abb. 3). Die Strom- und Spannungsverteilung sind dabei durch die Leitungsgleichungen bestimmt [3]:



**Abb. 3:** Inhomogene Leitung der Länge  $l$  mit Ports bei  $x_1$  und  $x_2$  unter Einfluss eines äußeren elektromagnetischen Feldes  $\mathbf{E}^i$ ,  $\mathbf{H}^i$

$$\frac{dU^s(x)}{dx} + (R'(x) + j\omega L'(x))I(x) = U_F'(x) \quad (18) ; \quad \frac{dI(x)}{dx} + (G'(x) + j\omega C'(x))U^s(x) = 0 \quad (19)$$

$$\text{mit } U_F'(x) = E_t^i(x, z^+(x)) - E_t^i(x, z^-(x)). \quad (20)$$

Hierbei bezeichnet  $U^s(x)$  die sog. Streuspannung. Um die messbare (totale) Spannung  $U(x)$  zu erhalten, muss der Anteil des einfallenden elektrischen Feldes hinzu addiert werden:

$$U(x) = U^s(x) - U^i(x) \quad (21) ; \quad U^i(x) = \int_{z^-(x)}^{z^+(x)} E_z^i(x, z) dz. \quad (22)$$

#### 3.1 Bestimmung der eingekoppelten Spannung

Analog zu [5] können die Differentialgleichungen (18) und (19) entkoppelt werden und unter Vernachlässigung der Verluste resultiert für den Strom  $I(x)$  das Randwertproblem

$$\frac{1}{L'(x)} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{C'(x)} \frac{d}{dx} \right) I(x) + \omega^2 I(x) = -\frac{j\omega U_F'(x)}{L'(x)} \quad (23) ; \quad I(x)|_{x=0,l} = 0. \quad (24)$$

Der Differentialoperator aus (23) kann ebenfalls als Sturm-Liouville-Operator identifiziert werden, wobei die reellen Eigenfunktionen  $\psi_n(x)$  die Dirichlet-Randbedingungen aus (24) erfüllen. Zusätzlich gelten analog zu (3) und (4) mit dem Skalierungsfaktor  $\eta_n$  die folgenden Relationen:

$$\frac{1}{L'(x)} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{C'(x)} \frac{d}{dx} \right) \psi_n(x) = -\omega_n^2 \psi_n(x) \quad (25) ; \quad \int_0^l L'(x) \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \eta_n^{-2} \delta_{nm}. \quad (26)$$

Um das Randwertproblem (23) formal zu lösen, wird die gesuchte Stromverteilung  $I(x)$  in den Eigenfunktionen  $\psi_n$  entwickelt. Unter Anwendung von (25) und (26) resultiert für den Strom

$$I(x) = j\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 U_{F,n} \psi_n(x)}{\omega_n^2 - \omega^2} ; \quad \text{mit } U_{F,n} = \int_0^l U_F'(\tilde{x}) \psi_n(\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (27)$$

Setzt man diese Lösung zur Bestimmung von  $U^s(x)$  in (19) ein, erhält man:

$$U^s(x) = -\frac{1}{j\omega C'(x)} \frac{dI(x)}{dx} = -\frac{1}{C'(x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 U_{F,n}}{\omega_n^2 - \omega^2} \frac{d\psi_n(x)}{dx}. \quad (28)$$

Bei der Untersuchung der Sturm-Liouville-Operatoren aus (1) und (23) ergibt sich allgemein die Beziehung

$$\frac{\eta_n}{C'(x)} \frac{d}{dx} \psi_n(x) = \omega_n \chi_n \phi_n(x). \quad (29)$$

Wendet man diese Relation an und erweitert analog zu [5] die Kreisfrequenz im Nenner durch die Güte  $Q_0$  aus (8) zur Berücksichtigung geringer Verluste, kann die eingekoppelte Spannung  $U(x)$  mit (21) ausgedrückt werden durch

$$U(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n \chi_n \omega_n U_{F,n} \phi_n(x)}{\omega_n^2 - \omega^2 \left(1 - j \frac{1}{Q_0(\omega)}\right)} - U^i(x). \quad (30)$$

### 3.2 Konvergenzbeschleunigung und Modale Quellen

Nach [2] besitzt die Summe aus (30) eine schlechte Konvergenz. Um diese zu beschleunigen, wird analog zu den quasistatischen Induktivitäten die quasistatische Streuspannung ( $\omega^2 \rightarrow 0$ )

$$U_0^s(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n \eta_n U_{F,n} \phi_n(x)}{\omega_n} \quad (31)$$

eingeführt, sodass für eine gegebene Bandbreite  $f_{\max}$  die Anzahl der benötigten Summenterme für den resultierenden Ausdruck am Port  $i$

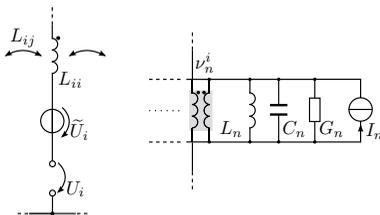
$$U_i = \tilde{U}_i - \sum_{n=1}^N \frac{\eta_n \chi_n \omega_n U_{F,n} \phi_n(x_i)}{\omega_n^2 - \omega^2 \left(1 - j \frac{1}{Q_0(\omega)}\right)} \quad (32); \quad \tilde{U}_i = U_0^s(x_i) + \sum_{n=1}^N \frac{\chi_n \eta_n U_{F,n} \phi_n(x_i)}{\omega_n} - U^i(x_i) \quad (33)$$

mit (7) abgeschätzt werden kann. Mit Bezug zur Ersatzschaltbildarstellung aus Abb. 2 kann unter Einführung der modalen Stromquelle

$$I_n = - \frac{\eta_n \omega_n U_{F,n}}{j \omega \chi_n} \quad (34)$$

und Berücksichtigung des modalen Koppelfaktors  $\nu_n^i$  aus (6) die am Port  $i$  eingekoppelte Spannung

$$U_i = \tilde{U}_i - \sum_{n=1}^N \nu_n^i Z_n I_n \quad ; \quad \text{mit } Z_n = \frac{1}{j \omega L_n + j \omega C_n + G_n}. \quad (35)$$



**Abb. 4:** Erweiterung des modalen Ersatzschaltbildes durch die Spannungsquelle  $\tilde{U}_i$  am Port  $i$  (links) und die modale Stromquelle  $I_n$  des  $n$ -ten modalen Schwingkreises (rechts)

als die Summe der Spannungen aufgefasst werden, die durch die eingepprägten Ströme  $I_n$  über den modalen Schwingkreisen abfallen. Somit kann die äquivalente modale Ersatzschaltbildarstellung einer inhomogenen Leitung bei Anwesenheit eines äußeren elektromagnetischen Feldes wie in Abb. 4 erweitert werden. Analog zur Bestimmung der Ersatzschaltbildparameter werden die äquivalenten Feldquellen  $\tilde{U}_i$  und  $I_n$  numerisch bestimmt. Da die Eigenfunktionen  $\psi_n$  diskret vorliegen, muss auch die Integration in (27) numerisch durchgeführt werden.

### 3.3 Numerische Analyse

Die numerische Bestimmung der diskreten Eigenfunktionen  $\psi_n$  erfolgt wiederum über eine Modalanalyse mit Hilfe der FDM. Dabei betrachtet man das Randwertproblem aus (23) unter Vernachlässigung des Quellterms. Durch die FD-Approximation resultiert die Matrixgleichung

$$([\mathcal{L}^I] + \omega^2) \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad [\mathcal{L}^I] \psi_n = -\omega_n^2 \psi_n. \quad (36)$$

Die Operatormatrix  $[\mathcal{L}^I]$  lässt sich direkt aus dem Finite-Differenzen-Operator (9) ermitteln, da die Differentialoperatoren aus (1) und (23) dual zueinander sind ( $L'(x) \leftrightarrow C'(x)$ ). Zusätzlich entfallen aufgrund der homogenen Dirichlet-Randbedingungen aus (24) die Zeilen und Spalten für  $i = 1, M$ , da  $I_1 = I_M = 0$  gilt. Des Weiteren kann die Operatormatrix  $[\mathcal{L}^I]$  zur Berechnung der quasistatischen Streuspannung  $U_0^s$  verwendet werden, indem mit Hilfe der FDM das Randwertproblem (23) für den quasistatischen Fall ( $\omega^2 \rightarrow 0$ ) approximiert wird:

$$[\mathcal{L}^I] \mathbf{I} = \mathbf{S}_F \quad ; \quad \text{mit } S_{Fi} = -\frac{j\omega}{L'(x_i)} U'_F(x_i). \quad (37)$$

Mit dem aus (37) resultierenden Stromvektor  $\mathbf{I}$  kann schließlich unter Nutzung der Leitungsgleichung (19) der Vektor der quasistatischen Streuspannung  $\mathbf{U}_0^s$  berechnet werden, wobei mit Hilfe der FDM resultiert

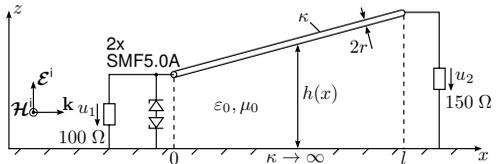
$$\mathbf{U}_0^s = [\mathcal{L}_0^s] \mathbf{I} \quad ; \quad \text{mit } U_{0i}^s = \frac{1}{j\omega C'_i} \left( \frac{1}{2d} \right) I_{i-1} - \frac{1}{j\omega C'_i} \left( \frac{1}{2d} \right) I_{i+1}. \quad (38)$$

Mit Hilfe der Eigenschaften des Sturm-Liouville-Operators aus (23) kann gezeigt werden, dass  $\mathbf{U}_0^s$  der numerischen Lösung der gesuchten Streuspannung aus (31) entspricht, wobei für die Implementation des Ersatzschaltbildes nur die Funktionswerte an den Portpositionen  $x_i$  benötigt werden.

## 4 Validierungsbeispiel

Zur Validierung wird eine Drahtleitung mit dem Radius  $r$  und der Leitfähigkeit  $\kappa$  über einer ideal leitfähigen Ebene im Zeitbereich betrachtet. Die Inhomogenität der Anordnung ist durch den linear veränderlichen Abstand zwischen Draht und Massebene charakterisiert (Abb. 5):

$$h(x) = \frac{h_2 - h_1}{l} x + h_1. \quad (39)$$



**Abb. 5:** Drahtleitung über einer ideal leitfähigen Ebene mit ortsabhängigem Abstand  $h(x)$  und einem nichtlinearen Abschluss unter einer Endfire-Anregung

Des Weiteren befinden sich die Ports der Leitung an den Leitungsenden, wobei der Abschlusswiderstand an Port 1 durch zwei Zener-Dioden vom Typ SMF5.0A [9] vor Überspannungen geschützt wird. Nach [1] sind die Leitungsparameter gegeben durch

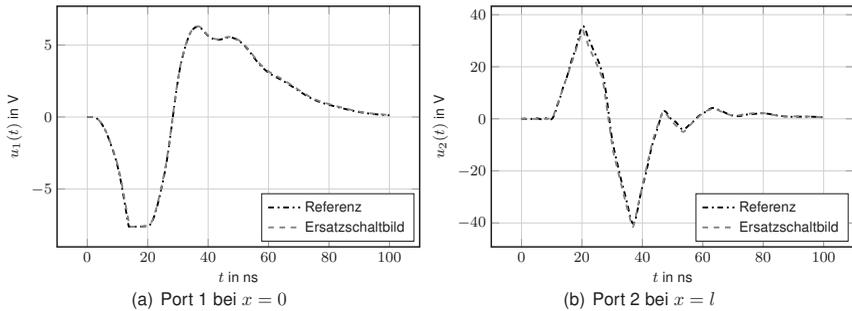
$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \operatorname{arccosh} \left( \frac{h(x)}{r} \right) & C'(x) &= \frac{2\pi\epsilon_0}{\operatorname{arccosh} \left( \frac{h(x)}{r} \right)} \\ R'(\omega) &= \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\kappa}} & G'(x, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

$\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  bezeichnen die Permittivität und Permeabilität des Vakuums. Die rein ohmschen Verluste berücksichtigen auch den Skinneffekt im Draht. Folgende geometrischen Parameter wurden festgelegt:  $l = 2.5$  m,  $h_1 = 1.5$  cm,  $h_2 = 3$  cm,  $r = 1$  mm. Der Draht besitzt die Leitfähigkeit  $\kappa$  von Kupfer. Wie in Abb. 5 dargestellt, erfolgt in diesem transienten Beispiel eine Endfire-Anregung der Leitungsanordnung durch eine ebene Welle. Demnach besitzt das einfallende elektrische Feld nur eine  $z$ -Komponente ( $\mathcal{E}^i = \mathcal{E}_z^i(x, t)\mathbf{e}_z$ ) [10]. Somit sind die nach der Agrawal-Formulierung notwendigen Quellterme im Zeitbereich gegeben durch:

$$u^i(x, t) = \int_0^{h(x)} \mathcal{E}_z^i(x, t) dz = \mathcal{E}_z^i(x, t)h(x) \quad (41)$$

$$u_F^i(x, t) = \mathcal{E}_z^i(x, t) \sin(\alpha) \quad ; \quad \text{mit } \alpha = \arctan\left(\frac{h_2 - h_1}{l}\right). \quad (42)$$

Der transiente Puls  $\mathcal{E}_z^i(x, t)$  entspricht einer Dreiecksfunktion mit der Amplitude  $E_0 = 5$  kV/m und der Anstiegs- und Abfallzeit  $\tau_r = \tau_f = 10$  ns. Die Anzahl der notwendigen Schwingkreise ergibt mit  $f_{\max} \approx 1/\tau_r = 100$  MHz und Gleichung (7)  $N = 13$ . Das verwendete Spice-Modell der Zener-Diode wurde den Herstellerangaben entnommen [9]. In Abb. 6 sind die resultierenden Spannungsantworten an den Ports dargestellt. Als Referenz dient ein kommerzielles Feldberechnungsprogramm [6]. Insgesamt ist eine sehr gute Übereinstimmung festzustellen. Die Referenzergebnisse resultieren ebenfalls aus einem äquivalenten Netzwerk, basierend auf den Frequenzbereichsdaten und einer Reduktion der Modellordnung (MOR) [6], deren Berechnung insgesamt 40 min dauerte. Die LTSpice-Simulation des vorgestellten Netzwerkmodells einschließlich der vorhergehenden FD-Analyse benötigte hingegen auf dem gleichen Rechner 2 min.



**Abb. 6:** Transiente Spannungsantworten  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  an den Ports bei Endfire-Anregung

Aufgrund der Zeitabhängigkeit des einfallenden Störfeldes sind auch die äquivalenten Feldquellen  $i_n(t)$ ,  $\tilde{u}_i(t)$  zeitabhängig. Für die Implementation in LTSpice müssen die Funktionswerte der Quellen für diskrete Zeitschritte berechnet werden, sodass diese in Form einer Look-Up-Table dem Simulationsprogramm übergeben und für eine lineare Interpolation verwendet werden können [11]. Im Frequenzbereich sind die äquivalenten Quellen im Allgemeinen frequenzabhängig. Um dies in LTSpice zu berücksichtigen, müssen  $I_n(\omega)$ ,  $\tilde{U}_i(\omega)$  als gesteuerte Quellen modelliert werden, die mit der entsprechenden Laplace-Übertragungsfunktion beschrieben werden. Dabei kann die Übertragungsfunktion mit wenigen Stützstellen sehr effizient über den Vector Fitting Algorithmus ermittelt werden [12].

## 5 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde eine sehr effiziente modale Ersatzschaltbildarstellung für inhomogene Leitungen für den Fall der Feldeinkopplung mit Hilfe zusätzlicher modaler Quellen erweitert. Die Methode basiert auf dem zugrunde liegenden Sturm-Liouville-Problem und der daraus resultierenden Entwicklung der Spannung in den Eigenfunktionen. Analog zur Einführung der quasistatischen Induktivitäten kann durch die Bestimmung der quasistatischen Streuspannung die Konvergenz des Modells beschleunigt werden, sodass die Komplexität des Netzwerkes nicht bedeutend erhöht wird. Die Abschätzung der Modellordnung (Moden) erfolgt über eine einfache Relation, die sich linear zur benötigten Bandbreite verhält. Die Ersatzschaltbildparameter und die äquivalenten Feldquellen sind für beliebige Leitungsgeometrien einmalig mit einem einfachen Finite-Differenzen-Algorithmus zu bestimmen und an den Schaltungssimulator zu übergeben.

Die Anwendbarkeit des Modells wurde anhand eines Beispiels im Zeitbereich mit einer nichtlinearen Last und für ein spezifisches einfallendes Feld gezeigt. Das vorgestellte Netzwerkmodell ist inhärent stabil und kann in jede Spice verwandte Simulationsumgebung eingebettet werden, beliebig beschaltet (aktiv/passiv, linear/nichtlinear) und für Zeit- und Frequenzbereichssimulationen verwendet werden. Der Vergleich zur wesentlich aufwendigeren 3D-Vollwellensimulation mit anschließendem Vector Fitting Algorithmus und MOR zeigt die hohe Genauigkeit und Effizienz des Modells.

## Literatur

- [1] F. M. Tesche, M. V. Ianoz und T. Karlsson: *EMC Analysis Methods and Computational Models*. New York, NJ, 1997
- [2] M. Leone und A. Mantzke: A Foster-Type Field-to-Transmission Line Coupling Model for Broadband Simulation. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 56 (2014), Dezember, Nr. 6
- [3] E. Gad: Circuit-Based Analysis of Electromagnetic Field Coupling With Nonuniform Transmission Lines. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 50 (2008), Februar, Nr. 1
- [4] P. Gómez, P. Moreno und J. L. Naredo: Frequency-Domain Transient Analysis of Nonuniform Lines With Incident Field Excitation. In: *IEEE Transactions on Power Delivery* 20 (2005), Juli, Nr. 3
- [5] A. Mantzke, S. Südekum und M. Leone: Broadband Equivalent-Circuit Model for Non-Uniform Transmission Lines. In: *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, 2015
- [6] Computer Simulation Technology (CST): *Microwave Studio*. Online, 2015. – [www.cst.com](http://www.cst.com)
- [7] A. Taflov: *Computational Electrodynamics - The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House, Inc., 1995
- [8] F. Rachidi: A Review of Field-to-Transmission Line Coupling Models With Special Emphasis to Lightning-Induced Voltages on Overhead Lines. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54 (2012), August, Nr. 4
- [9] ON Semiconductor: *SMF5.0A*. Online, 2015. – [www.onsemi.com](http://www.onsemi.com)
- [10] C.R. Paul: *Analysis of Multiconductor Transmission Lines*. 2. NJ, 2008
- [11] Linear Technology: *LTspice IV*. Online, 2015. – [www.linear.com](http://www.linear.com)
- [12] B. Gustavsen und A. Semlyen: Rational Approximation of Frequency Domain Responses by Vector Fitting. In: *IEEE Transactions on Power Delivery* 14 (1999), Juli, Nr. 3