

Numerische Modellierung von Modenverwirbelungskammern mittels Spektralansatz, Greenscher Funktion des quaderförmigen Hohlraums und Momentenmethode

M. E. Gruber und T. F. Eibert, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Technische Universität München, München, Deutschland

1 Einleitung

Die numerische Modellierung von Modenverwirbelungskammern ist anspruchsvoll. Modenverwirbelungskammern sind elektrisch große und resonante Strukturen. Die elektrische Größe führt zu einer großen Anzahl an Unbekannten. Die Resonanzen verschlechtern die Konvergenz und die Genauigkeit von iterativen Lösern.

Ein vielversprechender Ansatz zur numerischen Modellierung von Modenverwirbelungskammern ist Hohlraum Greensche Funktion Momentenmethode. Im Gegensatz zur normalen Momentenmethode wird anstelle der Greenschen Funktion des freien Raumes, direkt die Greensche Funktion des quaderförmigen Hohlraums als Integralkern benutzt. Je nachdem welches Problem betrachtet wird, verringert sich die Anzahl der Unbekannten um mehrere Größenordnungen, da die Wände der Kammer nicht diskretisiert werden müssen. Allerdings besitzt die Hohlraum Greensche Funktion Momentenmethode in ihrer ursprünglichen Ausprägung auch zwei Nachteile. Einerseits steigt die Komplexität des Verfahrens aufgrund der dicht besetzten Systemmatrix quadratisch mit der Anzahl der Unbekannten. Andererseits ist die Auswertung der Green Funktion bei hohen Frequenzen aufwendig. Aus diesen Gründen wurde die Hohlraum Greensche Funktion Momentenmethode bisher meistens nur zur Modellierung von Modenverwirbelungskammern, die kleine eindimensionale Objekte enthalten, eingesetzt [1] [2] [3] [4] [5].

In [6] wird der erste Nachteil der Hohlraum Green Funktion Methode adressiert. Die Auswertung der Koppelintegrale wird mit Hilfe eines schnellen Spektralbereichsansatzes beschleunigt. Anstatt die Koppelintegrale wie üblich im Ortsbereich auszuwerten, werden Sie in den Spektralbereich transformiert. Im Spektralbereich zerfallen die verschachtelten Integrale über Quell- und Testbereich, in zwei nicht verschachtelte Integrale, eines über den Quell- und eines über den Testbereich. Werden die Integrale vorab berechnet und gespeichert, ist die Integration über Quell- und Testbereich zur Auswertung der Koppelintegrale nicht mehr nötig und die Rechenzeit verringert sich um mehrere Größenordnungen.

Der zweite Nachteil der Hohlraum Green Funktion Methode, die aufwendige Auswertung der Greenschen Funktion bei hohen Frequenzen, wird in [7] adressiert. In [6] wird die Greensche Funktion mit Hilfe der Ewald Methode [8] ausgewertet. Die Ewald Summe konvergiert exponentiell allerdings ist die Anzahl der Terme nur bei niedrigen Frequenzen konstant. Bei höheren Frequenzen wächst die Anzahl der Terme kubisch mit der Frequenz. Alternativ kann die Greensche Funktion des quaderförmigen Hohlraums durch

eine zweidimensionale (2D) Spektralreihe dargestellt werden [9]. Die Anzahl der Terme in der 2D Spektraldarstellung wächst nur quadratisch mit der Frequenz und konvergiert ebenfalls exponentiell, allerdings hängt die Konvergenzrate von der relativen Position von Quell- und Beobachtungspunkt ab. Je näher Quell- und Beobachtungspunkt beieinander liegen, desto langsamer konvergiert die Reihe. Um die Vorteile beider Darstellungen zu vereinen, wurde eine hybride Ewald – 2D Spektral Darstellung vorgeschlagen [7]. Das Simulationsgebiet wird in Gruppen unterteilt. Wenn der Beobachtungspunkt in der Quellgruppe oder in einer benachbarten Gruppe liegt, wird die Ewald Summe verwendet, andernfalls wird eine der 2D Spektralreihen benutzt, um die Greensche Funktion zu berechnen. Die hybride Darstellung reduziert die Komplexität der Greenschen Funktion bzgl. der Frequenz von kubisch auf quadratisch. Um die Auswertung der Koppelintegrale zu beschleunigen wird der schnelle Spektralbereichsansatz aus [6] zu einem schnellen Gruppen Spektralbereichsansatz erweitert, dessen Funktionsweise ähnlich derer der schnellen Multipolmethode ist [7].

Die in [6], [7] vorgestellten Methoden sind auf die Modellierung ideal elektrisch leitender Objekte beschränkt. Um elektrisch gut leitende oder dielektrische Objekte zu betrachten, müssen neben elektrischen Strömen auch magnetische Ströme behandelt werden können. Dies erfordert die Erweiterung der Greenschen Funktion und des Spektralbereichsansatzes auf magnetische Ströme. In [10] wird der schnelle Spektralbereichsansatz auf magnetische Ströme angewandt.

In dieser Arbeit wird der schnelle Gruppen Spektralbereichsansatz für magnetische Ströme vorgestellt. Die 2D Spektraldarstellung der Greenschen Funktion für magnetische Ströme wird hergeleitet und der schnelle Gruppen Spektralbereichsansatz wird auf magnetische Ströme erweitert. Numerische Ergebnisse zeigen den Vorteil des schnellen Gruppen Spektralbereichsansatzes gegenüber dem schnellen Spektralbereichsansatz und einer gewöhnlichen Momentenmethode, die mit der mehrstufigen schnellen Multipolmethode beschleunigt wird [11].

2 Theorie

2.1 Integralgleichung

Ein idealer quaderförmiger Hohlraum enthält beliebig geformte ideal elektrisch leitende, gut leitende, oder/und dielektrische Objekte. Der Hohlraum wird durch ein zeitharmonisches elektromagnetisches Feld \mathbf{E}_{inc} angeregt. Mit Hilfe des Huygens Prinzips und der Momentenmethode lässt sich das Randwertproblem durch eine elektrische Feld Integralgleichung der Form

$$(\mathbf{A} + \mathbf{D})\mathbf{v} + \mathbf{Z}\mathbf{i} = \mathbf{g} \quad (1)$$

approximieren, wobei \mathbf{v} und \mathbf{i} die diskreten magnetischen und elektrischen Ströme sind und \mathbf{g} die diskrete Anregung ist [12]. Die Anzahl der Unbekannten wird mit N bezeichnet. Im Gegensatz zur Momentenmethode mit der Greenschen Funktion des freien Raums existieren die diskreten elektrischen und magnetischen Ströme nur auf den Objekten im

Hohlraum und nicht dessen Wänden, da diese bereits in der Greenschen Funktion enthalten sind, s. Abb. 1.

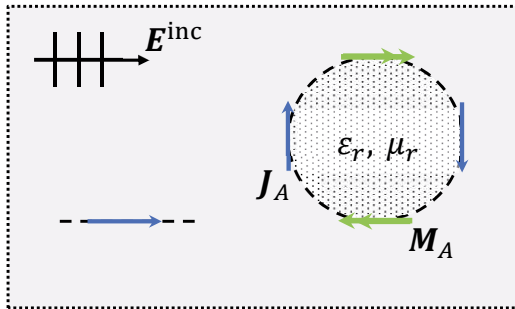


Abb. 1: Äquivalentes Problem des leeren Hohlraums

Die Systemmatrizen \mathbf{A} , \mathbf{D} und \mathbf{Z} enthalten die Koppelintegrale. Ihre Koeffizienten sind durch

$$A_{mn} = \frac{1}{2} \iint_A \iint_{A'} \boldsymbol{\beta}_m(\mathbf{r}) \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\beta}_n(\mathbf{r}')] da' da \quad (2a)$$

$$D_{mn} = \iint_A \iint_{A'} \boldsymbol{\beta}_m(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_M^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\beta}_n(\mathbf{r}') da' da \quad (2b)$$

$$Z_{mn} = \iint_A \iint_{A'} \boldsymbol{\beta}_m(\mathbf{r}) \cdot \bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\beta}_n(\mathbf{r}') da' da \quad (2c)$$

gegeben, wobei $\boldsymbol{\beta}_n$ die Rao-Wilton-Glisson Basisfunktionen [13], $\hat{\mathbf{n}}$ der Normalenvektor auf der Oberfläche A der Objekte, $m, n = 0, \dots, N$ und $\bar{\mathbf{G}}_J^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und $\bar{\mathbf{G}}_M^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ die Greenschen Funktionen des quaderförmigen Hohlraums für elektrische und magnetische Ströme sind.

Das Gleichungssystem in (1) enthält doppelt so viele Unbekannte (elektrische und magnetische Ströme) wie Gleichungen. Um das Randwertproblem zu lösen, muss zusätzlich ein Gleichungssystem für das Innere des Objekts aufgestellt werden. Im trivialen Fall eines ideal elektrisch leitenden Objekts sind die magnetischen Ströme gleich Null. Im Fall von elektrisch gut leitenden Objekten dienen Impedanzrandbedingungen (engl. impedance boundary condition (IBC) [14]), um das zweite Gleichungssystem aufzustellen. Für dielektrische Objekte eignet sich ein hybrider Finite-Elemente Rand-Integral (engl. finite elements boundary integral (FE/BI) [12]) Ansatz.

2.2 Greensche Funktion des quaderförmigen Hohlraums

Die elektrische Feld Integralgleichung in (1) benötigt die Greenschen Funktion für elektrische und magnetische Ströme. Da die hybride Ewald – 2D Spektral Darstellung benutzt

wird, werden sowohl die Ewald Summen als auch die 2D Spektralreihenentwicklungen der Greenschen Funktionen benötigt. Die Ewald Darstellung und die 2D Spektral Darstellungen der Greenschen Funktion für elektrische Ströme werden in [7] präsentiert. Die Ewald Darstellung für magnetische Ströme findet sich in [10]. Die z-2D Spektraldarstellung der Greenschen Funktion für magnetische Ströme lässt sich herleiten als

$$\mathbf{G}_{M,z-2D}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} H_{mn,i}^{\nabla \times} \hat{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{x}}_k \begin{cases} \xi_{imn}(x, y, c-z) \chi_{kmn}(x', y', z') & \text{wenn } z \geq z' \\ \xi_{i,mn}(x, y, z) \chi_{k,mn}(x', y', c-z') & \text{wenn } z < z' \end{cases} \quad (3)$$

wobei

$$\mathbf{H}_{mn}^{\nabla \times} = \frac{1}{\alpha_{mn} \sin(\alpha_{mn} c)} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_{zz'} \alpha_{mn} & k_y \\ \sigma_{zz'} \alpha_{mn} & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

ϵ_{ijk} das Levi-Civita Symbol, $\alpha_{mn} = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$, $\sigma_{zz'} = 1$ falls $z \geq z'$ und $\sigma_{zz'} = -1$ falls $z < z'$, $k_x = m\pi/a$, $k_y = n\pi/b$ und $a \times b \times c$ die Größe des Hohlraums ist. Die 2D Spektralfunktionen sind durch

$$\xi_{x,mn}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\tau_m \tau_n}{ab}} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\alpha_{mn} z), \quad (5a)$$

$$\xi_{y,mn}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\tau_m \tau_n}{ab}} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\alpha_{mn} z), \quad (5b)$$

$$\xi_{z,mn}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\tau_m \tau_n}{ab}} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\alpha_{mn} z), \quad (5c)$$

$$\chi_{x,mn}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\tau_m \tau_n}{ab}} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cosh(\alpha_{mn} z), \quad (6a)$$

$$\chi_{y,mn}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\tau_m \tau_n}{ab}} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cosh(\alpha_{mn} z), \quad (6b)$$

$$\chi_{z,mn}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\tau_m \tau_n}{ab}} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \sin(\alpha_{mn} z) \quad (6c)$$

gegeben, wobei

$$\tau_i = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0, \\ 2 & \text{für } i > 0. \end{cases}$$

2.2 Schneller Gruppen Spektralbereichsansatz

Der schnelle Gruppen Spektralbereichsansatz wertet die Koppelintegrale im Spektralbereich anstatt im Ortsbereich aus. Aufgrund der hybriden Darstellung der Greenschen Funktion, zerfällt die magnetische Systemmatrix¹ in zwei Teile

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{near}} + \mathbf{D}_{\text{far}} \quad (7)$$

wobei \mathbf{D}_{near} die Nahverkopplungen und \mathbf{D}_{far} die Fernverkopplungen enthält. Die Nahverkopplungen werden mit der Ewald Summe berechnet (s. [10]), während für die Fernverkopplungen die 2D Spektralreihenentwicklung aus (4) benutzt wird.

Analog zu [7] werden zunächst die zum Mittelpunkt einer Gruppe verschoben 2D Spektralfunktionen ξ_{imn}' und χ_{kmn}' eingeführt, um numerische Überläufe zu verhindern. Nach einigen Schritten [7] ergibt sich für die Systemmatrix im Spektralbereich

$$\mathbf{D}_{\text{far},z2D,kl} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_{k,mn}^{\xi} \cdot T_{mn} \tilde{\mathbf{G}}_{M,z-2D,mn}^E \cdot \tilde{\beta}_{l,mn}^{\chi} \quad (8)$$

wobei $\tilde{\mathbf{G}}_{M,z-2D,mn}^E$, $\tilde{\beta}_{k,mn}^{\xi}$ und $\tilde{\beta}_{l,mn}^{\chi}$ die Spektralbereichsdarstellungen der Greenschen Funktion und der Basisfunktionen sind und analog zu [7] definiert sind. Die Funktion T_{mn} führt die Translation zwischen Test- und Quellgruppe aus [7].

Der Spektralbereichsansatz beschleunigt die Auswertung der Koppelintegrale um mehrere Größenordnungen, da die Integration über Test- und Quellbereich entfällt.

3 Numerische Ergebnisse

Eine Modenverwirbelungskammer der Größe $8 \text{ m} \times 4.5 \text{ m} \times 2.8 \text{ m}$ wird betrachtet. In der Kammer befindet sich ein 0.8 m langer, 1 m breiter und 0.6 m hoher metallischer Quader. Die elektrische Leitfähigkeit des Quaders beträgt $\kappa = 10^6 \text{ S/m}$. Der Mittelpunkt des Quaders ist $(6 \text{ m}, 2.25 \text{ m}, 1.4 \text{ m})$. Die Kammer wird mit einem elektrisch kleinen Streifendipol bei 4 diskreten Frequenzen im Frequenzbereich von 100 MHz bis 800 MHz angeregt. Die unterste nutzbare Frequenz der Kammer befindet sich ungefähr bei 130 MHz [15].

Die Quader wird jeweils mit einer durchschnittlichen Kantenlänge von $\lambda/10$ diskretisiert. Die Greensche Funktion wird mit einer Genauigkeit von 10^{-4} berechnet. Das lineare Gleichungssystem wird iterativ mit dem GMRES-Verfahren gelöst. Das Residuum wird ebenfalls auf 10^{-4} gesetzt. Der elektrisch gut leitende Quader wird der Impedanzrandbedingung aus [16] modelliert.

¹ Der schnelle Gruppen Spektralbereichsansatz für die elektrische Systemmatrix \mathbf{Z} wird in [7] vorgestellt.

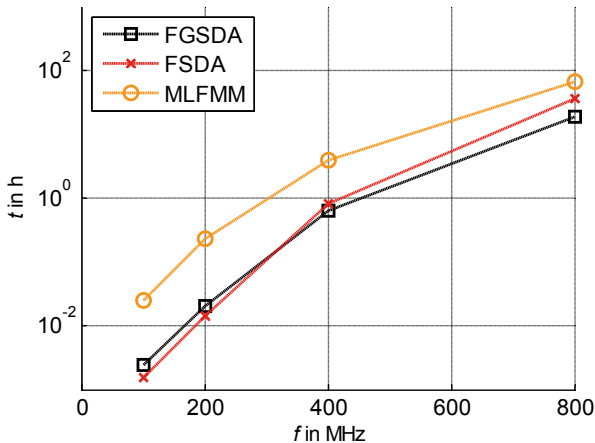


Abb. 2: Rechenzeiten des schnellen Gruppen Spektralbereichsansatzes (FGSDA), des schnellen Spektralbereichsansatzes (FSDA) und der mehrstufigen schnellen Multipol Methode (MLFMM).

Im Folgenden wird der schnelle Gruppen Spektralbereichsansatz (engl. fast group spectral domain approach (FGSDA) [7]) mit dem schnell Spektralbereichsansatz (engl. fast spectral domain approach (FSDA) [6]) und der mehrstufigen schnellen Multipol Methode (engl. multilevel fast multipol method (MLFMM) [11]) verglichen. Die Hohlraum Green Funktion Momentenmethode hat gegenüber der gewöhnlichen Momentmethode den Vorteil, dass die Wände des Hohlraums nicht diskretisiert werden müssen. Bei 800 MHz benötigen die Hohlraum Green Funktion Algorithmen 16 500 Unbekannte, während die MLFMM ungefähr 320 000 benötigt. In Abb. 2 sind die Rechenzeiten der Algorithmen dargestellt. Gegenüber der MLFMM erreicht der FGSDA eine Beschleunigung von einem Faktor 4 bei 800 MHz bis zu einem Faktor 11 bei 200 MHz. Der FGSDA und der FSDA sind ähnlich schnell bei niedrigen Frequenzen. Bei hohen Frequenzen übertrifft der FGSDA den FSDA aufgrund seiner geringeren Komplexität.

4 Bibliographie

- [1] F. Gronwald, „Method of moment analysis of a dipole antenna within a rectangular cavity,“ Bd. 2, 2003, pp. 1144-1147.
- [2] F. Gronwald, „Calculation of mutual antenna coupling within rectangular enclosures,“ *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Bd. 47, Nr. 4, pp. 1021-1025, 2005.
- [3] U. Carlberg, P.-S. Kildal und J. Carlsson, „Study of antennas in reverberation chamber using method of moments with cavity Green’s function calculated by Ewald summation,“ *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Bd. 47, Nr. 4, pp. 805-814, 2005.
- [4] U. Carlberg, P.-S. Kildal und A. A. Kishk, „Fast numerical model of reverberation chambers with metal stirrers using moment method and cavity Green’s function calculated by Ewald summation,“ 2006, pp. 2827-2830.

- [5] U. Carlberg, P.-S. Kildal und J. Carlsson, „Numerical study of position stirring and frequency stirring in a loaded reverberation chamber,“ *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Bd. 51, Nr. 1, pp. 12-17, 2009.
- [6] M. E. Gruber und T. F. Eibert, „Simulation of reverberation chambers using method of moments with cavity Green's function and spectral domain factorization,“ 2013.
- [7] M. E. Gruber und T. F. Eibert, „A hybrid Ewald-Spectral cavity Green's function boundary element method with spectral domain acceleration for modeling of over-moded cavities,“ *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2015.
- [8] P. P. Ewald, „Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale,“ *Annalen der Physik*, Bd. 369, Nr. 3, pp. 253-287, 1921.
- [9] C.-T. Tai und P. Rozenfeld, „Different representations of dyadic Green's functions for a rectangular cavity,“ *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Bd. 24, Nr. 9, pp. 597-601, 1976.
- [10] M. E. Gruber, S. B. Adrian und T. F. Eibert, „A finite element boundary integral formulation using cavity Green's function and spectral domain factorization for simulation of reverberation chambers,“ 2013, pp. 460-463.
- [11] T. Eibert, „A diagonalized multilevel fast multipole method with spherical harmonics expansion of the k-space integrals,“ *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Bd. 53, Nr. 2, pp. 814-817, 2005.
- [12] J.-M. Jin, *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*, Hoboken: IEEE Press, 2010.
- [13] S. Rao, D. Wilton und A. Glisson, „Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape,“ *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Bd. 30, Nr. 3, pp. 409-418, 1982.
- [14] T. B. Senior und J. L. Volakis, *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics*, London: Institution of Electrical Engineers, 1995.
- [15] *Electromagnetic Compatibility (EMC) - Part 4-21: Testing and Measurement Techniques - Reverberation Chamber Test Methods*, Geneva.
- [16] Ismatullah und T. Eibert, „Surface integral equation solutions by hierarchical vector basis functions and spherical harmonics based multilevel fast multipole method,“ *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Bd. 57, Nr. 7, pp. 2084-2093, 2009.