

Effiziente Berechnung der Streuung an elektrisch großen Leitern im Freiraum und Resonator

Dipl.-Phys. Jörg Petzold, Prof. Dr.-Ing. Ralf Vick,
Otto-von-Guericke-Universität, Institut für Medizintechnik
Lehrstuhl für EMV, Magdeburg, Deutschland, joerg.petzold@ovgu.de

1 Einleitung

In früheren Arbeiten wurde die Streuung externer Felder an elektrisch kleinen Strukturen unter Berücksichtigung der Abstrahlungsbedingungen untersucht. Während Letzteres für Freiraum-Bedingungen häufig vernachlässigt werden kann, erweist es sich für Untersuchungen in Hohlraumresonatoren als unerlässlich [4, 1]. Es wurden weiterhin Anstrengungen unternommen, um die Einschränkung auf elektrisch kleine Strukturen zu überwinden [2]. Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren zur Bestimmung der Streuquellen führt basierend auf bekannten Lösungen für das quasi-statische Problem zur einer enormen Zeitersparnis gegenüber üblichen Implementationen der Momenten-Methode (MoM), die die volle Greensche Funktion zur Berechnung der Matrix-Elemente nutzen. Außerdem erlaubt das Verfahren eine vergleichsweise einfache Anwendung auf vom Freiraum abweichende Randbedingungen. Im Abschnitt 2 wird die Methode des kleinen Streuers (MkS) anhand des Beispiels eines dünnen und elektrisch langen Drahtes im Freiraum hergeleitet. Anschließend wird auf Basis der vorhergehenden Erkenntnisse der lange Draht im Hohlraumresonator untersucht. Im Abschnitt 3 werden anhand konkreter Geometrien die Ergebnisse der MkS mit Ergebnissen verschiedener Standard-MoM-Solver verglichen.

2 Analytisches Modell

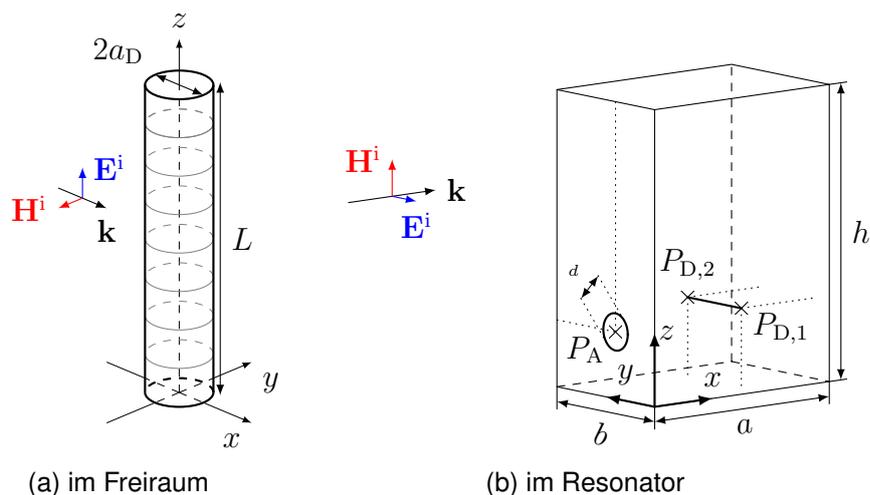


Abbildung 1: Geometrie der untersuchten Konfigurationen

2.1 Im Freiraum

Der Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen soll die Pocklington-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_0^L G_{f,D}^{A_e} J_z(z') dz' = -j\omega\varepsilon E_z^i(z) \quad (1)$$

$$\text{mit } G_{f,D}^{A_e} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad \text{und} \quad R = \sqrt{(z - z')^2 + a_D^2},$$

mit der Referenz auf die Abbildung 1a sein. Es handelt sich um eine Integral- und Differentialgleichung zur Bestimmung der Stromverteilung J_z , die sich mit Hilfe des Formalismus der Greenschen Funktionen aus den Maxwell-Gleichungen ableiten lässt. Das einfallende Feld E_z^i ist dabei das Feld, das in Abwesenheit des Leiters an dessen Ort existieren würde. Die Greensche Funktion $G_{f,D}^{A_e}$ beschreibt die Wechselwirkung einer elektrischen Punkt-Quelle mit dem zugehörigen Vektorpotential. Der erste Term in Klammern auf der linken Seite von (1) stellt dann die Beziehung des Vektorpotentials der Stromverteilung zum zugehörigen Feld her. Im Allgemeinen existiert keine direkte analytische Lösung von (1), jedoch können mit Hilfe numerischer Verfahren wie der Momentenmethode sehr gute Näherungen gefunden werden. In dieser Arbeit findet alternativ ein Verfahren zur Regularisierung von $G_{f,D}^{A_e}$ Anwendung, das es erlaubt den Einfluss der Selbstrückwirkung des Drahtes und dessen Abstrahlung getrennt zu betrachten. Die allgemeine Vorgehensweise besteht aus der Extraktion des quasi-singulären Anteils durch

$$4\pi G_{f,D}^A = \underbrace{\frac{1}{R}}_{\Re_s} + \underbrace{\frac{\cos(-kR) - 1}{R}}_{\Re_r} + j \underbrace{\frac{\sin(-kR)}{R}}_{\Im} \quad (2)$$

Die Abb. 2 demonstriert die Verläufe der einzelnen Anteile. Dabei ist zu erkennen, dass

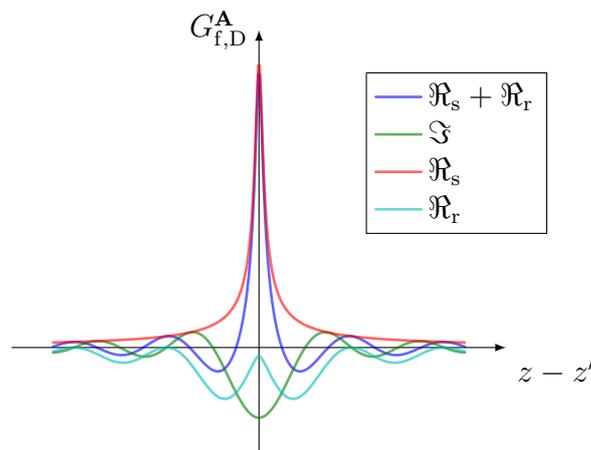


Abbildung 2: Verlauf einzelner Anteile der Greenschen Funktion für einen dünnen Leiter im Freiraum

der \Re_s -Anteil die Singularität nahe $z - z' = 0$ enthält und eine Approximation des Realteils darstellt. Zerlegt man gleichzeitig die Anregung in die Anteile

$$E^{i,\Re_s} + E^{i,\Re_r} + E^{i,\Im} = E_z^i \quad (3)$$

die mit den jeweiligen Teilen der Greenschen Funktion assoziiert sind, ermöglicht sich eine getrennte Behandlung der singulären und regulären Wechselwirkungen. Setzt man den ersten Term auf der rechten Seite von (2) in (1) ein, lässt sich die erhaltene Gleichung analog zu den Grundlagen der Leitungstheorie behandeln. In [5] wird gezeigt, dass für dünne, lange Drähte die unbekannte Stromverteilung J_z aus dem Integral gezogen werden kann. So ergibt sich die Differential-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) J_{e,z}(z)A(z) = -j\omega\varepsilon 4\pi E^{i,\Re_s}(z), \quad (4)$$

$$\text{mit } A(z) = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} dz'. \quad (5)$$

Die Gleichung (4) kann analytisch gelöst werden und die Lösung lässt sich für eine allgemeine Anregung schreiben als

$$J_{e,z}(z) = \int_0^L G_D(z, z') E^{i,\Re_s}(z') dz', \quad (6)$$

wobei G_D die Greensche Funktion für die Stromverteilung ist und lautet

$$G_D = -\frac{4\pi j\omega\varepsilon}{A} \frac{\sin(kz_<) \sin(k(z_> - L))}{\sin(kL)} \quad (7)$$

$$\text{mit } z_< = \min\{z, z'\} \quad \text{und} \quad z_> = \max\{z, z'\}.$$

Um eine beliebige Anregung und um später die Integration der Lösung des Imaginärteils aus (2) zu ermöglichen, wird der Leiter nun in N Elemente der Länge δl unterteilt, so dass von einer elementweise konstanten Anregung ausgegangen werden kann. Die Anzahl der Elemente N wird dabei mit

$$N = \frac{12L}{\lambda_{\min}} \quad (8)$$

bestimmt. Dabei ist L die Länge des Leiters und λ_{\min} die kleinste auftretende Wellenlänge im betrachteten Frequenzband. So lässt sich die Stromverteilung auf Basis von (6) für die einzelnen Elemente schreiben als

$$J_1(z) \Big|_{0 \leq z < \delta l} = E^{i,\Re_s}(z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} G_D(z, z') dz' + E^{i,\Re_s}(z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} G_D(z, z') dz' + \dots \quad (9a)$$

$$J_2(z) \Big|_{\delta l \leq z < 2\delta l} = E^{i,\Re_s}(z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} G_D(z, z') dz' + E^{i,\Re_s}(z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} G_D(z, z') dz' + \dots \quad (9b)$$

⋮

$$J_N(z) \Big|_{(N-1)\delta l \leq z < N\delta l} = E^{i,\Re_s}(z_1) \int_{z_N - \frac{\delta l}{2}}^{z_N + \frac{\delta l}{2}} G_D(z, z') dz' + E^{i,\Re_s}(z_2) \int_{z_N - \frac{\delta l}{2}}^{z_N + \frac{\delta l}{2}} G_D(z, z') dz' + \dots \quad (9c)$$

Nach einer weiteren Integration

$$\int_{z_n - \frac{\delta l}{2}}^{z_n + \frac{\delta l}{2}} J_n(z) dz = j\omega \varepsilon p_n \quad (10)$$

lässt sich das lineare Gleichungssystem (9) als Matrixgleichung

$$p_n = [G_D] E_n^{i, \Re_s} \quad (11)$$

für ein Set von insgesamt N elektrisch kleinen elektrischen Dipolmomenten p_n formulieren. Es ist zu beachten das die Anregung E_n^{i, \Re_s} unbekannt ist. Nur die Summe der Feldanteile aus (3) ist bekannt. Der übrige Anteil $E_n^{i, \Im}$ ist mit dem Imaginärteil der Greenschen Funktion assoziiert. Setzt man diesen in (1) ein kann der Differential-Ausdruck in den Klammern in das Integral gezogen werden, da der Ausdruck im Integral regulär ist. Nach dem Ausführen der Ableitungen und der Berücksichtigung der Diskretisierung erhält man ein zweites Gleichungssystem

$$E^{i, \Im}(z_1) = G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e}(z_1, z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} J_1(z') dz' + G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e}(z_1, z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} J_2(z') dz' + \dots \quad (12a)$$

$$E^{i, \Im}(z_2) = G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e}(z_2, z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} J_1(z') dz' + G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e}(z_2, z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} J_2(z') dz' + \dots \quad (12b)$$

⋮

$$E^{i, \Im}(z_N) = G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e}(z_N, z_1) \int_{z_1 - \frac{\delta l}{2}}^{z_1 + \frac{\delta l}{2}} J_1(z') dz' + G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e}(z_N, z_2) \int_{z_2 - \frac{\delta l}{2}}^{z_2 + \frac{\delta l}{2}} J_2(z') dz' + \dots, \quad (12c)$$

das sich zusammen mit

$$j\omega \varepsilon G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e} = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) G_{f, \Im}^{\mathbf{A}_e} \quad (13)$$

erneut als Matrix-Gleichung für N elektrische Dipolmomente

$$E_n^{i, \Im} = [G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e}] p_n \quad (14)$$

schreiben lässt. Durch die Inversion der Matrix aus (11), dem anschließenden Einsetzen in (3) erhält man so eine Matrixgleichung

$$E_n^i = [[G_D]^{-1} + G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e}] p_n \quad (15)$$

und durch erneute Inversion der Summe beider Matrizen die Lösung

$$p_n = [[G_D]^{-1} + G_{f, \Im}^{\mathbf{E}_e}]^{-1} E_n^i. \quad (16)$$

In dieser Arbeit wird sich auf die Behandlung des ersten und letzten Summanden von (3) beschränkt, da die Betrachtungen zum regularisierten reellen Anteil \Re_r der Lösung den Rahmen sprengen würde. Dennoch kann dieser ähnlich des \Im -Anteils behandelt werden und geht in die Ergebnisse in Abschnitt 3 ein. Im Abschnitt 3.1 wird anhand eines konkreten Beispiels ein Vergleich der Ergebnisse von (16) und einer MoM-Lösung angestellt. Das so validierte Modell soll im nächsten Schritt auf den Leiter im Hohlraumresonator angewandt werden.

2.2 Im Resonator

Die Schritte, die aus den Maxwell-Gleichungen zu (1) führen sind allgemein gültig und nicht auf den Freiraum beschränkt. Also lässt sich auch für den Leiter im Resonator eine Pocklington-Gleichung aufstellen. Für eine Geometrie, wie sie in Abb. 1b dargestellt ist, ergibt sich so

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) \int_{\text{Draht}} \left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy}(y, y') J_{e,y}(y') dy' = -j\omega\epsilon E_y^e(y). \quad (17)$$

Die Gleichung (17) entspricht, bis auf die Koordinatenwechsel und die Greensche Funktion $\left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy}$, der Gleichung (1). Neu ist die dyadische Greensche Funktion für das Vektorpotential einer elektrischen Quelle im Resonator, deren yy -Komponente der diagonalen Dyade $\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}$

$$\begin{aligned} \left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy} &= \frac{1}{ha} \sum_{n_z, n_x=0}^{\infty} \epsilon_{n_z} \epsilon_{n_x} \sin(k_z^\nu z) \sin(k_z^\nu z') \\ &\quad \times \sin(k_x^\nu x) \sin(k_x^\nu x') \frac{1}{\gamma_\nu \sinh(\gamma_\nu b)} \\ &\quad \times \begin{cases} \cosh(\gamma_\nu y) \cosh(\gamma_\nu(b-y')) & \text{für } y \geq y' \\ \cosh(\gamma_\nu y') \cosh(\gamma_\nu(b-y)) & \text{für } y' \geq y \end{cases}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei } \gamma_\nu &= \sqrt{(k_z^\nu)^2 + (k_x^\nu)^2 - k_c^2} \\ \text{und } k_x^\nu &= \frac{\pi n_x}{a}, \quad k_y^\nu = \frac{\pi n_y}{b}, \quad k_z^\nu = \frac{\pi n_z}{h}, \end{aligned}$$

aufgrund der gewählten Geometrie, die einzig wirksame Komponente ist. Die Gleichung (18) gibt die Moden-Darstellung der Greenschen Funktion für einen Hohlraumresonator wieder, deren Herleitungen [3] entnommen werden kann. In [4] wird ein Verfahren zu Regularisierung von (18) für den Fall elektrisch kleiner Quellen erläutert. Dazu wird die unendliche Summe in (18) in eine endliche und eine unendliche Summe

$$\left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy} = \frac{1}{ha} \left(\sum_{n_z, n_x=0}^{\gamma_{\max}} \dots + \sum_{\gamma_{\max}}^{\infty} \dots \right) \quad (19)$$

gespalten. Die zweite Summe auf der rechten Seite von (19) kann durch ein Integral approximiert werden. So ergibt sich

$$\left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy} \approx \underbrace{\frac{1}{ha} \sum_{n_z, n_x=0}^{\gamma_{\max}} \dots}_{G_{c,r}^{\mathbf{A}_m}} + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\gamma_{\max} R}}{R}. \quad (20)$$

Der zweite Summand in (20) ähnelt der Greenschen Funktion für den Freiraum und kann wie in Abschnitt 2.1 behandelt werden, während der erste Summand den Platz des Imaginärteils in (2) einnimmt. Wiederholt man nun die Vorgehensweise, die im Abschnitt 2.1 beschrieben wird, diesmal auf Basis von (20), ergibt sich zusammen mit

$$j\omega\epsilon G_{c,r}^{\mathbf{E}_e} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) \left(\overline{\overline{G}}_{c,D}^{\mathbf{A}_e}\right)_{yy} \quad (21)$$

der Ausdruck

$$p_n = [[G_D]^{-1} + [G_{c,r}^{E_e}]]^{-1} E_n^e. \quad (22)$$

Ein Vergleich von (22) und (16) zeigt schnell, dass sich lediglich der für die Abstrahlung maßgebliche Term $[G_{c,r}^{E_e}]$ verändert hat, während die Nahwechselwirkung $[G_D]^{-1}$ im Freiraum und im Resonator identisch ist. Im Abschnitt 3.2 wird ein Vergleich der MkS und der MoM für ein konkretes Beispiel angestellt, um die Methode zu validieren.

3 Berechnung der eingekoppelten Ströme

In diesem Abschnitt wird die MkS anhand konkreter Beispiele mit den Ergebnissen kommerzieller MoM-Solver validiert und diskutiert. Dazu wird Bezug auf die geometrischen Darstellungen aus der Abb. 1 genommen. Verglichen werden jeweils die eingekoppelten Ströme in einen elektrisch großen Leiter im Freiraum und im Resonator. Dazu werden die mittels mit (22) oder (16) bestimmten Dipolmomente durch

$$j\omega\varepsilon p_n = J_{e,n} \delta l \quad (23)$$

als elementweise konstante Ströme ausgedrückt. Dabei ist festzuhalten, dass dies lediglich dem Vergleich der Ergebnisse dient. Bei der MkS selbst muss keine Annahme über die Ortsabhängigkeit des Stroms getroffen werden.

3.1 Im Freiraum

Der untersuchte Leiter im Freiraum hatte die Länge $L = 1$ m und einen Leiterradius von $a = 1$ mm. Er wurde mit einer linear polarisierten ebene Welle mit $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\phi = 0$ und einer Amplitude des elektrisches Feldes von $E_0 = 1 \frac{V}{m}$ angeregt (siehe Abb. 1a). Die anregende Feldkomponente lässt sich dann als

$$E_z^i(z) = E_0 \sin(\theta) e^{jkz \cos(\theta)} \quad (24)$$

schreiben. In den Abb. 3 sind jeweils die Ergebnisse für den eingekoppelten Strom in der Mitte und Nahe eines Endes des Leiters für einen Frequenzbereich von 0 GHz bis 5 GHz dargestellt. Klar zu erkennen sind die erwarteten Antennen-Resonanzen und eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen des kommerziellen MoM-Solvers CONCEPT II.

3.2 Im Resonator

Die gewählten Parameter für den Leiter im Resonator sind in der Tabelle 1 zusammengefasst. Da die vergleichsweise einfache Anregung durch eine ebenen Welle im Inneren des Resonators nicht sinnvoll ist, wurden hier die Anregung zum Einen mittels einer idealen Spannungsquelle in der Mitte des Leiters und zum Anderen mittels einer elektrisch kleinen Apertur, die durch ein äußeres Feld angeregt wird, modelliert. Zur Modellierung der Apertur wurden Ergebnisse aus [1] genutzt. Beide Ergebnisse werden in den Abb. 4 mit Resultaten des kommerziellen MoM-Solvers FEKO verglichen.

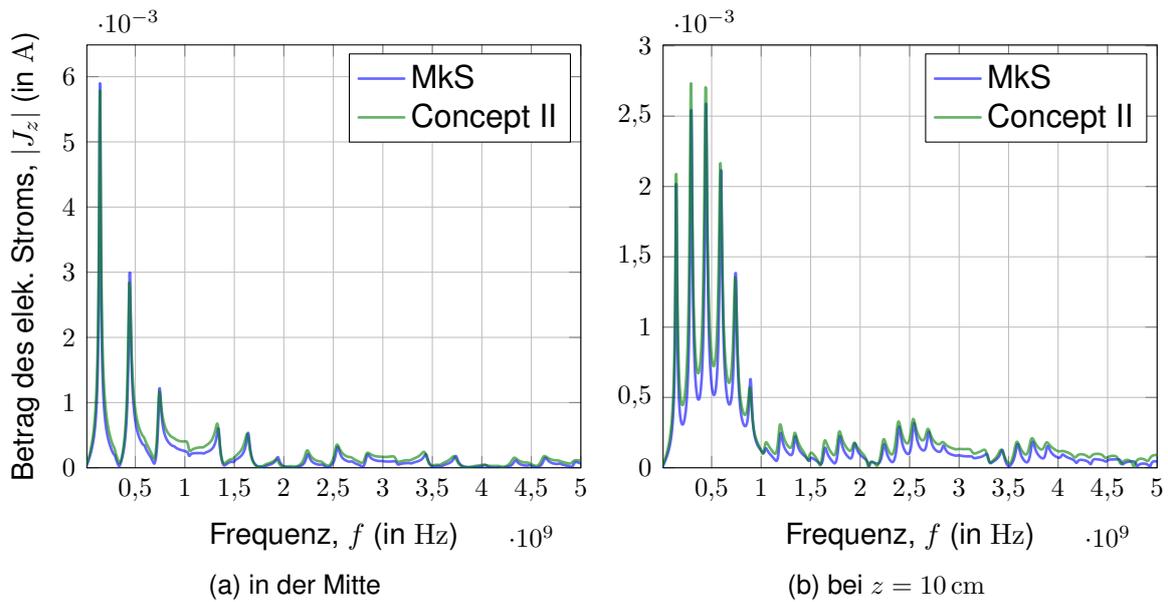


Abbildung 3: Betrag des elektrischen Stroms an verschiedenen Orten des 1 m langen Leiters, bestimmt mit (16) und mit Concept II

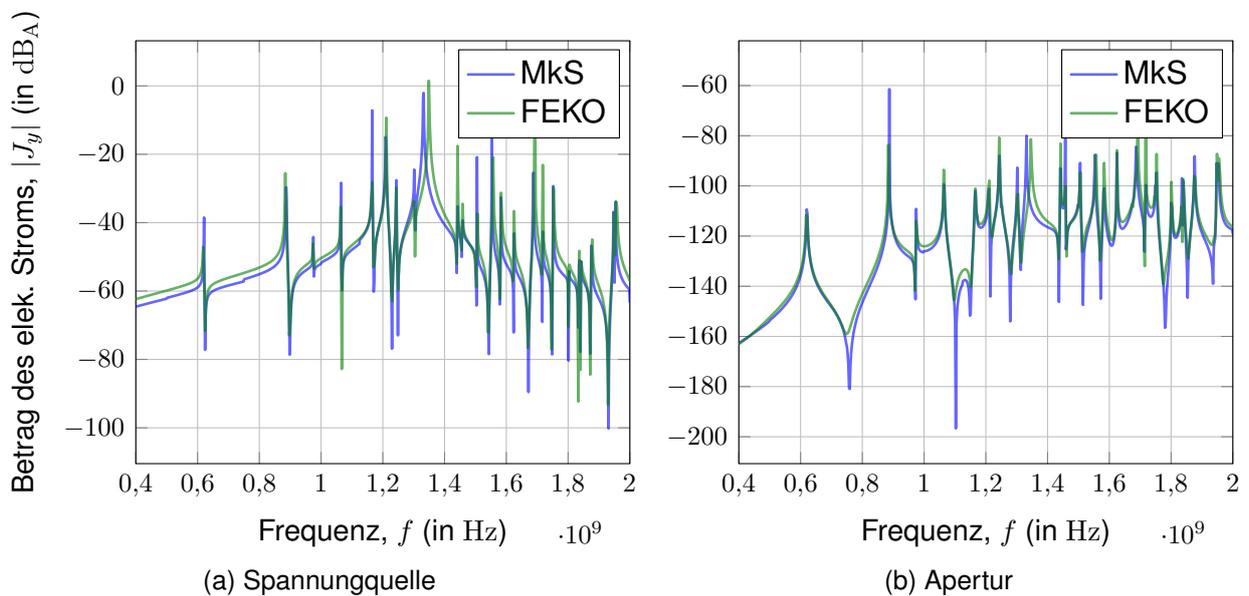


Abbildung 4: Betrag des elektrischen Stroms in der Mitte eines Leiters im Resonator für verschiedene Anregungen, bestimmt mit (22) und dem MoM-Solver von FEKO

Tabelle 1: Parameter des Setups aus Abb. 1b

Parameter	$(a \ b \ h)$	P_A	d	$P_{D,1}$	$P_{D,2}$	L_D	a_D
Werte in cm	(30 20 40)	(0 8 7)	2	(17 2,5 11)	(17 13,5 11)	11	0,05

4 Zusammenfassung

Durch die Anwendung des Verfahrens der Regularisierung kann bei der MkS im Gegensatz zu den meisten MoM-Solvern auf jede numerische Integration verzichtet werden, was bei einer entsprechenden Implementierung einen geringen Rechenaufwand erwarten lässt. Es ist anzumerken, dass die MkS in der hier vorgestellte Form allerdings nur auf gerade, dünne Leiter anwendbar ist, während die MoM sehr viel allgemeinere Probleme behandeln kann. Ein Vorteil ist die relativ einfache Anpassung der MkS auf vom Freiraum abweichende Abstrahlungsbedingungen. Für die Berechnungen im Resonator fallen zusätzlich zur analytischen Lösungen des quasi-statischen Teils des Problems mit der MkS nur ein Bruchteil der Rechenzeiten gängiger MoM-Solver an, da bei der MkS nur die interne Struktur diskretisiert werden muss, während bei der Momenten-Methode auch der Resonator diskretisiert werden muss. Die geringen Abweichungen nahe der Leiterresonanzen finden ihre Ursache in einer kleinen Verschiebung der Resonanzfrequenzen des Leiters durch die Approximation des Realteils der Greenschen Funktionen. Eine Erweiterung der Methode auf komplexere Leitergeometrien und weitere Abstrahlungsumgebungen erscheint möglich und wird Bestandteil zukünftiger Arbeiten sein.

Literatur

- [1] PETZOLD, Jörg ; PANNICKE, Enrico ; TKACHENKO, Sergey ; VICK, Ralf: External scattering by rectangular cavities with small apertures. In: *2015 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC 2015*, S. 68–73
- [2] RAMBOUSKY, Ronald ; TKACHENKO, Sergey ; NITSCH, Jürgen: Calculation of currents induced in a long transmission line placed symmetrically inside a rectangular cavity. In: *2013 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility - EMC 2013*, S. 796–801
- [3] TESCHE, Frederick M. ; IANOZ, M. ; KARLSSON, Torbjörn: *EMC analysis methods and computational models*. New York : John Wiley & Sons, 1997. – ISBN 0–471–15573–X
- [4] TKACHENKO, Sergey ; NITSCH, Jürgen ; AL-HAMID, Moawia: High-Frequency Electromagnetic Field Coupling to Small Antennae in a Rectangular Resonator. In: *International Journal of Antennas and Propagation* 2012 (2012), S. 1–6. <http://dx.doi.org/10.1155/2012/897074>. – DOI 10.1155/2012/897074. – ISSN 1687–5869
- [5] TKATCHENKO, S. ; RACHIDI, F. ; IANOZ, M.: Electromagnetic field coupling to a line of finite length: theory and fast iterative solutions in frequency and time domains. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 37 (1995), Nr. 4, S. 509–518. <http://dx.doi.org/10.1109/15.477335>. – DOI 10.1109/15.477335. – ISSN 0018–9375