

KOHÄRENTE UND DISSIPATIVE PRÄPARATION VON QUANTENZUSTÄNDEN

Der Fakultät für Mathematik und Physik der
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover zur

Habilitation

vorgelegte wissenschaftliche Arbeit

Dr. Hendrik Weimer

Oktober 2017

ZUSAMMENFASSUNG

In den letzten Jahren wurden bei der Kontrolle von Quantenzuständen einzelner Atome, Moleküle und Spins in Festkörpern bahnbrechende Erfolge erzielt, und sogar quantenmechanische Verschränkung zwischen einzelnen Quantenobjekten beobachtet. Für eine Nutzbarmachung in Quantentechnologien, wie Quantensimulation oder Quantencomputing ist die Skalierung auf größere Teilchenzahlen die zentrale Herausforderung. Dabei stellen zu einer Dekohärenz des Quantenzustands führende Kopplungen an die Umgebung die größte Schwierigkeit dar.

Die vorliegende Habilitationsschrift umfasst wissenschaftliche Arbeiten [A1-B15], welche diese ungelösten Probleme auf zwei Arten adressieren. Zum einen werden Kapitel 2 neue Wege vorgestellt, wie sich durch die kohärente Kontrolle von Vielteilchensystemen der Einfluss von Dekohärenzprozessen mindern lässt. Zum anderen wird in Kapitel 3 gezeigt, wie sich kontrollierte Dissipationskanäle ausnutzen lassen, um Vielteilchenzustände mit maßgeschneiderten Eigenschaften zu erzeugen. Der Vorteil dieser dissipation Zustandspräparation ist dabei, dass die Beschreibung der Fehlerquellen auf derselben Ebene wie die gewünschte Dynamik erfolgt.

Die genaue Untersuchung von Dekohärenzeffekten erfordert die Beschreibung des zu untersuchenden Quantensystems als ein an die Umgebung gekoppeltes offenes System. Hierfür wird in Kapitel 4 ein Variationsprinzip vorgestellt, das eine effiziente Analyse deartiger Vielteilchensysteme ermöglicht, und damit den bestehenden Mangel an geeigneten theoretischen Methoden für diese Systeme behebt. Die Resultate dieser variationellen Beschreibung lassen sich wiederum unmittelbar für entsprechende Anwendung von offenen Vielteilchensystemen nutzen, beispielsweise für die Quantensensorik.

ABSTRACT

Rapid experimental progress in recent year has led to the control of quantum states of individual atoms, molecules, and solid state spins, even leading the the observation of quantum entanglement between individual quantum objects. For applications in emerging quantum technolgoies like quantum simulation or quantum computing, it will be necessary to scale up these systems to larger sizes. In this endeavor, unwanted interactions with the environment leading to decoherence of the quantum state present the biggest challenge.

The work presented in this thesis [A1-B15] comprises publications that address this challenge in two complementary ways. The approach presented in chapter 2 demonstrates novel ways to engineer interactions in quantum many-body systems that lead to reduced sensitivity to decoherence processes. The second approach presented in chapter 3 uses controlled dissipation to prepare tailored quantum many-body states. The central advantage of this dissipative state preparation is the common footing of the description of both unwanted error sources and the desired dynamics.

A detailed investigation of decoherence effects demands the description of the quantum system of interest as an open quantum system coupled to an external environment. Chapter 4 presents a variational principle to efficiently study such systems and thereby closes a gap in the lack of suitable methods to tackle such many-body systems. At the same time, the results of this variational description lead to immediate applications of open quantum many-body systems, for instance in their use as quantum sensors.

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
2	Kohärente Zustandspräparation in dipolaren Systemen	3
2.1	Verschränkung in ungeordneten Systemen	3
2.1.1	Dipolare Kristalle als Quanten-Bus	3
2.1.2	Kollektiv verstärkte Wechselwirkungen	4
2.2	Geordnete Spin-Zustände ultrakalter polarer Moleküle	6
2.2.1	Dynamisches Wachstum von Spin-Kristallen	6
2.2.2	Topologisch geordnete Zustände	7
3	Dissipative Zustandspräparation in wechselwirkenden Rydberg-Gasen	9
3.1	Dissipativer Bindungsmechanismus bei repulsiver Wechselwirkung .	10
3.2	Zustandspräparation mit korrelierten Sprung-Operatoren	11
4	Variationsprinzip für dissipative Quantensysteme	15
4.1	Variationelle Norm	16
4.1.1	Stationärer Zustand	16
4.1.2	Zeitentwicklung	18
4.2	Dissipative Ising-Modelle	19
4.2.1	Symmetriebrechung durch Dissipation	20
4.2.2	Erhaltung der Ising-Symmetrie	21
4.3	Dissipativer Antiferromagnetismus im Fermi-Hubbard-Modell	23
5	Ausblick	25
6	Ausgewählte Originalarbeiten	27
7	Nicht referierte Manuskripte	29
8	Literaturverzeichnis	31

EINLEITUNG

Das Ausnutzen nichtklassischer Eigenschaften von Vielteilchen-Quantensystemen legt die Grundlagen für neue und disruptive Quantentechnologien wie Quantencomputer, Quantenkryptographie oder Quantenmetrologie. Eine zentrale Herausforderung auf dem Weg zur Realisierung solcher revolutionären Anwendungen ist die kontrollierte Erzeugung von maßgeschneiderten Quantenzuständen innerhalb dieser Systeme. Während herausragende experimentelle Erfolge bei der Kontrolle von Quantensystemen bis hin zu einzelnen Atomen erzielt wurden, setzen diese neuen Technologien auf kollektive Effekte, die nur verstanden werden können, wenn das Vielteilchen-Quantensystem als Ganzes betrachtet wird. Diese Eigenschaft erschwert auch das theoretische Verständnis, da die benötigten Ressourcen typischerweise exponentiell mit der Anzahl der untersuchten Teilchen ansteigen.

Für eine lange Zeit galt die herrschende Meinung, dass zur Realisierung dieser Quantentechnologien der nächsten Generation die verwendeten Quantensysteme perfekt von ihrer Umgebung isoliert werden müssten, da ansonsten eine durch die Umgebung induzierte Dissipation die Quanteneigenschaften zerstören würde. Allerdings wurde in den letzten Jahren durch eine Reihe von Theoriewerken ersichtlich, dass der gezielte Einsatz von Dissipation den gegenteiligen Effekt haben kann und das Quantensystem in einen gewünschten Zustand steuern kann, der für weitere Anwendungen genutzt werden kann [16–18].

Die vorliegende Arbeit trägt dieser Entwicklung Rechnung. Zunächst werden im zweiten Kapitel Strategien vorgestellt, um eine effiziente kohärente Präparation von Quantenzuständen zu erreichen. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Realisierung von quantenmechanischer Verschränkung in ungeordneten Systemen. Hierbei werden mit Stickstoff-Fehlstellen-Zentren in Diamanten und ultrakalten polaren Molekülen Systeme mit dipolaren langreichweitigen Wechselwirkungen untersucht.

Im dritten Kapitel werden diese Untersuchungen auf dissipative Vielteilchensysteme erweitert. Hierbei stehen wechselwirkende Rydberg-Gase im Vordergrund,

da diese starke und langreichweitige Wechselwirkung mit exzellent kontrollierbaren Dissipationskanälen vereinen. In diesem Kontext wird ein neuartiger dissipativer Bindungszustand vorgestellt, und gezeigt dass dieser selbst im Falle rein repulsiver Wechselwirkungen zwischen den Bindungspartnern vorliegt. Daneben bieten Rydberg-Gase die Möglichkeit, dissipative Prozesse gezielt zu steuern, und so eine weite Klasse von Dissipationskanälen zu realisieren, beispielsweise für die Erzeugung quantenmechanischer Verschränkung durch Dissipation.

Ausgehend von diesen vielversprechenden Resultaten wird im vierten Kapitel der Fokus auf allgemeine Eigenschaften von dissipativen Vielteilchensystemen gelegt, um ein tieferes Verständnis zu erzielen, was wiederum zur Entwicklung neuer Strategien für die Zustandspräparation genutzt werden kann. Hierbei steht die Vorstellung eines mächtigen Variationsprinzips für offene Quantensysteme im Vordergrund. Da offene Vielteilchensysteme mit den für Gleichgewichts-Systeme entwickelten Methoden nicht analysiert werden können, stellt dieses Variationsprinzip einen umso wichtigeren Beitrag dar. Die erfolgreiche Anwendung des Variationsprinzips für paradigmatische Vielteilchen-Modell liefert auch unmittelbare Anwendung, beispielsweise in der Quanten-Sensorik.

KOHÄRENTE ZUSTANDSPRÄPARATION IN DIPOLAREN SYSTEMEN

2.1 Verschränkung in ungeordneten Systemen

Für skalierbare Quanteninformationsverarbeitung ist es erforderlich, dass Gatteroperationen zwischen räumlich getrennten Qubits durchgeführt werden können [19]. Speziell für Stickstoff-Fehlstellen-Zentren (NV-Zentren) in Diamanten ist dies ein ungelöstes Problem, da die direkte magnetische Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen den einzelnen NV-Zentren zu schwach ist, um die für eine optische Adressierbarkeit nötigen Distanzen zu überbrücken. Die Verwendung von Spin-Ketten als Quanten-Bus zur Informationsvermittlung [20] scheidet ebenfalls aus, da die Herstellung von NV-Ensembles unweigerlich zu einer räumlich mehr oder weniger zufälligen Anordnung der Spins und damit zu starken Lokalisierungseffekten führt.

2.1.1 Dipolare Kristalle als Quanten-Bus

Ein möglicher Ausweg ist die Erzeugung eines räumlich geordneten Spin-Zustands für das ungeordnete Ensemble. Hier bieten sich insbesondere dipolare Spin-Kristalle als geeignet an, welche ursprünglich zur Beschreibung ultrakalter Rydberg-Gase eingeführt wurden [21]. Im Kontext von NV-Zentren lässt sich dies durch die Kopplung des $m_s = 0$ Grundzustands an den $m_s = 1$ Zustand mithilfe von Mikrowellenfeldern als effektives Zwei-Niveau-System realisieren. Der Hamiltonian für das NV-Ensemble ist unter Verwendung von Pauli-Matrizen σ^α dabei gegeben durch

$$H = -\frac{\hbar\Delta}{2} \sum_i \sigma_i^z + \frac{\hbar\Omega}{2} \sum_i \sigma_i^x + \sum_{i<j} \frac{\mu^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} P_i^1 P_j^1, \quad (2.1)$$

wobei Δ und Ω die Verstimmung bzw. die Rabi-Frequenz des Mikrowellenfeldes angeben, während die magnetische Dipolwechselwirkung an den Projektor $P^1 = (1 + \sigma^z)/2$ auf den $m_s = 1$ Zustand mit Dipolmoment μ gekoppelt ist. Die Positionen \mathbf{r}_i der NV-Zentren sind dabei zufällig in einer eindimensionalen Kette angeordnet. Wechselwirkungs-Terme der Form $\sigma_i^+ \sigma_j^- + \text{h.c.}$ können durch zusätzliche Mikrowellen-Pulse zwischen den $m_s = 1$ und $m_s = -1$ Spin-Zuständen der NV-Zentren unterdrückt werden [A1].

Für geeignete Werte der Mikrowellen-Parameter Ω und Δ nimmt der Grundzustand des Systems einen dipolaren Spin-Kristall an. Die Gesamtenergie des Systems ist dabei von den Randbedingungen abhängig. Werden diese Rand-Spins durch getrennt adressierbare NV-Zentren (z.B. durch ein abweichendes Stickstoff-Isotop) gesteuert, entspricht dies effektiv einer Kompression des Kristalls [A1]. Diese Kompressionsenergie kann für eine Phasenverschiebung in einem Zwei-Qubit-Quantengatter genutzt werden, s. Abb. 2.1. Dazu wird der Quanten-Bus zunächst in den $m_s = 0$ Zustand initialisiert, was gerade dem Grundzustand für große negative Werte von Δ entspricht. Die Mikrowellen-Parameter werden nun adiabatisch geändert, bis das System die kristalline Phase erreicht. Anschließend wird das System wieder adiabatisch zurück in den Anfangszustand gebracht. Die Gesamtphase, die in diesem Prozess aufgelesen wird, hängt dann vom Zustand der Rand-Spins ab, wodurch ein effektives Zwei-Qubit-Gatter für diese Rand-Spins realisiert wird.

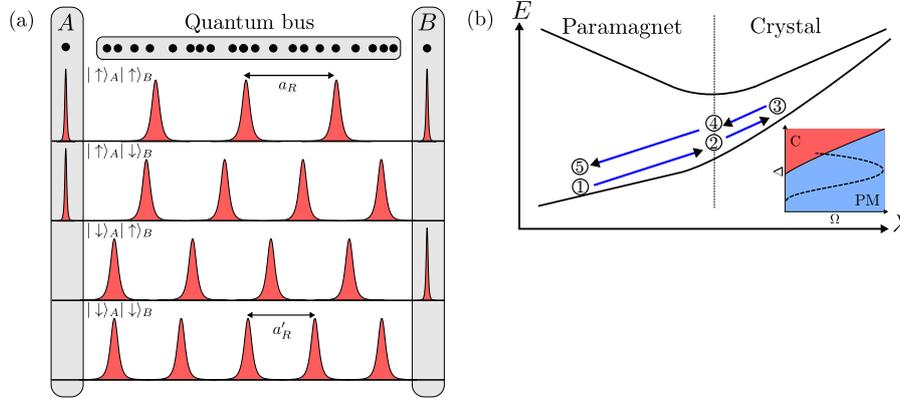


Abbildung 2.1: Quantengatter mit dipolaren Kristallen. (a) In Abhängigkeit des Zustands des Rand-Spins A und B erhält der Kristall eine unterschiedliche Kompressionsenergie. (b) Die Kompressionsenergie kann in einen Zwei-Qubit-Phasengatter verwandelt werden, wenn das System adiabatisch in den kristallinen Zustand gebracht wird.

2.1.2 Kollektiv verstärkte Wechselwirkungen

Eine alternative Methode, um räumlich getrennte NV-Zentren aneinander zu koppeln, ist die Realisierung kollektiv verstärkter Dipol-Dipol-Wechselwirkungen. Da-

bei wird zunächst ein starkes Magnetfeld entlang der Quantisierungsachse betrachtet, sodass der $m_s = -1$ Zustand des NV-Zentrums energetisch weit verschoben ist und daher nicht zur effektiven Dynamik beiträgt. In drei Raumdimensionen wird die Dipol-Dipolwechselwirkungen zwischen zwei NV-Zentren i und j beschrieben durch

$$V_{ij} = (1 - 3 \cos^2 \vartheta_{ij}) \frac{\mu^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \left\{ \frac{1}{4} [1 + \sigma_z^{(i)}] [1 + \sigma_z^{(j)}] - \sigma_+^{(i)} \sigma_-^{(j)} - \sigma_-^{(i)} \sigma_+^{(j)} \right\}, \quad (2.2)$$

wobei ϑ_{ij} der Winkel zwischen der Quantisierungsachse der NV-Zentren und des Verbindungsvektor zwischen den beiden NV-Zentren ist. Für hinreichend starke Magnetfelder ist die Anzahl der Spins im $m_s = 1$ Zustand näherungsweise eine gute Quantenzahl. Im Folgenden wollen wir insbesondere den Unterraum betrachten, indem nur eine einzelne Anregung mit $m_s = 1$ vorliegt.

In einem perfekt geordneten Ensemble aus N Spins führt die Wechselwirkung zur Existenz einer Spinwelle, einem Eigenzustand der über das gesamte System ausgedehnt ist, und deren Kopplung um einen Faktor \sqrt{N} verstärkt ist. Allerdings führt die zufällige Anordnung der Spins zu starken Lokalisierungseffekten [22], wodurch die kollektive Spinwelle zerstört wird. Bemerkenswerterweise ist es möglich durch das Anlegen eines schwachen transversalen Magnetfelds den kollektiven Zustand wieder zu erhalten. Dies lässt sich störungstheoretisch wie folgt begründen. Im Unterraum mit maximal einer Anregung in $m_s = 1$ ist der Störungshamiltonian gegeben durch $H' = -E_0|0\rangle\langle 0| + \sqrt{N}\mu B_x(|0\rangle\langle W| + \text{h.c.})$, wobei E_0 die Energie einer Spin-Anregung, B_x das transversale Magnetfeld und $|W\rangle$ der symmetrische Zustand mit einer Anregung ist. Störungstheorie zweiter Ordnung liefert als neue Eigenzustände $H' = -(E_0 + J)|\tilde{0}\rangle\langle \tilde{0}| + J|\tilde{W}\rangle\langle \tilde{W}|$ mit $J = N(\mu B_x)^2/E_0$. Dies bedeutet, dass (bis auf perturbative Korrekturen) der kollektive Zustand $|W\rangle = |\tilde{W}\rangle + O(\sqrt{N}\mu B_x/E_0)$ ein Eigenzustand des gestörten Systems ist [A2].

An dieses neuen Eigenzustand kann nun ein externes NV-Zentrum gekoppelt werden, wenn dessen Energiedifferenz zwischen den Zuständen mit $m_s = 0$ und $m_s = 1$ resonant mit der Energiedifferenz zwischen den Eigenzuständen des Ensembles ist. Diese Wechselwirkung ist aufgrund der kollektiven Natur des $|\tilde{W}\rangle$ -Zustands um einen Faktor \sqrt{N} erhöht. Es ist auch möglich, zwei Ensembles mit N mit einer kollektiv verstärkten Wechselwirkung aneinander zu koppeln, in diesem Fall ist die Wechselwirkung sogar um den Faktor N verstärkt. Diese kollektiv verstärkten Wechselwirkungen können für die Realisierung skalierbarer Netzwerke aus NV-Spin-Ensembles genutzt werden. In solchen Netzwerken mit einem Abstand von 100 nm zwischen den einzelnen Ensembles können so bei einer Kohärenzzeit von nur wenigen Millisekunden bereits Fehlerraten für Zwei-Qubit-Gatter unterhalb von 10^{-4} pro Gatteroperation erreicht werden [A2].

2.2 Geordnete Spin-Zustände ultrakalter polarer Moleküle

Neben NV-Zentren in Diamanten spielen dipolare Wechselwirkungen auch in ultrakalten polaren Molekülen eine zentrale Rolle, wobei es sich hierbei um eine elektrische Dipolkraft handelt. In den letzten Jahren ist es erstmals gelungen, polare Moleküle in ihrem rovibrationalen Grundzustand herzustellen [23]. Durch die gezielte Anregung von Rotationszuständen lassen sich auch mit polaren Molekülen exzellent kontrollierbare Spin-Freiheitsgrade realisieren. Werden polare Moleküle in ein optisches Gitter geladen, entfallen zudem die bereits ausgeführten Schwierigkeiten mit der Positionierung der Spins. Durch die Hinzunahme mehrerer Rotationsanregungen sowie externer elektrischer Felder lässt sich ein breites Spektrum an effektiven Modellen realisieren [24].

2.2.1 Dynamisches Wachstum von Spin-Kristallen

Neben der Implementierung von maßgeschneiderten Spin-Modellen mit polaren Molekülen stellt sich noch eine weitere wichtige Herausforderung. Im Rahmen dieser Modelle ist häufig das Phasendiagramm des Grundzustands von zentraler Bedeutung. Allerdings ist die adiabatische Präparation von Quantenphasen mit starken Wechselwirkung ausgehend von einem schwach wechselwirkenden Anfangszustand eine extrem schwierige Aufgabe, da hierfür ein Quantenphasenübergang durchlaufen werden muss, an dem die Energielücke des Systems im thermodynamischen Limes verschwindet [25].

Ein Ausweg aus diesem Problem ist die nichtadiabatische Präparation von interessanten Quantenphasen, wobei die gewünschte Phase ausgehend von einem mikroskopisch kleinen Kondensationszentrum dynamisch wächst. Im Falle von ultrakalten polaren Molekülen in optischen Gittern lässt sich das insbesondere für dipolare Kristalle zeigen. In diesem Fall ist der Hamiltonian des Systems ebenfalls durch (2.1) gegeben, wobei die beiden Spin-Zustände gekoppelte Rotationszustände der Moleküle sind, und μ das entsprechende elektrische Dipolmoment ist [A3]. Der zu realisierende eindimensionale Spin-Kristall ist dabei eine spontane Brechung der diskreten Gittersymmetrie, wobei die Füllung des Gitters jeden beliebigen rationalen Wert annehmen kann [26]. Die Niedrigenergie-Anregungen des Kristalls sind Versetzungsdefekte, die zudem fraktionale Statistik aufweisen.

Das Wachstum von Spin-Kristallen kann dynamisch wie folgt realisiert werden: Zunächst wird durch ein weit verstimmtes Mikrowellenfeld eine geringe Dichte an Rotationsanregungen erzeugt, diese übernehmen die Rolle von Kondensationszentren. Durch geeignete Wahl der Frequenz weiterer Mikrowellenfelder kann dafür gesorgt werden, dass das Wachstum des Kristalls ein resonanter Prozess ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Verstimmung des zusätzlichen Mikrowellenfeldes gerade der Wechselwirkungs-Energie entspricht, die für eine zusätzliche Rotations-

anregung an den Rändern des Kristalls benötigt wird [A3]. Da aber gleichzeitig auch der umgekehrte Prozess, das Entfernen einer Rotationsanregung und damit ein Schrumpfen des Kristalls, resonant ist, muss die volle Dynamik des Systems betrachtet werden. Da die Größe des Kristalls zunächst einmal unbeschränkt ist, findet die Dynamik in einem unbeschränkten Hilbertraum statt. Mit fortschreitender Zeit wächst die mittlere Größe des Kristalls linear an, da das System einen immer größeren Teil des Hilbertraums erreichen kann. Dadurch können effizient Spin-Kristalle bestehend aus Hunderten bis Tausenden von Spins realisiert werden.

2.2.2 Topologisch geordnete Zustände

Neben der Realisierung von geordneten Phasen wie Kristallen oder Phasen mit magnetischer Ordnung bieten polare Moleküle auch die Möglichkeit weitaus exotischere Materiezustände zu erzeugen. Während die vorgenannten Quantenphasen durch einen lokalen Ordnungsparameter charakterisiert werden und die Phasenübergänge im Sinne der Landau-Theorie der spontanen Symmetriebrechung verstanden werden können, gibt es auch Phasenübergänge, die über dieses Paradigma hinausgehen [27]. Dies trifft insbesondere auf topologisch geordnete Phasen zu, die durch langreichweitige Verschränkung und nichtlokale Ordnungsparameter charakterisiert werden, und deren Eigenschaft essentiell von den Randbedingungen des Systems bestimmt werden [28].

Ein Paradebeispiel für einen nichtlokalen Ordnungsparameter ist String-Ordnung von der Form

$$O_{\text{string}}(x) = \left\langle \prod_{i=0}^x O_i \right\rangle, \quad (2.3)$$

d.h. der Ordnungsparameter setzt sich aus einem Produkt von quasilokalen Operatoren O_i zusammen. Für die Charakterisierung der Quantenphase ist es insbesondere wichtig, wie sich die Funktion $O_{\text{string}}(x)$ für große Distanzen x verhält. Dabei können drei Fälle unterschieden werden: (i) die Funktion nimmt einen konstanten Wert an, (ii) die Funktion zerfällt algebraisch oder (iii) die Funktion zerfällt exponentiell. Alle drei Fälle beschreiben dabei unterschiedliche Quantenphasen.

Quantenphasen, die durch String-Ordnung charakterisiert sind, können mit polaren Molekülen in optischen Gittern vergleichsweise einfach realisiert werden. Dazu wird das Tunneln der Moleküle in einem quasi-eindimensionalen Dreiecksgitter ausgenutzt (s. Abb. 2.2), d.h. der Hamiltonian ist gegeben durch

$$H = -t_1 \sum_i \left(c_i c_{i+1}^\dagger + \text{H.c.} \right) - t_2 \sum_i \left(c_i c_{i+2}^\dagger + \text{H.c.} \right) + \sum_{i < j} V_{|i-j|} n_i n_j - \mu \sum_i n_i. \quad (2.4)$$

Hierbei beschreibt c_i die Vernichtung eines Moleküls auf Gitterplatz i , die Tunnelmatrix-Elemente betragen t_1 und t_2 entlang der langen bzw. kurzen Achse des

Dreiecksgitters, $V_{|i-j|}$ beschreibt die Dipol-Wechselwirkung für die Dichte $n_i = c_i^\dagger c_i$, und μ ist das chemische Potential.

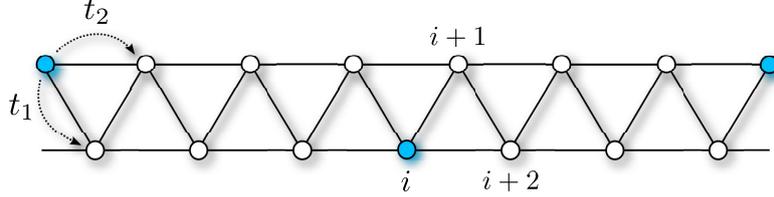


Abbildung 2.2: Quasi-eindimensionales Dreiecksgitter mit Tunnelmatrix-Elementen t_1 und t_2 .

Für hinreichend kleine Werte von t_1 und t_2 nimmt der Grundzustand des Systems wieder einen dipolaren Kristall mit rationaler Füllung des Gitters an. Übersteigen die Tunnelmatrix-Elemente hingegen einen kritischen Wert, dann liegt eine neue Quantenphase vor, in der die Defekte des Kristalls kondensieren und algebraische Korrelationen aufweisen [A4]. Interessanterweise kann dies auf zwei Arten geschehen, da das Tunneln auf zwei verschiedenen Wegen möglich ist. In dem vorliegenden Dreiecksgitter entspricht die zweimalige Anwendung eines t_1 -Prozesses gerade der einmaligen Anwendung des t_2 -Prozesses. Das führt dazu, dass die Struktur der Defekte für $t_2 \gg t_1$ unterscheidbar von dem Fall $t_2 \ll t_1$ ist und mithin zwei verschiedene Quantenphasen vorliegen.

Wie lässt sich nun von den Korrelationen der Defekte auf die Korrelationen der Moleküle schließen? Da die Transformation zwischen diesen beiden Bildern nichtlokal ist, führt das Vorhandensein eines lokalen Ordnungsparameters für die Defekte zu einem nichtlokalen Ordnungsparameter für die Moleküle. Interessanterweise lassen sich die beiden Phasen mit kondensierten Defekten nicht durch lokale Messung an den Molekülen unterscheiden, sondern es muss ein Ordnungsparameter mit String-Ordnung gemäß (2.3) ausgewertet werden, mit $O_i = \exp(i2\pi/qn_i n_{i+q-1})$, wobei q die inverse Füllung des ursprünglichen Kristalls ist [A4]. In der einen Defektphase zerfällt O_{string} algebraisch, in der anderen hingegen exponentiell.

Neben Phasen mit String-Ordnung lassen sich mit polaren Molekülen auch Phasen mit genuin topologischer Ordnung wie dem Toric Code [29] realisieren. Hierfür wird ein zweidimensionales Quadratgitter mit polaren Molekülen geladen, wobei die Hälfte der Moleküle lediglich dazu verwendet wird, die für die Realisierung des Toric Codes nötigen Vierkörper-Wechselwirkungen zu implementieren [A5]. Ein entscheidender Vorteil des Setups ist dabei, dass die Wechselwirkungen im Sinne eines digitalen Quantensimulators stroboskopisch und damit nicht-perturbativ realisiert werden können. Dadurch ist es möglich auch im Falle von unvermeidbaren Fehlerquellen ein Regime zu erreichen, in welchem die topologische Ordnung des Systems nachgewiesen werden kann.

DISSIPATIVE ZUSTANDSPRÄPARATION IN WECHSELWIRKENDEN RYDBERG-GASEN

Normalerweise ist Dissipation, d.h. inkohärente Übergänge zwischen den Energieeigenzuständen, ein unerwünschter Effekt, wenn es um die kohärente Kontrolle von Quantensystemen geht. Allerdings konnten eine Reihe von Theorie-Arbeiten zeigen, dass kontrollierte Dissipationskanäle eine nützliche Ressource darstellen können, beispielsweise für die Realisierung interessanter quantenmechanischer Vielteilchenzustände [16–18]. Die zentrale Idee dabei ist, die Wechselwirkung mit der Umgebung gezielt zu steuern, sodass die Kombination aus kohärenter und dissipativer Dynamik das System in einen stationären Zustand mit den gewünschten Eigenschaften steuert. Die Machbarkeit einer derartigen dissipativen Zustandspräparation konnte bereits in ersten Experimenten gezeigt werden [30, 31].

Die außerordentliche Kontrolle über die Wechselwirkungen und Dissipationskanäle in Rydberg-Gasen macht diese zu idealen Kandidaten, um eine derartige dissipative Vielteilchendynamik zu untersuchen. Rydberg-Atome können durch externe Laser angeregt werden, wobei ihre atomaren Eigenschaften und Wechselwirkungsstärken dramatisch mit der Hauptquantenzahl skalieren [32]. Der Zerfall des metastabilen Rydberg-Zustands durch spontane Emission bietet einen natürlichen Dissipationskanal, dessen Eigenschaften durch gezielte Laser-Kopplungen an weitere elektronische Anregungen verändert werden können [33].

3.1 Dissipativer Bindungsmechanismus bei repulsiver Wechselwirkung

Durch Ausnutzen einer derartigen Kontrolle der Umgebung ist es auch möglich, neue physikalische Prinzipien zu realisieren, wie einen dissipativen Bindungsmechanismus, der selbst dann eine Bindung erzeugt, wenn die (kohärente) Wechselwirkung der Bindungspartner repulsiv ist [A6]. Dafür wird ein Atom mit einer internen Levelstruktur in Λ -Konfiguration benötigt, d.h. zwei elektronische Grundzustände werden mit Laserfeldern an einen metastabilen angeregten Zustand gekoppelt. Im nichtwechselwirkenden Fall nimmt der stationäre Zustand einen Dunkelzustand der Form $|\psi\rangle = (|1\rangle - |3\rangle)/\sqrt{2}$ an, wobei $|1\rangle$ und $|3\rangle$ die beiden elektronischen Grundzustände sind. Die Struktur dieses Dunkelzustands bleibt auch unter Berücksichtigung der kinetischen Energie und des Dopplereffekts erhalten und kann zur effizienten Laserkühlung genutzt werden [34]. Ist hingegen einer der beiden Grundzustände wechselwirkend, beispielweise durch Rydberg-Dressing, d.h. eine kleine Beimischung eines stark wechselwirkenden Rydberg-Zustands [35], dann ändert sich die Situation grundlegend. Durch die Wechselwirkung verschieben sich die Eigenzustände des Λ -Systems und ein exakter Dunkelzustand kann nicht mehr erreicht werden. Allerdings hängt die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in einem metastabilen Zustand befindet, und damit auch die Stärke der Dissipation des Systems, stark von der Distanz zwischen den Atomen ab. Dies lässt sich in einem nichthermiteschen Potential zusammenfassen, das ein Minimum aufweist, wenn sich die Stärke der repulsiven Wechselwirkung und die Verstimmung von der Resonanz zwischen dem wechselwirkenden und dem metastabilen Zustand gerade nahezu aufheben [A6]. Näherungsweise lässt sich die Position dieses Minimums störungstheoretisch berechnen, für den Fall dass die kinetische Energie gegenüber der Wechselwirkungsstärke und den Laser-Parametern schwach ist. Außerhalb dieses Minimums sorgt starke Dissipation dafür, dass die Atome eine zufällige Relativbewegung ausführen, während diese Bewegung im dissipativen Minimum abgeschwächt ist.

Diese perturbative Sichtweise lässt sich auch im Rahmen exakter Rechnungen mit Wellenfunktions-Monte-Carlo-Methoden [36] bestätigen. Die dissipative Bindung zeigt sich hier als charakteristisches Maximum der Paarkorrelations-Funktion der einzelnen Atome, welches gerade für das Minimum des dissipativen Potentials auftritt. Zudem ist es möglich, im Rahmen semiklassischer Rechnungen zu zeigen, dass die dissipative Bindung auch in Vielteilchen-Systemen sowie in beliebigen Dimensionen nachgewiesen werden kann [A6].

3.2 Zustandspräparation mit korrelierten Sprung-Operatoren

Die Realisierung von Dissipationskanälen mit nahezu beliebigen Eigenschaften ist eine bedeutende Herausforderung. Mathematisch werden dissipative Prozesse durch eine Quanten-Master-Gleichung mit nicht-hermiteschen Sprung-Operatoren beschrieben [37]. Ein zentraler Punkt dabei ist, dass die Sprung-Operatoren in der Regel so konstruiert sein sollen, dass der stationäre Zustand des nun offenen Quantensystems im Allgemeinen kein thermischer Zustand des System-Hamiltonians sein soll. Ein praktikabler Weg, um dies zu realisieren, ist die Verwendung eines explizit zeitabhängigen externen Feldes, beispielsweise eines Lasers. Im Kontext so eines getrieben-dissipativen Systems erscheint die Dissipation typischerweise durch die Kopplung der Eigenzustände des Systems an das Vakuum des elektromagnetischen Feldes. In diesem Fall findet die Dissipation natürlicherweise in der Eigenbasis des Systems statt. In vielen Situationen wäre es jedoch wünschenswert, auch andere Dissipationskanäle zur Verfügung zu haben, beispielsweise zur Erzeugung von kohärenten Überlagerungen im stationären Zustand.

Der Startpunkt für die folgende Betrachtung ist eine Quanten-Master-Gleichung in Lindblad-Form

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H, \rho] + \sum_i \left(c_i \rho c_i^\dagger - \frac{1}{2} \{ c_i^\dagger c_i, \rho \} \right), \quad (3.1)$$

wobei der Hamiltonian H die kohärente Dynamik beschreibt, werden die Sprung-Operatoren c_i für den inkohärenten Anteil verantwortlich sind [37]. Die Lindblad-Form beschreibt dabei eine markoffsche Master-Gleichung. Im weiteren soll der Fall betrachtet werden, dass die Dissipation auf einen Satz Hilfsatome beschränkt bleibt, während die gewünschten Sprung-Operatoren im Sinne einer effektiven Dynamik für das zu untersuchende System entsteht.

Der Einfachheit halber wird für die Hilfsatome ein Zwei-Niveau-System angenommen, wobei einer der beiden Zustände als angeregter Zustand durch Dissipation in den anderen zerfällt. Die Zerfallsrate soll dabei stärker sein als die kohärenten Wechselwirkungen, welche die Hilfsatome in den angeregten Zustand bringen. In diesem Fall lässt sich die Dynamik der Hilfsatome näherungsweise herausfaktorisieren, und die Auswirkung der Dissipation äußert sich in einer effektiven kohärenten und dissipativen Dynamik für das eigentliche System, welche im Rahmen eines effektiven Operatorformalismus berechnet werden kann [38]. Die entstehende Dynamik ist dann gegeben durch einen effektiven Hamiltonian

$$H_{\text{eff}} = H_0 - \frac{1}{2} \sum_k V_k^- \left[\tilde{H}_k^{-1} + \left(\tilde{H}_k^{-1} \right)^\dagger \right] V_k^+ \quad (3.2)$$

und effektive Sprung-Operatoren

$$c_k^{\text{eff}} = c_k \tilde{H}_k^{-1} V_k^+, \quad (3.3)$$

wobei H_0 der Hamiltonian des zu betrachtenden Systems ist, c_k sind die Sprung-Operatoren für die Dissipation und V_k^+ und V_k^- beschreibt Wechselwirkungsterme, die das k -te Hilfsatom in den zerfallenden Zustand bringen bzw. davon entfernen. \tilde{H}_k ist der nicht-Hermitesche Hamiltonian des Hilfsatom, der durch

$$\tilde{H}_k = H_k^e - \frac{i}{2} c_k^\dagger c_k, \quad (3.4)$$

wobei H_k^e sich nur auf den Hamiltonian des angeregten Zustand bezieht [A7].

Im Rahmen dieses Formalismus können nun nahezu beliebige Sprung-Operatoren realisiert werden. Als Beispiel soll dafür ein Sprung-Operator der Form $|\!-\!\rangle\langle\!+\!\|$ dienen, mit $|\pm\rangle = (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$. Dieser Sprung-Operator ist nicht in der Eigenbasis der Atome definiert, seine Realisierung stellt daher normalerweise eine größere Herausforderung dar. Dieser Sprung-Operator kann durch eine Kopplung des Systems an die Hilfsatome realisiert werden, wenn die Wechselwirkung die Form

$$H_{ik} = E_0 |\!-\!\rangle\langle\!+\!\|_i \sigma_k^+ + \text{H.c.} = \frac{E_0}{2} [\sigma_i^z \sigma_k^x + \sigma_i^y \sigma_k^y], \quad (3.5)$$

annimmt, wobei E_0 eine beliebige Energieskala ist, die von der konkreten physikalischen Realisierung der Wechselwirkung abhängt. Derartige Spin-Wechselwirkungen können beispielsweise mit Rydberg-Dressing [39] oder mit ultrakalten polaren Molekülen [24] implementiert werden.

Neben Sprung-Operatoren für einzelne Atome ist es auch möglich, Sprung-Operatoren zu realisieren, die auf mehrere Atome gleichzeitig einwirken. Dies ist besonders interessant, um dissipativ quantenmechanische Verschränkung zwischen den Atomen aufzubauen. In der gleichen Art wie die Implementierung von Einzelatom-Operatoren eine Wechselwirkung zwischen dem zu kontrollierenden Atom und einem Hilfsatom erfordert, werden zur Realisierung von Zwei-Atom-Sprung-Operatoren Dreikörperkräfte benötigt. Ein vielversprechender Weg, solche Dreikörperkräfte zu erhalten, ist die Zweikörper-Wechselwirkung durch gezielten Einsatz externer Felder auszuschalten, wodurch eine Dreikörperkraft als führender Wechselwirkungs-Term übrig bleibt [40]. Diese Methode lässt sich ebenfalls mit Rydberg-Atomen realisieren: Durch eine Kombination eines statischen elektrischen Feld mit Mikrowellen-Feldern nahe einer Resonanz zwischen zwei Rydberg-Zuständen kann die Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen benachbarten Plätzen in einem optischen Gitter ausgeschaltet werden. Der verbleibende Wechselwirkungs-Term ist dann eine Dreikörperkraft, deren Stärke vergleichbar mit der van-der-Waals-Wechselwirkung ist. Da eine Vielzahl von Experimenten bereits die Bedeutung dieser Wechselwirkung für die Rydberg-Blockade nachgewiesen haben [32], erscheint dieser Weg sehr vielversprechend, um entsprechende Dreikörperkräfte zu realisieren. Durch Kombination dieser Methode mit Rydberg-Dressing von Spinzuständen können die gewünschten Sprung-Operatoren implementiert werden.

Ein wichtiges Beispiel zur Erzeugung von Verschränkung ist ein Sprung-Operator von der Form $|\psi_+\rangle\langle\psi_-|$, wobei die Zustände $|\psi_\pm\rangle$ die Bell-Zustände

$$|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle \pm |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (3.6)$$

sind. In diesem Fall hat der benötigte Wechselwirkungs-Hamiltonian die Form

$$H_{ijk} = E_0|\psi_+\rangle\langle\psi_-|\sigma_k^+ + \text{H.c.} = \frac{E_0}{4} [\sigma_i^x \sigma_j^x \sigma_k^x + \sigma_i^y \sigma_j^y \sigma_k^x - \sigma_i^z \sigma_j^z \sigma_k^x + \sigma_k^x], \quad (3.7)$$

d.h. er erhält wie erwartet Drei-Spin-Wechselwirkungen.

Mit dieser Methode zur Realisierung einer weiten Klasse an Sprung-Operatoren können eine Vielzahl interessanter Modelle, wie beispielsweise ein dissipatives Heisenberg-Modell realisiert werden [A7]. Durch die Verwendung mehrerer interner Zustände der Hilfsatome können auch mehrere Sprung-Operatoren gleichzeitig mit einem einzelnen Hilfsatom erzeugt werden. Bemerkenswert ist dabei, dass es auch möglich ist, Modelle zu erhalten, bei denen der kohärente Anteil verschwindet, diese Modelle sind also rein dissipativ. Da die verschiedenen Sprung-Operatoren aber nicht notwendigerweise miteinander kommutieren, sind diese Modelle immernoch voll quantenmechanisch zu beschreiben.

VARIATIONSPRINZIP FÜR DISSIPATIVE QUANTENSYSYME

Wie das vorangegangene Kapitel gezeigt hat, bieten dissipative Quantensysteme eine Vielfalt an neuen Möglichkeiten für die Erzeugung interessanter und nützlicher Quantenzustände. Allerdings steht das theoretische Verständnis für dissipative Vielteilchensysteme bisher noch in den Anfängen, was vor allem daran liegt, dass sich Methoden zum Verständnis von Gleichgewichtssystemen nur sehr eingeschränkt oder gar nicht auf dissipative Systeme übertragen lassen. So erfordern beispielsweise Quanten-Monte-Carlo-Methoden das Umschreiben der Zustandssumme eines Quantensystems auf ein korrespondierendes höherdimensionales klassisches System [41]. Für dissipative Systeme lässt sich allerdings keine Zustandssumme definieren, weswegen derartige Methoden nicht anwendbar sind. Gleiches gilt für in Gleichgewichtssystemen sehr erfolgreiche Methoden wie die Dichtefunktionaltheorie. Hier soll der Grundzustand eines Hamiltonians gefunden werden, allerdings ist der stationäre Zustand eines dissipativen Systems nur in Ausnahmefällen als Grundzustand eines Hamiltonians darstellbar. Exakte numerische Lösungen sind aufgrund der exponentiell ansteigenden Komplexität des Vielteilchenproblems nur für äußerst begrenzte Systemgrößen durchführbar. Die Lösung des Vielteilchenproblems für dissipative Systeme ist zudem im Vergleich zur Bestimmung des Grundzustands nochmals schwieriger, da der stationäre Zustand nicht auf reine Zustände beschränkt ist.

Aufgrund dieser bisher ungelösten Herausforderungen wird in diesem Kapitel ein Variationsprinzip für dissipative Vielteilchensysteme eingeführt. Variationale Techniken haben in der gesamten Physik für das fundamentale Verständnis physikalischer Theorien eine zentrale Bedeutung, wie das Fermatsche Prinzip der geometrischen Optik, das Hamiltonsche Prinzip der extremalen Wirkung oder das Maximum-Entropie-Prinzip der statistischen Physik eindrucksvoll belegen. Gleich-

zeitig haben sich variationelle Methoden als eine vielversprechende Methode erwiesen, um hochgradig komplexe Vielteilchenprobleme in der Quantenphysik zu lösen, wie durch die Dichtefunktional-Theorie oder den Matrix-Produktzustands-Formalismus gezeigt wurde.

Wie im vorherigen Kapitel ist der Startpunkt für die Anwendung des Variationsprinzip die Quanten-Master-Gleichung in Lindblad-Form, die durch (3.1) gegeben ist. Während die Lindblad-Form eine markoffsche Master-Gleichung beschreibt, lässt sich das Variationsprinzip ohne größere Schwierigkeiten auf nicht-markoffsche Probleme erweitern.

4.1 Variationelle Norm

4.1.1 Stationärer Zustand

Als erster Schritt soll ein Variationsprinzip für den stationären Zustand von dissipativen Quantensystemen aufgestellt werden. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass ein solcher Zustand existiert, d.h., das System steuert nicht auf einen Grenzzyklus zu. In diesem Fall ist der stationäre Zustand durch die Bedingung $d/dt\rho = 0$ gegeben. Um den stationären Zustand variationell zu bestimmen, wird der Zustand des Quantensystems ρ durch einen Satz an Variationsparametern $\{\alpha_i\}$ parametrisiert, d.h. $\rho = \rho(\{\alpha_i\})$. Allerdings lässt sich dadurch die Gleichung $d/dt\rho = 0$ nicht mehr exakt lösen, da der exakte stationäre Zustand im Allgemeinen außerhalb der Mannigfaltigkeit an variationellen Zuständen liegt. Daher wird anstatt einer exakten Lösung dieser Gleichung eine geeignete Näherungslösung gesucht. Hierfür bietet es sich an, die Zeitableitung des Dichteoperators als hermitesche Matrix zu betrachten, und eine geeignete Matrixnorm zu minimieren, gemäß

$$\|\dot{\rho}\| = \|\ -i[H, \rho] + \mathcal{D}(\rho)\| \rightarrow \min. \quad (4.1)$$

Um das Variationsprinzip eindeutig zu definieren, muss die Matrixnorm festgelegt werden. Dies kann auf zwei unterschiedliche Wege erfolgen, die beide zum selben Ergebnis führen. Zum einen kann das Variationsprinzip für eine große Klasse von möglichen Normen, den Schatten- p -Normen, aufgestellt werden. Diese sind definiert durch

$$\|\dot{\rho}\| = \sqrt[p]{\text{Tr}\{|\dot{\rho}|^p\}}. \quad (4.2)$$

Die jeweilige Norm lässt sich durch Diagonalisierung des Operators und Aufsummieren der betragsmäßig potenzierten Eigenwerte berechnen. Beispiele für wichtige Schatten- p -Normen sind die Spurnorm ($p = 1$), die Hilbert-Schmidt-Norm ($p = 2$) und die Maximums-Norm ($p \rightarrow \infty$). Die Anwendung des Variationsprinzips (4.1) für diese Normen zeigt dann, dass für alle Schatten- p -Normen mit $p > 1$ der Zustand mit der niedrigsten Norm der maximal gemischte Zustand ist [A8], unabhängig von dem zu Grunde liegenden Hamiltonian und Sprung-Operatoren. Dadurch verbleibt die Spurnorm mit $p = 1$ als einzig mögliche Matrixnorm.

Alternativ kann die Wahl der Matrixnorm auch durch die Quanteninformati­onstheorie begründet werden. Hierzu wird die Spurnorm als Abstandsmaß der Matrix $d/dt\rho$ zur Nullmatrix betrachtet. Die Nullmatrix wird genau dann erreicht, wenn der variationelle Zustand ein exakter stationärer Zustand ist. Der entscheidende Punkt ist nun, dass die Spurnorm angibt, inwieweit die Matrix $d/dt\rho$ durch eine optimale Messung von der Nullmatrix unterschieden werden kann [42]. Die Spurnorm beschreibt also die natürliche Norm zur Definition eines Abstandsmaßes für Zeitableitungen von Dichtematrizen.

Während das Variationsprinzip den Zustandsraum für den stationären Zustand erheblich einschränkt, muss vor einer erfolgreichen Anwendung des Variationsprin­zips noch ein weiter Schritt unternommen werden. Der Grund hierfür ist, dass die Bestimmung der Spurnorm immernoch ein Problem ist, dessen Komplexität exponentiell mit der Systemgröße anwächst, da hierfür der Operator $d/dt\rho$ diagonalisiert werden muss. Im Gegensatz zum Variationsprinzip für Grundzustände lässt sich die Norm auch nicht als Matrixprodukt schreiben, was eine effiziente Berechnung verhindert. Die Situation ist dabei vergleichbar mit Problemstellungen im Bereich korrelierter Fermionen, wo Energie-Erwartungswerte variationeller Gutzwiller-Wellenfunktionen nur mit Hilfe weiterer Näherungen berechnet werden können [43].

Für eine effiziente variationelle Näherungslösung lässt sich ausnutzen, dass nicht der exakte Wert der variationellen Norm relevant ist, sondern die Eigen­schaften des variationellen Zustands. Es bietet sich zudem an, Näherungen zu verwenden, die den variationellen Charakter der Lösung beibehalten, d.h. eine obere Schranke für die variationelle Norm darstellen.

Der dafür notwendige Schritt ist dabei abhängig von der Wahl des variationel­len Zustands und den Details des jeweiligen Vielteilchenproblems. Der Einfachheit halber soll im Folgenden davon ausgegangen werden, dass das Vielteilchen-Problem durch einen diskretes Gitter mit auf nächste Nachbarn beschränkten Wechselwir­kungen (kohärent oder dissipativ) beschrieben ist.

Konkret wollen wir als ersten Schritt variationelle Produktzustände der Form

$$\rho = \rho_p \equiv \mathcal{R}1 = \prod_i \rho_i \quad (4.3)$$

betrachten. Der Superoperator \mathcal{R} ersetzt hierbei jedes Auftreten der Einheitsma­trix auf der rechten Seite durch die lokale Dichtematrix ρ_i für jeden Gitterplatz i . Dann lässt sich mit Hilfe der Dreiecksungleichung die variationelle Norm durch

$$\|\dot{\rho}\| \leq \sum_{\langle ij \rangle} \text{Tr} \left\{ \left| \mathcal{R} \left(\dot{\rho}_i \rho_j + \rho_i \dot{\rho}_j + \dot{C}_{ij} \right) \right| \right\} = \sum_{\langle ij \rangle} \text{Tr} \{ |\dot{\rho}_{ij}| \}, \quad (4.4)$$

nach oben abschätzen. Hierbei ist \dot{C}_{ij} die Zeitableitung der Korrelationen zwi­schen den Gitterplätzen i und j und $\dot{\rho}_{ij}$ ist die Zeitableitung der entsprechenden

reduzierten Dichtematrix. Interessanterweise wird der Korrelationsterm in Mean-Field-Rechnungen [44] vernachlässigt, weswegen im Gegensatz zu Gleichgewichtsproblemen Mean-Field-Resultate und variationelle auf Produktzuständen basierende Ergebnisse nicht äquivalent sind. Die rechte Seite von (4.4) erfordert lediglich die Diagonalisierung von Zweiteilchen-Operatoren und kann daher effizient berechnet werden. Als zusätzliche Randbedingung bei der Minimierung der variationellen Norm muss zudem die Positivität der Dichtematrix garantiert werden. Damit sind mit Hilfe des Variationsprinzips Näherungslösungen für dissipative Vielteilchensysteme verfügbar.

Das Variationsprinzip kann auch auf komplexere Zustandsklassen angewendet werden. Beispielsweise ist es relativ einfach möglich, Korrelationen zwischen benachbarten Gitterplätzen hinzuzunehmen. Diese Korrelationen können sowohl klassische Korrelationen als auch quantenmechanische Verschränkung beschreiben. Der variationelle Zustand lässt sich dann in der Form

$$\rho = \rho_c \equiv \rho_p + \sum_{\langle ij \rangle} \mathcal{R} C_{ij} + \sum_{\langle ij \rangle \neq \langle kl \rangle} \mathcal{R} C_{ij} C_{kl} + \dots \quad (4.5)$$

schreiben, wobei C_{ij} die jeweilige Korrelationsmatrix angibt. Analog zu der Näherung (4.4) lässt sich wiederum eine entsprechende obere Schranke für die variationelle Norm finden, die in diesem Fall durch

$$\|\dot{\rho}\| \leq \sum_{\langle ijk \rangle} \|\dot{\rho}_{ijk}\| \quad (4.6)$$

gegeben ist, wobei $\dot{\rho}_{ijk}$ die Zeitableitung der reduzierten Dichtematrix der drei benachbarten Gitterplätze i , j und k ist. Durch die Hinzunahme von derartigen Korrelationen kann beispielsweise die Position von dissipativen Phasenübergängen genauer bestimmt werden [A8]. Diese Verbesserung ist grob vergleichbar mit Korrekturen, die für Gleichgewichtsprobleme im Rahmen von Cluster-Mean-Field-Berechnungen [45] gegenüber Mean-Field-Resultaten erzielt werden. Allerdings ist ein entscheidender Unterschied, dass der variationelle Ansatz (4.5) die Translationsinvarianz erhalten kann, da im dissipativen Fall ein einzelner Cluster nicht auf einen reinen Zustand beschränkt ist.

4.1.2 Zeitentwicklung

In vielen Fällen ist nicht nur der stationäre Zustand eines dissipativen Vielteilchensystems interessant, sondern auch die Art und Weise, wie das System dorthin relaxiert. Das Variationsprinzip lässt sich relativ einfach auf die volle Zeitentwicklung erweitern, indem die Quanten-Master-Gleichung (3.1) variationell integriert wird. Dazu wird die Zeitableitung zunächst für einen Zeitschritt τ diskretisiert und die Master-Gleichung schrittweise integriert. Als besonders günstige Strategie

erweist sich dabei die implizite Mittelpunktmethode [46], die durch

$$\|\rho(t + \tau) - \rho(t) - \frac{\tau}{2}\mathcal{L}[\rho(t) + \rho(t + \tau)]\| \rightarrow \min, \quad (4.7)$$

gegeben ist. Hierbei ist \mathcal{L} der Liouville-Superoperator, der die Dynamik der Master-Gleichung erzeugt. Die implizite Mittelpunktmethode hat den Vorteil, dass bei einer einzelnen Anwendung des Liouville-Superoperators der Fehler von der Größenordnung τ^3 ist. Die Verwendung von Integratoren höherer Ordnung hat hingegen den Nachteil, dass durch jede Anwendung des Liouville-Superoperators Korrelationen höherer Ordnung erzeugt werden, was deren Anwendung erheblich erschwert. Die implizite Mittelpunktmethode stellt daher eine optimale Balance dar. Der Fixpunkt der variationellen Integration, der durch die Bedingung $\rho(t + \tau) = \rho(t)$ gegeben ist, führt dabei geradewegs auf das Variationsprinzip für den stationären Zustand, das im vorangegangenen Abschnitt eingeführt wurde.

Analog zum stationären Zustand kann auch die Zeitentwicklung mit verschiedenen Klassen von variationellen Zuständen durchgeführt werden, wobei für eine effiziente Berechnung wiederum eine entsprechende zusätzliche Näherung erforderlich ist. Allerdings ergibt sich bei der Betrachtung der Zeitentwicklung ein wesentlicher Unterschied beim Übergang von Produktzuständen zu Zuständen mit Korrelationen. Für Produktzustände führt eine Wechselwirkung zwischen verschiedenen Gitterplätzen zu einem effektiven Mean-Field-Hamiltonian. Für korrelierte Zustände hingegen liefert eine solche Wechselwirkung hingegen auch zusätzliche dissipative Terme, da bei der Berechnung der variationellen Norm diese Korrelationen ausgespart werden [A9]. Interessanterweise sind diese zusätzlichen dissipativen Elemente zeitabhängig, da sie vom jeweiligen Zustand zum gegenwärtigen Zeitpunkt abhängig sind. Diese Zeitabhängigkeit führt auch dazu, dass diese Terme im Allgemeinen nicht-markovsche Dynamik beschreiben. Dies lässt sich auch so verstehen, dass ein Teilsystem bestehend aus einem variationellen Cluster (z.B. zwei Gitterplätze für den Zustand (4.5)) sich seine eigene Umgebung schafft. Da die Zeitskalen für die Dynamik innerhalb des Clusters vergleichbar ist mit der Kopplung zwischen den Clustern, findet keine für die Markov-Näherung erforderliche Separation der Zeitskalen statt. Diese Eigenschaften eröffnen auch die Möglichkeit, das Variationsprinzip auf geschlossene Quantensysteme anzuwenden, da die effektive Dynamik wiederum dissipative Elemente erhält.

4.2 Dissipative Ising-Modelle

Im Folgenden soll nun das Variationsprinzip auf konkrete Modelle angewendet werden. Als erster Fall soll dabei ein dissipatives Ising-Modell betrachtet werden. Der Hamiltonian des Ising-Modells in einem transversalen Feld g und einem longitudinalen

nalen Feld h ist gegeben durch

$$H = \frac{g}{2} \sum_i \sigma_x^{(i)} + \frac{h}{2} \sum_i \sigma_z^{(i)} + \frac{V}{4} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)}, \quad (4.8)$$

wobei V die Stärke der Ising-Wechselwirkung ist. Für $h = 0$ besitzt der Hamiltonian eine \mathbb{Z}_2 -Symmetrie, d.h. das Umkehren aller Spins lässt den Hamiltonian invariant. Für den Grundzustand führt das dazu, dass das System einen Quanten-Phasenübergang von einem Paramagneten ($g \gg V$) zu einem (Anti-)ferromagneten ($g \ll |V|$) aufweist [25].

Das Hinzufügen von dissipativen Elementen zum Ising-Modell kann jetzt auf verschiedene Weisen geschehen. Zum einen ist es möglich, die Dissipation so zu wählen, dass die Ising-Symmetrie erhalten bleibt. Zum anderen kann die Dissipation die Ising-Symmetrie brechen. Wir werden zunächst den zweiten Fall betrachten, insbesondere da dieses Modell eine gute Beschreibung für Experimente mit ultrakalten Rydberg-Atomen darstellt [47, 48]. Dabei stellen die beiden Spin-Zustände des Ising-Modells einen elektronischen Grundzustand und einen hochangeregten Rydberg-Zustand dar. Laser-induziertes Treiben entspricht dann dem transversalen Feld, und die Van-der-Waals-Wechselwirkung des Rydberg-Zustands führt zu einer effektiven Ising-Wechselwirkung [A10].

4.2.1 Symmetriebrechung durch Dissipation

Der einfachste Weg, die Ising-Symmetrie durch Dissipation zu brechen, ist durch Sprungoperatoren $c_i = \sqrt{\gamma} \sigma_-^{(i)}$, wodurch mit einer Rate γ der Spin-Up-Zustand auf Gitterplatz i in den Spin-Down-Zustand transformiert wird. Im Kontext von ultrakalten Rydberg-Gasen beschreibt dieser Prozess den Zerfall des Rydberg-Zustand durch spontane Emission [A10].

Für dieses Modell wurde im Rahmen von Mean-Field-Rechnungen eine bistabile Phase vorhergesagt, in der zwei verschiedene stationäre Zustände koexistieren [49, 50]. Die Anwendung des Variationsprinzips hingegen liefert ein anderes Bild. Dort wird die bistabile Phase durch einen dissipativen Phasenübergang erster Ordnung ersetzt, an dem die Magnetisierung in z -Richtung (d.h., die Wahrscheinlichkeit des Spin-Up-Zustands) einen Sprung aufweist [A8]. Die Vorhersage des Variationsprinzips wird zudem durch numerische Simulationen basierend auf Wellenfunktions-Monte-Carlo-Methoden und durch dissipative Tensor-Netzwerk-Simulationen [A11] bestätigt. Auch ein feldtheoretischer Zugang für eng verwandte Modell stützt die Existenz des Phasenübergangs erster Ordnung [51].

Der Phasenübergang des dissipativen Ising-Modells ist nicht nur aus fundamentalen Erwägungen von Bedeutung sondern kann auch für Anwendungen in der Sensorik genutzt werden. Die zentrale Idee ist hierbei, dass das System am Phasenübergang sehr stark auf kleinste Änderungen beispielsweise eines zu messenden

externen Feldes reagiert [B15]. Die Verwendung eines dissipativen Phasenübergangs hat hierbei den entscheidenden Vorteil, dass potenzielle Fehlerquellen wie Dekohärenz-Prozesse sich in das Sensorik-Protokoll einbauen lassen und dadurch nicht die Messung negativ beeinflussen. Beispielsweise für Magnetfeld-Messungen mit Stickstoff-Fehlstellen-Zentren in Diamant kann eine außerordentliche Robustheit gegen Dekohärenz-Prozesse gezeigt werden, was für diese Systeme von essentieller Bedeutung ist.

Neben des Phasenübergangs erster Ordnung sagt das Variationsprinzip für Produktzustände bei einem endlichen longitudinalen Feld $h \neq 0$ die Existenz einer antiferromagnetischen Phase vorher [A10]. Allerdings führt die Hinzunahme von Korrelationen im variationellen Ansatz gemäß (4.5) dazu, dass der Ordnungsparameter stark reduziert wird, weswegen diese geordnete Phase für den exakten stationären Zustand möglicherweise nicht auftritt [A11]. Auch Simulationen basierend auf Tensor-Netzwerk-Methoden scheinen eher gegen die Existenz der antiferromagnetischen Phase zu sprechen. Zudem ist es möglich, dass der Antiferromagnet nur bei einer strikten Nächsten-Nachbar-Wechselwirkung auftritt, während realistischere Wechselwirkungen wie die langreichweitige van-der-Waals-Wechselwirkung diese Phase nicht realisieren können [52].

4.2.2 Erhaltung der Ising-Symmetrie

Im Folgenden soll nun der Fall betrachtet werden, in dem die Dissipation die Ising-Symmetrie erhält. Da die Dissipation typischerweise in einer atomaren Eigenbasis stattfindet, wird dabei nicht die Dissipation verändert, sondern im Hamiltonian des Systems werden die Rollen der Pauli-Matrizen σ_x und σ_z getauscht, d.h.

$$H = \Delta \sum_i \sigma_z^{(i)} - J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_x^{(i)} \sigma_x^{(j)}. \quad (4.9)$$

Die Sprungoperatoren in der Master-Gleichung sind weiterhin durch $c_i = \sqrt{\gamma} \sigma_-^{(i)}$ gegeben. Experimentell kann ein solcher rotierter Ising Hamiltonian ebenfalls mit Rydberg-Atomen realisiert werden, wenn zwei atomare Grundzustände weit voneinander entfernt an einen Rydberg-Zustand gekoppelt werden [A12]. Bei geeigneter Wahl der Laser-Parameter entsteht durch die Beimischung des Rydberg-Zustands ein effektiver Hamiltonian der Form (4.9). Die Dissipation kann dann durch optisches Pumpen in einen der beiden Grundzustände implementiert werden.

Für den stationären Zustand dieses Ising-symmetrischen Modells ist nun die Frage, inwieweit die Ising-Symmetrie spontan gebrochen werden kann, d.h. der Ordnungsparameter $\phi = \sum_i \langle \sigma_x^{(i)} \rangle / N$ nimmt einen endlichen Wert an. Dafür werden als variationeller Zustand zunächst Produktzustände betrachtet. In enger Analogie zur Landau-Theorie für Gleichgewichts-Phasenübergänge wird nun die variationelle Norm nach Potenzen des Ordnungsparameters entwickelt. Aufgrund der

Ising-Symmetrie verschwinden ungerade Potenzen und die variationelle Norm ist gegeben durch

$$\|\dot{\rho}_{ij}\| = u_0 + u_2\phi^2 + u_4\phi^4 + u_6\phi^6, \quad (4.10)$$

wobei die jeweiligen Koeffizienten u_α durch von ϕ unabhängige Minimierung der Norm eindeutig bestimmt werden können. Die variationelle Norm nimmt also eine mit der Freien Energie in der Thermodynamik vergleichbare Rolle ein.

Betrachtet man nun den Koeffizienten u_4 , so stellt man fest, dass dieser für geringe Stärke der Dissipation γ stets positiv ist. Dann ist der ϕ^6 -Term irrelevant und das Funktional (4.10) beschreibt eine dem Ising-Modell im Gleichgewicht entsprechende ϕ^4 -Theorie: Für starke Ising-Wechselwirkungen J ist die Ising-Symmetrie im stationären Zustand gebrochen und das System befindet sich in einer ferromagnetischen Phase. Für schwache Wechselwirkungen hingegen verschwindet der Ordnungsparameter und das System entspricht einem Paramagneten. Beide Phasen sind durch einen Phasenübergang zweiter Ordnung verbunden.

Übersteigt die Stärke der Dissipation hingegen einen kritischen Wert, kann der Koeffizient u_4 negativ werden. Dann ist zur Stabilisierung des Funktionals (4.10) die Hinzunahme des ϕ^6 -Terms erforderlich. Dies führt dazu, dass der Phasenübergang zwischen Paramagnet und Ferromagnet ein Phasenübergang erster Ordnung wird. An der Stelle, an der u_4 verschwindet, befindet sich ein multikritischer Punkt [A12]. Mit Hilfe des Variationsprinzips können die Phasengrenzen auch quantitativ bestimmt werden.

Bemerkenswerterweise sagen Mean-Field-Rechnungen voraus, dass der Phasenübergang stets zweiter Ordnung sei. Hingegen lässt sich auch im Rahmen feldtheoretischer Berechnungen zeigen, dass der u_4 -Term für hinreichend starke Dissipation negativ wird [51], auch wenn dort keine definitive Aussage über die Art des Phasenübergangs gemacht werden kann. Es lohnt sich daher, die Diskrepanz zwischen Mean-Field-Resultat und der variationellen Lösung genauer zu betrachten. In Gleichgewichtssystemen werden Mean-Field-Ergebnisse zumindest qualitativ korrekt, wenn sich die räumliche Dimension eines System oberhalb der oberen kritischen Dimension befindet [53]. Dies ist für dissipative Systeme offensichtlich nicht der Fall, der der Phasenübergang erster Ordnung und der multikritische Punkt selbst für den Fall $d \rightarrow \infty$ erhalten bleiben.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich das Konzept der oberen kritischen Dimension auf dissipative System übertragen lässt. Dies funktioniert nur auf der Basis des Variationsprinzips. Dazu werden zunächst im Sinne einer dissipativen Ginzburg-Landau-Theorie räumliche Fluktuationen des Ordnungsparameters betrachtet. Diese führen nach Bilden des Kontinuumslimites zu einem zusätzlichen Gradienten-Term v_2 in der variationellen Norm gemäß

$$D[\Phi] = z \int d^d x u_0 + v_2(\nabla\Phi)^2 + u_2\Phi^2 + u_4\Phi^4 + u_6\Phi^6. \quad (4.11)$$

Auch hier kann der Wert des v_2 -Terms im Rahmen des Variationsprinzips genau

bestimmt werden. Wie in Gleichgewichts-Systemen kann die obere kritische Dimension nun über das Ginzburg-Kriterium bestimmt werden [54]. Dazu wird der normierte Erwartungswert von Fluktuationen um den Mittelwert Ordnungsparameters herum betrachtet, die hier durch

$$\frac{\langle [\phi - \Phi]^2 \rangle}{\phi^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} w^d v_2^{-d/2} u_0 \sqrt{u_6} u_2^{(d-3)/2} \quad (4.12)$$

gegeben sind, wobei $w \approx 0.0952$ eine numerische Konstante ist. Aus diesem Resultat ist ersichtlich dass am Phasenübergang mit $u_2 = 0$ die Fluktuationen für $d < 3$ divergieren, während sie für $d > 3$ vernachlässigbar klein sind und damit der Produkt-Ansatz ohne Fluktuationen zumindest qualitativ korrekt ist. Dies bedeutet, dass $d = 3$ gerade die obere kritische Dimension darstellt.

Die Analyse der Fluktuationen des Ordnungsparameters basierend auf dem Ginzburg-Landau-Funktional lässt sich auch zu einem Ginzburg-Landau-Wilson-Hamiltonian [55] erweitern, wodurch systematisch Korrekturen zum Produktzustand basierend auf der Renormierungsgruppe behandelt werden können. Damit ist es beispielsweise möglich, durch die Berücksichtigung von Schleifenkorrekturen genauere Vorhersagen für die Position des multikritischen Punkts zu erhalten [A12].

Ising-symmetrische Modelle können außer mit Rydberg-Atomen auch mit Cavity-QED-Arrays realisiert werden, wobei sowohl der Hamiltonian als auch der dissipative Teil durch interferometrische Messungen des von den Resonatoren emittierten Lichts und anschließendem Feedback an die Cavity-QED-Systeme implementiert werden [A13]. Durch geeignete Wahl des Interferometers können die Sprungoperatoren auf quasilokale Terme begrenzt werden. Allerdings ergibt sich hier die zusätzliche Herausforderung, dass die kohärenten und dissipativen Terme auf die gleiche Weise erzeugt werden und daher ihre relative Stärke zueinander nur eingeschränkt kontrolliert werden kann. Dies führt insbesondere dazu, dass die hier diskutierten Phasenübergänge nicht beobachtet werden können, da das System auf die paramagnetische Phase beschränkt bleibt.

4.3 Dissipativer Antiferromagnetismus im Fermi-Hubbard-Modell

Neben dem Ising-Modell kann das Variationsprinzip auch auf weitere dissipative Varianten paradigmatischer Modelle aus der Festkörperphysik angewandt werden. Das Fermi-Hubbard-Modell ist eines der zentralen Modelle der Festkörperphysik und besitzt zudem das Potenzial, eine Erklärung für das bisher unverstandene Problem der Hochtemperatur-Supraleitung zu liefern. In den letzten Jahren ist zudem die Möglichkeit entstanden, mit ultrakalten Quantengasen bisher unerforschte Eigenschaften des Fermi-Hubbard-Modells experimentell zu untersuchen [56].

Mit dem Konzept der dissipativen Zustandspräparation kann dabei durch Verwendung maßgeschneiderter Laserfelder ein antiferromagnetischer Zustand als Dunkelzustand der Master-Gleichung realisiert werden [A14]. Der Hamiltonian des Fermi-Hubbard-Modells ist gegeben durch

$$\hat{H} = \sum_{i,j,\sigma} t_{ij} \hat{c}_{i\sigma}^\dagger \hat{c}_{j\sigma} + U \sum_i \hat{n}_{i\uparrow} \hat{n}_{i\downarrow}, \quad (4.13)$$

wobei $c_{i\sigma}$ ein Fermion mit Spin-1/2-Variable σ erzeugt, t_{ij} das Tunnelmatrix-Element zwischen Gitterplatz i und j beschreibt, und U die Wechselwirkung zwischen zwei Fermionen mit entgegengesetztem Spins mit $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^\dagger c_{i\sigma}$ darstellt. Die dissipativen Elemente sind gegeben durch

$$\hat{j}_{ij,\uparrow}^{(1)} = \sqrt{\gamma_1} |\downarrow\uparrow; 0\rangle \langle \uparrow; \uparrow|, \quad \hat{j}_{ij,\uparrow}^{(2)} = \left(\hat{j}_{ij,\uparrow}^{(1)}\right)^\dagger, \quad (4.14)$$

$$\hat{j}_{ij,\downarrow}^{(1)} = \sqrt{\gamma_1} |\downarrow\uparrow; 0\rangle \langle \downarrow; \downarrow|, \quad \hat{j}_{ij,\downarrow}^{(2)} = \left(\hat{j}_{ij,\downarrow}^{(1)}\right)^\dagger, \quad (4.15)$$

$$\hat{j}_{ij}^{(3)} = \sqrt{\gamma_2} (|\downarrow; \uparrow\rangle \langle 0; \downarrow\uparrow| + |\uparrow\downarrow; \uparrow\rangle \langle \uparrow; \downarrow\uparrow|). \quad (4.16)$$

wobei hier zur besseren Unterscheidung mit den fermionischen Operatoren $c_{i\sigma}$ die Bezeichnung $j_\alpha^{(\mu)}$ für die Sprungoperatoren verwendet wird. (4.14) und (4.15) beschreiben eine dissipative Bewegung von zwei Fermionen mit gleichem Spin auf benachbarten Gitterplätzen hin zu einem Paar mit entgegengesetztem Spin auf demselben Gitterplatz, sowie die entgegengesetzten Prozesse. (4.16) hingegen beschreibt den Zerfall des fermionischen Pairs zurück auf getrennte Gitterplätze. Diese dissipativen Prozesse können durch geeignete Laser-Parameter innerhalb Prozessen wie laser-assistiertem Tunneln realisiert werden [A14].

Im Folgenden wird das Fermi-Hubbard-Modell in zwei Raumdimensionen betrachtet. Um das Variationsprinzip anwenden zu können, muss dieses zunächst leicht adaptiert werden um die fermionische Statistik der Teilchen korrekt zu beschreiben. Für variationelle Produktzustände bei halber Füllung (d.h. im Mittel mit einem Fermion pro Gitterplatz) kann eine zwei-dimensionale Jordan-Wigner-Transformation durchgeführt werden. Bei halber Füllung lassen sich die entstehenden Wigner-Strings exakt auswerten, diese führen dabei zu einem teilweisen Vorzeichenwechsel der Tunnelmatrixelemente. Die Berechnung des stationären Zustands lässt sich dann wie gehabt ausführen. Für den Wert des antiferromagnetischen Ordnungsparameter ergibt sich dabei eine sehr gute Übereinstimmung mit Wellenfunktions-Monte-Carlo-Rechnungen für kleine Systemgrößen [A14].

AUSBLICK

Die experimentelle Kontrolle über Quantensysteme hat ein Niveau erreicht, dass die gezielte Nutzung von quantenmechanischer Verschränkung beispielsweise in der Quantensimulation oder in Quantensensoren in naher Zukunft realistisch erscheinen lässt. Die vorliegende Arbeit liefert theoretische Grundlagen für die Kontrolle von kohärenten Wechselwirkungen und dissipativen Elementen, um diesem Ziel näher zu kommen.

Die Nutzbarmachung von Dissipation als nützlicher Ressource für die Kontrolle von Quantensystemen stellt dabei einen Paradigmenwechsel dar. Ein entscheidender Vorteil des dissipativen Zugangs ist, dass externe Fehlerquellen wie unerwünschte Dekohärenz auf derselben Beschreibungsebene stattfindet wie die erwünschte Dissipation. Sind die unerwünschten Fehlerquellen schwächer als die kontrollierte Dissipation, liefern die unerwünschten Kanäle in einem störungstheoretischen Sinne lediglich schwache Korrekturen zum erwünschten Resultat. Dies ist für eine rein kohärente Zustandspräparation fundamental anders, da dort jede Fehlerquelle potentiell den gesamten Prozess gefährdet.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Variationsprinzip für offene Quantensysteme leistet einen wichtigen Beitrag, um ein fundamentales Verständnis für derartige Vielteilchensysteme liefert. Durch die Entwicklung eines Äquivalents zur Landau-Theorie für Gleichgewichtssysteme ist es gelungen, die Analyse von offenen Systemen auf ein solides theoretisches Fundament zu stellen, auf dessen Basis systematische Erweiterungen untersucht werden können.

Die Untersuchung fundamentaler Eigenschaften von offenen Quantensystemen motiviert durch Anwendungen in der dissipativen Zustandspräparation ist dabei keine Einbahnstraße. Durch ein besseres Verständnis dieser bisher nur schwer theoretisch handhabbaren Systeme ist es unmittelbar möglich neue Anwendungen zu konzipieren. Eine derartige gegenseitige Befruchtung von Anwendungen und fundamentalen Fragen macht die Untersuchung von dissipativen Quantensystemen zu einer besonders reizvollen Aufgabe.

Für die Zukunft wird der Schwerpunkt in der theoretischen Arbeit auf der Identifizierung und Untersuchung von Modellen mit langreichweitigen Verschränkungen liegen, da diese beispielsweise für Heisenberg-limitierte Quantenmetrologie geeignet sind. Ebenso fallen darunter Systeme mit topologischer Ordnung, welche Anwendungen als langlebige Speichermedien für Quanteninformation haben.

AUSGEWÄHLTE ORIGINALARBEITEN

- [A1] H. Weimer, N. Y. Yao, C. R. Laumann, M. D. Lukin, *Long-Range Quantum Gates using Dipolar Crystals*, Phys. Rev. Lett. **108**, 100501 (2012).
- [A2] H. Weimer, N. Y. Yao, M. D. Lukin, *Collectively Enhanced Interactions in Solid-State Spin Qubits*, Phys. Rev. Lett. **110**, 067601 (2013).
- [A3] M. Lemeshko, R. V. Krems, H. Weimer, *Nonadiabatic Preparation of Spin Crystals with Ultracold Polar Molecules*, Phys. Rev. Lett. **109**, 035301 (2012).
- [A4] H. Weimer, *String order in dipole-blockaded quantum liquids*, New J. Phys. **16**, 093040 (2014).
- [A5] H. Weimer, *Quantum simulation of many-body spin interactions with ultracold polar molecules*, Mol. Phys. **111**, 1753 (2013).
- [A6] M. Lemeshko, H. Weimer, *Dissipative binding of atoms by non-conservative forces*, Nature Commun. **4**, 2230 (2013).
- [A7] H. Weimer, *Tailored jump operators for purely dissipative quantum magnetism*, J. Phys. B **50**, 024001 (2017).
- [A8] H. Weimer, *Variational Principle for Steady States of Dissipative Quantum Many-Body Systems*, Phys. Rev. Lett. **114**, 040402 (2015).
- [A9] V. R. Overbeck, H. Weimer, *Time evolution of open quantum many-body systems*, Phys. Rev. A **93**, 012106 (2016).
- [A10] H. Weimer, *Variational analysis of driven-dissipative Rydberg gases*, Phys. Rev. A **91**, 063401 (2015).
- [A11] A. Kshetrimayum, H. Weimer, R. Orus, *A simple tensor network algorithm for two-dimensional steady states*, Nature Commun. **8**, 1291 (2017).

- [A12] V. R. Overbeck, M. F. Maghrebi, A. V. Gorshkov, H. Weimer, *Multicritical behavior in dissipative Ising models*, Phys. Rev. A **95**, 042133 (2017).
- [A13] J. Lammers, H. Weimer, K. Hammerer, *Open-system many-body dynamics through interferometric measurements and feedback*, Phys. Rev. A **94**, 052120 (2016).
- [A14] J. Kaczmarczyk, H. Weimer, M. Lemeshko, *Dissipative preparation of anti-ferromagnetic order in the Fermi-Hubbard model*, New J. Phys. **18**, 093042 (2016).

NICHT REFERIERTE MANUSKRIPTE

- [B15] M. Raghunandan, J. Wrachtrup, H. Weimer, *High-density quantum sensing with dissipative first order transitions*, arXiv:1703.07358 (2017).

LITERATURVERZEICHNIS

- [16] S. Diehl, *et al.*, *Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms*, Nature Phys. **4**, 878 (2008).
- [17] F. Verstraete, M. M. Wolf, J. Ignacio Cirac, *Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation*, Nature Phys. **5**, 633 (2009).
- [18] H. Weimer, M. Müller, I. Lesanovsky, P. Zoller, H. P. Büchler, *A Rydberg quantum simulator*, Nature Phys. **6**, 382 (2010).
- [19] D. P. DiVincenzo, *The Physical Implementation of Quantum Computation*, Fortschr. Phys. **48**, 771 (2000).
- [20] S. Bose, *Quantum Communication through an Unmodulated Spin Chain*, Phys. Rev. Lett. **91**, 207901 (2003).
- [21] H. Weimer, R. Löw, T. Pfau, H. P. Büchler, *Quantum critical behavior in strongly interacting Rydberg gases*, Phys. Rev. Lett. **101**, 250601 (2008).
- [22] P. W. Anderson, *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
- [23] K.-K. Ni, *et al.*, *A High Phase-Space-Density Gas of Polar Molecules*, Science **322**, 231 (2008).
- [24] A. V. Gorshkov, *et al.*, *Tunable Superfluidity and Quantum Magnetism with Ultracold Polar Molecules*, Phys. Rev. Lett. **107**, 115301 (2011).
- [25] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [26] P. Bak, R. Bruinsma, *One-Dimensional Ising Model and the Complete Devil's Staircase*, Phys. Rev. Lett. **49**, 249 (1982).
- [27] J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems*, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).

-
- [28] X.-G. Wen, *Topological Order: From Long-Range Entangled Quantum Matter to a Unified Origin of Light and Electrons*, ISRN Cond. Mat. Phys. **2013**, 20 (2013).
- [29] A. Y. Kitaev, *Fault-tolerant quantum computation by anyons*, Ann. Phys. (N. Y.) **303**, 2 (2003).
- [30] J. T. Barreiro, *et al.*, *An open-system quantum simulator with trapped ions*, Nature **470**, 486 (2011).
- [31] H. Krauter, *et al.*, *Entanglement Generated by Dissipation and Steady State Entanglement of Two Macroscopic Objects*, Phys. Rev. Lett. **107**, 080503 (2011).
- [32] R. Löw, *et al.*, *An experimental and theoretical guide to strongly interacting Rydberg gases*, J. Phys. B **45**, 113001 (2012).
- [33] B. Zhao, A. W. Glaetzle, G. Pupillo, P. Zoller, *Atomic Rydberg Reservoirs for Polar Molecules*, Phys. Rev. Lett. **108**, 193007 (2012).
- [34] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, C. Cohen-Tannoudji, *Laser Cooling below the One-Photon Recoil Energy by Velocity-Selective Coherent Population Trapping*, Phys. Rev. Lett. **61**, 826 (1988).
- [35] J. Honer, H. Weimer, T. Pfau, H. P. Büchler, *Collective Many-Body Interaction in Rydberg Dressed Atoms*, Phys. Rev. Lett. **105**, 160404 (2010).
- [36] K. Mølmer, Y. Castin, J. Dalibard, *Monte Carlo wave-function method in quantum optics*, J. Opt. Soc. Am. B **10**, 524 (1993).
- [37] H.-P. Breuer, F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [38] F. Reiter, A. S. Sørensen, *Effective operator formalism for open quantum systems*, Phys. Rev. A **85**, 032111 (2012).
- [39] A. W. Glaetzle, *et al.*, *Designing Frustrated Quantum Magnets with Laser-Dressed Rydberg Atoms*, Phys. Rev. Lett. **114**, 173002 (2015).
- [40] H. P. Büchler, *et al.*, *Strongly Correlated 2D Quantum Phases with Cold Polar Molecules: Controlling the Shape of the Interaction Potential*, Phys. Rev. Lett. **98**, 060404 (2007).
- [41] G. G. Batrouni, R. T. Scalettar, *Ultracold Gases and Quantum Information*, C. Miniatura, *et al.*, eds. (Oxford University Press, 2011).

-
- [42] A. Gilchrist, N. K. Langford, M. A. Nielsen, *Distance measures to compare real and ideal quantum processes*, Phys. Rev. A **71**, 062310 (2005).
- [43] B. Edegger, V. N. Muthukumar, C. Gros, *Gutzwiller–RVB theory of high-temperature superconductivity: Results from renormalized mean-field theory and variational Monte Carlo calculations*, Adv. Phys. **56**, 927 (2007).
- [44] A. Tomadin, *et al.*, *Signatures of the superfluid-insulator phase transition in laser-driven dissipative nonlinear cavity arrays*, Phys. Rev. A **81**, 061801 (2010).
- [45] H. A. Bethe, *Statistical Theory of Superlattices*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **150**, 552 (1935).
- [46] E. Süli, D. F. Mayers, *An introduction to numerical analysis* (Cambridge university press, 2003).
- [47] N. Malossi, *et al.*, *Full Counting Statistics and Phase Diagram of a Dissipative Rydberg Gas*, Phys. Rev. Lett. **113**, 023006 (2014).
- [48] F. Letscher, O. Thomas, T. Niederprüm, M. Fleischhauer, H. Ott, *Bistability vs. Metastability in Driven Dissipative Rydberg Gases*, arXiv:1611.00627 (2016).
- [49] T. E. Lee, H. Häffner, M. C. Cross, *Antiferromagnetic phase transition in a nonequilibrium lattice of Rydberg atoms*, Phys. Rev. A **84**, 031402 (2011).
- [50] M. Marcuzzi, E. Levi, S. Diehl, J. P. Garrahan, I. Lesanovsky, *Universal Nonequilibrium Properties of Dissipative Rydberg Gases*, Phys. Rev. Lett. **113**, 210401 (2014).
- [51] M. F. Maghrebi, A. V. Gorshkov, *Nonequilibrium many-body steady states via Keldysh formalism*, Phys. Rev. B **93**, 014307 (2016).
- [52] M. Hoening, W. Abdussalam, M. Fleischhauer, T. Pohl, *Antiferromagnetic long-range order in dissipative Rydberg lattices*, Phys. Rev. A **90**, 021603 (2014).
- [53] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Perseus Books, Reading, 1992).
- [54] H. Kleinert, V. Schulte-Frohlinde, *Critical Properties of Φ^4 -Theories* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [55] K. G. Wilson, J. Kogut, *The renormalization group and the ϵ expansion.*, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).

- [56] T. Esslinger, *Fermi-Hubbard Physics with Atoms in an Optical Lattice*, Annu. Rev. Condens. Matter. Phys. **1**, 129 (2010).