

# Frequenzbereichsmodellierung nichtlinearer Übertragungssysteme mit verallgemeinerten Streuparametern

Von der Fakultät für Elektrotechnik und Informatik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur  
(abgekürzt: Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von  
Dipl.-Ing. Christian Widemann  
geboren am 13. November 1985  
in Hildesheim

2018

Autor: Dipl.-Ing. Christian Widemann

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Mathis

2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Robert Weigel

Tag der Promotion: 5. April 2018

*Für meine Familie*



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand zu einem wesentlichen Teil während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Elektrotechnik der Leibniz Universität Hannover.

Mein aufrichtiger Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Mathis, der mir die Entstehung dieser Arbeit ermöglicht hat und immer für eine wertvolle Diskussion zur Verfügung stand. Wolfgang, ich bin dir überaus dankbar für deine Unterstützung und dein Vertrauen in den beinahe zehn Jahren gemeinsamer Zeit am TET-Institut.

Des Weiteren danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. Robert Weigel für die Erstellung des Zweitgutachtens und Herrn Prof. Dr.-Ing. Heyno Garbe für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Darüber hinaus möchte ich mich bei den Kollegen und Freunden am TET-Institut für die Zusammenarbeit und das Arbeitsklima bedanken. Ihr seid mir eine zweite Familie gewesen und ich werde mich immer an die gemeinsame Zeit erinnern.

Namentlich bedanken möchte ich mich bei meinem ersten Bürokollegen Herrn Sebastian Stegemann, der durch seine *Volterra-Tools* maßgeblich zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen hat. Sebastian, ohne dich hätten mich die BMBF-Projekte in die Knie gezwungen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Harry Weber, ohne den diese Arbeit sicherlich in dieser Form so nie erstellt worden wäre. Die Erkenntnisse seiner Bachelor- und vor allem seiner Masterarbeit stellen einen fundamentalen Beitrag zu dieser Arbeit dar. Harry, du bist ein Glücksgriff für mich und meine Arbeit gewesen. Zunächst ein Student, der es innerhalb kürzester Zeit schaffte, seinen Betreuer thematisch zu überflügeln. Später der beste Bürokollege, den man sich wünschen kann, und das nicht nur aufgrund der gemeinsamen wissenschaftlichen Zeit und den daraus resultierenden fruchtbaren Diskussionen.

Ferner möchte ich mich bei Marco Reit, Sören Plönnigs, Michael Popp und Hoang Duc Pham für die vielfältige Hilfe während der Erstellung dieses Manuskriptes und der Vorbereitung der mündlichen Doktorprüfung bedanken. Ebenso danke ich Frau Heidi Harms, die immer ein offenes Ohr für meine Sorgen im (Arbeits-) Alltag hatte.

Den Kollegen Peter Berg, Sven Bruhn und Michael Tomforde danke ich für ihre Ausdauer beim Korrekturlesen dieses Manuskriptes.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Familie für ihre Unterstützung danken. Meinen Eltern Monika und Thomas bin ich unendlich dankbar, dass sie immer an mich geglaubt haben und mich in jeder Phase meines Lebens ermutigt haben meinen eigenen Weg zu gehen. Ebenso möchte ich meinen Schwiegereltern Birgit und Bernd sowie Volkmar und Uta dafür danken, dass sie immer für mich bzw. uns da sind, wenn wir sie brauchen.

Mein besonders liebevoller Dank gilt meiner Frau Suela, die mich seit Jahren mit größtem Verständnis begleitet und mir in allen Lebenslagen den nötigen Rückhalt gibt. Suela, ohne dich hätte ich diese Arbeit nie beenden können! Danke für unsere wundervollen Töchter Paulina und Marie, deren Geburten jeweils neue Motivation für einen schnellen Abschluss der Promotion lieferten.

Lehrte, im August 2018  
Christian Widemann



# Kurzfassung

In dieser Arbeit werden verschiedene Frequenzbereichsmodellansätze zur Berücksichtigung nichtlinearen Verhaltens auf Basis der seit über 50 Jahren in der Elektrotechnik weit verbreiteten Streuparametern - kurz *S-Parameter* - betrachtet und erweitert. Mit den *X-Parametern* wird davon ein Ansatz in den Fokus gesetzt, der seit einiger Zeit messtechnisch und simulatorisch kommerziell verfügbar ist. Die X-Parameter ermöglichen eine Überführung der S-Parametervorteile in eine nichtlineare Domäne und so Verhaltensmodelle von stark nichtlinearen Übertragungssystemen als Entwurfswerkzeug zu erzeugen.

Eine kurze Einführung in die linearen S-Parameter zeigt deren wichtigste Vorteile für die Beschreibung linearisierter Übertragungssysteme. Die entscheidende Einschränkung der S-Parameter - nur im Gültigkeitsbereich der Linearisierung ausreichend genaue Beschreibungen zu liefern - wird anhand der ebenfalls weit verbreiteten Volterra-Reihe veranschaulicht. Dabei kommt ein wenig beachteter Ansatz von Weiner und Naditch zum Einsatz, der die Theorien der S-Parameter und der Volterra-Reihe direkt verknüpft. Dem wird die Betrachtung der X-Parametertheorie vom Ursprung der Beschreibungsfunktion über die spektrale Linearisierung im *polyharmonic distortion*-Ansatz bis hin zu Prinzipien der messtechnischen Bestimmung gegenüber gestellt. Insbesondere die Ableitung der zugrunde liegenden mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion aus der Sinus-Eintonbeschreibungsfunktion erfolgt dabei umfassender als in der Literatur zu den X-Parametern.

In einem direkten Vergleich der beiden Ansätze - Volterra-reihenbasierte S-Parameter und X-Parameter - wird auf Gemeinsamkeiten sowie Unterschiede eingegangen. Die Volterra-Reihe bietet den Vorteil mehrere ähnlich große Signalanteile bei beliebigen Frequenzen berücksichtigen zu können. Als wesentliche Nachteile sind die Beschränkung auf schwach nichtlineares Verhalten und der hohe Berechnungsaufwand bei höherer Ordnung zu nennen. Die X-Parameter hingegen sind durch ihren Ursprung in der Beschreibungsfunktion in der Lage das stark nichtlineare Systemverhalten infolge eines einzelnen sinusförmigen Großsignals abzubilden. Weitere Signalanteile werden diesem Großsignalarbeitspunkt allerdings nur linear überlagert. Sobald die zusätzlichen Signalamplituden zu groß werden, führen die X-Parameter zu einem nicht vernachlässigbaren Fehler.

Aus den gewonnenen Erkenntnissen des Vergleichs wird die Theorie der X-Parameter für verschiedene Fälle erweitert bzw. angepasst. Dazu werden die mehrdimensionalen Beschreibungsfunktionen mit einer vollständigen Multi-Index-Taylor-Reihe im Großsignalarbeitspunkt über den linearen Anteil hinaus entwickelt. Dadurch werden den in der Literatur verfügbaren Ansätzen zu X-Parametern höherer Ordnung weitere Terme hinzugefügt und darüber hinaus mit einer mathematischen Grundlage versehen.

Die höhere Genauigkeit des Multi-Index-Ansatzes zieht in jedem Entwicklungspunkt eine deutlich höhere Modellkomplexität nach sich. Allerdings werden die linearen X-Parameter für verschiedene Lastsituationen über eine *Load-pull*-Messumgebung neu bestimmt, sodass deren Modellkomplexität abhängig von der Lastanzahl stark wächst. Wie in dieser Arbeit gezeigt wird, reicht es u. U. aus einen einzigen X-Parametersatz nach dem neuen Multi-Index-Taylor-Ansatz für die gesamte Lastebene zu bestimmen, ohne dabei einen großen Fehler hinnehmen zu müssen.

In einem letzten Abschnitt wird gezeigt, wie mit dem neuen Multi-Index-Ansatz die X-Parameter für unabhängige Erregerfrequenzen angepasst werden können. Durch einen alternativen Großsignalarbeitspunkt zur Entwicklung der Taylor-Reihe ist es möglich, dass nur ein Fundamentalsignal als Großsignal angesehen werden muss. Dadurch lassen sich neue X-Parameter finden, die als *Empfindlichkeitsfunktionen* auf leitungsgebundene, unabhängige Störsignale angesehen werden können. Aus dieser neuen Betrachtungsweise lässt sich ein Einsatz der X-Parameter als Werkzeug in der Suszeptibilitätsanalyse einsetzen.

*Schlagerworte:* Zweittheorie, S-Parameter, nichtlineare Übertragungssysteme, Frequenzbereichsmodellierung, Verhaltensmodellierung, Volterra-Reihe, X-Parameter



# Abstract

In this thesis, different frequency domain model approaches for the consideration of nonlinear behavior are considered and extended on the basis of scattering parameters (S-parameters) which are widely used in electrical engineering since more than 50 years. Of these approaches, the focus is on the *X-Parameters* which were made commercially available metrologically and simulatively a few years ago. The X-parameters allow the transfer of the S-parameters' benefits into a nonlinear domain and hence creating behavioral models of hard nonlinear transmission systems as a design tool.

A brief introduction to the linear S-parameters emphasizes their most important advantages for the characterization of linearized transmission systems. The crucial limitation of S-parameters (providing sufficiently accurate results only within the range of linearization) is illustrated using the widely used Volterra series. Therein, a little-noticed approach of Weiner und Naditch is used, which directly combines the theories of the S-parameters and the Volterra series. In contrast, the X-parameter theory is considered widely from the originating describing function via the spectral linearization by the *polyharmonic distortion* approach to the principles of metrological determination. In particular, the derivation of the underlying multi-dimensional describing function from the single sinusoidal input describing function is carried out more comprehensively than in the literature on X-parameters.

In a direct comparison, similarities and differences of the two approaches (Volterra series based S-parameters and X-parameters) are pointed out. Employing the Volterra series, it is possible to consider several similarly large signal components at arbitrary frequencies. Its main disadvantages are the limitation to weakly nonlinear behavior and the high computational effort for higher orders. On the other hand, due to their origin in the describing function, the X-parameters are able to map the hard nonlinear system response to a single sinusoidal large signal. However, further signal components are superimposed only linearly on this so-called large signal operating point. As the additional signals' amplitudes become too large, the X-parameters result in a non-negligible error. Concluding from the results of the presented comparison, the theory of the X-parameters is extended or adapted for different cases. For this purpose, the multi-dimensional describing function is developed in the large signal operating point beyond the linear terms employing a complete multi-index Taylor series. This new series extension approach adds further terms to the higher-order X-parameter approaches available in the literature and provides a mathematical basis in addition.

The higher accuracy of the multi-index approach results in a significantly higher model complexity at each development point. However, the linear X-parameters have to be redefined at different load situations via a *load-pull* measurement techniques. Thus, their overall model complexity increases significantly depending on the number of considered load situations. As shown in this work, it is sufficient to determine a single X-parameter set according to the new multi-index Taylor approach for the entire load plane without introducing a large error.

The last section illustrates how the new multi-index approach can be employed to adjust the X-parameters for independent excitation frequencies. Due to an alternative large-signal operating point for the Taylor series expansion, it is possible to consider only one fundamental signal as a large signal. Thus, new X-parameters are determined that can be considered as *susceptibility functions* to conductively coupled interferences. From this new perspective, it is possible to use the X-parameters as a tool in the susceptibility analysis.

*Keywords:* two-port theory, S-parameters, nonlinear transmission systems, frequency domain modeling, behavioral modeling, Volterra series, X-parameters



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>ix</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>xiii</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>xv</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Stand der Technik: Von linearen S-Parametern zu X-Parametern . . . . .	1
1.2. Beitrag zum Stand der Technik . . . . .	7
1.3. Übersicht der Arbeit . . . . .	9
<b>2. Lineare Zweitorbeschreibung mit S-Parametern</b>	<b>11</b>
2.1. Strom- und spannungsbasierte Zweitormatrizen . . . . .	11
2.2. Streuparameter und S-Matrix . . . . .	13
2.2.1. T-Matrix . . . . .	14
2.2.2. N-Tore . . . . .	14
2.2.3. Anwendungen . . . . .	15
2.2.4. Beschränkung auf Linearisierung . . . . .	16
<b>3. Volterra-reihenbasierte nichtlineare S-Parameter</b>	<b>19</b>
3.1. Volterra-Reihe . . . . .	19
3.1.1. Sinusförmige Anregung . . . . .	21
3.1.2. Berechnung der Volterra-Kerne . . . . .	22
3.2. Streuvariablen und die Volterra-Reihe . . . . .	23
3.2.1. Polyharmonische Anregung . . . . .	24
3.3. Zusammenfassung . . . . .	26
<b>4. X-Parameter</b>	<b>29</b>
4.1. Beschreibungsfunktionen sinusförmiger Anregung . . . . .	29
4.1.1. Eintonanregung . . . . .	29
4.1.2. Zweintonanregung . . . . .	31
4.1.3. Berücksichtigung höherer Harmonischer . . . . .	32
4.2. PHD-Ansatz . . . . .	34
4.2.1. Phasennormierung der mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion . . . . .	35
4.2.2. Linearisierung der mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion . . . . .	36
4.3. Bestimmung der X-Parameter . . . . .	38
4.3.1. Frequenz-Offset-Methode . . . . .	38
4.3.2. Phasen-Offset-Methode . . . . .	39
4.4. Zusammenfassung . . . . .	40
<b>5. X-Parameter und Volterra-reihenbasierte S-Parameter im Vergleich</b>	<b>43</b>
5.1. Mathematische Zusammenhänge beider Ansätze . . . . .	43
5.1.1. Eintonanregung . . . . .	44
5.1.2. Zweintonanregung . . . . .	45
5.1.3. Polynomieller Ansatz der Beschreibungsfunktionen . . . . .	47
5.2. Beispiel: LNA . . . . .	50
5.3. Schlussfolgerungen und Erweiterung der X-Parameter . . . . .	54

<b>6. X-Parameter höherer Ordnung</b>	<b>57</b>
6.1. HOPHD-Ansatz: Kleinsignale ohne Wechselwirkung . . . . .	57
6.2. MIT-Ansatz: Kleinsignale mit Wechselwirkung . . . . .	59
6.3. Berechnung der X-Parameter höherer Ordnung . . . . .	60
6.3.1. HOPHD-Ansatz . . . . .	60
6.3.2. MIT-Ansatz . . . . .	62
6.4. Beispiel: Klasse-C-Verstärker . . . . .	65
6.5. Modellkomplexität . . . . .	68
6.6. Zusammenfassung . . . . .	73
<b>7. Lastabhängigkeit der X-Parameter</b>	<b>75</b>
7.1. Anpassungsbegriff für (nicht-) lineare Systeme . . . . .	75
7.1.1. Lineare Systeme . . . . .	75
7.1.2. Nichtlineare Systeme . . . . .	76
7.2. Modellansätze . . . . .	76
7.2.1. Load-pull-Ansatz . . . . .	76
7.2.2. MQPHD-Ansatz . . . . .	78
7.2.3. PLSOC-Ansatz . . . . .	78
7.2.4. Lastoptimierungsansatz . . . . .	78
7.2.5. Berechnung der Modellparameter . . . . .	79
7.3. Vergleich der Ansätze . . . . .	80
7.3.1. Beispiel: LNA . . . . .	80
7.3.2. Beispiel: Klasse-C-Verstärker . . . . .	87
7.3.3. Modellkomplexität . . . . .	94
7.4. Zusammenfassung . . . . .	98
<b>8. X-Parameter für unabhängige Frequenzen</b>	<b>101</b>
8.1. X-Parameter mit zwei unabhängigen Großsignalen . . . . .	101
8.2. X-Parameter unabhängiger Frequenzen und eines einzigen Großsignals . . . . .	103
8.2.1. Zweitonanregung . . . . .	103
8.2.2. Mehrtonanregung . . . . .	107
8.3. Beispiel: <i>Single-balanced</i> -Mischer . . . . .	108
8.3.1. Zweitonanregung . . . . .	108
8.3.2. Dreitonanregung . . . . .	112
8.4. Modellkomplexität . . . . .	116
8.5. Zusammenfassung . . . . .	117
<b>9. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>119</b>
<b>A. Streuvariablen in nichtlinearen <math>N</math>-Toren</b>	<b>123</b>
A.1. <i>Polyharmonische</i> Anregung . . . . .	123
A.2. Unabhängige Erregerfrequenzen . . . . .	124
A.2.1. Zweitonanregung . . . . .	124
A.2.2. $L$ -Tonanregung . . . . .	125
<b>Literatur</b>	<b>135</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>137</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1. Allgemeines Zweitor . . . . .	11
2.2. Parallelwiderstand ohne $Y$ -Matrix (a) und Reihenwiderstand ohne $Z$ -Matrix (b) . . . . .	12
2.3. Zweitor in Betriebsschaltung zur Bestimmung der $S$ -Matrix . . . . .	13
2.4. Betragsfrequenzgang und Smith-Chart der $S$ -Parameter $S_{11}$ und $S_{21}$ . . . . .	16
2.5. 1dB-Kompressionspunkt bei Leistungsanpassung . . . . .	17
2.6. Grafische Bestimmung der Großsignal- $S$ -Parameter nach Mazumder und Puije [77] . . . . .	17
3.1. Schwach nichtlineares System mit dem Eingangssignals $x(t)$ und dem Ausgangssignal $y(t)$ . . . . .	19
3.2. Ein- und Ausgangsspektrum eines nichtlinearen Systems bei Zweitonanregung . . . . .	20
3.3. Volterra-Reihenmodell für schwach nichtlineare Übertragungssysteme . . . . .	21
3.4. Nichtlineares Zweitor mit Quelle $U_s$ am ersten Tor . . . . .	23
4.1. Ein-/Ausgangsbeschreibung eines nichtlinearen Systems für eine harmonische Anregung . . . . .	30
4.2. Modellierung eines nichtlinearen Systems mit der Beschreibungsfunktion . . . . .	31
4.3. Nichtlineares $N$ -Tor in Betriebsschaltung . . . . .	35
4.4. Harmonische Überlagerung im PHD-Ansatz [139] . . . . .	38
4.5. Spektraldarstellung zur Frequenz-Offset-Methode . . . . .	39
5.1. $X$ -Parameter $X_{21}^{(F)}$ über $\hat{u}_{s1}$ : Vergleich Datenpunkte und polynomielle Ansätze . . . . .	49
5.2. $X$ -Parameter $X_{11,12}^{(S)}$ über $\hat{u}_{s1}$ : Vergleich Datenpunkte und polynomielle Ansätze . . . . .	51
5.3. Unsymmetrischer LNA. . . . .	52
5.4. $ B_{11} $ über $\hat{u}_{s1}$ , Vergleich der Volterra-reihenbasierten $S$ -Parameter und $X$ -Parameter . . . . .	52
5.5. $B_{11}$ bei Eintonanregung in der komplexen Ebene für verschiedene $\hat{u}_{s1}$ . . . . .	53
5.6. $B_{11}$ in der komplexen Ebene für $\hat{u}_{s1} = 120$ mV und verschiedene $\hat{u}_{s2}$ . . . . .	53
5.7. $ B_{11} $ über $\hat{u}_{s2}$ , Vergleich der Volterra-reihenbasierten $S$ -Parameter und $X$ -Parameter . . . . .	55
6.1. Prinzipbild zur Frequenz-Offset-Methode mit zwei Tönen bis zur 2. Ordnung . . . . .	61
6.2. Prinzipbild zur Frequenz-Offset-Methode mit drei Tönen bis zur 2. Ordnung . . . . .	63
6.3. MOS-Leistungsverstärker mit <i>Source</i> -Spannungsteiler und <i>Source-Follower</i> -Ausgangsstufe. . . . .	65
6.4. $ B_{mk} $ über $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3}$ des Klasse-C-Verstärkers bei Dreitonanregung . . . . .	67
6.5. $B_{11}$ des Klasse-C-Verstärkers bei Dreitonanregung in komplexer Ebene . . . . .	69
6.6. $B_{21}$ des Klasse-C-Verstärkers bei Dreitonanregung in komplexer Ebene . . . . .	70
6.7. $B_{15}$ des Klasse-C-Verstärkers bei Dreitonanregung in komplexer Ebene . . . . .	71
6.8. $B_{25}$ des Klasse-C-Verstärkers bei Dreitonanregung in komplexer Ebene . . . . .	72
6.9. Vergleich der Modellparameteranzahlen $M$ verschiedener $X$ -Parameteransätze . . . . .	73
7.1. Belastetes Zweitor mit Frequenzbereichsbezeichnungen . . . . .	75
7.2. Zweitor mit Load-pull-Tuner und aktiver Quelle am Ausgangstor . . . . .	77
7.3. LNA: $B_{11}$ - und $B_{21}$ -Vergleich basierend auf der <i>normalen</i> Phasen-Offset-Methode . . . . .	82
7.4. LNA: $B_{11}$ - und $B_{21}$ -Vergleich basierend auf der <i>zufälligen</i> Phasen-Offset-Methode . . . . .	83
7.5. Verhalten des Betrags $ X_{21}^{(F)} $ über die Phase des Reflexionsfaktors $\Theta_{21}$ . . . . .	84
7.6. LNA: $B_{21}$ -Vergleich durch Variation der Reflexionsfaktorphase $\Theta_{21}$ für $ \Gamma_{21}  = 0.85$ . . . . .	86
7.7. LNA: $B_{21}$ -Vergleich durch Variation der Reflexionsfaktorphase $\Theta_{21}$ für $ \Gamma_{21}  = 0.8$ . . . . .	88
7.8. LNA: $ B_{21} $ -Vergleich durch Variation von $ A_{21} $ bzw. $\hat{u}_{s21}$ für $ \Gamma_{21}  = 0.85$ und $\Theta_{21} = 90^\circ$ . . . . .	89
7.9. Klasse-C-Verstärker: $B_{21}$ -Vergleich durch Variation von $\Theta_{21}$ bei $ \Gamma_{21}  = 0.9$ . . . . .	91
7.10. Klasse-C-Verstärker: $B_{22}$ -Vergleich durch Variation von $\Theta_{21}$ bei $ \Gamma_{21}  = 0.9$ . . . . .	92
7.11. Klasse-C-Verstärker: Vergleich der angepassten Ansätze durch Variation der Quellenphasen . . . . .	93
7.12. Vergleich der Modellparameteranzahlen lastabhängiger $X$ -Parameter . . . . .	97

8.1. LSOP im Frequenzmischer bei zwei Großsignalen . . . . .	102
8.2. LSOP im Frequenzmischer bei nur einem Großsignal . . . . .	105
8.3. <i>Single-balanced</i> -Mischer mit <i>Balun</i> -Einkopplung. . . . .	109
8.4. Spektrum der X-Parameternäherung für unabhängige Frequenzen und versch. Ordnungen	110
8.5. Komplexe Darstellung und relativer Fehler der Fundamentalantwort $ B_{3[1,0]} $ . . . . .	111
8.6. Komplexe Darstellung und relativer Fehler der Abwärtsumsetzung $B_{3[1,-1]}$ . . . . .	113
8.7. <i>Down-conversion gain</i> über die Amplitude $\hat{u}_{s_2[0,1]}$ . . . . .	114
8.8. Abwärtsumsetzung $B_{3[1,-1]}$ bei Dreitonanregung für $\hat{u}_{s[1,0]} = 1 \text{ V}$ . . . . .	116
8.9. Vergleich der Modellkomplexitäten (8.35) und (8.36) . . . . .	117

# Tabellenverzeichnis

4.1. Spektralanteile von $B_m(\omega)$ der Frequenz-Offset-Methode und zugehörige X-Parameter . . .	40
5.1. Summanden der Streuvariablen $B_{mk,d}$ bis zur 4. Ordnung bei Eintonanregung . . . . .	45
5.2. Zusätzliche Terme der Streuvariablen $B_{mk,d}$ bis zur 4. Ordnung bei positiven Frequenzen für eine Zweitonanregung . . . . .	46
5.3. Allgemeine Spektralanteile der Frequenz-Offset-Methode und zugehörige X-Parameter . .	48
5.4. Zusätzliche Terme der Streuvariablen $B_{mk,d}$ bis zur 3. Ordnung für eine Zweitonanregung	54
5.5. Vor- und Nachteile der Volterra-reihenbasierten S-Parameter . . . . .	55
5.6. Vor- und Nachteile der X-Parameter nach dem PHD-Ansatz . . . . .	55
6.1. Allgemeine Spektralanteile der Frequenz-Offset-Methode und zugehörige HOPHD X-Parameter . . . . .	60
6.2. Spektralanteile der Frequenz-Offset-Methode für eine Dreitonanregung zur Bestimmung der zusätzlichen X-Parameter des MIT-Ansatzes . . . . .	62
6.3. Frequenz-Offset-Methode für eine Dreitonanregung zur Bestimmung von X-Parametern MIT-Ansatzes der Ordnung $D = 3$ . . . . .	64
6.4. Beispielhafter Vergleich der Anzahl $M$ der Modellparameter . . . . .	68
7.1. Vergleich der Anzahl $M$ der (lastabhängigen) Modellparameter unterschiedlicher Ansätze	96
8.1. Nicht verschwindende X-Parameter $X_{m[k_1,k_2],2[0,1]}^{(S^{d-q}T^q)} ( A_{1[1,0]} )$ aus (8.17) . . . . .	107



# Abkürzungsverzeichnis

ADS	<i>Advanced Design System</i>
BF	Beschreibungsfunktion
DCOP	Gleichstromarbeitspunkt - englisch: <i>direct current operating point</i>
EMV	elektromagnetische Verträglichkeit
HB	Methode der harmonischen Balance - englisch: <i>harmonic balance</i>
HD	harmonische Verzerrung - englisch: <i>harmonic distortion</i>
HF	Hochfrequenz
HOPHD	polyharmonische Verzerrung höherer Ordnung - englisch: <i>higher order polyharmonic distortion</i>
HP	Hewlett-Packard
HP-NMDG	Hewlett-Packard <i>Network Measurement and Description Group</i>
IF	Zwischenfrequenz - englisch: <i>intermediate frequency</i>
IM	Intermodulation
KNN	künstliches neuronales Netzwerk
LNA	rauscharmer Verstärker - englisch: <i>low noise amplifier</i>
LO	lokaler Oszillator
LSNA	Großsignalnetzwerkanalysator - englisch: <i>large signal network analyzer</i>
LSOP	Großsignalarbeitspunkt - englisch: <i>large signal operating point</i>
LTI	linear, zeitinvariant - englisch: <i>linear time-invariant</i>
MIRP	<i>multi-index reduced polynomial</i>
MIT	Multi-Index-Taylor-Reihe
MQPHD	modifizierte QPHD
NMDG	<i>Network Measurement and Description Group</i>
NVNA	nichtlinearer Vektornetzwerkanalysator
PHD	polyharmonische Verzerrung - englisch: <i>polyharmonic distortion</i>
PLSOC	parametrischer Großsignalarbeitskreis - englisch: <i>parametric large signal operating cycle</i>
QPHD	quadratische polyharmonische Verzerrung - englisch: <i>quadratic polyharmonic distortion</i>
RP	reduziertes Polynom - engl.: <i>reduced polynomial</i>
VIOMAP	<i>Volterra input-output map</i>
VNA	Vektornetzwerkanalysator
VNNA	vektorieller nichtlinearer Netzwerkanalysator



# Symbolverzeichnis

$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit Null
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^-$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{Q}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^-$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\alpha_{mk,nl}$	lastabhängiger Wichtungsfaktor im MQPHD-Ansatz
$a_n, A_n$	<i>hinlaufende</i> Streuvariable am Tor $n$ im Zeit- und Frequenzbereich
$A_{nl}$	komplexer Fourier-Koeffizient der Streuvariable $a_n(t)$ am Tor $n$ bei der $l$ -ten Harmonischen
$A_{n[l_1,l_2]}$	komplexer zweidimensionaler Fourier-Koeffizient der Streuvariable $a_n(t)$ am Tor $n$
$\tilde{A}_{n[l_1,l_2]}$	$= A_{n[l_1,l_2]} P_{[1,0]}^{-l_1-l_2} \frac{\omega_2}{\omega_1}$
$A_{nl}^*$	komplex Konjugierte von $A_{nl}$
$\tilde{A}_{nl}$	$= A_{nl} P^{-l}$
$\tilde{\mathbf{A}}_{nl}$	Kleinsignalmatrix zur Berechnung der X-Parameter über die Phasen-Offset-Methode
$\tilde{\mathbf{A}}$	Kleinsignalvektor des MIT-Ansatzes
$B_{mk}$	komplexer Fourier-Koeffizient der Streuvariable $b_m(t)$ am Tor $m$ bei der $k$ -ten Harmonischen
$B_{m[k_1,k_2]}$	komplexer zweidimensionaler Fourier-Koeffizient der Streuvariable $b_m(t)$ am Tor $m$
$\tilde{B}_{m[k_1,k_2]}$	$= B_{m[k_1,k_2]} P_{[1,0]}^{-k_1-k_2} \frac{\omega_2}{\omega_1}$
$\tilde{B}_{mk}$	$= B_{mk} P^{-k}$
$b_m, B_m$	<i>rücklaufende</i> Streuvariable am Tor $m$ im Zeit- und Frequenzbereich
$D$	höchste betrachtete Ordnung in Reihenansätzen
$F_{mk}$	Beschreibungsfunktion für Zusammenhang von $B_{mk}$ und allen $A_{nl}$
$F_{m[k_1,k_2]}$	Beschreibungsfunktion für Zusammenhang von $B_{m[k_1,k_2]}$ und allen $A_{n[l_1,l_2]}$
$\Gamma_{2k}$	Reflexionsfaktor am 2. Tor und der $k$ -ten Harmonischen
$\Gamma_{\perp}$	Lastreflexionsfaktormenge
$H$	Übertragungsfunktion eines linear, zeitinvarianten Systems
$h$	Impulsantwort eines linear, zeitinvarianten Systems
$h_d$	Volterra-Kern der Ordnung $d$
$H_d$	Volterra-Übertragungsfunktion der Ordnung $d$
$H_{ms,d}$	Volterra-Übertragungsfunktion der Ordnung $d$ von Quellenspannung $U_s$ zu Torspannungsanteil $U_{m,d}$
$i_n, I_n$	Strom am Tor $n$ im Zeit- und Frequenzbereich
$I_{n[l_1,l_2]}$	komplexer zweidimensionaler Fourier-Koeffizient des Stroms $i_n(t)$ am Tor $n$
$ \kappa , K$	minimale und maximale Potenz des polynomiellen X-Parameteransatzes
$L$	Länge des Kleinsignalvektors $\tilde{\mathbf{A}}$ im MIT-Ansatz
$M$	Anzahl der Messwerte für Optimierung
$M_{(\cdot)}$	Anzahl der Modellparameter des im Index abgekürzten Ansatzes
$L_n$	höchste berücksichtigte Harmonische von $\omega_0$ am Tor $n$
$N$	Anzahl aller Tore im Sinne der Mehrthortheorie

$P_{[1,0]}$	Normierungsphasor der X-Parameter unabhängiger Frequenzen
$P$	$= e^{j\phi_{A_{11}}}$ , Normierungsphasor der X-Parameter
$\phi_{A_{11}}$	Phase des komplexen Zeigers $A_{11}$
$\pi$	die Kreiszahl
$P_n$	Wirkleistung am Tor $n$
$\mathbf{q}$	Modulvektor in Volterra-Reihe
$\sigma, \tau$	Multi-Indizes des MIT-Ansatzes
$S_{m1,d}$	Volterra-Streuübertragungsfunktion Tor 1 zu Tor $m$ der Ordnung $d$
$S_{m;1^d}$	Volterra-S-Parameter berücksichtigt Frequenzgeneration von $S_{m1,d}$
$\mathbf{S}$	Streumatrix mit S-Parametern $S_{mn}$
$S_{mn}$	Streuparameter $S_{mn}$ , beschreibt Zusammenhang zwischen $B_m$ und $A_n$
$T_0$	fundamentale Periodendauer in der Fourier-Reihe
$T$	Zeitverzögerung
$\mathcal{T}$	Teilintervallanzahl des polynomiellen X-Parameteransatzes
$\Theta_{2k}$	Phase des komplexen Reflexionsfaktors $\Gamma_{2k}$
$\mathbf{T}$	Betriebskettenmatrix mit T-Parametern $T_{mn}$
$u_n, U_n$	Spannung am Tor $n$ im Zeit- und Frequenzbereich
$U_{nl}$	komplexer Fourier-Koeffizient der Spannung $u_n(t)$ am Tor $n$ bei der $l$ -ten Harmonischen
$U_{n[l_1,l_2]}$	komplexer zweidimensionaler Fourier-Koeffizient der Spannung $u_n(t)$ am Tor $n$
$u_{s_n}, U_{s_n}$	Quellenspannung am Tor $n$ im Zeit- und Frequenzbereich
$\omega$	Kreisfrequenz
$\omega_0$	fundamentale Kreisfrequenz in der Fourier-Reihe
$X_{mk}^{(S^\sigma T^\tau)}$	X-Parameter in Notation des MIT-Ansatzes
$\mathbf{X}_{mk,nl}$	Vektor mit X-Parametern in der Phasen-Offset-Methode
$X_{mk}^{(F)}$	Großsignal-X-Parameter, beschreibt Zusammenhang zwischen $B_{mk}$ und $A_{11}$
$X_{mk,nl}^{(S)}$	X-Parameter erster Ordnung, beschreibt Zusammenhang zwischen $B_{mk}$ und $A_{nl}$
$X_{mk,nl}^{(T)}$	X-Parameter erster Ordnung, beschreibt Zusammenhang zwischen $B_{mk}$ und $A_{nl}^*$
$X_{mk,nl}^{(S^p T^q)}$	X-Parameter der Ordnung $d = p + q$ , beschreibt Zusammenhang zwischen $B_{mk}$ und $A_{nl}^p (A_{nl}^*)^q$
$y_d$	Anteil der Ordnung $d$ am Volterra-Reihenmodell des Signals $y(t)$
$Z_0$	vereinheitlichte charakteristische Impedanz $Z_0$
$Z_{0n}$	charakteristische Impedanz am Tor $n$
$Z_L$	Lastimpedanz

# 1. Einleitung

Der rasante technische Fortschritt und der Trend zu immer mehr drahtlosen Übertragungssystemen erfordert Schaltungskonzepte mit hohen Datenraten und sehr gutem Wirkungsgrad bzw. geringer Leistungsaufnahme für hohe Akkulaufzeiten in mobilen Anwendungen. Höhere Datenraten lassen sich durch höhere Frequenzen realisieren und ein besserer Wirkungsgrad erfordert nichtlineare Schaltungskonzepte.

Damit diese nichtlinearen Schaltungen effizient, schnell und somit kostengünstig entworfen werden können, sind auf verschiedene Hierarchieebenen im Entwurfsprozess Modelle für Teilschaltungen bzw. -systeme erforderlich. Sobald für ein Verhaltensmodell nur das Verhältnis zwischen der Eingangs- und Ausgangsbeschreibungsgröße eines Übertragungssystems ermittelt wird, handelt es sich dabei um eine *Black-Box*-Sichtweise, in der die interne Beschreibungsgrößen nicht berücksichtigt werden. Eine Möglichkeit komplexe elektrische Netzwerke mit je einem Ein- und Ausgang als *Black-Box* bei sinusförmiger Anregung zu modellieren, stellt die Zweitortheorie dar. Anders als die Übertragungsfunktionen der Systemtheorie ist es mit Zweitortparametern im Frequenzbereich möglich Rückwirkungen des Ausgangs auf den Eingang zu charakterisieren. Dazu werden Klemmenpaare zu Toren zusammengefasst und das System über die Beziehung der Torspannungen und -ströme mit Hilfe verschiedener Zweitormatrizen beschrieben.

Für die Messung der strom- und spannungsbasierten Zweitortparameter sind Kurzschlüsse und offene Klemmen erforderlich. Allerdings lassen sich diese im Hochfrequenzbereich oberhalb von 100 MHz nicht mehr ohne parasitäre Effekte realisieren, die u. U. zu unerwünschten Oszillationen führen können [48, 153]. In der Hochfrequenztechnik sind daher seit mehr als 50 Jahren die alternativen Streuparameter - kurz S-Parameter - das Mittel der Wahl zur Charakterisierung von linearisierten Zweitoren, da für die Messung der S-Parameter keine offenen Klemmen oder Kurzschlüsse erforderlich sind. Stattdessen erfolgen die Messungen an Toren, die mit charakteristischen Impedanzen abgeschlossen sind, was auch bei sehr hohen Frequenzen sehr genau möglich ist. Die S-Parameter werden dann aus dem Verhältnis von leistungsverwandten Größen - den sog. Streuvariablen - ermittelt. Da diese Linearkombinationen von Strom und Spannung sind, können über eine Umformung aus den S-Parameter alle anderen Zweitortparameter berechnet werden, sofern diese existieren. Die wesentliche Beschränkung der S-Parameter ist, dass sie nur für lineare, zeitinvariante Systeme gültig sind. Die in der Realität nur vorkommenden nichtlinearen Systeme werden durch die S-Parameter folglich nur im linearisierten Kleinsignalfall korrekt beschrieben.

Zur Berücksichtigung nichtlinearen Verhaltens bei größer werdender Signalamplitude gibt es verschiedene Verfahren im Zeit- und im Frequenzbereich. Einen Überblick über Frequenzbereichsmodellierung nichtlinearer Systeme - auf die sich in dieser Arbeit beschränkt wird - wurde zuletzt z. B. von Rijlaarsdam u. a. [108] gegeben. Um dem eingangs erwähnten Dilemma aus Wirkungsgrad und Linearität in Richtung höherer Nichtlinearität folgen und trotzdem bei hohen Frequenzen messtechnisch ermittelt werden zu können, wurden einige von diesen Ansätzen in der Vergangenheit in Zusammenhang mit den S-Parametern gebracht. Eine Entwicklung dieser *Großsignal-S-Parameter*-Ansätze ist im folgenden Abschnitt 1.1 umrissen. Im darauffolgenden Abschnitt 1.2 wird genauer darauf eingegangen, wie in dieser Arbeit einer der *Großsignal-S-Parameter*-Ansätze - die messtechnisch und simulatorisch kommerziell verfügbaren *X-Parameter*<sup>1</sup> [62, 117, 139, 140] - durch eine umfassende Betrachtung der zugrunde liegenden Theorie an verschiedenen Stellen erweitert bzw. anders interpretiert werden kann. Abschnitt 1.3 gibt dazu einen Überblick über die Ergebnisse der restlichen Arbeit.

## 1.1. Stand der Technik: Von linearen S-Parametern zu X-Parametern

Der Artikel von Campbell und Foster [22] wird von den späteren Vorreitern Belevitch [2] und Carlin [24] als Ursprung der S-Parameter bezeichnet. Campbell und Foster [22] beschäftigten sich darin mit Transmissionseigenschaften von resistiv beschalteten, idealen Transformatoren, was als erster Vorläufer

---

<sup>1</sup>*X-Parameter* ist ein eingetragenes Handelszeichen von *Keysight Technologies*.

der Streuparameter oder kurz S-Parameter angesehen werden kann. Darin wird allerdings noch keine Matrixform der Parameter verwendet, was erst später im Zusammenhang mit der Quantenmechanik [158] eingeführt wurde. Populärer wurden die S-Parameter später zur Beschreibung von Reflexions- und Transmissionsvorgängen in der Leitungstheorie, worüber u. a. Montgomery, Dicke und Purcel [81] einen guten Überblick geben. Durch die Ursprünge in der Quantenmechanik und der Leitungstheorie bürgerten sich Bezeichnungen wie *eingehende* und *ausgehende Welle* im Zusammenhang mit den Streuvariablen ein, die fälschlicherweise auch später in der Netzwerktheorie synonym für die Streuvariablen verwendet wurden. Eine Überführung des ersten Ansatzes Campbell und Foster [22] in eine S-Matrixschreibweise sowie die Anwendung auf Übertragungseigenschaften von elektrischen Netzwerken wurde von Belevitch [2] vorgenommen. Anschließend fanden sich weitere Anwendungsgebiete für die S-Parameter, was von mehreren Vorreitern in einem Übersichtsband [3, 4, 24, 57, 90, 131] zusammengefasst wurde. Der endgültige Durchbruch der S-Parameter gelang spätestens mit Einführung geeigneter Messtechnik, insbesondere mit dem Vektornetzwerkanalysator (VNA) HP-8410 [60, 119]. Mit diesem konnten die S-Parameter bedingt durch ihre Leistungsverwandtheit erstmals für Frequenzen bis zu 12 GHz bestimmt werden. Andere auf Strom und Spannung basierende Verfahren sind bereits ab Frequenzen von 100 MHz fehleranfällig, da die benötigten offenen Leitungen oder Kurzschlüsse nicht mehr realisiert werden bzw. zu unerwünschten Oszillationen führen können [48]. Weitere Vorteile, wie der Reflexionsbezug und daraus ableitbare optimale Leistungsübertragung mit Anpassnetzwerken, führten dazu, dass die S-Parameter in weiten Teilen der Elektrotechnik nach wie vor ein wichtiges Entwurfs- und Analysewerkzeug sind (vgl. Kapitel 2.2).

Der wesentliche Nachteil der S-Parameter ist, dass sie nur im Gültigkeitsbereich einer Linearisierung um den Gleichstromarbeitspunkt - englisch: *direct current operating point* (DCOP) - ohne gravierenden Fehler eingesetzt werden können. Daher wurden bereits früh nach dem Durchbruch der S-Parameter Konzepte zur Einbeziehung nichtlinearen Verhaltens entwickelt. Als einer davon beschreibt Elsner [32] Ansätze zu einer nichtlinearen Vierpol bzw. Zweitorthorie. Dabei wird insbesondere für *parametrische* Schaltungen [128] über ein Prinzipschaltbild mit nichtlinearen Bauelementen, deren Kennlinie bekannt ist, ein Zweitorersatzschaltbild entwickelt. Parametrische Schaltungen sind eine wichtige Klasse von Schaltungen, die auch in dieser Arbeit von zentralem Interesse sind. Sie werden durch sinusförmige Signalquellen angeregt, wovon nur die Amplitude eines speisenden Signals groß gegenüber allen anderen gewählt wird. Anders als in dem *White-Box*-Ansatz von Elsner [32] versuchen Houselander, Chow und Spence [51] in einem der ersten *Black-Box*-Ansätze die lineare Zweitorthorie für Großsignalanregung zu erweitern. Die Zweitorparameter werden darin über den Ansatz der Beschreibungsfunktionen abhängig von den Amplituden der unabhängigen Torgrößen betrachtet. Die beispielhaft betrachteten Admittanzparameter  $y_{ij}$  für Großsignalanregung sind abhängig von den Torspannungen  $U_1$  und  $U_2$ , d. h. es gilt  $y_{ij}(U_1, U_2)$ . Dabei wird sich - wie bei der Beschreibungsfunktion (BF) sinusförmiger Signale [40] auf eine „quasi-harmonische Domäne“ beschränkt, wodurch die nichtlinearen Effekte harmonische Verzerrung - englisch: *harmonic distortion* (HD) - und Intermodulation (IM) vernachlässigt werden. Neben den gezeigten Admittanzparametern bei der Arbeitsfrequenz von 50 MHz werden auch für hohe Frequenzen ( $f > 100$  MHz) S-Parametermessungen im Großsignalbetrieb erwähnt, die mit der gleichen Messmethodik wie für den Kleinsignalbetrieb aufgenommen wurden [48]. Dabei werden allerdings insbesondere bei den Parametern  $S_{12}$  und  $S_{22}$  Fehler begangen, da im nichtlinearen Fall das Superpositionsprinzip nicht anwendbar ist. Durch die nacheinander erfolgende Großsignalanregung an den unterschiedlichen Systemtoren weicht der Systemzustand von dem zu beschreibenden Zustand ab.

Eine Methode, den Superpositionsansatz in der Großsignalmessung und die daraus resultierenden Fehler der S-Parameter zu vermeiden, ist in der Arbeit von Müller [83] - hier wird der Begriff *Large-Signal S-Parameter* erstmals benutzt - am Beispiel eines Leistungsverstärkers der Klasse-C beschrieben. Wie auch in der Arbeit von Houselander, Chow und Spence [51] wird trotz der Nichtlinearität des Verstärkers angenommen, dass die entstehenden Harmonischen vernachlässigbar sind, da die Fundamentalkomponente sehr viel größer ist. Daher werden die S-Parameter aus den Verhältnissen der Fundamentalkomponenten der entsprechenden Streuvariablen mit Hilfe eines VNA wie dem damals aktuellen HP-8405A bestimmt. Die Amplitude des Signals am Eingangstor legt im Klasse-C-Verstärker über den sog. *DC-Shift* [154] den Arbeitspunkt und damit auch alle Gleichströme des Verstärkers fest. Zur Bestimmung der Parameter  $S_{12}$  und  $S_{22}$  wird das Signal am Eingangstor daher konstant gehalten. Über eine kleine Änderung  $\Delta Z_L$  der Lastimpedanz  $Z_L$  wird eine Variation der Streuvariablen am Ausgangstor  $\Delta A_2 = A'_2 - A_2$  hervorgerufen. Zusammen mit den gemessenen Werten von  $B_i$  für  $Z_L$  und  $B'_i$  für  $Z'_L = Z_L + \Delta Z_L$  lassen sich aufgrund des konstant gehaltenen Signals  $A'_1 = A_1$  die als problematisch eingestuft S-Parameter  $S_{i2} = \frac{\Delta B_i}{\Delta A_2}$  mit  $\Delta B_i = B'_i - B_i$  und  $i \in \{1, 2\}$  berechnen.

Eine weitere Arbeitsgruppe, die sich mit S-Parametern unter Großsignalanregung beschäftigte, war an den *Sandia Laboratories* in Albuquerque ansässig. In einer ersten kurzen Arbeit von Chaffin und Leighton [26] werden drei wesentliche Probleme bei der Definition von Großsignal-S-Parameter genannt. Erstens werden wie bei den o. g. Ansätzen die durch die Nichtlinearität entstehenden Harmonischen genannt, die durch Filter und/oder Anpassnetzwerke eliminiert werden können. Des Weiteren wird der möglichst gleichbleibende Arbeitspunkt genannt. Drittens wird eine hohe Messgenauigkeit genannt, damit in einem Einsatz außerhalb der 50  $\Omega$ -Messumgebung und dem damit verbundenen hohen Reflexionsfaktor noch Unterschiede erkennbar sind. Darüber hinaus wird eine Messumgebung mit einer hohen Eingangsleistung gefordert. Am Ende der Arbeit [26] wird als Lösung für diese Forderungen eine prinzipielle Messumgebung vorgestellt, die eine Fehlertoleranz von  $\pm 1\%$  und eine Eingangsleistung von 50 W ermöglicht und auf dem konventionellen VNA HP-8410 basiert. In einer begleitend erschienen Arbeit von Webb und Chaffin [155] wird gezeigt, wie die Großsignal-S-Parameter in einem Entwurfsprozess von Transistorverstärkern verwendet werden können. Als Erweiterung der beiden Arbeiten [26, 155] werden in der Arbeit von Leighton, Chaffin und Webb [69] die Probleme der höheren Harmonischen und des gleichbleibenden Arbeitspunktes genauer ausgeführt. Durch eine Betrachtung im Zeitbereich für verschiedene Transistorarbeitspunkte wird festgestellt, dass die gemessenen Transistorspannungen nahezu sinusförmig sind. Dies wird mit den filternden Eigenschaften parasitärer Elemente des Transistorgehäuses und des eingebauten Anpassnetzwerk begründet. Daher wird auch für nichtlineare Verstärker der Klasse B und C (vgl. z. B. [28]) eine nahezu lineares Verhalten angenommen, sodass die auf der Superposition basierende Messmethodik für Kleinsignal-S-Parameter angewendet wird. Mit der Messumgebung aus [26] werden die Großsignal-S-Parameter in Abhängigkeit der Eingangsamplitude am Eingangstor bestimmt, wobei der Parameter  $S_{21}$  als am stärksten abhängig von den Eingangsamplitude beschrieben wird. Den Parametern  $S_{11}$  und  $S_{22}$  wird eine schwächere Abhängigkeit von der Eingangsamplitude nachgewiesen. Allerdings wird gezeigt, dass sich diese Parameter für verschiedene Klassen der Arbeitspunkte mit steigender Eingangsamplitude annähern. Der Parameter  $S_{12}$  wird in dem betrachteten Transistor als sehr klein gemessen. Der Problematik beim Messen der Parameter  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  ohne ein Großsignal am Eingangstor sind sich die Autoren mit Verweis auf die Arbeit von Müller [83] bewusst. Der Lösungsvorschlag der Autoren für die korrekte Messung dieser Parameter ist eine Verlagerung des Arbeitspunkts in die Klasse A, um auch ohne Signal am Eingangstor den gleichen Kollektorstrom zu erhalten, wie für die Messung der Großsignal-S-Parameter  $S_{11}$ ,  $S_{21}$  im Klasse-C-Betrieb. Für Transistoren, deren Eingangs- und Ausgangsimpedanz viel kleiner sind als die charakteristischen 50  $\Omega$  der Messumgebung - was in  $|S_{ii}| \approx 1$  resultiert -, wurden die Messungen in einer 4  $\Omega$ -Messumgebung wiederholt. Die ermittelten Großsignal-S-Parameter können anstatt der Kleinsignalparameter für den Entwurfsprozess von Leistungsverstärkern verwendet werden, sodass auch Stabilitätsuntersuchungen im Großsignalbetrieb möglich sind [69].

Einen dritten Ansatz zur Bestimmung der Großsignal-S-Parameter stammt von Mazumder und Puije [77]. Darin wird eine Messumgebung verwendet, die das zu testende Zweitor an beiden Toren gleichzeitig anregt, was in einer zuvor erschienen Arbeit ausführlicher beschrieben wurde [76]. Das Signal am Ausgangstor  $A_2$  wird durch eine Quelle zusätzlich zur Anregung am Eingangstor  $A_1$  aktiv erzeugt, anders als in der Arbeit von Müller [83], wo eine Lastvariation passiv zu einem Signal  $A_2$  führte. Mit der Annahme, dass die Großsignal-S-Parameter für konstante Eingangsleistungen  $|A_i|^2$  ebenfalls konstant sind, werden die S-Parameter über eine Variation der Phasendifferenz  $\Phi_{A_2} - \Phi_{A_1}$  bestimmt. Für konstante Werte von  $|A_1|$  und  $|A_2|$  ergeben sich damit für die gemessenen Verhältnisse  $\frac{B_i}{A_j}$  mit  $i, j \in \{1, 2\}$  in der komplexen Ebene kreisförmige Ortskurven, deren Mittelpunkt einem S-Parameter  $S_{ij}$  entspricht. So kann aus dem Mittelpunkt der Darstellung  $\frac{B_1}{A_2} = S_{11} \frac{A_1}{A_2} + S_{12}$  der S-Parameter  $S_{12}$  bestimmt werden. In einem Vergleich mit der Methode von Leighton, Chaffin und Webb [69] wird eine bessere Vorhersage des experimentell ermittelten Systemverhaltens festgestellt, was aufgrund nahezu identischer S-Parameter  $S_{11}$ ,  $S_{21}$  auf die als problematisch eingestuften Parameter  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  zurückzuführen ist. Als weiterer Vorteil wird eine Möglichkeit zur Abschätzung der Qualität des Verstärkerentwurfs genannt. Da sich die kreisförmige Ortskurve mit steigender Eingangsleistung  $|A_1|^2$  verformt, kann für starke Abweichungen von einem Kreis ein großer Unterschied zwischen dem vorhergesagten und tatsächlichen Systemverhalten erwartet werden [77]. In einem solchen Fall wird empfohlen, die Methode aus [76] zu verwenden. Diese Entwurfsmethode verwendet anstatt der einzelnen S-Parameter die Reflexionskoeffizienten an Quellen- und Lastseite  $\Gamma_s$  bzw.  $\Gamma_L$ .

Mehrere Jahre später entwickelten Rizzoli, Lipparini und Matri [110] einen Ansatz zur Bestimmung der Großsignal-S-Parameter in Schaltungssimulatoren basierend auf der Methode der harmonischen Ba-

lance - englisch: *harmonic balance* (HB). In der vorgeschlagenen Methode werden ebenfalls die Signal  $A_1$  und  $A_2$  gleichzeitig in das System eingespeist, allerdings nicht bei der gleichen Frequenz, sondern mit einem kleinen Frequenz-Offset  $\Delta f = f_2 - f_1 = 10^{-4}f_1$ . Dadurch wird das System in einem quasi-periodischem Zustand betrieben, dessen Signalspektren Intermodulationsprodukte aus  $f_1$  und  $f_2$  enthalten. Mit Hilfe der zweidimensionalen Fourier-Transformation [109] ist eine separate Berechnung der S-Parameter möglich, und zwar aus  $S_{i1}(f_1) = \frac{B_i(f_1)}{A_i(f_1)}$  und  $S_{i2}(f_2) = \frac{B_i(f_2)}{A_i(f_2)}$  mit  $i \in \{1, 2\}$ . Aufgrund des sehr kleinen Frequenzoffsets  $\Delta f$  wird angenommen, dass die bei  $f_2$  bestimmten S-Parameter mit einem vernachlässigbarem Fehler bestimmt werden, d. h.  $S_{i2}(f_2) \approx S_{i2}(f_1)$ . Als wesentlichen Vorteil gegenüber der *Zweiton-Methode* von Mazumder und Puije [77] wird der deutlich geringere Aufwand zur Bestimmung der S-Parameter angegeben. Anstatt von acht nichtlinearen Analysen und anschließender numerischer Approximation der Kreismittelpunkte sei lediglich eine Standardnetzwerkanalyse in einem kommerziellen nichtlinearen Netzwerksimulator erforderlich [110, 111]. Allerdings wird eine messtechnische Umsetzung dieser Methode nicht vorgeschlagen.

In der Arbeit von Call [21] werden die Ansätze für S-Parameter unter Großsignalanregung mit mehreren Jahrzehnten zeitlichem Abstand diskutiert. Auch nach so langer Zeit sei es nicht abschätzbar wie erfolgreich die Großsignal-S-Parameter in der Praxis gewesen wären. Es sei lediglich aus den Publikationen mit Großsignal-S-Parametermessungen erkennbar, dass die nötige Sorgfalt bei den Messungen und Kalibrierungen gefehlt hätte, wie sie in den ursprünglichen Arbeiten zu den Großsignal-S-Parametern erkennbar gewesen wäre. So wird z.B. die erste Edition von Referenz [134] genannt, worin die Großsignal-S-Parameter einfach durch normale S-Parametermessungen für höhere Eingangsleistungen bestimmt werden könnten. Trotzdem nennt Vendelin [134] als wesentlichen Nachteil der Großsignal-S-Parametermessung den beschränkten Gültigkeitsbereich. Damit ist gemeint, dass die Großsignal-S-Parameter nur für die in der Messung verwendete charakteristische Impedanz und Eingangsleistung gültig sind und vorausgesetzt wird, dass höhere Harmonische nicht auftreten. Als Möglichkeit zum Ausgleich dieses Nachteils werden die *Load-pull*-Ansätze genannt [29, 130], bei denen eine lastabhängige Charakterisierung unter Großsignalanregung ermöglicht wird. Eine Verknüpfung der Konzepte der Großsignal-S-Parameter und der *Load-pull*-Ansätze wird von Tucker [132] vorgestellt, wodurch die optimale Lastimpedanz  $Y_{\text{opt}}$  mit Hilfe der Großsignal-S-Parameter ohne die aufwändigeren *Load-pull*-Messungen abgeschätzt werden kann. Der Einschätzung von Vendelin [134], dass die *Load-pull*-Ansätze den Großsignal-S-Parameter aufgrund der Möglichkeit zur Variation der Lastimpedanz vorzuziehen seien, fügt Call [21] eine Bewertung von Maas [71] hinzu. Demnach seien Großsignal-S-Parameter ein nutzloser Versuch, nichtlinearen Schaltungen lineare Netzwerktheorie aufzuzwingen. Abgesehen von diesem Einwand bezüglich der vorausgesetzten *Quasilinearität* - höhere Harmonische werden vernachlässigt - nennt Call [21] den Kalibrierungs- und Messaufwand als Hauptgrund für den geringen Erfolg der Großsignal-S-Parameter. Die unterschiedlichen Ansätze [77, 83] hätten von Computerunterstützung profitieren können, was zu damaliger Zeit ein nicht weit verbreiteter Luxus gewesen sei.

Die voranschreitende technische Entwicklung und die damit verbundenen stark nichtlinearen Schaltungsstrukturen in Systemen mit hohem Wirkungsgrad erforderten Konzepte und Messtechniken über die Quasilinearität der ursprünglichen Großsignal-S-Parameter hinaus. Seit den Anfängen in den 1990er Jahren entwickelten sich aus den ersten Prototypansätzen [135, 136, 140–142] mit dem Großsignalnetzwerkanalysator - englisch: *large signal network analyzer* (LSNA) - und dem nichtlinearen Vektornetzwerkanalysator (NVNA) unterschiedliche, kommerziell verfügbare Messtechniken [112, 133] und mit den *S-Functions* [84] und den *X-Parametern* [116] multiharmonische Modellkonzepte zur Erweiterung der linearen S-Parameter. Ein erster Ansatz höhere Harmonische in der Ein-/Ausgangsbeschreibung von schwach nichtlinearen Hochfrequenzsystemen zu berücksichtigen basiert auf der Volterra-Reihe (vgl. z. B. [123]) und wird daher als *Volterra input-output map* (VIOMAP) bezeichnet. Verbeyst und Vanden Bossche [136] zeigen, dass es sich dabei um ein Äquivalent zu den linearen S-Parametern handelt und ebenfalls kaskadiert werden kann. In einer weiteren Arbeit zeigen Verbeyst und Vanden Bossche [135], dass der VIOMAP-Ansatz eine Alternative zu *Load-pull*-Messungen darstellt. Der VIOMAP-Ansatz könne die Lastimpedanzkurven trotz stark reduziertem Messaufwand vorhersagen und sei zusätzlich in der Lage, den Einfluss höherer Harmonischer zu berücksichtigen. Es wird gezeigt, wie der VIOMAP aus den gemessenen Eingangs-/Ausgangssignalen mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens numerisch bestimmt werden kann, wobei eine Problematik bei der Wahl des Startwerts zugegeben wird. Außerdem wird eine mögliche Integration in einem HB-Simulator genannt. In den beiden Arbeiten [135, 136] wird auf eine

theoretische Betrachtung der Volterra-Reihe verzichtet und sich auf die Anwendung und Messtechnische Bestimmung des VIOMAP beschränkt. Entgegengesetzt werden kann die Arbeit von Weiner und Naditch [157], die bereits im Jahr 1976 erschien. Darin wird ausführlich betrachtet, wie auf Basis der Volterra-Reihe nichtlineare S-Parameter für schwach nichtlineare Systeme definiert werden können, was im Fall angepasster Tore vereinfacht werden kann. Anhand von einfachen Beispielen wird gezeigt, wie aus einem Netzwerkmodell die Volterra-reihenbasierten S-Parameter berechnet werden können, woraus wiederum ein Leistungstransfer durch harmonische Verzerrung und Intermodulation bestimmt werden kann. Eine Möglichkeit zur messtechnischen Bestimmung der Volterra-reihenbasierten S-Parameter wird dabei nicht genannt, da es zu der damaligen Zeit keinerlei passende Messkonzepte gab. Diese wurden erst Ende der 1980er und Anfang der 1990er Jahre entwickelt.

In seiner Dissertation aus dem Jahr 1995 gibt Verspecht [141] einen Überblick über die zuvor an anderer Stelle entwickelten Prototypen der sog. vektoriiellen nichtlinearen Netzwerkanalysatoren (VNNAs). Wie mit den VNA im linearen Fall können mit den VNNA die Torgrößen eines nichtlinearen Systems im Frequenzbereich als komplexe Zahlen, die auch als Vektoren darstellbar sind, bestimmt werden. Durch eine Mehrtonanregung lassen sich auch Intermodulationsprodukte messen. Verspecht [141] nennt für alle Ansätze Vor- und Nachteile und stellt seinen eigenen Prototypen und einen Kalibrierungsansatz vor, der in Zusammenarbeit mit der Hewlett-Packard *Network Measurement and Description Group* (HP-NMDG) entstanden ist. Im Anhang seiner Dissertation und einer weiteren Arbeit zeigt Verspecht [142, 149], dass der VIOMAP [135, 136] ein Spezialfall der *mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion* ist. Letztere seien folglich besser in der Lage stark nichtlineare Systeme im Frequenzbereich zu beschreiben als der Volterra-reihenbasierte Ansatz VIOMAP. Aufbauend auf diesem Konzept der mehrdimensionalen Beschreibungsfunktionen entwickelten Verspecht, Vanden Bossche und Verbeyst [140] und weiterführend Verspecht [143] einen Ansatz für „sinnvolle Großsignal-S-Parameter“. Darin wird die mehrdimensionale spektrale Beschreibungsfunktion unter der Annahme, dass lediglich ein dominanter Spektralanteil vorhanden ist, linearisiert und ist damit dem Ansatz der *conversion matrix* [72] nicht unähnlich. Die darüber definierten Großsignal-S-Parameter sind eine Erweiterung der ursprünglichen Großsignal-S-Parameter [26, 77, 83], die die quasilineare Eintonbeschreibungsfunktion als Grundlage hatten (vgl. Abschnitt 4.1).

In einer Reihe von Arbeiten zeigen Jargon, Gupta und DeGroot [54–56] einen Ansatz von Großsignal-S-Parameter, der ebenfalls davon ausgeht, dass nur Signalanteile bei ganzzahligen Vielfachen einer Fundamentalfrequenz vorkommen, jedoch wie der Ansatz von Verspecht, Vanden Bossche und Verbeyst [140] keine Linearisierung verwendet. Für die messtechnische Ermittlung der Großsignal-S-Parameter kommt der von Verspecht [141] vorgeschlagene Messaufbau zum Einsatz. Aus den Messwerten werden die Großsignal-S-Parameter über das Training von künstlichen neuronalen Netzwerken (KNNs) bestimmt. Dieser Schritt sei nötig, da die notwendige Bedingung  $A_{ql} = 0$  am Tor  $q \neq p$  und der Harmonischen  $l \neq k$  zur direkten Bestimmung des S-Parameters  $S_{pqkl}$  messtechnisch nicht realisierbar sei [54–56]. Im Gegensatz dazu ist eine direkte Berechnung - ohne KNN - der einzelnen Großsignalparameter in einem Simulator möglich, da hier die notwendige Bedingung  $A_{ql} = 0$  für  $q \neq p \wedge l \neq k$  leicht einzuhalten ist. Beide Vorgehen werden anhand einer Schottky-Diode beispielhaft verglichen, wobei ähnliche Ergebnisse erzielt werden. In der HB-Simulationsumgebung kommt dabei ein äquivalentes Kompaktmodell des Diodenherstellers zum Einsatz. Damit wird in [54] anhand eines Frequenzdopplers gezeigt, wie die Großsignal-S-Parameter als Entwurfswerkzeug verwendet werden können. Außerdem wird gezeigt, dass sich die Großsignal-S-Parameter ähnlich wie die linearen S-Parameter in Matrixform aufschreiben und in andere Darstellungen wie Z- oder Y-Parameterdarstellungen umformen lassen. Anhand eines Eintors unter Eintonanregung wird nachgewiesen, dass sich die Zusammenhänge der Großsignal-Z- und -S-Parameter im linearen Fall zu dem bekannten Zusammenhang zwischen der Impedanz und dem S-Parameter des Eintors reduzieren lassen. Für ein Zweitor wird bei der Bestimmung der Ausgangsreflexionskoeffizienten bei der k-ten Harmonischen  $S_{22kk}$  eingeräumt, dass ein einfaches Berechnen durch das Verhältnis  $B_{2k}/A_{2k}$  nicht möglich sei, da eine Abhängigkeit über das Großsignal am Eingangstor  $A_{11}$  bestünde - das gleiche Problem wie die ursprünglichen Großsignal-S-Parameter [26, 77, 83] mit  $S_{12}$  und  $S_{22}$  hatten. Als Ausweg wird der Ansatz des *hot S<sub>22</sub>-Parameters* über einen kleinen Frequenz-Offset genannt [38, 54, 55].

Mit dem Begriff *hot S-Parameter* sind verschiedene Ansätze zur Beschreibung schmalbandiger Leistungsverstärker gemeint, bei denen ein Großsignal das System in den Arbeitsbereich nichtlinearer Kompression bringt und weitere Signalanteile relativ klein gegenüber diesem Großsignal sind. Sie können als Verhaltensmodell in Verbindung mit anderen Stufen eines Übertragungssystems im Frequenzbereich verwendet werden. In einer kurzen Übersichtsarbeit unterscheiden Verspecht u. a. [147] im Wesentlichen zwei unterschiedliche Anwendungsgebiete der *hot S-Parameter*: Stabilitätsuntersuchungen und Vorhersa-

ge der nichtlinearen Verzerrungen. Bei ersteren werden die *hot S-Parameter* bei den Kleinsignalfrequenzen untersucht, wobei wie im Kleinsignalfall vier S-Parameter nötig sind [37, 38]. Zur Untersuchung nichtlinearer Verzerrungen in Verbindung mit weiteren kaskadierten Teilsystemen wird neben einem nahezu angepassten System - die Lastimpedanz ist etwa so groß wie die charakteristische Impedanz  $Z_L \approx Z_0$  - angenommen, dass die zusätzlichen Kleinsignalanteile bei ganzzahligen Vielfachen der fundamentalen Großsignalfrequenz sind. Dazu sind nach Verspecht [144] zwei zusätzliche *hot S-Parameter* zur Verknüpfung der komplex konjugierten Kleinsignale nötig, die die Lastanpassung beschreiben. In der Arbeit [150] wird die mathematische Notwendigkeit dieser komplex konjugierten Kleinsignalterme betont. Dabei wird der bereits oben erwähnte spektrale Linearisierungsansatz, wie er in [140, 143] verwendet wurde, verallgemeinert, sodass beliebige Frequenzanteile und Großsignalanteile auftreten dürfen. Es werden Beispiele genannt - u. a. das Mischerbeispiel zur *conversion Matrix* aus [72] -, in denen die Ansätze mit vier *hot S-Parametern* nicht sinnvoll sind. Zur Abgrenzung zu den *hot S-Parametern* von Gasseling u. a. [38] wird in der Arbeit von Root u. a. [114] für die erweiterten *hot S-Parameter* erstmals der Modellbegriff polyharmonische Verzerrung - englisch: *polyharmonic distortion* (PHD) verwendet. Aufbauend auf dem ersten Linearisierungsansatz [140], der ein Spezialfall der Linearisierung aus [150] ist, wird hier ein Modell formuliert, in dem die Parameter nur von dem Betrag des dominanten Großsignals sind. Die Einflüsse der zusätzlich auftretenden Kleinsignale werden dem Entwicklungspunkt der spektralen Linearisierung - später bekannt als Großsignalarbeitspunkt - englisch: *large signal operating point* (LSOP) [148] - linear überlagert. Zur Bestimmung der Modellparameter wurden anders als in [140] keine Approximation über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate zur Bestimmung der Modellparameter verwendet. Stattdessen wurden die zusätzlichen Kleinsignale über einen kleinen Frequenzoffset  $\Delta f$  von einem ganzzahligen Vielfachen der Fundamentalfrequenz des Großsignals verschoben. Dadurch können aus den entstehenden Intermodulationsprodukten die einzelnen Modellparameter direkt bestimmt werden. Die Überführung des Modells aus [140] zum phasennormierten PHD-Modell ist ausführlich in der viel zitierten, gleichnamigen Veröffentlichung [139] weiter ausgeführt.

Durch eine kommerzielle Einführung zweier unterschiedlicher phasennormierter Großsignalmessapparaturen unter dem Oberbegriff VNNA wurde es einem breiten Anwenderkreis ermöglicht, das PHD-Modell messtechnisch zu gewinnen. Auch wenn sie oft synonym verwendet werden, basieren die NVNA auf dem Mischerprinzip, wohingegen die LSNA samplerbasiert sind [112, 133]. Mit der kommerziellen Einführung der NVNA und LSNA wurde von der Firma Agilent - ein Ableger von Hewlett-Packard (HP) - der Begriff *X-Parameter* als Warenzeichen für die Großsignal-S-Parameter des PHD-Ansatzes geschützt. Neben der notwendigen Messtechnik wurde auch in Simulationsumgebungen, wie z.B. *Advanced Design System* (ADS) [61] von Agilent bzw. heute Keysight, die Möglichkeit geschaffen, X-Parameter zu verwenden. Daher versuchte Odyniec [88] in einem Übersichtspaper die unterschiedlichen Ansätze auf ihre Anwendbarkeit zu überprüfen. Darin nennt er die bereits von den ursprünglichen Autoren [26, 77, 83] genannte Problematik bei Mehrtonanregung, übersieht allerdings deren Lösungsvorschläge. Da er die Großsignal-S-Parameter für Eintonanregungen - wie im linearen Fall - durch Division der komplexen Streuvariablen  $S_k(A_1) = \frac{B_k(A_1)}{A_1}$  berechnet und dieser Ansatz für Mehrtonanregungen nicht anwendbar ist, erachtet er zusammenfassend nur Großsignal-S-Parameter für Eintonanregungen eines angepassten N-Tors als „nützlich“ bzw. „sinnvoll“ [88]. Dadurch werden der Linearisierungsansatz von [150] und der generelle Ansatz von Jargon, Gupta und DeGroot [54] indirekt als unnützlich angesehen, obwohl er zuvor den Linearisierungsansatz [150] als „sehr nützlich für den Mischerentwurf“ eingestuft hatte.

Darüber hinaus wurden später in zwei Arbeiten mit sehr ähnlichen Titeln die X-Parameter mit den *nichtlinearen Streufunktionen* verglichen [106, 129]. Trotz der nahezu gleichen Titel wird darin jeweils etwas anderes mit dem Begriff Streufunktion beschrieben. In der Arbeit von Sun, Xu und Liang [129] wird damit - trotz fehlenden Zitats - der allgemeinere Ansatz *nichtlinearer S-Parameter* von Jargon, Gupta und DeGroot [54] gemeint, von dem die X-Parameter eine Näherung erster Ordnung sind. In der Arbeit von Qinglong und Shengli [106] hingegen werden die *S-Funktionen* aus der Arbeit von Myslinski u. a. [84] mit den X-Parametern verglichen. Es wird festgestellt, dass die S-Funktionen ebenso wie die X-Parameter eine Linearisierung der mehrdimensionalen Beschreibungsfunktionen sind. Beide Ansätze sind aus den Arbeiten der HP-NMDG hervorgegangen, zu der auch Verspecht, Verbeyst und Vanden Bosche gehörten. Verspecht entwickelte zusammen mit Root für Agilent die X-Parameter, wohingegen Verbeyst und Vanden Bosche in der von Agilent ausgelagerten, selbstständigen Abteilung *Network Measurement and Description Group* (NMDG), die später von *National Instruments* aufgekauft wurde, die Notation der S-Funktionen einführt [84, 85]. Somit sind beide Ansätze eine Erweiterung der linearen S-Parameter,

die sich nur in der Notation unterscheiden und von unterschiedlichen Wettbewerbern kommerziell zur Verfügung gestellt werden.

Nach der kommerziellen Einführung dieses „neuen Paradigmas“ [116] für die Modellierung von stark nichtlinearen Transistorschaltungen unter Großsignalanregung konnten die X-Parameter im Systementwurf von Leistungsverstärkern integriert werden (vgl. z. B. [31]). Zwei wesentliche Annahmen schränkten jedoch die Anwendungs- und Gültigkeitsbereiche der X-Parameter ein: erstens die Lastanpassung an die charakteristische Impedanz der Messumgebung und zweitens die als Kleinsignale angenommenen höheren Harmonischen. Daher beschäftigten sich neben den Erfindern der X-Parameter bei Agilent im Wesentlichen drei universitäre Forschungsgruppen mit der Erweiterung der X-Parameter. Die Gruppe um Tasker, Woodington und Qi an der Universität von Cardiff führte aufbauend auf dem PHD-Ansatz der X-Parameter eine Modellvariante - das sog. *direct wave look-up*-Modell - höherer polynomieller Ordnung ein, das mit Hilfe von *Load-pull*-Messungen auch für Lastsituationen abweichend von der charakteristischen Impedanz anwendbar ist [103–105, 120, 161–163]. Die lastabhängige Messung der X-Parameter wurde von Agilents Partner Maury Microwave mit Hilfe von passiven *Load-pull*-Messungen entwickelt [126]. Daher werden diese nachfolgend auch als *Load-pull-X-Parameter* bezeichnet. In Zusammenarbeit mit der Universitäten in Cardiff und Vigo entwickelte die Gruppe um Peláez Pérez an der technischen Universität in Madrid einen analytischen Ansatz zur Vorhersage des Verhaltens von Feedback-Strukturen und zum Entwurf von Oszillatoren [33, 92–94, 96–98] mit Hilfe der X-Parameter.

Die dritte Arbeitsgruppe um Cai und Brazil an der Universität Dublin verwendete die X-Parameter für den Entwurf von Frequenzverdopplern [12]. Darüber hinaus wurden verschiedene Ansätze verfolgt den Gültigkeitsbereich der X-Parameter zu vergrößern. In [18] werden dazu anstatt einer Taylor-Reihenentwicklung 1. Ordnung der spektralen Beschreibungsfunktion eine Padé-Approximation verwendet und in [15, 16] die Taylor-Reihe um einige der quadratischen Anteile erweitert. Außerdem wird in [16] der zuvor in [14] eingeführte lastabhängige Wichtungsfaktor in das erweiterte Modell quadratische polyharmonische Verzerrung - englisch: *quadratic polyharmonic distortion* (QPHD) - integriert. Dadurch soll eine Anpassung des Modells an Situationen mit  $Z_L \neq Z_0$  ermöglicht werden. In weiteren Arbeiten wird der Parameterraum der Lastabhängigkeit der Modellansätze reduziert, sodass entweder eine Abhängigkeit über den Betrag des Reflexionsfaktors  $|\Gamma_L|$  allein [17, 19, 20] oder durch einen neuen Ansatz zur Modellgenerierung gar keine Lastabhängigkeit mehr besteht [13].

Neben den o. g. Modellanpassungen der drei universitären Forschungsgruppen erweiterten die Mitarbeiter von Agilent die Anwendungsgebiete der X-Parameter. In der Arbeit von Xie, Zhang und Liu [166] werden X-Parameter für Mischerschaltungen eingeführt. Dadurch wird die Restriktion ausschließlich *polyharmonischer* Frequenzen  $k \cdot f_0$  mit  $k \in \mathbb{N}$  aufgehoben. Allerdings werden die X-Parameter in diesem Ansatz als Funktionen von zwei Großsignalamplituden betrachtet, der Amplitude des RF- und des LO-Signals. Zusätzlich können durch dynamische X-Parameter *long-term dynamic memory effects*, wie z. B. *Bias*-Modulation, berücksichtigt werden [138, 148, 151]. Root u. a. [117] fassen die wesentlichen Erkenntnisse zu den X-Parametern aus den letzten 20 Jahren in einem Übersichtsbuch zusammen, das als einziges Nachschlagewerk zu dem Thema zur Verfügung steht.

## 1.2. Beitrag zum Stand der Technik

Wie der letzte Abschnitt zeigte, wurde insbesondere in den letzten beiden Jahrzehnten seit der Einführung entsprechender Messtechnik Forschungsaufwand betrieben, um das Konzept der linearen S-Parameter für nichtlineare  $N$ -Tore unter Großsignalanregung zu erweitern. Die S-Parameter wurden seit den 1960er Jahren für verschiedene Anwendungen als geeignetes Hilfsmittel für die Modellierung und den Entwurf von Hochfrequenzsystemen verwendet. Die Firma Agilent, deren Messtechniksparte später in der Firma Keysight ausgegliedert wurde, stellte mit den X-Parametern eines dieser Konzepte um das Jahr 2010 kommerziell zur Verfügung und nannte es einen „Paradigmenwechsel“ [116]. Abgesehen von einem Übersichtsbuch von Root u. a. [117] und dem vielzitierten Journalartikel zum zugrunde liegenden PHD-Konzept von Verspecht und Root [139] ist relativ wenig Literatur zu den X-Parametern verfügbar. Daher liegt einer der Schwerpunkte dieser Arbeit auf der Betrachtung der zugrunde liegenden Mathematik des X-Parametermodells. Für ein deutlich besseres Verständnis dieser wird ein tiefgreifender Vergleich mit der Volterra-Reihe - einem anderen sehr verbreiteten Ansatz zur Modellierung von nichtlinearen, dynamischen Systemen - durchgeführt. Auf Basis der Volterra-Reihe veröffentlichten Weiner und Naditch [157] einen Ansatz zur Verwendung von Streuvariablen anstatt Strömen und Spannungen, wie es auch

bei den linearen S-Parametern üblich ist. Der Ansatz von Weiner und Naditch [157] wird jedoch in der gesamten X-Parameterliteratur nicht berücksichtigt.

Stattdessen wird im Anhang der Dissertation von Verspecht [141] unter dem Titel *Describing Functions Can Better Model Hard Nonlinearities in the Frequency Domain than the Volterra Theory* [142] ein rudimentärer Vergleich zwischen dem *Volterra input-output map* (VIOMAP) [135, 136] und der mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion (BF) durchgeführt, die das Grundkonzept der X-Parameter darstellt. Letztere wird dabei allerdings nicht analytisch bestimmt - wenn dies überhaupt möglich ist -, sondern nur über eine rationale Funktion approximiert. Die Kernaussage des Vergleichs in [142], dass die BF stark nichtlineares Verhalten besser beschreiben kann als die Volterra-Reihe, ist wenig verblüffend, wenn ein Einblick in die jeweilige Theorie gewonnen wurde. Die Volterra-Reihe ist nur für schwach nichtlineare Systeme anwendbar und die BF ist in der Lage, auch stark nichtlineares Verhalten abzubilden. Wie die vorliegende Arbeit anders als [142] zeigen wird, ist die verwendete mehrdimensionale BF als Erweiterung der aus der Literatur, wie z. B. [40], bekannten Einton-BF und Mees [79] BF-Matrix zu verstehen. Grundsätzlich ist daher die titelgebende Aussage von [142] vollkommen richtig, jedoch ist die anhand eines Beispiels abgeleitete Begründung hanebüchen. Denn im Vergleichsfall von Verspecht [142] wird ein Volterra-reihenähnliches VIOMAP-Polynom niedriger Ordnung mit einer rationalen Funktion verglichen, um die einzelnen Spektralanteile der Ausgangssignale zu approximieren. Aufgrund der Welligkeit der VIOMAP-Polynome erzielen die rationalen Funktionen die besseren Ergebnisse bei einer geringeren Parameterkomplexität. Dabei werden jedoch nicht die wesentlichen Unterschiede sowie Gemeinsamkeiten der beiden Ansätze Volterra-Reihe und BF diskutiert. An anderen Stellen wird ebenfalls ein Vergleich zwischen Volterra-Reihe und den X-Parametern - bzw. dem PHD-Ansatz zur Linearisierung der zugrunde liegenden BF - durchgeführt. So wird zwar in [112, Kapitel 6] aus einem VIOMAP-Polynom der PHD-Ansatz abgeleitet und in [117, Anhang B] werden darüber hinaus für den Fall schwach nichtlinearen Verhaltens Ausdrücke für die X-Parameter  $X_{mk}^{(\cdot)}$  in Form einer McLaurin-Reihe gefunden. Neben dem Verzicht auf gängige Volterra-Reihennotation ist der größte Mangel dieser beiden Vergleiche, dass keine weiteren Schlussfolgerungen gezogen werden. Die gefundenen Zusammenhänge können durchaus genutzt werden, um die X-Parametertheorie zu verbessern, was an verschiedenen Stellen möglich ist. So ist die Grundvoraussetzung für die Gültigkeit des X-Parametermodells, dass ein Eingangssignal wesentlich größer ist als alle anderen auftretenden Signalanteile, da diese nur linear in die Modellgleichung eingehen. Sobald eines der zusätzlichen Signale ähnlich groß wird wie das *Großsignal*, wird folglich der begangene Modellfehler immer größer. Um diesen Mangel zu umgehen, wird in der Literatur (z. B. [117]) das weitere *Großsignal* im LSOP berücksichtigt. Dadurch geht es bei diesen *Load-pull*-X-Parametern nicht mehr linear in die Modellgleichung mit ein. Allerdings müssen dadurch sehr viel mehr X-Parameter bestimmt werden, da sie nicht nur in Abhängigkeit einer einzigen Großsignalamplitude bestimmt werden müssen. Zwar gibt es bereits erste Ansätze [12–20] dies durch eine Ordnungserhöhung der linearen X-Parameter zu umgehen, allerdings lassen diese eine mathematische Legitimation durch einen tieferen Einblick in die X-Parametertheorie vermissen. Folglich bemerken die Autoren dieser Arbeiten nicht, dass ihre Ansätze nicht vollständig bzw. fehlerhaft sind. So wird in [15, 16] z. B. mit dem QPHD eine quadratische Erweiterung des PHD-Ansatzes eingeführt. Dabei wird jedoch der spektrale Überlagerungsgedanke des linearen PHD aufrecht erhalten und jeder weitere Signalanteil wird unabhängig betrachtet, was ab einer gewissen Signalamplitude schlichtweg falsch ist.

In dieser Arbeit wird eine deutlich umfassendere Betrachtung der Modelltheorien von Volterra-Reihe und X-Parametern durchgeführt als in der Literatur vorhanden ist. Dadurch können auch die Ergebnisse des Vergleichs aus [117, Anhang B] besser nachvollzogen werden. Darüber hinaus werden zusätzliche Erkenntnisse gewonnen, um das X-Parametermodell basierend auf dem PHD-Ansatz zu erweitern und somit zu verbessern. Dabei werden die bereits vorhandene Ansätze [12–20] aufgegriffen, konsequent weiterverfolgt und verbessert. So wird die mehrdimensionale BF nicht - wie im PHD-Ansatz vorgesehen - nach dem Taylor-Reihenglied erster Ordnung abgebrochen, sondern auch für höhere Ordnungen betrachtet. Dabei werden nicht nur - wie in [15, 16] - Sonderfälle berücksichtigt, sondern über eine *Multi-Index*-Notation die vollständige Taylor-Reihenentwicklung höherer Ordnung zugelassen. Für diese neue Erweiterung wird kurz erläutert, wie bestehende Messkonzepte zur Modellgewinnung erweitert werden müssen. Die eigentliche Umsetzung der Modellkonzepte erfolgt in einer Kombination aus *MATLAB* und dem HB-Simulator im *Cadence Virtuoso Design Framework*, da dem Verfasser dieser Arbeit weder ein geeignetes Messgerät - LSNA oder NVNA - noch der Simulator *Advanced Design System (ADS)* [61] von *Keysight*, in dem die X-Parameter implementiert sind, zur Verfügung stand. Durch die Ordnungserhöhung der Reihenentwick-

lung folgt zwangsläufig auch eine Erhöhung der einzelnen Modellkomplexitäten. Allerdings wird dadurch auch der Gültigkeitsbereich der Modelle erweitert. So ist es möglich das komplexere Modell, das auf Basis eines *zufälligen* Messverfahrens [13] bestimmt wird, für die gesamte Lastebene einzusetzen anstatt nur für einen kleinen Bereich um die jeweilige Lastsituation herum. Somit ist die X-Parameteranzahl im Vergleich zu den linearen *Load-pull*-X-Parametern insgesamt kleiner.

Ein weiterer Mangel des Vergleichs von Volterra-Reihe und X-Parametern in [117, Anhang B] ist die Beschränkung auf *polyharmonische* Anregungen  $\omega_k = k\omega_0$  mit  $k \in \mathbb{N}$ . Eine Stärke der Volterra-Reihe ist es, Eingangssignale beliebiger, unabhängiger Frequenzen  $\omega_k \neq k\omega_0$  mit  $k \in \mathbb{N}$  zu berücksichtigen. Zwar gibt es für diese Situationen ebenfalls X-Parameter um z. B. Frequenzmischer zu modellieren, allerdings ist hier die vorhandene Literatur zahlenmäßig noch kleiner und lässt sich mit [46, 52, 166] sowie [117, Kapitel 5.7] an einer Hand abzählen. Mit Hilfe dieses Konzepts lassen sich die X-Parameter nicht nur als Verhaltensmodell, sondern auch als Entwurfswerkzeug für Frequenzmischer einsetzen. Der größte Mangel dieses Ansatzes ist allerdings, dass zu jeder auftretenden Fundamentalfrequenz auch ein Großsignal definiert werden muss, das den LSOP festlegt. Dadurch müssen alle X-Parameter für jede Kombination von Großsignalamplituden neu bestimmt werden, wodurch eine große Zahl an X-Parametern im Modell gespeichert werden muss. Allerdings ist es nicht unbedingt erforderlich jedes Fundamentalsignal auch als Großsignal zu definieren. So ist bei Frequenzmischem das sog. lokaler Oszillator (LO)-Signal üblicherweise sehr viel größer als alle anderen auftretenden Signale [72]. Außerdem sind für die fundamentalen Großsignale keine Empfindlichkeitsfunktionen  $X^{(S)}$  bzw.  $X^{(T)}$  vorhanden, da sie in den Großsignal-X-Parametern  $X^{(F)}$  berücksichtigt werden.

Anhand der gewonnenen Erkenntnisse aus dem umfassenden Volterra-Reihenvergleich dieser Arbeit lässt sich eine alternative Betrachtungsweise auf das X-Parametermodell für unabhängige Frequenzen ableiten. In dieser wird nur ein einziges Großsignal definiert, das wie zuvor im polyharmonischen Fall den LSOP festlegt. Jedes weitere Fundamentalsignal wird ebenfalls als Störung dieses LSOP angesehen. Mit dem so neu gewonnen Ansatz ist zum einen eine geringere X-Parameteranzahl als im Ansatz von Xie, Zhang und Liu [166] nötig. Zum anderen ist damit auch ein Einsatz als Werkzeug für eine *Suszeptibilitäts*-Analyse möglich, da sich für jedes außer das LSOP festlegende Fundamentalsignal Empfindlichkeitsfunktionen  $X^{(S)}$  bzw.  $X^{(T)}$  etc. finden lassen. In Verbindung mit der zuvor eingeführten *Multi-Index-Taylor-Reihe* (MIT) lässt sich dennoch ein großer Gültigkeitsbereich erreichen.

### 1.3. Übersicht der Arbeit

In dieser Arbeit werden verschiedene Konzepte zur Erweiterung der linearen S-Parameter zur Berücksichtigung nichtlinearen Verhaltens betrachtet, verglichen und erweitert. Zunächst werden dazu in Kapitel 2 kurz die S-Parameter als einen besonderen Fall der linearen Zweitorthorie betrachtet, um zu verstehen, welchen Stellenwert diese in der Elektrotechnik besitzen. Da die S-Parameter nur für lineare Systeme gültig sind, wurden in der Vergangenheit die in Abschnitt 1.1 gezeigten, verschiedenen Ansätze zur Erweiterung des S-Parameterkonzepts für nichtlineare Schaltungen entwickelt. Davon wird einer der ersten aus dem Jahr 1976 in Kapitel 3 mit den nichtlinearen S-Parametern basierend auf der Volterra-Reihe von Weiner und Naditch [157] fortführend betrachtet. Dazu wird zunächst kurz die Volterra-Reihe allgemein und deren Berechnung rekapituliert, bevor die Überführung der Volterra-Reihe von Torströmen und -spannungen zu nichtlinearen Streuvariablen angerissen wird.

Darauffolgend wird in Kapitel 4 mit den X-Parametern ein weiterer, jüngerer und inzwischen über *Keysight Technologies* kommerziell verfügbarer Ansatz vorgestellt. Dazu wird zunächst in Abschnitt 4.1 mit den Beschreibungsfunktionen das mathematische Grundkonzept der X-Parameter beleuchtet. Im PHD-Modellansatz, aus dem die X-Parameter direkt hervorgehen, werden die mehrdimensionalen Beschreibungsfunktionen um einen Großsignalarbeitspunkt - englisch: *large signal operating point* (LSOP) linearisiert, was in Abschnitt 4.2 betrachtet wird. In Abschnitt 4.3 werden zusätzlich zwei Methoden zur Bestimmung der X-Parameter aus Messdaten zusammengefasst, nämlich die Frequenz-Offset- und die Phasen-Offset-Methode, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit erweitert werden müssen.

Im darauffolgenden Kapitel 5 werden die beiden Ansätze aus Kapitel 3 und 4 auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede untersucht. Dabei wird tiefgreifender auf die Volterra-Reihe eingegangen als in anderen in der Literatur vorhandenen Vergleichen dieser Art [112, 117, 141]. So lässt sich deutlich zeigen, dass sich für schwach nichtlineares Systemverhalten die X-Parameter durch eine Volterra-Reihe darstellen

lassen. Auf diese Weise lassen sich eine große Anzahl von X-Parametern durch wenige, abschnittsweise definierte, komplexe Polynome approximieren (vgl. Abschnitt 5.1). Anhand einer beispielhaften Untersuchung lässt sich erkennen, dass die X-Parameter Gültigkeit vom Amplitudenverhältnis der unterschiedlichen Spektralanteile abhängig ist. Wird die Hauptannahme des zugrunde liegenden PHD-Ansatz, dass ein Spektralanteil viel größer ist als alle anderen, verletzt, leidet die Modellgenauigkeit. Aus dem Vergleich mit der Volterra-Reihe wird in Abschnitt 5.3 die Schlussfolgerung gezogen, dass in diesem Fall eine Ordnungserhöhung der X-Parameter notwendig wird.

Folglich werden in Kapitel 6 die in der Literatur vorhandenen Ansätze für X-Parameter höherer Ordnung untersucht. Dabei wird in Abschnitt 6.1 festgestellt, dass die Ordnungserhöhung der X-Parameter [15, 16, 18] nicht konsequent durchgeführt wird, da so der Grundgedanke des PHD-Ansatz - unabhängige Überlagerung der zusätzlichen Spektralanteile - aufrechtzuerhalten werden kann. Daher werden in Abschnitt 6.2 X-Parameter höherer Ordnung eingeführt, die sich einer vollständigen Entwicklung mit einer *Multi-Index-Taylor-Reihe* bedienen. Anhand einer beispielhaften qualitativen Untersuchung in Abschnitt 6.4 werden die unterschiedlichen X-Parameter höherer Ordnung miteinander verglichen. In Abschnitt 6.5 wird betrachtet wie sich die Erhöhung der Modellordnung auf die Modellkomplexität auswirkt. Die umfassendste Ordnungserhöhung zieht deutlich die größte Modellkomplexität nach sich.

Nichtsdestotrotz sind Erhöhungen der Modellordnung sinnvoll, wie die Lastabhängigkeitsuntersuchung der X-Parameter in Kapitel 7 zeigt. Die zuvor betrachteten X-Parameter sind ein Verhaltensmodell für nichtlineare Systeme unter leichter *Fehlanpassung*. Die Antwort des *angepassten* Systems ist der LSOP und eine leichte Störung dieses Zustands führt zu kleinen, weiteren Spektralanteilen, deren Einfluss linear in den X-Parametern des PHD-Ansatzes berücksichtigt werden. Eine starke Fehlanpassung führt zu einem LSOP, der von zwei Großsignalen abhängt. Folglich sind die X-Parameter dieses Systems zusätzlich von der Amplitude und der Phase des zweiten Großsignals abhängig. Zur Abdeckung der ganzen Lastebene ist daher deutlich mehr als ein Parametersatz nötig, wie in einem Vergleich verschiedener Ansätze in Abschnitt 7.3 gezeigt wird. Da die Begriffe (Fehl-) Anpassung in nichtlinearen Systemen nicht so eindeutig definierbar sind wie für lineare Systeme, wird in Abschnitt 7.1 eine Interpretation dieser Sprechweise aufgezeigt. Die in dem erwähnten Vergleich untersuchten lastabhängigen X-Parameteransätze werden einzeln in Abschnitt 7.2 kurz vorgestellt.

Im PHD-Ansatz und den zugehörigen X-Parametern wird sich auf *polyharmonische* Eingangssignale mit ganzzahligen Vielfachen einer Fundamentalfrequenz  $\omega_k = k\omega_0$  mit  $k \in \mathbb{N}$  beschränkt. Das bedeutet, dass unter Ausschluss von Subharmonischen alle Signale periodisch bzw. durch eine Fourier-Reihe darstellbar angenommen werden. Die Volterra-Reihe aus Kapitel 3 unterliegt einer solchen Beschränkung nicht, aber auch die X-Parameter wurden für Signalfrequenzen  $\omega_k \neq k\omega_0$  mit  $k \in \mathbb{N}$  erweitert [117, 166], wie in Abschnitt 8.1 kurz gezeigt wird. Hier werden die X-Parameter erneut in Abhängigkeit von mindestens zwei Großsignalen betrachtet. Ein neuer, alternativer Ansatz wird in Abschnitt 8.2 auf Basis der vorherigen Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit eingeführt. Dadurch lassen sich die X-Parameter unabhängiger Erregerfrequenzen nur in Abhängigkeit eines einzelnen Großsignals ansehen. Anhand einer Beispielschaltung werden in Abschnitt 8.3 die Unterschiede der beiden Ansätze verdeutlicht.

Die Arbeit endet in Kapitel 9 mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem Ausblick über mögliche Fortsetzungen dieser Forschung.

## 2. Lineare Zweitorbeschreibung mit S-Parametern

Nachdem in der Einleitung die Gründe für den Einsatz von *Streuparametern* - kurz *S-Parameter* - angedeutet wurden, soll in diesem Kapitel genauer darauf eingegangen werden. Dabei wird sich trotzdem auf die wichtigsten Punkte beschränkt. Weiterführend wird exemplarisch auf die en masse vorhandene Literatur zum Thema S-Parameter verwiesen. Zunächst wird kurz die Zweitortheorie anhand der strom- und spannungsbasierten Zweitormatrizen erläutert. Darauffolgend werden deren Nachteile gegenüber den S-Parametern dargestellt. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit einem kleinen Überblick über einige Anwendungen der S-Parameter.

### 2.1. Strom- und spannungsbasierte Zweitormatrizen

Mit dem Begriff *Zweitor* werden Systeme bezeichnet, die Energie und/oder Signale zwischen einem Eingangs- und einem Ausgangstor übertragen. Die Tore werden aus Klemmenpaaren gebildet, wobei die Gesamtanzahl der Klemmen nicht zwangsläufig vier sein muss, und mit einer Spannung sowie einem hinein- und herausfließendem Strom charakterisiert. Ein System mit drei Klemmen, bei dem eine Klemme vom Ein- und Ausgangstor gemeinsam genutzt wird, wie zum Beispiel einem Transistor, kann ebenfalls als Zweitor beschrieben werden. Die Begriffe *Zweitore* und *Vierpole* müssen außerdem unterschieden werden, da bei einem Zweitor die *Torbedingung* erfüllt sein muss. Dies ist der Fall, wenn der hineinfließende gleich dem herausfließende Strom des Tores ist (vgl. Abb. 2.1). Im allgemeineren Fall des Vierpols ist diese Bedingung nicht notwendig. Daher wurde der ursprünglich verwendete Begriff *Vierpoltheorie* durch den der *Zweitortheorie* verdrängt [63].

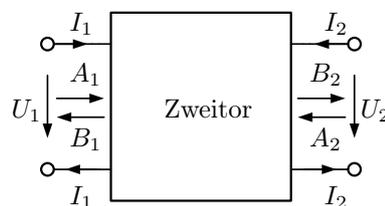


Abb. 2.1.: Allgemeines Zweitor

Die Zweitortheorie kann als Erweiterung der Systemtheorie betrachtet werden. In letzterer beschreibt eine Funktion den Zusammenhang zwischen dem Eingangs- und Ausgangssignal eines Systems, das linear, zeitinvariant - englisch: *linear time-invariant* (LTI) ist. Diese als Impulsantwort [74] oder Gewichtsfunktion [70] bezeichnete Funktion  $h(t)$  ergibt sich am Systemausgang durch Anregung mit dem Dirac-Impuls  $\delta(t)$ . Im Zeitbereich wird das Ausgangssignal  $y(t)$  über die Faltung des Eingangssignals mit der Gewichtsfunktion bestimmt. Durch Laplacetransformation wird aus dieser Faltung eine Multiplikation im Frequenzbereich. Es ergibt sich der Zusammenhang

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad Y(s) = H(s)X(s), \quad (2.1)$$

worin die Laplacetransformation  $H$  von  $h$  als Übertragungsfunktion bezeichnet wird. Da in der Zweitortheorie jedes Tor durch die zwei Größen Strom und Spannung charakterisiert wird, reicht eine Funktion zur Beschreibung des Zweitors nicht aus. Stattdessen werden vier Parameter benötigt, die die Torgrößen miteinander in Verbindung setzen. Dies kann zwar auch über die Faltung im Zeitbereich erfolgen, wie

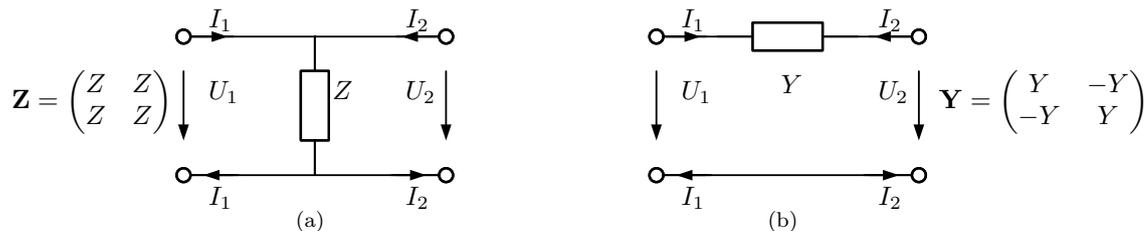


Abb. 2.2.: Parallelwiderstand ohne Y-Matrix (a) und Reihenwiderstand ohne Z-Matrix (b)

Wunsch [164] zeigte. Üblich ist allerdings die Betrachtung im Frequenzbereich bei sinusförmiger Anregung im Sinne der komplexen Wechselstromrechnung [165]. Die Zweitorgleichungen können in Matrixform zusammengefasst werden, wobei ein Vektor zweier abhängiger Torgrößen über eine Matrixmultiplikation mit einem Vektor unabhängiger Torgrößen berechnet wird. So ist z. B. der Zusammenhang der Impedanzparameter  $\mathbf{Z}$  durch die Impedanz- oder auch kurz Z-Matrix gegeben

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Eine Möglichkeit der Koordinatentransformation und somit eine Umformung der Matrixdarstellung besteht über Permutation der sog. *Belevitch-Form* [4, 66]

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -Z_{11} & -Z_{12} \\ 0 & 1 & -Z_{21} & -Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

So können Umrechnungsvorschriften für die sechs gängigen Möglichkeiten ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$ ) gefunden werden. Dabei ist anzumerken, dass nicht immer jede der Darstellungsformen existiert. Insbesondere für einfache Zweitore, wie dem Parallelwiderstand ohne Admittanzmatrix  $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$  in Abb. 2.2a und dem Reihenwiderstand ohne Impedanzmatrix  $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$  in Abb. 2.2b, ist dies der Fall. Verschaltete Zweitore können über Matrixoperationen der entsprechenden Matrizen zu einem Gesamtzweitor umgerechnet werden. So können z. B. zwei Zweitore, die in *Reihen-Reihen-Schaltung* sind, durch Addition der Impedanzmatrizen

$$\mathbf{Z}_{\text{ges}} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \tag{2.4a}$$

zusammengefasst werden [63]. Neben der Existenz der einzelnen Matrizen muss nach der Verschaltung ebenfalls die Torbedingung erfüllt werden [66]. Bei der Verkettung von mehreren Zweitoren ist dies immer der Fall, was wichtig für mehrstufige Schaltungen ist, die über Zweitore modelliert werden. So ergibt sich bei einer zweistufigen Schaltung die Gesamtkettenmatrix als Matrixprodukt der einzelnen Kettenmatrizen

$$\mathbf{A}_{\text{ges}} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2. \tag{2.4b}$$

Die Kettenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} & A_{12} = \left. \frac{-U_1}{I_2} \right|_{U_2=0} \\ A_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} & A_{22} = \left. \frac{-I_1}{I_2} \right|_{U_2=0} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

beschreibt den Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Zur Bestimmung der einzelnen Kettenparameter  $A_{ij}$  aus den Definitionsgleichungen in (2.5) wird am zweiten Tor ein Kurzschluss  $U_2 = 0$  bzw. offene Klemmen  $I_2 = 0$  benötigt. Diese Bedingungen sind für Hochfrequenzmessungen bei Frequenzen über 100 MHz allerdings aufgrund parasitärer Elemente schwierig zu realisieren. Außerdem führen Kurzschlüsse oft zu unerwünschten Oszillationen [48]. Zusätzlich

sind für hohe Frequenzen „die Begriffe Strom, Spannung und Widerstand bzw. Leitwert nicht unmittelbar zu definieren und zu messen“ [63]. Genau hier liegt der enorme Vorteil der nachfolgend vorgestellten S-Parameter, für die andere Bedingungen in den Definitionsgleichungen gelten.

## 2.2. Streuparameter und S-Matrix

Die S-Parameter wurden erstmals in Matrixform für die Beschreibung von Wellengrößen in der Quantenmechanik [158] zusammengefasst. Später wurden sie für Reflexionsvorgänge an *Transmission lines* verwendet [81]. Belevitch [3] verwendete sie erstmals zur Beschreibung von Netzwerken mit der *N*-Tortheorie. Später wurden weitere wichtige Arbeiten in einem *IRE Transactions on Circuit Theory*-Sonderband zu Streuparametern von Belevitch [3, 4], Carlin [24], Kahn [57], Oono [90] und Treuhart [131] gesammelt. Carlin und Giordano [23] stellen weiterführend die wichtigsten Eigenschaften der S-Matrix zusammen. Da die S-Parameter seither in sehr vielen Lehrbüchern zum Thema Hochfrequenztechnik enthalten sind, wird sich im Folgenden auf einen kurzen Überblick der Vorteile und Anwendungen der S-Parameter beschränkt.

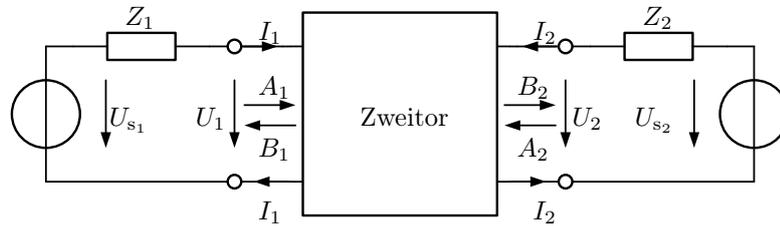


Abb. 2.3.: Zweitor in Betriebschaltung zur Bestimmung der S-Matrix

Der wesentliche Unterschied zu den oben genannten Zweitorparametern ist die Tatsache, dass die S-Matrix anstatt der Torströme und -spannungen die sog. Streuvariablen verknüpft

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{A} \iff \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Aus der Wellentheorie übernommen finden sich für die Streuvariablen  $A_n, B_n$  auch häufig in Verbindung mit Netzwerken fälschlicherweise - in Netzwerken gibt es keine Wellenphänomene - die Bezeichnungen *hinlaufende* und *rücklaufende Spannungswelle* am Tor  $n$  für  $A_n$  bzw.  $B_n$ . In Anlehnung daran werden  $A_n$  und  $B_n$  in dieser Arbeit zur Unterscheidung von hinlaufender und rücklaufender Streuvariablen gesprochen. Die Streuvariablen stellen eine Linearkombination aus Strom und Spannung dar und werden auf einen Bezugswert normiert. Diese Umrechnung ist auch als *Heaviside-Transformation* bekannt [63, 66] und ist für einen reellen Bezugswiderstand  $Z_{0_n} \in \mathbb{R}$  im Zeit- und Frequenzbereich möglich

$$a_n(t) = \frac{u_n(t) + Z_{0_n} i_n(t)}{2\sqrt{Z_{0_n}}} \quad \overset{\mathcal{F}}{\circ \bullet} \quad A_n(\omega) = \frac{U_n(\omega) + Z_{0_n} I_n(\omega)}{2\sqrt{Z_{0_n}}} \quad (2.8a)$$

$$b_n(t) = \frac{u_n(t) - Z_{0_n} i_n(t)}{2\sqrt{Z_{0_n}}} \quad \overset{\mathcal{F}}{\circ \bullet} \quad B_n(\omega) = \frac{U_n(\omega) - Z_{0_n} I_n(\omega)}{2\sqrt{Z_{0_n}}}. \quad (2.8b)$$

Manchmal wird in der Literatur, z. B. [67], auch eine komplexe Bezugsimpedanz  $Z_0 \in \mathbb{C}$  gewählt, wodurch sich die Heaviside-Transformation im Frequenzbereich verändert zu

$$A_n(\omega) = \frac{U_n(\omega) + Z_{0_n} I_n(\omega)}{2\sqrt{\operatorname{Re}\{Z_{0_n}\}}} \quad \text{und} \quad B_n(\omega) = \frac{U_n(\omega) - Z_{0_n}^* I_n(\omega)}{2\sqrt{\operatorname{Re}\{Z_{0_n}\}}}. \quad (2.9)$$

Im Folgenden wird auf die Unterscheidung der charakteristischen Impedanz  $Z_{0_n}$  für jedes der Tore zugunsten einer einzigen reellen Bezugsimpedanz  $Z_0 \in \mathbb{R}$  verzichtet. Mathematisch gesehen stellt die Heaviside-Transformation eine Drehstreckung des *ui*-Koordinatensystems dar [78]. Dadurch ist es möglich z. B. einen idealen Schalter mit den Streuvariablen zu beschreiben [66]. Allgemein lässt sich festhalten,

dass die S-Matrix immer existiert [24]. Durch ihren Bezug zur Momentanleistung  $p_n(t)$  am Tor  $n$

$$p_n(t) = a_n^2(t) - b_n^2(t) \quad (2.10a)$$

bzw. zur Wirkleistung

$$P_n = \frac{1}{2}(|A_n|^2 - |B_n|^2) \quad (2.10b)$$

lassen sich die Streuvariablen anders als Ströme und Spannungen auch bei hohen Frequenzen messen (vgl. [63, 66, 78]). Die S-Parameter als Elemente der S-Matrix sind definiert über

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} = \left. \frac{B_1}{A_1} \right|_{A_2=0} & S_{12} = \left. \frac{B_1}{A_2} \right|_{A_1=0} \\ S_{21} = \left. \frac{B_2}{A_1} \right|_{A_2=0} & S_{22} = \left. \frac{B_2}{A_1} \right|_{A_1=0} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Zur messtechnischen Bestimmung der einzelnen S-Parameter muss dafür gesorgt werden, dass die nicht beteiligten hinlaufenden Streuvariablen  $A_n = 0$  sind. So werden die beiden S-Parameter  $S_{11}$  und  $S_{21}$  mit  $A_2 = 0$  bestimmt. Hier liegt ein weiterer Vorteil gegenüber den Strom- und Spannungs-basierten Messverfahren. Die Bedingung  $A_n = 0$  wird durch eine rein passive Beschaltung des Tors  $n$  mit der charakteristischen Impedanz  $Z_{0_n}$  erreicht. Für eine genullte Quelle  $U_{s_n} = 0$  in Abb. 2.3 ergibt sich die Torspannung zu  $U_n = -Z_{0_n} I_n$ . Daraus folgt direkt mit (2.8a) der Zusammenhang

$$A_n = 0 \iff Z_n = Z_{0_n}. \quad (2.12)$$

In diesem Fall wird das Tor  $n$  als *angepasst* bezeichnet. Für die Messungen von  $S_{i1}$  mittels einer Betriebschaltung wie in Abb. 2.3 dargestellt muss folglich  $Z_2 = Z_{0_2}$  gelten. Diese Bedingung ist auch für hohe Frequenzen durch geeignete Kalibriermaßnahmen hoch genau zu erreichen [49].

### 2.2.1. T-Matrix

Wie bei den strom- und spannungs-basierten Zweitorparametern gibt es zur Berechnung eines Gesamtzweitores aus verketteten Zweitoren die sowohl als Transmissions- als auch *Betriebskettenmatrix* [63] genannte T-Matrix, die laut Fettweis [35] von Bauer [1] eingeführt wurde. In der Literatur finden sich unterschiedliche Definitionen der T-Matrix. Die gängigste lautet

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

wohingegen z. B. von Montgomery, Dicke und Purcel [81] - damit vor Bauer [1] - die inverse Darstellung verwendet wird. Im Vergleich zu den verwandten Kettenparametern fällt auf, dass die Definition aus (2.13) wie die Kettenmatrix aus (2.6) mit den Torgrößen am Ausgangstor multipliziert wird. Mit der T-Matrix ist es daher ebenso möglich ein Gesamtzweitor durch Multiplikation der einzelnen Zweitormatrizen zu berechnen

$$\mathbf{T}_{\text{ges}} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2. \quad (2.14)$$

### 2.2.2. N-Tore

Die bisherige Betrachtung wurde anhand von Zweitoren durchgeführt. Die Zweitortheorie lässt sich auf Mehrfore - in dieser Arbeit häufig auch  $N$ -Tore genannt - erweitern. Dabei ist zu beachten, dass sich die Matrixoperationen verschalteter Mehrfore nur für „torzahlsymmetrische“ [63] Fälle anwenden lassen. So ergibt sich für ein  $N$ -Tor der S-Matrixzusammenhang

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N1} & \dots & S_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Da die Heaviside-Transformation aus (2.8) eine Linearkombination aus Strom und Spannung in Zusammenhang mit den charakteristischen Impedanzen  $Z_{0_n}$  ist, lassen sich auch Umrechnungsvorschriften für die Transfer- und Streumatrix zu den anderen Matrizen finden. Für die Umrechnung von S- zu Y- bzw. Z-Matrix lauten diese beispielsweise [118]

$$\mathbf{Y} = \left( \mathbf{Z}_0^{\frac{1}{2}} + \mathbf{S}\mathbf{Z}_0^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left( \mathbf{Z}_0^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{S}\mathbf{Z}_0^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{Z} = \left( \mathbf{Z}_0^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{S}\mathbf{Z}_0^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} \left( \mathbf{Z}_0^{\frac{1}{2}} + \mathbf{S}\mathbf{Z}_0^{\frac{1}{2}} \right). \quad (2.16b)$$

Darin sind

$$\mathbf{Z}_0^{\frac{1}{2}} = \text{diag} \left( \sqrt{Z_{0_1}}, \dots, \sqrt{Z_{0_n}}, \dots, \sqrt{Z_{0_N}} \right), \quad (2.16c)$$

$$\mathbf{Z}_0^{-\frac{1}{2}} = \text{diag} \left( \sqrt{Z_{0_1}^{-1}}, \dots, \sqrt{Z_{0_n}^{-1}}, \dots, \sqrt{Z_{0_N}^{-1}} \right), \quad (2.16d)$$

und  $Z_{0_n} \in \mathbb{R}$  die charakteristische Impedanz am Tor  $n \in [1, N] \subset \mathbb{N}$ . Auf diese Weise können die S-Parameter gemessen werden und in jede andere Darstellungsform umgerechnet werden, sofern diese existiert. Die Umrechnungsvorschriften können über eine *homografische Matrixtransformation* der Belevitch-Form aus (2.3) gewonnen werden, wie Belevitch [4] am Beispiel eines Zweitores zeigte. Die Belevitch-Form der S-Parameter eines Zweitores lautet

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_{11} & -S_{12} \\ 0 & 1 & -S_{21} & -S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

### 2.2.3. Anwendungen

Nach der theoretischen Einführung der vorherigen Abschnitte sollen hier einige Anwendungen der S- und T-Parameter genannt werden. Eine sehr gute Übersicht und eine kleine Einführung in die verwendete Messtechnik lässt sich in verschiedenen *Application Notes* der Messgerätehersteller finden, z. B. HP [48, 50, 59], deren Messgerätesparte später als Teil von Agilent bzw. noch später unter dem Namen Keysight selbstständig ausgelagert wurde.

Für das Verständnis der nachfolgenden Anwendungsfälle ist es sinnvoll sich die Bedeutung der einzelnen S-Parameter zu verdeutlichen. Aus den Definitionsgleichungen in (2.11) ist ersichtlich, dass für die Bestimmung von  $S_{11}$  das 2. Tor quellenfrei und im Sinne von (2.12)  $Z_2 = Z_{0_2}$  angepasst sein muss. Der S-Parameter  $S_{11}$  stellt folglich das Verhältnis der *rücklaufenden* zur *hinlaufenden* Streuvariable im angepassten Fall am 1. Tor dar (vgl. Leistungszusammenhang in (2.10)), woraus mit (2.8)

$$S_{11} = \left. \frac{U_1 - Z_{0_1} I_1}{U_1 + Z_{0_1} I_1} \right|_{A_2=0} \quad (2.18)$$

folgt. Daher wird er auch als *Betriebsreflexionsfaktor* am 1. Tor bezeichnet [63]. Wenn für den Eingangswiderstand  $Z_{e_1} = \frac{U_1}{I_1} = Z_{0_1}$  gilt, wird  $S_{11} = 0$ . Äquivalentes gilt auch für den S-Parameter  $S_{22}$ .

Der S-Parameter  $S_{21}$  wiederum gibt im angepassten 2. Tor das Verhältnis der *rücklaufenden* Streuvariable  $B_2$  zur *hinlaufenden* Streuvariable  $A_1$  dar. Daher wird

$$S_{21} = \left. \frac{U_2 - Z_{0_2} I_2}{U_1 + Z_{0_1} I_1} \right|_{A_2=0} \quad (2.19)$$

auch als *Betriebsübertragungsfaktor* bezeichnet [63]. Für den rückwirkenden Übertragungsfaktor  $S_{12}$  gilt bei *übertragungssymmetrischen* Zweitoren  $S_{12} = S_{21}$ . Aktive Zweitore sind i. d. R. nicht übertragungssymmetrisch und es gilt  $S_{12} \ll S_{21}$ .

Aufgrund dieser Eigenschaften lassen sich die S-Parameter sehr gut dafür einsetzen, sog. *Anpassnetzwerke* zu dimensionieren, mit denen der Ein- und Ausgangswiderstand eines aktiven Zweitores an die Betriebsbeschaltung angepasst werden können. Dabei kommt neben den Betragsfrequenzgängen (vgl. Abb. 2.4a)

auch als Hilfsmittel das sog. *Smith-Chart* (vgl. Abb. 2.4b) zum Einsatz. Dieses stellt eine konforme Abbildung der komplexen (Impedanz- oder Admittanz-) Ebene dar, was auch als *Möbius-Transformation* bekannt ist [66].

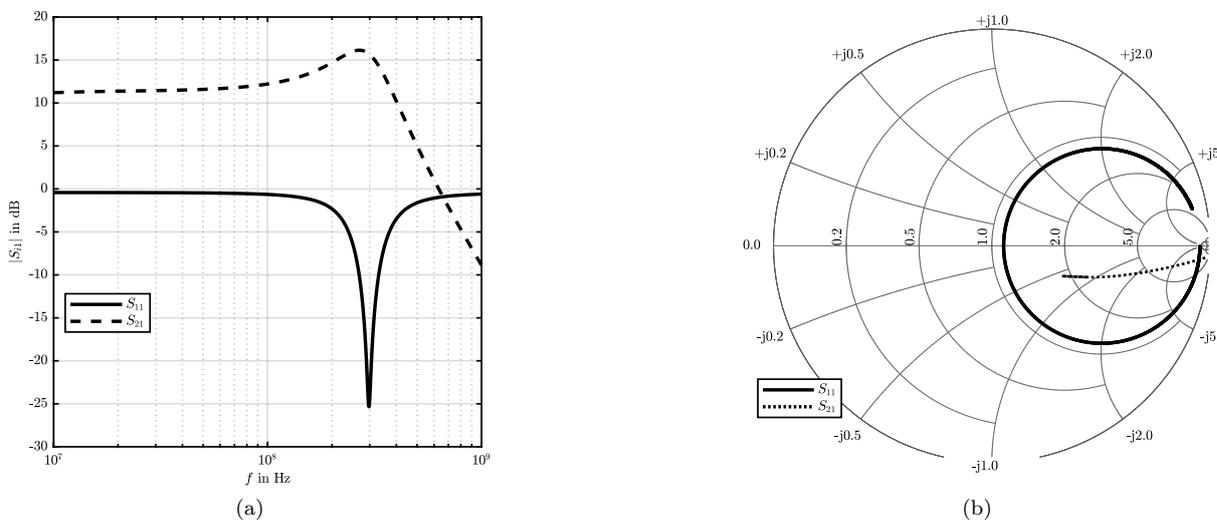


Abb. 2.4.: S-Parameter  $S_{11}$  und  $S_{21}$ : Betragsfrequenzgang in dB (a) und das zugehörige Impedanz-Smith-Chart ( $|S_{11}| < 1$ ) (b)

In Folge der Leistungsverwandtheit (2.10) lassen sich durch die S-Parameter verschiedene Leistungsverstärkungsfaktoren (engl. *power gains*) definieren und als Entwurfskriterium einsetzen. Dies geschieht in Verbindung mit den *Reflexionsfaktoren*

$$\Gamma_n = \frac{Z_n - Z_{0n}}{Z_n + Z_{0n}} \quad (2.20)$$

des nicht angepassten  $n$ -ten Tors. Bei aktiven Zweitoren können die Ein- und Ausgangsimpedanz negativ werden, was instabiles bzw. oszillierendes Verhalten nach sich ziehen kann. Über die S-Parameter und die daraus abgeleiteten *Stabilitätskreise* [91] kann daher auch überprüft werden, ob das aktive Zweitor unter den gegebenen Arbeitsbedingungen instabil werden kann. Neben der Analyse eines Verstärkers kann dies auch für eine initiale Dimensionierung im Entwurf eines Oszillators verwendet werden [43].

Darüber hinaus lassen sich die S- bzw. T-Parameter für die Verhaltensmodellierung einsetzen. Zum einen kann aus einer Verkettung einzelner Zweitore über (2.14) ein gesamtes Zweitor berechnet werden. Zum anderen können aus den gemessenen S-Parametern über die Umrechnung in (2.16) Frequenzgänge der Impedanz- oder Admittanzparameter gewonnen werden. Daraus können über ein geeignetes Verhaltensmodell parasitäre Elemente berücksichtigt werden. Wenn dies für verschiedene Arbeitspunkte geschieht, können nichtlineare Kennlinien über Integration der statischen, differentiellen Elemente gefunden werden (vgl. [122, 159]).

### 2.2.4. Beschränkung auf Linearisierung

Trotz all der o. g. Vorteile und den daraus erwachsenden Anwendungsmöglichkeiten der S-Parameter ist deren größte Einschränkung, dass sie nur im Gültigkeitsbereich der Linearisierung um den DCOP ohne Fehler verwendet werden können. Sobald die Eingangsamplitude eine gewisse Größe überschreitet (vgl. Punkt A und A' in Abb. 2.5 [28]), kommt es je nach Art der Nichtlinearität des betrachteten Zweitors zur sog. *Kompression* - manchmal aber auch zur *Expansion* - der Signalamplitude bei der anregenden Frequenz  $\omega$ . Damit ist die Abweichung des nichtlinearen Systems gegenüber dem linearisierten System zu verstehen. Oft wird daher der sog. *1dB-Kompressionspunkt* als Maß für die Linearität eines nichtlinearen Übertragungssystems verwendet (vgl. z. B. [68]). Infolge der nichtlinearen Kompression ist die Anpassung über den  $S_{22}$ -Parameter zur maximalen Leistungsübertragung nicht zwangsläufig auch die

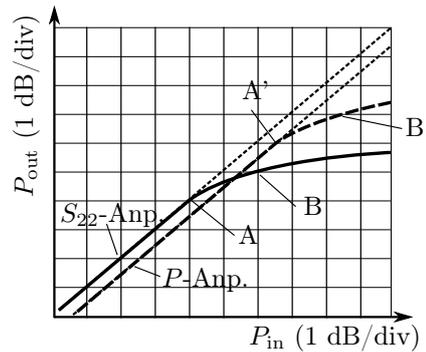


Abb. 2.5.: 1dB-Kompressionspunkte bei maximaler Leistungsanpassung über  $S_{22}$  und optimaler Leistungsanpassung über eine *Load-pull*-Messung [28]

optimale Wahl. So kann über eine *Leistungsanpassung* mit Hilfe eines sog. *Load-pull-Tuners* ein größerer 1dB-Kompressionspunkt erreicht werden (vgl. Punkt B und B' in Abb. 2.5 [28]).

Noch bevor die Load-pull-Technik eingeführt wurde, gab es Bestrebungen S-Parameter zur Berücksichtigung nichtlinearen Verhaltens zu erweitern (vgl. Abschnitt 1.1). Die ersten Arbeiten zum Thema *Großsignal-S-Parameter* [26, 69, 77, 83] nichtlinearer Zweitore stellten ein wesentliches Problem fest: Aufgrund der Nichtlinearität ist das Superpositionsprinzip nicht mehr anwendbar. Erst durch dieses ist es im linearen Fall möglich, die einzelnen Zweitoreparameter durch das Nullsetzen (Quellenfreiheit) der nicht beteiligten Torgrößen zu bestimmen. Insbesondere bei den amplitudenabhängigen Großsignal-S-Parametern  $S_{12}(A_1, A_2)$  und  $S_{22}(A_1, A_2)$  wird ein großer Fehler begangen, wenn die Quelle  $U_{s_1} = 0$  gesetzt wird. Die Schaltungsantwort auf diese Messbedingung weicht stark vom Betriebszustand mit dieser Quelle  $U_{s_1} \neq 0$  ab. Einen ersten Ansatz zur Bestimmung der Großsignal-S-Parameter  $S_{12}(A_1, A_2)$  und  $S_{22}(A_1, A_2)$  schlägt Müller [83] vor. Neben einer Messung mit beiden anregenden Signalen  $A_1$  und  $A_2$  im angepassten Zustand wird eine zweite Messung mit einer leicht abweichenden Last durchgeführt. Dadurch können die Großsignal-S-Parameter durch ein Gleichungssystem berechnet werden. Auf diesem Ansatz basiert auch die in Kapitel 7.2.3 verwendete und viel später eingeführte *zufällige* („randomized“ [13, 19, 20]) Phasen-Offset-Methode.

Einen zweiten Lösungsansatz stellen Mazumder und Puije [77] vor, bei dem die Großsignal-S-Parameter als Mittelpunkt einer möglichst kreisförmigen Darstellung gewonnen werden. Beispielphaft ist dies mit

$$B_2 = S_{21}A_1 + S_{22}A_2 \Leftrightarrow \frac{B_2}{A_2} = S_{21} \frac{A_1}{A_2} + S_{22} \quad (2.21)$$

in Abb. 2.6 dargestellt. Für die Messung dieser Darstellung werden die Beträge  $|A_1|, |A_2| = \text{konst.}$  gehalten und nur die Phasendifferenz  $\Phi_{A_1} - \Phi_{A_2}$  wird variiert. Je stärker die Nichtlinearität des untersuchten Zweitores ist, desto mehr weicht der Verlauf  $\frac{B_2}{A_2}$  von einem Kreis ab [77]. Die Ursache dafür kann durch die X-Parameter  $X^{(T)}$  [139] aus Kapitel 4 erklärt werden. Eine Bestimmungsmethode dieser kommerziell verfügbaren Großsignal-S-Parameter basiert auf der Methode von Mazumder und Puije [77] und wird als *Phasen-Offset-Methode* in Kapitel 4.3.2 erläutert. Zuvor wird allerdings im folgenden Kapitel mit der Volterra-Reihe ein anderer Ansatz zur Modellierung von nichtlinearen Übertragungssystemen betrachtet, der von Weiner und Naditch [157] in Verbindung mit den Streuvariablen gebracht wurde.

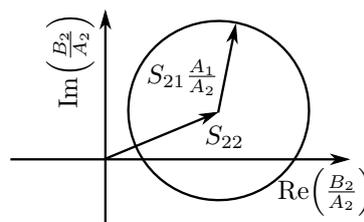


Abb. 2.6.: Grafische Bestimmung der Großsignal-S-Parameter nach Mazumder und Puije [77]



# 3. Volterra-reihenbasierte nichtlineare S-Parameter

Im letzten Kapitel wurde mit den S-Parametern ein Konzept kurz betrachtet, das aufgrund der guten Messbarkeit und des Bezugs auf eine charakteristische Impedanz seit über 50 Jahren als ein Modellierungs- und Entwurfswerkzeug in der Hochfrequenz (HF)-Technik sehr weit verbreitet ist. Der wesentliche Nachteil der S-Parameter ist die Gültigkeitsbeschränkung auf lineare bzw. linearisierte Systeme. Von den in der Einleitung 1.1 genannten Ansätzen zur Berücksichtigung nichtlinearen Verhaltens sollen in diesem Kapitel die auf der Volterra-Reihe basierenden nichtlinearen S-Parameter nach Weiner und Naditch [157] vorgestellt werden. Anders als beim ebenfalls in der Einleitung erwähnten *Volterra input-output map* (VIOMAP)-Ansatz handelt es sich hierbei nicht um einen *Black-Box*-Ansatz. Stattdessen wird die Volterra-Reihe aus den Netzwerkgleichungen berechnet. Daher werden zum besseren Verständnis des Ansatzes von Weiner und Naditch [157] in Abschnitt 3.1 kurz die wesentlichen Begriffe der Volterra-Reihe betrachtet. In Abschnitt 3.1.2 wird darauffolgend kurz auf das in dieser Arbeit verwendete Berechnungsverfahren eingegangen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird der Ansatz von Weiner und Naditch [157] auf den in dieser Arbeit wichtigen Fall der *polyharmonischen* Anregung (vgl. Anhang A.1) übertragen. Dieser findet ebenfalls in den in Kapitel 4 vorgestellten X-Parametern Verwendung, die in den letzten Jahren als Erweiterung der linearen S-Parameter kommerziell verfügbar wurden. Im darauffolgenden Kapitel 5 werden die Volterra-reihenbasierten S-Parameter dieses Kapitels mit den X-Parametern verglichen.

## 3.1. Volterra-Reihe

Die Volterra-Reihe ist eine bekannte Methode zur Beschreibung schwach nichtlinearer Übertragungssysteme sowohl im zeit- als auch im Frequenzbereich und in der Literatur sehr gut beschrieben u. a. in [8, 9, 27, 71, 123]. Für die kurze Einführung in diesem Abschnitt wird sich an dem Werk von Weiner und Spina [156] orientiert.

Für ein schwach nichtlineares Übertragungssystem mit dem Eingangssignal  $x(t)$  und dem Ausgangssignal  $y(t)$  aus Abb. 3.1 reicht das lineare Faltungsintegral mit der Sprungantwort  $h(t)$  bzw. die lineare Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  aus (2.1) nicht mehr zur Beschreibung im Zeit- bzw. Frequenzbereich aus. Aufgrund der Nichtlinearität treten im Spektrum des Ausgangssignals  $y(t)$  neben der *Kompression* oder *Expansion* der Fundamentalsignale (vgl. Abschnitt 2.2.4) zwei ernstzunehmende Effekte auf, und zwar die harmonische Verzerrung - englisch: *harmonic distortion* (HD) und Intermodulation (IM). Mit HD ist die Verteilung von Leistung auf ganzzahlige Vielfache  $k\omega$  der anregenden Frequenz  $\omega$  und mit IM die Leistungsverteilung auf Summen- und Differenzfrequenzen  $\pm k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \pm \dots$  bei Mehrtonanregung gemeint. Beide Effekte sind beispielhaft für eine Zweitonanregung in Abb. 3.2 gezeigt.

Mit Hilfe der Volterra-Reihe können diese nichtlinearen Effekte für schwach nichtlineare, dynamische Systeme berücksichtigt werden. Generell kann die Volterra-Reihe als Verallgemeinerung der Taylor-Reihe statisch nichtlinearer Systeme angesehen werden, um dynamische Effekte einzubeziehen. Durch Hinzunahme von Reihengliedern höherer Ordnung  $y_d$  kann in beiden Fällen die Genauigkeit erhöht werden. Unter der Annahme, dass nach einer gewissen Ordnung  $D$  alle Einflüsse höherer Ordnung vernachlässigbar

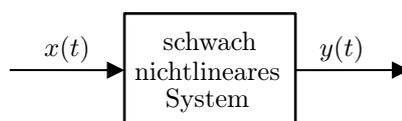


Abb. 3.1.: Schwach nichtlineares System mit dem Eingangssignals  $x(t)$  und dem Ausgangssignal  $y(t)$

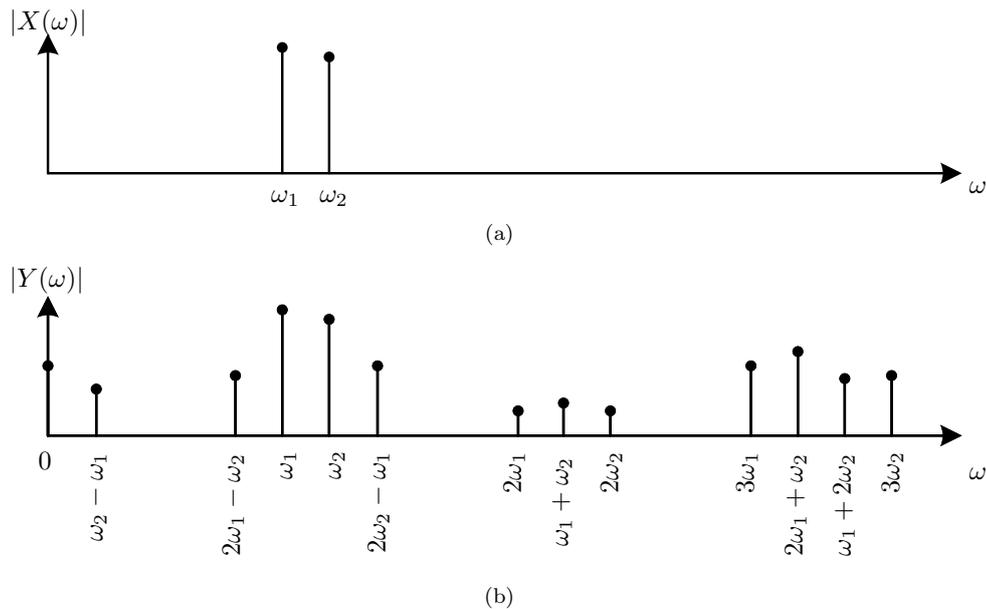


Abb. 3.2.: Ein- (a) und Ausgangsspektrum (b) eines schwach nichtlinearen Systems (vgl. Abb. 3.1) bei sinusförmiger Zweitonanregung

werden, kann das Ausgangssignal durch die endliche Reihe

$$y(t) = \sum_{d=1}^D y_d(t) \quad (3.1)$$

ausgedrückt werden. Damit der Rechenaufwand nicht unermesslich steigt, sollte in der Praxis dabei die Ordnung  $D$  nicht zu groß werden. Mit der Volterra-Reihe sollen wie im linearen Fall (2.1) dynamische Systeme mit *Gedächtnis* beschrieben werden, was im Zeitbereich durch die mehrdimensionalen Faltungsintegrale

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (3.2a)$$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.2b)$$

⋮

$$y_d(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_d(\tau_1, \dots, \tau_d) x(t - \tau_1) \cdots x(t - \tau_d) d\tau_1 \cdots d\tau_d \quad (3.2c)$$

möglich ist. Darin wird die Funktion  $h_d(\tau_1, \dots, \tau_d)$  als *Sprungantwort* oder *Volterra-Kern*  $d$ -ter Ordnung bezeichnet [9, 156]. Diese können mit Hilfe der mehrdimensionalen Fourier-Transformation

$$y_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y_1(\omega) = H_1(\omega)X(\omega), \quad (3.3a)$$

$$y_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y_2(\omega_1, \omega_2) = H_2(\omega_1, \omega_2)X(\omega_1)X(\omega_2), \quad (3.3b)$$

⋮

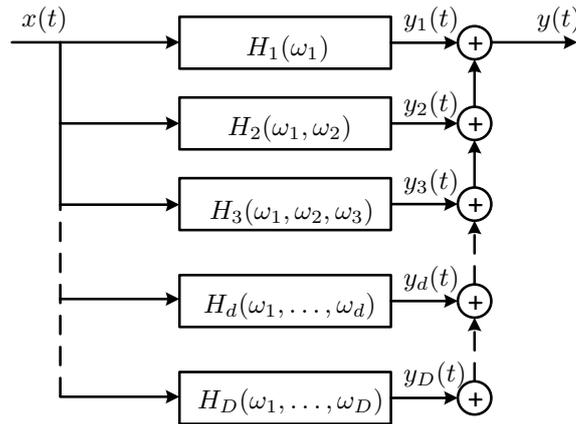


Abb. 3.3.: Volterra-Reihenmodell für schwach nichtlineare Übertragungssysteme

$$y_d(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y_d(\omega_1, \dots, \omega_d) = H_d(\omega_1, \dots, \omega_d) X(\omega_1) \cdots X(\omega_d) \quad (3.3c)$$

in den Frequenzbereich überführt werden. Darin sind die mehrdimensionalen Fourier-Transformierten der Volterra-Kerne  $h_d(\tau_1, \dots, \tau_d)$  die sog. *nichtlinearen Übertragungsfunktionen*

$$H_d(\omega_1, \dots, \omega_d) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_d(\tau_1, \dots, \tau_d) e^{-j(\omega_1 \tau_1 + \cdots + \omega_d \tau_d)} d\tau_1 \cdots d\tau_d. \quad (3.4)$$

Mit Hilfe von (3.3) und (3.4) kann die Reihenentwicklung (3.1) über die Blockdarstellung in Abb.3.3 modelliert werden. Die einzelnen parallelen Blöcke der Übertragungsfunktionen  $H_d(\omega_1, \dots, \omega_d)$  haben alle dasselbe Eingangssignal  $x(t)$ , sind unabhängig von diesem und erzeugen daraus den Anteil  $y_d(t)$ . Die Summe aller  $D$  Blöcke ergibt gemäß (3.1) das Ausgangssignal  $y(t)$  des schwach nichtlinearen Systems [156].

### 3.1.1. Sinusförmige Anregung

Die mehrdimensionalen Fourier-Transformierten  $Y_d(\omega_1, \dots, \omega_d)$  aus (3.3) beschreiben einen Punkt im mehrdimensionalen Spektrum. Um auf einen Punkt im eindimensionalen Spektrum  $Y_d(\omega)$  und daraus über die inverse Fourier-Transformation auf  $y_d(t)$  zu kommen, gibt es unterschiedliche Ansätze. Butterweck [10] bezeichnet diese Reduzierung am zweidimensionalen Beispiel mit dem Begriff *Kontraktion* und Peyton Jones und Billings [100] verallgemeinern diesen Ansatz, ohne dabei einen speziellen Begriff zu verwenden. In dieser Arbeit sollen nur reelle sinusförmige Anregungen der Form

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-L}^L X_l e^{j\omega_l t} \quad \text{mit } X_l = X_{-l}^* \quad \text{und } X_0 = 0 \quad (3.5)$$

betrachtet werden. Für diese vereinfacht sich durch Einsetzen in (3.2) und Umformen der Anteil  $d$ -ter Ordnung

$$y_d(t) = \frac{1}{2^d} \sum_{l_1=-L}^L \cdots \sum_{l_d=-L}^L X_{l_1} \cdots X_{l_d} e^{j(\omega_{l_1} + \cdots + \omega_{l_d})t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_d(\tau_1, \dots, \tau_d) e^{j(\omega_{l_1} \tau_1 + \cdots + \omega_{l_d} \tau_d)} d\tau_1 \cdots d\tau_d}_{H_d(\omega_{l_1}, \dots, \omega_{l_d})}$$

bzw. mit  $H_d(\omega_{l_1}, \dots, \omega_{l_d})$  aus (3.4)

$$y_d(t) = \frac{1}{2^d} \sum_{l_1=-L}^L \cdots \sum_{l_d=-L}^L X_{l_1} \cdots X_{l_d} H_d(\omega_{l_1}, \dots, \omega_{l_d}) e^{j(\omega_{l_1} + \cdots + \omega_{l_d})t}. \quad (3.6)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Summe von  $L$  reellen Sinussignalen aus (3.5) im Anteil  $d$ -ter Ordnung  $y_d(t)$  am Ausgangssignal  $y(t)$  des nichtlinearen Systems aus (3.1) neue Frequenzanteile generiert. Von allen vorhandenen Anregungsfrequenzen  $-\omega_L, \dots, -\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_L$  tragen immer  $d$  gleichzeitig zum Anteil  $\omega_q = \omega_{l_1} + \cdots + \omega_{l_d}$  bei. Alle möglichen Kombinationen ergeben das gesamte Ausgangsspektrum, wobei verschiedene Permutationen  $(\omega_{l_1}, \dots, \omega_{l_d})$  zur gleichen Frequenz  $\omega_q$  beitragen. Unter der Annahme, dass die Übertragungsfunktionen  $H_d(\omega_{l_1}, \dots, \omega_{l_d})$  symmetrisch sind, d. h. die Reihenfolge der Argumente spielt keine Rolle für ihren Wert und es gilt beispielsweise

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = H_3(\omega_1, \omega_3, \omega_2) = H_3(\omega_2, \omega_1, \omega_3) = \dots, \quad (3.7)$$

können äquivalente Kombinationen zusammengefasst werden. In realen Systemen gilt zusätzlich

$$H_d(\omega_1, \dots, \omega_d) = H_d^*(-\omega_1, \dots, -\omega_d). \quad (3.8)$$

Weiterhin ist u. A. in [27, 123] gezeigt, wie unsymmetrische Funktionen  $h_{d,\text{unsy}}(\tau_1, \dots, \tau_d)$  bzw.  $H_{d,\text{unsy}}(\omega_1, \dots, \omega_d)$  symmetrisiert werden können. Im Folgenden soll daher stets von symmetrischen Übertragungsfunktionen  $H_d$  ausgegangen werden. Die wesentliche Aufgabe zur Bestimmung des Ausgangsspektrums von  $y(t)$  ist es, die komplexen Amplituden des Anteils  $d$ -ter Ordnung  $X_{l_1} \cdots X_{l_d} H_d(\omega_{l_1}, \dots, \omega_{l_d})$  aus (3.6) zu bestimmen und dem entsprechenden Frequenzanteil  $\omega_q = \omega_{l_1} + \cdots + \omega_{l_d}$  zuzuordnen. Dieses Kombinatorikproblem ist unter dem Begriff *Frequenzgeneration* in der Literatur [9, 71, 156] bekannt. Darin werden alle Frequenzkombinationen mit einem Frequenzvektor

$$\mathbf{q} = (q_{-L}, \dots, q_{-1}, q_1, \dots, q_L) \quad (3.9a)$$

repräsentiert, die zur Frequenz

$$\omega_q = \sum_{l=-L}^L q_l \omega_l = (q_1 - q_{-1})\omega_1 + \cdots + (q_L - q_{-L})\omega_L \quad (3.9b)$$

beitragen. Alle durch  $\mathbf{q}$  als identisch identifizierten Permutationen der Funktion  $H_d(\omega_{l_1}, \dots, \omega_{l_d})$  werden mit Hilfe des *Multinomialkoeffizienten*

$$\binom{d}{\mathbf{q}} = \frac{d!}{q_{-L}! \cdots q_{-1}! q_1! \cdots q_L!} \quad (3.9c)$$

zusammengefasst [156]. Mit Hilfe des Modulvektors (3.9a) wird in [27] noch eine andere Schreibweise

$$H_d(\omega_{l_1}, \dots, \omega_{l_d}) = H_d(q_{-L}\{\omega_{-L}\}, \dots, q_{-1}\{\omega_{-1}\}, q_1\{\omega_1\}, \dots, q_L\{\omega_L\}) \quad (3.10)$$

eingeführt, die im Folgenden bei Übertragungsfunktionen höherer Ordnung verwendet werden soll.

### 3.1.2. Berechnung der Volterra-Kerne

Eine weitere Schwierigkeit neben dem Kombinatorikproblem des letzten Abschnitts ist die Berechnung der Volterra-Übertragungsfunktionen  $H_d(\omega_1, \dots, \omega_d)$ . In der älteren Literatur zur Volterra-Reihe werden im wesentlichen zwei Methoden genannt und an einfachen Beispielen nachvollzogen. Zum einen ist das die sog. *harmonic-input-* oder auch *probing-*Methode [9, 71] und zum anderen die Methode *nichtlinearer Stromquellen* [71, 124, 154]. Beide besitzen Vor- und Nachteile auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll. Als Verallgemeinerung der Methode *nichtlinearer Stromquellen* kann der Ansatz von Koepl [64] angesehen werden. Die Übertragungsfunktionen  $d$ -ter Ordnung  $H_d$  können durch sukzessive Lösung der Ersatznetzwerke der Ordnungen  $1, \dots, d-1$  mit Hilfe der modifizierten Knotenpotentialanalyse berechnet werden. Dazu sind die Netzwerkgleichungen in Form von *Sparse-Matrizen*  $\mathbf{C}_l, \mathbf{G}_l$  und

Kronecker-Produkten der Lösungen geringerer Ordnung zu verwenden

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d(\omega_1, \dots, \omega_d) = & -((\omega_1 + \dots + \omega_d)\mathbf{C}_1 + \mathbf{G}_1)^{-1} \times \sum_d^{l=2} ((\omega_1 + \dots + \omega_d)\mathbf{C}_l + \mathbf{G}_l) \\ & \times \underbrace{\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_l=1}^{\infty}}_{u(l)=d} \bigotimes_{k=1}^l \mathbf{H}_{m_k}(\omega_{l(k)}, \dots, \omega_{u(k)}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Der Vektor  $\mathbf{H}_d$  enthält dabei alle Volterra-Übertragungsfunktionen  $H_{1s,d}, H_{2s,d}, \dots$  von der anregenden Quelle  $U_s$  (vgl. Abb. 3.4) zu jedem unbekanntem Potential im Netzwerk. Als lesbares Beispiel von (3.11) nennt Koepl [64] den Fall zweiter Ordnung

$$\mathbf{H}_2(\omega_1, \omega_2) = -((\omega_1 + \dots + \omega_d)\mathbf{C}_1 + \mathbf{G}_1)^{-1} ((\omega_1 + \omega_2)\mathbf{C}_2 + \mathbf{G}_2) \mathbf{H}_1(\omega_1) \otimes \mathbf{H}_2(\omega_2). \quad (3.12)$$

Auf Basis dieses Verfahrens wurde am Institut für Theoretische Elektrotechnik der Leibniz Universität Hannover ein Volterra-Reihen-Simulator [75] entwickelt, der aus einem *Cadence Virtuoso Design Framework Schematic* die Volterra-Übertragungsfunktionen  $\mathbf{H}_d$  in *MATLAB* berechnen kann. Aufgrund der Verwendung von Kronecker-Produkten in (3.11) steigt die Berechnungsdauer mit größer werdender maximaler Ordnung  $D$  und Netzwerkkomplexität sehr schnell an. In diesen Volterra-Simulator wurden auch die Volterra-reihenbasierten S-Parameter implementiert, die im Folgenden vorgestellt werden.

## 3.2. Streuvariablen und die Volterra-Reihe

Im Jahr 1976 zeigten Weiner und Naditch [157] eine Möglichkeit nichtlineare dynamische Zweitore auf Basis der Streuvariablen mit Hilfe der Volterra-Reihe (vgl. Abschnitt 3.1) zu beschreiben. In der sehr umfangreichen Veröffentlichung wird gezeigt, wie ausgehend von der allgemeinen Volterra-Reihe die Torspannungen und -ströme in Abhängigkeit der einzigen Quellenspannung  $U_s$  am Eingangstor (s. Abb. 3.4) zu berechnen sind. In einer längeren Rechnung, auf die hier verzichtet wird, ergibt sich aus den Torspannungen und -strömen über die Definitionsgleichungen der Streuvariablen (A.1)

$$a_n(t) = \frac{u_n(t) + Z_0 i_n(t)}{2\sqrt{Z_0}} \quad \text{und} \quad b_n(t) = \frac{u_n(t) - Z_0 i_n(t)}{2\sqrt{Z_0}}$$

ein Zusammenhang im Frequenzbereich für eine Volterra-reihenbasierte Erweiterung der linearen S-Parameter. Zu diesen reduziert sich der Volterra-Ansatz im Fall 1. Ordnung. Im Wesentlichen sind die zu berechnenden Größen die Übertragungsfunktionen  $d$ -ter Ordnung  $H_{ms,d}(\omega_1, \dots, \omega_d)$ , die die Übertragung der Quellenspannung  $U_s$  zum Anteil  $d$ -ter Ordnung an den Torspannungen  $U_m$ ,  $m \in \{1, 2\}$  beschreiben. Als Zusammenhänge ergeben sich mit im Vergleich zu [157] leicht angepasster Notation

$$S_{11,d}(\omega_1, \dots, \omega_d) = \begin{cases} 2H_{1s,1}(\omega_1) - 1 & d = 1, \\ 2^d Z_{0,s}^{\frac{d-1}{2}} H_{1s,d}(\omega_1, \dots, \omega_d) & d > 1, \end{cases} \quad (3.13a)$$

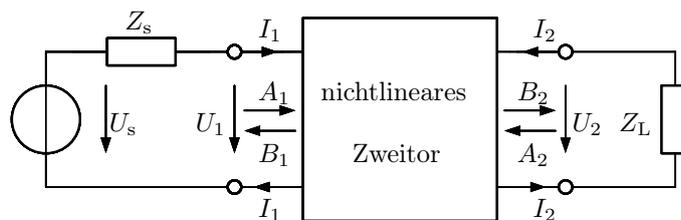


Abb. 3.4.: Nichtlineares Zweitor mit Quelle  $U_s$  am ersten Tor und linearer Quellen- ( $Z_s$ ) und Lastimpedanz ( $Z_L$ )

$$S_{21,d}(\omega_1, \dots, \omega_d) = 2^d Z_{0,s}^{\frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{Z_{0,L}}} H_{2s,d}(\omega_1, \dots, \omega_d) \quad (3.13b)$$

mit  $d \geq 1$  für ein nichtlineares Zweitor. Die Ausdrücke in (3.13) sind für allgemeine Signalanregungen gültig und können für komplexe harmonische Signale  $u_s(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-L}^L U_s(j\omega_l) e^{j\omega_l t}$  zu den Volterra-reihenbasierten nichtlinearen S-Parametern

$$S_{m;1^d}(\omega_1, \dots, \omega_d) = \frac{1}{2^d} \binom{d}{\mathbf{q}} S_{m1,d}(\omega_1, \dots, \omega_d) \quad (3.13c)$$

transformiert werden (vgl. Frequenzgeneration in Abschnitt 3.1.1 bzw. [156]). Die nichtlinearen S-Parameter in (3.13c) sind nur für den *angepassten* Fall (vgl. Abschnitt 7.1), d. h.  $Z_s = Z_{0,s}$  und  $Z_L = Z_{0,L}$ , gültig. Im Vergleich zum allgemeinen Fall  $Z_L$ , der auch in [157] angedeutete wurde, bietet (3.13c) den Vorteil, dass nur ein Term benötigt wird, um den Anteil  $d$ -ter Ordnung an der Streuvariable  $B_m$  am Tor  $m$  bei der Frequenz  $\omega_1 + \dots + \omega_d$  über

$$B_{m,d}(\omega_1 + \dots + \omega_d) = S_{m;1^d}(\omega_1, \dots, \omega_d) \prod_{p=1}^d A_1(\omega_p) \quad (3.13d)$$

mit

$$A_1(\omega) = \frac{U_s(\omega)}{2\sqrt{Z_{0,s}}} \quad (3.13e)$$

zu berechnen. Im Folgenden werden einige Schritte der Herleitung von (3.13) für den in dieser Arbeit wichtigen Sonderfall  $\omega_l = l\omega_0$  aus (A.2) aufgegriffen [157, 160].

### 3.2.1. Polyharmonische Anregung

Das Zweitor in Abb. 3.4 wird am Eingangstor durch ein polyharmonisches Signal mit der Fundamentalfrequenz  $\omega_0$  bis zur  $L$ -ten Harmonischen angeregt, das in der komplexen Darstellung mit  $U_s(l\omega_0) = U_{sl}$

$$u_s(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-L}^L U_s(l\omega_0) e^{jl\omega_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{l=-L}^L U_{sl} e^{jl\omega_0 t} \quad \text{mit } U_{s(-l)} = U_{sl}^* \quad \text{und } U_{s0} = 0, \quad (3.14)$$

lautet (vgl. (A.2)). Sowohl das Eingangs- als auch das Ausgangstor sind mit der gleichen charakteristischen Impedanz beschaltet, d. h.  $Z_s = Z_L = Z_0 \in \mathbb{R}^+$ . Folglich ist die Streuvariable  $A_1(\omega)$  aus (3.13e) nur von der anregenden Quelle  $U_s(\omega)$  abhängig und  $A_2(\omega) \equiv 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Die Torströme

$$i_m(t) \approx \sum_{d=1}^D i_{m,d}(t) \quad (3.15a)$$

und -spannungen

$$u_m(t) \approx \sum_{d=1}^D u_{m,d}(t), \quad (3.15b)$$

werden im Zeitbereich durch die nach der Ordnung  $D$  abgebrochenen Volterra-Reihe angenähert, in der jeder Anteil durch die mehrdimensionalen Faltungsintegrale

$$i_{m,d}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y_{ms,d}(\tau_p) \cdot \prod_{p=1}^d u_s(t - \tau_p) d\tau_p \quad (3.16a)$$

und

$$u_{m,d}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_{ms,d}(\tau_1, \dots, \tau_d) \cdot \prod_{p=1}^d u_s(t - \tau_p) d\tau_p \quad (3.16b)$$

berechnet wird. Einsetzen von (3.14) in (3.16) ergibt

$$i_{m,d}(t) = \frac{1}{2^d} \sum_{l_1=-L}^L \cdots \sum_{l_d=-L}^L Y_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) \cdot \prod_{p=1}^d U_{sl_p} e^{jl_p\omega_0 t} \quad (3.17a)$$

und

$$u_{m,d}(t) = \frac{1}{2^d} \sum_{l_1=-L}^L \cdots \sum_{l_d=-L}^L H_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) \cdot \prod_{p=1}^d U_{sl_p} e^{jl_p\omega_0 t} \quad (3.17b)$$

mit den Strom- und Spannungsübertragungsfunktionen  $d$ -ter Ordnung [157]

$$Y_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y_{ms,d}(\tau_1, \dots, \tau_d) \cdot \prod_{p=1}^d e^{-jl_p\omega_0\tau_p} d\tau_p \quad (3.18a)$$

und

$$H_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_{ms,d}(\tau_1, \dots, \tau_d) \cdot \prod_{p=1}^d e^{-jl_p\omega_0\tau_d} d\tau_p. \quad (3.18b)$$

Unter der Annahme, dass nur periodische Signale ohne Erzeugung von Subharmonischen im Netzwerk vorhanden sind, können die erhaltenen Ströme und Spannungen der  $d$ -ten Ordnung in ihre komplexen Fourier-Reihen entwickelt werden

$$i_{m,d}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{m,d}(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{mk,d} e^{jk\omega_0 t} \quad (3.19a)$$

und

$$u_{m,d}(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{m,d}(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{mk,d} e^{jk\omega_0 t}. \quad (3.19b)$$

Darin gilt für die komplexen Fourier-Koeffizienten  $I_{m,d}(k\omega_0) = I_{mk,d} = I_{m(-k),d}^*$  und  $U_{m,d}(k\omega_0) = U_{mk,d} = U_{m(-k),d}^*$ . Per Definition werden diese komplexen Fourierkoeffizienten mit  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  über

$$I_{mk,d} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} i_{m,d}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.20a)$$

bzw.

$$U_{mk,d} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u_{m,d}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (3.20b)$$

berechnet [65]. Mit Hilfe der *Heaviside*-Transformation (vgl. Anhang A)

$$B_{mk,d} = \frac{U_{mk,d} - Z_0 I_{mk,d}}{2\sqrt{Z_0}} \quad (3.21)$$

und

$$A_1(l\omega_0) = \frac{U_s(l\omega_0)}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{U_{sl}}{2\sqrt{Z_0}} = A_{1l} \quad (3.22)$$

werden die Streuvariablen zur Beschreibung des Zweitors erhalten. Durch Ersetzen der komplexen Fourier-Koeffizienten  $U_{mk,d}$  und  $I_{mk,d}$  in (3.21) ergibt sich

$$B_{mk,d} = \frac{1}{2^d} \sum_{l_1=-L}^L \cdots \sum_{l_d=-L}^L S_{m1,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) \prod_{p=1}^d A_{1l_p}, \quad (3.23a)$$

worin

$$S_{m1,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) = 2^{d-1} Z_0^{(d-1)/2} (H_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) - Z_0 Y_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0)) \quad (3.23b)$$

unter der Bedingung

$$l_1\omega_0 + \dots + l_d\omega_0 = k\omega_0 \quad (3.23c)$$

sind. Mit den Zusammenhängen [157]

$$Y_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) = \begin{cases} \frac{1-H_{1s,1}(l_1\omega_0)}{Z_0} & m=1 \wedge d=1 \\ -\frac{H_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0)}{Z_0} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.24a)$$

ergeben sich wegen der Einschränkung  $Z_{0,s} = Z_L = Z_0$  als Spezialfall von (3.13)

$$S_{m1,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) = \begin{cases} 2H_{1s,1}(l_1\omega_0) - 1 & m=1 \wedge d=1 \\ 2^d Z_0^{\frac{d-1}{2}} H_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.24b)$$

Die nichtlinearen Übertragungsfunktionen werden als symmetrisch in ihren Argumenten angenommen. Daher sind alle Funktionen  $S_{m1,d}(\cdot)$  mit dem gleichen Frequenzvektor aus (3.9a)

$$\mathbf{q} = (q_{-L}, \dots, q_{-1}, q_1, \dots, q_L),$$

mit

$$q_{-L}(-L\omega_0) + \dots - q_{-1}\omega_0 + q_1\omega_0 + \dots + q_L L\omega_0 = k\omega_0 \quad (3.25)$$

identisch [9]. Mit Hilfe der Multinomialkoeffizienten aus (3.9c)  $\binom{d}{\mathbf{q}} = \frac{d!}{q_{-L}! \dots q_{-1}! q_1! \dots q_L!}$  und dem Faktor  $\frac{1}{2^d}$  wird die Identität dieser Anteile berücksichtigt, was zu

$$B_{m,d}(l_1\omega_0 + \dots + l_d\omega_0) = \frac{1}{2^d} \binom{d}{\mathbf{q}} S_{m1,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) \prod_{p=1}^d A_{1l_p} \quad (3.26a)$$

bzw. mit der Substitution  $S_{m;1^d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) = \frac{1}{2^d} \binom{d}{\mathbf{q}} S_{m1,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0)$  aus (3.13c) zu

$$B_{m,d}(l_1\omega_0 + \dots + l_d\omega_0) = S_{m;1^d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) \prod_{p=1}^d A_{1l_p} \quad (3.26b)$$

führt. Die Addition aller Anteile  $B_{m,d}(\cdot)$  aus (3.26), die zur Frequenz  $k\omega_0$  beitragen, ergibt  $B_{mk,d}$  aus (3.23). Dadurch wird der Beitrag der Ordnung  $d$  an der Streuvariablen  $B_{mk} = \sum_{d=1}^D B_{mk,d}$  bei der Frequenz  $k\omega_0$  in Abhängigkeit des Eingangssignals  $A_{1l}$  berechnet.

### 3.3. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde mit den Volterra-reihenbasierten S-Parametern von Weiner und Naditch [157] ein erster Ansatz betrachtet, wie die linearen S-Parameter erweitert werden können, um nichtlineare Effekte zu berücksichtigen. Zum besseren Verständnis dieses Ansatzes wurden zunächst in Abschnitt 3.1 kurz die wesentlichen Schritte in der Bestimmung der zugrunde liegenden Volterra-Reihe und insbesondere die nichtlinearen Übertragungsfunktionen  $H_d(\omega_1, \dots, \omega_d)$  gezeigt. Dabei ist durch Abb. 3.3 veranschaulicht, dass die Volterra-Reihe der aus der linearen Systemtheorie bekannten linearen Übertragungsfunktion additiv weitere Reihenglieder hinzufügt, die das dynamische, nichtlineare Verhalten höherer Ordnung des nichtlinearen Systems berücksichtigen.

Anschließend wurden die wichtigsten Gleichungen aus [157] zusammengefasst und für den im Folgenden wichtigen Fall der *polyharmonischen* Anregung nachvollzogen. Dabei wurde verdeutlicht, dass die Volterra-reihenbasierten S-Parameter am sinnvollsten für die Lastsituation  $Z_s = Z_{0,s}$  und  $Z_L = Z_{0,L}$

eingesetzt werden, da in diesem Fall in (3.26b) nur ein nichtlinearer S-Parameter pro Ordnung  $d$  und Tor  $m$  benötigt wird. Diese Bedingung entspricht der Bestimmung der ursprünglichen Großsignal-S-Parameter  $S_{11}(A_1)$  und  $S_{21}(A_1)$  [26, 83]. Eine Bestimmung der weiteren S-Parameter  $S_{12}(A_1)$  und  $S_{22}(A_1)$  war in diesen Arbeiten als problematisch eingestuft worden. In der Betrachtung mit der Volterra-Reihe ist eine Anwendung des Superpositionsprinzips wie bei den linearen S-Parametern genauso fehlerhaft. Eine zusätzliche zweite Signalquelle am Tor 2 ist ebenfalls nicht möglich, da dann die Definition der Übertragungsfunktionen auf die Torspannungen - wie in (3.13) nötig - nicht mehr möglich ist. Nichtsdestotrotz kann der vorgestellte Ansatz von Weiner und Naditch [157] in Kapitel 5 genutzt werden, um ein besseres Verständnis der nachfolgend vorgestellten X-Parameter zu erhalten.



## 4. X-Parameter

In diesem Kapitel werden die auf Beschreibungsfunktionen basierten Modellansätze zur Erweiterung der S-Parameter für nichtlineare  $N$ -Tore am Beispiel der  $X$ -Parameter [62, 117] betrachtet. In der Arbeit von Qinglong und Shengli [106] wurde in einem Vergleich gezeigt, dass sich der alternative Ansatz der nichtlinearen Streufunktionen ( $S$ -functions) [84] in erster Linie durch eine unterschiedliche Notation von den  $X$ -Parametern unterscheidet. Beide Ansätze beruhen auf dem Ansatz PHD von Verspecht und Root [139]. In diesem wird davon ausgegangen, dass alle auftretenden Signale periodisch und *polyharmonisch* verzerrt sind, d. h. es treten nur Signalanteile bei ganzzahligen Vielfachen einer Grundfrequenz  $\omega_0$  auf (vgl. Anhang A). Die Signale können folglich durch eine (komplexe) Fourier-Reihe repräsentiert werden. Des Weiteren wird angenommen, dass nur Kleinsignale außer einem Großsignalanteil, meist dem Fundamentalanteil am Eingang des ersten Tors, vorliegen. Dieses Großsignal legt zusammen mit dem DCOP den sog. Großsignalarbeitspunkt - englisch: *large signal operating point* (LSOP) - fest. Die Einflüsse aller weiteren Signalanteile auf die Ausgangssignale werden spektral linearisiert dem LSOP überlagert. Bevor der PHD-Ansatz in Abschnitt 4.2 und damit die theoretische Herkunft der  $X$ -Parameter genauer betrachtet wird, wird in Abschnitt 4.1 mit der sog. Beschreibungsfunktion (BF) ein kurzer Einblick in die Grundlage des PHD-Ansatz gegeben. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit einem kurzen Überblick über zwei Methoden mit denen die  $X$ -Parameter aus Mess- bzw. Simulationsdaten eines nichtlinearen  $N$ -Tors bestimmt werden können.

### 4.1. Beschreibungsfunktionen sinusförmiger Anregung

Dieser Abschnitt befasst sich mit dem Konzept der BF, das wiederum als mathematische Grundlage für die  $X$ -Parameter dient. Erste umfassende Werke über die BF stammen von Graham und McRuer [44], Macmillan [73] und von Gelb und Velde [40], worin in letzterem Mehrfacheingangssignale untersucht wurden. Darin werden die BF als *Quasilinearisierung* betrachtet, einer weiteren Methode zur Untersuchung nichtlinearer Systeme neben anderen wie der Phasen-Raum-Lösung, der Reihenentwicklung oder der „wahren“ [40] Linearisierung. Die Quasilinearisierung stellt zwar eine Linearisierung des nichtlinearen Systems dar, jedoch hängt diese anders als die übliche Linearisierung neben dem Arbeitspunkt auch von gewissen Signaleigenschaften, wie z. B. der Amplitude eines Sinussignals, ab. Daher müsse die Quasilinearisierung für festgelegte Eingangssignale durchgeführt werden. Ein wesentliches Anwendungsgebiet der BF ist die nichtlineare Regelungstechnik, in der durch Rückführungen die Form der Eingangssignale nicht eindeutig bekannt ist. Für die praktische Anwendung der BF wird dieses Problem durch Annahme einer gewissen Form gelöst. Da dieser Ansatz nur für wenige Signalformen möglich ist, werden die BF im Wesentlichen für drei unterschiedliche Signalarten - konstante, sinusförmige und zufällige - verwendet. Von diesen wird in dieser Arbeit nur die sinusförmige Anregung betrachtet. Hierfür wird angenommen, dass die von der Nichtlinearität erzeugten höheren Harmonischen durch ein nachgeschaltetes Filter stark abgeschwächt werden können. So ist eine Reduzierung auf die Fundamentalfrequenz - und ggf. wenige Harmonische - als Eingangssignal an der Nichtlinearität möglich [40]. Dieses Konzept soll im Folgenden anhand einer Ein- und Zweitonanregung untersucht werden. Eine Erweiterung dieser BF erster Ordnung auf höhere Harmonische und eine Zusammenfassung in einer Matrixdarstellung der Beschreibungsfunktion wurde erstmals in [79] gezeigt, worauf am Ende dieses Abschnitts kurz eingegangen werden soll.

#### 4.1.1. Eintonanregung

In diesem Abschnitt werden sinusförmige Eintonsignale als Eingangssignale der Nichtlinearität in Abb. 4.1 betrachtet. Die zugehörige Beschreibungsfunktion ist von den oben erwähnten Signaltypen die am weitesten verbreitete Art [40]. Es wird im Folgenden beispielhaft gezeigt, wie die Quasilinearisierung der BF zu verstehen ist. Eine weiterführende Betrachtung findet sich u. a. in den eingangs erwähnten Literaturstellen [40, 44, 73].

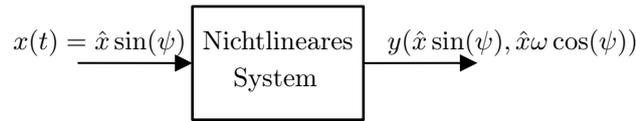


Abb. 4.1.: Ein harmonisch angeregtes nichtlineares System, das eine periodische Antwort in Abhängigkeit des Eingangssignals erzeugt [40].

Das in Abbildung 4.1 dargestellte nichtlineare System wird mit dem Sinussignal

$$x(t) = \hat{x} \sin \psi \quad \text{mit } \psi = \omega t \quad (4.1)$$

angeregt, wobei die Amplitude  $\hat{x}$  und die Frequenz  $\omega$  deterministisch sein sollen. Unter Annahme einer ebenfalls periodischen Antwort des Systems in Abbildung 4.1 auf die periodische Anregung in (4.1) kann das Ausgangssignal  $y$  unter Ausschluss von Subharmonischen als Fourier-Reihe

$$y(\hat{x} \sin \psi, \hat{x} \omega \cos \psi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\psi) + \beta_n \sin(n\psi)) \quad (4.2)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\hat{x}, \sin \psi, \hat{x} \omega \cos \psi) \cos(n\psi) d\psi \quad (4.3a)$$

und

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\hat{x} \sin \psi, \hat{x} \omega \cos \psi) \sin(n\psi) d\psi \quad (4.3b)$$

dargestellt werden [44]. Das quasilineare Konzept der Beschreibungsfunktion betrachtet nur die Fourier-Koeffizient der Fundamentalfrequenz  $n = 1$ . Die BF ist darin der Quotient der komplexen Zeiger des Ausgangs- und Eingangssignals. Für den reinen Sinus (4.1) ohne Phasenverschiebung als Eingangssignal lässt sich die BF  $N(\hat{x}, \omega)$  durch

$$N(\hat{x}, \omega) = \frac{\beta_1 + j\alpha_1}{\hat{x}} = |N(\hat{x}, \omega)| e^{j\phi_1(\hat{x}, \omega)} \quad (4.4)$$

berechnen [73] und als amplituden- und frequenzabhängiger komplexer Verstärkungsfaktor mit dem Betrag  $|N|$  und der Phasenverschiebung  $\phi_1$  interpretieren. Auf diese Weise wird versucht das Konzept der Übertragungsfunktion linearer Systeme auf nichtlineare Systeme zu erweitern. Mit der BF ist es folglich möglich, das Ausgangssignal des nichtlinearen Systems näherungsweise in Abhängigkeit der Eingangsamplitude zu berechnen. Allerdings werden entstehende Harmonische nicht berücksichtigt, wie in (4.4) zu erkennen ist. Eine grafische Darstellung des BF-Konzepts ist in Abb.4.2 gegeben [40]. Die gesamten vernachlässigten harmonischen Signalanteile werden darin als Residuum bezeichnet

$$y_r(\hat{x}, \omega) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t). \quad (4.5)$$

### Beispiel: statische, kubische Nichtlinearität

An einem Beispiel soll das Konzept der Beschreibungsfunktionen verdeutlicht werden. Hierzu wird das statische, nichtlineare Übertragungsverhalten

$$y(x) = c_1 x + c_3 x^3 \quad (4.6)$$

mit der Anregung

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t) \quad (4.7)$$

betrachtet. Einsetzen von (4.7) in (4.6) ergibt durch Anwendung der Additionstheoreme

$$y(\hat{x} \sin(\omega t)) = c_1 \hat{x} \sin(\omega t) + \frac{3}{4} c_3 \hat{x}^3 \sin(\omega t) - \frac{1}{4} c_3 \hat{x}^3 \sin(3\omega t) \quad (4.8)$$

für das Ausgangssignal [73]. Für die Fourier-Koeffizienten folgt nach (4.3)

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad \beta_1 = \left( c_1 \hat{x} + \frac{3}{4} c_3 \hat{x}^3 \right), \quad (4.9)$$

womit sich für die BF nach (4.4)

$$N(\hat{x}, \omega) = \frac{\beta_1}{\hat{x}} = c_1 + \frac{3}{4} c_3 \hat{x}^2 \quad (4.10)$$

ergibt. Unter Anwendung der BF in (4.10) folgt für das statische, nichtlineare System aus (4.6) das Model in Abb. 4.2.

Das tatsächliche Ausgangssignal  $y(\hat{x} \sin(\omega t))$  setzt sich aus der Fundamentalen  $y_1(\hat{x}, \omega)$  und dem Residuum aus (4.5)  $y_r(\hat{x}, \omega)$  zusammen. Für dieses Beispiel folgt für die Fundamentale des Ausgangssignals

$$y_1(\hat{x}, \omega) = N(\hat{x}, \omega) \hat{x} \sin(\omega t) \quad (4.11)$$

mit der Beschreibungsfunktion  $N(\hat{x}, \omega)$  aus (4.10). Um das Ausgangssignal  $y(\hat{x} \sin \psi, \hat{x} \omega \sin \psi)$  des tatsächlichen nichtlinearen Systems in Abbildung 4.1 zu beschreiben, müssten die vernachlässigten Harmonischen - in diesem Fall nur die 3. Harmonische -

$$y_r(\hat{x}, \omega) = \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \sin(n\omega t) = -\frac{1}{4} c_3 \hat{x}^3 \sin(3\omega t) \quad (4.12)$$

zur Fundamentalen  $y_1(\hat{x}, \omega)$  addiert werden (vgl. Abb. 4.2). Dies ist jedoch für kompliziertere nichtlineare Systeme nicht möglich. Die Einton-BF sind hingegen auch für stark nichtlineare Systeme - wie z. B. einer Hysterese - analytisch berechnen. Eine Auflistung verschiedener Nichtlinearitäten findet sich in [40, Anhang B]. Neben der guten Berechenbarkeit der BF auch für starke Nichtlinearitäten wird in [40] als weiterer Hauptvorteil die Einsatzmöglichkeit als Entwurfswerkzeug genannt. Eine approximative Möglichkeit Systemeigenschaften analytisch gegen Systemparameter darzustellen sei wertvoller als eine exakte analytische Methode, die nur eine gewisse Information unter gewissen Umständen enthalte. Daher ist es wenig verwunderlich, dass diese Methode auch heute noch als Stabilitätskriterium [5, 127], zur Analyse von Grenzzyklen [89] sowie zum Oszillatorentwurf [99, 152] angewendet wird.

### 4.1.2. Zweitonanregung

Eine wesentliche Einschränkung des Konzepts der Beschreibungsfunktionen ist, dass das Eingangssignal der Nichtlinearität vorab angenommen werden muss. Für den Fall, dass kein reiner Sinus mehr angenommen werden kann, ist die Einton-BF nicht mehr anwendbar. Als einfachste Erweiterung der Eintonannahme kann eine additive Überlagerung zweier Sinusfunktionen der Form

$$x(t) = \hat{x}_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + \hat{x}_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \quad (4.13)$$

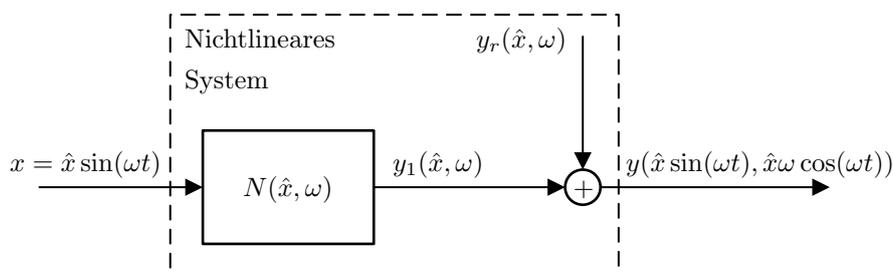


Abb. 4.2.: Modellierung eines nichtlinearen Systems mit dem Konzept der Beschreibungsfunktion [40]

am Eingang erwartet werden. Für dieses Eingangssignal führen Gelb und Velde [40] als konsequente Erweiterung die Zweitton-BF ein. Die zweite auftretende Frequenz  $\omega_2$  neben der anregenden Frequenz  $\omega_1$  kann eine nicht gefilterte höhere Harmonische  $\omega_2 = \gamma\omega_1$  mit  $\gamma \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  oder eine unabhängige Frequenz  $\omega_2 = \gamma\omega_1$  mit  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  sein, die z. B. durch Auftreten eines Grenzzyklus entsteht. Für den allgemeineren letzteren Fall kann das entstehende Ausgangssignal durch die zweidimensionale Fourier-Reihe [86]

$$y(t) = y(\hat{x}_1 \sin \psi_1 + \hat{x}_2 \sin \psi_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{[k,l]} \cos(k\psi_1 + l\psi_2) + \beta_{[k,l]} \sin(k\psi_1 + l\psi_2) \quad (4.14a)$$

mit

$$\psi_1 = \omega t \quad \text{und} \quad \psi_2 = \gamma\omega t + \theta \quad (4.14b)$$

beschrieben werden. Darin sind

$$\alpha_{[k,l]} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos(k\psi_1 + l\psi_2) d\psi_1 d\psi_2, \quad (4.14c)$$

$$\beta_{[k,l]} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin(k\psi_1 + l\psi_2) d\psi_1 d\psi_2 \quad (4.14d)$$

die reellen Fourier-Koeffizienten der Reihe. Sobald diese für die beiden Fundamentalfrequenzen  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$  bekannt sind, können als Quasilinearisierung des nichtlinearen Systems unter Zweittonanregung die beiden Beschreibungsfunktionen

$$N_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \omega, \gamma, \theta) = \frac{\beta_{[1,0]} + j\alpha_{[1,0]}}{\hat{x}_1}, \quad (4.15a)$$

$$N_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \omega, \gamma, \theta) = \frac{\beta_{[0,1]} + j\alpha_{[0,1]}}{\hat{x}_2} \quad (4.15b)$$

berechnet werden. Im Fall einer höheren Harmonischen  $\omega_2 = \gamma\omega_1$  mit  $\gamma \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  vereinfacht sich (4.14) zu (4.2). Im Fall einer Subharmonischen  $\omega_2 = \gamma\omega_1$  mit  $\gamma \in \mathbb{Q}^+$  ergeben sich die gleichen Beschreibungsfunktionen wie für den harmonischen Fall des Kehrwerts  $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\gamma}$  mit  $\frac{1}{\gamma} \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , wobei dabei die Rollen der höheren und niedrigeren Frequenzen vertauscht werden müssen. In diesem Fall kann eine Untersuchung mit Hilfe der Beschreibungsfunktion  $N_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \omega, \gamma, \theta)$  durchgeführt werden, unter welchen Bedingungen Subharmonische auftreten [40, Beispiel 5.1-1].

### 4.1.3. Berücksichtigung höherer Harmonischer

Die Einton-BF ersetzt das ursprüngliche nichtlineare System in Abb. 4.1 durch ein quasilineares System, das den ersten Fourier-Koeffizienten in Abhängigkeit der Amplitude  $\hat{x}$  und der Frequenz  $\omega$  abbildet. Damit dieser Ansatz Gültigkeit hat, muss das Eingangssignal als rein sinusförmig angenommen werden (vgl. Abschnitt 4.1.1). Als Erweiterung dieses Ansatzes ersetzen die Zweitton-BF aus dem letzten Abschnitt das nichtlineare System durch ein quasilineares Pendant, das die beiden Fourier-Koeffizienten der Fundamentaltöne in Abhängigkeit der Eingangsamplituden  $\hat{x}_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , der ersten Fundamentalfrequenz  $\omega$ , dem Verhältnis der beiden Fundamentaltöne  $\gamma$  und der Phasenverschiebung  $\theta$  beschreibt. Sowohl die Einton- als auch die Zweitton-BF vernachlässigen daher höhere Harmonische der Grundfrequenz(en) und die Zweitton-BF im Fall nichtproportionaler Erregerfrequenzen, d. h.  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  in (4.14b), die zusätzlich auftretenden Intermodulationsprodukte.

Einen anderen Ansatz verfolgen Nuij, Bosgra und Steinbuch [87] in ihrem Konzept des *harmonics generator*, um Beschreibungsfunktionen für höhere Harmonische messtechnisch zu bestimmen. In dem Ansatz werden ebenfalls nur reine Sinussignale  $x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \phi_0)$  zugelassen und um *virtuelle Harmonische* mit der gleichen Amplitude  $\hat{x}$  und proportionaler Nullphase  $k\phi_0$  erweitert. Dabei wird die Beschreibungsfunktion zum  $k$ -ten Fourier-Koeffizienten des Ausgangssignals berechnet über

$$N_k(\hat{x}, \omega) = \frac{1}{\hat{x}} (\beta_k + j\alpha_k). \quad (4.16)$$

Diese Funktion beschreibt daher die  $k$ -te harmonische Verzerrung im Ausgangsspektrum des zeitinvarianten, nichtlinearen Systems in Abhängigkeit der Amplitude  $\hat{x}$  und Frequenz  $\omega$  des anregenden Sinussignals. Obwohl sich mit diesem Ansatz höhere Harmonische des Ausgangssignals  $y(t)$  beschreiben lassen, bleibt der Eingang wie bei der Einton-BF auf reine Sinussignale beschränkt. Für eine Rückkopplung des Ausgangssignals auf den Eingang muss daher ebenso wie für (4.4) eine Filterung der höheren Harmonischen stattfinden.

Eine Berücksichtigung der höheren Harmonischen sowohl im Eingangs- als auch im Ausgangssignal findet sich im Ansatz der *Beschreibungsfunktionsmatrix* von Mees [79]. In diesem Ansatz wird die Idee der Einton-BF auf eine bestimmte endlich Anzahl an Harmonischen verallgemeinert. Betrachtet wird das allgemeine nichtlineare System aus Abb. 4.1 mit dem erweiterten periodischen Eingangssignal

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l e^{jl\omega t} \quad (4.17a)$$

und dem - unter Vernachlässigung von Subharmonischen - ebenfalls als periodisch angenommenen Ausgangssignal

$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{jk\omega t}. \quad (4.17b)$$

Darin sind  $X_l = X_{-l}^*$  die komplexen Fourier-Koeffizienten des reellen Eingangssignals bei der  $l$ -ten Harmonischen und  $Y_k = Y_{-k}^*$  die des reellen Ausgangssignals bei der  $k$ -ten Harmonischen. Diese lassen sich jeweils in vektorieller Schreibweise für ein einseitiges Spektrum zusammenfassen zu

$$\mathbf{x} = (X_0, X_1, X_2, \dots)^\top \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = (Y_0, Y_1, Y_2, \dots)^\top \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^\infty. \quad (4.18)$$

Die unendliche Matrix  $\mathbf{N}$  verknüpft diese beiden unendlichen Vektoren in der Form

$$\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (4.19)$$

und wird daher als BF-Matrix bezeichnet. Die Elemente der Matrix werden über die sukzessive Vorschrift

$$N_{kl} = \frac{Y_k(\mathbf{x}_l) - Y_k(\mathbf{x}_{l-1})}{X_l} \quad (4.20)$$

berechnet. Darin ist  $Y_k(\mathbf{x}_l)$  der Fourier-Koeffizient der  $k$ -ten Harmonischen im Ausgangssignal  $y(t)$ , das durch ein auf  $l$  Harmonische beschränktes Eingangssignal mit  $\mathbf{x}_l = (X_0, X_1, \dots, X_l)^\top \in \mathbb{C}^{l+1}$  hervorgerufen wird. Wenn eine Harmonische im Spektrum nicht vorhanden ist, wird

$$N_{kl} = 0 \quad \text{für} \quad X_l = 0 \quad (4.21)$$

festgelegt, da ebenfalls  $Y_k(\mathbf{x}_l) - Y_k(\mathbf{x}_{l-1}) = 0$  gilt. Für eine praktische Anwendung muss die maximale Länge der Fourier-Reihe  $L$  festgelegt werden, damit die Approximation von (4.19) der Länge  $L$

$$\mathbf{N}_L \mathbf{x}_L = \mathbf{y}_L(\mathbf{x}_L) \quad (4.22)$$

bestimmt werden kann. Darin ist  $\mathbf{N}_L = \{N_{kl} | k, l \leq L\}$  nur eine Funktion der Fourier-Koeffizienten der ersten  $L$  Harmonischen  $\mathbf{x}_L = (X_0, X_1, \dots, X_L)$ . Wäre  $N_{kl} \neq 0$  für  $X_l = 0$  (vgl. (4.21)), so wäre (4.22) nicht wahr für alle  $L$  [79]. Sobald die Anzahl der berücksichtigten Harmonischen um  $J$  verlängert werden soll, bleibt die für  $L$  bestimmte Matrix  $\mathbf{N}_L$  als linke obere Untermatrix der neuen BF-Matrix

$$\mathbf{N}_{L+J} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_L & \mathbf{W}_{LJ} \\ \mathbf{V}_{JL} & \mathbf{U}_J \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

erhalten. Mit Hilfe einer derartigen Approximation ist es ab einer gewissen Länge  $L$  möglich, vorherzusagen, ob ein System schwingungsfähig ist [79].

Unabhängig von Mees [79] BF-Matrixansatz verallgemeinerten Peyton Jones und Billings [101] den Zweitton-BF-Ansatz aus Abschnitt 4.1.2 für eine allgemeine Mehrtonanregung  $x(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-L}^L X_l e^{jl\omega t}$  mit  $X_l = X_{-l}^*$  und insbesondere den - auch in dieser Arbeit - wichtigen Fall der *polyharmonischen*

Anregung  $\omega_l = l \cdot \omega_0 \forall l \in \mathbb{N}$

$$x(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-L}^L X_l e^{j\omega_0 t} \quad \text{mit } X_l = X_{-l}^*. \quad (4.24)$$

Anders als bisher werden die Beschreibungsfunktionen in [101] nicht aus den Fourier-Koeffizienten berechnet, sondern über eine endliche Volterra-Reihe (vgl. Abschnitt 3.1) angenähert. Auf diese Weise wird der Vorteil der Volterra-Reihe genutzt, relativ einfach mehr als ein oder zwei spektrale Komponenten zu berücksichtigen. Allerdings erbt die über die Volterra-Reihe gefundene BF auch deren Beschränkung auf schwach nichtlineare Systeme. Dies erkannte auch Verspecht im Anhang [142] seiner Dissertation [141]. Darin und weiterführend in [149] wird ebenfalls unabhängig von Mees [79] BF-Matrix eine allgemeine Interpretation der BF für höhere Harmonische eingeführt. Bei einer polyharmonischen  $L$ -Tonanregung (4.24) soll der  $k$ -te Fourier-Koeffizient des Ausgangssignals  $Y_k$  als allgemeine komplexe Funktion  $F_k$  aller komplexen Fourier-Koeffizienten des Eingangssignals  $\mathbf{x}_L$  aufgefasst werden, d. h. es gilt unter der Annahme eines reinen Wechselsignals mit  $X_0 = 0$

$$Y_k = F_k(X_1, \dots, X_L). \quad (4.25a)$$

Dabei wird chaotisches Verhalten genauso wie das Auftreten von Subharmonischen vernachlässigt. Durch die Annahme eines zeitinvarianten Systems kann ein Fourier-Koeffizient als Phasenreferenz herangezogen werden. Dadurch kann mit  $X_l = |X_l|P_l$  und  $P_l = e^{j\phi_l}$

$$Y_k = P_1^k \cdot F_k(|X_1|, \dots, |X_L|, P_2, \dots, P_L). \quad (4.25b)$$

erhalten und somit die Abhängigkeit von  $F_k$  um eine Variable reduziert werden. Im Vergleich zur (un-)endlichen BF-Matrix in (4.19) bzw. (4.22) ergibt sich  $F_k$  als Multiplikation der  $k$ -ten Zeile mit dem Eingangsvektor  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{x}_L$

$$F_k \approx N_{k1}X_1 + N_{k2}X_2 + \dots + N_{kL}X_L. \quad (4.26)$$

Da die allgemeinen Beschreibungsfunktionen  $F_k$  nicht ohne weiteres bestimmbar sind, werden in [142, 149] verschiedene Modellansätze zur Approximation von  $F_k$  gewählt. Dabei handelt es sich um ein allgemeines Polynom - nur in [142] -, ein VIOMAP-Polynom (vgl. [135, 136]) und eine rationale Funktion, die für jeweils unterschiedliche Komplexitäten verglichen wurden. Wie der Titel „*Black box modeling of hard nonlinear behavior in the frequency domain*“ von [149] zeigt, soll dieser Ansatz als *Black-box*-Verhaltensmodell eingesetzt werden, das in [149] im Sinne der Zweitorbetrachtung auf ein nichtlineares Zweitor (vgl. Abb. 3.4) erweitert wird. Aus denselben Gründen wie im linearen Fall der S-Parameter - u. a. gute Messbarkeit bei hohen Frequenzen - werden dabei die *Streuvariablen* eingesetzt. Diese werden im nichtlinearen  $N$ -Tor (vgl. Abschnitt A.1) durch die BF

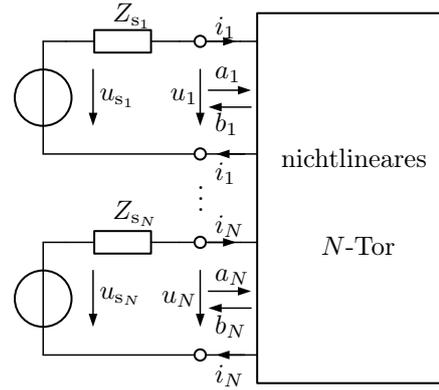
$$B_{mk} = F_{mk}(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{21}, A_{22}, \dots) \quad (4.27)$$

verknüpft. Mit Hilfe einer spektralen Linearisierung von  $F_{mk}$  werden „vernünftige“ Großsignal-S-Parameter“ definiert [140]. Aufbauend auf den Arbeiten [137, 143, 145] wird diese über die Jahre gereifte Konzept unter dem Namen polyharmonische Verzerrung - englisch: *polyharmonic distortion* (PHD) - von Verspecht und Root [139] zusammengefasst. Aus diesem Ansatz, der im folgenden Abschnitt weiterführend betrachtet wird, wurde Jahre später der Begriff *X-Parameter* geboren [116].

## 4.2. PHD-Ansatz

In diesem Abschnitt wird mit dem Ansatz polyharmonische Verzerrung - englisch: *polyharmonic distortion* (PHD) - [139] das wesentliche Konzept hinter den X-Parametern vorgestellt. Der PHD-Ansatz wiederum nimmt die Beschreibungsfunktionen höherer Ordnung aus (4.27) als mathematische Grundlage. Wie die Streuvariablen am Tor  $m$  für ein nichtlineares  $N$ -Tor in Abb. 4.3 aus den Torströmen  $i_m(t)$  und -spannungen  $u_m(t)$  bei polyharmonischer Anregung ohne Gleichanteil ( $U_{s_{n0}} = 0$ ) am Tor  $n$

$$u_{s_n}(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-L_n}^{L_n} U_{s_{nl}} e^{j\omega_0 t} \quad \text{mit } n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \text{und} \quad U_{s_{nl}} = U_{s_{n(-l)}}^*$$

Abb. 4.3.: Nichtlineares  $N$ -Tor in Betriebsschaltung

(vgl. (4.24) bzw. (A.2)) errechnet werden, zeigt Anhang A.1. Der PHD-Ansatz nutzt die in (4.25) ange-deutete Phasennormierung zur Reduzierung der unabhängigen Variablen in  $F_{mk}$ . Unter Annahme eines vorherrschenden Großsignals kann die ordnungsreduzierte Beschreibungsfunktion  $F_{mk}$  im sog. Großsignal-arbeitspunkt - englisch: *large signal operating point* (LSOP) - spektral linearisiert werden.

#### 4.2.1. Phasennormierung der mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion

Der Ausgangspunkt der Betrachtungen im nachfolgenden Abschnitt sind die allgemeinen spektralen Abbil-dungsfunktionen  $F_{mk}$  aus (4.27). Diese sind wie die S-Parameter des linearisierten nichtlinearen Systems abhängig vom DCOP [116] und der Fundamentalfrequenz  $\omega_0$  [114]. Die Funktionen  $F_{mk}$  beschreiben für jeden DCOP den Zusammenhang

$$B_{mk} = F_{mk}(\text{DCOP}, \omega_0, A_{11}, A_{12}, \dots, A_{21}, A_{22}, \dots, A_{nl}, \dots), \quad m, n \in \{1, \dots, N\} \quad (4.28)$$

zwischen dem komplexen Fourier-Koeffizienten  $B_{mk}$  der harmonischen Frequenz  $k \cdot \omega_0$  der *rücklaufenden* Streuvariablen am Tor  $m$  aus (A.7b) und aller auftretenden komplexen Fourier-Koeffizienten  $A_{nl} \neq 0$ . Im Allgemeinen gelten unter Beachtung von (A.4) bei reellen Signalen für die Frequenzindizes  $|k|, |l| \in [1, \infty)$ . Im Fall von angepassten Quellenimpedanzen gilt aufgrund von (A.8) am Tor  $n$  für den Frequenzindex  $l \in [1, L_n]$ . Im Fall von zeitinvarianten Systemen können die nichtlinearen Beschreibungsfunktionen  $F_{mk}$  aus (4.28) sinnvoll normiert werden, was allgemein in (4.25) angedeutet wurde und nachfolgend für die spezielle Form (4.28) gezeigt wird.

Die Abhängigkeit der Funktionen  $F_{mk}$  vom DCOP und der Fundamentalfrequenz  $\omega_0$ , die das *Frequenz-gitter* (vgl. (A.7)) festlegt, wird dabei zugunsten der Lesbarkeit nicht wiederholt. Allgemein bedeutet die Eigenschaft Zeitinvarianz, dass ein um  $T$  zeitverzögertes Eingangssignal  $x(t - T)$  zu einem ebenso zeitverzögertem Ausgangssignal  $y(t - T)$  führt. Für die durch  $F_{mk}$  verknüpften Fourier-Koeffizienten aus (A.7) bedeutet die Zeitverzögerung um  $T$  im Frequenzbereich eine Phasendrehung von  $e^{-jl\omega_0 T}$  (vgl. z.B. [125]) gemäß

$$A_{nl} e^{-jl\omega_0 T} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} a_n(t) e^{jl\omega_0(t-T)} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} a_n(t - T) e^{jl\omega_0 t} dt, \quad (4.29a)$$

$$B_{mk} e^{-jk\omega_0 T} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} b_m(t) e^{jk\omega_0(t-T)} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} b_m(t - T) e^{jk\omega_0 t} dt. \quad (4.29b)$$

Durch die Zeitverzögerung  $T$  gilt daher für die Abbildung aus (4.28)

$$B_{mk} e^{-jk\omega_0 T} = F_{mk}(A_{11} e^{-j\omega_0 T}, \dots, A_{nl} e^{-jl\omega_0 T}, \dots, A_{11}^* e^{+j\omega_0 T} \dots), \quad (4.30)$$

worin die Zeitverzögerung  $T$  beliebig sein kann. Sofern der Zusammenhang

$$\phi_{A_{11}} = \arg\{A_{11}\} = \omega_0 T \quad (4.31a)$$

gilt, ergibt sich mit

$$A_{11} e^{-j\phi_{A_{11}}} = |A_{11}| \quad (4.31b)$$

und mit

$$P = e^{j\phi_{A_{11}}} \quad (4.31c)$$

aus (4.30) die Abhängigkeit

$$B_{mk} = P^k \cdot F_{mk} (|A_{11}|, A_{12}P^{-2}, \dots, A_{nl}P^{-l}, \dots). \quad (4.32)$$

Auf diese Weise sind die Beschreibungsfunktionen  $F_{mk}$  von einem Parameter weniger abhängig, allerdings ist dies, wie eingangs erwähnt, nur für zeitinvariante Systeme der Fall.

#### 4.2.2. Linearisierung der mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie die spektrale BF aus (4.32) linearisiert werden kann. Damit eine komplexe Funktion differenzierbar ist, muss sie *analytisch* in ihren Variablen sein [36, 53]. Die BF  $F_{mk}$  aus (4.32) ist dies i. A. jedoch nicht [139]. Daher müssen Real- und Imaginärteil von  $A_{nl}$  als unabhängige Variablen betrachtet werden. Durch die Phasennormierung in (4.32) ist  $F_{mk}$  bereits nur abhängig von  $|A_{11}| \in \mathbb{R}^+$ . Alle anderen  $A_{nl}$  werden aufgeteilt, sodass sich [143]

$$B_{mk} = P^k \cdot F_{mk} (|A_{11}|, \operatorname{Re}(A_{12}P^{-2}), \operatorname{Im}(A_{12}P^{-2}), \dots, \operatorname{Re}(A_{nl}P^{-l}), \operatorname{Im}(A_{nl}P^{-l}), \dots) \quad (4.33a)$$

bzw. mit der Äquivalenz

$$\operatorname{Re}(A_{nl}P^{-l}) = \frac{A_{nl}P^{-l} + A_{nl}^*P^l}{2} \quad (4.33b)$$

$$\operatorname{Im}(A_{nl}P^{-l}) = \frac{A_{nl}P^{-l} - A_{nl}^*P^l}{2j} \quad (4.33c)$$

die Form [139]

$$B_{mk} = P^k \cdot F_{mk} (|A_{11}|, A_{12}P^{-2}, A_{12}^*P^2, \dots, A_{nl}P^{-l}, A_{nl}^*P^l, \dots) \quad (4.33d)$$

ergibt. Durch diese Aufteilung sind  $F_{mk}$  analytische Funktionen in all ihren Argumenten [117].

Im PHD-Modellansatz von Verspecht und Root [139] wird weiterhin angenommen, dass nur ein Großsignal auftritt und alle anderen Eingangssignale am nichtlinearen  $N$ -Tor aus Abb. 4.3 klein gegenüber diesem Großsignal sind. Als das Großsignal wird meist die Fundamentale am ersten Tor definiert, d. h. es gilt für die Fourier-Koeffizienten aus (A.7a)

$$|A_{11}| \gg |A_{nl}| \quad \forall (n, l) \neq (1, 1). \quad (4.34)$$

Der Systemzustand, den das Großsignal in Verbindung mit dem DCOP hervorruft, wird als Großsignalarbeitspunkt - englisch: *large signal operating point* (LSOP) - bezeichnet. Darin sind die nichtlinearen Effekte harmonische Verzerrung und Kompression sowie die Verschiebung des DCOP, auch *DC-shift* genannt [107], infolge der Großsignalanregung berücksichtigt. Jeder Spektralanteil im LSOP wird folglich über die Beschreibungsfunktion (4.32) ohne Kleinsignale  $A_{nl} = 0 \quad \forall (n, l) \neq (1, 1)$

$$B_{mk_{\text{LSOP}}} = P^k \cdot F_{mk} (|A_{11}|, 0, \dots, 0). \quad (4.35)$$

beschrieben. Durch das Hinzufügen der weiteren Signale  $A_{nl} \quad \forall (n, l) \neq (1, 1)$  unter der Annahme in (4.34) können die Einflüsse dieser *Kleinsignale* unabhängig voneinander dem LSOP spektral überlagert werden. Mathematisch gesehen, werden die spektralen BF (4.32) im LSOP mit einer mehrdimensionalen Taylor-Reihe, die nach der ersten Ordnung abgebrochen wird, entwickelt. Da hierfür die komplexen Funktionen  $F_{mk}$  partiell abgeleitet werden, müssen sie analytisch [36, 53] in Bezug auf alle Kleinsignale  $A_{nl}$  sein, was durch die separate Betrachtung der komplex Konjugierten  $A_{nl}^*$  in (4.33) gewährleistet

wurde. Die Phasennormierung in (4.32) erfordert, dass der Phasor  $P^{-l}$  mit berücksichtigt wird. Dadurch ergibt sich mit (4.35) und

$$F_{mk_{\text{LSOP}}} := F_{mk}(|A_{11}|, \dots, A_{nl}P^{-l}, \dots, A_{nl}^*P^{+l}, \dots) \Big|_{(|A_{11}|, 0, \dots, 0)} \quad (4.36)$$

die lineare Approximation von (4.32) zu [117, 150]

$$B_{mk} \approx B_{mk_{\text{LSOP}}} + \underbrace{\sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L_n}}_{(n,l) \neq (1,1)} \left( \frac{\partial F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial A_{nl}P^{-l}} A_{nl}P^{k-l} + \frac{\partial F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial A_{nl}^*P^{+l}} A_{nl}^*P^{k+l} \right). \quad (4.37)$$

Die partiellen Ableitungen werden durch die X-Parameter

$$X_{mk,nl}^{(S)}(|A_{11}|) = \frac{\partial F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial A_{nl}P^{-l}}, \quad (4.38a)$$

$$X_{mk,nl}^{(T)}(|A_{11}|) = \frac{\partial F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial A_{nl}^*P^{+l}} \quad (4.38b)$$

und der Großsignaleinfluss durch den X-Parameter

$$X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|) = F_{mk}(|A_{11}|, 0, \dots, 0) \quad (4.38c)$$

ersetzt, sodass sich aus (4.37) die neue Schreibweise

$$B_{mk} \approx X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|)P^k + \underbrace{\sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L_n}}_{(n,l) \neq (1,1)} \left( X_{mk,nl}^{(S)}(|A_{11}|)A_{nl}P^{k-l} + X_{mk,nl}^{(T)}(|A_{11}|)A_{nl}^*P^{k+l} \right) \quad (4.39)$$

ergibt. Die eingeführten X-Parameter der Fundamentalfrequenzen ( $k, l = 1$ ) gehen für eine Kleinsignalbetrachtung in die linearen S-Parameter aus (2.15) über bzw. verschwinden [116, 117]

$$\lim_{|A_{11}| \rightarrow 0} \frac{X_{m1}^{(F)}(|A_{11}|)}{|A_{11}|} = S_{m1}, \quad (4.40a)$$

$$\lim_{|A_{11}| \rightarrow 0} X_{m1,n1}^{(S)}(|A_{11}|) = S_{mn} \quad \forall n > 1, \quad (4.40b)$$

$$\lim_{|A_{11}| \rightarrow 0} X_{m1,n1}^{(T)}(|A_{11}|) = 0. \quad (4.40c)$$

Die einzelnen spektralen Einflüsse im PHD-Ansatz sind für das Beispiel  $B_{mk} = P^k \cdot F_{mk}(|A_{11}|, A_{12}, A_{13})$

$$B_{mk} \approx \underbrace{X_{mk}^{(F)}P^k}_{B_{mk_{\text{LSOP}}}} + \underbrace{X_{mk,12}^{(S)}A_{12}P^{k-2} + X_{mk,12}^{(T)}A_{12}^*P^{k+2}}_{B_{mk_{12}}} + \underbrace{X_{mk,13}^{(S)}A_{13}P^{k-3} + X_{mk,13}^{(T)}A_{13}^*P^{k+3}}_{B_{mk_{13}}} \quad (4.41)$$

in Abbildung 4.4 dargestellt. Darin sind die einzelnen Eingangssignalanteile am Tor 1 in der üblichen spektralen Aufteilung nach Betrag und Phase gezeigt. Ein resultierendes  $B_{mk}$  ist als prinzipielle Zeigeraddition der einzelnen Anteile von (4.41) in der komplexen Ebene veranschaulicht. Der LSOP-Anteil  $B_{mk_{\text{LSOP}}}$  ist dabei in grün und die Einflüsse der Kleinsignale  $A_{12}$  bzw.  $A_{13}$  sind in blau ( $B_{mk_{12}}$ ) bzw. rot ( $B_{mk_{13}}$ ) dargestellt. Die Anteile der Kleinsignale  $B_{mk_{nl}}$  sind dabei jeweils in den Einfluss von  $A_{nl}$  und  $A_{nl}^*$  unterteilt.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass theoretisch eine Beschreibung der DC-Komponenten  $B_{m0}$  über die X-Parameter  $X_{m0}^{(F)}$ ,  $X_{m0,nl}^{(S)}$  und  $X_{m0,nl}^{(T)}$  möglich ist, um so den *DC-shift* [107] zu berücksichtigen. Aufgrund der Linearität der Heaviside-Transformation (A.1) bzw. (A.7) können daraus die Gleichströme und -spannungen am Tor  $m$  berechnet werden. Bei niedrigen Frequenzen lassen sich diese allerdings auch ohne den Einsatz der Streuvariablen messen. Daher werden in [117, Abschnitt 3.2.2] X-Parameter zur

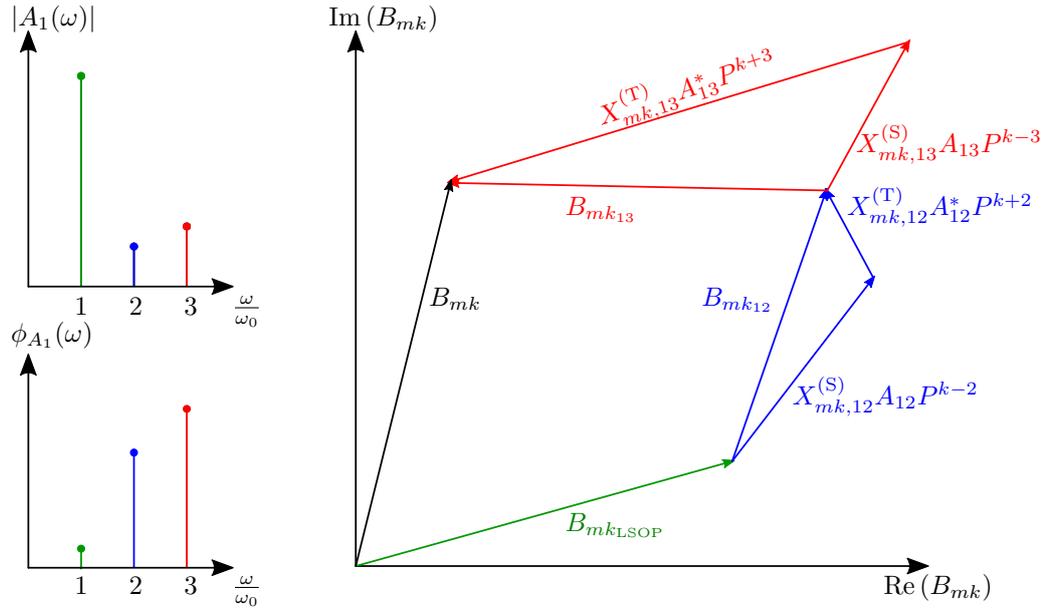


Abb. 4.4.: Harmonische Überlagerung im PHD-Ansatz [139]

Beschreibung der Torströme  $X_m^{(FI)}$ ,  $X_{mk,nl}^{(Y)}$  und -spannungen  $X_m^{(FU)}$ ,  $X_{mk,nl}^{(Z)}$  eingeführt. Diese sind nur nötig, wenn die Tore eine Gleichstrom- und/oder -spannungsversorgung erhalten. In dieser Arbeit wird zugunsten der Einfachheit auf diese DC-Betrachtung verzichtet, da sowohl DC-freie Quellenspannungen (A.2), (A.4) als auch gleichstromentkoppelte Toreingänge angenommen werden.

Die einzelnen X-Parameter aus (4.38) sind neben dem explizit gezeigten  $|A_{11}|$  noch vom DCOP und der Fundamentalen  $\omega_0$  abhängig (vgl. (4.28)). Daher müssen sie nur in Abhängigkeit dieser Parameter bestimmt werden. Nach welchen Prinzipien dies in der Praxis erfolgen kann, zeigt der nächste Abschnitt.

### 4.3. Bestimmung der X-Parameter

In Abschnitt 1.1 der Einleitung dieser Arbeit wurde bereits darauf eingegangen, dass frühe Ansätze einer Erweiterung der S-Parameter für nichtlineare Zwei- oder  $N$ -Tore - insbesondere bei der Berücksichtigung von HD und IM - Probleme mit der messtechnischen Umsetzung hatten. In der linearen Messtechnik werden die S-Parameter nur über ein Verhältnis der Streuvariablen bestimmt. Erst die Erweiterung der verfügbaren VNA zu VNNA bzw. LSNA und NVNA sowie deren kommerzielle Verfügbarkeit inkl. der nötigen Kalibrierungstechnik ermöglichte eine messtechnische Erfassung der absoluten Streuvariablen im nichtlinearen  $N$ -Tor [112, 117, 133, 141].

In diesem Abschnitt werden zwei unterschiedliche Methoden erläutert, mit denen die X-Parameter in (4.38) aus Messdaten berechnet werden können. Die erste ist die sog. *Frequenz-Offset*- [114, 117] und die zweite die *Phasen-Offset*-Methode [45, 117]. Die Frequenz- und Phasen-Offset-Methode besitzen jeweils Vor- und Nachteile in realen Messumgebungen. Da sie beide gleich viele Messungen erfordern, finden beide Anwendung [117]. Dem Verfasser dieser Arbeit stand weder ein geeignetes Messgerät - LSNA oder NVNA - noch der Simulator Advanced Design System (ADS) [61] von Keysight, in dem die X-Parameter implementiert sind, zur Verfügung. Stattdessen wurden in dieser Arbeit die theoretischen Prinzipien beider Methoden in Verbindung mit Frequenzbereichssimulationen auf Basis der HB aus Cadence Virtuoso Design Framework verwendet.

#### 4.3.1. Frequenz-Offset-Methode

Bei der Frequenz-Offset-Methode [114, 117] wird dem Großsignal  $A_{11}$  bei  $\omega_0$  ein Kleinsignal  $A_{nl}$  bei  $\omega_l = l \cdot \omega_0 + \epsilon$  überlagert. Durch den möglichst kleinen Frequenz-Offset  $\epsilon \ll \omega_0$  werden die resultierenden spektralen Überlagerungen im Ausgangsspektrum als separate Intermodulationsprodukte

$$\omega_{\text{mix}} = \kappa\omega_0 + \lambda\omega_l = \kappa\omega_0 + \lambda(l\omega_0 + \epsilon) \quad \text{mit } \kappa, \lambda \in \mathbb{Z} \quad (4.42)$$

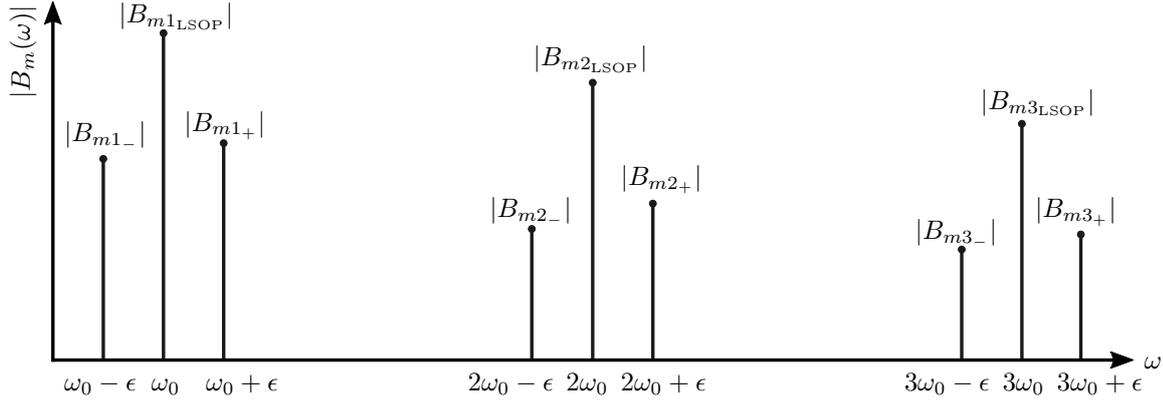


Abb. 4.5.: Spektraldarstellung zur Frequenz-Offset-Methode

erhalten, was in Abb. 4.5 dargestellt ist.

In Tab. 4.1 sind für  $l = 2$  beispielhaft zugehörig zu den X-Parametern die Werte von  $\kappa$  gezeigt. Durch die Kleinsignalannahme (4.34) lassen sich die Seitenbänder über  $\lambda = \pm 1$  begrenzen. Aus diesen können anschließend die zugehörigen X-Parameter der Kleinsignale berechnet werden, genauer gesagt  $X_{mk,nl}^{(S)}$  aus den oberen Seitenbändern  $k\omega_0 + \epsilon$  [114, 117]

$$X_{mk,nl}^{(S)} = \frac{B_{mk+}}{A_{nl}P^{k-l}} \quad (4.43a)$$

und  $X_{mk,nl}^{(T)}$  aus den unteren Seitenbändern  $k\omega_0 - \epsilon$

$$X_{mk,nl}^{(T)} = \frac{B_{mk-}}{A_{nl}P^{k+l}}. \quad (4.43b)$$

Darüber hinaus können aus den Harmonischen  $k \cdot \omega_0$  die X-Parameter des LSOP  $X_{mk}^{(F)}$  berechnet werden

$$X_{mk}^{(F)} = B_{mk_{\text{LSOP}}} P^{-k}. \quad (4.43c)$$

Sofern die Phase des Großsignals  $\phi_{A_{11}} = 0$  bzw.  $P = 1$  ist, vereinfachen sich diese Ausdrücke. Durch den Frequenzoffset  $\epsilon$  können zwar die einzelnen Anteile an (4.39) unabhängig ermittelt werden. Allerdings wird dabei davon ausgegangen, dass die ermittelten X-Parameter  $X_{mk,nl}^{(S)}$  und  $X_{mk,nl}^{(T)}$  denen des Grenzwerts  $\epsilon \rightarrow 0$  entsprechen. In der Messtechnik muss daher ein Kompromiss zwischen einem möglichst kleinen Offset  $\epsilon$  und den damit verbundenen längeren Messzeiten durch größere Einschwingzeiten der verwendeten Filter [117] und dem zwangsläufigen Fehler bei zu großem  $\epsilon$  eingegangen werden. Dieser Kompromiss ist für jedes nichtlineare System unterschiedlich zu bewerten. In manchen Frequenzbereichsimulatoren, wie z. B. der HB, können - außer für  $A_{n1}$ ,  $n \neq 1$  - die einzelnen Spektralanteile auch ohne Frequenzoffset, d. h.  $\epsilon = 0$ , ermittelt werden, was in dieser Arbeit ausgenutzt wird.

### 4.3.2. Phasen-Offset-Methode

Eine zweite Möglichkeit die X-Parameter zu bestimmen besteht in der Phasen-Offset-Methode [45, 117], die vom Prinzip eine numerische Weiterentwicklung der grafischen Methode von Mazumder und Puije [77] darstellt. Zunächst wird hier das System nur durch das Großsignal  $A_{11}$  angeregt. Aus den gemessenen  $B_{mk_{\text{LSOP}}}$  lassen sich die Großsignalparameter  $X_{mk}^{(F)} = B_{mk_{\text{LSOP}}} P^{-k}$  berechnen. Anschließend wird je ein Kleinsignal  $A_{nl}$  ohne Frequenz-Offset  $\epsilon$  bei ganzzahligen Vielfachen der Fundamentalfrequenz  $l \cdot \omega_0$  dem Großsignal  $A_{11}$  überlagert. Durch Subtraktion der Großsignalantwort von der Gesamtantwort kann der Einfluss des Kleinsignals  $A_{nl}$  erhalten werden

$$B_{mk_{nl}} = B_{mk} - B_{mk_{\text{LSOP}}}. \quad (4.44a)$$

Tab. 4.1.: Spektralanteile von  $B_m(\omega)$  der Frequenz-Offset-Methode (4.42) und zugehörige X-Parameter

$B_m(\omega_{\text{mix}})$	$\omega_{\text{mix}}$	$\kappa$	$\lambda$	X-Parameter $X_{mk}^{(\cdot)}$
$B_{m0+}$	$0 + \epsilon$	-2	1	$X_{m0,n2}^{(S)}$
$B_{m1-}$	$\omega_0 - \epsilon$	3	-1	$X_{m1,n2}^{(T)}$
$B_{m1\text{LSOP}}$	$\omega_0$	1	0	$X_{m1}^{(F)}$
$B_{m1+}$	$\omega_0 + \epsilon$	-1	1	$X_{m1,n2}^{(S)}$
$B_{m2-}$	$2\omega_0 - \epsilon$	4	-1	$X_{m2,n2}^{(T)}$
$B_{m2\text{LSOP}}$	$2\omega_0$	2	0	$X_{m2}^{(F)}$
$B_{m2+}$	$2\omega_0 + \epsilon$	0	1	$X_{m1,n2}^{(S)}$
$B_{m3-}$	$3\omega_0 - \epsilon$	5	-1	$X_{m3,n2}^{(T)}$
$B_{m3\text{LSOP}}$	$3\omega_0$	3	0	$X_{m3}^{(F)}$
$B_{m3+}$	$3\omega_0 + \epsilon$	1	1	$X_{m3,n2}^{(S)}$

Damit die beiden Kleinsignalparameter  $X_{mk,nl}^{(S)}$  und  $X_{mk,nl}^{(T)}$  berechnet werden können, müssen mindestens zwei unterschiedliche Werte für das Kleinsignal  $A_{nl} = |A_{nl}|e^{j\phi_{A_{nl}}}$  eingestellt werden. In der Phasen-Offset-Methode wird dies über unterschiedliche Phasen  $\phi_{A_{nl}}$  des Kleinsignals erreicht. Für  $M > 2$  unterschiedliche Phasen ergibt sich ein Optimierungsproblem, das z. B. mit der Methode kleinster Fehlerquadrate gelöst werden kann, wodurch der Einfluss von *Ausreißern* in den Messergebnissen minimiert wird. Es ergibt sich ein überbestimmtes Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} A_{nl,1}P^{k-l} & A_{nl,1}^*P^{k+l} \\ \vdots & \vdots \\ A_{nl,M}P^{k-l} & A_{nl,M}^*P^{k+l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mk,nl}^{(S)}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(T)}(|A_{11}|) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{mk_{nl},1} \\ \vdots \\ B_{mk_{nl},M} \end{pmatrix}, \quad (4.44b)$$

das sich mit Hilfe eines geeigneten Algorithmus lösen lässt. In dieser Arbeit wird dafür die Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme [6, 30] in *MATLAB* verwendet (vgl. dazu auch Abschnitt 7.2.5). Anschließend werden die berechneten X-Parameter in einer *MATLAB-Structure* für die weitere Verwendung gespeichert. Die berechneten X-Parameter werden in den kommerziell verfügbaren Lösungen in einem einheitlichen Format mit der Dateiendung *.xnp* gespeichert [117], wie es für lineare S-Parameter mit dem *Touchstone*-Format *.snp* [58] üblich ist. Dabei kommt schnell eine riesige Anzahl an X-Parametern zusammen - je nach Anzahl der eingestellten Parameter, wie zum Beispiel des DCOP, der Fundamentalfrequenz  $\omega_0$  oder der Großsignalamplitude  $|A_{11}|$ , der Anzahl der Tore  $N$  sowie der Anzahl  $L_n$  der berücksichtigten Frequenzen an jedem Tor aus (A.2).

#### 4.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein kurzer Überblick über den mathematischen Hintergrund der X-Parameter gegeben, die sich in den letzten Jahren als kommerziell verfügbare Erweiterung der S-Parameter für stark nichtlineare  $N$ -Tore etabliert haben. Die X-Parameter basieren auf dem Prinzip der mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion (BF). In der gesamten zugrunde liegenden Literatur [114, 139, 140, 142–150] wird allerdings nie der Zusammenhang zur aus älterer Literatur bekannten quasilinearen Einton- und Zweitton-BF (vgl. z. B. [40]) hergestellt. Dies wird daher in Abschnitt 4.1 erstmals getan. Da die mehrdimensionalen BF für mehrere Eingangssignale nicht mehr zu bestimmen sind, wurde mit dem PHD-Ansatz in Abschnitt 4.2 eine Möglichkeit zur Linearisierung der BF betrachtet. Dabei wird ein Signalanteil als sehr groß gegenüber den anderen Signalanteilen angenommen, das den sog. LSOP festlegt. Dieser wird durch die X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  beschrieben. Alle weiteren auftretenden Signalanteile werden als kleine Störungen des LSOP betrachtet und durch die X-Parameter  $X_{mk,nl}^{(S)}$  und  $X_{mk,nl}^{(T)}$  berücksichtigt. Diese können

folglich auch als Empfindlichkeitsfunktionen des  $N$ -Tors auf diese kleine Störung interpretiert werden. Abschließend wurden zwei unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der X-Parameter aus Mess- bzw. Simulationsdaten gezeigt. Die so gewonnenen X-Parameter können als Verhaltensmodell gespeichert werden und in System-Level-Simulationen zur Beschleunigung des Entwicklungsprozess eingesetzt werden. Außerdem gibt es erste Ansätze einer Verwendung als analytisches Entwurfswerkzeug [33, 92–98].

Im nachfolgenden Kapitel soll die wesentliche Aussage der X-Parametererfinder ausführlicher betrachtet werden als das in der zugehörigen Arbeit mit dem Titel *Describing Functions Can Better Model Hard Nonlinearities in the Frequency Domain than the Volterra Theory* [142] geschehen ist. Dabei wird ein direkter Vergleich der X-Parameter dieses Kapitels mit den Volterra-reihenbasierten S-Parametern [157] aus Kapitel 3 durchgeführt. Letztere hatten in der Betrachtung von Verspecht [142] keine Beachtung gefunden. Aus den gewonnenen Erkenntnissen dieses Vergleichs sollen darauffolgend Möglichkeiten zur Erweiterung der X-Parameter untersucht werden, wodurch entweder die Modellgenauigkeit erhöht oder die gesamte Modellkomplexität verringert werden kann.



## 5. X-Parameter und Volterra-reihenbasierte S-Parameter im Vergleich

In Kapitel 3 wurden die Volterra-reihenbasierten S-Parameter als Erweiterung der linearen S-Parameter und in Kapitel 4 die X-Parameter, die auf der mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion (BF) fundieren, eingeführt. Dieses Kapitel soll als Fortsetzung von [160] genauer untersuchen, welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede die beiden Ansätze besitzen. Dazu werden zunächst die mathematischen Zusammenhänge der beiden Ansätze betrachtet und anschließend anhand eines Beispiels diskutiert. Bereits im Anhang [142] seiner Dissertation stellt Verspecht [141] fest, dass die BF starke nichtlineare Systeme im Frequenzbereich besser charakterisieren könnten als die Volterra-Reihe. Allerdings nutzt er in dem rudimentären Vergleich nur den bestehenden VIOMAP-Ansatz seiner Kollegen Verbeyst und Vanden Bossche [135, 136]. Wie der Name *Volterra input-output map* (VIOMAP) vermuten lässt, handelt es sich dabei um ein *Black-Box*-Modell, das der Volterra-Reihe ähnlich ist. Allerdings erlaubt erst die Betrachtung der Volterra-Reihe, wie sie in diesem Kapitel durchgeführt wird, ein besseres mathematisches Verständnis der Zusammenhänge. Im Anhang B von [117] wird ein ähnlicher Vergleich durchgeführt. Jedoch wird auch hier weder der Ansatz von Weiner und Naditch [157] (vgl. Kapitel 3) berücksichtigt noch wird die gängige Notation der Volterra-Reihe verwendet. Stattdessen wird ein Ansatz von Peyton Jones und Billings [101] zitiert, der die ursprüngliche BF [40] als Quasilinearisierung mit der Volterra-Reihe in Verbindung bringt, was ebenfalls bereits von Chua und Ng [27] beispielhaft gezeigt wurde. Am Ende dieses Kapitels werden die gewonnenen Ergebnisse resümiert und die Möglichkeiten zur Erweiterung der X-Parameter in den nachfolgenden Kapiteln genannt.

### 5.1. Mathematische Zusammenhänge beider Ansätze

Die X-Parameter basieren auf der Linearisierung der spektralen BF höherer Ordnung für nichtlineare, zeitinvariante  $N$ -Tore nach dem PHD-Modellansatz [139]. Wie sich in Abschnitt 4.2 inkl. Anhang A.1 zeigte, werden in diesem Ansatz alle Ströme und Spannungen als periodisch angenommen, sodass sie durch ihre komplexe Fourier-Reihe bzw. -Koeffizienten repräsentiert werden können [145]. Folglich werden Eingangssignale nur an ganzzahligen Vielfachen einer Fundamentalfrequenz  $\omega_0$  berücksichtigt. Weiterhin wird das fundamentale Eingangssignal am ersten Tor  $A_{11}$  als einziges Großsignal angesehen. Der Systemzustand infolge der Großsignalanregung  $A_{11}$  wird als Großsignalarbeitspunkt - englisch: *large signal operating point* (LSOP) - bezeichnet, der sowohl die Fundamentalantwort als auch die harmonische Verzerrung berücksichtigt. Zusätzliche Eingangssignale  $A_{nl}$  am Tor  $n$  und der  $l$ -ten Harmonischen, d. h.  $l \cdot \omega_0$ , werden als klein gegenüber  $A_{11}$  betrachtet. Dadurch kann deren Einfluss auf den LSOP als lineare Überlagerung angesehen werden. Mathematisch handelt es sich beim PHD-Ansatz um eine Taylor-Reihenentwicklung der mehrdimensionalen spektralen BF (4.28), wodurch sich der Name polyharmonische Verzerrung ableitet. Als Näherung für die resultierenden Streuvariablen  $B_{mk}$  am Tor  $m$  und der  $k$ -ten Harmonischen  $k \cdot \omega_0$  werden über die Modellgleichung (4.38)

$$B_{mk} \approx X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|)P^k + \underbrace{\sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L_n}}_{(n,l) \neq (1,1)} \left( X_{mk,nl}^{(S)}(|A_{11}|)A_{nl}P^{k-l} + X_{mk,nl}^{(T)}(|A_{11}|)A_{nl}^*P^{k+l} \right)$$

beschrieben, worin die X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$ ,  $X_{mk,nl}^{(S)}$ ,  $X_{mk,nl}^{(T)}$  über  $A_{11}$  vom LSOP abhängen. Infolge einer Phasennormierung  $P = e^{j\phi_{A_{11}}}$  (4.31) beschränkt sich die Abhängigkeit in (4.38) auf den Betrag  $|A_{11}|$ .

Als zweiter Ansatz, nichtlineare Zweitore mit Hilfe von Streuvariablen bzw. -parametern zu beschreiben, wurden in Kapitel 3 der Volterra-reihenbasierte Ansatz von Weiner und Naditch [157] aus dem Jahr 1976 betrachtet. Insbesondere in Abschnitt 3.2 wurde gezeigt wie diese nichtlinearen S-Parameter für den in

dieser Arbeit wichtigen Fall der polyharmonischen Anregung in (3.14) bzw. (3.22) genutzt werden können, um die reflektierten Streuvariablen am Tor  $m$  bei der  $k$ -ten Harmonischen  $B_{mk}$  zu berechnen. Aus dem allgemeineren Fall in (3.13) wird für den *angepassten* Fall und identische charakteristische Impedanzen an allen Toren, d. h.  $Z_s = Z_0$  und  $Z_L = Z_0$ ,

$$S_{m1,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) = \begin{cases} 2H_{1s,1}(l_1\omega_0) - 1 & m = 1 \wedge d = 1 \\ 2^d Z_0^{\frac{d-1}{2}} H_{ms,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.1a)$$

$$S_{m;1^d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) = \frac{1}{2^d} \binom{d}{\mathbf{q}} S_{m1,d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) \quad (5.1b)$$

und

$$B_{m,d}(l_1\omega_0 + \dots + l_d\omega_0) = S_{m;1^d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) \prod_{p=1}^d A_{1l_p}. \quad (5.1c)$$

Durch Summation aller Anteile bis zur maximalen Ordnung  $D$  an der Frequenz  $k\omega_0$ , die die Bedingung  $l_1\omega_0 + \dots + l_d\omega_0 = k\omega_0$  aus (3.23c) erfüllen, ergibt sich als Volterra-Reihennäherung

$$B_{mk} \approx \sum_{d=1}^D \sum_{l_1+\dots+l_d=k} S_{m;1^d}(l_1\omega_0, \dots, l_d\omega_0) \prod_{p=1}^d A_{1l_p}. \quad (5.1d)$$

Nachfolgend wird betrachtet, wie die Modellgleichungen zusammenhängen bzw. welche Unterschiede bestehen. Dazu wird zunächst anhand der Eintonanregung über das Großsignal  $A_{11}$  ein Vergleich der Großsignal-X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  zu den Volterra-reihenbasierten S-Parametern durchgeführt, der anschließend für eine Zweitonanregung auf die weiteren X-Parameter  $X_{mk,nl}^{(F)}$  und  $X_{mk,nl}^{(T)}$  erweitert wird. Anhand eines Beispiels werden Vor- und Nachteile der beiden Ansätze herausgearbeitet.

### 5.1.1. Eintonanregung

In diesem Abschnitt werden die X-Parameter (4.38) basierend auf dem PHD-Ansatz [139] mit den Volterra-reihenbasierten S-Parametern in (5.1) anhand einer Eintonanregung am Eingangstor von Abb. 3.4

$$u_s(t) = \hat{u}_{s1} \cos(\omega_0 t + \phi_{u_{s1}}), \quad (5.2)$$

verglichen. Das X-Parametermodell aus (4.38) besteht in diesem Fall lediglich aus dem Großsignal-X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  (4.38c) und dem Phasor  $P = e^{j\phi_{A_{11}}} = e^{j\phi_{s1}}$  (4.31)

$$B_{mk} = X_{mk}^{(F)} (|A_{11}|) P^k. \quad (5.3)$$

Zur Berechnung der Streuvariable  $B_{mk}$  gemäß der Volterra-reihenbasierten S-Parameter (5.1) werden alle Anteile  $B_{mk,d}$  an  $k\omega_0$  aufsummiert. In Tab. 5.1 sind beispielhaft bis einschließlich der Ordnung  $d = 4$  verschiedene Anteile  $B_{mk,d}$  einzeln mit der Notation aus (3.26a) gezeigt (vgl. z. B. [9]). Für die ersten  $k$  Harmonischen ergeben sich unter expliziter Berücksichtigung der ersten beiden Summanden mit der vereinfachten Notation aus (3.26b) und (3.10)

$$B_{m1} \approx S_{m;1^1}(\omega_0) A_{11} + S_{m;1^3}(-\omega_0, 2\{\omega_0\}) A_{11}^2 A_{11}^* + \mathcal{O}(5), \quad (5.4a)$$

$$B_{m2} \approx S_{m;1^2}(2\{\omega_0\}) A_{11}^2 + S_{m;1^4}(-\omega_0, 3\{\omega_0\}) A_{11}^3 A_{11}^* + \mathcal{O}(6), \quad (5.4b)$$

$$B_{m3} \approx S_{m;1^3}(3\{\omega_0\}) A_{11}^3 + S_{m;1^5}(-\omega_0, 4\{\omega_0\}) A_{11}^4 A_{11}^* + \mathcal{O}(7), \quad (5.4c)$$

⋮

$$B_{mk} \approx S_{m;1^k}(k\{\omega_0\}) A_{11}^k + S_{m;1^{(k+2)}}(-\omega_0, (k+1)\{\omega_0\}) A_{11}^{k+1} A_{11}^* + \mathcal{O}(k+4). \quad (5.4d)$$

Aus der Definition des Phasors  $P$  in (4.31) ist  $A_{11} = |A_{11}| \cdot P$  und  $A_{11}^* = |A_{11}| \cdot P^{-1}$  sowie  $A_{11}^k = |A_{11}|^k \cdot P^k$  und  $A_{11}^{k+1} A_{11}^* = |A_{11}|^{k+2} \cdot P^k$ , woraus mit einem Koeffizientenvergleich von (5.3) und (5.4) die Zusam-

Tab. 5.1.: Summanden der Streuvariablen  $B_{mk,d}$  aus (5.1) bis zur 4. Ordnung für eine Eintonanregung

$\mathbf{q} = (q_{-1}, q_1)$	Kreisfrequenz	Streuvariable $B_{mk,d}$
$d = 1$		
(1, 0)	$-\omega_0$	$S_{m;1^1}(-\omega_0)A_{11}^*$
(0, 1)	$\omega_0$	$S_{m;1^1}(\omega_0)A_{11}$
$d = 2$		
(2, 0)	$-2\omega_0$	$S_{m;1^2}(-\omega_0, -\omega_0)(A_{11}^*)^2$
(1, 1)	0	$S_{m;1^2}(-\omega_0, \omega_0)A_{11}^*A_{11}$
(0, 2)	$2\omega_0$	$S_{m;1^2}(\omega_0, \omega_0)A_{11}^2$
$d = 3$		
(3, 0)	$-3\omega_0$	$S_{m;1^3}(-\omega_0, -\omega_0, -\omega_0)(A_{11}^*)^3$
(2, 1)	$-\omega_0$	$S_{m;1^3}(-\omega_0, -\omega_0, \omega_0)(A_{11}^*)^2A_{11}$
(1, 2)	$\omega_0$	$S_{m;1^3}(-\omega_0, \omega_0, \omega_0)A_{11}^2A_{11}^*$
(0, 3)	$3\omega_0$	$S_{m;1^3}(\omega_0, \omega_0, \omega_0)A_{11}^3$
$d = 4$		
(4, 0)	$-4\omega_0$	$S_{m;1^4}(-\omega_0, -\omega_0, -\omega_0, -\omega_0)(A_{11}^*)^4$
(3, 1)	$-2\omega_0$	$S_{m;1^4}(-\omega_0, -\omega_0, -\omega_0, \omega_0)(A_{11}^*)^3A_{11}$
(2, 2)	0	$S_{m;1^4}(-\omega_0, -\omega_0, \omega_0, \omega_0)(A_{11}^*)^2A_{11}^2$
(1, 3)	$2\omega_0$	$S_{m;1^4}(-\omega_0, \omega_0, \omega_0, \omega_0)A_{11}^*A_{11}^3$
(0, 4)	$4\omega_0$	$S_{m;1^4}(\omega_0, \omega_0, \omega_0, \omega_0)A_{11}^4$

menhänge

$$X_{m1}^{(F)}(|A_{11}|) = S_{m;1^1}(\omega_0)|A_{11}| + S_{m;1^3}(-\omega_0, 2\{\omega_0\})|A_{11}|^3 + \mathcal{O}(5), \quad (5.5a)$$

$$X_{m2}^{(F)}(|A_{11}|) = S_{m;1^2}(2\{\omega_0\})|A_{11}|^2 + S_{m;1^4}(-\omega_0, 3\{\omega_0\})|A_{11}|^4 + \mathcal{O}(6), \quad (5.5b)$$

$$X_{m3}^{(F)}(|A_{11}|) = S_{m;1^3}(3\{\omega_0\})|A_{11}|^3 + S_{m;1^5}(-\omega_0, 4\{\omega_0\})|A_{11}|^5 + \mathcal{O}(7), \quad (5.5c)$$

⋮

$$X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|) = S_{m;1^k}(k\{\omega_0\})|A_{11}|^k + S_{m;1^{(k+2)}}(-\omega_0, (k+1)\{\omega_0\})|A_{11}|^{k+2} + \mathcal{O}(k+4) \quad (5.5d)$$

folgen. Daraus ist ersichtlich, dass sich die Großsignal-X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  für schwach nichtlineare Systeme als Polynom in  $|A_{11}|$  mit den Volterra-reihenbasierten S-Parametern  $S_{m;1^d}(\cdot)$  als Koeffizienten darstellen lassen. Dabei ist die niedrigste Potenz immer dem Frequenzindex  $k$  entsprechend. Davon ausgehend werden die Potenzen mit der Schrittweite 2 vergrößert, sodass abhängig von  $k$  nur gerade oder ungerade Polynome vorliegen. Je höher die maximale Ordnung  $D$  der Volterra-Reihe ist desto stärker nichtlinear kann das System sein. Eine Erhöhung von  $D$  zieht allerdings einen enormen Rechenaufwand nach sich. Da die X-Parameter immer für eine festgelegte Fundamentalfrequenz und verschiedene Werte  $|A_{11}|$  bestimmt werden, wird meistens wie in (5.5) nur die Abhängigkeit von  $|A_{11}|$  angedeutet. Folglich ist jeder X-Parameter gemäß (4.28) eine Funktion des DCOP, der Frequenz  $\omega_0$  und des Großsignals  $|A_{11}|$ . Die Volterra-reihenbasierten S-Parameter sind nur vom DCOP und den anregenden Frequenzen abhängig. Wie in (5.5) gezeigt, können die Großsignal-X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  über komplexe Polynome in  $|A_{11}|$  mit den Volterra-S-Parametern  $S_{m;1^d}$  als Koeffizienten approximiert werden.

### 5.1.2. Zweitonanregung

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts zeigten, wie die Großsignal-X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  mit Hilfe der Volterra-reihenbasierten S-Parameter beschrieben werden können. In diesem Abschnitt soll mit Hilfe einer

Tab. 5.2.: Zusätzliche Terme der Streuvariablen  $B_{mk,d}$  aus (5.1) bis zur 4. Ordnung bei Zweitonanregung, die vom PHD-Ansatz aufgrund des linear vorhandenen  $|A_{12}|$  berücksichtigt werden

$\mathbf{q} = (q_{-2}, q_{-1}, q_1, q_2)$	Kreisfrequenz	Streuvariable $B_{1k,d}$
$d = 1$		
(0, 0, 0, 1)	$2\omega_0$	$S_{m;1^1}(2\omega_0)A_{12}$
$d = 2$		
(1, 0, 1, 0)	0	$S_{m;1^2}(-2\omega_0, \omega_0)A_{12}^*A_{11}$
(0, 1, 0, 1)	$\omega_0$	$S_{m;1^2}(2\omega_0, -\omega_0)A_{12}A_{11}^*$
(0, 0, 1, 1)	$3\omega_0$	$S_{m;1^2}(2\omega_0, \omega_0)A_{12}A_{11}$
$d = 3$		
(1, 0, 2, 0)	0	$S_{m;1^3}(-2\omega_0, \omega_0, \omega_0)A_{12}^*A_{11}^2$
(0, 2, 0, 1)	0	$S_{m;1^3}(2\omega_0, -\omega_0, -\omega_0)(A_{11}^*)^2A_{12}$
(0, 1, 1, 1)	$2\omega_0$	$S_{m;1^3}(2\omega_0, \omega_0, -\omega_0)A_{12}A_{11}^*A_{11}$
(0, 0, 2, 1)	$4\omega_0$	$S_{m;1^3}(2\omega_0, \omega_0, \omega_0)A_{11}^2A_{12}$
$d = 4$		
(0, 2, 1, 1)	$\omega_0$	$S_{m;1^4}(2\omega_0, -\omega_0, -\omega_0, \omega_0)(A_{11}^*)^2A_{11}A_{12}$
(0, 1, 2, 1)	$3\omega_0$	$S_{m;1^4}(2\omega_0, -\omega_0, \omega_0, \omega_0)A_{11}^*A_{11}^2A_{12}$
(0, 0, 3, 1)	$5\omega_0$	$S_{m;1^4}(2\omega_0, \omega_0, \omega_0, \omega_0)A_{11}^3A_{12}$

beispielhaften Zweitonanregung gezeigt werden, wie die Kleinsignal-X-Parameter  $X_{mk,nl}^{(S)}$  und  $X_{mk,nl}^{(T)}$  ebenso mit den Volterra-reihenbasierten S-Parameter in Verbindung gebracht werden können.

Wie in der Grundannahme (4.34) der spektralen Linearisierung (4.38) soll das zweite Signal als klein gegenüber dem Großsignal (5.2) angenommen werden. Mit einer Überlagerung am Eingangstor - nur an diesem wurden in [157] sinnvolle Volterra-reihenbasierte S-Parameter definiert - bei der doppelten Frequenz  $\omega_1 = 2\omega_0$  folgt mit  $\hat{u}_{s1} \gg \hat{u}_{s2}$

$$u_s(t) = \hat{u}_{s1} \cos(\omega_0 t + \varphi_{u_{s1}}) + \hat{u}_{s2} \cos(\omega_1 t + \varphi_{u_{s2}}). \quad (5.6)$$

Mit dieser Zweitonanregung ergibt sich das X-Parametermodell aus (4.38) zu

$$B_{mk} \approx X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|)P^k + X_{mk,12}^{(S)}(|A_{11}|)A_{12}P^{k-2} + X_{mk,12}^{(T)}(|A_{11}|)A_{12}^*P^{k+2}, \quad (5.7)$$

worin das Kleinsignal über  $A_{12}$  bzw.  $A_{12}^*$  linear zu der Streuvariable  $B_{mk}$  beiträgt.

In Folge der Zweitonanregung müssen in der Volterra-Reihe deutlich mehr Terme als in (5.4) bzw. Tab. 5.1 berücksichtigt werden. In Tab. 5.2 sind beispielhaft bis einschließlich der Ordnung  $d = 4$  verschiedene Anteile  $B_{mk,d}$  einzeln mit der Notation aus (3.26a) gezeigt (vgl. z. B. [9]). Dabei wird sich zum Vergleich mit (5.7) auf eine lineare Abhängigkeit des Kleinsignals  $A_{12}$  beschränkt.

Es ergeben sich für die ersten drei Harmonischen der Streuvariablen  $B_{mk}$  unter Berücksichtigung der Approximation (5.5) mit der Notation aus (3.10) folgende Ausdrücke

$$B_{m1} \approx X_{m1}^{(F)}(|A_{11}|)P^1 + (S_{m;1^2}(\{2\omega_0\}, \{-\omega_0\})|A_{11}| + S_{m;1^4}(\{2\omega_0\}, 2\{-\omega_0\}, \{\omega_0\})|A_{11}|^3 + \dots)A_{12}P^{-1} \\ + (S_{m;1^4}(\{-2\omega_0\}, 3\{\omega_0\})|A_{11}|^3 + S_{m;1^6}(\{-2\omega_0\}, \{-\omega_0\}, 4\{\omega_0\})|A_{11}|^5 + \dots)A_{12}^*P^3, \quad (5.8a)$$

$$B_{m2} \approx X_{m2}^{(F)}(|A_{11}|)P^2 + (S_{m;1^1}(\{2\omega_0\}) + S_{m;1^3}(\{2\omega_0\}, \{-\omega_0\}, \{\omega_0\})|A_{11}|^2 + \dots)A_{12} \\ + (S_{m;1^5}(\{-2\omega_0\}, 4\{\omega_0\})|A_{11}|^4 + \dots)A_{12}^*P^4, \quad (5.8b)$$

$$\begin{aligned}
 B_{m3} \approx & X_{m3}^{(F)}(|A_{11}|)P^3 + (S_{m;1^2}(\{2\omega_0\}, \{\omega_0\})|A_{11}| + S_{m;1^4}(\{2\omega_0\}, \{-\omega_0\}, 2\{\omega_0\})|A_{11}|^3 + \dots) A_{12}P^1 \\
 & + (S_{m;1^6}(\{-2\omega_0\}, 5\{\omega_0\})|A_{11}|^5 + \dots) A_{12}^*P^5,
 \end{aligned} \tag{5.8c}$$

Erneut kann anhand eines Koeffizientenvergleichs von (5.7) und (5.8) gezeigt werden, wie die X-Parameter und die Volterra-reihenbasierten S-Parameter zusammenhängen. Für die Kleinsignal-X-Parameter folgen mit der Notation aus (3.10)

$$X_{m1,12}^{(S)}(|A_{11}|) = S_{m;1^2}(\{2\omega_0\}, \{-\omega_0\})|A_{11}| + S_{m;1^4}(\{2\omega_0\}, \{\omega_0\}, 2\{-\omega_0\})|A_{11}|^3 + \mathcal{O}(5), \tag{5.9a}$$

$$X_{m2,12}^{(S)}(|A_{11}|) = S_{m;1^1}(\{2\omega_0\}) + S_{m;1^3}(\{2\omega_0\}, \{\omega_0\}, \{-\omega_0\})|A_{11}|^2 + \mathcal{O}(4), \tag{5.9b}$$

$$X_{m3,12}^{(S)}(|A_{11}|) = S_{m;1^2}(\{2\omega_0\}, \omega_0)|A_{11}| + S_{m;1^4}(\{2\omega_0\}, 2\{\omega_0\}, \{-\omega_0\})|A_{11}|^3 + \mathcal{O}(5), \tag{5.9c}$$

⋮

$$\begin{aligned}
 X_{mk,12}^{(S)}(|A_{11}|) = & S_{m;1^{k-1}}(\{2\omega_0\}, (k-2)\{\omega_0\})|A_{11}|^{k-2} \\
 & + S_{m;1^{k+1}}(\{2\omega_0\}, (k-1)\{\omega_0\}, \{-\omega_0\})|A_{11}|^k + \mathcal{O}(k+2)
 \end{aligned} \tag{5.9d}$$

bzw.

$$X_{m1,12}^{(T)}(|A_{11}|) = S_{m;1^4}(\{-2\omega_0\}, 3\{\omega_0\})|A_{11}|^3 + S_{m;1^6}(\{-2\omega_0\}, \{-\omega_0\}, 4\{\omega_0\})|A_{11}|^5 + \mathcal{O}(7), \tag{5.10a}$$

$$X_{m2,12}^{(T)}(|A_{11}|) = S_{m;1^5}(\{-2\omega_0\}, 4\{\omega_0\})|A_{11}|^4 + \mathcal{O}(6), \tag{5.10b}$$

$$X_{m3,12}^{(T)}(|A_{11}|) = S_{m;1^6}(\{-2\omega_0\}, 5\{\omega_0\})|A_{11}|^5 + \mathcal{O}(8), \tag{5.10c}$$

⋮

$$X_{mk,12}^{(T)}(|A_{11}|) = S_{m;1^{k+3}}(\{-2\omega_0\}, (k+2)\{\omega_0\})|A_{11}|^{k+2} + \mathcal{O}(k+4), \tag{5.10d}$$

worin sich die Restgliedordnung  $\mathcal{O}(\cdot)$  jeweils auf die Potenz von  $|A_{11}|$  bezieht.

### 5.1.3. Polynomieller Ansatz der Beschreibungsfunktionen

Übertragen aus den Zusammenhängen der nichtlinearen Volterra-reihenbasierten S-Parameter und den X-Parametern in (5.5), (5.9) und (5.10) können für eine Approximation der X-Parameter über ein Polynom folgende Gleichungen formuliert werden:

$$X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|) = \sum_{h=0}^{\infty} S_{(m;1^{2h+k})}((h+k)\{\omega_0\}, h\{-\omega_0\})|A_{11}|^{2h+k} \tag{5.11a}$$

$$X_{mk,1l}^{(S)}(|A_{11}|) = \sum_{h=0}^{\infty} S_{(m;1^{2h+|k-l|+1})}(l\omega_0, h\{\omega_0\}, h\{-\omega_0\}, |k-l|\{\text{sgn}(k-l)\omega_0\})|A_{11}|^{2h+|k-l|} \tag{5.11b}$$

$$X_{mk,1l}^{(T)}(|A_{11}|) = \sum_{h=0}^{\infty} S_{(m;1^{2h+k+l+1})}(-l\omega_0, h\{-\omega_0\}, (h+k+l)\{\omega_0\}, )|A_{11}|^{2h+k+l}. \tag{5.11c}$$

Ähnliche Aussagen werden mit einer anderen Herleitung im Anhang B von [117] getroffen. Aus diesen Zusammenhängen lässt sich schlussfolgern, dass jeder X-Parameter über stückweise definierte Polynome endlichen Grades approximiert werden kann. Dabei variiert die minimale Ordnung  $|\kappa|$  je nach Art des X-Parameters und der zu beschreibenden Frequenzkomponente, was in (5.11) mit  $h = 0$  abzulesen ist. Dies lässt sich auch über  $|\kappa|$  aus der Frequenz-Offset-Methode (4.42)

$$\omega_{\text{mix}} = k\omega_0 + \lambda\epsilon = \kappa\omega_0 + \lambda(l\omega_0 + \epsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \kappa = k - \lambda l \tag{5.12}$$

erhalten und in einer verallgemeinerten Darstellung von Tab. 4.1 wiederfinden, die in in Tab. 5.3 dargestellt ist. Darin sind  $\kappa(X_{mk}^{(F)}) = k$ ,  $|\kappa|(X_{mk,nl}^{(S)}) = |k-l|$  und  $\kappa(X_{mk,nl}^{(T)}) = k+l$ .

Bei der minimalen Ordnung  $|\kappa|$  startend werden die Polynompotenzen um zwei erhöht, sodass sich

Tab. 5.3.: Allgemeine Spektralanteile der Frequenz-Offset-Methode  $\omega_{\text{mix}} = \kappa\omega_0 + \lambda(l\omega_0 + \epsilon)$  und zugehörige X-Parameter

$B_m(\omega_{\text{mix}})$	$\omega_{\text{mix}}$	$\kappa$	$\lambda$	X-Parameter $X_{mk}^{(\cdot)}$
$B_{mk_-}$	$k\omega_0 - \epsilon$	$k + l$	-1	$X_{mk,nl}^{(T)}$
$B_{mk_{\text{LSOP}}}$	$k\omega_0$	$k$	0	$X_{mk}^{(F)}$
$B_{mk_+}$	$k\omega_0 + \epsilon$	$k - l$	1	$X_{mk,nl}^{(S)}$

abhängig von  $|\kappa|$  ein Polynom endlichen Grades mit geraden oder ungeraden Potenzen bis zur maximalen Potenz  $K \in \mathbb{N}$  mit  $(K - \kappa) \bmod 2 = 0$

$$X_{mk}^{(\cdot)}(|A_{11}|) = c_{|\kappa|}|A_{11}|^{|\kappa|} + c_{|\kappa|+2}|A_{11}|^{|\kappa|+2} + \dots + c_K|A_{11}|^K \quad (5.13)$$

ergibt. Für eine Approximation der Funktionen  $X_{mk}^{(\cdot)}(|A_{11}|)$  müssen je  $M > \frac{K-|\kappa|}{2} + 1$  verschiedene Wertepaare  $(|A_{11}|, B_{mk(\cdot)})$  aufgenommen werden. Damit lässt sich über (4.43) jeweils das überbestimmte Gleichungssystem

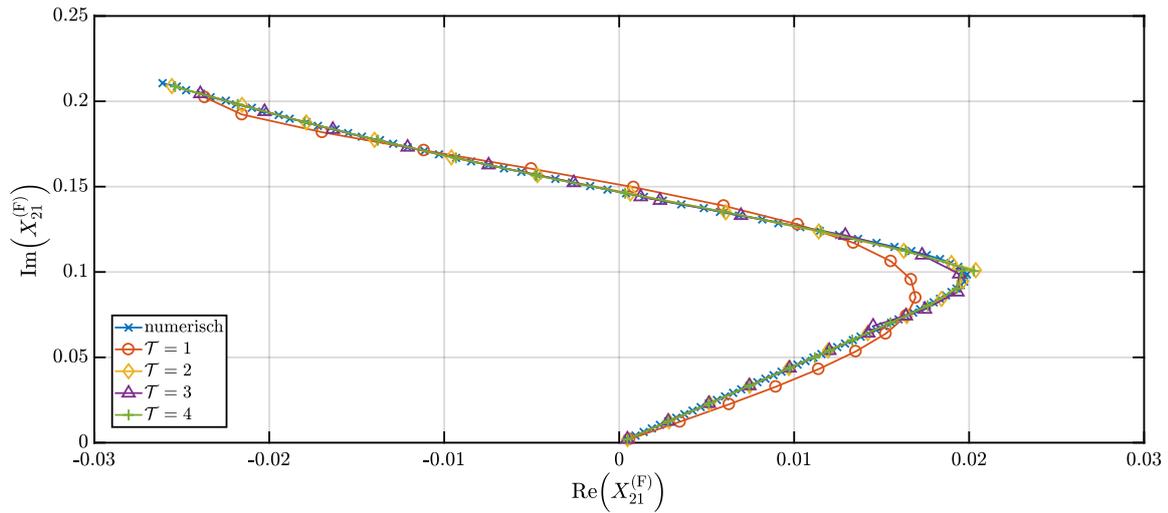
$$\underbrace{\begin{pmatrix} |A_{11,1}|^{|\kappa|} & \dots & |A_{11,1}|^K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |A_{11,M}|^{|\kappa|} & \dots & |A_{11,M}|^K \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{11}} \begin{pmatrix} c_{|\kappa|} \\ \vdots \\ c_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{mk_1}^{(\cdot)} \\ \vdots \\ X_{mk_M}^{(\cdot)} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

aufstellen, das sich mit der Methode kleinster Fehlerquadrate lösen lässt (vgl. z. B. [6]). Der Platzhalter  $(\cdot)$  für die drei Fälle (F), (S) bzw. (T) in  $B_{mk(\cdot)}$  und auf der rechten Seite des Gleichungssystems in  $X_{mk}^{(\cdot)}$  sind entsprechend (4.43) bzw. Tab. 5.3 zugehörig. Auf eine zusätzliche Indizierung der Polynomkoeffizienten bzw. der minimalen Ordnung  $|\kappa|$  zur Unterscheidung der unterschiedlichen Fälle (F), (S) bzw. (T) wurde zugunsten der Lesbarkeit verzichtet. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass die X-Parameter komplexe Größen sind, d. h.  $X_{mk}^{(\cdot)}(|A_{11}|) \in \mathbb{C}$ . Folglich müssen in der Approximation über (5.14) die Koeffizienten  $c_i \in \mathbb{C}$  sein, da  $|A_{11}| \in \mathbb{R}$ .

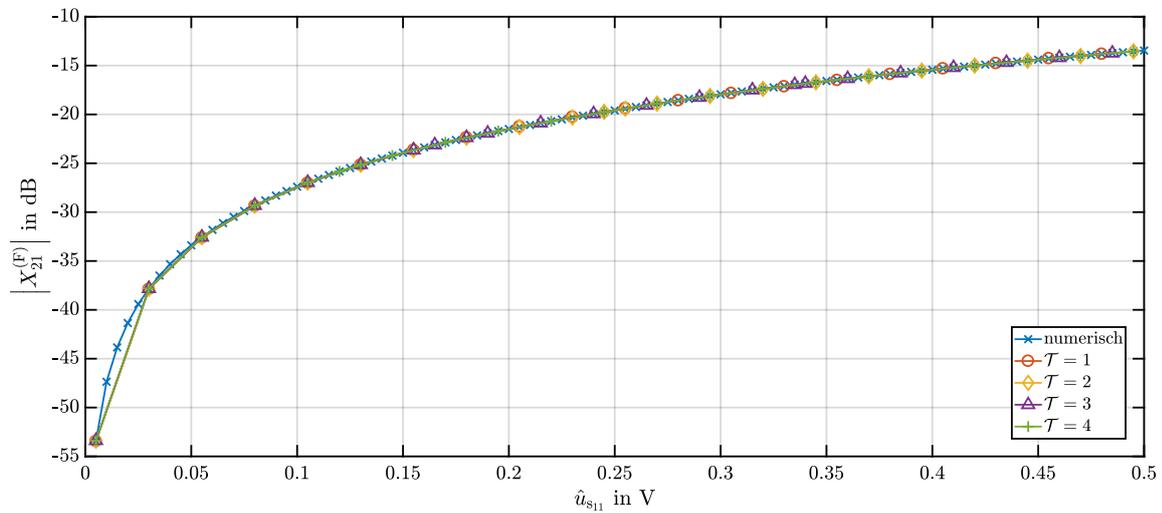
Bei der Approximation der X-Parameter mit stückweise definierten polynomiellen Ansätzen ist darauf zu achten, dass die jeweiligen betrachteten Intervalle  $A_{11} \in [A_{11,\text{min}} A_{11,\text{max}}]$  nicht zu groß werden. Andernfalls kann die Ansatzfunktion das Verhalten der X-Parameter über  $A_{11}$  nicht abbilden, ohne große Fehler einzuführen. Anhand zweier beispielhaften Darstellungen soll dies genauer ausgeführt werden. In Abb. 5.1 ist der Verlauf der Großsignal-X-Parameter  $X_{21}^{(F)}$  der Beispielschaltung aus Abb. 5.3 für  $f_0 = 300$  MHz gezeigt. Die über die Frequenz-Offset-Methode aus Abschnitt 4.3 bestimmten numerischen Werte werden mit den aus (5.14) berechneten polynomiellen Ansätzen verglichen. Dabei wird das ursprüngliche Intervall zusätzlich in kleinere Intervalle unterteilt, deren polynomielle Ansätze ebenfalls dargestellt sind. In der komplexen Darstellung in (a) ist zu sehen, dass der polynomielle Ansatz über das gesamte Intervall im *Bogen* bei  $X_{21}^{(F)} = 0.02 + 0.1j$  vom numerischen Verlauf abweicht, was so in der Darstellung des Betrags in dB (b) nicht zu sehen ist, jedoch in der Betrachtung des relativen Fehlers

$$\left| \Delta X_{mk}^{(\cdot)} \right| = \left| \frac{X_{mk,\text{num}}^{(\cdot)} - X_{mk,\text{poly}}^{(\cdot)}}{X_{mk,\text{num}}^{(\cdot)}} \right| \cdot 100 \% \quad (5.15)$$

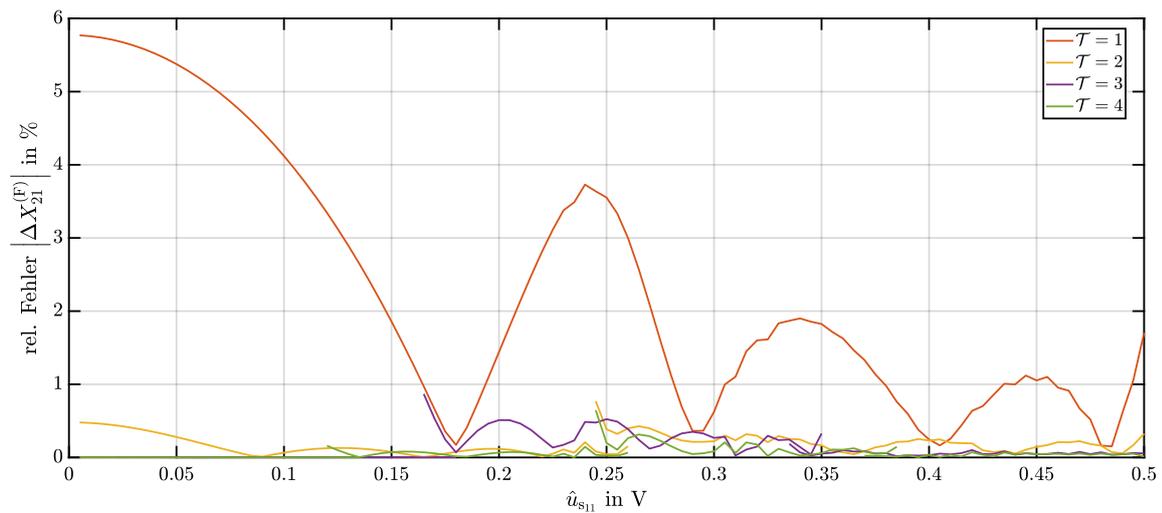
mit Höchstwerten von rund 6% auffällt. Bereits eine Aufteilung in zwei Teilintervalle ( $\mathcal{T} = 2$ ) führt zu einer deutlichen Reduzierung des relativen Fehlers. Die Polynome der Teilintervalle wurden hier ohne Nebenbedingung bestimmt. Um den Einfluss der Intervallgrenzen so gering wie möglich zu halten, werden die Teilintervalle überlappend für die Approximation gewählt. In diesem Bereich kann dann der Approximationswert mit dem kleineren relativen Fehler ausgewählt werden. Um einen stetigen Übergang der Teilintervalle zu erreichen, müsste die Berechnung des Gleichungssystems (5.14) über eine Optimierung mit Gleichheitsnebenbedingung [6] erfolgen. Durch diese Bedingung wird durch das gefundene Optimum im restlichen Intervall ein größerer Fehler begangen als durch eine unbedingte Optimierung. Daher wird



(a)



(b)



(c)

Abb. 5.1.: X-Parameter-Vergleich numerischer Datenpunkte und auf  $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$  Intervalle aufgeteilte polynomielle Ansätze aus (5.14): komplexe Darstellung  $X_{21}^{(F)}$  (a), der Betrag  $|X_{21}^{(F)}|$  (b) sowie der relative Fehler der polynomiellen Ansätze (c) über  $\hat{u}_{s1} = |A_{11}| \cdot 2\sqrt{Z_0}$ .

hier auf eine bedingte Optimierung verzichtet. Die Polynomansätze (5.13) sind zur maximalen Ordnung  $K = 7$  gewählt, sodass pro Teilintervall vier Koeffizienten  $c_i$  berechnet werden müssen. Eine Erhöhung der Polynomordnung zur Verbesserung der Approximation ist aufgrund der schlecht konditionierten Matrix  $\mathbf{A}_{11}$ , die der Vandermonde-Matrix ähnlich ist, nicht ratsam. Aus den ursprünglichen 100 numerischen Werten von  $X_{21}^{(F)}$  ergibt sich durch die polynomiellen Ansätze in Abhängigkeit der Teilintervallanzahl  $\mathcal{T}$ , der kleinsten  $|\kappa|$  und der maximalen Potenz  $K$  eine Koeffizientenanzahl

$$M_c(\mathcal{T}, |\kappa|, K) = \mathcal{T} \cdot \left( \frac{K - |\kappa|}{2} + 1 \right). \quad (5.16)$$

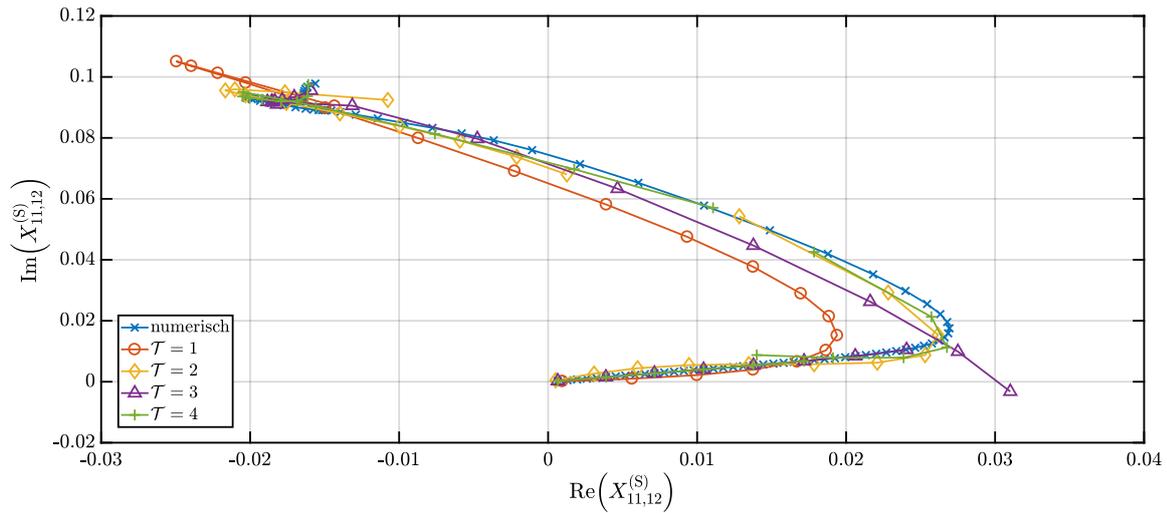
Im Beispiel aus Abb. 5.1 ergeben sich  $M_c(\mathcal{T}, 1, 7) = 4\mathcal{T}$ . Durch die Polynome kann die Modellkomplexität folglich u. U. drastisch verringert werden. Außerdem ermöglicht ein Polynom durch Funktionsauswertung eine schnelle Berechnung von Werten zwischen den gemessenen Stützstellen. Bei einer numerischen *Look-up-Table* müssen Zwischenwerte über ein geeignetes Verfahren, z. B. lineare Interpolation, berechnet werden.

In Abb. 5.2 ist als zweites Beispiel der Kleinsignal-X-Parameter  $X_{11,12}^{(S)}$  auf dieselbe Weise dargestellt, wie  $X_{21}^{(F)}$  in Abb. 5.1. Im unteren Bereich von  $\hat{u}_{s1} = |A_{11}| \cdot 2\sqrt{Z_0}$  ähnelt der Verlauf  $X_{11,12}^{(S)}$  in (a) bzw.  $|X_{11,12}^{(S)}|$  in (b) dem von  $X_{21}^{(F)}$ . In der Mitte des Intervalls bei  $\hat{u}_{s1} \approx 250$  mV gibt es einen kleinen Bereich mit einem starken Betragsanstieg. Anschließend flacht der Verlauf ab, nimmt leicht ab, um anschließend erneut zuzunehmen. Der Blick auf die relativen Fehler der polynomiellen Approximationsansätze in Abb. 5.2c zeigt, dass eine Erhöhung der Teilintervallanzahl  $\mathcal{T}$  nicht zwangsläufig zu einer besseren Approximation führen muss. So erstreckt sich das zweite von  $\mathcal{T} = 3$  Teilintervallen über den Bereich starker Zunahme und anschließender Abflachung. Dadurch liegt der relative Fehler deutlich über dem des ersten von  $\mathcal{T} = 2$  Teilintervallen. Dieser wiederum beugt im unteren Bereich des ersten Teilintervalls aufgrund sehr kleiner absoluter Zahlenwerte, die in der *Least-square*-Approximation nicht so stark gewichtet werden, einen großen relativen Fehler  $|\Delta X_{11,12}^{(S)}| > 30\%$ .

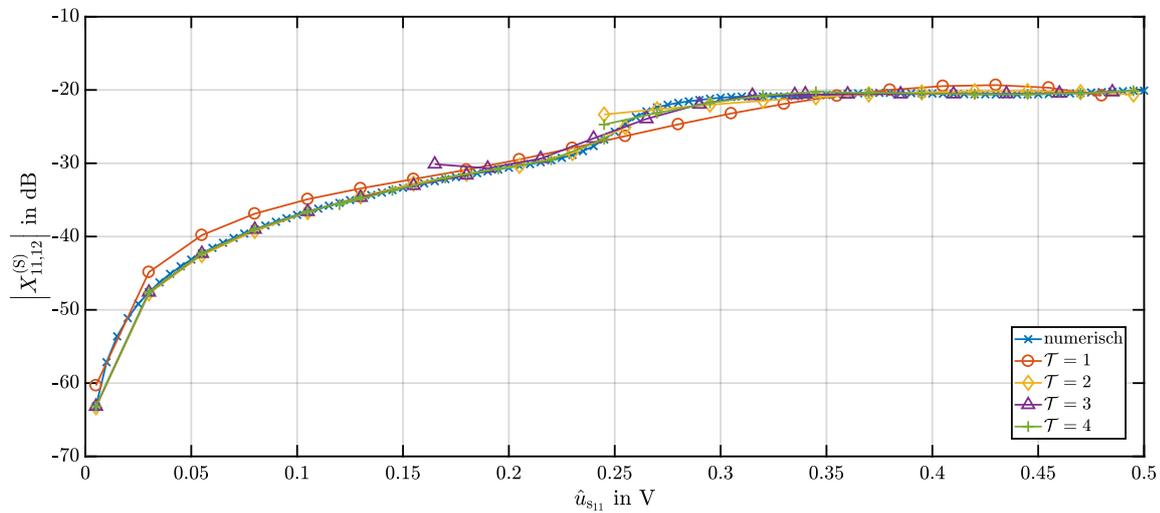
Aus der Betrachtung von Abb. 5.1 und Abb. 5.2 kann zusammengefasst werden, dass eine Approximation der einzelnen X-Parameter über ein komplexes Polynom in  $|A_{11}|$  der Form in (5.13) möglich ist. Dabei sollte das Verhalten jedes X-Parameters über  $|A_{11}|$  vor der Approximation bewertet werden und in Teilintervalle unterteilt werden, die nicht zwangsläufig gleich lang sein müssen. Durch eine Approximation über das komplexe Polynom können weitere Modellparameter eingespart werden. Wenn das Verhalten eines X-Parameters viele Teilintervalle erfordert, dass eine kleine oder keine Modellreduktion erfolgt, kann eine Kombination von Approximation und *Look-up-Table* erfolgen. Im nachfolgenden Abschnitt werden die Erkenntnisse dieses Abschnitts anhand eines Schaltungsbeispiels diskutiert.

## 5.2. Beispiel: LNA

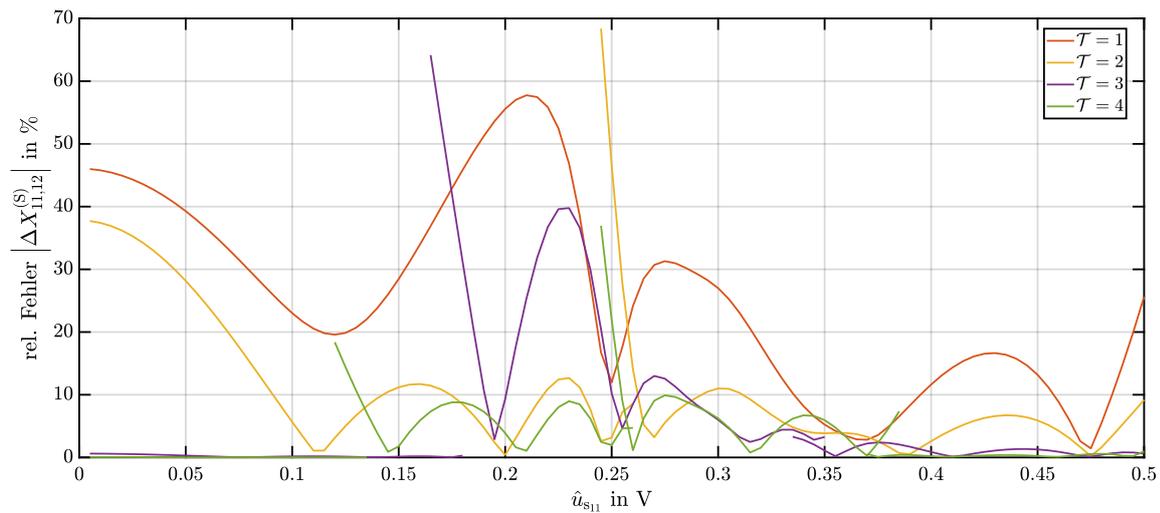
In diesem Abschnitt wird anhand des Beispiels unsymmetrischer rauscharmer Verstärker - englisch: *low noise amplifier* (LNA) - (vgl. z. B. [68]) in Abb. 5.3 gezeigt, welche Vor- und Nachteile die beiden Ansätze gegenüber dem jeweils anderen besitzen. Dazu werden die Testfälle der beiden letzten Abschnitte, Ein- und Zweitonanregung, angewandt. Zunächst wird der LNA mit der Eintonanregung (5.2) angeregt. Die Streuvariablen  $B_{mk}$  werden über die X-Parameter in (5.3) und über den Volterra-reihenbasierten S-Parametersatz in (5.8) beschrieben. Aus der Vergleichssimulation, die mit der *Harmonic Balance* in *Cadence Virtuoso Design Framework* gewonnen wird, kann der Großsignal-X-Parameter  $X_{11}^{(F)}$  für jeden Wert von  $|A_{11}|$  über (4.43) direkt bestimmt werden. Über eine Variation von  $\hat{u}_{s1} = |A_{11}| \cdot 2\sqrt{Z_0} \in [10 \text{ mV}, 500 \text{ mV}]$  werden verschiedene Datenpunkte für eine Approximation mit einem Polynom in  $|A_{11}|$  der Ordnung 7 aus (5.11a) gewonnen. Die Koeffizienten dieses Polynoms werden mit Hilfe des überbestimmten Gleichungssystems (5.14) berechnet. Die aufwändige Berechnung der Volterra-Reihe über das in Abschnitt 3.1.2 vorgestellte Verfahren ist hingegen auf die Ordnung  $D = 3$  beschränkt. In Abb. 5.4 sind die zugehörigen Simulationsergebnisse zu sehen. Für kleine Amplituden  $\hat{u}_{s1} \sim |A_{11}|$  sind die Verläufe der Volterra-reihenbasierten S-Parameter und der polynomiellen X-Parameterapproximation nahezu gleich der Vergleichssimulation aus *Cadence Virtuoso Design Framework*. Im Übergangsbereich ab  $\hat{u}_{s1} = 150$  mV weichen die Verläufe von der Vergleichssimulation ab. Durch die Welligkeit des Polynoms ist dabei zunächst sogar der Volterra-reihenbasierte Ansatz näher an der Vergleichssimulation als die X-Parameterapproximation.



(a)



(b)



(c)

Abb. 5.2.: X-Parameter-Vergleich numerischer Datenpunkte und auf  $\mathcal{T} = \{1, 2, 3, 4\}$  Intervalle aufgeteilte polynomielle Ansätze aus (5.14): komplexe Darstellung  $X_{11,12}^{(S)}$  (a), der Betrag  $|X_{11,12}^{(S)}|$  (b) sowie der relative Fehler der polynomiellen Ansätze (c) über  $\hat{u}_{s1} = |A_{11}| \cdot 2\sqrt{Z_0}$ .

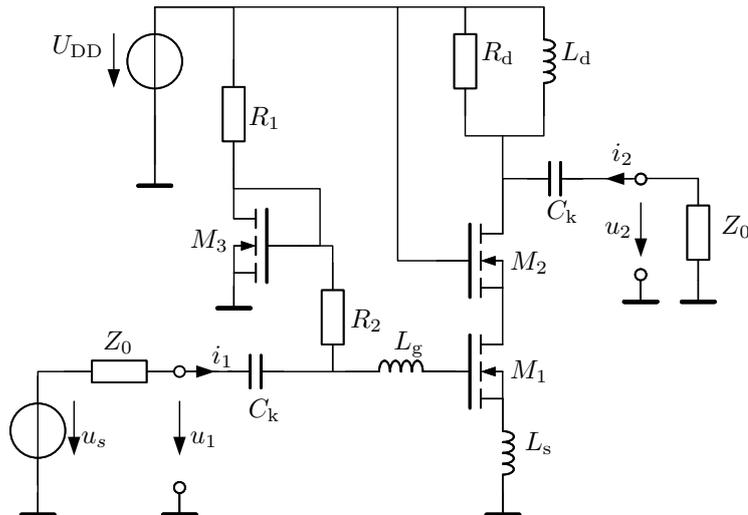


Abb. 5.3.: Unsymmetrischer LNA.

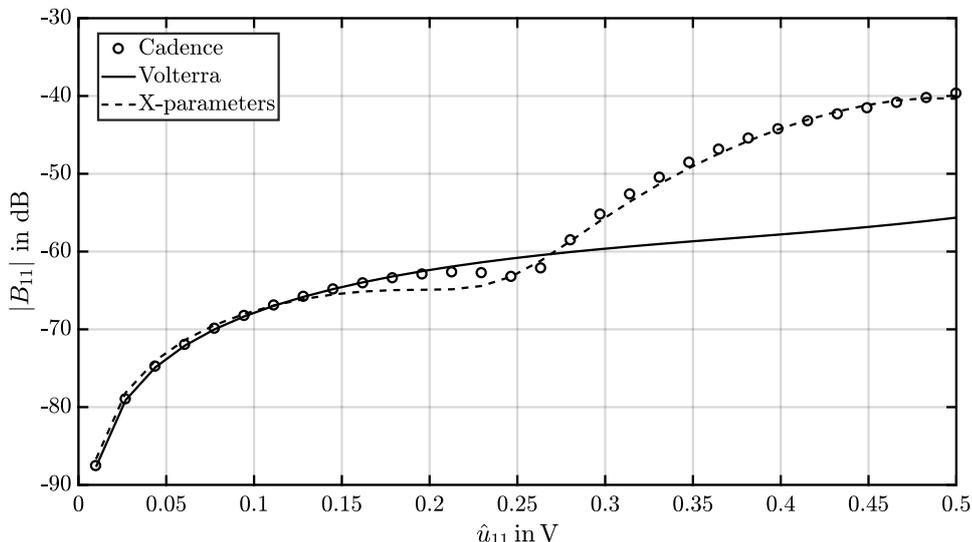


Abb. 5.4.:  $|B_{11}|$  über  $\hat{u}_{s1} = |A_{11}| \cdot 2\sqrt{Z_0}$ , Vergleich der Volterra-reihenbasierten S-Parameter und X-Parameterapproximation mit *Cadence Virtuoso Design Framework*.

Allerdings können letztere das nichtlineare Verhalten bei größeren Signalamplituden nachbilden. Damit die Volterra-reihenbasierten S-Parameter ebenfalls diesen Verlauf abbilden können, müsste die Reihenordnung weiter erhöht werden, was bedingt durch die Berechnung über das Kronecker-Produkt (3.11) zu einem viel größeren Rechenaufwand führen würde. Dabei ist die Konvergenz der Volterra-Reihe im betrachteten Wertebereich stets vorausgesetzt. Ab einem bestimmten Signalwert  $\hat{u}_{s1}$  ist auch das nicht mehr gewährleistet, da der Haupttransistor  $M_1$  den aktiven Bereich verlässt und sein Verhalten nicht mehr schwach nichtlinear ist. In Abb. 5.5 ist beispielhaft die Streuvariable  $B_{11}$  in der komplexen Ebene vergleichend für vier verschiedene Werte der Amplitude  $\hat{u}_{s1} \sim |A_{11}|$  und variierende Werte der Phase  $\phi_{A_{11}} \in [0^\circ, 360^\circ]$  dargestellt. Der in Abb. 5.4 beobachtete Trend spiegelt sich auch in dieser Darstellung wider.

Im Folgenden wird die Zweitonanregung aus (5.6) am Eingangstor des LNA angelegt. Daraus ergibt sich für die X-Parameter der Ansatz (5.7). In Abb. 5.6 ist der Einfluss der zweiten Harmonischen am Eingang  $\hat{u}_{s2} \sim |A_{12}|$  auf die reflektierte Streuvariable  $B_{11}$  in der komplexen Ebene unter Variation der

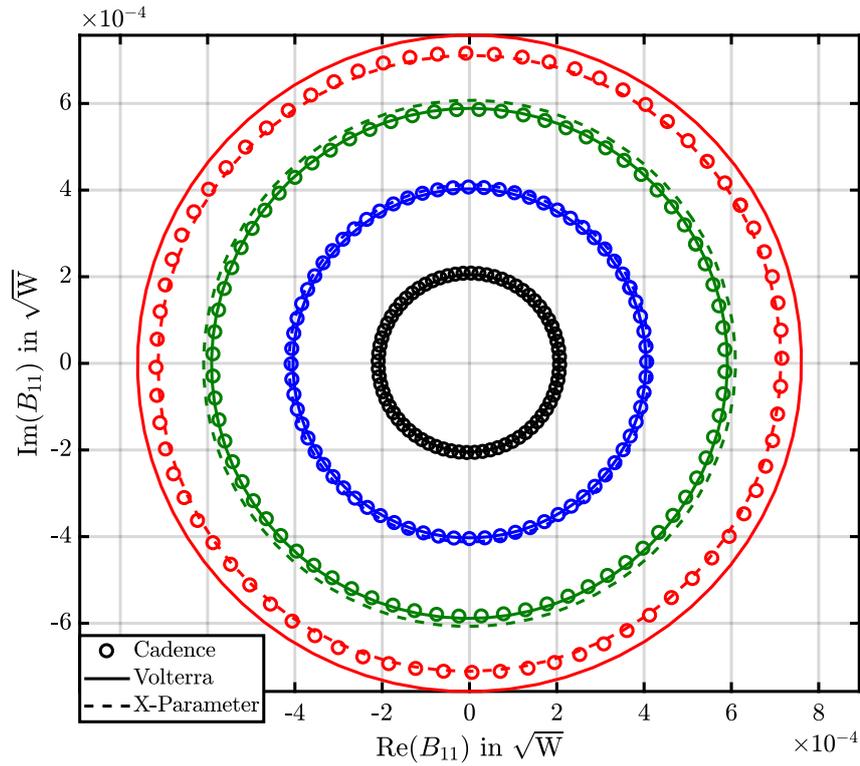


Abb. 5.5.:  $B_{11}$  bei Eintonanregung in der komplexen Ebene für verschiedene Werte  $\hat{u}_{s1} = 50$  mV (schwarz),  $\hat{u}_{s1} = 100$  mV (blau),  $\hat{u}_{s1} = 150$  mV (grün),  $\hat{u}_{s1} = 200$  mV (rot).

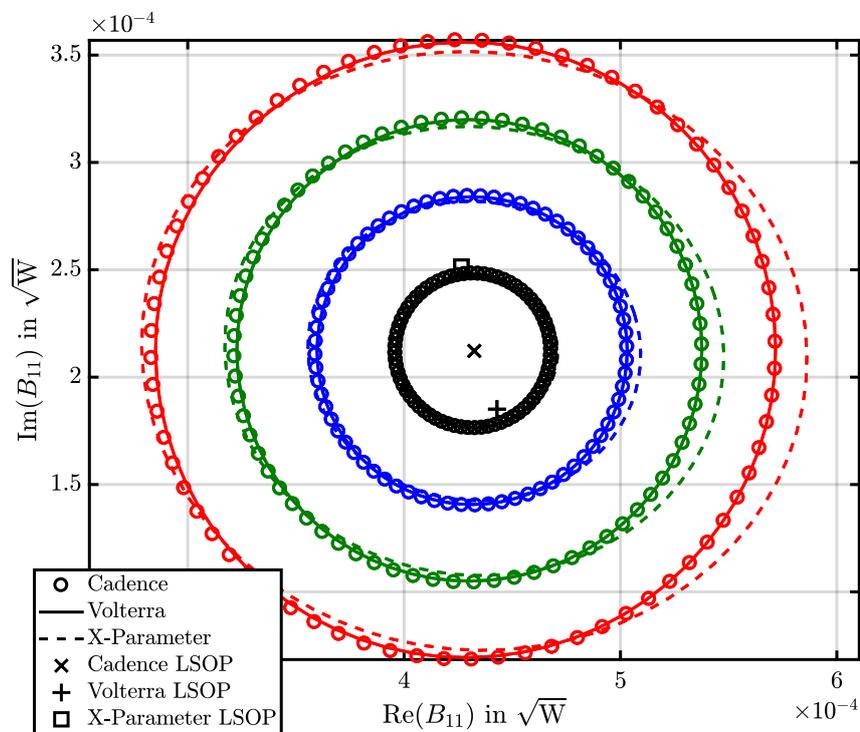


Abb. 5.6.:  $B_{11}$  in der komplexen Ebene für  $\hat{u}_{s1} = 120$  mV und verschiedene  $\hat{u}_{s2} = 30$  mV (schwarz),  $\hat{u}_{s2} = 60$  mV (blau),  $\hat{u}_{s2} = 90$  mV (grün),  $\hat{u}_{s2} = 120$  mV (rot).

Tab. 5.4.: Zusätzliche Terme bei positiven Frequenzen der Streuvariablen  $B_{mk,d}$  bis zur 3. Ordnung für eine Zweitonanregung, die vom PHD-Ansatz aufgrund höherer Ordnung von  $|A_{12}|$  nicht berücksichtigt werden

$\mathbf{q}$	Frequenz	$B_{mk,d}$
$d = 2$		
(1, 0, 0, 1)	0	$S_{m;1^2}(2\omega_0, -2\omega_0)A_{12}^*A_{12}$
(0, 0, 0, 2)	$4\omega_0$	$S_{m;1^2}(\omega_1, \omega_1)A_{12}^2$
$d = 3$		
(1, 0, 1, 1)	$\omega_0$	$S_{m;1^3}(-2\omega_0, 2\omega_0, \omega_0)A_{12}^*A_{12}A_{11}$
(1, 0, 0, 2)	$2\omega_0$	$S_{m;1^3}(-2\omega_0, 2\omega_0, 2\omega_0)A_{12}^*A_{12}^2$
(0, 1, 0, 2)	$3\omega_0$	$S_{m;1^3}(-\omega_0, 2\omega_0, 2\omega_0)A_{11}^*A_{12}^2$
(0, 0, 1, 2)	$5\omega_0$	$S_{m;1^3}(\omega_0, 2\omega_0, 2\omega_0)A_{11}A_{12}^2$
(0, 0, 0, 3)	$6\omega_0$	$S_{m;1^3}(-2\omega_0, -2\omega_0, -2\omega_0)(A_{12}^*)^3$

Phase  $\phi_{A_{12}} \in [0^\circ, 360^\circ]$  betrachtet. Da die LSOP aus (5.5) der beiden Ansätze leicht unterschiedlich sind (vgl. Abb. 5.4), wurden die Verläufe zugunsten der besseren Vergleichbarkeit um die Differenz zum LSOP der Vergleichssimulation verschoben. Für den vergleichsweise kleinen, festen Wert von  $\hat{u}_{s1} = 120$  mV ergeben sich für verschiedene Werte  $\hat{u}_{s2} = 30$  mV (schwarz),  $\hat{u}_{s2} = 60$  mV (blau),  $\hat{u}_{s2} = 90$  mV (grün),  $\hat{u}_{s2} = 120$  mV (rot) unterschiedliche Ergebnisse. Für kleine  $\hat{u}_{s2} = |A_{12}| \cdot 2\sqrt{Z_0}$  sind beide Ansätze nahezu identisch. Je größer die Amplitude der zweiten Harmonischen wird desto mehr weicht der X-Parameteransatz von der Vergleichssimulation ab, wohingegen die Volterra-reihenbasierten S-Parameter das Verhalten der Vergleichssimulation sehr gut abbilden können. Das liegt daran, dass in der vollständigen Volterra-Reihe dritter Ordnung zusätzlich zu den Termen in (5.9) bzw. (5.10) noch Terme vorhanden sind, die mindestens quadratisch im zusätzlichen Signal  $A_{12}$  sind. Im Fall des Beispiels auf der Fundamentalfrequenz  $B_{11}$  ist dieser zusätzliche Term der sog. *desertization*-Anteil dritter Ordnung [9]

$$B_{11,des} = (S_{m;1^3}(\omega_0, 2\omega_0, -2\omega_0) \cdot |A_{11}|) |A_{12}|^2 \cdot P. \quad (5.17)$$

In Tab. 5.4 sind weitere nicht vom PHD-Ansatz berücksichtigten Terme dritter Ordnung aufgelistet. Aufgrund der spektralen Linearisierung der zugrunde liegenden Beschreibungsfunktion sind die X-Parameter (4.38) nur linear in den zusätzlichen Signalanteilen  $A_{nl}$ , wodurch sie den Verlauf der Streuvariablen  $B_{mk}$  bei einer Verletzung der Annahme  $|A_{11}| \gg |A_{nl}| \forall (n, l) \neq (1, 1)$  aus (4.34) nicht mehr folgen können. In Abb. 5.7 ist dieser Trend über  $\hat{u}_{s2}$  am Beispiel  $B_{11}$  zu beobachten.

In Abhängigkeit des Kleinsignals  $A_{12}$  ist der Volterra-reihenbasierte S-Parameteransatz über einen größeren Wertebereich gültig als die X-Parameter, für deren Gültigkeit die Bedingung (4.34) gelten sollte. Andererseits ist es mit Hilfe der X-Parameter leichter möglich das Großsignalverhalten eines nichtlinearen Systems in Folge der Anregungsamplitude  $|A_{11}|$  zu berücksichtigen, wie der letzte Abschnitt zeigte. In Tab. 5.5 sind die Vor- und Nachteile der Volterra-reihenbasierten S-Parameter und in Tab. 5.6 die der X-Parameter zusammengefasst. In vielen Fällen sind die Vorteile des einen Ansatzes die Nachteile des anderen und umgekehrt.

### 5.3. Schlussfolgerungen und Erweiterung der X-Parameter

In diesem Kapitel wurden als Fortsetzung von [160] die in Kapitel 4 betrachteten X-Parameter mit den Volterra-reihenbasierten S-Parameter aus Kapitel 3 auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede verglichen. Es wurde festgestellt, dass im Falle schwach nichtlinearer Systeme - auf die die Volterra-Reihe beschränkt ist - eine Äquivalenz der beiden Ansätze erreicht werden könnte, sofern die Ordnung der Volterra-Reihe ausreichend groß ist. Darüber hinaus wurden die jeweiligen Vor- und Nachteile in einer Tabelle zusam-

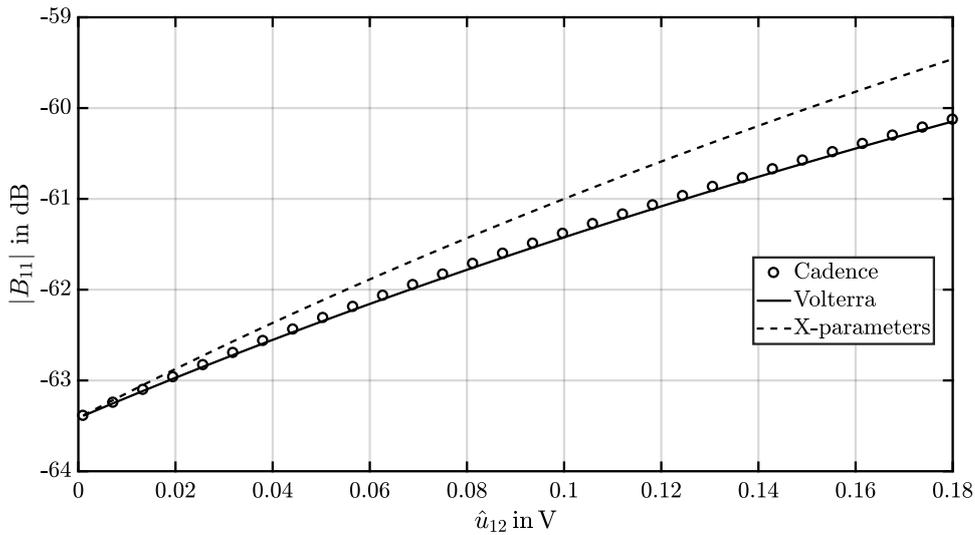


Abb. 5.7.:  $|B_{11}|$  über  $\hat{u}_{s2} = |A_{12}| \cdot 2\sqrt{Z_0}$  bei  $\hat{u}_{s1} = 180$  mV, Vergleich der Volterra-reihenbasierten S-Parameter und X-Parameterapproximation mit *Cadence Virtuoso Design Framework*.

Tab. 5.5.: Vor- und Nachteile der Volterra-reihenbasierten S-Parameter

Vorteile	Nachteile
Amplitude der zusätzlichen Signale ähnlich groß wie beim <i>Großsignal</i>	Nur für schwach nichtlineare Systeme gültig
Keine Beschränkungen der Eingangsfrequenzen	Nur für angepasste Zweitore sinnvoll
Genauigkeit kann durch Erhöhung der Ordnung verbessert werden	Stark steigender Berechnungsaufwand für höhere Ordnungen
<i>White-Box</i> -Ansatz ermöglicht theoretisch Berücksichtigung von Schaltungsparametern	Analytische Berechnung noch aufwändiger

Tab. 5.6.: Vor- und Nachteile der X-Parameter nach dem PHD-Ansatz

Vorteile	Nachteile
Verhaltensmodell stark nichtlinearer Systeme	Amplitudenbeschränkung $ A_{nl}  \ll  A_{11} $
Lineare Abhängigkeit der spektral überlagerten Kleinsignale $A_{nl}$	PHD-Ansatz lässt nur ganzzahlige Vielfache der Fundamentalen $\omega_0$ zu
Numerische Berechnung aus Mess- oder Simulationsdaten ( <i>Black-Box</i> -Ansatz)	Genauigkeit hängt vom Berechnungsansatz ab (Frequenz- oder Phasen-Offset-Methode)
Kommerziell verfügbar in Messtechnik und Simulation durch <i>Keysight</i> [62]	<i>Black-Box</i> -Ansatz berücksichtigt keine Schaltungsparameter

mengefasst.

Die wesentliche Annahme des zugrunde liegenden PHD-Ansatzes ist, dass die X-Parameter nur vom Betrag eines Großsignals  $|A_{11}|$  abhängen und alle zusätzlich auftretenden Signalanteile bei ganzzahligen Vielfachen der Fundamentalfrequenz  $\omega_0$  viel kleiner sind, d. h.  $|A_{nl}| \ll |A_{11}|$ . Abgeleitet aus einer allgemeinen spektralen Beschreibungsfunktion  $F_{mk}$  können die X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  das stark nichtlineare Verhalten infolge der Großsignalanregung, d. h. den sog. Großsignalarbeitspunkt - englisch: *large signal operating point* (LSOP) -, abbilden. Die Störung des LSOP wird über die X-Parameter  $X_{mk,nl}^{(S)}$  bzw.  $X_{mk,nl}^{(T)}$  linear in den weiteren Signalen  $|A_{nl}|$  berücksichtigt. Hier liegt der wesentliche Unterschied und größte Vorteil gegenüber der Volterra-Reihe, die den Gleichstromarbeitspunkt - englisch: *direct current operating point* (DCOP) - als Entwicklungspunkt hat und mit Reihengliedern höherer Ordnung die Störung des linearisierten Systems infolge des schwach nichtlinearen Verhaltens beschreibt. Aus der mathematischen Äquivalenz im Kleinsignalfall wurde in Abschnitt 5.1 festgestellt, dass sich die X-Parameter  $X_{mk}^{(\cdot)}$  als komplexe, in  $|A_{11}|$  polynomielle Funktionen approximieren lassen. Damit das stark nichtlineare Verhalten des LSOP mit der Volterra-Reihe wie mit den X-Parametern abgebildet werden könnte, müssten - Konvergenz der Reihe vorausgesetzt - in (5.5) unendlich viele Reihenglieder hinzugezogen werden.

Für größer werdende  $|A_{nl}| \ll |A_{11}|$  sind die X-Parameter aufgrund der linearen Berücksichtigung  $|A_{nl}|$  nicht mehr fähig das Systemverhalten abzubilden, wohingegen die Volterra-reihenbasierten S-Parameter durch Terme höherer Ordnung von  $|A_{nl}|$  dazu in der Lage sind. Voraussetzung dafür ist allerdings, dass das System schwach nichtlineares Verhalten aufweist. Es kann zwar eine Situation  $|A_{1l}| \approx |A_{11}|$  abgebildet werden, allerdings für nur für kleinere Werte  $|A_{11}|$  als bei den X-Parametern. Aus dieser Erkenntnis lassen sich die X-Parameter gezielt erweitern. Ein erster Ansatz zur quadratischen Erweiterung der X-Parameter findet sich in einer der Vorgängerarbeiten noch unter der Bezeichnung *Hot S<sub>22</sub>* [144]. Darauf aufbauend führt die Arbeitsgruppe aus Dublin um Cai und Brazil [15, 16, 18] neue Ansätze ein, in denen weitere X-Parameter eingeführt werden, durch die die Kleinsignale  $A_{nl}$  quadratisch eingehen. Daher werden z. B. Terme der Volterra-Reihe wie  $S_{m;13}(\omega_0, 2\omega_0, -2\omega_0)A_{11}A_{12}A_{12}^*$  berücksichtigt. Allerdings fehlt all diesen Ansätzen die mathematische Legitimation. So werden zwar für die unterschiedlichen Kleinsignale Terme höherer Ordnung eingeführt, allerdings werden diese unabhängig von anderen Kleinsignalen - wie im linearen Fall - dem LSOP überlagert. Die Betrachtung mit der Volterra-Reihe zeigt, dass bei mehr als einem Kleinsignal  $A_{nl}$  neben dem Großsignal  $A_{11}$  Terme vorkommen, die die verschiedenen  $A_{nl}$  verknüpfen. So trägt bei Berücksichtigung der Signale  $A_{12}$  und  $A_{13}$  der Term 2. Ordnung  $S_{m;12}(-2\omega_0, 3\omega_0)A_{12}^*A_{13}$  direkt zum Fundamentalsignal  $B_{m1}$  bei. Sobald die vermeintlichen Kleinsignale  $A_{nl}$  nicht mehr viel kleiner sind als das Großsignal  $A_{11}$ , gewinnen diese Terme an Einfluss, den das X-Parametermodell und auch die erweiterten Ansätze [15, 16, 18] nicht abbilden können. In diesem Fall ist eine vollständige Ordnungserhöhung der Taylor-Reihenentwicklung von  $F_{mk}$  aus (4.28) nötig. Dies wird im nachfolgenden Kapitel 6 behandelt.

Ein weiterer Vorteil der Volterra-reihenbasierten S-Parameter ist, dass beliebige Frequenzen betrachtet werden können. Anders als bei den bisher betrachteten X-Parametern können Spektralanteile, wie z. B.  $S_{m;12}(k\omega_0, l\omega_1)A_1(k\omega_0)A_1(l\omega_1)$  mit  $\omega_1 \neq k\omega_0$  und  $k \in \mathbb{N}$ , beschrieben werden, die nicht bei ganzzahligen Vielfachen einer Fundamentalfrequenz liegen. Es existiert allerdings eine Erweiterung der X-Parameter zur Berücksichtigung derartiger Frequenzen, um z. B. Mischer zu modellieren [117, 166]. Diese X-Parameter werden für zwei unabhängige Fundamentalfrequenzen in Kapitel 8 betrachtet und mit Hilfe der in diesem und der nachfolgenden Kapitel gewonnenen Erkenntnisse erweitert.

## 6. X-Parameter höherer Ordnung

In diesem Kapitel wird die Bedingung  $|A_{11}| \gg |A_{nl}| \forall (n, l) \neq (1, 1)$  aus (4.34) als Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit der X-Parameter durch Ordnungserhöhung der Taylor-Reihenentwicklung der spektralen Abbildungsfunktion (4.27) abgeschwächt. In der Arbeit von Verspecht [144] wird auf Basis des Konzepts *Hot-S<sub>22</sub>* - einer Vorstufe der X-Parameter - die Möglichkeit der Ordnungserhöhung im Zusammenhang mit der Beschreibungsfunktion (BF)  $F_{mk}$  genannt. In den Arbeiten von Cai und Brazil [15, 16] wird darauf aufbauend die Ordnung des polyharmonische Verzerrung - englisch: *polyharmonic distortion* (PHD)-Ansatzes erhöht und als quadratische polyharmonische Verzerrung - englisch: *quadratic polyharmonic distortion* (QPHD)-Ansatz bezeichnet.

Dabei wird in [15] festgestellt, dass die Mischterme der Kleinsignale und derer komplex konjugierter, d. h.  $A_{nl}A_{nl}^*$ , vernachlässigt werden können, wodurch eine geringere Modellkomplexität resultiert, was als reduziertes Polynom - engl.: *reduced polynomial* (RP) bezeichnet wird. In der kurz darauf erschienenen Arbeit [16] wurde der komplette QPHD-Ansatz verwendet und durch einen empirisch bestimmten Wichtungsfaktor  $\alpha_{mk, nl}(|A_{11}|, \Gamma_L)$  an die Lastimpedanz angepasst. Die Lastabhängigkeit wird im Detail in Abschnitt 7 betrachtet.

### 6.1. HOPHD-Ansatz: Kleinsignale ohne Wechselwirkung

Im Folgenden soll zunächst der Fall untersucht werden, dass nur ein weiteres Kleinsignal  $A_{nl}$  neben dem Großsignal  $A_{11}$  vorhanden ist. Die spektrale Abbildungsfunktion aus (4.33) wird mit

$$\tilde{A}_{nl} = A_{nl}P^{-l} \quad \text{und} \quad \tilde{B}_{mk} = B_{mk}P^{-k} \quad (6.1a)$$

in diesem Fall zu

$$\tilde{B}_{mk} = F_{mk} \left( |A_{11}|, \tilde{A}_{nl}, \tilde{A}_{nl}^* \right). \quad (6.1b)$$

Zur Erhöhung der Genauigkeit des X-Parametermodells mit größer werdendem  $|A_{nl}|$  mit  $(n, l) \neq (1, 1)$  wird anders als in (4.37) die zweidimensionale Taylor-Reihenentwicklung [80] um den Großsignalarbeitspunkt - englisch: *large signal operating point* (LSOP) - nicht nach der ersten Ordnung abgebrochen, sondern bis zur  $D$ -ten Ordnung fortgesetzt

$$\tilde{B}_{mk} \approx \sum_{d=0}^D \frac{1}{d!} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}} \tilde{A}_{nl} + \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}^*} \tilde{A}_{nl}^* \right)^d F_{mk_{\text{LSOP}}}, \quad (6.2)$$

wobei

$$F_{mk_{\text{LSOP}}} = F_{mk}(|A_{11}|, \tilde{A}_{nl}, \tilde{A}_{nl}^*) \Big|_{(|A_{11}|, 0, 0)}$$

wie in (4.36) gilt. Der Differentialoperator aus (6.2) ist wie folgt anzuwenden

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}} \tilde{A}_{nl} + \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}^*} \tilde{A}_{nl}^* \right)^0 F_{mk_{\text{LSOP}}} = F_{mk_{\text{LSOP}}}, \quad (6.3a)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}} \tilde{A}_{nl} + \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}^*} \tilde{A}_{nl}^* \right)^1 F_{mk_{\text{LSOP}}} = \frac{\partial F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial \tilde{A}_{nl}} \tilde{A}_{nl} + \frac{\partial F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial \tilde{A}_{nl}^*} \tilde{A}_{nl}^*, \quad (6.3b)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}} \tilde{A}_{nl} + \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}^*} \tilde{A}_{nl}^* \right)^2 F_{mk_{\text{LSOP}}} = \frac{\partial^2 F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial \tilde{A}_{nl}^2} \tilde{A}_{nl}^2 + 2 \frac{\partial^2 F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial \tilde{A}_{nl} \partial \tilde{A}_{nl}^*} \tilde{A}_{nl} \tilde{A}_{nl}^* + \frac{\partial^2 F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial (\tilde{A}_{nl}^*)^2} (\tilde{A}_{nl}^*)^2, \quad (6.3c)$$

⋮

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}} \tilde{A}_{nl} + \frac{\partial}{\partial \tilde{A}_{nl}^*} \tilde{A}_{nl}^* \right)^d F_{mk\text{LSOP}} = \sum_{q=0}^d \binom{d}{q} \frac{\partial^d F_{mk\text{LSOP}}}{\partial \tilde{A}_{nl}^{d-q} \partial (\tilde{A}_{nl}^*)^q} \tilde{A}_{nl}^{d-q} (\tilde{A}_{nl}^*)^q. \quad (6.3d)$$

Die partiellen Ableitungen können als Erweiterung von (4.38) mit  $\frac{1}{d!} \binom{d}{q} = \frac{1}{(d-q)!q!}$  ersetzt werden durch

$$X_{mk,nl}^{(S^0T^0)}(|A_{11}|) = F_{mk\text{LSOP}} = X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|), \quad (6.4a)$$

$$X_{mk,nl}^{(S^2)}(|A_{11}|) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{mk\text{LSOP}}}{\partial \tilde{A}_{nl}^2}, \quad (6.4b)$$

$$X_{mk,nl}^{(T^2)}(|A_{11}|) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{mk\text{LSOP}}}{\partial (\tilde{A}_{nl}^*)^2}, \quad (6.4c)$$

$$X_{mk,nl}^{(ST)}(|A_{11}|) = \frac{\partial^2 F_{mk\text{LSOP}}}{\partial \tilde{A}_{nl} \partial \tilde{A}_{nl}^*}, \quad (6.4d)$$

⋮

$$X_{mk,nl}^{(S^{d-q}T^q)}(|A_{11}|) = \frac{1}{(d-q)!q!} \frac{\partial^d F_{mk\text{LSOP}}}{\partial \tilde{A}_{nl}^{d-q} \partial (\tilde{A}_{nl}^*)^q}. \quad (6.4e)$$

Durch die Substitution von (6.3d) mit (6.4e) wird (6.2) zu

$$\tilde{B}_{mk} \approx \sum_{d=0}^D \sum_{q=0}^d X_{mk,nl}^{(S^{d-q}T^q)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{nl}^{d-q} (\tilde{A}_{nl}^*)^q. \quad (6.5)$$

Daraus ergeben sich mit  $D = 1$  für die bisher betrachtete Signalkombination aus dem Großsignal  $A_{11}$  und dem einzelnen Kleinsignal  $A_{nl}$  aus (6.1) die X-Parameter aus (4.38), wobei die Doppelsumme über  $n$  und  $l$  wegfällt.

Sobald mehr als ein weiteres Kleinsignal in der X-Parametermodellierung höherer Ordnung berücksichtigt werden soll, gibt es zwei Möglichkeiten. In der ersten können die Einflüsse höherer Ordnung jedes Kleinsignals dem LSOP ebenso wie beim PHD unabhängig von anderen Kleinsignalen überlagert werden. Daher wird dieser Ansatz im Folgenden als polyharmonische Verzerrung höherer Ordnung - englisch: *higher order polyharmonic distortion* (HOPHD) - bezeichnet. So ergibt sich in (6.5) zusätzlich die Doppelsumme über  $n$  und  $l$  wie in (4.38)

$$\tilde{B}_{mk,\text{HOPHD}} \approx X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|) + \underbrace{\sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L_n}}_{(n,l) \neq (1,1)} \sum_{d=1}^D \sum_{q=0}^d X_{mk,nl}^{(S^{d-q}T^q)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{nl}^{d-q} (\tilde{A}_{nl}^*)^q. \quad (6.6)$$

Mit  $D = 2$  ergibt sich daraus der QPHD-Ansatz aus [16]

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mk,\text{QPHD}} \approx & X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|) + \underbrace{\sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L_n}}_{(n,l) \neq (1,1)} X_{mk,nl}^{(S)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{nl} + X_{mk,nl}^{(T)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{nl}^* \\ & + X_{mk,nl}^{(S^2)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{nl}^2 + X_{mk,nl}^{(T^2)}(|A_{11}|) (\tilde{A}_{nl}^*)^2 + X_{mk,nl}^{(ST)}(|A_{11}|) |\tilde{A}_{nl}|^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Im allgemeineren, zweiten Fall muss - anders als für (6.6) - angenommen werden, dass sich die Kleinsignale  $A_{nl}$  untereinander beeinflussen und Mischterme erzeugen. Im folgenden Teilabschnitt wird gezeigt welche Änderungen an (6.6) vorzunehmen sind, um diese Mischterme zu berücksichtigen.

## 6.2. MIT-Ansatz: Kleinsignale mit Wechselwirkung

Ausgangspunkt der Betrachtungen in diesem Abschnitt ist wie im vorherigen Abschnitt die BF aus (4.33)

$$\tilde{B}_{mk} = F_{mk} \left( |A_{11}|, \tilde{A}_{12}, \tilde{A}_{12}^*, \dots, \tilde{A}_{nl}, \tilde{A}_{nl}^*, \dots \right) \quad (6.8)$$

mit der in (6.1a) eingeführten Kurzschreibweise  $\tilde{A}_{nl}, \tilde{B}_{mk}$  für die Kleinsignale am Tor  $n$  bei der  $l$ -ten Harmonischen der Grundfrequenz  $\omega_0$ .

Anders als im letzten Abschnitt sollen die unterschiedlichen Kleinsignalanteile Einfluss aufeinander ausüben. Daher muss die zweidimensionale Taylor-Reihe aus (6.2), die für jedes Kleinsignal  $\tilde{A}_{nl}$  einzeln im LSOP entwickelt wurde und anschließend in (6.6) additiv überlagert wurde, in eine allgemeine mehrdimensionale Taylor-Reihe mehrerer Veränderlicher überführt werden. Dazu wird im Folgenden die Multi-Index-Notation [7, 121] für den Variablenvektor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_L) \in \mathbb{C}^L$  verwendet:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_L) \in \mathbb{N}_0^L \quad \text{heißt ein Multi-Index, (6.9a)}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_L \quad \text{seine Ordnung, (6.9b)}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_L! \quad \alpha\text{-Fakultät, (6.9c)}$$

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_L^{\alpha_L} \quad \text{heißt das Monom vom Exponenten } \alpha, \text{ (6.9d)}$$

$$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_L \pm \beta_L) \quad \text{Addition/Subtraktion von Multi-Indizes, (6.9e)}$$

$$\partial^\alpha f(\mathbf{x}) = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_L^{\alpha_L} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_L^{\alpha_L}} f(\mathbf{x}) \quad \text{mit } \partial_i f = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \partial^0 f = f. \quad (6.9f)$$

Mit dieser Notation ergibt sich für die analytische Funktion  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{C}^L \rightarrow \mathbb{C}$  die Taylor-Reihe der Ordnung  $D$  im Entwicklungspunkt  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0L})$  zu

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_{|\alpha| \leq D} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\alpha. \quad (6.10)$$

Angewandt auf die Beschreibungsfunktion (6.8) wird der Variablenvektor  $\mathbf{x} = (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}^*)$  in zwei Teilvektoren mit den komplexen Amplituden der Kleinsignale  $\tilde{\mathbf{A}}$  und deren komplex Konjugierte  $\tilde{\mathbf{A}}^*$  aufgeteilt. Für die Kleinsignalvektoren gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= (\tilde{A}_{12}, \dots, \tilde{A}_{nl}, \dots, \tilde{A}_{NL_N}) \quad \text{und} \\ \tilde{\mathbf{A}}^* &= (\tilde{A}_{12}^*, \dots, \tilde{A}_{nl}^*, \dots, \tilde{A}_{NL_N}^*) \in \mathbb{C}^L \quad \text{mit } L = \sum_{n=1}^N L_n - 1, \end{aligned} \quad (6.11)$$

wobei  $L_n$  die jeweils höchste Harmonische am Tor  $n$  des N-Tors aus (A.8) ist und die  $-1$  das Großsignal  $A_{11}$  ausschließt. Durch die zugehörige Aufteilung des Multi-Index lässt sich das Monom von  $\mathbf{x}$  umschreiben

$$\mathbf{x}^\alpha = (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}^*)^\alpha = \tilde{\mathbf{A}}^\sigma (\tilde{\mathbf{A}}^*)^\tau \quad \text{mit } \sigma = (\alpha_1, \dots, \alpha_L) \quad \text{und} \quad \tau = (\alpha_{L+1}, \dots, \alpha_{2L}) \in \mathbb{N}_0^L. \quad (6.12)$$

Unter Beachtung der Definitionen in (6.9) ergibt sich für die Fakultät des Multi-Index  $\alpha! = \sigma! \tau!$  und für die partielle Ableitung  $\partial^\alpha = \partial^\sigma \partial^\tau = (\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_L^{\alpha_L})(\partial_{L+1}^{\alpha_{L+1}} \dots \partial_{2L}^{\alpha_{2L}})$ . Daraus folgt für die Beschreibungsfunktion aus (6.8) mit dem LSOP aus (4.36) als Entwicklungspunkt, was  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  in (6.10) entspricht,

$$\tilde{B}_{mk} \approx \sum_{|\sigma|+|\tau| \leq D} \frac{1}{\sigma! \tau!} \partial^\sigma \partial^\tau F_{mk\text{LSOP}} \tilde{\mathbf{A}}^\sigma (\tilde{\mathbf{A}}^*)^\tau. \quad (6.13)$$

Durch eine Ersetzung der partiellen Ableitungen - wie in (4.38) bzw. (6.4e) - können mit der Notation der Multi-Index-Taylor-Reihe (MIT) aus (6.9)ff. X-Parameter höherer Ordnung

$$X_{mk}^{(S^\sigma T^\tau)}(|A_{11}|) := \frac{1}{\sigma! \tau!} \partial^\sigma \partial^\tau F_{mk\text{LSOP}} \quad (6.14a)$$

Tab. 6.1.: Allgemeine Spektralanteile der Frequenz-Offset-Methode  $\omega_{\text{mix}} = \kappa\omega_0 + \lambda(l\omega_0 + \epsilon)$  und zugehörige HOPHD X-Parameter

$B_m(\omega_{\text{mix}})$	$\omega_{\text{mix}}$	$\kappa$	$\lambda$	X-Parameter $X_{mk}^{(\cdot)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B_{mk_{-2}}$	$k\omega_0 - 2\epsilon$	$k + 2l$	$-2$	$X_{mk,nl}^{(\text{T}^2)}, X_{mk,nl}^{(\text{ST}^3)}, \dots$
$B_{mk_{-}}$	$k\omega_0 - \epsilon$	$k + l$	$-1$	$X_{mk,nl}^{(\text{T})}, X_{mk,nl}^{(\text{ST}^2)}, \dots$
$B_{mk_0}$	$k\omega_0$	$k$	$0$	$X_{mk}^{(\text{F})}, X_{mk,nl}^{(\text{ST})}, \dots$
$B_{mk_{+}}$	$k\omega_0 + \epsilon$	$k - l$	$1$	$X_{mk,nl}^{(\text{S})}, X_{mk,nl}^{(\text{S}^2\text{T})}, \dots$
$B_{mk_{+2}}$	$k\omega_0 + 2\epsilon$	$k - 2l$	$2$	$X_{mk,nl}^{(\text{S}^2)}, X_{mk,nl}^{(\text{S}^3\text{T})}, \dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

definiert werden. Mit diesen kann die BF aus (6.8) durch

$$\tilde{B}_{mk,\text{MIT}} \approx \sum_{|\sigma|+|\tau|\leq D} X_{mk}^{(\text{S}^\sigma\text{T}^\tau)}(|A_{11}|) \tilde{\mathbf{A}}^\sigma (\tilde{\mathbf{A}}^*)^\tau \quad (6.14b)$$

über einen großen Gültigkeitsbereich approximiert werden, was im Folgenden als MIT-Ansatz bezeichnet wird.

### 6.3. Berechnung der X-Parameter höherer Ordnung

In diesem Abschnitt werden die im Vergleich zu Abschnitt 4.3 nötigen Erweiterungen zur Berechnung der X-Parameter höherer Ordnung gezeigt. Dazu wird zunächst der HOPHD-Ansatz (6.6) betrachtet.

#### 6.3.1. HOPHD-Ansatz

Beim HOPHD-Ansatz werden die Kleinsignale  $A_{nl}$  dem Großsignal  $A_{11}$  - wie beim PHD-Ansatz - einzeln überlagert. Sowohl der Abb. 6.1 als auch Tab. 6.1 ist zu entnehmen, dass die Frequenz-Offset-Methode aus Abschnitt 4.3.1 allein nicht ausreicht, um alle Parameter des HOPHD-Ansatzes zu bestimmen. Bereits für  $D = 2$ , d. h. dem QPHD-Ansatz aus (6.7), muss der Term  $X_{mk,nl}^{(\text{ST})}|A_{nl}|^2$  berücksichtigt werden, der ohne Frequenz-Offset  $\epsilon$  direkt dem LSOP überlagert ist:

$$\tilde{B}_{mk_0} = \tilde{B}_{mk_{\text{LSOP}}} + \tilde{B}_{mk_{\text{KS}}} = X_{mk}^{(\text{F})}(|A_{11}|) + X_{mk,nl}^{(\text{ST})}(|A_{11}|) \cdot |A_{nl}|^2. \quad (6.15)$$

Dieser entspricht der sog. *desensitization* [9] in der Volterra-Reihe, mit z. B.  $H_3(\omega_0, l\omega_0, -l\omega_0)$ . Für die Berechnung der X-Parameter erster Ordnung basierend auf dem PHD-Ansatz mittels der Frequenz-Offset-Methode in Abschnitt 4.3.1 wird davon ausgegangen, dass  $A_{nl} \ll A_{11}$  gilt. Dadurch ist  $B_{mk_0} \approx B_{mk_{\text{LSOP}}}$ , woraus  $X_{mk}^{(\text{F})}(|A_{11}|)$  direkt bestimmt wird. Im Fall der X-Parameter höherer Ordnung soll die Einschränkung für die Signale  $A_{nl}$  nicht gelten. Zur Bestimmung des Parameters  $X_{mk,nl}^{(\text{ST})}(|A_{11}|)$  muss in Anlehnung an die Phasen-Offset-Methode aus Abschnitt 4.3.2 für jeden Wert des Großsignals  $|A_{11}|$  ein Gleichungssystem von  $M \geq 2$  unterschiedlichen Anregungen  $\tilde{A}_{nl}$  mit  $P = \text{konst.}$  aufgestellt werden

$$\begin{pmatrix} 1 & |A_{nl,1}|^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & |A_{nl,M}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mk}^{(\text{F})}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(\text{ST})}(|A_{11}|) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk_0,1} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk_0,M} \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Anders als in der Phasen-Offset-Methode aus (4.44) zur Bestimmung der X-Parameter  $X_{mk,nl}^{(\text{S})}$  und  $X_{mk,nl}^{(\text{T})}$  verändert eine Variation der Phase  $\phi_{A_{nl}}$  die Koeffizientenmatrix nicht, weshalb die Amplitude des zu-

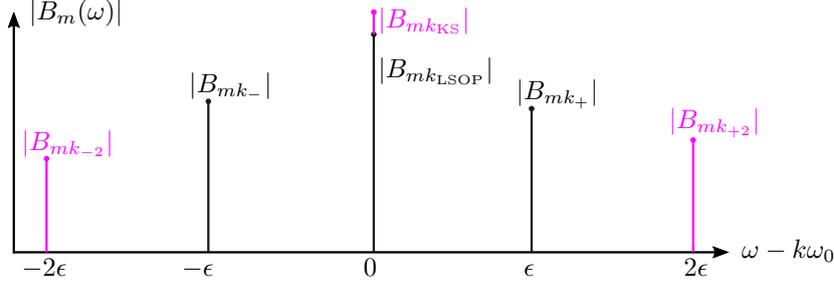


Abb. 6.1.: Prinzipbild zur Frequenz-Offset-Methode mit zwei Tönen:  $k$ -te Harmonische  $k\omega_0$  mit Seitenbändern bis zur 2. Ordnung: Anteile des PHD-Ansatzes (schwarz), Anteile des QPHD-Ansatzes (magenta)

sätzlichen Signals  $|A_{nl}|$  angepasst werden muss. Für  $M = 2$  ergibt sich eine quadratische Koeffizientenmatrix bzw. ein bestimmtes Gleichungssystem. Sofern zunächst über die Eintonanregung mit  $A_{11}$  und  $A_{nl} = 0$  der LSOP  $\tilde{B}_{mk_{LSOP}} = X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|)$  ermittelt wird, kann über  $\tilde{B}_{mk_{KS,0}} = \tilde{B}_{mk_0} - \tilde{B}_{mk_{LSOP}}$  aus der Überlagerungsmessung mit  $A_{nl} \neq 0$  der Parameter

$$X_{mk,nl}^{(ST)}(|A_{11}|) = \frac{\tilde{B}_{mk_{KS,0}}}{|A_{nl}|^2} \quad (6.17)$$

berechnet werden. Im QPHD-Ansatz können die weiteren Parameter höherer Ordnung aus der Frequenz-Offset-Methode direkt berechnet werden (vgl. (6.7), Tab. 6.1 und Abb. 6.1)

$$X_{mk,nl}^{(S^2)}(|A_{11}|) = \frac{\tilde{B}_{mk_{+2}}}{\tilde{A}_{nl}^2} \quad (6.18a)$$

$$X_{mk,nl}^{(T^2)}(|A_{11}|) = \frac{\tilde{B}_{mk_{-2}}}{(\tilde{A}_{nl}^*)^2}. \quad (6.18b)$$

Ab Ordnungen  $D \geq 3$  kommen auch bei den Seitenbändern  $B_{mk_{\pm}}$ ,  $B_{mk_{\pm 2}}$  etc. weitere Modellparameter hinzu, sodass hier ebenfalls ein Gleichungssystem zu lösen ist:

$$\begin{pmatrix} (\tilde{A}_{nl,1}^*)^2 & (\tilde{A}_{nl,1}^*)^2 |A_{nl,1}|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{A}_{nl,M}^*)^2 & (\tilde{A}_{nl,M}^*)^2 |A_{nl,M}|^2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mk}^{(T^2)}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(ST^3)}(|A_{11}|) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk_{-2,1}} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk_{-2,M}} \end{pmatrix}, \quad (6.19a)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{nl,1}^* & \tilde{A}_{nl,1}^* |A_{nl,1}|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_{nl,M}^* & \tilde{A}_{nl,M}^* |A_{nl,M}|^2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mk}^{(T)}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(ST^2)}(|A_{11}|) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk_{-,1}} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk_{-,M}} \end{pmatrix}, \quad (6.19b)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{nl,1} & \tilde{A}_{nl,1} |A_{nl,1}|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_{nl,M} & \tilde{A}_{nl,M} |A_{nl,M}|^2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mk}^{(S)}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(S^2T)}(|A_{11}|) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk_{+,1}} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk_{+,M}} \end{pmatrix}, \quad (6.19c)$$

$$\begin{pmatrix} (\tilde{A}_{nl,1})^2 & (\tilde{A}_{nl,1})^2 |A_{nl,1}|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\tilde{A}_{nl,M})^2 & (\tilde{A}_{nl,M})^2 |A_{nl,M}|^2 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mk}^{(S^2)}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(S^2T)}(|A_{11}|) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk_{+2,1}} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk_{+2,M}} \end{pmatrix}. \quad (6.19d)$$

Tab. 6.2.: Spektralanteile der Frequenz-Offset-Methode für eine Dreitonanregung  $\omega_{\text{mix}}(\lambda) = \kappa\omega_0 + \lambda_1(l_1\omega_0 + \epsilon_1) + \lambda_2(l_2\omega_0 + \epsilon_2)$  zur Bestimmung der zusätzlichen X-Parameter des MIT-Ansatzes der Ordnung  $D = 2$ .

$B_{mk\lambda}$	$\omega_{\text{mix}}$	$\kappa$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	X-Parameter $X_{mk}^{(\cdot)}$
$B_{mk--}$	$k\omega_0 - \epsilon_1 - \epsilon_2$	$k + l_1 + l_2$	-1	-1	$X_{mk}^{(S^{(0,0)T^{(1,1)}})}$
$B_{mk-+}$	$k\omega_0 - \epsilon_1 + \epsilon_2$	$k + l_1 - l_2$	-1	1	$X_{mk}^{(S^{(0,1)T^{(1,0)}})}$
$B_{mk+-}$	$k\omega_0 + \epsilon_1 - \epsilon_2$	$k - l_1 + l_2$	1	-1	$X_{mk}^{(S^{(1,0)T^{(0,1)}})}$
$B_{mk++}$	$k\omega_0 + \epsilon_1 + \epsilon_2$	$k - l_1 - l_2$	1	1	$X_{mk}^{(S^{(1,1)T^{(0,0)}})}$

Damit auf denselben Frequenzanteil weitere Anteile fallen, muss die zugehörige Ordnung des Anteils um zwei erhöht werden.

Alternativ kann auch im Sinne der Phasen-Offset-Methode ein Gleichungssystem mit allen X-Parametern außer den LSOP-Parametern  $X_{mk}^{(F)}$ , die wie oben beschrieben zuvor bestimmt werden, aufgestellt werden. Mit der in (6.1a) eingeführten Kurzschreibweise  $\tilde{A}_{nl}$  und  $\tilde{B}_{mknl} = \tilde{B}_{mk} - X_{mk}^{(F)}$  ergibt sich

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{A}_{nl,1} & \tilde{A}_{nl,1}^* & (\tilde{A}_{nl,1})^2 & (\tilde{A}_{nl,1}^*)^2 & |A_{nl,1}|^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_{nl,M} & \tilde{A}_{nl,M}^* & (\tilde{A}_{nl,M})^2 & (\tilde{A}_{nl,M}^*)^2 & |A_{nl,M}|^2 & \dots \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{nl}} \begin{pmatrix} X_{mk,nl}^{(S)}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(T)}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(S^2)}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(T^2)}(|A_{11}|) \\ X_{mk,nl}^{(ST)}(|A_{11}|) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mknl,1} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mknl,M} \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Durch eine reine Variation der Phase  $\phi_{A_{nl}}$  stehen in der fünften Spalte der Koeffizientenmatrix  $\tilde{\mathbf{A}}_{nl}$  der konstante Betrag  $|A_{nl}|^2$ . Mittels einer zusätzlichen Erhöhung des Betrags  $|A_{nl}|$  werden in dem Optimierungsproblem Datenpunkte berücksichtigt, bei denen das Modell durch die Terme höherer Ordnung dominiert wird, was folglich zu einer höheren Genauigkeit über einen größeren Wertebereich von  $|A_{nl}|$  führt.

### 6.3.2. MIT-Ansatz

Zur Bestimmung der zusätzlichen X-Parameter des MIT-Ansatzes (6.14) ist eine Erweiterung der Frequenz-Offset-Methode nötig. Der Entwicklungsordnung der Multi-Index-Taylor-Reihe (MIT) entsprechend müssen dazu  $D$  verschiedene der  $L$  zusätzlichen Signale aus  $\tilde{\mathbf{A}}$  in (6.11) gleichzeitig dem Großsignal  $A_{11}$  überlagert werden. Damit die entstehenden Mischprodukte eindeutig zugeordnet werden können, müssen die unterschiedlichen Signale  $A_{nl}$  unterschiedliche Frequenz-Offsets bekommen  $\omega_{l_i} = l_i\omega_0 + \epsilon_i$ , sodass sich die Mischprodukte bei den Frequenzen

$$\omega_{\text{mix}}(\lambda) = k\omega_0 + \sum_{i=1}^D \lambda_i \epsilon_i = \kappa\omega_0 + \sum_{i=1}^D \lambda_i \omega_{l_i} = \kappa\omega_0 + \sum_{i=1}^D \lambda_i (l_i\omega_0 + \epsilon_i) \quad (6.21)$$

ergeben, wobei  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $l_i \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D)$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{Z}$  und  $|\sum_{i=1}^D \lambda_i| \leq D$  sowie  $\kappa = k - \sum_{i=1}^D \lambda_i l_i$  gelten. In Tab. 6.2 ist beispielhaft für zwei zusätzliche Signale  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_{nl_1}, \tilde{A}_{nl_2})$  und der MIT-Ordnung  $D = 2$  dargestellt, aus welchen Frequenzanteilen die zusätzlichen X-Parameter des MIT-Ansatzes (6.14) bestimmt werden können. Abb. 6.2 zeigt die zusätzlichen Frequenzanteile des MIT-Ansatzes in grün, die Anteile des PHD-Ansatzes in schwarz und die zusätzlichen des QPHD-Ansatzes (6.7) in magenta. Bezü-

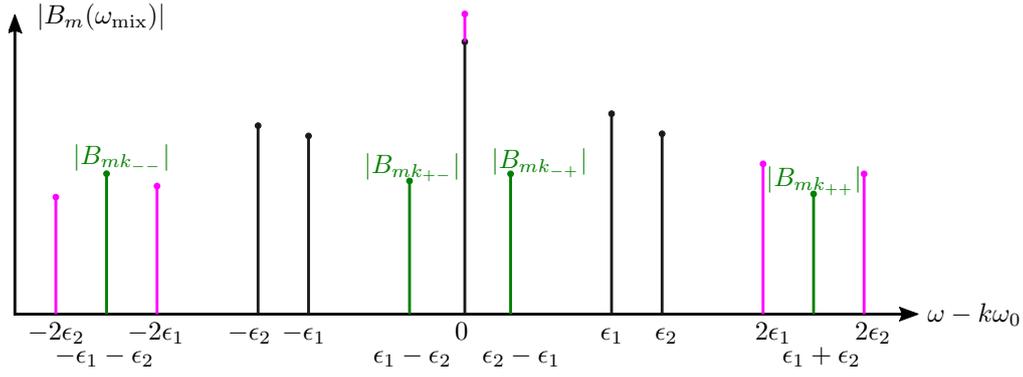


Abb. 6.2.: Prinzipbild zur Frequenz-Offset-Methode mit drei Tönen: Harmonische bei  $k\omega_0$  mit Seitenbändern bis zur 2. Ordnung: Anteile des PHD-Ansatz (schwarz), Anteile des QPHD-Ansatz (magenta), Anteile des MIT-Ansatz (grün)

lich der Frequenz-Offsets  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  müssen in einer Messumgebung - wie für die Frequenz-Offset-Methode für zwei Signale in Abschnitt 4.3.1 - Kompromisse eingegangen werden. Wieder gilt für eine Berechnung der X-Parameter aus einem Frequenzbereichssimulator, dass die Offsets  $\epsilon_i = 0$  sein können, sofern alle Signale bei unterschiedlichen Frequenzen vorliegen, d. h.  $l_i \neq 1$  und  $l_i \neq l_j \forall i, j \in \{1, \dots, D\}$ .

Sofern einem Mischprodukt bei  $\omega_{\text{mix}}$  nur ein MIT-X-Parameter zugeordnet werden kann, wird dieser wie zuvor im PHD-Ansatz (4.43) bzw. QPHD-Ansatz (6.18) berechnet. Für die vier zusätzlichen X-Parameter des MIT-Ansatzes im Beispiel aus Tab. 6.2 ergeben sich aus (6.14)

$$X_{mk}^{(S^{(0,0)T(1,1)})} = \frac{\tilde{B}_{mk--}}{\tilde{A}_{nl_1}^* \tilde{A}_{nl_2}^*} \quad (6.22a)$$

$$X_{mk}^{(S^{(0,1)T(1,0)})} = \frac{\tilde{B}_{mk-+}}{\tilde{A}_{nl_1}^* \tilde{A}_{nl_2}} \quad (6.22b)$$

$$X_{mk}^{(S^{(1,0)T(0,1)})} = \frac{\tilde{B}_{mk+-}}{\tilde{A}_{nl_1} \tilde{A}_{nl_2}^*} \quad (6.22c)$$

$$X_{mk}^{(S^{(1,1)T(0,0)})} = \frac{\tilde{B}_{mk++}}{\tilde{A}_{nl_1} \tilde{A}_{nl_2}}. \quad (6.22d)$$

Sobald für  $D > 2$  mehr als ein X-Parameter dem Mischprodukt  $\omega_{\text{mix}}(\lambda)$  mit  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D) = \sigma - \tau$  aus (6.21) zugeordnet werden kann, muss wie für den HOPHD-Ansatz in (6.19) ein Gleichungssystem gelöst werden, dessen Zeilen mit  $\tilde{B}_{mk_\lambda} = \tilde{B}_m(\omega_{\text{mix}}(\lambda))$  durch

$$\sum_{\sigma - \tau = \lambda} X_{mk}^{(S^{\sigma T \tau})} \tilde{\mathbf{A}}^\sigma (\tilde{\mathbf{A}}^*)^\tau = \tilde{B}_{mk_\lambda} \quad (6.23)$$

gebildet werden. In dem o. g. Beispiel für zwei zusätzliche Signale  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_{12}, \tilde{A}_{13})$  ergibt sich für  $B_{mk_{++}} = B_m(\omega_{\text{mix}}(\lambda = (1, 1)))$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{12,1} \tilde{A}_{13,1} & \tilde{A}_{12,1}^2 \tilde{A}_{13,1} \tilde{A}_{12,1}^* & \tilde{A}_{12,1} \tilde{A}_{13,1}^2 \tilde{A}_{13,1}^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_{12,M} \tilde{A}_{13,M} & \tilde{A}_{12,M}^2 \tilde{A}_{13,M} \tilde{A}_{12,M}^* & \tilde{A}_{12,M} \tilde{A}_{13,M}^2 \tilde{A}_{13,M}^* & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mk}^{(S^{(1,1)T(0,0)})} \\ X_{mk}^{(S^{(2,1)T(1,0)})} \\ X_{mk}^{(S^{(1,2)T(0,1)})} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk_{++},1} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk_{++},M} \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Darin ist wie in (6.19) zu sehen, dass eine Erhöhung der Ordnung um zwei nötig ist, um weitere Parameter

Tab. 6.3.: Spektralanteile der Frequenz-Offset-Methode für eine Dreitonanregung  $\omega_{\text{mix}}(\lambda) = \kappa\omega_0 + \lambda_1(l_1\omega_0 + \epsilon_1) + \lambda_2(l_2\omega_0 + \epsilon_2)$  zur Bestimmung der zusätzlichen MIT X-Parameter der Ordnung  $D = 3$ .

$B_{mk\lambda}$	$\omega_{\text{mix}}$	$\kappa$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	X-Parameter $X_{mk}^{(\cdot)}$
$B_{mk_0-}$	$k\omega_0 - \epsilon_2$	$k + l_2$	0	-1	$X_{mk,nl_2}^{(T)} = X_{mk}^{(S^{(0,0)T^{(0,1)}})}, X_{mk,nl_2}^{(ST^2)}, X_{mk}^{(S^{(1,0)T^{(1,1)}})}, \dots$
$B_{mk_0-}$	$k\omega_0 - \epsilon_1$	$k + l_1$	-1	0	$X_{mk,nl_1}^{(T)}, X_{mk,nl_1}^{(ST^2)} = X_{mk}^{(S^{(1,0)T^{(2,0)}})}, X_{mk}^{(S^{(0,1)T^{(1,1)}})}, \dots$
$B_{mk_0+}$	$k\omega_0 + \epsilon_1$	$k - l_1$	1	0	$X_{mk,nl_1}^{(S)}, X_{mk,nl_1}^{(S^2T)} = X_{mk}^{(S^{(2,0)T^{(1,0)}})}, X_{mk}^{(S^{(1,1)T^{(0,1)}})}, \dots$
$B_{mk_0+}$	$k\omega_0 + \epsilon_2$	$k - l_2$	0	1	$X_{mk,nl_2}^{(S)} = X_{mk}^{(S^{(1,0)T^{(0,0)}})}, X_{mk,nl_2}^{(S^2T)}, X_{mk}^{(S^{(1,1)T^{(1,0)}})}, \dots$

dem Anteil  $B_{mk\lambda}$  zuordnen zu können. Zur tabellarischen Veranschaulichung sind in Tab.6.3 weitere Anteile gezeigt.

Ebenso wie für den HOPHD-Ansatz kann auch für den MIT-Ansatz die Phasen-Offset-Methode benutzt werden. Dazu muss der Unbekanntenvektor des Gleichungssystems (6.20) um die zusätzlichen X-Parameter erweitert werden. Aus (6.20) wird für  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_{12}, \tilde{A}_{13})$  mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_{12,13} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{12,1}^* \tilde{A}_{13,1}^* & \tilde{A}_{12,1}^* \tilde{A}_{13,1} & \tilde{A}_{12,1} \tilde{A}_{13,1}^* & \tilde{A}_{12,1} \tilde{A}_{13,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_{12,M}^* \tilde{A}_{13,M}^* & \tilde{A}_{12,M}^* \tilde{A}_{13,M} & \tilde{A}_{12,1} \tilde{A}_{13,M}^* & \tilde{A}_{12,M} \tilde{A}_{13,M} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{nl} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{nl,1} & \tilde{A}_{nl,1}^* & (\tilde{A}_{nl,1})^2 & (\tilde{A}_{nl,1}^*)^2 & |A_{nl,1}|^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_{nl,M} & \tilde{A}_{nl,M}^* & (\tilde{A}_{nl,M})^2 & (\tilde{A}_{nl,M}^*)^2 & |A_{nl,M}|^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_{mk,nl} = \begin{pmatrix} X_{mk,nl}^{(S)} \\ X_{mk,nl}^{(T)} \\ X_{mk,nl}^{(S^2)} \\ X_{mk,nl}^{(ST)} \\ X_{mk,nl}^{(T^2)} \end{pmatrix} \quad (6.25a)$$

für das betrachtete Beispiel das erweiterte Gleichungssystem zur Berechnung von (6.14)

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{12} & \tilde{\mathbf{A}}_{13} & \tilde{\mathbf{A}}_{12,13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{mk,12} \\ \mathbf{X}_{mk,13} \\ X_{mk}^{(S^{(0,0)T^{(1,1)}})} \\ X_{mk}^{(S^{(0,1)T^{(1,0)}})} \\ X_{mk}^{(S^{(1,0)T^{(0,1)}})} \\ X_{mk}^{(S^{(1,1)T^{(0,0)}})} \\ X_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk_{nl,1}} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk_{nl,M}} \end{pmatrix}. \quad (6.25b)$$

Anders als beim HOPHD-Ansatz müssen Datenpunkte  $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{B}_{mk,KS})$  in das Gleichungssystem einbezogen werden, bei denen alle Elemente des Kleinsignalvektors  $\tilde{\mathbf{A}}$  von null verschieden sein müssen, d. h.  $\tilde{A}_{nl} \neq 0$ . Alternativ zur Berechnung über das Gleichungssystem mit allen Kleinsignal-X-Parametern  $X_{mk}^{(S^\sigma T^\tau)}$  kann auch erst der HOPHD-Ansatz über die Vorgehensweise des letzten Abschnitts bestimmt werden und anschließend können die zusätzlichen MIT-X-Parameter mit Hilfe eines weiteren Optimierungsproblems berechnet werden. Für das gezeigte Beispiel ergibt sich mit (6.6)

$$\tilde{\mathbf{A}}_{12,13} \cdot \begin{pmatrix} X_{mk}^{(S^{(0,0)T^{(1,1)}})} \\ X_{mk}^{(S^{(0,1)T^{(1,0)}})} \\ X_{mk}^{(S^{(1,0)T^{(0,1)}})} \\ X_{mk}^{(S^{(1,1)T^{(0,0)}})} \\ X_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk_1} - \tilde{B}_{mk, \text{HOPHD}_1} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk_M} - \tilde{B}_{mk, \text{HOPHD}_M} \end{pmatrix}. \quad (6.25c)$$

## 6.4. Beispiel: Klasse-C-Verstärker

In diesem Abschnitt werden die oben eingeführten Ansätze zur Ordnungserweiterung der X-Parameter am Beispiel eines Leistungsverstärkers mit *Source-Follower*-Ausgangsstufe, wie er in Abb. 6.3 gezeigt ist, qualitativ verglichen. Dabei können über den Spannungsteiler  $R_1$ ,  $R_2$  unterschiedliche Verstärkerklassen eingestellt werden. Die Schaltung wird im Folgenden in einem Arbeitspunkt der Klasse C in *Cadence Virtuoso Design Framework* aufgebaut und mit Hilfe der *Harmonic Balance* simuliert.

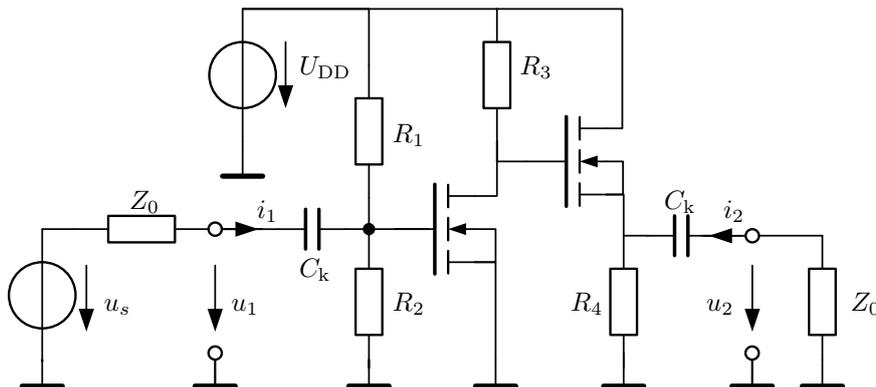


Abb. 6.3.: MOS-Leistungsverstärker mit *Source*-Spannungsteiler und *Source-Follower*-Ausgangsstufe.

Die Wechseleingangsspannung wird mit drei harmonischen Signalen eingestellt

$$u_s(t) = \hat{u}_{s1} \cos(\omega_0 t + \phi_{s1}) + \hat{u}_{s2} \cos(2\omega_0 t + \phi_{s2}) + \hat{u}_{s3} \cos(3\omega_0 t + \phi_{s3}), \quad (6.26)$$

sodass die Beschreibungsfunktion (6.8) mit den Streuvariablen aus Anhang A.1 in diesem Fall zu

$$\tilde{B}_{mk} = F_{mk} \left( |A_{11}|, \tilde{A}_{12}, \tilde{A}_{12}^*, \tilde{A}_{13}, \tilde{A}_{13}^* \right) \quad (6.27)$$

wird. Diese Dreiton-Beschreibungsfunktion wird mit den Ansätzen polyharmonische Verzerrung - englisch: *polyharmonic distortion* (PHD) - aus (4.39)

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mk, \text{PHD}} \approx & X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|) + X_{mk,12}^{(S)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{12} + X_{mk,12}^{(T)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{12}^* \\ & + X_{mk,13}^{(S)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{13} + X_{mk,13}^{(T)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{13}^*, \end{aligned} \quad (6.28)$$

quadratische polyharmonische Verzerrung - englisch: *quadratic polyharmonic distortion* (QPHD) - [16] aus (6.7)

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mk, \text{QPHD}} = & \tilde{B}_{mk, \text{PHD}} \\ & + X_{mk,12}^{(S^2)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{12}^2 + X_{mk,12}^{(T^2)}(|A_{11}|) \left( \tilde{A}_{12}^* \right)^2 + X_{mk,12}^{(ST)}(|A_{11}|) |A_{12}|^2 \\ & + X_{mk,13}^{(S^2)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{13}^2 + X_{mk,13}^{(T^2)}(|A_{11}|) \left( \tilde{A}_{13}^* \right)^2 + X_{mk,13}^{(ST)}(|A_{11}|) |A_{13}|^2, \end{aligned} \quad (6.29)$$

dem Ansatz reduziertes Polynom - engl.: *reduced polynomial* (RP) - aus [15]

$$\tilde{B}_{mk, \text{RP}} = \tilde{B}_{mk, \text{QPHD}} - X_{mk,12}^{(ST)}(|A_{11}|) |A_{12}|^2 - X_{mk,13}^{(ST)}(|A_{11}|) |A_{13}|^2, \quad (6.30)$$

dem in Abschnitt 6.2 eingeführten Ansatz der Multi-Index-Taylor-Reihe (MIT) (6.14) für  $D = 2$  und

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left( \tilde{A}_{12}, \tilde{A}_{13} \right)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mk,\text{MIT}} &= \tilde{B}_{mk,\text{QPHD}} \\ &+ X_{mk}^{(S^{(1,1)T(0,0)})} (|A_{11}|) \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{13} + X_{mk}^{(S^{(0,0)T(1,1)})} (|A_{11}|) \tilde{A}_{12}^* \tilde{A}_{13}^* \\ &+ X_{mk}^{(S^{(1,0)T(0,1)})} (|A_{11}|) \tilde{A}_{12} \tilde{A}_{13}^* + X_{mk}^{(S^{(0,1)T(1,0)})} (|A_{11}|) \tilde{A}_{12}^* \tilde{A}_{13} \end{aligned} \quad (6.31)$$

und in Anlehnung an den RP-Ansatz mit einem *multi-index reduced polynomial* (MIRP)-Ansatz

$$\tilde{B}_{mk,\text{MIRP}} = \tilde{B}_{mk,\text{MIT}} - X_{mk,12}^{(\text{ST})} (|A_{11}|) |A_{12}|^2 - X_{mk,13}^{(\text{ST})} (|A_{11}|) |A_{13}|^2 \quad (6.32)$$

angenähert. Dies geschieht anhand der Ergebnisse für die Komponenten der Streuvariablen am Eingangs- und Ausgangstor bei der Fundamentalfrequenz  $\omega_0$  und der fünften Harmonischen  $5\omega_0$ , d. h.  $B_{11}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{15}$  und  $B_{25}$ . Bei diesen Frequenzen wird der Einfluss der *Kleinsignalinteraktion* durch einen Mischterm zweiter Ordnung

$$\cos(2\omega_0 t + \phi_{s2}) \cdot \cos(3\omega_0 t + \phi_{s3}) = \frac{1}{2} (\cos(\omega_0 t - \phi_{s2} + \phi_{s3}) + \cos(5\omega_0 t + \phi_{s2} + \phi_{s3})) \quad (6.33)$$

besonders deutlich. In allen Simulationen gilt für das Großsignal  $\hat{u}_{s1} = 95 \text{ mV}$  und  $\phi_{s1} = 60^\circ$  bei der Fundamentalfrequenz  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 300 \text{ MHz}$ , woraus sich für ein an  $Z_0$  angepasstes Eingangstor über (A.9) und  $U_{s1} = 2\hat{u}_{s1}e^{j\phi_{s1}}$  die komplexe Streuvariable  $A_{11} = \frac{\hat{u}_{s1}}{\sqrt{Z_0}}e^{j\phi_{s1}}$  ergibt. Aus (4.31) ist ersichtlich, dass daher  $P = e^{j60^\circ}$  für ein  $Z_0 \in \mathbb{R}$  gilt. Des Weiteren werden die *Kleinsignale* immer so gewählt, dass für ihre Amplituden  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3}$  und ihre Winkel  $\phi_{s3} = -\frac{3}{4}\phi_{s2}$  gelten.

In Abb. 6.4 werden die Beträge der untersuchten Streuvariablen  $|B_{11}|$ ,  $|B_{21}|$ ,  $|B_{15}|$  und  $|B_{25}|$  in Abhängigkeit der Amplituden  $\hat{u}_{s3} = \hat{u}_{s2}$  und  $\hat{u}_{s2} \in [10 \text{ mV}, 100 \text{ mV}]$  dargestellt. Der Verlauf von  $|B_{11}|$  in Abb. 6.4a weist nur eine Änderung um wenige 10 mdB auf. Im qualitativen Verlauf lässt sich feststellen, dass die MI-Ansätze über einen größeren Bereich nahe der Vergleichssimulation liegen als die anderen Ansätze. Ab einer Amplitude von etwa 60 mV ist zusätzlich noch zu erkennen, dass die Ansätze QPHD und MIT ihr Verhalten im Vergleich zu ihren RP-Pendants ändern und nach oben abknicken. Der Unterschied der Ansätze besteht in den Termen  $X_{mk,nl}^{(\text{ST})} (|A_{11}|) |A_{nl}|^2$ . Bei der Bestimmung der Parameter  $X_{mk,nl}^{(\text{ST})}$  kann es zu numerischen Problemen kommen (vgl. Abschnitt 6.3), wenn - wie in diesem Fall - der Einfluss des Signals so gering ist, dass er in der Größenordnung der Messgenauigkeit liegt.

Im Gegensatz dazu steht der Verlauf von  $|B_{21}|$  in Abb. 6.4b. Darin entspricht der RP-Ansatz (6.30) nahezu den X-Parametern erster Ordnung aus dem PHD-Ansatz (6.28). Die Terme  $X_{21,nl}^{(\text{ST})} (|A_{11}|) |A_{nl}|^2$  lassen den QPHD-Ansatz (6.29) und MIT-Ansatz (6.31) über den gesamten Bereich näher an der Vergleichssimulation liegen. Ab einer Amplitude von etwa 40 mV gewinnen die Multi-Index-Terme stärker an Einfluss, sodass darüber hinaus der MIRP-Ansatz (6.32) näher an der Vergleichssimulation liegt. Der MIT-Ansatz weicht sogar für die höchste Amplitude  $\hat{u}_{s2} = 100 \text{ mV}$ , was größer ist als das vermeintliche Großsignal  $\hat{u}_{s1}$ , nur um weniger als ein Dezibel ab.

Die Ergebnisse für  $|B_{15}|$  und  $|B_{25}|$ , dargestellt in den Abbildungen 6.4c/d, weisen einen qualitativ ähnlichen Verlauf auf. Anders als für  $|B_{21}|$  haben die Parameter  $X_{m5,nl}^{(\text{ST})} (|A_{11}|)$  einen vernachlässigbaren Einfluss, da die Ansätze RP und MIRP den gleichen Verlauf besitzen wie ihre erweiterten Pendants QPHD bzw. MIT. Letzterer ist über den gesamten Variationsbereich näher an der Vergleichssimulation als der QPHD-Ansatz, der wiederum bei großen Amplituden der Kleinsignale den X-Parametern des PHD-Ansatzes überlegen ist.

Die erhöhte Genauigkeit der Multi-Index-Ansätze wird in der komplexen Darstellung von  $B_{11}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{15}$  und  $B_{25}$  für eine Variation der Phasen  $\phi_{s2} \in [0^\circ, 360^\circ]$  und  $\phi_{s3} = -\frac{3}{4}\phi_{s2}$  deutlich, die jeweils für sechs unterschiedliche Amplituden  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3}$  durchgeführt wurde. In Abb. 6.5a sind die Ergebnisse der Streuvariablen  $B_{11}$  für die Amplituden  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} = 1 \text{ mV}$  dargestellt. In diesem Fall ist die Annahme  $|A_{11}| \gg |A_{nl}|$  aus (4.34) des PHD-Ansatzes [139], dass die zusätzlichen Signale sehr viel kleiner sind als das Großsignal, mit  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} \ll \hat{u}_{s1}$  erfüllt. Folglich ergeben sich für alle Ansätze gleiche qualitative Verläufe. Jedoch ist bereits hier eine konstante Verschiebung der Ansätze QPHD und MIT gegenüber den anderen Ansätzen, die die Vergleichssimulation sehr genau abbilden, zu erkennen. Diese Verschiebung wird mit

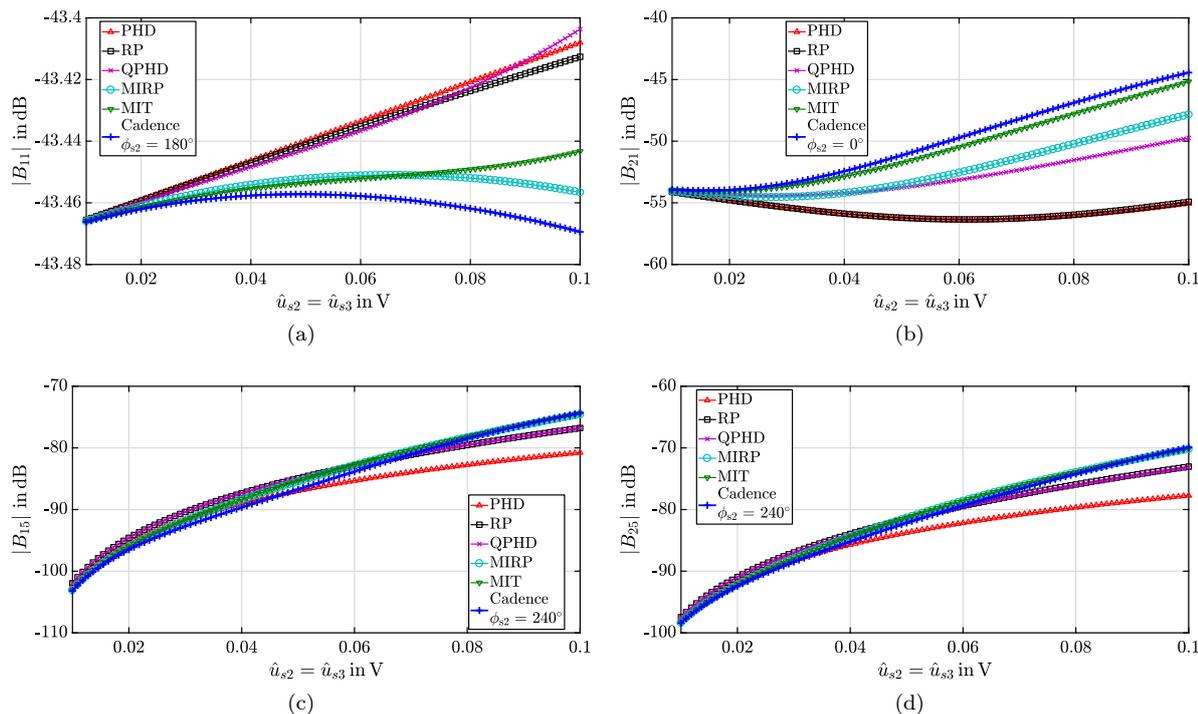


Abb. 6.4.:  $B_{mk}$  über  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3}$  für feste Winkel  $\phi_{s3} = -\frac{3}{4}\phi_{s2}$  im Verstärker der Klasse C,  $\hat{u}_{s1} = 95$  mV,  $\phi_{s1} = 60^\circ$ ,  $f_0 = 300$  MHz

steigenden Amplituden in den Abbildungen 6.5b-f immer deutlicher. Wie bereits für die entsprechende Amplitudenvariation in Abb. 6.4a erläutert, liefern die Terme  $X_{11,nl}^{(ST)} (|A_{11}|) |A_{nl}|^2$  einen phasenunabhängigen Anteil, der u. U. - bedingt durch numerische Probleme - falsch berechnet wird. In diesem Fall wurden  $X_{11,12}^{(ST)}$  und  $X_{11,13}^{(ST)}$  zu groß berechnet. Durch die mit  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3}$  wachsende phasenunabhängige Verschiebung der Vergleichssimulation gegenüber den Ansätzen RP und MIRP ist ersichtlich, dass die Terme  $X_{11,nl}^{(ST)} (|A_{11}|) |A_{nl}|^2$  nötig sind. Ohne diese entspricht der RP-Ansatz auch in dieser Darstellung dem PHD-Ansatz. Abgesehen von der zu großen oder nicht vorhandenen Verschiebung sind die Multi-Index-Ansätze in der Lage für größere Amplituden das qualitative Verhalten von  $B_{11}$  abzubilden. Wie bereits in der Diskussion zu Abb. 6.4a bemerkt, liegt die Grenze mit etwa  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} = 40$  mV deutlich über der der anderen Ansätze.

Abb. 6.6 zeigt die Ergebnisse der komplexen Streuvariablen  $B_{21}$  für die gleichen Amplitudeneinstellungen wie zuvor. Für die kleinsten Amplituden  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} = 1$  mV in Abb. 6.6a liefern alle Ansätze die gleichen Ergebnisse und bilden die Vergleichssimulation genau ab. Auch für die nächstgrößeren Amplituden  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} = 5$  mV sind sich alle Verläufe sehr ähnlich. Für größere Amplituden  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3}$  ergeben sich ähnliche Beobachtungen wie für  $B_{11}$  in Abb. 6.5. So entspricht der RP-Ansatz für alle betrachteten Amplituden den X-Parametern 1. Ordnung (PHD-Ansatz). Beide Multi-Index-Ansätze können das qualitative Verhalten der Vergleichssimulation bis etwa  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} = 40$  mV abbilden. Anders als für  $B_{11}$  wurden die zusätzlichen Terme des QPHD-Ansatzes  $X_{11,nl}^{(ST)} (|A_{11}|) |A_{nl}|^2$  ohne numerische Probleme bestimmt. Dies wird besonders deutlich im Vergleich zwischen den beiden Multi-Index-Ansätzen, da der MIT-Ansatz (6.31) der Vergleichssimulation auch quantitativ nahe kommt.

In den Abbildungen 6.7 und 6.8 sind die Ergebnisse für die Streuvariablen  $B_{15}$  und  $B_{25}$  zu sehen, die ähnliche Tendenzen aufweisen und daher gemeinsam diskutiert werden. Anders als zuvor  $B_{11}$  und  $B_{21}$  weichen die X-Parameter 1. Ordnung bereits für die kleinsten Amplituden  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} = 1$  mV von den anderen Ansätzen und damit auch von der Vergleichssimulation ab. Ein weiterer Unterschied zu den Ergebnissen der Fundamentalfrequenz besteht darin, dass die Terme  $X_{11,nl}^{(ST)} (|A_{11}|) |A_{nl}|^2$  für die durchge-

Tab. 6.4.: Beispielhafter Vergleich der Anzahl  $M$  der Modellparameter  $X_{mk}^{(S^\sigma T^\tau)}$  der Ordnung  $D = 2$  und der Länge  $L$  des Signalvektors  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^L$  aus (6.11), die zur Berechnung jedes  $B_{mk}$  nötig sind.

Ansatz	Gleichung	Anzahl $M$
PHD	(6.28)	5
QPHD	(6.29)	11
RP	(6.30)	9
MIT	(6.31)	15
MIRP	(6.32)	13

fürten Simulationen keinen Einfluss besitzen, da hier  $B_{mk,RP} \approx B_{mk,QPHD}$  aus (6.30) und (6.29) sowie  $B_{mk,MIRP} \approx B_{mk,MIT}$  (6.32) und (6.31) sind. Darüber hinaus sind die Multi-Index-Ansätze in der Lage für Amplituden  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} = 40$  mV das qualitative Verhalten von  $|B_{15}|$  bzw.  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} = 60$  mV von  $|B_{25}|$  anzunähern. Der QPHD-Ansatz weicht bereits für  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3} = 20$  mV von der Vergleichssimulation ab.

## 6.5. Modellkomplexität

In Tabelle 6.4 sind vergleichend für alle Ansätze die Anzahlen  $M$  der Modellparameter für das vorhergehende Beispiel dargestellt. Allgemein können die Modellparameteranzahlen mit Hilfe der Kombinatorik berechnet werden. Die Anzahl der zur Berechnung jedes komplexen Signals  $B_{mk}$  nötigen X-Parameter des PHD-Ansatzes werden linear aus der Länge  $L$  des Signalvektors  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^L$  aus (6.11) und dem Großsignalparameter  $X_{mk}^{(F)}$  berechnet. So gilt

$$M_{\text{PHD}}(L) = 1 + 2L, \quad (6.34)$$

worin sich der Faktor 2 aus der Berücksichtigung der komplex konjugierten Signalanteile aus  $\tilde{\mathbf{A}}^* \in \mathbb{C}^L$ , d. h. den X-Parametern  $X_{mk,nl}^{(T)}$ , ergibt. Für den MIT-Ansatz aus (6.31) ergibt sich ein vollständiges Kombinationsproblem mit Wiederholung

$$M_{\text{MIT}}(L, D) = \sum_{d=0}^D \binom{2L+d-1}{d} = \sum_{d=0}^D \frac{1}{d!} \prod_{\delta=0}^{d-1} (2L - \delta), \quad (6.35)$$

worin  $D$  die Ordnung der Taylor-Reihenentwicklung aus (6.14) ist. Beim allgemeinen HOPHD-Ansatz der Ordnung  $D$  aus (6.6) fehlen im Vergleich zum MIT-Ansatz die Kombinationen aller Elemente aus  $\tilde{\mathbf{A}}$  und  $\tilde{\mathbf{A}}^*$  ohne Wiederholung, die durch den Binomialkoeffizienten  $\binom{2L}{d}$  berücksichtigt werden, außer den Kombinationen  $A_{nl}A_{nl}^*$ , die  $L$ -mal vorkommen. Dadurch ergibt sich für die Anzahl

$$M_{\text{HOPHD}}(L, D) = 1 + 2L + \sum_{d=2}^D \binom{2L+d-1}{d} - \binom{2L}{d} + L \quad \forall \quad 2L \geq D, \quad (6.36)$$

wobei sich die Einschränkung  $2L \geq D$  aus der Tatsache ergibt, dass sonst der zweite Binomialkoeffizient nicht definiert ist. In dieser Arbeit wird weitestgehend der Spezialfall der Ordnung  $D = 2$  verwendet, für den sich

$$M_{\text{QPHD}}(L) = M_{\text{HOPHD}}(L, 2) = 1 + 5L \quad (6.37)$$

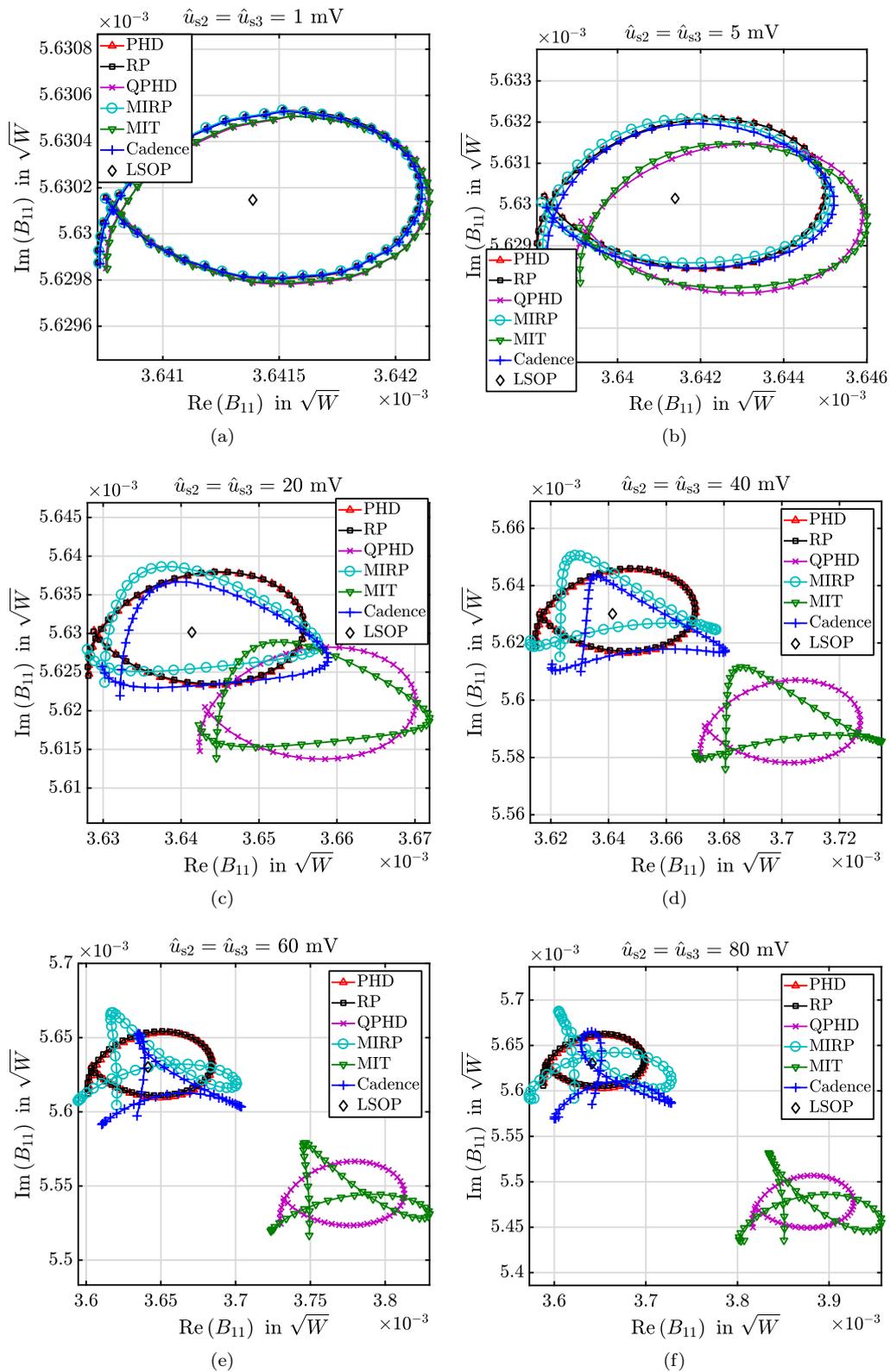


Abb. 6.5.:  $B_{11}$  in komplexer Ebene für  $\phi_{s2} \in [0^\circ, 360^\circ]$ ,  $\phi_{s3} = -\frac{3}{4}\phi_{s2}$  und unterschiedliche Amplituden  $\hat{u}_{s2} = \hat{u}_{s3}$ , Verstärker der Klasse C,  $\hat{u}_{s1} = 95 \text{ mV}$ ,  $\phi_{s1} = 60^\circ$ ,  $f_0 = 300 \text{ MHz}$

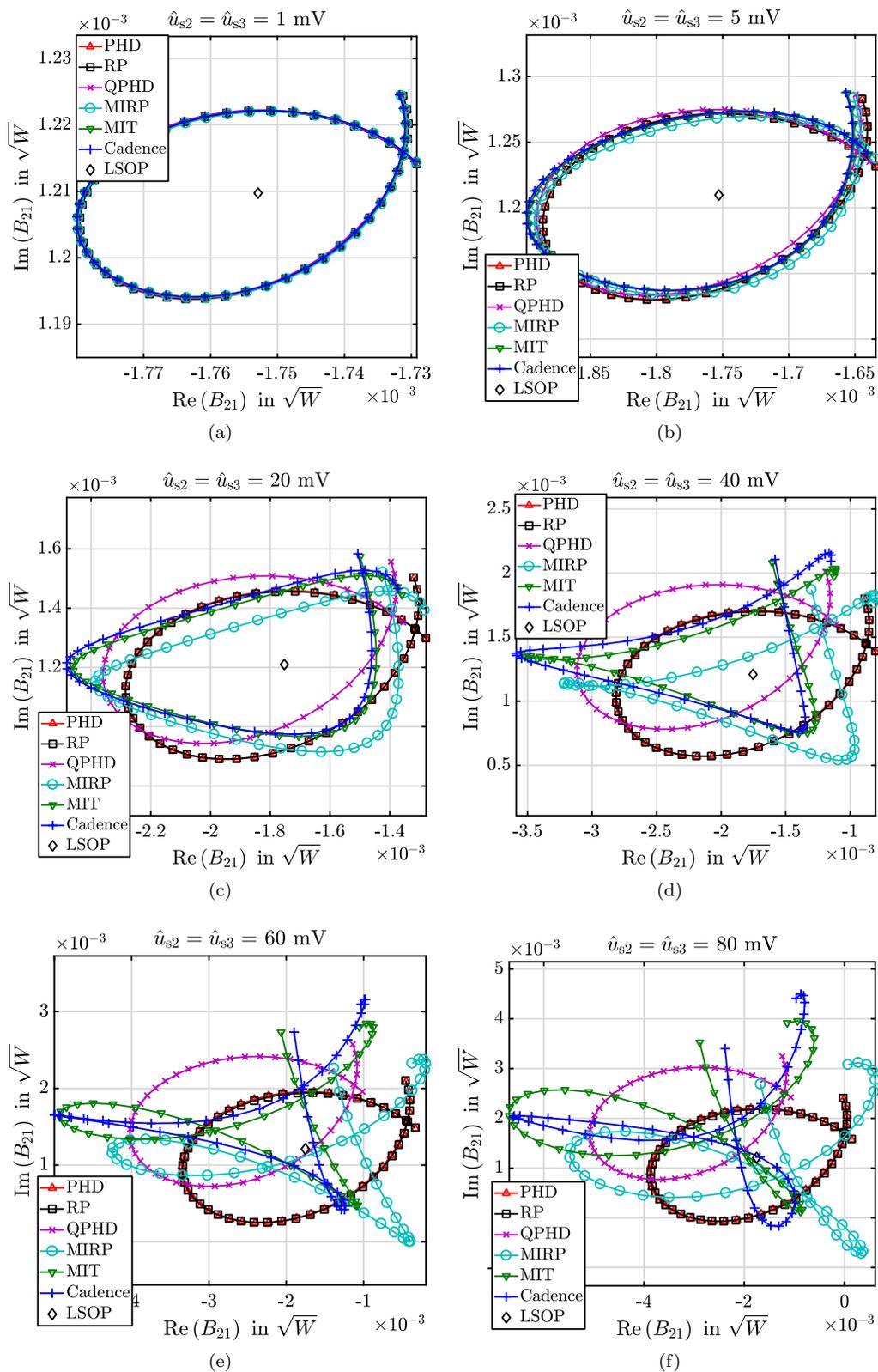


Abb. 6.6.:  $B_{21}$  in komplexer Ebene für  $\phi_{s2} \in [0^\circ, 360^\circ]$ ,  $\phi_{s3} = -\frac{3}{4}\phi_{s2}$  und unterschiedliche Amplituden  $\hat{u}_{12} = \hat{u}_{13}$ , Verstärker der Klasse C,  $\hat{u}_{s1} = 95 \text{ mV}$ ,  $\phi_{s1} = 60^\circ$ ,  $f_0 = 300 \text{ MHz}$

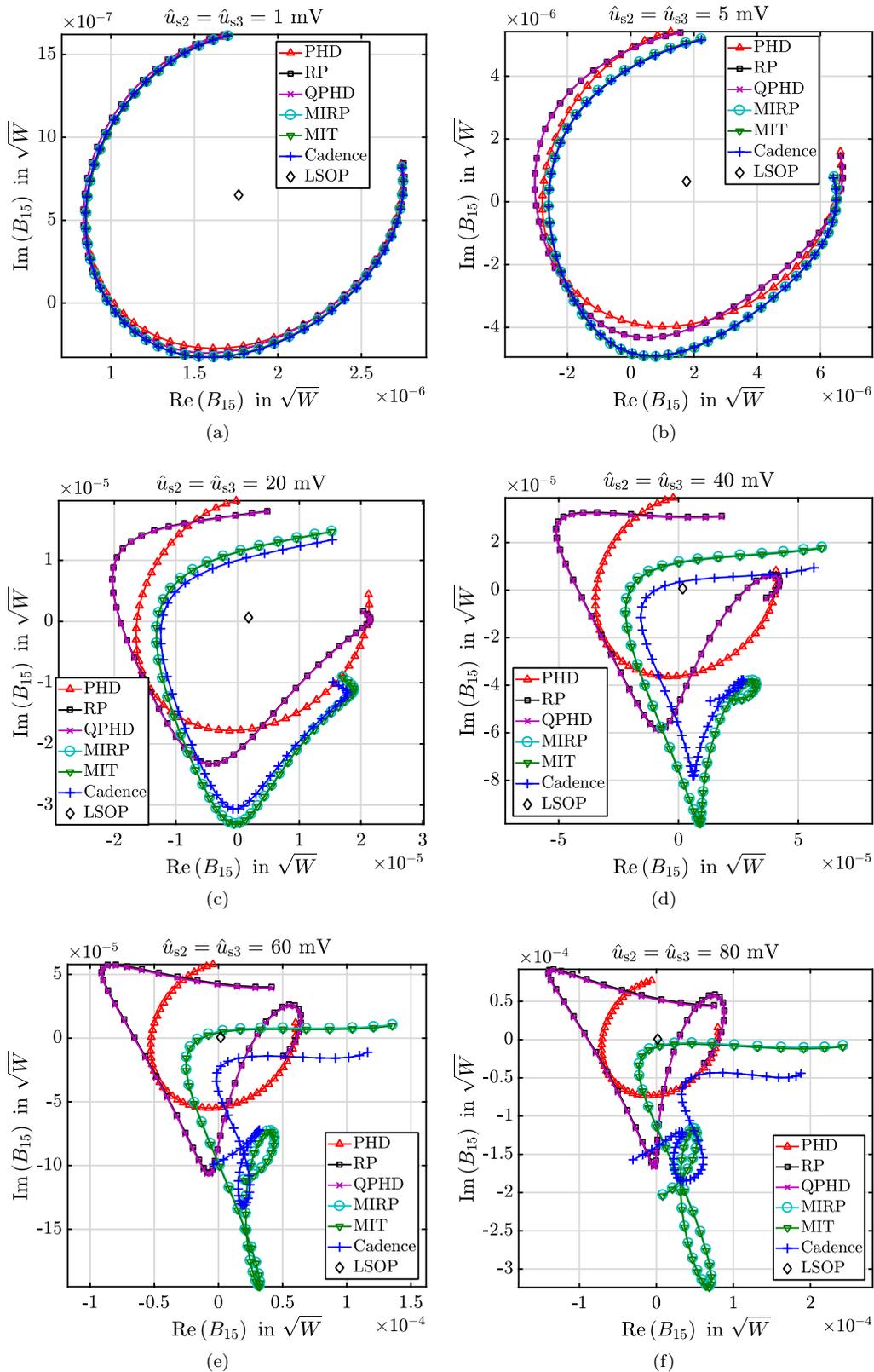


Abb. 6.7.:  $B_{15}$  in komplexer Ebene für  $\phi_{s2} \in [0^\circ, 360^\circ]$ ,  $\phi_{s3} = -\frac{3}{4}\phi_{s2}$  und unterschiedliche Amplituden  $\hat{u}_{12} = \hat{u}_{13}$ , Verstärker der Klasse C,  $\hat{u}_{s1} = 95 \text{ mV}$ ,  $\phi_{s1} = 60^\circ$ ,  $f_0 = 300 \text{ MHz}$

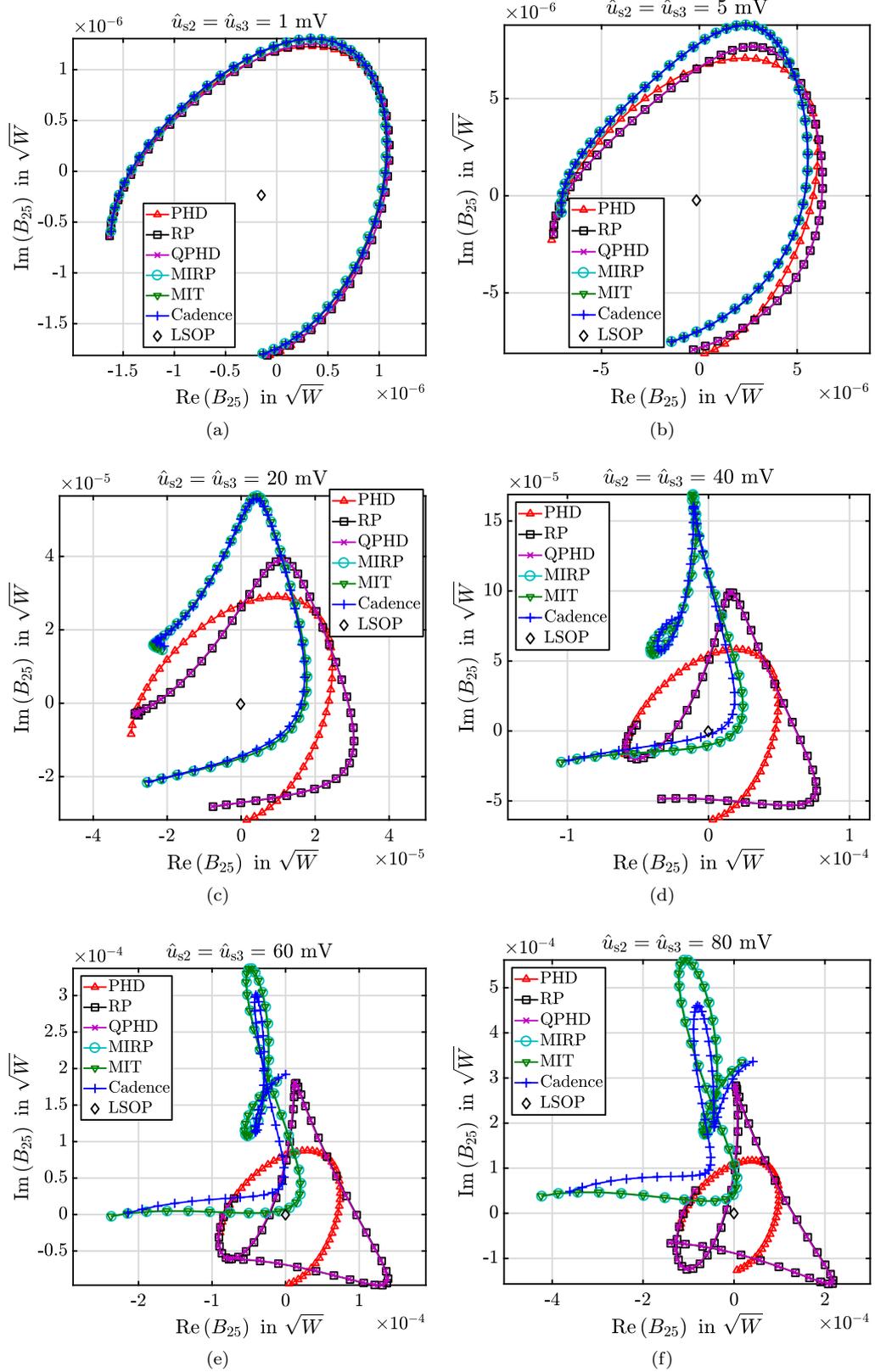


Abb. 6.8.:  $B_{25}$  in komplexer Ebene für  $\phi_{s2} \in [0^\circ, 360^\circ]$ ,  $\phi_{s3} = -\frac{3}{4}\phi_{s2}$  und unterschiedliche Amplituden  $\hat{u}_{12} = \hat{u}_{13}$ , Verstärker der Klasse C,  $\hat{u}_{s1} = 95 \text{ mV}$ ,  $\phi_{s1} = 60^\circ$ ,  $f_0 = 300 \text{ MHz}$

ergibt. Die *reduced polynomial* Ansätze RP und MIRP wurden für die im Beispiel betrachtete Ordnung  $D = 2$  eingeführt. Ihnen fehlen die Terme  $X_{mk,nl}^{(ST)} (|A_{11}|) |A_{nl}|^2$ , die  $L$ -mal vorhanden sind, sodass gilt

$$M_{\text{MIRP}}(L) = \sum_{d=0}^2 \binom{2L+d-1}{d} - L = 1 + 2L + 2L^2, \quad (6.38a)$$

$$M_{\text{RP}}(L) = \sum_{d=0}^2 \binom{2L+d-1}{d} - \binom{2L}{2} = 1 + 4L. \quad (6.38b)$$

In Abb. 6.9 werden die Modellparameteranzahlen der unterschiedlichen Ansätze für die Ordnung  $D = 2$  und verschiedene Signalanzahlen vergleichend dargestellt. In dem Beispiel aus Abschnitt 6.4 mit  $L = 2$  gibt es, wie auch aus der Tab. 6.4 zu entnehmen ist, im MIT-Ansatz lediglich 4 Parameter mehr als im QPHD-Ansatz. Bei  $L = 4$  ist  $M_{\text{MIT}}(4) = 45$  bereits mehr als doppelt so groß wie  $M_{\text{QPHD}}(4) = 21$  und für  $L = 6$  nahezu dreimal so groß, und zwar genauer  $M_{\text{MIT}}(6) = 91$  und  $M_{\text{QPHD}}(6) = 31$ . Bei den genannten Zahlenwerten ist zu beachten, dass dies die Modellparameter zur Berechnung eines jeden komplexen  $B_{mk}$  sind. Die gesamte Modellkomplexität errechnet sich aus der Multiplikation der Parameteranzahl  $M_{\text{Ans}}$  jedes Ansatzes, der Anzahl der Tore  $N$ , der maximal berücksichtigten Harmonischen  $K_{\text{max}}$  und der Anzahl  $M_{A_{11}}$  an verschiedenen Großsignalwerten, bei denen die X-Parameter bestimmt wurden, zu

$$M_{\text{ges,Ans}} = N K_{\text{max}} M_{\text{Ans}} M_{A_{11}}. \quad (6.39)$$

Wenn anstatt  $M_{A_{11}}$  numerischer Werte für jeden X-Parameter stückweise definierte Polynome in  $A_{11}$  verwendet werden (vgl. Abschnitt 5.1.3), kann die Gesamtmodellkomplexität  $M_{\text{ges,Ans}}$  noch weiter gesenkt werden.

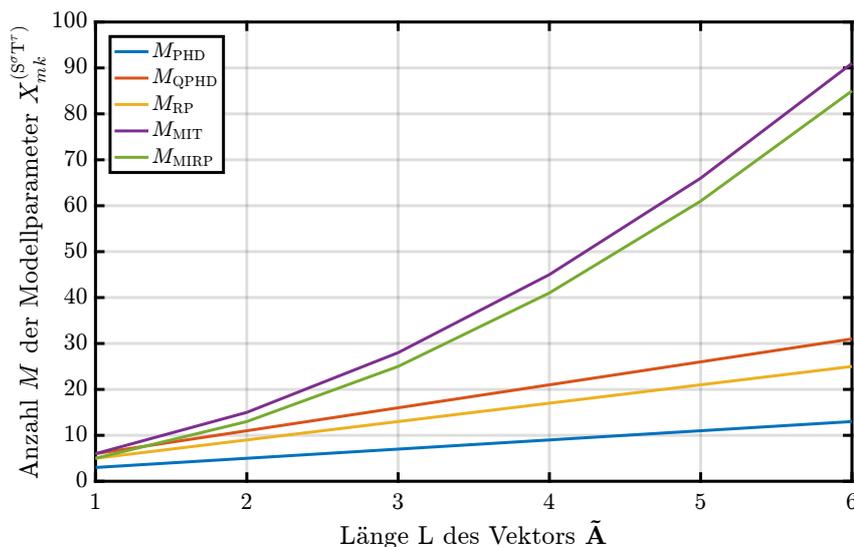


Abb. 6.9.: Vergleich der Modellparameteranzahlen  $M$  der unterschiedlichen X-Parameteransätze für verschiedene Anzahlen der zusätzlichen Signale  $L \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und der Ordnung  $D = 2$ .

## 6.6. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden verschiedene Ansätze zur Erweiterung des X-Parametermodells, das auf dem PHD-Ansatz (vgl. Abschnitt 4.2) basiert, unter dem Oberbegriff X-Parameter höherer Ordnung eingeführt und qualitativ verglichen. Im PHD-Ansatz [139] wurden die zugrunde liegenden spektralen Beschreibungsfunktionen  $F_{mk}$  im sogenannten LSOP (4.36) mittels Taylor-Reihe linearisiert [150] und daher in diesem Kapitel als X-Parameter 1. Ordnung bezeichnet. Im Gültigkeitsbereich der Linearisierung, d. h. für kleine zusätzliche Signale  $A_{nl}$  gemäß (4.34), können die Einflüsse jedes Kleinsignals dem LSOP

additiv überlagert werden. In Kapitel 5 wurde festgestellt, dass der wesentliche Vorteil der X-Parameter gegenüber der Modellierung mit der Volterra-Reihe in dem LSOP als verwendeten Entwicklungspunkt liegt. Die Einschränkung der zusätzlichen Signale  $|A_{nl}| \ll |A_{11}|$  ist für die lineare Berücksichtigung der zusätzlichen Signale  $A_{nl}$  erforderlich.

In [15, 16] wurden zwei Ansätze vorgestellt und in Abschnitt 6.1 genauer betrachtet, die der Linearisierung quadratische Terme hinzufügt und so den Gültigkeitsbereich des zugehörigen X-Parametermodells erweitert. Dabei wurden die zusätzlichen Kleinsignale  $\tilde{A}_{nl}$  separat betrachtet und die analytische Beschreibungsfunktion  $F_{mk}(|A_{11}|, \tilde{A}_{nl}, \tilde{A}_{nl}^*)$  nach dem quadratischen Term abgebrochen. Dadurch lassen sich nichtlineare Effekte wie z. B. die *desentization* - vgl. z. B.  $H_3(\omega_0, l\omega_0, -l\omega_0)$  [9] - berücksichtigen. Der quadratischen Erweiterung aus [15, 16] mangelt es an der mathematischen Betrachtung der Modellerweiterung. Denn durch die Beibehaltung des Überlagerungsgedankens des PHD-Ansatzes wurden Mischterme der Kleinsignale, wie sie durch die Taylor-Reihe höherer Ordnung der eigentlichen spektralen Beschreibungsfunktion  $F_{mk}(|A_{11}|, \tilde{A}_{12}, \tilde{A}_{12}^* \dots, \tilde{A}_{nl}, \tilde{A}_{nl}^*, \dots)$  entstehen, nicht berücksichtigt. Dazu zählen z. B. Terme zweiter Ordnung  $S_{m;12}(3\omega_0, -2\omega_0)$ , wie sie in der Volterra-Reihenbetrachtung aus Kapitel 5 beschrieben sind. Dieser einschränkende Mangel wurde im Abschnitt 6.2 mit Einführung der X-Parameter auf Basis einer Multi-Index-Taylor-Reihe (MIT) aufgehoben. Die neu eingeführten Terme werden insbesondere dann wichtig, wenn die vermeintlichen *Kleinsignale*  $\tilde{A}_{nl}$  ähnlich groß werden wie das Großsignal  $A_{11}$ , das den Entwicklungspunkt LSOP der MIT festlegt. Zusätzlich zu der höheren Modellgenauigkeit kann noch die bessere Implementierbarkeit der X-Parameter des MIT-Ansatzes durch die systematische Multi-Index-Notation als Vorteil genannt werden.

In Abschnitt 6.4 wurden die verschiedenen Ansätze 2. Ordnung am Beispiel eines Klasse-C-Verstärkers für eine Dreitonanregung am Eingangstor verglichen. Dabei wurde deutlich, dass mit steigender Amplitude der zusätzlichen Signale  $\tilde{A}_{nl}$  eine Erhöhung der Modellkomplexität sinnvoll ist. Die Ansätze RP und QPHD aus der Literatur [15, 16] schaffen es zwar den Gültigkeitsbereich gegenüber den linearen X-Parametern des PHD-Ansatzes zu vergrößern, allerdings fällt diese Erweiterung deutlich kleiner aus als im Fall des in dieser Arbeit neu eingeführten MIT-Ansatzes.

Für das gezeigte Beispiel der Dreitonanregung (6.26) ergeben sich die Modellparameteranzahlen in Tabelle 6.4. Im Vergleich zu den X-Parametern 1. Ordnung mit  $M_{\text{PHD}} = 5$  sind die Parameteranzahlen  $M_{\text{QPHD}} = 11$  mehr als verdoppelt und  $M_{\text{MIT}} = 15$  verdreifacht. Dem gegenüber steht ein deutlich größerer Gültigkeitsbereich der komplexeren Modelle. In Abschnitt 6.5 wurden weiterführend die X-Parameteranzahlen der unterschiedlichen Modellansätze in Abhängigkeit der Anzahl  $L$  der zusätzlichen Signale  $\tilde{A}_{nl}$  und der Entwicklungsordnung  $D$  der Taylor-Reihe untersucht. Die RP-Ansätze verzichten gegenüber ihren zugehörigen HOPHD- bzw. MIT-Ansätzen auf phasenunabhängige Terme, die u. U. zu einer nicht zu vernachlässigen Verschiebung relativ zum LSOP führen. Aufgrund der nur wesentlich geringeren Modellkomplexität sind die RP-Ansätze daher wenig sinnvoll. Weiterhin wurde deutlich, dass die Modellkomplexitäten der Ansätze höherer Ordnung sehr schnell wachsen, wobei der MIT-Ansatz deutlich schneller an Komplexität gewinnt als der HOPHD-Ansatz. Daher sollte für jede Anwendung zwischen geringer Komplexität und höherem Gültigkeitsbereich abgewogen werden. Sobald die weiteren Signale  $\tilde{A}_{nl}$  nicht mehr als Kleinsignale angesehen werden können, sollten weitere Modellparameter hinzugefügt werden.

In der Literatur finden sich vorwiegend zwei Fälle, in denen weitere Großsignale betrachtet werden. Zum einen ist das eine lastabhängige Betrachtung der X-Parameter, vgl. z. B. [126], und zum anderen ist das eine Beschreibung von Systemen mit nichtproportionalen Frequenzanteilen, d. h.  $f \neq k\omega_0$  mit  $k \in \mathbb{N}$ , wie z. B. Frequenzmischer. Im folgenden Kapitel wird zunächst untersucht, wie eine Lastabhängigkeit mit den X-Parametern berücksichtigt werden kann, bevor in Kapitel 8 Untersuchungen zu Frequenzmischern durchgeführt werden. In [166] wurde festgestellt, dass für Mischer eine Abhängigkeit der X-Parameter von zwei Großsignalen nötig ist, z. B.  $X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|, |A_{21}|)$ . Durch eine Erhöhung der X-Parameterordnung kann diese in die bekannte Abhängigkeit von einem Großsignal  $X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|)$  überführt werden. Durch die Verwendung der Multi-Index-Notation wird ein Einsatz von unabhängigen Frequenzen  $f \neq k\omega_0$  mit  $k \in \mathbb{N}$  möglich.

## 7. Lastabhängigkeit der X-Parameter

Die X-Parameter, wie sie bisher in dieser Arbeit betrachtet wurden, werden in einer Messumgebung bestimmt, die mit der charakteristischen Impedanz  $Z_0$  - meist  $50\ \Omega$  - der Streuvariablen aus Anhang A abgeschlossen ist. Das Haupteinsatzgebiet dieser X-Parameter ist eine Verhaltensmodellierung in leicht *fehlangepassten* Zweitoren. Durch die Partnerschaft mit der *Maury Microwave Corporation* wurde von *Agilent Technologies*, deren Messtechniksparte später in der Firma *Keysight* ausgelagert wurde, eine Erweiterung der Messumgebung um *Load-pull-Tunern* [126] ermöglicht. So können die X-Parameter für verschiedene Lastsituationen  $Z_L$  (vgl. Abb. 7.1) bestimmt werden. In diesem Kapitel soll zunächst diskutiert werden, was mit den Begriffen (Fehl-) Anpassung und Lastabhängigkeit in nichtlinearen Systemen gemeint ist. Anschließend werden verschiedene Ansätze zur Berücksichtigung eines stark fehlangepassten Zustands in der Berechnung der X-Parameter vorgestellt. Dabei wird die Load-pull-Erweiterung der ursprünglichen X-Parameter von Root u. a. [117] und einige darauf basierende ordnungsreduzierte Ansätze einer Gruppe der Universität von Dublin um Tasker [103–105, 120, 161–163] betrachtet. Ein anderer Ansatz der Cardiff-Universität [161–163], der sich hauptsächlich mit der Berücksichtigung der Fundamentalfrequenz beschäftigt und aus dem Kanon der X-Parameter herausfällt, wird an dieser Stelle nicht weiter verfolgt. Nach der kurzen Einführung der Ansätze werden die Unterschiede in der Berechnung der Modellparameter im Vergleich zum angepassten Fall aus den vorherigen Abschnitten diskutiert und anhand einer beispielhaften Untersuchung verglichen. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind eine Fortsetzung von [82].

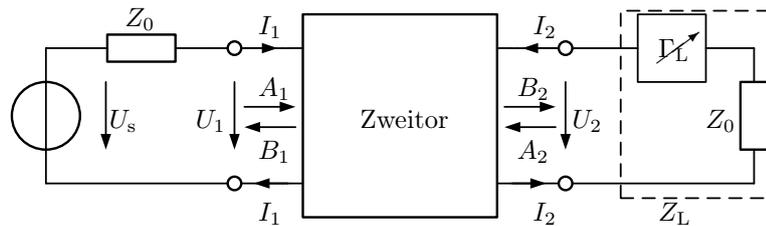


Abb. 7.1.: Belastetes Zweitor mit Frequenzbereichsbezeichnungen

### 7.1. Anpassungsbegriff für (nicht-) lineare Systeme

In diesem Abschnitt wird auf die Unterschiede bei der Betrachtung von linearen und nichtlinearen Zweitoren für unterschiedliche Lastsituationen eingegangen. Dabei werden die Begriffe Anpassung und Lastabhängigkeit diskutiert.

#### 7.1.1. Lineare Systeme

Wie in Abschnitt 2.2 bzw. in (2.10b) erwähnt, besteht zwischen den Streuvariablen und der Wirkleistung  $P_n$  am Tor  $n$  ein direkter Zusammenhang  $P_n = \frac{1}{2}(|A_n|^2 - |B_n|^2)$ . Die aufgenommene Wirkleistung wird maximal, wenn der als reflektierte Leistung bezeichnete Anteil  $|B_n|^2 = 0$  ist. In diesem Fall wird von Leistungsanpassung gesprochen. Die ist äquivalent mit der Bedingung  $Z_{L,n} = Z_{0,n}$ , d. h. die charakteristische Impedanz und die Lastimpedanz des Tores  $n$  stimmen überein. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wird von Reflexion gesprochen, die über die Streuvariablen charakterisiert werden kann. In einem linearen System findet kein Leistungstransfer in andere Frequenzen statt und es können z. B. in einem Zweitor vier verschiedene Reflexionsfaktoren (vgl. z. B. [43]) definiert werden. So ist z. B. der Lastreflexionsfaktor  $\Gamma_L$  das Verhältnis der eingehenden zur ausgehenden Streuvariablen am Tor 2

$$\Gamma_L(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{B_2(\omega)} = \frac{Z_L(\omega) - Z_0}{Z_L(\omega) + Z_0} = \frac{1}{\Gamma_{\text{out}}(\omega)}. \quad (7.1)$$

Wie in Abschnitt 2.2.3 kurz angedeutet wurde, können mit Hilfe dieser Reflexionsfaktoren u. a. Anpassnetzwerke [42, Abschnitt 2.7] oder Oszillatoren [43] entworfen werden.

### 7.1.2. Nichtlineare Systeme

Durch das Auftreten harmonischer Verzerrungen (HD) und Intermodulationen (IM) in nichtlinearen Systemen verkompliziert sich die Beschreibung der Lastsituation im Vergleich zu linearen Systemen deutlich. Der Impedanzbegriff harmonisch angeregter, linearer Schaltungen in der komplexen Wechselstromrechnung lässt sich nicht einfach übertragen. Jedoch lässt sich unter der Annahme einer linearen Last am quellenfreien Ausgang des nichtlinearen Zweitors für jede auftretende Harmonische eine *Lastimpedanz*

$$Z_L(jk\omega_0) = \frac{U_2(jk\omega_0)}{I_2(jk\omega_0)} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (7.2a)$$

definieren. Daraus lässt sich mit (A.7) für nichtlineare Zweitore - ähnlich wie für lineare Systeme - ein Reflexionskoeffizient für jede Harmonische mit  $Z_{Lk} := Z_L(jk\omega_0)$

$$\Gamma_{2k} = \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{Z_{Lk} - Z_0}{Z_{Lk} + Z_0} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (7.2b)$$

definieren, wie es z. B. in [41, Kapitel 2.4] für die Fundamentale und die erste Harmonische oder in [34] verallgemeinert geschehen ist. Die Reflexionskoeffizienten jeder Harmonischen können zu einer Menge

$$\Gamma_L = \{\Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \dots\} \quad (7.2c)$$

zusammengefasst werden, die die Lastsituation des nichtlinearen Zweitors beschreibt. Von einem angepassten nichtlinearen Zweitor kann nur gesprochen werden, wenn ein ohmscher Widerstand anliegt, d. h. wenn die Bedingung

$$Z_{Lk} = Z_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Gamma_{2k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (7.2d)$$

erfüllt ist. Für nichtlineare Lasten, die in dieser Arbeit nicht untersucht werden, ist eine derartige Betrachtung nicht mehr möglich.

## 7.2. Modellansätze

In diesem Abschnitt werden verschiedene Ansätze zur Berücksichtigung einer Lastimpedanz ungleich der charakteristischen Impedanz, z. B.  $Z_L \neq Z_0 = 50 \Omega$ , in der Berechnung der X-Parameter betrachtet und verglichen. Dabei wird zunächst der allgemeinste Fall lastabhängiger X-Parameter nach Root u. a. [117] gezeigt. Im Gegensatz dazu stehen die Ansätze *modifizierte QPHD (MQPHD)* [16], parametrischer Großsignalarbeitskreis - englisch: *parametric large signal operating cycle* (PLSOC) - [19, 20] und ein load-pull-basierter Optimierungsansatz zur Vergrößerung des Geltungsbereichs der lastunabhängigen X-Parameter [13].

### 7.2.1. Load-pull-Ansatz

Die X-Parameter basierend auf dem PHD-Ansatz (vgl. Kapitel 4) wurden ursprünglich für eine mit der charakteristischen Impedanz  $Z_0$  abgeschlossenen Umgebung - typischerweise  $Z_0 = 50 \Omega$  - entwickelt und messtechnisch umgesetzt. Mit der Erweiterung des Messapparates um einen Load-pull-Tuner [126] wurde die Möglichkeit für die Bestimmung der X-Parameter für verschiedene Lastsituationen geschaffen. In [113] wird gezeigt, in welcher Weise die Lastabhängigkeit der X-Parameter zu berücksichtigen ist. Darauf wird in [117, Kapitel 5.2] ausführlicher eingegangen. Unter der Annahme, dass die Reflexion auf der Fundamentalen  $\Gamma_{21}$  zu einem weiteren Großsignal  $A_{21}$  neben  $A_{11}$  führt, das im LSOP berücksichtigt werden muss, gibt es zwei Möglichkeiten die X-Parameter zu betrachten. Entweder kann die Abhängigkeit über das entstehende Großsignal  $A_{21}$

$$\text{LSOP} = \{\text{DCOP}, f_0, |A_{11}|, A_{21}\} \quad (7.3a)$$

oder über den Reflexionsfaktor  $\Gamma_{21}$

$$\text{LSOP} = \{\text{DCOP}, f_0, |A_{11}|, \Gamma_{21}\} \quad (7.3b)$$

ausgedrückt werden. In dem erweiterten LSOP des letzteren Falls führt die spektrale Linearisierung aus Kapitel 4.2.2 zu [117]

$$\tilde{B}_{mk,\text{PHD}} \approx X_{mk}^{(\text{F})}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) + \underbrace{\sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L_n} X_{mk,nl}^{(\text{S})}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) \Delta \tilde{A}_{nl}}_{(n,l) \neq (1,1)} + X_{mk,nl}^{(\text{T})}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) \Delta \tilde{A}_{nl}^* \quad (7.4)$$

mit  $\Delta \tilde{A}_{nl} = \begin{cases} [A_{21} - \Gamma_{21} X_{21}^{(\text{F})}(|A_{11}|, \Gamma_{21})] P^{-1} & \text{für } (n, l) = (2, 1) \\ A_{nl} P^{-l} & \text{sonst.} \end{cases}$

Hier können die Gültigkeitsbereiche der X-Parameter über die Ansätze aus Kapitel 6 ebenfalls erweitert werden, sodass sich z. B. der QPHD-Ansatz ergibt zu

$$\tilde{B}_{mk,\text{QPHD}} \approx \tilde{B}_{mk,\text{PHD}} + \underbrace{\sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L_n} X_{mk,nl}^{(\text{S}^2)}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) \Delta \tilde{A}_{nl}^2}_{(n,l) \neq (1,1)} + X_{mk,nl}^{(\text{T}^2)}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) (\Delta \tilde{A}_{nl}^*)^2 + X_{mk,nl}^{(\text{ST})}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) |\Delta A_{nl}|^2. \quad (7.5)$$

Weiterhin ist  $\Gamma_{21}$  ein komplexer Wert

$$\Gamma_{21} = |\Gamma_{21}| e^{j\Theta_{21}}, \quad (7.6)$$

wodurch die X-Parameter  $X^{(\cdot)}(|A_{11}|, |\Gamma_{21}|, \Theta_{21})$  von drei Parametern neben dem DCOP und der Fundamentalfrequenz  $\omega_0$  abhängen. Diese lastabhängigen X-Parameter lassen sich wie im angepassten Fall über die Methoden in Abschnitt 4.3 berechnen. Dazu wird über den Load-pull-Tuner der fundamentale Reflexionsfaktor  $\Gamma_{21}$  und darüber der LSOP aus (7.3b) eingestellt. Zur Bestimmung der Kleinsignal-X-Parameter wird wie im angepassten Fall über die Quelle  $U_{s_2}$  ein Kleinsignal  $A_{2l}$  eingespeist (vgl. Abbildung 7.2).

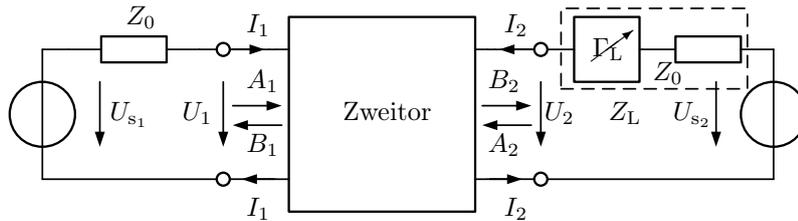


Abb. 7.2.: Zweitor mit Load-pull-Tuner und aktiver Quelle am Ausgangstor

Da für jede Lastsituation der Reflexionsfaktor  $\Gamma_{21}$  und damit der LSOP variiert, müssen die X-Parameter jedes Mal neu bestimmt werden. So ist ein enormer Mess- und Berechnungsaufwand erforderlich, um das zu charakterisierende System zu modellieren. Aufgrund der Abhängigkeit von zwei weiteren Parametern ( $|\Gamma_{21}|, \Theta_{21}$ ) im Load-pull-Ansatz ergeben sich beim Erzeugen eines umfassenden Modells schnell mehrere hundert Modellparameter. Daher existieren einige Ansätze die Parameteranzahl lastabhängiger X-Parameter zu reduzieren, die in den folgenden Abschnitten gezeigt werden.

### 7.2.2. MQPHD-Ansatz

In einem ersten Ansatz von Cai, King und Brazil [16] wird der QPHD-Ansatz aus (6.7) modifiziert, indem vor den quadratischen Anteilen ein lastabhängiger Korrekturfaktor  $\alpha_{mk,nl}(|A_{11}|, \Gamma_L)$  multipliziert wird

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mk, \text{MQPHD}} \approx & X_{mk}^{(\text{F})}(|A_{11}|) + \underbrace{\sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L_n}}_{(n,l) \neq (1,1)} X_{mk,nl}^{(\text{S})}(|A_{11}|) \tilde{A}_{nl} + X_{mk,nl}^{(\text{T})}(|A_{11}|) \tilde{A}_{nl}^* \\ & + \alpha_{mk,nl}(|A_{11}|, \Gamma_L) \left[ X_{mk,nl}^{(\text{S}^2)}(|A_{11}|) \tilde{A}_{nl}^2 + X_{mk,nl}^{(\text{T}^2)}(|A_{11}|) (\tilde{A}_{nl}^*)^2 + X_{mk,nl}^{(\text{ST})}(|A_{11}|) |A_{nl}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Dabei ist anzumerken, dass die eigentlichen X-Parameter dieselben sind wie im QPHD-Ansatz des angepassten Falls  $Z_L = Z_0$ . Mit Hilfe dieser X-Parameter wird für jede Lastsituation (7.2) ein Korrekturfaktor  $\alpha_{mk,nl}(|A_{11}|, \Gamma_L)$  über eine Fehlerminimierung aus Messergebnissen verschiedener Phasenlagen (vgl. Abschnitt 4.3.2) gewonnen [16].

### 7.2.3. PLSOC-Ansatz

In den Arbeiten von Cai u. a. [17, 19, 20] wird ein Ansatz vorgestellt, in dem auf die Abhängigkeit der X-Parameter von der Phase des Reflexionsfaktors verzichtet wird. Allerdings fließt anders als in dem Load-pull-Ansatz von Root u. a. [117] der Betrag der Reflexionsfaktoren bei höheren Harmonischen  $\Gamma_{2l} \forall l > 1$  mit in die Modellierung ein. Dadurch wird der LSOP mit den Beträgen der Reflexionsfaktoren der jeweiligen Harmonischen

$$|\Gamma_L| = \{|\Gamma_{21}|, |\Gamma_{22}|, \dots\} \quad (7.8)$$

als Menge der Reflexionsfaktorbeträge aus (7.2c) zum parametrischer Großsignalarbeitskreis - englisch: *parametric large signal operating cycle*

$$\text{PLSOC} = \{\text{DCOP}, \omega, |A_{11}|, |\Gamma_L|\}. \quad (7.9)$$

Folglich sind die X-Parameter nicht nur in einem speziellen Punkt in der über (7.2) beschriebenen Lastebene gültig, sondern auf einem Kreis. Die X-Parameter können auf diesem PLSOC im Sinne verschiedener Ansätze bestimmt werden. In [17, 20] wird sowohl der QPHD-Ansatz als auch der in dieser Arbeit nicht betrachtete Padé-Ansatz [18] durch den PLSOC-Messansatz bestimmt. Zusätzlich wird in [19] der im letzten Kapitel verworfene RP-Ansatz verwendet. In dieser Arbeit wird im Folgenden ausschließlich der PLSOC in Verbindung mit dem QPHD-Ansatz eingesetzt und daher synonym verwendet

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mk, \text{PLSOC}} \approx & X_{mk}^{(\text{F})}(|A_{11}|, |\Gamma_L|) + \underbrace{\sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{L_n}}_{(n,l) \neq (1,1)} X_{mk,nl}^{(\text{S})}(|A_{11}|, |\Gamma_L|) \tilde{A}_{nl} + X_{mk,nl}^{(\text{T})}(|A_{11}|, |\Gamma_L|) \tilde{A}_{nl}^* \\ & + X_{mk,nl}^{(\text{S}^2)}(|A_{11}|, |\Gamma_L|) \tilde{A}_{nl}^2 + X_{mk,nl}^{(\text{T}^2)}(|A_{11}|, |\Gamma_L|) (\tilde{A}_{nl}^*)^2 + X_{mk,nl}^{(\text{ST})}(|A_{11}|, |\Gamma_L|) |A_{nl}|^2. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Im Vergleich zu den linearen X-Parametern des PHD-Ansatzes soll hier der Genauigkeitsverlust in Folge des Verzichts der  $\Theta_{2k}$ -Abhängigkeit durch die Erhöhung der X-Parameterordnung zum QPHD-Ansatz erzielt werden. Die Parameterberechnung wird auf die gleiche Weise durchgeführt, wie für den Ansatz im folgenden Abschnitt. Dabei liegen lediglich unterschiedliche Messergebnisse zugrunde, die über die sog. *zufällige* („randomized“ [13, 19, 20]) Phasen-Offset-Methode erhalten werden. Daher wird die Berechnung nachfolgend beschrieben.

### 7.2.4. Lastoptimierungsansatz

In diesem Ansatz von Cai und Yu [13] wird ein X-Parametersatz bestimmt, der für die gesamte Lastebene einen minimalen quadratischen Fehler nach sich zieht. Der Berechnung über ein Optimierungsproblem liegen Datenpunkte zugrunde, die mittels Variation von  $|\Gamma_L|$  und  $\Theta_L$  im Sinne der zufälligen Phasen-Offset-Methode [13, 19, 20] erhalten werden. Daher stellt dieser Ansatz eine Erweiterung des PLSOC-Ansatz dar, der für jedes Element der Reflexionsfaktormenge  $|\Gamma_L|$  einen Parametersatz nach sich

zieht. Der X-Parametersatz des Optimierungsansatzes wird folglich wie im angepassten Fall für jeden Wert des Großsignals am Eingangstors  $A_{11}$  nur einmal bestimmt.

### 7.2.5. Berechnung der Modellparameter

Ebenso wie die X-Parameter im angepassten Fall aus den vorherigen Kapiteln können die Load-pull-X-Parameter aus (7.4) bzw. (7.5) über die Frequenz- oder Phasenoffset-Methode aus Abschnitt 4.3 berechnet werden. Im Fall der Phasen-Offset-Methode wird zunächst der LSOP bestimmt und anschließend durch Variation der Kleinsignalphase  $\phi_{\tilde{A}_{nl}}$  das Gleichungssystem (4.44) aufgestellt und gelöst. Sobald dieses überbestimmt ist, wird daraus ein Optimierungsproblem, welches mit Hilfe der Methode kleinster Fehlerquadrate gelöst werden kann. Dadurch kann der Einfluss von Ausreißern minimiert werden. Dieses Vorgehen ermöglicht ein unabhängiges Berechnen der X-Parameter  $X_{mk,nl}^{(\cdot)}$  jedes Kleinsignals  $A_{nl}$ . Im Fall der X-Parameter höherer Ordnung (7.5) müssen entsprechend die Anpassungen aus dem Abschnitt 6.3 vorgenommen werden. Für die Phasen-Offset-Methode aus Kapitel 4.3.2 muss neben einer Phasen- auch eine Betragsvariation des Kleinsignals  $\tilde{A}_{nl}$  vorgenommen werden, damit die Berechnung der Modellparameter höherer Ordnung mittels (6.20) zu einem sinnvollen Ergebnis führt. Diese Grundidee zur Berechnung der Modellparameter wurde in den Ansätzen von [13, 19, 20] adaptiert. Zur Minimierung des Einflusses von Messfehlern kann dabei auch der Großsignal-X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  in die Optimierung mit einfließen, dessen Wert unabhängig vom Kleinsignal  $\tilde{A}_{nl}$  konstant bleiben sollte. Ergeben z. B. die Optimierungsergebnisse bei der Berechnung mit  $A_{12}$  völlig andere Ergebnisse für  $X_{mk}^{(F)}$  als mit  $A_{13}$  so kann davon ausgegangen werden, dass ein systematischer Fehler vorliegt. Für den QPHD-Ansatz ergibt sich für  $M$  Messwerte das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{A}_{nl,1} & \tilde{A}_{nl,1}^* & \tilde{A}_{nl,1}^2 & |\tilde{A}_{nl,1}|^2 & (\tilde{A}_{nl,1}^*)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \tilde{A}_{nl,M} & \tilde{A}_{nl,M}^* & \tilde{A}_{nl,M}^2 & |\tilde{A}_{nl,M}|^2 & (\tilde{A}_{nl,M}^*)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mk}^{(F)} \\ X_{mk,nl}^{(S)} \\ X_{mk,nl}^{(T)} \\ X_{mk,nl}^{(S^2)} \\ X_{mk,nl}^{(ST)} \\ X_{mk,nl}^{(T^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk,1} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk,M} \end{pmatrix}, \quad (7.11a)$$

das mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  und  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  umgeschrieben werden kann zu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (7.11b)$$

Die Kleinsignalmatrix  $\mathbf{A}$  kann durch die QR-Zerlegung  $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$  mit der orthogonalen Matrix  $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{M \times M}$  und der oberen Dreiecksmatrix  $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times N}$  ausgedrückt werden. Da für orthogonale komplexe Matrizen das Matrixprodukt mit ihrer Hermiteschen die Einheitsmatrix  $\mathbf{E} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^H$  ergibt, folgt das Gleichungssystem

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}^H \mathbf{b}, \quad (7.11c)$$

das durch Rückwärtssubstitution gelöst werden kann. Obwohl dieses Vorgehen langsamer ist als die von Cai u. a. [13, 19, 20] eingesetzte Normalform, ist die QR-Zerlegung vorzuziehen, da sie bessere numerische Eigenschaften hat [30].

Der wesentliche Unterschied zwischen den einzelnen Methoden ist wie die der Berechnung von (7.11) zugrunde liegenden  $M$  Wertepaare  $(\tilde{A}_{nl}, \tilde{B}_{mk})$  gemessen werden. Im Load-pull-Ansatz wird das Kleinsignal  $\tilde{A}_{nl}$  - wie im angepassten Fall - über eine Quelle  $U_{s_n}$  am Tor  $n$  dem über den Load-pull-Tuner eingestellten LSOP überlagert (vgl. Abbildung 7.2). Durch  $M$ -fache Variation des Quellensignals in Phase und/oder Betrag können die unterschiedlichen Wertepaare gemessen werden. Für den Load-pull-Ansatz kann außerdem der in Abschnitt 4.3.1 vorgestellte Frequenz-Offset-Ansatz zur Berechnung verwendet werden, da durch den Load-pull-Tuner nur der LSOP verändert wird und die zusätzlichen Kleinsignale  $\tilde{A}_{nl}$  mit dem nötigen Frequenz-Offset über die Quelle  $U_{s_n}$  aktiv eingespeist werden können.

Die Ansätze von Cai u. a. [13, 19, 20] erzeugen die unterschiedlichen Wertepaare  $(\tilde{A}_{nl}, \tilde{B}_{mk})$  allein durch passives Load-pull-Tuning, wie es in Abbildung 7.1 dargestellt ist. Dabei wird für den PLSOC-Ansatz [19, 20] nur die Phase des Reflexionsfaktors bei der  $l$ -ten Harmonischen  $\Theta_{2l}$  variiert, sodass die X-Parameter des durch  $|\Gamma_{2l}|$  festgelegten PLSOC  $X_{mk}^{(\cdot)}(|A_{11}|, |\Gamma_{2l}|)$  gefunden werden. Beim Load-pull-Optimierungs-

ansatz [13] wird zusätzlich zur Phase auch noch der Betrag des Reflexionsfaktors  $|\Gamma_{21}|$  verändert, um die für die gesamte Lastebene optimierten X-Parameter  $X_{mk}^{(\cdot)}(|A_{11}|)$  zu erhalten.

Der Vorteil laut [20] ist: „[...] *no perturbation signal is required when generating this model simplifying and reducing the cost of the extraction.*“ Daraus, dass keine weitere Kleinsignalquelle  $U_{s_n}$  vorhanden ist, ergeben sich allerdings auch Nachteile. Durch das implizite Verändern des Kleinsignals  $A_{nl}$  über die Phase des Load-pull-Tuners  $\Theta_L$  kann es beim PLSOC-Ansatz insbesondere für kleine  $|\Gamma_L|$  dazu kommen, dass die Kleinsignalmatrix  $\mathbf{A}$  einen zu geringen Rang für die Optimierung hat. Gleiches gilt für die Bestimmung der X-Parameter  $X_{mk,1l}^{(S)}$  etc., da die nötige Variation des Kleinsignals  $A_{1l}$  am Eingangstor bei einem angepassten Eingangstor nicht durch Load-pull-Tuning hervorgerufen werden kann. Für große  $|\Gamma_L|$  kann die implizite Variation von  $\tilde{A}_{nl}$  über den Load-pull-Tuner zu einer starken Schwankung im Betrag des Kleinsignals  $|A_{nl}|$  führen. Dadurch werden die Modellparameter stark von der Wahl der Lastpunkte abhängig, wie [20] anhand unterschiedlicher Lastabtastungen zeigt. Außerdem kann dies u. U. zu einer Verletzung der Grundannahme  $|A_{nl}| \ll |A_{11}|$  führen, wodurch eine weitere Ordnungserhöhung des Modellansatzes nötig wird, wie im Abschnitt 6 gezeigt wurde. Des Weiteren wird bei der für jedes Kleinsignal  $A_{nl}$  separaten Berechnung der X-Parameter über (7.11) wie im PHD-Ansatz davon ausgegangen, dass alle anderen Kleinsignale null sind. Diese Annahme setzt im passiven Load-pull-Tuning  $\Gamma_{21}$  voraus, dass der Load-pull-Tuner nur die  $l$ -te Harmonische verändert und alle anderen Harmonischen angepasst sind. Dies wiederum erfordert in der Realisierung des Load-pull-Tuners ein Filternetzwerk sehr hoher Ordnung, um die weiteren Harmonischen auf ein vernachlässigbares Niveau abzuschwächen. Sofern dies nicht möglich ist, muss das Gleichungssystem für alle betrachteten Kleinsignale im Modell in einem Schritt gelöst werden. Aus (7.11) wird im Fall des QPHD-Ansatzes mit

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_{mk,nl} = \begin{pmatrix} X_{mk,nl}^{(S)} \\ X_{mk,nl}^{(T)} \\ X_{mk,nl}^{(S^2)} \\ X_{mk,nl}^{(ST)} \\ X_{mk,nl}^{(T^2)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{A}}_{nl} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{nl,1} & \tilde{A}_{nl,1}^* & \tilde{A}_{nl,1}^2 & |\tilde{A}_{nl,1}|^2 & (\tilde{A}_{nl,1}^*)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{A}_{nl,M} & \tilde{A}_{nl,M}^* & \tilde{A}_{nl,M}^2 & |\tilde{A}_{nl,M}|^2 & (\tilde{A}_{nl,M}^*)^2 \end{pmatrix} \quad (7.12a)$$

das erweiterte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} & \dots & \tilde{\mathbf{A}}_{nl} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mk}^{(F)} \\ \mathbf{X}_{mk,12} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{mk,nl} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{mk,1} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{mk,M} \end{pmatrix}. \quad (7.12b)$$

Mit Hilfe dieses Gleichungssystems ist es zudem möglich die X-Parameter zu den Kleinsignalen am Eingangstor  $X_{mk,1l}^{(\cdot)}$  mitzuberechnen.

### 7.3. Vergleich der Ansätze

In diesem Abschnitt werden die zuvor beschriebenen Ansätze zur Berücksichtigung der *Fehlanpassung* anhand der bereits betrachteten Verstärkerschaltung aus Abb. 5.3 und Abb. 6.3 verglichen. Dazu werden die Schaltungen, wie in Abb. 7.1 bzw. 7.2 angedeutet, um einen Load-pull-Tuner ergänzt und in *Cadence Virtuoso Design Framework* simuliert [11].

#### 7.3.1. Beispiel: LNA

In einem ersten Beispiel wird anhand des LNA aus Abb. 5.3 ein Vergleich der zuvor vorgestellten Ansätze zur Berechnung der X-Parameter  $X_{mk,21}^{(\cdot)}$  des Fundamentalsignals am Ausgangstor  $A_{21}$  durchgeführt. Aufgrund dessen, dass der LNA ein Schmalbandverstärker ist, wird angenommen, dass im Wesentlichen die Anteile der Fundamentalfrequenz nötig sind, um das Verhalten des Systems zu beschreiben. Daher

werden nur die Signalanteile der Fundamentalfrequenz  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 2.4$  GHz in diesem Abschnitt betrachtet. Das Großsignal am angepassten Eingangstor wird durch eine Signalquelle mit der Amplitude  $\hat{u}_{s_{11}} = 500$  mV angeregt, was einer Eingangsleistung  $P_{\text{in}} = 4$  dBm und der Streuvariablen  $A_{11} = 35 \text{ m}\sqrt{\text{W}}$  entspricht.

### Phasen-Offset-Methode

Zunächst werden die verschiedenen Ansätze gezeigt, die die normale Phasenoffset-Methode aus den Abschnitten 4.3.2 und 6.3 zur Berechnung der X-Parameter nutzen. Dies sind der Load-pull-Ansatz aus (7.4) bzw. (7.5) mit  $(n, l) = (2, 1)$  und  $\Delta\tilde{A}_{21} = \left[ A_{21} - \Gamma_{21} X_{21}^{(\text{F})}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) \right] P^{-1}$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{m1, \text{PHDL}} &= X_{m1}^{(\text{F})}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) + X_{m1,21}^{(\text{S})}(|A_{11}|, \Gamma_{21})\Delta\tilde{A}_{21} + X_{m1,21}^{(\text{T})}(|A_{11}|, \Gamma_{21})\Delta\tilde{A}_{21}^*, \\ \tilde{B}_{m1, \text{QPHDL}} &= \tilde{B}_{m1, \text{PHDL}} + X_{m1,21}^{(\text{S}^2)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})\Delta\tilde{A}_{21} \\ &\quad + X_{m1,21}^{(\text{T}^2)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})(\Delta\tilde{A}_{21}^*)^2 + X_{m1,21}^{(\text{ST})}(|A_{11}|, \Gamma_{21})|\Delta\tilde{A}_{21}|^2\end{aligned}$$

sowie der MQPHD-Ansatz aus (7.7)

$$\tilde{B}_{m1, \text{MQPHD}} = \tilde{B}_{m1, \text{PHD}_0} + \alpha_{m1,21}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) \left[ \tilde{B}_{m1, \text{QPHD}_0} - \tilde{B}_{m1, \text{PHD}_0} \right],$$

wofür die X-Parameter des angepassten PHD-Ansatzes (4.37)

$$\tilde{B}_{m1, \text{PHD}_0} = X_{m1}^{(\text{F})}(|A_{11}|) + X_{m1,21}^{(\text{S})}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21} + X_{m1,21}^{(\text{T})}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21}^*$$

und des angepassten QPHD-Ansatzes (6.7)

$$\tilde{B}_{m1, \text{QPHD}_0} = \tilde{B}_{m1, \text{PHD}_0} + X_{m1,21}^{(\text{S}^2)}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21} + X_{m1,21}^{(\text{T}^2)}(|A_{11}|)(\tilde{A}_{21}^*)^2 + X_{m1,21}^{(\text{ST})}(|A_{11}|)|\tilde{A}_{21}|^2$$

nötig sind. Diese werden daher ebenfalls in den Vergleich mit einbezogen.

Dem LSOP wurde mit einer Kleinsignalquelle gemäß Abb. 7.2 das zusätzliche Signal  $A_{21}$  überlagert, das in Betrag und Phase ( $\phi_{s_{21}} = [0^\circ, 350^\circ]$ ) geändert wurde. In Abb. 7.3 sind die resultierenden Verläufe der Signale  $B_{11}$  (a) und  $B_{21}$  (b) in der komplexen Ebene und der jeweilige relative Fehler jedes Ansatzes

$$|\Delta B_{m1}| = \left| \frac{B_{m1, \text{Cad.}} - B_{m1, \text{Ans.}}}{B_{m1, \text{Cad.}}} \right| \quad (7.13)$$

im Vergleich zur Cadence-Simulation dargestellt (c-d). Dabei wurde der LSOP neben dem Großsignal  $A_{11}$  durch den repräsentativen Lastreflexionsfaktor  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  und  $\Theta_{21} = 90^\circ$  eingestellt. In der komplexen Darstellung in (a), (b) ist deutlich zu sehen, dass die X-Parameter des angepassten Falls  $Z_L = Z_0$  - daher der Index 0 in der Legende - deutlich von der Vergleichssimulation abweichen. Dabei verbessert die erhöhte Ordnung des QPHD-Ansatzes - wie zu erwarten war - das Bild im Vergleich zum linearen PHD-Ansatz. Der durch den lastabhängigen Korrekturfaktor  $\alpha(|A_{11}|, \Gamma_{21})$  davon abweichende MQPHD-Ansatz verbessert die Approximation der Vergleichssimulation, wobei nicht die Genauigkeit der Load-pull-Ansätze erreicht werden kann. In den Abbildungen (c), (d) ist zu sehen, wie groß die zugehörigen relativen Fehler bei den beiden eingestellten Kleinsignalamplituden sind. Im Fall  $\hat{u}_{s_{21}} = \frac{\hat{u}_{s_{11}}}{100} = 5$  mV sind die Fehler der Ansätze PHD ( $\Delta B_{21, \text{PHD}_0} \approx 7.5\%$ ), QPHD ( $\Delta B_{21, \text{QPHD}_0} \approx 5.8\%$ ) und MQPHD ( $\Delta B_{21, \text{MQPHD}} \approx 3\%$ ) nahezu konstant, da alle Verläufe Kreise sind, die einen verschobenen Mittelpunkt haben. Im Fall der größeren Amplitude  $\hat{u}_{s_{21}} = 168.3 \text{ mV} \approx 0.3\hat{u}_{s_{11}}$  sind deutliche Schwankungen über  $\phi_{s_{21}}$  zu erkennen. Bei der Beschreibung des Signals am Eingangstor  $\tilde{B}_{11}$  werden insgesamt kleinere Fehler begangen als am Ausgangstor  $\tilde{B}_{21}$ , an dem die Last variiert wird. Dieses Verhalten ist auf Grunde der vergleichsweise kleine Rückwirkung des LNA zu erwarten. Die Fehler am Ausgangstor sind dabei bis zu  $\Delta B_{21, \text{PHD}_0} \approx 12\%$ ,  $\Delta B_{21, \text{QPHD}_0} \approx 8\%$  und  $\Delta B_{21, \text{MQPHD}} \approx 6\%$ .

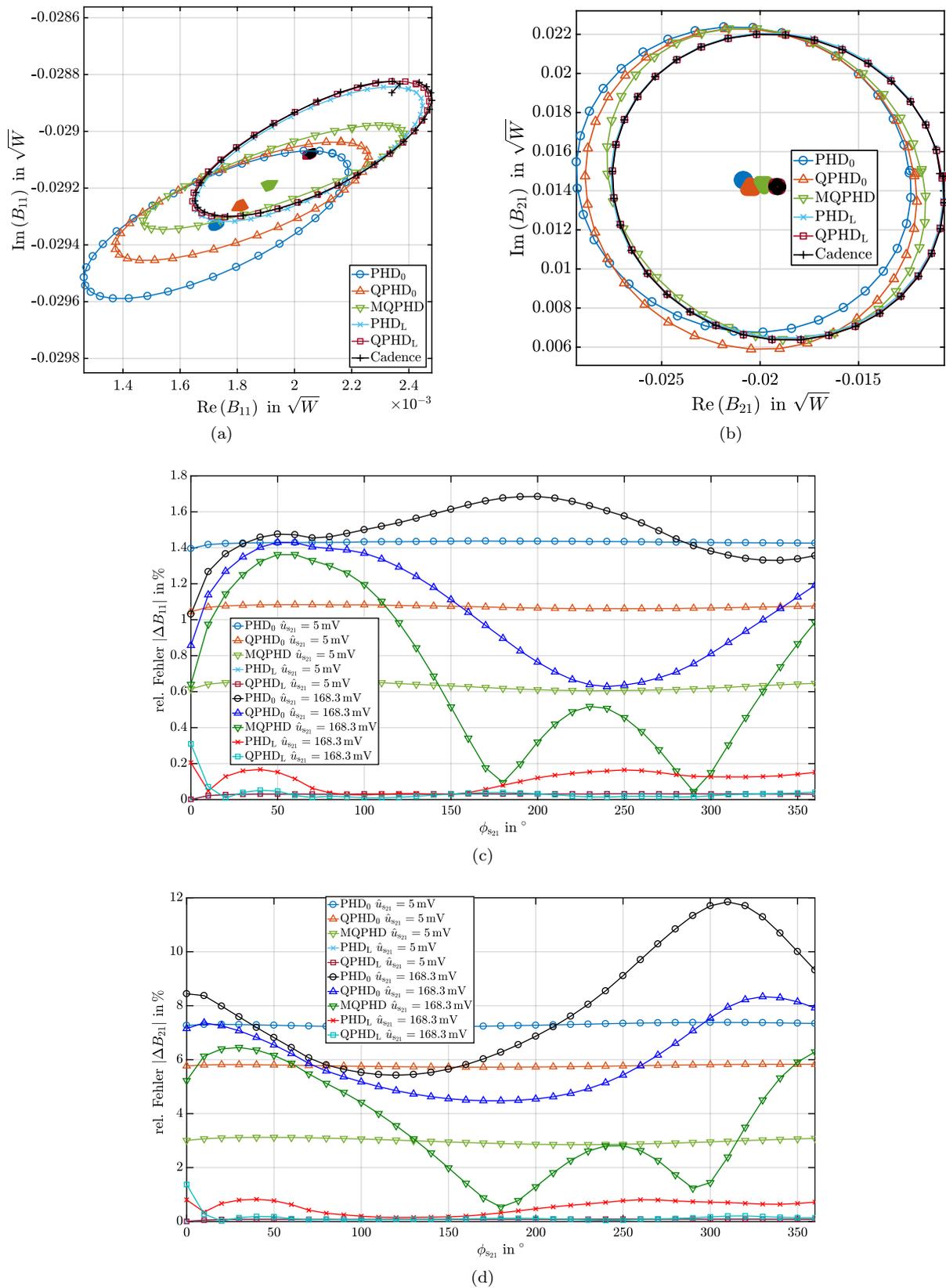


Abb. 7.3.: LNA:  $B_{11}$ - und  $B_{21}$ -Vergleich der Ansätze basierend auf dem normalen Phasen-Offset für  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  und  $\Theta_{21} = 90^\circ$  und zwei verschiedene Amplituden  $\hat{u}_{s21}$ .

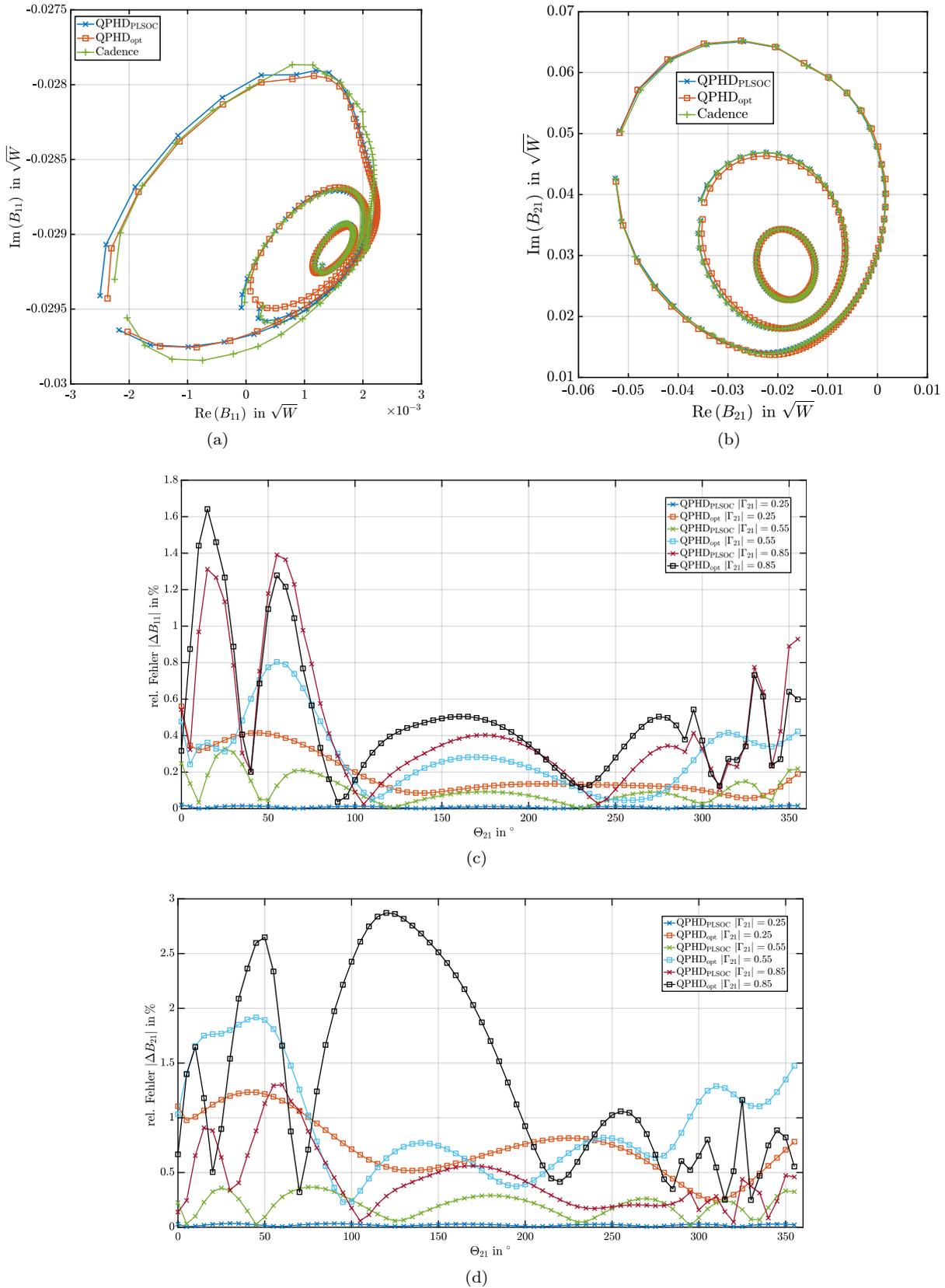


Abb. 7.4.: LNA:  $B_{11}$ - und  $B_{21}$ -Vergleich aller des PLSOC- und Optimierungsansatzes basierend auf dem Load-pull-Phasen-Offset für drei verschiedene Werte  $|\Gamma_{21}| = \{0.25, 0.55, 0.85\}$ .

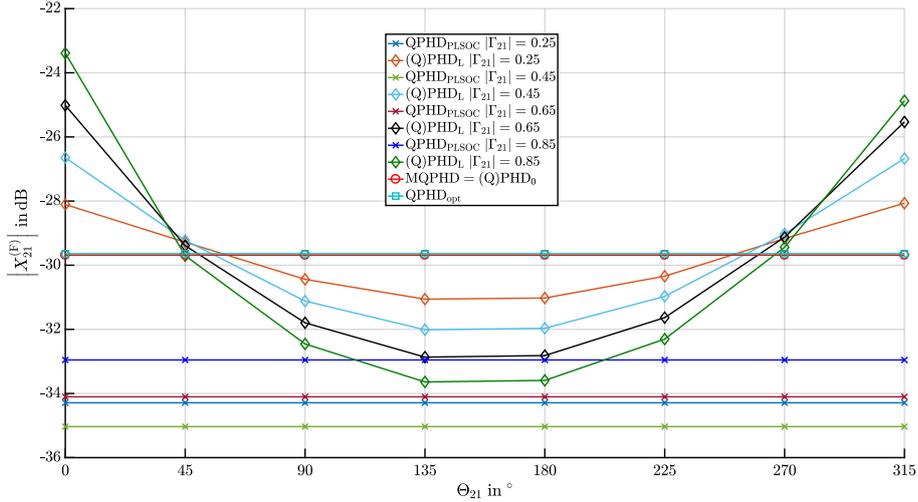


Abb. 7.5.: Verhalten des Betrags  $|X_{21}^{(F)}|$  über die Reflexionsfaktorphase  $\Theta_{21}$  aufgetragen für verschiedene  $|\Gamma_L|$  und  $\hat{u}_{s11} = 500 \text{ mV}$  ( $|A_{11}| = 35 \text{ m}\sqrt{\text{W}}$ )

### Zufällige Phasen-Offset-Methode

Zur Berechnung des PLSOC-Ansatzes aus (7.10) mit  $(n, l) = (2, 1)$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{m1, \text{PLSOC}} \approx & X_{21}^{(F)}(|A_{11}|, |\Gamma_{21}|) + X_{m1,21}^{(S)}(|A_{11}|, |\Gamma_{21}|)\tilde{A}_{21} + X_{m1,21}^{(T)}(|A_{11}|, |\Gamma_{212}|)\tilde{A}_{21}^* \\ & + X_{m1,21}^{(S^2)}(|A_{11}|, |\Gamma_{21}|)\tilde{A}_{21}^2 + X_{m1,21}^{(T^2)}(|A_{11}|, |\Gamma_{21}|)(\tilde{A}_{21}^*)^2 + X_{m1,21}^{(ST)}(|A_{11}|, |\Gamma_{21}|)|A_{21}|^2 \end{aligned}$$

wird die Phase des Reflexionsfaktors  $\Theta_{21}$  von  $0^\circ$  bis  $355^\circ$  mit konstanter Schrittweite von  $5^\circ$  für jeden Betrag des Reflexionsfaktors  $|\Gamma_{21}|$  variiert. Der lastoptimierte QPHD-Ansatz wird aus allen Datenpunkten der unterschiedlichen  $|\Gamma_{21}| = \{0.05, 0.15, \dots, 0.95\}$  berechnet, für die zuvor jeweils ein Parameterset des PLSOC-Ansatzes berechnet wurde. In Abb. 7.4 sind für drei exemplarische Werte  $|\Gamma_{21}| = \{0.25, 0.55, 0.85\}$  erneut die Verläufe und relativen Fehler zur Vergleichssimulation von  $B_{m1}$  dargestellt. In der komplexen Darstellung in (a), (b) ist zu sehen, dass sowohl der jeweils für einen Wert von  $|\Gamma_{21}|$  bestimmte PLSOC-Ansatz als auch der für die gesamte Lastebene optimierte QPHD-Ansatz zu einer guten qualitativen Approximation der Vergleichssimulation führt. Außerdem ist zu sehen, dass eine gleichverteilte Variation von  $\Theta_{21}$  nicht zu einer ebenso gleichverteilten Variation von  $B_{m1}$  führt. Daher wird diese Methode auch als *zufällige* („randomized“ [13, 19, 20]) Phasen-Offset-Methode bezeichnet. Die Grundidee dieser Methode wurde bereits von Müller [83] für die ursprünglichen Großsignal-S-Parameter eingesetzt. Die relativen Fehler am Ausgangstor sind größer als am Eingangstor, jedoch nicht größer als 3% im Fall des lastoptimierten QPHD-Ansatz für  $|\Gamma_{21}| = 0.85$ . Dabei ist zusätzlich zu sehen, dass der relative Fehler des lastoptimierten QPHD-Ansatz nicht umso größer ist, je größer  $|\Gamma_{21}|$  ist. Im Vergleich zu dem jeweiligen PLSOC-Ergebnis ist der relative Fehler zwar in dieser Betrachtung bis zu einem Faktor 10 größer, jedoch werden für die Abdeckung der gesamten Lastebene auch 10 mal so viele Modellparameter benötigt. Für eine weitere Bewertung aller Ansätze werden diese in der Folge für verschiedene Szenarien miteinander verglichen.

### Vergleich aller Ansätze

Als erster Vergleich wird die Variation der Reflexionsfaktorphase  $\Theta_{21}$ , wie sie zur Berechnung des lastoptimierten und des PLSOC-Ansatzes angewandt wurde, auf die übrigen Ansätze erweitert. Da die Loadpull-X-Parameter des (Q)PHD<sub>L</sub>- sowie des MQPHD-Ansatzes für jeden Reflexionsfaktor neu berechnet werden müssen, wurde für diese Ansätze die Schrittweite  $\Delta\Theta_{21} = 45^\circ$  gewählt. In Abb. 7.5 ist beispielhaft der Verlauf des Großsignal-X-Parameters  $X_{21}^{(F)}$  der verschiedenen Ansätze über  $\Theta_{21}$  gezeigt. Für die  $|\Gamma_{21}|$  abhängigen Ansätze (Q)PHD<sub>L</sub> und (Q)PHD<sub>PLSOC</sub> sind zusätzlich die X-Parameter  $X_{21}^{(F)}$  für verschiede-

ne Werte von  $|\Gamma_{21}| \in \{0.25, 0.45, 0.65, 0.85\}$  dargestellt. Für den (Q)PHD<sub>L</sub>-Ansatz gilt  $X_{21}^{(F)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})$ , d. h. es besteht sowohl eine Abhängigkeit von  $|\Gamma_{21}|$  als auch von  $\Theta_{21}$ . Daher verändert sich der Wert  $|X_{21}^{(F)}|$  je nach  $|\Gamma_{21}|$  mehr oder weniger stark, und zwar für  $|\Gamma_{21}| = 0.25$  zwischen  $-28$  dB und  $-31$  dB sowie für  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  zwischen  $-23.5$  dB und  $-33.5$  dB. Die Werte des PLSOC-Ansatz  $X_{21}^{(F)}(|A_{11}|, |\Gamma_{21}|)$  sind über  $\Theta_{21}$  konstant, wobei kein Trend über  $|\Gamma_{21}|$  zu erkennen ist. Ebenso wenig ist der durch die Optimierung aus allen Werten von  $\Theta_{21}$  - für ein  $|\Gamma_{21}|$  - berechnete Wert von  $X_{21}^{(F)}(|A_{11}|, |\Gamma_{21}|)$  der Mittelwert der Load-pull-Großsignal-X-Parameter  $X_{21}^{(F)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})$ . Durch das Einbeziehen des Großsignal-X-Parameters  $X^{(F)}$  in die Optimierung der PLSOC X-Parameter mittels (7.11) wird dieser stark abhängig von der Wahl der Datenpunkte, wie Cai u. a. [20] selbst zeigten. Die gleichverteilte Variation der Reflexionsfaktorphase  $\Theta_{21}$  führt - wie in Abb. 7.4 zu sehen ist - zu einer Häufung in einem Teilgebiet. Die Großsignal-X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  der anderen Ansätze sind konstant für die gesamte Lastebene. Der MQPHD-Ansatz besitzt die gleichen X-Parameter wie im angepassten Fall und nur die quadratischen X-Parameter  $X_{21}^{(S^2)}(|A_{11}|)$  etc. werden mit dem lastabhängigen Wichtungsfaktor  $\alpha_{21,21}(|A_{11}|, \Gamma_{21})$  skaliert. Der lastoptimierte QPHD-Ansatz weist einen zum angepassten Fall sehr ähnlichen Wert von  $X_{21}^{(F)}(|A_{11}|)$  auf. Die auch als Empfindlichkeitsfunktionen ansehbaren Kleinsignal-X-Parameter  $X_{21,21}^{(-)}$  sorgen für jeden Ansatz dafür, dass die Systemantwort  $B_{21}$  mehr oder weniger gut approximiert werden kann.

Beispielhaft sind die Ergebnisse einer  $\Theta_{21}$ -Variation in Abb. 7.6 für den Fall dargestellt, dass der LSOP über den passiven Tuner wie in Abb. 7.1 auf  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  eingestellt wird. Dabei sind in (a) die komplexe Darstellung  $B_{21}$ , in (b) der Betrag  $|B_{21}|$  in dB und in (c) die jeweiligen relativen Fehler der Ansätze gemäß (7.13) gezeigt. Die Verläufe des PLSOC- und des lastoptimierten Ansatzes sind dadurch identisch zu den in Abb. 7.4 für diesen  $|\Gamma_{21}|$ -Wert. Die Load-pull-X-Parameter wurden für  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  mit  $\Delta\Theta_{21} = 45^\circ$  bestimmt. Für diese LSOP nimmt sowohl der PHD- als auch der QPHD-Ansatz den Wert des Load-pull-X-Parameters  $X_{21}^{(F)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})$  an. Theoretisch sollte der relative Fehler an den Berechnungsstellen  $\Theta_{21} = \{0^\circ, 45^\circ, \dots, 315^\circ\}$  gegen null gehen, kann allerdings bedingt durch Messungenauigkeiten oder in Folge des Einbeziehens in die Optimierung in (7.11) einen endlichen Wert annehmen, so wie es in Abb. 7.6c für  $\Theta_{21} = 270^\circ$  mit einem relativen Fehler des (Q)PHD<sub>L</sub>-Ansatzes  $\Delta B_{21} \approx 1\%$  der Fall ist. Durch Abweichen von der Berechnungsstützstelle wird für die Load-pull-Ansätze (Q)PHD<sub>L</sub> ein von null verschiedenes Kleinsignal  $\Delta\hat{A}_{21}$  erzeugt, das bei beiden Ansätzen einen nahezu identischen Verlauf  $B_{21}$  nach sich zieht. In diesen Zwischenräumen der Berechnungsstützstellen vergrößert sich der Fehler, bleibt jedoch weitestgehend im Bereich von  $\Delta B_{21} \approx 2\%$  und nimmt bei  $\Theta_{21} = 25^\circ$  jeweils einen maximalen Wert von  $\Delta B_{21} \approx 9.5\%$  für den PHD<sub>L</sub>- und  $\Delta B_{21} \approx 6\%$  für den QPHD<sub>L</sub>-Ansatz an.

Der MQPHD-Ansatz wurde ebenso für wenige Werte  $\Delta\Theta_{21} = 45^\circ$  aus dem angepassten QPHD<sub>0</sub>-Ansatz bestimmt. Zwar kann dadurch im Vergleich zum QPHD<sub>0</sub>-Ansatz der Fehler nahezu für alle Werte mehr als halbiert werden, was jedoch immer noch einen Fehler von bis zu  $\Delta B_{21} \approx 4\%$  für den MQPHD-Ansatz an den Berechnungsstützstellen bedeutet. In den Zwischenräumen können die relativen Fehler sowohl kleiner als auch größer als an den Stützstellen sein - maximal  $\Delta B_{21} \approx 9.75\%$  bei  $\Delta\Theta_{21} = 345^\circ$ .

Wie zu erwarten war, führen die beiden Parametersätze aus der angepassten Messumgebung (Q)PHD<sub>0</sub> bei der großen Abweichung  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  zu einem recht hohen Fehler von über 10%. Dabei ist es wider Erwarten so, dass der PHD-Ansatz über den gesamten Bereich von  $\Theta_{21}$  einen kleineren Fehler nach sich zieht als der QPHD-Ansatz. Das liegt daran, wie der angepasste QPHD<sub>0</sub>-Ansatz aus der Phasen-Offset-Methode berechnet wird. In diesem Fall wurde die Matrix  $\mathbf{A}$  des Gleichungssystems (7.11) für verschiedene Phasen und Beträge des Kleinsignals  $A_{21}$  erzeugt, wohingegen für den PHD-Ansatz nur für ein sehr kleines  $A_{21}$  die Phase variiert wird. Dadurch kann es sein, dass letzterer Ansatz wie hier für sehr kleine Werte von  $A_{21}$  genauer ist als der QPHD-Ansatz. Abhilfe schafft hier ein sukzessives Berechnen des QPHD-Ansatzes aus dem PHD-Ansatz, was wiederum aufwändiger ist, als ein einmaliges Lösen des gesamten Gleichungssystems (7.11).

Die zuvor betrachtete Lastvariation zeigte, wie sich die Ansätze bei einer Variation der Phase  $\Theta_{21}$  für einen Wert des Betrags  $|\Gamma_{21}|$  verhalten, an dem die verschiedenen Ansätze, d. h. PLSOC, MQPHD sowie Load-pull-(Q)PHD, bestimmt wurden. In Abb. 7.7 wird die gleiche Untersuchung für  $|\Gamma_{21}| = 0.8$  durchgeführt. Dieser Wert liegt genau in der Mitte zwischen zwei zur Berechnung der lastabhängigen Ansätze herangezogenen Werten von  $|\Gamma_{21}|$ . Für den relativen Fehler von (Q)PHD<sub>L</sub> in Abb. 7.7c gilt sowohl für den X-Parametersatz von  $|\Gamma_{21}| = 0.75$  als auch von  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  wieder weitestgehend  $\Delta B_{21} < 2\%$ . Die lokalen Minima liegen in den zur Berechnung der X-Parameter verwendeten Werte von  $\Theta_{21}$ , der maximale

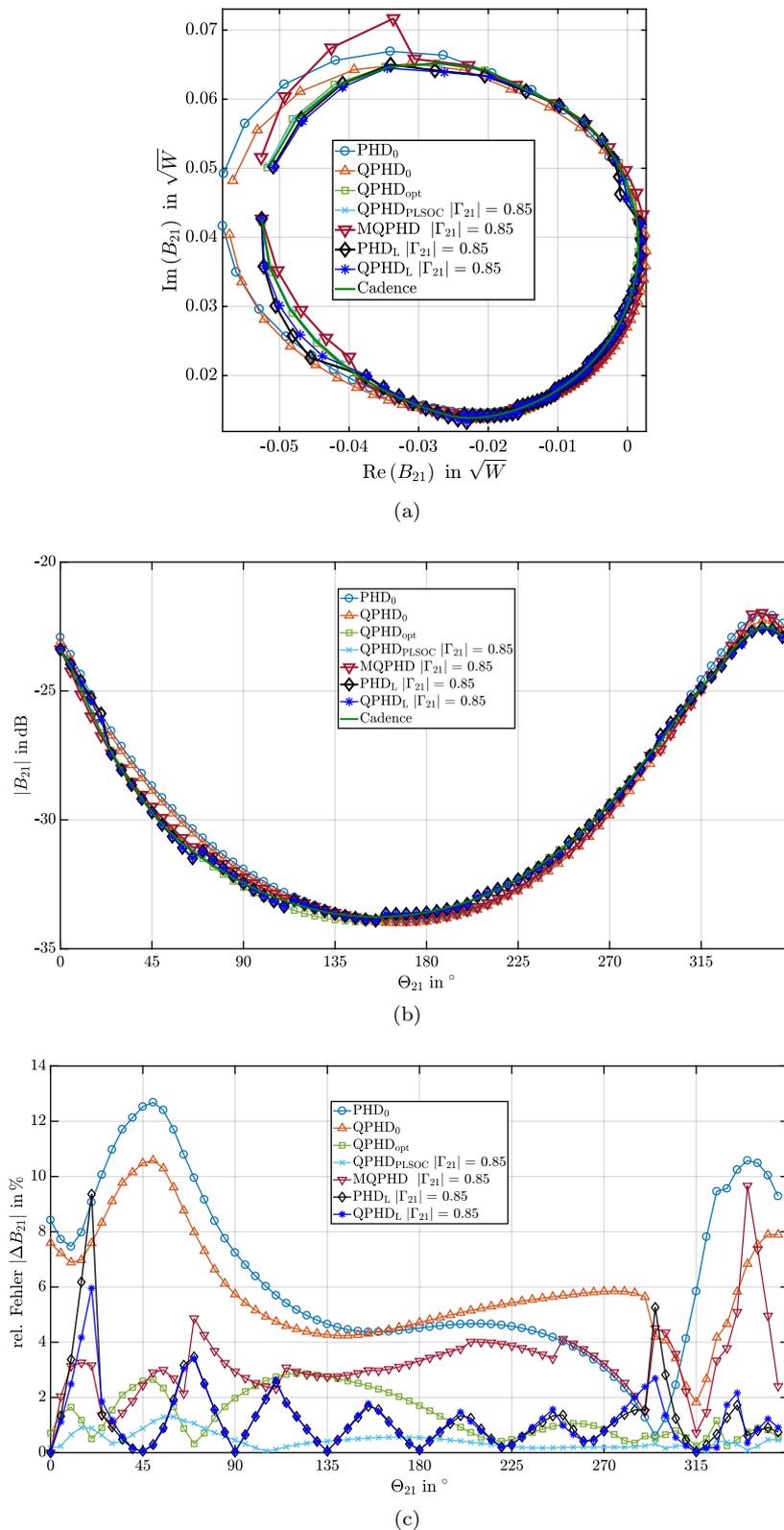


Abb. 7.6.: LNA:  $B_{21}$ -Vergleich durch Variation der Reflexionsfaktorphase  $\Theta_{21}$  für  $|\Gamma_{21}| = 0.85$

Fehler liegt erneut bei  $\Theta_{21} = 25^\circ$  und ist wider Erwarten kleiner als bei der vorherigen Betrachtung mit dem passenden Betrag  $|\Gamma_{21}| = 0.85$ . Die Verläufe der beiden Parametersätze des MQPHD-Ansatzes sind qualitativ ähnlich wie zuvor und weichen bei  $\Theta_{21} = 90^\circ$  um 0.2% sowie bei  $\Theta_{21} = 315^\circ$  um 0.7% ab. Der relative Fehler des für  $\Gamma_{21} = 0.85$  bestimmte MQPHD-Parametersatz ist hier ( $|\Gamma_{21}| = 0.8$ ) teilweise sogar niedriger als beim zugrunde liegenden Wert ( $|\Gamma_{21}| = 0.85$ ).

Die beiden Parametersätze des PLSOC-Ansatzes führen im Vergleich zur vorherigen Betrachtung in Abb. 7.6 zu deutlich höheren Fehlern. Für das bei  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  bestimmten Parameterset ist der Fehler im Bereich  $2.5\% < \Delta B_{21} < 8\%$  und für das bei  $|\Gamma_{21}| = 0.75$  bestimmte sogar im Bereich  $2.5\% < \Delta B_{21} < 11\%$ . Obwohl beide Parametersätze um  $\Delta|\Gamma_{21}| = 0.05$  von dem zur Berechnung herangezogenen Wert von  $|\Gamma_{21}|$  abweichen, ist der relative Fehler beim Parameterset des kleineren Werts  $|\Gamma_{21}| = 0.75$  deutlich größer. Dieser Umstand ist damit zu erklären, dass bei der Berechnung über (7.11) in der Matrix  $\mathbf{A}$  eine größere Wertestreuung in  $|A_{21}|$  auftritt, je größer  $|\Gamma_{21}|$  ist. Im Vergleich zu den Parametersätzen der angepassten Ansätze (Q)PHD<sub>0</sub> liefert der PLSOC-Ansatz in diesem Fall des maximalen Abstands zu den zugrunde liegenden  $|\Gamma_{21}|$ -Werten über einen großen  $\Theta_{21}$ -Bereich hinsichtlich des relativen Fehlers nur unwesentlich bessere Ergebnisse. Im Gegenteil, über einen Teil des  $\Theta_{21}$ -Wertebereichs ist der relative Fehler größer als für die angepassten Ansätze (Q)PHD<sub>0</sub>. Ein Blick auf die komplexe Darstellung in Abb. 7.7a zeigt, dass im Bereich der größten Abweichung des PLSOC-Ansatz die geringste Punktdichte vorliegt. Hier zeigt sich, wie bereits oben erwähnt, dass die Modellparameter durch die Berechnung mittels des Optimierungsansatzes (7.11) stark von der Verteilung der Messpunkte abhängen [20]. Die Verläufe der angepassten (Q)PHD<sub>0</sub>-Ansätze weisen qualitativ den gleichen Verlauf auf wie für den Fall  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  in Abb. 7.6c. Quantitativ sind die Fehlermaxima rund 1% kleiner, was zu erwarten ist, da die (Q)PHD<sub>0</sub>-Ansätze für  $|\Gamma_{21}| = 0$  berechnet werden.

Ähnlich wie bei den angepassten Ansätzen sind auch die Ergebnisse des lastoptimierten Ansatzes QPHD<sub>opt</sub> fast unverändert nah an der Vergleichssimulation aus *Cadence Virtuoso Design Framework*. Damit sind sie in einem ähnlichen Fehlerbereich wie die Load-pull-X-Parameter QPHD<sub>L</sub>, wobei der maximale Fehler sogar kleiner ist. Die Höhe der lokalen Fehlermaxima des QPHD<sub>L</sub>-Ansatzes ist abhängig davon bei wie vielen Lastsituationen die Load-pull-X-Parameter bestimmt wurden. Eine Quantisierung der Lastebene mit  $\Delta\Theta_{21} = 90^\circ$  führt zu höheren und mit  $\Delta\Theta_{21} = 10^\circ$  zu kleineren Fehlermaxima im Vergleich zu der Betrachtung mit  $\Delta\Theta_{21} = 45^\circ$ . Eine Verkleinerung der Quantisierungsschrittweite sowohl in  $\Theta_{21}$  als auch  $|\Gamma_{21}|$  zieht zwar bessere Ergebnisse nach sich, wird allerdings mit einer deutlich höheren Anzahl an Parametern erkauft (vgl. Tabelle 7.1).

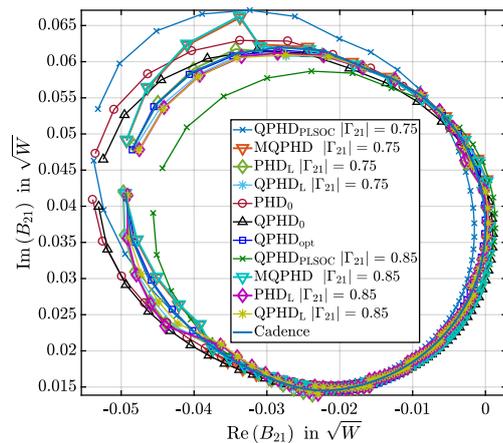
Die bisherigen Untersuchungen betrachteten eine Störung des LSOP über eine passive Variation der Lastsituation, wie sie in Abb. 7.1 angedeutet ist. Eine Variation des Signalanteils  $A_{21}$  über einen Amplituden-Sweep der aktiven Quelle  $u_{s2}(t)$  aus Abb. 7.2 bis zum Wert  $\hat{u}_{s21} = 0.5\hat{u}_{s11} = 250$  mV führt zu den Ergebnissen in Abb. 7.8. Die passive Last ist dabei über  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  und  $\Theta_{21} = 90^\circ$  eingestellt, wodurch die lastabhängigen LSOPs und die zugehörigen X-Parameter festgelegt sind. Erneut zeigt sich, dass der PLSOC-Ansatz in der Nähe der Berechnungsgrundlage zu sehr guten Ergebnissen führt, jedoch mit steigendem  $\hat{u}_{s21}$  sehr schnell zu fehlerhaften Ergebnissen führt. Der MQPHD-Ansatz verbessert zwar den Verlauf gegenüber dem angepassten Fall QPHD<sub>0</sub>, allerdings muss - wie erwähnt - der Korrekturfaktor für jede Lastsituation ebenso wie die Load-pull-X-Parameter des (Q)PHD<sub>L</sub>-Ansatzes neu berechnet werden. Die X-Parameter des QPHD<sub>opt</sub>-Ansatzes scheinen in dieser Betrachtung erneut der beste Kompromiss aus Rechenaufwand und Genauigkeit zu sein. Im folgenden Abschnitt wird mit der lastabhängigen Untersuchung am Beispiel des Klasse-C-Verstärkers aus Kapitel 6.4 die Idee des QPHD<sub>opt</sub>-Ansatzes auf den in dieser Arbeit in Abschnitt 6.2 eingeführten MIT-Ansatz übertragen.

### 7.3.2. Beispiel: Klasse-C-Verstärker

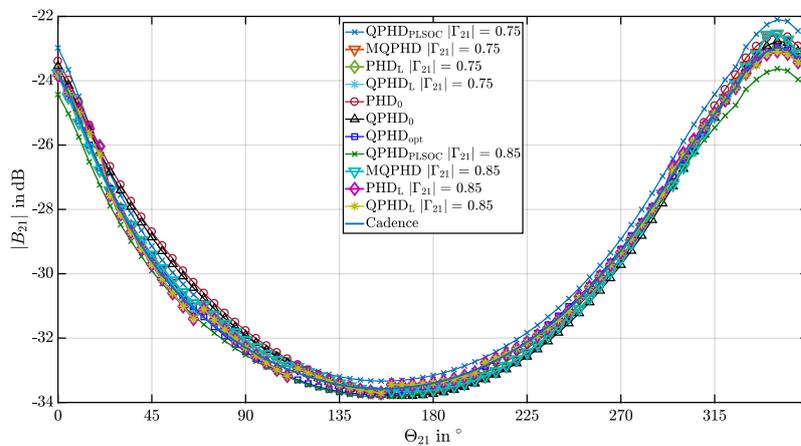
In diesem Abschnitt wird die vorherige Betrachtung um den MIT-Ansatz aus (6.14) in Kapitel 6 erweitert. Dabei wird zu Gunsten der Übersichtlichkeit auf einige der Ansätze aus dem letzten Abschnitt verzichtet, deren Ergebnisse nicht zufriedenstellend (PLSOC) waren oder deren Berechnung zu zeitintensiv (MQPHD und QPHD<sub>L</sub>) ist. Letzterer lieferte für die gewählte Rasterung der Lastebene

$$\Delta|\Gamma_{21}| = 0.1 \quad \text{und} \quad \Delta\Theta_{21} = 45^\circ \quad (7.14)$$

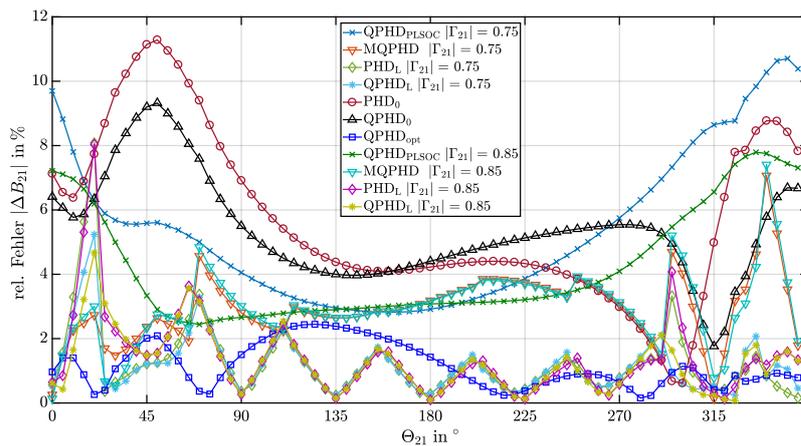
im Vergleich zum linearen PHD<sub>L</sub>-Ansatz nur unwesentlich bessere Ergebnisse und rechtfertigte deshalb nicht die zusätzlichen X-Parameter. Diese Einschätzung gilt wohlgerneht nur für die gewählte



(a)



(b)



(c)

Abb. 7.7.: LNA:  $B_{21}$ -Vergleich aller Ansätze durch Variation der Reflexionsfaktorphase  $\Theta_{21}$  für  $|\Gamma_{21}| = 0.8$ . Dieser Wert liegt zwischen  $|\Gamma_{21}| = 0.75$  und  $0.85$ , bei denen die Ansätze PLSOC, MQPHD und (Q)PHD<sub>L</sub> bestimmt wurden.

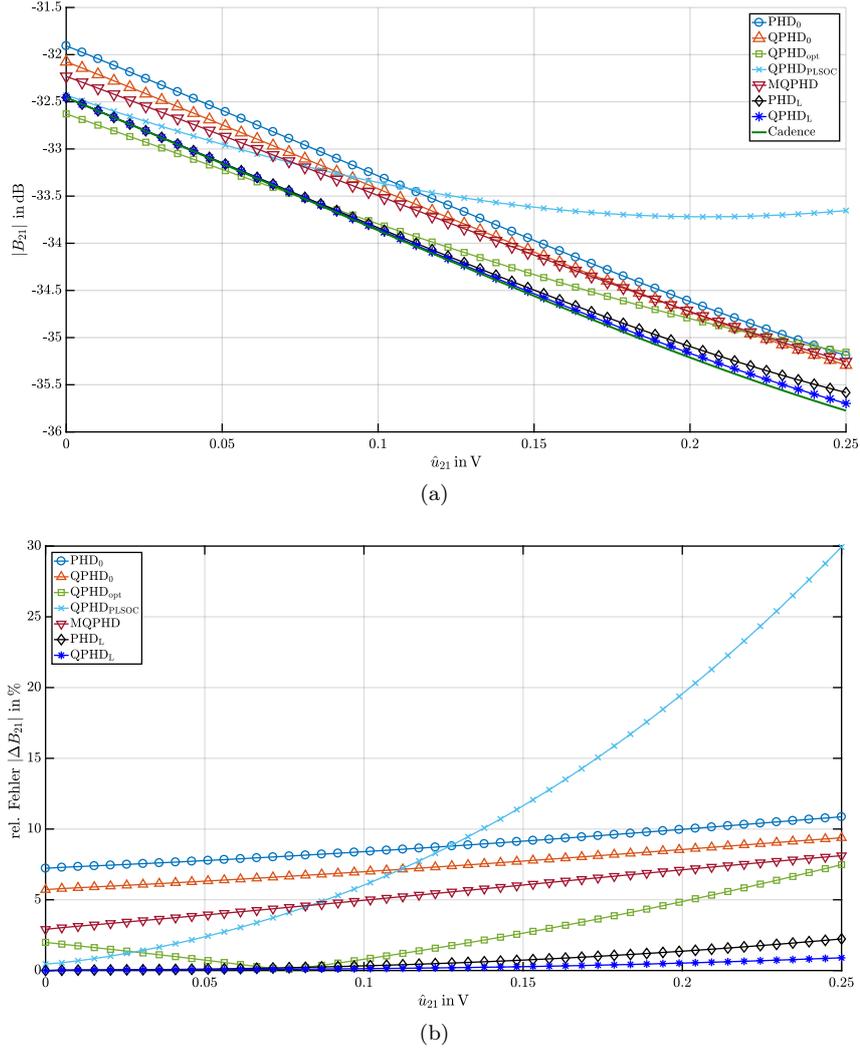


Abb. 7.8.: LNA:  $|B_{21}|$ -Vergleich durch Variation von  $|A_{21}|$  bzw.  $\hat{u}_{s21}$  für  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  und  $\Theta_{21} = 90^\circ$

Rasterung der Lastebene. Bei einer größeren Rasterung der Berechnungspunkte liefert der QPHD- bzw. HOPHD-Ansatz bessere Modellierungsergebnisse als der lineare PHD-Ansatz. Der angepasste Fall stellt dabei ein Extremum der Rasterung der Lastebene dar. Hierfür wird ebenso wie für die durch die zufällige Phasen-Offset-Methode optimierten Ansätze nur ein Parameterset bestimmt.

Als Beispiel wird in diesem Abschnitt der in Abb. 6.3 gezeigte und bereits in Abschnitt 6.4 untersuchte Verstärker der Klasse C herangezogen, für den zusätzlich zur Fundamentalfrequenz  $f_0 = 2.4$  GHz auch die Anteile bei  $2f_0$  berücksichtigt werden. Das Großsignal am angepassten Eingangstor wird durch eine Signalquelle bei der Fundamentalfrequenz angeregt. Da das Eingangstor angepasst ist, wird angenommen, dass keine Kleinsignale  $A_{1l}$  mit  $l > 1$  vorliegen. Daher ergeben sich unter Berücksichtigung der zweiten Harmonischen am Ausgangstor die linearen Load-pull-X-Parameter aus (7.4) mit  $\Delta\tilde{A}_{21} = [A_{21} - \Gamma_{21}X_{21}^{(F)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})] P^{-1}$  zu

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mk, \text{PHDL}} = & X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|, \Gamma_{21}) + X_{mk,21}^{(S)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})\Delta\tilde{A}_{21} + X_{mk,21}^{(T)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})\Delta\tilde{A}_{21}^* \\ & + X_{mk,22}^{(S)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})\tilde{A}_{22} + X_{mk,22}^{(T)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})\tilde{A}_{22}^*. \end{aligned}$$

Es ergeben sich für die X-Parameter des angepassten bzw. des lastoptimierten [13] PHD-Ansatzes (4.37)

$$\tilde{B}_{mk, \text{PHD}_{0/\text{opt}}} = X_{21}^{(F)}(|A_{11}|) + X_{mk,21}^{(S)}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21} + X_{mk,21}^{(T)}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21}^*$$

$$+ X_{mk,22}^{(S)}(|A_{11}|)\tilde{A}_{22} + X_{mk,22}^{(T)}(|A_{11}|)\tilde{A}_{22}^*$$

und des QPHD-Ansatzes (HOPHD mit  $D = 2$ ) (6.7)

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mk,\text{QPHD}_{0/\text{opt}}} &= \tilde{B}_{mk,\text{PHD}_{0/\text{opt}}} + X_{mk,21}^{(S^2)}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21} + X_{mk,21}^{(T^2)}(|A_{11}|)(\tilde{A}_{21}^*)^2 + X_{mk,21}^{(\text{ST})}(|A_{11}|)|\tilde{A}_{21}|^2 \\ &+ X_{mk,22}^{(S^2)}(|A_{11}|)\tilde{A}_{22} + X_{mk,22}^{(T^2)}(|A_{11}|)(\tilde{A}_{22}^*)^2 + X_{mk,22}^{(\text{ST})}(|A_{11}|)|\tilde{A}_{22}|^2. \end{aligned}$$

Für den in dieser Arbeit eingeführten MIT-Ansatz aus (6.14) ergeben sich mit  $D = 2$  und  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_{21}, \tilde{A}_{22})$  zusätzliche X-Parameter, sodass die reflektierten Streuvariablen

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mk,\text{MIT}_{0/\text{opt}}} &= \tilde{B}_{mk,\text{QPHD}_{0/\text{opt}}} + X_{mk}^{(S^{(1,1)T(0,0)})}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21}\tilde{A}_{22} + X_{mk}^{(S^{(0,0)T(1,1)})}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21}^*\tilde{A}_{22}^* \\ &+ X_{mk}^{(S^{(1,0)T(0,1)})}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21}\tilde{A}_{22}^* + X_{mk}^{(S^{(0,1)T(1,0)})}(|A_{11}|)\tilde{A}_{21}^*\tilde{A}_{22} \end{aligned}$$

berechnet werden. Die jeweiligen X-Parameter der unterschiedlichen Ansätze werden dabei wie in Abschnitt 7.2.5 beschrieben mittels (7.12) bestimmt.

Mit diesen Ansätzen ergeben sich für die Amplitude  $\hat{u}_{s_{11}} = 900$  mV, was einer Eingangsleistung  $P_{\text{in}} \approx 9$  dBm und dem Streuparameter  $A_{11} = 64 \text{ m}\sqrt{\text{W}}$  entspricht, die in Abb. 7.9 gezeigten Ergebnisse für die Streuvariablen am Ausgangstor  $B_{2k,\text{Ans.}}$  der verschiedenen Ansätze. Zusätzlich zu der komplexen und der Betragsdarstellung werden die nach (7.13)

$$|\Delta B_{mk}| = \left| \frac{B_{mk,\text{Cad.}} - B_{mk,\text{Ans.}}}{B_{mk,\text{Cad.}}} \right| \quad \text{für } k = 1, 2$$

begangenen relativen Fehler im Vergleich zur Cadence-Virtuoso-Simulation gezeigt. Für diese Vergleichssimulation wurde wie im vorherigen Abschnitt eine Variation der Reflexionsfaktorphase  $0 \leq \Theta_{21} \leq 355^\circ$  mit  $\Delta\Theta_{21} = 5^\circ$  durchgeführt, wobei der Betrag  $|\Gamma_{21}| = 0.9$  eingestellt wurde. Die X-Parameter des PHD<sub>L</sub>-Ansatzes wurden für  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  bzw.  $|\Gamma_{21}| = 0.95$  bestimmt, sodass die vorliegende Last betragsmäßig genau in der Mitte der beiden Ansätze liegt.

Bei Betrachtung der komplexen Darstellungen fällt sowohl für  $B_{21}$  in Abb. 7.9a als auch für  $B_{22}$  in Abb. 7.10a auf, dass es in einem großen Bereich von  $\Theta_{21}$  eine Wertehäufung gibt und sich nur für wenige Werte eine vergleichsweise große Änderung ergibt. Für  $B_{21}$  liegt dieser Bereich bei  $0^\circ \leq \Theta_{21} \leq 60^\circ$  mit dem Betragsmaximum bei  $\Theta_{21} = 30^\circ$  (vgl. Abb. 7.9b) und für  $B_{22}$  zwischen  $20^\circ \leq \Theta_{21} \leq 85^\circ$  mit dem Betragsmaximum bei  $\Theta_{21} = 60^\circ$  (vgl. Abb. 7.10b). Der Reflexionsfaktorbetrag  $|\Gamma_{21}| = 0.9$  wird in der Simulation eingestellt. Für die zweite Harmonische ergibt sich der Reflexionsfaktor  $|\Gamma_{22}| \approx 0.9$ , da die lineare Last nicht sehr steilflankig im Verlauf  $|Z_L(\omega)|$  ist. Aufgrund des hohen Betrags  $|\Gamma_{21}| = 0.9$  werden gemäß (7.2)  $A_{2l} = \Gamma_{2l}B_{2l}$  für  $l = 1, 2$  betragsmäßig ähnlich groß und in der Phase variiert. Im Fall des PHD<sub>L</sub>-Ansatzes wird in den Großsignal-X-Parametern der Einfluss der Reflexion auf der Fundamentalen  $A_{21}^{\text{LSOP}} = \Gamma_{21}B_{21}^{\text{LSOP}}$  bereits berücksichtigt. Im vorliegenden Fall heißt das  $X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|, \Gamma_{21} = 0.85e^{jn45^\circ})$  bzw.  $X_{mk}^{(F)}(|A_{11}|, \Gamma_{21} = 0.95e^{jn45^\circ})$  mit  $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$ . Die Abweichungen  $\Delta|\Gamma_{21}| = 0.05$  und in  $\Theta_{21}$  vom zugrunde liegenden LSOP wird hier durch das Kleinsignal  $\Delta\tilde{A}_{21} = [A_{21} - \Gamma_{21}X_{21}^{(F)}(|A_{11}|, \Gamma_{21})]P^{-1}$  berücksichtigt. Durch die Subtraktion der komplexen Zahl  $\Gamma_{21} \cdot X_{21}^{(F)}$  liegt das globale Maximum von  $\Delta\tilde{A}_{21}$  nicht genau bei dem gleichen Wert von  $\Theta_{21}$  wie das von  $\tilde{A}_{21}$ . Vielmehr ergeben sich zwei nahezu gleich große lokale Maxima bei  $\Theta_{21} = 25^\circ$  bzw.  $\Theta_{21} = 60^\circ$  sowohl für  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  als auch  $|\Gamma_{21}| = 0.95$ . Die globalen Maxima der relativen Fehler  $|\Delta\tilde{B}_{21}|$  und  $|\Delta\tilde{B}_{22}|$  nehmen die PHD<sub>L</sub>-Ansätze bei  $\Theta_{21} = 60^\circ$  an, da hier zusätzlich  $\tilde{A}_{22}$  sehr große Werte annimmt. Insgesamt gesehen bleibt der für  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  bestimmte X-Parametersatz deutlich unter den Fehlerwerten des für  $|\Gamma_{21}| = 0.95$  bestimmten Satzes. Es ergeben sich die Maximalwerte  $|\Delta\tilde{B}_{21}(0.85)|_{\text{max}} = 12.5\%$  und  $|\Delta\tilde{B}_{21}(0.95)|_{\text{max}} = 24.2\%$  sowie  $|\Delta\tilde{B}_{22}|_{\text{max}}(0.85) = 30\%$  und  $|\Delta\tilde{B}_{21}|_{\text{max}}(0.95) = 42\%$ . Diese recht hohen Fehler lassen sich damit erklären, dass die vermeintlichen Kleinsignale  $\Delta\tilde{A}_{21}$  und  $\tilde{A}_{22}$  ähnlich groß werden, wie das Großsignal am Eingangstor  $A_{11}$ . Umso verwunderlicher ist die Tatsache, dass im Bereich der maximalen Werte von  $\tilde{A}_{21}$  der angepasste PHD<sub>0</sub>-Ansatz für  $B_{21}$  (vgl. Abb. 7.9c) teilweise einen kleineren relativen Fehler begeht als der mit Termen höherer Ordnung erweiterte QPHD<sub>0</sub>-Ansatz, d. h. dem HOPHD<sub>0</sub>-Ansatz der Ordnung  $D = 2$ , und der MIT<sub>0</sub>-Ansatz aus Abschnitt 6.2, der zusätzlich durch weitere Terme die

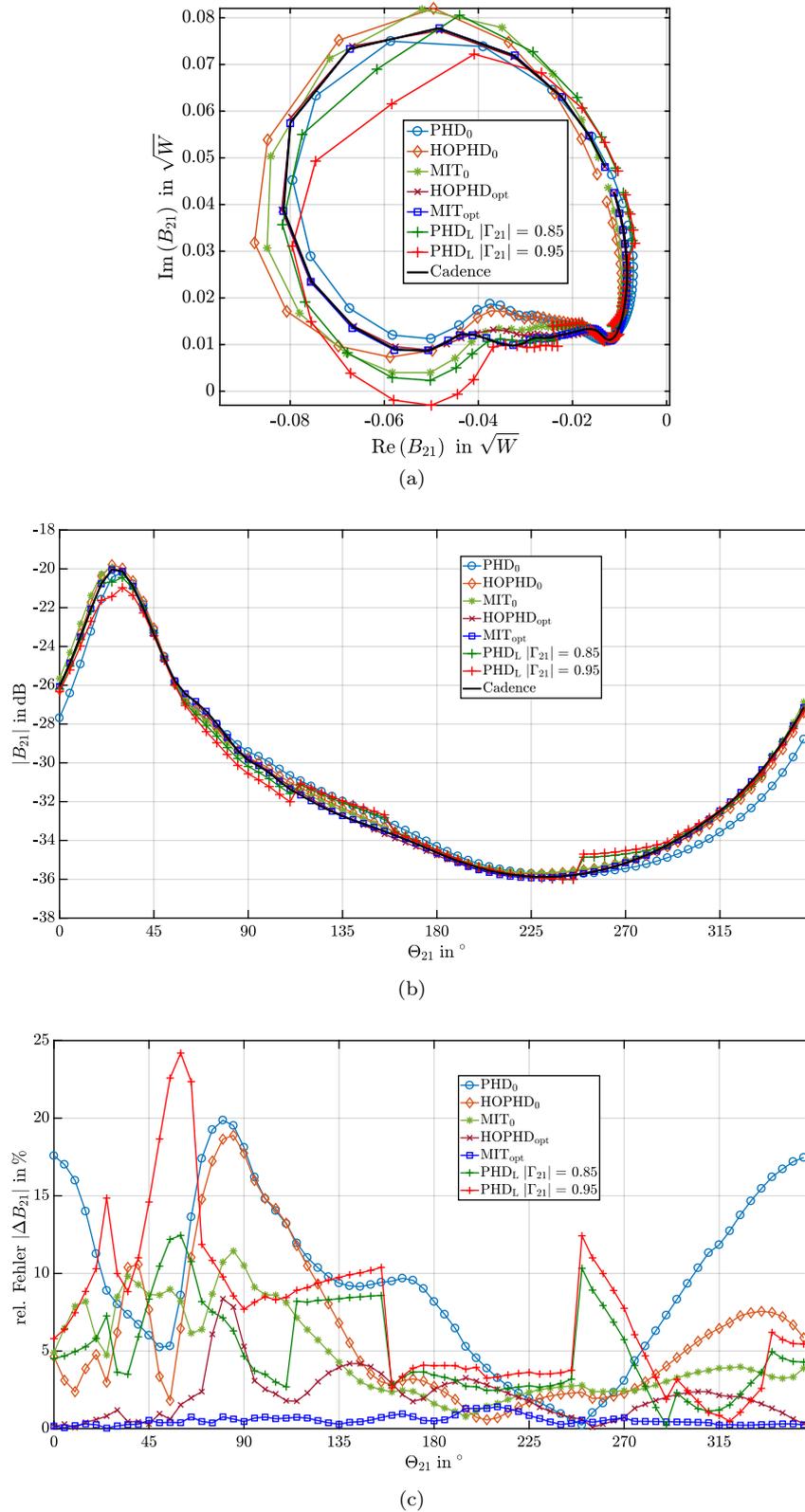


Abb. 7.9.: Klasse-C-Verstärker:  $B_{21}$ -Vergleich aller Ansätze durch Variation der Reflexionsfaktorphase  $\Theta_{21}$  bei  $|\Gamma_{21}| = 0.9$ . Dieser Wert liegt zwischen  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  und  $0.95$ , bei denen der Load-pull-Ansatz PHD<sub>L</sub> bestimmt wurde. Die Ansätze HOPHD und MIT werden mit der Ordnung  $D = 2$  bestimmt.

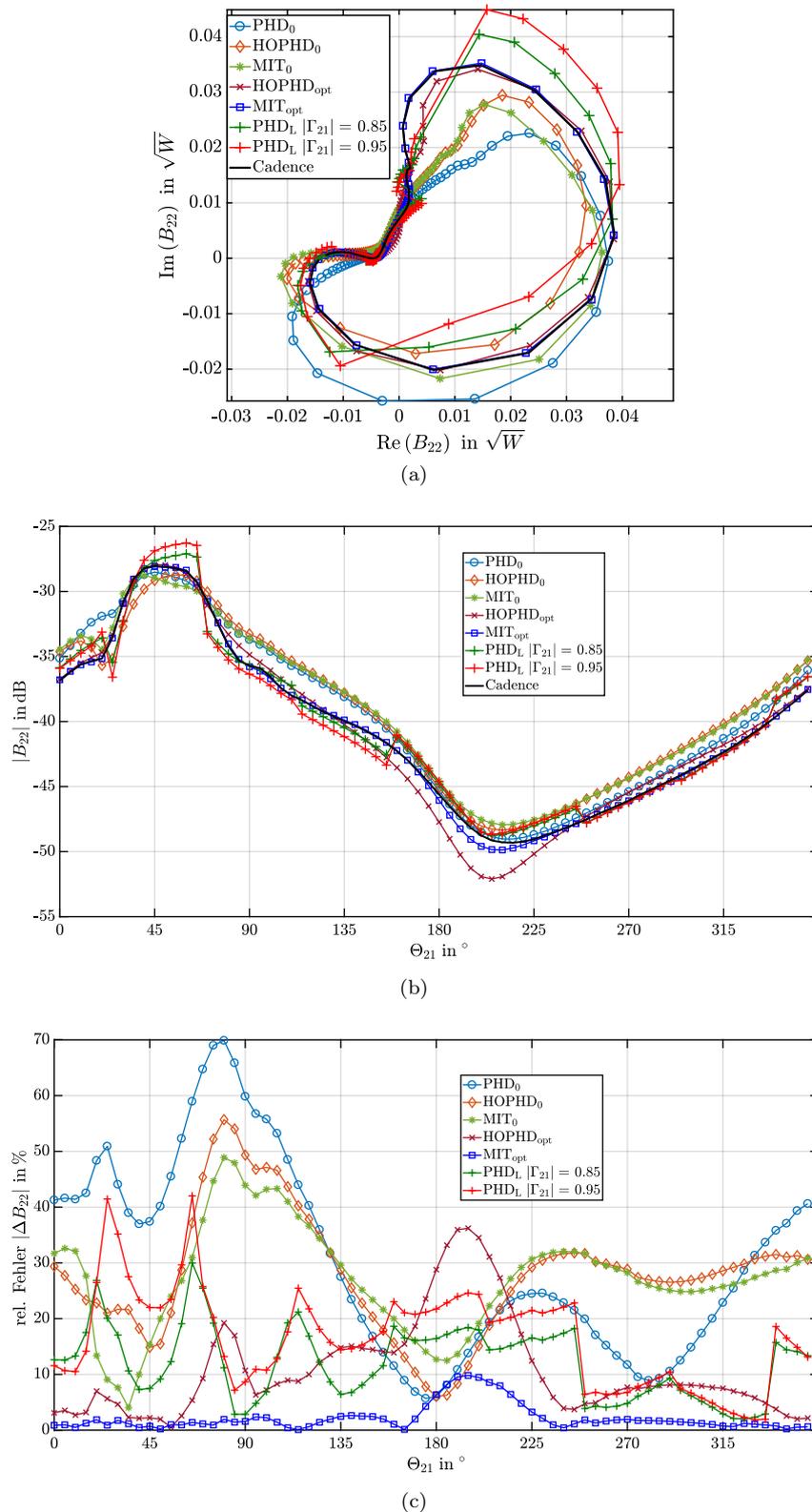


Abb. 7.10.: Klasse-C-Verstärker:  $B_{22}$ -Vergleich aller Ansätze durch Variation der Reflexionsfaktorphase  $\Theta_{21}$  bei  $|\Gamma_{21}| = 0.9$ . Dieser Wert liegt zwischen  $|\Gamma_{21}| = 0.85$  und  $0.95$ , bei denen der Load-pull-Ansatz  $\text{PHD}_L$  bestimmt wurde. Die Ansätze HOPHD und MIT werden mit der Ordnung  $D = 2$  bestimmt.

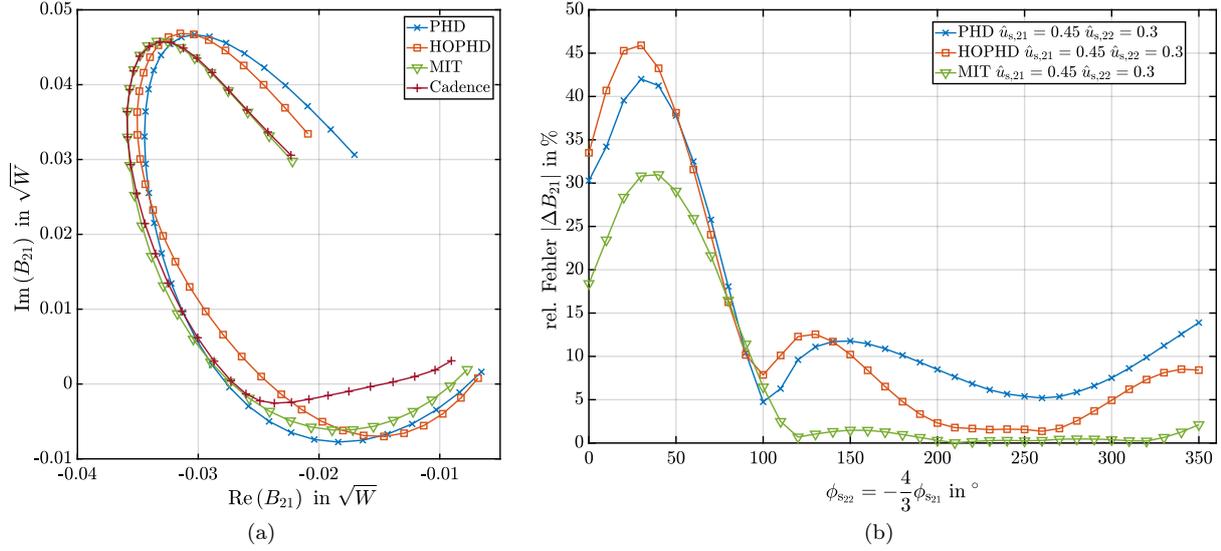


Abb. 7.11.: Klasse-C-Verstärker: Vergleich der angepassten Ansätze durch Variation der Quellenphasen  $\phi_{s,22} = -\frac{4}{3}\phi_{s,21}$  für  $\hat{u}_{s,11} = 900$  mV,  $\hat{u}_{s,21} = 450$  mV und  $\hat{u}_{s,22} = 300$  mV. Die Ansätze HOPHD und MIT werden mit der Ordnung  $D = 2$  bestimmt.

Wechselwirkung der Kleinsignale  $A_{nl} \neq A_{11}$  berücksichtigt. Bei  $\Theta_{21} = 45^\circ$  ist z. B.  $|\Delta\tilde{B}_{21,\text{PHD}_0}| = 6\%$ ,  $|\Delta\tilde{B}_{21,\text{QPHD}_0}| = 7.6\%$  und  $|\Delta\tilde{B}_{21,\text{MIT}_0}| = 8.6\%$ . Die Erklärung dafür lässt sich in Abb. 7.11 finden. Darin sind  $\tilde{B}_{21}$  und  $\tilde{B}_{22}$  in der komplexen Ebene (a) für die drei angepassten Ansätze sowie die Cadence-Vergleichssimulation und die relativen Fehler der Modellansätze (b) gezeigt. Die zugrunde liegende Simulation wurde für die Großsignalamplitude  $\hat{u}_{s,11} = 900$  mV, die zusätzlichen Signalquellen am Ausgangstor  $\hat{u}_{s,21} = 450$  mV sowie  $\hat{u}_{s,22} = 300$  mV und einer Phasenvariation  $\phi_{s,22} \in [0, 350^\circ]$  mit  $\Delta\phi_{s,22} = 10^\circ$  sowie  $\phi_{s,21} = -\frac{3}{4}\phi_{s,22}$  durchgeführt. Die Betrachtung der komplexen Darstellung zeigt, dass wie erwartet der MIT<sub>0</sub>-Ansatz das qualitative Verhalten am besten nachbilden kann. Allerdings gibt es bei  $\phi_{s,22} = 100^\circ$  auch einen Punkt, bei dem der PHD<sub>0</sub>-Ansatz trotz der hohen Signalamplituden der im Ansatz als klein angenommenen Signale einen geringeren relativen Fehler begeht als der MIT<sub>0</sub>-Ansatz. Im Vergleich zum QPHD<sub>0</sub>-Ansatz gibt es noch weitere Punkte, in denen der vermeintlich unterlegene PHD<sub>0</sub>-Ansatz einen kleineren Fehler nach sich zieht.

Das gleiche Verhalten ist auch im Bereich der kleinsten Werte von  $B_{21}$  und  $B_{22}$  zu beobachten. Allerdings liegt hier die Ursache in der Berechnung nach der Phasen-Offset-Methode mittels (7.12) und in der zugrunde liegenden Simulationsdaten. Im Fall des PHD-Ansatzes werden nur kleine Signalamplituden eingestellt, sodass für den hier betrachteten Modellansatz optimierte X-Parameterwerte erhalten werden. Für die anderen Ansätze werden in die Berechnung über das Optimierungsproblem (7.12) Simulationsdaten mit höheren Signalamplituden herangezogen, sodass die Modellparameter über einen größeren Wertebereich der Kleinsignale zu einem minimalen quadratischen Fehler führen. Für den HOPHD-Ansatz werden dabei nacheinander die Signalquellen  $U_{s,nl}$  einzeln zusätzlich zu  $U_{s,11}$  in der Phase variiert. Beim MIT-Ansatz werden weiterhin Datenpaare in (7.12) berücksichtigt, wie sie in der Betrachtung in Abb. 7.11 vorliegen (vgl. Abschnitt 6.3). Bei der Optimierung der Fehlerquadratsumme für die Ansätze höherer Ordnung mittels (7.11) bzw. (7.12) werden andere X-Parameter erster Ordnung  $X_{mk}^{(\cdot)}$  erhalten als für den PHD-Ansatz, für dessen Berechnung über (4.44) nur Datenpaare kleiner Amplituden  $\hat{u}_{s,nl}$  zugrunde liegen. Daher ist zu erwarten, dass der PHD-Ansatz u. U. für kleinere Amplituden zu einem kleineren relativen Fehler führt.

Im Vergleich zu den bisher beschriebenen Ansätzen fällt in Abb. 7.9 und 7.10 auf, dass die lastoptimierten Ansätze 2. Ordnung  $\text{QPHD}_{\text{opt}} \equiv \text{HOPHD}_{\text{opt}}(D = 2)$ , und  $\text{MIT}_{\text{opt}}$  sowohl qualitativ als auch quantitativ - im Sinne des relativen Fehlers  $|\Delta\tilde{B}_{2k}|$  in (c) - zu besseren Ergebnissen führten. Dabei ist viel deutlicher als im Fall der angepassten Ansätze zu erkennen, dass der theoretisch überlegene  $\text{MIT}_{\text{opt}}$ -Ansatz auch praktisch im Vorteil gegenüber dem  $\text{HOPHD}_{\text{opt}}$ -Ansatz ist. Für die maximalen re-

lativen Fehler ergeben sich für den HOPHD<sub>opt</sub>-Ansatz  $|\Delta\tilde{B}_{21}|_{\max} = 8.4\%$  und  $|\Delta\tilde{B}_{22}|_{\max} = 36.2\%$ , wohingegen für den MIT<sub>opt</sub>-Ansatz  $|\Delta\tilde{B}_{21}|_{\max} = 1.4\%$  und  $|\Delta\tilde{B}_{22}|_{\max} = 9.8\%$  sind. Es bestätigt sich der Eindruck der beispielhaften Betrachtung am LNA des letzten Abschnitts, bei dem aufgrund der Beschränkung auf die Fundamentalfrequenzen, d. h.  $A_{21}$  als einziges zusätzliches Signal, HOPHD  $\equiv$  MIT gilt. Die lastoptimierten Ansätze stellen im Vergleich zu den angepassten eine sinnvolle Alternative zu den Load-pull-X-Parametern dar. Die Berücksichtigung verschiedener Lastsituationen mittels der zufälligen Phasen-Offset-Methode [13, 19, 20] führt zu einem X-Parametersatz, der über die gesamte Lastebene einen möglichst kleinen quadratischen Fehler begeht. Wie aus der qualitativen Betrachtung in Abschnitt 6.4 hervorgegangen, ist hier der MIT-Ansatz im Vorteil gegenüber den anderen Ansätzen, und zwar nicht nur den Ansätzen mit einem X-Parametersatz, sondern - bei der vorliegenden Rasterung der Lastebene - auch den PHD<sub>L</sub> X-Parametern. Diese werden wie die angepassten Ansätze über die *normale* Phasen-Offset-Methode aus Abschnitt 4.3.2 bestimmt, bei der nur die Phase der zusätzlichen Signale  $A_{nl}$  variiert wird. Für die Bestimmung der Ansätze höherer Ordnung ist es, wie in Abschnitt 6.3 angemerkt, sinnvoll noch zusätzlich die Amplitude der Signalquellen  $\hat{u}_{s_{nl}}$  zu variieren. Diese Idee ist implizit im passiven Load-pull-Tuning durch deutlich mehr, zufällig verteilte Wertepaare erweitert, wodurch sich die verbesserten Modellparameter ergeben. Wie in Abschnitt 7.2.5 angemerkt, ist für eine Berechnung der X-Parameter  $X_{mk,1l}^{(\cdot)}$  am Eingangstor eine Quelle  $U_{s_{1l}}$  nötig, die im Sinne der Phasen-Offset-Methode variiert werden muss. Alternativ kann am Eingangstor im Sinne der zufälligen Phasen-Offset-Methode äquivalent ein *Source-pull-Tuner* eingesetzt werden.

### 7.3.3. Modellkomplexität

In Abschnitt 6.5 wurden die Komplexitäten der verschiedenen Modellansätze in allgemeiner Form und in Tab. 6.4 am Beispiel der Ordnung  $D = 2$  und der Länge  $L = 2$  des Kleinsignalvektors  $\tilde{\mathbf{A}}$  aus (6.11) verglichen. Es wurde über die zugehörige Betrachtung von Abb. 6.9 festgestellt, dass die Modellkomplexität des in dieser Arbeit eingeführten MIT-Ansatz schnell gegenüber den in der Literatur genannten wächst. Die dort betrachteten Ansätze gelten für den angepassten Fall. In diesem Kapitel wurden verschiedene Ansätze betrachtet, die eine lastabhängige Modellierung mit Hilfe der X-Parameter erlauben. Wie dieses Kapitel zeigte, lassen sich mit diesen Ansätzen i. A. qualitativ und quantitativ bessere Ergebnisse erzielen als mit den Ansätzen, die für eine angepasste Messumgebung bestimmt werden. Allerdings werden die erweiterten Ansätze für verschiedene Lastsituationen immer neu berechnet, sodass sich eine größere Menge an Modellparametern ergibt. Im Folgenden werden wie in Abschnitt 6.5 die Parameteranzahlen gegenübergestellt und am Ende des Abschnitts in Tab. 7.1 zusammengefasst.

In Abschnitt 7.2.1 wurden die lastabhängigen X-Parameter betrachtet, die mit Hilfe eines Load-pull-Tuners den LSOP variieren. Mathematisch zieht dies in (7.3) entweder eine Berücksichtigung des zweiten Großsignals  $A_{21}$  oder äquivalent dazu des fundamentalen Lastreflexionsfaktors  $\Gamma_{21}$  im LSOP nach sich [117]. In dieser Arbeit wurde die zweite Möglichkeit über die komplexe Größe  $\Gamma_{21} = |\Gamma_{21}|e^{j\Theta_{21}}$  bevorzugt. Wie im angepassten Fall werden die lastabhängigen X-Parameter des PHD<sub>L</sub>-Ansatzes über spektrale Linearisierung der zugehörigen Beschreibungsfunktion im LSOP gewonnen. Der Vorteil des Load-pull-Ansatzes ist, dass nur auf der Fundamentalen ein Load-pull-Tuner erforderlich ist. Die Fehlanpassung auf den höheren Harmonischen (vgl. Abschnitt 7.1) wird über die Kleinsignal-X-Parameter ( $X^{(S)}$ , etc.) berücksichtigt, die deshalb auch Empfindlichkeitsfunktionen darstellen [117, S. 128]. Wenn zusätzlich zum angepassten Fall in  $M_{\Gamma_L}$  verschiedenen lastabhängigen LSOP die X-Parameter berechnet werden, ergibt sich die Modellparameteranzahl des PHD<sub>L</sub>-Ansatzes mit der Länge  $L$  des Signalvektors  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^L$  aus (6.11) und  $M_{\text{PHD}} = 1 + 2L$  aus (6.34)

$$M_{\text{PHD}_L}(L, M_{\Gamma_L}) = (1 + M_{\Gamma_L})M_{\text{PHD}} = (1 + M_{\Gamma_L})(1 + 2L). \quad (7.15)$$

Dabei gilt bei äquidistanter Rasterung der Lastebene über  $\Delta|\Gamma_{21}| = \text{konst.}$  und  $\Delta\Theta_{21} = \text{konst.}$

$$M_{\Gamma_L} = \frac{360^\circ}{\Delta|\Gamma_{21}|\Delta\Theta_{21}}. \quad (7.16)$$

In dieser Arbeit wurde die Lastebene mit  $\Delta|\Gamma_{21}| = 0.1$  und  $\Delta\Theta_{21} = 45^\circ$  gerastert, wodurch sich  $M_{\Gamma_L} = 80$  ergibt. In der beispielhaften Betrachtung des LNA in Abschnitt 7.3.1 unter Berücksichtigung der Fundamentalfrequenzen, d. h.  $A_{21}$  als einziges Signal in  $\tilde{\mathbf{A}}$  und  $L = 1$ , folgt  $M_{\text{PHD}_L}(1, 80) = 3 \cdot 81 =$

243. Zu Vergleichszwecken wurde ebenfalls eine Ordnungserhöhung des  $\text{PHD}_L$ -Ansatzes zum  $\text{QPHD}_L$  durchgeführt, dessen Modellkomplexität

$$M_{\text{QPHD}_L}(L, M_{\Gamma_L}) = (1 + M_{\Gamma_L})M_{\text{QPHD}} = (1 + M_{\Gamma_L})(1 + 5L) \quad (7.17)$$

ebenfalls abhängig von  $M_{\Gamma_L}$  und  $M_{\text{QPHD}}(L)$  aus (6.37) ist. Für das LNA-Beispiel gilt  $M_{\text{QPHD}_L}(1, 80) = 6 \cdot 81 = 2 \cdot M_{\text{PHD}_L}(1, 80) = 486$ . Wie der direkte Vergleich in den Abb. 7.6ff. zeigte, ist bei gleichbleibender Lastquantisierung  $M_{\Gamma_L}$  nur ein geringer Vorteil gegenüber dem linearen  $\text{PHD}_L$  zu verzeichnen, der die größere Anzahl an Parametern nicht rechtfertigt. Im Fall des Klasse-C-Verstärkerbeispiels in Abschnitt 7.3.2 ist  $L = 2$ , wodurch sich bei gleicher Anzahl von Lastpunkten  $M_{\Gamma_L}$  die Modellkomplexität  $M_{\text{QPHD}_L}(2, 80) = 5 \cdot 81 = 405$  ergibt. Für den quadratischen Ansatz wäre in diesem Fall  $M_{\text{QPHD}_L}(2, 80) = 11 \cdot 81 = 891$  gewesen. Die Erhöhung der Komplexität infolge der höheren Ordnung  $D = 2$  könnte durch eine gleichzeitige Reduzierung der Lastpunkte  $M_{\Gamma_L}$  kompensiert werden. Diese Idee ist die Basis der anderen betrachteten Ansätze.

Der als erstes in Abschnitt 7.2.2 eingeführte MQPHD-Ansatz nach [16] skaliert über einen lastabhängigen Faktor  $\alpha_{mk, nl}(\Gamma_L)$  die angepassten X-Parameter zweiter Ordnung, wie in (7.7) gezeigt. Zusätzlich zu den  $M_{\text{QPHD}}$  angepassten X-Parametern des QPHD-Ansatzes aus (6.37) kommen noch für jedes der  $L$  zusätzlichen Signale  $\tilde{A}_{nl}$  insgesamt  $M_{\Gamma_L}$  Skalierungsfaktoren  $\alpha_{mk, nl}$  hinzu, sodass sich die Modellkomplexität ergibt zu

$$M_{\text{MQPHD}}(L, M_{\Gamma_L}) = M_{\text{QPHD}} + L \cdot M_{\Gamma_L} = 1 + L(M_{\Gamma_L} + 5). \quad (7.18)$$

Die Modellkomplexität wird im LNA-Beispiel aus Abschnitt 7.3.1 und der gewählten Lastanzahl  $M_{\Gamma_L} = 80$  zu  $M_{\text{MQPHD}}(1, 80) = 86$  und wäre im Klasse-C-Beispiel aus Abschnitt 7.3.2  $M_{\text{MQPHD}}(2, 80) = 171$  gewesen. Die Modellgenauigkeit ist im Vergleich zum angepassten Fall  $\text{QPHD}_0$  verbessert und nicht wesentlich schlechter als beim  $\text{PHD}_L$ -Ansatz. Im Vergleich zum  $\text{PHD}_L$ -Ansatz kann die Modellparameteranzahl zwar stark gesenkt werden, allerdings ist der Berechnungsaufwand ähnlich hoch, da die lastabhängigen Skalierungsfaktoren  $\alpha_{mk, nl}(\Gamma_L)$  ebenso für jede der  $M_{\Gamma_L}$  Lastsituationen über ein Optimierungsproblem berechnet werden. Daher wurde im Klasse-C-Beispiel auf den MQPHD-Ansatz verzichtet.

Den Ansätzen (Q)PHD<sub>L</sub> und MQPHD, die für verschiedene Lastsituationen neu berechnet werden, ist gemein, dass bei einer Variation der Last (7.2) sowohl in  $|\Gamma_L|$  als auch  $\Theta_L$  mindestens ein neuer Parameter verwendet werden muss. Wie in den Abb. 7.8ff. zu sehen ist, führt dieser Wechsel zu nicht stetigen Verläufen von  $B_{mk}$ . Dieser Umstand könnte durch eine Berechnung der X-Parameter über ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen (vgl. z. B. [6, 39]) umgangen werden, was allerdings den Berechnungsaufwand vergrößern würde. Als erster Ansatz, der die Lastebene nicht in verschiedene LSOP aufteilt, wurde der PLSOC-Ansatz [19, 20] in Abschnitt 7.2.3 betrachtet. Dessen X-Parameter  $X_{mk}^{(\cdot)}(|A_{11}|, |\Gamma_L|)$  aus (7.10) sind unabhängig von der Phase  $\Theta_{2l}$  der Reflexionsfaktoren bei der  $l$ -ten Harmonischen  $\Gamma_{2l}$  und nur abhängig von deren Beträge  $|\Gamma_{2l}|$  gültig. Dabei entspricht  $|\Gamma_{2l}| = \text{konst.} \forall \Theta_{2l} \in [0, 360^\circ]$  einem Kreis in der Lastebene der  $l$ -ten Harmonischen, womit der Ansatzname zu erklären ist [20]. Die X-Parameter des PLSOC-Ansatzes werden durch die zufällige Phasen-Offset-Methode [13, 19, 20] bestimmt. Für jeden der  $M_{|\Gamma_L|}$  verschiedenen PLSOC ergibt sich ein X-Parametersatz. In [20] werden die X-Parameter nach dem QPHD-Ansatz aus (6.7) und dem Padé-Ansatz aus [17] und in [19] nach dem RP-Ansatz im Sinne des PLSOC-Ansatzes berechnet. In dieser Arbeit wurde in (7.10) zu Vergleichszwecken ebenfalls der QPHD-Ansatz gewählt, wofür sich hier

$$M_{\text{PLSOC}}(L, M_{|\Gamma_L|}) = M_{|\Gamma_L|}M_{\text{QPHD}} = M_{|\Gamma_L|}(1 + 5L) \quad (7.19)$$

ergibt. Der angepasste Fall  $\Gamma_L = 0$  ist darin nicht enthalten und wird durch den X-Parametersatz des kleinsten  $|\Gamma_L|$  angenähert. Anders als im  $\text{PHD}_L$ -Ansatz [117] wird in [20, Gl. (22)] angedeutet, dass auch auf den höheren Harmonischen ein Load-pull-Tuner zum Einsatz kommt. Wenn bei allen berücksichtigten  $K_{\max}$  Harmonischen unabhängige Load-pull-Tuner zum Einsatz kommen, die die Lastebene aller  $K_{\max}$  Harmonischen mit konstantem  $\Delta|\Gamma|$  rastern, erhöht sich die Komplexität zu  $M_{\text{PLSOC}}(L, K_{\max}, \Delta|\Gamma|) = M_{\text{QPHD}}(1 + \Delta|\Gamma|^{K_{\max}})$  unterschiedlichen X-Parametersätzen.

Im LNA-Beispiel aus Abschnitt 7.3.1 wurden an zehn verschiedenen PLSOC, d. h.  $M_{|\Gamma_L|} = (\Delta|\Gamma_{21}|)^{-1} = 10$ , insgesamt  $M_{\text{PLSOC}}(1, 10) = 60$  verschiedene X-Parameter  $X_{21}^{(\cdot)}(|A_{11}|, |\Gamma_{21}|)$  berechnet. Die erhaltenen X-Parametersätze liefern, wie Abb. 7.6 und 7.8 zeigten, in der Nähe der PLSOC sehr gute Ergebnisse. Allerdings zeigte sich in letzterer und in Abb. 7.7, dass bei einer stärkeren Abweichung vom PLSOC sehr

Tab. 7.1.: Vergleich der Anzahl  $M$  der (lastabhängigen) Modellparameter unterschiedlicher Ansätze. Die lastabhängigen Ansätze wurden in diesem Abschnitt mit  $M_{|\Gamma_L|} = \frac{1}{\Delta|\Gamma_{21}|} = 10$ ,  $\Delta\Theta_{21} = 45^\circ$  und  $M_{\Gamma_L} = \frac{360^\circ}{\Delta\Theta_{21}} M_{|\Gamma_L|} = 80$  bestimmt.

Ansatz	Gl.	Anzahl $M$		
		$M_{\text{Ans}}(L, \cdot)$	$M_{\text{Ans}}(1, \cdot)$	$M_{\text{Ans}}(2, \cdot)$
PHD <sub>L</sub>	(7.15)	$(1 + M_{\Gamma_L})(1 + 2L)$	243	405
QPHD <sub>L</sub>	(7.17)	$(1 + M_{\Gamma_L})(1 + 5L)$	486	(891)
MQPHD	(7.18)	$1 + L(M_{\Gamma_L} + 5)$	86	171
PLSOC	(7.19)	$M_{ \Gamma_L }(1 + 5L)$	60	(110)
PHD <sub>0/opt</sub>	(6.34)	$1 + 2L$	3	5
QPHD <sub>0/opt</sub>	(6.37)	$1 + 5L$	6	11
MIT <sub>0/opt</sub>	(6.35)	$\sum_{d=0}^{D=2} \binom{2L+d-1}{d}$	(6)	15

schnell ein ähnlich großer Fehler begangen wird wie im angepassten Fall. Die Ursache hierfür liegt in der Bestimmung der X-Parameter über (6.20) bzw. (7.11) auf Basis der zugrunde liegenden Datenpunkte. Wie auch [20, Fig. 4ff.] feststellte, sind die erhaltenen X-Parameter stark von der Werteverteilung abhängig. Eine äquidistante Variation von  $\Theta_{21}$  führt nicht zu einer Gleichverteilung von  $A_{21}$ . Im betrachteten LNA-Beispiel liegt eine Häufung kleiner  $A_{21}$  vor, sodass große Werte weniger Einfluss in der Optimierung erhalten. Beim angepassten Fall wird dem durch eine systematische Variation von  $|A_{21}|$  über die Signalquelle  $U_{s_{21}}$  (vgl. (A.2) und Abb. 4.3) entgegengewirkt. Im zweiten Beispiel in Abschnitt 7.3.2 mit  $L = 2$  wurde auf den PLSOC-Ansatz verzichtet, da bereits in Abb. 7.7f. zu große relative Fehler vorlagen, um die im Vergleich zum angepassten Fall zusätzlichen Modellparameter zu rechtfertigen. Die Anzahl im zweiten Beispiel wäre für  $M_{\text{PLSOC}}(2, 10) = 110$  gewesen.

Mit dem in Abschnitt 7.2.4 aufgegriffenen lastoptimierten Ansatz [13] wird die Idee der im PLSOC-Ansatz eingesetzten zufälligen Phasen-Offset-Methode auf die gesamte Lastebene ausgeweitet, d. h. der Berechnung der X-Parameter in (7.11) liegen Datenpunkte der gesamten Lastebene zugrunde. Anders als im PLSOC-Ansatz werden diese nicht nur über eine Variation von  $\Theta_L$  gewonnen, sondern sowohl über  $|\Gamma_L|$  als auch  $\Theta_L$ . Durch die Variation von  $|\Gamma_L|$  folgen über (7.2) auch verschiedene Werte für die Signale  $\tilde{A}_{21}$ . Im betrachteten LNA-Beispiel (vgl. Abb. 7.6ff.) zeigt sich, dass die daraus berechneten lastoptimierten X-Parameter der beste Kompromiss aus Genauigkeit und X-Parameteranzahl sind. Letztere ist in diesem Fall genauso groß wie für den angepassten Fall, da die Optimierung über die gesamte Lastebene nur einmal pro Wert  $|A_{11}|$  durchgeführt werden muss. Die X-Parameteranzahl im LNA-Beispiel aus Abschnitt 7.3.1, in dem nur die Fundamentalfrequenzen betrachtet wurden, ist daher mit  $L = 1$  in (6.37) für den lastoptimierten QPHD-Ansatz  $M_{\text{QPHD}_{\text{opt}}}(L = 1) = M_{\text{QPHD}_0}(1) = 6$  und im Klasse-C-Beispiel in Abschnitt 7.3.2  $M_{\text{QPHD}_{\text{opt}}}(L = 2) = M_{\text{QPHD}_0}(2) = 11$ .

Die Parameteranzahlen aller betrachteten Ansätze dieses Kapitels sind in Tab. 7.1 in allgemeiner Form und für die beiden Beispiele aus Abschnitt 7.3.1 und 7.3.2 mit  $L = 1$  bzw.  $L = 2$  zusammengefasst. Die Zahlenwerte in Klammern sind dabei die verworfenen Ansätze bzw. im Fall des MIT<sub>opt</sub>-Ansatz für  $L = 1$  identisch zum QPHD-Ansatz. Der Vergleich der Modellkomplexitäten für die einfachen Beispiele dieses Abschnitts zeigt, dass für die lastabhängigen Ansätze deutlich mehr Modellparameter zu bestimmen sind, was nicht zwangsläufig zu einem genaueren Modell führt. In Abb. 6.9 bzw. wurden für die angepassten Ansätze die Modellparameteranzahlen für  $1 \leq L \leq 6$  diskutiert. Dabei wurde festgestellt, dass die Komplexität des in dieser Arbeit vorgestellten MIT-Ansatzes durch die binomiale Abhängigkeit (6.35) sehr schnell im Vergleich zu den anderen Ansätzen wächst. Genauer gesagt ist  $M_{\text{MIT}_0}(L, D) \sim L^D$ , wohingegen  $M_{\text{HOPHD}_0}(L, D) \sim L^{D-1}$  ein Polynom der Ordnung  $D - 1$  ist. Für den in dieser Arbeit betrachteten QPHD-Ansatz ist  $M_{\text{HOPHD}_0}(L, 2) \sim 5L$  ebenfalls linear in  $L$  und mit einer höheren Steigung als der PHD-Ansatz. Die Modellkomplexitäten der lastabhängigen Ansätze sind zwar linear in  $L$ , allerdings sind

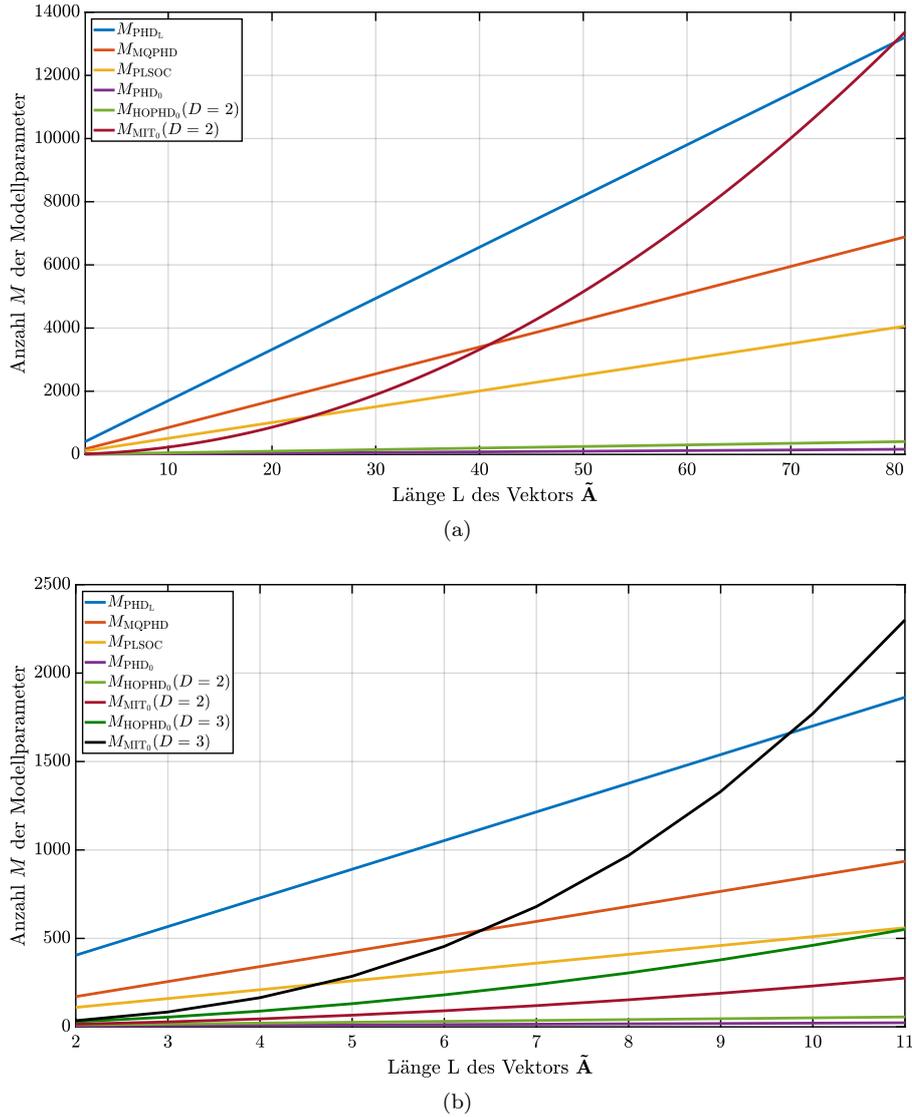


Abb. 7.12.: Vergleich der Modellparameteranzahlen unterschiedlicher (lastabhängigen) X-Parameteransätze für verschiedene Signalanzahlen  $L$  und Ordnungen  $D$ : (a)  $L \in \{2, \dots, 81\}$  mit  $D = 2$  und (b)  $L \in \{2, \dots, 11\}$  mit  $D = 3$ .

die Steigungen und die Ordinatenabschnitte abhängig von  $M_{|\Gamma_L|}$  und  $\Delta\Theta_{21}$ . Folglich gibt es zwangsläufig Schnittpunkte der linearen Modellkomplexitätsfunktionen der lastabhängigen Ansätze und der polynomiellen Abhängigkeiten der Ansätze höherer Ordnung mit nur einem Parametersatz pro  $|A_{11}|$ . In Abb. 7.12a sind die Verläufe der Modellkomplexitätsfunktionen aus Tab. 7.1 im Intervall  $L \in \{2, \dots, 81\}$  zur Veranschaulichung dargestellt. Darin ist zu sehen wie die quadratische Funktion des MIT-Ansatzes die linearen Verläufe der lastabhängigen Ansätze schneidet bzw. überschreitet, und zwar bei  $L = 24$  den PLSOC-, bei  $L = 24$  den MQPHD- und bei  $L = 81$  den PHD<sub>L</sub>-Ansatz. Daraus folgt, dass für ein Zweitor an beiden Toren 41 Harmonische berücksichtigt werden müssten, damit mit dem MIT-Ansatz die gleiche X-Parameteranzahl pro Großsignalwert  $|A_{11}|$  gespeichert werden müsste wie für den PHD<sub>L</sub>-Ansatz. In Abb. 7.12b ist die Darstellung ergänzt um die Verläufe  $M_{\text{MIT}_0}(L, 3) \sim L^3$  und  $M_{\text{HOPHD}_0}(L, 3) \sim L^2$  im Intervall  $L \in \{2, \dots, 11\}$ . Darin ist zu sehen, dass das quadratische Polynom  $M_{\text{HOPHD}_0}(L, 3)$  schneller ansteigt als  $M_{\text{MIT}_0}(L, 2) \sim L^2$ , sodass bereits bei  $L = 12$  der PLSOC-Ansatz überschritten wird. Die nicht mehr dargestellten Schnittpunkte liegen bei  $L = 20$  für den MQPHD- und bei  $L = 40$  den PHD<sub>L</sub>-Ansatz. Das kubische Polynom  $M_{\text{MIT}_0}(L, 3)$  übersteigt die linearen Funktionen bei  $L = 5$  für den PLSOC-, bei  $L = 7$  für den MQPHD- und bei  $L = 10$  für den PHD<sub>L</sub>-Ansatz. Letzterer Schnittpunkt zeigt, dass beim

MIT-Ansatz der Ordnung  $D = 3$  für ein Zweitor erst beim Berücksichtigen von fünf oder mehr Harmonischen die Modellkomplexität größer wird als beim mit  $M_{|\Gamma_L|} = 80$  gerasterten PHD<sub>L</sub>-Ansatz. Sobald die Lastebene in mehr als  $M_{|\Gamma_L|} = 80$  LSOP gerastert wird, um die Genauigkeit vom PHD<sub>L</sub>-Ansatz zu erhöhen, verschiebt sich dieser Schnittpunkt weiter zu größeren Werten von  $L$ . Allgemein muss bei der Berechnung des gesamten X-Parametersatzes der lastoptimierten Ansätze über das Gleichungssystem (7.11) darauf geachtet werden, dass über die zufällige Phasen-Offset-Methode [13, 19, 20] mindestens genauso viele nicht redundante Datenpaare aufgenommen werden, wie X-Parameter berechnet werden sollen. Anderenfalls ist das Gleichungssystem unterbestimmt.

## 7.4. Zusammenfassung

Die in den vorherigen Kapiteln betrachteten X-Parameter - erster oder höherer Ordnung - werden typischerweise in einer 50-Ω-Messumgebung bestimmt. Diese *angepassten* X-Parameter werden als Verhaltensmodell in leicht *fehlangepassten* Systemen eingesetzt. In diesem Kapitel wurden als Fortsetzung von [82] verschiedene Ansätze zur Verwendung der X-Parameter bei beliebigen Lastsituationen anhand zweier Beispielsystemen - einem LNA und einem Klasse-C-Verstärker - mit den angepassten X-Parametern verglichen.

Zunächst wurde dazu diskutiert inwiefern die Begriffe *Anpassung* bzw. *Fehlanspassung* und *Lastimpedanz* für nichtlineare Systeme zu verwenden sind. Es wurde angemerkt, dass eine Definition dieser Begriffe sinnvoll ist, wenn das nichtlineare System mit Signalen angeregt wird, deren Frequenzen linear abhängig sind, d. h.  $\omega_k = k\omega_0$  für  $k \in \mathbb{N}$ . So kann die Lastimpedanz jeder auftretenden Harmonischen über das Verhältnis  $Z_L(jk\omega_0) = \frac{U_2(jk\omega_0)}{I_2(jk\omega_0)}$  und daraus ein Reflexionsfaktor  $\Gamma_{2k} = \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{Z_{Lk} - Z_0}{Z_{Lk} + Z_0}$  bei der  $k$ -ten Harmonischen definiert werden [34, 41].

Anschließend wurden die verschiedenen Ansätze einzeln betrachtet und festgestellt, welche Veränderungen im Vergleich zu den angepassten X-Parametern vorzunehmen sind. Als erstes wurden die *Load-pull*-X-Parameter von Root u. a. [117] gezeigt. Diese sind äquivalent zu den angepassten X-Parametern, nur dass der Entwicklungspunkt der spektralen Beschreibungsfunktion nicht dem Zentrum des Smith-Charts (vgl. Abb. 2.4) entspricht, sondern in einer beliebigen, über den Load-pull-Tuner eingestellten, Lastsituation liegt. Die Bestimmung der Load-pull-X-Parameter erfolgt dabei wie im angepassten Fall und die Entwicklungsordnung (vgl. Abschnitt 6) kann ebenfalls erhöht werden. Allerdings ist dies nicht sinnvoll, da bereits für die linearen X-Parameter bei einer hohen Anzahl an Lastsituationen sehr viele X-Parameter berechnet und gespeichert werden müssen.

Daher wurden weitere Ansätze der Arbeitsgruppe um Cai und Brazil [13, 16, 17, 19, 20] betrachtet, in denen eine Modellordnungsreduktion vorgenommen wurde. Im MQPHD-Ansatz [16] wird der angepasste quadratische X-Parametersatz mit Hilfe eines Skalierungsfaktor  $\alpha_{mk,nt}(|A_{11}|, \Gamma_L)$  an die jeweilige Lastsituation angepasst. Die Berechnung erfolgt ebenfalls über ein Optimierungsproblem auf Basis von lastabhängigen Messdaten, wie sie auch zur Berechnung der Load-pull-X-Parameter verwendet werden. Anstatt alle X-Parameter für die jeweilige Lastsituation neu zu berechnen, muss daher lediglich der Skalierungsfaktor  $\alpha$  in jeder der insgesamt  $M_{\Gamma_L}$  verschiedenen Lastsituationen neu berechnet werden. Dadurch kann zwar die Parameteranzahl gesenkt werden, jedoch nicht der Berechnungsaufwand. Zusätzlich ist der Genauigkeitsverlust der Modellordnungsreduktion im Vergleich zu anderen Ansätzen mit weniger Modellparametern zu groß, sodass dieser Ansatz nur im ersten Beispiel in Abschnitt 7.3.1 berücksichtigt wurde.

Als weiterer Ansatz, der sowohl die Modellordnung als auch den Berechnungsaufwand senkt, wurde der PLSOC-Ansatz [17, 19, 20] betrachtet. Hier werden die X-Parameter anstatt für jede Lastsituation für die Menge der Lastsituationen mit  $|\Gamma_L| = \text{konst.}$  berechnet. Die Datenpunkte  $(\tilde{A}, \tilde{B}_{mk})$  für die Berechnung mittels (7.11) bzw. (7.12) werden implizit über die Reflexionsfaktorphase  $\Theta_L$  variiert, weshalb dieses Vorgehen als *zufällige* Phasen-Offset-Methode bezeichnet wird. Dieser Ansatz senkt die Modellkomplexität im Vergleich zu den Load-pull-X-Parameter abhängig davon, wie viele Load-pull-X-Parametersätze pro eingestellten Wert  $|\Gamma_{21}|$  berechnet werden. Im betrachteten LNA-Beispiel ergab sich der Faktor 4. Der Modellfehler des ordnungsreduzierten PLSOC-Ansatzes blieb dennoch unterhalb der Load-pull-X-Parameter, zumindest auf dem PLSOC. In dem Grenzfall  $|\Gamma_{21}| = 0.9$  genau zwischen zwei der Berechnung zugrunde liegenden Werten  $|\Gamma_{21}| = \{0.85, 0.95\}$  ergab sich allerdings, dass der vom PLSOC-Ansatz verursachte Fehler teilweise sogar über dem des angepassten X-Parametersatzes lag. Daher wurde auch der PLSOC-Ansatz im zweiten Beispiel nicht weiterverfolgt.

Als konsequente Weiterentwicklung des PLSOC-Ansatzes kann der lastoptimierte X-Parameteransatz verstanden werden. Hier werden die mittels der zufälligen Phasen-Offset-Methode über die gesamte Lastebene gewonnenen Messdaten als Grundlage für das Optimierungsproblem (7.11) bzw. (7.12) verwendet, sodass wie im angepassten Fall nur ein X-Parametersatz pro Großsignalwert  $|A_{11}|$  berechnet wird. Im LNA-Beispiel, in dem nur die Fundamentalfrequenzen betrachtet wurden, erwies sich der lastoptimierte QPHD-Ansatz aus [13] als der beste Kompromiss aus Modellparameteranzahl und -genauigkeit. Im zweiten Beispiel des Klasse-C-Verstärkers wurde der in dieser Arbeit eingeführte MIT-Ansatz ( $D = 2$ ) im Sinne der Lastoptimierung über die zufällige Phasen-Offset-Methode berechnet. Wie bereits aus der qualitativen Betrachtung in Kapitel 6 zu erwarten, wurde durch den MIT-Ansatz die Genauigkeit im Vergleich zum lastoptimierten QPHD-Ansatz deutlich verbessert. Eine Untersuchung der Modellkomplexitäten zeigte, dass trotz der zusätzlichen X-Parameter des MIT-Ansatzes - im Vergleich zum lastoptimierten QPHD-Ansatz - eine Modellordnungsreduktion - im Vergleich zu den Load-pull-X-Parametern - erreicht werden kann. Die Größenordnung der Reduktion ist dabei stark von der Ordnung  $D$  des MIT-Ansatzes und der Menge  $L$  der berücksichtigten zusätzlichen Signale  $\tilde{A}_{nl}$  abhängig. Dabei ist zu beachten, dass eine Berücksichtigung von Signalen  $A_{1l}$  durch zusätzliche *Source-pull*-Messungen (vgl. z. B. [41]) erfolgen sollte, um auch am Eingang eine zufällige Variation der Signalanteile zu gewährleisten.

Nachdem in diesem Kapitel die Einsatzmöglichkeiten der in Kapitel 6 eingeführten X-Parameteransätze höherer Ordnung betrachtet wurden, werden im folgenden Kapitel X-Parameter für beliebige Signalfrequenzen  $\omega_k = k\omega_0$  mit  $k \in \mathbb{Q}^+$  betrachtet. Anhand der in Kapitel 5 gewonnenen Erkenntnisse werden die X-Parameter dabei - anders als in der Literatur [117, 166] - in Abhängigkeit eines einzigen fundamentalen Großsignals betrachtet. Mit dieser alternativen Blickweise lassen sich die X-Parameter als Empfindlichkeitsfunktionen für weitere Fundamentalsignale auffassen. Des Weiteren wird dadurch die Modellkomplexität verringert.



## 8. X-Parameter für unabhängige Frequenzen

Für die in Kapitel 4 beschriebenen X-Parameter auf Basis des PHD-Ansatzes werden neben einem Großsignal weitere Kleinsignale bei einem ganzzahligen Vielfachen der Fundamentalfrequenz  $\omega_0$  des Großsignals angenommen. Diese Einschränkung trifft beispielsweise auf kaskadierte Verstärkersysteme oder bei Fehlanpassung (vgl. Kapitel 7) der Verstärkerendstufe an die zu treibende Last zu [117]. In diesem Kapitel werden Systeme betrachtet, die mit unabhängigen Frequenzen angeregt werden, wie beispielsweise Frequenzmischer [25, 72]. Für diesen Fall werden die Anteile der Fundamentalfrequenzen an den Eingangstoren als Großsignale definiert und die Beschreibungsfunktionen (BF) in Abhängigkeit dieser bestimmt [117, 166]. In dieser Arbeit soll durch eine alternative Reihenentwicklung höherer Ordnung, wie in Kapitel 6 beschrieben, weiterhin die Abhängigkeit der BF von nur einem Großsignal beibehalten werden. Dadurch kann zum einen eine Reduzierung der Modellkomplexität erreicht werden. Zum anderen können die Kleinsignal-X-Parameter des neuen Ansatzes als Empfindlichkeitsfunktionen auf beliebige Fundamentalsignale aufgefasst werden. Dazu wird zunächst in Abschnitt 8.1 der bestehende Ansatz bei einer Anregung mit unabhängigen Fundamentalfrequenzen  $\omega_2 \neq l \cdot \omega_1$  mit  $l \in \mathbb{N}$  von Xie, Zhang und Liu [166] vorgestellt. Anschließend wird in Abschnitt 8.2 darauf eingegangen, wie dieser Ansatz mit Hilfe der Erkenntnisse der vorherigen Ergebnisse dieser Arbeit anzupassen ist, um eine Ordnungsreduzierung zu ermöglichen. Anhand einer beispielhaften Untersuchung werden in Abschnitt 8.3 beide Ansätze miteinander verglichen.

### 8.1. X-Parameter mit zwei unabhängigen Großsignalen

Bereits in den Arbeiten [139, 150] wurde darauf hingewiesen, dass auch Anregungen unabhängiger Frequenzen mit der spektralen Linearisierung betrachtet werden könnten. Im X-Parameter-Kontext werden erst in den Arbeiten von Xie, Zhang und Liu [166] und Root u. a. [117] Signale mit unabhängigen Frequenzen betrachtet. In einem der sehr wenigen Anwendungsbeispiele von He und Li [46] wird gänzlich auf die Mathematik der X-Parameter unabhängiger Frequenzen verzichtet. An dieser Stelle soll kurz aus [117, Kapitel 5.7] zusammengefasst werden.

Im einfachsten Fall wird sich auf zwei unabhängige Fundamentalfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  beschränkt. Alle anderen im System auftretenden Frequenzen sind Vielfache  $l_1\omega_1$  bzw.  $l_2\omega_2$ , sog. *harmonische Verzerrungen* (HD), bzw. Linearkombinationen  $\omega_b = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$  mit  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ , sog. *Intermodulationsprodukte* (IM) (vgl. Abschnitt 3.1 oder z. B. [71, 156]). In Anhang A.2 wird gezeigt, wie die Streuvariablen nichtlinearer  $N$ -Tore bei einer derartigen Zweitonanregung zu berechnen sind. Dabei werden beide anregenden Frequenzen an einem Tor angenommen, was z. B. zu einem Leistungsverstärker mit einer Zweitonanregung am Tor 1 passt. Im Folgenden wird stattdessen von einer Großsignalanregung an Tor 1 mit  $A_{1[1,0]}$  bei  $\omega_1$  und an Tor 2 mit  $A_{2[0,1]}$  bei  $\omega_2$  ausgegangen (vgl. (A.17)). Mit Hinzunahme eines dritten Tors kann ein Frequenzmischer, wie z. B. in Abb. 8.3 dargestellt, beschrieben werden. Weitere Signalanteile sind nur bei Linearkombinationen der Fundamentalfrequenzen

$$\omega_a = l_1\omega_1 + l_2\omega_2 \quad (8.1)$$

mit  $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$  zulässig. Dabei sind auch die Fundamentalfrequenzen an anderen Toren z. B.  $A_{3[1,0]}$  denkbar. Analog zum PHD-Ansatz ist der Ausgangspunkt die spektrale Abhängigkeit

$$B_{m[k_1, k_2]} = F_{m[k_1, k_2]}(\text{DCOP}, \omega_1, \omega_2, A_{1[1,0]}, A_{2[0,1]}, \dots, A_{n[l_1, l_2]}, \dots), \quad (8.2)$$

worin  $F_{m[k_1, k_2]}$  die mehrdimensionale BF der Fourier-Koeffizienten bei  $\omega_b = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$  ist. Die BF  $F_{m[k_1, k_2]}$  verdeutlichen den Zusammenhang der Fourier-Koeffizienten der *reflektierten* Streuvariablen  $B_{m[k_1, k_2]}$  von allen *einfallenden* Streuvariablen  $A_{n[l_1, l_2]}$  sowie dem DCOP und den Fundamentalfrequenzen  $\omega_1, \omega_2$ . Durch Annahme eines zeitinvarianten Systems und einer Phasennormierung auf die Phasen

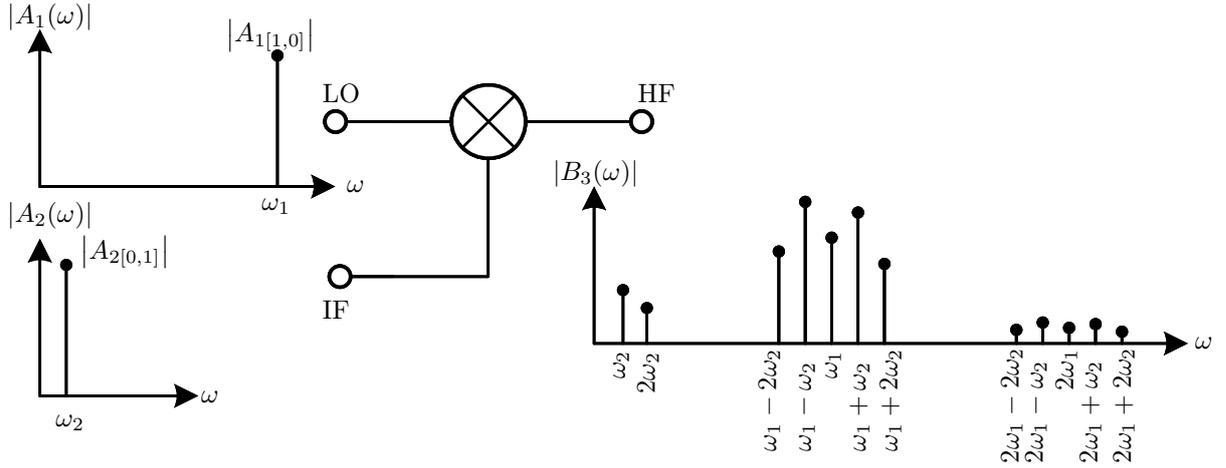


Abb. 8.1.: LSOP im Frequenzmischer - IF zu HF Umsetzung - bei zwei Großsignalen  $|A_{1[1,0]}|$ ,  $|A_{2[0,1]}|$  unabhängiger Frequenzen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$

der Fundamentalsignale mit  $P_{[1,0]}$  und  $P_{[0,1]}$

$$|A_{1[1,0]}| = A_{1[1,0]} P_{[1,0]}^{-1}, \quad (8.3a)$$

$$|A_{2[0,1]}| = A_{2[0,1]} P_{[0,1]}^{-1} \quad (8.3b)$$

ergibt sich

$$B_{m[k_1, k_2]} = F_{m[k_1, k_2]} \left( |A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|, \dots, A_{n[l_1, l_2]} P_{[1,0]}^{-l_1} P_{[0,1]}^{-l_2}, \dots \right) P_{[1,0]}^{k_1} P_{[0,1]}^{k_2}. \quad (8.4)$$

Unter der Annahme

$$\{|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|\} \gg |A_{n[l_1, l_2]}|, \quad (8.5)$$

d. h. die beiden Fundamentalsignale sind die einzigen Großsignale im System, können die spektralen BF  $F_{m[k_1, k_2]}$ , wie in Abschnitt 4.2.2, linearisiert werden. Der Großsignalarbeitspunkt - englisch: *large signal operating point*

$$\text{LSOP} = \{\text{DCOP}, \omega_1, \omega_2, |A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|, A_{n[l_1, l_2]} = 0 \forall n [l_1, l_2] \neq \{1 [1, 0], 2 [0, 1]\}\} - \quad (8.6)$$

als Entwicklungspunkt wird hier allerdings durch die zwei Großsignale  $|A_{1[1,0]}|$ ,  $|A_{2[0,1]}|$  festgelegt. Auf die explizite Nennung der Abhängigkeit vom DCOP und den beiden Fundamentalen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  soll in der Folge erneut verzichtet werden. Eine Veranschaulichung des LSOP aus (8.6) ist in Abb. 8.1 für eine Umsetzung vom Zwischenfrequenz - englisch: *intermediate frequency* (IF) - zum Hochfrequenz (HF)-Bereich, wie sie im Transmitterpfad eines *Heterodyntreceivers* eingesetzt wird, dargestellt.

Die Kleinsignale  $|A_{n[l_1, l_2]}|$  werden, wie im PHD-Ansatz in Abschnitt 4.2, als Störung des LSOP in Folge geringer *Fehlanpassung* angesehen. Eine lastabhängige Betrachtung bei starker Fehlanpassung, wie in Abschnitt 7.2.1, wird der Einfachheit halber in dieser Arbeit nicht zusätzlich durchgeführt. Auf eine ausführliche Ableitung der Linearisierung von (8.4) wie in Abschnitt 4.2.2 soll an dieser Stelle verzichtet werden. Analog ergibt sich als Modellgleichung für die X-Parameter

$$\begin{aligned} B_{m[k_1, k_2]} \approx & X_{m[k_1, k_2]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) P_{[1,0]}^{k_1} P_{[0,1]}^{k_2} + \\ & \sum_{n[l_1, l_2]} \left( X_{m[k_1, k_2], n[l_1, l_2]}^{(S)} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) A_{n[l_1, l_2]} P_{[1,0]}^{k_1 - l_1} P_{[0,1]}^{k_2 - l_2} \right. \\ & \left. + X_{m[k_1, k_2], n[l_1, l_2]}^{(T)} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) A_{n[l_1, l_2]}^* P_{[1,0]}^{k_1 + l_1} P_{[0,1]}^{k_2 + l_2} \right). \end{aligned} \quad (8.7a)$$

Darin wird der LSOP wie in (4.39) über die Großsignal-X-Parameter

$$X_{m[k_1, k_2]}^{(F)} = F_{m[k_1, k_2]} \left( |A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|, 0, \dots, 0 \right) \quad (8.7b)$$

berücksichtigt. Alle weiteren Signale  $A_{n[l_1, l_2]}$  werden über die Kleinsignal-X-Parameter

$$X_{m[k_1, k_2], n[l_1, l_2]}^{(S)} = \frac{\partial F_{m[k_1, k_2]_{\text{LSOP}}}}{\partial A_{n[l_1, l_2]} P_{[1,0]}^{-l_1} P_{[0,1]}^{-l_2}}, \quad (8.7c)$$

$$X_{m[k_1, k_2], n[l_1, l_2]}^{(T)} = \frac{\partial F_{m[k_1, k_2]_{\text{LSOP}}}}{\partial A_{n[l_1, l_2]}^* P_{[1,0]}^{l_1} P_{[0,1]}^{l_2}} \quad (8.7d)$$

mit  $F_{m[k_1, k_2]_{\text{LSOP}}} := F_{m[k_1, k_2]} \left( |A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|, \dots, A_{n[l_1, l_2]} P_{[1,0]}^{-l_1} P_{[0,1]}^{-l_2}, \dots \right) \Big|_{(|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|, 0, \dots, 0)}$  einbezogen [117]. Die X-Parameter sind neben den nicht mehr explizit genannten Fundamentalfrequenzen  $\omega_1, \omega_2$  und dem DCOP von den Beträgen der Großsignale  $|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|$  abhängig. Damit ist es zwar ein Parameter weniger als bei den lastabhängigen X-Parametern aus (7.4), aber dennoch einer mehr als für die X-Parameter aus (4.38). Da jeder weitere Parameter zusätzliche Messungen und Speicherplatz in der Modelldatei erfordert, wird im Folgenden ein anderer Ansatz zur Reihenentwicklung der mehrdimensionalen BF  $F_{m[k_1, k_2]}$  aus (8.4) über den linearen Term hinaus gezeigt. Dabei wird davon ausgegangen, dass nur eines der beiden Fundamentalsignale ein Großsignal ist. Dadurch müssen die X-Parameter nur in Abhängigkeit dieses Großsignals bestimmt werden.

## 8.2. X-Parameter unabhängiger Frequenzen und eines einzigen Großsignals

Im letzten Abschnitt wurden die aus der Literatur [117, 166] bekannten X-Parameter für zwei unabhängige Fundamentalfrequenzen vorgestellt. Dabei wurden die jeweiligen Fundamentalanteile an unterschiedlichen Toren als Großsignale angenommen. Diese Annahme ist allerdings nicht immer erforderlich, wie z. B. die Betrachtung eines Frequenzmischers mit der *conversion* Matrix in [72, Kapitel 4] zeigt. Darin wird nur das LO-Signal als Großsignal angesehen und das IF oder HF-Signal als Kleinsignal, sodass nur Mischprodukte berücksichtigt werden müssen, in denen die Kleinsignale linear eingehen. Die gleiche Annahme soll im Folgenden gelten, sodass die BF  $F_{m[k_1, k_2]}$  ähnlich dem PHD-Ansatz aus Abschnitt 4.2 nur in Abhängigkeit des großen LO-Signals linearisiert bzw. ähnlich den Ansätzen aus Kapitel 6 in einer Reihe höherer Ordnung entwickelt werden können.

### 8.2.1. Zweitonanregung

Zur Verdeutlichung des Unterschieds zu den X-Parametern unabhängiger Frequenzen aus Abschnitt 8.1 soll im Folgenden zunächst die Zweitonanregung mit den dort als Großsignal angesehenen Signalen  $A_{1[1,0]}, A_{2[0,1]}$  erfolgen. Daher ergibt sich aus der allgemeinen BF (8.2) - ohne die Abhängigkeit vom DCOP und den Fundamentalfrequenzen  $\omega_1, \omega_2$  explizit zu nennen -

$$B_{m[k_1, k_2]} = F_{m[k_1, k_2]} \left( A_{1[1,0]}, A_{1[1,0]}^*, A_{2[0,1]}, A_{2[0,1]}^* \right) \quad (8.8)$$

als Ausgangspunkt der Betrachtung. Darin sind neben den beiden Signalen  $A_{1[1,0]}, A_{2[0,1]}$  auch deren komplex Konjugierten aus demselben Grund wie in (4.33) vorhanden: Die komplexe Differenzierbarkeit erfordert, dass die Funktion analytisch in all ihren Argumenten ist. Durch die Annahme eines einzigen Großsignals

$$|A_{1[1,0]}| \gg |A_{2[0,1]}| \quad (8.9)$$

ergibt sich die Möglichkeit eines anderen LSOP als Entwicklungspunkt. Zuvor soll jedoch erneut durch eine Phasennormierung die Anzahl der unabhängigen Parameter reduziert werden. In (8.4) wurde mit den Phasen der beiden fundamentalen Großsignale normiert. Die Begründung dazu in [117, Kapitel 5.7.2] lautet, dass es bei zwei Signalen unabhängiger Frequenzen immer einen Zeitpunkt gäbe, bei denen die Phasendifferenz beider Signale null sei. Es müsse lediglich lange genug gewartet werden.

Zur Vereinfachung des Zusammenhangs in (8.8) wird hingegen wie beim PHD-Ansatz in (4.29)ff. eine Phasennormierung auf das Großsignal  $A_{1[1,0]}$  durchgeführt. Unter der Annahme eines zeitinvarianten Systems führen um  $T$  verzögerte Eingangssignale zu einer Multiplikation der Fourier-Koeffizienten in (A.15) mit einem Exponentialterm entsprechender Frequenz

$$B_{m[k_1, k_2]} e^{-j(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2)T} = F_{m[k_1, k_2]} \left( A_{1[1,0]} e^{-j\omega_1 T}, A_{1[1,0]}^* e^{j\omega_1 T}, A_{2[0,1]} e^{-j\omega_2 T}, A_{2[0,1]}^* e^{j\omega_2 T} \right). \quad (8.10a)$$

Analog zu (4.31) in Kapitel 4.2 wird die Zeitkonstante festgelegt zu

$$T = \frac{\phi_{A_{1[1,0]}}}{\omega_1} \quad (8.10b)$$

und damit wird der auf die Phase des Großsignal  $A_{1[1,0]}$

$$P_{[1,0]} = e^{j\phi_{A_{1[1,0]}}} \quad (8.10c)$$

normierte Zusammenhang

$$B_{m[k_1, k_2]} = F_{m[k_1, k_2]} \left( |A_{1[1,0]}|, A_{2[0,1]} P_{[1,0]}^{-\frac{\omega_2}{\omega_1}}, A_{2[0,1]}^* P_{[1,0]}^{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \right) P_{[1,0]}^{k_1 + k_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (8.11)$$

erhalten. Für die nachfolgende Reihenentwicklung wird für eine bessere Lesbarkeit zunächst die Kurzschreibweise aus (6.1) übertragen

$$\tilde{A}_{n[l_1, l_2]} = A_{n[l_1, l_2]} P_{[1,0]}^{-l_1 - l_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad \text{und} \quad \tilde{B}_{m[k_1, k_2]} = B_{m[k_1, k_2]} P_{[1,0]}^{-k_1 - k_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}}, \quad (8.12a)$$

was in diesem Fall aus (8.11) zu

$$\tilde{B}_{m[k_1, k_2]} = F_{m[k_1, k_2]} \left( |A_{1[1,0]}|, \tilde{A}_{2[0,1]}, \tilde{A}_{2[0,1]}^* \right) \quad (8.12b)$$

führt. Infolge der im Vergleich zu (8.5) unterschiedlichen Annahme eines einzigen Großsignals aus (8.9) ist der Entwicklungspunkt im Gegensatz zu (8.6) definiert durch

$$\text{LSOP} = \{\text{DCOP}, \omega_1, |A_{1[1,0]}|, A_{n[l_1, l_2]} = 0 \forall n [l_1, l_2] \neq \{1 [1, 0]\}\}. \quad (8.13)$$

Zur Veranschaulichung des Unterschieds zum Ansatz (8.6) aus dem letzten Abschnitt dient Abb. 8.2. Die Systemanregung durch  $|A_{1[1,0]}|$  führt zum LSOP, der wie beim PHD-Ansatz nur aus den schwarz dargestellten HD  $k\omega_1$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  besteht. Die zusätzliche Einkopplung des Fundamentalsignals  $A_{2[0,1]}$  führt zu den rot dargestellten HD  $k\omega_2$  und IM  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2$  mit  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ . Diese können wie im Fall des Mixers zur Frequenzumsetzung erwünscht sein oder aber als leitungsgebundene Störsignale aufgefasst werden. Für letztere Auffassung sind insbesondere bei  $\omega_1 \gg \omega_2$  die IMs nahe des Nutzsignals  $\omega_1 \pm \omega_2$  von Interesse, da diese das Systemverhalten maßgeblich beeinträchtigen können und nur durch sehr steilflankige Filter abgeschwächt werden können. Zur einfachen Störungsbeschreibung des LSOP werden die Funktionen  $F_{m[k_1, k_2]}$  aus (8.12) wie in Abschnitt 4.2 linearisiert oder wie in Abschnitt 6.1 in einer Taylor-Reihe höherer Ordnung entwickelt.

### Linearisierung der BF

Die BF aus (8.12) soll analog zu den X-Parametern des PHD-Ansatzes im LSOP

$$F_{m[k_1, k_2]}|_{\text{LSOP}} := F_{m[k_1, k_2]} \left( |A_{1[1,0]}|, \tilde{A}_{2[0,1]}, \tilde{A}_{2[0,1]}^* \right) \Big|_{(|A_{1[1,0]}|, 0, 0)} \quad (8.14)$$

linearisiert werden. Es ergeben sich erneut die Groß- und Kleinsignalparameter gemäß

$$X_{m[k_1, k_2]}^{(\text{F})} (|A_{1[1,0]}|) = F_{m[k_1, k_2]} (|A_{1[1,0]}|, 0, 0), \quad (8.15a)$$

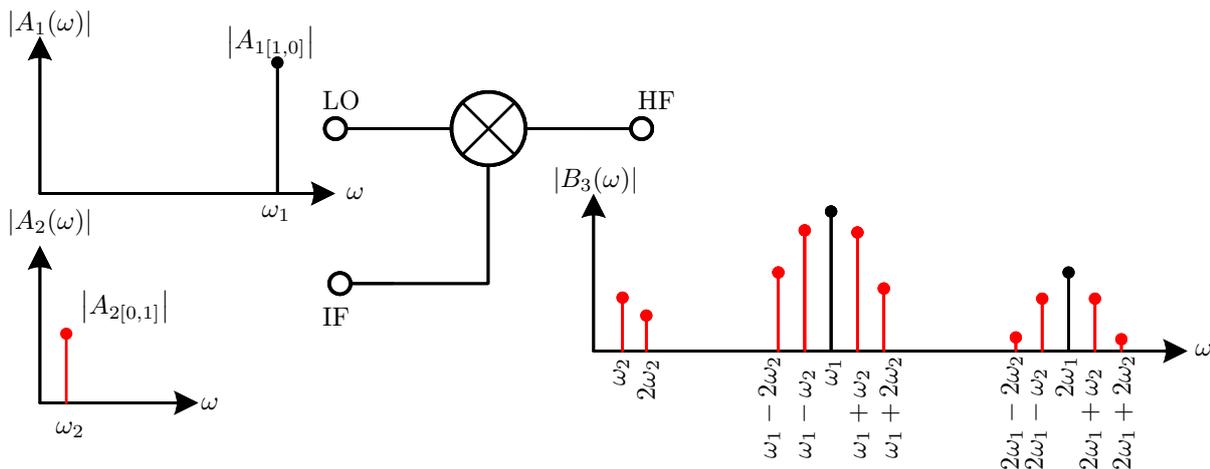


Abb. 8.2.: LSOP (schwarz) im Frequenzmischer - IF zu HF Umsetzung - bei nur einem Großsignal  $|A_{1[1,0]}|$  bei der Fundamentalfrequenz  $\omega_1$  und einem kleineren zweiten Fundamentalsignal bei  $\omega_2$ . Die Anwesenheit des Kleinsignals  $|A_{2[0,1]}|$  führt zu IM. Diese können wie im Fall des Mischers erwünscht sein, aber auch als Störungen aufgefasst werden.

$$X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S)}(|A_{1[1, 0]}|) = \frac{\partial F_{m[k_1, k_2]_{\text{LSOP}}}}{\partial \tilde{A}_{2[0, 1]}}, \quad (8.15b)$$

$$X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(T)}(|A_{1[1, 0]}|) = \frac{\partial F_{m[k_1, k_2]_{\text{LSOP}}}}{\partial \tilde{A}_{2[0, 1]}^*} \quad (8.15c)$$

und als allgemeine lineare Approximation von (8.12)

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{m[k_1, k_2]} &\approx X_{m[k_1, k_2]}^{(F)}(|A_{1[1, 0]}|) \\ &+ X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S)}(|A_{1[1, 0]}|) \tilde{A}_{2[0, 1]} + X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(T)}(|A_{1[1, 0]}|) \tilde{A}_{2[0, 1]}^*. \end{aligned} \quad (8.15d)$$

Dieser allgemeine Ansatz kann allerdings noch vereinfacht werden, je nachdem welches  $\tilde{B}_{m[k_1, k_2]}$  beschrieben werden soll. Dazu soll die Interpretation des LSOP in Abb. 8.2 mit der aus Abschnitt 4.3.1 bekannten Frequenz-Offset-Methode verglichen werden. In (4.42) wird den Kleinsignalen  $l\omega_0$  ein kleiner Frequenz-Offset  $\epsilon$  hinzugefügt, um die IM mit dem Großsignal  $A_{11}$  nicht auf eine HD bei  $k\omega_0$  fallen zu lassen. Dadurch wird eine direkte Bestimmung der drei unterschiedlichen X-Parameterarten ermöglicht. Aus den unteren Seitenbändern  $k\omega_0 - \epsilon$  in Abb. 4.5 können die X-Parameter  $X_{mk, nl}^{(T)}$  und aus den oberen Seitenbändern  $k\omega_0 + \epsilon$  die X-Parameter  $X_{mk, nl}^{(S)}$  bestimmt werden. Bei den Harmonischen  $k\omega_0$  wurden die Großsignal-X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  direkt bestimmt (vgl. dazu auch Tab. 4.1). Im Fall unabhängiger Frequenzen gilt das gleiche Prinzip, nur dass der Frequenzoffset  $\epsilon \in \mathbb{R}$  beliebig groß sein kann. Folglich lässt sich zusammenfassen

$$X_{m[k_1, k_2]}^{(F)}(|A_{1[1, 0]}|) \equiv 0 \quad \forall \quad k_2 \neq 0, \quad (8.16a)$$

$$X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S)}(|A_{1[1, 0]}|) \equiv 0 \quad \forall \quad k_2 \neq 1, \quad (8.16b)$$

$$X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(T)}(|A_{1[1, 0]}|) \equiv 0 \quad \forall \quad k_2 \neq -1, \quad (8.16c)$$

woraus als lineare Approximation von (8.12)

$$\tilde{B}_{m[k_1, k_2]} \approx \begin{cases} X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(T)} (|A_{1[1, 0]}|) \tilde{A}_{2[0, 1]}^* & \text{für } k_2 = -1, \\ X_{m[k_1, k_2]}^{(F)} (|A_{1[1, 0]}|) & \text{für } k_2 = 0, \\ X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S)} (|A_{1[1, 0]}|) \tilde{A}_{2[0, 1]} & \text{für } k_2 = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.16d)$$

resultiert. Die letzte Bedingung ergibt sich daraus, dass die IM  $\tilde{B}_{m[k_1, k_2]}$  für  $|k_2| > 1$  nicht durch ein lineares  $A_{2[0, 1]}$  erreicht werden können (vgl. Kapitel 3.1 und 5). Damit diese beschrieben werden können, muss die Taylor-Reihenentwicklung über die 1. Ordnung hinaus fortgesetzt werden, wie es für die PHD basierten X-Parameter in Kapitel 6 geschehen ist.

### Reihenentwicklung höherer Ordnung

Analog zu Abschnitt 6.1 wird zur Erhöhung der Genauigkeit des X-Parametermodells mit größer werdendem  $|A_{2[0, 1]}|$  anders als in (8.15) die zweidimensionale Taylor-Reihenentwicklung [80] um den LSOP nicht nach der ersten Ordnung abgebrochen, sondern wie in (6.2)ff. bis zur  $D$ -ten Ordnung fortgesetzt. Mit

$$X_{m[k_1, k_2]}^{(S^0 T^0)} (|A_{1[1, 0]}|) = X_{m[k_1, k_2]}^{(F)} (|A_{1[1, 0]}|), \quad (8.17a)$$

$$X_{m[k_1, k_2]}^{(S^{d-q} T^q)} (|A_{1[1, 0]}|) = \frac{1}{(d-q)!q!} \frac{\partial^d F_{mk_{\text{LSOP}}}}{\partial \tilde{A}_{2[0, 1]}^{d-q} \partial (\tilde{A}_{2[0, 1]}^*)^q} \quad (8.17b)$$

ergibt sich der allgemeine Ausdruck

$$\tilde{B}_{m[k_1, k_2]} \approx \sum_{d=0}^D \sum_{q=0}^d X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S^{d-q} T^q)} (|A_{1[1, 0]}|) \tilde{A}_{2[0, 1]}^{d-q} (\tilde{A}_{2[0, 1]}^*)^q. \quad (8.17c)$$

Wie im linearisierten Fall (8.16) lassen sich hier erneut X-Parameter zu null identifizieren

$$X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S^{d-q} T^q)} (|A_{1[1, 0]}|) \equiv 0 \quad \forall \quad d - 2q \neq k_2, \quad (8.17d)$$

wozu ein Blick in Tab. 8.1 hilfreich ist. So ergeben sich ohne  $D$  explizit einzuschränken und ohne die Abhängigkeit der X-Parameter von  $(|A_{1[1, 0]}|)$  zu wiederholen

$$\tilde{B}_{m[k_1, k_2]} \approx \begin{cases} \left( \tilde{A}_{2[0, 1]}^* \right)^{|k_2|} \cdot \left( X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(T^{|k_2|})} + X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(ST^{|k_2|+1})} |A_{2[0, 1]}|^2 + \dots \right) & \text{für } k_2 < 0, \\ X_{m[k_1, k_2]}^{(F)} + X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(ST)} |A_{2[0, 1]}|^2 + \dots & \text{für } k_2 = 0, \\ \tilde{A}_{2[0, 1]}^{k_2} \cdot \left( X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S^{k_2})} + X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S^{k_2+1} T)} |A_{2[0, 1]}|^2 + \dots \right) & \text{für } k_2 > 0. \end{cases} \quad (8.18)$$

Die zu approximierende BF aus (8.8) spiegelt genau den LSOP aus (8.6) wider, der wiederum direkt durch die Großsignal-X-Parameter  $X_{m[k_1, k_2]}^{(F)} (|A_{1[1, 0]}|, |A_{2[0, 1]}|)$  aus (8.7) repräsentiert wird. Durch Rücksubstitution von (8.12a) folgen mit

$$\begin{aligned} \left( \tilde{A}_{2[0, 1]}^* \right)^{|k_2|} P_{[1, 0]}^{k_1 - |k_2| \frac{\omega_2}{\omega_1}} &= \left( A_{2[0, 1]}^* \right)^{|k_2|} P_{[1, 0]}^{k_1} = |A_{2[0, 1]}|^{|k_2|} P_{[1, 0]}^{k_1} P_{[0, 1]}^{-|k_2|}, \\ \left( \tilde{A}_{2[0, 1]} \right)^{k_2} P_{[1, 0]}^{k_1 + k_2 \frac{\omega_2}{\omega_1}} &= \left( A_{2[0, 1]} \right)^{k_2} P_{[1, 0]}^{k_1} = |A_{2[0, 1]}|^{k_2} P_{[1, 0]}^{k_1} P_{[0, 1]}^{k_2} \end{aligned}$$

Tab. 8.1.: Nicht verschwindende X-Parameter  $X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S^{d-q}T^q)}$  ( $|A_{1[1, 0]}|$ ) aus (8.17) zu den Frequenzen  $\omega_{\text{mix}} = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$ 

$B_m(\omega_{\text{mix}})$	$\omega_{\text{mix}}$	X-Parameter $X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S^{d-q}T^q)}$ ( $ A_{1[1, 0]} $ )
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B_{m[k_1, -2]}$	$k_1\omega_1 - 2k_2\omega_2$	$X_{m[k_1, -2], 2[0, 1]}^{(T^2)}$ , $X_{m[k_1, -2], 2[0, 1]}^{(ST^3)}$ , $\dots$
$B_{m[k_1, -1]}$	$k_1\omega_1 - k_2\omega_2$	$X_{m[k_1, -1], 2[0, 1]}^{(T)}$ , $X_{m[k_1, -1], 2[0, 1]}^{(ST^2)}$ , $\dots$
$B_{m[k_1, 0]}$	$k_1\omega_1$	$X_{m[k_1, 0], 2[0, 1]}^{(F)}$ , $X_{m[k_1, 0], 2[0, 1]}^{(ST)}$ , $\dots$
$B_{m[k_1, 1]}$	$k_1\omega_1 + k_2\omega_2$	$X_{m[k_1, 1], 2[0, 1]}^{(S)}$ , $X_{m[k_1, 1], 2[0, 1]}^{(S^2T)}$ , $\dots$
$B_{m[k_1, 2]}$	$k_1\omega_1 + 2k_2\omega_2$	$X_{m[k_1, 2], 2[0, 1]}^{(S^2)}$ , $X_{m[k_1, 2], 2[0, 1]}^{(S^3T)}$ , $\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

aus einem Koeffizientenvergleich von (8.7) und (8.18) die Zusammenhänge

$$X_{m[k_1, k_2 < 0]}^{(F)}(|A_{1[1, 0]}|, |A_{2[0, 1]}|) \approx |A_{2[0, 1]}|^{|k_2|} \cdot \left( X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(T^{|k_2|})} + X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(ST^{|k_2|+1})} |A_{2[0, 1]}|^2 + \dots \right), \quad (8.19a)$$

$$X_{m[k_1, 0]}^{(F)}(|A_{1[1, 0]}|, |A_{2[0, 1]}|) \approx X_{m[k_1, 0]}^{(F)}(|A_{1[1, 0]}|) + X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(ST)} |A_{2[0, 1]}|^2 + \dots, \quad (8.19b)$$

$$X_{m[k_1, k_2 > 0]}^{(F)}(|A_{1[1, 0]}|, |A_{2[0, 1]}|) \approx |A_{2[0, 1]}|^{k_2} \cdot \left( X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S^{k_2})} + X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S^{k_2+1}T)} |A_{2[0, 1]}|^2 + \dots \right), \quad (8.19c)$$

worin nur für  $X_{m[k_1, 0]}^{(F)}$  die explizite Nennung der Abhängigkeit von  $|A_{1[1, 0]}|$  zur Unterscheidung von

$$\lim_{|A_{2[0, 1]}| \rightarrow 0} X_{m[k_1, 0]}^{(F)}(|A_{1[1, 0]}|, |A_{2[0, 1]}|) = X_{m[k_1, 0]}^{(F)}(|A_{1[1, 0]}|) \quad (8.20)$$

nötig ist. Der Vorteil der Reihenentwicklung aus (8.18) ist, dass die X-Parameter  $X_{m[k_1, k_2], 2[0, 1]}^{(S^{d-q}T^q)}$  nur in Abhängigkeit der Großsignalamplitude  $|A_{1[1, 0]}|$  bestimmt werden müssen. Die Variation über das zweite Fundamentalsignal wird über die Reihenentwicklung in  $|A_{2[0, 1]}|$  abgedeckt. In Abschnitt 8.3 wird dies weiter veranschaulicht. Im Folgenden sollen zunächst kurz die Erweiterungen für zusätzliche Kleinsignale  $\tilde{A}_{n[l_1, l_2]}$  erläutert werden.

### 8.2.2. Mehrtonanregung

Im letzten Abschnitt wurde in (8.19) gezeigt, wie die Großsignal-X-Parameter  $X_{m[k_1, k_2]}^{(F)}(|A_{1[1, 0]}|, |A_{2[0, 1]}|)$  durch X-Parameter  $X_{m[k_1, k_2]}^{(\cdot)}(|A_{1[1, 0]}|)$ , die nur vom Betrag eines Großsignals  $|A_{1[1, 0]}|$  abhängen, angenähert werden können. Im Folgenden wird verdeutlicht, wie dieser Ansatz für weitere abhängige Kleinsignale  $\tilde{A}_{n[l_1, l_2]}$  erweitert werden kann. Ein Blick in die Modellgleichung (8.7) zeigt, dass die Kleinsignalstörterme eine Multiplikation  $A_{n[l_1, l_2]} P_{[0, 1]}$  beinhalten. Darin ist  $P_{[0, 1]}$  der Phasor des zweiten Fundamentalsignals  $A_{2[0, 1]}$ , das in diesem Abschnitt erneut als Kleinsignal angesehen werden soll. Daher ist eine Approximation der Kleinsignal-X-Parameter zweier Großsignale  $X_{m[k_1, k_2], n[l_1, l_2]}^{(\cdot)}(|A_{1[1, 0]}|, |A_{2[0, 1]}|)$  aus (8.7) mit X-Parametern  $X_{m[k_1, k_2]}^{(\cdot)}(|A_{1[1, 0]}|)$ , die nur von einem Großsignal abhängen, nur mit Hilfe einer Anpassung des MIT-Ansatzes aus (6.14) sinnvoll. Für  $L$  Kleinsignale inkl.  $A_{2[0, 1]}$  ergibt sich mit der Kurzschreibweise aus (8.12a) und dem aus (6.11) angepassten Kleinsignalvektor

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_{2[0, 1]}, \dots, \tilde{A}_{n[l_1, l_2]}, \dots) \in \mathbb{C}^L \quad (8.21a)$$

für die BF unabhängiger Frequenzen aus (8.2) die allgemeine Modellgleichung des MIT-Ansatzes zu

$$\tilde{B}_{m[k_1, k_2], \text{MIT}} \approx \sum_{|\sigma|+|\tau| \leq D} X_{m[k_1, k_2]}^{(S^\sigma T^\tau)}(|A_{1[1,0]}|) \tilde{\mathbf{A}}^\sigma (\tilde{\mathbf{A}}^*)^\tau \quad (8.21b)$$

$$\text{mit } X_{m[k_1, k_2]}^{(S^\sigma T^\tau)}(|A_{11}|) := \frac{1}{\sigma! \tau!} \partial^\sigma \partial^\tau F_{m[k_1, k_2]} \left( |A_{1[1,0]}|, \tilde{A}_{2[0,1]}, \dots, \tilde{A}_{n[l_1, l_2]}, \dots \right) \Big|_{(|A_{1[1,0]}|, 0, \dots, 0)}. \quad (8.21c)$$

Weiterhin kann dieses Modell auch für weitere Fundamentalfrequenzen erweitert werden. Dazu wird die allgemeine Notation der Fundamentalfrequenzen  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L]$  und der Indexvektoren

$$\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_L] \in \mathbb{Z}^L \quad \text{und} \quad \mathbf{l} = [l_1, l_2, \dots, l_L] \in \mathbb{Z}^L$$

aus Anhang A.2.2 übernommen, woraus sich der Ausdruck

$$\tilde{B}_{m\mathbf{k}, \text{MIT}} \approx \sum_{|\sigma|+|\tau| \leq D} X_{m\mathbf{k}}^{(S^\sigma T^\tau)}(|A_{1[1,0]}|) \tilde{\mathbf{A}}^\sigma (\tilde{\mathbf{A}}^*)^\tau \quad (8.22a)$$

$$\text{mit } X_{m\mathbf{k}}^{(S^\sigma T^\tau)}(|A_{1[1,0]}|) = \frac{1}{\sigma! \tau!} \partial^\sigma \partial^\tau F_{m\mathbf{k}} \left( |A_{1[1,0, \dots, 0]}|, \tilde{A}_{2[0,1, \dots, 0]}, \dots, \tilde{A}_{nl}, \dots \right) \Big|_{(|A_{1[1,0, \dots, 0]}|, 0, \dots, 0)} \quad (8.22b)$$

ergibt. Dies ist hier allerdings nur der Vollständigkeit halber erwähnt und wird im Weiteren nicht angewandt. Stattdessen soll im Folgenden anhand eines einfachen *Single-Balanced*-Mischers das X-Parametermodell für ein Großsignal mit dem aus der Literatur [117, 166] bekannten X-Parametermodell zweier Großsignale bei zwei unabhängigen Fundamentalfrequenzen genauer verglichen werden. Dazu wird zunächst die Zweitonuntersuchung mit der Approximation aus (8.19) überprüft. Anschließend wird der MIT-Ansatz für unabhängige Frequenzen aus (8.21) anhand einer Dreitonuntersuchung  $F_{m[k_1, k_2]}(|A_{1[1,0]}, A_{2[0,1]}, A_{1[2,0]})$  veranschaulicht.

### 8.3. Beispiel: *Single-balanced*-Mischer

In diesem Kapitel wird der *Single-balanced*-Mischer aus Abbildung 8.3 untersucht. Der Frequenzmischer wird am 1. Tor mit dem LO-Signal  $u_{s_1}(t)$  angeregt, das über ein *Balun* auf das Differenzpaar  $M_1/M_2$  einkoppelt. Am 2. Tor liegt über die Koppelkapazität  $C_k$  das Signal  $u_{s_2}(t)$  auf Fußpunktstromspiegel  $M_3/M_4$  an. Je nach Art der gewünschten Frequenzumsetzung - IF zu HF oder HF zu IF - kann  $u_{s_2}(t)$  entweder das IF- oder das HF-Signal sein. Das jeweilig gewünschte Mischprodukt wird am 3. Tor über ein weiteres *Balun* am Differenzpaar ausgekoppelt. Alle drei Tore sind mit den charakteristischen Impedanzen  $Z_0$  abgeschlossen. Das fundamentale LO-Signal soll im Folgenden stets bei  $\frac{\omega_1}{2\pi} = f_{\text{LO}} = 2.4 \text{ GHz}$  liegen und die größte vorhandene Fundamentalfrequenz  $\omega_1$  sein. Dadurch bleiben Abwärtsumsetzungen  $k_1\omega_1 - |k_2|\omega_2$  stets positiv, woraus die Definition der Indizierung aus [117, Abschnitt 5.7.6] erhalten bleibt, ohne eine Konjugation der komplexen X-Parameter vornehmen zu müssen. Das IF-Signal soll bei  $f_{\text{IF}} = 54 \text{ MHz}$  liegen. Anhand einer Zweitonanregung soll zunächst die Gültigkeit von (8.19) anhand der IF- zu HF-Umsetzung gezeigt werden. Anschließend wird beispielhaft eine Dreitonuntersuchung zur Veranschaulichung von (8.21) durchgeführt. Dabei soll der Einfluss der zweiten LO-Harmonischen auf die Abwärtsumsetzung  $\omega_{\text{down}} = \omega_1 - \omega_2 = 2.346 \text{ GHz}$  als Beispiel dienen.

#### 8.3.1. Zweitonanregung

In diesem Abschnitt wird das LO-Signal am 1. Tor als reines Eintonensignal

$$u_{\text{LO}} = u_{s_1}(t) = \hat{u}_{s_1[1,0]} \cos(\omega_1 t + \phi_{s_1[1,0]}) \quad (8.23a)$$

angenommen, was mit  $U_{s_1[1,0]} = \hat{u}_{s_1[1,0]} e^{j\phi_{s_1[1,0]}}$  über (A.17) zur komplexen Streuvariablen  $A_{1[1,0]}$  führt. Am 2. Tor koppelt das IF-Signal

$$u_{\text{IF}} = u_{s_2}(t) = \hat{u}_{s_2[0,1]} \cos(\omega_2 t + \phi_{s_2[0,1]}) \quad (8.23b)$$

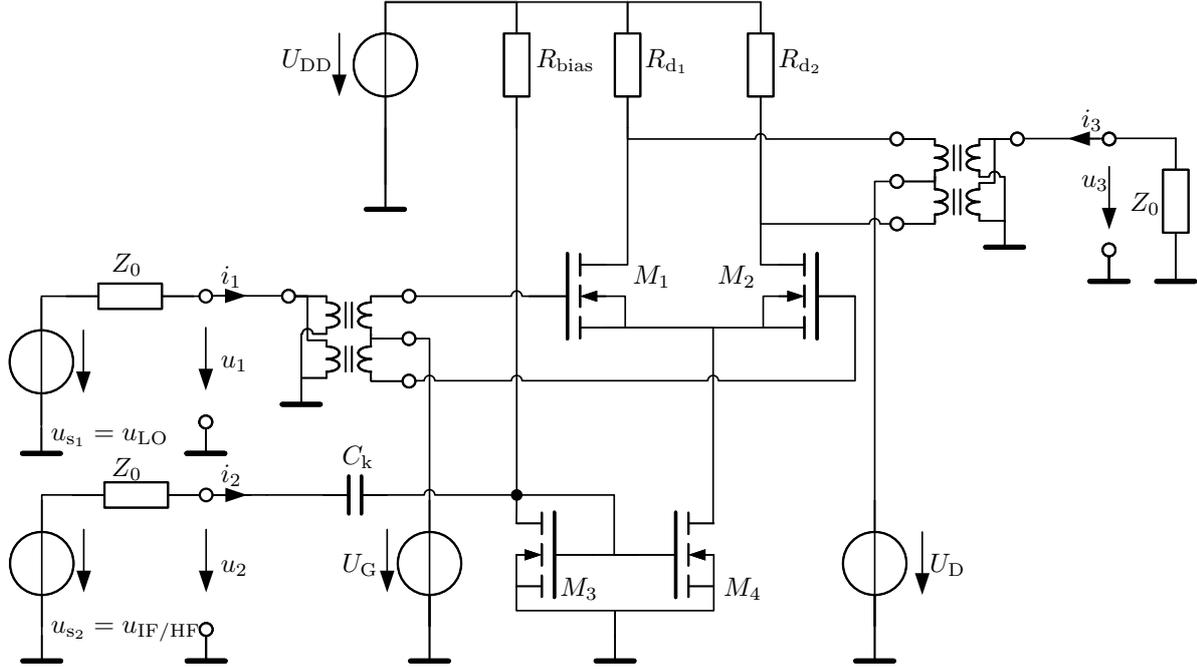


Abb. 8.3.: Single-balanced-Mischer mit Balun-Einkopplung.

in den Fußpunktstromspiegel (vgl. Abb. 8.3) ein. Zur Veranschaulichung der Gültigkeit von (8.19) soll eine Variation von  $A_{2[0,1]} = \frac{\hat{u}_{s2[0,1]}}{2\sqrt{Z_0}} e^{\phi_{s2[0,1]}}$  dienen, das im Ansatz (8.7a) als zweites Großsignal den LSOP festlegt.

Im neu eingeführten Ansatz aus (8.21) wird  $A_{2[0,1]}$  als erstes Kleinsignal angesehen, das den durch  $A_{1[1,0]}$  allein festgelegten LSOP in (8.14) stört. Durch diese Interpretation kann (8.16) zur Suszeptibilitätsanalyse der Schaltung genutzt werden. Für zwei verschiedene Werte des Großsignals  $\hat{u}_{s1[1,0]} = 2\sqrt{Z_0}A_{1[1,0]} = \{0.5\text{ V}, 1\text{ V}\}$  wird die Mischerschaltung aus Abb. 8.3 in *Cadence Virtuoso Design Framework* mit der HB im Intervall  $\hat{u}_{s2[0,1]} = 2\sqrt{Z_0}A_{2[0,1]} \in [10\text{ mV}, 0.5\text{ V}]$  simuliert. Gleichzeitig wurden die Phasen der Fundamentalsignale über  $\phi_{s1[1,0]} = -\frac{1}{2}\phi_{s2[0,1]} = 100^\circ \hat{u}_{s1[1,0]} \cdot 1\text{ V}^{-1}$  implizit variiert. Beispielfhaft sollen sowohl die Antworten bei der ersten Fundamentalfrequenz  $\omega_1$  als auch bei der Abwärts-umsetzung  $\omega_{\text{down}} = \omega_1 - \omega_2$  gezeigt werden. Als Approximation des Ansatzes mit zwei fundamentalen Großsignalen von Xie, Zhang und Liu [166] in (8.7) wird sowohl der lineare Ansatz (8.16) als auch der Ansatz 3. Ordnung aus (8.17) angewendet und anhand des relativen Fehlers

$$|\Delta B_{m[k_1, k_2]}| = \left| \frac{B_{m[k_1, k_2], \text{Cad.}} - B_{m[k_1, k_2], \text{Ans.}}}{B_{m[k_1, k_2], \text{Cad.}}} \right|$$

ausgewertet. In Abb. 8.4 ist beispielhaft das Spektrum der Ausgangsspannung infolge der Zweitonanregung (8.23) gezeigt. Dabei wird verdeutlicht wie sich die Ordnung  $D = \{1, 3, 5\}$  des neu eingeführten Ansatzes auswirkt. Infolge der Differenzstufe werden die Signalanteile um geradzahlige Vielfache der Differenzspannung  $u_{\text{LO}}$  stark abgeschwächt. Gleiches gilt für die Frequenzanteile  $k\omega_2$ , die durch die am Fußpunktstromspiegel eingekoppelte Spannung  $u_{s_2}$  hervorgerufen werden.

### Fundamentalfrequenz $\omega_1$

Für die Fundamentalfrequenz  $\omega_1$  am 3. Tor lautet die Modellgleichung (8.7) im Zweitonfall

$$B_{3[1,0]} = X_{3[1,0]}^{(\text{F})} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) P_{[1,0]} \quad (8.24a)$$

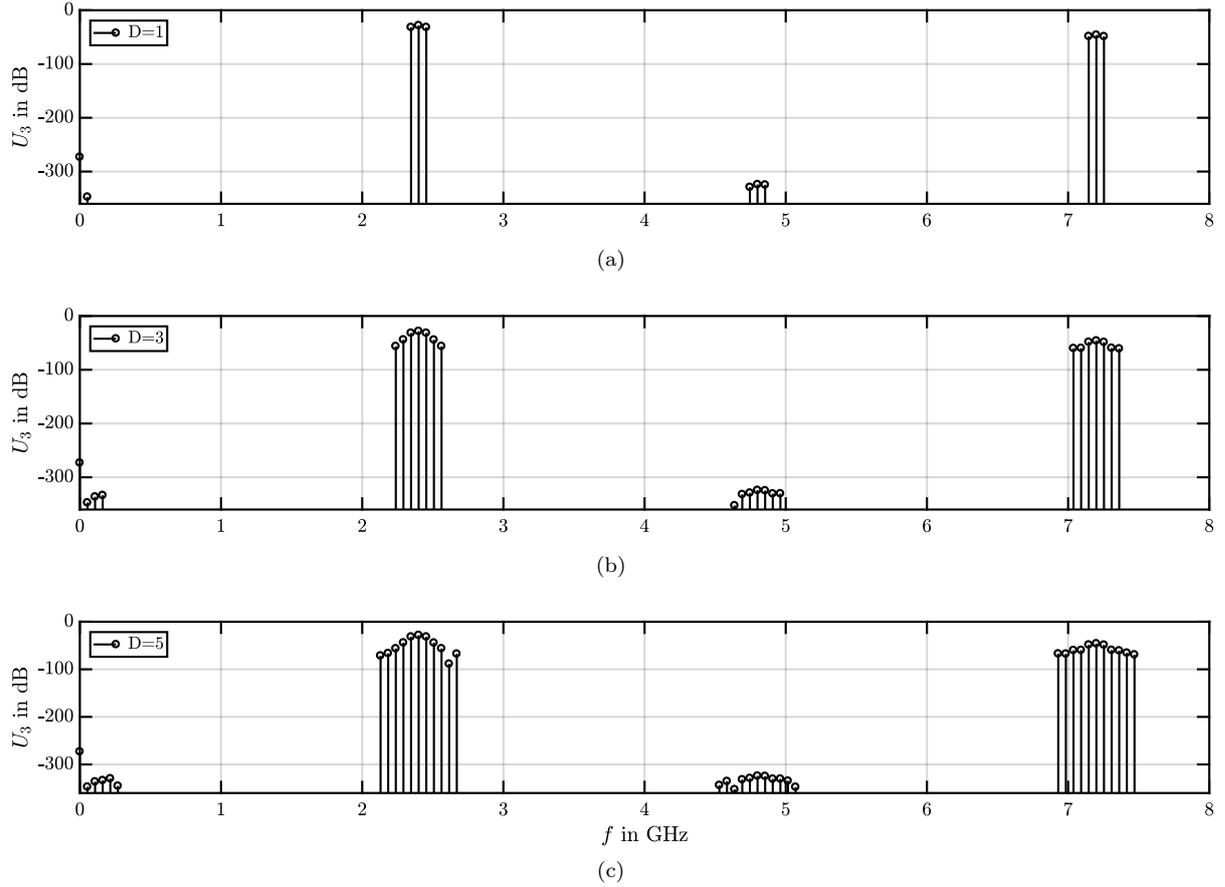


Abb. 8.4.: Spektrum der X-Parameternäherung für unabhängige Frequenzen und Ordnung  $D=1$  (8.16) (a), Ordnung  $D=3$  (8.17) (b) und die *Cadence*-Vergleichssimulation bzw. X-Parameter aus (8.7) mit  $|k_1| \leq 5$  und  $|k_2| \leq 5$  (c)

und die Approximationen der Ordnung  $D = 1$  aus (8.16) bzw.  $D = 3$  aus (8.17)

$$B_{3[1,0]}(D = 1) \approx X_{3[1,0]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|) P_{[1,0]}, \quad (8.24b)$$

$$B_{3[1,0]}(D = 3) \approx \left( X_{3[1,0]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|) + X_{3[1,0],2[0,1]}^{(ST)} |A_{2[0,1]}|^2 \right) P_{[1,0]}. \quad (8.24c)$$

Die zugehörigen Verläufe von  $|B_{3[1,0]}|$  über  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = 2\sqrt{Z_0}A_{2[0,1]} \in [10 \text{ mV}, 0.5 \text{ V}]$  mit einer Schrittweite von  $\Delta\hat{u}_{s_2[0,1]} = 10 \text{ mV}$  und des relativen Fehlers jedes Ansatzes  $|\Delta B_{3[1,0]}|$  sind in Abb. 8.5 für zwei Werte des fundamentalen Großsignals  $\hat{u}_{s_1[1,0]}$  dargestellt. Für jeden der 50 Werte von  $\hat{u}_{s_2[0,1]}$  muss der Wert  $X_{3[1,0]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|)$  berechnet und gespeichert werden. Die Werte werden gemäß (8.24a) nur mit dem Phasor  $P_{[1,0]}$  multipliziert. Der relative Fehler ist folglich sehr klein  $|\Delta B_{3[1,0]}| \ll 1\%$ . Der Großsignal-X-Parameter  $X_{3[1,0]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|)$  wird für  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = 0$  bestimmt. Der Verlauf  $B_{3[1,0]}(D = 1)$  enthält keine Abhängigkeit von  $A_{2[0,1]}$  und ist folglich in Abb. 8.5a konstant. Durch den nichtlinearen Effekt *desatization* - vgl. z. B.  $H_3(\omega_1, \omega_2, -\omega_2)$  [9] - verringert sich  $|B_{3[1,0]}|$  über  $\hat{u}_{s_2[0,1]}$ . Daher steigt der relative Fehler der linearen Approximation  $|\Delta B_{3[1,0]}(D = 1)|$  schnell an und ist  $|\Delta B_{3[1,0]}(D = 1)| \approx 2.5\%$  bei  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = \frac{1}{4}\hat{u}_{s_1[1,0]} = 125 \text{ mV}$  (gelb) und  $|\Delta B_{3[1,0]}(D = 1)| \approx 5.5\%$  bei  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = \frac{1}{4}\hat{u}_{s_1[1,0]} = 250 \text{ mV}$  (blau).

Für den Ansatz höherer Ordnung wird der X-Parameter  $X_{3[1,0],2[0,1]}^{(ST)} (|A_{1[1,0]}|)$  bei  $|A_{2[0,1]}| = \frac{1}{4}|A_{1[1,0]}|$  ähnlich zu (6.17) berechnet. Dadurch bleibt in Abb. 8.5b  $|\Delta B_{3[1,0]}(D = 3)| \ll 1\%$  bis  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = \frac{1}{4}\hat{u}_{s_1[1,0]} = 125 \text{ mV}$  (lila) und  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = \frac{1}{4}\hat{u}_{s_1[1,0]} = 250 \text{ mV}$  (grün). Über  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = \frac{1}{4}\hat{u}_{s_1[1,0]}$  hinaus steigt der relative

Fehler  $|\Delta B_{3[1,0]}(D=3)|$  schnell an und ist  $|\Delta B_{3[1,0]}(D=3)| \approx 23\%$  für  $\hat{u}_{s_1[1,0]} = \hat{u}_{s_2[0,1]} = 500$  mV (lila) bzw.  $|\Delta B_{3[1,0]}(D=3)| \approx 11\%$  bei  $\hat{u}_{s_1[1,0]} = 2\hat{u}_{s_2[0,1]} = 1$  V (grün). Eine weitere Erhöhung der Ordnung  $D$  würde mit Einführung des X-Parameters  $X_{3[1,0],2[0,1]}(|A_{1[1,0]}|)$  den Gültigkeitsbereich der Approximation aus (8.19b)

$$X_{3[1,0]}^{(F)}(|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) \approx X_{3[1,0]}^{(F)}(|A_{1[1,0]}|) + X_{3[1,0],2[0,1]}^{(ST)} |A_{2[0,1]}|^2 + X_{3[1,0],2[0,1]}^{(S^2T^2)}(|A_{1[1,0]}|) |A_{2[0,1]}|^4 + \dots$$

vergrößern. Der Übersichtlichkeit halber wurde darauf in der Darstellung in Abb. 8.5 verzichtet.

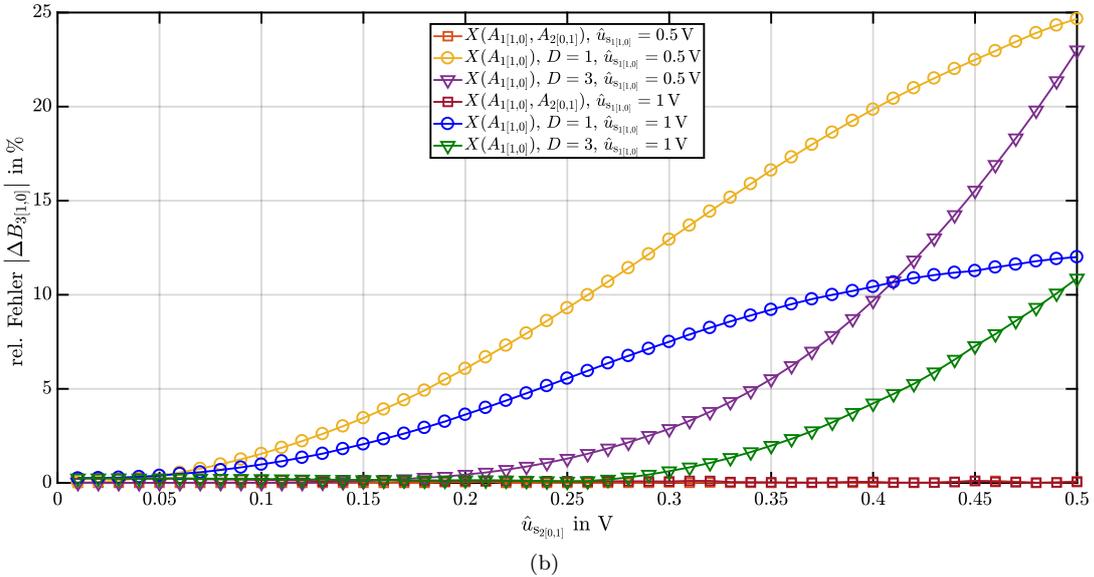
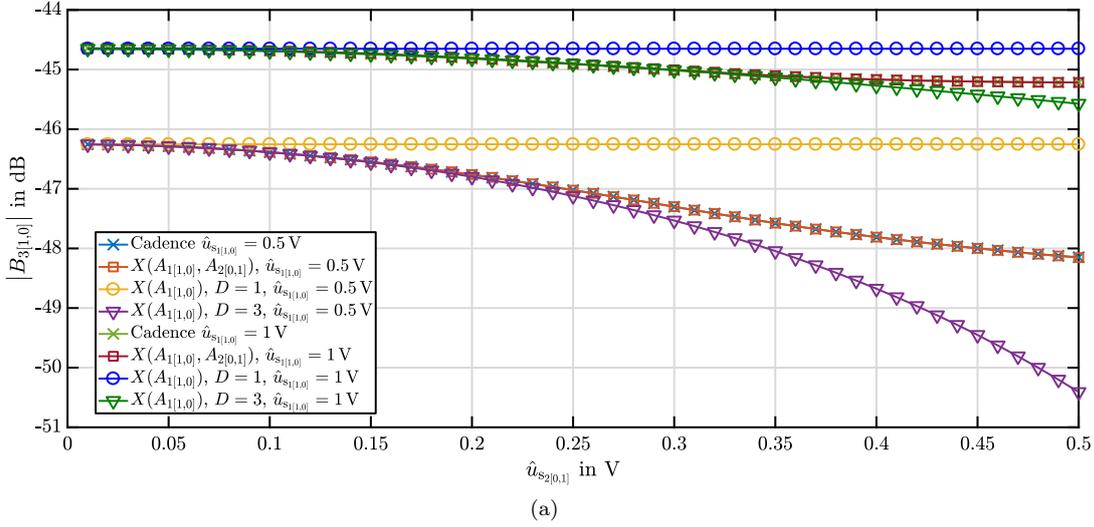


Abb. 8.5.: Fundamentalantwort  $|B_{3[1,0]}|$  in komplexer Darstellung (a) und relativer Fehler  $|\Delta B_{3[1,0]}|$  zur Cadence-Vergleichssimulation (b)

### Abwärtsumsetzung $\omega_{\text{down}}$

Für die Abwärtsumsetzung  $\omega_{\text{down}} = \omega_1 - \omega_2$  am 3. Tor lautet die Modellgleichung (8.7) im Zweittonfall

$$B_{3[1,-1]} \approx X_{3[1,-1]}^{(F)}(|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) P_{[1,0]} P_{[0,1]}^{-1} \quad (8.25a)$$

und die Approximationen der Ordnung  $D = 1$  aus (8.16) bzw.  $D = 3$  aus (8.17)

$$B_{3[1,-1]}(D = 1) \approx X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(T)} (|A_{1[1,0]}|) A_{2[0,1]}^* P_{[1,0]}, \quad (8.25b)$$

$$B_{3[1,-1]}(D = 3) \approx \left( X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(T)} (|A_{1[1,0]}|) + X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(ST^2)} (|A_{1[1,0]}|) |A_{2[0,1]}|^2 \right) A_{2[0,1]}^* P_{[1,0]}. \quad (8.25c)$$

In Abb. 8.6 sind die zugehörigen Verläufe  $B_{3[1,-1]}$  in der komplexen Ebene und der relative Fehler jedes Ansatzes  $|\Delta B_{3[1,-1]}|$  über  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = 2\sqrt{Z_0} A_{2[0,1]} \in [10 \text{ mV}, 0.5 \text{ V}]$  mit einer Schrittweite von  $\Delta \hat{u}_{s_2[0,1]} = 10 \text{ mV}$  dargestellt. Anders als in Abb. 8.5a ist in Abb. 8.6a die komplexe Darstellung gewählt, um den Einfluss der linearen Phasendrehung  $\phi_{s_1[1,0]} = -\frac{1}{2}\phi_{s_2[0,1]} = 100^\circ \hat{u}_{s_1[1,0]} \cdot 1 \text{ V}^{-1}$  zu verdeutlichen. Erneut wird  $X_{3[1,0]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|)$  für jeden der 50 Werte von  $\hat{u}_{s_2[0,1]}$  berechnet und gespeichert. Diese werden gemäß (8.25a) mit dem Phasorprodukt  $P_{[1,0]} P_{[0,1]}^{-1}$  multipliziert. Der relative Fehler ist auch hier sehr klein  $|\Delta B_{3[1,-1]}| \leq 0.3\%$ . Der Kleinsignal-X-Parameter  $X_{3[1,0],2[0,1]}^{(T)} (|A_{1[1,0]}|)$  wird jeweils bei  $A_{2[0,1]} = \frac{1}{100} A_{1[1,0]}$  bestimmt. Der zugehörige Verlauf  $B_{3[1,-1]}(D = 1)$  aus (8.25b) weicht beim zehnfachen Wert  $A_{2[0,1]} = \frac{1}{10} A_{1[1,0]}$  dennoch erst um  $|\Delta B_{3[1,-1]}| \approx 1\%$  (gelb) und bei  $A_{2[0,1]} = \frac{1}{4} A_{1[1,0]}$  um  $|\Delta B_{3[1,-1]}| \approx 2.5\%$  bzw.  $|\Delta B_{3[1,-1]}| \approx 4.9\%$  (blau) ab. Beim eingestellten Maximalwert ist  $|\Delta B_{3[1,-1]}(D = 1)| \approx 47\%$  für  $\hat{u}_{s_1[1,0]} = \hat{u}_{s_2[0,1]} = 500 \text{ mV}$  (gelb) und  $|\Delta B_{3[1,-1]}(D = 1)| \approx 31\%$  bei  $\hat{u}_{s_1[1,0]} = 2\hat{u}_{s_2[0,1]} = 1 \text{ V}$  (blau).

Für den Ansatz 3. Ordnung wird der X-Parameter  $X_{3[1,0],2[0,1]}^{(ST^2)} (|A_{1[1,0]}|)$  bei  $|A_{2[0,1]}| = \frac{1}{4} |A_{1[1,0]}|$  ähnlich zu (6.19) berechnet. Dadurch bleibt in Abb. 8.6b  $|\Delta B_{3[1,-1]}(D = 3)| \ll 1\%$  bis  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = \frac{1}{4} \hat{u}_{s_1[1,0]} = 125 \text{ mV}$  (lila) und  $\hat{u}_{s_2[0,1]} = \frac{1}{4} \hat{u}_{s_1[1,0]} = 250 \text{ mV}$  (grün). Eine weitere Erhöhung der Ordnung  $D$  würde mit Einführung des X-Parameters  $X_{3[1,0],2[0,1]}^{(S^2T^3)} (|A_{1[1,0]}|)$  den Gültigkeitsbereich der Approximation aus (8.19a)

$$X_{3[1,-1]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) \approx |A_{2[0,1]}| \cdot \left( X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(T)} + X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(ST^2)} |A_{2[0,1]}|^2 + X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(S^2T^3)} |A_{2[0,1]}|^4 \right) \quad (8.26)$$

vergrößern. Der Übersichtlichkeit halber wurde darauf erneut verzichtet.

In [117, Abschnitt 5.7.7] ist ein Überblick gegeben wie mit Hilfe der X-Parameter verschiedene Mischergütezahlen ausgedrückt werden können. So ist z. B. die Abwärtsumsetzungsverstärkungen - engl. *down-conversion gain* - mit (8.26) gegeben durch

$$g_{\text{down}} = \frac{|X_{3[1,-1]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|)|}{|A_{2[0,1]}|} \approx \left| X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(T)} + X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(ST^2)} |A_{2[0,1]}|^2 + \dots \right|. \quad (8.27)$$

Diese Approximation mit den X-Parametern  $X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(\cdot)} (|A_{1[1,0]}|)$  ist insbesondere dann hilfreich, wenn das zweite Fundamentalsignal ein Störsignal im System ist. So kann über (8.27) eine analytische Abhängigkeit der Umsetzungsverstärkung erhalten werden, die gleichzeitig Auskunft über die Störfestigkeit in Bezug auf  $A_{2[0,1]}$  des Systems gibt. Dabei reicht eine kleine, von der Ordnung  $D$  abhängige Anzahl an X-Parametern  $X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(\cdot)} (|A_{1[1,0]}|)$  als Koeffizienten aus. Die Ergebnisse von (8.27) für das zuvor betrachtete Beispiel  $\hat{u}_{s_1[1,0]} = \{500 \text{ mV}, 1 \text{ V}\}$  ist in Abb. 8.7  $\hat{u}_{s_2[0,1]} \in [10 \text{ mV}, 500 \text{ mV}]$  gezeigt. Wie auch in Abb. 8.6 kann der Verlauf  $X_{3[1,-1]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|)$  mit der Näherung 3. Ordnung (8.26) sehr gut bis  $|A_{2[0,1]}| \leq \frac{1}{4} |A_{1[1,0]}|$  approximiert werden. Dazu sind nur zwei X-Parameter  $X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(T)} (|A_{1[1,0]}|)$  und  $X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(ST^2)} (|A_{1[1,0]}|)$  pro Wert des Großsignals  $|A_{1[1,0]}|$  anstatt 25  $X_{3[1,-1]}^{(F)} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|)$  nötig.

### 8.3.2. Dreitonanregung

In diesem Abschnitt wird beispielhaft ein Zusammenhang zwischen den Kleinsignal-X-Parametern zweier unabhängiger Großsignale aus (8.7) und den X-Parametern eines Großsignals gemäß des MIT-Ansatzes aus (8.21) hergestellt. Dazu wird neben den beiden Fundamentalsignalen  $A_{1[1,0]}, A_{2[0,1]}$  die zweite Harmonische des LO-Signals am 1. Tor  $A_{1[2,0]}$  als *Kleinsignal* berücksichtigt. Es soll die HF- zu IF-Abwärtsumsetzung

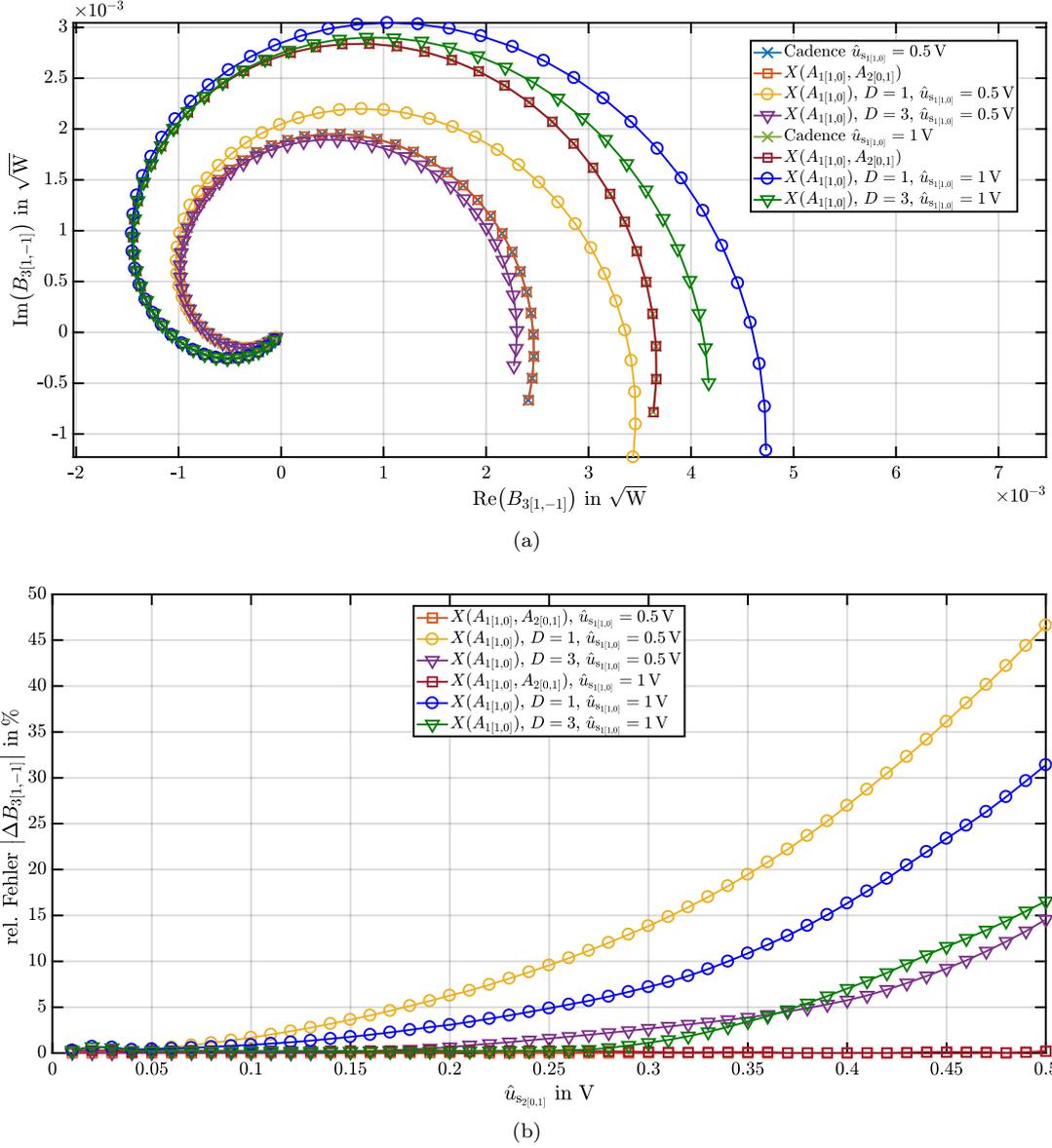


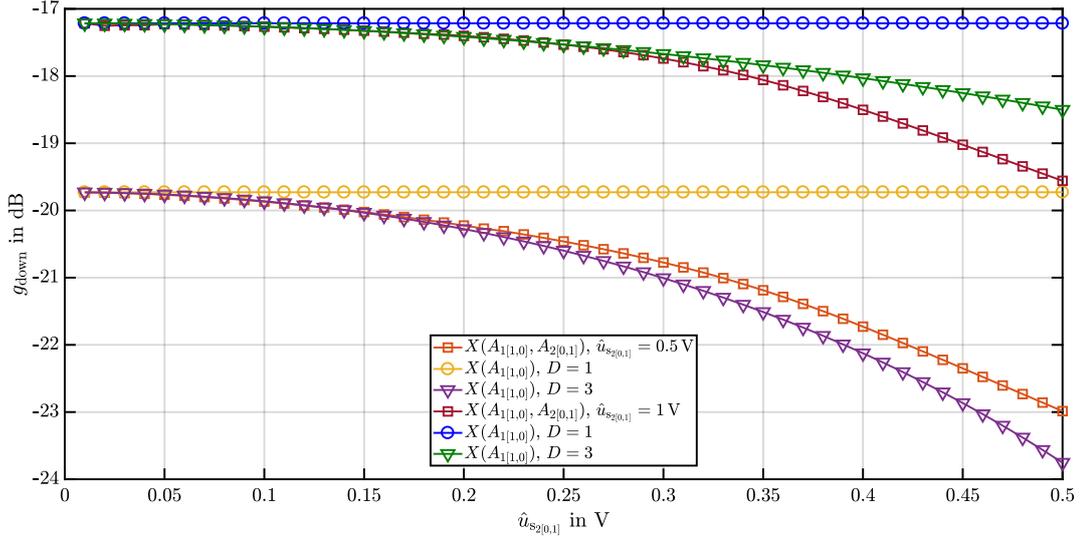
Abb. 8.6.: Abwärtsumsetzung  $B_{3[1,-1]}$  (a) und relativer Fehler  $|\Delta B_{3[1,-1]}|$  zur Cadence-Vergleichssimulation (b)

mit  $B_{3[1,-1]}$  bei  $\omega_{\text{down}} = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi \cdot 2.346$  GHz betrachtet werden, wozu das zweite Fundamentalsignal  $A_{2[0,1]}$  bei  $\omega_2 = 2\pi \cdot 54$  MHz am Tor 2 angelegt wird. Es ergibt sich damit für (8.7)

$$\begin{aligned}
 B_{3[1,-1],\text{Xie}} \approx & X_{3[1,-1]}^{(\text{F})} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) P_{1,0} P_{0,1}^{-1} + X_{3[1,-1],1[2,0]}^{(\text{S})} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) A_{1[2,0]} P_{1,0}^{-1} P_{0,1}^{-1} \\
 & + X_{3[1,-1],1[2,0]}^{(\text{T})} (|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) A_{1[2,0]}^* P_{1,0}^3 P_{0,1}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

Der MIT-Ansatz aus (8.21) wird für den vorliegenden Dreitonfall bis zur Ordnung  $D = 3$  betrachtet, wobei die Kurzschreibweise aus (8.12a) verwendet wird. Mit dem Kleinsignalvektor

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left( \tilde{A}_{2[0,1]}, \tilde{A}_{1[2,0]} \right) \tag{8.29a}$$


 Abb. 8.7.: Down-conversion gain über die Amplitude  $\hat{u}_{s2[0,1]}$ 

ergibt sich der vollständige MIT-Ansatz

$$\tilde{B}_{3[1,-1],\text{MIT}} \approx \sum_{|\sigma|+|\tau|\leq 3} X_{3[1,-1]}^{(S^\sigma T^\tau)}(|A_{1[1,0]}|) \tilde{A}^\sigma (\tilde{A}^*)^\tau. \quad (8.29b)$$

Dieser hat wie für die polyharmonische Anregung die Modellkomplexitäten  $M_{(\cdot)}(L, D)$  aus (6.35)

$$\begin{aligned} M_{\text{MIT}}(2, 1) &= 5, \\ M_{\text{MIT}}(2, 2) &= 15 \\ \text{und } M_{\text{MIT}}(2, 3) &= 35. \end{aligned}$$

Allerdings lassen sich wie im Zweitonfall in (8.17d) X-Parameter  $X_{3[1,-1]}^{(S^\sigma T^\tau)}(|A_{1[1,0]}|) \equiv 0$  identifizieren. Dazu ist eine Übertragung der Frequenzgeneration aus (3.9a) (vgl. [9, 156]) hilfreich. Für das vorliegende Beispiel ergibt sich mit dem Modulvektor  $\mathbf{q} = (q_{-3}, q_{-2}, q_{-1}, q_1, q_2, q_3)^\top$  und dem Frequenzvektor  $\boldsymbol{\omega} = (-2\omega_1, -\omega_2, -\omega_1, \omega_1, \omega_2, 2\omega_1)^\top$

$$\omega_1 - \omega_2 = q_{-3}(-2\omega_1) + q_{-2}(-\omega_2) + q_{-1}(-\omega_1) + q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3(2\omega_1). \quad (8.30)$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt die Bedingungen

$$1 = q_1 - q_{-1} + q_3 - q_{-3} \quad (8.31a)$$

$$-1 = q_2 - q_{-2}. \quad (8.31b)$$

Aus der zweiten Bedingung folgt direkt  $q_{-2} = q_2 + 1$  und daraus wiederum mit  $q_2 \in \mathbb{N}_0$  die Bedingung  $q_{-2} \geq 1$ . Übertragen auf die X-Parameterbetrachtung mit dem MIT-Ansatz des vorliegenden Beispiels folgt, dass für die zu  $\omega_2$  bzw.  $A_{2[0,1]}$  gehörigen Einträge der Multi-Indizes  $\sigma$  und  $\tau$  äquivalent gelten muss  $\sigma_1 - \tau_1 \stackrel{!}{=} -1$ , um zu der Streuvariablen  $B_{m[1,-1]}$  beizutragen. Im Umkehrschluss folgt daher

$$X_{3[1,-1]}^{(S^\sigma T^\tau)}(|A_{1[1,0]}|) \equiv 0 \quad \forall \quad \sigma_1 - \tau_1 \neq -1. \quad (8.32)$$

Von dem allgemeinen MIT-Ansatz aus (8.29) bleiben damit nur

$$\tilde{B}_{3[1,-1]}(D=1) = X_{3[1,-1]}^{(S^{(0,0)}T^{(1,0)})} \tilde{A}_{2[0,1]}^*, \quad (8.33a)$$

$$\tilde{B}_{3[1,-1]}(D=2) = \tilde{B}_{3[1,-1]}(D=1) + \tilde{A}_{2[0,1]}^* \left( X_{3[1,-1]}^{(S^{(0,1)}T^{(1,0)})} \tilde{A}_{1[2,0]} + X_{3[1,-1]}^{(S^{(0,0)}T^{(1,1)})} \tilde{A}_{1[2,0]}^* \right), \quad (8.33b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{3[1,-1]}(D=3) &= \tilde{B}_{3[1,-1]}(D=2) + \tilde{A}_{2[0,1]}^* \left( X_{3[1,-1]}^{(S^{(1,0)T(2,0)})} |A_{2[0,1]}|^2 \right. \\ &\quad \left. + X_{3[1,-1]}^{(S^{(0,2)T(1,0)})} \tilde{A}_{1[2,0]}^2 + X_{3[1,-1]}^{(S^{(0,1)T(1,1)})} |A_{1[2,0]}|^2 + X_{3[1,-1]}^{(S^{(0,0)T(1,2)})} \left( \tilde{A}_{1[2,0]}^* \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (8.33c)$$

Darin sind einige X-Parameter aus (8.25c) in anderer Notation bekannt und es gelten die Äquivalenzen  $X_{3[1,-1]}^{(S^{(0,0)T(1,0)})} = X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(T)}$  aus  $\tilde{B}_{3[1,-1]}(D=1)$  und  $X_{3[1,-1]}^{(S^{(1,0)T(2,0)})} = X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(ST^2)}$  aus  $\tilde{B}_{3[1,-1]}(D=3)$ . Wie in (8.19) gezeigt wurde, können diese genutzt werden um die Großsignal-X-Parameter  $X_{3[1,-1]}^{(F)}$  ( $|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|$ ) zu approximieren. Ein Koeffizientenvergleich mit (8.28) ergibt für die Kleinsignal-X-Parameter die Näherungen

$$X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(S)}(|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) \approx |A_{2[0,1]}| \left( X_{3[1,-1]}^{(S^{(0,1)T(1,0)})} + \mathcal{O}(4) \right), \quad (8.34a)$$

$$X_{3[1,-1],1[2,0]}^{(T)}(|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|) \approx |A_{2[0,1]}| \left( X_{3[1,-1]}^{(S^{(0,0)T(1,1)})} + \mathcal{O}(4) \right). \quad (8.34b)$$

Aus  $\tilde{B}_{3[1,-1]}(D=3)$  sind darüber hinaus noch Terme zu erkennen, die quadratisch in  $|A_{1[2,0]}|$  sind. Diese werden vom Ansatz aus (8.7) nicht berücksichtigt, da die Reihenentwicklung der spektralen Beschreibungsfunktion  $F_{3[1,-1]}$  im LSOP nach den linearen Termen abgebrochen wurde. Zum Vergleich von (8.28) und (8.33) werden die Amplituden der beiden Kleinsignale gleichermaßen

$$\hat{u}_{s_{2[0,1]}} = \hat{u}_{s_{1[2,0]}} \in [10 \text{ mV}, 500 \text{ mV}]$$

mit einer Schrittweite von 10 mV in *Cadence Virtuoso Design Framework* variiert. Zusätzlich werden die Phasen implizit über

$$\phi_{1[2,0]} = 600^\circ \hat{u}_{s_{2[0,1]}} \cdot 1 \text{ V}^{-1} = -\frac{2}{3} \phi_{2[0,1]}$$

geändert. Dabei ist die Großsignalamplitude  $\hat{u}_{s_{1[1,0]}} = 1 \text{ V}$  und die Phase  $\phi_{A_{1[1,0]}} = 0$ , was  $P_{[1,0]} = e^{j\phi_{A_{1[1,0]}}} = 1$  entspricht. Folglich können nach (8.12a) in (8.33) die Tilden ignoriert werden.

Die Berechnungen der verschiedenen Ansätze erfolgen nach unterschiedlichen Verfahren. Beim Ansatz (8.28) von Xie, Zhang und Liu [166] wird die Phasen-Offset-Methode aus (4.44) auf die IM-Produkte  $B_{m[k_1,k_2]}$  übertragen. Da das Signal  $A_{2[0,1]}$  von diesem Ansatz als Großsignal angesehen wird, werden die drei X-Parameter aus (8.28) für jeden der 50 Werte von  $A_{2[0,1]}$  neu berechnet. Die X-Parameter des MIT-Ansatzes aus (8.33) werden über die übertragene Phasen-Offset-Methode aus (6.24) einmalig für jeden Wert von  $A_{1[1,0]}$  berechnet. Die zugehörigen Ergebnisse von  $B_{3[1,-1]}$  und die relativen Fehler der unterschiedlichen Ansätze sind in Abb. 8.8 gezeigt. Durch die Wahl  $|A_{2[0,1]}| = |A_{1[2,0]}|$  ist die Grundannahme  $\{|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|\} \gg |A_{n[l_1,l_2]}|$  aus (8.5) der X-Parameter aus (8.28) nicht erfüllt. Für kleine  $\hat{u}_{s_{2[0,1]}} = \hat{u}_{s_{1[2,0]}} < 125 \text{ mV}$  ist der relative Fehler  $|\Delta B_{3[1,-1]}| < 1\%$  - abgesehen vom kleinsten betrachteten Wert. Allerdings führt auch der Verlauf von  $B_{3[1,-1]}(D=1)$  in diesem Bereich zu keinem großen Fehler  $|\Delta B_{3[1,-1]}| < 3\%$ . Da  $B_{3[1,-1]}(D=1)$ , wie in (8.33a) zu sehen ist, nur von  $A_{2[0,1]}$  abhängt, ist davon auszugehen, dass die zweite Harmonische des LO-Signals  $A_{1[2,0]}$  in diesem Bereich nur einen vernachlässigbaren Einfluss auf  $B_{3[1,-1]}$  besitzt. Für größere Werte wird die Wirkung von  $A_{1[2,0]}$  auf  $B_{3[1,-1]}$  durch die Wahl  $\hat{u}_{s_{2[0,1]}} = \hat{u}_{s_{1[2,0]}}$  zunehmend erkennbar. Die beiden Ansätze nach Xie, Zhang und Liu [166]  $B_{3[1,-1],\text{Xie}}$  und die eingeführten MIT-X-Parameter aus (8.33b)  $B_{3[1,-1]}(D=2)$  berücksichtigen  $A_{1[2,0]}$  jeweils linear. Obwohl der MIT-Ansatz  $B_{3[1,-1]}(D=2)$  das zweite Fundamentalsignal  $A_{2[0,1]}$  ebenfalls nur linear berücksichtigt, gibt es einen Wertebereich in dem der relative Fehler unter dem des Ansatzes  $B_{3[1,-1],\text{Xie}}$  aus (8.28) liegt. Die Ursache dafür ist die Verletzung der Bedingung  $\{|A_{1[1,0]}|, |A_{2[0,1]}|\} \gg |A_{n[l_1,l_2]}|$  aus (8.5) und das darauf basierende Berechnungsverfahren nach der Phasen-Offset-Methode (4.44), für das (8.5) erfüllt wird. Wie schon bei der Betrachtung von Abb. 8.6 festgestellt wurde, führt das Fehlen der Terme höherer Ordnung von  $|A_{2[0,1]}|$  ab einem gewissen Wert zu einem schnell ansteigenden relativen Fehler. Im Vergleich zu den  $\hat{u}_{2[0,1]} \approx 100 \text{ mV}$  des dunkelblauen Verlaufs in Abb. 8.6b ist dieser in Abb. 8.8b mit  $\hat{u}_{2[0,1]} = 200 \text{ mV}$  deutlich größer. Auch hier ist die unterschiedliche Berechnung die Ursache: Beim MIT-Ansatz wird ähnlich zum erweiterten *Frequenz-Offset-Verfahren* (6.25) ein Gleichungssystem gelöst, das für beide Signale des Vektors  $\tilde{\mathbf{A}}$  verschiedene Amplituden erfordert. Der MIT-Ansatz  $B_{3[1,-1]}(D=3)$  enthält neben dem bekannten Term  $X_{3[1,-1],2[0,1]}^{(ST^2)} = X_{3[1,-1]}^{(S^{(1,0)T(2,0)})}$

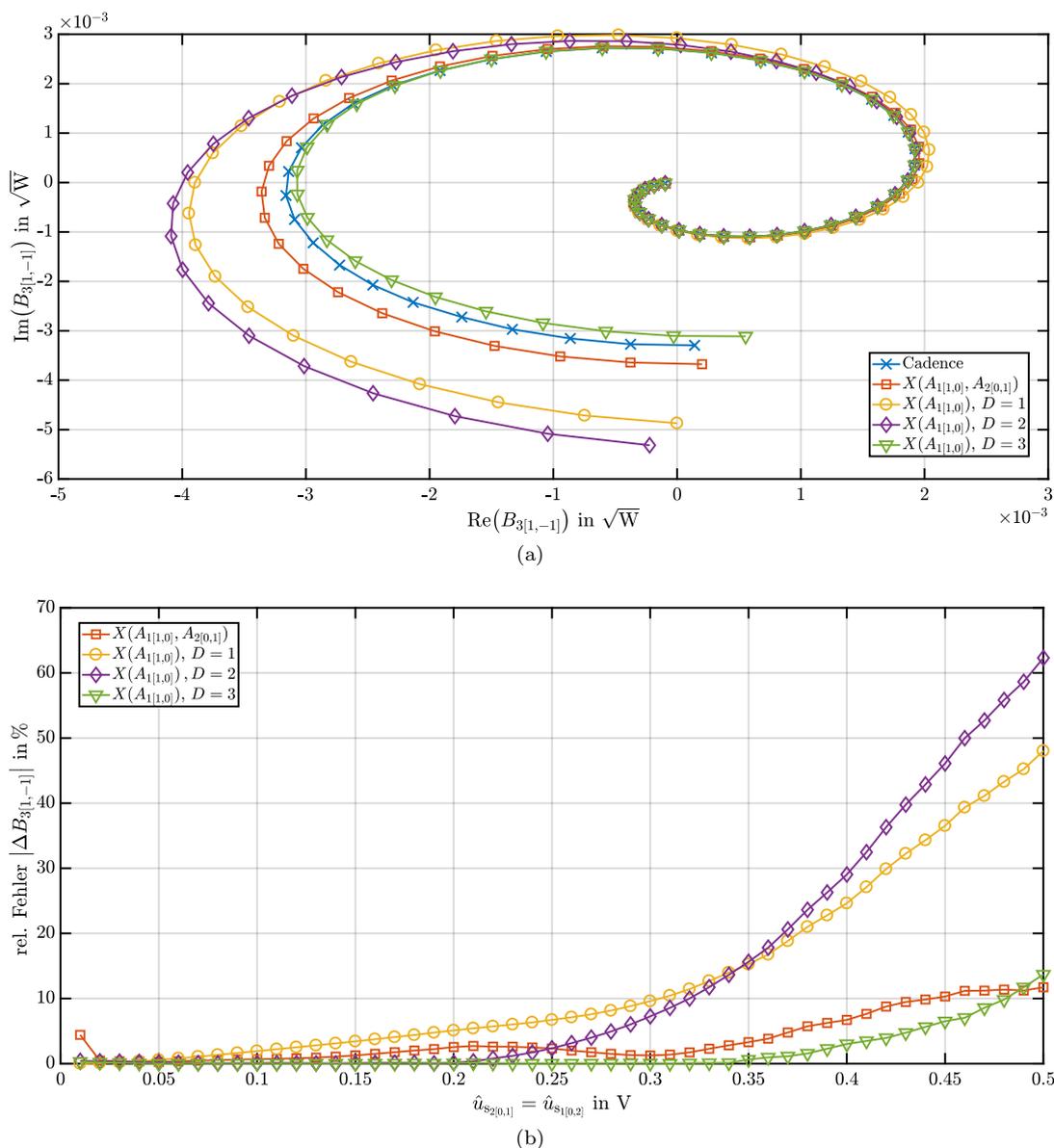


Abb. 8.8.: Abwärtsumsetzung  $B_{3[1,-1]}$  bei Dreitonanregung aus (8.28) und (8.33) für  $\hat{u}_{s[1,0]} = 1$  V in komplexer Ebene (a) und relativer Fehler  $|\Delta B_{3[1,-1]}|$  zur Cadence-Vergleichssimulation über  $\hat{u}_{s2[0,1]} = \hat{u}_{s1[0,2]}$  (b)

auch drei Terme, die quadratisch in  $|A_{1[2,0]}|$  sind. Dadurch wächst der relative Fehler dieses Ansatzes erst ab  $\hat{u}_{2[0,1]} = 350$  mV schnell an, wobei der nicht streng monoton ansteigende relative Fehler  $|\Delta B_{3[1,-1],\text{Xie}}|$  erst bei  $\hat{u}_{2[0,1]} = 500$  mV überschritten wird.

## 8.4. Modellkomplexität

Wie in den Abschnitten 6.5 und 7.3.3 soll im Folgenden kurz die Modellkomplexitäten der beiden Ansätze (8.7) und (8.21) verglichen werden. Dabei wird sich auf die Anzahl an X-Parametern bezogen, die nötig ist, um für einen festen Wert des ersten Fundamentalsignals  $|A_{1[1,0]}|$  ein bestimmtes  $B_m[k_1, k_2]$  zu beschreiben. Für den aus der Literatur bekannten Ansatz (8.7) von Xie, Zhang und Liu [166] ergibt sich eine Abhängigkeit von der Anzahl  $M_{A_{2[0,1]}}$  des zweiten Fundamentalsignalsbetrags  $|A_{2[0,1]}|$  und der Anzahl  $\tilde{L}$  berücksichtigter Kleinsignale  $A_n[l_1, l_2]$ . Im direkten Vergleich zur Länge  $L$  des MIT-Kleinsignalvektors  $\tilde{\mathbf{A}}$

aus (8.21) gilt  $\tilde{L} = L - 1$ . Als Modellkomplexität ergibt sich ähnlich zum PHD-Ansatz aus (6.34)

$$M_{\text{Xie}}(L, M_{A_{2[0,1]}}) = M_{A_{2[0,1]}}(1 + 2\tilde{L}) = M_{A_{2[0,1]}}(1 + 2(L - 1)). \quad (8.35)$$

Für den MIT-Ansatz aus (8.21) ergibt sich als *worst-case* Modellkomplexität die gleiche Anzahl  $M_{\text{MIT}}$  wie bei polyharmonischer Anregung aus (6.35). Je nachdem welche Kleinsignale in  $\tilde{\mathbf{A}}$  vorhanden sind, können einige X-Parameter zu null identifiziert werden, wie in Abschnitt 8.2 festgestellt wurde. Daher gilt bei unabhängigen Frequenzen

$$M_{\text{MIT}}(L, D) \leq \sum_{d=0}^D \binom{2L + d - 1}{d} = \sum_{d=0}^D \frac{1}{d!} \prod_{\delta=0}^{d-1} (2L - \delta). \quad (8.36)$$

Allerdings muss hierbei beachtet werden, dass die Ordnung  $D \geq k_2$  sein muss, um den Anteil  $B_{m[k_1, k_2]}$  überhaupt beschreiben zu können. Aus demselben Grund wird auch auf eine Berechnung der gesamten Modellkomplexität verzichtet. Einen beispielhaften grafischen Vergleich von (8.35) und dem *worst case*

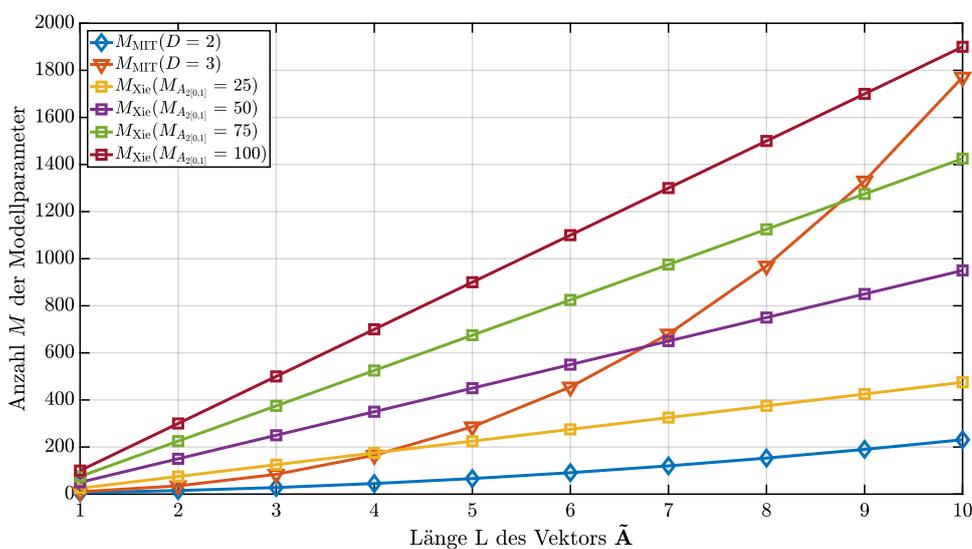


Abb. 8.9.: Vergleich der Modellkomplexitäten (8.35) und (8.36) über der Länge  $L$  des Kleinsignalvektors  $\tilde{\mathbf{A}}$  für verschiedene Ordnungen  $D$  und Amplitudenanzahlen  $M_{A_{2[0,1]}}$ .

aus (8.36) bzw. (6.35) zeigt Abb. 8.9. Darin sind die Verläufe von  $M_{\text{MIT}}(L, 2)$ ,  $M_{\text{MIT}}(L, 3)$ ,  $M_{\text{Xie}}(L, 25)$ ,  $M_{\text{Xie}}(L, 50)$ ,  $M_{\text{Xie}}(L, 75)$  und  $M_{\text{Xie}}(L, 100)$  ausgewählt. Der quadratische Verlauf über  $L$  des MIT-Ansatzes zweiter Ordnung  $M_{\text{MIT}}(L, 2)$  bleibt über den ausgewählten Bereich  $L = \{1, \dots, 10\}$  unter allen vier linearen Verläufen  $M_{\text{Xie}}$ . Der kubische Verlauf  $M_{\text{MIT}}(L, 3)$  übersteigt  $M_{\text{Xie}}(L, 25)$  nach  $L = 4$ ,  $M_{\text{Xie}}(L, 50)$  nach  $L = 6$ ,  $M_{\text{Xie}}(L, 75)$  nach  $L = 8$  und  $M_{\text{Xie}}(L, 100)$  nach  $L = 10$ . Wie bereits erwähnt handelt es sich bei  $M_{\text{MIT}}(L, D)$  jedoch nur um den *worst case*. Im betrachteten Dreitonbeispiel (8.29) sind die Anzahlen wie aus (8.33) ersichtlich  $M_{\text{MIT}}(L, 2) = 3 \ll 15$  und  $M_{\text{MIT}}(L, 3) = 7 \ll 35$ . Dem gegenüber steht für den Ansatz von Xie, Zhang und Liu [166] mit  $M_{\text{Xie}}(2, 50) = 150$  eine deutlich höhere X-Parameteranzahl.

## 8.5. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zwei unterschiedliche Ansätze von X-Parametern für unabhängige Erregerfrequenzen betrachtet und verglichen. Zum einen handelt es sich dabei in Abschnitt 8.1 um den aus der Literatur bekannten, von Xie, Zhang und Liu [166] erstmals eingeführten und in [117] ausführlicher betrachteten Ansatz. Bei diesem werden zwei - oder mehr - Großsignale bei den unabhängigen Fundamentalfrequenzen  $\omega_i \neq l\omega_j$  mit  $l \in \mathbb{N}$  und  $\omega_i > \omega_j$  angenommen. Wie in der bisherigen Betrachtung werden alle Signale im System als periodisch angenommen, sodass die Frequenzbereichsbeschreibung mit der zwei- bzw.  $L$ -dimensionalen Fourier-Reihe (A.12) bzw. (A.18) möglich ist. Abgesehen

von der Mehrdimensionalität der Fourier-Reihe ist der zweite Unterschied zu den X-Parametern des PHD-Ansatzes aus Abschnitt 4, dass die X-Parameter von den Beträgen der fundamentalen Großsignale abhängen. Neben den fundamentalen Großsignalen dürfen nur Linearkombinationen aus diesen, also HD- und IM-Frequenzanteile, auftreten. Wie im PHD-Ansatz legen die Großsignale den LSOP fest und die Einflüsse der weiteren *Kleinsignale* werden diesem als Störung linear überlagert. Die X-Parametermodellgleichung (8.7) eines jeden  $B_{m[k_1, \dots, k_L]}$  ergibt sich erneut aus der Linearisierung der zugehörigen mehrdimensionalen BF  $F_{m[k_1, \dots, k_L]}$  im LSOP aus (8.6). Mit diesem Ansatz ist eine Modellierung von Systemen mit unabhängigen Fundamentalsignalen, wie den Frequenzmischern, möglich.

Zum anderen wurde in Abschnitt 8.2 ein auf Basis der Erkenntnisse der vorherigen Kapitel dieser Arbeit gewonnener Ansatz vorgestellt, der eine völlig andere Sichtweise auf die X-Parametermodellierung mit unabhängigen Erregerfrequenzen erlaubt. Die BF werden nicht in einem LSOP entwickelt, an dem bei allen Fundamentalfrequenzen ein Großsignal vorliegt. Stattdessen wurde von einem einzigen Großsignal ausgegangen, das wie im *polyharmonischen* Fall aus Kapitel 4 nur HD-Anteile im Spektrum aufweist. Die weiteren Fundamentalsignale können mit diesem Ansatz als Störung dieses LSOP angesehen werden. Diese weiteren *Kleinsignale* bei unabhängigen Frequenzen erzeugen das gesamte Ausgangsspektrum inkl. IM-Produkte, das über die mehrdimensionale Fourier-Reihe beschrieben werden muss. Die X-Parameter der zugehörigen Modellgleichung (8.17) werden durch eine Taylor-Reihenentwicklung höherer Ordnung der zugehörigen mehrdimensionalen BF  $F_{m[k_1, \dots, k_L]}$  in diesem LSOP aus (8.13) gewonnen. Dabei kommt erneut die MIT-Notation aus (6.9) in angepasster Form zum Einsatz. Diese X-Parameter sind wie ihre Pendanten aus den Kapiteln 4 und 6 nur von einem Großsignalbetrag abhängig. Durch diese komplett andere Sichtweise auf den Entwicklungspunkt der mehrdimensionalen BF ist eine Interpretation der X-Parameter als Empfindlichkeitsfunktionen auf unabhängige Störsignale im Sinne der elektromagnetische Verträglichkeit (EMV) möglich.

Anhand eines *Single-Balanced*-Mischers, der mit dem neuen Ansatz auch als Operationsverstärker mit Störung am *Bias*-Netzwerk angesehen werden kann, wurden beide Ansätze beispielhaft in Abschnitt 8.3 über eine Zwei- und Dreitonanregung miteinander verglichen. Es wurde gezeigt, wie die X-Parameter aus der Literatur mit den neu eingeführten X-Parametern in MIT-Notation angenähert werden können. Dabei wurde gezeigt, dass die neuen X-Parameter des MIT-Ansatzes über einen großen Bereich ( $A_{1[1,0]} \approx 4A_{2[0,1]}$ ) eine sehr gute Näherung darstellen. Dabei kommt der Ansatz mit einer geringeren Anzahl an Modellparametern aus.

## 9. Zusammenfassung und Ausblick

Die Streuparameter sind seit über 50 Jahren ein weit verbreitetes Hilfsmittel zur Analyse und zum Entwurf von HF-Übertragungssystemen. Ihre gute Messbarkeit bei hohen Frequenzen erlaubt es z. B. Verhaltensmodelle inklusive parasitärer Elemente von HF-Bauelementen zu erstellen. Die Leistungsverwandtheit und der Bezug auf eine charakteristische Impedanz erlauben zusätzlich einen Einsatz zur Dimensionierung von Anpassnetzwerken zur optimalen Leistungsübertragung [47, 48, 102, 118, 134]. Die S-Parameter sind mathematisch gesehen Lineartransformationen von anderen linearen  $N$ -Torparametern wie z. B. den Impedanzparametern ( $Z$ -Parameter), die auf Strömen und Spannungen basieren. Daher ist die Gültigkeit der S-Parameter auf lineare oder linearisierte Systeme beschränkt. Sobald in nichtlinearen Systemen eine zu große Anregung vorliegt, sind die S-Parameter nicht ohne Fehler anwendbar. Wie die Einleitung dieser Arbeit in einem kurzen Überblick des Stands der Technik zeigte, wurden bereits vor einigen Jahrzehnten Ansätze [26, 77, 83] eingeführt, die eine Überführung der S-Parametervorteile wie z. B. die Messbarkeit bei hohen Frequenzen auf nichtlineare Systeme erlauben. Probleme bei der Stabilität des Arbeitspunktes im Messverfahren und eine Beschränkung auf eine Quasilinearisierung verhinderten den Durchbruch dieser Großsignal-S-Parameter.

Die voranschreitende Technik erforderte immer mehr effiziente, stark nichtlineare Schaltungstopologien. Für deren Entwurf und Einbettung in ein Gesamtsystem sind messtechnisch generierte Verhaltensmodelle erforderlich. Daher wurden Mitte der 1990er Jahre verschiedene messtechnische Ansätze unternommen (vgl. [141]), um die leicht kalibrierbaren Vektornetzwerkanalysatoren (VNA) für nichtlineare Systeme zu erweitern, was zur kommerziellen Verfügbarkeit von vektoriellen nichtlinearen Netzwerkanalysatoren VNNA [112] geführt hat. Als theoretische Erweiterung des S-Parameterkonzepts wurden zusätzlich vom Messtechnikhersteller *Agilent* - Auslagerung der Messtechniksparte in 2014 als *Keysight Technologies* - die sog. *X-Parameter* [116] eingeführt und auch in zugehörigen Simulationstools kommerziell zur Verfügung gestellt [61, 62].

Trotz beinahe 15 Jahren Forschungszeit von der ersten Idee [142] bis hin zur marktreifen Technologie [115] existiert relativ wenig Fachliteratur zu dem Thema X-Parameter. Noch geringer ist die Anzahl, wenn die Veröffentlichungen der Erfinder, die in dem kurzen Übersichtsbuch von Root u. a. [117] gesammelt sind, abgezogen werden. So ist zum einen der Zusammenhang zur zugrunde liegenden Beschreibungsfunktion (BF) nur kurz in den ersten Arbeiten [140, 142, 143, 149] angedeutet, wurde aber nie richtig herausgearbeitet. Zum anderen ist der Zusammenhang zu anderen Frequenzbereichsmodellansätzen, wie z. B. der Volterra-Reihe [9, 124, 156], nur rudimentär in [112, 117, 142] angedeutet. Daher war es das Anliegen dieser Arbeit, einen tiefgreifenden Einblick in die Theorie der X-Parameter zu gewähren, diese so zugänglicher zu machen und dadurch eine gezielte Anpassung bzw. Erweiterung zu ermöglichen. Messtechnische Verfahren werden dabei nur prinzipiell am Rande behandelt.

Dazu wurden zunächst in Kapitel 2 die linearen S-Parameter kurz eingeführt, um die Besonderheiten dieser gegenüber anderen Zwei- bzw.  $N$ -Torparametern zu verdeutlichen. Darauf folgend wurde in Kapitel 3 mit der Volterra-Reihe ein weit verbreiteter Ansatz zur Berücksichtigung nichtlinearer Effekte betrachtet, auf deren Basis Weiner und Naditch [157] einen Ansatz vorstellten, nichtlineare Zweitore mit Streuvariablen zu beschreiben. In Abschnitt 3.1 wurden kurz die wesentlichen Schritte in der Bestimmung der Volterra-Reihe, insbesondere die Berechnung der nichtlinearen Übertragungsfunktionen  $H_d(\omega_1, \dots, \omega_2)$ , gezeigt.

Anschließend wurden in Abschnitt 3.2 die wichtigsten Gleichungen aus [157] zusammengefasst und für den im darauffolgenden wichtigen Fall der *polyharmonischen* Anregung nachvollzogen. Dabei wurde verdeutlicht, dass die Volterra-reihenbasierten S-Parameter am sinnvollsten für die Betriebssituation  $Z_s = Z_{0,s}$  und  $Z_L = Z_{0,L}$  eingesetzt werden, da in diesem Fall in (3.26b) nur ein nichtlinearer S-Parameter pro Ordnung  $d$  und Tor  $m$  benötigt wird. Diese Bedingung entspricht der Bestimmung der ursprünglichen Großsignal-S-Parameter  $S_{11}(A_1)$  und  $S_{21}(A_1)$  [26, 83]. Eine Bestimmung der weiteren S-Parameter  $S_{12}(A_1)$  und  $S_{22}(A_1)$  war in diesen Arbeiten als problematisch eingestuft worden. In der Betrachtung mit der Volterra-Reihe ist eine Anwendung des Superpositionsprinzips wie bei den linearen S-Parametern

genauso fehlerhaft. Eine zusätzliche zweite Signalquelle am Tor 2 ist ebenfalls nicht möglich, da dann die Definition der Übertragungsfunktionen auf die Torspannungen, wie in (3.13) nötig, nicht mehr möglich ist.

Weiterführend wurde in Kapitel 4 ein kurzer Überblick über den mathematischen Hintergrund der X-Parameter gegeben, die sich in den letzten Jahren als kommerziell verfügbare Erweiterung der S-Parameter für stark nichtlineare  $N$ -Tore etablierten. Die X-Parameter basieren auf der mehrdimensionalen BF. In der zugrunde liegenden Literatur [114, 139, 140, 142–150] wird allerdings nicht der Zusammenhang zur, aus älterer Literatur bekannten, quasilinearen Einton- und Zweiton-BF (vgl. z. B. [40]) hergestellt. Dies wird daher in Abschnitt 4.1 erstmals getan. Da die mehrdimensionalen BF für mehrere Eingangssignale nicht mehr zu bestimmen sind, wurde mit dem PHD-Ansatz [139] in Abschnitt 4.2 eine Möglichkeit zur Linearisierung der BF betrachtet. Dabei wird ein Signal als sehr groß gegenüber den anderen Signalanteilen angenommen und legt somit den sog. Großsignalarbeitspunkt - englisch: *large signal operating point* (LSOP) fest. Dieser wird durch die X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  beschrieben. Alle weiteren auftretenden Signalanteile werden als kleine Störungen des LSOP betrachtet und durch die X-Parameter  $X_{mk,nl}^{(S)}$  und  $X_{mk,nl}^{(T)}$  berücksichtigt. Diese können folglich auch als Empfindlichkeitsfunktionen des  $N$ -Tors auf diese kleine Störung interpretiert werden.

Zusätzlich wurden in Abschnitt 4.3 zwei unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der X-Parameter aus Mess- bzw. Simulationsdaten zusammengefasst, deren Konzepte im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendet und weiterentwickelt wurden. Die so gewonnenen X-Parameter können als Verhaltensmodell gespeichert werden und in System-Level-Simulationen zur Beschleunigung des Entwicklungsprozesses eingesetzt werden.

Den Anhang seiner Dissertation betitelt Verspecht [141] - einer der Erfinder der X-Parameter - mit *Describing Functions Can Better Model Hard Nonlinearities in the Frequency Domain than the Volterra Theory* [142]. Dies wird anhand eines wenig differenzierten Vergleichs unterschiedlicher Approximationen der mehrdimensionalen BF geschlussfolgert. Zur vertiefenden Betrachtung dieser Kernaussage wurden als Fortsetzung von [160] in Kapitel 5 die zuvor betrachteten X-Parameter und Volterra-reihenbasierten S-Parameter hinsichtlich Gemeinsamkeiten und Unterschiede bewertet. Es wurde festgestellt, dass im Falle schwach nichtlinearer Systeme - auf die die Volterra-Reihe beschränkt ist - eine Äquivalenz der beiden Ansätze erreicht werden könnte, sofern die Ordnung der Volterra-Reihe ausreichend groß ist.

Die wesentliche Annahme des zugrunde liegenden PHD-Ansatzes ist, dass die X-Parameter nur vom Betrag eines Großsignals  $|A_{11}|$  abhängen und alle zusätzlichen Signalanteile bei ganzzahligen Vielfachen der Fundamentalfrequenz  $\omega_0$  viel kleiner sind, d. h.  $|A_{nl}| \ll |A_{11}|$ . Abgeleitet aus einer allgemeinen spektralen Beschreibungsfunktion  $F_{mk}$  können die X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  das stark nichtlineare Verhalten infolge der Großsignalanregung - den LSOP - abbilden. Die Störung des LSOP wird über die X-Parameter  $X_{mk,nl}^{(S)}$  bzw.  $X_{mk,nl}^{(T)}$  linear in den weiteren Signalen  $|A_{nl}|$  berücksichtigt. Hier liegt der wesentliche Unterschied und größte Vorteil gegenüber der Volterra-Reihe, die den Gleichstromarbeitspunkt - englisch: *direct current operating point* (DCOP) als Entwicklungspunkt hat und mit Reihengliedern höherer Ordnung die Störung des linearisierten Systems infolge des schwach nichtlinearen Verhaltens beschreibt. Aus der mathematischen Äquivalenz im Kleinsignalfall wurde in Abschnitt 5.1 festgestellt, dass sich die X-Parameter  $X_{mk}^{(F)}$  als komplexe, in  $|A_{11}|$  polynomielle Funktionen approximieren lassen. Damit das stark nichtlineare Verhalten des LSOP mit der Volterra-Reihe wie mit den X-Parametern abgebildet werden könnte, müssten - Konvergenz der Reihe vorausgesetzt - unendlich viele Reihenglieder hinzugezogen werden.

Für größer werdende  $|A_{nl}| \ll |A_{11}|$  sind die X-Parameter aufgrund der linearen  $|A_{nl}|$  nicht mehr in der Lage das Systemverhalten abzubilden, wohingegen die Volterra-reihenbasierten S-Parameter durch Terme höherer Ordnung von  $|A_{nl}|$  dazu in der Lage sind. Voraussetzung dafür ist allerdings, dass das System schwach nichtlineares Verhalten aufweist. Es kann zwar eine Situation  $|A_{1l}| \approx |A_{11}|$  abgebildet werden, allerdings nur für kleinere Werte  $|A_{11}|$  als bei den X-Parametern.

Aus dieser Erkenntnis ließen sich die X-Parameter gezielt erweitern, was in Kapitel 6 unter dem Oberbegriff X-Parameter höherer Ordnung durchgeführt wurde. Dazu wurden zunächst in Abschnitt 6.1 zwei Ansätze [15, 16] genauer betrachtet, die über die Linearisierung der mehrdimensionalen BF hinausgehen und quadratische Terme hinzufügen. So wird der Gültigkeitsbereich des zugehörigen X-Parametermodells erweitert. Dabei wurden die zusätzlichen Kleinsignale  $\hat{A}_{nl}$  wie im PHD-Ansatz unabhängig voneinander betrachtet. Dadurch lassen sich nichtlineare Effekte wie z. B. die *desensitization* - vgl. z. B.  $H_3(\omega_0, l\omega_0, -l\omega_0)$

[9] - berücksichtigen. Der quadratischen Erweiterung aus [15, 16] fehlt es an einer mathematischen Legitimation. Denn durch die Beibehaltung des Überlagerungsgedankens aus dem PHD-Ansatz wurden Mischterme der Kleinsignale, wie sie durch die Taylor-Reihe höherer Ordnung der eigentlichen spektralen Beschreibungsfunktion  $F_{mk}(|A_{11}|, \tilde{A}_{12}, \tilde{A}_{12}^*, \dots, \tilde{A}_{nl}, \tilde{A}_{nl}^*, \dots)$  entstehen, nicht berücksichtigt. Dazu zählen z. B. Terme zweiter Ordnung  $S_{m,1^2}(3\omega_0, -2\omega_0)$ , wie sie in der Volterra-Reihenbetrachtung aus Kapitel 5 beschrieben sind. Dieser einschränkende Mangel wurde im Abschnitt 6.2 mit Einführung der X-Parameter auf Basis einer Multi-Index-Taylor-Reihe (MIT) aufgehoben. Die neu eingeführten Terme werden insbesondere dann wichtig, wenn die vermeintlichen *Kleinsignale*  $A_{nl}$  ähnlich groß werden wie das Großsignal  $A_{11}$ , das den Entwicklungspunkt LSOP der MIT festlegt. Ein beispielhafter Vergleich der verschiedenen Ansätze 2. Ordnung in Abschnitt 6.4 wurde anhand eines Klasse-C-Verstärkers für eine Dreitonanregung am Eingangstor durchgeführt. Dabei wurde deutlich, dass mit steigender Amplitude der zusätzlichen Signale  $A_{nl}$  eine Erhöhung der Modellkomplexität sinnvoll ist. Die Ansätze RP und QPHD aus der Literatur [15, 16] sind zwar in der Lage den Gültigkeitsbereich gegenüber den linearen X-Parametern des PHD-Ansatzes zu verbessern, allerdings fällt diese Ausweitung deutlich kleiner aus als die des in dieser Arbeit neu eingeführten MIT-Ansatzes. Jede Erhöhung der Modellordnung zieht eine größere Modellkomplexität nach sich, wie in Abschnitt 6.5 gezeigt wurde. Daher sollte für jede Anwendung zwischen geringer Komplexität und größerem Gültigkeitsbereich abgewogen werden. Sobald die weiteren Signale  $A_{nl}$  nicht mehr als Kleinsignale angesehen werden können, sollten weitere Modellparameter hinzugefügt werden.

Dass sich dennoch Situationen ergeben in denen eine Ordnungserhöhung sinnvoll ist, zeigte die Betrachtung in Kapitel 7. Dort wurden verschiedene Ansätze zur Verwendung der X-Parameter bei beliebigen Lastsituationen anhand zweier Beispielsystemen mit den in Kapitel 4 eingeführten X-Parametern verglichen. Letztere wurden in Kapitel 7 als *angepasste* X-Parameter bezeichnet, da sie in einer Messumgebung bestimmt werden, die mit der charakteristischen Impedanz  $Z_0$  abgeschlossen ist. Die Empfindlichkeitsfunktionen  $X_{mk,nl}^{(S)}$  und  $X_{mk,nl}^{(T)}$  repräsentieren eine leichte Störung dieses *angepassten* Systemzustands. Bevor lastabhängige X-Parameteransätze eingeführt wurden, wurde zunächst diskutiert inwiefern die Begriffe *Anpassung* bzw. *Fehlanspassung* und *Lastimpedanz* für nichtlineare Systeme verwendet werden können. Es wurde angemerkt, dass eine Definition dieser Begriffe höchstens dann sinnvoll ist, wenn das nichtlineare System *polyharmonisch* angeregt wird. So kann die Lastimpedanz jeder auftretenden Harmonischen über das Verhältnis  $Z_L(jk\omega_0) = \frac{U_2(jk\omega_0)}{I_2(jk\omega_0)}$  und daraus ein Reflexionsfaktor  $\Gamma_{2k} = \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{Z_{Lk} - Z_0}{Z_{Lk} + Z_0}$  bei der  $k$ -ten Harmonischen definiert werden [34, 41].

Anschließend wurden die verschiedenen Ansätze einzeln betrachtet und festgestellt, welche Veränderungen im Vergleich zu den angepassten X-Parametern vorzunehmen sind. Als erstes wurden die *Load-pull*-X-Parameter von Root u. a. [117] gezeigt. Diese sind äquivalent zu den angepassten X-Parametern, nur das der LSOP nicht dem Zentrum des Smith-Charts entspricht, sondern zu einer beliebigen, über den Load-pull-Tuner eingestellten Lastsituation gehört. Die Bestimmung der Load-pull-X-Parameter erfolgt dabei wie im angepassten Fall und die Entwicklungsordnung (vgl. Abschnitt 6) kann ebenfalls erhöht werden. Allerdings ist dies nicht sinnvoll, da bereits für die linearen Load-pull-X-Parameter bei einer hohen Anzahl an Lastsituationen sehr viele Load-pull-X-Parameter berechnet und gespeichert werden müssen.

Daher wurden weitere Ansätze der Arbeitsgruppe um Cai und Brazil [13, 16, 17, 19, 20] betrachtet, in denen eine Modellordnungsreduktion vorgenommen wurde. Im MQPHD-Ansatz [16] wird der angepasste quadratische X-Parametersatz mit Hilfe eines Skalierungsfaktors  $\alpha_{mk,nl}(|A_{11}|, \Gamma_L)$  an die jeweilige Lastsituation angepasst. Als weiterer Ansatz, der sowohl die Modellordnung als auch den Berechnungsaufwand senkt, wurde der PLSOC-Ansatz [17, 19, 20] betrachtet. Hier werden die X-Parameter anstatt für jede Lastsituation für die Menge der Lastsituationen mit  $|\Gamma_L| = \text{konst.}$  berechnet. Als konsequente Weiterentwicklung des PLSOC-Ansatzes wurde der *lastoptimierte* X-Parameteransatz [13] verstanden. Hier werden die mittels der *zufälligen* Phasen-Offset-Methode über die gesamte Lastebene gewonnenen Messdaten als Grundlage für die Berechnung verwendet, sodass wie im angepassten Fall nur ein X-Parametersatz pro Großsignalwert  $|A_{11}|$  berechnet wird. Im ersten Beispiel - einem LNA, in dem nur die Fundamentalfrequenzen betrachtet wurden - erwies sich der lastoptimierte QPHD-Ansatz aus [13] als der beste Kompromiss aus Modellparameteranzahl und -genauigkeit. Im zweiten Beispiel des Klasse-C-Verstärkers wurde der in dieser Arbeit eingeführte MIT-Ansatz ( $D = 2$ ) im Sinne der Lastoptimierung über die zufällige Phasen-Offset-Methode [13] berechnet. Wie bereits aus der qualitativen Betrachtung aus

Kapitel 6 zu erwarten, konnte durch den MIT-Ansatz die Genauigkeit im Vergleich zum lastoptimierten QPHD-Ansatz deutlich verbessert werden. Dabei konnte gegenüber den Load-pull-X-Parametern eine Modellordnungsreduktion erreicht werden. Die Größenordnung der Reduktion ist dabei stark von der Ordnung  $D$  des MIT-Ansatzes und der Menge  $L$  der berücksichtigten zusätzlichen Signale  $\tilde{A}_{nl}$  abhängig.

In Kapitel 8 wurden zwei unterschiedliche Ansätze von X-Parametern für unabhängige Erregerfrequenzen betrachtet und verglichen. Beim ersten handelt es um den in Abschnitt 8.1 vorgestellten, aus der Literatur bekannten Ansatz von Xie, Zhang und Liu [166] (ausführlicher in [117]) mit zwei - oder mehr - Großsignalen bei unabhängigen Fundamentalfrequenzen  $\omega_i \neq l\omega_j$  mit  $l \in \mathbb{N}$  und  $\omega_i > \omega_j$ . Abgesehen von der daraus resultierenden Mehrdimensionalität der Fourier-Reihe ist der zweite Unterschied zu den X-Parametern des PHD-Ansatzes aus Abschnitt 4, dass die X-Parameter von den Beträgen der fundamentalen Großsignale abhängen. Mit diesem Ansatz ist eine Modellierung von Systemen mit erwünschten unabhängigen Fundamentalsignalen, wie z. B. den Frequenzmischern, möglich.

Auf Basis der Erkenntnisse der vorherigen Kapitel dieser Arbeit wurde in Abschnitt 8.2 ein zweiter Ansatz vorgestellt, der eine völlig andere Sichtweise auf die X-Parametermodellierung mit unabhängigen Erregerfrequenzen erlaubt. Die Beschreibungsfunktionen werden darin nicht in einem LSOP entwickelt, an dem bei allen Fundamentalfrequenzen ein Großsignal vorliegt. Stattdessen wurde von einem einzigen Großsignal ausgegangen, dessen LSOP wie im *polyharmonischen* Fall aus Kapitel 4 nur HD-Anteile im Spektrum aufweist. Die weiteren Fundamentalsignale können mit diesem neuen Ansatz als Störung dieses LSOP angesehen werden. Diese weiteren *Kleinsignale* bei unabhängigen Frequenzen erzeugen das gesamte Ausgangsspektrum inkl. IM-Produkte, das über die mehrdimensionale Fourier-Reihe beschrieben werden muss. Die X-Parameter werden durch eine Taylor-Reihenentwicklung höherer Ordnung der zugehörigen mehrdimensionalen Beschreibungsfunktion  $F_{m[k_1, \dots, k_L]}$  in dem LSOP gewonnen. Dabei kommt erneut die MIT-Notation aus Abschnitt 6.2 in angepasster Form zum Einsatz. Diese X-Parameter sind wie ihre Pendanten aus den Kapiteln 4 und 6 nur von einem Großsignalbetrag abhängig. Durch diese komplett andere Sichtweise auf den Entwicklungspunkt der spektralen Beschreibungsfunktionen ist eine Interpretation der X-Parameter als Empfindlichkeitsfunktionen auf unabhängige Störsignale im Sinne der EMV möglich.

Anhand eines *Single-Balanced*-Mischers, der mit dem neuen Ansatz auch als Operationsverstärker mit Störung am *Bias*-Netzwerk angesehen werden kann, wurden beide Ansätze beispielhaft in Abschnitt 8.3 über eine Zwei- und Dreitonanregung miteinander verglichen. Es wurde gezeigt, wie die X-Parameter aus der Literatur mit den neu eingeführten X-Parametern in MIT-Notation angenähert werden können. Dabei wurde deutlich, dass die neuen X-Parameter des MIT-Ansatzes über einen großen Bereich eine sehr gute Näherung darstellen. Dabei kommt der Ansatz mit einer geringeren Anzahl an Modellparametern aus als der Ansatz von Xie, Zhang und Liu [166].

Zukünftige Arbeiten, die die Ergebnisse dieser Arbeit aufgreifen, könnten sich genauer mit einer Verkettung auf Systemebene der erweiterten X-Parametermodelle beschäftigen. Des Weiteren könnte ein Einsatz der verbesserten X-Parameteransätze als Entwurfswerkzeug in Zusammenhang mit den analytischen Ansätzen [33, 92–94, 96–98] von Interesse sein.

# A. Streuvariablen in nichtlinearen $N$ -Toren

Die Streuvariablen sind aus den Torspannungen und -strömen über die Heaviside-Variablentransformation im Zeitbereich gegeben durch

$$a_n(t) = \frac{u_n(t) + Z_0 i_n(t)}{2\sqrt{Z_0}}, \quad (\text{A.1a})$$

$$b_n(t) = \frac{u_n(t) - Z_0 i_n(t)}{2\sqrt{Z_0}}. \quad (\text{A.1b})$$

## A.1. Polyharmonische Anregung

Bei einer *polyharmonischen*  $L$ -Tonanregung am Tor  $n$  (vgl. Abbildung 4.3) der Art

$$u_{s_n}(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-L_n}^{L_n} U_{s_{nl}} e^{jl\omega_0 t} \quad \text{mit } n \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (\text{A.2})$$

ergeben sich unter der Annahme, dass das nichtlineare System keine Subharmonischen erzeugt, die Torgrößen in ihren komplexen Fourierreihendarstellung (vgl. z. B. [74])

$$u_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_{nl} e^{jl\omega_0 t}, \quad (\text{A.3a})$$

$$i_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_{nl} e^{jl\omega_0 t}, \quad (\text{A.3b})$$

worin  $U_{nl}, I_{nl} \in \mathbb{C}$  die komplexen Fourier-Koeffizienten bei der  $l$ -ten Harmonischen der Torspannungen  $u_n$  bzw. der -ströme  $i_n$  sind. Für reelle Signale gilt dabei für die Fourier-Koeffizienten

$$U_{n(-l)} = U_{nl}^*, \quad (\text{A.4a})$$

$$I_{n(-l)} = I_{nl}^*, \quad (\text{A.4b})$$

$$U_{s_n(-l)} = U_{s_{nl}}^*. \quad (\text{A.4c})$$

In der gesamten Arbeit wird angenommen, dass  $N \leq 10$  ist. Anderenfalls müsste in der Indizierung der komplexen Fourier-Koeffizienten  $U_{nl}$  ein Komma  $U_{n,l}$  ergänzt werden, um z. B. für  $U_{111}$  eine Unterscheidung der Fundamentalen am 11. Tor  $U_{11,1}$  von der 11. Harmonischen am 1. Tor  $U_{1,11}$  zu ermöglichen. Der Einfachheit halber wird auf das Komma in der Indizierung verzichtet und sich in Beispielen auf niedrige Harmonische beschränkt, sodass es keine Fälle mit drei Indizes  $U_{111}$  gibt. Des Weiteren wird in der gesamten Arbeit angenommen, dass die Quellensignale keine Gleichanteile besitzen und daher ist

$$\bar{U}_{s_{n0}} = 0. \quad (\text{A.4d})$$

Da es sich bei der Heaviside- und Fourier-Transformation jeweils um lineare Operationen handelt, ergibt sich mit [125]

$$\frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l e^{jl\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l \delta(\omega - l\omega_0) \quad (\text{A.5})$$

aus (A.1) und (A.3) für die Streuvariablen im Frequenzbereich

$$a_n(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ \rightarrow \bullet} A_n(\omega) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{U_{nl} + Z_0 I_{nl}}{2\sqrt{Z_0}} \delta(\omega - l\omega_0), \quad (\text{A.6a})$$

$$b_n(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ \rightarrow \bullet} B_n(\omega) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{U_{nl} - Z_0 I_{nl}}{2\sqrt{Z_0}} \delta(\omega - l\omega_0). \quad (\text{A.6b})$$

Aufgrund der Eigenschaften der Diracfunktion  $\delta(\omega)$  können die komplexen Fourier-Koeffizienten der Streuvariablen für jeden Frequenzanteil über die Heaviside-Transformation der Fourier-Koeffizienten der Torspannungen und -ströme separat berechnet werden, ohne das Zeitsignal der Streuvariablen  $a_n(t)$  bzw.  $b_n(t)$  integrieren zu müssen, d.h. es gilt mit der fundamentalen Periodendauer  $T_0$

$$A_{nl} = \frac{U_{nl} + Z_0 I_{nl}}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} a_n(t) e^{jl\omega_0 t} dt, \quad (\text{A.7a})$$

$$B_{nl} = \frac{U_{nl} - Z_0 I_{nl}}{2\sqrt{Z_0}} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} b_n(t) e^{jl\omega_0 t} dt. \quad (\text{A.7b})$$

Im Fall angepasster Torquellen, d. h.  $Z_{s_n} = Z_0$ , ergibt sich aus (A.1a) über  $u_n = u_{s_n}(t) - Z_0 i_n(t)$  für die *einlaufende* Streuvariable

$$a_n(t) = \frac{u_{s_n}(t)}{2\sqrt{Z_0}} \overset{\mathcal{F}}{\circ \rightarrow \bullet} A_n(\omega) = \pi \sum_{l=-L_n}^{L_n} \frac{U_{s_n l}}{\sqrt{Z_0}} \delta(\omega - l\omega_0) \quad (\text{A.8})$$

bzw. wie in (A.7) jeder Fourier-Koeffizient direkt aus den Fourier-Koeffizienten der Quellenspannung  $U_{s_n l}$

$$A_{nl} = \frac{U_{s_n l}}{2\sqrt{Z_0}}. \quad (\text{A.9})$$

## A.2. Unabhängige Erregerfrequenzen

### A.2.1. Zweitonanregung

Als unabhängige Frequenzen werden solche Frequenzen angesehen, für die

$$\omega_2 = \gamma \omega_1 \quad \text{mit } \gamma \in \mathbb{R}^+, \gamma \notin \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\gamma} \notin \mathbb{N} \quad (\text{A.10})$$

gilt. Für eine Anregung am Tor  $n$  mit den beiden Fundamentalfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  der Art

$$u_{s_n}(t) = \frac{1}{2} (U_{s_n[1,0]} e^{j\omega_1 t} + U_{s_n[-1,0]} e^{-j\omega_1 t} + U_{s_n[0,1]} e^{j\omega_2 t} + U_{s_n[0,-1]} e^{-j\omega_2 t}) \quad (\text{A.11})$$

lassen sich - unter Ausschluss von Subharmonischen der Fundamentalfrequenzen - alle Torspannungen und -ströme durch die zweidimensionale komplexen Fourier-Reihen [86]

$$i_n(t) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} I_{n[l_1, l_2]} e^{j(l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2) t} \quad n \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{A.12a})$$

und

$$u_n(t) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} U_{n[l_1, l_2]} e^{j(l_1 \omega_1 + l_2 \omega_2) t} \quad n \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{A.12b})$$

darstellen. Für reelle Signale muss für die komplexen Fourier-Koeffizienten gelten

$$U_{s_n[-1,0]} = U_{s_n[1,0]}^*, \quad (\text{A.13a})$$

$$U_{s_n[0,-1]} = U_{s_n[0,1]}^*, \quad (\text{A.13b})$$

$$U_{n[-l_1,-l_2]} = U_{n[l_1,l_2]}^*, \quad (\text{A.13c})$$

$$I_{n[-l_1,-l_2]} = I_{n[l_1,l_2]}^*. \quad (\text{A.13d})$$

$$(\text{A.13e})$$

Die komplexen Fourier-Koeffizienten  $I_{n[l_1,l_2]}$  und  $U_{n[l_1,l_2]}$  repräsentieren jeweils das durch die Zweitonanregung in (A.11) erzeugte Mischprodukt bei der Kreisfrequenz

$$\omega_b = l_1\omega_1 + l_2\omega_2 \quad \text{mit } l_1, l_2 \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.14})$$

Mit der Anwendung der *Heaviside-Transformation* aus (A.1) folgt analog zu (A.6)ff. mit (A.12) für die Streuvariablen im Frequenzbereich

$$b_n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} B_n(\omega) = \pi \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} \frac{U_{n[l_1,l_2]} - Z_0 I_{n[l_1,l_2]}}{2\sqrt{Z_0}} \delta(\omega - l_1\omega_1 - l_2\omega_2). \quad (\text{A.15a})$$

Aufgrund der Eigenschaften der Diracfunktion  $\delta(\omega)$  können die komplexen Fourier-Koeffizienten der Streuvariablen separat berechnet werden

$$A_{n[l_1,l_2]} = \frac{U_{n[l_1,l_2]} + Z_0 I_{n[l_1,l_2]}}{2\sqrt{Z_0}}, \quad (\text{A.16a})$$

$$B_{n[l_1,l_2]} = \frac{U_{n[l_1,l_2]} - Z_0 I_{n[l_1,l_2]}}{2\sqrt{Z_0}}. \quad (\text{A.16b})$$

Im Fall angepasster Torquellen, d. h.  $Z_{s_n} = Z_0$ , ergibt sich aus (A.1a) über  $u_n = u_{s_n}(t) - Z_0 i_n(t)$  für die *einlaufende* Streuvariable äquivalent zu (A.9) zu

$$A_{n[l_1,l_2]} = \frac{U_{s_n[l_1,l_2]}}{2\sqrt{Z_0}}. \quad (\text{A.17})$$

### A.2.2. $L$ -Tonganregung

Für  $L$  unabhängige Fundamentalfrequenzen  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L) \in \mathbb{R}^L$  ergibt sich äquivalent zur Zweitonanregung mit dem Indexvektor  $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \dots, l_L) \in \mathbb{Z}^L$  und dem Skalarprodukt  $\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = l_1\omega_1 + \dots + l_L\omega_L$  die  $L$ -dimensionale Fourier-Reihe (vgl. [86] für  $L \leq 3$ )

$$i_n(t) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_L=-\infty}^{\infty} I_{nl} e^{j\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{\omega} t} \quad n \in \{1, \dots, N\} \quad (\text{A.18a})$$

und

$$u_n(t) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l_L=-\infty}^{\infty} U_{nl} e^{j\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{\omega} t} \quad n \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{A.18b})$$

Daraus folgt wie zuvor für die Zweitonanregung in (A.16)

$$A_{nl} = \frac{U_{nl} + Z_0 I_{nl}}{2\sqrt{Z_0}}, \quad (\text{A.19a})$$

$$B_{nl} = \frac{U_{nl} - Z_0 I_{nl}}{2\sqrt{Z_0}}. \quad (\text{A.19b})$$



# Literatur

- [1] F. L. Bauer. „Die Betriebskettenmatrix von Vierpolen“. *Archiv der elektrischen Übertragung* 9 (1955), S. 559–560.
- [2] V. Belevitch. „Transmission Losses in 2n-Terminal Networks“. *Journal of Applied Physics* 19 7 (1948), S. 636–638. DOI: 10.1063/1.1698183. eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1698183>. URL: <https://doi.org/10.1063/1.1698183>.
- [3] V. Belevitch. „Elementary Applications of the Scattering Formalism in Network Design“. *Circuit Theory, IRE Transactions on* 3 2 (Juni 1956), S. 97–104. ISSN: 0096-2007. DOI: 10.1109/TCT.1956.1086305.
- [4] V. Belevitch. „Four-Dimensional Transformations of 4-Pole Matrices with Applications to the Synthesis of Reactance 4-Poles“. *Circuit Theory, IRE Transactions on* 3 2 (Juni 1956), S. 105–111. ISSN: 0096-2007. DOI: 10.1109/TCT.1956.1086306.
- [5] Z. Bonenn. „The circle criterion and describing function analysis“. *IEEE Transactions on Automatic Control* 13 5 (Okt. 1968), S. 588–589. ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.1968.1099010.
- [6] S. Boyd und L. Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9780521833783.
- [7] T. Bröcker. *Analysis II*. Mannheim u.a: BI-Wiss.-Verl, 1992. ISBN: 978-3411156917.
- [8] R. W. Brockett. „Volterra Series and Geometric Control Theory“. *Automatica* 12 2 (März 1976), S. 167–176. ISSN: 0005-1098. DOI: 10.1016/0005-1098(76)90080-7. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098\(76\)90080-7](http://dx.doi.org/10.1016/0005-1098(76)90080-7).
- [9] J. J. Bussgang, E. Leonard und J. W. Graham. „Analysis of Nonlinear Systems with Multiple Inputs“. *Proceedings of the IEEE* (1974). URL: [http://www.ece.ucsb.edu/Faculty/rodwell/Classes/ece218c/tutorials\\_etc/PA\\_workshop\\_instruction.pdf](http://www.ece.ucsb.edu/Faculty/rodwell/Classes/ece218c/tutorials_etc/PA_workshop_instruction.pdf).
- [10] H.-J. Butterweck. „Frequenzabhängige nichtlineare Übertragungssysteme“. *Archiv der elektrischen Übertragung* 21 5 (1967), S. 239–254.
- [11] Cadence. *SpectreRF Workshop Power Amplifier Design Using SpectreRF*. MMSIM6.0USR2. 6. Aufl. 2005. URL: [http://www.ece.ucsb.edu/Faculty/rodwell/Classes/ece218c/tutorials\\_etc/PA\\_workshop\\_instruction.pdf](http://www.ece.ucsb.edu/Faculty/rodwell/Classes/ece218c/tutorials_etc/PA_workshop_instruction.pdf).
- [12] J. Cai und T. J. Brazil. „X-parameter-based frequency doubler design“. *Microwave Integrated Circuits Conference (EuMIC), 2012 7th European*. Okt. 2012, S. 794–797.
- [13] J. Cai und C. Yu. „A new extraction method of nonlinear behavioral model for RF power transistor“. *2015 Asia-Pacific Microwave Conference (APMC), 06 Dec - 09 Dec 2015, Nanjing, China*. 2. Dez. 2015, S. 1–3. DOI: 10.1109/APMC.2015.7413226.
- [14] J. Cai und T. Brazil. „Compact behavioral description for generalized loads using a modified DC X-parameter model“. *Wireless Symposium (IWS), 2013 IEEE International*. Apr. 2013, S. 1–4. DOI: 10.1109/IEEE-IWS.2013.6616769.
- [15] J. Cai und T. Brazil. „Reduced-Complexity Polynomial Based Nonlinear Behavioral Modeling“. *Microwave and Wireless Components Letters, IEEE* 24 7 (Juli 2014), S. 496–498. ISSN: 1531-1309. DOI: 10.1109/LMWC.2014.2316252.
- [16] J. Cai, J. B. King und T. J. Brazil. „An improved quadratic poly-harmonic distortion behavioral model“. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies* 7 (6 28. Aug. 2014), S. 605–613. ISSN: 1759-0795. DOI: 10.1017/s1759078714001159. URL: [http://journals.cambridge.org/article\\_S1759078714001159](http://journals.cambridge.org/article_S1759078714001159).

- [17] J. Cai, Y. Wang und T. J. Brazil. „Padé behavioral model dependent on load reflection magnitude“. *2014 IEEE MTT-S International Microwave Symposium (IMS2014)*. Juni 2014, S. 1–3. DOI: 10.1109/MWSYM.2014.6848437.
- [18] J. Cai u. a. „Padé-Approximation-Based Behavioral Modeling“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* (2013).
- [19] J. Cai u. a. „ $|\Gamma_L|$ -dependent polynomial behavioral model for RF power transistors“. *2015 IEEE MTT-S International Microwave Symposium*. Mai 2015, S. 1–3. DOI: 10.1109/MWSYM.2015.7166946.
- [20] J. Cai u. a. „Nonlinear Behavioral Modeling Dependent on Load Reflection Coefficient Magnitude“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **63** 5 (Mai 2015), S. 1518–1529. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.2015.2416232.
- [21] J. B. Call. „Large-signal characterization and modeling of nonlinear devices using scattering parameters“. Masterarbeit. Virginia Tech, 31. Okt. 2002. URL: <https://vtechworks.lib.vt.edu/handle/10919/35548>.
- [22] G. A. Campbell und R. M. Foster. „Maximum Output Networks for Telephone Substation and Repeater Circuits“. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* **XXXIX** 1 (Jan. 1920), S. 231–290. ISSN: 0096-3860. DOI: 10.1109/T-AIEE.1920.4764962.
- [23] H. J. Carlin und A. B. Giordano. *Network Theory. An Introduction to Reciprocal and Non-reciprocal Circuits*. Prentice-Hall series in electrical engineering. Englewood Cliffs (N.J.): Prentice-Hall, 1964. URL: <http://opac.inria.fr/record=b1133834>.
- [24] H. Carlin. „The Scattering Matrix in Network Theory“. *Circuit Theory, IRE Transactions on* **3** 2 (Juni 1956), S. 88–97. ISSN: 0096-2007. DOI: 10.1109/TCT.1956.1086297.
- [25] J. Carr. *RF components and circuits*. Oxford Boston: Newnes, 2002. ISBN: 0750648449.
- [26] R. J. Chaffin und W. H. Leighton. „Large-Signal S-Parameter Characterization of UHF Power Transistors“. *Microwave Symposium, 1973 IEEE G-MTT International*. Juni 1973, S. 155–158. DOI: 10.1109/GMTT.1973.1123131.
- [27] L. O. Chua und C. Y. Ng. „Frequency domain analysis of nonlinear systems: general theory“. *Electronic Circuits and Systems, IEE Journal on* **3** 4 (Juli 1979), S. 165–185. ISSN: 0308-6984. DOI: 10.1049/ij-ecs:19790030.
- [28] S. Cripps. *RF power amplifiers for wireless communications*. Boston: Artech House, 2006. ISBN: 978-1-59693-018-6.
- [29] J. M. Cusack, S. M. Perlow und B. S. Perlman. „Automatic Load Contour Mapping for Microwave Power Transistors“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **22** 12 (Dez. 1974), S. 1146–1152. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.1974.1128456.
- [30] W. Dahmen. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008. ISBN: 978-3-540-76492-2.
- [31] X. Dongdong und L. Maoliu. „X-parameter measurement and simulation of an RF amplifier designed to drive a comb-generator“. *Electronic Measurement Instruments (ICEMI), 2011 10th International Conference on*. 1. Aug. 2011, S. 37–39. DOI: 10.1109/ICEMI.2011.6037673.
- [32] R. Elsner. *Nichtlineare Schaltungen : Grundlagen, Berechnungsmethoden, Anwendungen*. Berlin: Springer-Verlag, 1981. ISBN: 3540104771.
- [33] M. Fernandez Barciela u. a. „Stretching the Design: Extending Analytical Circuit Design from the Linear to the Nonlinear Domain“. *IEEE Microwave Magazine* **15** 6 (Sep. 2014), S. 106–120. ISSN: 1527-3342. DOI: 10.1109/MMM.2014.2332851.
- [34] A. Ferrero und M. Pirola. „Harmonic Load-Pull Techniques: An Overview of Modern Systems“. *IEEE Microwave Magazine* **14** 4 (Juni 2013), S. 116–123. ISSN: 1527-3342. DOI: 10.1109/MMM.2013.2248631.
- [35] A. Fettweis. „Scattering properties of real and complex lossless 2-ports“. English. *IEE Proceedings G (Electronic Circuits and Systems)* **128** (4 Aug. 1981), 147–148(1). ISSN: 0143-7089. DOI: 10.1049/ip-g-1.1981.0028.

- [36] B. Fuks. *Theory of Analytic Functions of Several Complex Variables*. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1963, S. 374. URL: <https://books.google.de/books?id=PE6BzR10QqQC>.
- [37] T. Gasseling u. a. „A new characterization technique of "Four hot S parameters" for the study of nonlinear parametric behaviors of microwave devices“. *Microwave Symposium Digest, 2003 IEEE MTT-S International*. **3**. Juni 2003, 1663–1666 vol.3. DOI: 10.1109/MWSYM.2003.1210458.
- [38] T. Gasseling u. a. „Hot small-signal S-parameter measurements of power transistors operating under large-signal conditions in a load-pull environment for the study of nonlinear parametric interactions“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **52** 3 (März 2004), S. 805–812. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.2004.823528.
- [39] C. Geiger und C. Kanzow. *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Berlin u.a.: Springer, 2002. ISBN: 978-3-540-42790-2 (Print) 978-3-642-56004-0 (Online). DOI: 10.1007/978-3-642-56004-0. URL: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-56004-0>.
- [40] A. Gelb und W. E. V. Velde. *Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design*. McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [41] F. M. Ghannouchi und M. S. Hashmi. *Load-Pull Techniques with Applications to Power Amplifier Design*. Dordrecht New York: Springer, 2013. ISBN: 978-94-007-4461-5. DOI: 10.1007/978-94-007-4461-5.
- [42] G. Gonzalez. *Microwave transistor amplifiers: analysis and design*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997. ISBN: 978-0132543354.
- [43] G. Gonzalez. *Foundations of oscillator circuit design*. Boston: Artech House, 2007. ISBN: 978-1596931626.
- [44] D. Graham und D. McRuer. *Analysis of Nonlinear Control Systems*. John Wiley & Sons, Inc., 1961.
- [45] D. B. Gunyan u. a. „Large Signal Scattering Functions From Orthogonal Phase Measurements“. englisch. 7671605. 2010.
- [46] L. He und W. Li. „Applying X-parameter to the design and comparison of 24-GHz fundamental and subharmonic quadrature passive mixers“. *2016 Progress in Electromagnetic Research Symposium (PIERS)*. Aug. 2016, S. 5063–5067. DOI: 10.1109/PIERS.2016.7735835.
- [47] H. Heuermann. *Hochfrequenztechnik : Komponenten für High-Speed- und Hochfrequenzschaltungen*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009. ISBN: 978-3-8348-0769-4.
- [48] Hewlett Packard. *AN 77-1 Transistor parameter measurement. for Faster More Accurate Network Design*. Application Note 95-1. 1967.
- [49] Hewlett Packard. *S-Parameters .... Circuit Analysis and Design*. Application Note 95-1. 1968.
- [50] Hewlett Packard. *S-Parameter Techniques. for Faster More Accurate Network Design*. Application Note 95-1. 1997. URL: <http://literature.cdn.keysight.com/litweb/pdf/5989-9273EN.pdf?id=2458896>.
- [51] L. S. Houselander, H. Y. Chow und R. Spence. „Transistor characterization by effective large-signal two-port parameters“. *IEEE Journal of Solid-State Circuits* **5** 2 (Apr. 1970), S. 77–79. ISSN: 0018-9200. DOI: 10.1109/JSSC.1970.1050076.
- [52] H. F. Hsiao u. a. „Down-converted mixer verification using the measured X-parameter for system engineering designers“. *2013 Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings (APMC)*. Nov. 2013, S. 854–856. DOI: 10.1109/APMC.2013.6694956.
- [53] K. Jänich. *Analysis für Physiker und Ingenieure. Funktionentheorie, Differentialgleichungen, spezielle Funktionen*. Berlin u.a.: Springer, 2001. ISBN: 978-3-540-41985-3.
- [54] J. A. Jargon, K. C. Gupta und D. C. DeGroot. „Nonlinear large-signal scattering parameters: theory and applications“. *ARFTG Conference Digest Spring, 2004. 63rd*. Juni 2004, S. 157–174. DOI: 10.1109/ARFTG.2004.1387873.

- [55] J. A. Jargon u. a. „A Method of Developing Frequency-Domain Models for Nonlinear Circuits Based on Large-Signal Measurements“. *ARFTG Conference Digest-Fall, 58th.* 40. Nov. 2001, S. 1–14. DOI: 10.1109/ARFTG.2001.327484.
- [56] J. A. Jargon u. a. „Calculating ratios of harmonically related, complex signals with application to nonlinear large-signal scattering parameters“. *ARFTG Conference Digest, Fall 2002. 60th.* Dez. 2002, S. 113–122. DOI: 10.1109/ARFTG.2002.1218694.
- [57] W. Kahn. „Scattering Equivalent Circuits for Common Symmetrical Junctions“. *IRE Transactions on Circuit Theory* 3 2 (Juni 1956), S. 121–127. ISSN: 0096-2007. DOI: 10.1109/TCT.1956.1086294.
- [58] Keysight Technologies. *Touchstone<sup>®</sup> File Format Specification*. Techn. Ber. IBIS Open Forum, 2009. URL: [https://ibis.org/touchstone\\_ver2.0/touchstone\\_ver2\\_0.pdf](https://ibis.org/touchstone_ver2.0/touchstone_ver2_0.pdf).
- [59] Keysight Technologies. *S-Parameter Design. Application Note*. 2014. URL: <http://literature.cdn.keysight.com/litweb/pdf/5952-1087.pdf>.
- [60] Keysight Technologies. *The Evolution of RF/Microwave Network Analyzers*. Techn. Ber. 2014. URL: <http://literature.cdn.keysight.com/litweb/pdf/5989-6353EN.pdf>.
- [61] Keysight Technologies. *Advanced Design System (ADS) Documentation*. Keysight Technologies. 2016. URL: [http://edadocs.software.keysight.com/display/engdocads/Advanced+Design+System+2016\\_01+Release+Notes?id=2635612](http://edadocs.software.keysight.com/display/engdocads/Advanced+Design+System+2016_01+Release+Notes?id=2635612).
- [62] Keysight Technologies. *X-Parameters*. 2017. URL: <https://www.keysight.com/main/application.jsp?cc=DE&lc=ger&nid=-34017.0&pageMode=LB>.
- [63] W. Klein. *Mehrrortheorie*. 3. Aufl. Berlin: Akademie Verlag, 1976.
- [64] H. Koepl. „The Composition Rule for Multivariate Volterra Operators and its Application to Circuit Analysis“. *2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. Mai 2007, S. 441–444. DOI: 10.1109/ISCAS.2007.378558.
- [65] K. Königsberger. *Analysis 1*. Berlin: Springer, 2004. ISBN: 978-3540403715.
- [66] K. Küpfmüller, W. Mathis und A. Reibiger. *Theoretische Elektrotechnik. Eine Einführung*. Springer-Verlag, 2013.
- [67] K. Kurokawa. „Power Waves and the Scattering Matrix“. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on* 13 2 (März 1965), S. 194–202. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.1965.1125964.
- [68] T. Lee. *The design of CMOS radio-frequency integrated circuits*. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN: 0521835399.
- [69] W. H. Leighton, R. J. Chaffin und J. G. Webb. „RF Amplifier Design with Large-Signal S-Parameters“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 21 12 (Dez. 1973), S. 809–814. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.1973.1128136.
- [70] J. Lunze. *Regelungstechnik 1. Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014. ISBN: 9783642539091. DOI: 10.1007/978-3-642-53944-2.
- [71] S. Maas. *Nonlinear microwave and RF circuits*. Boston, MA: Artech House, 2003. ISBN: 1-58053-484-8.
- [72] S. A. Maas. *Microwave mixers*. Boston: Artech House, 1993. ISBN: 0890066051.
- [73] R. Macmillan. *Non-Linear Control Systems Analysis*. Pergamon Press, 1962.
- [74] H. Marko. *Systemtheorie: Methoden und Anwendungen für ein- und mehrdimensionale Systeme*. S.l.: Springer, 1995. ISBN: 978-3-642-63356-0.
- [75] W. Mathis u. a. *Abschlussbericht BMBF-Verbundprojekt EM4EM: Elektromagnetische Zuverlässigkeit und elektronische Systeme für eMobility-Anwendungen. Teilvorhaben: EMZ-Modellierung von elektronischen Sensoren und EMI-Systemkonzepte*. Leibniz Universität Hannover, Institut für Theoretische Elektrotechnik, 14. Okt. 2015. DOI: [doi.org/10.2314/GBV:863342000](https://doi.org/10.2314/GBV:863342000). URL: <https://www.tib.eu/de/suchen/id/TIBKAT:863342000/>.

- [76] S. R. Mazumder und P. D. van der Puije. „An experimental methods of characterizing nonlinear 2-ports and its application to microwave class-C transistor power amplifier design“. *IEEE Journal of Solid-State Circuits* **12** 5 (Okt. 1977), S. 576–580. ISSN: 0018-9200. DOI: 10.1109/JSSC.1977.1050958.
- [77] S. R. Mazumder und P. D. van der Puije. „Two-Signal Method of Measuring the Large-Signal S-Parameters of Transistors“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **26** 6 (Juni 1978), S. 417–420. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.1978.1129404.
- [78] K. Meerkötter. „Einige Anwendungen der Wellengrößen“ (22. Sep. 2006).
- [79] A. I. Mees. „The Describing Function Matrix“. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications* **10** (1972), S. 49–67. ISSN: 0020-2932.
- [80] G. Merziger und T. Wirth. *Repetitorium höhere Mathematik*. 6. Aufl. Barsinghausen: Binomi, 2010. ISBN: 9783923923342.
- [81] C. Montgomery, R. H. Dicke und E. M. Purcel, Hrsg. *Principles of Microwave Circuits*. M.I.T. Radiation Laboratory Series. Mc, 1948. URL: <https://www.jlab.org/ir/MITSeries.html>.
- [82] S. M. Moosavi, C. Widemann und W. Mathis. „Behavioral modeling of nonlinear transfer systems with load-dependent X-parameters“. *Advances in Radio Science* **15** (2017), S. 37–41. DOI: 10.5194/ars-15-37-2017. URL: <https://www.adv-radio-sci.net/15/37/2017/>.
- [83] O. Müller. „Large-Signal S-Parameter Measurements of Class C Operated Transistors“. *Nachrichtentechnische Zeitschrift* **10** (1968), S. 644–647.
- [84] M. Myslinski u. a. „S-functions behavioral model order reduction based on narrowband modulated large-signal network analyzer measurements“. *Microwave Measurements Conference (ARFTG), 2010 75th ARFTG*. Mai 2010, S. 1–6. DOI: 10.1109/ARFTG.2010.5496321.
- [85] NMDG. *S-functions - Measure, Model, Simulate*. Newsletter Special Edition 2009. NMDG, 2009. URL: [http://www.nmdg.be/newsletters/Newsletter\\_IMS09.html](http://www.nmdg.be/newsletters/Newsletter_IMS09.html).
- [86] W. Nowacki. *Fouriersynthese von Kristallen und ihre Anwendung in der Chemie*. Basel: Birkhäuser, 1952. ISBN: 978-3-0348-6898-3.
- [87] P. Nuij, O. Bosgra und M. Steinbuch. „Higher-order sinusoidal input describing functions for the analysis of non-linear systems with harmonic responses“. *Mechanical Systems and Signal Processing* **20** 8 (2006), S. 1883–1904. ISSN: 0888-3270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2005.04.006. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832700500083X>.
- [88] M. Odyniec. „Large signal S-parameters“. *ARFTG Conference, 2006 67th*. Juni 2006, S. 55–60. DOI: 10.1109/ARFTG.2006.4734341.
- [89] N. Oliveira, K. Kienitz und E. Misawa. „A describing function approach to limit cycle controller design“. *2006 American Control Conference*. Juni 2006, S. 1511–1516. DOI: 10.1109/ACC.2006.1656432.
- [90] Y. Oono. „Application of Scattering Matrices to the Synthesis of n Ports“. *Circuit Theory, IRE Transactions on* **3** 2 (Juni 1956), S. 111–120. ISSN: 0096-2007. DOI: 10.1109/TCT.1956.1086304.
- [91] J. Pedro. *Intermodulation distortion in microwave and wireless circuits*. Boston: Artech House, 2003. ISBN: 1-58053-356-6.
- [92] A. M. P. Pelaez Perez u. a. „X-parameters-based closed-form expressions for evaluating power-dependent fundamental negative and positive real impedance boundaries in oscillator design“. *IET Microwaves, Antennas Propagation* **6** 8 (Juni 2012), S. 835–840. ISSN: 1751-8725. DOI: 10.1049/iet-map.2011.0373.
- [93] A. M. Pelaez Perez u. a. „Experimental verification of analytical design equations based on X-parameters for predicting role of series feedback“. *Microwave Integrated Circuits Conference (EuMIC), 2011 European*. Okt. 2011, S. 148–151.
- [94] A. M. Pelaez Perez u. a. „Validation of load-independent X-parameters formulation for use in analytical circuit design“. *Active RF Devices, Circuits and Systems Seminar*. Sep. 2011, S. 47–50. DOI: 10.1049/ic.2011.0212.

- [95] A. M. Pelaez Perez u. a. „Device modeling with small-signal X-parameters measured with a special PNA-X configuration for the study of non-linear interactions“. *Microwave Integrated Circuits Conference (EuMIC), 2012 7th European*. Okt. 2012, S. 266–269.
- [96] A. M. Pelaez Perez u. a. „Large-Signal Oscillator Design Procedure Utilizing Analytical X-Parameters Closed-Form Expressions“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **60** 10 (Okt. 2012), S. 3126–3136. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.2012.2209436.
- [97] A. M. Pelaez Perez u. a. „Application of an NVNA-Based System and Load-Independent X-Parameters in Analytical Circuit Design Assisted by an Experimental Search Algorithm“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **61** 1 (Jan. 2013), S. 581–586. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.2012.2226056.
- [98] A. M. Pelaez Perez. „X-Parameters Based Analytical Design of Non-Linear Microwave Circuits. Application to Oscillator Design“. Diss. Universidad Poitecnica de Madrid, 2012.
- [99] D. Peumans und G. Vandersteen. „An Improved Describing Function With Applications for OTA-Based Circuits“. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* **64** 7 (Juli 2017), S. 1748–1757. ISSN: 1549-8328. DOI: 10.1109/TCSI.2017.2681838.
- [100] J. C. Peyton Jones und S. A. Billings. „Interpretation of non-linear frequency response functions“. *International Journal of Control* **52** 2 (1990), S. 319–346. DOI: 10.1080/00207179008953539. eprint: <http://dx.doi.org/10.1080/00207179008953539>. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/00207179008953539>.
- [101] J. C. Peyton Jones und S. A. Billings. „Describing functions, Volterra series, and the analysis of non-linear systems in the frequency domain“. *International Journal of Control* **53** 4 (1991), S. 871–887. DOI: 10.1080/00207179108953654. eprint: <http://dx.doi.org/10.1080/00207179108953654>. URL: <http://dx.doi.org/10.1080/00207179108953654>.
- [102] D. Pozar. *Microwave engineering*. Hoboken, NJ: Wiley, 2012. ISBN: 978-0-470-63155-3.
- [103] H. Qi, J. Benedikt und P. Tasker. „A Novel Approach for Effective Import of Nonlinear Device Characteristics into CAD for Large Signal Power Amplifier Design“. *2006 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*. Juni 2006, S. 477–480. DOI: 10.1109/MWSYM.2006.249596.
- [104] H. Qi, J. Benedikt und P. Tasker. „A Novel Nonlinear "Truth Model On-Demand" for Rapid Large-Signal Power Amplifier Design“. *2006 International Workshop on Integrated Nonlinear Microwave and Millimeter-Wave Circuits*. Jan. 2006, S. 68–71. DOI: 10.1109/INMMIC.2006.283511.
- [105] H. Qi, J. Benedikt und P. J. Tasker. „Nonlinear Data Utilization: From Direct Data Lookup to Behavioral Modeling“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **57** 6 (Juni 2009), S. 1425–1432. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.2009.2019996.
- [106] Z. Qinglong und L. Shengli. „Comparative study of X-parameters and nonlinear scattering functions“. *Electronic Measurement Instruments (ICEMI), 2011 10th International Conference on*. **3**. Aug. 2011, S. 355–358. DOI: 10.1109/ICEMI.2011.6037923.
- [107] M. Redouté und M. Steyaert. *EMC of analog integrated circuits*. Hrsg. von M. Ismail. Dordrecht New York: Springer, 2010. X, 243. ISBN: 978-90-481-3229-4. DOI: 10.1007/978-90-481-3230-0.
- [108] D. Rijlaarsdam u. a. „A comparative overview of frequency domain methods for nonlinear systems“. *Mechatronics* **42** (2017), S. 11–24. ISSN: 0957-4158. DOI: 10.1016/j.mechatronics.2016.12.008. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957415816301568>.
- [109] V. Rizzoli, C. Cecchetti und A. Lipparini. „A General-Purpose Program for the Analysis of Non-linear Microwave Circuits Under Multitone Excitation by Multidimensional Fourier Transform“. *Microwave Conference, 1987. 17th European*. Sep. 1987, S. 635–640. DOI: 10.1109/EUMA.1987.333678.
- [110] V. Rizzoli, A. Lipparini und F. Matri. „Computation of large-signal S-parameters by harmonic-balance techniques“. *Electronics Letters* **24** 6 (März 1988), S. 329–330. ISSN: 0013-5194. DOI: 10.1049/e1:19880222.
- [111] V. Rizzoli u. a. „General-purpose harmonic balance analysis of nonlinear microwave circuits under multitone excitation“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **36** 12 (Dez. 1988), S. 1650–1660. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/22.17396.

- [112] P. Roblin. *Nonlinear RF Circuits and Nonlinear Vector Network Analyzers. Interactive Measurement and Design Techniques*. Cambridge New York: Cambridge University Press, 2011. ISBN: 9780521889957.
- [113] D. E. Root u. a. „Device modeling with NVNAs and X-parameters“. *2010 Workshop on Integrated Nonlinear Microwave and Millimeter-Wave Circuits*. Apr. 2010, S. 12–15. DOI: 10.1109/INMMIC.2010.5480151.
- [114] D. E. Root u. a. „Broad-Band Poly-Harmonic Distortion (PHD) Behavioral Models From Fast Automated Simulations and Large-Signal Vectorial Network Measurements“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* (2005).
- [115] D. E. Root u. a. „X-parameters: The new paradigm for measurement, modeling, and design of nonlinear RF and microwave components“. *Microwave Engineering Europe* (Dezember 2008), S. 16–21.
- [116] D. E. Root u. a. „X-Parameter: Das neue Paradigma zur Beschreibung nichtlinearer HF- und Mikrowellenbauelemente“. *Systeme und Anwendungen der Messtechnik* (2010).
- [117] D. E. Root u. a. *X-Parameters characterization, modeling, and design of nonlinear RF and microwave components*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. ISBN: 9780521193238.
- [118] P. Russer. *Electromagnetics, microwave circuit and antenna design for communications engineering*. Boston, MA: Artech House, 2006. ISBN: 1-58053-907-6.
- [119] D. Rytting. „ARFTG 50 year network analyzer history“. *2008 71st ARFTG Microwave Measurement Conference*. Juni 2008, S. 1–8. DOI: 10.1109/ARFTG.2008.4633319.
- [120] R. S. Saini u. a. „Interpolation and extrapolation capabilities of non-linear behavioural models“. *78th ARFTG Microwave Measurement Conference*. Dez. 2011, S. 1–4. DOI: 10.1109/ARFTG78.2011.6183865.
- [121] X. Saint Raymond. *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*. Boca Raton: CRC Press, 1991. ISBN: 0-8493-7158-9.
- [122] S. Scheier u. a. „A combined time and frequency domain characterization method for modeling of overvoltage protection elements“. *2015 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC)*. Aug. 2015, S. 1351–1356. DOI: 10.1109/IEMC.2015.7256368.
- [123] M. Schetzen. *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. John Wiley und Sons, 1980.
- [124] M. Schetzen. „Multilinear theory of nonlinear networks“. *Journal of the Franklin Institute* **320** 5 (1985), S. 221–247.
- [125] Y. Shmaliy. *Continuous-Time Systems*. Berlin: Springer, 2007. ISBN: 9781402062711.
- [126] G. Simpson u. a. „Load-pull + NVNA = enhanced X-parameters for PA designs with high mismatch and technology-independent large-signal device models“. *Microwave Measurement Symposium, 2008 72nd ARFTG*. Dez. 2008, S. 88–91. DOI: 10.1109/ARFTG.2008.4804301.
- [127] R. Snelsire und T. Bosworth. „On the use of the describing function as a stability criterion“. *IEEE Transactions on Automatic Control* **12** 6 (Dez. 1967), S. 788–789. ISSN: 0018-9286. DOI: 10.1109/TAC.1967.1098769.
- [128] K.-H. Steiner und L. Pungs. *Parametrische Systeme*. S. Hirzel Verlag Stuttgart, 1965.
- [129] G. Sun, Y. Xu und A. Liang. „The study of nonlinear scattering functions and X-parameters“. *Microwave and Millimeter Wave Technology (ICMMT), 2010 International Conference on*. 2010, S. 1086–1089. DOI: 10.1109/ICMMT.2010.5525111.
- [130] Y. Takayama. „A New Load-Pull Characterization Method for Microwave Power Transistors“. *Microwave Symposium, 1976 IEEE-MTT-S International*. Juni 1976, S. 218–220. DOI: 10.1109/MWSYM.1976.1123701.
- [131] M. Treuhft. „Network Properties of Circulators Based on the Scattering Concept“. *IRE Transactions on Circuit Theory* **3** 2 (Juni 1956), S. 127–135. ISSN: 0096-2007. DOI: 10.1109/TCT.1956.1086295.

- [132] R. S. Tucker. „RF Characterization of Microwave Power Fet’s“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **29** 8 (Aug. 1981), S. 776–781. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.1981.1130446.
- [133] W. Van Moer und L. Gomme. „NVNA versus LSNA: enemies or friends?“ *IEEE Microwave Magazine* **11** 1 (Feb. 2010), S. 97–103. ISSN: 1527-3342. DOI: 10.1109/MMM.2009.935213.
- [134] G. Vendelin. *Microwave circuit design using linear and nonlinear techniques*. 2. Aufl. Hoboken, NJ: Wiley, 2005. ISBN: 978-0-471-41479-7.
- [135] F. Verbeyst und M. Vanden Bossche. „The Volterra input-output map of a high frequency amplifier as a practical alternative to load-pull measurements“. *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 1994. IMTC/94. Conference Proceedings. 10th Anniversary. Advanced Technologies in I amp; M., 1994 IEEE*. Mai 1994, 283–286 vol.1. DOI: 10.1109/IMTC.1994.352068.
- [136] F. Verbeyst und M. Vanden Bossche. „VIOMAP, the S-parameter equivalent for weakly nonlinear RF and microwave devices“. *Microwave Symposium Digest, 1994., IEEE MTT-S International*. Mai 1994, 1369–1372 vol.3. DOI: 10.1109/MWSYM.1994.335156.
- [137] J. Verspecht. „Large-signal network analysis“. *IEEE Microwave Magazine* **Vol. 6** Issue 4 (Dez. 2005), S. 82–92. ISSN: 1527-3342. DOI: 10.1109/MMW.2005.1580340.
- [138] J. Verspecht, D. Root und T. Nielsen. „Dynamic X-parameters\*: Behavioral modeling in the presence of long term memory effects“. *2012 The 7th German Microwave Conference*. März 2012, S. 1–4.
- [139] J. Verspecht und D. Root. „Polyharmonic distortion modeling“. *Microwave Magazine, IEEE* **7** 3 (2006), S. 44–57. ISSN: 1527-3342. DOI: 10.1109/MMW.2006.1638289.
- [140] J. Verspecht, M. Vanden Bossche und F. Verbeyst. „Characterizing Components Under Large Signal Excitation: Defining Sensible "Large Signal S-Parameters"!“. *ARFTG Conference Digest-Spring, 49th*. **31**. Juni 1997, S. 109–117. DOI: 10.1109/ARFTG.1997.327217.
- [141] J. Verspecht. „Calibration of a Measurement System for High Frequency Nonlinear Devices“. Diss. Vrije Universiteit Brussel, 1995.
- [142] J. Verspecht. *Describing Functions Can Better Model Hard Nonlinearities in the Frequency Domain than the Volterra Theory*. Anhang zur Dissertation [141]. 1995.
- [143] J. Verspecht. „Accurately Characterizing Hard Nonlinear Behavior of Microwave Components with the Nonlinear Network Measurements System: Introducing 'Nonlinear Scattering Functions'“. *International Workshop on Integrated Nonlinear Microwave and Millimeterwave Circuits* (1998).
- [144] J. Verspecht. *Everything you’ve always wanted to know about Hot-S22*. Introducing New Concepts in Nonlinear Network Design, Workshop at the International Microwave Symposium 2002. Juni 2002.
- [145] J. Verspecht und P. V. Esch. „Measuring, Black-Box Modelling and Simulating Transistor Nonlinear Behaviour: Nonlinear S-Parameters Can Do The Job!“ *IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*. **3**. Juni 1998, S. 1495–1498. URL: <http://www.janverspecht.com/>.
- [146] J. Verspecht, F. Verbeyst und M. V. Bossche. „Network Analysis Beyond S-parameters: Characterizing and Modeling Component Behaviour under Modulated Large-Signal Operating Conditions“. *ARFTG Conference Digest-Fall, 56th* (2000).
- [147] J. Verspecht u. a. „Hot S-Parameter Techniques:  $6 = 4 + 2$ “. *Conference Record of the 66th ARFTG Conference*. Washington DC, USA, 2005.
- [148] J. Verspecht u. a. „Multi-tone, Multi-port, and Dynamic Memory Enhancements to PHD Nonlinear Behavioral Models from Large-signal Measurements and Simulations“. *Microwave Symposium, 2007. IEEE/MTT-S International* (2007).
- [149] J. Verspecht u. a. „Black box modelling of hard nonlinear behavior in the frequency domain“. *Microwave Symposium Digest, 1996., IEEE MTT-S International*. **3**. 1996, 1735–1738 vol.3. DOI: 10.1109/MWSYM.1996.512277.
- [150] J. Verspecht u. a. „Linearization of large-signal scattering functions“. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on* **53** 4 (Apr. 2005), S. 1369–1376. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.2005.845771.

- [151] J. Verspecht u. a. „Extension of X-parameters to include long-term dynamic memory effects“. *Microwave Symposium Digest, 2009. MTT '09. IEEE MTT-S International*. Juni 2009, S. 741–744. DOI: 10.1109/MWSYM.2009.5165803.
- [152] E. Vidal, A. Poveda und M. Ismail. „Describing functions and oscillators“. *IEEE Circuits and Devices Magazine* **17** 6 (Nov. 2001), S. 7–11. ISSN: 8755-3996. DOI: 10.1109/101.968910.
- [153] E. Voges. *Hochfrequenztechnik : Bauelemente, Schaltungen, Anwendungen*. Bonn: Hüthig, 2004. ISBN: 978-3826650390.
- [154] P. Wambacq und W. Sansen. *Distortion analysis of analog integrated circuits*. Boston, MA: Kluwer Academic, 1998. ISBN: 978-0-7923-8186-0.
- [155] J. G. Webb und R. J. Chaffin. „Power Transistor Amplifier Design Using Large-Signal S-Parameters“. *Microwave Symposium, 1973 IEEE G-MTT International*. Juni 1973, S. 239–241. DOI: 10.1109/GMTT.1973.1123169.
- [156] D. D. Weiner und J. F. Spina. *Sinusoidal Analysis and Modeling of Weakly Nonlinear Circuits. With Application to Nonlinear Interference Effects*. Computer Science and Engineering Series. Van Nostrand Reinhold, 1980. ISBN: 0-442-26093-8.
- [157] D. Weiner und G. Naditch. „A Scattering Variable Approach to the Volterra Analysis of Nonlinear Systems“. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on* **24** 7 (1976), S. 422–433. ISSN: 0018-9480. DOI: 10.1109/TMTT.1976.1128870.
- [158] J. A. Wheeler. „On the Mathematical Description of Light Nuclei by the Method of Resonating Group Structure“. *Phys. Rev.* **52** (11 Dez. 1937), S. 1107–1122. DOI: 10.1103/PhysRev.52.1107. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.52.1107>.
- [159] C. Widemann u. a. „Modeling the static and dynamic behavior of multi-layer varistors in the threshold voltage region depending on the DC operating point“. *2014 21st IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*. Dez. 2014, S. 698–701. DOI: 10.1109/ICECS.2014.7050081.
- [160] C. Widemann u. a. „A comparison of the Volterra series-based nonlinear S-parameters and X-parameters“. *Mixed Design of Integrated Circuits Systems (MIXDES), 2015 22nd International Conference*. Juni 2015, S. 453–457. DOI: 10.1109/MIXDES.2015.7208562.
- [161] S. Woodington. „Behavioral Model Analysis of Active Harmonic Load-pull Measurements“. Diss. Cardiff University, 2011. URL: <http://orca.cf.ac.uk/13000/>.
- [162] S. Woodington u. a. „A novel measurement based method enabling rapid extraction of a RF Waveform Look-Up table based behavioral model“. *Microwave Symposium Digest, 2008 IEEE MTT-S International*. Juni 2008, S. 1453–1456. DOI: 10.1109/MWSYM.2008.4633053.
- [163] S. Woodington u. a. „Behavioral model analysis of active harmonic load-pull measurements“. *Microwave Symposium Digest (MTT), 2010 IEEE MTT-S International*. Mai 2010, S. 1688–1691. DOI: 10.1109/MWSYM.2010.5517261.
- [164] G. Wunsch. *Moderne Systemtheorie - Eine Einführung in die Grundlagen. Band 13*. Bücherei der Hochfrequenztechnik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, 1962, S. 185–192.
- [165] G. Wunsch. *Systemanalyse Band 1 - Lineare Systeme*. Dr. Alfred Hüthig Verlag, 1967, S. 172–185.
- [166] C. Xie, T. Zhang und D. Liu. „Using X-parameters to model mixers“. *Microwave and Millimeter Wave Technology (ICMMT), 2012 International Conference on*. **3**. Mai 2012, S. 1–3. DOI: 10.1109/ICMMT.2012.6230227.



# Lebenslauf

## Angaben zur Person

Name **Christian Widemann**  
Nationalität deutsch  
Geburtsdatum 13. November 1985 in Hildesheim  
Geschlecht männlich  
Familienstand verheiratet

## Schulbildung

1998 – 2005 **Gymnasium**, Otto-Hahn-Gymnasium, Springe  
1992 – 1998 **Grundschule und Orientierungsstufe**, Springe

## Hochschulausbildung

04/2018 **Promotion**  
2005 – 2011 **Studium der Elektrotechnik** mit der Vertiefungsrichtung Mikroelektronik, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
Abschluss: Diplom-Ingenieur

## Beruflicher Werdegang

seit 09/2017 **Entwicklungsingenieur**, IAV GmbH, Gifhorn  
05/2011 – 07/2017 **Wissenschaftlicher Mitarbeiter**, Institut für Theoretische Elektrotechnik, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Lehre (30%), Forschung (40%) und Promotion (30%)  
02/2010 – 08/2010 **Auslands-/Fachpraktikum**, Robert Bosch España Fabrica Madrid, S.A., Spanien, Fehlerstatistiken und -analysen für ein Farberkennungssystem in den Produktionslinien anlegen und pflegen, Unterstützung bei der Entwicklung und Umsetzung geeigneter Maßnahmen zur Prozessstabilisierung

## Lehrtätigkeit

05/2011 – 07/2017 **Übungsleitung der Vorlesungen** *Theoretische Elektrotechnik, Halbleiterschaltungstechnik, Numerische Schaltungs- und Feldberechnung, Grundlagen integrierter Analoagschaltungen, Grundlagen der Elektrotechnik für Comp. Ing.*, Leitung des studentischen Projekts *Invent Integrated Analog Circuits*, Studentenbetreuung, Institut für Theoretische Elektrotechnik, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

## Forschungsprojekte

2012 – 2015 **BMBF Projekt EM4EM** (Electromagnetic Reliability of Electronic Systems for Electro Mobility), Teilvorhaben: EMZ-Modellierung von elektronischen Sensoren und EMI-Systemkonzepte

- 2011 – 2013 **BMBF Projekt MAS** (Nano-electronics for Mobile AAL Systems), Teilvorhaben: EMI-Modellierung/-Simulation von nanoelektronischen MixedSignal-Schaltungen und AAL-Sensoren

---

## Internationale Konferenzen

- 2014 **IEEE, EMC Europe 2014**, IEEE, Göteborg, Schweden  
**U.R.S.I., Kleinheubacher Tagung 2014**, Radio Communication Systems and Signal Processing, Miltenberg Deutschland  
**IEEE, International Conference on Electronics, Circuits, and Systems (ICECS) 2014**, Marseille, Frankreich
- 2013 **Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES) 2013**, Bari, Italien
- 2012 **IEEE, International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES) 2012**, Wrocław, Polen  
**U.R.S.I., Kleinheubacher Tagung 2012**, Radio Communication Systems and Signal Processing, Miltenberg Deutschland

---

## Publikationen

### Konferenzen und Workshops

- 2015 **C. Widemann**, H. Weber, S. Schatz, W. Mathis (2015): *A comparison of the Volterra series-based nonlinear S-parameters and X-parameters*, 2015 22nd International Conference Mixed Design of Integrated Circuits & Systems (MIXDES), Torun, S. 453-457.  
S. Scheier, D. Deelmann, S. Frei, **C. Widemann** und W. Mathis: *A combined time and frequency domain characterization method for modeling of overvoltage protection elements*, 2015 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC), Dresden, 2015, S. 1351-1356  
B. Ashtari Talkhestani, **C. Widemann**, S. Scheier, S. Frei, W. Mathis: *Large Signal Behavioral Modeling of ESD Protection Elements for the Analysis of Transient Processes on System Level*, Kleinheubacher Tagung 2015, 28.-30. September 2015, Miltenberg, Deutschland
- 2014 **C. Widemann**, S. Scheier, S. Frei und W. Mathis (2014): *Modeling the Static and Dynamic Behavior of Multi-layer Varistors in the Threshold Voltage Region Depending on the DC Operating Point*, ICECS 2014, Marseille, France  
**C. Widemann**, S. Scheier, W. John, S. Frei und W. Mathis (2014): *Behavioral Modeling and Simulation of Multi-layer Varistors Utilizing Hardware Description Languages*, EMC Europe 2014 - Workshop 1D Electromagnetic Reliability (EMR) of Electronic Systems for Electro Mobility, Gothenburg, Sweden and Kleinheubacher Tagung 2014, Miltenberg, Germany
- 2013 **C. Widemann**, Harry Weber, Sebastian Stegemann und Wolfgang Mathis (2013): *A Comparative Study of Volterra-based Nonlinear S-parameters and X-parameters*, Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES) 2013, 10-12 July 2013, Bari, Italy  
T. Vennemann, S. Stegemann, **C. Widemann**, W. John und W. Mathis (2013): *A Direct Power Injection Setup for the Susceptibility Measurement of Battery Management Systems Using a Battery Stack Emulator*, International Symposium on Theoretical Electrical Engineering (ISTET 2013), June 2013 - (Outstanding Poster Award)

- 2012 C. Zorn, **C. Widemann**, T. Brückner, M. Ortmanns und W. Mathis (2012): *Peaking reduced STF design for CT Sigma Delta modulators with selective pole compensation*, IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS 2012) , vol., no., pp.3134-3137, 20-23 May 2012 doi: 10.1109/ISCAS.2012.6271986
- C. Widemann**, S. Stegemann, W. John und W. Mathis (2012): *Distortion Analysis of Nonlinear Analog Circuits Based on a Multi-Input Wiener Model Considering EMI at Arbitrary Inputs*, International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES) 2012, Wrocław, Polen
- C. Widemann**, S. Stegemann, W. John und W. Mathis (2012): *Störfestigkeitsanalyse nichtlinearer Schaltungen bei Störungen an Nicht-Signaleingängen basierend auf einem Multi-Input Wienermodell*, Analog Workshop 2012, Berlin, Deutschland
- S. Stegemann, W. John, **C. Widemann** und W. Mathis (2012): *A Block-Oriented Approach to EMI-induced Distortion Analysis for Nonlinear Analog Circuits*, EMC Europe 2012, Rom, Italien
- S. Stegemann, **C. Widemann**, W. John und W. Mathis (2012): *Multi-Input Distortion Analysis of Nonlinear Integrated Circuits*, 20th Conference on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES) 2012, Wolfenbüttel, Deutschland
- 2011 C. Zorn, **C. Widemann**, T. Brückner, M. Ortmanns und W. Mathis (2011): *STF Optimization of 1-Bit CT  $\Sigma\Delta$  Modulators Based on Scaled Loop Filter Coefficients*, European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD 2011), Linköping Sweden

### Journal-Beiträge

- 2017 S. Moosavi, **C. Widemann**, W. Mathis (2017): *Behavioral Modeling of Nonlinear Transfer Systems with Load-dependent X-parameters*, Adv. Radio Sci., 15, 37-41, <https://doi.org/10.5194/ars-15-37-2017>, 2017
- 2013 **C. Widemann**, S. Stegemann, W. John und W. Mathis: *Analytic investigations on the susceptibility of nonlinear analog circuits to substrate noise*, Adv. Radio Sci., Vol. 11, pp. 171-175, [www.adv-radio-sci.net/11/171/2013/](http://www.adv-radio-sci.net/11/171/2013/), doi:10.5194/ars-11-171-2013
- H. Weber, **C. Widemann** und W. Mathis (2013): *A first approach to the distortion analysis of nonlinear analog circuits utilizing X-parameters*, Adv. Radio Sci., Vol. 11, S. 159-163, [www.adv-radio-sci.net/11/159/2013/](http://www.adv-radio-sci.net/11/159/2013/), doi:10.5194/ars-11-159-2013
- 2012 **C. Widemann**, C. Zorn, T. Brückner, M. Ortmanns und W. Mathis (2012): *STF Optimierung von single-bit CT  $\Sigma\Delta$  Modulatoren basierend auf skalierten Filterkoeffizienten*, Adv. Radio Sci., vol. 10, pp. 313-317, 2012

### Technical Reports

- 2015 W. Mathis, S. Stegemann, **C. Widemann**, T. Vennemann und S. Plönnigs, *Abschlussbericht BMBF-Verbundprojekt EM<sub>4</sub>EM: Elektromagnetische Zuverlässigkeit und elektronische Systeme für eMobility-Anwendungen: Teilvorhaben: EMZ-Modellierung von elektronischen Sensoren und EMI-Systemkonzepte*

- 2014 W. Mathis, R. Kazemzadeh, O. Schnick, D. Stahl, T. Venemann und **C. Widemann**, *Abschlussbericht BMBF/ENIAC-Verbundprojekt MAS: Nanoelectronics for Mobile AAL-Systems (MAS) : technology platform for AAL applications ; Teilvorhaben: EMI-Modellierung/-Simulation von nanoelektronischen MixedSignal-Schaltungen und AAL-Sensoren*

#### Abschlussarbeiten

- 2011 **C. Widemann**, Diplomarbeit, Entwurf empfindlichkeitsoptimaler aktiver Filterstrukturen für CT  $\Sigma\Delta$ -Wandler
- 2009 **C. Widemann**, Studienarbeit, Systematische Entwurfsmethoden PLL-basierter Frequency Synthesizer unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte







