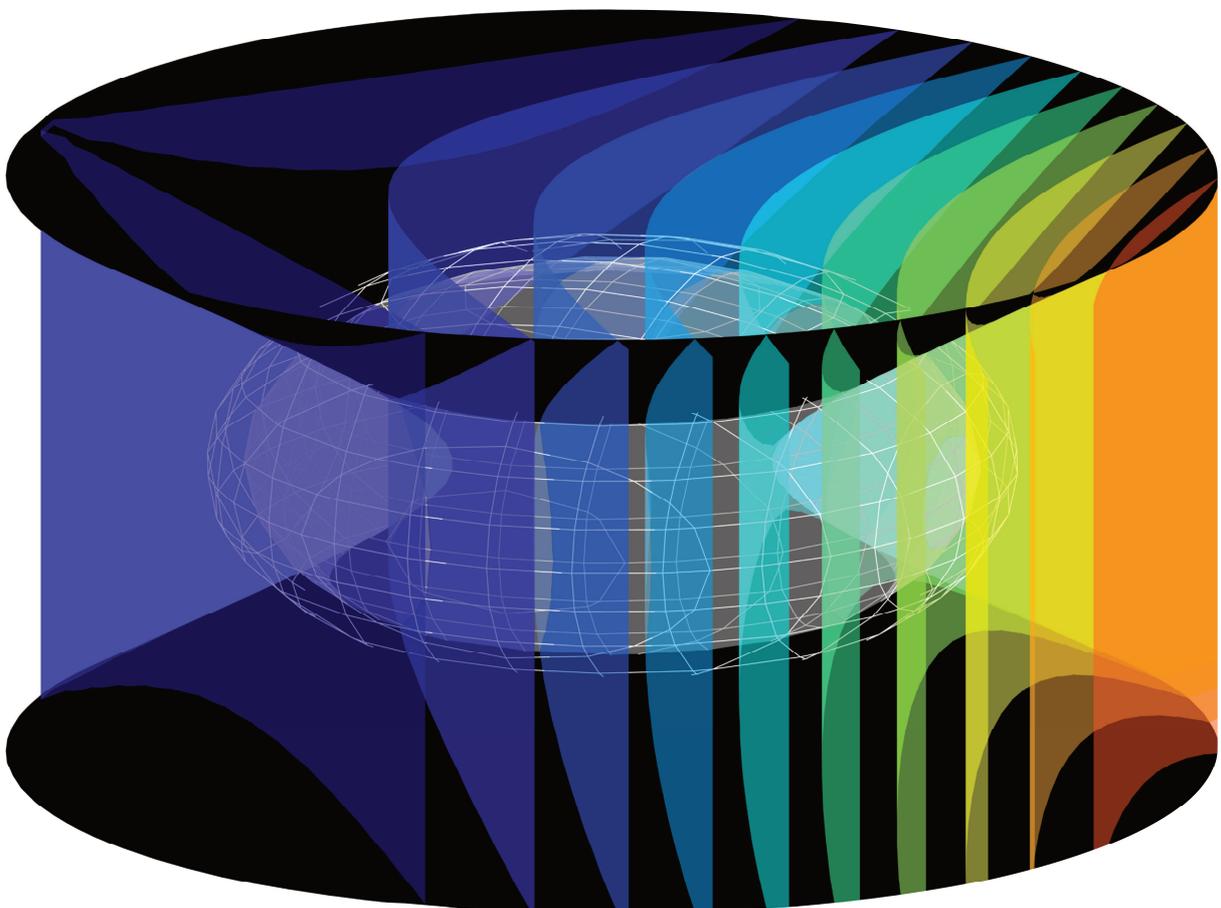




Institut für Elektrische Energiesysteme  
Fachgebiet Elektrische Energieversorgung  
Leibniz Universität Hannover

Thomas Leveringhaus

**Netzoptimierung durch  
Wirk- und Blindleistungsredispatch  
auf Basis von konvexifizierten quadratischen  
Näherungen der Netzgleichungen**



**Netzoptimierung durch Wirk- und Blindleistungsredispach auf  
Basis von konvexifizierten quadratischen Näherungen der  
Netzgleichungen**

Von der Fakultät für Elektrotechnik und Informatik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktor-Ingenieur**

(abgekürzt: Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

**Dipl.-Ing. Thomas Leveringhaus**

geboren am 02.04.1985 in Bochum

2017

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Lutz Hofmann  
2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Albert Moser  
Prüfungsvorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Richard Hanke-Rauschenbach

Tag der Promotion: 21. September 2017

Die vorliegende Arbeit widmet sich dem Aufbau, der Näherung und dem Finden des globalen Optimums von nichtkonvexen Optimierungsproblemen. Die Bilder auf der vorderen und hinteren Umschlagseite veranschaulichen die Gleichungen der Arbeit.

### **Erläuterungen zum Bild auf der vorderen Umschlagseite:**

Das Bild auf der vorderen Umschlagseite zeigt ein von farblich abgestuften Niveauflächen einer quadratischen Zielfunktion durchzogenes dreidimensionales Lösungsgebiet eines Optimierungsproblems, welches durch in schwarz, grau und weiß dargestellte, quadratische Nebenbedingungen beschränkt wird.

Die Funktionsvariablen der drei Dimensionen können beispielhaft als Wirk- und Blindleistungsänderungen interpretiert werden.

Die Zielfunktion, in dem Bild beispielhaft dargestellt durch jeweils eine von zwei Schalen eines Hyperbolischen Zylinders, kann als quadratisch angenäherte Funktion der Netzverluste interpretiert werden.

Das innen liegende, sanduhrähnliche, schwarz gezeichnete Einschalige Hyperboloid kann bspw. als quadratisch angenäherter Stromgrenzwert interpretiert werden. Das zulässige Lösungsgebiet liegt dann außerhalb dieses Einschaligen Hyperboloiden.

Um den Symmetriepunkt des Bildes (den bei realen Problemen nicht alle Nebenbedingungen gemein haben) herum, befinden sich zwei Ellipsoide. Das innere, halbtransparent graue Ellipsoid kann beispielhaft als quadratisch angenäherte untere Spannungsbandgrenze, das äußere, als weißes Gitternetz gezeichnete Ellipsoid kann als quadratisch angenäherte obere Spannungsbandgrenze interpretiert werden, sodass das zulässige Lösungsgebiet zwischen den beiden Ellipsoiden liegt.

### **Erläuterungen zum Bild auf der hinteren Umschlagseite:**

Das Bild auf der hinteren Umschlagseite zeigt in blau ein Hyperbolisches Paraboloid („Sattelfläche“), das sich dadurch auszeichnet, dass es aus Funktionsbestandteilen aller drei in der vorliegenden Arbeit unterschiedenen Eigenwerte (positiv, negativ und Null) besteht. In grün und rot sind die durch stückweise Linearisierung des nichtkonvexen Funktionsbestandteils (negativer Eigenwert) erhaltenen Konvexifizierungen dargestellt, die hier Parabolische Zylinder bilden.

## **Danksagungen**

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Elektrische Energiesysteme im Fachgebiet Elektrische Energieversorgung an der Leibniz Universität Hannover.

Prof. Dr.-Ing. habil. Lutz Hofmann gilt ein besonderer Dank für die intensive und kritische, fachliche und formelle Begleitung meiner Arbeit, die Anstellung am Fachgebiet und das damit verbundene Vertrauen, das interessante Arbeitsumfeld und die Möglichkeit zur freien Forschung.

Bei Prof. Dr.-Ing. Albert Moser möchte ich mich für die Übernahme des Amts des zweiten Referenten, das detaillierte Durcharbeiten der Arbeit und das bereichernde Gespräch in Aachen bedanken.

Prof. Dr.-Ing. habil. Bernd R. Oswald, Prof. Dr.-Ing. habil. Martin Wolter und Dipl.-Ing. Constantin Reese gilt Dank für die Betreuung als Student und Hilfwissenschaftler. Während dieser Zeit wurde mein Interesse an dem Fachgebiet geweckt und der Entschluss zur Dissertation bestärkt.

Den aktuellen und ehemaligen Arbeitskollegen sowie Angelika Hickel sei in besonderer Weise gedankt, dass ich vom hier am Fachgebiet gelebten „Generationenvertrag“ profitieren durfte. Dr. Torsten Rendel, Dipl.-Wirtsch.-Ing. Timo Breithaupt und Dipl.-Ing. Steffen Garske haben sich durch die Arbeit und die vielen Formeln durchgearbeitet und mir viele Verbesserungen ermöglicht. Insgesamt bin ich allen Arbeitskollegen, Hilfwissenschaftlern und Studenten dankbar, in einem so produktiven und offenen, kritischen aber freundschaftlichen Umfeld arbeiten zu dürfen.

Bei meinen Freunden aus Schul-, Studien-, Wohn- und Freizeit möchte ich mich für das entgegengebrachte Interesse, die aufmunternden Worte nach gefühlten Rückschlägen und die Ablenkung von der Arbeit bedanken.

Zu guter Letzt gilt mein tief empfundener Dank meiner Familie und meiner Freundin Elena Gräf dafür, dass sie mich auf dem Weg zur Promotion begleitet und stets unterstützt haben.

### **Kurzfassung**

Die Energiewende, der Kernenergieausstieg, eine zunehmende Elektrifizierung energetischer Anwendungen, ein zunehmender internationaler Stromhandel, ein unzureichender Netzausbau und ein zunehmender regulatorischer Effizienzdruck bewirken einen Betrieb des elektrischen Energieversorgungsnetzes an seinen Betriebsgrenzen beziehungsweise erfordern in zunehmenden Umfang Maßnahmen, um diese einzuhalten. Da die Betriebsgrenzen und Maßnahmen miteinander in Wechselwirkung stehen, ergibt sich ein herausforderndes Optimierungsproblem.

Diese Arbeit enthält Weiterentwicklungen der Modellierung und Lösung eines Optimierungsproblems, welches die Minimierung der Kosten für Netzverluste und die Minimierung der Kosten für Redispatch kombiniert. Im Rahmen der Optimierung wird die Einhaltung der Stromtragfähigkeiten und Spannungsbänder sichergestellt beziehungsweise wiederhergestellt.

Zur Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems werden die eingehenden Netzgleichungen quadratisch angenähert, da eine global-optimale Lösung des allgemeinen nichtlinearen und nichtkonvexen Optimierungsproblems in akzeptabler Zeit nicht erwartet werden kann. Des Weiteren ist eine Umkehrfunktion der Leistungsgleichung erforderlich, die mit Hilfe des Verteilten Slacks ermittelt wird, ohne dass das Spannungsniveau im Netz determiniert wird.

Um das in jedem Schritt einer sequentiellen Optimierung entstehende quadratische nichtkonvexe Optimierungsproblem mit Standardsoftware lösen zu können, muss dieses konvexifiziert werden. Hierzu werden die nichtkonvexen Funktionsbestandteile durch Hauptachsentransformation identifiziert und durch stückweise Linearisierungen konvexifiziert, was das kontinuierliche Optimierungsproblem gemischt-ganzzahlig werden lässt. Durch Voroptimierungen und Startwertermittlungen kann jedoch eine Lösung in angemessener Zeit erreicht werden.

Die Modellierung zeigt im Rahmen der Fallstudien im Hinblick auf Prognosefehler, dass die quadratischen und die konvexifizierten quadratischen Näherungen sehr geringe Prognosefehler haben. Lineare Näherungen hingegen zeigen im Vergleich deutlich größere Prognosefehler. Im Hinblick auf das Konvergenzverhalten der sequentiellen Optimierung zeigt sich, dass mit linearen Nebenbedingungen Schwingungen um ein Optimum und langsame Konvergenz zu einem Optimum hin deutlich stärker ausgeprägt sind. Weitere Auswertungen zeigen zudem im Hinblick auf das Ergebnis der Optimierung, dass mit linearen Nebenbedingungen unter Umständen nur ein lokales Optimum gefunden wird. Im Hinblick auf die Kombination der Netzverlustoptimierung durch Blindleistungsänderung mit der Optimierung der Engpassbeseitigung durch Wirkleistungsänderung zeigen sich deutliche Effizienzvorteile.

## Abstract

The exit from nuclear and fossil-fuel energy, the increasing electrification of power applications, the increasing international power trade, insufficient network expansion and stronger regulation to increase the efficiency of grid operation cause electric power grids to be operated close to its limits. Thus, more and more measures are necessary to keep or restore a secure and stable grid operation. Since most of grid constraints and measures interact, their cost-optimal selection is a challenging optimization problem.

This thesis contains enhancements for modeling and solving an optimization problem, which minimizes the costs of grid losses as well as those for redispatch. Within this optimization, adherence to security constraints of currents and voltages is ensured or restored respectively.

To solve the nonlinear optimization problem, comprised equations are approximated by quadratic Taylor expansions, since a global-optimal solution of the universal nonlinear and nonconvex optimization problem cannot be expected in acceptable time. Furthermore, an inverse function of the power equation is necessary, which is established by means of a distributed slack, which has the advantage not to determine the voltage level of the grid before the optimization process.

To solve the quadratic nonconvex optimization problem obtained in every step of a sequential optimization process with standard software, it needs to be convexified. Therefore, the nonconvex parts of the quadratic Taylor expansions are identified by principal axis transformation and convexified by piecewise linearization. As a result, the optimization problem becomes a mixed-integer one. By applying pre-optimizations and by seeking initial values, the following optimization can be solved in acceptable time.

Within the case studies, the quadratic and convexified quadratic approximations reveal very small forecasting errors compared to those of linear approximations. With regard to convergence, the sequential optimization with linear constraints reveals distinct oscillations around an optimum and is slowly converging compared to the sequential optimization with quadratic constraints. Further evaluations show that with linear constraints only a local optimum may be found. Furthermore, the combination of grid loss minimization and redispatch optimization has significant improvements in efficiency compared to separate optimizations.



## Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>I</b>
<b>Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>III</b>
<b>Verzeichnis der Abkürzungen, Formelzeichen und Indizes.....</b>	<b>V</b>
<b>1 Einleitung .....</b>	<b>1</b>
1.1 Hintergrund und Motivation .....	1
1.2 Zielstellungen und Forschungsfragen .....	6
1.3 Lösungsansatz und Aufbau der Arbeit.....	10
<b>2 Grundlagen zur Modellierung des Netzes und zur Optimierung .....</b>	<b>15</b>
2.1 Grundlagen zur Modellierung des Netzes.....	15
2.1.1 Modellierung der Netzbetriebsmittel.....	15
2.1.2 Aufstellen des knotenorientierten Netzgleichungssystems .....	18
2.2 Grundlagen zur Optimierung .....	20
2.2.1 Aufbau von Optimierungsproblemen .....	20
2.2.2 Konvexität und globale Optimierung .....	22
2.3 Optimal Power Flow und optimierte Engpassbeseitigung.....	25
2.3.1 Security-constrained Optimal Power Flow.....	26
2.3.2 Economic (re)dispatch .....	27
2.3.3 Security-constrained economic redispatch optimization .....	28
<b>3 Lösen der Leistungsdifferenzgleichung.....</b>	<b>31</b>
3.1 Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung.....	33
3.2 Umkehrung der Leistungsdifferenzgleichung.....	35
3.2.1 Spannungsabhängigkeit der Lasten .....	35
3.2.2 Lasten oder Erzeuger als Ersatzadmittanzen .....	36
3.2.3 PU-Knoten .....	37
3.2.4 Slack-Knoten .....	37
3.2.5 Verteilter Slack für die Wirkleistung.....	38
3.2.6 Umkehrung der Leistungsdifferenzgleichung durch Pseudoinverse .....	42
3.2.7 Vergleich der Modellierungsansätze zur Umkehrung der Leistungsdifferenzgleichung.....	43
3.3 Lösung der Leistungsdifferenzgleichung mit Verteiltem Slack durch Leistungsflussberechnung nach dem Newton-Verfahren .....	44
3.4 Anzahl der Lösungen der Leistungsdifferenzgleichung.....	46
3.4.1 Untersuchung der Lösungen eines Zweiknotennetzes.....	48
3.4.2 Untersuchung der Lösungen eines Dreiknotennetzes.....	50

<b>4</b>	<b>Quadratische Näherungen der Netzgleichungen</b> .....	<b>55</b>
4.1	Darstellungen zur Über- und Unterschätzung durch Näherungen .....	58
4.2	Näherung für die Änderungen der Netzleistungen.....	60
4.3	Näherung für die Änderungen der Knotenleistungen durch den Verteilten Slack.....	61
4.4	Näherung für die Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung .....	62
4.5	Näherung für die Änderungen der Knotenleistungen .....	63
4.6	Näherung für die Änderung der bezogenen Netzverluste .....	64
4.7	Näherung für die Änderungen der bezogenen Beträge der Knotenspannungen.....	65
4.8	Näherung für die Änderungen der bezogenen Beträge der Zweigströme.....	66
<b>5</b>	<b>Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen</b> .....	<b>69</b>
5.1	Hauptachsentransformation und Eigenwertanalyse einer quadratischen Funktion ...	71
5.2	Auswahl der optimalen Koordinatensysteme für die Zustandsgrößen und Beschreibung der Funktionen in diesen .....	73
5.3	Konvexifizierung der nichtkonvexen Funktionsbestandteile.....	76
5.3.1	Zweidimensionale Beispiele für die Konvexifizierungen nichtkonvexer Funktionsbestandteile .....	81
5.3.2	Dreidimensionales Beispiel für die Konvexifizierung eines nichtkonvexen Funktionsbestandteils .....	84
<b>6</b>	<b>Zusammenstellen des Optimierungsproblems</b> .....	<b>87</b>
6.1	Zusammenstellen des Zustandsvektors .....	87
6.2	Aufstellen der Zielfunktion .....	88
6.3	Aufstellen der Nebenbedingungen .....	90
6.3.1	Aussteuergrenzen der Zustandsgrößen .....	91
6.3.2	Lineare Gleichheitsnebenbedingungen für die Wirkleistungsbilanz des Netzes und die Transformationsbedingungen der Zustandsgrößen.....	94
6.3.3	Konvexifizierte quadratische Nebenbedingungen für Strom- und Spannungsgrenzwerte .....	95
6.3.4	Special-Ordered-Sets vom Typ 1 (SOS1).....	96
6.4	Startwertermittlung .....	97
<b>7</b>	<b>Fallstudien</b> .....	<b>99</b>
7.1	Datensatz und Berechnungsserver für die Fallstudien.....	99
7.2	Auswertungen zum Prognosefehler der Modellierung .....	101
7.3	Auswertungen zum Vergleich der Optimierung mit linearen oder quadratischen Nebenbedingungen.....	106
7.4	Auswertungen zur Verbesserung durch kombinierte Optimierung .....	109

<b>8 Zusammenfassung .....</b>	<b>113</b>
<b>9 Ausblick .....</b>	<b>117</b>
9.1 Berücksichtigung weiterer Einflussgrößen und -möglichkeiten .....	117
9.2 Berücksichtigung weiterer Restriktionen .....	118
9.3 Verbesserungen im Hinblick auf die Modellierung und die Lösung des Optimierungsproblems .....	119
<b>10 Literatur und Quellenverzeichnis .....</b>	<b>121</b>
<b>11 Anhang.....</b>	<b>129</b>
11.1 Herleitung der Taylorpolynome zweiter Ordnung.....	129
11.1.1 Netzleistungen .....	130
11.1.2 Netzverluste .....	138
11.1.3 Blindleistungsbedarf des Netzes.....	141
11.1.4 Verteilter Slack .....	144
11.1.5 Herleitung und Vereinfachung der ersten und zweiten Ableitung einer Betragsfunktion.....	146
11.1.6 Spannungsbeträge .....	149
11.1.7 Strombeträge.....	152
11.2 Einsetzen einer quadratischen Funktion in eine quadratische Funktion .....	164
11.3 Angenäherte Umkehrfunktion einer quadratischen Funktion .....	167
11.4 Herleitung des Abstands zwischen den Punkten QA und SY .....	171
<b>Lebenslauf.....</b>	<b>173</b>
<b>Wissenschaftlicher Werdegang.....</b>	<b>175</b>



## Abbildungsverzeichnis

<b>Bild 1.1</b>	Prognose zum Stromverbrauch der EU-27 für die Jahre 2010, 2015 und 2020 nach Sektoren [1.2].....	1
<b>Bild 1.2</b>	Bruttostromerzeugung in Deutschland [1.3] .....	2
<b>Bild 1.3</b>	Physikalischer Stromaustausch Deutschlands mit Nachbarländern [1.5] .....	3
<b>Bild 1.4</b>	Ergebnisse des TYNDP der ENTSO-E [1.22].....	4
<b>Bild 1.5</b>	Engpassarbeit und Engpassstunden in Deutschland (Daten aus [1.8], [1.9], [1.10], [1.11], [1.12], [1.13], [1.14]).....	5
<b>Bild 1.6</b>	Netzverluste und ihr Anteil am Nettostromverbrauch in Deutschland (Daten aus [1.20]).....	6
<b>Bild 1.7</b>	Übersicht über Ansätze zur Lösung von Optimierungsproblemen .....	8
<b>Bild 1.8</b>	Sequentielle quadratische Optimierung mit innerer sequentieller Konvexifizierung .....	11
<b>Bild 2.1</b>	Allgemeines Zweipol-Ersatzschaltbild.....	16
<b>Bild 2.2</b>	Allgemeines Vierpol-Ersatzschaltbild.....	16
<b>Bild 2.3</b>	Quellen-Ersatzschaltbild einer Einspeisung oder Last in Zweipoldarstellung.	16
<b>Bild 2.4</b>	Gemeinsames Lösungsgebiet zweier Nebenbedingungen.....	22
<b>Bild 2.5</b>	Beispiele für konvexe a), nichtkonvexe b) und disjunkte Mengen c) .....	23
<b>Bild 2.6</b>	Lokale und globale Minima von Zielfunktionen innerhalb von verschiedenen Lösungsgebieten .....	24
<b>Bild 3.1</b>	Wirkleistungs-Winkel-Kennlinie als Beispiel für die Beschreibung einer Funktion in zwei Koordinatensystem $P-\delta$ und $\Delta P-\Delta\delta$ .....	32
<b>Bild 3.5</b>	Übersicht über die Lösungen der Leistungsgleichung .....	46
<b>Bild 3.6</b>	Topologie des Zweiknotennetzes .....	48
<b>Bild 3.7</b>	Spannungszeiger von zwei physikalischen Lösungen der Leistungsgleichung für das Zweiknotennetz in <b>Bild 3.2</b> .....	48
<b>Bild 3.8</b>	Lösungsschalen des Zweiknotennetzes in <b>Bild 3.2</b> .....	49
<b>Bild 3.9</b>	Topologie des Dreiknotennetzes .....	50
<b>Bild 3.10</b>	Spannungszeiger von vier physikalischen Lösungen der Leistungsgleichung für das Dreiknotennetz in <b>Bild 3.5</b> .....	51
<b>Bild 3.11</b>	Spannungszeiger zweier zusätzlicher physikalischer Lösungen der Leistungsgleichung für das Dreiknotennetz in <b>Bild 3.5</b> in einem besonderen Lastfall .....	52
<b>Bild 3.12</b>	Spannungszeiger von vier physikalischen Lösungen der Leistungsgleichung für das Dreiknotennetz in <b>Bild 3.5</b> in einem besonderen Lastfall .....	53
<b>Bild 4.1</b>	Beispiel für eine Überschätzung des zulässigen Lösungsgebietes (grün) durch eine lineare Näherung (rot).....	59
<b>Bild 4.2</b>	Beispiel für eine Unterschätzung des zulässigen Lösungsgebietes (grün) durch lineare Näherung (rot) .....	59

<b>Bild 5.1</b>	Beispielhafte Darstellung der zu berücksichtigenden Punkte und Koordinatensysteme für die Koordinatentransformationen .....	70
<b>Bild 5.2</b>	Aufteilung der Hauptachsen $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-$ in zwei Hauptachsenabschnitte $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^-$ und $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,II,i}^-$ .....	77
<b>Bild 5.3</b>	Drei Beispiele von zur quadratischen Funktion symmetrisch liegenden stückweisen Linearisierungen, bestehend aus jeweils zwei Stücken.....	78
<b>Bild 5.4</b>	Zweidimensionale Beispiele für quadratische Funktionen mit einer linearen und einer quadratischen Variablen mit den entsprechenden Konvexifizierungen .....	82
<b>Bild 5.5</b>	Zweidimensionale Beispiele für quadratische Funktionen mit zwei quadratischen Variablen, deren Eigenwerte gleiche Vorzeichen haben, mit den entsprechenden Konvexifizierungen.....	83
<b>Bild 5.6</b>	Zweidimensionale Beispiele für quadratische Funktionen mit zwei quadratischen Variablen, deren Eigenwerte ungleiche Vorzeichen haben, mit den entsprechenden Konvexifizierungen .....	84
<b>Bild 6.1</b>	Zusammenhang zwischen den Aussteuergrenzen im ungedrehten (QA) und gedrehten ( $\alpha$ ,QA) Koordinatensystem.....	91
<b>Bild 6.2</b>	Lösungsgebiet zur Startwertermittlung mit nur einer Linearisierung .....	98
<b>Bild 7.1</b>	Netztopologie des verwendeten Datensatzes [7.1] für die Fallstudien (TRY = Testreferenzjahre).....	100
<b>Bild 7.2</b>	Sortierte Datenreihe der Ströme der Betriebsmittel bezogen auf die jeweilige Stromtragfähigkeit für den im Folgenden beispielhaft ausgewerteten Zeitpunkt $t = 1$ .....	100
<b>Bild 7.3</b>	Wirk- und Blindleistungsänderung an den Generatorknoten nach dem ersten Schritt der sequentiellen Optimierung .....	103
<b>Bild 7.4</b>	Prognosefehler der quadratischen Näherungen der Spannungsbeträge.....	104
<b>Bild 7.5</b>	Prognosefehler der quadratischen Näherungen der Strombeträge .....	105
<b>Bild 7.6</b>	Netzverluste bei sequentieller Optimierung mit quadratischen oder linearen Nebenbedingungen .....	106
<b>Bild 7.7</b>	Netzverluste bei sequentieller Optimierung mit quadratischen oder linearen Nebenbedingungen unter Annahme von Redispatchpotentials in Höhe von $\pm 1.000$ MW beziehungsweise $\pm 1.000$ Mvar an allen hochvermaschten Knoten .....	108
<b>Bild 7.8</b>	Einfluss von Blindleistungseinsatz auf den Wirkleistungsfluss in einer Beispielanordnung .....	110
<b>Bild 7.9</b>	Änderungen des Stromes und des Wirkleistungsflusses in Abhängigkeit der Blindleistungseinspeisung .....	110
<b>Bild 7.10</b>	Wirkleistungsredispatch im Vergleich von kombinierter und separater Optimierung.....	111
<b>Bild 7.11</b>	Blindleistungsredispatch im Vergleich von kombinierter und separater Optimierung.....	111

## Tabellenverzeichnis

<b>Tabelle 1.1</b>	Übersicht über Optimierungsprobleme und Lösbarkeit durch CPLEX und Gurobi .....	13
<b>Tabelle 2.1</b>	Vierpoldarstellungen einer Leitung und eines Transformators .....	17
<b>Tabelle 2.2</b>	Wertebereiche der Variablen eines Optimierungsproblems .....	21
<b>Tabelle 2.3</b>	Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems .....	21
<b>Tabelle 3.1</b>	Knotentypen der Netzberechnung .....	31
<b>Tabelle 7.1</b>	Prognosefehler der Netzverluste .....	103
<b>Tabelle 11.1</b>	Hilfsvektoren und -matrizen für die Berechnung der Jakobi- und Hessematrizen .....	130
<b>Tabelle 11.2</b>	Hilfsmatrizen der Admittanzen .....	130
<b>Tabelle 11.3</b>	Hilfsmatrizen der Spannungen .....	130
<b>Tabelle 11.4</b>	Hilfsmatrizen der Ströme .....	130
<b>Tabelle 11.5</b>	Hilfsmatrizen der Leistungen .....	130
<b>Tabelle 11.6</b>	Erste Ableitungen der Leistungsdifferenzgleichung in Polarkoordinaten ..	131
<b>Tabelle 11.7</b>	Ableitungen nach den Winkeln der Ableitungen nach den Winkeln der Leistungsdifferenzgleichung .....	132
<b>Tabelle 11.8</b>	Ableitungen nach den Spannungen der Ableitungen nach den Winkeln der Leistungsdifferenzgleichung .....	133
<b>Tabelle 11.9</b>	Ableitungen nach den Winkeln der Ableitungen nach den Spannungen der Leistungsdifferenzgleichung .....	133
<b>Tabelle 11.10</b>	Ableitungen nach den Spannungen der Ableitungen nach den Spannungen der Leistungsdifferenzgleichung .....	134
<b>Tabelle 11.11</b>	erste Ableitungen der Leistungsdifferenzgleichung in kartesischen Koordinaten .....	135
<b>Tabelle 11.12</b>	Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Leistungsdifferenzgleichung .....	136
<b>Tabelle 11.13</b>	Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Leistungsdifferenzgleichung .....	136
<b>Tabelle 11.14</b>	Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Leistungsdifferenzgleichung .....	137
<b>Tabelle 11.15</b>	Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Leistungsdifferenzgleichung .....	137
<b>Tabelle 11.16</b>	Erste Ableitungen der Änderung der Netzverluste in Polarkoordinaten .....	138
<b>Tabelle 11.17</b>	Zweite Ableitungen der Änderung der Netzverluste in Polarkoordinaten <sup>20</sup> ...	139
<b>Tabelle 11.18</b>	Erste Ableitungen der Änderung der Netzverluste in kartesischen Koordinaten .....	140
<b>Tabelle 11.19</b>	Zweite Ableitungen der Änderung der Netzverluste in kartesischen Koordinaten .....	140

<b>Tabelle 11.20</b> Erste Ableitungen der Änderung des Blindleistungsbedarfes in Polarkoordinaten.....	142
<b>Tabelle 11.21</b> Zweite Ableitungen der Änderung des Blindleistungsbedarfes in Polarkoordinaten <sup>20</sup> .....	142
<b>Tabelle 11.22</b> Erste Ableitungen der Änderung des Blindleistungsbedarfes in kartesischen Koordinaten .....	143
<b>Tabelle 11.23</b> Zweite Ableitungen der Änderung des Blindleistungsbedarfes in kartesischen Koordinaten .....	144
<b>Tabelle 11.24</b> Erste Ableitungen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten .....	150
<b>Tabelle 11.25</b> Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten	150
<b>Tabelle 11.26</b> Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten .....	151
<b>Tabelle 11.27</b> Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten .....	151
<b>Tabelle 11.28</b> Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten .....	151
<b>Tabelle 11.29</b> Erste Ableitungen der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten.....	153
<b>Tabelle 11.30</b> Ableitungen nach den Winkeln der Ableitungen nach den Winkeln der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten.....	154
<b>Tabelle 11.31</b> Ableitungen nach den Spannungen der Ableitungen nach den Winkeln der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten.....	155
<b>Tabelle 11.32</b> Ableitungen nach den Winkeln der Ableitungen nach den Spannungen der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten.....	156
<b>Tabelle 11.33</b> Ableitungen nach den Spannungen der Ableitungen nach den Spannungen der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten <sup>20</sup> .....	157
<b>Tabelle 11.34</b> Erste Ableitungen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten .....	158
<b>Tabelle 11.35</b> Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten.....	160
<b>Tabelle 11.36</b> Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten.....	161
<b>Tabelle 11.37</b> Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten.....	162
<b>Tabelle 11.38</b> Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten .....	163

## Verzeichnis der Abkürzungen, Formelzeichen und Indizes

Nachfolgend sind die verwendeten Abkürzungen, Formelzeichen und Indizes in alphabetischer Folge aufgelistet, die bei der Einführung im Text erklärt werden.

### Abkürzungen

AP	Ausgangspunkt
<i>AnzEWneg</i>	Anzahl der negativen Eigenwerte
BNetzA	Bundesnetzagentur für Elektrizität, Gas, Telekommunikation, Post und Eisenbahnen
DC	direct current
ENTSOE-E	European Network of Transmission System Operators for Electricity
EU	Europäische Union
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
IfES	Institut für Elektrische Energiesysteme, Leibniz Universität Hannover
HGÜ	Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragung
HVDC	high-voltage direct current
K1 / K2	Konvexifizierungspunkt
LCQP	linearly constrained Quadratic Programming
MI	Mixed Integer
QA	Punkt der quadratischen Annäherung
QCQP	quadratically constrained Quadratic Programming
QNB	quadratische Nebenbedingung
QP	Quadratic Programming
SLCQP	sequential linearly constrained Quadratic Programming
SOS1/2	Special Ordered Set vom Typ 1 oder 2
SQCQP	sequential quadratically constrained Quadratic Programming
SY	Symmetriepunkt
TYNDP	Ten Year Network Development Plan
ZF	Zielfunktion

## Allgemeines zur Formelzeichen

Variablen werden kursiv und Konstanten werden steil dargestellt.

Komplexe Größen werden durch einen Unterstrich gekennzeichnet.

Nicht zusammengehörige Indizes werden durch Komma voneinander getrennt.

Vektoren (Kleinbuchstaben) und Matrizen (Großbuchstaben) werden fett dargestellt.

Transponierte Vektoren oder Matrizen werden durch ein hochgestelltes T gekennzeichnet.

In dieser Arbeit werden verschiedene Operationen mit (reellen oder komplexen) Vektoren durchgeführt. Ohne weitere Kennzeichnung wird hierbei von komponentenweisen Operationen ausgegangen, wenn folgende Operationen durchgeführt werden:

$$\sqrt{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_1} \\ \vdots \\ \sqrt{x_n} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix} \quad |\mathbf{x}| = \begin{bmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{bmatrix} \quad \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} x_1/y_1 \\ \vdots \\ x_n/y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^T \otimes \{\mathbf{H}\} \otimes \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

$$\text{diag}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}^{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} e^{x_1} \\ \vdots \\ e^{x_n} \end{bmatrix} \quad \sin(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \\ \vdots \\ \sin(x_n) \end{bmatrix} \quad \cos(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \cos(x_1) \\ \vdots \\ \cos(x_n) \end{bmatrix}$$

## Allgemeine Formelzeichen

$\underline{a}, \underline{A}$	komplexe Zahl		
$\underline{a}^*, \underline{A}^*$	konjugiert komplexe Zahl		
$a, A$	Betrag einer komplexen Zahl		
$\mathbf{a}$	Spalten- oder Zeilenvektor mit reellen Elementen	$\mathbf{A}$	Matrix mit reellen Elementen
$\underline{\mathbf{a}}$	Spalten- oder Zeilenvektor mit komplexen Elementen	$\underline{\mathbf{A}}$	Matrix mit komplexen Elementen
$\underline{\mathbf{a}}^T, \mathbf{a}^T$	transponierter Spalten- oder Zeilenvektor	$\underline{\mathbf{A}}^T, \mathbf{A}^T$	transponierte Matrix
$\underline{\mathbf{a}}^\perp, \mathbf{a}^\perp$	in die dritte Dimension transponierter Spalten- oder Zeilenvektor	$\{\mathbf{A}\}$	dreidimensionales Array von Matrizen
		$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix
		$\mathbf{0}$	Nullmatrix- oder Vektor
		$\Delta$	Differenz

## Mathematische und physikalische Konstanten

$e=2,71828\dots$	Eulersche Zahl	$i = j = \sqrt{-1}$	Imaginäre Einheit
$\pi=3,14159\dots$	Kreiszahl Pi	$\underline{a} = e^{j2\pi/3}$	komplexer Drehoperator

### Formelzeichen

$k$	konstanter Anteil		
$t$	Zeitpunkt		
$\ddot{u}$	Übersetzungsverhältnis		
$\delta$	Spannungswinkel	$\delta_K$	Spannungswinkel
$\lambda$	Eigenwert		
$\omega$	Kreisfrequenz		
$B$	Suszeptanz	$\underline{B}_{ZZ}, \underline{B}_{KK}$	Zweigsuszeptanzmatrix, Knotensuszeptanzmatrix
$C$	Kapazität		
		$D$	Diagonalmatrix der Eigenwerte
		$E$	Einheitsmatrix
$G$	Leitwert	$\underline{G}_{ZZ}, \underline{G}_{KK}$	Zweigleitwertmatrix, Knotenleitwertmatrix
		$\mathbf{g}, \mathbf{G}$	Gradient, Jakobimatrix
		$H$	Hessematrix
$I, \underline{I}$	Strombetrag, komplexer Strom	$\underline{i}_Z, \underline{i}_K$	Zweigstromvektor, Knotenstromvektor
		$KZ$	Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix
$P$	Wirkleistung	$p_Z, p_K$	Zweigwirkleistungen, Knotenwirkleistungen
$P_V$	Netzverluste		
$Q$	Blindleistung	$q_Z, q_K$	Zweigblindleistungen, Knotenblindleistungen
$R$	Widerstand		
$S, \underline{S}$	Scheinleistungsbetrag, komplexe Scheinleistung	$\underline{s}_Z, \underline{s}_K, \underline{s}_N$	Zweigscheinleistungen, Knotenscheinleistungen, Netzscheinleistungen
		$T$	Transformationsmatrix
$U, \underline{U}$	Spannungsbetrag, komplexe Spannung	$\mathbf{u}, \underline{u}_Z, \underline{u}_K$	Spannungsbeträge, Zweigspannungen, Knotenspannungen
		$\underline{U}_Z, \underline{U}_K$	Diagonalmatrix der Zweigspannungen, Diagonalmatrix der Knotenspannungen
$Y, \underline{Y}$	Admittanzbetrag, komplexe Admittanz	$\underline{Y}_{ZZ}, \underline{Y}_{KK}$	Zweigadmittanzmatrix, Knotenadmittanzmatrix
$X$	Reaktanz		
		$\mathbf{0}_K$	Nullvektor
		$\mathbf{1}_K$	Einservektor

### Hoch oder tief gestellte Indizes

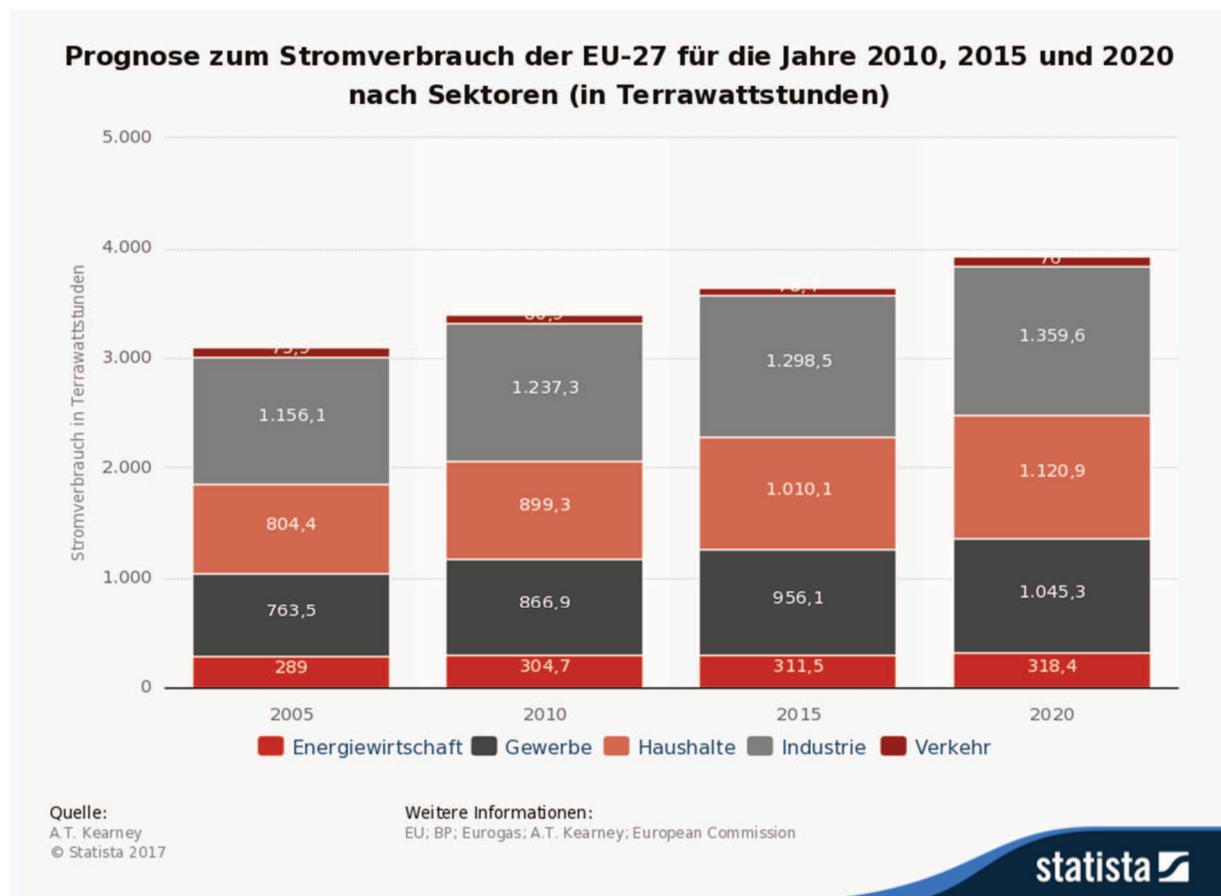
$b, i, j, k, l, m, n, r, z$	Zählindizes
eq	Gleichheitsbedingungen (equality constraint)
h	Hauptfeld
i	Imaginärteil
kon	konvexifiziert
lin	linear
max	maximal
min	minimal
n	Nenngröße
(n-1)	Größe im (n-1)-Fall
q	Quellgröße
qnb	quadratische Nebenbedingung
quad	quadratisch
r	Realteil
zf	Zielfunktion
$\alpha$	gedrehte Größe
A	Knoten A oder Abnehmer
B	Knoten B oder Bilanz
AP	Ausgangspunkt
Fe	Eisen
G	Generator
K, Z	Knotenanzahl, Zweiganzahl
L	Last
N	Netz
OS, US	Oberspannungsseite, Unterspannungsseite
P	Wirkleistung
PU	PU-Knoten
Q	Blindleistung
QA	Punkt der quadratischen Annäherung
RZ	Regelzone
S	Slack-Knoten
SY	Symmetriepunkt
V	Verluste
VS	Verteilter Slack
0	unveränderte Größe (tiefgestellt) oder Nulleigenwert (hochgestellt)
-1	invertierte Größe
I, II, III, IV, V, VI	Zählgrößen in römischen Zahlen
+, -	positiver oder negativer Eigenwert

# 1 Einleitung

## 1.1 Hintergrund und Motivation

Diese Arbeit reiht sich in die Arbeiten um die „Herkulesaufgabe“ [1.1] der Energiewende und den mit ihr in vielen Ländern – beispielsweise in Deutschland – verbundenen Ausstieg aus der energetischen Nutzung der Kernenergie ein und möchte ein Puzzlestück zu ihrem Gelingen beitragen.

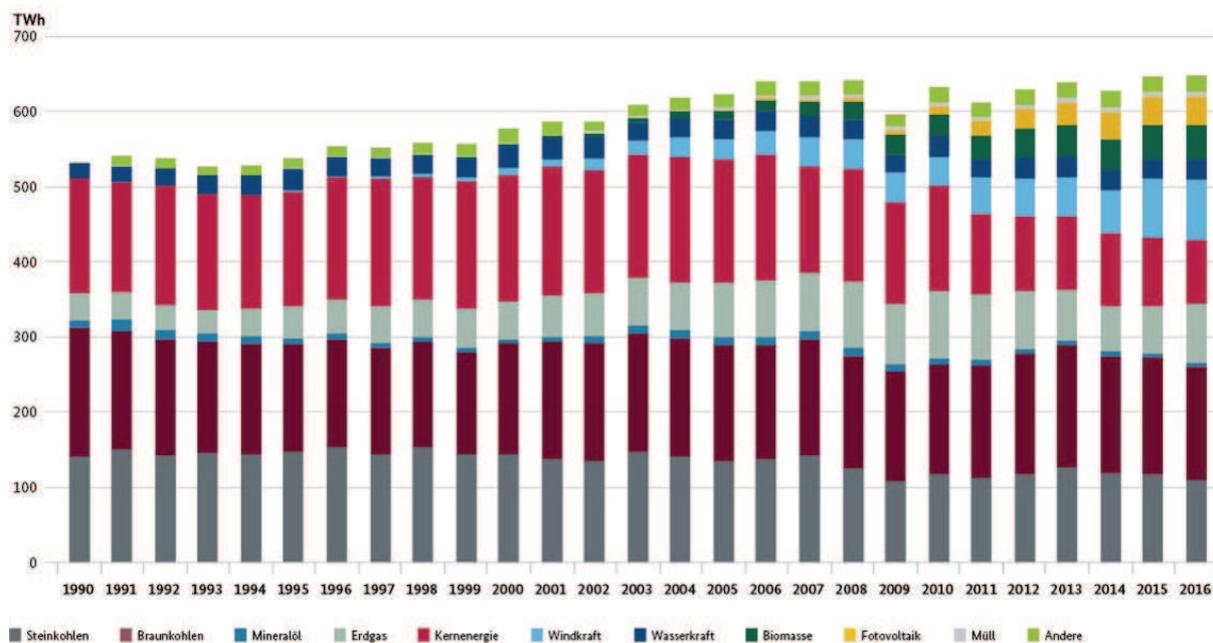
In Europa und darüber hinaus sind die Energieversorgungssysteme einem grundsätzlichen Strukturwandel unterworfen, der zu technisch, politisch und wirtschaftlich veränderten Rahmenbedingungen führt. Weil viele energetischen Anwendungen wie beispielsweise Teile der Mobilität und der Wärmeversorgung elektrifiziert werden, ist trotz zunehmender Bemühungen um Energieeffizienz auch weiterhin von einem steigenden Stromverbrauch auszugehen, der von den elektrischen Energieversorgungsnetzen die Übernahme weiterer Transportaufgaben erfordert. **Bild 1.1** zeigt diese Entwicklung beispielhaft für den prognostizierten Stromverbrauch Europas aufgeteilt nach Sektoren.



**Bild 1.1** Prognose zum Stromverbrauch der EU-27 für die Jahre 2010, 2015 und 2020 nach Sektoren [1.2]

## 1 Einleitung

Auch erzeugerseitig ist das elektrische Energieversorgungssystem einem tiefgreifenden Wandel unterworfen, indem nicht nur Kraftwerke auf Basis von Kernenergie, sondern insbesondere Kraftwerke auf Basis fossiler Energieträger zunehmend durch Erzeugungsanlagen auf Basis von erneuerbaren Energien verdrängt werden. Diese Entwicklung ist am Beispiel der Bruttostromerzeugung in Deutschland aufgeteilt nach Energieträgern in **Bild 1.2** dargestellt. Die Bundesregierung hat sich für Deutschland zum Ziel gesetzt, den Anteil der erneuerbaren Energien von derzeit etwa 33 % bis zum Jahr 2025 auf 40 % bis 45 % und bis zum Jahr 2035 auf 55 % bis 60 % zu steigern [1.21].

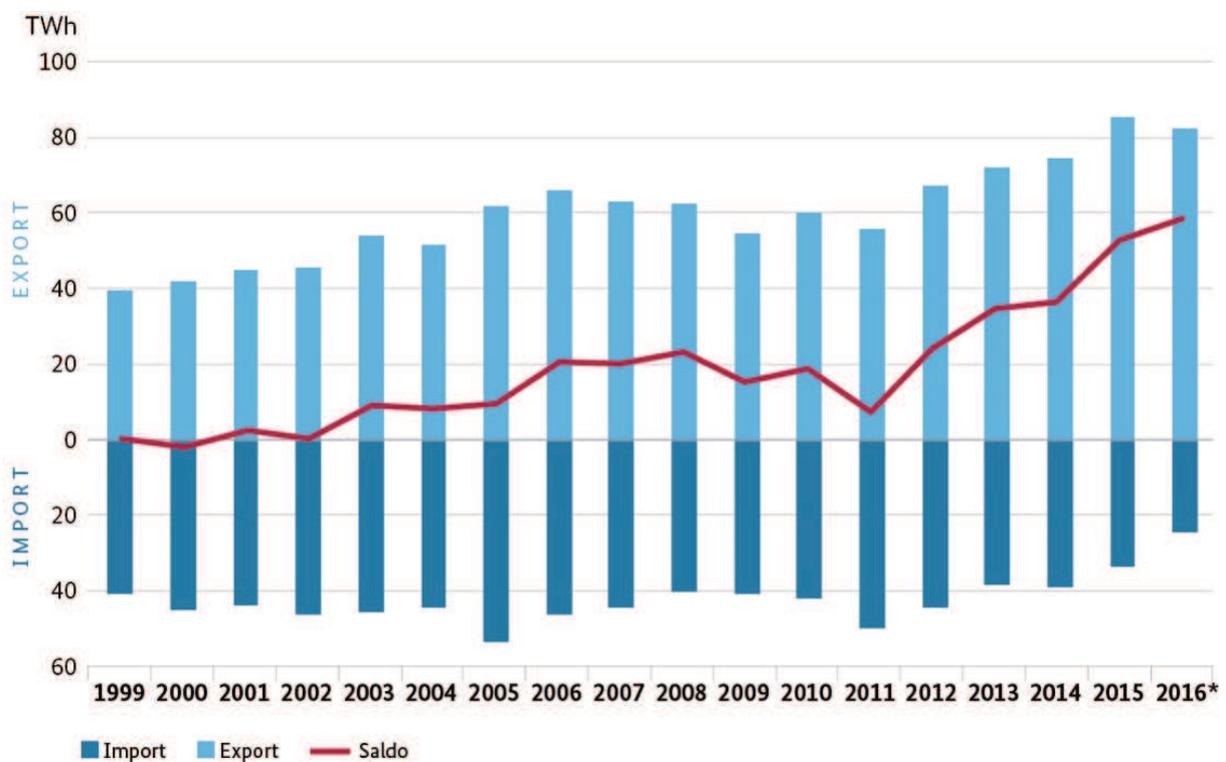


**Bild 1.2** Bruttostromerzeugung in Deutschland [1.3]

Bestehende Kraftwerke auf Basis fossiler Energieträger wurden tendenziell in der Nähe der von ihnen zu versorgenden Lastschwerpunkte errichtet. Erzeugungsanlagen auf Basis von erneuerbaren Energien werden im Gegensatz dazu dort errichtet, wo die Ausnutzung der erneuerbaren Energien am wirtschaftlichsten erfolgen kann. Durch diese räumliche Verlagerung der Erzeugungskapazitäten ergeben sich erhöhte Transportaufgaben für die elektrischen Energieversorgungsnetze. Dieser Effekt wird durch den zeitlich volatilen Charakter der Einspeisung der Erzeugungsanlagen auf Basis von erneuerbaren Energien verstärkt, da es nicht nur eine spezifische oder eine ungünstigste Einspeisesituation, die vom elektrischen Energieversorgungsnetz beherrscht werden muss, sondern eine Vielzahl von stark unterschiedlichen, wetterabhängigen Einspeisesituationen gibt. Neben der zusätzlichen Transportaufgabe durch die räumliche Verlagerung der Wirkleistungseinspeisungen, ändert sich auch die Spannungsebene der Einspei-

sung, da Erzeugungsanlagen auf Basis erneuerbarer Energien aufgrund ihrer kleineren Bemessungsleistungen zum größten Teil in den dem Übertragungsnetz unterlagerten Spannungsebenen angeschlossen werden, sodass die Einspeisung von Leistung räumlich und netztechnisch an anderer Position erfolgt und weiteren Restriktionen unterliegt.

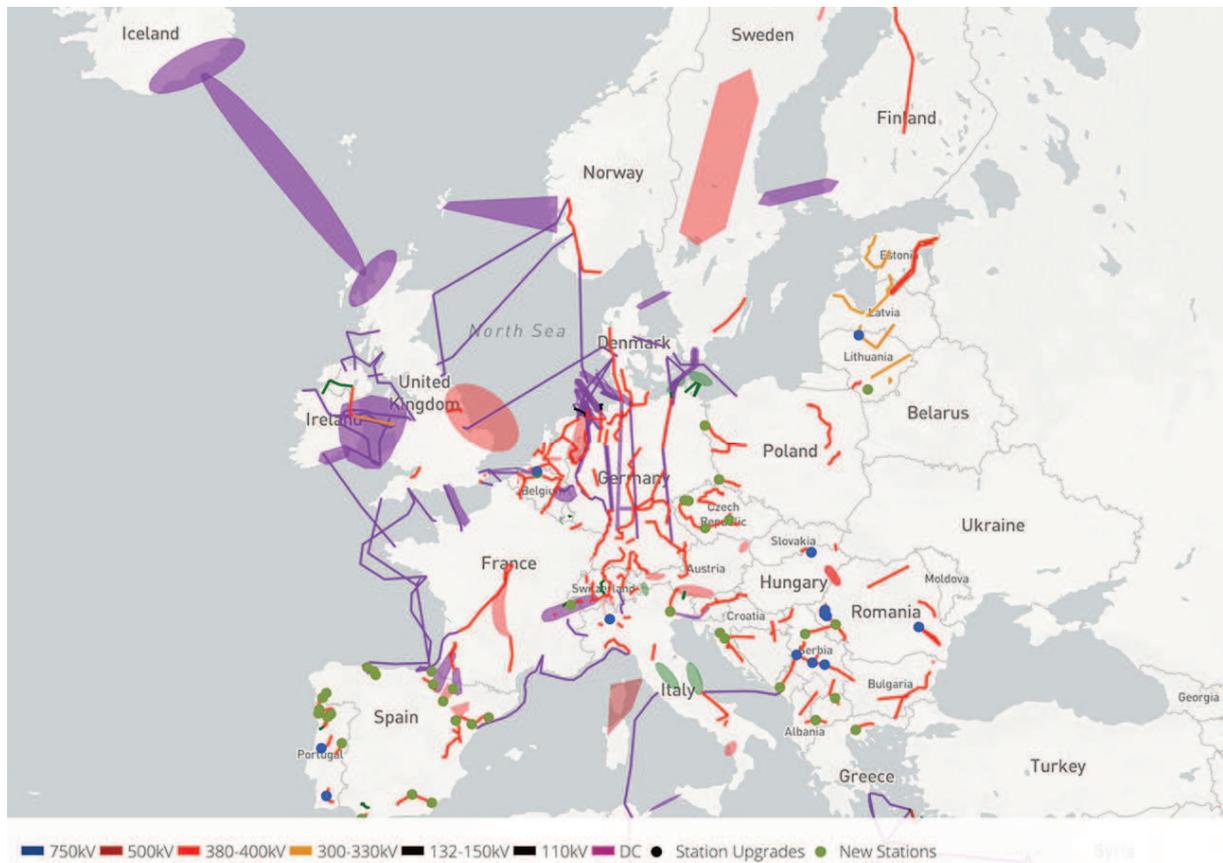
Weiteren Einfluss auf die Energieversorgungssysteme hat der regulatorische Rahmen, der in Europa durch die Europäische Union (EU) und die nationale Gesetzgebung vorgegeben und durch die Agency for the Cooperation of Energy Regulators (ACER) sowie die nationalen Regulierungsbehörden (in Deutschland die Bundesnetzagentur (BNetzA)) und den Verband Europäischer Übertragungsnetzbetreiber (European Network of Transmission System Operators for Electricity (ENTSO-E)) umgesetzt bzw. kontrolliert wird. Mit dem Ziel einen gemeinsamen, diskriminierungsfreien und grenzüberschreitenden Energiebinnenmarkt zu schaffen [1.4], um die Energieversorgung nachhaltiger, preisgünstiger und sicherer zu machen, ist eine Zunahme des grenzüberschreitenden Stromhandels verbunden, sodass auch hierdurch weitere Transportaufgaben vom elektrischen Energieversorgungsnetz übernommen werden müssen. Insbesondere Deutschland ist hiervon aufgrund seiner geographisch zentralen Lage innerhalb Europas betroffen. **Bild 1.3** zeigt die Auswirkungen des Stromhandels am Beispiel des physikalischen Stromaustausches Deutschlands mit seinen Nachbarländern.



\* Vorläufige Angaben

**Bild 1.3** Physikalischer Stromaustausch Deutschlands mit Nachbarländern [1.5]

International ist in den nächsten Jahren und Jahrzehnten von einem weiteren Ausbau der Übertragungskapazitäten zwischen den Ländern auszugehen. Für das Netzgebiet der ENTSO-E beschreibt der Ten Year Network Development Plan (TYNDP) die geplanten Leitungsausbauprojekte. Die Ergebnisse des TYNDP 2016 sind in **Bild 1.4** dargestellt.



**Bild 1.4** Ergebnisse des TYNDP der ENTSO-E [1.22]

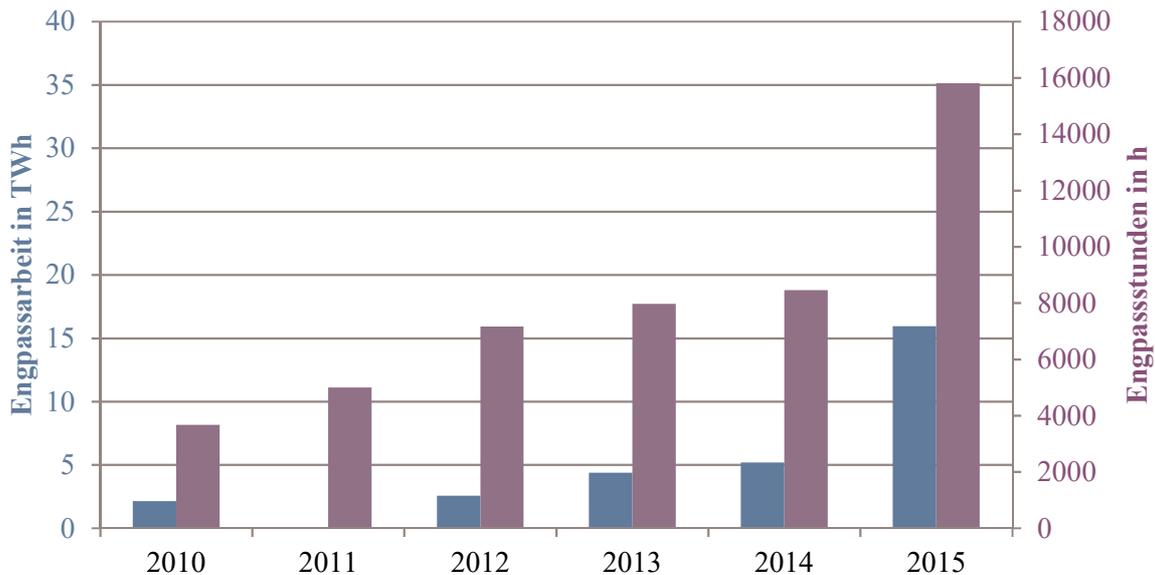
Den vorgenannten Herausforderungen steht jedoch an vielen Stellen, vor allem in Deutschland und an seinen Grenzen [1.6], ein verzögerter Netzausbau gegenüber.

Die beschriebenen Entwicklungen erhöhen insgesamt die Transportaufgaben der elektrischen Energieversorgungsnetze und führen zunehmend zu einem Betrieb der Netze an ihren Betriebsgrenzen. Der Belastungszustand eines Netzes bestimmt sich durch die Last, die Einspeisungen aus erneuerbaren Energien und den Kraftwerks- und Speichereinsatz, der sich durch die Marktteilnehmer bildet und als Dispatch bezeichnet wird. Da dieser Dispatch den sich ergebenden Netzzustand und die Restriktionen des Netzes nicht beziehungsweise nur teilweise berücksichtigt<sup>1</sup>, führen Netzbetreiber einen sogenannten Redispatch, also Anpassungen am Kraftwerks-

---

<sup>1</sup> beispielsweise durch Net-Transfer-Capacities (NTCs)

und Speichereinsatz durch, um die Betriebsgrenzen des Netzes wieder einzuhalten<sup>2</sup>. Hierbei sind insbesondere die zulässige Stromtragfähigkeit der Betriebsmittel des Netzes sowie die zulässigen oberen und unteren Spannungsgrenzen des Netzes zu berücksichtigen. Diese Betriebsgrenzen sind nicht nur im fehlerfreien Betriebszustand, der als (n-0)-Fall bezeichnet wird, sondern auch in allen fehlerbehafteten Betriebszuständen, die als (n-1)-Fälle bezeichnet werden, einzuhalten. Für Deutschland zeigt **Bild 1.5** beispielhaft die Zunahme der jährlichen Engpassarbeit durch Redispatchmaßnahmen und der Anzahl der Engpassstunden pro Jahr.



**Bild 1.5** Engpassarbeit<sup>3</sup> und Engpassstunden in Deutschland (Daten aus [1.8], [1.9], [1.10], [1.11], [1.12], [1.13], [1.14])

Die Auswertungen zeigen, dass der beschriebene Strukturwandel des elektrischen Energieversorgungssystems einen deutlich zunehmenden Bedarf von Redispatchmaßnahmen zur Folge hat, von dem aufgrund der dargestellten Entwicklungen für die nächsten Jahre eher angenommen werden muss, dass er weiter steigt, wenngleich die Maßnahmen der Netzentwicklungspläne. Da die den Kraftwerks- und Speicherbetreibern beim Redispatch entstehenden wirtschaftlichen Schäden und der entstehende Aufwand von den Netzbetreibern zu kompensieren sind, ist der Netzbetreiber angehalten, die Wiederherstellung eines sicheren Systembetriebs

<sup>2</sup> Weitere marktbezogene Maßnahmen der Netzbetreiber wie beispielsweise Countertrading werden in dieser Arbeit nicht gesondert betrachtet, sondern unter Redispatch subsumiert.

<sup>3</sup> [1.9] waren keine Angaben zur Engpassarbeit für das Jahr 2011 zu entnehmen.

möglichst kostenoptimal durchzuführen<sup>4</sup>. Es ergibt sich somit aus Sicht des Netzbetreibers das Optimierungsproblem, die Kosten für die Wiederherstellung eines sicheren Systembetriebs zu minimieren. Wenn keine Grenzwertverletzungen vorliegen oder diese beseitigt wurden, sind die Kosten der Betriebsführung zu minimieren ohne hierbei Grenzwertverletzungen zu verursachen. Als variable Kosten der Betriebsführung sind im Wesentlichen die Netzverluste anzusehen [1.19], die der Netzbetreiber beispielsweise durch Blindleistungseinsatz beeinflussen kann. **Bild 1.6** zeigt beispielhaft die Netzverluste<sup>5</sup> und ihren Anteil am Nettostromverbrauch in Deutschland für ausgewählte Jahre.



**Bild 1.6** Netzverluste und ihr Anteil am Nettostromverbrauch in Deutschland (Daten aus [1.20])

Im Vergleich der Größenordnungen von Engpassarbeit und Netzverlusten zeigt sich, dass beide ähnliche Größenordnungen aufweisen und daher keine der beiden Größen vorrangig vor der anderen optimiert werden sollte. Nach den Kosten für Regelleistung sind die Kosten für Netzverluste die zweitgrößten Hilfsdienstkosten der deutschen Netzbetreiber [1.19].

## 1.2 Zielstellungen und Forschungsfragen

Diese Arbeit hat zwei wesentliche Zielstellungen. Zum einen soll das im vorherigen Abschnitt skizzierte Optimierungsproblem detailliert erläutert und möglichst genau formuliert werden.

---

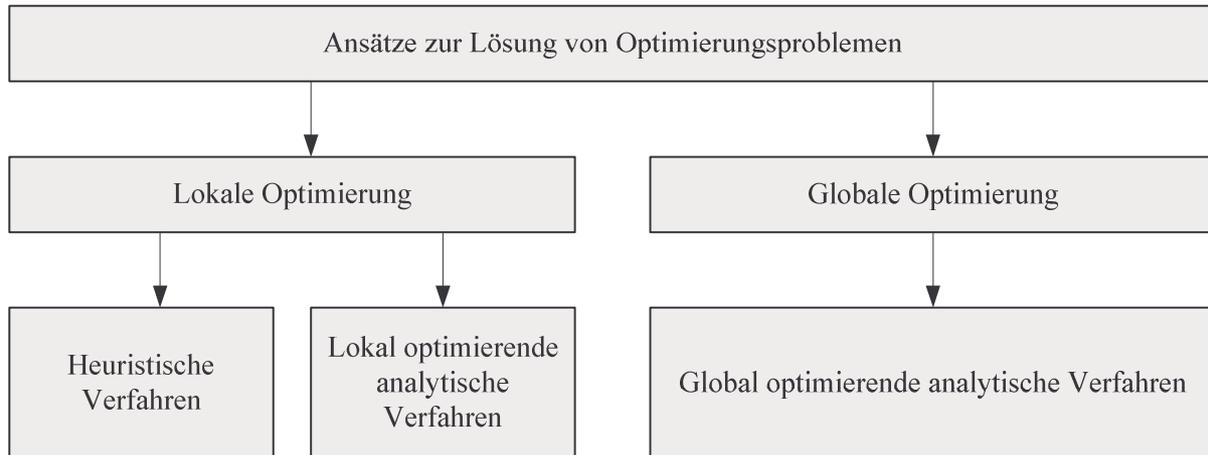
<sup>4</sup> Die in Deutschland speziellen Anforderungen an die Maßnahmen zur Herstellung der Systemsicherheit nach § 13 EnWG [1.7] sind nicht Bestandteil der Ausarbeitungen in dieser Arbeit, da der Fokus dieser Arbeit auf den grundsätzlichen technischen Zusammenhängen des elektrischen Energieversorgungsnetzes und nicht auf den regulatorischen Besonderheiten einzelner Länder liegt.

<sup>5</sup> Dargestellt sind in **Bild 1.6** die Netzverluste aller Spannungsebenen.

Hierbei soll sowohl der Wirk- als auch der Blindleistungseinsatz berücksichtigt werden. Die detailgenaue Modellierung des Netzes und seiner Gleichungssysteme bildet daher einen der Schwerpunkte dieser Arbeit. Durch die Lösung des Optimierungsproblems sollen die Kosten für die Netzverluste und den Redispatch minimiert werden. Zum anderen soll das Optimierungsproblem zur kostenoptimalen Wiederherstellung und Kostenminimierung des sicheren Systembetriebs möglichst global-optimal gelöst werden. Ein weiterer Schwerpunkt sind somit die hierzu mathematisch notwendigen Formulierungen und die auf ein Mindestmaß zu beschränkenden notwendigen Näherungen zur global-optimalen Lösung des Optimierungsproblems. Die notwendigen Näherungen sollen hierbei zeitsparend durch Herleitung allgemeingültiger und kompakter Berechnungsformeln ermittelt werden.

In Deutschland werden die Engpassbeseitigung und die Netzverlustoptimierung auf Basis der bestehenden regulatorischen Anforderungen als zwei separate Optimierungen durchgeführt. Die Engpassbeseitigung wird als lineares Optimierungsproblem angenähert und die Spannungs-Blindleistungsoptimierung zur Minimierung der Übertragungsverluste ausgehend von einem engpassfreien Zustand optimiert. Einen Überblick über aktuell verwendete Methoden bietet [1.15]. Da Übertragungsengpässe in der Regel wesentlich durch Wirkleistungstransporte bedingt sind, können die Engpässe durch Änderung der Wirkleistungseinspeisungen beseitigt werden. Da zumindest im Übertragungsnetz aufgrund des kleinen  $R$ -zu- $X$ -Verhältnisses eine dominierende Kopplung zwischen den Spannungsbeträgen und der Blindleistungseinspeisung besteht, kann das Spannungsniveau mit Hilfe von Blindleistungseinspeisungen beeinflusst werden. Jedoch besteht auch eine Kopplung zwischen Blindleistungseinspeisungen und Übertragungsengpässen sowie zwischen Spannungsbandverletzungen und Wirkleistungstransporten. Es ist daher eine zentrale Forschungsfrage dieser Arbeit, ob die gemeinsame Formulierung und Lösung der Engpassbeseitigung und der Spannungs-Blindleistungsoptimierung vorteilhaft ist. Es besteht diesbezüglich beispielsweise die Aussicht, dass eine Transportaufgabe von Wirkleistung, die einen Engpass auf einem Übertragungsweg verursacht, durch Blindleistungsveränderungen auf einen anderen Übertragungsweg verschoben werden kann. Des Weiteren sind beispielsweise in Deutschland zunehmend spannungsbedingte Wirkleistungsredispatchmaßnahmen notwendig [1.14]. Um diese Wechselwirkungen zu berücksichtigen und um unter Umständen zueinander bezüglich Spannungen und Übertragungsengpässen kontraproduktive Wirkbeziehungsweise Blindleistungsänderungen zu verhindern, ist es aussichtsreich, die Optimierungen zu verknüpfen.

Zum Lösen von Optimierungsproblemen gibt es eine Vielzahl von Ansätzen, die in verschiedene Kategorien eingeteilt werden können. Eine mögliche Einteilung ist in **Bild 1.7** dargestellt. Über die dargestellten Kategorien hinausgehend, gibt es noch eine Vielzahl von weiteren Unter- und Mischformen. Eine umfangreiche Übersicht über Lösungsansätze für Optimierungsprobleme kann beispielsweise [4.8] entnommen werden.



**Bild 1.7** Übersicht über Ansätze zur Lösung von Optimierungsproblemen

Zunächst kann die globale Optimierung von der lokalen Optimierung unterschieden werden. Zufällig kann bei der lokalen Optimierung ein globales Optimum gefunden werden, jedoch kann im Rahmen der lokalen Optimierung nicht sichergestellt werden, dass tatsächlich ein globales Optimum ermittelt wird.

Heuristische Verfahren bieten sich an, wenn das Optimierungsproblem nicht explizit formulierbare Funktionen enthält, sehr groß, nichtlinear und/oder nichtkonvex ist und nicht zwingend ein globales Optimum gefunden werden muss. Heuristische Verfahren basieren beispielsweise auf Simulated Annealing, evolutionären Algorithmen, Schwarmintelligenzverfahren, Neuronalen Netze oder selbstlernenden Verfahren. Diese Verfahren suchen das Lösungsgebiet teilweise mit stochastischen, selbstlernenden oder naturinspirierten Ansätzen nach Optima ab. Die Verfahren benötigen im Allgemeinen einen hohen Rechen- und Zeitaufwand.

Lokal optimierende analytische Verfahren hingegen benutzen analytische Methoden, um ein Optimum oder mehrere Optima zu finden. Diese Verfahren nutzen beispielsweise den Gradienten der Funktion, um die Änderungsrichtung zum nächsten lokalen Optimum zu bestimmen. Die Verfahren erfordern im Allgemeinen einen deutlich geringeren Rechen- und Zeitaufwand als heuristische Verfahren, finden jedoch in vielen Anwendungsfällen nicht so gute Lösungen wie die heuristischen Verfahren, da in letzteren gezielte Strategien implementiert werden können, um nicht in lokalen Optima zu verharren.

Die gezielte globale Optimierung kann nur mit analytischen Verfahren erfolgen, die entweder die analytischen Eigenschaften der Funktionen nutzen, oder durch „intelligentes Ausprobieren“ eine Lösung finden. Ein verbreiteter Ansatz ist die Intervallaufteilung (Domain Reduction [1.16]), bei der die zu optimierende Funktion in mehrere Bereiche unterteilt wird, in denen jeweils lokal optimiert wird. Durch Vergleich der lokalen Optima wird ein globales Optimum ermittelt.

Bezugnehmend auf die Zielstellung dieser Arbeit, möglichst die global-optimale Lösung des Optimierungsproblems zu finden, kommen für den sogenannten Optimal Power Flow nur global optimierende analytische Verfahren in Betracht. Solche Verfahren nutzt beispielsweise BARON [5.2], jedoch ist eine lange Rechenzeit zu erwarten, da das zu lösende Optimierungsproblem nicht explizit formulierbare Funktionen enthält, sehr groß, nichtlinear und nichtkonvex ist. Es ergibt sich daher als weitere zentrale Forschungsfrage für diese Arbeit, ob das Optimierungsproblem so angenähert und dann sequentiell gelöst werden kann, dass die Näherung in jedem Schritt der sequentiellen Optimierung einen so kleinen Fehler hat, dass weiterhin davon ausgegangen werden kann, dass durch die Lösung des angenäherten Optimierungsproblems ein globales Optimum gefunden wird. Insbesondere sind hierbei die Unterschiede zwischen linearen und quadratischen Näherungen zu vergleichen, und es ist zu untersuchen, ob die sequentielle Optimierung konvergiert oder divergiert. Der Ansatz einer Näherung bietet sich immer dann an, wenn davon ausgegangen oder vermutet werden kann, dass die Zielfunktion und die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems durch die Näherung – in dieser Arbeit linear oder quadratisch – gut angenähert werden können. Dies erscheint im Anwendungsfall dieser Arbeit aussichtsreich, da die Basisgleichungen des Netzes in komplexer und kartesischer Darstellung nur quadratische Nichtlinearitäten aufweisen<sup>6</sup>. Linearisierungen und zunehmend auch quadratische Näherungen wurden darüber hinaus für den Optimal Power Flow bereits öfter, beispielsweise in [4.1], [4.2], verwendet. Es besteht bezüglich des angenäherten Optimierungsproblems zudem die Aussicht, dass es mit hierfür spezialisierten analytischen Verfahren in akzeptabler Zeit global-optimal gelöst werden kann. Ein Optimierungsproblem mit quadratischer Zielfunktion und lediglich linearen Nebenbedingungen wird als Quadratisches Optimierungsproblem (Quadratic Programming – QP) bezeichnet, auch wenn es vollständig als linear beschränktes

---

<sup>6</sup> Einige der zu berücksichtigenden Funktionen, wie beispielsweise die Betragsfunktionen oder Umkehrfunktionen, sind höhergradig nichtlinear, sodass die Abweichungen der quadratischen Näherung verglichen mit den tatsächlichen Ergebnissen einer Leistungsflussberechnung untersucht werden müssen.

quadratisches Optimierungsproblem (linearly constrained Quadratic Programming – LCQP) bezeichnet werden müsste. Der in dieser Arbeit favorisierte Ansatz mit quadratischer Zielfunktion und quadratischen Nebenbedingungen wird als quadratisch beschränktes quadratisches Optimierungsproblem (quadratically constrained Quadratic Programming – QCQP) bezeichnet.

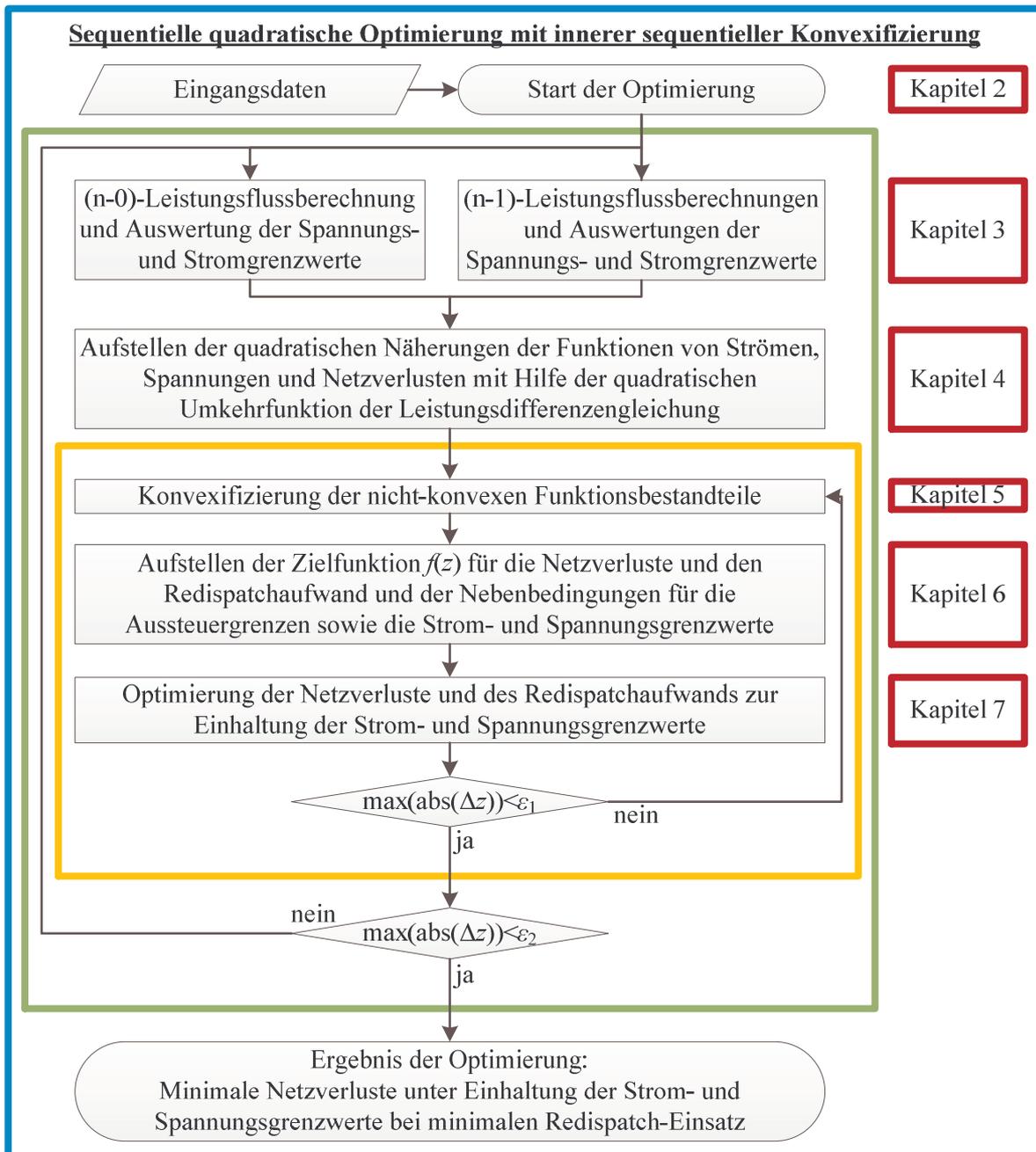
### 1.3 Lösungsansatz und Aufbau der Arbeit

Die global-optimale Lösung des beschriebenen Optimierungsproblems in vertretbarer Rechenzeit ist eine Herausforderung, die entweder Näherungen [1.17], eine Beschränkung des untersuchten Netzgebiets beziehungsweise der berücksichtigten Variablen und Nebenbedingungen, die Akzeptanz eines nur lokalen Optimums und/oder die Aufteilung in Teilprobleme erfordert oder deren Lösung nur bei Nutzung von Großrechnern und unter Inkaufnahme von langen Rechenzeiten möglich ist. Insbesondere die zeitpunktübergreifende Optimierung ist weiterhin Gegenstand aktueller Forschung [1.18].

Den im Folgenden genauer beschriebenen Lösungsansatz dieser Arbeit zeigt **Bild 1.8**.

In Kapitel 2 dieser Arbeit werden in Abschnitt 2.1 zunächst die Grundlagen zur Netzmodellierung, in Abschnitt 2.2 die allgemeinen Grundlagen von Optimierungsproblemen und in Abschnitt 2.3, aufbauend auf den Abschnitten 2.1 und 2.2, der allgemeine Optimal Power Flow und die optimierte Engpassbeseitigung beschrieben. Aufbauend auf den Grundlagen zur Netzmodellierung und zu Optimierungsproblemen lassen sich Optimierungsprobleme für den Optimal Power Flow und die optimierte Engpassbeseitigung aufstellen.

Die Darstellungen in Kapitel 2 ergeben eine security-constrained economic redispatch optimization und zeigen, dass eine Umkehrfunktion der Leistungsgleichung erforderlich ist, um nichtlineare und damit in vielen Fällen nichtkonvexe Gleichheitsnebenbedingungen zu eliminieren. In Kapitel 3 wird zunächst die Umkehrbarkeit der Leistungsgleichung untersucht. Da die Umkehrbarkeit der Leistungsgleichung nur in Ausnahmefällen gegeben ist, gibt es eine Vielzahl von Ansätzen zur Herstellung der Umkehrbarkeit beziehungsweise zur Lösung, die vorgestellt und verglichen werden. Hierbei steht das Ziel, die Netzregelung zum Ausgleich der Wirkleistungsbilanz im Netz möglichst genau abzubilden, im Vordergrund. Eine solche Netzregelung bewirkt, wie gezeigt wird, die Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung, wobei ein sogenannter Verteilter Slack die größte Übereinstimmung mit dem tatsächlichen Leistungsausgleich durch Regelleistung hat.



**Bild 1.8** Sequentielle quadratische Optimierung mit innerer sequentieller Konvexifizierung

In dieser Arbeit wird angestrebt, das globale Optimum zu finden, indem keine der berücksichtigten Einflussgrößen oder Wechselwirkungen im Vorhinein vernachlässigt werden, sondern indem Näherungen erst so spät wie möglich innerhalb des sequentiellen Ablaufs durchgeführt werden. Näherungen sollen daher auch nicht durch technische Vernachlässigungen erfolgen, sondern nur dort zielgerichtet angewendet werden, wo sie zur Lösung des Optimierungsproblems mathematisch erforderlich sind, damit sich möglichst geringe Abweichungen zwischen den durch die Näherung prognostizierten Werten und den durch Leistungsflussberechnungen

ermittelten Werten ergibt. Daher kommen die Darstellungen in den Kapitel 2 und 3 ohne Vernachlässigungen und Näherungen aus. Erst ab Kapitel 4 und 5 werden Näherungen für alle in die Zielfunktion und Nebenbedingungen des Optimierungsproblems eingehenden Funktionen erarbeitet, die eine näherungsweise sequentielle Lösung des Optimierungsproblems ermöglichen. Optimierungen auf Basis quadratischer Näherungen können einen Mittelweg zwischen Optimierungen mit linearen Näherungen und Optimierungen nichtlinearer und nichtkonvexer Funktionen darstellen. Lineare Näherungen sind in vielen Fällen ungenau, aber lineare Optimierungsprobleme sind innerhalb ihrer Genauigkeit zuverlässig global-optimal lösbar. Ohne Näherungen sind Optimierungen nichtlinearer und nichtkonvexer Funktionen nur in nicht akzeptabler Zeit und ohne Garantie des globalen Optimums lösbar. Quadratische Näherungen berücksichtigen näherungsweise die Nichtlinearität der Funktionen, können jedoch unter Ausnutzung der besonderen Eigenschaften quadratischer Funktionen besser gelöst werden.

Der Lösungsansatz dieser Arbeit beinhaltet daher eine quadratische Näherung der Zielfunktion und der Nebenbedingungen des Optimierungsproblems. Es ist hierbei besonders hervorzuheben, dass die Umkehrfunktion der Leistungsgleichung in dieser Arbeit nicht nur linear, also durch Invertierung der Jakobimatrix der Leistungsgleichung, sondern ebenfalls quadratisch gebildet wird, wodurch angestrebt wird, eine geringe Abweichung zwischen den durch die angenäherten Funktionen prognostizierten Werten und den durch Leistungsflussberechnungen ermittelten Werten zu haben.

Jedoch sind quadratische Optimierungsprobleme im Allgemeinen nichtkonvex. Ansätze zur Lösung von nichtkonvexen quadratischen Optimierungsproblemen mit nichtkonvexen quadratischen Nebenbedingungen sind beispielsweise in [5.1] beschrieben. In ihren eigenen jeweiligen Publikationen bezeichnen sich BARON [5.2], [5.3], GloMIQO2 [5.4] oder SCIP [5.5] als am schnellsten für diese Problemklasse. SCIP hat über die OPTI Toolbox [5.6] eine direkte MATLAB-Schnittstelle [4.3] und steht für die akademische Nutzung kostenlos zur Verfügung. Eine Lösung mit SCIP ist für die Ausarbeitungen in dieser Arbeit ausprobiert worden, jedoch haben sich unbrauchbar lange Rechenzeiten ergeben, ohne dass das globale Optimum gefunden beziehungsweise festgestellt werden konnte<sup>7</sup>. Über GAMS [5.7] wäre der Zugriff auf weitere Lösungssoftwares für Nichtlineare Optimierung (Nonlinear Programming – NLP) möglich, die

---

<sup>7</sup> Erfolgreich getestet wurde SCIP am IEEE-9-Knoten-Netz [2.2]. Für das in den Fallstudien dieser Arbeit verwendete 120-Knoten-Netz (vgl. Abschnitt 7.1) wurden die Optimierungen nach mehreren Tagen Berechnungsdauer abgebrochen.

teilweise ebenfalls eine globale Optimierung erlauben, jedoch heuristische und keine analytischen Ansätze verfolgen. Eine Übersicht über die Problemklassen, die von CPLEX [5.1] oder Gurobi [5.9] gelöst werden können, zeigt **Tabelle 1.1**.

**Tabelle 1.1** Übersicht über Optimierungsprobleme und Lösbarkeit durch CPLEX und Gurobi

		Zielfunktion		
		linear	quadratisch konvex	quadratisch nichtkonvex
Nebenbedingungen	linear	konvexes (MI)LP	konvexes (MI)QP	nichtkonvexes (MI)QP
	quadratisch konvex	konvexes (MI)QCLP	konvexes (MI)QCQP	nichtkonvexes (MI)QCQP
	quadratisch nichtkonvex	nichtkonvexes (MI)QCLP	nichtkonvexes (MI)QCQP	nichtkonvexes (MI)QCQP

CPLEX und Gurobi werden für diese Arbeit ausgewählt, weil sie eine direkte MATLAB-Schnittstelle besitzen, weil sie die Problemklassen, die sie angeben, lösen zu können, auch global optimal lösen, und weil sie mit akademischer Lizenz kostenlos verfügbar sind. Die Bezeichnung „(MI)“ in **Tabelle 1.1** kennzeichnet die Fähigkeit gemischt-ganzzahlige Probleme (Mixed Integer Programming) zu lösen. Diese Fähigkeit ist in dieser Arbeit zur Berücksichtigung von voneinander abhängigen Variablen in einer Variablengruppe (beispielsweise Special Ordered Sets vom Typ 1 oder 2 – SOS1 oder SOS2) notwendig (vgl. Abschnitt 2.2.1). Die in **Tabelle 1.1** grün hinterlegten Optimierungsprobleme können im Gegensatz zu den rot hinterlegten von Gurobi oder CPLEX gelöst werden. Die nichtkonvexen Optimierungsprobleme vom Typ QCQP in dieser Arbeit können somit ohne weitere Bearbeitung der Modellierung, die als Konvexifizierung bezeichnet wird, von Gurobi oder CPLEX nicht gelöst werden.

In Kapitel 5 werden nichtkonvexe Funktionsbestandteile anhand der Eigenwerte der Hessematrizen identifiziert, indem zunächst eine Hauptachsentransformation der quadratischen Zielfunktion und jeder quadratischen Nebenbedingung durchgeführt wird. Diese Identifizierung ermöglicht die selektive Konvexifizierung der nichtkonvexen Funktionsbestandteile. Die nichtkonvexen Funktionsbestandteile werden durch stückweise Linearisierungen konvexifiziert und angenähert, sodass das Optimierungsproblem als gemischt-ganzzahliges quadratisch beschränktes quadratisches Optimierungsproblem (mixed-integer quadratically constrained quadratic program – MIQCQP) modelliert und gelöst werden kann. Das beschriebene Vorgehen beschränkt den zusätzlichen Prognosefehler der stückweisen Linearisierung auf die nichtkonvexen Funktionsbestandteile und macht die Lösung des Optimierungsproblems leichter, da verglichen mit einer stückweisen Linearisierung der gesamten Funktionen weniger SOS-Bedingungen erforderlich sind.

Das vollständige Optimierungsmodell wird sodann in Kapitel 6 aufgestellt. Zusammen mit der Startwertermittlung in Abschnitt 6.4 ergibt sich ein Optimierungsalgorithmus, der die nichtlineare nichtkonvexe Charakteristik der Netzgleichungen, entweder mit Hilfe von quadratischen Näherungen für die konvexen Funktionsbestandteile oder mit Hilfe von stückweisen Linearisierungen der nichtkonvexen quadratisch angenäherten Funktionsbestandteile, berücksichtigt und somit nicht auf die Suche lokaler Minima beschränkt bleibt.

In Kapitel 7 werden im Rahmen einiger Fallstudien Antworten auf die Forschungsfragen dieser Arbeit gesucht und geprüft, ob die Zielstellungen der Arbeit erreicht wurden.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung in Kapitel 8 und mit einem Ausblick auf Weiterentwicklungen und weitere Verbesserungen in Kapitel 9.

## 2 Grundlagen zur Modellierung des Netzes und zur Optimierung

In diesem Kapitel werden die mathematischen und methodischen Grundlagen für die Ausarbeitungen in den noch folgenden Kapiteln beschrieben. Das Kapitel gliedert sich in Abschnitt 2.1, in dem die Grundlagen zur Netzmodellierung beschrieben werden, in Abschnitt 2.2, in dem die Grundlagen zur Optimierung dargestellt werden und in Abschnitt 2.3, in dem aufbauend auf den Abschnitten 2.1 und 2.2 der allgemeine Optimal Power Flow und die optimierte Engpassbeseitigung formuliert werden.

Die Beschreibungen in den folgenden Abschnitten bemühen sich um eine möglichst allgemeine Darstellung, sodass eine weitreichende Verwendung über die Anwendungsfälle dieser Arbeit hinaus möglich ist.

### 2.1 Grundlagen zur Modellierung des Netzes

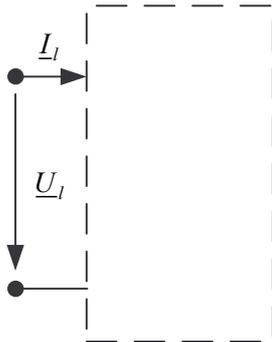
Die Modellierung des Netzes und der Netzbetriebsmittel erfolgt in dieser Arbeit in Anlehnung an [2.3], [2.4]. Das Netz wird durch Knoten und Zweige nachgebildet, wobei die Verbindung von mindestens zwei Knoten miteinander als Zweig bezeichnet wird. Als Zweige werden in dieser Arbeit Einspeisungen, Lasten, Leitungen und Transformatoren berücksichtigt. Die Modellierung dieser Netzbetriebsmittel wird im folgenden Abschnitt 2.1.1 beschrieben. In Abschnitt 2.1.2 wird beschrieben, wie die Netzbetriebsmittel zu einem knotenorientierten Netzgleichungssystem verknüpft werden.

#### 2.1.1 Modellierung der Netzbetriebsmittel

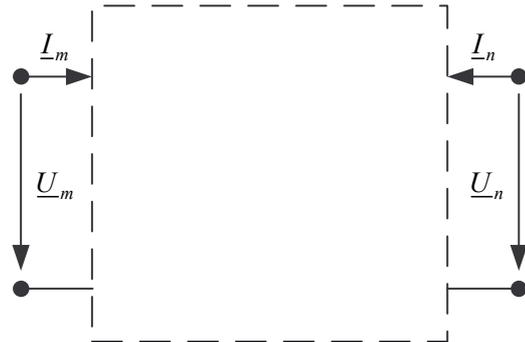
Die Netzbetriebsmittel werden in dieser Arbeit als Zwei- oder Vierpole<sup>8</sup> modelliert. Die Pole der Modelle werden auch als Klemmen oder Terminals bezeichnet. Zwei Pole, Klemmen beziehungsweise Terminals bilden gemeinsam ein Tor. Der allgemeine Zwei- oder Vierpol kann sowohl passive Längs- und Querelemente, beispielsweise Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten, als auch aktive Elemente, beispielsweise Quellen, enthalten. **Bild 2.1** zeigt das Ersatzschaltbild eines allgemeinen Zweipols und **Bild 2.2** das Ersatzschaltbild eines allgemeinen Vierpols. Die Spannungen an den Toren sowie die Ströme an den Klemmen sind mit  $l$ ,  $m$  und  $n$  indiziert. Die Spannungen und Ströme sind einheitlich entsprechend des Verbrauchzählpfeilsystems einander zugeordnet.

---

<sup>8</sup> Die Modellierung von Sechspolen, beispielsweise von Dreiwicklungstransformatoren, kann analog erfolgen.



**Bild 2.1** Allgemeines Zweipol-Ersatzschaltbild



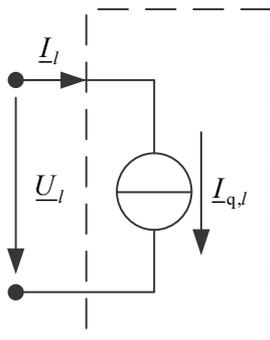
**Bild 2.2** Allgemeines Vierpol-Ersatzschaltbild

Die Klemmenbeziehungen von Strömen und Spannungen sind in Gl. (2.1) für einen Zweipol und in Gl. (2.2) für einen Vierpol in Admittanzform dargestellt.

$$\underline{I}_l = \underline{Y}_l \cdot \underline{U}_l + \underline{I}_{q,l} \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_m \\ \underline{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{mm} & \underline{Y}_{mn} \\ \underline{Y}_{nm} & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_m \\ \underline{U}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_{q,m} \\ \underline{I}_{q,n} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Die Einspeisungen und Lasten werden in dieser Arbeit durch ideale Quellen ohne passive Elemente und als Zweipol modelliert. **Bild 2.3** zeigt das Quellen-Ersatzschaltbild einer Einspeisung oder Last in Zweipoldarstellung.



**Bild 2.3** Quellen-Ersatzschaltbild einer Einspeisung oder Last in Zweipoldarstellung

Für eine ideale Einspeisung oder Last ergibt sich die Zweipol-Admittanz in Gl. (2.3) zu Null.

$$\underline{Y}_l = 0 \quad (2.3)$$

In **Tabelle 2.1** werden die Vierpoldarstellungen einer Leitung und eines Transformators dargestellt. Leitungen und Transformatoren werden in dieser Arbeit durch passive Ersatzschaltbildelemente ohne Quellen modelliert.

**Tabelle 2.1** Vierpoldarstellungen einer Leitung und eines Transformators

II-Ersatzschaltbild einer Leitung	T-Ersatzschaltbild eines Transformators
Für die Leitung ergibt sich mit Hilfe der Admittanzen in Gl. (2.4) und (2.5)	Für den Transformator ergibt sich mit Hilfe der Admittanzen in Gl. (2.7) und (2.8)
$\underline{Y}_{GC} = \frac{1}{2}(G + j\omega C) \quad (2.4)$	$\underline{Y}'_{US} = \frac{1}{\dot{u}^2 (R_{US} + jX_{\sigma US})} \quad (2.7)$ $= \frac{1}{R_{OS} + jX_{\sigma OS}} = \underline{Y}_{OS}$
$\underline{Y}_{RX} = \frac{1}{R + jX} \quad (2.5)$	$\underline{Y}_h = \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_h} \quad (2.8)$
die Zweipol-Admittanzmatrix in Gl. (2.6).	die Vierpol-Admittanzmatrix in Gl. (2.9).
$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{RX} + \underline{Y}_{GC} & -\underline{Y}_{RX} \\ -\underline{Y}_{RX} & \underline{Y}_{RX} + \underline{Y}_{GC} \end{bmatrix} \quad (2.6)$	$\begin{bmatrix} \frac{ \dot{u} ^2 \underline{Y}'_{US} (\underline{Y}_{OS} + \underline{Y}_h)}{\underline{Y}'_{US} + \underline{Y}_{OS} + \underline{Y}_h} & \frac{-\dot{u}^* \underline{Y}'_{US} \underline{Y}_{OS}}{\underline{Y}'_{US} + \underline{Y}_{OS} + \underline{Y}_h} \\ \frac{-\dot{u} \underline{Y}'_{US} \underline{Y}_{OS}}{\underline{Y}'_{US} + \underline{Y}_{OS} + \underline{Y}_h} & \frac{\underline{Y}_{OS} (\underline{Y}'_{US} + \underline{Y}_h)}{\underline{Y}'_{US} + \underline{Y}_{OS} + \underline{Y}_h} \end{bmatrix} \quad (2.9)$

Für alle Zweige des Netzes werden die Zweipol- und Vierpol-Admittanzmatrizen in blockdiagonaler Form in der Zweig-Admittanzmatrix  $\underline{Y}_{ZZ}$  zusammengefasst. Gl. (2.10) zeigt die Klemmenbeziehungen aus Gl. (2.1) und (2.2) für alle Zweige.

$$\underline{i}_Z = \underline{Y}_{ZZ} \cdot \underline{u}_Z + \underline{i}_{Z,q} \quad (2.10)$$

In Gl. (2.10) ist  $\underline{i}_Z$  ein Vektor, der die Zweigströme an den jeweiligen Klemmen enthält. Der Vektor  $\underline{u}_Z$  enthält die jeweiligen Spannungen an den Toren der Zweige<sup>9</sup>. Der Vektor  $\underline{i}_{Z,q}$  enthält die Quellenströme.

<sup>9</sup> Zur Vermeidung von Missverständnissen wird verdeutlicht, dass dies nicht die Spannungen, die längs der Zweige gemessen werden könnten, sind.

Ausgehend von Gl. (2.10) können die Beträge der Zweigströme in Gl. (2.11) berechnet werden, die für die Berücksichtigung von Stromgrenzwerten  $\mathbf{i}_{Z,\max}$  aus Gl. (2.12) als Nebenbedingungen im Rahmen der Optimierung wichtig sind. Für Leitungen enthält  $\mathbf{i}_{Z,\max}$  den thermischen Grenzstrom und für Transformatoren den Bemessungsstrom.

$$\mathbf{i}_Z = \|\mathbf{i}_Z\| = \|\mathbf{Y}_{ZZ} \cdot \mathbf{u}_Z + \mathbf{i}_{Z,q}\| = \sqrt{\mathbf{i}_{Z,r}^2 + \mathbf{i}_{Z,i}^2} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{i}_Z \leq \mathbf{i}_{Z,\max} \quad (2.12)$$

Durch Multiplikation des konjugiert-komplexen Zweigstromvektors aus Gl. (2.10) mit einer Diagonalmatrix  $\underline{\mathbf{U}}_Z$  der Klemmenspannungen der Zweige ergeben sich in Gl. (2.13) die Klemmenscheinleistungen  $\underline{\mathbf{s}}_Z$  der Zweige, bestehend aus den Zweigwirkleistungen  $\mathbf{p}_Z$  und Zweigblindleistungen  $\mathbf{q}_Z$ .

$$\underline{\mathbf{s}}_Z = \mathbf{p}_Z + j\mathbf{q}_Z = 3 \cdot \underline{\mathbf{U}}_Z \cdot \mathbf{i}_Z^* = 3 \cdot \underline{\mathbf{U}}_Z \cdot \mathbf{Y}_{ZZ}^* \cdot \mathbf{u}_Z^* \quad (2.13)$$

Die vorstehenden Gleichungssysteme enthalten nur ungekoppelte Zweig- beziehungsweise Klemmengrößen, jedoch keine Informationen über die Topologie des Netzes. Das Aufstellen von topologischen Matrizen des Netzes sowie die Verknüpfung der Zweiggleichungen mit Hilfe der topologischen Matrizen zu einem knotenorientierten Netzgleichungssystem erfolgt in Abschnitt 2.1.2.

### 2.1.2 Aufstellen des knotenorientierten Netzgleichungssystems

Zur Beschreibung der Netzgleichungssysteme wird in dieser Arbeit die knotenorientierte Darstellung [2.2] verwendet. Als Zustandsvektor des Netzes dient somit der Knotenspannungsvektor  $\mathbf{u}_K$  in Gl. (2.14).

$$\underline{\mathbf{u}}_K = \mathbf{u}_K \cdot e^{j\delta_K} = \mathbf{u}_K \cdot (\cos \delta_K + j \sin \delta_K) = \mathbf{u}_{K,r} + j\mathbf{u}_{K,i} \quad (2.14)$$

Ausgehend vom Knotenspannungsvektor können die Beträge der Knotenspannungen in Gl. (2.15) berechnet werden, die für die Berücksichtigung der Spannungsgrenzen aus Gl. (2.16) als Nebenbedingungen im Rahmen der Optimierung wichtig sind.

$$\mathbf{u}_K = |\underline{\mathbf{u}}_K| = \sqrt{\mathbf{u}_{K,r}^2 + \mathbf{u}_{K,i}^2} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}_{K,\min} \leq \mathbf{u}_K \leq \mathbf{u}_{K,\max} \quad (2.16)$$

Die topologischen Informationen, welche Zweige mit welchen Knoten verbunden sind, werden in der Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix  $\mathbf{KZ}$  eingetragen<sup>10</sup>. Deren Zeilenanzahl entspricht der Knotenanzahl des Netzes und deren Spaltenanzahl entspricht der Zweiganzahl des Netzes. Ist ein Zweig mit einem Knoten verbunden, steht an der entsprechenden Stelle in der Matrix eine Eins, sonst eine Null.

Mit Hilfe der Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix können die Knotenpunktsätze in Gl. (2.17) formuliert werden.

$$\mathbf{KZ} \cdot \underline{\mathbf{i}}_Z = \mathbf{0}_K \quad (2.17)$$

Es lassen sich zudem in Gl. (2.18) die Torspannungen der Zweige  $\underline{\mathbf{u}}_Z$  aus den Knotenspannungen  $\underline{\mathbf{u}}_K$  berechnen.

$$\underline{\mathbf{u}}_Z = \mathbf{KZ}^T \cdot \underline{\mathbf{u}}_K \quad (2.18)$$

Einsetzen der Gl. (2.10) und (2.18) in Gl. (2.17) liefert Gl. (2.19).

$$\mathbf{KZ} \cdot \underline{\mathbf{i}}_Z = \mathbf{0}_K = \mathbf{KZ} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{ZZ} \cdot \underline{\mathbf{u}}_Z + \mathbf{KZ} \cdot \underline{\mathbf{i}}_{Z,q} = \mathbf{KZ} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{ZZ} \cdot \mathbf{KZ}^T \cdot \underline{\mathbf{u}}_K + \underline{\mathbf{i}}_K \quad (2.19)$$

In Gl. (2.19) ist  $\underline{\mathbf{i}}_K = \mathbf{KZ} \cdot \underline{\mathbf{i}}_{Z,q}$  der Knotenstromvektor, welcher die den Knoten zugeordneten Stromquellen der Einspeisungen und Lasten enthält. Durch Umformen von Gl. (2.19) ergeben sich die Knoten-Admittanzmatrix  $\underline{\mathbf{Y}}_{KK} = -\mathbf{KZ} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{ZZ} \cdot \mathbf{KZ}^T$  und die Stromgleichung (2.20).

$$-\mathbf{KZ} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{ZZ} \cdot \mathbf{KZ}^T \cdot \underline{\mathbf{u}}_K = \underline{\mathbf{Y}}_{KK} \cdot \underline{\mathbf{u}}_K = \underline{\mathbf{i}}_K \quad (2.20)$$

Ausgehend vom Knotenspannungsvektor als Zustandsvektor des Netzes können alle anderen Größen des Netzes berechnet werden. Vorgreifend auf die Optimierung in Kapitel 6, in der die Netzverluste in der Zielfunktion sowie die Aussteuergrenzen der Knotenleistungen als Nebenbedingungen berücksichtigt werden, werden die entsprechenden Gleichungen im Folgenden angegeben.

Durch Multiplikation des konjugiert-komplexen Knotenstromvektors in Gl. (2.20) mit einer Diagonalmatrix  $\underline{\mathbf{U}}_K$  der Knotenspannungen  $\underline{\mathbf{u}}_K$  ergibt sich die Leistungsgleichung (2.21) für die Knotenscheinleistungen  $\underline{\mathbf{s}}_K$ , bestehend aus den Knotenwirkleistungen  $\underline{\mathbf{p}}_K$  und Knotenblindleistungen  $\underline{\mathbf{q}}_K$ .

---

<sup>10</sup> Es handelt sich um eine reduzierte Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix, da der Bezugsknoten („die Erde“) nicht enthalten ist.

$$\underline{s}_K = \underline{p}_K + j\underline{q}_K = 3 \cdot \underline{U}_K \cdot \underline{i}_K^* = 3 \cdot \underline{U}_K \cdot \underline{Y}_{KK}^* \cdot \underline{u}_K \quad (2.21)$$

Für den Knotenleistungsvektor  $\underline{s}_K$  können die Aussteuergrenzen für die Wirk- und Blindleistungsanteile mit den Gl. (2.22) und (2.23) berechnet werden.

$$\underline{p}_{K,\min} \leq \underline{p}_K \leq \underline{p}_{K,\max} \quad (2.22)$$

$$\underline{q}_{K,\min} \leq \underline{q}_K \leq \underline{q}_{K,\max} \quad (2.23)$$

Zur Berechnung des Leistungsbedarfes  $\underline{S}_V$  des Netzes in Gl. (2.24) und seinen Bestandteilen, dem Wirkleistungsbedarf  $P_V$  und dem Blindleistungsbedarf  $Q_V$ , kann die Summe über alle Knotenleistungen gebildet werden.

$$\underline{S}_V = P_V + jQ_V = 3 \cdot \underline{u}_K^T \cdot \underline{Y}_{KK}^* \cdot \underline{u}_K \quad (2.24)$$

## 2.2 Grundlagen zur Optimierung

Die Darstellungen in den folgenden Abschnitten orientieren sich an [2.1], werden aber für diese Arbeit angepasst. In Abschnitt 2.2.1 wird der allgemeine Aufbau von Optimierungsproblemen dargestellt. In Abschnitt 2.2.2 wird die Konvexität von Optimierungsproblemen und ihre Auswirkungen auf die globale Optimierung behandelt.

### 2.2.1 Aufbau von Optimierungsproblemen

Die für diese Arbeit relevanten Optimierungsprobleme bestehen aus einer skalaren reellen Zielfunktion  $f(\mathbf{x})$  und verschiedenartigen skalaren reellen Nebenbedingungen  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , die das Lösungsgebiet der Zielfunktion beschränken. Komplexe Funktionen oder Variablen werden in dieser Arbeit in Real- und Imaginärteil aufgeteilt. Optimierungen von komplexen Funktionen beziehungsweise Nebenbedingungen mit komplexen Variablen sind zwar grundsätzlich mit Hilfe des Wirtinger-Kalküls denkbar [2.6], [2.7], [2.8], [2.9], werden aber in dieser Arbeit nicht durchgeführt. Die Zielfunktion eines Optimierungsproblems kann entweder maximiert oder minimiert werden, wobei das in dieser Arbeit vorliegende Problem als Minimierungsproblem formuliert wird.

Der Vektor  $\mathbf{x}$  enthält die Variablen (oder auch Parameter oder Stellgrößen), die zur Optimierung der Zielfunktion variiert werden können. Die Variablen können in verschiedenen Wertebereichen definiert sein, über die in **Tabelle 2.2** eine Übersicht dargestellt ist:

**Tabelle 2.2** Wertebereiche der Variablen eines Optimierungsproblems

Beschreibung	Wertebereichsdefinition
kontinuierlich	$x_r \in \mathbb{R}$
ganzzahlig	$x_z \in \mathbb{Z}$
binär	$x_b \in \{0;1\}$

Nebenbedingungen können in verschiedenen Formen und Kombinationen auftreten. In dieser Arbeit werden die Nebenbedingungen in **Tabelle 2.3** berücksichtigt:

**Tabelle 2.3** Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems

Art der Nebenbedingungen		Definition der Nebenbedingung
Aussteuergrenzen		$\mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}$
Gleichheitsnebenbedingungen		$\mathbf{n}_G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_G$
Ungleichheitsnebenbedingungen		$\mathbf{n}_U(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}_U$
Nebenbedingungen auf Basis von Variablengruppen	Special-Ordered-Sets Type 1 (SOS1) <sup>11</sup>	$x_i \in \mathbf{x}' \subseteq \mathbf{x}$ $\exists! x_k : (x_k \neq 0 \vee x_k = 0)$ $x_{i \neq k} = 0$
	Special-Ordered-Sets Type 2 (SOS2) <sup>12</sup>	$x_j \in \mathbf{x}'' \subseteq \mathbf{x}$ $m = l + 1$ $\exists! x_l : (x_l \neq 0 \vee x_l = 0)$ $\exists! x_m : (x_m \neq 0 \vee x_m = 0)$ $x_{\substack{j \neq l \\ j \neq m}} = 0$

Obwohl in dieser Arbeit nur Variablen mit kontinuierlichem Wertebereich berücksichtigt werden, ergibt sich durch die Einführung von Special-Ordered-Sets [2.10], [2.11] im Rahmen der stückweisen Linearisierung trotzdem eine gemischt-ganzzahlige Problemformulierung (mixed-integer-problem).

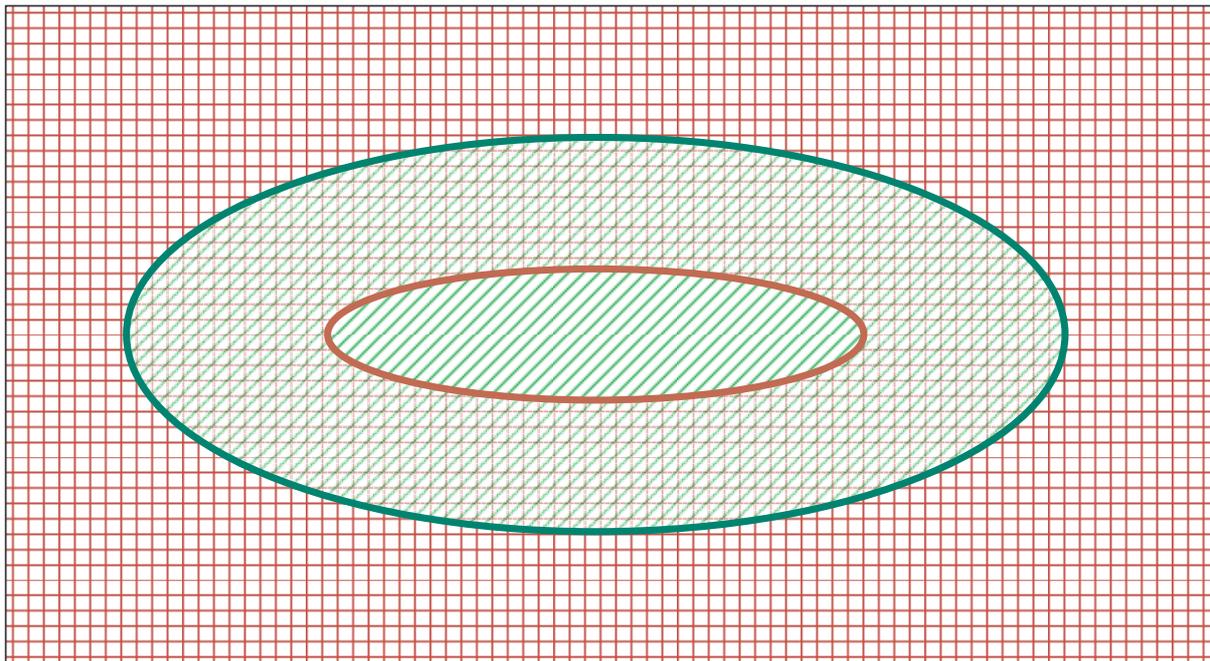
Das sich aus Zielfunktion und Nebenbedingungen ergebende Optimierungsproblem ist in Gl. (2.25) zusammengestellt.

<sup>11</sup> Es existiert maximal ein Element  $x_k$  aus der Teilmenge  $\mathbf{x}'$  von  $\mathbf{x}$ , das ungleich Null ist.

<sup>12</sup> Es existieren maximal zwei aufeinanderfolgende Elemente  $x_l$  und  $x_m$  aus der Teilmenge  $\mathbf{x}''$  von  $\mathbf{x}$ , die ungleich Null sind.

$$\begin{aligned}
& \min(f(\mathbf{x})) \\
& \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max} \\
& \mathbf{n}_G(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_G \\
& \mathbf{n}_U(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}_U \\
& x_i \text{ in SOS}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Das Lösungsgebiet des Optimierungsproblems ergibt sich aus der Schnittmenge der Lösungsgebiete der Nebenbedingungen. In **Bild 2.4** werden beispielhaft die Lösungsgebiete zweier Nebenbedingungen und deren Schnittmenge dargestellt.



**Bild 2.4** Gemeinsames Lösungsgebiet zweier Nebenbedingungen

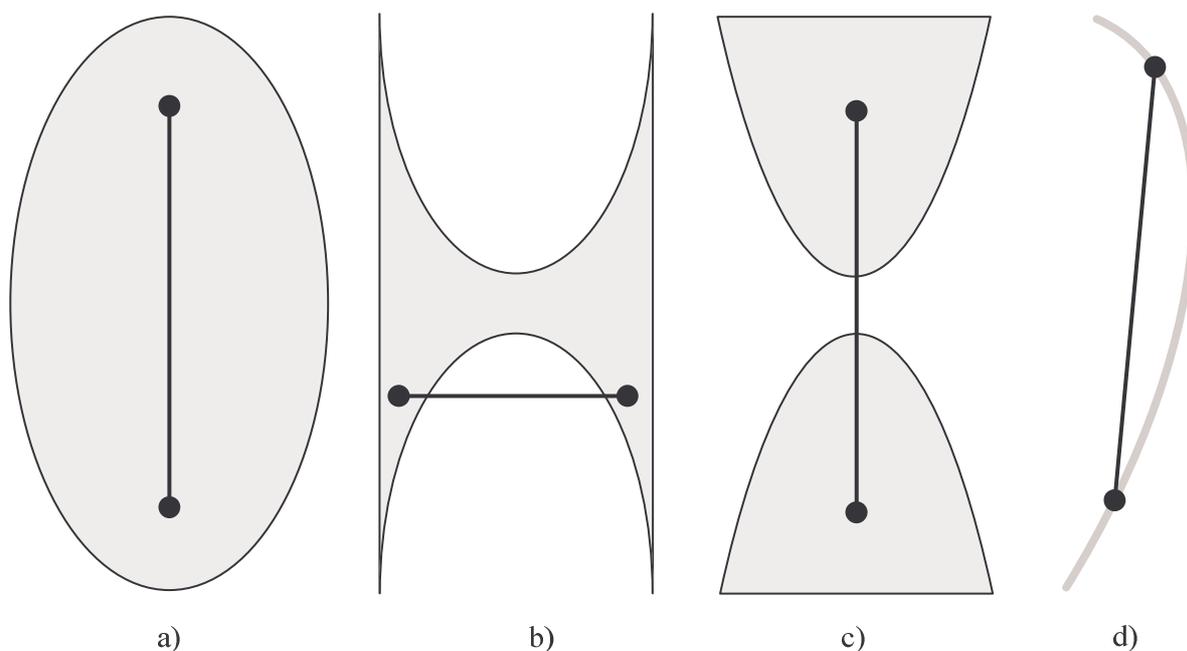
Das Lösungsgebiet der ersten Nebenbedingung wird außen durch die größere in grün gezeichnete Ellipse begrenzt, liegt also innerhalb dieser Ellipse und ist mit nach rechts oben geschrägten in grün gezeichneten Linien gekennzeichnet. Das Lösungsgebiet der zweiten Nebenbedingung wird innen durch die kleinere in rot gezeichnete Ellipse begrenzt, liegt also außerhalb dieser Ellipse und ist mit in rot gezeichneten Gitterlinien gekennzeichnet. Die Schnittmenge der beiden Lösungsgebiete ist somit die Fläche, die sowohl geschrägte Linien als auch Gitterlinien enthält. Diese Schnittmenge ergibt das Lösungsgebiet des Optimierungsproblems.

### 2.2.2 Konvexität und globale Optimierung

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften von Optimierungsproblemen, die für die weiteren Aussagen dieser Arbeit von Bedeutung sind, dargestellt. Für die Beweise der nachfolgend

dargestellten Eigenschaften und bezüglich weiterer Eigenschaften wird auf weiterführende Literatur [2.1], [2.5] verwiesen.

Eine Funktion wird als konvex bezeichnet, wenn ihr Epigraph, also die Menge aller Punkte, die auf oder über ihrem Graphen liegt, eine konvexe Menge ist. Nach [2.5] ist eine Menge konvex, wenn alle Punkte der Verbindungslinien, die zwischen zwei beliebigen Punkten aus der Menge gebildet werden können, innerhalb der Menge liegen. Die beschriebene geometrische Definition der Konvexität einer Menge wird in den weiteren Abschnitten der Arbeit benutzt. **Bild 2.5** zeigt beispielhaft eine konvexe Menge (a), eine nichtkonvexe Menge (b) und disjunkte Mengen (c). Die beiden disjunkten Mengen von (c) in **Bild 2.5** sind für sich allein betrachtet konvex, jedoch ist die disjunkte Vereinigung der beiden Mengen nichtkonvex. Aufgrund der vorstehenden Definition ist das gemeinsame Lösungsgebiet in **Bild 2.4** ebenfalls nichtkonvex. Die Menge d) in **Bild 2.5**, also alle Punkte auf der Kurve, ist eine nichtkonvexe Menge.

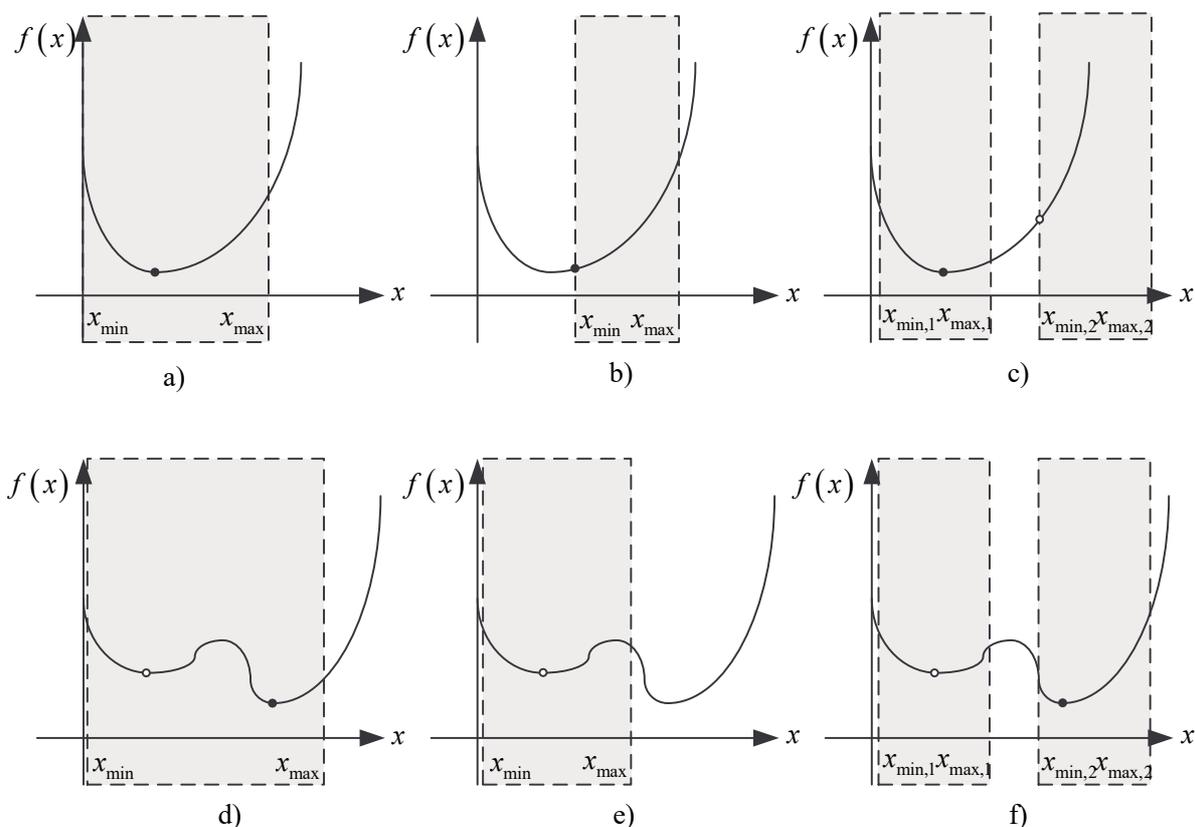


**Bild 2.5** Beispiele für konvexe a), nichtkonvexe b), disjunkte Mengen c) und Mengen auf Kurven

Für Mengen, die von quadratischen Funktionen begrenzt werden, wie sie ab Kapitel 4 in dieser Arbeit verwendet werden, gibt es neben dem vorgenannten geometrischen Kriterium die Möglichkeit, die Konvexität auf analytischem Wege zu bestimmen, indem die Eigenwerte der Hessematrix untersucht werden. Eine quadratische Funktion ist immer dann konvex, wenn deren Hessematrix positiv semidefinit ist, was genau dann erfüllt ist, wenn alle Eigenwerte der Hessematrix größer oder gleich Null sind. Von dieser besonderen Eigenschaft quadratischer Funktionen wird in Kapitel 5 Gebrauch gemacht.

Da die Schnittmenge konvexer Mengen wieder eine konvexe Menge ergibt, und sich das Lösungsgebiet eines Optimierungsproblems aus der Schnittmenge aller Lösungsgebiete der Nebenbedingungen ergibt, müssen für ein konvexes Optimierungsproblem die Lösungsgebiete aller Nebenbedingungen konvex sein, also alle Nebenbedingungen konvexe Funktionen sein. Des Weiteren muss auch die Zielfunktion eines konvexen Optimierungsproblems konvex sein. Optimierungsprobleme können somit in konvexe und nichtkonvexe Optimierungsprobleme unterteilt werden. Bei konvexen Optimierungsproblemen ist ein lokales Optimum immer das globale Optimum, sodass diese einfacher gelöst werden können, da unabhängig von der Art des Lösungsverfahrens eine lokale Suche ausreicht. Lineare Optimierungsprobleme mit linearer Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen sind immer konvex, jedoch können auch nichtlineare Optimierungsprobleme konvex sein. Die konvexe Optimierung von Energieversorgungssystemen wird beispielsweise in [2.12] thematisiert.

Lokale Minima oder das globale Minimum nichtlinearer Optimierungsprobleme können sowohl am Rand als auch innerhalb des Lösungsgebiets liegen. **Bild 2.6** zeigt in den Bildern a) bis f) konvexe und nichtkonvexe Zielfunktionen, konvexe und nichtkonvexe Lösungsgebiete, die durch Nebenbedingungen beschränkt sind und die sich daraus ergebenden Lösungen.



**Bild 2.6** Lokale und globale Minima von Zielfunktionen innerhalb von verschiedenen Lösungsgebieten

- Bild a) zeigt eine konvexe Funktion, deren Tiefpunkt innerhalb des konvexen Lösungsgebietes liegt. Der innerhalb des Lösungsgebietes liegende Tiefpunkt ist somit das globale Optimum.
- Bild b) zeigt dieselbe Funktion wie in a), jedoch mit einem anderen Lösungsgebiet, welches den Tiefpunkt aus a) nicht enthält. Das Optimum liegt somit nicht im Tiefpunkt der Funktion, sondern an einer Grenze des Lösungsgebietes.
- Bild c) zeigt dieselbe Funktion wie in a) und b), jedoch ist das Lösungsgebiet in c) disjunkt und damit nichtkonvex. Im rechten Teil des Lösungsgebiets befindet sich ein lokales Optimum an der Grenze des Lösungsgebiets (weiß ausgefüllter Kreis) und im linken Teil des Lösungsgebiets findet sich das globale Optimum innerhalb des Lösungsgebiets.
- Bild d) zeigt eine nichtkonvexe Funktion mit zwei Tiefpunkten und somit zwei Optima, die beide innerhalb des Lösungsgebiets liegen. Aus dem Vergleich der beiden Funktionswerte ergibt sich ein lokales Optimum (weiß ausgefüllter Kreis) und ein globales Optimum (schwarz ausgefüllter Kreis).
- Bild e) zeigt dieselbe Funktion wie in d), jedoch mit einem anderen Lösungsgebiet, welches das globale Optimum aus d) nicht enthält, sodass das lokale Optimum aus d) globales Optimum in e) ist.
- Bild f) zeigt wie c), dass es bei disjunkten Lösungsgebieten Optima innerhalb dieser Teillösungsmengen geben kann, die miteinander verglichen werden müssen, wobei im Unterschied zu c) das globale Optimum in f) nicht am Rand eines Lösungsgebiets liegt.

Die Beispiele machen deutlich, dass beim Suchen des globalen Optimums nichtkonvexer Optimierungsprobleme mehrere Teillösungsgebiete, mehrere Tiefpunkte und die Ränder der Teillösungsgebiete abgesucht werden müssen.

### 2.3 Optimal Power Flow und optimierte Engpassbeseitigung

Die Formulierung des ersten verallgemeinerten Optimal Power Flows wird [2.13] zugeschrieben. Der Basisfall des Optimal Power Flows in Gl. (2.26) minimiert die Summe der Kosten für den Wirkleistungseinsatz  $f_i(P_i)$  und beschreibt diese als Funktion der Knotenspannungen<sup>13</sup> aus Gl. (2.14), die somit die Variablen des Optimierungsproblems darstellen. Die Netzverluste

---

<sup>13</sup> In der Regel, und so auch in dieser Darstellung, werden hierbei die Polarkoordinaten verwendet. Jedoch ist ebenso eine Darstellung in kartesischen Koordinaten möglich.

und ihre Kosten sind in der Zielfunktion von Gl. (2.26) enthalten. Die Lösung von Gl. (2.26) entspricht dem verlustoptimierten Leerlauf, wenn keine weiteren Nebenbedingungen, bspw. die Festlegung der Wirk- und Blindleistungen von Abnehmern oder eine Wirkleistungsbilanz beim Redispatch, hinzugefügt werden.

$$\begin{aligned} \min \left( \sum_{i=1}^G f_i(P_i(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K)) \right) &= \min(f(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K)) \\ \mathbf{u}_{K,\min} &\leq \mathbf{u}_K \leq \mathbf{u}_{K,\max} \\ \mathbf{p}_{K,\min} &\leq \mathbf{p}_K(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K) \leq \mathbf{p}_{K,\max} \\ \mathbf{q}_{K,\min} &\leq \mathbf{q}_K(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K) \leq \mathbf{q}_{K,\max} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Als Ungleichheitsnebenbedingungen werden die Spannungsbandgrenzen und die Aussteuer- grenzen der Generatoren berücksichtigt, die auf Basis von Gl. (2.21) ebenfalls als Funktionen der Knotenspannungen beschrieben werden.

Aufbauend auf [2.13] hat es eine Vielzahl von Lösungsansätzen und Erweiterungen gegeben. Diesbezügliche Literaturübersichten sind beispielsweise [2.5], [2.14], [2.15], [2.16], [2.17] zu entnehmen. Wesentliche Erweiterungen auf Basis der vorgenannten Literaturübersichten, die für diese Arbeit relevant sind, sind der security-constrained Optimal Power Flow und der economic (re)dispatch, deren Eigenschaften in Abschnitt 2.3.1 und 2.3.2 beschrieben werden. In Abschnitt 2.3.3 wird die in dieser Arbeit durchgeführte security-constrained economic redispatch optimization beschrieben.

### 2.3.1 Security-constrained Optimal Power Flow

Die Erweiterung des Basisfalls des Optimal Power Flows hin zum security-constrained Optimal Power Flow berücksichtigt zusätzliche im allgemeinen Fall nichtlineare Nebenbedingungen [2.18]. Häufig werden im security-constrained Optimal Power Flow die Leitungsbelastungen, je nach Ansatz nur im (n-0)-Fall oder auch in allen relevanten (n-1)-Fällen, berücksichtigt, wobei in vereinfachten Ansätzen nur der Wirkleistungsfluss auf den Betriebsmitteln und in komplexeren Ansätzen der Betrag des Stromes als Maß für die Leitungsbelastung angesetzt wird. Weitere Nebenbedingungen des security-constrained Optimal Power Flows können beispielsweise Stabilitäts- oder Kurzschlussindizes sein. In dieser Arbeit wird der Basisfall des Optimal Power Flow aus Gl. (2.26) zu einem security-constrained Optimal Power Flow erweitert, indem weitere Ungleichheitsnebenbedingungen für den Strombetrag der Zweige aus Gl. (2.12) hinzutreten, sodass diesbezügliche Grenzwertverletzungen vermieden beziehungsweise beseitigt werden können. Gl. (2.27) zeigt das sich so ergebende Optimierungsproblem, welches wie

Gl. (2.26) um Nebenbedingungen, bspw. die Festlegung der Wirk- und Blindleistungen von Abnehmern oder eine Wirkleistungsbilanz beim Redispatch, erweitert werden muss.

$$\begin{aligned}
 \min \left( \sum_{i=1}^G f_i(P_i(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K)) \right) &= \min(f(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K)) \\
 \mathbf{u}_{K,\min} &\leq \mathbf{u}_K \leq \mathbf{u}_{K,\max} \\
 p_{K,\min} &\leq p_K(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K) \leq p_{K,\max} \\
 q_{K,\min} &\leq q_K(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K) \leq q_{K,\max} \\
 i_Z(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K) &\leq i_{Z,\max}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Weitere Nebenbedingungen für (n-1)-Fälle sind zusätzlich für einen (n-1)-Fall in Gl. (2.28) dargestellt, wobei der Variablenvektor um die Zustandsgrößen der (n-1)-Fälle, die Spannungswinkel und -beträge, erweitert werden muss.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{K,\min} &\leq \mathbf{u}_{K,(n-1)} \leq \mathbf{u}_{K,\max} \\
 p_{K,\min} &\leq p_{K,(n-1)}(\boldsymbol{\delta}_{K,(n-1)}, \mathbf{u}_{K,(n-1)}) \leq p_{K,\max} \\
 q_{K,\min} &\leq q_{K,(n-1)}(\boldsymbol{\delta}_{K,(n-1)}, \mathbf{u}_{K,(n-1)}) \leq q_{K,\max} \\
 i_{Z,(n-1)} &(\boldsymbol{\delta}_{K,(n-1)}, \mathbf{u}_{K,(n-1)}) \leq i_{Z,\max}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Die Verknüpfung der Zustandsgrößen des (n-0)-Falls mit denen der (n-1)-Fälle erfolgt über zusätzliche Gleichheitsnebenbedingungen. Diese beschreiben diejenigen Größen, die im (n-0)-Fall und im betrachteten (n-1)-Fall gleich sind, was in der Regel die Knotenwirk- und -blindleistungen auf Basis von Gl. (2.21) sind. Gl. (2.29) zeigt beispielhaft für einen (n-1)-Fall solche Gleichheitsnebenbedingungen, wobei die Wirk- und Blindleistung an mindestens einem Knoten nicht über Gleichheitsnebenbedingungen verknüpft werden dürfen, damit der veränderte Leistungsbedarf des Netzes im (n-1)-Fall ausgeglichen werden kann.

$$\begin{aligned}
 p_{K,(n-1)}(\boldsymbol{\delta}_{K,(n-1)}, \mathbf{u}_{K,(n-1)}) &= p_K(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K) \\
 q_{K,(n-1)}(\boldsymbol{\delta}_{K,(n-1)}, \mathbf{u}_{K,(n-1)}) &= q_K(\boldsymbol{\delta}_K, \mathbf{u}_K)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

### 2.3.2 Economic (re)dispatch

Die Erweiterung des Basisfalls des Optimal Power Flows hin zum economic (re)dispatch kann die im allgemeinen Fall stückweisen und nichtlinearen Anfahrts- und Betriebskosten der Kraftwerke berücksichtigen und den wirtschaftlich optimalen Kraftwerkseinsatz bestimmen. Zur Berücksichtigung von detaillierten Kostenfunktionen von Kraftwerken und Speichern im Rahmen des economic (re)dispatch, wie sie beispielsweise bei unterschiedlichen Kosten für positive und

negative Leistungsänderungen oder Anfahrtskosten auftreten, ist es notwendig, dass die Knotenwirk- und -blindleistungen als Variable des Optimierungsproblems zur Verfügung stehen. Hierzu muss der Variablenvektor um diese Variablen erweitert werden. Gl. (2.30) zeigt eine solche Problemformulierung aufbauend auf Gl. (2.26), wobei die Spannungswinkel und -beträge mit den Knotenwirk- und -blindleistungen über zusätzliche Gleichheitsnebenbedingungen verknüpft werden müssen. Wie in Gl. (2.26) und Gl. (2.27) müssen Nebenbedingungen, bspw. zur Festlegung der Wirk- und Blindleistungen von Abnehmern oder eine Wirkleistungsbilanz beim Redispatch, hinzugefügt werden.

$$\begin{aligned}
 \min \left( \sum_{i=1}^G f_i (P_i(\delta_K, \mathbf{u}_K, \mathbf{p}_K, \mathbf{q}_K)) \right) &= \min (f(\delta_K, \mathbf{u}_K, \mathbf{p}_K, \mathbf{q}_K)) \\
 \mathbf{u}_{K,\min} &\leq \mathbf{u}_K \leq \mathbf{u}_{K,\max} \\
 \mathbf{p}_{K,\min} &\leq \mathbf{p}_K \leq \mathbf{p}_{K,\max} \\
 \mathbf{q}_{K,\min} &\leq \mathbf{q}_K \leq \mathbf{q}_{K,\max} \\
 \mathbf{p}_K &= \text{Re} \left\{ 3 \cdot \underline{\mathbf{U}}_K \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{KK}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}_K^* \right\} \\
 \mathbf{q}_K &= \text{Im} \left\{ 3 \cdot \underline{\mathbf{U}}_K \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{KK}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}_K^* \right\}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

### 2.3.3 Security-constrained economic redispatch optimization

In dieser Arbeit wird eine security-constrained economic redispatch optimization durchgeführt [2.17]. Aufbauend auf einem economic dispatch, der sich am Markt gebildet hat, muss der Netzbetreiber den Blind- und bei Bedarf auch Wirkleistungseinsatz optimieren, um einen möglichst geringen Redispatchaufwand zur Einhaltung aller Netzrestriktionen und möglichst geringe Netzverluste zu haben. Es werden somit die in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten allgemeinen Formulierung für die Nebenbedingungen des security-constrained Optimal Power Flow und die detaillierten Kosten des economic (re)dispatch aufgegriffen. Wie in den beiden vorherigen Abschnitten dargestellt wurde, bedingen sowohl die Nebenbedingungen aus (n-1)-Fällen im Rahmen des security-constrained Optimal Power Flow als auch die Kraftwerkskosten im Rahmen des economic (re)dispatch die Berücksichtigung von nichtlinearen Gleichheitsnebenbedingungen. Das Optimierungsproblem wird durch nichtlineare Gleichheitsnebenbedingungen immer nichtkonvex, da niemals alle Punkte der Verbindungslinie von zwei Punkten eines nichtlinearen Funktionsgraphen auf dem Funktionsgraphen liegen (vgl. **Bild 2.5** in Abschnitt 2.2.2 und [2.20]).

Da sowohl für die Nebenbedingungen der (n-1)-Fälle als auch für die Kostenfunktionen die Leistungen die relevanten Variablen beziehungsweise Verknüpfungsgrößen sind, ist es zielführender, alle anderen Variablen mit Hilfe der Gleichheitsnebenbedingungen zu eliminieren und nur die Leistungen als Variablen des Optimierungsproblems zu verwenden. Die Zielfunktion und die Nebenbedingungen werden dann als Funktionen der Leistungen aufgestellt. Gl. (2.31) zeigt ein solches Optimierungsproblem. Wie in Gl. (2.26), Gl. (2.27) und Gl. (2.30) müssen Nebenbedingungen, bspw. zur Festlegung der Wirk- und Blindleistungen von Abnehmern oder eine Wirkleistungsbilanz beim Redispatch, hinzugefügt werden.

$$\begin{aligned}
 & \min(f(\mathbf{p}_K, \mathbf{q}_K)) \\
 & \mathbf{p}_{K,\min} \leq \mathbf{p}_K \leq \mathbf{p}_{K,\max} \\
 & \mathbf{q}_{K,\min} \leq \mathbf{q}_K \leq \mathbf{q}_{K,\max} \\
 & \mathbf{u}_{K,\min} \leq \mathbf{u}_K(\mathbf{p}_K, \mathbf{q}_K) \leq \mathbf{u}_{K,\max} \\
 & \mathbf{u}_{K,\min} \leq \mathbf{u}_{K,(n-1)}(\mathbf{p}_K, \mathbf{q}_K) \leq \mathbf{u}_{K,\max} \\
 & \mathbf{i}_Z(\mathbf{p}_K, \mathbf{q}_K) \leq \mathbf{i}_{Z,\max} \\
 & \mathbf{i}_{Z,(n-1)}(\mathbf{p}_K, \mathbf{q}_K) \leq \mathbf{i}_{Z,\max}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Um die in Gl. (2.31) enthaltenen Funktionen zu ermitteln, ist eine Umkehrfunktion  $\underline{\mathbf{u}}_K = f(\underline{\mathbf{s}}_K)$  der Leistungsgleichung  $\underline{\mathbf{s}}_K = f(\underline{\mathbf{u}}_K)$  aus Gl. (2.21) erforderlich. In Kapitel 3 wird zunächst die Umkehrbarkeit der Leistungsgleichung untersucht. Da die Umkehrbarkeit der Leistungsgleichung nur in Ausnahmefällen gegeben ist, werden ebenfalls einige Ansätze zur Herstellung der Umkehrbarkeit vorgestellt und verglichen.



### 3 Lösen der Leistungsdifferenzgleichung

In Abschnitt 2.1.2 wurde die Leistungsgleichung (2.21) hergeleitet. Sie beschreibt die nichtlinearen Funktionen der Knotenwirk- und -blindleistungen  $p_K$  und  $q_K$  in Abhängigkeit der Betriebsmitteladmittanzen, die in der Knotenadmittanzmatrix  $\underline{Y}_{KK}$  zusammengefasst sind, und dem Netzzustandsvektor, der aus den Knotenspannungen  $\underline{u}_K$  besteht. Es gibt vier reelle Knotengrößen (Wirk- und Blindleistung, Spannungsbetrag und -winkel), von denen jeweils zwei je Knoten vorgegeben werden können, und die über die Leistungsgleichung mit den jeweils anderen beiden verknüpft sind, sodass sich diese ergeben. Sofern alle Knotenspannungen bekannt sind, können aus diesen unmittelbar die Knotenleistungen und alle weiteren Größen des Netzes, wie beispielsweise Netzverluste, Leistungsflüsse und Ströme auf den Betriebsmitteln berechnet werden. Die Knotenspannungen sind somit die Zustandsgrößen des Netzes. In der Regel sind jedoch zunächst nur die Knotenleistungen bekannt und der Netzzustandsvektor muss ermittelt werden. Im Rahmen von Netzberechnungen werden die Knotentypen in **Tabelle 3.1** unterschieden.

**Tabelle 3.1** Knotentypen der Netzberechnung

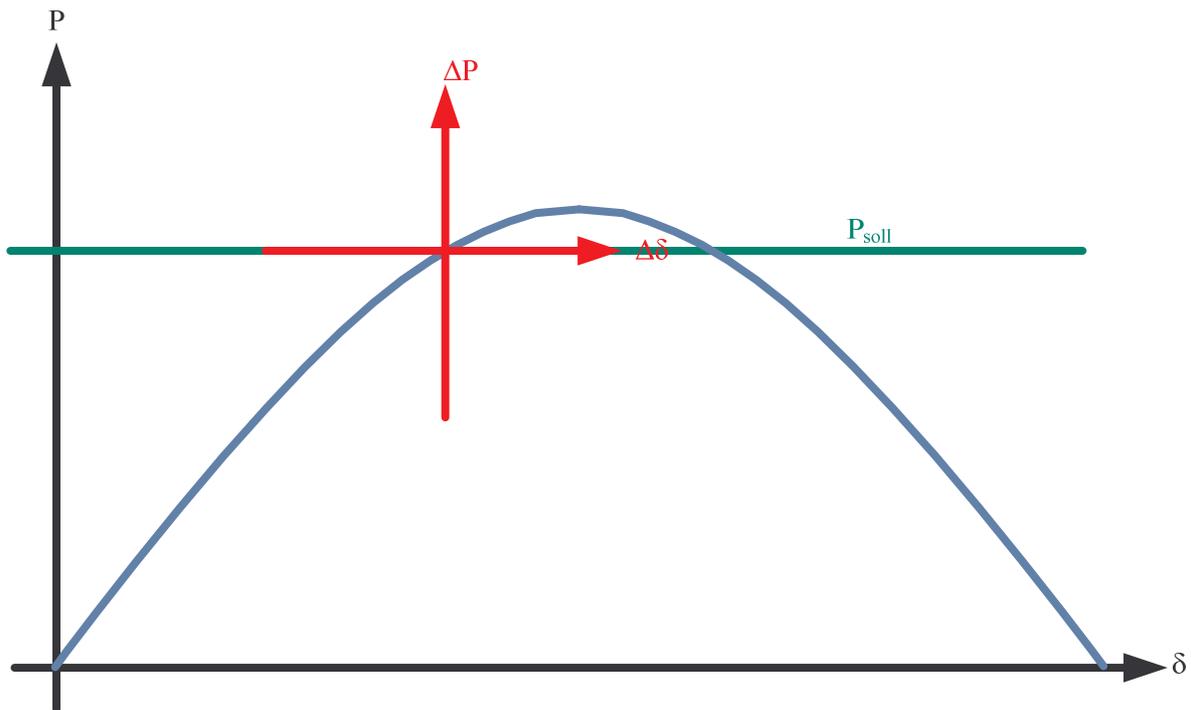
	PQ-Knoten		PU-Knoten		Slack-Knoten	
	Vorgabe	Ergebnis	Vorgabe	Ergebnis	Vorgabe	Ergebnis
<b>Wirkleistung</b>						
<b>Blindleistung</b>						
<b>Betrag der Spannung</b>						
<b>Winkel der Spannung</b>						

Statt der Leistungsgleichung (2.21) wird im Folgenden eine Leistungsdifferenzgleichung (3.1) verwendet, was jedoch keine Änderung der Leistungsgleichung zur Folge hat, sondern nur einer Beschreibung in einem um  $-\underline{s}_K$  verschobenen Koordinatensystem entspricht. Die Leistungsdifferenzgleichung gibt die Differenz  $\Delta\underline{s}_K$  zwischen den Netzleistungen  $\underline{s}_N$  und den Knotenleistungen  $\underline{s}_K$  an.

$$\Delta\underline{s}_K = \underline{s}_N - \underline{s}_K = 3\underline{U}_K \underline{Y}_{KK}^* \underline{u}_K^* - \underline{s}_K \tag{3.1}$$

$$\Delta p_K + j\Delta q_K = \left( \operatorname{Re} \left\{ 3\underline{U}_K \underline{Y}_{KK}^* \underline{u}_K^* \right\} - p_K \right) + j \left( \operatorname{Im} \left\{ 3\underline{U}_K \underline{Y}_{KK}^* \underline{u}_K^* \right\} - q_K \right)$$

Analog zur Leistungsgleichung (2.21) und Leistungsdifferenzgleichung (3.1) entspricht die beispielhaft in **Bild 3.1** in blau gezeichnete Kennlinie im schwarz gezeichneten P- $\delta$ -Koordinatensystem einer Wirkleistungs-Winkel-Kennlinie und im rot gezeichneten  $\Delta P$ - $\Delta\delta$ -Koordinatensystem einer Wirkleistungsdifferenz-Winkeldifferenz-Kennlinie.



**Bild 3.1** Wirkleistungs-Winkel-Kennlinie als Beispiel für die Beschreibung einer Funktion in zwei Koordinatensystem  $P$ - $\delta$  und  $\Delta P$ - $\Delta \delta$

Unter einer Lösung der Leistungsdifferenzgleichung wird in dieser Arbeit ein Knotenspannungsvektor verstanden, der einen zu einem Wirk- und Blindleistungsvektor zugehörigen Netzzustand beschreibt. Für eine Lösung der Leistungsdifferenzgleichung gilt somit  $\Delta \underline{s}_k = \mathbf{0}_k$  in Gl. (3.1).

Zur Ermittlung einer Lösung der Leistungsdifferenzgleichung ist die Umkehrfunktion  $\Delta \underline{u}_k$  in Gl. (3.2) der Leistungsdifferenzgleichung (3.1) oder zumindest eine Näherung dieser Umkehrfunktion notwendig.

$$\Delta \underline{u}_k = f(\Delta \underline{s}_k) \quad (3.2)$$

In Abschnitt 3.1 wird gezeigt, dass die Leistungsdifferenzgleichung für konstante Knotenleistungen  $\underline{s}_k$  in der Regel nicht umkehrbar ist. Wie sie umkehrbar gemacht werden kann, wird ebenfalls in Abschnitt 3.1 beschrieben. Vor- und Nachteile verschiedener Möglichkeiten, die Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung herzustellen, werden in den Unterabschnitten von Abschnitt 3.2 verglichen. In den Unterabschnitten 3.2.1 bis 3.2.5 werden Möglichkeiten aufgezeigt, die Umkehrbarkeit durch Erweiterungen um geregelte Knotenleistungen herzustellen

len. Im Unterabschnitt 3.2.6 wird eine weitere in der Literatur beschriebene Möglichkeit erläutert und diskutiert, welche die Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung mit Hilfe der Pseudoinversen herstellt.

Da im Allgemeinen auf analytischem Weg keine exakte Umkehrfunktion der Leistungsgleichung, Leistungsdifferenzgleichung bzw. modifizierten Leistungsdifferenzgleichung bestimmt werden kann, wird eine Lösung in der Regel durch ein numerisches Verfahren bestimmt. In Abschnitt 3.3 wird das in dieser Arbeit für die Leistungsflussberechnung benutzte Newtonverfahren zur Bestimmung einer Lösung der durch den Verteilten Slack aus Unterabschnitt 3.2.3 umkehrbar gemachten Leistungsdifferenzgleichung beschrieben.

In Abschnitt 3.4 wird zunächst die potentiell mögliche Anzahl der Lösungen der umkehrbar gemachten Leistungsdifferenzgleichung und dann der Umgang mit mehreren Lösungen in dieser Arbeit beschrieben.

### 3.1 Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung

Mathematisch kann die Umkehrbarkeit einer Funktion mit Hilfe des Satzes von der Umkehrabbildung untersucht werden, der für nichtlineare Funktionen jedoch nur die Aussage erlaubt, ob eine Funktion lokal, also an einer bestimmten Stelle – im Fall der Leistungs- und Leistungsdifferenzgleichung an der Stelle  $\underline{u}_k$  –, umkehrbar ist. Lokale Umkehrbarkeit liegt vor, wenn die Jakobimatrix der Funktion, also die Matrix der partiellen Ableitungen an einer bestimmten Stelle, invertierbar also nicht-singulär ist und somit eine Determinante ungleich Null besitzt. Die Umkehrbarkeit einer Funktion kann auch gegeben sein, obwohl die Umkehrfunktion nicht analytisch bestimmt werden kann.

Für die Netzleistungen werden die Formeln zur Berechnung der Elemente der Jakobimatrix in Anhang 11.1.1 dargestellt. Wenn die Knotenleistungen  $\underline{s}_k$  konstant sind, entspricht die Jakobimatrix der Leistungsdifferenzgleichung der Jakobimatrix der Netzleistungen. Im Allgemeinen kann dann keine Festlegung getroffen werden, ob die Determinante der Jakobimatrix der Leistungsdifferenzgleichung gleich oder ungleich Null ist. Die Determinante der Jakobimatrix der Leistungsdifferenzgleichung ist unter Vernachlässigung der Querglieder und der ohmschen Anteile immer Null. Jedoch liefert auch die Inverse einer Jakobimatrix der Leistungsdifferenzgleichung mit einer Determinante ungleich Null nur sehr selten verwertbare Ergebnisse. Sie wird daher auch in der Literatur, beispielsweise in [2.2], als numerisch singulär oder schlecht konditioniert bezeichnet.

Im Folgenden wird die Nicht-Umkehrbarkeit der Leistungs- und Leistungsdifferenzgleichung auf Basis der Vorgänge im Energieversorgungsnetz anschaulich begründet. Die Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung beschreibt die Änderung der Knotenspannungen in Abhängigkeit von den Änderungen der Knotenleistungen. Hierbei muss aufgrund des Energieerhaltungssatzes die Leistungsbilanz des Systems, inklusive des Wirk- und Blindleistungsbedarfes des Netzes, immer ausgeglichen werden. Kommt es zu einer Störung des Leistungsgleichgewichtes im System, beispielsweise durch den Ausfall eines Betriebsmittels oder durch eine Leistungsänderung an einem Knoten, und sind die (übrigen) Knotenleistungen in der Leistungsdifferenzgleichung konstant, wird das Leistungsgleichgewicht nicht ausgeglichen. Die Leistungsdifferenzgleichung kann in diesem Fall nur dann umgekehrt werden, wenn die Änderung der Knotenspannung derart erfolgen kann, dass die Leistungsbilanz des Netzes durch einen veränderten Wirk- und Blindleistungsbedarf des Netzes ausgeglichen werden kann. Dieser Fall ist ohne weitere Maßnahmen, wie sie in den Abschnitten 3.2.1 bis 3.2.5 beschrieben werden, nur selten gegeben. Um eine Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung zu erreichen, muss diese verändert werden, indem die Reaktion des Netzes auf Leistungsbilanzänderungen festgelegt wird. In den folgenden Abschnitten werden dafür die Knotenleistungen  $\underline{s}_k$  nicht mehr als konstante Leistungen  $\underline{s}_{k,0}$  angenommen, sondern es werden Leistungen oder Teile davon in Gl. (3.3) durch Leistungsfunktionen ersetzt oder um diese ergänzt. Damit verbunden ist eine Änderung der PQ-Knoten in leistungsgeregelte Knoten. Die folgende Zusammenstellung von Ansätzen für geregelte Knoten ist nicht abschließend, enthält jedoch alle in dieser Arbeit betrachteten Ansätze.

$$\underline{s}_k = \underline{s}_{k,0} + \Delta \underline{s}_{k,L}(\underline{u}_k) + \Delta \underline{s}_{k,A}(\underline{u}_k) + j\Delta \underline{q}_{k,PU}(\underline{u}_k) + \Delta \underline{s}_{k,S}(\underline{u}_k) + \Delta \underline{p}_{k,VS}(\underline{u}_k) \quad (3.3)$$

Die Leistungen  $\underline{s}_k$  werden in den folgenden Abschnitten in mehrere Teile zerlegt. Diese Teile sind die konstanten Leistungen der Einspeisungen und Lasten  $\underline{s}_{k,0} = \underline{p}_{k,L,0} + j\underline{q}_{k,L,0}$ , die von den Knotenspannungsbeträgen abhängigen Leistungsänderung der Lasten  $\Delta \underline{s}_{k,L}(\underline{u}_k)$  (Abschnitt 3.2.1), die Leistungsänderungen  $\Delta \underline{s}_{k,A}(\underline{u}_k)$  über Ersatzknotenadmittanzen, die für Einspeisungen oder Lasten ermittelt werden können (Abschnitt 3.2.2), die Blindleistungsänderungen  $\Delta \underline{q}_{k,PU}(\underline{u}_k)$  an PU-Knoten (Abschnitt 3.2.3), die Leistungsänderung  $\Delta \underline{s}_{k,S}(\underline{u}_k)$  am Slack-Knoten (Abschnitt 3.2.4) und die Leistungsänderung  $\Delta \underline{p}_{k,VS}(\underline{u}_k)$  an allen Knoten, die zu einem Verteilten Slack beitragen (Abschnitt 3.2.5).

Neben der Ermöglichung der Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung, haben die folgenden Abschnitte das Ziel, das Verhalten des Netzes bei Leistungsänderungen möglichst genau zu beschreiben. Dies ist vor allem im Rahmen der Optimierung, aber beispielsweise auch bei der Leistungsflussberechnung und bei potentiellen anderen Netzberechnungen, erstrebenswert. Insbesondere spielt hierbei die in den Netz- und Systemregeln der deutschen Übertragungsnetzbetreiber (TransmissionCode [3.11]) angestrebte Reaktion des Systems auf eine Leistungsänderung eine Rolle, indem die Leistungsänderung durch Regelleistung ausgeglichen werden muss.

### 3.2 Umkehrung der Leistungsdifferenzgleichung

In den Unterabschnitten 3.2.1 bis 3.2.5 werden Modellierungsansätze vorgestellt, die eine Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung durch Anpassungen der Knotenleistungen ermöglichen. Im Unterabschnitt 3.2.6 wird ein Umkehrungsansatz auf Basis der Pseudoinversen der Jakobimatrix beschrieben.

In Unterabschnitt 3.2.7 werden die beschriebenen Ansätze verglichen und bewertet.

#### 3.2.1 Spannungsabhängigkeit der Lasten

Basierend auf [3.21] gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Berücksichtigung der (statischen) Spannungsabhängigkeit der Lasten. Der häufigste verwendete Ansatz ist ein Exponentialansatz, welcher im Folgenden dargestellt wird. Die Modellierung des Exponentialansatzes ist in Gl. (3.4) mit Hilfe der Matrizen aus Gl. (3.5) beschrieben und [2.2] entnommen. Weitere Ansätze sind polynomiell, linear, „umfassend“ (für besonders niedrige Spannungsniveaus), oder die Nachbildungen von Induktionsmotoren und leistungselektronische Modellierungen.

$$\underline{s}_{K,L}(\mathbf{u}_K) = \mathbf{p}_{K,L}(\mathbf{u}_K) + j\mathbf{q}_{K,L}(\mathbf{u}_K) = \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{p}_{K,L,0} + j\mathbf{U}_Q \cdot \mathbf{q}_{K,L,0} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{U}_P = \begin{bmatrix} (U_1/U_{1,0})^{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & (U_K/U_{K,0})^{p_K} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_Q = \begin{bmatrix} (U_1/U_{1,0})^{q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & (U_K/U_{K,0})^{q_K} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\Delta \underline{s}_{K,L}(\mathbf{u}_K) = \underline{s}_{K,L}(\mathbf{u}_K) - \underline{s}_{K,L,0} \quad (3.6)$$

In Gl. (3.6) ist  $\underline{s}_{K,L,0}$  ein Knotenleistungsvektor, der an den Positionen der Knoten, deren Leistung als spannungsabhängige Last beschrieben wird, die entsprechende Leistung aus dem Knotenleistungsvektor  $\underline{s}_{K,0}$  enthält.

Durch die Berücksichtigung dieser Funktionen kann die Leistungsdifferenzgleichung umkehrbar werden, da das Leistungsgleichgewicht im System durch Veränderung der Spannungen über den spannungsabhängigen Lasten hergestellt wird.

#### 3.2.2 Lasten oder Erzeuger als Ersatzadmittanzen

Ein weiterer Ansatz, der beispielsweise in [3.9], [2.3], [3.10] beschrieben wird, um die Leistungsdifferenzgleichung umkehrbar zu machen, ist die Lasten oder Erzeuger durch Ersatzadmittanzen nachzubilden. Ausgehend von den Knotenscheinleistungen  $\underline{s}_K$  und den angenommenen, oder bereits bekannten, Knotenspannungen  $\underline{u}_K$  können in Gl. (3.7) für die Knotenleistungen die Ersatzknotenadmittanzen  $\underline{y}_K$  berechnet werden.

$$\underline{y}_K = \frac{1}{3} (\underline{U}_K^2)^{-1} \underline{s}_K^* \quad (3.7)$$

In Gl. (3.7) ist  $\underline{U}_K^2$  eine Diagonalmatrix der quadratischen Beträge der Knotenspannungen.

Üblicherweise werden nur die Ersatzadmittanzen für die Leistungen der Lasten (Abnehmer)  $\underline{s}_{K,A}$  berechnet, da das Verhalten einiger Lasten bei Spannungsänderung oft durch das Verhalten einer Admittanz bei Spannungsänderung näherungsweise beschrieben werden kann. Jedoch ist eine Berechnung von Ersatzadmittanzen für Erzeuger, oder nur aus Wirk-, Blind- oder sonstigen Anteilen der Leistungen von Lasten oder Erzeugern, analog möglich. Die Beschreibung von Lasten durch Ersatzadmittanzen ist gleichwertig zur Modellierung der Spannungsabhängigkeit der Lasten mit den Exponenten  $p_i = 2$  und  $q_i = 2$ . Sie stellt somit für Lasten lediglich einen Sonderfall des in Abschnitt 3.2.1 dargestellten Ansatzes dar.

Die Leistung der Ersatzadmittanzen der Lasten kann mit Gl. (3.8) beschrieben werden.

$$\underline{s}_{K,A}(\underline{u}_K) = 3 \underline{U}_K \underline{Y}_A^* \underline{u}_K^* \quad (3.8)$$

$$\Delta \underline{s}_{K,A}(\underline{u}_K) = \underline{s}_{K,A}(\underline{u}_K) - \underline{s}_{K,A,0} \quad (3.9)$$

In Gl. (3.8) ist  $\underline{Y}_A$  eine Diagonalmatrix des Vektors der Ersatzadmittanzen  $\underline{y}_A$ , der die Ersatzknotenadmittanzen  $\underline{y}_K$  der Lasten enthält. In Gl. (3.9) ist  $\underline{s}_{K,A,0}$  ein Knoten-Leistungsvektor,

der an den Positionen der Knoten, deren Leistung durch Ersatzadmittanzen beschrieben wird, die entsprechende Leistung aus dem Knoten-Leistungsvektor  $\underline{s}_{K,0}$  enthält.

Analog zur Berücksichtigung der Spannungsabhängigkeit der Lasten wird die Leistungsdifferenzfunktion bei Berücksichtigung von Ersatzadmittanzen umkehrbar. Das Leistungsgleichgewicht wird bei einer Änderung der Leistungsbilanz des Netzes hergestellt, indem sich die Spannungen über den Ersatzadmittanzen entsprechend einstellen.

### 3.2.3 PU-Knoten

An einem PU-Knoten werden nicht die Wirk- und Blindleistung vorgegeben, sondern die Wirkleistung und der Spannungsbetrag. Die Blindleistung und der Spannungswinkel stellen sich dann den Netzverhältnissen entsprechend ein.

Für die Blindleistung der PU-Knoten gilt Gl. (3.10):

$$\mathbf{q}_{\text{PU}} = \text{Im} \left\{ 3 \underline{\mathbf{U}}_{\text{PU}} \underline{\mathbf{Y}}_{\text{KK}}^* \underline{\mathbf{u}}_{\text{K}}^* \right\} \quad (3.10)$$

In Gl. (3.10) ist  $\underline{\mathbf{U}}_{\text{PU}}$  eine Diagonalmatrix, die nur an den Elementen der PU-Knoten die Knotenspannung der PU-Knoten aus  $\underline{\mathbf{u}}_{\text{K}}$  enthält. Um die spannungsabhängige Blindleistungsregelung von PU-Knoten in der Leistungsdifferenzgleichung zu berücksichtigen, wird in Gl. (3.11) eine Funktion für die Blindleistungsdifferenz an PU-Knoten  $\Delta \mathbf{q}_{\text{K,PU}}(\underline{\mathbf{u}}_{\text{K}})$  ermittelt.

$$\Delta \mathbf{q}_{\text{K,PU}}(\underline{\mathbf{u}}_{\text{K}}) = \mathbf{q}_{\text{PU}} - \mathbf{q}_{\text{PU},0} = \text{Im} \left\{ 3 \underline{\mathbf{U}}_{\text{PU}} \underline{\mathbf{Y}}_{\text{KK}}^* \underline{\mathbf{u}}_{\text{K}}^* \right\} \Big|_{\Delta \mathbf{u}_{\text{PU}}=0} - \mathbf{q}_{\text{PU},0} \quad (3.11)$$

In Gl. (3.11) entspricht  $\mathbf{q}_{\text{PU},0}$  der Blindleistung an den PU-Knoten im Ausgangszustand. Der Betrag der Knotenspannungen an den PU-Knoten in Gl. (3.11) ist konstant.

Durch die Berücksichtigung von PU-Knoten wird die Leistungsdifferenzfunktion nur in Ausnahmefällen umkehrbar, da ein Wirkleistungsungleichgewicht mit Hilfe von PU-Knoten nicht ausgeglichen werden kann.

### 3.2.4 Slack-Knoten

Zur Bilanzierung des Netzes kann ein sogenannter Slack-Knoten eingeführt werden. Am Slack-Knoten wird die Spannung nach Betrag und Phase (beziehungsweise Real- und Imaginärteil) konstant gehalten, sodass die Spannung dieses Knotens in Gl. (3.12) keine Variable, sondern eine Konstante ist und somit die Ableitungen nach dieser Spannung Null sind. In der Folge

ergibt sich die Leistung an diesem Knoten nicht mehr aus einer Leistungsvorgabe wie bei PQ-Knoten, sondern aus den Netzverhältnissen, sodass für die Leistung  $\underline{s}_s(\underline{u}_k)$  am Slack-Knoten gilt:

$$\underline{s}_s(\underline{u}_k) = 3\underline{u}_s^T \underline{Y}_{KK}^* \underline{u}_k^* \quad (3.12)$$

In Gl. (3.12) ist  $\underline{u}_s$  ein Knoten-Spannungsvektor, der nur an der Position des Slack-Knotens die vorgegebene Spannung als Nicht-Nullelement enthält. Um die Leistungsfunktion  $\underline{s}_s(\underline{u}_k)$  in Gl. (3.3) zu berücksichtigen, wird die Leistungsänderung am Slack-Knoten in Gl. (3.13) in vektorieller Form beschrieben.

$$\Delta \underline{s}_s(\underline{u}_k) = 3\underline{U}_s \underline{Y}_{KK}^* \underline{u}_k^* \Big|_{\Delta U_s=0} - \underline{s}_{s,0} \quad (3.13)$$

In Gl. (3.13) ist  $\underline{U}_s$  eine Diagonalmatrix von  $\underline{u}_s$  und  $\underline{s}_{s,0}$  ein Knoten-Leistungsvektor, der nur an der Position des Slack-Knotens den zugehörigen Wert aus dem Knoten-Leistungsvektor  $\underline{s}_{k,0}$  als Nicht-Nullelement enthält.

Durch die Berücksichtigung eines Slack-Knotens, wird die Leistungsdifferenzgleichung umkehrbar, da ein Wirk- oder Blindleistungsungleichgewicht durch entsprechende Leistungseinspeisung am Slack-Knoten ausgeglichen wird.

#### 3.2.5 Verteilter Slack für die Wirkleistung

Da ein Wirkleistungsbilanzungleichgewicht im tatsächlichen Netz durch Regelleistung [3.11] ausgeglichen wird, wird in dieser Arbeit mit Hilfe eines Verteilten Slacks eine Leistungsregelung  $\Delta p_{k,vs}(\underline{u}_k)$  implementiert, bei der Kraftwerke, die sich am Verteilten Slack beteiligen, analog zur Regelleistung auf eine Änderung der Wirkleistungsbilanz im Netz reagieren.

Ein Verteilter Slack („distributed slack“) wurde im Rahmen von Leistungsflussberechnungen, die mit Slack-Knoten durchgeführt werden (beispielsweise in [3.12]), bereits implementiert, jedoch nur indem nach jedem Iterationsschritt die Knotenleistungen angepasst werden.

In [3.19] wurde in Anlehnung an [3.20], unter Vernachlässigung der Änderung des Leistungsbedarfes des Netzes, die Leistungsdifferenzgleichung um eine Gleichung für die Wirkleistungsbilanzabweichung und der Netzzustandsvektor um die Frequenzabweichung erweitert. In der Jakobimatrix des erweiterten Systems kann dann ein Verteilter Slack berücksichtigt werden.

Der Ansatz in dieser Arbeit berücksichtigt den Verteilten Slack unmittelbar in der Leistungsdifferenzgleichung und der Verteilte Slack findet somit direkten Eingang in die Jakobi- und Hessematrizen jedes Iterationsschrittes, sodass ein einzelner Slack-Knoten nicht mehr notwendig ist. Es wird zudem auch die nichtlineare Änderung des Leistungsbedarfes des Netzes berücksichtigt, und es sind keine weiteren Zustandsgrößen notwendig. Des Weiteren erfolgt im Gegensatz zum Slack-Knoten keine Festlegung eines Spannungsniveaus für das Netz.

Zunächst wird in Abschnitt 3.2.5.1 der Verteilte Slack für ein gesamtes Netz und darauf aufbauend in Abschnitt 3.2.5.2 ein Verteilter Slack für einzelne Regelzonen hergeleitet, falls das Netz in diese aufgeteilt wird. In Abschnitt 3.2.5.3 wird beschrieben, wie sich die Blindleistungsbilanz im Netz einstellt, wenn nur ein Verteilter Slack und keine weiteren Maßnahmen für das Blindleistungsmanagement, beispielsweise PU-Knoten (vgl. Abschnitt 3.2.3), umgesetzt werden.

### 3.2.5.1 Verteilter Slack für ein gesamtes Netz

Für die Herleitung des Verteilten Slacks für ein gesamtes Netz wird zunächst von der Summe aller Wirkleistungen im Netz, also dem Wirkleistungsbedarf des Netzes aus Gl. (2.24), ausgegangen. Die Änderung des Wirkleistungsbedarfes  $\Delta P_V$  kann mit Gl. (3.14) beschrieben werden.

$$\Delta P_V(\underline{\mathbf{u}}_K) = P_V(\underline{\mathbf{u}}_K) - P_{V,0} = \operatorname{Re}\left\{3\underline{\mathbf{u}}_K^T \underline{\mathbf{Y}}_{KK}^* \underline{\mathbf{u}}_K^*\right\} - P_{V,0} \quad (3.14)$$

Für den Verteilten Slack wird jedoch nicht die Funktion des Wirkleistungsbedarfes des Netzes benötigt, sondern die Änderung der Wirkleistungsbilanz des Netzes. Hierzu muss analog zum Slack-Knoten (vgl. Abschnitt 3.2.4) an einem Knoten die Spannung nach Betrag und Phase beziehungsweise Real- und Imaginärteil konstant gehalten werden. Dieser Knoten reagiert entgegengesetzt auf eine Änderung der Wirkleistungsbilanz im System. Wird eine konstante Spannung in Gl. (3.14) berücksichtigt, ergibt sich Gl. (3.15) für die Änderung der Wirkleistungsbilanz  $\Delta P(\underline{\mathbf{u}}_K)$ , da die Änderung der Leistung am Knoten mit konstant gehaltener Spannung in der Gleichung nicht enthalten ist.

$$\Delta P(\underline{\mathbf{u}}_K) = \operatorname{Re}\left\{3\underline{\mathbf{u}}_K^T \underline{\mathbf{Y}}_{KK}^* \underline{\mathbf{u}}_K^*\right\}\Big|_{\Delta U_S=0} - P_{V,0} \quad (3.15)$$

Bei der Berechnung der Änderung der Wirkleistungsbilanz ist zu beachten, dass die Auswahl des Knotens mit konstanter Spannung einen Einfluss auf das Ergebnis hat, da die Netzverluständerung und damit auch die Wirkleistungsbilanzänderung abhängig von der Wahl des Knotens mit konstanter Spannung, der auf die Leistungsänderung reagiert, sind. Diese Ungenauigkeit

hat sich im Rahmen der Ausarbeitungen für diese Arbeit als vernachlässigbar klein herausgestellt. Sie ist klein, weil am Knoten mit konstanter Spannung nur hilfsweise die Wirkleistungsbilanzänderung berechnet wird und die Kompensation der Wirkleistungsbilanzänderung im Folgenden von den am Verteilten Slack beteiligten Knoten übernommen wird.

Um festzulegen, welche Knoten sich mit welchen Anteilen an der Ausregelung eines Wirkleistungsbilanzungleichgewichts beteiligen, wird der Vektor  $\mathbf{bf}_k$  in Gl. (3.16) benötigt, der Beteiligungsfaktoren  $bf_k$  („participation factors“) für jeden Knoten enthält. Die Summe aller Beteiligungsfaktoren muss eins ergeben, damit das Wirkleistungsbilanzungleichgewicht nicht unter- oder überkompensiert wird.

$$\mathbf{bf}_k = [bf_1 \quad \cdots \quad bf_k \quad \cdots \quad bf_K]^T \quad (3.16)$$

Um die Leistungsänderung durch den Verteilten Slack  $\Delta p_{k,vs}(\underline{u}_k)$  an jedem Knoten zu berechnen, wird in Gl. (3.17) der Beteiligungsfaktor jedes Knotens mit der Wirkleistungsbilanzänderung multipliziert.

$$\Delta p_{k,vs}(\underline{u}_k) = -\mathbf{bf}_k \cdot \Delta P(\underline{u}_k) = -\mathbf{bf}_k \cdot \left( \operatorname{Re} \left\{ 3 \underline{u}_k^T \underline{Y}_{kk}^* \underline{u}_k \right\} \Big|_{\Delta U_s=0} - P_{v,0} \right) \quad (3.17)$$

Da der Verteilte Slack einer Wirkleistungsbilanzänderung entgegenwirken soll, ist das Minuszeichen in Gl. (3.17) notwendig.

#### 3.2.5.2 Verteilter Slack für einzelne Regelzonen

Die Wirkleistungsbilanzbildung in Gl. (3.15) für die Regelleistung wird üblicherweise nicht regelzonenübergreifend, sondern separat für jede Regelzone durchgeführt. Es ist daher naheliegend, den Verteilten Slack aus Abschnitt 3.2.5.1 zu einem Verteilten Slack für einzelne Regelzonen weiterzuentwickeln.

Zur Berücksichtigung der Wirkleistungsbilanzänderungen für jede Regelzone  $\Delta p_{RZ}(\underline{u}_k)$ , kann Gl. (3.15) für mehrere Regelzonen, und somit als Vektor, aufgestellt werden, indem jeweils die Summe aller Knotenleistungen in einer Regelzone gebildet wird.

$$\Delta p_{RZ}(\underline{u}_k) = \mathbf{RK} \cdot \operatorname{Re} \left\{ 3 \underline{U}_k \underline{Y}_{kk}^* \underline{u}_k \right\} \Big|_{\Delta U_s=0} - p_{RZ,0} - p_{RZ,v,0} \quad (3.18)$$

In Gl. (3.18) ist  $\mathbf{RK}$  eine Regelzonen-Knoten-Inzidenzmatrix, die angibt, welche Knoten zu welcher Regelzone gehören. Deren Anzahl der Zeilen entspricht der Anzahl der Regelzonen und deren Anzahl der Spalten entspricht der Anzahl der Knoten. Befindet sich ein Knoten in einer Regelzone, steht an der entsprechenden Stelle eine Eins in der Matrix, sonst eine Null.

Der Vektor  $\mathbf{p}_{\text{RZ},0}$  enthält die Import-Export-Bilanz jeder Regelzone. Ein entsprechender Wert ist in Gl. (3.17) nicht enthalten, da die Import-Export-Bilanz des gesamten Netzes immer Null ist. Analog zu  $p_{\text{V},0}$  in Gl. (3.17) ist in Gl. (3.18) der Vektor der Netzverluste jeder Regelzone  $\mathbf{p}_{\text{RZ},\text{V},0}$  enthalten. Der Vektor  $\Delta\mathbf{p}_{\text{RZ}}(\underline{\mathbf{u}}_{\text{K}})$  beschreibt also den Regelleistungsbedarf je Regelzone.

Da für jede Regelzone beschrieben werden muss, welche Knoten sich an dem Ausgleich des Regelleistungsbedarfs einer Regelzone beteiligen, muss statt des Vektors der Beteiligungsfaktoren  $\mathbf{bf}_{\text{K}}$  in Gl. (3.17) eine Matrix der Beteiligungsfaktoren  $\mathbf{BF}_{\text{KRZ}}$  aufgestellt werden. Deren Anzahl der Zeilen entspricht der Anzahl der Knoten und deren Anzahl der Spalten entspricht der Anzahl der Regelzonen. Beteiligt sich ein Knoten an der Regelleistung einer Regelzone, so steht an der entsprechenden Stelle in  $\mathbf{BF}_{\text{KRZ}}$  der jeweilige Beteiligungsfaktor  $\mathbf{bf}_{kr}$ . Hierbei muss der Regelleistungsabruf nicht zwingend aus der Regelzone stammen, in der ein Regelleistungsbedarf auftritt, sondern kann im Rahmen eines Netzregelverbunds [3.13], [3.14] auch aus anderen Regelzonen stammen, sodass sich ein Knoten auch an der Regelleistungsbereitstellung für mehrere Regelzonen beteiligen kann, jedoch muss die Spaltensumme von  $\mathbf{BF}_{\text{KRZ}}$  immer Eins ergeben. Sofern ein gegenläufiger Regelleistungsabruf in verschiedenen Regelzonen im Rahmen eines Netzregelverbunds verhindert werden soll, müssen diese Regelzonen zusammengefasst werden. Die Knotenleistungsänderungen durch den Verteilten Slack für einzelne Regelzonen zeigt Gl. (3.19).

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{p}_{\text{K,VS}}(\underline{\mathbf{u}}_{\text{K}}) &= -\mathbf{BF}_{\text{KRZ}} \cdot \Delta\mathbf{p}_{\text{RZ}}(\underline{\mathbf{u}}_{\text{K}}) \\ &= -\mathbf{BF}_{\text{KRZ}} \cdot \mathbf{RK} \cdot \left( \text{Re} \left\{ \mathbf{3}\underline{\mathbf{U}}_{\text{K}} \mathbf{Y}_{\text{KK}}^* \underline{\mathbf{u}}_{\text{K}}^* \right\} \Big|_{\Delta U_{\text{s}}=0} - \mathbf{p}_{\text{RZ},0} - \mathbf{p}_{\text{RZ},\text{V},0} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.2.5.3 Blindleistungsbilanz bei Verteiltem Slack für die Wirkleistung

Wird ein Slack-Knoten im Netzmodell implementiert und somit auch eine Spannung nach Betrag und Phase festgelegt, so wird über diesen Slack-Knoten sowohl die Wirk- als auch die Blindleistungsbilanz des Netzes ausgeglichen. Wird ein Verteilter Slack für die Wirkleistung im Netzmodell implementiert, so übernimmt dieser nur die Bilanzierung der Wirkleistung. Es ist somit für diesen Fall zu erörtern, wie das Blindleistungsgleichgewicht im Netz aufrechterhalten wird, wenn es keine PU-Knoten gibt. Da das Leistungsgleichgewicht im Netz erhalten bleiben muss, reagiert das Netzmodell auf eine Blindleistungsänderung im Netz ähnlich wie bei

spannungsabhängigen Lasten (vgl. Abschnitt 3.2.1) und Ersatzknotenadmittanzen (vgl. Abschnitt 3.2.2) mit Spannungsänderungen:

- Die Änderung des Spannungsbetrages über den in der Regel kapazitiven Querelementen beeinflusst den Blindleistungsbedarf wesentlich aufgrund der quadratischen Spannungsabhängigkeit der Blindleistung<sup>14</sup>. Eine Spannungsbetragsänderung bewirkt zudem Veränderungen des Wirk- und Blindleistungsflusses in den Längselementen des Netzes und somit des Wirk- und Blindleistungsbedarfs dieser Elemente.
- Die Änderung der Spannungswinkel bewirkt keine Leistungsveränderung in den Querelementen, jedoch Veränderungen des Wirk- und Blindleistungsflusses in den Längselementen des Netzes und somit des Wirk- und Blindleistungsbedarfs dieser Elemente.

Zusammenfassend verändern sich bei einer Blindleistungsänderung die Spannungsbeträge und -winkel, sodass die Blindleistungsbilanz ausgeglichen wird. Grundsätzlich gibt es unendlich viele Kombinationsmöglichkeiten, wie sich die Spannungsbeträge und -winkel ändern können, sodass die Blindleistungsbilanz ausgeglichen ist. Durch die beschriebene Modellierung stellt sich diejenige Kombination von Spannungsänderungen ein, die dazu führt, dass der durch die veränderten Spannungs- und Blindleistungsverhältnisse veränderte Wirkleistungsbedarf des Netzes durch Wirkleistungsänderungen an denen am Verteilten Slack beteiligten Knoten ausgeglichen wird und die Wirk- und Blindleistungsänderungen an allen (übrigen) Knoten Null sind.

Da sich auf Basis der beschriebenen Wirkungsweise Wirkleistungsflüsse der Betriebsmittel durch Blindleistungsänderungen ändern, bieten Blindleistungsänderungen auch Potentiale zur Verschiebung von Wirkleistungsflüssen im Rahmen der Redispatchoptimierung. Auf die Wirksamkeit dieser Potentiale wird in Abschnitt 7.4 vertiefend eingegangen.

#### **3.2.6 Umkehrung der Leistungsdifferenzgleichung durch Pseudoinverse**

Eine in [3.15] vorgestellte Möglichkeit, die Jakobimatrix der Leistungsdifferenzgleichung zu invertieren, ohne eine der vorgenannten Veränderungen an den Knotenleistungsfunktionen durchzuführen, ist die Nutzung der Pseudoinversen [3.16], [3.17]. Das Ergebnis der Umkehrung mittels der Pseudoinversen kann mit Hilfe des Gauss-Newton-Verfahrens interpretiert

---

<sup>14</sup> Werden die Querglieder des Netzes vernachlässigt, wird die Blindleistungsbilanz aufgrund der im Folgenden beschriebenen Zusammenhänge dennoch ausgeglichen.

werden, in welchem ebenfalls die Pseudoinverse benutzt wird. Die Invertierung der Jakobi-matrix wird dabei so durchgeführt, dass das Netz auf eine Leistungsbilanzänderung reagiert, indem die Summe der quadratischen Leistungsabweichungen aller Netzknoten minimal ist. Das Vorgehen ist physikalisch interpretierbar, wenn alle Knoten an der Regelleistungsbereitstellung beteiligt wären und die Regelleistung so erbracht würde, dass die Summe der quadratischen Regelleistungsbeiträge minimal ist.

### **3.2.7 Vergleich der Modellierungsansätze zur Umkehrung der Leistungsdifferenzgleichung**

Die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Modellierungsansätze kehren die Leistungsdifferenzgleichung auf verschiedene Weise um. Die Ansätze zeigen jedoch unterschiedliche Vor- und Nachteile.

Sowohl bei der Berücksichtigung von spannungsabhängigen Lasten als auch von Ersatzadmittanzen können bei großen Leistungsänderungen unzulässig große Spannungsänderungen auftreten. Zudem können sich im Rahmen der Optimierung niedrige Spannungen und eine damit verbundene verringerte Last als optimal herausstellen, wenngleich die Effizienz der Übertragung sinkt.

Da Änderungen der Leistungen der Lasten nicht die entsprechend [3.11] angestrebte Reaktion des Netzes auf eine Leistungsänderung ist, werden weder die Spannungsabhängigkeit der Lasten noch Ersatzadmittanzen zur Ermöglichung der Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung in dieser Arbeit verwendet. Eine Berücksichtigung der Spannungsabhängigkeit der Lasten kann für eine möglichst genaue Modellierung sinnvoll sein, falls die hierzu notwendigen Exponenten  $p_i$  und  $q_i$  bekannt sind und die Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung auf anderem Weg hergestellt wird.

PU-Knoten werden in dieser Arbeit nur im Rahmen der initialen Leistungsflussberechnung verwendet. Für die Herstellung der Umkehrbarkeit der Leistungsdifferenzgleichung im Rahmen der Optimierung werden sie nicht verwendet, da optimierte Spannungswerte erst im Rahmen der Optimierung ermittelt werden sollen, sodass eine vorherige Festlegung nicht sinnvoll ist.

Ein wesentlicher Nachteil eines Slack-Knotens ist, dass jedes Leistungsbilanzungleichgewicht im Netz, verursacht durch Knoten-Leistungsänderungen oder Änderungen des Leistungsbedarfes des Netzes, allein durch den Slack-Knoten ausbalanciert wird. Dieses Verhalten entspricht

bezüglich der Wirkleistung nicht dem tatsächlichen Verhalten des Netzes [3.11], da Ungleichgewichte in der Wirkleistungsbilanz durch Regelleistung ausgeglichen werden. Die Lösung der Leistungsdifferenzgleichung mit einem Slack-Knoten hat den weiteren Nachteil, dass das Spannungsniveau im gesamten Netz durch die Spannungsvorgabe am Slackknoten determiniert wird. Eine vorgegebene Spannung am Slack-Knoten sowie die Vorgabe mehrerer Spannungen an PU-Knoten (vgl. Abschnitt 3.2.5.3) erlauben keine Optimierung des Spannungsniveaus mehr beziehungsweise würden die Optimierung ein suboptimales Ergebnis liefern lassen, falls die Spannungen als Stellgröße schon durch das Gleichungssystem konstant gehalten werden. Zudem wäre das Berechnungsergebnis von der Wahl des Slack-Knotens abhängig. Daher wird in dieser Arbeit der Ansatz mit Slack-Knoten zur Ermöglichung der Umkehrbarkeit der Leistungsflussgleichung nicht verwendet.

Der Modellierungsansatz mit Verteiltem Slack entspricht den angestrebten Anforderungen. Es beteiligen sich analog zur Regelleistung mehrere Knoten am Ausgleich eines Wirkleistungsungleichgewichts, und es wird das Spannungsniveau im Netz nicht determiniert. Dieser Modellierungsansatz ist daher am besten geeignet und wird im Rahmen dieser Arbeit verwendet. Im Rahmen der Fallstudien dieser Arbeit wird der Verteilte Slack für einzelne Regelzonen jedoch nicht genutzt, da die Beispiele in dieser Arbeit nur aus einer Regelzone bestehen.

Die Güte der Umkehrung der Leistungsdifferenzgleichung mittels Pseudoinversen wurde in [3.18] untersucht und war hierbei einigen anderen Ansätzen überlegen, konnte jedoch nicht mit der Güte des Verteilten Slacks konkurrieren. Da diese Art der Invertierung einen geringen Bezug zu den tatsächlichen Vorgängen im Netz hat, findet diese Methode in dieser Arbeit keine weitere Verwendung.

### **3.3 Lösung der Leistungsdifferenzgleichung mit Verteiltem Slack durch Leistungsflussberechnung nach dem Newton-Verfahren**

Bei einer Leistungsflussberechnung nach dem Newton-Verfahren [2.4] wird ausgehend von einem Startwert iterativ eine Lösung der Leistungsdifferenzgleichung gesucht. Zur Durchführung wird die Leistungsdifferenzgleichung linearisiert und die Nullstelle mit Hilfe der Jakobimatrix näherungsweise bestimmt, wobei die Leistungsdifferenzgleichung zunächst umkehrbar gemacht werden muss (vgl. Abschnitt 3.2). An der näherungsweise ermittelten Lösungsstelle wird Gl. (3.21) erneut linearisiert, und es wird eine verbesserte Näherung für die Nullstelle bestimmt. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis sich die Änderung zwischen

zwei Näherungslösungen unterhalb einer Genauigkeitsschranke befindet. Weitere Details zum Newtonverfahren können beispielsweise [2.2] entnommen werden.

Für die Leistungsflussberechnung wird in dieser Arbeit zur Wirkleistungsbilanzierung ein Verteilter Slack (vgl. Abschnitt 3.2.3) implementiert, an dem sich alle Knoten mit Einspeisung beteiligten. Ihr Beteiligungsfaktor aus Gl. (3.16) wird vereinfacht entsprechend Gl. (3.20) aus dem entsprechenden Anteil der Einspeisung an der Gesamteinspeisung ermittelt.

$$bf_k = P_{k,\text{Einspeisung}} / \sum_{l=1}^n P_{l,\text{Einspeisung}} \quad (3.20)$$

Die Leistungsdifferenzgleichung unter Berücksichtigung der Knotenleistungsänderungen durch den Verteilten Slack und durch PU-Knoten, getrennt nach Wirk- und Blindleistung, zeigt Gl. (3.21).

$$\begin{aligned} \Delta p_K &= \text{Re} \left\{ 3 \underline{U}_K \underline{Y}_{KK}^* \underline{u}_K^* \right\} - p_{K,0} - \Delta p_{K,VS}(\underline{u}_K) \\ \Delta q_K &= \text{Im} \left\{ 3 \underline{U}_K \underline{Y}_{KK}^* \underline{u}_K^* \right\} - q_{K,0} - \Delta q_{K,PU}(\underline{u}_K) \end{aligned} \quad (3.21)$$

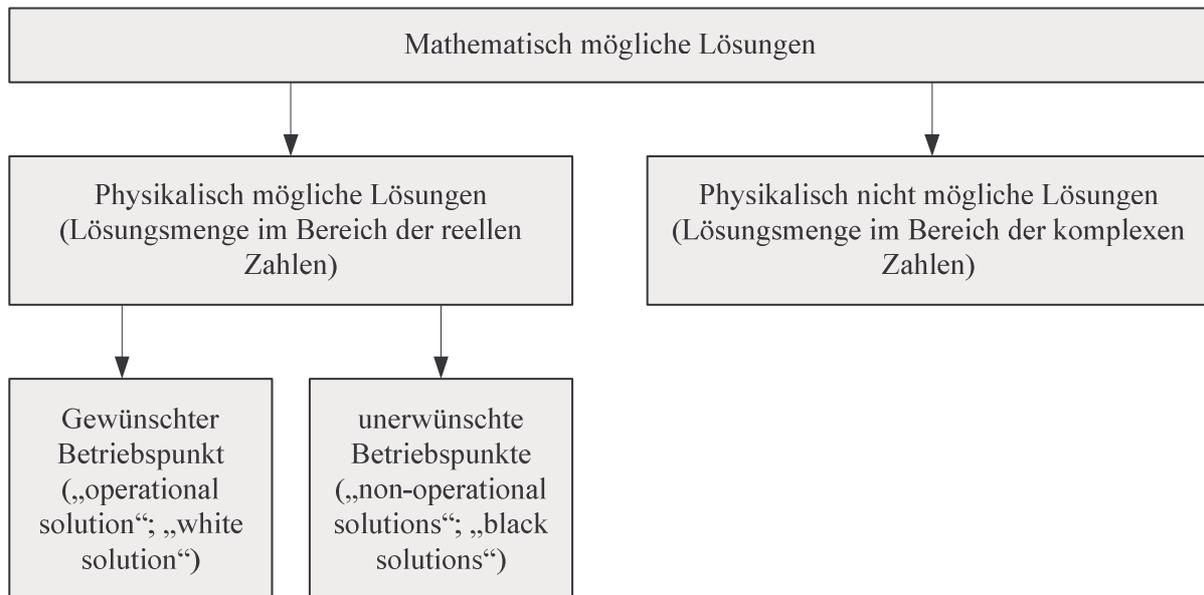
Die Herleitung der Jakobimatrix der Leistungsdifferenzgleichung mit Verteiltem Slack in Gl. (3.21) wird in Anhang 11.1 dargestellt.

Im Rahmen der initialen Leistungsflussberechnung werden in dieser Arbeit PU-Knoten an allen Knoten mit Wirkleistungseinspeisung implementiert, um plausible Startwerte zu erhalten. Hierzu wird an allen PU-Knoten zunächst Netznennspannung angenommen. Das Ergebnis der Leistungsflussberechnung kann Grenzwertverletzungen von Strömen, Spannungen und Aussteuergrenzen enthalten und ist bezüglich der Netzverluste und Spannungssollwerte nicht optimiert. Das Ergebnis einer initialen Leistungsflussberechnung dient daher in dieser Arbeit als Startwert für die Optimierung.

Zur Einhaltung der Systemstabilität muss das Energieversorgungsnetz (n-1)-sicher betrieben werden. Das bedeutet unter anderem, dass auch bei Ausfall eines Betriebsmittels die zulässigen Strom- und Spannungsgrenzwerte der Betriebsmittel nicht über- beziehungsweise unterschritten werden dürfen. Im Rahmen der Optimierung und Beseitigung von Grenzwertverletzung sind also alle beziehungsweise alle als relevant identifizierten (n-1)-Zustände auf die Einhaltung der Grenzwerte zu überprüfen.

### 3.4 Anzahl der Lösungen der Leistungsdifferenzgleichung

Die nach Real- und Imaginärteil aufgetrennte Leistungsdifferenzgleichung kann mehrere mathematische Lösungen haben, von denen das Newtonverfahren nur die Lösung findet, in deren Anziehungsbereich die Startwerte liegen [3.5]<sup>15</sup>. **Bild 3.2** zeigt eine Übersicht über die möglichen Lösungen der Leistungsgleichung.



**Bild 3.2** Übersicht über die Lösungen der Leistungsgleichung

Die Anzahl der mathematischen Lösungen der Leistungsgleichung hängt nicht von der Anzahl der reellen Zustandsgrößen, sondern von der Anzahl der komplexen Zustandsgrößen beziehungsweise der betragsgleichen Anzahl der Knoten  $n$  ab. Für Strangnetze ist die Anzahl der möglichen mathematischen Lösung durch  $2^{n-1}$  nach oben beschränkt [3.1]. Für allgemeine Netze ist die Anzahl der möglichen mathematischen Lösungen durch den Binomialkoeffizienten

$\binom{2(n-1)}{(n-1)}$  nach oben beschränkt [3.2]. Einige der mathematisch möglichen Lösungen des

reellen Gleichungssystems können im Zahlenbereich der komplexen Zahlen liegen, die für die reellen Zustandsgrößen des realen physikalischen Systems nicht erreichbar sind und somit keiner weiteren Betrachtung im Rahmen dieser Arbeit bedürfen. Doch auch im Zahlenbereich der reellen Zahlen können mehrere Lösungen auftreten. In der Regel gibt es nur eine reelle Lösung,

<sup>15</sup> Liegen die Startwerte im Anziehungsbereich mehrerer Lösungen oder keiner Lösung, ist die Konvergenz des Newtonverfahrens nicht sichergestellt.

die im Bereich der zulässigen Betriebsgrenzen liegt und stabil ist, jedoch sind auch Fälle dokumentiert, in denen mehrere Lösungen sowohl im Bereich der zulässigen Betriebsgrenzen liegen als auch stabil sind [3.3]. Solche Mehrfachlösungen sollen vor allem im Zusammenhang mit langen Versorgungsabschnitten und dezentraler Einspeisung auftreten können. Im Allgemeinen ist eine Untersuchung aller physikalisch möglichen Lösungen [3.4] erforderlich, da im Hinblick auf die Optimierung in dieser Arbeit die Frage besteht, ob verglichen mit einer zulässigen Lösung der Leistungsflussgleichung, also einem Arbeitspunkt  $\underline{u}_k$ , mindestens eine andere zulässige Lösung der Leistungsflussgleichung, also ein anderer Arbeitspunkt  $\underline{u}'_k$ , für denselben Leistungszustand einen geringeren Zielfunktionswert besitzt oder durch Redispatch einen geringeren Zielfunktionswert erreichen kann. Zunächst müssten also alle physikalisch möglichen Lösungen, also die nicht-komplexen Lösungen des reellen Gleichungssystems, ermittelt werden. Ein hierfür vielversprechendes Verfahren ist die holomorph einbettende Leistungsflussberechnung (Holomorphic Embedding Load Flow Method (HELM)) [3.4], [3.6]. Das in dieser Arbeit hergeleitete Verfahren zur Leistungsflussoptimierung müsste sodann ausgehend von allen physikalischen Lösungen der HELM durchgeführt werden, um die beste Lösung auswählen zu können. In den folgenden Abschnitten werden basierend auf den Ausführungen in [3.1] bis [3.6] beispielhaft die Lösungen der Leistungsgleichungen für ein Zwei- und Dreiknotennetz für verschiedene Lastsituationen diskutiert, wobei für detailliertere Herleitungen auf die genannten Quellen verwiesen wird. Es wird sich hierbei zeigen, dass es jeweils eine Lösung gibt, die dem „gewünschten Betriebspunkt“ entspricht („operational solution“ oder „white solution“) und dieser Betriebspunkt auch derjenige mit den geringsten Verlusten ist. Wenngleich nicht ausgeschlossen werden kann, dass sich das Netz beispielsweise nach Netzfehlern in einem der physikalisch möglichen aber „unerwünschten“ Betriebspunkte befindet („non-operational solutions“ oder „black solutions“), wird in dieser Arbeit im Folgenden davon ausgegangen, dass der Ausgangspunkt der Optimierung, der durch eine initiale Leistungsflussberechnung ermittelt worden ist (vgl. Abschnitt 3.3), der gewünschte Betriebspunkt ist. Es wird daher auch nur ausgehend von diesem Arbeitspunkt optimiert. Da es nicht möglich ist, durch kontinuierliche Leistungsänderung zwischen zwei Lösungen der Leistungsflussgleichung zu wechseln, sondern hierzu ein „Sprung“ (beispielsweise ausgelöst durch einen Netzfehler mit anschließender Klärung) notwendig ist [3.1], kann durch Redispatch keine andere Lösung der Leistungsflussgleichung erreicht werden.

### 3.4.1 Untersuchung der Lösungen eines Zweiknotennetzes

Zunächst wird das Zweiknotennetz ( $n = 2$ ) in **Bild 3.3** untersucht.



**Bild 3.3** Topologie des Zweiknotennetzes

An Knoten 1 soll im Folgenden die Spannung konstant bleiben und die Leistungsbilanz des Netzes hergestellt werden (vgl. Slack-Knoten in Abschnitt 3.2.4). Für diese Stranganordnung gibt es  $2^{n-1} = 2$  mathematische Lösungen der Leistungsgleichung.

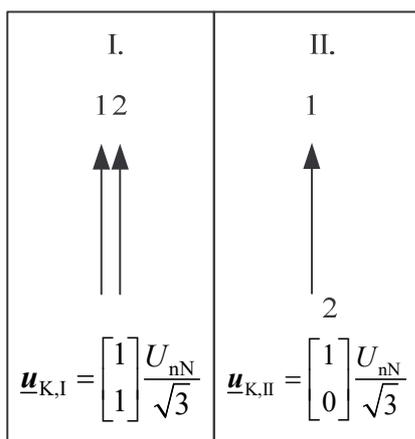
In Abschnitt 3.4.1.1 werden die Lösungen unter Annahme von  $P_2 = 0$  und  $Q_2 = 0$  dargestellt und in Abschnitt 3.4.1.2 die Lösungen für beliebige Belastungsfälle.

#### 3.4.1.1 Lösungen für den Leerlauf mit $P_2 = 0$ und $Q_2 = 0$

Unter Annahme von  $P_2 = 0$  und  $Q_2 = 0$  an Knoten 2 ergeben sich zwei physikalisch mögliche Lösungen der Leistungsgleichung:

- I. Eine Lösung mit Leerlaufspannung  $U_2 = U_{2,LL}$ , und
- II. eine Lösung mit Kurzschlussspannung  $U_2 = 0$ .

Unter Vernachlässigung der ohmschen Anteile und der Querglieder der Leitung ergibt sich mit  $\underline{Y}_L = 1/jX_L$  die Knotenadmittanzmatrix in Gl. (3.22). **Bild 3.4** zeigt die Spannungszeiger der beiden physikalisch möglichen Lösungen.



$$\underline{Y}_{KK} = \begin{bmatrix} -\underline{Y}_L & \underline{Y}_L \\ \underline{Y}_L & -\underline{Y}_L \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

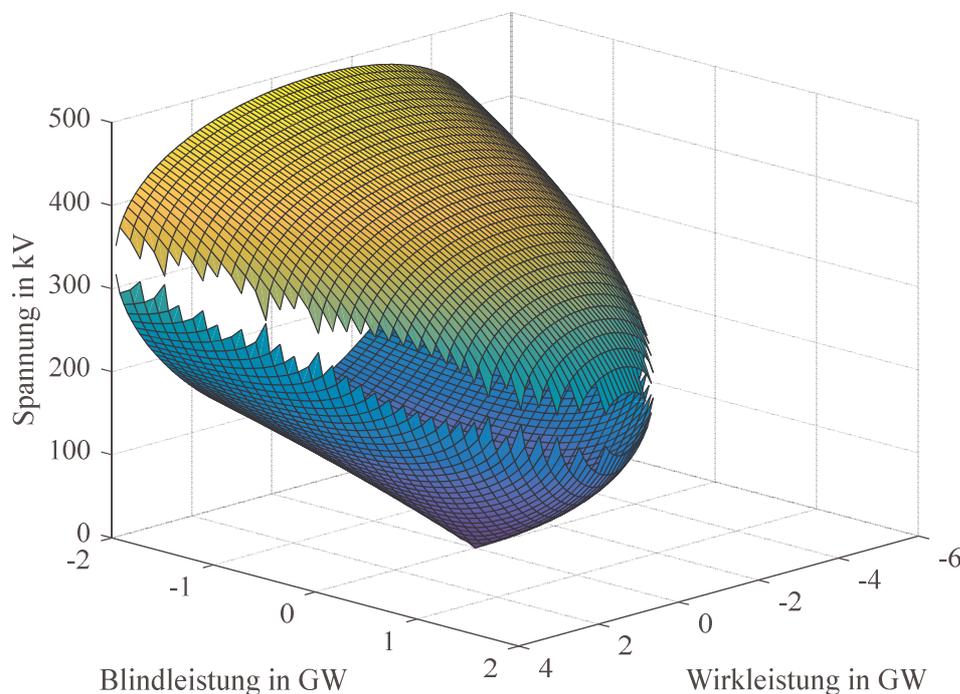
**Bild 3.4** Spannungszeiger von zwei physikalischen Lösungen der Leistungsgleichung für das Zweiknotennetz in **Bild 3.3**

In Lösung I. liegt am Knoten 2 dieselbe Spannung wie an Knoten 1 an. In Lösung II. ist die Spannung am Knoten 2 Null.

Es ist offensichtlich, dass der Leerlauf in Lösung I. dem gewünschten Betriebspunkt entspricht, da die Spannungen innerhalb der Betriebsgrenzen liegen, und im Kurzschlussfall in Lösung II. hohe Ströme hohe Verluste bedingen würden.

### 3.4.1.2 Lösungen für beliebige Leistungen

**Bild 3.5** zeigt die beiden „Lösungsschalen“ für ein beispielhaftes 380-kV-Zweiknotennetz, wenn ausgehend von  $P_2 = 0$  und  $Q_2 = 0$  die Leistungen variiert werden. Für  $P_2 = 0$  und  $Q_2 = 0$  ergibt sich die Kurzschlusslösung am Tiefpunkt in **Bild 3.5** bei  $U_2 = 0$  und die Leerlauflösung am Schnittpunkt einer von dem Kurzschlusspunkt ausgehend vertikal verlaufenden Linie mit der oberen Lösungsschale.

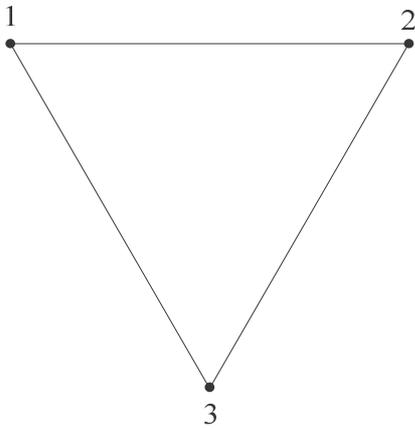


**Bild 3.5** Lösungsschalen des Zweiknotennetzes in **Bild 3.3**

Die obere Lösungsschale mit größeren Spannungsbeträgen kann den „Leerlaufösungen“ und die untere Lösungsschale mit kleineren Spannungsbeträgen den „Kurzschlusslösungen“ zugeordnet werden. Nicht dargestellt in **Bild 3.5** sind die Lösungspunkte, an denen sich die beiden Lösungsschalen berühren. An diesen sogenannten Bifurkationspunkten gibt es nur eine Lösung der Leistungsgleichung. Für die Leistungen außerhalb der Lösungsschalen gibt es keine physikalisch möglichen Lösungen der Leistungsgleichung.

### 3.4.2 Untersuchung der Lösungen eines Dreiknotennetzes

Im Folgenden wird das Dreiknotennetz ( $n = 3$ ) in **Bild 3.6** untersucht, welches keine Strangstruktur aufweist, sondern aus drei im Dreieck miteinander verbundenen Knoten besteht, sodass eine Masche entsteht.



**Bild 3.6** Topologie des Dreiknotennetzes

Wie bei dem Zweiknotennetz soll hierbei an Knoten 1 die Spannung konstant bleiben und die Leistungsbilanz des Netzes hergestellt werden. Für diese Anordnung ergeben sich aus dem Bi-

nomialkoeffizienten  $\binom{2(n-1)}{(n-1)} = \binom{4}{2} = 6$  mathematische Lösungen der Leistungsgleichung.

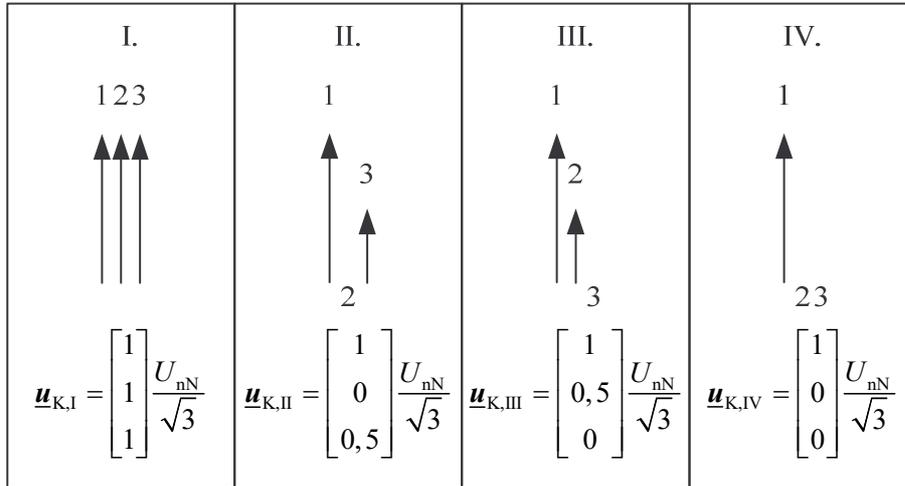
In Abschnitt 3.4.2.1 werden die Lösungen unter Annahme von  $P_2 = P_3 = 0$  und  $Q_2 = Q_3 = 0$  dargestellt und in Abschnitt 3.4.2.2 die Lösungen für einen besonderen Belastungsfall, der sechs physikalische Lösungen hat.

#### 3.4.2.1 Lösungen für den Leerlauf mit $P_2 = P_3 = 0$ und $Q_2 = Q_3 = 0$

Nicht für alle Lastfälle gibt es sechs physikalisch mögliche Lösungen. So ergeben sich für  $P_2 = P_3 = 0$  und  $Q_2 = Q_3 = 0$  zwei physikalisch nicht mögliche Lösungen und nur die vier folgenden physikalisch möglichen Lösungen:

- I. Eine Lösung mit Leerlaufspannungen  $U_2 = U_{2,LL}$  und  $U_3 = U_{3,LL}$  (unter Vernachlässigung der Querglieder, liegt die Spannung des Slack-Knotens an),
- II. eine Lösung mit Kurzschlussspannung  $U_2 = 0$  (und  $U_3 \neq 0$ ),
- III. eine Lösung mit Kurzschlussspannung  $U_3 = 0$  (und  $U_2 \neq 0$ ), und
- IV. eine Lösung mit Kurzschlussspannungen  $U_2 = 0$  und  $U_3 = 0$ .

Mit  $\underline{Y}_L = 1/jX_L$  ergibt sich unter Vernachlässigung der ohmschen Anteile und der Querglieder der Leitung die Knotenadmittanzmatrix in Gl. (3.23). **Bild 3.7** zeigt die Spannungszeiger der vier physikalisch möglichen Lösungen.



**Bild 3.7** Spannungszeiger von vier physikalischen Lösungen der Leistungsgleichung für das Dreiknotennetz in **Bild 3.6**

$$\underline{Y}_{KK} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \underline{Y}_L & \underline{Y}_L & \underline{Y}_L \\ \underline{Y}_L & -2 \cdot \underline{Y}_L & \underline{Y}_L \\ \underline{Y}_L & \underline{Y}_L & -2 \cdot \underline{Y}_L \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

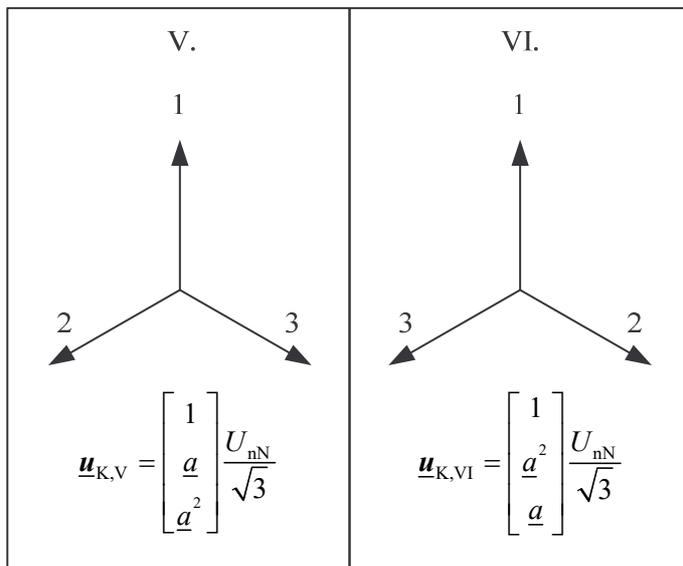
In Lösung I. liegt an den Knoten 2 und 3 dieselbe Spannung wie an Knoten 1 an. Es handelt sich um die Leerlauflösung. In Lösung II. ist die Spannung am Knoten 2 Null und am Knoten 3 halb so groß wie an Knoten 1. In Lösung III. ist die Spannung am Knoten 2 halb so groß wie an Knoten 1 und am Knoten 3 Null. In Lösung IV. ist die Spannung am Knoten 2 und 3 Null. Es handelt sich um die Kurzschlusslösungen.

Wie beim Zweiknotennetz ist offensichtlich, dass Lösung I. dem gewünschten Betriebspunkt entspricht, da die Spannungen innerhalb der Betriebsgrenzen liegen und die hohen Ströme in den Kurzschlusslösungen II. bis IV. hohe Verluste bedingen.

Analog zum Zweiknotennetz können ausgehend von  $P_2 = P_3 = 0$  und  $Q_2 = Q_3 = 0$  die Leistungen variiert und die jeweiligen Lösungen den Fällen I. bis IV. zugeordnet werden. Für einige Belastungsfälle kann es auch mehr als vier physikalisch mögliche Lösungen geben. Im folgenden Abschnitt 3.4.2.2 wird ein solcher Belastungsfall beispielhaft untersucht.

### 3.4.2.2 Lösungen für einen Belastungsfall mit sechs physikalischen Lösungen

Im Folgenden soll ein weiterer Belastungsfall, ebenfalls unter Vernachlässigung der ohmschen Anteile und der Querglieder der Leitung, betrachtet werden, der zwei weitere physikalisch mögliche Lösungen, die Lösungen V. und VI., enthält. Der Belastungsfall ist so konstruiert, dass in diesen beiden zusätzlichen Lösungen die Spannungen an allen Knoten denselben Betrag haben, jedoch um jeweils  $120^\circ$  zueinander phasenverschoben sind. Die Drehung der Spannungszeiger wird durch den Drehzeiger  $\underline{a} = e^{j2\pi/3}$  kenntlich gemacht. **Bild 3.8** zeigt die vorgegebenen Lösungsvektoren.



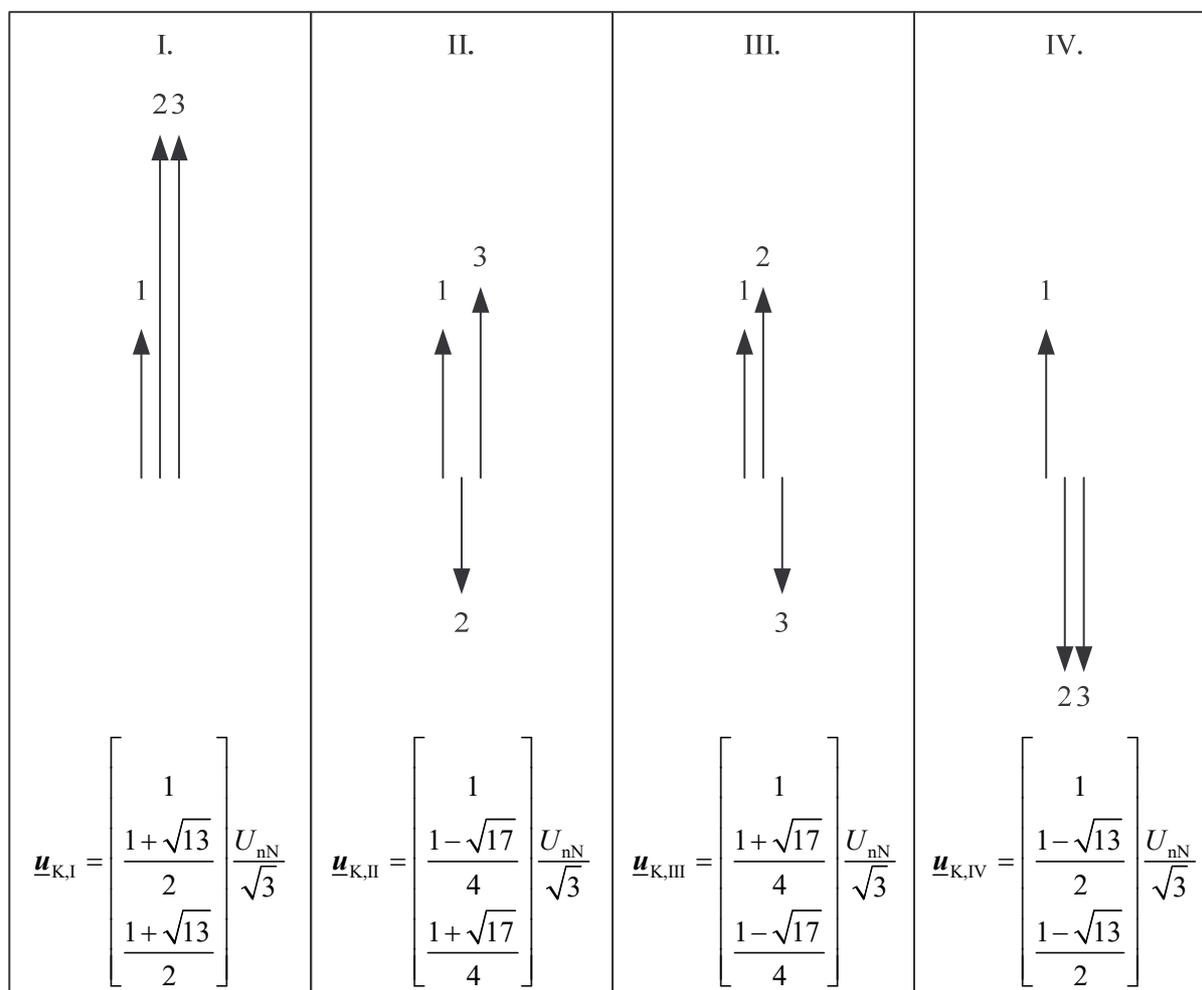
**Bild 3.8** Spannungszeiger zweier zusätzlicher physikalischer Lösungen der Leistungsgleichung für das Dreiknotennetz in **Bild 3.6** in einem besonderen Lastfall

Die Knotenleistungen in den besonderen Belastungsfällen der Lösungen V. und VI. sind

$$P_2 = P_3 = 0 \text{ und } Q_2 = Q_3 = -3j \frac{U_{nN}^2}{X_L}.$$

In den Lösungen V. und VI. ergibt sich jeweils ein Strom, der innerhalb der Dreiecksmasche zirkuliert. Wenngleich es sich in diesem Beispiel um einen konstruierten Fall, fernab von üblichen Betriebszuständen, handelt, kann nicht ausgeschlossen werden, dass in größeren Netzen Zustände auftreten, die ebensolche Kreisströme enthalten. Solche Zustände treten üblicherweise bei nicht abgestimmten Transformator-Reglern auf [3.7], wurden jedoch auch unabhängig von Transformatoren bei Netzen, die beispielsweise große geographische Hindernisse wie Gebirge umkreisen, beobachtet und allgemein theoretisch belegt [3.8]. Solche Kreisstromlösungen sind, ebenso wie die Kurzschlusslösungen, stets verlustbehafteter als der erwünschte Betriebspunkt.

Ausgehend von den Leistungen der Kreisstromlösungen in den Fällen V. und VI. können die vier physikalisch möglichen Lösungen, analog zum Zweiknotennetz, berechnet werden. In **Bild 3.9** werden die Zeigerbilder und Berechnungsergebnisse der Spannungen für die vier physikalisch möglichen Lösungen gezeigt.



**Bild 3.9** Spannungszeiger von vier physikalischen Lösungen der Leistungsgleichung für das Dreiknotennetz in Bild 3.6 in einem besonderen Lastfall

Keine der sechs dargestellten Lösungen zeigt einen erstrebenswerten Betriebszustand an. In Lösung I. treten zwar im Gegensatz zu den anderen Lösungen keine Kurzschluss- oder Kreisströme auf, jedoch sind die Spannungen außerhalb der zulässigen Grenzen.



## 4 Quadratische Näherungen der Netzgleichungen

Die Grundlagen und Herleitungen zu den Netzgleichungen, dem Optimierungsproblem und der Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung in den Kapiteln 2 und 3 sind unabhängig von einem Koordinatensystem und sind ohne Näherungen ausgekommen, wobei vorausgesetzt wurde, dass es in Gl. (3.2) eine explizit ermittelbare Umkehrfunktion der Leistungsgleichung in Gl. (3.1) gibt. Diese gibt es jedoch nur in Sonderfällen beziehungsweise nur als Potenzreihe mit unendlich vielen Summanden. Die Formulierung eines Optimierungsproblems mit impliziten Funktionen ist grundsätzlich umsetzbar, jedoch müssen in diesem Fall die Lösungen der impliziten Gleichungen in jedem Lösungsschritt der Optimierung bestimmt werden, was zu erheblichen Verlängerungen der Berechnungszeit führt. Eine weitere Herausforderung ist, dass das Optimierungsproblem in Gl. (2.31) nichtlinear und nichtkonvex ist.

In dieser Arbeit soll das Optimierungsproblem explizit formuliert werden, indem die Zielfunktion und die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems mit Hilfe von Taylorpolynomen zweiter Ordnung quadratisch angenähert werden. Da auch für die Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung eine quadratische Näherung ermittelt werden kann, kann diese Gleichheitsnebenbedingung durch Einsetzen in die quadratischen Näherungen von Zielfunktion und Nebenbedingungen eliminiert werden. Zur Ermittlung der Gradienten sind daher alle ersten partiellen Ableitungen und zur Ermittlung der Hessematrizen sind alle zweiten partiellen Ableitungen für die Zielfunktion und alle quadratischen Nebenbedingungen erforderlich. Der Ausgangspunkt der Optimierung und damit ebenso der Entwicklungspunkt der Taylorpolynome ist das Ergebnis einer initialen Leistungsflussberechnung (vgl. Abschnitt 3.3). Um dem Näherungsfehlern von den Taylorpolynomen zweiter Ordnung zu begegnen, wird die quadratisch beschränkte quadratische Optimierung mehrmals, ab dem zweiten Durchlauf ausgehend vom Lösungspunkt der vorherigen Optimierung, durchgeführt. Es ergibt sich somit eine sequentielle quadratisch beschränkte quadratische Optimierung (sequential quadratically constrained Quadratic Programming – SQCQP). Der Vorgang wird so lange wiederholt, bis die Änderungen zwischen zwei Durchläufen eine gewählte Genauigkeitsgrenze unterschreitet.

Im Folgenden wird die für diese Arbeit verwendete Schreibweise von quadratisch angenäherten Funktionen beschrieben. Gleichung (4.1) zeigt das Taylorpolynom zweiter Ordnung für eine reelle Funktion  $\Delta t_i(\Delta \mathbf{x})$  in Abhängigkeit von der Änderung des Zustandsvektors  $\Delta \mathbf{x}$ . In Gl. (4.1) sind die Koeffizienten der Funktion im Gradientenvektor  $\mathbf{g}_i$  und der Hessematrix  $\mathbf{H}_i$  gegeben. Zugunsten der Übersichtlichkeit wird im Folgenden auf die Angabe der Stelle, an der

die Ableitung erfolgt, verzichtet. Sofern nicht etwas anderes angegeben ist, ist immer die Ableitung an der Stelle  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$  gemeint.

$$\begin{aligned}
 \Delta t_i(\Delta \mathbf{x}) &= \mathbf{g}_i \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{H}_i \cdot \Delta \mathbf{x} = \frac{\partial \Delta t_i(\Delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \cdot \frac{\partial^2 \Delta t_i(\Delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} \cdot \Delta \mathbf{x} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{i,1} & \cdots & \mathbf{g}_{i,N} \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \cdot \begin{bmatrix} h_{i,11} & \cdots & h_{i,1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i,N1} & \cdots & h_{i,NN} \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{x} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta t_i(\Delta \mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Delta t_i(\Delta \mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta t_i(\Delta \mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Delta t_i(\Delta \mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Delta t_i(\Delta \mathbf{x})}{\partial x_N \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Delta t_i(\Delta \mathbf{x})}{\partial x_N \partial x_N} \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Für ein System mehrerer Funktionen  $\Delta \mathbf{t}(\Delta \mathbf{x})$ , wie es beispielsweise durch alle Nebenbedingungen gebildet wird, erweitert sich die skalare Größe  $\Delta t_i(\Delta \mathbf{x})$  zu einer vektoriellen Größe. Es wird für diese Arbeit eine Notation definiert, die in Gl. (4.2) beschrieben ist:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{t}(\Delta \mathbf{x}) &= \mathbf{G} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \otimes \{\mathbf{H}\} \otimes \Delta \mathbf{x} = \frac{\partial \Delta \mathbf{t}(\Delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \otimes \left\{ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{t}(\Delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} \right\} \otimes \Delta \mathbf{x} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{1,1} & \cdots & \mathbf{g}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{n,1} & \cdots & \mathbf{g}_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \otimes \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} h_{1,11} & \cdots & h_{1,1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1,N1} & \cdots & h_{1,NN} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} h_{1,11} & \cdots & h_{1,1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1,N1} & \cdots & h_{1,NN} \end{bmatrix} \\ \ddots \end{array} \right\} \otimes \Delta \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Menge aller Gradientenvektoren  $\mathbf{g}_i$  wird in der Jakobimatrix  $\mathbf{G}$  gespeichert. Die Menge  $\{\mathbf{H}\}$  aller Hessematrizen  $\mathbf{H}_i$  wird in geschweiften Klammern geschrieben<sup>16</sup>. Die Multiplikationen der Vektoren  $\Delta \mathbf{x}$  und  $\Delta \mathbf{x}^T$  mit  $\{\mathbf{H}\}$  entsprechen nicht den üblichen Konventionen zur Matrixmultiplikation, sodass zur Unterscheidung als Multiplikationszeichen ein eingekreistes Kreuz  $\otimes$  benutzt wird. Die durch das eingekreiste Kreuz  $\otimes$  repräsentierte Multiplikation wird

<sup>16</sup> Die Darstellung mit geschweiften Klammern erfolgt in Anlehnung an die Speicherung von Cell-Arrays in der Software MATLAB [4.1], die in dieser Arbeit genutzt wird.

für diese Arbeit als Multiplikation jeder der in  $\{\mathbf{H}\}$  enthaltenen Matrizen  $\mathbf{H}_i$  mit  $\Delta\mathbf{x}^T$  beziehungsweise  $\Delta\mathbf{x}$  entsprechend Gl. (4.1) definiert. Das jeweilige Ergebnis der Multiplikation entspricht dem  $i$ -ten Element in einem Spaltenvektor.

In Abschnitt 4.1 werden zunächst die Auswirkungen von Über- und Unterschätzungen durch Näherungen auf das Konvergenzverhalten einer sequentiellen Optimierung dargestellt. Die Taylorpolynome zweiter Ordnung werden in Abschnitt 4.2 für die Änderungen der Netzleistungen aus Gl. (2.21) und in Abschnitt 4.3 für die Änderungen der Knotenleistungen durch den Verteilten Slack in Gl. (3.17) bestimmt. In kartesischen Koordinaten können die beiden vorgenannten Funktionen durch quadratische Funktionen exakt beschrieben werden, wohingegen in Polarkoordinaten das Taylorpolynom zweiter Ordnung nur eine Näherung ist. Mit Hilfe der beiden vorgenannten Taylorpolynome wird in Abschnitt 4.4 die quadratische Näherung für die Umkehrfunktion der um den Verteilten Slack erweiterten Leistungsdifferenzgleichung hergeleitet, die sowohl in Polarkoordinaten als auch in kartesischen Koordinaten nur eine Näherung um den Arbeitspunkt ist. In den auf Abschnitt 4.4 folgenden Abschnitten werden Taylorpolynome zweiter Ordnung für die Änderungen der Knotenleistungen (Abschnitt 4.5), die Änderung der Netzverluste (Abschnitt 4.6), die Änderungen der Spannungsbeträge (Abschnitt 4.7) und der Änderung der Strombeträge (Abschnitt 4.8) zunächst als Funktionen der Änderungen der Knotenspannungen hergeleitet. Für die Änderungen der Knotenleistungen und die Änderung der Netzverluste sind diese quadratischen Funktionen in kartesischen Koordinaten exakt und in Polarkoordinaten nur eine Näherung. Die Näherung der Umkehrfunktion aus Abschnitt 4.4 wird jeweils in die Taylorpolynome zweiter Ordnung für die Änderungen der Knotenleistungen, der Netzverluste, der Spannungsbeträge und der Strombeträge eingesetzt, sodass die Taylorpolynome als Funktionen der Knotenleistungen geschrieben werden können. Durch Einsetzen der nur genäherten Umkehrfunktion werden auch die Zielfunktion und alle Nebenbedingungen des Optimierungsproblems in kartesischen Koordinaten Näherungen.

Statt der Änderungen der Spannungsbeträge  $\Delta\mathbf{u}_k$  werden im Folgenden die auf den Ausgangswert  $\mathbf{u}_{k,0}$  bezogenen Änderungen der Spannungsbeträge  $\Delta\mathbf{u}_k/\mathbf{u}_{k,0}$  benutzt, da sich einige der Jakobi- und Hessematrizen einfacher beschreiben lassen und ein gut konditioniertes Optimierungsproblem, also eine ähnliche Größenordnung der Zielfunktion und aller Nebenbedingungen, angestrebt wird. Aus diesem Grund werden für die Optimierung ebenso die Änderungen

der Zweigströme  $\Delta i_z$  auf den jeweiligen Strom<sup>17</sup>  $i_{z,0}$  und die Änderungen der Verlustleistung  $\Delta P_v$  auf den Ausgangswert der Netzverluste  $P_{v,0}$  bezogen. Zur Vermeidung von numerisch problematischen kleinen Werten, vor allem in den Hessematrizen, werden außerdem die Variablen  $p_k$  und  $q_k$  in GW beziehungsweise Gvar angegeben.

Zur Unterscheidung von Knoten- und Zweiggrößen (vgl. Abschnitt 2.1) und für eine bessere Übersichtlichkeit werden im Folgenden im ersten tiefgestellten Index von Vektoren, Matrizen und Cell-Arrays immer die jeweiligen Dimensionen angegeben. Die Benennung der Jakobi- und Hessematrizen erfolgt auf Basis des Zählers und des Nenners der jeweiligen Ableitungen. Für Vektoren werden Kleinbuchstaben im Namen und für Matrizen Großbuchstaben verwendet. Die Ziffern 1 oder 2 am Ende des Namens kennzeichnen, ob es sich um die erste oder die zweite Ableitung handelt. Die skalaren Elemente eines Vektors oder einer Matrix werden mit Kleinbuchstaben geschrieben.

Die folgenden Herleitungen werden sowohl in Polarkoordinaten als auch in kartesischen Koordinaten durchgeführt. Die Polarkoordinaten haben den Vorteil, dass ihre Zustandsgrößen (die Spannungsbeträge  $u_k$  und die -winkel  $\delta_k$ ) im Gegensatz zu den Zustandsgrößen in kartesischen Koordinaten (den Realteilen  $u_{k,r}$  und den Imaginärteilen  $u_{k,i}$ ) physikalisch interpretierbar sind und daher zur Berücksichtigung der oberen und unteren Spannungsbandgrenzen im Rahmen der Optimierung keine Betragsbildung der Zustandsgrößen erfolgen muss. Die kartesischen Koordinaten hingegen haben den Vorteil, dass einige Funktionen durch quadratische Funktionen exakt beschrieben werden.

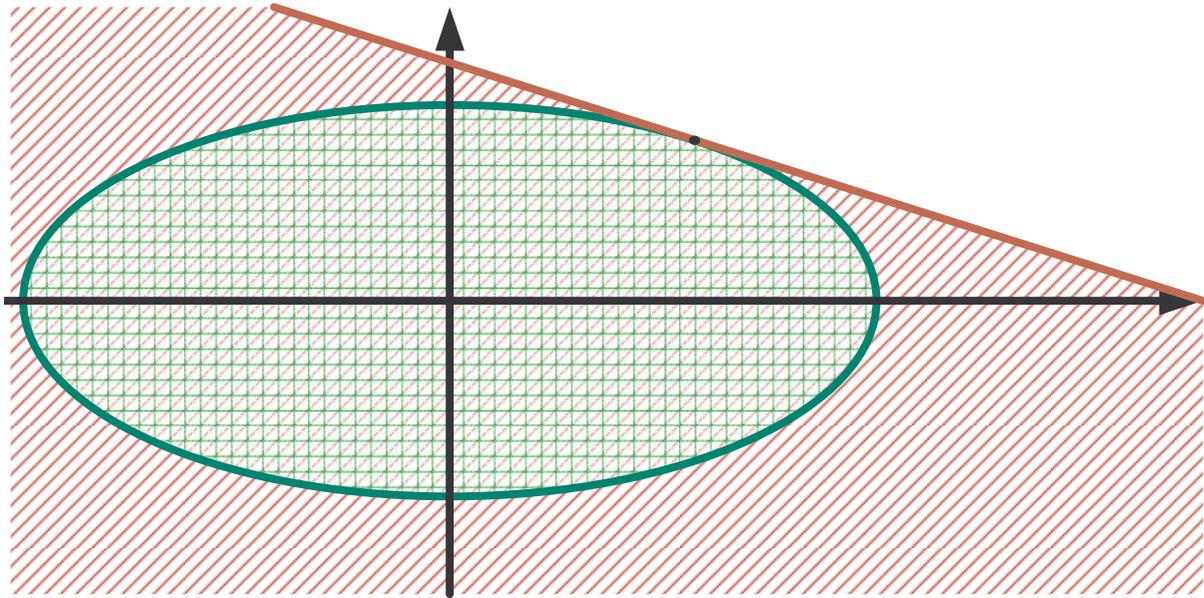
### 4.1 Darstellungen zur Über- und Unterschätzung durch Näherungen

Im Allgemeinen entsteht durch jede Näherung eine Unter- oder Überschätzung, sodass unter Umständen die Zielfunktion lokale und globale Optima nicht mehr richtig beschreibt und die Nebenbedingungen das Lösungsgebiet zu stark oder nicht ausreichend beschränken.

In **Bild 4.1** ist beispielhaft zu sehen, wie eine Linearisierung (rot) das durch die nichtlineare Funktion (grün) begrenzte Gebiet überschätzt.

---

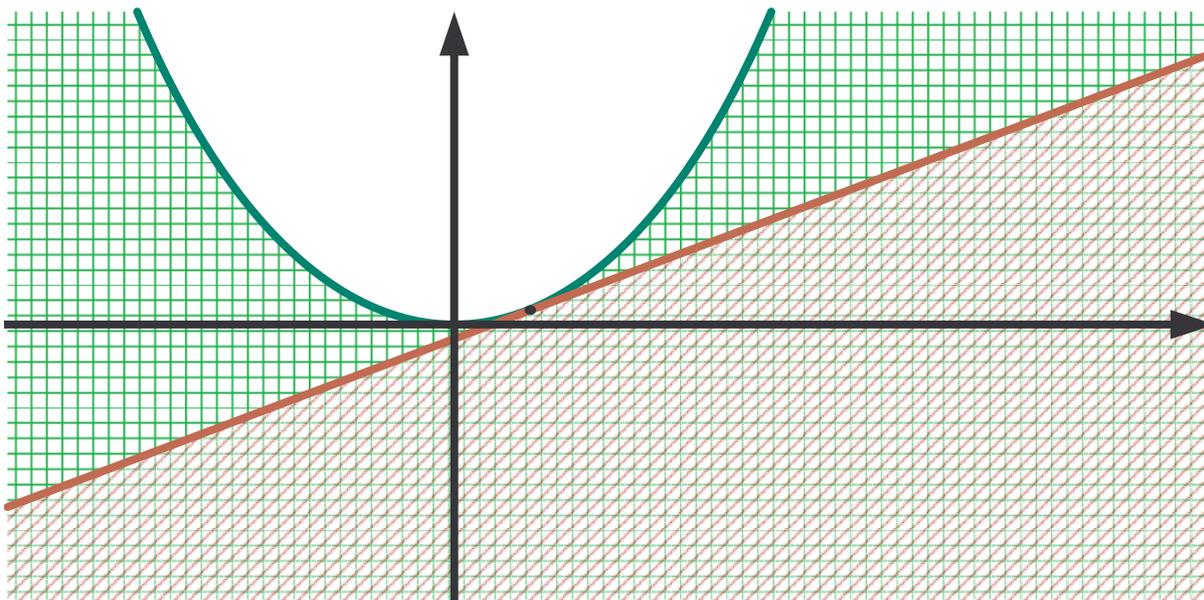
<sup>17</sup> Leerlaufende Zweige mit  $i_z = 0$  bleiben außer Betracht. Auch in nicht-bezogenen Größen sind diese Ableitungen nicht definiert (vgl. Anhang 11.1.7).



**Bild 4.1** Beispiel für eine Überschätzung des zulässigen Lösungsgebietes (grün) durch eine lineare Näherung (rot)

Die tatsächlich zulässigen Punkte in **Bild 4.1** liegen innerhalb des in grün begrenzten und mit Gitterlinien schraffierten Gebietes. Jedoch werden auch Punkte außerhalb dieses Gebietes als zulässig bewertet, wenn die Begrenzung des Gebietes durch eine Linearisierung, ausgehend vom schwarz gekennzeichneten Punkt, angenähert wird und das unterhalb der roten Geraden liegende, mit schräg schraffierten Linien gekennzeichnete Gebiet als zulässig bewertet wird.

In **Bild 4.2** ist beispielhaft zu sehen, wie eine Linearisierung (rot) das durch die nichtlineare Funktion (grün) begrenzte Gebiet unterschätzt.



**Bild 4.2** Beispiel für eine Unterschätzung des zulässigen Lösungsgebietes (grün) durch lineare Näherung (rot)

Die tatsächlich zulässigen Punkte in **Bild 4.2** liegen unterhalb des in grün begrenzten und mit Gitterlinien schraffierten Gebietes. Jedoch werden nicht alle Punkte innerhalb dieses Gebietes als zulässig bewertet, wenn die Begrenzung des Gebietes durch eine Linearisierung, ausgehend vom schwarz gekennzeichneten Punkt, angenähert wird und das unterhalb der roten Geraden liegende mit schräg schraffierten Linien gekennzeichnete Gebiet als zulässig bewertet wird.

Eine Überschätzung ist für die Anwendungsfälle dieser Arbeit als kritischer<sup>18</sup> zu bewerten als eine Unterschätzung, da eine Unterschätzung eine sicher zulässige Lösung<sup>19</sup> liefert. Eine sicher zulässige Lösung bietet zudem den Vorteil, dass diese Lösung im folgenden Schritt der sequentiellen Optimierung als Startwert benutzt werden kann. Jedoch findet eine Unterschätzung das globale Optimum möglicherweise nicht oder kann im Rahmen der sequentiellen Optimierung aufgrund des Maratos-Effekts [4.5], [4.6] ein langsames Konvergenzverhalten haben. Beim Maratos-Effekt liegt das Optimum am Rand des Lösungsgebiets (vgl. **Bild 2.6**) und wird durch die Unterschätzung des Lösungsgebiets in jedem Schritt des sequentiellen Algorithmus nicht exakt erreicht. Erst durch die mit jedem Schritt des sequentiellen Algorithmus abnehmende Unterschätzung kann sich die Lösung dem Optimum nähern. Als Vorteil von SQCQP-Ansätzen gegenüber SLCQP-Ansätzen ist zu nennen, dass der Maratos-Effekt kleiner ist, was beispielsweise in [4.7] dokumentiert und auch im Rahmen der Ausarbeitungen für diese Arbeit beobachtet wurde. Ein Nachteil einer Überschätzung ist, dass sie zu einer Schwingung der sequentiellen Optimierung um das Optimum führen kann, wie beispielsweise in [4.4] gezeigt wird. Für ein endliches Taylorpolynom kann keine Festlegung getroffen werden, ob es zu Über- oder Unterschätzung der Ursprungsfunktion führt. Die Fallstudien in Kapitel 7 zeigen, dass der SQCQP-Ansatz für die Anwendungsfälle dieser Arbeit sehr gute Ergebnisse liefert. Schwingungen um das Optimum und der Maratos-Effekt sind nur in geringem Umfang zu beobachten.

### 4.2 Näherung für die Änderungen der Netzleistungen

Da für die Optimierung ein reelles Gleichungssystem benötigt wird, wird die Gleichung für die Netzleistungen in Gl. (3.1) in ihre Real- und Imaginärteile – also die Wirk- und Blindleistungen – aufgeteilt. Die lineare Näherung erfolgt über die ersten Ableitungen in der Jakobimatrix, wie

---

<sup>18</sup> Liegt ein Optimierungsproblem vor, bei dem beispielsweise eine maximale Beanspruchung ermittelt werden soll, so ist eine Unterschätzung als kritischer zu bewerten.

<sup>19</sup> Die Zulässigkeit der Unterschätzung bezieht sich nur auf die jeweils unterschätzte Randbedingung. Es ist nicht auszuschließen, dass eine Unterschätzung mehrerer Randbedingungen zum gegenseitigen Ausschluss einiger oder gar aller zulässigen Lösungen führen. Dieses Problem wurde in dieser Arbeit jedoch nicht beobachtet.

sie auch in der Leistungsflussberechnung verwendet und beispielsweise aus [2.2] der Literatur entnommen werden kann. Die quadratische Näherung beziehungsweise Funktionsbeschreibung in kartesischen Koordinaten erfolgt durch die Hinzunahme der zweiten Ableitungen in den Hessematrizen. Gl. (4.3) zeigt das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Leistungsdifferenzgleichung in Polarkoordinaten und Gl. (4.4) zeigt ebendieses in kartesischen Koordinaten.

$$\begin{bmatrix} \Delta p_K \\ \Delta q_K \end{bmatrix} = \mathbf{PQDU1}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{PQDU2}_{2K2K} \}_{2K} \otimes \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta p_K \\ \Delta q_K \end{bmatrix} = \mathbf{PQR11}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{PQR12}_{2K2K} \}_{2K} \otimes \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Eine kompakte Möglichkeit zur Berechnung der Jakobimatrizen  $\mathbf{PQDU1}_{2K2K}$  und  $\mathbf{PQR11}_{2K2K}$  sowie der Hessematrizen  $\mathbf{PQDU2}_{2K2K,i}$  und  $\mathbf{PQR12}_{2K2K,i}$  wird in Anhang 11.1.1 hergeleitet.

### 4.3 Näherung für die Änderungen der Knotenleistungen durch den Verteilten Slack

Gl. (3.15) berechnet die Änderung der Wirkleistungsbilanz im Netz in Abhängigkeit von den Knotenspannungen des Netzes. Wie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben, muss in Gl. (3.15) eine Spannung nach Betrag und Phase beziehungsweise Real- und Imaginärteil konstant gehalten werden. Deren Ableitungen sind somit Null. Gl. (4.5) zeigt das Taylorpolynom zweiter Ordnung und die Untermatrizen in Polarkoordinaten, Gl. (4.6) zeigt ebendieses in kartesischen Koordinaten, welches die Funktion exakt beschreibt.

$$\Delta P(\underline{\mathbf{u}}_K) = \mathbf{pdu1}_{2K} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix}^T \mathbf{PDU2}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\Delta P(\underline{\mathbf{u}}_K) = \mathbf{pri1}_{2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}^T \mathbf{PRI2}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Auf Basis von Gl. (4.5) können die Leistungsänderungen an allen am Verteilten Slack beteiligten Knoten in Polarkoordinaten in Gl. (4.7) und auf Basis von Gl. (4.6) in kartesischen Koordinaten in Gl. (4.8) berechnet werden, indem der Zusammenhang aus Gl. (3.17) verwendet wird.

$$\begin{aligned}\Delta p_{K,VS}(\underline{u}_K) &= \mathbf{bf}_K \cdot \mathbf{pdu1}_{2K} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \mathbf{bf}_K \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix}^T \mathbf{PDU2}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{VSDU1}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{VSDU2}_{2K2K} \}_{2K} \otimes \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\Delta p_{K,VS}(\underline{u}_K) &= \mathbf{bf}_K \cdot \mathbf{pri1}_{2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \mathbf{bf}_K \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}^T \mathbf{PRI2}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{VSR11}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{VSR12}_{2K2K} \}_{2K} \otimes \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.8)$$

Eine kompakte Möglichkeit zur Berechnung der Jakobimatrizen  $\mathbf{VSDU1}_{2K2K}$  und  $\mathbf{VSR11}_{2K2K}$  sowie der Hessematrizen  $\mathbf{VSDU2}_{2K2K,i}$  und  $\mathbf{VSR12}_{2K2K,i}$  wird in Anhang 11.1.4 hergeleitet.

#### 4.4 Näherung für die Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung

Auf Basis der Näherungsgleichungen für die Änderung der Netzleistungen sowie für die Änderungen der Knotenleistungen durch den Verteilten Slack können die Taylorpolynome zweiter Ordnung für die Umkehrfunktionen der Leistungsdifferenzgleichung (3.1) in Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten berechnet werden. Ziel der jeweiligen Umkehrungen sind die Gl. (4.9) und (4.10), die die quadratisch angenäherte Umkehrfunktion in Gl. (3.2) der Leistungsdifferenzgleichung beschreiben.

$$\begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} = \mathbf{DUPQ1}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta p_K \\ \Delta q_K \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta p_K \\ \Delta q_K \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{DUPQ2}_{2K2K} \}_{2K} \otimes \begin{bmatrix} \Delta p_K \\ \Delta q_K \end{bmatrix}\quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} = \mathbf{RIPQ1}_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta p_K \\ \Delta q_K \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta p_K \\ \Delta q_K \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{RIPQ2}_{2K2K} \}_{2K} \otimes \begin{bmatrix} \Delta p_K \\ \Delta q_K \end{bmatrix}\quad (4.10)$$

Die Herleitung der folgenden Formeln wird in Anhang 11.3 gezeigt.

Auf Basis von Gl. (3.3) ergeben sich die Jakobimatrizen der Umkehrfunktion in Gl. (4.11) in Polarkoordinaten und in Gl. (4.12) in kartesischen Koordinaten.

$$\mathbf{DUPQ1}_{2K2K} = (\mathbf{PQDU1}_{2K2K} - \mathbf{VSDU1}_{2K2K})^{-1}\quad (4.11)$$

$$\mathbf{RIPQ1}_{2K2K} = (\mathbf{PQR11}_{2K2K} - \mathbf{VSR11}_{2K2K})^{-1}\quad (4.12)$$

Für eine Hessematrix  $\mathbf{DUPQ2}_{2K2K,k}$  aus  $\{ \mathbf{DUPQ2}_{2K2K} \}_{2K}$  in Polarkoordinaten bzw.

$\mathbf{RIPQ2}_{2K2K,k}$  aus  $\{ \mathbf{RIPQ2}_{2K2K} \}_{2K}$  in kartesischen Koordinaten ergeben sich Gl. (4.13)

bzw. Gl. (4.14).

$$DUPQ2_{2K2K,k} = -DUPQ1_{2K2K}^T \cdot \sum_{l=1}^{2K} \left( dupq1_{kl} \cdot (PQDU2_{2K2K,l} - VS DU2_{2K2K,l}) \right) \cdot DUPQ1_{2K2K} \quad (4.13)$$

$$RIPQ2_{2K2K,k} = -RIPQ1_{2K2K}^T \cdot \sum_{l=1}^{2K} \left( ripq1_{kl} \cdot (PQR12_{2K2K,l} - VSRI2_{2K2K,l}) \right) \cdot RIPQ1_{2K2K} \quad (4.14)$$

#### 4.5 Näherung für die Änderungen der Knotenleistungen

Auf Basis der Umkehrfunktionen in Gl. (4.9) und (4.10) ist es wiederum möglich, die Knotenleistungsänderungen als Funktion der Knotenleistungsänderungen unter Berücksichtigung des Verteilten Slack zu berechnen. Neben der mit dem Ergebnis gegebenen Möglichkeit zur Plausibilisierung, können mit dem Ergebnis die resultierenden Knotenleistungsänderungen berechnet werden, die sich unter Berücksichtigung des Verteilten Slacks ergeben. Dies kann zur Berücksichtigung von Aussteuergrenzen sinnvoll sein.

Zur Bestimmung der vorgenannten Funktion muss Gl. (4.9) in Gl. (4.3) beziehungsweise Gl. (4.10) in Gl. (4.4) eingesetzt werden. Der in dieser Arbeit benutzte Algorithmus, um quadratische Funktionen in quadratische Funktionen einzusetzen, ist in Anhang 11.2 dargestellt. Als Ergebnis des Einsetzens ergibt sich Gl. (4.15). Die Form von Gl. (4.15) ist unabhängig davon, ob in Polarkoordinaten oder kartesischen Koordinaten gerechnet wird.

$$\begin{bmatrix} \Delta p_{k,vs} \\ \Delta q_{k,vs} \end{bmatrix} = PQPQ1_{2K2K} \begin{bmatrix} \Delta p_k \\ \Delta q_k \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta p_k \\ \Delta q_k \end{bmatrix}^T \otimes \{PQPQ2_{2K2K}\}_{2K} \otimes \begin{bmatrix} \Delta p_k \\ \Delta q_k \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Die Jakobimatrix in Gl. (4.15) kann mit Gl. (4.16) in Polarkoordinaten und mit Gl. (4.17) in kartesischen Koordinaten berechnet werden.

$$PQPQ1_{2K2K} = PQDU1_{2K2K} \cdot DUPQ1_{2K2K} \quad (4.16)$$

$$PQPQ1_{2K2K} = PQR11_{2K2K} \cdot RIPQ1_{2K2K} \quad (4.17)$$

Für eine Hessematrix  $PQPQ2_{2K2K,i}$  aus  $\{PQPQ2_{2K2K}\}_{2K}$  ergibt sich Gl. (4.18) in Polarkoordinaten bzw. Gl. (4.19) in kartesischen Koordinaten

$$PQPQ2_{2K2K,k} = DUPQ1_{2K2K}^T \cdot PQDU2_{2K2K,k} \cdot DUPQ1_{2K2K} + \sum_{l=1}^{2K} \left( pqdu1_{kl} \cdot DUPQ2_{2K2K,l} \right) \quad (4.18)$$

$$PQPQ2_{2K2K,k} = RIPQ1_{2K2K}^T \cdot PQR12_{2K2K,k} \cdot RIPQ1_{2K2K} + \sum_{l=1}^{2K} \left( pqr11_{kl} \cdot RIPQ2_{2K2K,l} \right) \quad (4.19)$$

#### 4.6 Näherung für die Änderung der bezogenen Netzverluste

Analog zur Leistungsdifferenzgleichung und zur Funktion des Verteilten Slack kann auch die Funktion der Netzverluständerung durch eine quadratische Funktion in kartesischen Koordinaten beschrieben beziehungsweise in Polarkoordinaten angenähert werden. Für die quadratisch angenäherte bezogene Netzverluständerung als Funktion der Knotenspannungsänderungen ergeben sich die Gln. (4.20) und (4.21).

$$\frac{\Delta P_V}{P_{V,0}} = \mathit{pvdu}1_{2K} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix}^T \cdot \mathit{PVDU}2_{2K2K} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\frac{\Delta P_V}{P_{V,0}} = \mathit{pvri}1_{2K} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}^T \cdot \mathit{PVR}I2_{2K2K} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Zwei kompakte Möglichkeiten zur Berechnung der Jakobimatrizen  $\mathit{pvdu}1_{2K}$  und  $\mathit{pvri}1_{2K}$  sowie der Hessematrizen  $\mathit{PVDU}2_{2K2K}$  und  $\mathit{PVR}I2_{2K2K}$  werden in Anhang 11.1.2 hergeleitet.

Analog zum Einsetzen der quadratisch genäherten Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung in die quadratisch genäherte Funktion der Knotenleistungsänderungen in Abschnitt 4.5 kann die Umkehrfunktion ebenso in die Funktion der Netzverluständerungen eingesetzt werden. Auf Basis des Algorithmus in Anhang 11.2 ergibt sich Gl. (4.22) für die Netzverluständerung als Funktion der Knotenleistungsänderungen.

$$\frac{\Delta P_V}{P_{V,0}} = \mathit{pvpq}1_{2K} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix}^T \cdot \mathit{PVPQ}2_{2K2K} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Die Form von Gl. (4.22) ist unabhängig davon, ob in Polarkoordinaten oder kartesischen Koordinaten gerechnet worden ist. Der Gradient in Gl. (4.22) kann mit Gl. (4.23) in Polarkoordinaten oder mit Gl. (4.24) in kartesischen Koordinaten berechnet werden.

$$\mathit{pvpq}1_{2K} = \mathit{pvdu}1_{2K} \cdot \mathit{DUPQ}1_{2K2K} \quad (4.23)$$

$$\mathit{pvpq}1_{2K} = \mathit{pvri}1_{2K} \cdot \mathit{RIPQ}1_{2K2K} \quad (4.24)$$

Für die Hessematrix  $\mathit{PVPQ}2_{2K2K}$  ergibt sich Gl. (4.25) in Polarkoordinaten bzw. Gl. (4.26) in kartesischen Koordinaten

$$\mathit{PVPQ}2_{2K2K} = \mathit{DUPQ}1_{2K2K}^T \mathit{PVDU}2_{2K2K} \mathit{DUPQ}1_{2K2K} + \sum_{l=1}^{2K} (\mathit{pvdu}1_l \cdot \mathit{DUPQ}2_{2K2K,l}) \quad (4.25)$$

$$\mathit{PVPQ}2_{2K2K} = \mathit{RIPQ}1_{2K2K}^T \mathit{PVR}I2_{2K2K} \mathit{RIPQ}1_{2K2K} + \sum_{l=1}^{2K} (\mathit{pvri}1_l \cdot \mathit{RIPQ}2_{2K2K,l}) \quad (4.26)$$

#### 4.7 Näherung für die Änderungen der bezogenen Beträge der Knotenspannungen

Die Näherung des Spannungsbetrages unterscheidet sich in Polarkoordinaten beziehungsweise kartesischen Koordinaten. In Polarkoordinaten ist der Spannungsbetrag Bestandteil des Zustandsvektors, sodass sich Gl. (4.27) im Gegensatz zu den kartesischen Koordinaten unmittelbar aus der Näherung der Umkehrfunktion in Gl. (4.9) ergibt.

$$\Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} = \mathbf{UPQ1}_{K2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{UPQ2}_{2K2K} \}_K \otimes \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

In kartesischen Koordinaten ergibt sich der Spannungsbetrag nicht unmittelbar aus dem Zustandsvektor, sodass zunächst der Betrag gebildet werden muss. Da für das Optimierungsproblem quadratische Gleichungen hergeleitet werden sollen, muss das Taylorpolynom zweiter Ordnung von Gl. (2.15) ermittelt werden. Es ergibt sich Gl. (4.28)

$$\Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} = \mathbf{URII}_{K2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{URI2}_{2K2K} \}_K \otimes \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Eine kompakte Möglichkeit zur Berechnung der Jakobimatrix  $\mathbf{URII}_{2K2K}$  sowie der Hessematrizen  $\mathbf{URI2}_{2K2K,i}$  wird in Anhang 11.1.6 hergeleitet.

Analog zum Einsetzen der quadratisch genäherten Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzengleichung in die quadratisch genäherte Funktion der bezogenen Spannungsbeträge in Abschnitt 4.5 kann die quadratisch genäherte Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzengleichung in die quadratisch genäherte Funktion der bezogenen Spannungsbeträge eingesetzt werden. Auf Basis des Algorithmus in Anhang 11.2 ergibt sich für die Knotenspannungsbeträge als Funktion der Knotenleistungen eine Funktion der Form von Gl. (4.27).

Die Jakobimatrix von Gl. (4.27) kann in kartesischen Koordinaten mit Gl. (4.29) berechnet werden.

$$\mathbf{UPQ1}_{K2K} = \mathbf{URII}_{K2K} \cdot \mathbf{RIPQ1}_{2K2K} \quad (4.29)$$

Für eine Hessematrix  $\mathbf{UPQ2}_{2K2K,k}$  aus  $\{ \mathbf{UPQ2}_{2K2K} \}_{2K}$  ergibt sich Gl. (4.30) in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{UPQ2}_{2K2K,k} = \mathbf{RIPQ1}_{2K2K}^T \mathbf{URI2}_{2K2K,k} \mathbf{RIPQ1}_{2K2K} + \sum_{l=1}^{2K} (uri1_{kl} \cdot \mathbf{RIPQ2}_{2K2K,l}) \quad (4.30)$$

## 4.8 Näherung für die Änderungen der bezogenen Beträge der Zweigströme

Weder in Polarkoordinaten noch in kartesischen Koordinaten kann der Strombetrag direkt aus dem Zustandsvektor entnommen werden. Analog zum Spannungsbetrag in kartesischen Koordinaten müssen zunächst Funktionen des Strombetrags in Abhängigkeit des Zustandsvektors in Polarkoordinaten beziehungsweise kartesischen Koordinaten aufgestellt werden. Auf Basis von Gl. (2.11) ergibt sich Gl. (4.31) in Polarkoordinaten und Gl. (4.32) in kartesischen Koordinaten.

$$\mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} = \sqrt{\operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{Y}}_{ZZ} \cdot \underline{\mathbf{u}}_z + \underline{\mathbf{i}}_{z,q}\}^2 + \operatorname{Im}\{\underline{\mathbf{Y}}_{ZZ} \cdot \underline{\mathbf{u}}_z + \underline{\mathbf{i}}_{z,q}\}^2} / \mathbf{i}_{z,0} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} = \sqrt{\operatorname{Re}\{\underline{\mathbf{Y}}_{ZZ} \cdot \mathbf{KZ}^T \cdot \underline{\mathbf{u}}_K + \underline{\mathbf{i}}_{z,q}\}^2 + \operatorname{Im}\{\underline{\mathbf{Y}}_{ZZ} \cdot \mathbf{KZ}^T \cdot \underline{\mathbf{u}}_K + \underline{\mathbf{i}}_{z,q}\}^2} / \mathbf{i}_{z,0}$$

$$\mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} = \sqrt{\left(\mathbf{G}_{ZZ} \mathbf{u}_{z,r} - \mathbf{B}_{ZZ} \mathbf{u}_{z,i} + \underline{\mathbf{i}}_{z,q,r}\right)^2 + \left(\mathbf{B}_{ZZ} \mathbf{u}_{z,r} + \mathbf{G}_{ZZ} \mathbf{u}_{z,i} + \underline{\mathbf{i}}_{z,q,i}\right)^2} / \mathbf{i}_{z,0} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} = \sqrt{\left(\mathbf{G}_{ZZ} \cdot \mathbf{KZ}^T \cdot \mathbf{u}_{K,r} - \mathbf{B}_{ZZ} \cdot \mathbf{KZ}^T \cdot \mathbf{u}_{K,i} + \underline{\mathbf{i}}_{z,q,r}\right)^2 + \left(\mathbf{B}_{ZZ} \cdot \mathbf{KZ}^T \cdot \mathbf{u}_{K,r} + \mathbf{G}_{ZZ} \cdot \mathbf{KZ}^T \cdot \mathbf{u}_{K,i} + \underline{\mathbf{i}}_{z,q,i}\right)^2} / \mathbf{i}_{z,0}$$

Da für das Optimierungsproblem quadratische Gleichungen hergeleitet werden sollen, müssen die Taylorpolynome zweiter Ordnung der Gln. (4.31) und (4.32) ermittelt werden. Da die Quellströme der Zweige keine Funktion der Zweigspannungen sind (vgl. Abschnitt 2.1.1), ergeben sich in den Gln. (4.33) und (4.34) die quadratisch angenäherten Zweigstromänderungen nur als Funktion in Abhängigkeit von den Zweigspannungen.

$$\Delta \mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} = \mathbf{IDU1}_{ZZZ} \begin{bmatrix} \Delta \delta_z \\ \Delta \mathbf{u}_z / \mathbf{u}_{z,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \delta_z \\ \Delta \mathbf{u}_z / \mathbf{u}_{z,0} \end{bmatrix}^T \otimes \{\mathbf{IDU2}_{ZZZZ}\}_Z \otimes \begin{bmatrix} \Delta \delta_z \\ \Delta \mathbf{u}_z / \mathbf{u}_{z,0} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\Delta \mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} = \mathbf{IRI1}_{ZZZ} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{z,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{z,i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{z,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{z,i} \end{bmatrix}^T \otimes \{\mathbf{IRI2}_{ZZZZ}\}_Z \otimes \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{z,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{z,i} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Durch Einsetzen von Gl. (2.18) ergeben sich in den Gln. (4.35) und (4.36) die Zweigströme in Abhängigkeit der Knotenspannungen.

$$\Delta \mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} = \mathbf{IDU1}_{ZZZ} \begin{bmatrix} \mathbf{KZ}^T & \mathbf{0}_{KZ}^T \\ \mathbf{0}_{KZ}^T & \mathbf{KZ}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{KZ}^T & \mathbf{0}_{KZ}^T \\ \mathbf{0}_{KZ}^T & \mathbf{KZ}^T \end{bmatrix} \otimes \{\mathbf{IDU2}_{ZZZZ}\}_Z \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{KZ}^T & \mathbf{0}_{KZ}^T \\ \mathbf{0}_{KZ}^T & \mathbf{KZ}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\Delta \mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} = \mathbf{IDU1}_{ZZK} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix}^T \otimes \{\mathbf{IDU2}_{2K2K}\}_Z \otimes \begin{bmatrix} \Delta \delta_K \\ \Delta \mathbf{u}_K / \mathbf{u}_{K,0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} &= \mathbf{IRI1}_{z2z} \begin{bmatrix} \mathbf{KZ}^T & \mathbf{0}_{KZ}^T \\ \mathbf{0}_{KZ}^T & \mathbf{KZ}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{KZ}^T & \mathbf{0}_{KZ}^T \\ \mathbf{0}_{KZ}^T & \mathbf{KZ}^T \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{IRI2}_{z2z} \}_z \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{KZ}^T & \mathbf{0}_{KZ}^T \\ \mathbf{0}_{KZ}^T & \mathbf{KZ}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} \quad (4.36) \\
 \Delta \mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} &= \mathbf{IRI1}_{z2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{IRI2}_{2K2K} \}_z \otimes \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{K,r} \\ \Delta \mathbf{u}_{K,i} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Eine kompakte Möglichkeit zur Berechnung der Elemente der Jakobimatrizen  $\mathbf{IDU1}_{z2K}$  und  $\mathbf{IRI1}_{z2K}$  sowie der Hessematrizen  $\mathbf{IDU2}_{2K2K,z}$  und  $\mathbf{IRI2}_{2K2K,z}$  wird in Anhang 11.1.7 hergeleitet.

Analog zum Einsetzen der quadratisch genäherten Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung in die quadratisch genäherte Funktion der Knotenleistungen in Abschnitt 4.5 kann die quadratisch genäherte Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung in die quadratisch genäherte Funktion der Strombeträge eingesetzt werden. Auf Basis des Algorithmus in Anhang 11.2 ergibt sich für die Strombeträge als Funktion der Knotenleistungen sowohl in Polarkoordinaten als auch in kartesischen Koordinaten eine Funktion der Form von Gl. (4.37).

$$\Delta \mathbf{i}_z / \mathbf{i}_{z,0} = \mathbf{IPQ1}_{z2K} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix}^T \otimes \{ \mathbf{IPQ2}_{2K2K} \}_z \otimes \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Die Jakobimatrix in Gl. (4.37) kann in Polarkoordinaten mit Gl. (4.38) und in kartesischen Koordinaten mit Gl. (4.39) berechnet werden.

$$\mathbf{IPQ1}_{z2K} = \mathbf{IDU1}_{z2K} \cdot \mathbf{DUPQ1}_{2K2K} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{IPQ1}_{z2K} = \mathbf{IRI1}_{z2K} \cdot \mathbf{RIPQ1}_{2K2K} \quad (4.39)$$

Für eine Hessematrix  $\mathbf{IPQ2}_{2K2K,z}$  aus  $\{ \mathbf{IPQ2}_{2K2K} \}_z$  ergibt sich Gl. (4.40) in Polarkoordinaten und Gl. (4.41) in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{IPQ2}_{2K2K,z} = \mathbf{DUPQ1}_{2K2K}^T \mathbf{IDU2}_{2K2K,z} \mathbf{DUPQ1}_{2K2K} + \sum_{l=1}^{2K} (idu1_{zl} \cdot \mathbf{DUPQ2}_{2K2K,l}) \quad (4.40)$$

$$\mathbf{IPQ2}_{2K2K,z} = \mathbf{RIPQ1}_{2K2K}^T \mathbf{IRI2}_{2K2K,z} \mathbf{RIPQ1}_{2K2K} + \sum_{l=1}^{2K} (iri1_{zl} \cdot \mathbf{RIPQ2}_{2K2K,l}) \quad (4.41)$$



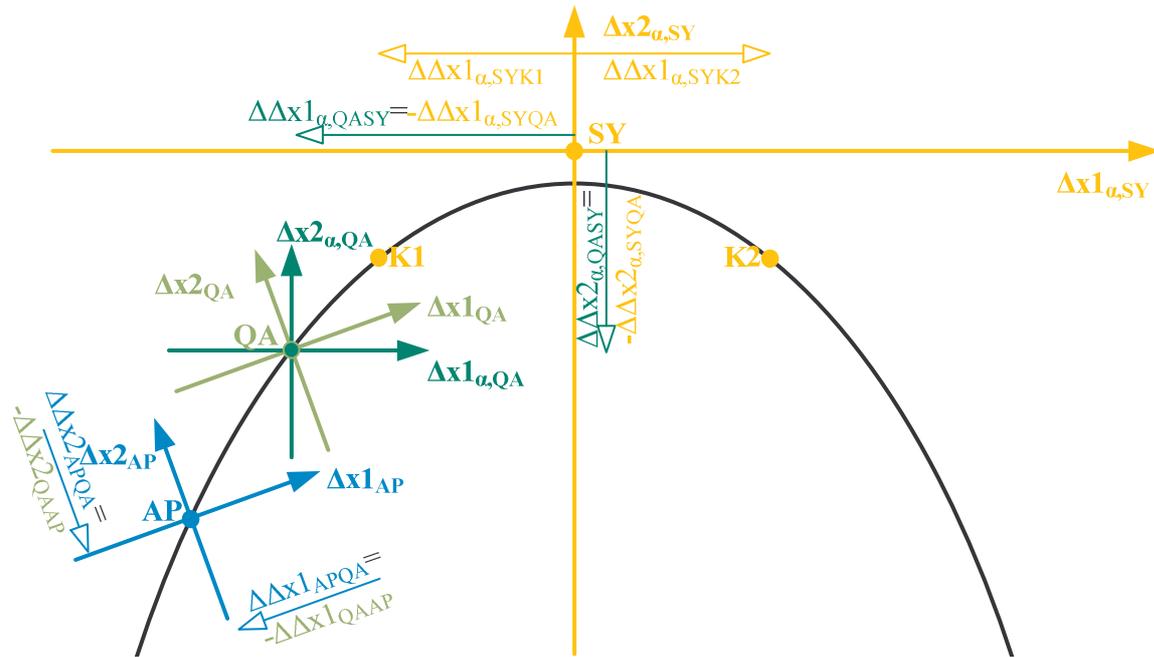
## 5 Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen

Auf Basis der in Kapitel 4 hergeleiteten quadratischen Näherungen lassen sich Optimierungsprobleme vom Typ QCQP beziehungsweise SQCQP formulieren (vgl. Kapitel 4). Diese Optimierungsprobleme sind, von Spezialfällen abgesehen, jedoch nichtkonvex.

Die Zielfunktion und die Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems können durch Koordinatentransformationen grundsätzlich in beliebigen Koordinatensystemen beschrieben werden, wobei in dieser Arbeit nur kartesische Koordinatensysteme berücksichtigt werden. In dieser Arbeit werden für verschiedene Funktionsbestandteile der quadratischen Zielfunktion und der Nebenbedingungen Zustandsgrößen in unterschiedlichen Koordinatensystemen verwendet, da sich diese Beschreibung im Rahmen dieser Arbeit als besonders vorteilhaft herausgestellt hat. Die linearen Transformationsbeziehungen zwischen den Zustandsgrößen der verschiedenen Koordinatensysteme werden als Gleichheitsnebenbedingungen in der Optimierung berücksichtigt.

Eine Hauptachsentransformation [5.10] von quadratischen Funktionen ermöglicht die Identifizierung der nichtkonvexen Funktionsbestandteile, da, wie in Abschnitt 2.2.2 dargestellt, durch die Analyse der Eigenwerte der Hessematrizen quadratischer Funktionen, Aussagen über deren Konvexität getroffen werden können. Sind alle Eigenwerte der Hessematrix einer quadratischen Funktion positiv oder gleich Null, so wird die Hessematrix als positiv-semidefinit bezeichnet und die Funktion ist konvex. Sind Eigenwerte der Hessematrix einer quadratischen Funktion negativ, so ist die Funktion nichtkonvex. Die Darstellung einer nichtkonvexen quadratischen Funktion im Koordinatensystem ihrer Hauptachsen, bietet den Ausgangspunkt für Konvexifizierungen der nichtkonvexen Funktionsbestandteile.

Koordinatensysteme können zueinander gedreht sein. Der Index  $\alpha$  kennzeichnet im Folgenden, dass ein Koordinatensystem gegenüber dem Ausgangskordinatensystem gedreht ist. Koordinatensysteme können zudem ihren jeweiligen Ursprung in verschiedenen Punkten haben und somit zueinander verschoben sein. Im Hinblick auf die Hauptachsentransformation und die Konvexifizierung sind im Folgenden der Ausgangspunkt (AP), der Punkt der quadratischen Annäherung (QA), der Symmetriepunkt (SY) und die Konvexifizierungspunkte (K1 und K2) zu berücksichtigen. Von allen Kombinationsmöglichkeiten für Koordinatensysteme von Ursprungspunkten mit Drehzustand sind im Folgenden die Koordinatensysteme AP, QA,  $\alpha$ ,QA und  $\alpha$ ,SY in **Bild 5.1** von Relevanz.



**Bild 5.1** Beispielhafte Darstellung der zu berücksichtigenden Punkte und Koordinatensysteme für die Koordinatentransformationen

- Der Ausgangspunkt der Optimierung, der sich aus der initialen Leistungsflussberechnung ergibt, wird im Folgenden mit dem Index AP gekennzeichnet. Dieser Punkt wird in allen Iterationsschritten der sequentiellen Optimierung verwendet, um die unterschiedlichen Kosten für positive und negative Leistungsänderungen (vgl. Abschnitt 6.2) zu berücksichtigen. Im Koordinatensystem AP liegt der Unterscheidungspunkt zwischen positiven und negativen Leistungsänderungen im Koordinatenursprung. In dem Punkt AP wird das Koordinatensystem mit dem Index AP aufgestellt, dessen Achsen den Leistungsänderungen  $\Delta x1_{AP}$  und  $\Delta x2_{AP}$  ausgehend von AP entsprechen.
- Der Punkt in dem die quadratische Annäherung erfolgt, wird im Folgenden mit dem Index QA gekennzeichnet. Dieser Punkt liegt im ersten Iterationsschritt in dem Ausgangspunkt der Optimierung AP, ändert sich aber mit jedem Iterationsschritt der sequentiellen quadratischen Optimierung um den Wert der Leistungsänderungen des vorherigen Schritts der sequentiellen quadratischen Optimierung. Da in dem Punkt QA im Rahmen der Hauptachsentransformation die Drehung der Koordinatenachsen durchgeführt wird, werden in diesem Punkt zwei Koordinatensysteme aufgestellt. Die Achsen des ersten Koordinatensystems mit dem Index QA entsprechen den Leistungsänderungen  $\Delta x1_{QA}$  und  $\Delta x2_{QA}$  ausgehend von QA in Richtung der Achsen des Koordinatensystems AP. Die Achsen des zweiten Koordinatensystems mit dem Index  $\alpha,QA$  entsprechen den Leistungsänderungen  $\Delta x1_{\alpha,QA}$

und  $\Delta x_{2,\alpha,QA}$  ausgehend von QA in Richtung der gegenüber dem ersten Koordinatensystem gedrehten Hauptachsen der jeweiligen Funktion.

- Der Symmetriepunkt der quadratischen Funktion wird im Folgenden mit dem Index SY gekennzeichnet. Der Symmetriepunkt ändert sich in jedem Iterationsschritt der sequentiellen quadratischen Optimierung. Im Punkt SY wird das Koordinatensystem mit dem Index  $\alpha,SY$  aufgestellt, dessen Achsen den Leistungsänderungen  $\Delta x_{1,\alpha,SY}$  und  $\Delta x_{2,\alpha,SY}$  ausgehend von SY in Richtung der Hauptachsen entsprechen. Im Koordinatensystem SY können die Symmetrieeigenschaften quadratischer Funktion bei der Konvexifizierung genutzt werden.
- Die Punkte, in denen die Konvexifizierungen erfolgen, werden im Folgenden mit dem Index K1 oder K2 gekennzeichnet. Der Punkt K1 liegt im jeweils ersten Schritt der inneren sequentiellen Konvexifizierung (vgl. Abschnitt 5.3) im Punkt der quadratischen Annäherung. Der Punkt K2 ist der an der Hauptachse gespiegelte Punkt von K1. Die Punkte K1 und K2 ändern sich mit jedem Schritt der inneren sequentiellen Konvexifizierung auf den Ergebniswert des vorherigen Schritts und dessen jeweils gespiegelten Punkt.

Die Abstände zwischen zwei Punkten werden mit Differenzgrößen beispielsweise  $\Delta \Delta x_{1,APQA}$  und  $\Delta \Delta x_{2,APQA}$  angegeben.

Die Anwendung der Hauptachsentransformation auf quadratische Funktionen wird im Abschnitt 5.1 beschrieben. Nach Auswahl der optimalen Koordinatensysteme in Abschnitt 5.2 werden in Abschnitt 5.3 die nichtkonvexen Funktionsbestandteile durch stückweise Linearisierungen konvexifiziert. Es ergibt sich ein gemischt-ganzzahliges konvexes quadratisches Optimierungsproblem, welches mit CPLEX oder Gurobi gelöst werden kann (vgl. Abschnitt 1.3).

### **5.1 Hauptachsentransformation und Eigenwertanalyse einer quadratischen Funktion**

Gl. (5.1) beschreibt eine lineare Koordinatentransformation [5.10].

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{T}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,i} \quad (5.1)$$

Mit  $\Delta \mathbf{x}$  und  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,i}$  werden dieselben Punkte in verschiedenen Koordinatensystemen beschrieben. Ist die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_i$  eine orthogonale Matrix, sodass Gl. (5.2) gilt, handelt es sich bei der linearen Koordinatentransformation um eine Drehung [5.10].

$$\mathbf{T}_i^{-1} = \mathbf{T}_i^T \quad (5.2)$$

## 5 Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen

Im Folgenden wird beispielhaft die quadratische Funktion in Gl. (5.3) betrachtet. Die Funktion hat die Form der in Kapitel 4 beschriebenen quadratischen Näherungen, sodass die Hessematrix  $\mathbf{H}_i$  eine reelle symmetrische Matrix ist, für die Gl. (5.4) gilt. Der Vektor  $\mathbf{g}_i$  bezeichnet den Gradienten und  $k_i$  einen konstanten Anteil.

$$\Delta t_i(\Delta \mathbf{x}) = k_i + \mathbf{g}_i \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{H}_i \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^T \quad (5.4)$$

Für reelle symmetrische Matrizen  $\mathbf{H}_i$  kann eine reelle Drehungs-Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_i$  derart gefunden werden, dass die Hessematrix  $\mathbf{D}_i$  in Gl. (5.5) eine Diagonalmatrix ist [5.10].

$$\begin{aligned} \Delta t_i(\Delta \mathbf{x}_{\alpha,i}) &= k_i + \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{T}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,i} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,i}^T \cdot \mathbf{T}_i^T \cdot \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{T}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,i} \\ &= k_i + \mathbf{g}_{\alpha,i} \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,i} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,i}^T \cdot \mathbf{D}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,i} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Diagonalelemente von  $\mathbf{D}_i$  sind bei dieser Transformation die Eigenwerte von  $\mathbf{H}_i$  und die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren, deren Richtungen auch als Hauptachsenrichtungen bezeichnet werden, sind die Spaltenvektoren der Drehungs-Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_i$  [5.10]. Die Transformation zwischen  $\Delta \mathbf{x}_i$  und dem so konstruierten Koordinatensystem  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,i}$  wird als Hauptachsentransformation bezeichnet [5.10].

Bezugnehmend auf die Koordinatensysteme in **Bild 5.1** wird im Folgenden die Funktion  $\Delta t_i(\Delta \mathbf{x}_{\text{QA}})$  in Gl. (5.6) im Koordinatensystem QA betrachtet. In diesem Koordinatensystem werden der konstante Anteil  $k_{\text{QA},i}$ , der Gradient  $\mathbf{g}_{\text{QA},i}$  und die Hessematrix  $\mathbf{H}_i$  bestimmt.

$$\Delta t_i(\Delta \mathbf{x}_{\text{QA}}) = k_{\text{QA},i} + \mathbf{g}_{\text{QA},i} \cdot \Delta \mathbf{x}_{\text{QA}} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{\text{QA}}^T \cdot \mathbf{H}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{\text{QA}} \quad (5.6)$$

Die Funktion  $\Delta t_i(\Delta \mathbf{x}_{\text{QA}})$  ist gegenüber der Richtung ihrer Hauptachsen  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{QA},i}$  gedreht. Zur Identifizierung nichtkonvexer Anteile der quadratischen Funktion, wird die Funktion durch Hauptachsentransformation in dem Koordinatensystem der Hauptachsen  $\alpha,\text{QA},i$  beschrieben. Hierzu müssen zunächst die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Hessematrix  $\mathbf{H}_i$  bestimmt werden. Ausgehend von der Beschreibung  $\Delta t_i(\Delta \mathbf{x}_{\text{QA}})$  im Koordinatensystem  $\Delta \mathbf{x}_{\text{QA}}$  ergibt sich die Funktion  $\Delta t_i(\Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{QA},i})$  in Gl. (5.8) durch Einsetzen von Gl. (5.7) in Gl. (5.6) im gedrehten

Koordinatensystem  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}$ . Im Folgenden werden die Hauptachsen nach der Größe der ihnen zugeordneten Eigenwerte sortiert und in Gl. (5.7) in Gruppen von Hauptachsen unterteilt, denen positive oder negative Eigenwerte oder Nulleigenwerte zugeordnet sind. Die hochgestellten Indizes „-“, „0“ und „+“ kennzeichnen die Gruppen von Hauptachsen.

$$\Delta \mathbf{x}_{QA,i} = \mathbf{T}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\alpha,QA,i}^- & \mathbf{T}_{\alpha,QA,i}^0 & \mathbf{T}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^0 \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta t_i(\Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}) &= k_{QA,i} + \mathbf{g}_{QA,i} \cdot \mathbf{T}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^T \cdot \mathbf{T}_i^T \cdot \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{T}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i} \\ &= k_{QA,i} + \mathbf{g}_{\alpha,QA,i} \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^T \cdot \mathbf{D}_i \cdot \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i} \\ &= k_{QA,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^- & \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^0 & \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^0 \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^0 \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & & \\ & \mathbf{0}_i^0 & \\ & & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^0 \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Diagonalmatrix  $\mathbf{D}_i$  kann in Untermatrizen zerlegt werden, von denen nur die Diagonalmatrizen  $\mathbf{D}_i^+$  und  $\mathbf{D}_i^-$  Nicht-Null-Elemente entsprechend den positiven und negativen Eigenwerten enthalten. Die passende Berücksichtigung und die Auswahl des für jede Hauptachsengruppe am besten geeigneten Koordinatensystems wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

## 5.2 Auswahl der optimalen Koordinatensysteme für die Zustandsgrößen und Beschreibung der Funktionen in diesen

Wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, sind quadratische Funktionen mit negativen Eigenwerten der Hessematrix nichtkonvex. Die von den negativen Eigenwerten abhängigen Funktionsbestandteile müssen daher konvexifiziert werden, damit ein konvexes Optimierungsproblem aufgestellt werden kann. Wie in Abschnitt 5.3 gezeigt wird, eignet sich hierzu das Koordinatensystem  $\alpha,SY$  aus **Bild 5.1** am besten.

Es hat sich im Rahmen der Ausarbeitungen für diese Arbeit gezeigt, dass bei der Eigenwertanalyse in der Regel keine Werte gefunden werden, die exakt gleich Null sind, sondern Werte, die sehr kleine Beträge haben. Diese Werte werden unter Annahme numerischer Ungenauigkeiten

## 5 Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen

als „echte Nullen“ interpretiert. Für die linearen Anteile  $\mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^0$  in Richtung der Hauptachsen, denen Nulleigenwerte zugeordnet werden, haben sich ebenfalls sehr kleine Beträge ergeben, sodass auch diese als „echte Nullen“ interpretiert werden. Somit hängt die Funktion  $\Delta t_i(\Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i})$  weder linear noch quadratisch von den Variablen  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^0$  ab, sodass diese unberücksichtigt bleiben können. Es hat sich gezeigt, dass in jeder Funktion immer genau ein solcher Nulleigenwert auftritt. Es liegt nahe anzunehmen, dass das Auftreten einer Hauptachse, in deren Richtung die Funktion keine Abhängigkeit aufweist, in der Berücksichtigung des Verteilten Slacks begründet ist, da dieser für den Ausgleich der Leistungsbilanz sorgt und somit durch eine implizit vorhandene Summe-Null-Bedingung eine Variable linear abhängig macht.

Die konvexen Funktionsbestandteile in Richtung der Hauptachsen, denen positive Eigenwerte zugeordnet werden können, könnten durch Rücktransformation wieder in das Koordinatensystem QA zurücktransformiert werden. Da die Hessematrix spärlich statt voll besetzt ist, wenn auch diese Funktionsbestandteile in ihren Hauptachsenkoordinatensystemen beschrieben werden, hat sich die Modellierung im Koordinatensystem in Richtung der Hauptachsen im Rahmen der Ausarbeitungen für diese Arbeit als numerisch vorteilhafter herausgestellt. Sofern redundante Zustandsgrößen numerisch sinnvoll eliminiert werden können, wird die Eliminierung durch die Lösungssoftware automatisch durchgeführt.

Ohne die Zustandsgrößen der Hauptachsen, denen Nulleigenwerte zugeordnet werden, jedoch unter Hinzunahme der Zustandsgrößen im Koordinatensystem QA ergibt sich Gl. (5.9) aus Gl. (5.8). Zur Verknüpfung der jeweiligen Hauptachsenkoordinatensysteme der Zielfunktion und aller Nebenbedingungen mit dem Koordinatensystem QA, dienen Gleichheitsnebenbedingungen. Gl. (5.10), die aus Gl. (5.7) folgt, zeigt eine solche Gleichheitsnebenbedingung.

$$\Delta t_i \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{QA} \end{bmatrix} = k_{QA,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^- & \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{QA} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{QA} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & & \\ & \mathbf{D}_i^+ & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{QA} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\alpha,QA,i}^- & \mathbf{T}_{\alpha,QA,i}^+ & -\mathbf{E}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{QA} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

## 5 Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen

Im Vergleich zu Gl. (5.6) und (5.8) ist die Anzahl der Zustandsgrößen in Gl. (5.9) um die Anzahl der negativen und positiven Eigenwerte größer, da zusätzlich zu den Zustandsgrößen des Koordinatensystems QA die Zustandsgrößen der Hauptachsen hinzugekommen sind, denen ein negativer oder positiver Eigenwert zugeordnet wird. Diesem Nachteil stehen die vorgenannten numerischen Vorteile und die Möglichkeit der Konvexifizierung nichtkonvexer Funktionsbestandteile gegenüber.

Da sich im folgenden Abschnitt 5.3 das Koordinatensystem  $\alpha, SY, i$  aus **Bild 5.1** für die Konvexifizierungen als am besten geeignet herausstellt, muss das Koordinatensystem dieser Hauptachsen von QA in SY,  $i$  verschoben werden.

Zur Beschreibung der Funktion in Richtung der Hauptachsen, denen ein negativer Eigenwert zugeordnet wird, im Koordinatensystem  $\alpha, SY, i$  aus **Bild 5.1**, wird der Abstand  $\Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha, QASY, i}^-$  zwischen den beiden Punkten QA und SY in Gl. (5.11) benötigt.

$$\Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha, QASY, i}^- = \Delta\mathbf{x}_{\alpha, QA, i}^- - \Delta\mathbf{x}_{\alpha, SY, i}^- \quad \Delta\mathbf{x}_{\alpha, QA, i}^- = \Delta\mathbf{x}_{\alpha, SY, i}^- + \Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha, QASY, i}^- \quad (5.11)$$

Die Herleitung der Berechnung von  $\Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha, QASY, i}^-$  für Gl. (5.12) wird in Anhang 11.4 dargestellt.

$$\Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha, QASY, i}^- = -(\mathbf{D}_i^-)^{-1} (\mathbf{g}_{\alpha, QA, i}^-)^T \quad (5.12)$$

Für die Hauptachsen, denen ein positiver Eigenwert zugeordnet wird, ist keine Beschreibung im Koordinatensystem  $\alpha, SY, i$  aus **Bild 5.1** erforderlich, jedoch wird mit diesen analog zu den Hauptachsen mit negativem Eigenwert verfahren. Es entstehen hierdurch mehr Nullen im Gradienten der quadratischen Funktion in Gl. (5.17). Analog zu Gl. (5.11) beschreibt Gl. (5.13) die Verschiebung um  $\Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha, QASY, i}^+$ , deren Herleitung ebenfalls in Anhang 11.4 dargestellt wird.

$$\Delta\mathbf{x}_{\alpha, QA, i}^+ = \Delta\mathbf{x}_{\alpha, SY, i}^+ + \Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha, QASY, i}^+ = \Delta\mathbf{x}_{\alpha, SY, i}^+ - (\mathbf{D}_i^+)^{-1} (\mathbf{g}_{\alpha, QA, i}^+)^T \quad (5.13)$$

Wie in Kapitel 6 detailliert behandelt wird, soll für die Zielfunktionen bei den Leistungsänderungen zwischen positiven und negativen Leistungsänderungen unterschieden werden, da diesen ausgehend vom Punkt AP unterschiedliche Kosten zugeordnet werden sollen. Es ist daher bezugnehmend auf die Darstellung der Koordinatensysteme in **Bild 5.1** zielführend, das Koordinatensystem der Zustandsgrößen  $\Delta\mathbf{x}_{QA}$  vom Punkt QA in den Punkt AP zu verschieben, da in diesem Punkt die Unterscheidung zwischen positiven und negativen Leistungsänderungen im Koordinatenursprung liegt. Gl. (5.14) beschreibt die Verschiebung um  $\Delta\Delta\mathbf{x}_{QAAP}$  zwischen den Punkten AP und QA, die sich im ersten Iterationsschritt der sequentiellen Quadratischen

## 5 Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen

Optimierung zu Null und in allen folgenden Iterationsschritt aus dem Ergebnis der Optimierung des vorherigen Iterationsschrittes ergibt.

$$\Delta \mathbf{x}_{QA} = \Delta \mathbf{x}_{AP} + \Delta \Delta \mathbf{x}_{QAAP} \quad (5.14)$$

Durch die Verschiebungen der Funktionsvariablen von QA in SY,*i* und von QA in AP ergeben sich Gl. (5.17) und (5.16) aus Gl. (5.9) und (5.10) mit  $k_{SYAP,i}$  aus Gl. (5.15)

$$k_{SYAP,i} = k_{QA,i} + \mathbf{g}_{a,QA,i}^- \cdot \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^- + \mathbf{g}_{a,QA,i}^+ \cdot \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+ + \frac{1}{2} \left( \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^- \right)^T \mathbf{D}_i^- \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^- + \frac{1}{2} \left( \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+ \right)^T \mathbf{D}_i^+ \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+ \quad (5.15)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{a,QA,i}^- & \mathbf{T}_{a,QA,i}^+ & -\mathbf{E}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- + \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ + \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{AP} + \Delta \Delta \mathbf{x}_{QAAP} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{a,QA,i}^- & \mathbf{T}_{a,QA,i}^+ & -\mathbf{E}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{AP,i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{a,QA,i}^- & \mathbf{T}_{a,QA,i}^+ & -\mathbf{E}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+ \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{QAAP,i} \end{bmatrix} = \mathbf{r} \mathbf{s}_{eq,i}$$

$$\begin{aligned} \Delta t_i \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{AP} \end{pmatrix} &= k_{QA,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{a,QA,i}^- & \mathbf{g}_{a,QA,i}^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- + \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ + \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{AP} + \Delta \Delta \mathbf{x}_{QAAP} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- + \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ + \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{AP} + \Delta \Delta \mathbf{x}_{QAAP} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- + \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ + \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{AP} + \Delta \Delta \mathbf{x}_{QAAP} \end{bmatrix} \quad (5.17) \\ &= k_{SYAP,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_i^- & \mathbf{0}_i^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{AP,i} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{AP,i} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{AP,i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

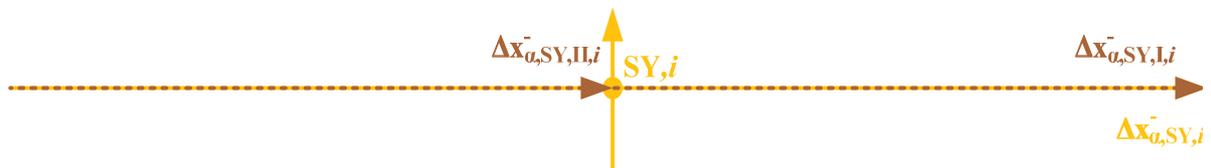
Als Ergebnis der Drehungen und Verschiebungen liegen die Funktionsbestandteile nun in den Koordinatensystemen vor, die für die Konvexifizierung und das Aufstellen der Kostenfunktion zweckmäßig sind. Die nichtkonvexen Funktionsbestandteile jeder so erhaltenen Funktion werden, wie im folgenden Abschnitt 5.3 beschrieben wird, konvexifiziert.

### 5.3 Konvexifizierung der nichtkonvexen Funktionsbestandteile

Mit Hilfe der Hauptachsentransformation (vgl. Abschnitt 5.1) sind die Funktionsbestandteile mit negativen Eigenwerten, die zur Nichtkonvexität führen, identifiziert und separiert. Darüberhinaus liegt die quadratische Funktion symmetrisch zu ihren Hauptachsen.

## 5 Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen

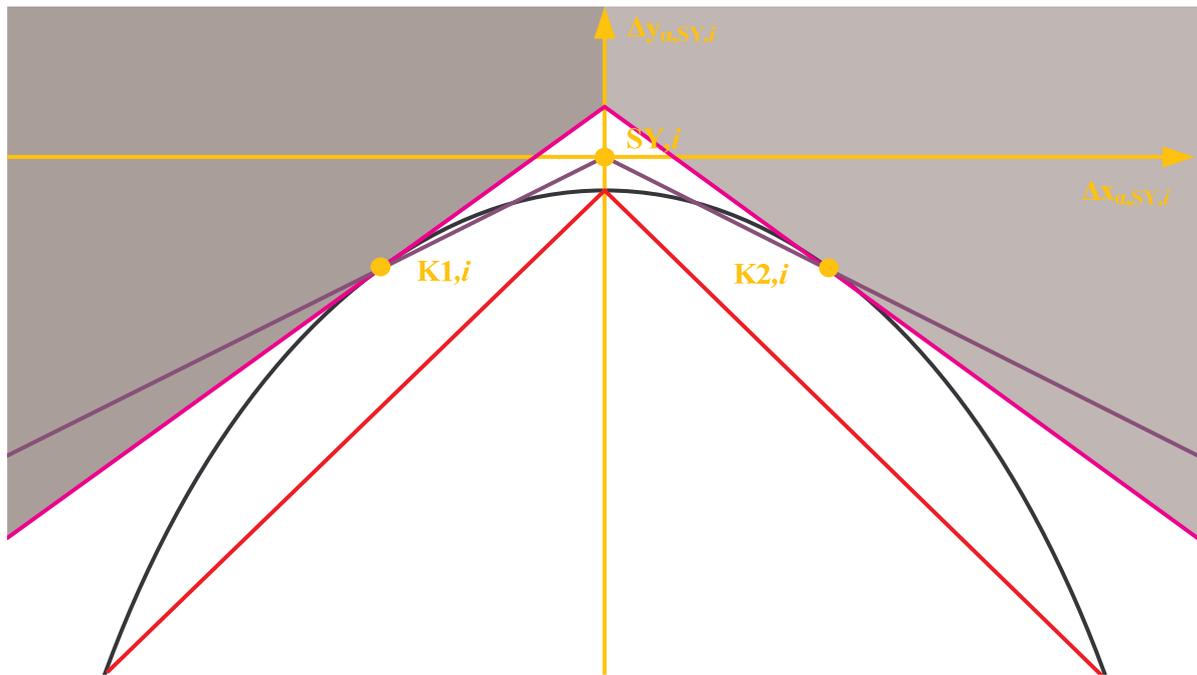
Im Folgenden wird die Nichtkonvexität durch Konvexifizierung beseitigt. Unter dem Begriff Konvexifizierung (convexification) sind in der Literatur eine Vielzahl von Ansätzen beschrieben. Einen Überblick über verschiedene Ansätze und weiterführende Literatur geben beispielsweise [5.1], [5.11], [5.12]. In dieser Arbeit wird jede Funktion konvexifiziert, indem die quadratische Funktion in Richtung der Hauptachsen mit negativem Eigenwert stückweise linearisiert wird. So wie die quadratischen Näherungen die nichtlinearen Netzgleichungen nur annähern, nähern die stückweisen Linearisierungen die nichtkonvexen Bestandteile der quadratischen Funktionen ebenfalls nur an. In den Punkten, in denen die stückweisen Linearisierungen die quadratischen Funktionen schneiden oder tangieren, beschreiben die stückweisen Linearisierungen die quadratischen Funktionen exakt, ansonsten nur genähert. In je mehr Stücke die zu konvexifizierende Funktion unterteilt wird, umso genauer ist die Näherung, jedoch steigt der Speicher- und Rechenaufwand. In dieser Arbeit wird die Näherung mit nur zwei zur quadratischen Funktion symmetrisch liegenden Stücken favorisiert, um den Speicher- und Rechenaufwand möglichst gering zu halten. Die zu konvexifizierenden Hauptachsen  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-$  werden im Rahmen der stückweisen Linearisierung somit in zwei Hauptachsenabschnitte  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^-$  und  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,II,i}^-$  aufgeteilt, deren Zusammenhang **Bild 5.2** und deren Wertebereiche Gl. (5.18) zeigt. Die Bestimmung der Wertebereiche wird in Abschnitt 6.3.1 beschrieben.



**Bild 5.2** Aufteilung der Hauptachsen  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-$  in zwei Abschnitte  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^-$  und  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,II,i}^-$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i,\min}^- &\leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i,\max}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i,\min}^- &\leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^- \leq 0 \leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,II,i}^- \leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i,\max}^- \end{aligned} \quad (5.18)$$

Selbst für nur zwei zur quadratischen Funktion symmetrisch liegende Stücke, deren Eckpunkt im Nullpunkt der Variable liegt, entlang derer die Funktion konvexifiziert wird, gibt es unendliche viele mögliche Konvexifizierungen, von denen drei in **Bild 5.3** beispielhaft gezeigt sind. Die beiden stückweisen Linearisierungen trennen das Lösungsgebiet in zwei separate Lösungsgebiete. Für die in Magenta gezeichnete stückweise Linearisierung in **Bild 5.3** sind die zwei separaten Lösungsgebiete in unterschiedlichen Grautönen gekennzeichnet.



**Bild 5.3** Drei Beispiele von zur quadratischen Funktion symmetrisch liegenden stückweisen Linearisierungen, bestehend aus jeweils zwei Stücken

Stückweise Linearisierungen können die anzunähernde Funktion unter- oder überschätzen. Die Vor- und Nachteile von Unter- oder Überschätzungen sind in Abschnitt 4.1 beschrieben. Ist die nichtkonvexe quadratische Funktion in **Bild 5.3** beispielsweise eine Nebenbedingung, die das Lösungsgebiet auf alle Punkte oberhalb der Parabel beschränkt, so überschätzt die rote stückweise Linearisierung das Lösungsgebiet, obwohl die rote stückweise Linearisierung bezogen auf die nichtkonvexe quadratische Funktion innerhalb des Parabelbogens liegt. Die violette stückweise Linearisierung ist somit teilweise eine Überschätzung und teilweise eine Unterschätzung. Die tangentielle stückweise Linearisierung, die in Magenta gezeichnet ist, ist eine Unterschätzung, was auf Basis der Darstellungen in Abschnitt 4.1 als vorteilhaft gegenüber einer Überschätzung angesehen wird. Diese Linearisierung hat in der Nähe um die Konvexifizierungspunkte  $K1,i$  und  $K2,i$  in beide Richtungen die größte Näherungsgenauigkeit und kann zudem über Differentialrechnung leicht ermittelt werden beziehungsweise aus den auf die Hauptachsen transformierten Taylorreihen entnommen werden, sodass die tangentielle stückweise Linearisierung im Folgenden favorisiert wird.

Die Auswahl der als Konvexifizierungspunkte bezeichneten Punkte, in denen die stückweisen Linearisierungen die quadratische Funktion tangieren, hat also Einfluss auf die Abweichungen der Näherungen. In größerer Entfernung können große Lösungsgebiete nur ungenau erfasst werden. Um diesem Problem zu begegnen, werden innerhalb von jedem sequentiellen Schritt der sequentiellen Quadratischen Optimierung die Konvexifizierungen ebenfalls sequentiell

## 5 Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen

durchgeführt, indem die Entwicklungsstellen der Konvexifizierungspunkte dem aktuellen Arbeitspunkt nachgeführt werden (vgl. Gl. (5.19)). Dieses Vorgehen wird im Folgenden als innere sequentielle Konvexifizierung bezeichnet. Es entstehen somit zwei verschachtelte sequentielle Schleifen (vgl. **Bild 1.8**), bestehend aus der sequentiellen Quadratischen Optimierung und der inneren sequentiellen Konvexifizierung.

Da Linearisierungen eine gute Genauigkeit in der Nähe ihrer Entwicklungsstelle haben und es zweckmäßig ist, eine gute Genauigkeit in der Nähe des aktuellen Arbeitspunktes zu haben, bietet sich als Entwicklungsstelle für  $K1,i$  der aktuelle Arbeitspunkt an. Die zweite Entwicklungsstelle  $K2,i$  ergibt sich als negativer Wert von  $K1,i$  bezogen auf die zu konvexifizierende Variable im Koordinatensystem  $\alpha,SY$ . Im ersten Schritt der inneren sequentiellen Konvexifizierung wird für  $K1,i$  der Punkt QA verwendet. In den darauffolgenden Schritten werden jeweils die sich aus der Optimierung ergebenden Werte für  $\Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SYK1,i}^-$  aus Gl. (5.19) benutzt.

$$\Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SYK1,i}^- = -\Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- + \Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha,QAAP}^- + \Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha,APK1,i}^- \quad (5.19)$$

Somit werden für den Funktionsbestandteil  $\Delta t_i^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-)$  in Gl. (5.20) im Folgenden zwei Linearisierungen  $\Delta l_{I,i}^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^-)$  in Gl. (5.21) und  $\Delta l_{II,i}^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,II,i}^-)$  in Gl. (5.22) hergeleitet.

$$\Delta t_i^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-) = \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-)^T \cdot \mathbf{D}_i^- \cdot \Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \quad (5.20)$$

$$\Delta l_{I,i}^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^-) = \mathbf{g}_{\alpha,SY,I,i}^- \cdot \Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^- + k_{I,i} \quad (5.21)$$

$$\Delta l_{II,i}^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,II,i}^-) = \mathbf{g}_{\alpha,SY,II,i}^- \cdot \Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,II,i}^- + k_{II,i} \quad (5.22)$$

Für  $\Delta l_{I,i}^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^-)$  gelten die Gleichheitsbedingungen mit  $\Delta t_i^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-)$  am Punkt  $K1,i$  in Gl. (5.23) für die Funktion und in Gl. (5.24) für den Gradienten. Für  $\Delta l_{II,i}^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,II,i}^-)$  gelten unter Ausnutzung der Symmetrie der quadratischen Funktion in Normallage die Gleichheitsbedingungen mit  $\Delta t_i^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-)$  am Punkt  $K2,i$  in Gl. (5.25) für die Funktion und in Gl. (5.26) für den Gradienten.

$$\Delta l_{I,i}^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^-) \Big|_{\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^- = \Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SYK1,i}^-} = \Delta t_i^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-) \Big|_{\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- = \Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SYK1,i}^-} \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \Delta l_{I,i}^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^-)}{\partial (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^-)^T} \Big|_{\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,I,i}^- = \Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SYK1,i}^-} = \frac{\partial \Delta t_i^- (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-)}{\partial (\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-)^T} \Big|_{\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- = \Delta\Delta\mathbf{x}_{\alpha,SYK1,i}^-} \quad (5.24)$$

## 5 Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen

$$\Delta l_{\text{II},i}^- \left( \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- \right) \Big|_{\Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- = -\Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SYK1},i}^-} = \Delta t_i^- \left( \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY},i}^- \right) \Big|_{\Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY},i}^- = -\Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SYK1},i}^-} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \Delta l_{\text{II},i}^- \left( \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- \right)}{\partial \left( \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- \right)^\text{T}} \Big|_{\Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- = -\Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SYK1},i}^-} = \frac{\partial \Delta t_i^- \left( \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY},i}^- \right)}{\partial \left( \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY},i}^- \right)^\text{T}} \Big|_{\Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY},i}^- = -\Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SYK1},i}^-} \quad (5.26)$$

Aus Gl. (5.24) und (5.26) ergeben sich die Ergebnisse in Gl. (5.27) und (5.28)

$$\mathbf{g}_{\alpha,\text{SY,I},i}^- = \left( \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SYK1},i}^- \right)^\text{T} \cdot \mathbf{D}_i^- \quad (5.27)$$

$$\mathbf{g}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- = - \left( \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SYK1},i}^- \right)^\text{T} \cdot \mathbf{D}_i^- \quad (5.28)$$

Durch Einsetzen der Ergebnisse aus Gl. (5.27) und (5.28) in Gl. (5.23) und (5.25) ergibt sich das Ergebnis in Gl. (5.29).

$$k_{\text{I},i} = k_{\text{II},i} = -\frac{1}{2} \left( \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SYK1},i}^- \right)^\text{T} \cdot \mathbf{D}_i^- \cdot \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SYK1},i}^- \quad (5.29)$$

Für die konvexifizierte Funktion  $\Delta t_{\text{kon},i} \left( \left[ \left( \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,I},i}^- \right)^\text{T} \quad \left( \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- \right)^\text{T} \quad \left( \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY},i}^+ \right)^\text{T} \quad \left( \Delta \mathbf{x}_{\text{AP},i} \right)^\text{T} \right]^\text{T} \right)$

ergibt sich Gl. (5.30) und für die erweiterte Gleichheitsnebenbedingung ergibt sich Gl. (5.31).

Die ODER-Verknüpfung der jeweils zwei Konvexifizierungsvariablen in  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,I},i}^-$  und  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,II},i}^-$  wird über SOS (vgl. Abschnitt 2.2.1) vorgenommen.

$$\Delta t_{\text{kon},i} \left( \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,I},i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY},i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{\text{AP},i} \end{bmatrix} \right) = k_{\text{kon},i} + \mathbf{g}_{\text{kon},i} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^\text{T} \cdot \mathbf{H}_{\text{kon},i} \cdot \Delta \mathbf{x}$$

$$k_{\text{kon},i} = k_{\text{SYAP},i} + k_{\text{I},i} = k_{\text{SYAP},i} + k_{\text{II},i} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{g}_{\text{kon},i} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha,\text{SY,I},i}^- & \mathbf{g}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- & \mathbf{0}_i^+ & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{\text{kon},i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha,\text{SY,I},i}^- & & & \\ & \mathbf{0}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- & & \\ & & \mathbf{D}_i^+ & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\alpha,\text{QA},i}^- & \mathbf{T}_{\alpha,\text{QA},i}^- & \mathbf{T}_{\alpha,\text{QA},i}^+ & -\mathbf{E}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,I},i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY,II},i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,\text{SY},i}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{\text{AP},i} \end{bmatrix} = \mathbf{r} \mathbf{s}_{\text{eq},i} \quad (5.31)$$

Die Anzahl der Zustandsgrößen hat sich durch die Konvexifizierung noch einmal um die Anzahl der negativen Eigenwerte erhöht, da durch die Aufteilung der Hauptachsen, denen ein negativer Eigenwert zugeordnet wird, jeweils zwei Zustandsgrößen notwendig werden.

Die in dieser Arbeit verwendeten Lösungssoftwares CPLEX [5.1] und Gurobi [5.9] bieten fertige Modellierungen stückweiser Linearisierungen an, jedoch Gurobi nur für die Zielfunktion und CPLEX nicht über die MATLAB-Schnittstelle, sodass in dieser Arbeit eine eigene Modellierung vorgenommen wird. Im Allgemeinen werden stückweise Linearisierungen in Optimierungsproblemen mit SOS2-Bedingungen (vgl. Abschnitt 2.2) beschrieben [5.13], [5.14], [5.15]. Bei nur zwei Konvexifizierungen, deren Eckpunkt zudem im Nullpunkt der Variablen liegt, entlang derer die Funktion konvexifiziert wird (die Variable  $\Delta x_{\alpha,SY}$  in **Bild 5.3**), ist es möglich, die stückweise Linearisierung als SOS1-Bedingungen (vgl. Abschnitt 2.2) zu formulieren. Die Verwendung von SOS1-Bedingungen im Vergleich mit SOS2-Bedingungen führt zu einfacher zu lösenden Optimierungsproblemen, da ihre Umsetzung weniger binäre Variablen benötigt. Die Formulierung der SOS1-Bedingungen wird in Abschnitt 6.3.4 beschrieben.

Eine Näherung durch mehr als zwei Linearisierungen je negativem Eigenwert, beispielsweise durch eine weitere Linearisierung mit einem Konvexifizierungspunkt am Schnittpunkt der quadratischen Funktion mit ihrer Hauptachse, würde die Prognosegüte je Schritt der inneren sequentiellen Konvexifizierung erhöhen und möglicherweise weniger Schritte der inneren sequentiellen Konvexifizierung erfordern, jedoch würde die Lösung des ganzzahligen Optimierungsproblems deutlich verlängert werden. Eine diesbezügliche Untersuchung und mögliche Weiterentwicklungen dieser Art bleiben weiteren Untersuchungen vorbehalten (vgl. Kapitel 9).

In den folgenden beiden Abschnitten werden zwei- und dreidimensionale Beispiele dargestellt, um die Durchführung der Konvexifizierung durch stückweise Linearisierungen geometrisch zu interpretieren.

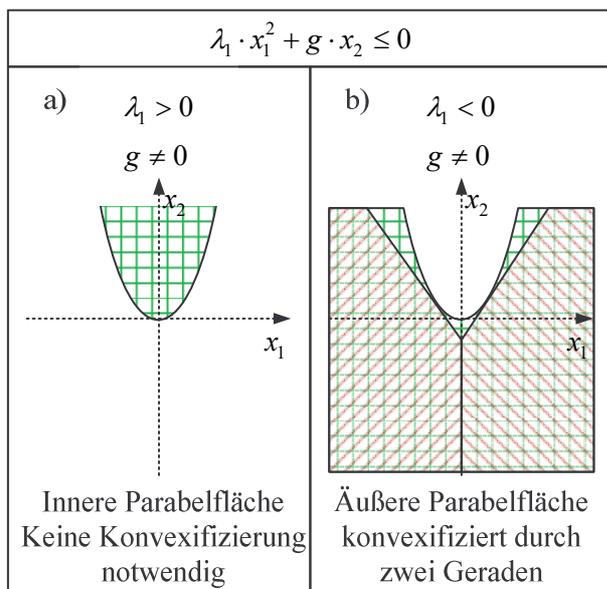
### **5.3.1 Zweidimensionale Beispiele für die Konvexifizierungen nichtkonvexer Funktionsbestandteile**

In den folgenden Bildern werden anhand einiger Beispiele geometrische Interpretationen für die in dem diesem Abschnitt beschriebenen Konvexifizierungen von quadratischen Funktionen dargestellt. Der Vollständigkeit halber werden auch Eigenwertkombinationen angegeben, die keiner Konvexifizierung bedürfen. Entartete Fälle, wie beispielsweise leere Mengen, Nullpunkte oder Geraden und Ebenen, werden nicht dargestellt, da ihr Auftreten im Rahmen dieser

## 5 Identifizierung und Konvexifizierung nichtkonvexer Bestandteile quadratischer Funktionen

Arbeit nicht beobachtet wurde. In den Bildern sind die Lösungsgebiete der quadratischen Funktionen durch rechteckig gekreuzte Flächen kenntlich gemacht. Diese werden durch die schräg gestrichenen Flächen, die sich durch die Konvexifizierungen ergeben, teilweise überdeckt. In den folgenden Beschreibungen wird auf die Darstellungen in Abschnitt 2.2.2 Bezug genommen, aus denen hervor geht, dass ein Lösungsgebiet konvex ist, wenn die zugehörigen Eigenwerte nicht negativ sind beziehungsweise wenn zwei beliebige Punkte innerhalb des Lösungsgebietes durch eine Gerade verbunden werden können und alle Punkte auf dieser Geraden wiederum innerhalb des Lösungsgebietes liegen.

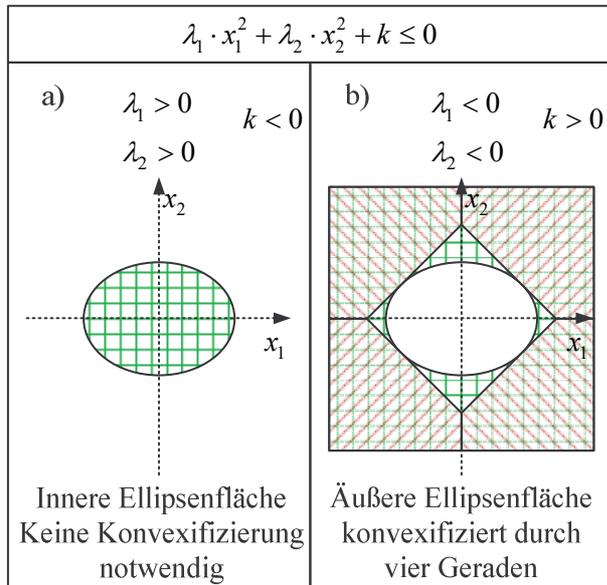
**Bild 5.4** zeigt zwei zweidimensionale Beispiele für quadratische Funktionen, wobei die Funktion linear von einer Variablen und quadratisch von einer weiteren Variablen abhängt. Es ergeben sich somit Parabeln. Der zur quadratischen Variablen gehörige Eigenwert ist in Bild a) positiv und in Bild b) negativ. Für Bild b) sind die entsprechenden Konvexifizierungen ebenfalls eingezeichnet.



**Bild 5.4** Zweidimensionale Beispiele für quadratische Funktionen mit einer linearen und einer quadratischen Variablen mit den entsprechenden Konvexifizierungen

Für das in grünem Gittermuster gezeichnete konvexe Lösungsgebiet innerhalb der Parabel in Bild a) sind keine Konvexifizierungen notwendig. Für das in grünem Gittermuster gezeichnete nichtkonvexe Lösungsgebiet außerhalb der Parabel in Bild b) sind zwei Konvexifizierungen notwendig, die durch die Geraden an die Parabel kenntlich gemacht sind und deren umfasstes Gebiet mit roten schrägen Linien gekennzeichnet ist.

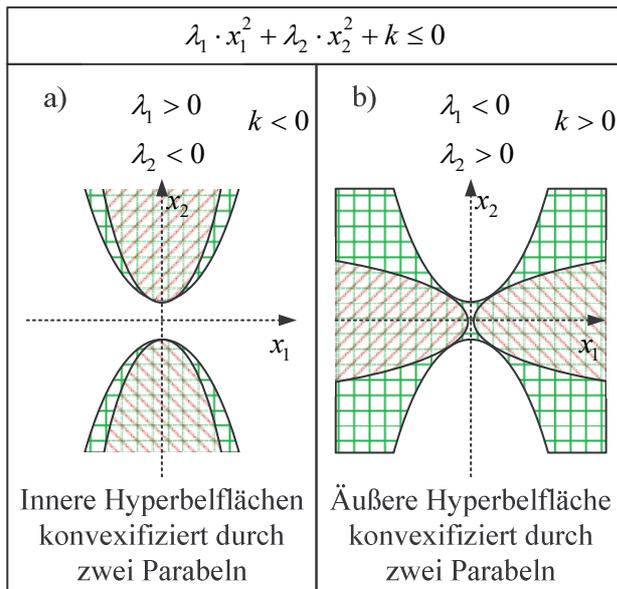
**Bild 5.5** zeigt zwei zweidimensionale Beispiele für quadratische Funktionen, wobei die Funktionen quadratisch von beiden Variablen abhängen und die den Variablen zuzuordnenden Eigenwerte jeweils gleiche Vorzeichen haben. Es ergeben sich somit Ellipsen. Die zu den quadratischen Variablen gehörigen Eigenwerte sind in Bild a) positiv und in Bild b) negativ. Für Bild b) sind die entsprechenden Konvexifizierungen ebenfalls eingezeichnet.



**Bild 5.5** Zweidimensionale Beispiele für quadratische Funktionen mit zwei quadratischen Variablen, deren Eigenwerte gleiche Vorzeichen haben, mit den entsprechenden Konvexifizierungen

Für das in grünem Gittermuster gezeichnete konvexe Lösungsgebiet innerhalb der Ellipse in Bild a) sind keine Konvexifizierungen notwendig. Für das in grünem Gittermuster gezeichnete nichtkonvexe Lösungsgebiet außerhalb der Ellipse in Bild b) sind zwei Konvexifizierungen je Variable mit negativem Eigenwert notwendig, sodass sich vier Konvexifizierungen ergeben, die durch die Geraden an die Ellipse kenntlich gemacht sind und deren umfasstes Gebiet mit roten schrägen Linien gekennzeichnet ist.

**Bild 5.6** zeigt zwei zweidimensionale Beispiele für quadratische Funktionen, wobei die Funktionen quadratisch von beiden Variablen abhängen und die den Variablen zuzuordnenden Eigenwerte jeweils ungleiche Vorzeichen haben. Es ergeben sich somit Hyperbeln. In Bild a) befindet das in grünem Gittermuster gezeichnete nichtkonvexe disjunkte Lösungsgebiet innerhalb der Hyperbeläste, wohingegen sich in Bild b) das in grünem Gittermuster gezeichnete nichtkonvexe Lösungsgebiet außerhalb und zwischen den Hyperbelästen befindet.

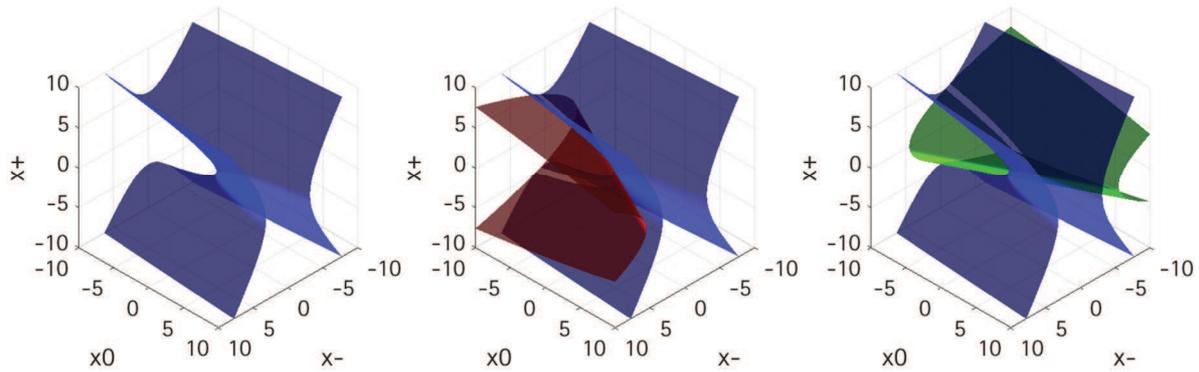


**Bild 5.6** Zweidimensionale Beispiele für quadratische Funktionen mit zwei quadratischen Variablen, deren Eigenwerte ungleiche Vorzeichen haben, mit den entsprechenden Konvexifizierungen

Beide Funktionen müssen konvexifiziert werden, wobei die Funktionen nur in Richtung der jeweiligen Variablen mit negativem Eigenwert konvexifiziert werden müssen. Obwohl die jeweilige Variable durch eine stückweise Linearisierung konvexifiziert wird, ergeben sich jeweils zwei Parabeln als Konvexifizierungen, da in Richtung der Hauptachse, der ein positiver Eigenwert zugeordnet wird, die quadratische Variablenabhängigkeit erhalten bleibt. Es zeigt sich hierbei der Vorteil der Identifikation und Separation der nichtkonvexen Funktionsbestandteile durch die Hauptachsentransformationen, da auf diesem Weg die konvexen quadratischen Nichtlinearitäten weiterhin berücksichtigt werden können.

### 5.3.2 Dreidimensionales Beispiel für die Konvexifizierung eines nichtkonvexen Funktionsbestandteils

Für eine dreidimensionale Darstellung einer Konvexifizierung auf Basis einer stückweisen Linearisierung in Richtung der Hauptachse mit negativem Eigenwert mit zwei Stücken bietet sich ein Beispiel an, das einen negativen und positiven Eigenwert sowie einen Nulleigenwert enthält. Es ergibt sich mit dieser Eigenwertkombination ein Hyperbolisches Paraboloid, welches auch als Sattelfläche bezeichnet wird. In **Bild 5.7** sind ein solches Hyperbolisches Paraboloid und seine Konvexifizierungen dargestellt.



**Bild 5.7** Hyperbolisches Paraboloid (Sattelfläche) im Koordinatensystem der Hauptachsen mit zwei anliegenden Konvexifizierungen (rot und grün)

Das von dem Hyperbolischen Paraboloid begrenzte Lösungsgebiet liegt, bezogen auf die  $x^-$ -Achse, links und rechts des Hyperbolischen Paraboloiden. Die Funktion muss entlang der  $x^-$ -Achse konvexifiziert werden, sodass durch stückweise Linearisierung die beiden konvexifizierten Teilstücke entstehen. Jedes konvexifizierte Teilstück bildet einen Parabolischen Zylinder, der für sich alleine genommen ein konvexes Lösungsgebiet begrenzt. Die Quadratische Abhängigkeit in Richtung der  $x^+$ -Achse bleibt somit auch in diesem Beispiel nach der Konvexifizierung bestehen. Es zeigt sich auch in diesem Beispiel der Vorteil der Identifikation und Separation der nichtkonvexen quadratischen Funktionsbestandteile durch die Hauptachsentransformationen, da auf diesem Weg die konvexen quadratischen Nichtlinearitäten weiterhin berücksichtigt werden können.



## 6 Zusammenstellen des Optimierungsproblems

Die Netzgleichungen für die Zielfunktion und die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems wurden auf Basis von Kapitel 2 und 3 in Kapitel 4 durch nichtkonvexe quadratische Näherungen modelliert. In Kapitel 5 wurden diese Näherungen dann konvexifiziert. In diesem Kapitel wird die Modellierung für unterschiedliche Kosten von positiven und negativen Leistungsänderungen vorgenommen, und es werden die Zielfunktion sowie alle Nebenbedingungen zusammengestellt.

Das Optimierungsproblem in dieser Arbeit unterscheidet sich vom Optimal Dispatch Problem (vgl. Abschnitt 2.3), welchem noch kein Kraftwerkseinsatz zugrunde liegt. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass der Kraftwerkseinsatz durch den Strommarkt bereits bestimmt worden ist (Dispatch) und Änderungen des „marktoptimalen“ Kraftwerkseinsatzes durch den Übertragungsnetzbetreiber nur aufgrund der Verletzung von Netzrestriktionen erfolgen können (Redispatch). Das Optimierungsproblem baut auf einer konvergenten initialen Leistungsflussberechnung auf, wie sie in Abschnitt 3.3 beschrieben wurde. Es wird daher im Folgenden immer die Änderung ausgehend von dem vorgenannten Zustand betrachtet.

Zunächst wird in Abschnitt 6.1 der Zustandsvektor, der bisher aus Wirk- und Blindleistungsänderungen bestand, in positive und negative Wirkleistungsänderungen aufgeteilt. Des Weiteren werden die zusätzlichen Zustandsgrößen für die Koordinatentransformation aus Kapitel 5 dem Zustandsvektor hinzugefügt. In Abschnitt 6.2 wird darauf aufbauend die Zielfunktion mit ihren verschiedenen Kostenanteilen aufgestellt. In Abschnitt 6.3 werden dann die Nebenbedingungen aufgestellt, die aus den Aussteuergrenzen für alle Zustandsgrößen, einer linearen Gleichheitsnebenbedingung zur Sicherstellung der Wirkleistungsbilanz des Netzes, den Transformationsbedingungen aus Kapitel 5, den konvexifizierten quadratischen Nebenbedingungen für Strom- und Spannungsgrenzwerte sowie den für die Konvexifizierung notwendigen SOS1 bestehen. In Abschnitt 6.4 wird für das zusammengestellte Optimierungsproblem eine Methode vorgestellt, um verbesserte Startwerte für das Optimierungsproblem, im Speziellen für die SOS1-Bedingungen, zu erhalten, die eine erhebliche Beschleunigung der Lösung bewirken.

### 6.1 Zusammenstellen des Zustandsvektors

Der Zustandsvektor  $\Delta \mathbf{x}$  in Gl. (6.1) besteht zunächst nur aus den Änderungen der Knotenwirkleistungen und der Knotenblindleistungen.

$$\Delta \mathbf{x}_{\text{PQ}} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_{\text{K}} \\ \Delta \mathbf{q}_{\text{K}} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

In Anlehnung an den Beschluss der Bundesnetzagentur BK8-12-019 [6.1], der Kriterien für die Bestimmung einer angemessenen Vergütung bei strombedingten Redispatchmaßnahmen und bei spannungsbedingten Anpassungen der Wirkleistungseinspeisung festlegt, wird auch in dieser Arbeit zwischen positiven und negativen Leistungsänderungen unterschieden. Obwohl der vorgenannte Beschluss mit dem Beschluss BK8-12-019-A [6.2] wieder aufgehoben worden ist, wird eine Aufteilung in positive und negative Wirkleistungsänderungen weiterhin als sachgerecht angesehen. Den somit erweiterten Zustandsvektor zeigt Gl. (6.2)

$$\Delta \mathbf{x}_{\pm \text{PQ}} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_{\text{K}}^{\text{neg}} \\ \Delta \mathbf{p}_{\text{K}}^{\text{pos}} \\ \Delta \mathbf{q}_{\text{K}} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

In Kapitel 5 wurden für die Hauptachsentransformation und die Konvexifizierung einer quadratischen Funktion weitere Zustandsgrößen eingeführt. Für das Optimierungsproblem müssen diese zusätzlichen Zustandsgrößen für die Zielfunktion (zf) und jede quadratische Nebenbedingung (qnb) eingeführt werden. Um diese muss der Zustandsvektor erweitert werden, sodass sich der Zustandsvektor  $\Delta \mathbf{x}$  und seine Unterkomponenten in Gl. (6.3) ergeben.

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{\pm \text{PQ}} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}}^- = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}, \text{zf}}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}, \text{I}}^- \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}, \text{i}}^- \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}, \text{qnb}}^- \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}}^- = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}, \text{zf}}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}, \text{I}}^- \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}, \text{i}}^- \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}, \text{qnb}}^- \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}}^+ = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{zf}}^+ \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}}^+ \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{i}}^+ \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha, \text{SY}, \text{qnb}}^+ \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Da für jede Konvexifizierung und somit für jeden negativen Eigenwert der Zielfunktion oder einer quadratischen Nebenbedingung zwei zusätzliche Zustandsgrößen entstehen, werden der Zustandsvektor und damit die Vektoren und Matrizen der Zielfunktion und der Nebenbedingungen sehr groß. Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird, sind die Vektoren und Matrizen nur an wenigen Positionen und somit spärlich besetzt, sodass sie keinen hohen Speicherbedarf haben.

## 6.2 Aufstellen der Zielfunktion

Die Zielfunktion der Optimierung soll in dieser Arbeit sowohl die Kostenänderung durch Redispatch  $\Delta C_{\text{Redispatch}}(\Delta \mathbf{x})$  als auch die Kostenänderung durch Netzverluständerung  $\Delta C_{\text{V}}(\Delta \mathbf{x})$

bei der Minimierung berücksichtigen. Hierzu werden beide Kostenänderungen in einer gemeinsamen Zielfunktion  $\Delta ZF(\Delta \mathbf{x})$  in Gl. (6.4) berücksichtigt.

$$\Delta ZF(\Delta \mathbf{x}) = \Delta C_{\text{Redispatch}}(\Delta \mathbf{x}) + \Delta C_{\text{V}}(\Delta \mathbf{x}) \quad (6.4)$$

Für die Kosten für Redispatch  $\Delta C_{\text{Redispatch}}(\Delta \mathbf{x})$  wird in dieser Arbeit kein Marktmodell hinterlegt, sondern angenommen, dass Redispatchkosten für die Änderung von Blindleistungsbereitstellungen Null und für positive und negative Wirkleistungsänderungen Eins beziehungsweise Minuseins sind. In dieser Arbeit wird somit eine Minimierung des Wirkleistungseinsatzes durchgeführt. Für Blindleistungsänderungen werden in dieser Arbeit nur „indirekte Kosten“, die sich durch die bewirkte Änderung der Wirkleistungsverluste ergeben, berücksichtigt. Mögliche zukünftige Vergütungsmodelle für Blindleistung werden in [6.3] untersucht. Gl. (6.5) zeigt die Kostenfunktion  $\Delta C_{\text{Redispatch}}(\Delta \mathbf{x})$ . Die in dieser Arbeit gewählte Modellierung erlaubt im Rahmen von Weiterentwicklungen auch nichtlineare und stückweise Kostenfunktionen (vgl. Kapitel 9).

$$\Delta C_{\text{Redispatch}}(\Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}}^- & \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}}^- & \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}}^+ & -\mathbf{1}_{\text{K}} & \mathbf{1}_{\text{K}} & \mathbf{0}_{\text{K}} \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (6.5)$$

Für die Netzverluste wird in dieser Arbeit angenommen, dass sie dieselben Kosten haben wie positive Wirkleistungsänderungen. Die Kostenänderung für Netzverluständerungen  $\Delta C_{\text{V}}(\Delta \mathbf{x})$  werden als quadratische Funktion in Gl. (6.6) beschrieben.

$$\Delta C_{\text{V}}(\Delta \mathbf{x}) = k_{\text{V}} + \mathbf{g}_{\text{V}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^{\text{T}} \cdot \mathbf{H}_{\text{V}} \cdot \Delta \mathbf{x} \quad (6.6)$$

Die Gln. (6.7), (6.8) und (6.9) zeigen die Zusammensetzung des konstanten Anteils  $k_{\text{V}}$ , des Gradienten der Netzverluste  $\mathbf{g}_{\text{V}}$  und der blockdiagonalen Hessematrix der Netzverluste  $\mathbf{H}_{\text{V}}$ .

$$k_{\text{V}} = k_{\text{kon}, \text{V}} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\text{V}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\text{I}, \text{V}}^- & \mathbf{g}_{\text{II}, \text{V}}^- & \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}}^+ & \mathbf{0}_{\text{K}} & \mathbf{0}_{\text{K}} & \mathbf{0}_{\text{K}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}_{\text{I}, \text{V}}^- &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}, \text{V}}^- & \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}, 1}^- & \cdots & \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}, i}^- & \cdots & \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}, \text{I}, \text{qnb}}^- \end{bmatrix} \\ \mathbf{g}_{\text{II}, \text{V}}^- &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}, \text{V}}^- & \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}, 1}^- & \cdots & \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}, i}^- & \cdots & \mathbf{0}_{\alpha, \text{SY}, \text{II}, \text{qnb}}^- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.8)$$



### 6.3.1 Aussteuergrenzen der Zustandsgrößen

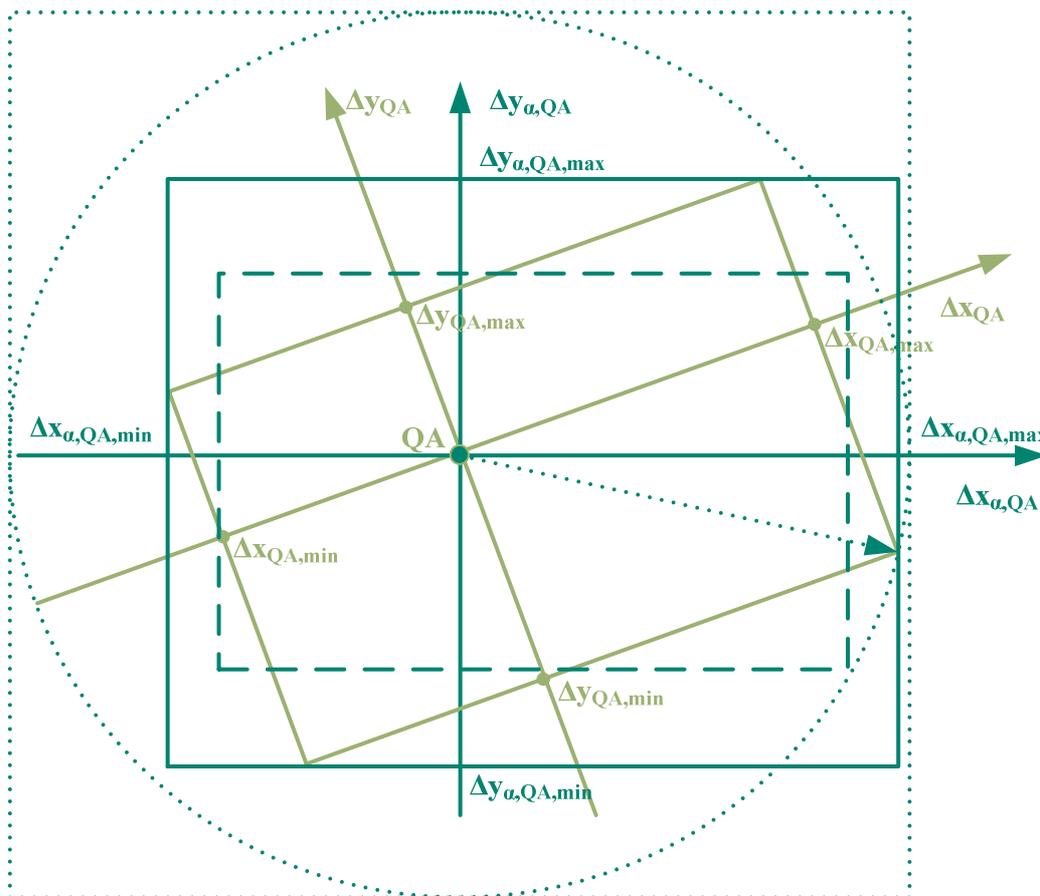
Der Zustandsvektor in Gl. (6.3) besteht aus sieben Komponenten. Die Aussteuergrenzen der Leistungen in Gl. (6.10) können als Eingangsdaten und damit als bekannt angenommen werden.

$$\begin{aligned}\Delta p_{K,\min} &\leq \Delta p_K \leq \Delta p_{K,\max} \\ \Delta q_{K,\min} &\leq \Delta q_K \leq \Delta q_{K,\max}\end{aligned}\quad (6.10)$$

Aus Gl. (6.10) ergeben sich ebenfalls die Aussteuergrenzen für die negativen Wirkleistungsänderungen  $\Delta p_K^{\text{neg}}$  und die positiven Wirkleistungsänderungen  $\Delta p_K^{\text{pos}}$  in Gl. (6.11).

$$\begin{aligned}\Delta p_{K,\min} &\leq \Delta p_K^{\text{neg}} \leq \mathbf{0}_K \\ \mathbf{0}_K &\leq \Delta p_K^{\text{pos}} \leq \Delta p_{K,\max}\end{aligned}\quad (6.11)$$

Für die gedrehten und mit  $\alpha$  indizierten Zustandsgrößen zeigt **Bild 6.1** den Zusammenhang der Aussteuergrenzen im gedrehten Koordinatensystem mit den Aussteuergrenzen im ungedrehten Koordinatensystem.



**Bild 6.1** Zusammenhang zwischen den Aussteuergrenzen im ungedrehten (QA) und gedrehten ( $\alpha,QA$ ) Koordinatensystem

Die Aussteuergrenzen im ungedrehten Koordinatensystem begrenzen ein Rechteck, dessen Kanten parallel zu den zugehörigen Achsen verlaufen (hellgrünes Rechteck). Um die Aussteuergrenzen im gedrehten Koordinatensystem zu berechnen, genügt es nicht, das Begrenzungsrechteck ebenfalls zu drehen, da Teile des zulässigen Lösungsgebietes abgeschnitten würden (dunkel grün gestricheltes Rechteck). Einen einfachen Weg Aussteuergrenzen für die gedrehten Zustandsgrößen zu bestimmen, die keinen Teil des zulässigen Lösungsgebietes abschneiden, bietet der Kreis mit dem Radius gleich der Länge des längsten Vektors, der zu einer Ecke führt (dunkelgrün gepunktet). Der Radius dieses Kreises ist der Betrag aller Aussteuergrenzen der gedrehten Zustandsgrößen und kann mit Gl. (6.12) berechnet werden.

$$r = \left\| \begin{bmatrix} \max(\Delta x_{QA,max}, -\Delta x_{QA,min}) \\ \max(\Delta y_{QA,max}, -\Delta y_{QA,min}) \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\Delta x_{QA,max}^2 + \Delta y_{QA,min}^2} \quad (6.12)$$

Da Aussteuergrenzen immer ein Rechteck, dessen Kanten parallel zu den zugehörigen Achsen verlaufen, bilden, ergibt sich auf Basis von Gl. (6.12) ein Begrenzungsquadrat (dunkelgrün gepunktet), welches das ursprüngliche Lösungsgebiet deutlich überschätzt. Das Endergebnis der Optimierung würde hierdurch nicht beeinflusst, da die Aussteuergrenzen der ungedrehten Zustandsgrößen das Lösungsgebiet weiterhin wirksam begrenzen. Für die zeitgerechte Lösung des Optimierungsproblems ist es vorteilhaft, möglichst große Teile des Lösungsgebietes abschneiden zu können, sodass die kleinstmöglichen Aussteuergrenzen der Zustandsgrößen in gedrehten Koordinaten bestimmen werden sollten. In vielen Fällen ergibt sich schon in der Vorverarbeitung (preprocessing), dass jeweils ein Teilstück der stückweisen Linearisierung im Rahmen der inneren sequentiellen Konvexifizierung außerhalb der zulässigen Aussteuergrenzen liegt, sodass gar nicht mehr stückweise linearisiert werden muss, sondern eine Linearisierung ausreicht und somit binäre Entscheidungsvariablen entfallen können.

Es ist daher zielführend, die minimalen und maximalen Aussteuergrenzen der gedrehten Koordinaten an den Ecken des Rechtecks zu bestimmen und anhand dieser Aussteuergrenzen ein neues Begrenzungsrechteck im gedrehten Koordinatensystem zu erstellen (dunkelgrün). Im zweidimensionalen Beispiel in **Bild 6.1** sind die Minimal- und Maximalwerte im gedrehten Koordinatensystem der vier Eckpunkte des ungedrehten Begrenzungsrechtecks direkt zu bestimmen. Bei höherdimensionalen Problemen sind sie die Lösungen linearer Optimierungsprobleme, einmal einer Minimierung und einmal einer Maximierung. Gl. (6.13) zeigt die beiden linearen Optimierungsprobleme auf Basis von Gl. (2.25).

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{\alpha,QA,j,i,\min} &= \min \left( \mathbf{t}_{Kj,i}^T \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix} \right) & \Delta x_{\alpha,QA,j,i,\max} &= \max \left( \mathbf{t}_{Kj,i}^T \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}_K \\ \Delta \mathbf{q}_K \end{bmatrix} \right) \\
 \Delta \mathbf{p}_{K,\min} &\leq \Delta \mathbf{p}_K \leq \Delta \mathbf{p}_{K,\max} & \Delta \mathbf{p}_{K,\min} &\leq \Delta \mathbf{p}_K \leq \Delta \mathbf{p}_{K,\max} \\
 \Delta \mathbf{q}_{K,\min} &\leq \Delta \mathbf{q}_K \leq \Delta \mathbf{q}_{K,\max} & \Delta \mathbf{q}_{K,\min} &\leq \Delta \mathbf{q}_K \leq \Delta \mathbf{q}_{K,\max}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

In Gl. (6.13) ist  $\mathbf{t}_{Kj,i}$  die  $j$ -te Spalte der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_i$  aus Gl. (5.2). Auch wenn die beiden linearen Optimierungsprobleme in Gl. (6.13) schnell gelöst werden können, ist die Lösung für jede gedrehte Zustandsgröße notwendig, sodass sich ein für die Gesamtzeit relevanter Rechenaufwand ergibt. Da die linearen Optimierungsprobleme aber unabhängig voneinander sind, können sie parallelisiert werden.

Die auf dem zuvor beschriebenen Weg ermittelten Aussteuergrenzen  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,\min}$  und  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,\max}$  für alle gedrehten Zustandsgrößen  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,i}$  müssen mit Hilfe der Umformungen in Gl. (6.14) noch in den jeweiligen Arbeitspunkt SY, $i$  verschoben werden (vgl. Abschnitt 5.2).

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,\min} &\leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA} \leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,\max} \\
 \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,\min} &\leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY} + \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY} \leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,\max} \\
 \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,\min} - \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY} &\leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY} \leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QA,\max} - \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY} \\
 \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\min} &\leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY} \leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\max}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Die Zusammensetzung des Vektors  $\Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY}$  zeigt Gl. (6.15).

$$\Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY} = \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,zf} \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,I} \\ \vdots \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i} \\ \vdots \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,qnb} \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

Die zu konvexifizierenden Variablen  $\Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^-$  müssen zudem noch am Nullpunkt des Koordinatensystems SY, $i$  aufgeteilt werden (vgl. Abschnitt 5.3). Gl. (6.16) zeigt diese Aufteilung.

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\min}^- &\leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY}^- \leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\max}^- \\
 \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\min}^- &\leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,I}^- \leq \mathbf{0}_{\alpha,SY,\min}^- \\
 \mathbf{0}_{\alpha,SY,\min}^- &\leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,II}^- \leq \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\max}^-
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Zusammenfassend ergeben sich die Aussteuergrenzen  $lb$  und  $ub$  in Gl. (6.17) nach Sortierung der Aussteuergrenzen entsprechend der Anordnung der Zustandsgrößen im Zustandsvektor  $\Delta x$ .

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{lb} \leq \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{ub} \\
 & \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\min}^- \\ \mathbf{0}_{\alpha,SY,\min}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\min}^+ \\ \Delta p_{K,\min} \\ \mathbf{0}_K \\ \Delta q_{K,\min} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,I}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,II}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY}^+ \\ \Delta p_K^{\text{neg}} \\ \Delta p_K^{\text{pos}} \\ \Delta q_K \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha,SY,\min}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\max}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,\max}^+ \\ \mathbf{0}_K \\ \Delta p_{K,\max} \\ \Delta q_{K,\max} \end{bmatrix} \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

### 6.3.2 Lineare Gleichheitsnebenbedingungen für die Wirkleistungsbilanz des Netzes und die Transformationsbedingungen der Zustandsgrößen

Da ein Redispatch immer neutral bezüglich der Wirkleistungsbilanz sein muss, ist eine lineare Gleichheitsnebenbedingung notwendig, welche diese Wirkleistungsbilanz sicherstellt. Andernfalls würde die Wirkleistungsbilanz durch Regelleistung beziehungsweise im Netzmodell dieser Arbeit durch den Verteilten Slack (vgl. Abschnitt 3.2.5) hergestellt werden. Gl. (6.18) zeigt die lineare Gleichheitsnebenbedingung für die Wirkleistungsbilanz des Netzes.

$$\mathbf{a}_{\text{eq},B} \cdot \Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha,SY,I}^- & \mathbf{0}_{\alpha,SY,II}^- & \mathbf{0}_{\alpha,SY}^+ & \mathbf{1}_K & \mathbf{1}_K & \mathbf{0}_K \end{bmatrix} \cdot \Delta \mathbf{x} = 0 \quad (6.18)$$

Die Blindleistungsbilanz wird in dieser Arbeit durch sich verändernde Spannungswerte und Leistungsflüsse (vgl. Abschnitt 3.2.5.3) hergestellt. Die sich hierdurch verändernden Wirkleistungsverluste werden vom Verteilten Slack ausgeglichen. Es bedarf also keiner weiteren Maßnahmen zur Sicherstellung der Blindleistungsbilanz.

In Kapitel 5 wurden in Gl. (5.31) die zu einer konvexifizierten Funktion  $\Delta t_{\text{kon},i}$  zugehörigen Transformationsbedingungen hergeleitet. Unter Berücksichtigung des vollständigen Zustandsvektors aus Abschnitt 6.1 ergibt sich in Gl. (6.19) die Matrix  $\mathbf{A}_{\text{eq},i}$  für die Transformationsbedingung einer Funktion  $\Delta t_{\text{kon},i}$ .

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A}_{\text{eq},i} \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{rs}_{\text{eq},i} \\
 & \mathbf{A}_{\text{eq},i} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_i^- & \mathbf{T}_i^- & \mathbf{T}_i^+ & -\begin{bmatrix} \mathbf{E}_K \\ \mathbf{0}_K \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \mathbf{E}_K \\ \mathbf{0}_K \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \mathbf{0}_K \\ \mathbf{E}_K \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 & \mathbf{T}_i^- = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha,QA,1}^- & \cdots & \mathbf{T}_{\alpha,QA,i}^- & \cdots & \mathbf{0}_{\alpha,QA,qnb}^- \end{bmatrix} \\
 & \mathbf{T}_i^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha,QA,1}^- & \cdots & \mathbf{T}_{\alpha,QA,i}^+ & \cdots & \mathbf{0}_{\alpha,QA,qnb}^- \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (6.19)$$



$$\mathbf{g}_{\text{kon},i} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{1,i}^- & \mathbf{g}_{\text{II},i}^- & \mathbf{0}_{\alpha,\text{SY}}^+ & \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K & \mathbf{0}_K \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{1,i}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha,\text{SY},\text{I},\text{V}}^- & \mathbf{0}_{\alpha,\text{SY},\text{I},\text{I}}^- & \cdots & \mathbf{g}_{\alpha,\text{SY},\text{I},i}^- & \cdots & \mathbf{0}_{\alpha,\text{SY},\text{I},\text{qnb}}^- \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

$$\mathbf{g}_{\text{II},i}^- = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\alpha,\text{SY},\text{II},\text{V}}^- & \mathbf{0}_{\alpha,\text{SY},\text{II},\text{I}}^- & \cdots & \mathbf{g}_{\alpha,\text{SY},\text{II},i}^- & \cdots & \mathbf{0}_{\alpha,\text{SY},\text{II},\text{qnb}}^- \end{bmatrix}$$

$$k_i = -k_{\text{kon},i} \quad (6.24)$$

Nach dem Zusammenstellen aller quadratischen Nebenbedingungen ergibt sich Gl. (6.25) für alle quadratischen Nebenbedingungen mit  $k_{\text{kon}}$  aus Gl. (6.26),  $\mathbf{G}_{\text{kon}}$  aus Gl. (6.27), und  $\{\mathbf{H}_{\text{kon}}\}$  aus Gl. (6.28).

$$\mathbf{G}_{\text{kon}} \cdot \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T \otimes \{\mathbf{H}_{\text{kon}}\} \otimes \Delta \mathbf{x} \leq \mathbf{k} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_i \\ \vdots \\ k_{\text{qnb}} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$\mathbf{G}_{\text{kon}} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\text{kon},1} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{\text{kon},i} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{\text{kon},\text{qnb}} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$\{\mathbf{H}_{\text{kon}}\} = \{\mathbf{H}_{\text{kon},1} \mid \cdots \mid \mathbf{H}_{\text{kon},i} \mid \cdots \mid \mathbf{H}_{\text{kon},\text{qnb}}\} \quad (6.28)$$

### 6.3.4 Special-Ordered-Sets vom Typ 1 (SOS1)

Als weitere Nebenbedingung der Optimierung muss berücksichtigt werden, dass maximal jeweils eine der Konvexifizierungsvariablen  $\Delta x_{\alpha,\text{SY},\text{I},i}^-$  oder  $\Delta x_{\alpha,\text{SY},\text{II},i}^-$  ungleich Null sein darf. Hierzu wird für jede SOS1-Bedingung  $\text{SOS}_i$  ein Vektor  $\text{sos.ind}_i$  auf Basis von Gl. (6.29) berücksichtigt, der die Variablenindizes der zur jeweiligen SOS1-Bedingung gehörenden Variablen enthält. Die Variable  $\text{AnzEWneg}$  enthält die Anzahl der insgesamt vorhandenen negativen Eigenwerte.

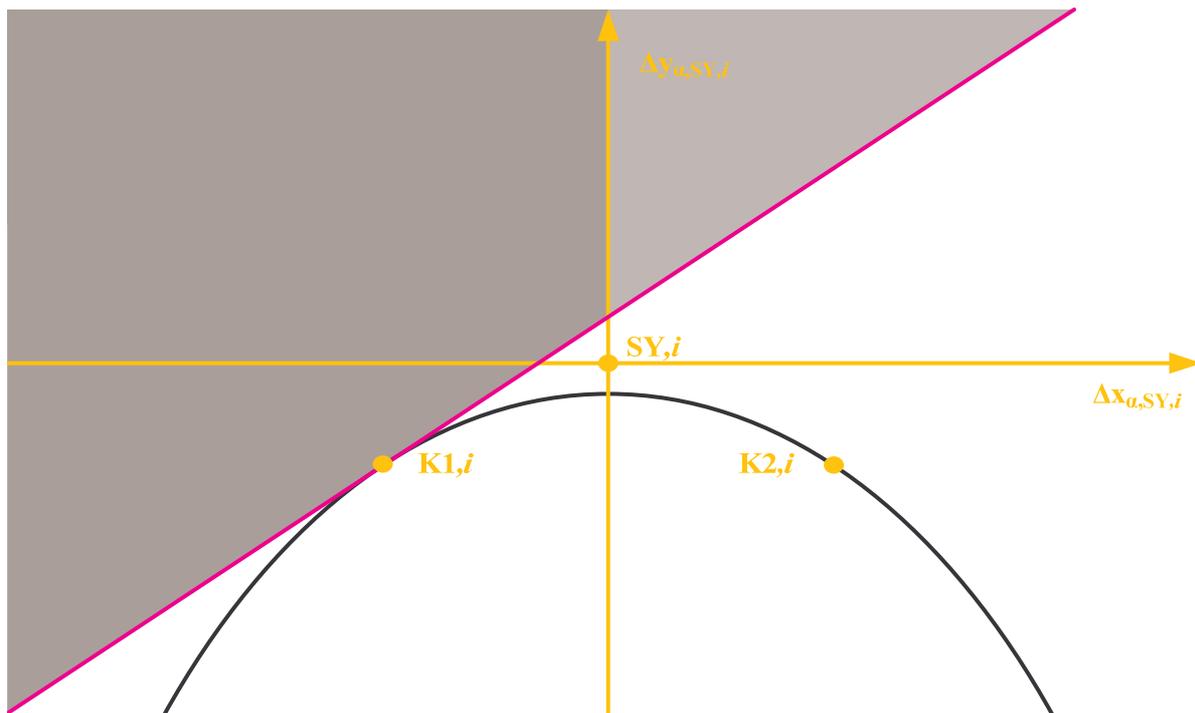
$$\text{sos.ind}_i = \begin{bmatrix} i \\ i + \text{AnzEWneg} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Des Weiteren kann optional ein Gewichtungsfaktor  $sos.wt_i$  auf Basis von Gl. (6.30) angegeben werden, der die Information enthält, welche der beiden Konvexifizierungsvariablen im Rahmen der Lösungssuche vorrangig überprüft werden soll. In dieser Arbeit wird der Konvexifizierung an der Stelle K1 (vgl. **Bild 5.3**) immer ein höheres Gewicht gegeben, da es wahrscheinlich ist, dass die auszuwählende Konvexifizierung diejenige ist, in der auch der aktuelle Konvexifizierungspunkt liegt.

$$sos.wt_i = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

## 6.4 Startwertermittlung

Durch die stückweisen Linearisierungen und die hierfür notwendigen SOS1-Bedingungen wird das Problem zu einem gemischt-ganzzahligen Optimierungsproblem, welches im Allgemeinen nur in nicht-polynomieller Zeit gelöst werden kann, was bei größer werdenden Beispielen mit zunehmender Anzahl von SOS1-Bedingungen zu nicht mehr akzeptablen Lösungszeiten führt. Mit Hilfe guter Startwerte für die ganzzahligen Entscheidungen, kann die Lösungszeit deutlich verringert werden. Im Folgenden wird ein Ansatz zur Bestimmung von guten Startwerten beschrieben, indem die nichtkonvexen Funktionsbestandteile nur durch eine Linearisierung konvexifiziert werden. **Bild 5.3** zeigt in Magenta gezeichnet die in dieser Arbeit verwendeten stückweisen von den Punkten K1 und K2 ausgehenden Linearisierungen und in dunkelgrau und hellgrau die Lösungsgebiete, die von jeweils einer der beiden Linearisierungen begrenzt werden. **Bild 6.2** zeigt das Lösungsgebiet, das sich ergibt, wenn nur die Linearisierung ausgehend vom Punkt K1 benutzt wird.



**Bild 6.2** Lösungsgebiet zur Startwertermittlung mit nur einer Linearisierung

Der Teil des Lösungsgebietes, der von der Linearisierung für Werte  $\Delta x_{\alpha, SY, i}^- > 0$  mit umfasst wird, ist in hellgrau hervorgehoben. Somit wird der Teil des Lösungsgebietes, der in **Bild 5.3** eigentlich von der zweiten stückweisen Linearisierung ausgehend vom Punkt K2 umfasst wird, durch die eine Linearisierung in **Bild 6.2** ausgehend vom Punkt K1 teilweise mit umfasst. Es handelt sich hierbei um eine Unterschätzung des Lösungsgebietes, sodass die Näherung immer eine zulässige Lösung liefert (vgl. Abschnitt 4.1).

Das Optimierungsproblem, welches mit nur jeweils einer Linearisierung aufgestellt wird, enthält keine SOS1-Bedingungen mehr und kann daher schneller gelöst werden. Aus der Lösung kann abgelesen werden, ob das gefundene Optimum bezüglich der beiden Linearisierungen in **Bild 5.3** im Lösungsgebiet der Linearisierung ausgehend vom Punkt K1 (dunkelgraue Fläche) oder im Lösungsgebiet der Linearisierung ausgehend von Punkt K2 (hellgraue Fläche) liegt. Diese Information kann für Startwerte für das Optimierungsproblem mit SOS1-Bedingungen benutzt werden. Die Ausarbeitungen für diese Arbeit haben gezeigt, dass das vereinfachte Optimierungsproblem zwar noch nicht das globale Optimum findet, da das Lösungsgebiet umfangreich beschnitten wird, allerdings sehr gute Startwerte für die SOS1-Bedingungen findet, sodass sich die Entscheidung, welche der stückweisen Linearisierung benutzt werden soll, in fast allen Fällen schon aus der vereinfachten Optimierung ergibt.

## 7 Fallstudien

Im Rahmen der Fallstudien dieser Arbeit werden verschiedene Aspekte des entwickelten Modellierungs- und Lösungsansatzes erprobt und bewertet:

- Wie hoch sind die Prognosefehler<sup>20</sup> des gewählten Modellierungs- und Lösungsansatzes von den Ergebnissen einer der Optimierung folgenden Leistungsflussberechnung?
- Liefert der Optimierungsansatz mindestens gleichwertige oder bessere Ergebnisse als vergleichbare Ansätze?
  - Welche Vorteile ergeben sich im Speziellen durch die quadratische Modellierung der Nebenbedingungen im Vergleich mit einer linearen Modellierung?
  - Welche Vorteile ergeben sich durch die Kombination der Netzverlustoptimierung mit der Redispatch-Optimierung?

In Abschnitt 7.1 wird zunächst der für die Fallstudien verwendete Datensatz und der verwendete Berechnungsserver beschrieben. Die Prognosefehler des gewählten Modellierungsansatzes werden in Abschnitt 7.2 ermittelt. Hierzu werden die während der Optimierung prognostizierten Werte für die Netzverluste, sowie für die Beträge der Knotenspannungen und Zweigströme mit denen in einer Leistungsflussberechnung, die als Eingangsgrößen die in der Optimierung ermittelten Leistungen verwendet, ermittelten Größen verglichen. In Abschnitt 7.3 werden die Ergebnisse von Optimierungen mit linearen Nebenbedingungen mit denen von Optimierungen mit quadratischen Nebenbedingungen verglichen. Die Vorteile einer Kombination der Netzverlustoptimierung und einer Redispatch-Optimierung werden in Abschnitt 7.4 dargestellt.

### 7.1 Datensatz und Berechnungsserver für die Fallstudien

Die Fallstudien in dieser Arbeit werden mit dem Datensatz aus [7.1] durchgeführt, der im Rahmen eines Verbundprojektes [7.2] entstanden ist. Er ist an die heutigen Verhältnisse im europäischen Verbundnetz angepasst, und basiert auf dem IEEE-118-Knoten-Netz [7.3]. Die Auswahl dieses Datensatzes für die Fallstudien erfolgte, weil für jede Stunde eines Jahres validierte Leistungsflussszenarien verfügbar sind, deren Kraftwerkseinsatz bereits das Ergebnis eines modifizierten Optimal Power Flows ist [7.4]. **Bild 7.1** zeigt die Netztopologie des verwendeten Datensatzes.

---

<sup>20</sup> Der Begriff Prognose wird in dieser Arbeit für die Vorhersage der linearen und quadratischen Näherungen eines neuen, durch Redispatch zu erreichenden, Netzzustands verwendet.



Prognosefehler erlauben, und damit sich Unterschiede bei Optimierung mit linearen und quadratischen Nebenbedingungen, die erst bei großen Änderungen zu erwarten sind, zeigen. Im Rahmen der (n-1)-Ausfallsimulationen werden nur die Betriebsmittel, deren Auslastung im (n-0)-Fall über 50 % liegt, berücksichtigt, da als worst-case der Ausfall eines parallelen Systems (ohne weitere parallele Zweige) angenommen wird. Es zeigt sich für den im Folgenden in allen Fallstudien beispielhaft ausgewerteten Zeitpunkt  $t=1$ , dass nur 14 von 321 möglichen Ausfallsimulationen durchgeführt werden müssen und hierbei 19 Engpässe mit einer Überschreitung der Stromtragfähigkeit um bis zu 14,36 % auftreten. In den untersuchten (n-1)-Fällen kommt es zu keinen Verletzungen des Spannungsbandes. Für das Optimierungsproblem ergeben sich 3.546 quadratische Nebenbedingungen für die Strom- und Spannungsgrenzwerte aus dem (n-0)-Fall und allen (n-1)-Fällen. Diese quadratischen Nebenbedingungen enthalten 95.395 negative Eigenwerte, für die entsprechend der in Kapitel 5 beschriebenen Konvexifizierung jeweils eine SOS1-Bedingung vorzusehen ist, die das Problem gemischt-ganzzahlig werden lässt.

Die Fallstudien wurden auf einem Server des Fachgebiets Elektrische Energieversorgung des Instituts für Elektrische Energiesysteme (IfES) der Leibniz Universität Hannover gerechnet. Dieser Server hat zwei Prozessoren vom Typ „Intel Xeon E5-2430v2 6C/12T 2.5GHz 15MB“ sowie zwölf RAM-Speicher vom Typ „16GB (1x16GB) 2Rx4 L DDR3-1600 R ECC“. Die Prozessoren wurde von CPLEX und Gurobi zur Parallelisierung genutzt, der RAM-Speicher wurde jedoch nicht im vorhandenen Umfang genutzt.

## 7.2 Auswertungen zum Prognosefehler der Modellierung

Wie in Kapitel 4 beschrieben, werden die nichtlinearen Netzgleichungen quadratisch angenähert. Diese Näherung kann entweder in kartesischen Koordinaten oder in Polarkoordinaten erfolgen. Im Rahmen der Ausarbeitungen für diese Arbeit hat sich gezeigt, dass die sich ergebenden Funktionen und Ergebnisse, von numerisch kleinen Unterschieden abgesehen, unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sind. In [7.5] wurden erhebliche Unterschiede in den Ergebnissen und der Konvergenz der Optimierung festgestellt, jedoch wurden nur eine lineare Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung in Gl. (3.1) und nur lineare Nebenbedingungen verwendet.

Wie in Kapitel 5 beschrieben, werden die nichtkonvexen Funktionsbestandteile der quadratischen Näherungen durch eine aus zwei Stücken bestehende Linearisierung konvexifiziert. Es

ist daher zu untersuchen, ob es sich bei den Näherungen um adäquate Nachbildungen der tatsächlichen Verhältnisse handelt. Die Änderungen der Knotenwirk- und Blindleistungen haben keine Prognosefehler, da diese als Ergebnis der Optimierung einer Leistungsflussberechnung als Eingangsdaten übergeben werden. Für die Funktionen zur Berechnung der Netzverluste, der Beträge der Spannungen und der Beträge der Zweigströme wird der Prognosefehler ermittelt. Als Prognosefehler wird in dieser Arbeit die Differenz zwischen der durch die quadratische (Index „quad“), die konvexifizierte quadratische (Index „quad-konv“) oder die lineare Näherung (Index „lin“) prognostizierte Änderung und der durch die Leistungsflussberechnung ermittelten Änderung definiert. Um die Prognosefehler der verschiedenen Größen miteinander vergleichen und ins Verhältnis setzen zu können, wird der bezogene Prognosefehler eingeführt, der sich durch Bezug auf den jeweiligen Ausgangswert ergibt. Gl. (7.1) bis (7.9) zeigen die Gleichungen für die bezogenen Prognosefehler der Netzverluste  $pf_V$ , der Spannungsbeträge  $pf_U$  und der Strombeträge  $pf_I$ . In den folgenden Auswertungen werden die bezogenen Prognosefehler jeweils als Funktion der ebenfalls auf den jeweiligen Ausgangswert bezogenen durch die Leistungsflussberechnung ermittelten Änderungen dargestellt.

$$pf_{V,quad} = \frac{\Delta P_{V,quad} - \Delta P_{V,LF}}{P_{V,0}} \quad \text{als Funktion von} \quad \frac{\Delta P_{V,LF}}{P_{V,0}} \quad (7.1)$$

$$pf_{V,quad\_konv} = \frac{\Delta P_{V,quad\_konv} - \Delta P_{V,LF}}{P_{V,0}} \quad \text{als Funktion von} \quad \frac{\Delta P_{V,LF}}{P_{V,0}} \quad (7.2)$$

$$pf_{V,lin} = \frac{\Delta P_{V,lin} - \Delta P_{V,LF}}{P_{V,0}} \quad \text{als Funktion von} \quad \frac{\Delta P_{V,LF}}{P_{V,0}} \quad (7.3)$$

$$pf_{U,quad} = \frac{\Delta u_{K,quad} - \Delta u_{K,LF}}{u_{K,0}} \quad \text{als Funktion von} \quad \frac{\Delta u_{K,LF}}{u_{K,0}} \quad (7.4)$$

$$pf_{U,quad\_konv} = \frac{\Delta u_{K,quad\_konv} - \Delta u_{K,LF}}{u_{K,0}} \quad \text{als Funktion von} \quad \frac{\Delta u_{K,LF}}{u_{K,0}} \quad (7.5)$$

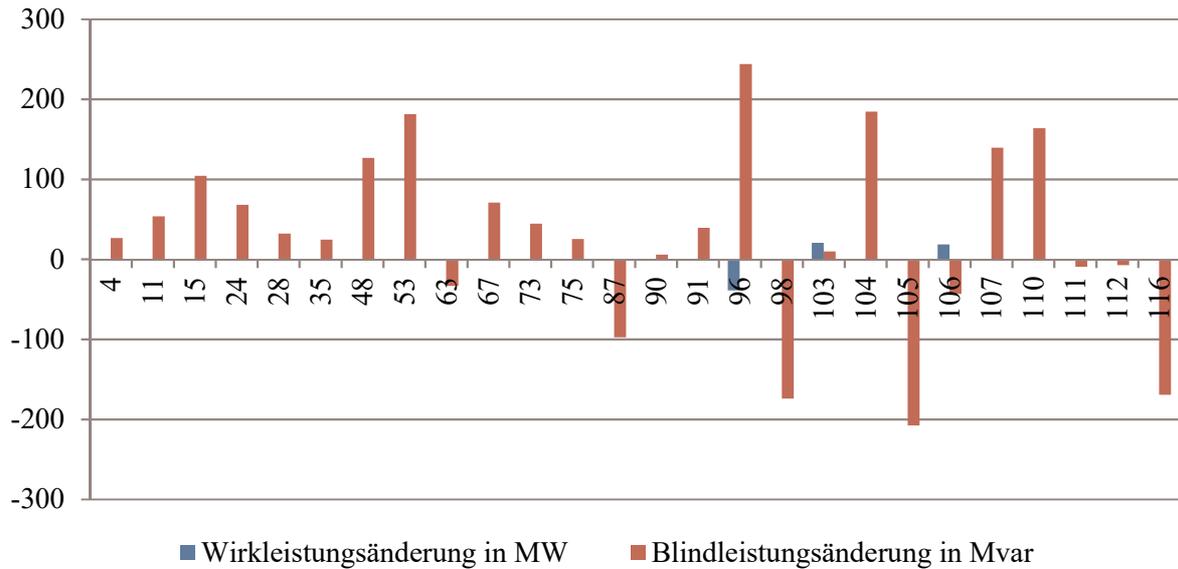
$$pf_{U,lin} = \frac{\Delta u_{K,lin} - \Delta u_{K,LF}}{u_{K,0}} \quad \text{als Funktion von} \quad \frac{\Delta u_{K,LF}}{u_{K,0}} \quad (7.6)$$

$$pf_{I,quad} = \frac{\Delta i_{Z,quad} - \Delta i_{Z,LF}}{i_{Z,N}} \quad \text{als Funktion von} \quad \frac{\Delta i_{Z,LF}}{i_{Z,N}} \quad (7.7)$$

$$pf_{I,quad\_konv} = \frac{\Delta i_{Z,quad\_konv} - \Delta i_{Z,LF}}{i_{Z,N}} \quad \text{als Funktion von} \quad \frac{\Delta i_{Z,LF}}{i_{Z,N}} \quad (7.8)$$

$$pf_{I,lin} = \frac{\Delta i_{Z,lin} - \Delta i_{Z,LF}}{i_{Z,N}} \quad \text{als Funktion von} \quad \frac{\Delta i_{Z,LF}}{i_{Z,N}} \quad (7.9)$$

**Bild 7.3** zeigt die Änderungen der Wirk- und Blindleistungen an den Generatorknoten des Netzes nach Durchführung des ersten sequentiellen Schritts der Optimierung.



**Bild 7.3** Wirk- und Blindleistungsänderung an den Generatorknoten nach dem ersten Schritt der sequentiellen Optimierung

Zur Beseitigung der Engpässe ist ein Blindleistungseinsatz ohne eine Inkaufnahme von Verletzungen des zulässigen Spannungsbandes nicht ausreichend, sodass zusätzlich ein Wirkleistungsredispach notwendig ist, an dem drei Knoten beteiligt sind. Die Änderungen der Blindleistungen dienen neben der Engpassminderung der Verlustminimierung.

Für die Prognosefehler der Netzverluste ergeben sich die Werte in **Tabelle 7.1**, wobei die be-

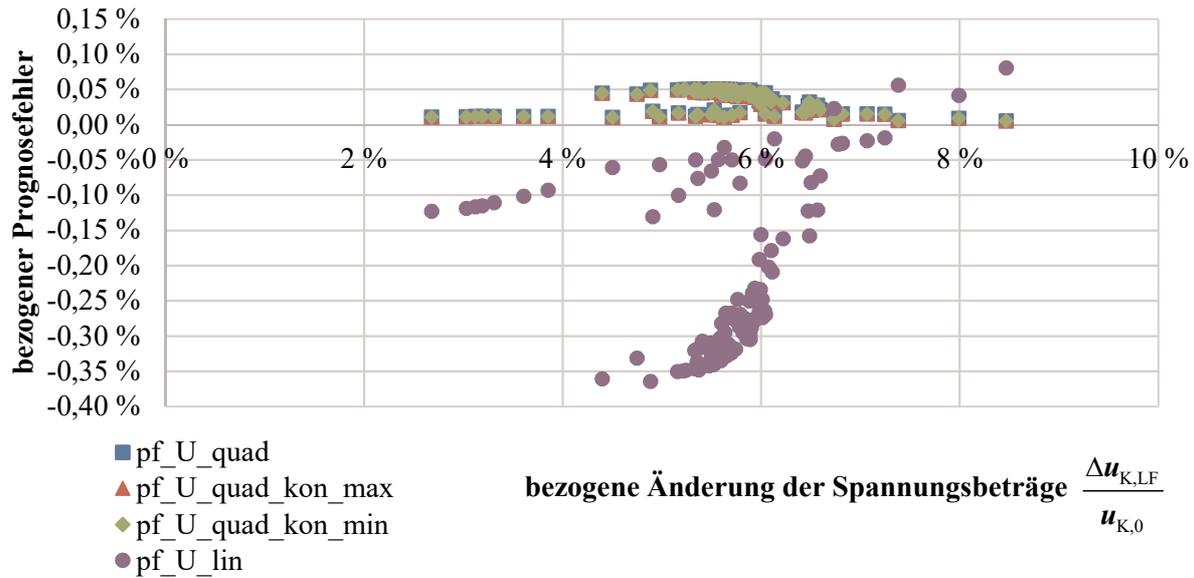
zogenen Netzverluste  $\frac{\Delta P_{V,LF}}{P_{V,0}}$  um 10,11 % verringert werden.

**Tabelle 7.1** Prognosefehler der Netzverluste

$pf_{V,quad}$	$pf_{V,quad\_kon}$	$pf_{V,lin}$
0,16 %	0,16 %	-2,22 %

Für die quadratische Näherung und die konvexifizierte quadratische Näherung der Netzverluste hat sich der gleiche Prognosefehler von 0,16 % ergeben, da die Zielfunktion in diesem Beispiel keine negativen Eigenwerte aufweist. Wäre eine lineare Näherung verwendet worden, hätte sich demgegenüber ein deutlich größerer Prognosefehler von -2,22 % ergeben. Dieser hohe Wert und das entgegengesetzte Vorzeichen zeigen, dass eine lineare Näherung einen Tiefpunkt nicht richtig abbilden kann.

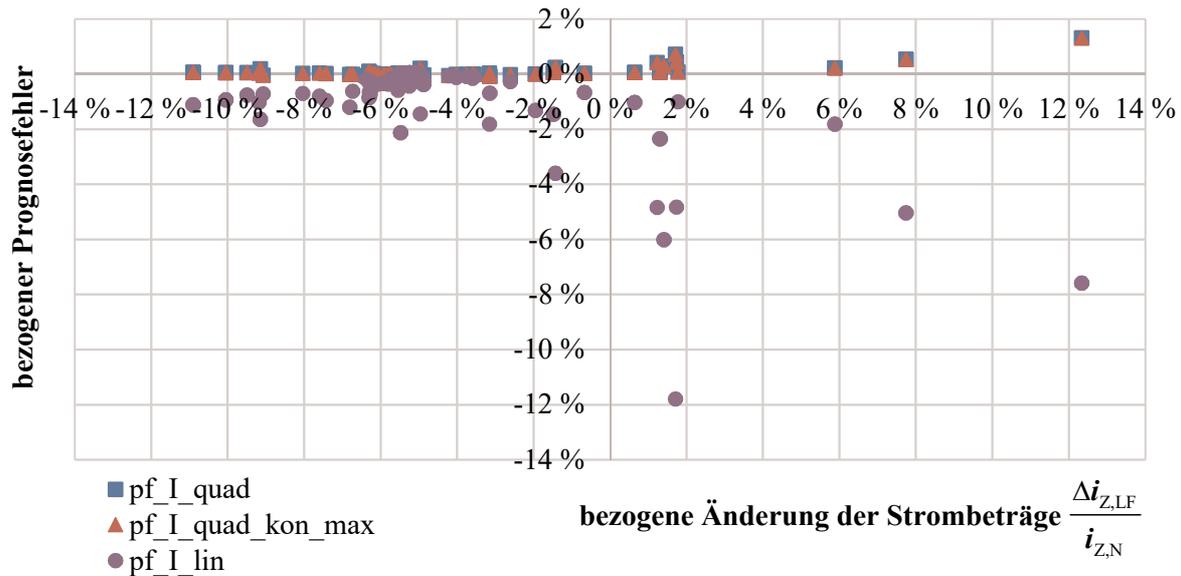
Die Prognosefehler der quadratischen Näherungen der Spannungsbeträge mit und ohne Konvexifizierung sowie die Prognosefehler der linearen Näherungen der Spannungsbeträge sind in **Bild 7.4** dargestellt.



**Bild 7.4** Prognosefehler der quadratischen Näherungen der Spannungsbeträge

Es ist auffällig, dass die Prognosefehler für kleine Änderungen der Spannungsbeträge nicht gegen Null streben und für größere Änderungen nicht zunehmen. Dies ist darauf zurück zu führen, dass sich selbst an Knoten, an denen der Spannungsbetrag gleich bleibt, die Real- und Imaginärteile der Spannungen durch die Änderungen der Wirk- und Blindleistungen entsprechend **Bild 7.3** ändern. Somit unterliegt auch die Prognose einer Spannungsbetragsänderung von Null einer Prognoseungenauigkeit. Eine Zunahme des Prognosefehlers mit größeren Änderungen wäre erst bei noch größeren Änderungen zu erwarten. Im Vergleich der Prognosefehler zeigt sich, dass die quadratische Näherung der Spannungsbeträge und die konvexifizierten quadratischen Näherungen für das obere und untere Spannungsband nahezu dieselben Prognosefehler haben, deren Betragsmittelwert bei 0,036 % liegt. Die lineare Näherung hingegen zeigt um ein Vielfaches größere Prognosefehler mit einem Betragsmittelwert von 0,226 %.

Die Prognosefehler der quadratischen Näherungen der Strombeträge mit und ohne Konvexifizierung sowie die Prognosefehler der linearen Näherungen der Strombeträge sind in **Bild 7.5** dargestellt.



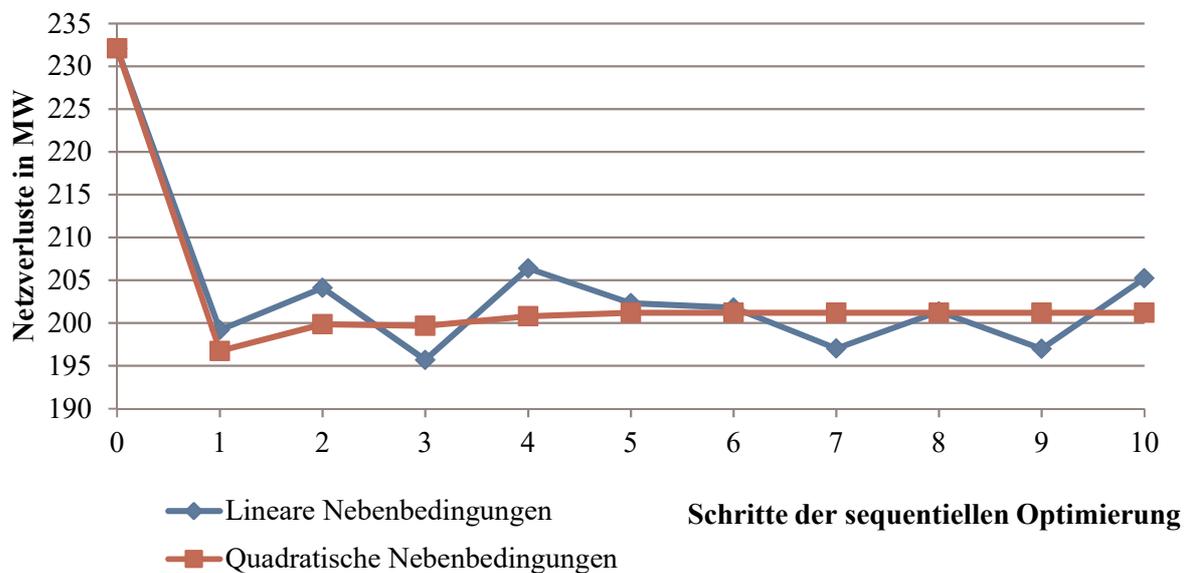
**Bild 7.5** Prognosefehler der quadratischen Näherungen der Strombeträge

Analog zu den Prognosefehlern der Spannungsbeträge, zeigen sich für die quadratische und die konvexifizierte quadratische Näherung kaum unterschiedliche Prognosefehler, deren Betragsmittelwerte im Bereich von 0,085 % liegen. Die lineare Näherung der Strombeträge zeigt, verglichen mit den linearen Näherungen der Spannungsbeträge, deutlich größere Prognosefehler mit einem Betragsmittelwert von 0,87 %, wobei es Ausreißer von bis zu 11,79 % gibt, deren Prognosefehler größer ist als die tatsächliche Änderung. Solche Ausreißer treten bei Leistungsflussumkehr auf einem Betriebsmittel auf, deren Auswirkung auf den Strombetrag durch lineare Modelle nicht richtig abgebildet werden kann. Hierbei können lineare Näherungen teilweise negative Werte für den Strombetrag liefern.

Zusammenfassend zeigen die Auswertungen in allen Fällen deutlich geringere Prognosefehler der quadratischen Näherung im Vergleich mit der linearen Näherung. Der geringere Prognosefehler rechtfertigt somit den Mehraufwand für die quadratische Modellierung. Hierbei hat die Konvexifizierung der quadratischen Näherung nur sehr geringe Auswirkungen auf den Prognosefehler. Mit linearen Näherungen können wesentliche Effekte, wie das Abbilden des Minimums der Netzverluste und die Änderung des Strombetrags bei Leistungsflussumkehr, nicht richtig abgebildet werden.

### 7.3 Auswertungen zum Vergleich der Optimierung mit linearen oder quadratischen Nebenbedingungen

Aus dem geringeren Prognosefehler quadratischer Näherungen, der in Abschnitt 7.2 beschrieben wurde, folgt noch nicht, dass nicht auch mit linearen Näherungen dasselbe Optimierungsergebnis erreicht werden kann. Unter Umständen müssen nur mehr Schritte der sequentiellen Optimierung in Kauf genommen werden. Die folgenden Darstellungen enthalten die ersten zehn Schritte der sequentiellen Optimierung. In den darauffolgenden Schritten wurden kein abweichendes Verhalten und keine Konvergenz festgestellt, wenn sie nicht bereits in den ersten zehn Schritten sichtbar waren. Da das Optimum einer nichtlinearen Zielfunktion nicht immer an den Aussteuergrenzen (vgl. Abschnitt 2.2.2) liegt, ist es notwendig, die Zielfunktion nicht-linear anzunähern. Optimierungsprobleme mit nichtkonvexer quadratischer Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen können beispielsweise mit CPLEX global-optimal gelöst werden. Die Ergebnisse werden im Folgenden mit den Ergebnissen von quadratischer Optimierung mit quadratischen Nebenbedingungen verglichen. **Bild 7.6** zeigt die Netzverluste in jedem Schritt der sequentiellen Optimierung mit quadratischen und mit linearen Nebenbedingungen.



**Bild 7.6** Netzverluste bei sequentieller Optimierung mit quadratischen oder linearen Nebenbedingungen

Als zulässige Lösung wird in dieser Arbeit eine Lösung verstanden, die keine Grenzwertverletzungen mehr enthält. Die Optimierung mit quadratischen Nebenbedingungen ermittelt schon im ersten Schritt der sequentiellen Optimierung eine zulässige Lösung. In der der Optimierung folgenden Engpass- und Spannungsbanduntersuchung sind keine Grenzwertverletzungen mehr festzustellen. Die konvexifizierten quadratischen Näherungen sind somit Unterschätzungen, die

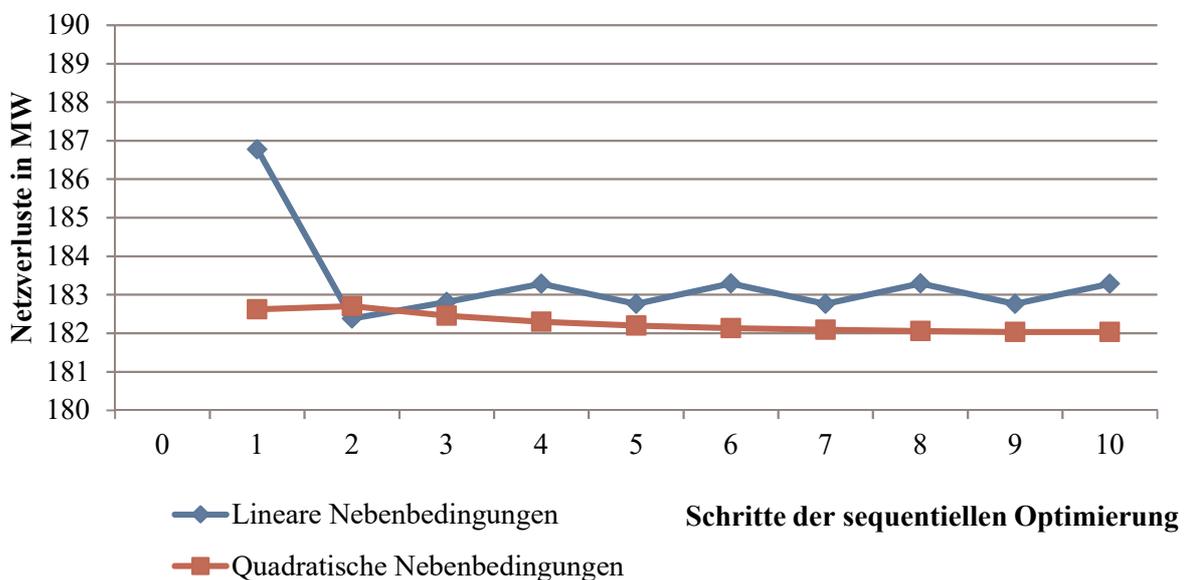
ein zulässiges Ergebnis liefern (vgl. Abschnitt 4.1). In den weiteren Schritten der sequentiellen Optimierung werden neue, ebenfalls zulässige Lösungen gefunden, die höhere Verluste aufweisen. Diese bedeuten jedoch keinen schlechteren Zielfunktionswert, da in die Zielfunktion neben den Netzverlusten auch der Wirkleistungsaufwand zur Beseitigung von Engpässen eingeht (vgl. Abschnitt 6.2). Es gelingt mit jedem Schritt der sequentiellen Optimierung eine geringe Verbesserung des Zielfunktionswertes, indem der tatsächlich benötigte Wirkleistungsaufwand zur Beseitigung von Engpässen, unter Inkaufnahme etwas höherer Verluste, verringert wird. Schon nach wenigen Schritten der sequentiellen Optimierung zeigt die Optimierung mit quadratischen Nebenbedingungen konvergentes Verhalten.

Die Optimierung mit linearen Nebenbedingungen hingegen erreicht im ersten Schritt der sequentiellen Optimierung keine zulässige Lösung. In der der Optimierung folgenden Engpass- und Spannungsbanduntersuchung sind weiterhin Grenzwertverletzungen von Strömen und Spannungen festzustellen. Die linearen Näherungen sind somit Überschätzungen, die kein zulässiges Ergebnis liefern (vgl. Abschnitt 4.1). In den weiteren Schritten der sequentiellen Optimierung mit linearen Nebenbedingungen werden weitere nichtzulässige Lösungen gefunden, die teils höhere und teils geringere Verluste als der Konvergenzwert der Optimierung mit quadratischen Nebenbedingungen aufweisen. Auch nach zehn Schritten der sequentiellen Optimierung sind Schwingungen um ein Optimum festzustellen (vgl. Abschnitt 4.1). Diese Schwingungen sind auf Über- bzw. Unterschätzungen der Linearisierungen und dadurch bedingte Verletzungen bzw. Nicht-Ausnutzungen der Grenzwerte der Nebenbedingungen zurück zu führen. Im untersuchten Beispiel wird das zulässige Spannungsband im ersten Schritt der sequentiellen Optimierung überschätzt. Im nächsten Schritt der sequentiellen Optimierung werden die Spannungsbandverletzungen durch veränderten Blindleistungseinsatz beseitigt, jedoch bedingt dieser veränderte Blindleistungseinsatz wiederum neue Spannungsbandverletzungen an anderen Knoten. Diese Wechselwirkungen schwingen über verschiedene Schritte hinweg und wechselwirken zudem mit dem Wirkleistungsredispatch. In der Literatur, beispielsweise in [7.6], sind Strategien beschrieben, um mit solchen Schwingungen umzugehen, die jedoch Nachteile, wie beispielsweise ein verlangsamtes Konvergenzverhalten, haben. Ergänzend ist zu erwähnen, dass in [7.7] neben Schwingungen um ein Optimum auch das Verharren in einem lokalen Optimum bei Optimierung mit linearen Nebenbedingungen beschrieben wird.

Der Zielwert, um den die Optimierung mit linearen Nebenbedingungen schwingt, scheint im vorliegenden Beispiel derselbe Zielwert zu sein, den die Optimierung mit quadratischen Ne-

benbedingungen erreicht. Die Schlussfolgerung, dass die Optimierung mit linearen Nebenbedingungen immer denselben Zielwert erreicht, ist jedoch nichtzutreffend, da im untersuchten Fall die Zielfunktion keine negativen Eigenwerte aufweist, sodass sie konvex ist und jedes lokale Optimum auch das globale Optimum ist.

Im Allgemeinen sind jedoch die Zielfunktionen nichtkonvex. Um die Auswirkungen nichtkonvexer Zielfunktionen darzustellen, wird der Eingangsdatensatz im Folgenden modifiziert, indem Änderungspotentiale für Wirk- und Blindleistungen nicht nur für die Generatorknoten des Datensatzes, sondern für alle Knoten mit mehr als sieben angeschlossenen Leitungen zu  $\pm 1.000$  MW beziehungsweise  $\pm 1.000$  Mvar angenommen werden. Die Auswahl der Knoten erfolgt beispielhaft auf diesem Weg, weil so Knoten in Gebieten mit einem hohen Vermaschungsgrad ausgewählt werden und sich gegenseitig beeinflussen, sodass auch negative Eigenwerte entstehen. **Bild 7.7** zeigt die Netzverluste in jedem Schritt der sequentiellen Optimierung mit quadratischen und mit linearen Nebenbedingungen. Abweichend von den Darstellungen in den vorherigen Bildern, wird eine feinere Skalierung der Hochachse gewählt, um die Unterschiede der Optimierung mit linear und quadratisch angenäherten Nebenbedingungen sichtbar zu machen. Die Verluste im Ausgangszustand sind somit in **Bild 7.7** nicht dargestellt.



**Bild 7.7** Netzverluste bei sequentieller Optimierung mit quadratischen oder linearen Nebenbedingungen unter Annahme von Redispatchpotentialen in Höhe von  $\pm 1.000$  MW beziehungsweise  $\pm 1.000$  Mvar an allen hochvermaschten Knoten

Die Ergebnisse der Simulationen in **Bild 7.7** zeigen zwar nicht so ausgeprägte Schwingungen wie die Ergebnisse in **Bild 7.6**, jedoch auch ein schwingendes Verhalten. Die Ergebnisse der

Simulationen in **Bild 7.7** zeigen jedoch auch, dass die Optimierung mit linearen Nebenbedingungen um ein anderes Optimum schwingt, als die Optimierung mit quadratischen Nebenbedingungen. Es ist somit möglich, dass durch die Linearisierung der Nebenbedingungen das Lösungsgebiet so unterschätzt wird, dass das globale Optimum abgeschnitten wird [7.7].

Die Auswertungen in diesem Abschnitt zeigen die Vorteile einer quadratischen Näherung, da es bei Linearisierungen zum einen zu so großen Überschätzungen des Lösungsgebietes kommen kann, dass unzulässige Lösungen als zulässig erachtet werden und dieser Fehler auch nicht nach einer größeren Anzahl von Schritten der sequentiellen Optimierung beseitigt werden kann, sondern sich Schwingungen um ein Optimum dauerhaft zeigen. Zum anderen kann es bei Linearisierungen zu so großen Unterschätzungen des Lösungsgebietes kommen, dass das Optimum, welches mit quadratischen Nebenbedingungen gefunden wird, mit linearen Nebenbedingungen nicht gefunden werden kann, sodass nur ein lokales Optimum gefunden wird.

#### 7.4 Auswertungen zur Verbesserung durch kombinierte Optimierung

Die in dieser Arbeit durchgeführte Optimierung kombiniert die Engpassoptimierung, die üblicherweise durch Wirkleistungsredispatch durchgeführt wird, mit der Netzverlustoptimierung, die üblicherweise durch Blindleistungseinsatz durchgeführt wird (vgl. Abschnitt 2.3). In der Gl. (7.10) sind die beiden Optimierungsprobleme gegenübergestellt und in Gl. (7.11) zusammengefasst.

<p><b>Engpassoptimierung :</b></p> $\min(\Delta C_{\text{Redispatch}}(\Delta \mathbf{p}_K))$ $\Delta \mathbf{p}_{K,\min} \leq \Delta \mathbf{p}_K \leq \Delta \mathbf{p}_{K,\max}$ $\Delta \mathbf{i}_Z(\Delta \mathbf{p}_K) \leq \Delta \mathbf{i}_{Z,\max}$ $\Delta \mathbf{i}_{Z,(n-1)}(\Delta \mathbf{p}_K) \leq \Delta \mathbf{i}_{Z,\max}$	<p><b>Netzverlustoptimierung :</b></p> $\min(\Delta C_V(\Delta \mathbf{q}_K))$ $\Delta \mathbf{q}_{K,\min} \leq \Delta \mathbf{q}_K \leq \Delta \mathbf{q}_{K,\max}$ $\Delta \mathbf{u}_{K,\min} \leq \Delta \mathbf{u}_K(\Delta \mathbf{q}_K) \leq \Delta \mathbf{u}_{K,\max}$ $\Delta \mathbf{u}_{K,\min} \leq \Delta \mathbf{u}_{K,(n-1)}(\Delta \mathbf{q}_K) \leq \Delta \mathbf{u}_{K,\max}$
--	--

**kombinierte Optimierung :**

$$\min(\Delta C_{\text{Redispatch}}(\Delta \mathbf{p}_K, \Delta \mathbf{q}_K) + \Delta C_V(\Delta \mathbf{p}_K, \Delta \mathbf{q}_K))$$

$$\Delta \mathbf{p}_{K,\min} \leq \Delta \mathbf{p}_K \leq \Delta \mathbf{p}_{K,\max}$$

$$\Delta \mathbf{q}_{K,\min} \leq \Delta \mathbf{q}_K \leq \Delta \mathbf{q}_{K,\max}$$

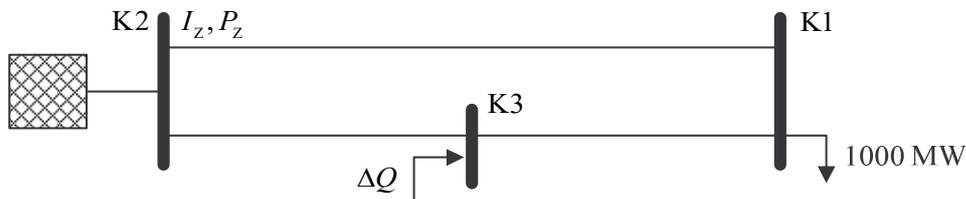
$$\Delta \mathbf{u}_{K,\min} \leq \Delta \mathbf{u}_K(\Delta \mathbf{p}_K, \Delta \mathbf{q}_K) \leq \Delta \mathbf{u}_{K,\max}$$

$$\Delta \mathbf{u}_{K,\min} \leq \Delta \mathbf{u}_{K,(n-1)}(\Delta \mathbf{p}_K, \Delta \mathbf{q}_K) \leq \Delta \mathbf{u}_{K,\max}$$

$$\Delta \mathbf{i}_Z(\Delta \mathbf{p}_K, \Delta \mathbf{q}_K) \leq \Delta \mathbf{i}_{Z,\max}$$

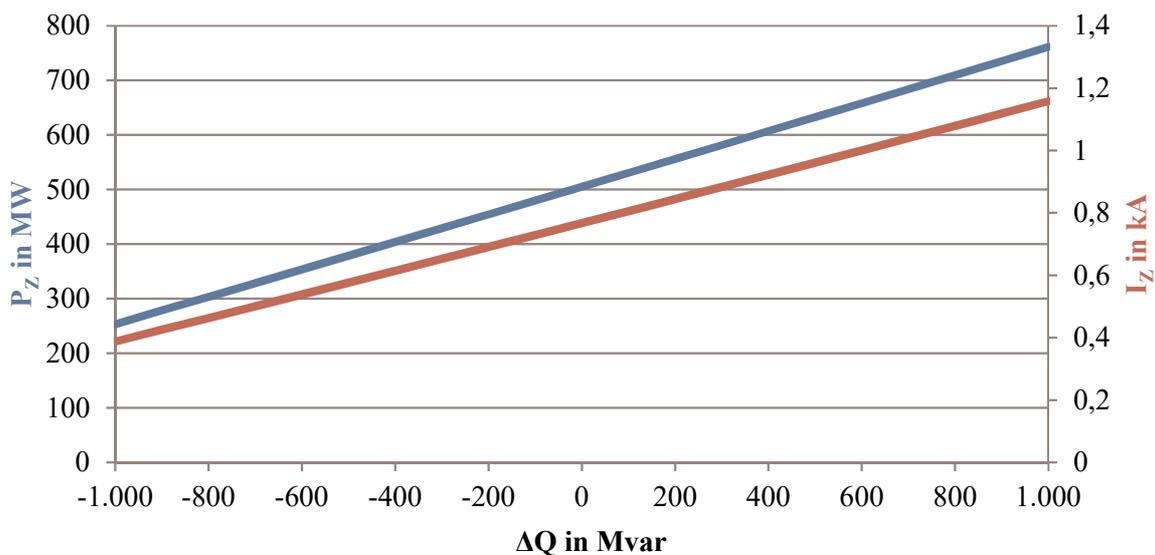
$$\Delta \mathbf{i}_{Z,(n-1)}(\Delta \mathbf{p}_K, \Delta \mathbf{q}_K) \leq \Delta \mathbf{i}_{Z,\max}$$

Anhand der 380-kV-Beispielanordnung in **Bild 7.8** wird der Einfluss von Blindleistungseinsatz auf den Strom- und den Wirkleistungsfluss demonstriert.



**Bild 7.8** Einfluss von Blindleistungseinsatz auf den Wirkleistungsfluss in einer Beispielanordnung

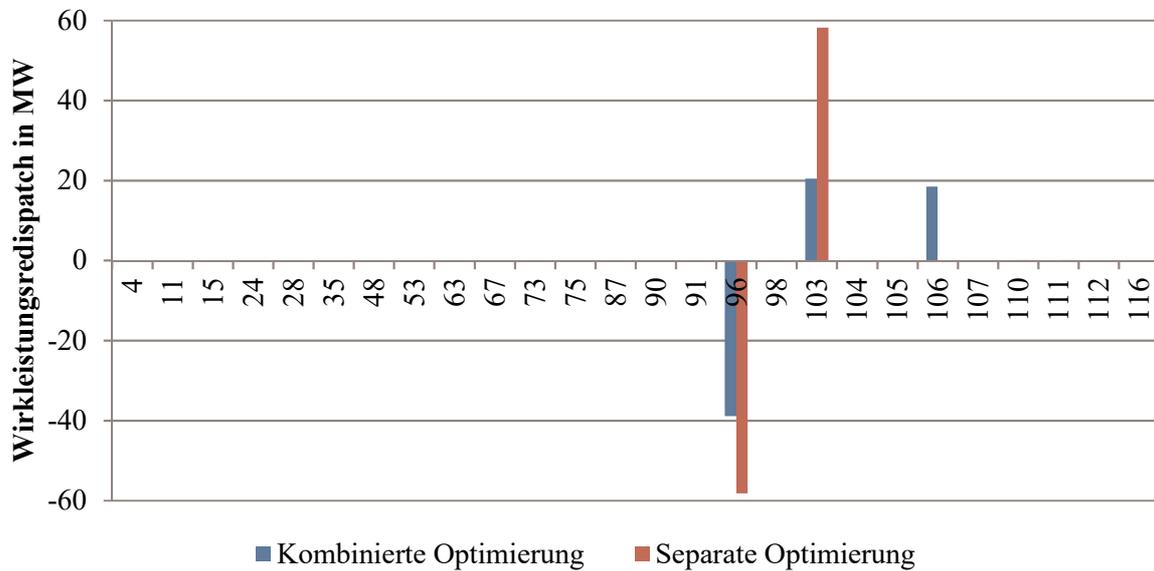
Ausgehend von  $\Delta Q = 0$  sind der Strom  $I_z$  und der Wirkleistungsfluss  $P_z$  auf den beiden parallelen Leitungen zwischen Knoten K1 und K2 gleich. Die Änderungen des Stromes und des Wirkleistungsflusses auf der oberen Leitung in Abhängigkeit der Blindleistungseinspeisung an Knoten K3 zeigt **Bild 7.9**. Der Strom und der Wirkleistungsfluss auf der unteren Leitung ändern sich entgegengesetzt.



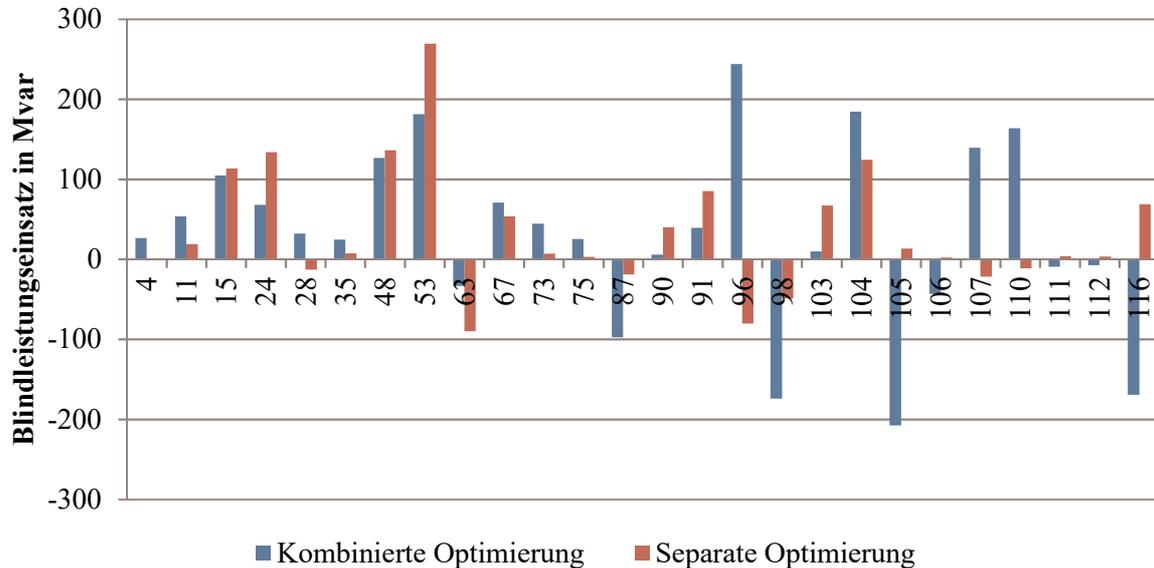
**Bild 7.9** Änderungen des Stromes und des Wirkleistungsflusses in Abhängigkeit der Blindleistungseinspeisung

Das Beispiel zeigt, dass durch Blindleistungseinsatz eine Wirkleistungsübertragungsaufgabe im Rahmen des zulässigen Spannungsbandes zwischen Betriebsmitteln verschoben werden kann. Es ist somit möglich, durch Blindleistungseinsatz Einfluss auf die Engpasssituationen im Netz zu nehmen.

Für den Datensatz dieser Fallstudien (vgl. Abschnitt 7.1) werden in **Bild 7.10** der Wirkleistungsredispatch und in **Bild 7.11** der Blindleistungseinsatz verglichen, die zur Engpassbeseitigung und Netzverlustoptimierung notwendig sind, wenn die Optimierung separat oder kombiniert durchgeführt wird.



**Bild 7.10** Wirkleistungsredispatch im Vergleich von kombinierter und separater Optimierung



**Bild 7.11** Blindleistungsredispatch im Vergleich von kombinierter und separater Optimierung

Bei der separaten Optimierung wird zunächst die Netzverlustoptimierung durchgeführt und ausgehend von diesem Ergebnis die Engpassbeseitigung, damit die Engpassbeseitigung nicht von zu schlechten Startwerten für die Blindleistungen und die Spannungen ausgeht und den notwendigen Wirkleistungsredispatchbedarf unter Umständen überschätzt.

Im Vergleich der kombinierten mit der separaten Optimierung zeigt sich, dass bei kombinierter Optimierung nur Wirkleistung im Umfang von 39 MW in positive und negative Richtung aufgewendet werden muss, wohingegen bei separater Optimierung Wirkleistung im Umfang von 58 MW in positive und negative Richtung aufgewendet werden muss. Bei separater Optimierung ergeben sich mit 192 MW zwar etwas geringere Netzverluste als bei kombinierter Optimierung mit 197 MW, diese Ersparnis von 5 MW bei den Netzverlusten rechtfertigt jedoch nicht den Mehraufwand beim Wirkleistungsredispatch in Höhe von 19 MW. Da die Auswahl von Kraftwerken bei kombinierter Optimierung nicht nur orientiert an ihren Kosten und ihren Wirkungen auf die Engpässe, sondern auch orientiert an ihren Wirkungen auf die Netzverluste erfolgt, sind bei kombinierter Optimierung drei und bei separater Optimierung nur zwei Kraftwerke am Wirkleistungsredispatch beteiligt, obwohl in Summe weniger Wirkleistungsredispatch vorgenommen werden muss. Im Vergleich der Blindleistungen ein deutlich veränderter Blindleistungseinsatz. Da der ermittelte Blindleistungseinsatz in beiden Optimierungen teilweise sogar unterschiedliche Vorzeichen hat, kann davon ausgegangen werden, dass der Blindleistungseinsatz bei separater Optimierung teilweise nicht nur nicht bestmöglich auf die Engpässe wirkt, sondern auch verschlimmernd. Die beschriebenen Wechselwirkungen zeigen die Vorteile der kombinierten Optimierung gegenüber der separaten Optimierung.

## 8 Zusammenfassung

Die Energiewende und der mit ihr in vielen Ländern – beispielsweise in Deutschland – verbundene Ausstieg aus der energetischen Nutzung der Kernenergie forciert einen technischen, politischen und wirtschaftlichen Strukturwandel der Energieversorgung. Eine veränderte Last- und Einspeisesituation, bedingt durch zunehmende Elektrifizierung energetischer Anwendungen, Erzeugungsanlagen auf Basis erneuerbarer Energien und einen zunehmenden internationalen Stromhandel, bewirkt zusammen mit einem erhöhten regulatorischen Effizienzdruck einen Betrieb des elektrischen Energieversorgungsnetzes an seinen Betriebsgrenzen beziehungsweise erfordert vor dem Hintergrund eines verzögerten Leitungsbaus in zunehmenden Umfang Maßnahmen, um die Betriebsgrenzen kostenoptimal einzuhalten. Diese Arbeit enthält Weiterentwicklungen der Modellierung und Lösung eines Optimierungsproblems, welches die teils divergierenden Optimierungsziele, die Minimierung der Kosten für Netzverluste und die Minimierung der Kosten für Redispatch, kombiniert. Im Rahmen der Optimierung wird die Einhaltung der wesentlichen technischen Betriebsgrenzen, also der Stromtragfähigkeiten und Spannungsbänder, mit Hilfe von Wirk- und Blindleistungsänderungen sichergestellt beziehungsweise wiederhergestellt. Die Modellierung wurde im Hinblick auf die Lösbarkeit mit Standardsoftware für die analytische global-optimale Optimierung angepasst.

Das Optimierungsproblem wird auf Basis der knotenorientierten Netzgleichungen aufgebaut, und enthält die Knotenwirk- und Knotenblindleistungen, die Knotenspannungsbeträge und die Strombeträge der Betriebsmittel. Einordnend in bestehende Optimierungsansätze für Energieversorgungsnetze kann das kombinierte Optimierungsproblem dieser Arbeit als security-constrained economic redispatch optimization bezeichnet werden. Das Optimierungsproblem besteht aus einer nichtlinearen Zielfunktion und mehreren nichtlinearen Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen und wird zunächst in allgemeiner Darstellung, also ohne Näherungen und ohne eliminierte Zustandsgrößen, aufgestellt. Eine angestrebte global-optimale Lösung dieses Problems ist jedoch nicht in akzeptabler Zeit zu erwarten, da eine Vielzahl von nichtlinearen und nichtkonvexen Funktionen in der Zielfunktion und den Nebenbedingungen berücksichtigt werden muss. Insbesondere nichtlineare Gleichheitsnebenbedingungen, basierend auf der Leistungsgleichung beziehungsweise der Leistungsdifferenzgleichung, die gar keine konvexen Bestandteile haben, erschweren die global-optimale Lösung.

Verbunden mit der Aussicht, dass es sich hierbei um eine akzeptable Näherung handelt, wird aufbauend auf der allgemeinen Darstellung ein auf quadratischen Näherungen basierendes Mo-

dell zur sequentiellen Optimierung erstellt, wobei die quadratisch angenäherten Gleichheitsnebenbedingungen eliminiert werden, indem diese in die Zielfunktion und die Nebenbedingungen eingesetzt werden. Diese Eliminierung erfordert jedoch quadratisch angenäherte Umkehrfunktionen der Gleichheitsnebenbedingungen. Die Untersuchung der Umkehrbarkeit zeigt, dass die Leistungsdifferenzgleichung jedoch nur in Ausnahmefällen umkehrbar ist. Zur Herstellung der Umkehrbarkeit werden spannungsabhängige Lasten, Ersatzadmittanzen, PU-Knoten, ein Slack Knoten, ein Verteilter Slack und eine Methode zur Ermittlung einer Umkehrfunktion auf Basis der Pseudoinversen vorgestellt und verglichen. Im Rahmen des Vergleichs ergibt sich der an die Regelleistung angelehnte Verteilte Slack als hierfür zu favorisierende Option, da durch ihn das Spannungsniveau im Netz nicht im Vorfeld der Optimierung determiniert wird. Die quadratischen Näherungen werden auf Basis von Taylorreihen erstellt, wobei es sowohl gelingt kompakte Formeln zur Berechnung aller Gradienten, Jakobimatrizen und Hessematrizen als auch kompakte Algorithmen und Formeln zum Einsetzen eines quadratischen Gleichungssystems in ein anderes und zur Ermittlung der Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung abzuleiten.

Um das in jedem Schritt der sequentiellen Optimierung entstehende quadratische nichtkonvexe Optimierungsproblem mit deterministisch global-optimal arbeitender Standardsoftware lösen zu können, muss dieses noch konvexifiziert werden. Hierzu werden mit Hilfe von Eigenwertanalysen der quadratischen Zielfunktion und der quadratischen Nebenbedingungen die nichtkonvexen Funktionsbestandteile identifiziert und durch zwei stückweise Linearisierungen konvexifiziert. Für die stückweisen Linearisierungen sind zusätzliche Zustandsgrößen und zusätzliche Nebenbedingungen auf Basis von Variablengruppen (Special-Ordered-Sets) notwendig, die das bisher kontinuierliche Optimierungsproblem gemischt-ganzzahlig werden lassen.

Zur Ermöglichung der zeitgerechten Lösung des Optimierungsproblems werden Voroptimierungen durchgeführt, die erstens minimale Aussteuergrenzen für die Zustandsgrößen ermitteln, sodass das Lösungsgebiet minimal gehalten wird, und zweitens Startwerte für die stückweisen Linearisierungen ermitteln. Die so ermittelten Werte der ganzzahligen Variablen entsprechen meist schon denen der endgültigen Lösung.

Das so modellierte, genäherte und mit guten Startwerten versehene Optimierungsproblem zeigt im Rahmen der Fallstudien im Hinblick auf Prognosefehler bezogen auf die Ergebnisse einer der Optimierung folgenden Leistungsflussberechnung, dass die quadratisch und die konvexifizierten quadratischen Näherungen sehr geringe Prognosefehler haben. Lineare Näherungen hingegen zeigen im Vergleich mit quadratischen Näherungen deutlich größere Prognosefehler. Im

Hinblick auf das Konvergenzverhalten der sequentiellen Optimierung mit quadratischer Zielfunktion, die einmal mit quadratischen und einmal mit linearen Nebenbedingungen durchgeführt wird, zeigt sich, dass mit linearen Nebenbedingungen Schwingungen um ein Optimum und der Maratoseffekt, also langsame Konvergenz zu einem Optimum, deutlich stärker ausgeprägt sind. Weitere Auswertungen zeigen zudem im Hinblick auf das Ergebnis der Optimierung, dass mit linearen Nebenbedingungen das Lösungsgebiet soweit unterschätzt werden kann, dass nur ein lokales Optimum gefunden wird. Im Hinblick auf die Kombination der Netzverlustoptimierung durch Blindleistungseinspeisung mit der Optimierung der Engpassbeseitigung durch Wirkleistungsredispatch zeigen sich ebenfalls Vorteile, indem beispielsweise Stromengpässe durch Blindleistungseinsatz verringert werden können, sodass weniger Wirkleistung zur Beseitigung von Engpässen eingesetzt werden muss und Blindleistung nicht engpasserhöhend eingesetzt wird. Zudem erfolgt die Auswahl von Kraftwerken für den Wirkleistungsredispatch nicht nur basierend auf ihren Kosten und ihrer Wirkung auf die Engpässe, sondern auch orientiert an ihren Wirkungen auf die Netzverluste.

Die in vielen Punkten verbesserten Eigenschaften der kombinierten Optimierung und der quadratischen Näherung im Vergleich mit der linearen Näherung rechtfertigen zusammenfassend nicht nur den erhöhten Aufwand des Lösungsansatzes dieser Arbeit, sondern zeigen auch, dass sich der erhöhte Aufwand für Netzbetreiber beziehungsweise die kostentragende Volkswirtschaft durch weniger Kosten für Netzverluste und Redispatch auszahlen kann. Darüber hinaus ermöglicht der Lösungsansatz dieser Arbeit eine bessere Ausnutzung der vorhandenen Betriebsgrenzen und höhere Betriebsmittelauslastungen, sodass besser auf veränderte Last- und Einspeisesituationen reagiert werden und somit eine bessere Integration erneuerbarer Energien in das Energieversorgungssystem gelingen kann. Diese Arbeit kann somit ein Puzzlestück zum Gelingen der Energiewende beitragen.



## 9 Ausblick

Der Lösungsansatz dieser Arbeit liefert eine vielversprechende Basis, auf der Weiterentwicklungen und weitere Verbesserungen im Umfeld des Optimal Power Flows möglich sind. In den folgenden Abschnitten werden weitere Einflussgrößen und -möglichkeiten, die als Variablen oder in der Zielfunktion berücksichtigt werden können (Abschnitt 9.1), weitere Restriktionen, die als Nebenbedingungen berücksichtigt werden können (Abschnitt 9.2), und Ansätze für andere Modellierungen, welche die Lösung des Optimierungsproblems beschleunigen können (Abschnitt 9.3), dargestellt

### 9.1 Berücksichtigung weiterer Einflussgrößen und -möglichkeiten

In dieser Arbeit sind konstante und für verschiedene Erzeugungsanlagen gleiche Kosten für Wirkleistungsänderungen berücksichtigt worden. Die individuellen Kosten der Energie- und Leistungsbereitstellung der Kraftwerke sind jedoch nicht über den Leistungsbereich des Kraftwerks konstant, sondern nichtlineare Funktionen der von den Arbeitspunkten abhängigen Wirkungsgrade. Des Weiteren sind Anfahrkosten zu berücksichtigen, die von der Stillstandszeit abhängig sind. Hierbei ist eine quadratische und stückweise Näherung der nichtlinearen Kostenanteile thermischer Kraftwerke ein üblicher Ansatz [9.1], [9.2], der sich somit in das in dieser Arbeit erarbeitete Modell einfügen lässt. Bei der Optimierung von Ein- und Ausschaltvorgängen wird auch die Berücksichtigung von Einsatzrestriktionen, wie sie beispielsweise durch Wärmeauskopplung bestehen, erforderlich. Durch die Erweiterung um Anfahrkosten, Mindestleistungen und maximale Leistungsgradienten treten teilweise weitere gemischt-ganzzahlige Variablen hinzu. Zusammen mit der Berücksichtigung von Speichern und ihren Füllstandsbedingungen wird dadurch das Optimierungsproblem zudem zeitpunktübergreifend, was hohe Herausforderungen an die zeitgerechte Lösung stellt. Eine genauere Modellierung der Kraftwerks- und Systembetriebskosten erfordert neben der Berücksichtigung des Energiemarktes die Berücksichtigung der Regelleistungsmärkte. Beide Märkte stehen in Wechselwirkungen mit den Märkten für Emissionsrechte und Brennstoffe. Insgesamt ist daher die Kopplung mit einer integrierten Netz- und Energiemarktsimulation [9.3] erstrebenswert. Bei Berücksichtigung mehrerer Marktgebiete sind als zusätzliche Einflussgrößen die durch physikalische Grenzen beschränkten Leistungs- und Systemdienstleistungsaustausche zwischen diesen Marktgebieten zu berücksichtigen und zu optimieren.

Im Hinblick auf die Netzbetriebsmittel ist die Berücksichtigung weiterer Stellparameter anzustreben. Dies können beispielsweise die Stufen der Längs-, Quer- und Schrägregelung der

Transformatoren und Kompensationsanlagen, die zusätzliche diskrete Variablen erfordern, sowie Schaltzustandsänderungen, die zusätzliche binäre Variablen erfordern, sein. Da sowohl die Übersetzungsverhältnisse der Transformatoren als auch die Schaltzustände der Leitungen quadratisch in die Leistungsgleichung eingehen, bietet die in dieser Arbeit dargestellte konvexifizierte quadratische Modellierung einen aussichtsreichen Ansatz zur Berücksichtigung. Im Rahmen der Schaltzustandsoptimierung bedingt die Vermeidung von Inselnetzbildungen im  $(n-0)$ -Fall aber auch in allen  $(n-1)$ -Fällen Herausforderungen für die Modellierung und zeitgerechte Lösung.

Sofern Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragungen (HGÜ, HVDC) im zu betrachtenden Netz zum Einsatz kommen, ist ihre Berücksichtigung erforderlich. Ihre dann ebenfalls zu minimierenden belastungsunabhängigen und belastungsabhängigen Wirkleistungsverluste müssen in der Zielfunktion berücksichtigt werden, wobei das HGÜ-Ein-Ausschaltkalkül eine gemischt-ganzzahlige Modellierung erfordert. Da die belastungsabhängigen Verluste wiederum quadratisch von den DC-Spannungen abhängen, bietet sich eine quadratische Modellierung an. Ihr Wirkleistungstransportpotential aber auch die je nach Bauart mögliche Bereitstellung von Blindleistung für das Drehstromnetz an den HGÜ-Kopfstationen verknüpft die HGÜ-Einsatzoptimierung mit der in dieser Arbeit dargestellten Optimierung. Durch HGÜs wird allerdings auch die Berücksichtigung weiterer  $(n-1)$ -Fälle für den Ausfall der HGÜs erforderlich.

### 9.2 Berücksichtigung weiterer Restriktionen

Der Netzbetrieb wird neben den in dieser Arbeit berücksichtigten Stromtragfähigkeiten und Spannungsbändern durch weitere Restriktionen beeinflusst. Beispielsweise erfordern die Einhaltung oberer und unterer Grenzen für die Kurzschlussströme sowie die Sicherstellung der Systemstabilität unter Umständen detaillierte Überprüfungen jedes Systemzustands, teils unter Zuhilfenahme von Eigenwertberechnungen und Simulationen dynamischer Vorgänge. Ähnliches gilt beispielsweise für die Berücksichtigung von Oberschwingungsanregungen, die mit zunehmendem Einsatz von Umrichter-getriebenen Erzeugungsanlagen auftreten, und Resonanzen, die sich beispielsweise durch den Einsatz von Kabeln in niedrigere Frequenzbereiche verschieben. Ob Einsatzbeschränkungen im Rahmen einer Optimierung auch durch Hilfsindizes abgebildet werden können und ob hierfür eine konvexifizierte quadratische Modellierung geeignet ist, bedarf weiterer umfangreicher Untersuchungen.

Grundsätzlich kann angenommen werden, dass die Berücksichtigung weiterer Restriktionen hilft, das zulässige Lösungsgebiet zu beschränken, sodass eine Lösung beziehungsweise die

optimale Lösung schneller gefunden werden kann. Wenn jedoch die Modellierung und Berücksichtigung weiterer Restriktionen sehr aufwendig ist, kann eine Verlängerung der Lösungszeit auftreten.

### 9.3 Verbesserungen im Hinblick auf die Modellierung und die Lösung des Optimierungsproblems

Neben der Modellierung weiterer Einflussgrößen für die Zielfunktion und Nebenbedingungen, gibt es noch eine Vielzahl von Ansätzen, mit denen probiert werden kann, die Lösungszeit positiv zu beeinflussen. Im Folgenden werden einige Ansätze dargestellt.

Die in dieser Arbeit verwendete Software, aber auch viele andere Softwares, bietet die Möglichkeit, Prioritäten für diskrete Variablen zu definieren. Im Rahmen der diskreten Optimierung kann somit beeinflusst werden, für welche Variable vorrangig nach diskreten Lösungswerten gesucht wird. Sofern es eine sinnvolle Sortierung gibt, kann die Vorgabe von Prioritäten das Finden der Lösung beschleunigen.

Im Rahmen weiterer Untersuchungen ist zu überprüfen, ob sich alternativ zu den quadratischen Näherungen und der Konvexifizierung durch stückweise Linearisierung andere Ansätze zur Näherung und Konvexifizierung des allgemeinen Problems beispielsweise durch konvexe Hüllen eignen und als vorteilhaft erweisen. Hierbei sollte auch ein Vergleich mit stückweisen Linearisierungen mit mehr als zwei Stücken erfolgen. Es können dann keine SOS1 mehr verwendet werden, sondern es werden SOS2 notwendig. Diesem Nachteil steht unter Umständen als Vorteil gegenüber, dass die Linearisierung nicht mehr im Symmetriepunkt, sondern in dem Ausgangspunkt AP oder dem Punkt der quadratischen Annäherung QA erfolgen kann. Möglicherweise erspart dieses Vorgehen Probleme der Lösungssoftware, weil der Nullvektor ein zulässiger Startwert sein kann.

Die Modellierung der stückweisen Linearisierungen dieser Arbeit kann sowohl in CPLEX als auch in Gurobi nicht nur über SOS1 beziehungsweise SOS2 erfolgen, sondern auch durch unmittelbare Übergabe der Eckpunkte der stückweisen Linearisierungen<sup>21</sup>. Nach telefonischer Rücksprache mit dem Telefonsupport der Firma Gurobi ist hierbei eine bessere Berücksichtigung der stückweisen Linearisierungen im Lösungsalgorithmus möglich. Diese Möglichkeit

---

<sup>21</sup> SOS1 und SOS2 bieten die allgemeine Möglichkeit, die Auswahl von Variablen aus einer Variablengruppe auf eine oder zwei aufeinanderfolgende Variablen zu beschränken. Stückweise Linearisierungen sind nur einer von mehreren denkbaren Anwendungsfällen solcher Variablengruppen.

wird von Gurobi über die MATLAB-Schnittstelle derzeit nur für die Zielfunktion angeboten und von CPLEX über die MATLAB-Schnittstelle weder für die Zielfunktion noch für die Nebenbedingungen.

Über sogenannte Callbacks ist es möglich, während des Verlaufs der Optimierung die Modellierung auf Basis von Zwischenergebnissen anzupassen. Bezüglich der stückweisen Linearisierungen im Rahmen der inneren sequentiellen Konvexifizierung und für die quadratischen Näherungen im Rahmen der sequentiellen quadratischen Optimierungen ist es unter Umständen möglich auf sequentielle Schritte zu verzichten und auf diesem Weg die Optimierung zu beschleunigen sowie Schwingungen um ein Optimum und den Maratos-Effekt zu verringern. Callbacks werden jedoch weder von CPLEX noch von Gurobi über die MATLAB-Schnittstelle angeboten.

Generell erscheint es zielführend zu überprüfen, ob eine Modellierung außerhalb von MATLAB vorteilhaft ist, wenn eine Optimierung der Rechenzeiten angestrebt wird, da über die MATLAB-Schnittstellen nicht alle Möglichkeiten der Optimierungssoftwares optimal ausgenutzt werden können. Zur Optimierung der Rechenzeit bietet sich neben der Nutzung spezialisierter Software unter Umständen auch die Nutzung spezialisierter Hardware an. MATLAB bietet beispielsweise über die CUDA-Schnittstelle die Möglichkeit, die Eigenwertberechnung nicht mit der CPU, sondern der GPU durchzuführen.

Unabhängig von den Eigenschaften der in dieser Arbeit verwendeten Optimierungssoftware kann die Dekomposition des Gesamtproblems in Unterprobleme aussichtsreich sein, ohne hierbei die Kopplungen zwischen den Unterproblemen aufzugeben, die sequentiell beispielsweise über Callbacks berücksichtigt werden. Wenngleich die Lösung der Unterprobleme mehrfach erfolgen muss, kann ein solches Vorgehen vorteilhaft sein, wenn die Lösung der Unterprobleme deutlich schneller ist als die Lösung des Gesamtproblems.

Weitere Herausforderungen ergeben sich, da die oft mit zeitlichen Vorlauf durchgeführten Optimierungen auf Planungs- und Prognosedaten basieren, die mit Ungenauigkeiten behaftet sind. Dem daher unsicheren Netzzustand kann methodisch mit Stochastischer Optimierung begegnet werden, was weitere Herausforderungen aber auch Möglichkeiten an die Modellierung und Lösung stellt.

Die in dieser Arbeit entwickelten Modellierungen und die Lösungsmethodik bilden eine aussichtsreiche Basis, die beschriebenen Weiterentwicklungen und Verbesserungen einzuarbeiten.

## 10 Literatur und Quellenverzeichnis

### 1. Kapitel

- [1.1] Regierungserklärung von Bundeskanzlerin Angela Merkel zur Energiepolitik, „*Der Weg zur Energie der Zukunft*“ (Mitschrift), Datum: 09. Juni 2011, <https://www.bundesregierung.de/ContentArchiv/DE/Archiv17/Regierungserklaerung/2011/2011-06-09-merkel-energie-zukunft.html> (abgerufen am 26.04.2017)
- [1.2] A.T. Kearney, „*Prognose zum Stromverbrauch der EU-27 für die Jahre 2010, 2015 und 2020 nach Sektoren (in Terrawattstunden)*“, Statista, <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/12512/umfrage/prognose-zum-stromverbrauch-der-eu-27-bis-2020/> (abgerufen am 26.04.2017)
- [1.3] Arbeitsgemeinschaft Energiebilanzen (AGEB), Arbeitsgruppe Erneuerbare Energien-Statistik (AGEE-Stat), „*Stromerzeugungskapazitäten, Bruttostromerzeugung und Bruttostromverbrauch Deutschland*“, Tabellen 22 und 22a der Gesamtausgabe Energiedaten, 03.01.2017, <https://www.bmwi.de/Redaktion/DE/Infografiken/Energie/Energiedaten/Energietraeger/energiedaten-energietraeger-27.html> (abgerufen am 26.04.2017)
- [1.4] Dagmara Stoerring, „*Energiebinnenmarkt - Kurzdarstellungen zur Europäischen Union*“, 12/2016 [http://www.europarl.europa.eu/atyourservice/de/displayFtu.html?ftuId=FTU\\_5.7.2.html](http://www.europarl.europa.eu/atyourservice/de/displayFtu.html?ftuId=FTU_5.7.2.html) (abgerufen am 26.04.2017)
- [1.5] Statistisches Bundesamt, Bundesverband der Energie- und Wasserwirtschaft, „*Physikalischer Stromaustausch Deutschlands mit Nachbarländern*“, 20.03.2017 <https://www.bmwi.de/Redaktion/DE/Infografiken/Energie/stromaustausch-mit-nachbarlaendern.html> (abgerufen am 26.04.2017)
- [1.6] Bundesnetzagentur: „*EnLAG-Monitoring - Stand der Vorhaben aus dem Energieleitungsbaugesetz (EnLAG) nach dem vierten Quartal 2016*“, Februar 2017 <https://www.netzausbau.de/SharedDocs/Downloads/DE/Vorhaben/EnLAG/EnLAG-Bericht.pdf> (abgerufen am 26.04.2017)
- [1.7] Bundesrepublik Deutschland: „*Energiewirtschaftsgesetz (Gesetz über die Elektrizitäts- und Gasversorgung)*“ Artikel 1 des Gesetzes vom 07.07.2005 (BGBl. I S. 1970, ber. S. 3621), in Kraft getreten am 13.07.2005 zuletzt geändert durch Gesetz vom 29.03.2017 (BGBl. I S. 626) m.W.v. 05.04.2017
- [1.8] Bundesnetzagentur; Bundeskartellamt: Monitoringbericht 2011. Monitoringbericht gemäß § 63 Abs.3 i.V.m. § 35 EnWG und § 48 Abs. 3 i.V.m. § 53 Abs. 3GWB. 3. Auflage 5.2.2013.
- [1.9] Bundesnetzagentur; Bundeskartellamt: „*Monitoringbericht 2012*“ Monitoringbericht gemäß § 63 Abs. 3 i.V.m. § 35 EnWG und § 48 Abs. 3 i.V.m. § 53 Abs. 3GWB. 3. Auflage 5.2.2013.
- [1.10] Bundesnetzagentur: Bericht zum Zustand der leitungsgebundenen Energieversorgung im Winter 2011/12. 03.05.2012.
- [1.11] Bundesnetzagentur, Bundeskartellamt: „*Monitoringbericht 2013*“ Monitoringbericht gemäß § 63 Abs. 3 i. V. m. § 35 EnWG und § 48 Abs. 3 i. V. m. § 53 Abs. 3 GWB Stand: Juni 2014
- [1.12] Bundesnetzagentur, Bundeskartellamt: „*Monitoringbericht 2014*“ Monitoringbericht gemäß § 63 Abs. 3 i. V. m. § 35 EnWG und § 48 Abs. 3 i. V. m. § 53 Abs. 3 GWB Stand: 14. November 2014
- [1.13] Bundesnetzagentur, Bundeskartellamt: „*Monitoringbericht 2015*“ Monitoringbericht gemäß § 63 Abs. 3 i. V. m. § 35 EnWG und § 48 Abs. 3 i. V. m. § 53 Abs. 3 GWB Stand: 10. November 2015, Korrektur: 21. März 2016

- [1.14] Bundesnetzagentur, Bundeskartellamt: „*Monitoringbericht 2016*“ Monitoringbericht gemäß § 63 Abs. 3 i. V. m. § 35 EnWG und § 48 Abs. 3 i. V. m. § 53 Abs. 3 GWB Stand: 30. November 2016
- [1.15] Eickmann, J.: *Simulation der Engpassbehebung im deutschen Übertragungsnetzbetrieb*, Aachener Beiträge zur Energieversorgung, Band 164, Printproduction M. Wolff GmbH, 2015
- [1.16] A. Caprara, M. Locatelli: „Global optimization problems and domain reduction strategies“, Springer-Verlag, Mathematical Programming, September 2010, Volume 125, Issue 1, pp 123–137
- [1.17] C. Linnemann, D. Echternacht, C. Breuer and A. Moser: “*Modeling optimal redispatch for the European Transmission grid*” 2011 IEEE Trondheim PowerTech, Trondheim, 2011
- [1.18] N. Meyer-Huebner et al., "Time constrained optimal power flow calculations on the German power grid" International ETG Congress 2015; Die Energiewende - Blueprints for the new energy age, Bonn, Germany, 2015, pp. 1-7.
- [1.19] Bundesnetzagentur: “*Bericht 2008 zum deutschen Elektrizitäts- und Gasmarkt der Bundesnetzagentur für Elektrizität, Gas, Telekommunikation, Post und Eisenbahnen an die Europäische Kommission gemäß § 63 Abs. 5 EnWG*“, Redaktionsschluss: 31.07.2008 [http://www.ceer.eu/portal/page/portal/EER\\_HOME/EER\\_PUBLICATIONS/NATIONAL\\_REPORTS/National%20reporting%202008/NR\\_nl/E08\\_NR\\_Germany-LL.pdf](http://www.ceer.eu/portal/page/portal/EER_HOME/EER_PUBLICATIONS/NATIONAL_REPORTS/National%20reporting%202008/NR_nl/E08_NR_Germany-LL.pdf) (abgerufen am 26.04.2017)
- [1.20] AG Energiebilanzen e.V.: „*Energieverbrauch in Deutschland im Jahr 2016*“, Stand: Februar 2017 [http://www.ag-energiebilanzen.de/index.php?article\\_id=29&file-Name=ageb\\_jahresbericht2016\\_20170301\\_interaktiv\\_dt.pdf](http://www.ag-energiebilanzen.de/index.php?article_id=29&file-Name=ageb_jahresbericht2016_20170301_interaktiv_dt.pdf) (abgerufen am 26.04.2017)
- [1.21] Bundesregierung: „*Energiewende im Überblick*“, <https://www.bundesregierung.de/Content/DE/StatischeSeiten/Breg/Energiekonzept/0-Buehne/ma%C3%9Fnahmen-im-ueberblick.html> (abgerufen am 02.05.2017)
- [1.22] ENTSO-E: „TYNDP 2016 Map“, Stand: 01.09.2016, <http://tyndp.entsoe.eu/> (abgerufen am 02.05.2017)

## 2. Kapitel

- [2.1] F. Jarre, J. Stoer: „*Optimierung*“, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
- [2.2] D. Oeding, B. R. Oswald: „*Elektrische Kraftwerke und Netze*“, 7. Auflage, Springer, Heidelberg, Berlin, 2011.
- [2.3] M. Wolter: “*State Identification of Distribution Grids*“, Shaker Verlag, Aachen, September 2008
- [2.4] B. R. Oswald: „*Berechnung von Drehstromnetzen*“, 2. Auflage, Springer Vieweg, Wiesbaden 2013
- [2.5] S. Boyd, L. Vandenberghe: “*Convex Optimization*“, Cambridge University Press, Seventh printing with corrections 2009
- [2.6] N. Levinson: “*Linear programming in complex space*“, Journal of Mathematical Analysis and Applications Volume 14, Issue 1, April 1966, Pages 44–62
- [2.7] M. Hanson, B. Mond: “*Quadratic programming in complex space*“, Journal of Mathematical Analysis and Applications Volume 20, Issue 3, December 1967, Pages 507–514
- [2.8] L. Sorber, M. Van Barel, L. De Lathauwer: „*Complex Optimization Toolbox v1.0*“, Available online, February 2013. URL: <http://esat.kuleuven.be/stadius/cot/>

- [2.9] L. Sorber, M. Van Barel, L. De Lathauwer: “*Unconstrained optimization of real functions in complex variables*”, SIAM Journal on Optimization, Vol. 22, No. 3, pp. 879-898, July 2012.
- [2.10] E. M. L. Beale, J. A. Tomlin: “*Special facilities in a general mathematical programming system for non-convex problems using ordered sets of variables*”, J. Lawrence, editor, Operational Research 69, pages 447–454. Tavistock Publishing, London, 1970
- [2.11] E. M. L. Beale, J. J. H. Forrest: “*Global Optimization Using Special Ordered Sets. Mathematical Programming*”, 10(1):52–69, 1976
- [2.12] J. A. Taylor: “*Convex Optimization of Power Systems*”, Cambridge University Press, 2015
- [2.13] Carpentier J.: “*Contribution e létude do dispatching economique*”, Bull. Soc. Franc. Elect. pp. 431-447[2.13], 1962
- [2.14] S. Frank, I. Steponavice, S. Rebennack, “*Optimal power flow: a bibliographic survey I*”, Springer Verlag, April 2012
- [2.15] S. Frank, I. Steponavice, S. Rebennack, “*Optimal power flow: a bibliographic survey II*”, Springer Verlag, April 2012
- [2.16] M. B. Cain, R.P. O’Neill, A. Castillo, “*History of Optimal Power Flow and Formulations*”, Dec. 2012
- [2.17] J. Zhu: “*Optimization of Power System Operation, 2nd Edition*”, Wiley-IEEE Press, February 2015
- [2.18] R. Schultz, H.-J. Wagner: “*Innovative Modellierung und Optimierung von Energiesystemen*”, LIT Verlag Dr. W. Hopf Berlin 2009
- [2.19] T. Achterberg: „*Constraint Integer Programming*“, Doktorarbeit an der Technischen Universität Berlin, Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften, Juli 2007, <http://dx.doi.org/10.14279/depositonce-1634>
- [2.20] J. Currie, D. I. Wilson: "OPTI: Lowering the Barrier Between Open Source Optimizers and the Industrial MATLAB User" Foundations of Computer-Aided Process Operations, Georgia, USA, 2012, Quadratically Constrained Quadratic Program Example: <https://www.inverseproblem.co.nz/OPTI/index.php/Probs/QCQP>

### 3. Kapitel

- [3.1] A. Klos, J. Wojcicka: “*Physical aspects of the nonuniqueness of load flow solutions*”, PSCC proceedings: Cambridge, Sept. 1 - 5, 1975, Band 2, Department of Electr. and Electronic Engineering, University of London, 1975
- [3.2] S. X. Guo, F. M. A. Salam: “*The number of (equilibrium) steady-state solutions of models of power systems*”, IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 41, no. 9, pp. 584-600, Sep 1994.
- [3.3] H. D. Nguyen, K. S. Turitsyn: “*Appearance of multiple stable load flow solutions under power flow reversal conditions*”, PES General Meeting | Conference & Exposition, 2014 IEEE , vol., no., pp.1-5, 27-31 July 2014
- [3.4] W. A. Bukhsh, A. Grothey, K. I. M. McKinnon, P. A. Trodden: “*Local Solutions of the Optimal Power Flow Problem*” in IEEE Transactions on Power Systems, vol. 28, no. 4, pp. 4780-4788, Nov. 2013.
- [3.5] A. Trias: “*The Holomorphic Embedding Load Flow method*”, 2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting, San Diego, CA, 2012, pp. 1-8.
- [3.6] A. Trias: “*Fundamentals of the Holomorphic Embedding Load-Flow Method*”, 09/2015, <https://arxiv.org/>

- [3.7] C. M. Davis, J. D. Weber, K. Johnson, "Circulating MW and Mvar flows in large systems" North American Power Symposium (NAPS), 2009, Starkville, MS, USA, 2009, pp. 1-6.
- [3.8] T. Coletta, R. Delabays, I. Adagideli, Ph. Jacquod: "Vortex Flows in High Voltage AC Power Grids", 05/2016, <https://arxiv.org/>
- [3.9] B. Merkt: „Beitrag zur Zustandsidentifikation von elektrischen Energieversorgungsnetzen“, Aachen: Shaker Verlag, Mai 2007
- [3.10] Wolter, M.: "Agent based Energy Management Systems", Aachen, Shaker Verlag, 2012
- [3.11] Verband der Netzbetreiber: "TransmissionCode 2007 - Netz- und Systemregeln der deutschen Übertragungsnetzbetreiber", Version 1.1, August 2007
- [3.12] P. H. Haley and M. Ayres, "Super Decoupled Loadflow With Distributed Slack Bus" in IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-104, no. 1, pp. 104-113, Jan. 1985.
- [3.13] P. Zolotarev: "Netzregelverbund : Regelzonengrenzen übergreifende Optimierung der Ausregelung von Wirkleistungsungleichgewichten unter Berücksichtigung von Netzenpässen", Shaker Verlag, Aachen, 2013
- [3.14] A. Pawellek, L. Hofmann: „Dynamisches Engpassmanagement für den Netzregelverbund“, VDE Kongress 2016 Internet der Dinge, Mannheim, Deutschland, 07.-08. November 2016.
- [3.15] C. Zimmer: „Berücksichtigung des internationalen Stromhandels bei der Betriebsplanung europäischer Übertragungsnetzbetreiber“, Aachen, Klinkenberg Verlag, 2000
- [3.16] E. H. Moore: „On the reciprocal of the general algebraic matrix“, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 26, pp. 394-395, 1920
- [3.17] R. Penrose: "A generalized inverse for matrices", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 51, pp 406-413, July 1955
- [3.18] T. Leveringhaus and L. Hofmann, "Comparison of methods for state prediction: Power Flow Decomposition (PFD), AC Power Transfer Distribution factors (AC-PTDFs), and Power Transfer Distribution factors (PTDFs)" 2014 IEEE PES Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC), Hong Kong, 2014
- [3.19] D. Mende, D. S. Stock, T. Hennig, L. Löwer and L. Hofmann, "Multiobjective optimization in congestion management considering technical and economic aspects" 2016 IEEE PES Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC), Xi'an, 2016
- [3.20] Z. B. Kremens and M. Labuzek, "Load flow analysis incorporating frequency as a state vector variable", Ninth International Conference on Harmonics and Quality of Power. Proceedings (Cat. No.00EX441), Orlando, FL, 2000
- [3.21] CIGRE Working Group C4.605, "Modelling and Aggregation of Loads in Flexible Power Networks", ISBN : 978-2-85873-261-6, Februar 2014

### 4. Kapitel

- [4.1] K. Aoki, M. Kanezashi: "A Modified Newton Method For Optimal Power Flow Using Quadratic Approximated Power Flow" in Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on , vol.PAS-104, no.8, pp.2119-2125, Aug. 1985
- [4.2] H. Glavitsch, M. Spoerry: "Quadratic Loss Formula For Reactive Dispatch" in Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on , vol.PAS-102, no.12, pp.3850-3858, Dec. 1983 doi: 10.1109/TPAS.1983.317899
- [4.3] *MATLAB Release 2015a*, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.

- [4.4] W. D. Rosehart, C. A. Canizares, Vannelli, “*Sequential methods in solving economic power flow problems*” Electrical and Computer Engineering, 1997. Engineering Innovation: Voyage of Discovery. IEEE 1997 Canadian Conference on, St. Johns, Nfld., 1997
- [4.5] N. Maratos: “*Exact penalty function algorithms for finite dimensional and control optimization problems*”, London, Univ., Imperial College, Ph.D. 1978
- [4.6] A. F. Izmailov : “*A New Technique for Avoiding the Maratos Effect*”, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow State University, Moscow, 119992 Russia, 2008
- [4.7] C.-M. Tang, J.-B. Jian: “*A sequential quadratically constrained quadratic programming method with an augmented Lagrangian line search function*”, Journal of Computational and Applied Mathematics 220, pp. 525–547, 2008
- [4.8] M. Papageorgiou, M. Leibold, M. Buss: “*Optimierung – Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*“, Springer Vieweg, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2015

## 5. Kapitel

- [5.1] M. Tawarmalani, N. V. Sahinidis: “*Convexification and Global Optimization in Continuous and Mixed-Integer Nonlinear Programming*”, Springer-Science+Business Media, 2002
- [5.2] M. Tawarmalani, N. V. Sahinidis: “*A polyhedral branch-and-cut approach to global optimization, Mathematical Programming*”, 103(2), 225-249, 2005
- [5.3] N. V. Sahinidis: “*BARON 14.4.0: Global Optimization of Mixed-Integer Nonlinear Programs*”, User's manual, 2014.
- [5.4] R. Misener, C. A. Floudas: „*Global Optimization of Mixed-Integer Quadratically-Constrained Quadratic Programs (MIQCQP) through Piecewise-Linear and Edge-Concave Relaxations*”, Mathematical Programming; 136 (1) pp. 155-182; 2012
- [5.5] G. Gamrath, T. Fischer, T. Gally, A. M. Gleixner, G. Hendel, T. Koch, S. J. Maher, M. Miltenberger, B. Müller, M. E. Pfetsch, C. Puchert, D. Rehfeldt, S. Schenker, R. Schwarz, F. Serrano, Y. Shinano, S. Vigerske, D. Weninger, M. Winkler, J. T. Witt, J. Witzig: „*The SCIP Optimization Suite 3.2*“, ZIB-Report (15-60), Zuse Institute Berlin, Takustr. 7, 14195 Berlin, 2016
- [5.6] J. Currie, D. I. Wilson: “*OPTI: Lowering the Barrier Between Open Source Optimizers and the Industrial MATLAB User*” Foundations of Computer-Aided Process Operations, Georgia, USA, 2012
- [5.7] GAMS Development Corporation. General Algebraic Modeling System (GAMS) Release 24.2.1. Washington, DC, USA, 2013.
- [5.8] IBM: “*IBM ILOG CPLEX Optimization Studio*”, Version 12.6.3
- [5.9] Gurobi Optimization, Inc.: “*Gurobi Optimizer Reference Manual*”, 2016, <http://www.gurobi.com>
- [5.10] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: „*Taschenbuch der Mathematik für Ingenieure und Studenten der Technischen Hochschulen*“, 4. Überarbeitet und erweiterte Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1999
- [5.11] A. d'Aspremont, S. Boyd: “*Relaxations and Randomized Methods for Nonconvex QCQPs*”, EE392o, Stanford University, Autumn 2003
- [5.12] B. Schildt: „*Strategische Produktions- und Distributionsplanung – Betriebliche Standortoptimierung bei degressiv verlaufenden Produktionskosten*“, Deutscher Universitätsverlag, Wiesbaden 1994

- [5.13] P. Rubin: „*Piecewise-linear Functions in Math Programs*“, Oktober 2010, online abrufbar unter: <http://orinanobworld.blogspot.de/2010/10/piecewise-linear-functions-in-math.html>
- [5.14] J. E. Mitchell: „*Modeling piecewise linear functions*“, Dezember 2003, online abrufbar unter: <http://homepages.rpi.edu/~mitchj/handouts/piecewise/>
- [5.15] J. Linderoth: „*IE418: Integer Programming*“, Department of Industrial and Systems Engineering, Lehigh University, Januar 2005, online abrufbar unter: <http://homepages.cae.wisc.edu/~linderot/classes/ie418/lecture2.pdf>

### 6. Kapitel

- [6.1] Beschlusskammer 8 der Bundesnetzagentur für Elektrizität, Gas, Telekommunikation, Post und Eisenbahnen: „§ 13 Abs. 1a EnWG in Verbindung mit §§ 29 Abs. 1, 54 Abs. 1, 2 EnWG, Festlegung von Kriterien für die Bestimmung einer angemessenen Vergütung bei strombedingten Redispatchmaßnahmen und bei spannungsbedingten Anpassungen der Wirkleistungseinspeisung“, BK8-12-019, 30.10.2012
- [6.2] Beschlusskammer 8 der Bundesnetzagentur für Elektrizität, Gas, Telekommunikation, Post und Eisenbahnen: „Rücknahme der Festlegung von Kriterien für die Bestimmung einer angemessenen Vergütung bei strombedingten Redispatchmaßnahmen und bei spannungsbedingten Anpassungen der Wirkleistungseinspeisung (BK 8-12-019) mit Wirkung zum 17.12.2012.“, BK8-12-019-A, 19.08.2015
- [6.3] Institut für Netz- und Anwendungstechnik, „Zukünftige Bereitstellung von Blindleistung und anderen Maßnahmen für die Netzsicherheit“, Dienstleistungsauftrag im Auftrag des Bundesministerium für Wirtschaft und Energie, Aktenzeichen: 03MAP315, 09. September 2016

### 7. Kapitel

- [7.1] H. Barrios, A. Roehder, H. Natemeyer, A. Schnettler: „*A Benchmark Case for Network Expansion Methods*“, Powertech Eindhoven 2015: Eindhoven, Niederlande, 29 June – 2 Juli 2015
- [7.2] Institut für Hochspannungstechnik, RWTH Aachen: „*Integration von DC-Systemen in bestehende vermaschte AC-Systeme*“, Verbundvorhaben im Auftrag des Bundesministerium für Wirtschaft und Energie, Aktenzeichen: 03ET7502A, Dezember 2012 – Mai 2016
- [7.3] R. Christie, „*Power Systems Test Case Archive*“ Aug. 1993, Online verfügbar unter: [http://www2.ee.washington.edu/research/pstca/pfl18/pg\\_tca118bus.htm](http://www2.ee.washington.edu/research/pstca/pfl18/pg_tca118bus.htm)
- [7.4] Institut für Hochspannungstechnik, RWTH Aachen: „*Jahresbericht 2014/15*“, 31.03.2015
- [7.5] M. Hundeshagen: „*Ganzzahlige Optimierung von Schaltzuständen*“, Projektarbeit am Fachgebiet Elektrische Energieversorgung des Instituts für Elektrische Energiesysteme der Leibniz Universität Hannover, P-1, 2016
- [7.6] D. Yang, P. Yang: „*Numerical instabilities and convergence control for convex approximation methods*“ *Nonlinear Dynamics* (2010) 61: 605–622, Springer Science+Business Media B.V. 2010
- [7.7] T. Leveringhaus and L. Hofmann, „*Optimal power flow comprising congestions and voltage management by global quadratic optimization of active and reactive power*“ IEEE PES POWERCON 2016, Wollongong, Australia, 28. September–01. October 2016.

### 8. Kapitel

**9. Kapitel**

- [9.1] E. Handschin: “*Elektrische Energieübertragungssysteme I. Stationärer Betriebszustand*“, Hüthig Verlag, Januar 1987
- [9.2] M. Zivic Djurovic, A. Milacic, M.Krsulja: “*A simplified Model of quadratic cost function for thermal Generators*”, Annals of DAAAM for 2012 & Proceedings of the 23rd International DAAAM Symposium
- [9.3] T. Breithaupt, S. Garske, T. Rendel, L. Hofmann: “*Methodological Approach for Integrated Grid and Market Simulation of Coherent Distribution and Transmission Systems*”, EnviroInfo 2013, Hamburg, Germany



## 11 Anhang

In den Unterabschnitten dieses Anhangs wird eine Vielzahl von Herleitungen, deren Ergebnisse in der vorstehenden Arbeit verwendet wurden, detailliert dargestellt. Ziel der Herleitungen ist es, Formeln für die ersten und zweiten Ableitungen der in der Zielfunktion und den Nebenbedingungen des Optimierungsproblems verwendeten Funktionen zu erhalten. Mit Hilfe der hergeleiteten kompakten Formeln kann die Berechnung der Jakobi- und Hessematrizen deutlich schneller erfolgen als beispielsweise mit denen in MATLAB integrierten Differenzierungsfunktionen. Obwohl einige Formeln und Funktionen umfangreich in ihrer Darstellung sind, folgt daraus nicht, dass ihre Berechnung numerisch aufwendig ist. So wird beispielsweise für die quadratische Näherung der Umkehrfunktion – wie bei der linearen Näherung – nur die Inverse der Jakobimatrix der Leistungsdifferenzgleichung benötigt. Weitere numerisch aufwendige Invertierungen sind nicht notwendig. Einige der Matrizenmultiplikationen haben einen etwas höheren Zeit- und Speicherbedarf, wenn mindestens eine der beteiligten Matrizen nicht spärlich, sondern vollbesetzt ist, was bei den Hessematrizen der Umkehrfunktion der Leistungsdifferenzgleichung der Fall ist. Verglichen mit dem Zeitbedarf der Optimierung haben die Berechnungen der Jakobi- und Hessematrizen aber einen vernachlässigbaren Zeitanteil. Gleiches gilt für die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Hessematrizen im Rahmen der Hauptachsentransformation.

Analog zu Kapitel 2 werden zur Unterscheidung von Knoten- und Zweiggrößen (vgl. Abschnitt 2.1) und für eine bessere Übersichtlichkeit im Folgenden im ersten tiefgestellten Index von Vektoren, Matrizen und Cell-Arrays immer die jeweiligen Dimensionen angegeben. Die Benennung der Jakobi- und Hessematrizen erfolgt auf Basis des Zählers und des Nenners der jeweiligen Ableitungen. Für Vektoren werden Kleinbuchstaben im Namen verwendet und für Matrizen Großbuchstaben. Die Ziffern 1 oder 2 am Ende des Namens kennzeichnen, ob es sich um die erste oder die zweite Ableitung handelt. Die skalaren Elemente eines Vektors oder einer Matrix werden mit Kleinbuchstaben geschrieben.

### 11.1 Herleitung der Taylorpolynome zweiter Ordnung

In den folgenden Abschnitten werden die Hilfsvektoren und -matrizen aus **Tabelle 11.1** bis **Tabelle 11.5** für die Berechnung der Jakobi- und Hessematrizen benötigt.  $X$  gibt die Ordnung der Vektoren beziehungsweise Matrizen an und  $x$  die Position eines Elements.

**Tabelle 11.1** Hilfsvektoren und -matrizen für die Berechnung der Jakobi- und Hessematrizen

Hilfsvektor $\mathbf{e}_x$ , der auf allen Positionen das Element 1 enthält.	Hilfsvektor $\mathbf{e}_{x,x}$ , der nur auf der Position $x$ das Nicht-Null-Element 1 enthält.
Diagonalmatrix $\mathbf{E}_x = \text{diag}(\mathbf{e}_x)$	Diagonalmatrix $\mathbf{E}_{x,x} = \text{diag}(\mathbf{e}_{x,x})$ , die nur auf dem Diagonalelement $x$ das Nicht-Null-Element 1 enthält

**Tabelle 11.2** Hilfsmatrizen der Admittanzen

$\mathbf{G}_{ZZ} = \text{Re}\{\mathbf{Y}_{ZZ}\}$	$\mathbf{B}_{ZZ} = \text{Im}\{\mathbf{Y}_{ZZ}\}$
$\mathbf{G}_{KK} = \text{Re}\{\mathbf{Y}_{KK}\}$	$\mathbf{B}_{KK} = \text{Im}\{\mathbf{Y}_{KK}\}$

**Tabelle 11.3** Hilfsmatrizen der Spannungen

$\mathbf{U}_K = \text{diag}(\mathbf{u}_K)$	$\mathbf{U}_K = \text{diag}(\mathbf{u}_K)$
$\mathbf{U}_{K,r} = \text{diag}(\text{Re}\{\mathbf{u}_K\})$	$\mathbf{U}_{K,i} = \text{diag}(\text{Im}\{\mathbf{u}_K\})$
$\mathbf{U}_Z = \text{diag}(\mathbf{u}_Z)$	

**Tabelle 11.4** Hilfsmatrizen der Ströme

$\mathbf{I}_{K,r} = \text{diag}(\text{Re}\{\mathbf{i}_K\})$	$\mathbf{I}_{K,i} = \text{diag}(\text{Im}\{\mathbf{i}_K\})$
$\mathbf{I}_{inv_Z} = \text{diag}(\mathbf{e}_Z / \mathbf{i}_Z)$	
$\mathbf{i}_{Z,r,bez} = \mathbf{I}_{inv_Z} \cdot \mathbf{i}_{Z,r}$	$\mathbf{i}_{Z,i,bez} = \mathbf{I}_{inv_Z} \cdot \mathbf{i}_{Z,i}$
$\mathbf{I}_{Z,r} = \text{diag}(\mathbf{i}_{Z,r,bez})$	$\mathbf{I}_{Z,i} = \text{diag}(\mathbf{i}_{Z,i,bez})$
$\mathbf{I}_{ZZ} = \mathbf{I}_{inv_Z} \cdot \mathbf{Y}_{ZZ} \cdot \mathbf{U}_Z$	
$\mathbf{I}_{ZZ,r} = \text{Re}\{\mathbf{I}_{ZZ}\}$	$\mathbf{I}_{ZZ,i} = \text{Im}\{\mathbf{I}_{ZZ}\}$

**Tabelle 11.5** Hilfsmatrizen der Leistungen

$\mathbf{P}_{KK} = \text{Re}\{3\mathbf{U}_K \mathbf{Y}_{KK}^* \mathbf{U}_K^*\}$	$\mathbf{Q}_{KK} = \text{Im}\{3\mathbf{U}_K \mathbf{Y}_{KK}^* \mathbf{U}_K^*\}$
$\mathbf{P}_K = \text{diag}(\mathbf{p}_K)$	$\mathbf{Q}_K = \text{diag}(\mathbf{q}_K)$

### 11.1.1 Netzleistungen

Die komplexe Leistungsgleichung zeigt Gl. (11.1) und Gl. (11.2) zeigt die Leistungsdifferenzgleichung:

$$\mathbf{s}_K = 3\mathbf{U}_K \mathbf{i}_K^* = 3\mathbf{U}_K \mathbf{Y}_{KK}^* \mathbf{u}_K^* \quad (11.1)$$

$$\Delta \mathbf{s}_K = 3\mathbf{U}_K \mathbf{Y}_{KK}^* \mathbf{u}_K^* - \mathbf{s}_{K,0} \quad (11.2)$$

Für die weitere Verarbeitung wird die Leistungsdifferenzgleichung in Gl. (11.3) in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta p_k \\ \Delta q_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left\{ 3 \underline{U}_k \underline{Y}_{kk}^* \underline{u}_k^* \right\} \\ \operatorname{Im} \left\{ 3 \underline{U}_k \underline{Y}_{kk}^* \underline{u}_k^* \right\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{k,0} \\ q_{k,0} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} U_{k,r} & U_{k,i} \\ U_{k,i} & -U_{k,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{k,r} \\ i_{k,i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{k,0} \\ q_{k,0} \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} U_{k,r} & U_{k,i} \\ U_{k,i} & -U_{k,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{kk} & -\mathbf{B}_{kk} \\ \mathbf{B}_{kk} & \mathbf{G}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,r} \\ u_{k,i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{k,0} \\ q_{k,0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.3)$$

In den folgenden Unterabschnitten werden die Jakobi- und Hessematrizen zunächst in Polarkoordinaten und dann in kartesischen Koordinaten hergeleitet.

### 11.1.1.1 Jakobi- und Hessematrizen in Polarkoordinaten

Für die Wirkleistungsdifferenz eines Knotens ergibt sich Gl. (11.4). Für die Blindleistungsdifferenz eines Knotens ergibt sich Gl. (11.5).

$$\Delta P_k = 3U_k \sum_{l=1}^K Y_{kl} U_l \cos(\delta_k - \delta_l - \alpha_{kl}) - P_{k,0} = \sum_{l=1}^K p_{kl} - P_{k,0} \quad (11.4)$$

$$\Delta Q_k = 3U_k \sum_{l=1}^K Y_{kl} U_l \sin(\delta_k - \delta_l - \alpha_{kl}) - Q_{k,0} = \sum_{l=1}^K q_{kl} - Q_{k,0} \quad (11.5)$$

Für die ersten Ableitungen der Wirkleistungs- und Blindleistungsdifferenzen eines Knotens ergeben sich die Gleichungen in **Tabelle 11.6**. Die ersten Ableitungen können beispielsweise [2.2] entnommen werden, werden aber zur Herleitung der leicht abweichenden Darstellungsweise in dieser Arbeit erneut aufgeführt.

**Tabelle 11.6** Erste Ableitungen der Leistungsdifferenzgleichung in Polarkoordinaten

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_k} = -\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K q_{kl} = q_{kk} - \sum_{l=1}^K q_{kl}$	$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_k} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K p_{kl} = -p_{kk} + \sum_{l=1}^K p_{kl}$
$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial \delta_l} = q_{kl}$	$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \delta_l} = -p_{kl}$
$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial U_k / U_{k,0}} = p_{kk} + \sum_{l=1}^K p_{kl}$	$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial U_k / U_{k,0}} = q_{kk} + \sum_{l=1}^K q_{kl}$
$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial U_l / U_{l,0}} = p_{kl}$	$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial U_l / U_{l,0}} = q_{kl}$

Auf Basis der ersten Ableitungen aus **Tabelle 11.6** können die Jakobimatrizen in Gl. (11.6) ermittelt werden.

$$PQDU1_{2K2K} = \begin{bmatrix} PD_{KK} & PU_{KK} \\ QD_{KK} & QU_{KK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{KK} - Q_K & P_{KK} + P_K \\ -P_{KK} + P_K & Q_{KK} + Q_K \end{bmatrix} \quad (11.6)$$

Für die Herleitung der Hessematrix jeder Knotenleistung, müssen die ersten Ableitungen in **Tabelle 11.6** erneut nach jeweils allen Zustandsgrößen abgeleitet werden. Das Vorgehen wird in **Tabelle 11.7** bis **Tabelle 11.10** für die Wirk- und Blindleistung eines Knotens dargestellt.

**Tabelle 11.7** Ableitungen nach den Winkeln der Ableitungen nach den Winkeln der Leistungsdifferenzgleichung

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_k \partial \delta_k} = -\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K p_{kl} = p_{kk} - \sum_{l=1}^K p_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_k \partial \delta_k} = -\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K q_{kl} = q_{kk} - \sum_{l=1}^K q_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_k \partial \delta_l} = p_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_k \partial \delta_l} = q_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_l \partial \delta_k} = p_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_l \partial \delta_k} = q_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_l \partial \delta_l} = -p_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_l \partial \delta_l} = -q_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_l \partial \delta_m} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_l \partial \delta_m} = 0$

Die Untermatrix  $PDD_{KK,k}$  der Hessematrix  $PDU2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.7) und die Untermatrix  $QDD_{KK,k}$  der Hessematrix  $QDU2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.8) berechnet werden.

$$PDD_{KK,k} = E_{K,k} \cdot P_{KK} + (E_{K,k} \cdot P_{KK})^T - \text{diag}(e_{K,k} \cdot P_{KK}) - E_{K,k} \cdot P_K \quad (11.7)$$

$$QDD_{KK,k} = E_{K,k} \cdot Q_{KK} + (E_{K,k} \cdot Q_{KK})^T - \text{diag}(e_{K,k} \cdot Q_{KK}) - E_{K,k} \cdot Q_K \quad (11.8)$$

**Tabelle 11.8** Ableitungen nach den Spannungen der Ableitungen nach den Winkeln der Leistungs-differenzgleichung

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_k \partial U_k / U_{k,0}} = - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K q_{kl} = q_{kk} - \sum_{l=1}^K q_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_k \partial U_k / U_{k,0}} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K p_{kl} = -p_{kk} + \sum_{l=1}^K p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_k \partial U_l / U_{l,0}} = -q_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_k \partial U_l / U_{l,0}} = p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_l \partial U_k / U_{k,0}} = q_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_l \partial U_k / U_{k,0}} = -p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_l \partial U_l / U_{l,0}} = q_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_l \partial U_l / U_{l,0}} = -p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial \delta_l \partial U_m / U_{m,0}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial \delta_l \partial U_m / U_{m,0}} = 0$

Die Untermatrix  $\mathbf{PDU}_{KK,k}$  der Hessematrix  $\mathbf{PDU2}_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.9) und die Untermatrix  $\mathbf{QDU}_{KK,k}$  der Hessematrix  $\mathbf{QDU2}_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.10) berechnet werden.

$$\mathbf{PDU}_{KK,k} = -\mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_{KK} + (\mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_{KK})^T + \text{diag}(\mathbf{e}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_{KK}) - \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_K \quad (11.9)$$

$$\mathbf{QDU}_{KK,k} = \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_{KK} - (\mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_{KK})^T - \text{diag}(\mathbf{e}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_{KK}) + \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_K \quad (11.10)$$

**Tabelle 11.9** Ableitungen nach den Winkeln der Ableitungen nach den Spannungen der Leistungs-differenzgleichung

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_k / U_{k,0} \partial \delta_k} = - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K q_{kl} = q_{kk} - \sum_{l=1}^K q_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_k / U_{k,0} \partial \delta_k} = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^K p_{kl} = -p_{kk} + \sum_{l=1}^K p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_k / U_{k,0} \partial \delta_l} = q_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_k / U_{k,0} \partial \delta_l} = -p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial \delta_k} = -q_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial \delta_k} = p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial \delta_l} = q_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial \delta_l} = -p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial \delta_m} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial \delta_m} = 0$

Die Untermatrix  $\mathbf{PUD}_{KK,k}$  der Hessematrix  $\mathbf{PDU2}_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.11) und die Untermatrix  $\mathbf{QUD}_{KK,k}$  der Hessematrix  $\mathbf{QDU2}_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.12) berechnet werden.

$$\mathbf{PUD}_{KK,k} = \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_{KK} - (\mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_{KK})^T + \text{diag}(\mathbf{e}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_{KK}) - \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_K \quad (11.11)$$

$$\mathbf{QUD}_{KK,k} = -\mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_{KK} + (\mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_{KK})^T - \text{diag}(\mathbf{e}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_{KK}) + \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_K \quad (11.12)$$

**Tabelle 11.10** Ableitungen nach den Spannungen der Ableitungen nach den Spannungen der Leistungsdifferenzgleichung<sup>22</sup>

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_k / U_{k,0} \partial U_k / U_{k,0}} = p_{kk} + p_{kk}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_k / U_{k,0} \partial U_k / U_{k,0}} = q_{kk} + q_{kk}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_k / U_{k,0} \partial U_l / U_{l,0}} = p_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_k / U_{k,0} \partial U_l / U_{l,0}} = q_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial U_k / U_{k,0}} = p_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial U_k / U_{k,0}} = q_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial U_l / U_{l,0}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial U_l / U_{l,0}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial U_m / U_{m,0}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_l / U_{l,0} \partial U_m / U_{m,0}} = 0$

Die Untermatrix  $\mathbf{PUU}_{KK,k}$  der Hessematrix  $\mathbf{PDU2}_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.13) und die Untermatrix  $\mathbf{QUU}_{KK,k}$  der Hessematrix  $\mathbf{QDU2}_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.14) berechnet werden.

$$\mathbf{PUU}_{KK,k} = \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_{KK} + (\mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{P}_{KK})^T \quad (11.13)$$

$$\mathbf{QUU}_{KK,k} = \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_{KK} + (\mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{Q}_{KK})^T \quad (11.14)$$

Zusammenfassend ergibt sich aus den Gln. (11.7) bis (11.14)  $\mathbf{PDU2}_{2K2K,k}$  in Gl. (11.15) und  $\mathbf{QDU2}_{2K2K,k}$  in Gl. (11.16).

$$\mathbf{PDU2}_{2K2K,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{PDD}_{KK,k} & \mathbf{PDU}_{KK,k} \\ \mathbf{PUD}_{KK,k} & \mathbf{PUU}_{KK,k} \end{bmatrix} \quad (11.15)$$

$$\mathbf{QDU2}_{2K2K,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{QDD}_{KK,k} & \mathbf{QDU}_{KK,k} \\ \mathbf{QUD}_{KK,k} & \mathbf{QUU}_{KK,k} \end{bmatrix} \quad (11.16)$$

<sup>22</sup> Bei den zweiten Ableitungen nach den Spannungen ist zu berücksichtigen, dass die Elemente  $p_{kl}$  und  $q_{kl}$  der ersten Ableitungen nach den Spannungen bereits einmal nach den Spannungen abgeleitet und in bezogenen Koordinaten lediglich mit den konstanten Spannungen  $U_{l,0}$  multipliziert worden sind.

### 11.1.1.2 Jakobi- und Hessematrizen in kartesischen Koordinaten

Für die Wirkleistungsdifferenz eines Knotens ergibt sich Gl. (11.17) kartesischen Koordinaten.

Für die Blindleistungsdifferenz eines Knotens ergibt sich Gl. (11.18) kartesischen Koordinaten.

$$\Delta P_k = 3U_{k,r} \sum_{l=1}^K (G_{kl}U_{l,r} - B_{kl}U_{l,i}) + 3U_{k,i} \sum_{l=1}^K (B_{kl}U_{l,r} + G_{kl}U_{l,i}) - P_k \quad (11.17)$$

$$\Delta Q_k = 3U_{k,i} \sum_{l=1}^K (G_{kl}U_{l,r} - B_{kl}U_{l,i}) - 3U_{k,r} \sum_{l=1}^K (B_{kl}U_{l,r} + G_{kl}U_{l,i}) - Q_k \quad (11.18)$$

Für die ersten Ableitungen der Wirkleistungs- und Blindleistungsdifferenzen eines Knotens ergeben sich die Gleichungen in **Tabelle 11.11**. Die ersten Ableitungen können beispielsweise [2.2] entnommen werden, werden aber zur Herleitung der leicht abweichenden Darstellungsweise in dieser Arbeit erneut aufgeführt.

**Tabelle 11.11** erste Ableitungen der Leistungsdifferenzgleichung in kartesischen Koordinaten

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial U_{k,r}} = 3(G_{kk}U_{k,r} + U_{k,i}B_{kk})$ $+ 3 \sum_{l=1}^K (G_{kl}U_{l,r} - B_{kl}U_{l,i})$	$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial U_{k,r}} = 3(U_{k,i}G_{kk} - B_{kk}U_{k,r})$ $+ 3 \sum_{l=1}^K (B_{kl}U_{l,r} + G_{kl}U_{l,i})$
$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial U_{l,r}} = 3(U_{k,r}G_{kl} + U_{k,i}B_{kl})$	$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial U_{l,r}} = 3(U_{k,i}G_{kl} - U_{k,r}B_{kl})$
$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial U_{k,i}} = 3(G_{kk}U_{k,i} - U_{k,r}B_{kk})$ $+ 3 \sum_{l=1}^K (B_{kl}U_{l,r} + G_{kl}U_{l,i})$	$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial U_{k,i}} = -3(U_{k,r}G_{kk} + B_{kk}U_{k,i})$ $+ 3 \sum_{l=1}^K (G_{kl}U_{l,r} - B_{kl}U_{l,i})$
$\frac{\partial \Delta P_k}{\partial U_{l,i}} = 3(U_{k,i}G_{kl} - U_{k,r}B_{kl})$	$\frac{\partial \Delta Q_k}{\partial U_{l,i}} = -3(U_{k,r}G_{kl} + U_{k,i}B_{kl})$

Auf Basis der ersten Ableitungen in **Tabelle 11.6** können die Jakobimatrizen in Gl. (11.6) ermittelt werden.

$$\begin{aligned}
 PQRII_{2K \times 2K} &= \begin{bmatrix} PR_{KK} & PI_{KK} \\ QR_{KK} & QI_{KK} \end{bmatrix} \\
 &= 3 \begin{bmatrix} U_{K,r} \cdot G_{KK} + U_{K,i} \cdot B_{KK} + I_{K,r} & U_{K,i} \cdot G_{KK} - U_{K,r} \cdot B_{KK} + I_{K,i} \\ U_{K,i} \cdot G_{KK} - U_{K,r} \cdot B_{KK} - I_{K,i} & -U_{K,r} \cdot G_{KK} - U_{K,i} \cdot B_{KK} + I_{K,r} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (11.19)$$

Für die Herleitung der Hessematrix jeder Knotenleistung, müssen die ersten Ableitungen in **Tabelle 11.12** erneut nach jeweils allen Zustandsgrößen abgeleitet werden. Das Vorgehen wird in **Tabelle 11.12** bis **Tabelle 11.15** für die Wirk- und Blindleistung eines Knotens dargestellt.

**Tabelle 11.12** Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Leistungsdifferenzgleichung

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,r}} = 2 \cdot 3 \cdot g_{kk}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,r}} = -2 \cdot 3 \cdot b_{kk}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{k,r} \partial U_{l,r}} = 3 \cdot g_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{k,r} \partial U_{l,r}} = -3 \cdot b_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{k,r}} = 3 \cdot g_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{k,r}} = -3 \cdot b_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{l,r}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{l,r}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{m,r}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{m,r}} = 0$

Die Untermatrix  $PRR_{KK,k}$  der Hessematrix  $PRI2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.20) und die Untermatrix  $QRR_{KK,k}$  der Hessematrix  $QRI2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.21) berechnet werden.

$$PRR_{KK,k} = E_k \cdot G_{KK} + (E_k \cdot G_{KK})^T \quad (11.20)$$

$$QRR_{KK,k} = -E_k \cdot B_{KK} - (E_k \cdot B_{KK})^T \quad (11.21)$$

**Tabelle 11.13** Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Leistungsdifferenzgleichung

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,i}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,i}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{k,r} \partial U_{l,i}} = -3 \cdot b_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{k,r} \partial U_{l,i}} = -3 \cdot g_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{k,i}} = 3 \cdot b_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{k,i}} = 3 \cdot g_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{l,i}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{l,i}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{m,i}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,r} \partial U_{m,i}} = 0$

Die Untermatrix  $PRI_{KK,k}$  der Hessematrix  $PRI2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.22) und die Untermatrix  $QRI_{KK,k}$  der Hessematrix  $QRI2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.23) berechnet werden.

$$PRI_{KK,k} = -E_k \cdot B_{KK} + (E_k \cdot B_{KK})^T \quad (11.22)$$

$$\mathbf{QRI}_{\text{KK},k} = -\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{\text{KK}} + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{\text{KK}})^T \quad (11.23)$$

**Tabelle 11.14** Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Leistungsdifferenzgleichung

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,r}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,r}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{k,i} \partial U_{l,r}} = 3 \cdot b_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{k,i} \partial U_{l,r}} = 3 \cdot g_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{k,r}} = -3 \cdot b_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{k,r}} = -3 \cdot g_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{l,r}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{l,r}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{m,r}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{m,r}} = 0$

Die Untermatrix  $\mathbf{PIR}_{\text{KK},k}$  der Hessematrix  $\mathbf{PRI2}_{2\text{K}2\text{K},k}$  kann mit Gl. (11.22) und die Untermatrix  $\mathbf{QIR}_{\text{KK},k}$  der Hessematrix  $\mathbf{QRI2}_{2\text{K}2\text{K},k}$  kann mit Gl. (11.23) berechnet werden.

$$\mathbf{PIR}_{\text{KK},k} = \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{\text{KK}} - (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{\text{KK}})^T \quad (11.24)$$

$$\mathbf{QIR}_{\text{KK},k} = \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{\text{KK}} - (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{\text{KK}})^T \quad (11.25)$$

**Tabelle 11.15** Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Leistungsdifferenzgleichung

Wirkleistung eines Knotens	Blindleistung eines Knotens
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,i}} = 2 \cdot 3 \cdot g_{kk}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,i}} = -2 \cdot 3 \cdot b_{kk}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{k,i} \partial U_{l,i}} = 3 \cdot g_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{k,i} \partial U_{l,i}} = -3 \cdot b_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{k,i}} = 3 \cdot g_{kl}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{k,i}} = -3 \cdot b_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{l,i}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{l,i}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta P_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{m,i}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_k}{\partial U_{l,i} \partial U_{m,i}} = 0$

Die Untermatrix  $\mathbf{PII}_{\text{KK},k}$  der Hessematrix  $\mathbf{PRI2}_{2\text{K}2\text{K},k}$  kann mit Gl. (11.26) und die Untermatrix  $\mathbf{QII}_{\text{KK},k}$  der Hessematrix  $\mathbf{QRI2}_{2\text{K}2\text{K},k}$  kann mit Gl. (11.27) berechnet werden.

$$\mathbf{PII}_{\text{KK},k} = \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{\text{KK}} + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{\text{KK}})^T \quad (11.26)$$

$$\mathbf{QII}_{\text{KK},k} = -\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{\text{KK}} - (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{\text{KK}})^T \quad (11.27)$$

Zusammenfassend ergibt sich aus den Gln. (11.20) bis (11.27)  $PRI2_{2K2K,k}$  in Gl. (11.28) und  $QRI2_{2K2K,k}$  in Gl. (11.29).

$$PRI2_{2K2K,k} = \begin{bmatrix} PRR_{KK,k} & PRI_{KK,k} \\ PIR_{KK,k} & PII_{KK,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{KK} + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{KK})^T & -\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{KK} + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{KK})^T \\ \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{KK} - (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{KK})^T & \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{KK} + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{KK})^T \end{bmatrix} \quad (11.28)$$

$$QRI2_{2K2K,k} = \begin{bmatrix} QRR_{KK,k} & QRI_{KK,k} \\ QIR_{KK,k} & QII_{KK,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{KK} - (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{KK})^T & -\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{KK} + (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{KK})^T \\ \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{KK} - (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{G}_{KK})^T & -\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{KK} - (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{B}_{KK})^T \end{bmatrix} \quad (11.29)$$

### 11.1.2 Netzverluste

Die komplexe Leistungsbilanzgleichung zeigt Gl. (11.30). Gl. (11.31) zeigt die Leistungsbilanzdifferenzgleichung:

$$\underline{S}_{ges} = 3\underline{\mathbf{u}}_K^T \underline{\mathbf{i}}_K^* = 3\underline{\mathbf{u}}_K^T \underline{\mathbf{Y}}_{KK}^* \underline{\mathbf{u}}_K^* \quad (11.30)$$

$$\Delta \underline{S}_{ges} = 3\underline{\mathbf{u}}_K^T \underline{\mathbf{Y}}_{KK}^* \underline{\mathbf{u}}_K^* - \underline{S}_{ges,0} \quad (11.31)$$

Die Änderung der Netzverluste in Gl. (11.32) ergibt sich aus dem Realteil von Gl. (11.31).

$$\Delta P_V = \text{Re} \left\{ 3\underline{\mathbf{u}}_K^T \underline{\mathbf{Y}}_{KK}^* \underline{\mathbf{u}}_K^* \right\} - P_{V,0} \quad (11.32)$$

In den folgenden Unterabschnitten werden der Gradient und die Hessematrix zunächst in Polarkoordinaten und dann in kartesischen Koordinaten hergeleitet.

#### 11.1.2.1 Gradient und Hessematrix in Polarkoordinaten

Für die Änderung der Netzverluste ergibt sich Gl. (11.33) in Polarkoordinaten.

$$\Delta P_V = \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K 3U_m Y_{mn} U_n \cos(\delta_m - \delta_n - \alpha_{mn}) - P_{V,0} = \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K p_{mn} - P_{V,0} \quad (11.33)$$

Für die Komponenten des Gradienten der Änderung der Netzverluste ergeben sich die Gleichungen in **Tabelle 11.16**.

**Tabelle 11.16** Erste Ableitungen der Änderung der Netzverluste in Polarkoordinaten

$\frac{\partial \Delta P_V}{\partial \delta_k} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^K q_{mk} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^K q_{kn} = \sum_{m=1}^K q_{mk} - \sum_{n=1}^K q_{kn}$	$\frac{\partial \Delta P_V}{\partial U_k / U_{k,0}} = \sum_{m=1}^K p_{mk} + \sum_{n=1}^K p_{kn}$
---	--

Auf Basis der ersten Ableitungen aus **Tabelle 11.16** kann der Gradient in Gl. (11.34) ermittelt werden.

$$pdu1_{2K} = [pd_K \quad pu_K] = \left[ \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK} - \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK}^T \quad \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK} + \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK}^T \right] \quad (11.34)$$

Für die Herleitung der Hessematrix Änderung der Netzverluste, müssen die ersten Ableitungen in **Tabelle 11.16** erneut nach jeweils allen Zustandsgrößen abgeleitet werden. **Tabelle 11.17** zeigt die Herleitungen.

**Tabelle 11.17** Zweite Ableitungen der Änderung der Netzverluste in Polarkoordinaten<sup>22</sup>

$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial \delta_k \partial \delta_k} = - \sum_{m=1, m \neq k}^K p_{mk} - \sum_{n=1, n \neq k}^K p_{kn} = 2p_{kk} - \sum_{m=1}^K p_{mk} - \sum_{n=1}^K p_{kn}$	$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial \delta_k \partial \delta_l} = p_{lk} + p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial \delta_k \partial U_k / U_{k,0}} = \sum_{m=1, m \neq k}^K q_{mk} - \sum_{n=1, n \neq k}^K q_{kn} = \sum_{m=1}^K q_{mk} - \sum_{n=1}^K q_{kn}$	$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial \delta_k \partial U_l / U_{l,0}} = q_{lk} - q_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_k / U_{k,0} \partial \delta_k} = \sum_{m=1, m \neq k}^K q_{mk} - \sum_{n=1, n \neq k}^K q_{kn} = \sum_{m=1}^K q_{mk} - \sum_{n=1}^K q_{kn}$	$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_k / U_{k,0} \partial \delta_l} = -q_{lk} + q_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_k / U_{k,0} \partial U_k / U_{k,0}} = 2p_{kk}$	$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_k / U_{k,0} \partial U_l / U_{l,0}} = p_{lk} + p_{kl}$

Die Untermatrizen  $\mathbf{PDD}_{KK}$ ,  $\mathbf{PDU}_{KK}$ ,  $\mathbf{PUD}_{KK}$  und  $\mathbf{PUU}_{KK}$  der Hessematrix  $\mathbf{PDU2}_{2K2K}$  können mit den Gln. (11.35) bis (11.38) berechnet werden.

$$\mathbf{PDD}_{KK} = \mathbf{P}_{KK}^T + \mathbf{P}_{KK} - \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK}) - \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK}^T) \quad (11.35)$$

$$\mathbf{PDU}_{KK} = \mathbf{Q}_{KK}^T - \mathbf{Q}_{KK} + \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK}) - \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK}^T) \quad (11.36)$$

$$\mathbf{PUD}_{KK} = -\mathbf{Q}_{KK}^T + \mathbf{Q}_{KK} + \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK}) - \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK}^T) \quad (11.37)$$

$$\mathbf{PUU}_{KK} = \mathbf{P}_{KK}^T + \mathbf{P}_{KK} \quad (11.38)$$

Zusammenfassend ergibt sich aus den Gln. (11.35) bis (11.38)  $\mathbf{PDU2}_{2K2K}$  in Gl. (11.39).

$$\mathbf{PDU2}_{2K2K} = \begin{bmatrix} \mathbf{PDD}_{KK} & \mathbf{PDU}_{KK} \\ \mathbf{PUD}_{KK} & \mathbf{PUU}_{KK} \end{bmatrix} \quad (11.39)$$

Zur Kontrolle kann  $\mathbf{PDU2}_{2K2K}$  mit Hilfe von Gl. (11.40) auch aus der Summe der Hessematrizen von  $\mathbf{PDU2}_{2K2K,k}$  gebildet werden.

$$\mathbf{PDU2}_{2K2K} = \sum_{k=1}^K \mathbf{PDU2}_{2K2K,k} \quad (11.40)$$

Um den Gradienten und die Hessematrix in bezogenen Koordinaten zu erhalten, müssen noch die Berechnungen in den Gln. (11.41) und (11.42) angewendet werden.

$$\mathbf{pvdu1}_{2K} = \mathbf{pdu1}_{2K} / P_{V,0} \quad (11.41)$$

$$\mathbf{PVDU2}_{2K2K} = \mathbf{PDU2}_{2K2K} / P_{V,0} \quad (11.42)$$

### 11.1.2.2 Gradient und Hessematrix in kartesischen Koordinaten

Für die Änderung der Netzverluste ergibt sich Gl. (11.33) in kartesischen Koordinaten.

$$\Delta P_V = 3 \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \left( U_{m,r} (G_{mn} U_{n,r} - B_{mn} U_{n,i}) + U_{m,i} (B_{mn} U_{n,r} + G_{mn} U_{n,i}) \right) - P_{V,0} \quad (11.43)$$

Für die Komponenten des Gradienten der Änderung der Netzverluste ergeben sich die Gleichungen in **Tabelle 11.18**.

**Tabelle 11.18** Erste Ableitungen der Änderung der Netzverluste in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial \Delta P_V}{\partial U_{k,r}} = 3 \sum_{n=1}^K (G_{kn} U_{n,r} - B_{kn} U_{n,i}) + 3 \sum_{m=1}^K U_{m,r} G_{mk} + 3 \sum_{m=1}^K U_{m,i} B_{mk}$
$\frac{\partial \Delta P_V}{\partial U_{k,i}} = 3 \sum_{n=1}^K (B_{kn} U_{n,r} + G_{kn} U_{n,i}) + 3 \sum_{m=1}^K U_{m,i} G_{mk} - 3 \sum_{m=1}^K U_{m,r} B_{mk}$

Auf Basis der ersten Ableitungen aus **Tabelle 11.18** kann der Gradient in Gl. (11.44) ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{pri}_{2K} &= [\mathbf{pr}_K \quad \mathbf{pi}_K] \\ \mathbf{pr}_K &= \mathbf{e}_K \cdot (\mathbf{G}_{KK} \cdot \mathbf{U}_{K,r} - \mathbf{B}_{KK} \cdot \mathbf{U}_{K,i}) + \mathbf{e}_K \cdot (\mathbf{U}_{K,r} \cdot \mathbf{G}_{KK} + \mathbf{U}_{K,i} \cdot \mathbf{B}_{KK})^T \\ \mathbf{pi}_K &= \mathbf{e}_K \cdot (\mathbf{B}_{KK} \cdot \mathbf{U}_{K,r} + \mathbf{G}_{KK} \cdot \mathbf{U}_{K,i}) + \mathbf{e}_K \cdot (\mathbf{U}_{K,i} \cdot \mathbf{G}_{KK} - \mathbf{U}_{K,r} \cdot \mathbf{B}_{KK})^T \end{aligned} \quad (11.44)$$

Für die Herleitung der Hessematrix jeder Knotenleistung, müssen die ersten Ableitungen in **Tabelle 11.18** erneut nach jeweils allen Zustandsgrößen abgeleitet werden. **Tabelle 11.19** zeigt die Herleitungen.

**Tabelle 11.19** Zweite Ableitungen der Änderung der Netzverluste in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,r}} = 3 \cdot (G_{kk} + G_{kk})$	$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_{k,r} \partial U_{l,r}} = 3 \cdot (G_{kl} + G_{lk})$
$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,i}} = 3 \cdot (-B_{kk} + B_{kk}) = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_{k,r} \partial U_{l,i}} = 3 \cdot (-B_{kl} + B_{lk})$
$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,r}} = 3 \cdot (B_{kk} - B_{kk}) = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_{k,i} \partial U_{l,r}} = 3 \cdot (B_{kl} - B_{lk})$
$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,i}} = 3 \cdot (G_{kk} + G_{kk})$	$\frac{\partial^2 \Delta P_V}{\partial U_{k,i} \partial U_{l,i}} = 3 \cdot (G_{kl} + G_{lk})$

Die Untermatrizen  $\mathbf{PRR}_{KK}$ ,  $\mathbf{PRI}_{KK}$ ,  $\mathbf{PIR}_{KK}$  und  $\mathbf{PII}_{KK}$  der Hessematrix  $\mathbf{PRI}_{2K \times 2K}$  können mit den Gln. (11.45) bis (11.48) berechnet werden.

$$\mathbf{PRR}_{\text{KK}} = 3 \cdot (\mathbf{G}_{\text{KK}} + \mathbf{G}_{\text{KK}}^{\text{T}}) \quad (11.45)$$

$$\mathbf{PRI}_{\text{KK}} = 3 \cdot (-\mathbf{B}_{\text{KK}} + \mathbf{B}_{\text{KK}}^{\text{T}}) \quad (11.46)$$

$$\mathbf{PIR}_{\text{KK}} = 3 \cdot (\mathbf{B}_{\text{KK}} - \mathbf{B}_{\text{KK}}^{\text{T}}) \quad (11.47)$$

$$\mathbf{PII}_{\text{KK}} = 3 \cdot (\mathbf{G}_{\text{KK}} + \mathbf{G}_{\text{KK}}^{\text{T}}) \quad (11.48)$$

Zusammenfassend ergibt sich aus den Gln. (11.45) bis (11.48)  $\mathbf{PRI2}_{2\text{K}2\text{K}}$  in Gl.(11.49).

$$\mathbf{PRI2}_{2\text{K}2\text{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{PRR}_{\text{KK}} & \mathbf{PRI}_{\text{KK}} \\ \mathbf{PIR}_{\text{KK}} & \mathbf{PII}_{\text{KK}} \end{bmatrix} \quad (11.49)$$

Zur Kontrolle kann  $\mathbf{PRI2}_{2\text{K}2\text{K}}$  mit Hilfe von Gl. (11.50) auch aus der Summe der Hessematrizen von  $\mathbf{PRI2}_{2\text{K}2\text{K},k}$  gebildet werden.

$$\mathbf{PRI2}_{2\text{K}2\text{K}} = \sum_{k=1}^{\text{K}} \mathbf{PRI2}_{2\text{K}2\text{K},k} \quad (11.50)$$

Um den Gradienten und die Hessematrix in bezogenen Koordinaten zu erhalten, müssen noch die Berechnungen in den Gln. (11.51) und (11.52) angewendet werden.

$$pvri1_{2\text{K}} = pri1_{2\text{K}} / P_{\text{V},0} \quad (11.51)$$

$$PVRI2_{2\text{K}2\text{K}} = \mathbf{PRI2}_{2\text{K}2\text{K}} / P_{\text{V},0} \quad (11.52)$$

### 11.1.3 Blindleistungsbedarf des Netzes

Die Änderung des Blindleistungsbedarfes des Netzes Gl. (11.53) ergibt sich aus dem Imaginärteil von Gl. (11.31)

$$\Delta Q_{\text{V}} = \text{Im} \left\{ 3 \mathbf{u}_{\text{K}}^{\text{T}} \mathbf{Y}_{\text{KK}}^* \mathbf{u}_{\text{K}} \right\} - Q_{\text{V},0} \quad (11.53)$$

In den folgenden Unterabschnitten werden der Gradient und die Hessematrix zunächst in Polarkoordinaten und dann in kartesischen Koordinaten hergeleitet.

#### 11.1.3.1 Gradient und Hessematrix in Polarkoordinaten

Für die Änderung des Blindleistungsbedarfes ergibt sich Gl. (11.54).

$$\Delta Q_{\text{V}} = \sum_{k=1}^{\text{K}} \sum_{l=1}^{\text{K}} 3 U_k Y_{kl} U_l \sin(\delta_k - \delta_l - \alpha_{kl}) - Q_{\text{V},0} = \sum_{k=1}^{\text{K}} \sum_{l=1}^{\text{K}} q_{kl} - Q_{\text{V},0} \quad (11.54)$$

Für die Komponenten des Gradienten der Änderung des Blindleistungsbedarfes ergeben sich die Gleichungen in **Tabelle 11.20**.

**Tabelle 11.20** Erste Ableitungen der Änderung des Blindleistungsbedarfes in Polarkoordinaten

$\frac{\partial \Delta Q_V}{\partial \delta_k} = -\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^K p_{mk} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^K p_{kn} = -\sum_{m=1}^K p_{mk} + \sum_{n=1}^K p_{kn}$	$\frac{\partial \Delta Q_V}{\partial U_k / U_{k,0}} = \sum_{m=1}^K q_{mk} + \sum_{n=1}^K q_{kn}$
---	--

Auf Basis der ersten Ableitungen aus **Tabelle 11.20** kann der Gradient in Gl. (11.55) ermittelt werden.

$$\mathbf{qdu1}_{2K} = [\mathbf{qd}_K \quad \mathbf{qu}_K] = \left[ -\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK} + \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK}^T \quad \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK} + \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK}^T \right] \quad (11.55)$$

Für die Herleitung der Hessematrix jeder Knotenleistung, müssen die ersten Ableitungen in **Tabelle 11.20** erneut nach jeweils allen Zustandsgrößen abgeleitet werden. **Tabelle 11.21** zeigt die Herleitungen.

**Tabelle 11.21** Zweite Ableitungen der Änderung des Blindleistungsbedarfes in Polarkoordinaten<sup>22</sup>

$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial \delta_k \partial \delta_k} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^K q_{mk} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^K q_{kn} = \sum_{m=1}^K q_{mk} + \sum_{n=1}^K q_{kn} - 2q_{kk}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial \delta_k \partial \delta_l} = -q_{lk} - q_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial \delta_k \partial U_k / U_{k,0}} = -\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^K p_{mk} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^K p_{kn} = -\sum_{m=1}^K p_{mk} + \sum_{n=1}^K p_{kn}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial \delta_k \partial U_l / U_{l,0}} = -p_{lk} + p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_k / U_{k,0} \partial \delta_k} = -\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^K p_{mk} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^K p_{kn} = -\sum_{m=1}^K p_{mk} + \sum_{n=1}^K p_{kn}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_k / U_{k,0} \partial \delta_l} = p_{lk} - p_{kl}$
$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_k / U_{k,0} \partial U_k / U_{k,0}} = 2q_{kk}$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_k / U_{k,0} \partial U_l / U_{l,0}} = q_{lk} + q_{kl}$

Die Untermatrizen  $\mathbf{QDD}_{KK}$ ,  $\mathbf{QDU}_{KK}$ ,  $\mathbf{QUD}_{KK}$  und  $\mathbf{QUU}_{KK}$  der Hessematrix  $\mathbf{QDU2}_{2K2K}$  können mit den Gln. (11.56) bis (11.59) berechnet werden.

$$\mathbf{QDD}_{KK} = -\mathbf{Q}_{KK}^T - \mathbf{Q}_{KK} + \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK}) + \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{Q}_{KK}^T) \quad (11.56)$$

$$\mathbf{QDU}_{KK} = -\mathbf{P}_{KK}^T + \mathbf{P}_{KK} - \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK}) + \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK}^T) \quad (11.57)$$

$$\mathbf{QUD}_{KK} = \mathbf{P}_{KK}^T - \mathbf{P}_{KK} - \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK}) + \text{diag}(\mathbf{e}_K \cdot \mathbf{P}_{KK}^T) \quad (11.58)$$

$$\mathbf{QUU}_{KK} = \mathbf{Q}_{KK}^T + \mathbf{Q}_{KK} \quad (11.59)$$

Zusammenfassend ergibt sich aus den Gln. (11.56) bis (11.59)  $\mathbf{QDU2}_{2K2K}$  in Gl. (11.60).

$$\mathbf{QDU2}_{2K2K} = \begin{bmatrix} \mathbf{QDD}_{KK} & \mathbf{QDU}_{KK} \\ \mathbf{QUD}_{KK} & \mathbf{QUU}_{KK} \end{bmatrix} \quad (11.60)$$

Zur Kontrolle kann  $\mathbf{QDU2}_{2K2K}$  mit Hilfe von Gl. (11.61) auch aus der Summe der Hessematrizen von  $\mathbf{QDU2}_{2K2K,k}$  gebildet werden.

$$QDU2_{2K2K} = \sum_{k=1}^K QDU2_{2K2K,k} \quad (11.61)$$

### 11.1.3.2 Gradient und Hessematrix in kartesischen Koordinaten

Für die Änderung des Blindleistungsbedarfes ergibt sich Gl. (11.62) in kartesischen Koordinaten.

$$\Delta Q_V = 3 \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K \left( U_{m,r} (-B_{mn} U_{n,r} - G_{mn} U_{n,i}) + U_{m,i} (G_{mn} U_{n,r} - B_{mn} U_{n,i}) \right) - Q_{V,0} \quad (11.62)$$

Für die Komponenten des Gradienten der Änderung des Blindleistungsbedarfes ergeben sich die Gleichungen in **Tabelle 11.22**.

**Tabelle 11.22** Erste Ableitungen der Änderung des Blindleistungsbedarfes in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial \Delta Q_V}{\partial U_{k,r}} = 3 \sum_{n=1}^K (-B_{kn} U_{n,r} - G_{kn} U_{n,i}) - 3 \sum_{m=1}^K U_{m,r} B_{mk} + 3 \sum_{m=1}^K U_{m,i} G_{mk}$
$\frac{\partial \Delta Q_V}{\partial U_{k,i}} = 3 \sum_{n=1}^K (G_{kn} U_{n,r} - B_{kn} U_{n,i}) - 3 \sum_{m=1}^K U_{m,i} B_{mk} + 3 \sum_{m=1}^K U_{m,r} G_{mk}$

Auf Basis der ersten Ableitungen aus **Tabelle 11.22** kann der Gradient in Gl. (11.63) ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{qri}_{2K} &= [\mathbf{qr}_K \quad \mathbf{qi}_K] \\ \mathbf{qr}_K &= \mathbf{e}_K \cdot (-\mathbf{B}_{KK} \cdot \mathbf{U}_{K,r} - \mathbf{G}_{KK} \cdot \mathbf{U}_{K,i}) + \mathbf{e}_K \cdot (-\mathbf{U}_{K,r} \cdot \mathbf{B}_{KK} + \mathbf{U}_{K,i} \cdot \mathbf{G}_{KK})^T \\ \mathbf{qi}_K &= \mathbf{e}_K \cdot (\mathbf{G}_{KK} \cdot \mathbf{U}_{K,r} - \mathbf{B}_{KK} \cdot \mathbf{U}_{K,i}) + \mathbf{e}_K \cdot (-\mathbf{U}_{K,i} \cdot \mathbf{B}_{KK} + \mathbf{U}_{K,r} \cdot \mathbf{G}_{KK})^T \end{aligned} \quad (11.63)$$

Für die Herleitung der Hessematrix jeder Knotenleistung, müssen die ersten Ableitungen in **Tabelle 11.22** erneut nach jeweils allen Zustandsgrößen abgeleitet werden. **Tabelle 11.23** zeigt die Herleitungen.

**Tabelle 11.23** Zweite Ableitungen der Änderung des Blindleistungsbedarfes in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,r}} = 3 \cdot (-B_{kk} - B_{kk})$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_{k,r} \partial U_{l,r}} = 3 \cdot (-B_{kl} - B_{lk})$
$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,i}} = 3 \cdot (-G_{kk} + G_{kk}) = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_{k,r} \partial U_{l,i}} = 3 \cdot (-G_{kl} + G_{lk})$
$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,r}} = 3 \cdot (G_{kk} - G_{kk}) = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_{k,i} \partial U_{l,r}} = 3 \cdot (G_{kl} - G_{lk})$
$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,i}} = 3 \cdot (-B_{kk} - B_{kk})$	$\frac{\partial^2 \Delta Q_V}{\partial U_{k,i} \partial U_{l,i}} = 3 \cdot (-B_{kl} - B_{lk})$

Die Untermatrizen  $\mathbf{QRR}_{KK}$ ,  $\mathbf{QRI}_{KK}$ ,  $\mathbf{QIR}_{KK}$  und  $\mathbf{QII}_{KK}$  der Hessematrix  $\mathbf{QRI2}_{2K2K}$  können mit den Gln. (11.45) bis (11.48) berechnet werden.

$$\mathbf{QRR}_{KK} = 3 \cdot (-\mathbf{B}_{KK} - \mathbf{B}_{KK}^T) \quad (11.64)$$

$$\mathbf{QRI}_{KK} = 3 \cdot (-\mathbf{G}_{KK} + \mathbf{G}_{KK}^T) \quad (11.65)$$

$$\mathbf{QIR}_{KK} = 3 \cdot (\mathbf{G}_{KK} - \mathbf{G}_{KK}^T) \quad (11.66)$$

$$\mathbf{QII}_{KK} = 3 \cdot (-\mathbf{B}_{KK} - \mathbf{B}_{KK}^T) \quad (11.67)$$

Zusammenfassend ergibt sich aus den Gln. (11.45) bis (11.48)  $\mathbf{QRI2}_{2K2K}$  in Gl.(11.49).

$$\mathbf{QRI2}_{2K2K} = \begin{bmatrix} \mathbf{QRR}_{KK} & \mathbf{QRI}_{KK} \\ \mathbf{QIR}_{KK} & \mathbf{QII}_{KK} \end{bmatrix} \quad (11.68)$$

Zur Kontrolle kann  $\mathbf{QRI2}_{2K2K}$  mit Hilfe von Gl. (11.50) auch aus der Summe der Hessematrizen von  $\mathbf{QRI2}_{2K2K,k}$  gebildet werden.

$$\mathbf{QRI2}_{2K2K} = \sum_{k=1}^K \mathbf{QRI2}_{2K2K,k} \quad (11.69)$$

### 11.1.4 Verteilter Slack

Ausgehend von Abschnitt 3.2.3 ergibt sich Gl. (11.70) für den Verteilten Slack.

$$\Delta p_{K,vs}(\underline{\mathbf{u}}_K) = \mathbf{bf}_K \cdot \Delta p(\underline{\mathbf{u}}_K) = \mathbf{bf}_K \cdot \left( \operatorname{Re} \left\{ 3 \underline{\mathbf{u}}_K^T \mathbf{Y}_{KK}^* \underline{\mathbf{u}}_K \right\} \Big|_{\Delta U_S=0} - p_{V,0} \right) \quad (11.70)$$

Die Ableitungen des Verteilten Slacks ergeben sich aus den Ableitungen der Netzverluste durch Konstanthalten einer Spannung nach Betrag und Phase in Polarkoordinaten beziehungsweise nach Real- und Imaginärteil in kartesischen Koordinaten. Es muss hierzu ein beliebiger Slack-

knoten  $s$  ausgewählt werden. Zur Berechnung der Jakobi- und Hessematrizen wird in Anlehnung an die Hilfsvektoren und -matrizen in **Tabelle 11.1** ein Hilfsvektor  $\mathbf{e}_{K,s}$  beziehungsweise eine Hilfsmatrix  $\mathbf{E}_{K,s}$  benötigt, die nur an der Stelle  $s$ , beziehungsweise auf dem Diagonalelement  $s$  einen Nicht-Null-Eintrag 1 haben.

In den folgenden Unterabschnitten werden die Jakobi- und die Hessematrizen zunächst in Polarkoordinaten und dann in kartesischen Koordinaten hergeleitet.

Als Nachteil des Verteilten Slacks ist zu erwähnen, dass die Zeilen der beteiligten Knoten in der Jakobimatrix sowie deren Hessematrizen nicht mehr spärlich, sondern in der Regel (bis auf die Spalte des Knotens mit konstanter Spannung) voll besetzt sind, was zusätzlichen Speicherplatz erfordert, die Umkehrung numerisch aufwendiger macht und zeitlich verlängert. In den Fallstudien dieser Arbeit hat sich dieser Zeitnachteil aber als vernachlässigbar klein gegenüber dem Zeitaufwand für die Optimierung herausgestellt. Der vorgenannte Nachteil des Verteilten Slacks ist beim Verteilten Slack für einzelne Regelzonen nicht so ausgeprägt, da die Zeilen der beteiligten Knoten in den sich ergebenden Jakobi- und Hessematrizen nicht voll besetzt sind.

#### 11.1.4.1 Jakobi- und Hessematrizen in Polarkoordinaten

Für die Jakobimatrix des Verteilten Slacks ergibt sich Gl. (11.71) aus dem Gradienten der Netzverluste.

$$\mathbf{VSDU1}_{2K2K} = \begin{bmatrix} \mathbf{bf}_K \\ \mathbf{0}_K \end{bmatrix} \cdot \mathbf{pdu1}_{2K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} & \mathbf{0}_K \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} \end{bmatrix} \quad (11.71)$$

Für eine Hessematrix  $\mathbf{VSDU2}_{2K2K,k}$  aus  $\{\mathbf{VSDU2}_{2K2K}\}_{2K}$  ergibt sich Gl. (11.72) aus der Hessematrix der Netzverluste.

$$\mathbf{VSDU2}_{2K2K,k} = \mathbf{bf}_k \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} & \mathbf{0}_K \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{PDU2}_{2K2K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} & \mathbf{0}_K \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} \end{bmatrix} \quad (11.72)$$

#### 11.1.4.2 Jakobi- und Hessematrizen in kartesischen Koordinaten

Für die Jakobimatrix des Verteilten Slacks ergibt sich Gl. (11.73) aus dem Gradienten der Netzverluste.

$$\mathbf{VSRI1}_{2K2K} = \begin{bmatrix} \mathbf{bf}_K \\ \mathbf{0}_K \end{bmatrix} \cdot \mathbf{pri1}_{2K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} & \mathbf{0}_K \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} \end{bmatrix} \quad (11.73)$$

Für eine Hessematrix  $\mathbf{VSRI2}_{2K2K,k}$  aus  $\{\mathbf{VSRI2}_{2K2K}\}_{2K}$  ergibt sich Gl. (11.72) aus der Hessematrix der Netzverluste.

$$VSRI2_{2K2K,k} = bf_k \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} & \mathbf{0}_K \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} \end{bmatrix} \cdot PRI2_{2K2K} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} & \mathbf{0}_K \\ \mathbf{0}_K & \mathbf{E}_K - \mathbf{E}_{K,s} \end{bmatrix} \quad (11.74)$$

### 11.1.5 Herleitung und Vereinfachung der ersten und zweiten Ableitung einer Betragsfunktion

In diesem Abschnitt werden zunächst die erste und zweite Ableitung einer allgemeinen Betragsfunktion der Form von Gl. (11.75) hergeleitet.

Gl. (11.75) zeigt eine Betragsfunktion mit den Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  und  $b_2$  deren erste und zweite Ableitungen gesucht werden.

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \quad (11.75)$$

Für die folgenden Darstellungen wird verallgemeinernd angenommen, dass alle Koeffizienten eine Funktion von zwei Variablen  $x$  und  $y$  sind, nach denen die Koeffizienten und somit auch die Betragsfunktion abgeleitet werden können. Im Folgenden wird die Ableitung nach der Variablen  $x$  durch einen Hochstrich gekennzeichnet. In Gl. (11.76) ergibt sich die erste Ableitung mit Hilfe der Kettenregel.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} &= \frac{\cancel{Z}'(a_1 + a_2)(a_1' + a_2') + \cancel{Z}'(b_1 + b_2)(b_1' + b_2')}{\cancel{Z}'\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}} \\ &= \frac{(a_1 + a_2)(a_1' + a_2') + (b_1 + b_2)(b_1' + b_2')}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}} \end{aligned} \quad (11.76)$$

Die so ermittelte Gleichung lässt sich für mehr als zwei Summanden verallgemeinern. Es ergibt sich Gl. (11.77).

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\left(\sum_k a_k\right)^2 + \left(\sum_k b_k\right)^2} = \frac{\sum_k a_k \cdot \sum_k a_k' + \sum_k b_k \cdot \sum_k b_k'}{\sqrt{\left(\sum_k a_k\right)^2 + \left(\sum_k b_k\right)^2}} \quad (11.77)$$

Im Folgenden wird die Ableitung nach der Variablen  $y$  durch einen Hochstern gekennzeichnet. Mit Hilfe der Quotientenregel, der Produktregel und der Kettenregel ergibt sich Gl. (11.78).

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dy} \frac{(a_1 + a_2)(a'_1 + a'_2) + (b_1 + b_2)(b'_1 + b'_2)}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}} \\
& \frac{((a_1 + a_2)(a'_1 + a'_2) + (b_1 + b_2)(b'_1 + b'_2))^* \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}}{=} \\
& \frac{-((a_1 + a_2)(a'_1 + a'_2) + (b_1 + b_2)(b'_1 + b'_2)) \left( \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \right)^*}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^2} \quad (11.78) \\
& = \frac{((a_1 + a_2)(a'_1 + a'_2) + (b_1 + b_2)(b'_1 + b'_2))^* \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^2} \\
& = \frac{((a_1 + a_2)(a'_1 + a'_2) + (b_1 + b_2)(b'_1 + b'_2)) \left( (a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*) + (b_1 + b_2)(b_1^* + b_2^*) \right)}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^3}
\end{aligned}$$

Durch Erweitern des ersten Bruchs mit  $\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$  ergibt sich Gl. (11.79) mit gemeinsamen Hauptnenner.

$$\begin{aligned}
& \frac{\left( (a_1^* + a_2^*)(a'_1 + a'_2) + (a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*) \right) \left( (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 \right)}{=} \\
& \frac{\left( (a_1 + a_2)^2 (a'_1 + a'_2)(a_1^* + a_2^*) \right.}{=} \\
& \quad \left. + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(a'_1 + a'_2)(b_1^* + b_2^*) \right. \\
& \quad \left. + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(a_1^* + a_2^*)(b'_1 + b'_2) \right. \\
& \quad \left. + (b_1 + b_2)^2 (b'_1 + b'_2)(b_1^* + b_2^*) \right)}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^3} \quad (11.79)
\end{aligned}$$

Nach dem Ausmultiplizieren der Produkte summieren sich einige der Summanden in Gl. (11.80) zu Null.

$$\begin{aligned}
& \frac{\begin{aligned} & \cancel{(a_1 + a_2)^2 (a_1^* + a_2^*) (a_1' + a_2')} + (a_1 + a_2)^2 (a_1 + a_2) (a_1^* + a_2^*) \\ & + (a_1 + a_2)^2 (b_1^* + b_2^*) (b_1' + b_2') + (a_1 + a_2)^2 (b_1 + b_2) (b_1^* + b_2^*) \\ & + (b_1 + b_2)^2 (a_1^* + a_2^*) (a_1' + a_2') + (b_1 + b_2)^2 (a_1 + a_2) (a_1^* + a_2^*) \\ & + \cancel{(b_1 + b_2)^2 (b_1^* + b_2^*) (b_1' + b_2')} + (b_1 + b_2)^2 (b_1 + b_2) (b_1^* + b_2^*) \\ & - \cancel{(a_1 + a_2)^2 (a_1^* + a_2^*) (a_1' + a_2')} - (a_1 + a_2) (b_1 + b_2) (a_1' + a_2') (b_1^* + b_2^*) \\ & - \cancel{(a_1 + a_2) (b_1 + b_2) (a_1^* + a_2^*) (b_1' + b_2')} - \cancel{(b_1 + b_2)^2 (b_1^* + b_2^*) (b_1' + b_2')} \end{aligned}}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^3} \quad (11.80)
\end{aligned}$$

In Gl. (11.81) werden die Summanden sortiert nach solchen, in denen die zweiten Ableitungen der Koeffizienten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  und  $b_2$  enthalten sind, und solchen, bei denen die vorgenannte Bedingungen nicht erfüllt ist, und auf separate Brüche geschrieben.

$$\begin{aligned}
& \frac{\begin{aligned} & (a_1 + a_2)^2 (b_1^* + b_2^*) (b_1' + b_2') \\ & + (b_1 + b_2)^2 (a_1^* + a_2^*) (a_1' + a_2') \\ & - (a_1 + a_2) (b_1 + b_2) \left( \begin{aligned} & (a_1' + a_2') (b_1^* + b_2^*) \\ & + (a_1^* + a_2^*) (b_1' + b_2') \end{aligned} \right) \end{aligned}}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^3} + \frac{\begin{aligned} & (a_1 + a_2)^2 (a_1 + a_2) (a_1^* + a_2^*) \\ & + (a_1 + a_2)^2 (b_1 + b_2) (b_1^* + b_2^*) \\ & + (b_1 + b_2)^2 (a_1 + a_2) (a_1^* + a_2^*) \\ & + (b_1 + b_2)^2 (b_1 + b_2) (b_1^* + b_2^*) \end{aligned}}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^3} \quad (11.81)
\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren der quadratischen Produkte im ersten Bruch und durch Ausklammern im zweiten Bruch ergibt sich Gl. (11.82).

$$\begin{aligned}
& \frac{\begin{aligned} & (a_1 + a_2) (a_1 + a_2) (b_1^* + b_2^*) (b_1' + b_2') \\ & + (b_1 + b_2) (b_1 + b_2) (a_1^* + a_2^*) (a_1' + a_2') \\ & - (a_1 + a_2) (b_1 + b_2) (a_1' + a_2') (b_1^* + b_2^*) \\ & - (a_1 + a_2) (b_1 + b_2) (a_1^* + a_2^*) (b_1' + b_2') \end{aligned}}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^3} + \frac{\begin{aligned} & \cancel{((a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2)} \left( \begin{aligned} & (a_1 + a_2) (a_1^* + a_2^*) \\ & + (b_1 + b_2) (b_1^* + b_2^*) \end{aligned} \right) \end{aligned}}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^{\cancel{3}}} \quad (11.82)
\end{aligned}$$

Durch Faktorisieren im Zähler des ersten Bruchs und Kürzen des quadratischen Betrags im zweiten Bruch, ergibt sich Gl. (11.83).

$$\frac{((a_1 + a_2)(b'_1 + b'_2) - (b_1 + b_2)(a'_1 + a'_2))((a_1 + a_2)(b_1^* + b_2^*) - (b_1 + b_2)(a_1^* + a_2^*))}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}^3} + \frac{((a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*) + (b_1 + b_2)(b_1^* + b_2^*))}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}} \quad (11.83)$$

Die so ermittelte Gleichung lässt sich für mehr als zwei Summanden verallgemeinern. Es ergibt sich Gl. (11.84).

$$\frac{\left(\sum_k a_k \cdot \sum_k b'_k - \sum_k b_k \cdot \sum_k a'_k\right)\left(\sum_k a_k \cdot \sum_k b_k^* - \sum_k b_k \cdot \sum_k a_k^*\right)}{\sqrt{\left(\sum_k a_k\right)^2 + \left(\sum_k b_k\right)^2}^3} + \frac{\left(\sum_k a_k \cdot \sum_k a_k^* + \sum_k b_k \cdot \sum_k b_k^*\right)}{\sqrt{\left(\sum_k a_k\right)^2 + \left(\sum_k b_k\right)^2}} \quad (11.84)$$

Die Eigenschaft, dass die Faktoren im Zähler der Brüche eine ähnliche Form wie die ersten Ableitungen in Gl. (11.77) haben, wird in den folgenden Abschnitten benutzt.

### 11.1.6 Spannungsbeträge

Da die Spannungen als Zustandsvektor dienen, können die Spannungsbeträge in Gl. (11.85) in Polarkoordinaten und in kartesischen Koordinaten als Funktionen des Zustandsvektors berechnet werden.

$$\mathbf{u}_K = |\underline{\mathbf{u}}_K| = \sqrt{(\mathbf{u}_{K,r})^2 + (\mathbf{u}_{K,i})^2} \quad (11.85)$$

Für die Spannungsänderungen ergibt sich Gl. (11.86) und für die bezogenen Spannungsänderungen.

$$\Delta \mathbf{u}_K = |\underline{\mathbf{u}}_K| - \mathbf{u}_{K,0} = \sqrt{(\mathbf{u}_{K,r})^2 + (\mathbf{u}_{K,i})^2} - \mathbf{u}_{K,0} \quad (11.86)$$

$$\frac{\Delta \mathbf{u}_K}{\mathbf{u}_{K,0}} = \left| \frac{\underline{\mathbf{u}}_K}{\mathbf{u}_{K,0}} \right| - \mathbf{e}_K = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{u}_{K,r}}{\mathbf{u}_{K,0}}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{u}_{K,i}}{\mathbf{u}_{K,0}}\right)^2} - \mathbf{e}_K \quad (11.87)$$

In den folgenden Unterabschnitten werden die Jakobi- und die Hessematrizen zunächst in Polarkoordinaten und dann in kartesischen Koordinaten hergeleitet.

#### 11.1.6.1 Jakobi- und Hessematrizen in Polarkoordinaten

Da in Polarkoordinaten der Betrag der Spannung bereits im Zustandsvektor der Spannungen enthalten ist, besteht ein direkter und linearer Zusammenhang.

Für die Jakobimatrix ergibt sich Gl. (11.88)

$$UDU_{k2K} = [\mathbf{0}_K \quad \mathbf{E}_K] \quad (11.88)$$

Für eine Hessematrix  $UDU_{2K2K,k}$  aus  $\{UDU_{2K2K}\}_{2K}$  ergibt sich Gl. (11.89)

$$UDU_{2K2K,k} = \mathbf{0}_{2K2K} \quad (11.89)$$

### 11.1.6.2 Jakobi- und Hessematrizen in kartesischen Koordinaten

Für die bezogene Änderung eines Knotenspannungsbetrages ergibt sich Gl. (11.90) in kartesischen Koordinaten.

$$\frac{\Delta U_k}{U_{k,0}} = \sqrt{\left(\frac{U_{k,r}}{U_{k,0}}\right)^2 + \left(\frac{U_{k,i}}{U_{k,0}}\right)^2} - 1 \quad (11.90)$$

Für die ersten Ableitungen von Gl. (11.90) ergeben sich mit Hilfe des Zusammenhangs aus Gl. (11.77) die Gleichungen in **Tabelle 11.24**. Die jeweiligen Summen enthalten nur einen Summanden.

**Tabelle 11.24** Erste Ableitungen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,r}} = \frac{U_{k,r}}{U_k \cdot U_{k,0}}$	$\frac{\partial \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),r}} = 0$
$\frac{\partial \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,i}} = \frac{U_{k,i}}{U_k \cdot U_{k,0}}$	$\frac{\partial \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),i}} = 0$

Auf Basis der ersten Ableitungen aus **Tabelle 11.24** können die Jakobimatrizen in Gl. (11.91) ermittelt werden.

$$URH_{k2K} = [U_K^{-1} \cdot U_{K,r} \cdot U_K^{-1} \quad U_K^{-1} \cdot U_{K,i} \cdot U_K^{-1}] = [UR_{KK} \quad UI_{KK}] \quad (11.91)$$

Die zweiten Ableitungen ergeben sich mit Hilfe des Zusammenhangs aus Gl. (11.84). Die Herleitungen sind in **Tabelle 11.25** bis **Tabelle 11.28** zusammengestellt.

**Tabelle 11.25** Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,r}} = \frac{U_{k,i}^2}{U_k^3 \cdot U_{k,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,r} \partial U_{(k+1),r}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),r} \partial U_{k,r}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),r} \partial U_{(k+1),r}} = 0$

Die Untermatrix  $URR_{KK,k}$  der Hessematrix  $URI2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.92) berechnet werden.

$$\begin{aligned} URR_{KK,k} &= \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U}_K^{-1} \cdot \mathbf{U}_{K,i} \cdot \mathbf{U}_K^{-1} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U}_K^{-1} \cdot \mathbf{U}_{K,i} \cdot \mathbf{U}_K^{-1} \right) \right) \\ &= \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U} \mathbf{I}_{KK} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U} \mathbf{I}_{KK} \right) \right) = \mathbf{U} \mathbf{I}_{KK} \cdot \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{U} \mathbf{I}_{KK} \end{aligned} \quad (11.92)$$

**Tabelle 11.26** Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,r} \partial U_{k,i}} = -\frac{U_{k,r} \cdot U_{k,i}}{U_k^3 \cdot U_{k,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,r} \partial U_{(k+1),i}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),r} \partial U_{k,i}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),r} \partial U_{(k+1),i}} = 0$

Die Untermatrix  $URI_{KK,k}$  der Hessematrix  $URI2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.93) berechnet werden.

$$\begin{aligned} URI_{KK,k} &= \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U}_K^{-1} \cdot \mathbf{U}_{K,i} \cdot \mathbf{U}_K^{-1} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( -\mathbf{U}_K^{-1} \cdot \mathbf{U}_{K,r} \cdot \mathbf{U}_K^{-1} \right) \right) \\ &= \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U} \mathbf{I}_{KK} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( -\mathbf{U} \mathbf{R}_{KK} \right) \right) = -\mathbf{U} \mathbf{I}_{KK} \cdot \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{U} \mathbf{R}_{KK} \end{aligned} \quad (11.93)$$

**Tabelle 11.27** Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,r}} = -\frac{U_{k,i} \cdot U_{k,r}}{U_k^3 \cdot U_{k,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,i} \partial U_{(k+1),r}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),i} \partial U_{k,r}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),i} \partial U_{(k+1),r}} = 0$

Die Untermatrix  $UIR_{KK,k}$  der Hessematrix  $URI2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.94) berechnet werden.

$$\begin{aligned} UIR_{KK,k} &= \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( -\mathbf{U}_K^{-1} \cdot \mathbf{U}_{K,r} \cdot \mathbf{U}_K^{-1} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U}_K^{-1} \cdot \mathbf{U}_{K,i} \cdot \mathbf{U}_K^{-1} \right) \right) \\ &= \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( -\mathbf{U} \mathbf{R}_{KK} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U} \mathbf{I}_{KK} \right) \right) = -\mathbf{U} \mathbf{R}_{KK} \cdot \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{U} \mathbf{I}_{KK} \end{aligned} \quad (11.94)$$

**Tabelle 11.28** Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Änderung des Betrages einer Knotenspannung in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,i} \partial U_{k,i}} = \frac{U_{k,r}^2}{U_k^3 \cdot U_{k,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{k,i} \partial U_{(k+1),i}} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),i} \partial U_{k,i}} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta U_k / U_{k,0}}{\partial U_{(k+1),i} \partial U_{(k+1),i}} = 0$

Die Untermatrix  $UII_{KK,k}$  der Hessematrix  $URI2_{2K2K,k}$  kann mit Gl. (11.95) berechnet werden.

$$\begin{aligned} UII_{KK,k} &= \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U}_K^{-1} \cdot \mathbf{U}_{K,r} \cdot \mathbf{U}_K^{-1} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{U}_K^{-1} \cdot \mathbf{U}_{K,r} \cdot \mathbf{U}_K^{-1} \right) \right) \\ &= \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{UR}_{KK} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{K,k} \cdot \left( \mathbf{UI}_{KK} \right) \right) = \mathbf{UR}_{KK} \cdot \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{UR}_{KK} \end{aligned} \quad (11.95)$$

Für eine Hessematrix  $URI2_{2K2K,k}$  aus  $\{URI2_{2K2K}\}_K$  ergibt sich somit zusammenfassend Gl. (11.113).

$$URI2_{2K2K,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{URR}_{KK,k} & \mathbf{URI}_{KK,k} \\ \mathbf{UIR}_{KK,k} & \mathbf{UII}_{KK,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{UI}_{KK} \cdot \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{UI}_{KK} & -\mathbf{UI}_{KK} \cdot \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{UR}_{KK} \\ -\mathbf{UR}_{KK} \cdot \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{UI}_{KK} & \mathbf{UR}_{KK} \cdot \mathbf{E}_{K,k} \cdot \mathbf{UR}_{KK} \end{bmatrix} \quad (11.96)$$

### 11.1.7 Strombeträge

Für die Beträge der Zweigströme gilt Gl. (11.97).

$$\mathbf{i}_Z = \text{abs}(\mathbf{i}_Z) = \sqrt{\mathbf{i}_{Z,r}^2 + \mathbf{i}_{Z,i}^2} \quad (11.97)$$

Für die Stromänderungen ergeben sich die Gln. (11.98) und (11.99) für die bezogenen Stromänderungen.

$$\Delta \mathbf{i}_Z = \text{abs}(\mathbf{i}_Z) - \mathbf{i}_{Z,0} = \sqrt{\mathbf{i}_{Z,r}^2 + \mathbf{i}_{Z,i}^2} - \mathbf{i}_{Z,0} \quad (11.98)$$

$$\frac{\Delta \mathbf{i}_Z}{\mathbf{i}_{Z,0}} = \text{abs} \left( \frac{\mathbf{i}_Z}{\mathbf{i}_{Z,0}} \right) - \mathbf{e}_Z = \sqrt{\left( \frac{\mathbf{i}_{Z,r}}{\mathbf{i}_{Z,0}} \right)^2 + \left( \frac{\mathbf{i}_{Z,i}}{\mathbf{i}_{Z,0}} \right)^2} - \mathbf{e}_Z \quad (11.99)$$

In den folgenden Abschnitten werden die Jakobi- und die Hessematrizen zunächst in Polarkoordinaten und dann in kartesischen Koordinaten hergeleitet.

#### 11.1.7.1 Jakobi- und Hessematrizen in Polarkoordinaten

Für die bezogene Änderung eines Zweigstrombetrages ergibt sich Gl. (11.100) in Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I_z}{I_{z,0}} &= \sqrt{\left( \frac{I_{z,r}}{I_{z,0}} \right)^2 + \left( \frac{I_{z,i}}{I_{z,0}} \right)^2} - 1 = \sqrt{\left( \frac{I_{zz,r} + \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}}{I_{z,0}} \right)^2 + \left( \frac{I_{zz,i} + \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}}{I_{z,0}} \right)^2} - 1 \\ &= \sqrt{\left( \frac{Y_{zz} U_z \cos(\varphi_{zz} + \delta_z)}{i_{z,0}} + \frac{Y_{z(z+1)} U_{(z+1)} \cos(\varphi_{z(z+1)} + \delta_{(z+1)})}{i_{z,0}} \right)^2 + \left( \frac{Y_{zz} U_z \sin(\varphi_{zz} + \delta_z)}{i_{z,0}} + \frac{Y_{z(z+1)} U_{(z+1)} \sin(\varphi_{z(z+1)} + \delta_{(z+1)})}{i_{z,0}} \right)^2} - 1 \end{aligned} \quad (11.100)$$

Für die ersten Ableitungen von Gl. (11.100) ergeben sich mit Hilfe des Zusammenhangs aus Gl. (11.76) die Gleichungen in **Tabelle 11.29**.

**Tabelle 11.29** Erste Ableitungen der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten

$\frac{\partial \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial \delta_z} = \frac{I_{z,i} \cdot I_{zz,r} - I_{z,r} \cdot I_{zz,i}}{I_z \cdot I_{z,0}}$ $a'_1 = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$	$\frac{\partial \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial \delta_{(z+1)}} = \frac{I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r} - I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i}}{I_z \cdot I_{z,0}}$ $a'_1 = 0 \quad a'_2 = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$
$\frac{\partial \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_z / U_{z,0}} = \frac{I_{z,r} \cdot I_{zz,r} + I_{z,i} \cdot I_{zz,i}}{I_z \cdot I_{z,0}}$ $a'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$	$\frac{\partial \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1)} / U_{(z+1),0}} = \frac{I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r} + I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i}}{I_z \cdot I_{z,0}}$ $a'_1 = 0 \quad a'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$

Auf Basis der ersten Ableitungen aus **Tabelle 11.29** können die Jakobimatrizen in Gl. (11.101) ermittelt werden.

$$\mathbf{IDU}_{zzz} = [\mathbf{ID}_{zz} \quad \mathbf{IU}_{zz}] = \left[ \begin{array}{cc} I_{z,i} \cdot I_{zz,r} - I_{z,r} \cdot I_{zz,i} & I_{z,r} \cdot I_{zz,r} + I_{z,i} \cdot I_{zz,i} \end{array} \right] \quad (11.101)$$

Die zweiten Ableitungen ergeben sich mit Hilfe des Zusammenhangs aus Gl. (11.83). Die Herleitungen sind in **Tabelle 11.30** bis **Tabelle 11.33** zusammengestellt.

**Tabelle 11.30** Ableitungen nach den Winkeln der Ableitungen nach den Winkeln der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \delta_z \partial \delta_z} = \frac{\left( I_{z,r} \cdot I_{zz,r} + I_{z,i} \cdot I_{zz,i} \right) \left( I_{z,r} \cdot I_{zz,r} + I_{z,i} \cdot I_{zz,i} \right)}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \delta_z \partial \delta_z} = \frac{\left( I_{z,r} \cdot I_{zz,r} + I_{z,i} \cdot I_{zz,i} \right) \left( I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),r} + I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),i} \right)}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$
$a'_1 = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$	$a'_1 = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$
$a_1^* = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a_2^* = 0 \quad b_1^* = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b_2^* = 0$	$a_1^* = 0 \quad a_2^* = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b_1^* = 0 \quad b_2^* = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$
$a_1^{*'} = -\frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a_2^{*'} = 0 \quad b_1^{*'} = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b_2^{*'} = 0$	$a_1^{*'} = 0 \quad a_2^{*'} = 0 \quad b_1^{*'} = 0 \quad b_2^{*'} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \delta_{(z+1)} \partial \delta_z} = \frac{\left( I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),r} + I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),i} \right) \left( I_{z,r} \cdot I_{zz,r} + I_{z,i} \cdot I_{zz,i} \right)}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \delta_{(z+1)} \partial \delta_z} = \frac{\left( I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),r} + I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),i} \right) \left( I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),r} + I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),i} \right)}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$
$a'_1 = 0 \quad a'_2 = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$	$a'_1 = 0 \quad a'_2 = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$
$a_1^* = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a_2^* = 0 \quad b_1^* = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b_2^* = 0$	$a_1^* = 0 \quad a_2^* = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b_1^* = 0 \quad b_2^* = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$
$a_1^{*'} = 0 \quad a_2^{*'} = 0 \quad b_1^{*'} = 0 \quad b_2^{*'} = 0$	$a_1^{*'} = 0 \quad a_2^{*'} = -\frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b_1^{*'} = 0 \quad b_2^{*'} = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$

Die Untermatrix  $IDD_{ZZ,z}$  der Hessematrix  $IDU2_{ZZ,z}$  kann mit Gl. (11.102) berechnet werden.

$$\begin{aligned}
IDD_{ZZ,z} &= \left( \mathbf{e}_{Z_z} \cdot \left( \mathbf{I}_{Z_r} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,r} + \mathbf{I}_{Z_i} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,i} \right) \right)^\top \cdot \left( \mathbf{e}_{Z_z} \cdot \left( \mathbf{I}_{Z_r} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,r} + \mathbf{I}_{Z_i} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,i} \right) \right) - \text{diag} \left( \mathbf{e}_{Z_z} \cdot \left( \mathbf{I}_{Z_r} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,r} + \mathbf{I}_{Z_i} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,i} \right) \right) \\
&= \left( \mathbf{e}_{Z_z} \cdot \left( \mathbf{I} \mathbf{U}_{ZZ} \right) \right)^\top \cdot \left( \mathbf{e}_{Z_z} \cdot \left( \mathbf{I} \mathbf{U}_{ZZ} \right) \right) - \text{diag} \left( \mathbf{e}_{Z_z} \cdot \left( \mathbf{I} \mathbf{U}_{ZZ} \right) \right) = \mathbf{I} \mathbf{U}_{ZZ}^\top \cdot \mathbf{E}_{Z_z} \cdot \mathbf{I} \mathbf{U}_{ZZ} - \text{diag} \left( \mathbf{e}_{Z_z} \cdot \left( \mathbf{I} \mathbf{U}_{ZZ} \right) \right)
\end{aligned} \tag{11.102}$$

**Tabelle 11.31** Ableitungen nach den Spannungen der Ableitungen nach den Winkeln der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \delta_z \partial U_z / U_{z,0}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{zz,r} + I_{z,i} \cdot I_{zz,i})(I_{z,r} \cdot I_{zz,i} - I_{z,i} \cdot I_{zz,r})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \delta_z \partial U_{(z+1),0}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{zz,r} + I_{z,i} \cdot I_{zz,i})(I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i} - I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$
$a'_1 = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$	$a'_1 = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$
$a_1^* = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a_2^* = 0 \quad b_1^* = \frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b_2^* = 0$	$a_1^* = 0 \quad a_2^* = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b_1^* = 0 \quad b_2^* = \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$
$a_1^{r*} = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a_2^{r*} = 0 \quad b_1^{r*} = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b_2^{r*} = 0$	$a_1^{r*} = 0 \quad a_2^{r*} = 0 \quad b_1^{r*} = 0 \quad b_2^{r*} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \delta_{(z+1)} \partial U_z / U_{z,0}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),r} + I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),i})(I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i} - I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \delta_{(z+1)} \partial U_{(z+1),0}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),r} + I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),i})(I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i} - I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$
$a'_1 = 0 \quad a'_2 = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$	$a'_1 = 0 \quad a'_2 = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$
$a_1^* = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a_2^* = 0 \quad b_1^* = \frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b_2^* = 0$	$a_1^* = 0 \quad a_2^* = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b_1^* = 0 \quad b_2^* = \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$
$a_1^{r*} = 0 \quad a_2^{r*} = 0 \quad b_1^{r*} = 0 \quad b_2^{r*} = 0$	$a_1^{r*} = 0 \quad a_2^{r*} = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b_1^{r*} = 0 \quad b_2^{r*} = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$

Die Untermatrix  $\mathbf{IDU}_{ZZ,z}$  der Hessematrix  $\mathbf{IDU}_{2ZZZ,z}$  kann mit Gl. (11.103) berechnet werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{IDU}_{ZZ,z} &= (\mathbf{e}_{Z,z} \cdot (\mathbf{I}_{Z,r} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,r} + \mathbf{I}_{Z,i} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,i}))^\top \cdot (\mathbf{e}_{Z,z} \cdot (\mathbf{I}_{Z,r} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,i} - \mathbf{I}_{Z,i} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,r})) - \text{diag}(\mathbf{e}_{Z,z} \cdot (\mathbf{I}_{Z,r} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,i} - \mathbf{I}_{Z,i} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,r})) \\ &= -(\mathbf{e}_{Z,z} \cdot (\mathbf{I} \mathbf{U}_{ZZ}))^\top \cdot (\mathbf{e}_{Z,z} \cdot (\mathbf{I} \mathbf{D}_{ZZ})) + \text{diag}(\mathbf{e}_{Z,z} \cdot (\mathbf{I} \mathbf{D}_{ZZ})) = -\mathbf{I} \mathbf{U}_{ZZ}^\top \cdot \mathbf{E}_{Z,z} \cdot \mathbf{I} \mathbf{D}_{ZZ} + \text{diag}(\mathbf{e}_{Z,z} \cdot (\mathbf{I} \mathbf{D}_{ZZ})) \end{aligned} \quad (11.103)$$

**Tabelle 11.32** Ableitungen nach den Winkeln der Ableitungen nach den Spannungen der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_z / U_{z,0} \partial \delta_z} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{zz,i} - I_{z,i} \cdot I_{zz,r}) (I_{z,r} \cdot I_{zz,r} - I_{z,i} \cdot I_{zz,i})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_z / U_{z,0} \partial \delta_{(z+1)}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{zz,i} - I_{z,i} \cdot I_{zz,r}) (I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),r} + I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),i})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$
$a'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$	$a'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$
$a_1^* = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a_2^* = 0 \quad b_1^* = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b_2^* = 0$	$a_1^* = 0 \quad a_2^* = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b_1^* = 0 \quad b_2^* = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$
$a_1^{r*} = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a_2^{r*} = 0 \quad b_1^{r*} = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b_2^{r*} = 0$	$a_1^{r*} = 0 \quad a_2^{r*} = 0 \quad b_1^{r*} = 0 \quad b_2^{r*} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),0} \partial \delta_z} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i} - I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r}) (I_{z,r} \cdot I_{zz,r} + I_{z,i} \cdot I_{zz,i})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),0} \partial \delta_{(z+1)}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i} - I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r}) (I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),r} + I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),i})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$
$a'_1 = 0 \quad a'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$	$a'_1 = 0 \quad a'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$
$a_1^* = -\frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad a_2^* = 0 \quad b_1^* = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad b_2^* = 0$	$a_1^* = 0 \quad a_2^* = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b_1^* = 0 \quad b_2^* = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$
$a_1^{r*} = 0 \quad a_2^{r*} = 0 \quad b_1^{r*} = 0 \quad b_2^{r*} = 0$	$a_1^{r*} = 0 \quad a_2^{r*} = -\frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}} \quad b_1^{r*} = 0 \quad b_2^{r*} = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}$

Die Untermatrix  $\mathbf{IUD}_{ZZ,z}$  der Hessematrix  $\mathbf{IDU}_{2ZZ,z}$  kann mit Gl. (11.104) berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{IUD}_{ZZ,z} &= \left( \mathbf{e}_{Z,z} \cdot \left( \mathbf{I}_{Z,r} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,i} - \mathbf{I}_{Z,i} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,r} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{Z,z} \cdot \left( \mathbf{I}_{Z,r} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,r} + \mathbf{I}_{Z,i} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,i} \right) \right) - \text{diag} \left( \mathbf{e}_{Z,z} \cdot \left( \mathbf{I}_{Z,r} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,i} - \mathbf{I}_{Z,i} \cdot \mathbf{I}_{ZZ,r} \right) \right) \\
 &= - \left( \mathbf{e}_{Z,z} \cdot \left( \mathbf{ID}_{ZZ} \right) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{Z,z} \cdot \left( \mathbf{IU}_{ZZ} \right) \right) + \text{diag} \left( \mathbf{e}_{Z,z} \cdot \left( \mathbf{ID}_{ZZ} \right) \right) = - \mathbf{ID}_{ZZ}^T \cdot \mathbf{E}_{Z,z} \cdot \mathbf{IU}_{ZZ} + \text{diag} \left( \mathbf{e}_{Z,z} \cdot \left( \mathbf{ID}_{ZZ} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{11.104}$$

**Tabelle 11.33** Ableitungen nach den Spannungen der Ableitungen nach den Spannungen der Änderung des Betrages eines Stromes in Polarkoordinaten<sup>22</sup>

$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial U_z / U_{z,0} \partial U_{(z+1),0}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{zz,i} - I_{z,i} \cdot I_{zz,r}) (I_{z,r} \cdot I_{zz,i} - I_{z,i} \cdot I_{zz,r})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial U_z / U_{z,0} \partial U_{(z+1),0}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{zz,i} - I_{z,i} \cdot I_{zz,r}) (I_{z,r} \cdot I_{zz,i} - I_{z,i} \cdot I_{zz,r})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$
$a'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$	$a'_1 = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a'_2 = 0 \quad b'_1 = \frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b'_2 = 0$
$a_1^* = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a_2^* = 0 \quad b_1^* = \frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b_2^* = 0$	$a_1^* = 0 \quad a_2^* = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b_1^* = 0 \quad b_2^* = \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$
$a_1^{**} = 0 \quad a_2^{**} = 0 \quad b_1^{**} = 0 \quad b_2^{**} = 0$	$a_1^{**} = 0 \quad a_2^{**} = 0 \quad b_1^{**} = 0 \quad b_2^{**} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \frac{U_{(z+1),0}}{U_{(z+1),0}} \partial \frac{U_z}{U_{z,0}}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i} - I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r}) (I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i} - I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$	$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial \frac{U_{(z+1),0}}{U_{(z+1),0}} \partial \frac{U_z}{U_{z,0}}} = \frac{(I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i} - I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r}) (I_{z,r} \cdot I_{z(z+1),i} - I_{z,i} \cdot I_{z(z+1),r})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$
$a'_1 = 0 \quad a'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$	$a'_1 = 0 \quad a'_2 = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b'_1 = 0 \quad b'_2 = \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$
$a_1^* = \frac{I_{zz,r}}{I_{z,0}} \quad a_2^* = 0 \quad b_1^* = \frac{I_{zz,i}}{I_{z,0}} \quad b_2^* = 0$	$a_1^* = 0 \quad a_2^* = \frac{I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}} \quad b_1^* = 0 \quad b_2^* = \frac{I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}$
$a_1^{**} = 0 \quad a_2^{**} = 0 \quad b_1^{**} = 0 \quad b_2^{**} = 0$	$a_1^{**} = 0 \quad a_2^{**} = 0 \quad b_1^{**} = 0 \quad b_2^{**} = 0$

Die Untermatrix  $I U_{ZZ}$  der Hessematrix  $IDU_{ZZ}$  kann mit Gl. (11.105) berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 I U_{ZZ} &= \left( \mathbf{e}_{L,z} \cdot (I_{L,r} \cdot I_{ZZ,i} - I_{L,i} \cdot I_{ZZ,r}) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{L,z} \cdot (I_{L,r} \cdot I_{ZZ,i} - I_{L,i} \cdot I_{ZZ,r}) \right) \\
 &= \left( \mathbf{e}_{L,z} \cdot (ID_{ZZ}) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{L,z} \cdot (ID_{ZZ}) \right) = ID_{ZZ}^T \cdot \mathbf{E}_{L,z} \cdot ID_{ZZ}
 \end{aligned} \tag{11.105}$$

Für eine Hessematrix  $IDU2_{2ZZ,z}$  aus  $\{IDU2_{2ZZ}\}_Z$  ergibt sich somit zusammenfassend Gl. (11.106)

$$\begin{aligned}
 IDU2_{2ZZ,z} &= \begin{bmatrix} IDD_{ZZ,z} & IDU_{ZZ,z} \\ IUD_{ZZ,z} & IUU_{ZZ,z} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} IU_{ZZ}^T \cdot E_{z,z} \cdot IU_{ZZ} & -IU_{ZZ}^T \cdot E_{z,z} \cdot ID_{ZZ} \\ -ID_{ZZ}^T \cdot E_{z,z} \cdot IU_{ZZ} & ID_{ZZ}^T \cdot E_{z,z} \cdot ID_{ZZ} \end{bmatrix} \\
 &\quad + \begin{bmatrix} -\text{diag}(e_{z,z} \cdot (IU_{ZZ})) & \text{diag}(e_{z,z} \cdot (ID_{ZZ})) \\ \text{diag}(e_{z,z} \cdot (ID_{ZZ})) & \mathbf{0}_{ZZ} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{11.106}$$

### 11.1.7.2 Jakobi- und Hessematrizen in kartesischen Koordinaten

Für die bezogene Änderung eines Zweigstrombetrages ergibt sich Gl. (11.107) in kartesischen Koordinaten.

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta I_z}{I_{z,0}} &= \sqrt{\left(\frac{I_{z,r}}{I_{z,0}}\right)^2 + \left(\frac{I_{z,i}}{I_{z,0}}\right)^2} - 1 = \sqrt{\left(\frac{I_{zz,r} + I_{z(z+1),r}}{I_{z,0}}\right)^2 + \left(\frac{I_{zz,i} + I_{z(z+1),i}}{I_{z,0}}\right)^2} - 1 \\
 &= \sqrt{\left(\frac{G_{zz}U_{z,r}}{I_{z,0}} + \frac{G_{z(z+1)}U_{(z+1),r}}{I_{z,0}} - \frac{B_{zz}U_{z,i}}{I_{z,0}} - \frac{B_{z(z+1)}U_{(z+1),i}}{I_{z,0}}\right)^2} \\
 &\quad + \left(\frac{G_{zz}U_{z,i}}{I_{z,0}} + \frac{G_{z(z+1)}U_{(z+1),i}}{I_{z,0}} + \frac{B_{zz}U_{z,r}}{I_{z,0}} + \frac{B_{z(z+1)}U_{(z+1),r}}{I_{z,0}}\right)^2} - 1
 \end{aligned} \tag{11.107}$$

Für die ersten Ableitungen von Gl. (11.100) ergeben sich mit Hilfe des Zusammenhangs aus Gl. (11.77) die Gleichungen in **Tabelle 11.34**. Die jeweiligen Summen enthalten vier Summanden.

**Tabelle 11.34** Erste Ableitungen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,r}} = \frac{I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz}}{I_z \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i}$ $\sum_k a'_k = G_{zz} \quad \sum_k b'_k = B_{zz}$	$\frac{\partial \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),r}} = \frac{I_{z,r} \cdot G_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot B_{z(z+1)}}{I_z \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i}$ $\sum_k a'_k = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = B_{z(z+1)}$
$\frac{\partial \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,i}} = \frac{I_{z,i} \cdot G_{zz} - I_{z,r} \cdot B_{zz}}{I_z \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,i} \quad \sum_k b_k = I_{z,r}$ $\sum_k a'_k = G_{zz} \quad \sum_k b'_k = -B_{zz}$	$\frac{\partial \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),i}} = \frac{I_{z,i} \cdot G_{z(z+1)} - I_{z,r} \cdot B_{z(z+1)}}{I_z \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,i} \quad \sum_k b_k = I_{z,r}$ $\sum_k a'_k = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = -B_{z(z+1)}$

Auf Basis der ersten Ableitungen aus **Tabelle 11.34** können die Jakobimatrizen in Gl. (11.108) ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{IRI}_{ZZ} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{Z,r} \cdot \mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}_{Z,i} \cdot \mathbf{B}_{ZZ} & \mathbf{I}_{Z,i} \cdot \mathbf{G}_{ZZ} - \mathbf{I}_{Z,r} \cdot \mathbf{B}_{ZZ} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{ZZ} & \mathbf{I}\mathbf{G}_{ZZ} - \mathbf{R}\mathbf{B}_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}\mathbf{R}_{ZZ} & \mathbf{I}\mathbf{I}_{ZZ} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.108)$$

Die zweiten Ableitungen ergeben sich mit Hilfe des Zusammenhangs aus Gl. (11.84). Die Herleitungen sind in **Tabelle 11.35** bis **Tabelle 11.38** zusammengestellt.

**Tabelle 11.35** Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,r} \partial U_{z,r}} = \frac{(-I_{z,r} \cdot B_{zz} + I_{z,i} \cdot G_{zz}) (-I_{z,r} \cdot B_{zz} + I_{z,i} \cdot G_{zz})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = G_{zz} \quad \sum_k b'_k = -B_{zz}$ $\sum_k a_k^* = G_{zz} \quad \sum_k b_k^* = -b_{zz} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,r} \partial U_{(z+1),r}} = \frac{(-I_{z,r} \cdot B_{zz} + I_{z,i} \cdot G_{zz}) (-I_{z,r} \cdot B_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot G_{z(z+1)})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = G_{zz} \quad \sum_k b'_k = -B_{zz}$ $\sum_k a_k^* = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b_k^* = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),r} \partial U_{z,r}} = \frac{(-I_{z,r} \cdot B_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot G_{z(z+1)}) (-I_{z,r} \cdot B_{zz} + I_{z,i} \cdot G_{zz})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = -B_{z(z+1)}$ $\sum_k a_k^* = G_{zz} \quad \sum_k b_k^* = -b_{zz} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),r} \partial U_{(z+1),r}} = \frac{(-I_{z,r} \cdot B_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot G_{z(z+1)}) (-I_{z,r} \cdot B_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot G_{z(z+1)})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = -B_{z(z+1)}$ $\sum_k a_k^* = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b_k^* = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$

Die Untermatrix  $\mathbf{IRR}_{ZZ,z}$  der Hessematrix  $\mathbf{IRI2}_{ZZZ,z}$  kann mit Gl. (11.109) berechnet werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{IRR}_{ZZ,z} &= \left( \mathbf{e}_{Lz} \cdot (-I_{Lr} \cdot \mathbf{B}_{ZZ} + I_{L,i} \cdot \mathbf{G}_{ZZ}) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{Lz} \cdot (-I_{Lr} \cdot \mathbf{B}_{ZZ} + I_{L,i} \cdot \mathbf{G}_{ZZ}) \right) \\ &= \left( \mathbf{e}_{Lz} \cdot (-\mathbf{RB}_{ZZ} + \mathbf{IG}_{ZZ}) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{Lz} \cdot (-\mathbf{RB}_{ZZ} + \mathbf{IG}_{ZZ}) \right) = (-\mathbf{RB}_{ZZ} + \mathbf{IG}_{ZZ}) \cdot \mathbf{E}_{Lz} \cdot (-\mathbf{RB}_{ZZ} + \mathbf{IG}_{ZZ}) \end{aligned} \quad (11.109)$$

**Tabelle 11.36** Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Realteilen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,r} \partial U_{z,i}} = \frac{(I_{z,r} \cdot B_{zz} - I_{z,i} \cdot G_{zz})(I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = G_{zz} \quad \sum_k b'_k = B_{zz}$ $\sum_k a_k^* = -B_{zz} \quad \sum_k b_k^* = G_{zz} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,r} \partial U_{(z+1),i}} = \frac{(I_{z,r} \cdot B_{zz} - I_{z,i} \cdot G_{zz})(I_{z,r} \cdot G_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot B_{z(z+1)})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = G_{zz} \quad \sum_k b'_k = B_{zz}$ $\sum_k a_k^* = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k b_k^* = G_{z(z+1)} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),r} \partial U_{z,i}} = \frac{(I_{z,r} \cdot B_{z(z+1)} - I_{z,i} \cdot G_{z(z+1)})(I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = B_{z(z+1)}$ $\sum_k a_k^* = -B_{zz} \quad \sum_k b_k^* = G_{zz} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),r} \partial U_{(z+1),i}} = \frac{(I_{z,r} \cdot B_{z(z+1)} - I_{z,i} \cdot G_{z(z+1)})(I_{z,r} \cdot G_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot B_{z(z+1)})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = B_{z(z+1)}$ $\sum_k a_k^* = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k b_k^* = G_{z(z+1)} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$

Die Untermatrix  $\mathbf{IRI}_{ZZ,z}$  der Hessematrix  $\mathbf{IRI}_{2ZZ,z}$  kann mit Gl. (11.110) berechnet werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{IRI}_{ZZ,z} &= \left( \mathbf{e}_{z,z} \cdot (I_{z,r} \cdot B_{zz} - I_{z,i} \cdot G_{zz}) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{z,z} \cdot (I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz}) \right) \\ &= \left( \mathbf{e}_{z,z} \cdot (RB_{zz} - IG_{zz}) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{z,z} \cdot (RG_{zz} + IB_{zz}) \right) = (RB_{zz} - IG_{zz})^T \cdot \mathbf{E}_{z,z} \cdot (RG_{zz} + IB_{zz}) \end{aligned} \quad (11.110)$$

**Tabelle 11.37** Ableitungen nach den Realteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,i} \partial U_{z,r}} = \frac{(I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz})(I_{z,r} \cdot B_{zz} - I_{z,i} \cdot G_{zz})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = -B_{zz} \quad \sum_k b'_k = G_{zz}$ $\sum_k a_k^* = G_{zz} \quad \sum_k b_k^* = B_{zz} \quad \sum_k a_k^* = 0 \quad \sum_k b_k^* = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,i} \partial U_{(z+1),r}} = \frac{(I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz})(I_{z,r} \cdot B_{z(z+1)} - I_{z,i} \cdot G_{z(z+1)})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = -B_{zz} \quad \sum_k b'_k = G_{zz}$ $\sum_k a_k^* = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b_k^* = B_{z(z+1)} \quad \sum_k a_k^* = 0 \quad \sum_k b_k^* = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),i} \partial U_{z,r}} = \frac{(I_{z,r} \cdot G_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot B_{z(z+1)})(I_{z,r} \cdot B_{zz} - I_{z,i} \cdot G_{zz})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = G_{z(z+1)}$ $\sum_k a_k^* = G_{zz} \quad \sum_k b_k^* = B_{zz} \quad \sum_k a_k^* = 0 \quad \sum_k b_k^* = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),i} \partial U_{(z+1),r}} = \frac{(I_{z,r} \cdot G_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot B_{z(z+1)})(I_{z,r} \cdot B_{z(z+1)} - I_{z,i} \cdot G_{z(z+1)})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = G_{z(z+1)}$ $\sum_k a_k^* = G_{z(z+1)} \quad \sum_k b_k^* = B_{z(z+1)} \quad \sum_k a_k^* = 0 \quad \sum_k b_k^* = 0$

Die Untermatrix  $\mathbf{IIR}_{ZZ,z}$  der Hessematrix  $\mathbf{IRI2}_{ZZZ,z}$  kann mit Gl. (11.111) berechnet werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{IIR}_{ZZ,z} &= \left( \mathbf{e}_{z,z} \cdot (I_{z,r} \cdot \mathbf{G}_{zz} + I_{z,i} \cdot \mathbf{B}_{zz}) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{z,z} \cdot (I_{z,r} \cdot \mathbf{B}_{zz} - I_{z,i} \cdot \mathbf{G}_{zz}) \right) \\ &= \left( \mathbf{e}_{z,z} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{G}_{zz} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{zz}) \right)^T \cdot \left( \mathbf{e}_{z,z} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{B}_{zz} - \mathbf{I}\mathbf{G}_{zz}) \right) = (\mathbf{R}\mathbf{G}_{zz} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{zz})^T \cdot \mathbf{E}_{z,z} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{B}_{zz} - \mathbf{I}\mathbf{G}_{zz}) \end{aligned} \quad (11.111)$$

**Tabelle 11.38** Ableitungen nach den Imaginärteilen der Ableitungen nach den Imaginärteilen der Änderung des Betrages eines Stromes in kartesischen Koordinaten

$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,i} \partial U_{z,i}} = \frac{(I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz})(I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = -B_{zz} \quad \sum_k b'_k = G_{zz}$ $\sum_k a_k^* = -B_{zz} \quad \sum_k b_k^* = G_{zz} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{z,i} \partial U_{(z+1),i}} = \frac{(I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz})(I_{z,r} \cdot G_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot B_{z(z+1)})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = -B_{zz} \quad \sum_k b'_k = G_{zz}$ $\sum_k a_k^* = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k b_k^* = G_{z(z+1)} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$
$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),i} \partial U_{z,i}} = \frac{(I_{z,r} \cdot G_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot B_{z(z+1)})(I_{z,r} \cdot G_{zz} + I_{z,i} \cdot B_{zz})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = G_{z(z+1)}$ $\sum_k a_k^* = -B_{zz} \quad \sum_k b_k^* = G_{zz} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$	$\frac{\partial^2 \Delta I_z / I_{z,0}}{\partial U_{(z+1),i} \partial U_{(z+1),i}} = \frac{(I_{z,r} \cdot G_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot B_{z(z+1)})(I_{z,r} \cdot G_{z(z+1)} + I_{z,i} \cdot B_{z(z+1)})}{I_z^3 \cdot I_{z,0}}$ $\sum_k a_k = I_{z,r} \quad \sum_k b_k = I_{z,i} \quad \sum_k a'_k = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k b'_k = G_{z(z+1)}$ $\sum_k a_k^* = -B_{z(z+1)} \quad \sum_k b_k^* = G_{z(z+1)} \quad \sum_k a_k^{**} = 0 \quad \sum_k b_k^{**} = 0$

Die Untermatrix  $\mathbf{III}_{ZZ,z}$  der Hessematrix  $\mathbf{IRI2}_{2ZZ,z}$  kann mit Gl. (11.112) berechnet werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{III}_{ZZ,z} &= \left( \mathbf{e}_{Lz} \cdot (I_{Lr} \cdot \mathbf{G}_{ZZ} + I_{L,i} \cdot \mathbf{B}_{ZZ}) \right)^\top \cdot \left( \mathbf{e}_{Lz} \cdot (I_{Lr} \cdot \mathbf{G}_{ZZ} + I_{L,i} \cdot \mathbf{B}_{ZZ}) \right) \\ &= \left( \mathbf{e}_{Lz} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{ZZ}) \right)^\top \cdot \left( \mathbf{e}_{Lz} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{ZZ}) \right) = (\mathbf{R}\mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{ZZ}) \cdot \mathbf{e}_{Lz} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{ZZ}) \end{aligned} \quad (11.112)$$

Für eine Hessematrix  $\mathbf{IRI2}_{2ZZ,z}$  aus  $\{\mathbf{IRI2}_{2ZZ,z}\}_z$  ergibt sich somit zusammenfassend Gl. (11.113).

$$\mathbf{IRI2}_{2ZZ,z} = \begin{bmatrix} \mathbf{IRR}_{ZZ,z} & \mathbf{IRI}_{ZZ,z} \\ \mathbf{IIR}_{ZZ,z} & \mathbf{III}_{ZZ,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\mathbf{R}\mathbf{B}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{G}_{ZZ})^\top \cdot \mathbf{e}_{Lz} \cdot (-\mathbf{R}\mathbf{B}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{G}_{ZZ}) & (\mathbf{R}\mathbf{B}_{ZZ} - \mathbf{I}\mathbf{G}_{ZZ})^\top \cdot \mathbf{e}_{Lz} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{ZZ}) \\ (\mathbf{R}\mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{ZZ})^\top \cdot \mathbf{e}_{Lz} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{B}_{ZZ} - \mathbf{I}\mathbf{G}_{ZZ}) & (\mathbf{R}\mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{ZZ})^\top \cdot \mathbf{e}_{Lz} \cdot (\mathbf{R}\mathbf{G}_{ZZ} + \mathbf{I}\mathbf{B}_{ZZ}) \end{bmatrix} \quad (11.113)$$

## 11.2 Einsetzen einer quadratischen Funktion in eine quadratische Funktion

Der im Folgenden beschriebene Algorithmus zur Ermittlung der quadratischen Anteile der Funktion, die sich durch Einsetzen einer quadratischen Funktion in eine andere quadratische Funktion ergeben, wird zunächst an einem eindimensionalen Beispiel gezeigt. Gegeben sind zwei Funktionen  $\Delta x(\Delta y)$  und  $\Delta y(\Delta z)$  in den Gln. (11.114) und (11.115).

$$\Delta x(\Delta y) = xy_1 \cdot \Delta y + \frac{1}{2} xy_2 \cdot \Delta y^2 \quad (11.114)$$

$$\Delta y(\Delta z) = yz_1 \cdot \Delta z + \frac{1}{2} yz_2 \cdot \Delta z^2 \quad (11.115)$$

Durch Einsetzen von  $\Delta y(\Delta z)$  in  $\Delta x(\Delta y)$  ergibt sich  $\Delta x(\Delta z)$  in Gl. (11.116), wobei in dieser Arbeit nur die quadratischen Anteile berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \Delta x(\Delta z) &= xy_1 \cdot \left( yz_1 \cdot \Delta z + \frac{1}{2} yz_2 \cdot \Delta z^2 \right) + \frac{1}{2} xy_2 \cdot \left( yz_1 \cdot \Delta z + \frac{1}{2} yz_2 \cdot \Delta z^2 \right)^2 \\ &= xy_1 \cdot yz_1 \cdot \Delta z + \frac{1}{2} (xy_1 \cdot yz_2 + xy_2 \cdot yz_1^2) \cdot \Delta z^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} xy_2 \cdot yz_1 \cdot yz_2 \cdot \Delta z^3 + xy_2 \cdot \frac{1}{8} yz_2^2 \cdot \Delta z^4 \\ &\approx xy_1 \cdot yz_1 \cdot \Delta z + \frac{1}{2} (xy_1 \cdot yz_2 + xy_2 \cdot yz_1^2) \cdot \Delta z^2 \end{aligned} \quad (11.116)$$

In Gl. (11.116) wird deutlich, dass der quadratische Anteil von  $\Delta x(\Delta z)$  aus zwei Bestandteilen besteht. Im Folgenden wird das zuvor beschriebene Einsetzen für Systeme von zwei Funktionen durchgeführt und dann auf Systeme mit beliebig vielen Funktionen verallgemeinert.

Zwei Systeme aus jeweils zwei quadratischen Funktionen in Abhängigkeit von jeweils zwei Variablen, die ineinander eingesetzt werden können, können mit den Gln. (11.117) bis (11.120) beschrieben werden.

$$\Delta x_1(\Delta y_1, \Delta y_2) = \begin{bmatrix} xy_{11} & xy_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xy_{211} & xy_{212} \\ xy_{221} & xy_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} \quad (11.117)$$

$$\Delta x_2(\Delta y_1, \Delta y_2) = \begin{bmatrix} xy_{121} & xy_{122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xy_{221} & xy_{222} \\ xy_{231} & xy_{232} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} \quad (11.118)$$

$$\Delta y_1(\Delta z_1, \Delta z_2) = \begin{bmatrix} yz_{11} & yz_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} yz_{211} & yz_{212} \\ yz_{221} & yz_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \quad (11.119)$$

$$\Delta y_2 (\Delta z_1, \Delta z_2) = \begin{bmatrix} yz1_{21} & yz1_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} yz2_{211} & yz2_{212} \\ yz2_{221} & yz2_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \quad (11.120)$$

Durch Einsetzen der linearen Anteile aus den Gln. (11.119) und (11.120) in die linearen Anteile der Gln. (11.117) und (11.118) ergeben sich die Gln. (11.121) und (11.122).

$$\Delta x_{1,\text{lin}} (\Delta z_1, \Delta z_2) = \begin{bmatrix} xy1_{11} & xy1_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} yz1_{11} & yz1_{12} \\ yz1_{21} & yz1_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xz1_{11} & xz1_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \quad (11.121)$$

$$\Delta x_{2,\text{lin}} (\Delta z_1, \Delta z_2) = \begin{bmatrix} xy1_{21} & xy1_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} yz1_{11} & yz1_{12} \\ yz1_{21} & yz1_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xz1_{21} & xz1_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \quad (11.122)$$

Durch Einsetzen der linearen Anteile aus den Gln. (11.119) und (11.120) in die quadratischen Anteile in den Gln. (11.117) und (11.118) ergeben sich die ersten Bestandteile der quadratischen Ergebnisfunktion in den Gln. (11.123) und (11.124).

$$\begin{aligned} \Delta x_{1,\text{quadlin}} (\Delta z_1, \Delta z_2) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} yz1_{11} & yz1_{12} \\ yz1_{21} & yz1_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xy2_{111} & xy2_{112} \\ xy2_{121} & xy2_{122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} yz1_{11} & yz1_{12} \\ yz1_{21} & yz1_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{111,\text{quadlin}} & xz2_{112,\text{quadlin}} \\ xz2_{121,\text{quadlin}} & xz2_{122,\text{quadlin}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.123)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_{2,\text{quadlin}} (\Delta z_1, \Delta z_2) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} yz1_{11} & yz1_{12} \\ yz1_{21} & yz1_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xy2_{211} & xy2_{212} \\ xy2_{221} & xy2_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} yz1_{11} & yz1_{12} \\ yz1_{21} & yz1_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{211,\text{quadlin}} & xz2_{212,\text{quadlin}} \\ xz2_{221,\text{quadlin}} & xz2_{222,\text{quadlin}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.124)$$

Durch Einsetzen der quadratischen Anteile aus den Gln. (11.119) und (11.120) in die linearen Anteile in Gln. (11.117) und (11.118) ergeben sich die zweiten Bestandteile der quadratischen Ergebnisfunktion in den Gln. (11.125) und (11.126).

$$\begin{aligned} \Delta x_{1,\text{linquad}} (\Delta z_1, \Delta z_2) &= \frac{xy1_{11}}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} yz2_{111} & yz2_{112} \\ yz2_{121} & yz2_{122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{xy1_{12}}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} yz2_{211} & yz2_{212} \\ yz2_{221} & yz2_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{111,\text{linquad}} & xz2_{112,\text{linquad}} \\ xz2_{121,\text{linquad}} & xz2_{122,\text{linquad}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.125)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{2,\text{linquad}}(\Delta z_1, \Delta z_2) &= \frac{xy1_{21}}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} yz2_{111} & yz2_{112} \\ yz2_{121} & yz2_{122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{xy1_{22}}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} yz2_{211} & yz2_{212} \\ yz2_{221} & yz2_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{211,\text{linquad}} & xz2_{212,\text{linquad}} \\ xz2_{221,\text{linquad}} & xz2_{222,\text{linquad}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{11.126}$$

Für die Summe der beiden Bestandteile der quadratischen Ergebnisfunktion ergeben sich die Gln. (11.127) und (11.128).

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{1,\text{quad}}(\Delta z_1, \Delta z_2) &= \Delta x_{1,\text{linquad}}(\Delta z_1, \Delta z_2) + \Delta x_{1,\text{quadlin}}(\Delta z_1, \Delta z_2) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{111,\text{linquad}} & xz2_{112,\text{linquad}} \\ xz2_{121,\text{linquad}} & xz2_{122,\text{linquad}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{111,\text{quadlin}} & xz2_{112,\text{quadlin}} \\ xz2_{121,\text{quadlin}} & xz2_{122,\text{quadlin}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{111,\text{quad}} & xz2_{112,\text{quad}} \\ xz2_{121,\text{quad}} & xz2_{122,\text{quad}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{11.127}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta x_{2,\text{quad}}(\Delta z_1, \Delta z_2) &= \Delta x_{2,\text{linquad}}(\Delta z_1, \Delta z_2) + \Delta x_{2,\text{quadlin}}(\Delta z_1, \Delta z_2) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{211,\text{linquad}} & xz2_{212,\text{linquad}} \\ xz2_{221,\text{linquad}} & xz2_{222,\text{linquad}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{211,\text{quadlin}} & xz2_{212,\text{quadlin}} \\ xz2_{221,\text{quadlin}} & xz2_{222,\text{quadlin}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} xz2_{211,\text{quad}} & xz2_{212,\text{quad}} \\ xz2_{221,\text{quad}} & xz2_{222,\text{quad}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{11.128}$$

Verallgemeinert für ein System von K quadratischen Funktionen in den Gln. (11.129) und (11.130) ergibt sich Gl. (11.131) für den linearen Anteil der Ergebnisfunktionen.

$$\Delta \mathbf{x}_K(\Delta \mathbf{y}_K) = \mathbf{XYI}_{KK} \cdot \Delta \mathbf{y}_K + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{y}_K^T \otimes \{ \mathbf{XY2}_{KK} \}_K \otimes \Delta \mathbf{y}_K \tag{11.129}$$

$$\Delta \mathbf{y}_K(\Delta \mathbf{z}_K) = \mathbf{YZI}_{KK} \cdot \Delta \mathbf{z}_K + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{z}_K^T \otimes \{ \mathbf{YZ2}_{KK} \}_K \otimes \Delta \mathbf{z}_K \tag{11.130}$$

$$\Delta \mathbf{x}_{K,\text{lin}}(\Delta \mathbf{z}_K) = \mathbf{XYI}_{KK} \cdot \mathbf{YZI}_{KK} \cdot \Delta \mathbf{z}_K = \mathbf{XZI}_{KK} \cdot \Delta \mathbf{z}_K \tag{11.131}$$

Für den ersten Bestandteil des quadratischen Anteils einer der Ergebnisfunktionen ergibt sich damit Gl. (11.132).

$$\Delta x_{k,\text{quadlin}}(\Delta \mathbf{z}_K) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{z}_K^T \cdot \mathbf{YZI}_{KK}^T \cdot \mathbf{XY2}_{KK,k} \cdot \mathbf{YZI}_{KK} \cdot \Delta \mathbf{z}_K = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{z}_K^T \cdot \mathbf{XZ2}_{KK,k,\text{quadlin}} \cdot \Delta \mathbf{z}_K \tag{11.132}$$

Für den zweiten Bestandteil des quadratischen Anteils einer der Ergebnisfunktionen ergibt sich Gl. (11.133).

$$\Delta x_{k,\text{linquad}}(\Delta z_K) = \frac{1}{2} \Delta z_K^T \cdot \sum_{l=1}^K xy1_{kl} \cdot YZ2_{KK,l} \cdot \Delta z_K = \frac{1}{2} \Delta z_K^T \cdot XZ2_{KK,k,\text{linquad}} \cdot \Delta z_K \quad (11.133)$$

Für den gesamten quadratischen Anteil einer der Ergebnisfunktionen ergibt sich Gl. (11.134).

$$\Delta x_{K,\text{quad}}(\Delta z_K) = \frac{1}{2} \Delta z_K^T \cdot (XZ2_{KK,k,\text{quadlin}} + XZ2_{KK,k,\text{linquad}}) \cdot \Delta z_K = \frac{1}{2} \Delta z_K^T \cdot XZ2_{KK,k} \cdot \Delta z_K \quad (11.134)$$

### 11.3 Angenäherte Umkehrfunktion einer quadratischen Funktion

Im Allgemeinen lässt sich die exakte Umkehrfunktion einer quadratischen Funktion nicht aufstellen. Für einfache Fälle beispielsweise in Gl. (11.135) lässt sich die Umkehrfunktionen ermitteln. Es wird erkennbar, dass die Umkehrfunktionen quadratischer Funktionen keine quadratischen Funktionen sind. Es ist allerdings möglich, die Umkehrfunktion quadratisch anzunähern. Falls die Umkehrfunktion mehrere Lösungen hat (vgl. Abschnitt 3.4), so gilt die angenäherte Umkehrfunktion für eine der Lösungen.

$$\begin{aligned} \Delta x(\Delta y) = xy1 \cdot \Delta y + \frac{1}{2} xy2 \cdot \Delta y^2 &\rightarrow \Delta y(\Delta x) = -\frac{xy1}{xy2} \pm \frac{1}{xy2} \sqrt{xy1^2 + 2 \cdot xy2 \cdot \Delta x} \\ &\approx yx1 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} yx2 \cdot \Delta x^2 \end{aligned} \quad (11.135)$$

Für jede Funktion gilt, dass sich durch Einsetzen der Umkehrfunktion in die Ausgangsfunktion die sogenannte Identität ergibt. Gl. (11.136) zeigt dies für das Beispiel aus Gl. (11.135).

$$\begin{aligned} \Delta x(\Delta y(\Delta x)) &= xy1 \cdot \left( -\frac{xy1}{xy2} \pm \frac{1}{xy2} \sqrt{xy1^2 + 2 \cdot xy2 \cdot \Delta x} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} xy2 \cdot \left( -\frac{xy1}{xy2} \pm \frac{1}{xy2} \sqrt{xy1^2 + 2 \cdot xy2 \cdot \Delta x} \right)^2 \\ &= \left( -\frac{xy1^2}{xy2} \pm \frac{xy1}{xy2} \sqrt{xy1^2 + 2 \cdot xy2 \cdot \Delta x} \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \frac{xy1^2}{xy2} \mp \frac{xy1}{xy2} \sqrt{xy1^2 + 2 \cdot xy2 \cdot \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{xy1^2}{xy2} + \Delta x \right) \\ &= \Delta x \end{aligned} \quad (11.136)$$

Da jede Funktion auch durch ihre Taylorreihe beschrieben werden kann, ergibt sich in Gl. (11.139) ebenfalls die Identität für die Taylorreihen aus den Gl. (11.137) und (11.138) der Funktionen  $\Delta x(\Delta y)$  und  $\Delta y(\Delta x)$ .

$$\Delta x(\Delta y) = \sum_{k=0}^{\infty} xy_k \cdot \Delta y^k \quad (11.137)$$

$$\Delta y(\Delta x) = \sum_{l=0}^{\infty} yx_l \cdot \Delta x^l \quad (11.138)$$

$$\Delta x(\Delta y(\Delta x)) = \sum_{k=0}^{\infty} xy_k \cdot \left( \sum_{l=0}^{\infty} yx_l \cdot \Delta x^l \right)^k = \Delta x \quad (11.139)$$

Da in dieser Arbeit die Ausgangsfunktionen quadratisch sind bzw. quadratisch angenähert werden und nur die quadratische Näherung der Umkehrfunktionen berücksichtigt wird, vereinfacht sich Gl. (11.139) zu Gl. (11.140)

$$\begin{aligned} \Delta x(\Delta y(\Delta x)) &\approx xy_1 \cdot \left( yx_1 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} yx_2 \cdot \Delta x^2 \right) + \frac{1}{2} xy_2 \cdot \left( yx_1 \cdot \Delta x + \frac{1}{2} yx_2 \cdot \Delta x^2 \right)^2 \\ &= xy_1 \cdot yx_1 \cdot \Delta x + \left( \frac{1}{2} xy_1 \cdot yx_2 + \frac{1}{2} xy_2 \cdot yx_1^2 \right) \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{2} yx_1 \cdot yx_2^2 \cdot \Delta x^3 + \frac{1}{4} yx_2^3 \cdot \Delta x^4 = \Delta x \end{aligned} \quad (11.140)$$

Durch rekursiven Koeffizientenvergleich der Koeffizienten vor den linearen und quadratischen Termen der rechten und linken Seite von Gl. (11.140) ergeben sich die gesuchten Koeffizienten der Umkehrfunktion in den Gln. (11.141) und (11.142). Die Terme höherer Ordnung können für die quadratischen Näherungen außer Betracht bleiben, da sie zu diesen keinen Beitrag leisten.

$$xy_1 \cdot yx_1 \cdot \Delta x = \Delta x \quad \rightarrow \quad yx_1 = \frac{1}{xy_1} \quad (11.141)$$

$$\left( \frac{1}{2} xy_1 \cdot yx_2 + \frac{1}{2} xy_2 \cdot yx_1^2 \right) \cdot \Delta x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad yx_2 = -\frac{xy_2 \cdot yx_1^2}{xy_1} = -\frac{xy_2}{xy_1^3} \quad (11.142)$$

Im Folgenden wird die beschriebene Methode des Koeffizientenvergleichs für ein System von quadratischen Gleichungen hergeleitet.

Gl. (11.131) zeigt die Formel zur Berechnung der Jakobimatrix des Funktionssystems, das sich ergibt, wenn zwei Funktionssysteme ineinander eingesetzt werden. Ist eins der beiden Funktionssysteme das Umkehrfunktionssystem des anderen beziehungsweise dessen quadratische Näherung, so ergibt sich als Jakobimatrix des resultierenden Funktionssystems die Identität, also die Einheitsmatrix. Somit ergibt sich Gl. (11.143) aus Gl. (11.131).

$$\mathbf{XYI}_{\text{KK}} \cdot \mathbf{YXI}_{\text{KK}} = \mathbf{XXI}_{\text{KK}} = \mathbf{E}_{\text{K}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{YXI}_{\text{KK}} = \mathbf{XYI}_{\text{KK}}^{-1} \quad (11.143)$$

Gl. (11.134) zeigt die Formel zur Berechnung einer der Hessematrizen  $\mathbf{XX2}_{\text{KK},k}$  des Funktionssystems, das sich ergibt, wenn zwei Funktionssysteme ineinander eingesetzt werden. Ist eins der beiden Funktionssysteme das Umkehrfunktionssystem des anderen beziehungsweise dessen

quadratische Näherung, so ergibt sich für alle Hessematrizen des resultierenden Funktionssystems eine Nullmatrix  $\mathbf{0}_{KK}$ . Somit ergibt sich Gl. (11.144) aus Gl. (11.134).

$$\begin{aligned} \mathbf{XX2}_{KK,k,\text{quadlin}} + \mathbf{XX2}_{KK,k,\text{linquad}} &= \mathbf{XX2}_{KK,k} = \mathbf{0}_{KK} \\ \mathbf{YXI}_{KK}^T \cdot \mathbf{XY2}_{KK,k} \cdot \mathbf{YXI}_{KK} + \sum_{l=1}^K xy1_{kl} \cdot \mathbf{YX2}_{KK,l} &= \mathbf{XX2}_{KK,k} = \mathbf{0}_{KK} \end{aligned} \quad (11.144)$$

Durch Einsetzen von Gl. (11.143) können alle Matrizen  $\mathbf{XX2}_{KK,k,\text{quadlin}}$  mit Gl. (11.145) berechnet werden.

$$\mathbf{XX2}_{KK,k,\text{quadlin}} = \mathbf{YXI}_{KK}^T \cdot \mathbf{XY2}_{KK,k} \cdot \mathbf{YXI}_{KK} = \left( \mathbf{XYI}_{KK}^{-1} \right)^T \cdot \mathbf{XY2}_{KK,k} \cdot \mathbf{XYI}_{KK}^{-1} \quad (11.145)$$

Die gesuchten Hessematrizen  $\mathbf{YX2}_{KK,l}$  der Umkehrfunktion tauchen in allen K Gleichungssystemen der Form von Gl. (11.144) auf. Es handelt sich somit um gekoppelte Gleichungssysteme, die gemeinsam gelöst werden müssen. Das vollständige Gleichungssystem in Gl. (11.146) ergibt sich durch untereinander Anordnen aller K Gleichungssysteme der Form von Gl. (11.144).

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(xy1_{11}) & \cdots & \text{diag}(xy1_{1l}) & \cdots & \text{diag}(xy1_{1K}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{diag}(xy1_{k1}) & \cdots & \text{diag}(xy1_{kl}) & \cdots & \text{diag}(xy1_{kK}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{diag}(xy1_{K1}) & \cdots & \text{diag}(xy1_{Kl}) & \cdots & \text{diag}(xy1_{KK}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{YX2}_{KK,1} \\ \vdots \\ \mathbf{YX2}_{KK,l} \\ \vdots \\ \mathbf{YX2}_{KK,K} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{XX2}_{KK,1,\text{quadlin}} \\ \vdots \\ \mathbf{XX2}_{KK,k,\text{quadlin}} \\ \vdots \\ \mathbf{XX2}_{KK,K,\text{quadlin}} \end{bmatrix} \quad (11.146)$$

Durch Permutation von Gl. (11.146) kann die Matrix auf der linken Seite in Blockdiagonalform gebracht werden, sodass sich Gl. (11.147) ergibt.

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{XYI}_{KK} & & & \\
 & \ddots & & \\
 & & \mathbf{XYI}_{KK} & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & \mathbf{XYI}_{KK}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 yx2_{1K,1} \\
 \vdots \\
 yx2_{1K,l} \\
 \vdots \\
 yx2_{1K,K} \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix}
 yx2_{lK,1} \\
 \vdots \\
 yx2_{lK,l} \\
 \vdots \\
 yx2_{lK,K} \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix}
 yx2_{KK,1} \\
 \vdots \\
 yx2_{KK,l} \\
 \vdots \\
 yx2_{KK,K}
 \end{bmatrix}
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 xx2_{1K,1,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{1K,l,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{1K,K,quadlin} \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix}
 xx2_{lK,1,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{lK,l,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{lK,K,quadlin} \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix}
 xx2_{KK,1,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{KK,l,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{KK,K,quadlin}
 \end{bmatrix}
 \end{bmatrix}
 \quad (11.147)$$

In Blockdiagonalform kann Gl. (11.147) unter Ausnutzung von Gl. (11.143) invertiert werden, sodass sich Gl. (11.148) ergibt.

$$\begin{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 yx2_{1K,1} \\
 \vdots \\
 yx2_{1K,l} \\
 \vdots \\
 yx2_{1K,K} \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix}
 yx2_{lK,1} \\
 \vdots \\
 yx2_{lK,l} \\
 \vdots \\
 yx2_{lK,K} \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix}
 yx2_{KK,1} \\
 \vdots \\
 yx2_{KK,l} \\
 \vdots \\
 yx2_{KK,K}
 \end{bmatrix}
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{YXI}_{KK} & & & \\
 & \ddots & & \\
 & & \mathbf{YXI}_{KK} & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & \mathbf{YXI}_{KK}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 xx2_{1K,1,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{1K,l,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{1K,K,quadlin} \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix}
 xx2_{lK,1,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{lK,l,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{lK,K,quadlin} \\
 \vdots
 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix}
 xx2_{KK,1,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{KK,l,quadlin} \\
 \vdots \\
 xx2_{KK,K,quadlin}
 \end{bmatrix}
 \end{bmatrix}
 \quad (11.148)$$

Durch Rückpermutation von Gl. (11.148) ergibt sich Gl. (11.149).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{YX2}_{KK,1} \\ \vdots \\ \mathbf{YX2}_{KK,l} \\ \vdots \\ \mathbf{YX2}_{KK,K} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \text{diag}(yx1_{11}) & \cdots & \text{diag}(yx1_{1l}) & \cdots & \text{diag}(yx1_{1K}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{diag}(yx1_{k1}) & \cdots & \text{diag}(yx1_{kl}) & \cdots & \text{diag}(yx1_{kK}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{diag}(yx1_{K1}) & \cdots & \text{diag}(yx1_{Kl}) & \cdots & \text{diag}(yx1_{KK}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{XX2}_{KK,1,quadlin} \\ \vdots \\ \mathbf{XX2}_{KK,k,quadlin} \\ \vdots \\ \mathbf{XX2}_{KK,K,quadlin} \end{bmatrix} \quad (11.149)$$

Für eine Hessematrix  $\mathbf{YX2}_{KK,l}$  ergibt sich Gl. (11.150) aus Gl. (11.149).

$$\mathbf{YX2}_{KK,l} = \sum_{k=1}^K yx1_{lk} \cdot \mathbf{XX2}_{KK,k,quadlin} = \left( \mathbf{XYI}_{KK}^{-1} \right)^T \cdot \sum_{k=1}^K yx1_{lk} \cdot \mathbf{XY2}_{KK,k} \cdot \mathbf{XYI}_{KK}^{-1} \quad (11.150)$$

Mit Hilfe des beschriebenen Algorithmus sind die Taylorpolynome zweiter Ordnung der Umkehrfunktionen bekannt, wohingegen die vollständigen Umkehrfunktionen unbekannt bleiben.

## 11.4 Herleitung des Abstands zwischen den Punkten QA und SY

Im Folgenden wird die Herleitung des Abstands eines Punktes, hier der Punkt QA, zum Symmetriepunkt quadratischer Funktionen dargestellt. Da quadratische Funktionen nur in Richtung der Hauptachsen mit Eigenwerten ungleich Null Symmetriepunkte haben, werden im Folgenden nur Hauptachsen in diese Richtungen betrachtet. Gl. (11.151) zeigt eine solche Funktion.

$$\begin{aligned} \Delta t_i \left( \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^+ \end{bmatrix} \right) &= k_{QA,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{a,QA,i}^- & \mathbf{g}_{a,QA,i}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^+ \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^+ \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.151)$$

Die Beschreibung einer Funktion wie in Gl. (11.151) in einem verschobenen Koordinatensystem erfolgt durch Einsetzen des Zusammenhangs zwischen zwei Koordinatensystemen mit den Abständen  $\Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^-$  und  $\Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+$  aus Gl. (11.152), deren Größen noch zu bestimmen sind.

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,QA,i}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{a,SY,i}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{a,QASY,i}^+ \end{bmatrix} \quad (11.152)$$

Durch Einsetzen von Gl. (11.152) in Gl. (11.151) ergibt sich Gl. (11.153).

$$\begin{aligned}
 \Delta t_i \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{pmatrix} &= k_{QA,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^- & \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix} \right)^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix} \right) \\
 \Delta t_i \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{pmatrix} &= k_{QA,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^- & \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^- & \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix} \quad (11.153) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen der konstanten, linearen<sup>23</sup> und quadratischen Anteile aus Gl. (11.153) ergibt sich Gl. (11.154).

$$\begin{aligned}
 \Delta t_i \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{pmatrix} \\
 = k_{QA,i} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^- & \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix} \quad (11.154) \\
 + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^- & \mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix} \\
 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^- \\ \Delta \mathbf{x}_{\alpha,SY,i}^+ \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Der gesuchte Symmetriepunkt SY ergibt sich, wenn die linearen Anteile von Gl. (11.154) Null werden. Somit ergibt sich Gl. (11.155) für die Abstände  $\Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^-$  und  $\Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+$ .

$$\begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^- \\ \Delta \Delta \mathbf{x}_{\alpha,QASY,i}^+ \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{D}_i^- & \\ & \mathbf{D}_i^+ \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^-)^T \\ (\mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^+)^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_i^-)^{-1} \cdot (\mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^-)^T \\ (\mathbf{D}_i^+)^{-1} \cdot (\mathbf{g}_{\alpha,QA,i}^+)^T \end{bmatrix} \quad (11.155)$$

<sup>23</sup> Das quadratische Produkt  $\Delta \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \Delta \Delta \mathbf{x}$  ergibt ein Skalar. Mit  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$  gilt  $\Delta \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \Delta \Delta \mathbf{x} = \Delta \Delta \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \Delta \mathbf{x}$ .

---

## Lebenslauf

### Persönliche Daten

Name: Thomas Leveringhaus  
Geburtstag: 02.04.1985  
Geburtsort: Bochum  
Staatsbürgerschaft: Deutsch

### Derzeitige Tätigkeit

seit Juni 2010: wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Elektrische Energiesysteme an der Leibniz Universität Hannover

### Ausbildung

Okt. 2004 - Mai 2010 Diplomstudium Elektrotechnik an der Leibniz Universität Hannover, Fachrichtung Elektrische Energietechnik (Abschlussnote 1,5)  
Juni 2004 Abitur am Heinrich-von-Kleist-Gymnasium Bochum (Abschlussnote 1,9)

### Weitere Tätigkeiten

2009 Acht Wochen Fachpraktikum bei der Amprion GmbH Dortmund  
2009 Neun Wochen Fachpraktikum bei der beta GmbH Hannover  
2007 - 2008 Acht Monate Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Antriebssysteme und Leistungselektronik und am Institut für Elektrische Energiesysteme (vormals Institut für Elektrische Energieversorgung) der Leibniz Universität Hannover  
2004 Vier Wochen Grundpraktikum bei der Coroplast Fritz Müller GmbH & Co. KG Wuppertal  
2004 Sechs Wochen Grundpraktikum bei der Nokia GmbH Bochum

### Auszeichnungen

2006 Stipendium der Stiftung der Deutschen Wirtschaft  
2004 Mitgliedschaft in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft aufgrund herausragender Leistungen im Leistungskurs Physik



## Wissenschaftlicher Werdegang

### Wissenschaftliche Veröffentlichungen als Erstautor

T. Leveringhaus, L. Hofmann: “*Optimal power flow comprising congestions and voltage management by global quadratic optimization of active and reactive power*”, IEEE PES POWERCON 2016, Wollongong, Australia, 28. September–01. October 2016.

T. Leveringhaus, L. Hofmann: “*Combined and optimized redispatch management of multiple congestions and voltage deviations with active and reactive power based on AC-PTDFs with distributed slack*”, 2015 IEEE PES General Meeting, Denver (Colorado), USA, 26.-30. 07 2015.

T. Leveringhaus, L. Hofmann: “*Comparison of methods for state prediction: Power Flow Decomposition (PFD), AC Power Transfer Distribution factors (AC-PTDFs), and Power Transfer Distribution factors (PTDFs)*”, Power and Energy Engineering Conference (APPEEC), 2014 IEEE PES Asia-Pacific, 07.-10. December 2014.

T. Leveringhaus, T. Rendel, T. Breithaupt: “*Analysis of Loop Flows and Transits in the Continental ENTSO-E Interconnected System Grid [part 1 & part 2]*”, Study by order of 50Hertz Transmission GmbH, Amprion GmbH, EnBW TransnetBW GmbH, TenneT TSO GmbH, June 2013.

T. Leveringhaus, T. Breithaupt: “*Physically based congestion management by powerflow superposition methods at optimal cost*”, 2012 IEEE International Conference on Power System Technology (Powercon), Auckland, New Zealand, 30. October – 2. November 2012.

T. Leveringhaus, T. Breithaupt: „*Redispatch-Maßnahmen zur effizienten Beseitigung von Transporteinschränkungen im Übertragungsnetz der 50Hertz Transmission GmbH*“, Studie im Auftrag der 50Hertz Transmission GmbH, Januar 2012.

T. Leveringhaus, L. Hofmann: „*Kombinierte Optimierung der Spannungshaltung und Blindleistungsbereitstellung*“, Dresdener Kreis 2012, Fachtagung der TU-Dresden, der Universität Hannover, der Universität Magdeburg und der Gesamthochschule Duisburg: Elektroenergieversorgung, Dresden, Deutschland, 15.-16. März 2012.

T. Leveringhaus, L. Hofmann: “*Optimized voltage and reactive power adjustment in power grids using the least-squares-method: Optimization of highly utilized power grids with stochastic renewable energy-sources*”, IEEE International Conference on Power and Energy Systems (ICPS), Chennai, Indien, 22.12 – 24.12. 2011.

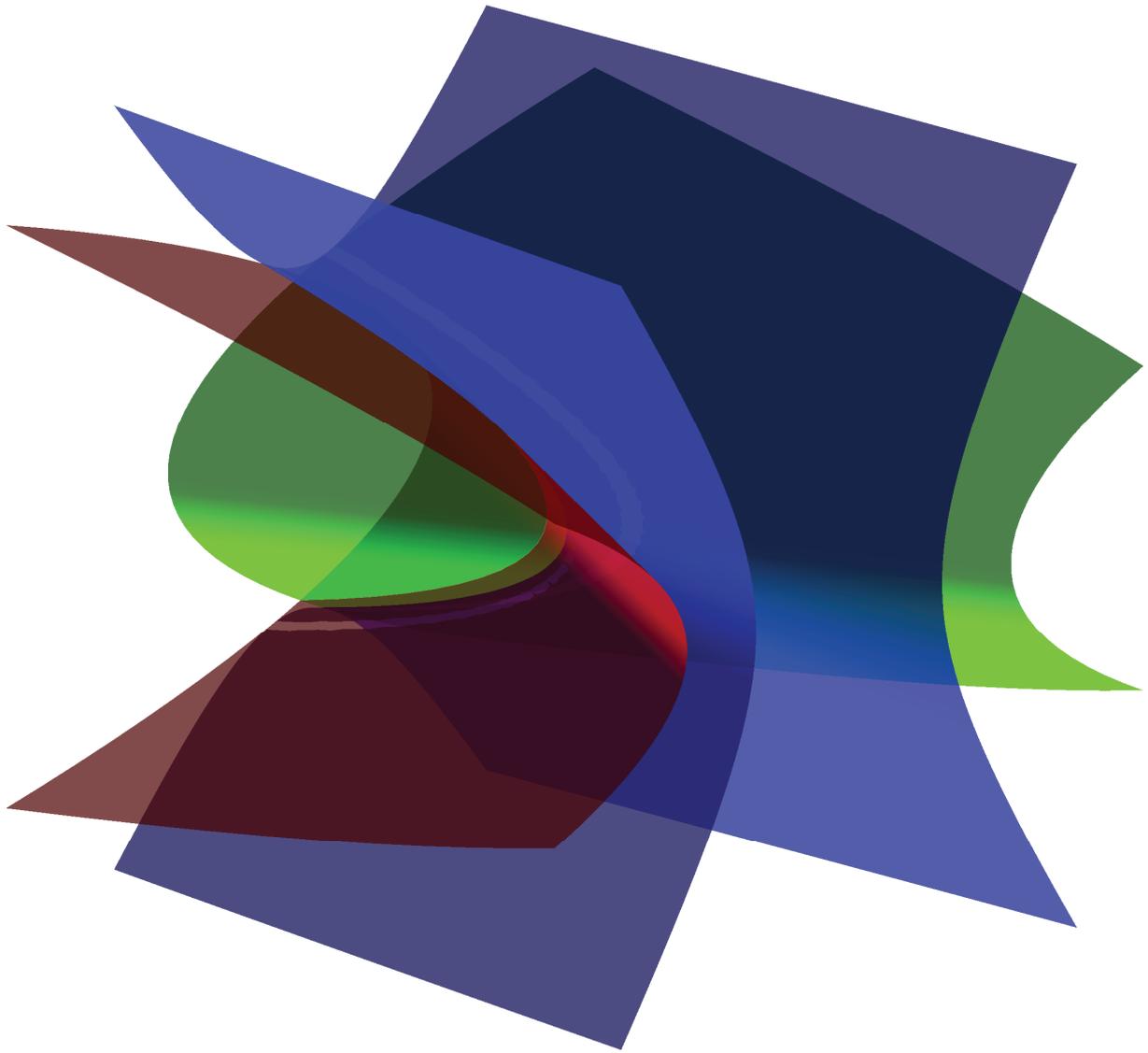
T. Leveringhaus, M. Wolter, L. Hofmann: “*Scientific analysis of Inter-TSO-compensation algorithms by physically-based power flow and superposition methods*”, IASTED AsiaPES 2010, Phuket, Thailand, 24.11.-26.11.2010.

### Wissenschaftliche Veröffentlichungen als Co-Autor

B. Zimmermann, K. Knorr, F. Steinke, P. Wolfrum, T. Leveringhaus: “*Grid Stability in a 100 % Renewable Electricity Supply System / Interactions between a High Installed Capacity of Wind Power and the System*”, 13th Wind Integration Workshop, Berlin, Germany, 11.-13. November 2014.

K. Knorr, B. Zimmermann, D. Kirchner, M. Speckmann, R. Spieckermann, M. Widdel, M. Wunderlich, R. Mackensen, K. Rohrig, F. Steinke, P. Wolfrum, T. Leveringhaus, T. Lager, L. Hofmann, D. Filzek, T. Göbel, B. Kusserow, L. Nicklaus, P. Ritter: „*Kombikraftwerk 2 / RegenerativKraftwerk 2050: Wege zu einer 100-%-Versorgung mit erneuerbaren Energien – Abschlussbericht*“, Pilotprojekt unter Förderung des Bundesministeriums für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, August 2014.

C. Rathke, T. Rendel, T. Breithaupt, T. Leveringhaus, L. Hofmann: “*Influence of Offshore Wind Farms on the European Electricity Market and Transmission System*”, RAVE – International Conference 2012, Bremerhaven, Germany, 08.-10. May 2012



Verlag  Dr. Hut

ISBN 978-3-8439-3578-4



9 783843 935784