

Über Ford-Kugeln

Von G. J. Rieger in Hannover

Im Zusammenhang mit den Farey-Brüchen für \mathbb{Q} hat man die bekannten Ford-Kreise¹⁾. Das Ziel dieser Arbeit ist es, im Zusammenhang mit dem Körper H der 3.-ten Einheitswurzel analog Ford-Kugeln²⁾ zu untersuchen. Hauptsächlich geht es um eine Packungseigenschaft (Satz 1), einen bemerkenswerten Grenzwert (Satz 2) und eine gewisse Gleichverteilung (Satz 3).

§ 1. Wir identifizieren $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mit dem euklidischen \mathbb{R}^3 vermöge

$$(1. 1) \quad \langle x_1 + x_2 i, x_3 \rangle = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle;$$

ferner sei $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3$ vermöge

$$x_1 + x_2 i = \langle x_1, x_2, 0 \rangle.$$

Es sei $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Für $z \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{R}_+$ bezeichne $B(z, d) \subset \mathbb{R}^3$ die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt $\langle z, \frac{1}{2}d \rangle$ und Durchmesser d . Es sei $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $d_1 \in \mathbb{R}_+$, $d_2 \in \mathbb{R}_+$; $B(z_1, d_1)$ berührt $B(z_2, d_2)$ von außen, wenn und nur wenn

$$(1. 2) \quad |z_1 - z_2|^2 = d_1 d_2$$

ist. Eine Kugel B heißt *zulässig*, wenn und nur wenn es ein $z \in \mathbb{C}$ und ein $d \in \mathbb{R}_+$ gibt mit $B = B(z, d)$; z heißt dann *Stützpunkt* von B .

§ 2. Es sei

$$\varrho := \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad H := \mathbb{Q}(\varrho), \quad L := \{m + n\varrho : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}\}.$$

Wegen $\varrho^2 = \varrho - 1$ ist

$$(2. 1) \quad L = \{m' + n'\varrho^2 : m' \in \mathbb{Z} \wedge n' \in \mathbb{Z}\}.$$

Für $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$(2. 2) \quad |x_1 + x_2\varrho|^2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

¹⁾ Vgl. etwa [6], 140.

²⁾ Vgl. [1] und [2].

Für $z \in L$ gilt $|z|^2 \in \mathbb{Z}$ und

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z \in E := \{1, \varrho, \varrho^2, -1, -\varrho, -\varrho^2\}.$$

L ist bekanntlich ein euklidischer Ring³⁾. Für jedes Paar $\alpha \in L, \beta \in L$ ist daher der größte gemeinsame Teiler (α, β) bis auf einen Faktor aus E eindeutig bestimmt. Jedes $z \in H$ läßt sich schreiben als

$$(2.3) \quad z = \frac{\alpha}{\beta}, \alpha \in L, 0 \neq \beta \in L, (\alpha, \beta) = 1;$$

für $z=0$ ist darin $\alpha=0, |\beta|=1$; für $z \neq 0$ sind darin α, β bis auf denselben Faktor aus E eindeutig bestimmt und durch die Zusatzbedingung

$$(2.4) \quad 0 \leq \arg \beta < \frac{\pi}{3}$$

völlig eindeutig bestimmt; $D(z) := |\beta|^2 \in \mathbb{N}$ ist eindeutig bestimmt; ferner gilt

$$(2.5) \quad |\beta| = 1 \Leftrightarrow z \in L.$$

Für $z \in H$ heißt $F(z) := B\left(z, \frac{1}{D(z)}\right)$ die *Ford-Kugel* von z oder zum Stützpunkt z .

Für $z_1 \in H, z_2 \in H, z_1 \neq z_2$ schreiben wir nach dem Vorbild von (2.3) zunächst $z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$; dann ist

$$(2.6) \quad \left| \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right|^2 = |\beta_1 \beta_2|^{-2} (1 + (|\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1|^2 - 1));$$

wegen (1.2) folgt, daß die Ford-Kugeln zu zwei verschiedenen Stützpunkten aus H keinen inneren Punkt gemeinsam haben und daß sie sich genau dann (von außen) berühren, wenn gilt

$$(2.7) \quad |\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1| = 1.$$

Ein Tripel verschiedener Elemente aus H heißt *satt*, wenn und nur wenn sich die Ford-Kreise dieser Elemente paarweise berühren. Ein von einem satten Tripel gebildetes Dreieck heißt auch *satt*.

Für $z \in H$ gelte (2.3); dann hat

$$(2.8) \quad \alpha \eta - \beta \xi = 1, \xi \in L, \eta \in L$$

nach dem euklidischen Algorithmus mindestens eine Lösung $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$; jede Lösung erhält man genau einmal vermöge

$$(2.9) \quad \xi = \xi_0 - \tau \alpha \quad \eta = \eta_0 - \tau \beta \quad (\tau \in L);$$

$\eta = 0$ ist wegen (2.5) genau für $z \in L$ möglich, und wir wählen dann $\eta_0 = 0$. Für ein beliebiges $\gamma \in E$ betrachten wir noch

$$(2.10) \quad \alpha \eta' - \beta \xi' = \gamma, \xi' \in L, \eta' \in L.$$

³⁾ Vgl. etwa [3], 187—188.

Vermöge $\xi' = \xi\gamma, \eta' = \eta\gamma$ sind die Lösungen von (2. 8) und (2. 10) bijektiv aufeinander bezogen, und für $\eta \neq 0$ ist $F\left(\frac{\xi}{\eta}\right) = F\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right)$. Zusammen mit (2. 7) folgt, daß jede Ford-Kugel $F(z)$ genau von den (unendlichvielen) Ford-Kugeln

$$F\left(\frac{\xi_0 - \tau\alpha}{\eta_0 - \tau\beta}\right)$$

mit $\tau \in L$ falls $z \notin L$ und mit $0 \neq \tau \in L$ falls $z \in L$ berührt wird.

§ 3. Es ist

$$M := \{x + yq^2 : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x < 1 \wedge 0 \leq y < 1\}$$

eine Raute mit den Ecken $0, 1, q, q^2$. Wegen (2. 1) ist $\{\alpha + M : \alpha \in L\}$ eine einfache und lückenlose Überdeckung von \mathbb{C} . Für $0 \neq \beta \in L$ ist $M(\beta) := \{\beta\lambda : \lambda \in M\}$ eine Raute mit den Ecken $0, \beta, \beta q, \beta q^2$; für jedes $\gamma \in L$ gibt es dann genau ein $\eta \in L$ mit $\eta \equiv \gamma \pmod{\beta} \wedge \eta \in M(\beta)$. Es ist $M(1) = M$. In (2. 9) darf also $\eta_0 \in M(\beta)$ vorausgesetzt werden; insbesondere ist dann $|\eta_0| < |\beta|$. Es sei $|\beta| > 1$; dann ist $\eta_0 \neq 0$. Für $0 \neq \beta \in L$ bezeichne $S(\beta)$ das offene Sechseck mit den Ecken $\beta\tau$ ($\tau \in E$). Es gilt $M(\beta) \subset S(\beta)$ und $\eta \in S(\beta) \Rightarrow |\eta| < |\beta|$.

Fall 1. η_0 liege im Inneren des Dreiecks $0, \beta, \beta q$. Dann gibt es Zahlen $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$ mit $a > 0, b > 0, a + b < 1$ und

$$(3. 1) \quad \eta_0 = a\beta + b\beta q.$$

In (2. 9) wählen wir τ als $0, 1, q$. Dann sind $\eta_0, \eta_0 - \beta, \eta_0 - \beta q$ enthalten in $S(\beta) \setminus \{0\}$. Die Punkte

$$\frac{\xi_0}{\eta_0}, \frac{\xi_0 - \alpha}{\eta_0 - \beta}, \frac{\xi_0 - \alpha q}{\eta_0 - \beta q}$$

sind paarweise verschieden und bilden ein Dreieck $\Delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, da für

$$r := \frac{\frac{\xi_0 - \alpha q}{\eta_0 - \beta q} - \frac{\xi_0}{\eta_0}}{\frac{\xi_0 - \alpha}{\eta_0 - \beta} - \frac{\xi_0}{\eta_0}} = \frac{(\eta_0 - \beta)q}{\eta_0 - \beta q}$$

die Annahme $r \in \mathbb{Q}$ wegen (3. 1) durch Aufspalten nach β und βq auf $r = -\frac{b}{a}$ und $a^2 + ab + b^2 = a + b$ führt, was

$$\Gamma := (a + b)(1 - a - b) + ab > 0$$

widerspricht. Für

$$k := \Gamma^{-1}a((1 - a - b)(1 - a) + b^2), l := \Gamma^{-1}b((1 - a - b)(1 - b) + a^2)$$

gilt $k > 0$, $l > 0$, $k + l < 1$ und

$$\frac{\alpha}{\beta} = (1 - k - l) \frac{\xi_0}{\eta_0} + k \frac{\xi_0 - \alpha}{\eta_0 - \beta} + l \frac{\xi_0 - \alpha \varrho}{\eta_0 - \beta \varrho};$$

also liegt $\frac{\alpha}{\beta}$ im Innern von $\Delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Mittels $\frac{\alpha}{\beta}$ wird das satte Dreieck $\Delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ wegen (2. 7) und (2. 8) in 3 satte Dreiecke zerlegt.

Beispiel 1. $\Delta\left(\frac{1}{1 + \varrho^{-1}}\right)$ hat die Ecken 0, 1, ϱ .

Fall 2. η_0 liege im Innern des Dreiecks 0, $\beta\varrho$, $\beta\varrho^2$. Dann gibt es Zahlen $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$ mit $a > 0$, $b > 0$, $a + b < 1$ und

$$\eta_0 = a\beta\varrho + b\beta\varrho^2.$$

In (2. 9) wählen wir τ als 0, ϱ , ϱ^2 . Dann sind η_0 , $\eta_0 - \beta\varrho$, $\eta_0 - \beta\varrho^2$ enthalten in $S(\beta) \setminus \{0\}$. Nach dem Vorbild von Fall 1 findet man, daß die Punkte

$$\frac{\xi_0}{\eta_0}, \frac{\xi_0 - \alpha\varrho}{\eta_0 - \beta\varrho}, \frac{\xi_0 - \alpha\varrho^2}{\eta_0 - \beta\varrho^2}$$

ein Dreieck $\Delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ bilden, welches $\frac{\alpha}{\beta}$ im Innern enthält. Mittels $\frac{\alpha}{\beta}$ wird das satte Dreieck $\Delta\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ in 3 satte Dreiecke zerlegt.

Fall 3. η_0 liege im Innern der Strecke von 0 nach β . Dann gibt es ein $c \in \mathbb{Q}$ mit $0 < c < 1$ und

$$(3. 2) \quad \eta_0 = c\beta.$$

In (2. 9) wählen wir τ als 0, ϱ^{-1} , 1, ϱ . Dann liegen η_0 , $\eta_0 - \beta$ bzw. $\eta_0 - \beta\varrho^{-1}$, $\eta_0 - \beta\varrho$ im Innern bzw. auf dem Rande von $S(\beta) \setminus \{0\}$. Wegen (2. 8) und (3. 2) ist

$$\frac{\frac{\xi_0 - \alpha\varrho}{\eta_0 - \beta\varrho} - \frac{\xi_0}{\eta_0}}{\frac{\xi_0 - \alpha\varrho^{-1}}{\eta_0 - \beta\varrho^{-1}} - \frac{\xi_0}{\eta_0}} = \varrho^2 \frac{c - \varrho^{-1}}{c - \varrho};$$

darin hat die rechte Seite den Betrag 1 und ist von 1 und -1 verschieden; also bilden

$$\frac{\xi_0 - \alpha\varrho^{-1}}{\eta_0 - \beta\varrho^{-1}}, \frac{\xi_0}{\eta_0}, \frac{\xi_0 - \alpha\varrho}{\eta_0 - \beta\varrho}$$

ein gleichschenkliges Dreieck. Wegen (2. 8) und (3. 2) ist

$$\frac{\xi_0 - \alpha}{\eta_0 - \beta} - \frac{\xi_0}{\eta_0} = \frac{1 - c + c^2}{(1 - c)(2 - c)} \left(\frac{\xi_0 - \alpha\varrho^{-1}}{\eta_0 - \beta\varrho^{-1}} - \frac{\xi_0}{\eta_0} + \frac{\xi_0 - \alpha\varrho}{\eta_0 - \beta\varrho} - \frac{\xi_0}{\eta_0} \right);$$

ferner ist

$$(1 - c)(2 - c) < 2(1 - c + c^2);$$

also bilden

$$\frac{\xi_0}{\eta_0}, \frac{\xi_0 - \alpha \varrho^{-1}}{\eta_0 - \beta \varrho^{-1}}, \frac{\xi_0 - \alpha}{\eta_0 - \beta}, \frac{\xi_0 - \alpha \varrho}{\eta_0 - \beta \varrho}$$

ein konvexes Viereck; die von $\frac{\xi_0}{\eta_0}$ ausgehende Diagonale ist Symmetrielinie, enthält $\frac{\alpha}{\beta} = c \frac{\xi_0}{\eta_0} + (1-c) \frac{\xi_0 - \alpha}{\eta_0 - \beta}$ und zerlegt das Viereck in zwei satte Dreiecke, welche ihrerseits mittels $\frac{\alpha}{\beta}$ in zwei satte Dreiecke zerlegt werden.

Fall 4. η_0 liege im Innern der Strecke von 0 nach $\beta \varrho$. Statt (3. 2) hat man dann $\eta_0 = c \beta \varrho$. In (2. 9) wählen wir τ als 0, 1, ϱ , ϱ^2 . Alles andere geht nach dem Vorbild von Fall 3.

Fall 5. η_0 liege im Innern der Strecke von 0 nach $\beta \varrho^2$. Statt (3. 2) hat man dann $\eta_0 = c \beta \varrho^2$. In (2. 9) wählen wir τ als 0, ϱ , ϱ^2 , ϱ^3 . Alles andere geht nach dem Vorbild von Fall 3.

Die Fälle 1 bis 5 erschöpfen alle Möglichkeiten für $\eta_0 \in M(\beta)$. Jedes z mit (2. 3) gibt also Anlaß zu satten Dreiecken in der beschriebenen Weise.

§ 4. Wir bringen jetzt einfache Hilfssätze über Kugeln.

Hilfssatz 1. *Drei zulässige Kugeln mit den Durchmessern d_1, d_2, d_3 mögen sich paarweise von außen berühren; dann gilt*

$$(4. 1) \quad 2(d_1^{-2} + d_2^{-2} + d_3^{-2}) \leq (d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_3^{-1})^2.$$

Beweis. Die Stützpunkte darf man voraussetzen als

$$(4. 2) \quad \langle 0, 0, 0 \rangle, \langle x_2, 0, 0 \rangle, \langle x_3, y_3, 0 \rangle$$

aus \mathbb{R}^3 mit

$$(4. 3) \quad x_2 > 0, y_3 \geq 0.$$

Wie bei (1. 2) gilt

$$(4. 4) \quad x_2^2 = d_1 d_2, (x_2 - x_3)^2 + y_3^2 = d_2 d_3, x_3^2 + y_3^2 = d_3 d_1.$$

Es folgt $x_2 = \sqrt{d_1 d_2}$. Subtraktion in (4. 4) ergibt

$$2x_3 \sqrt{d_1 d_2} = d_1 d_2 - d_2 d_3 + d_3 d_1.$$

Ferner ist

$$(4. 5) \quad 4d_1 d_2 y_3^2 = 2(d_1 + d_2 + d_3) d_1 d_2 d_3 - d_1^2 d_2^2 - d_2^2 d_3^2 - d_3^2 d_1^2.$$

Daraus folgt wegen $y_3^2 \geq 0$ die Behauptung.

Ist umgekehrt (4. 1) erfüllt, lassen sich aus diesem Beweis reelle Zahlen y_3, x_3, x_2 bestimmen, und die Kugeln mit den Durchmessern d_1, d_2, d_3 und den Stützpunkten (4. 2) berühren sich paarweise von außen.

Hilfssatz 2. *Drei zulässige Kugeln K_1, K_2, K_3 mit den Durchmessern d_1, d_2, d_3 mögen sich paarweise von außen berühren; falls $d_1 = d_2 = d_3$, gibt es genau eine zulässige Kugel (und zwar vom Durchmesser $\frac{1}{3} d_1$), welche K_1, K_2 und K_3 von außen berührt; andernfalls gibt es genau zwei zulässige Kugeln K' und K'' , welche K_1, K_2 und K_3 von außen berühren.*

Beweis. Wir wählen die Stützpunkte von K_1, K_2, K_3 gemäß (4. 2) und (4. 3); dabei sind y_3, x_3, x_2 durch d_1, d_2, d_3 eindeutig bestimmt auf Grund des vorigen Beweises. Die zulässige Kugel mit Stützpunkt $\langle x, y, 0 \rangle$ und Durchmesser d möge K_1, K_2 und K_3 von außen berühren. Wie bei (4. 4) gilt dann

$$(4. 6) \quad x^2 + y^2 = dd_1, (x - x_2)^2 + y^2 = dd_2, (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = dd_3.$$

Zusammen mit (4. 4) folgt

$$(4. 7) \quad 2x_2x = d(d_1 - d_2) + d_1d_2,$$

$$(4. 8) \quad 2x_3x + 2y_3y = d(d_1 - d_3) + d_1d_3$$

und damit

$$(4. 9) \quad 2x_2y_3y = d((d_1 - d_3)x_2 + (d_2 - d_1)x_3) + d_1(d_3x_2 - d_2x_3).$$

Es sei noch

$$(4. 10) \quad n_j := d_j^{-1} (j=1, 2, 3), n := d^{-1}, \sigma := n_1 + n_2 + n_3, \tau := n_1^2 + n_2^2 + n_3^2.$$

(4. 5) ergibt dann

$$(4. 11) \quad 0 \leq 4n_1n_2n_3^2y_3^2 = \sigma^2 - 2\tau.$$

Fall 1. $y_3 \neq 0$. (4. 7) und (4. 9) führen mit der ersten Gleichung von (4. 6) nach leichter Rechnung zwangsläufig auf

$$2n^2 - 2\sigma n + 3\tau - \sigma^2 = 0$$

und daher

$$(4. 12) \quad 2n_{\pm} = \sigma \pm \sqrt{3(\sigma^2 - 2\tau)}.$$

Für beliebige reelle Zahlen a_1, a_2, a_3 gilt

$$(4. 13) \quad (a_1 + a_2 + a_3)^2 \leq 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2);$$

darin gilt = genau für $a_1 = a_2 = a_3$. Also ist

$$(4. 14) \quad n_+ \geq n_- \geq 0.$$

Falls $d_1 = d_2 = d_3$, gibt (4. 12) daher $n_- = 0$ und $n_+ = 3n_1$. Andernfalls ist $n_- > 0$ und die beiden gesuchten Kugeln haben die Durchmesser $d_+ := n_+^{-1}$ und $d_- := n_-^{-1}$; ihre Stützpunkte $\langle x_+, y_+, 0 \rangle$ und $\langle x_-, y_-, 0 \rangle$ errechnen sich aus (4. 7), (4. 9) mittels $d = d_+$ und $d = d_-$.

Fall 2. $y_3 = 0$. Dann darf noch $x_2 < x_3$ vorausgesetzt werden. (4. 4) liefert

$$(4. 15) \quad d_2^{-\frac{1}{2}} = d_1^{-\frac{1}{2}} + d_3^{-\frac{1}{2}},$$

und $d_1 = d_2 = d_3$ ist jetzt unmöglich. Elimination von x aus (4. 6) und (4. 8) ergibt leicht $2n = \sigma$, was wegen (4. 11) im Einklang mit (4. 12) steht. Die beiden gesuchten Kugeln haben beide den Durchmesser $d = \frac{2}{\sigma}$; ihre Stützpunkte $\langle x_+, y_+, 0 \rangle, \langle x_-, y_-, 0 \rangle$ errechnen sich aus (4. 7) und der ersten Gleichung von (4. 6); insbesondere ist $x_+ = x_-, y_+ + y_- = 0$.

Die beiden gesuchten Kugeln erfüllen in Fall 1 und Fall 2 noch die Beziehung $(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2 = 3d_+d_-$ und berühren sich nach (1. 2) somit nicht.

Hilfssatz 3. Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in Hilfssatz 2; die Durchmesser von K', K'' bezeichnen wir noch mit d', d'' ; die Stützpunkte von K_1, K_2, K_3 mögen ein echtes Dreieck bilden; dann sind die Stützpunkte von K' und K'' rational aus den Durchmessern d_1, d_2, d_3, d', d'' und den Stützpunkten von K_1, K_2, K_3 berechenbar.

Beweis. Es sei etwa $d' \leq d''$; mit (4. 10) und (4. 12) ist dann

$$d' = n_+^{-1}, \quad d'' = n_-^{-1}.$$

Die Stützpunkte von K_1, K_2, K_3 seien $\langle x_1, y_1, 0 \rangle, \langle x_2, y_2, 0 \rangle, \langle x_3, y_3, 0 \rangle$ aus \mathbb{R}^3 . Da eine Translation rational ausführbar, darf $x_1 = y_1 = 0$ vorausgesetzt werden. Es sei $d = d'$ bzw. $d = d''$, und es sei $\langle x, y, 0 \rangle$ der Stützpunkt von K' bzw. K'' . Nach dem Vorbild von (4. 7) und (4. 8) kommt

$$2x_jx + 2y_jy = d(d_1 - d_j) + d_1d_j \quad (j = 2, 3).$$

Nach Voraussetzung ist aber $x_2y_3 \neq x_3y_2$.

§4' (Zusatz bei der Korrektur). Ein Tripel zulässiger Kugeln mit verschiedenen Stützpunkten und mit den Durchmessern d_1, d_2, d_3 heißt *halbsatt*, wenn und nur wenn mit den Bezeichnungen (4. 2) genau zwei Gleichungen von (4. 4) ungeändert bleiben und die restliche Gleichung von (4. 4) einen zusätzlichen Faktor 3 auf der rechten Seite hat.

Die zulässigen Kugeln K_1, K_2, K_3 mit den verschiedenen Stützpunkten (4. 2) und mit den Durchmessern d_1, d_2, d_3 seien halbsatt. Ohne Einschränkung darf

$$(4. 4') \quad x_2^2 = d_1d_2, \quad (x_2 - x_3)^2 + y_3^2 = 3d_2d_3, \quad x_3^2 + y_3^2 = d_3d_1$$

vorausgesetzt werden. Dann hat man

$$x_2 = \sqrt{d_1d_2}, \quad 2x_2x_3 = d_1d_2 - 3d_2d_3 + d_3d_1,$$

$$(4. 5') \quad 4d_1d_2y_3^2 = 2(d_1 + 3d_2 + 3d_3)d_1d_2d_3 - d_1^2d_2^2 - 9d_2^2d_3^2 - d_3^2d_1^2,$$

$$(4. 1') \quad 2(9d_1^{-2} + d_2^{-2} + d_3^{-2}) \leq (3d_1^{-1} + d_2^{-1} + d_3^{-1})^2.$$

2*

Die zulässige Kugel K mit Stützpunkt $\langle x, y, 0 \rangle$ und Durchmesser d möge K_1, K_2, K_3 von außen berühren. Dann hat man (4. 6), (4. 7), (4. 8), (4. 9). Es sei noch

$$(4. 10') \quad n_j := d_j^{-1} \quad (j=1, 2, 3), \quad n := d^{-1}, \quad \sigma' := 3n_1 + n_2 + n_3, \quad \tau' := 9n_1^2 + n_2^2 + n_3^2.$$

(4. 5') ergibt

$$(4. 11') \quad 0 \leq 4n_1 n_2 n_3^2 y_3^2 = (\sigma')^2 - 2\tau'.$$

Nach leichter Rechnung wird man jetzt zwangsläufig auf

$$3n^2 + 3(n_1 - n_2 - n_3)n + 3n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 3n_1 n_2 + n_2 n_3 - 3n_3 n_1 = 0$$

und daher auf

$$(4. 12') \quad 6n_{\pm} = -3n_1 + 3n_2 + 3n_3 \pm \sqrt{3((\sigma')^2 - 2\tau')}$$

geführt. Aus (4. 1') folgt

$$(\sqrt{n_2} - \sqrt{n_3})^2 \leq 3n_1 \leq (\sqrt{n_2} + \sqrt{n_3})^2$$

und insbesondere $n_1 < n_2 + n_3$, und (4. 12') liefert

$$(4. 14') \quad n_+ \geq n_- \geq 0.$$

Falls $d_1 = d_2 = d_3$, ist $n_- = 0$ (und $n_+ = n_1$). Andernfalls ist $n_- > 0$, und die halbsatten Kugeln K_1, K_2, K_3 werden von genau zwei zulässigen Kugeln $K = K', K''$ von außen berührt; sie haben die Durchmesser $d_+ := n_+^{-1}$, $d_- := n_-^{-1}$; ihre Stützpunkte $\langle x_+, y_+, 0 \rangle$, $\langle x_-, y_-, 0 \rangle$ errechnen sich wieder aus (4. 6), (4. 7) mittels $d = d_+, d_-$; eine leichte Rechnung ergibt

$$(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2 = d_+ d_- ,$$

und K', K'' berühren sich nach (1. 2). Hilfssatz 3 überträgt sich wörtlich auf halbsatte Kugeln K_1, K_2, K_3 (= **Hilfssatz 3'**).

Die quadratische Form $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ aus (2. 2) ist positiv-definit. Ihre verschiedenen positiven Werte g_n für $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$ ordnen wir der Größe nach an; es ist also $g_1 = 1, g_2 = 3, g_3 = 4, g_4 = 7, g_5 = 9, g_6 = 12, \dots$. Es sei $G := \{0, g_1, g_2, g_3, \dots\}$.

Ein Tripel verschiedener Elemente aus H heißt *halbsatt*, wenn und nur wenn das Tripel ihrer Ford-Kugeln halbsatt ist.

Hilfssatz 4. $z \in \mathbb{C}$ liege in dem echten, abgeschlossenen Dreieck $z_j \in H$ ($j=1, 2, 3$); es sei $d^* \in \mathbb{R}_+$; $B(z, d^*)$ berühre $F(z_j)$ ($j=1, 2, 3$) von außen; ferner sei

$$(4. 16) \quad d^* < \min(D(z_1)^{-1}, D(z_2)^{-1}, D(z_3)^{-1});$$

dann ist das Tripel z_1, z_2, z_3 satt oder halbsatt.

Beweis. Nach dem Vorbild von (2. 3) sei $z_j = \alpha_j \beta_j^{-1}$ ($j=1, 2, 3$); ferner sei $d_j^* := D(z_j)^{-1}$ ($j=1, 2, 3$) und

$$(4. 17) \quad \delta_1 := \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \quad \delta_2 := \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3, \quad \delta_3 := \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1.$$

Es ist $|\delta_j|^2 \in G$ ($j=1, 2, 3$). Für den Durchmesser \tilde{d} der zulässigen Kugel, welche ihren Stützpunkt auf der Strecke von z_2 nach z_3 hat und welche $F(z_2)$ und $F(z_3)$ berührt, gilt dann (vgl. auch (4. 15))

$$|\delta_1| \tilde{d}^{-\frac{1}{2}} = d_2^{*\frac{-1}{2}} + d_3^{*\frac{-1}{2}}.$$

Trivialerweise ist $d^* \geq \bar{d}$. Die Annahme $|\delta_1| \geq 2$ widerspricht (4. 16). Es darf also $|\delta_j| \leq \sqrt{3}$ ($j=1, 2, 3$) vorausgesetzt werden. Es sei $|\delta_1|=|\delta_2|=|\delta_3|=\sqrt{3}$; mit den Stützpunkten (4. 2) und $\langle x, y, 0 \rangle$ gilt dann

$$x_2^2 = 3d_1^*d_2^*, (x_2 - x_3)^2 + y_3^2 = 3d_2^*d_3^*, x_3^2 + y_3^2 = 3d_3^*d_1^*,$$

$$x^2 + y^2 = d^*d_1^*, (x - x_2)^2 + y^2 = d^*d_2^*, (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = d^*d_3^*;$$

mittels $d_j := d_j^* \sqrt{3}$ ($j=1, 2, 3$), $d := \frac{d^*}{\sqrt{3}}$ gehen diese Gleichungen in (4. 4), (4. 6) über;

mit (4. 10) liefert (4. 13) sofort $\sigma^2 \leq 3\tau$, und (4. 12) gibt

$$\frac{2}{d} \leq 2\sqrt{3\tau} \leq 6 \max(n_1, n_2, n_3)$$

im Widerspruch zu (4. 16). Es sei jetzt $|\delta_1|=|\delta_2|=\sqrt{3}$, $|\delta_3|=1$; durch Erweitern mit Faktoren aus E kann man erreichen $\delta_1 = \delta_2 = 1 + \varrho$, $\delta_3 \in E$; durch Subtraktion in (4. 17) folgt $\alpha_3(\beta_1 + \beta_2) = \beta_3(\alpha_1 + \alpha_2)$ und daraus wegen $(\alpha_3, \beta_3) = 1$ sofort $\beta_1 = -\beta_2 + \tau\beta_3$, $\alpha_1 = -\alpha_2 + \tau\alpha_3$ für ein gewisses $\tau \in L$; Einsetzen in δ_3 ergibt den Widerspruch $\tau(1 + \varrho) \in E$. Bis auf die Numerierung bleiben also nur die Fälle $|\delta_1|=\sqrt{3}$, $|\delta_2|=|\delta_3|=1$ und $|\delta_1|=|\delta_2|=|\delta_3|=1$.

Beispiel. Es sei $t \in \mathbb{N}$. Der Punkt $\frac{1}{t(1+\bar{\varrho})}$ liegt im satten Dreieck $0, \frac{1}{t+(t-1)\bar{\varrho}}, \frac{1}{t-1+t\bar{\varrho}}$; $F\left(\frac{1}{t(1+\bar{\varrho})}\right)$ berührt $F(0), F\left(\frac{1}{t+(t-1)\bar{\varrho}}\right), F\left(\frac{1}{t-1+t\bar{\varrho}}\right)$; (4. 16) lautet $\frac{1}{3t^2} < \frac{1}{3t^2 - 3t + 1}$. Der Punkt $\frac{1}{t+1}$ liegt im halbsatten Dreieck $0, \frac{1}{t+\bar{\varrho}}, \frac{1}{t+\varrho}$; $F\left(\frac{1}{t+1}\right)$ berührt $F(0), F\left(\frac{1}{t+\bar{\varrho}}\right), F\left(\frac{1}{t+\varrho}\right)$; (4. 16) lautet $\frac{1}{(t+1)^2} < \frac{1}{t^2+t+1}$.

§ 5. Gegeben sei ein sattes Tripel z_1, z_2, z_3 aus H . Nach dem Vorbild von (2. 3) sei $z_j = \alpha_j \beta_j^{-1}$ ($j=1, 2, 3$). Wegen (2. 7) gilt in (4. 17) dann $\delta_j \in E$ ($j=1, 2, 3$). Durch Erweitern der Brüche mit Faktoren aus E kann zunächst erreicht werden $\delta_1 = \delta_2 = 1$. Durch erneutes Erweitern des Bruches für z_2 bzw. z_3 bzw. z_1 mit $\kappa \in E$ bzw. κ^{-1} bzw. κ bleiben δ_1 und δ_2 ungeändert, und δ_3 geht in $\delta_3 \kappa^2$ über. Es kann also $\delta_3 = 1$ oder $\delta_3 = -1$ erzielt werden. Im Fall $\delta_3 = 1$ sind wir fertig. Im Fall $\delta_3 = -1$ vertauschen wir die Indizes 1 und 2 und erweitern den Bruch für z_1 und z_2 mit -1 . Jedenfalls kann

$$(5. 1) \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 = \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 = 1$$

erzielt werden. Daraus folgt

$$\alpha_2(\beta_1 + \beta_3) = \beta_2(\alpha_1 + \alpha_3)$$

und daraus wegen $(\alpha_2, \beta_2) = 1$ sofort

$$\beta_3 = -\beta_1 + \tau\beta_2, \alpha_3 = -\alpha_1 + \tau\alpha_2$$

für ein gewisses $\tau \in L$. Durch Einsetzen in die letzte Gleichung von (5. 1) kommt $\tau = -1$ und somit

$$(5. 2) \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

Es sei etwa $\beta_1 = a + b\varrho$, $\beta_2 = c + h\varrho$ mit gewissen Zahlen a, b, c, h aus \mathbb{Z} . Dann ist

$$|\beta_1|^2 = a^2 + ab + b^2, \quad |\beta_2|^2 = c^2 + ch + h^2, \quad |\beta_3|^2 = (a+c)^2 + (a+c)(b+h) + (b+h)^2.$$

Wir wenden Hilfssatz 2 an auf $F(z_1), F(z_2), F(z_3)$; nach (4. 10) ist dann

$$n_j = |\beta_j|^2 \quad (j=1, 2, 3), \quad \sigma^2 - 2\tau = 3(ah - bc)^2.$$

Nach (4. 12) ist

$$n_{\pm} = n_1 + n_2 + ac + bh + \frac{1}{2}(ah + bc) \pm \frac{3}{2}|ah - bc|.$$

Also ist $n_{\pm} \in \mathbb{Z}$ und wegen (4. 14) noch $n_{\pm} \geq 0$. Genau im Fall $d_1 = d_2 = d_3$ ist $n_- = 0$; wegen (5. 2) ist dann

$$\beta_2 = \beta_1\varrho^{\pm 2}, \quad \beta_3 = \beta_1\varrho^{\mp 2};$$

(5. 1) gibt $\beta_1|1$; also ist

$$(5. 3) \quad n_- = 0 \Leftrightarrow d_1 = d_2 = d_3 = 1.$$

Es ist sogar $n_{\pm} \in G$; denn: für $ah \geq bc$ ist

$$n_+ = (a+b+h)^2 - (a+b+h)(a+c+h) + (a+c+h)^2,$$

und ähnlich ist es für n_- und ähnlich für $ah < bc$.

§ 5' (Zusatz bei der Korrektur). Die Zahlen z_1, z_2, z_3 aus H seien verschieden und halbsatt. In (4. 16) ist etwa $|\delta_1| = \sqrt{3}$, $|\delta_2| = 1$, $|\delta_3| = 1$. Nach dem Vorbild von (5. 1) kann

$$(5. 1') \quad \delta_1 = 1 + \varrho, \quad \delta_2 = \delta_3 = 1$$

erzielt werden. Wie bei (5. 2) folgt

$$(5. 2') \quad (1 + \varrho)\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0.$$

Es sei etwa $\beta_1 = a + b\varrho$, $\beta_2 = c + h\varrho$ mit gewissen a, b, c, h aus \mathbb{Z} . Dann ist $\beta_3 = -a + b - c - (a + 2b + h)\varrho$. Wir wenden § 4' an auf $F(z_1), F(z_2), F(z_3)$; dann ist $n_j = |\beta_j|^2$ ($j=1, 2, 3$). Eine leichte Rechnung ergibt

$$(\sigma')^2 - 2\tau' = 3(ac - ah + bh + 2bc)^2.$$

Nach (4. 12') ist

$$(5. 3') \quad 2n_{\pm} = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2h^2 + 2ab + 2ch + 3ac + 3ah + 3bh \pm |ac - ah + bh + 2bc|.$$

Mit (4. 14') folgt $0 \leq n_{\pm} \in \mathbb{Z}$. Genau im Fall $d_1 = d_2 = d_3$ ist $n_- = 0$; wegen (5. 2') ist dann $\beta_2 = -\beta_1$, $\beta_3 = -\beta_1\varrho$ oder $\beta_3 = -\beta_1$, $\beta_2 = -\beta_1\varrho$; (5. 1') gibt $\beta_1|1$; also gilt erneut (5. 3). Wie oben findet man sogar leicht $n_{\pm} \in G$.

§ 6. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es Zahlen $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 + ab + b^2 = g_n$; also ist $D\left(\frac{1}{a+bg}\right) = g_n$. Für jedes $z \in H$ gibt es genau ein $j \in \mathbb{N}$ mit

$$(6.1) \quad D(z) = g_j.$$

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Für $z_1 \in H$, $z_2 \in H$, $z_1 \neq z_2$ gilt

$$|z_1 - z_2|^2 \geq D(z_1)^{-1} D(z_2)^{-1}$$

wegen (2.6). Also ist $L_m := \{z \in H : D(z) \leq g_m\}$ diskret. Es ist $L = L_1$, $H = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$. Es sei

$$\psi_m(v) := \inf_{z \in L_m} |z - v|^2 D(z) \quad (v \in \mathbb{C}).$$

Es ist

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \psi_m(v) = 0 &\Leftrightarrow v \in L_m, \\ D(v+w) = D(v), \quad \psi_m(v+w) = \psi_m(v) &\quad (v \in \mathbb{C}, w \in L). \end{aligned}$$

M^* entstehe aus M durch Hinzunahme seines Randes. Es ist

$$\psi_m(v) = \inf_{z \in L_m, |z| \leq 2} |z - v|^2 D(z) \quad (v \in M^*).$$

Also ist ψ_m auf M^* stetig; daher nimmt ψ_m auf M^* sein Maximum an, das wir mit h_m bezeichnen. Also ist $S_m := \{v \in \mathbb{C} : \psi_m(v) = h_m\} \neq \emptyset$. Wegen (6.2) ist $\psi_m(v) \leq h_m$ ($v \in \mathbb{C}$). Für $v \in M^* \cap (L_{m+1} \setminus L_m)$ ist

$$\psi_m(v) \geq \inf_{z \in L_m} \frac{1}{D(z) D(v)} D(z) = g_{m+1}^{-1}$$

und daher

$$(6.3) \quad h_m \geq g_{m+1}^{-1};$$

ferner ist $h_{m+1} \leq h_m$. Für $V_m := \bigcup_{z \in L_m} F(z)$ ist $V_m \subseteq V_{m+1}$.

Hilfssatz 5. Es sei $m \in \mathbb{N}$; für jedes $v \in S_m$ hat $B(v, h_m) \cap V_m$ keine inneren Punkte; für jedes $v \in \mathbb{C}$ und jedes reelle $d > h_m$ hat $B(v, d) \cap V_m$ innere Punkte.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus

$$h_m = \psi_m(v) \leq |z - v|^2 D(z) \quad (v \in S_m, z \in H, D(z) \leq g_m)$$

und (1.2). Die Verneinung der zweiten Behauptung ergibt sofort einen Widerspruch zur Definition von h_m als Maximum.

Hilfssatz 5 liefert sofort

Folgerung 1. h_m ist der größtmögliche Durchmesser unter allen zulässigen Kugeln, welche mit V_m keine inneren Punkte gemeinsam haben ($m \in \mathbb{N}$).

§ 7. Wir beweisen jetzt

Satz 1. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $S_m = L_{m+1} \setminus L_m$ und $h_m = g_{m+1}^{-1}$.

Beweis (Induktion nach m). Für $m \in \mathbb{N}$ sei $S'_m := S_m \cap M$, $L'_m := L_m \cap M$; wegen (6. 2) ist es hinreichend, $S'_m = L'_{m+1} \setminus L'_m$ und $h_m = g_{m+1}^{-1}$ zu zeigen. Es sei $m=1$; einerseits hat D auf M genau für die Schwerpunkte $\frac{1+\varrho}{3} = \frac{1}{1+\varrho^{-1}}$ und $\frac{\varrho(1+\varrho)}{3} = \frac{\varrho}{1+\varrho^{-1}}$ der Dreiecke $0, 1, \varrho$ und $0, \varrho, \varrho^2$ den Wert 3; andererseits haben unter allen zulässigen Kugeln, die ihren Stützpunkt in M haben und mit V_1 keine inneren Punkte gemeinsam haben, genau die Kugeln in diesen beiden Schwerpunkten den größten Durchmesser und zwar $1/3$. Damit haben wir $S_1 = L_2 \setminus L_1$ und $h_2 < h_1 = g_2^{-1}$. Für $m > 1$ sei bereits $S_{m-1} = L_m \setminus L_{m-1}$ und $h_m < h_{m-1} = g_m^{-1}$ bewiesen.

i) Es sei $z \in S_m$. Nach Hilfssatz 5 und Folgerung 1 gibt es ein z enthaltendes, abgeschlossenes, echtes Dreieck $z_j \in L_m$ ($j=1, 2, 3$) derart, daß die Kugel $B(z, h_m)$ die Kugeln $F(z_j)$ ($j=1, 2, 3$) berührt; denn sonst könnte man in jeder Umgebung von z noch Punkte $v \in \mathbb{C}$ und reelle Zahlen $d > h_m$ finden derart, daß $B(v, d)$ mit V_m keine inneren Punkte gemeinsam hat. Das Dreieck z_1, z_2, z_3 ist satt oder halbsatt; denn sonst hätte man den Widerspruch

$$\begin{aligned} h_m &\geq \min(D(z_1)^{-1}, D(z_2)^{-1}, D(z_3)^{-1}) \quad (\text{nach Hilfssatz 4}) \\ &\geq g_m^{-1} \quad (\text{wegen } z_j \in L_m). \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen und Überlegungen von § 5 und § 5' ergeben sofort $h_m = n_+^{-1}$ oder $h_m = n_-^{-1}$ und somit $h_m^{-1} \in \mathbb{N}$. Nach Hilfssatz 3 und Hilfssatz 3' folgt $z \in H$. Dieses z schreiben wir gemäß (2. 3) und wenden § 3 an; es folgt

$$(7. 1) \quad B(z, h_m) = F(z).$$

Insbesondere ist

$$(7. 2) \quad D(z)^{-1} = h_m \geq g_{m+1}^{-1} \quad (\text{nach (6. 3)}).$$

In (6. 1) ist dann $j \leq m+1$. Für $j \leq m$ hätte man wegen (7. 1) den Widerspruch

$$B(z, h_m) \cap V_m = B(z, h_m)$$

zu Hilfssatz 5. Also ist $j = m+1$ und folglich $z \in L_{m+1} \setminus L_m$. Damit ist bewiesen $S_m \subseteq L_{m+1} \setminus L_m$. (6. 1) und (7. 2) ergeben $h_m = g_{m+1}^{-1}$. Nach Folgerung 1 gibt es Zahlen $v \in \mathbb{C}$ derart, daß $B(v, h_{m+1})$ mit V_{m+1} keine inneren Punkte gemeinsam hat; wir machen die Annahme $h_{m+1} = h_m$; dann hätte $B(v, h_m)$ erst recht mit V_m keine inneren Punkte gemeinsam; nach § 6 folgt $v \in S_m$ und nach dem eben Bewiesenen daraus $v \in L_{m+1} \setminus L_m$, $B(v, h_m) = F(v)$ und der Widerspruch $B(v, h_{m+1}) = F(v) \subseteq V_{m+1}$ zu Hilfssatz 5; also ist

$$h_{m+1} < h_m.$$

ii) Es sei $z \in L_{m+1} \setminus L_m$. Dann gilt $D(z) = g_{m+1} = h_m^{-1}$ nach i), und $F(z)$ und V_m haben keinen inneren Punkt gemeinsam nach § 2. Es folgt

$$\begin{aligned} |v - z|^2 &\geq D(v)^{-1} D(z)^{-1} \quad (\text{nach (2. 6)}) \\ &= D(v)^{-1} h_m \quad (v \in L_m) \end{aligned}$$

und daraus $\psi_m(z) \geq h_m$, $z \in S_m$. Damit ist auch $L_{m+1} \setminus L_m \subseteq S_m$ bewiesen.

Also kann man sich

$$V := \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = \bigcup_{z \in H} F(z)$$

in folgender Weise entstanden denken („Packung“). Wir gehen aus von V_1 . Wir nehmen alle zulässigen Kugeln vom größtmöglichen Durchmesser hinzu, welche mit V_1 keine inneren Punkte gemeinsam haben; nach Satz 1 ergibt das genau V_2 . Wir nehmen alle zulässigen Kugeln vom größtmöglichen Durchmesser hinzu, welche mit V_2 keine inneren Punkte gemeinsam haben; nach Satz 1 ergibt das genau V_3 . So macht man weiter.

§ 8. Es sei $\tilde{M} := \{ \langle z, x_3 \rangle : z \in M^* \wedge x_3 \in \mathbb{R} \}$. Für $z \in \mathbb{C}$ bezeichne \bar{z} die zu z konjugiert-komplexe Zahl. Durch Spiegelung von z an den Seiten von $M \subset \mathbb{C}$ erhält man

$$\bar{z}, 1 + \varrho - \bar{z}\varrho, \bar{z} - 1 + 2\varrho, \overline{-z\varrho^{-1}};$$

für $z \in H$ liegen diese 4 Spiegelbilder in H ; die Ford-Kugeln zu diesen 4 Stützpunkten haben denselben Durchmesser wie $F(z)$. Zusammen mit (2. 6) folgt sofort

Hilfssatz 6. Für $z \in H \setminus M^*$ hat $F(z) \cap \tilde{M}$ keine inneren Punkte; für $z \in H$ aus dem Inneren von M^* gilt $F(z) \subseteq \tilde{M}$.

Zwei Randpunkte z_1, z_2 von M heißen gegenüberliegend, wenn und nur wenn $z_1 - z_2 \in \{1, \varrho^2, -1, -\varrho^2\}$ ist. Man hat dann unmittelbar

Hilfssatz 7. $F(0) \cap \tilde{M}, F(1) \cap \tilde{M}, F(\varrho) \cap \tilde{M}, F(\varrho^2) \cap \tilde{M}$ sind „Kugelsektoren“ vom Durchmesser 1 und Öffnungswinkel $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$; für gegenüberliegende Randpunkte z_1, z_2 von M aus H , welche keine Eckpunkte von M sind, sind $F(z_1) \cap \tilde{M}$ und $F(z_2) \cap \tilde{M}$ Halbkugeln desselben Durchmessers.

Es sei $\eta \in \mathbb{R}_+, \eta \leq 1$. M^η entstehe aus M durch die Translation $\langle z, 0 \rangle \mapsto \langle z, \eta \rangle$ von $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Nach Hilfssatz 6 und Hilfssatz 7 ist $M^\eta \cap V$ die Vereinigung von endlichvielen Kreisen, endlichvielen Halbkreisen und 4 Kreissektoren; dabei lassen sich die 4 Kreissektoren zu einem Kreis zusammenfassen; dasselbe gilt für die Halbkreise, die von den Ford-Kugeln von gegenüberliegenden Randpunkten von M , welche keine Eckpunkte von M sind, herrühren. Es bezeichne $r(\eta)$ den Flächeninhalt von $M^\eta \cap V$. Man hat sofort

$$(8. 1) \quad r(\eta) = \pi \sum_{\substack{\beta \in L \setminus \{0\}, \alpha \in L \\ (2. 4), |\beta|^2 \leq \eta^{-1} \\ (\alpha, \beta) = 1, \alpha\beta^{-1} \in M}} \sum (|\beta|^{-2}\eta - \eta^2).$$

Für $\beta \in L \setminus \{0\}$ sei

$$\phi(\beta) := \sum_{\substack{\alpha \in L, \alpha\beta^{-1} \in M \\ (\alpha, \beta) = 1}} 1;$$

ϕ heißt Euler-Funktion für H . Es folgt

$$(8. 2) \quad r(\eta) = \pi\eta \sum_{\substack{\beta \in L \setminus \{0\} \\ (2. 4), |\beta|^2 \leq \eta^{-1}}} \phi(\beta) (|\beta|^{-2} - \eta).$$

§ 9. Das von $\beta \in L$ erzeugte Hauptideal von L bezeichnen wir mit $[\beta]$. Für $0 \neq \beta_1 \in L, \beta_2 \in L$ gilt $[\beta_1] = [\beta_2] \Leftrightarrow \beta_2\beta_1^{-1} \in E$. Jedes Ideal des euklidischen Rings L ist Hauptideal von L . Es bezeichne I die Menge der von $[0]$ verschiedenen Ideale von L .

Vermöge

$$(9.1) \quad \beta \mapsto [\beta]$$

erhält man eine bijektive Beziehung zwischen $\{\beta \in L \setminus \{0\} : (2.4)\}$ und I . Für $\beta \in L \setminus \{0\}$ ist $\phi([\beta]) := \phi(\beta)$ wohldefiniert. Für $\beta \in L$ heißt $N([\beta]) := |\beta|^2$ die Norm von $[\beta]$. Für $\beta \in L \setminus \{0\}$ hat $L \cap M(\beta)$ genau $N(\beta)$ Elemente. Für $\eta \in \mathbb{R}_+$, $\eta \leq 1$ folgt aus (8.2) sofort

$$(9.2) \quad r(\eta) = \pi \eta \sum_{\mathfrak{b} \in I, N(\mathfrak{b}) \leq \eta^{-1}} \phi(\mathfrak{b}) ((N(\mathfrak{b}))^{-1} - \eta).$$

Hilfssatz 8. Für $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\sum_{\beta \in L, |\beta| \leq t} 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} t^2 + O(t).$$

Beweis. Wir schreiben $\beta \in L$ als $\beta = a + b\varrho$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$. Es ist $|a + b\varrho|^2 = a^2 + ab + b^2$ nach (2.2). Die Ellipse $x^2 + xy + y^2 \leq t^2$ mit $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ hat den Flächeninhalt $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} t^2$ und den Umfang $O(t)$, woraus nach Gauß (Werke II, 269—291) die Behauptung folgt.

Wie im Zusammenhang mit (9.1) folgt aus Hilfssatz 8 sofort

$$(9.3) \quad \sum_{\mathfrak{b} \in I, N(\mathfrak{b}) \leq x} 1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} x + O(\sqrt{x}) \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Durch Teilsummutation folgt daraus

$$(9.4) \quad \sum_{\mathfrak{b} \in I, N(\mathfrak{b}) \leq x} N(\mathfrak{b}) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}) \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Für $\mathfrak{b} \in I$ bezeichne $\omega(\mathfrak{b})$ die Anzahl der verschiedenen Primideale $\mathfrak{p} \in I$ mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. $\mathfrak{b} \in I$ heißt *quadratfrei*, wenn und nur wenn es kein Primideal $\mathfrak{p} \in I$ gibt mit $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}^2$. Für $\mathfrak{b} \in I$ sei $\mu(\mathfrak{b}) := (-1)^{\omega(\mathfrak{b})}$ falls \mathfrak{b} quadratfrei und $\mu(\mathfrak{b}) := 0$ sonst; μ heißt *Möbius-Funktion* für H . Wie in Q beweist man

$$(9.5) \quad \phi(\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{b}) \sum_{\mathfrak{a} \in I, \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{a}) (N(\mathfrak{a}))^{-1} \quad (\mathfrak{b} \in I).$$

Für $1 < s \in \mathbb{R}$ sei

$$\zeta_H(s) := \sum_{\mathfrak{a} \in I} (N(\mathfrak{a}))^{-s};$$

ζ_H heißt *Dedekindsche ζ -Funktion* für H ; es ist

$$(9.6) \quad (\zeta_H(s))^{-1} = \sum_{\mathfrak{a} \in I} \mu(\mathfrak{a}) (N(\mathfrak{a}))^{-s}.$$

Für $\mathfrak{a} \in I$, $\mathfrak{b} \in I$ gilt $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$, wenn und nur wenn es ein $\mathfrak{c} \in I$ gibt mit $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$. Für $x \in \mathbb{R}_+$ ist

$$(9.7) \quad \begin{aligned} \sum_{\mathfrak{b} \in I, N(\mathfrak{b}) \leq x} \frac{\phi(\mathfrak{b})}{N(\mathfrak{b})} &= \sum_{\mathfrak{a} \in I, N(\mathfrak{a}) \leq x} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})} \sum_{\mathfrak{c} \in I, N(\mathfrak{c}) \leq \frac{x}{N(\mathfrak{a})}} 1 \quad (\text{mittels (9.5)}) \\ &= \frac{\pi}{3\zeta_H(2)\sqrt{3}} x + O(\sqrt{x}) \quad (\text{mittels (9.3) und (9.6)}) \end{aligned}$$

und

$$(9.8) \quad \sum_{b \in I, N(b) \leq x} \phi(b) = \sum_{a \in I, N(a) \leq x} \mu(a) \sum_{c \in I, N(c) \leq x/N(a)} N(c) \quad (\text{mittels (9.5)})$$

$$= \frac{\pi}{6\zeta_H(2)\sqrt{3}} x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}) \quad (\text{mittels (9.4) und (9.6)}).$$

Einsetzen in (9.2) ergibt

$$(9.9) \quad r(\eta) = \frac{\pi^2}{6\zeta_H(2)\sqrt{3}} + O(\sqrt{\eta}). \quad (\eta \in \mathbb{R}_+, \eta \leq 1).$$

Für primes $p \neq 3$ sei

$$\chi(p) := \begin{cases} 1 & \text{falls } p \equiv 1 \pmod{3} \\ -1 & \text{falls } p \equiv 2 \pmod{3}; \end{cases}$$

für $1 < s \in \mathbb{R}$ sei

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad L(s) := \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p \neq 3}} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

Wegen der Zerlegungsgesetze⁴⁾ für H gilt

$$\zeta_H(s) = \zeta(s) L(s).$$

Bekanntlich ist $6\zeta(2) = \pi^2$. Aus (9.9) folgt sofort

Satz 2. Für $\eta \in \mathbb{R}_+, \eta \leq 1$ gilt

$$r(\eta) = \frac{1}{L(2)\sqrt{3}} + O(\sqrt{\eta}).$$

Der Flächeninhalt von M^η ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$; nach Satz 2 gilt

$$r^*(\eta) := \frac{2}{\sqrt{3}} r(\eta) \rightarrow \frac{2}{3L(2)} \quad (\eta \rightarrow 0).$$

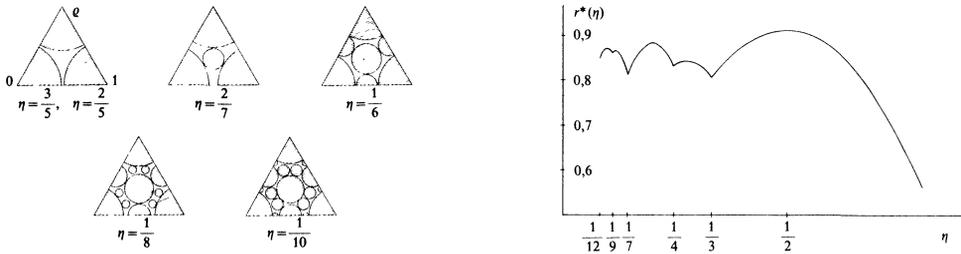
$L(2)$ ist einer numerischen Behandlung besonders gut zugänglich; man findet rasch $\frac{2}{3L(2)} \approx 0,85$. Das bedeutet, daß für kleine $\eta > 0$ etwa 85% aller Punkte von M^η auch zu V gehören.

Nach van der Corput und anderen kann in Hilfssatz 8 noch $O(t)$ durch $O(t^{2\vartheta})$ mit einem gewissen reellen $\vartheta < \frac{1}{3}$ ersetzt werden („Kreisproblem“). In Satz 2 erhält man dann $\eta^{1-\vartheta}$ statt $\sqrt{\eta}$.

⁴⁾ Vgl. etwa [4], 110.

Wegen (9.2) ist die Funktion $\eta \mapsto r^*(\eta)$ stetig; zwischen g_{n+1}^{-1} und g_n^{-1} ist sie quadratisch ($n \in \mathbb{N}$). So ist

$$r^*(\eta) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \eta(1-\eta) & \left(\frac{1}{3} \cong \eta \cong 1\right), \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \eta \left(1-\eta + \frac{2}{3} - 2\eta\right) & \left(\frac{1}{4} \cong \eta \cong \frac{1}{3}\right), \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \eta \left(1-\eta + \frac{2}{3} - 2\eta + \frac{3}{4} - 3\eta\right) & \left(\frac{1}{7} \cong \eta \cong \frac{1}{4}\right), \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \eta \left(1-\eta + \frac{2}{3} - 2\eta + \frac{3}{4} - 3\eta + \frac{12}{7} - 12\eta\right) & \left(\frac{1}{9} \cong \eta \cong \frac{1}{7}\right), \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \eta \left(1-\eta + \frac{2}{3} - 2\eta + \frac{3}{4} - 3\eta + \frac{12}{7} - 12\eta + \frac{6}{9} - 6\eta\right) & \left(\frac{1}{12} \cong \eta \cong \frac{1}{9}\right). \end{cases}$$



§ 10. Es sei $\mathfrak{M} \subseteq M$; der Rand von \mathfrak{M} sei ein einfaches, geschlossenes Polygon⁵⁾. Es bezeichne $|\mathfrak{M}|$ den Flächeninhalt von \mathfrak{M} . Es sei $\eta \in \mathbb{R}_+$, $\eta \leq 1$; \mathfrak{M}^η entstehe aus \mathfrak{M} durch die Translation $\langle z, 0 \rangle \mapsto \langle z, \eta \rangle$ von $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$; es bezeichne $r(\eta, \mathfrak{M})$ den Flächeninhalt von $\mathfrak{M}^\eta \cap V$; es ist $r(\eta, M) = r(\eta)$.

Es sei $z \in H$; $\mathfrak{M}^\eta \cap F(z)$ ist eine Teilmenge eines Kreises vom Radius $\sqrt{\frac{\eta}{D(z)} - \eta^2} < \sqrt{\eta}$; für ein $z \in H$, welches mindestens $\sqrt{\eta}$ vom Rand von \mathfrak{M} entfernt liegt, hat also $F(z)$ mit dem Rand von \mathfrak{M}^η keine Punkte gemeinsam; statt (8.1) gilt daher

$$r(\eta, \mathfrak{M}) = \pi \eta \sum_{\substack{\beta \in L \setminus \{0\}, \alpha \in L \\ (2.4), |\beta|^2 \leq \eta^{-1} \\ (\alpha, \beta) = 1, \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}}} \sum (|\beta|^{-2} - \eta) + O_{\mathfrak{M}}(\sqrt{\eta})$$

mit einer höchstens von der Länge des Randes von \mathfrak{M} abhängigen Konstanten im Restglied⁶⁾. Für $\beta \in L \setminus \{0\}$ sei

$$\phi(\beta, \mathfrak{M}) := \sum_{\substack{\alpha \in L, \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M} \\ (\alpha, \beta) = 1}} 1;$$

⁵⁾ Man könnte als Rand auch allgemeiner eine geschlossene, rektifizierbare Jordan-Kurve zulassen.
⁶⁾ Bei der Herleitung von (8.1) hätte man auf Hilfssatz 6 und Hilfssatz 7 verzichten können auf Kosten eines $+O(\sqrt{\eta})$.

es ist $\phi(\beta, M) = \phi(\beta)$. Wie bei (8. 2) folgt sofort

$$r(\eta, \mathfrak{M}) = \pi\eta \sum_{\substack{\beta \in L \setminus \{0\} \\ (2.4), |\beta|^2 \leq \eta^{-1}}} \phi(\beta, \mathfrak{M}) (|\beta|^{-2} - \eta) + O_{\mathfrak{M}}(\sqrt{\eta}).$$

Wie bei Hilfssatz 8 findet man

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{a}, \alpha\beta^{-1} \in \mathfrak{M}} 1 = \frac{|\mathfrak{M}|}{|M|} \frac{|\beta|^2}{N(\mathfrak{a})} + O_{\mathfrak{M}}\left(\sqrt{\frac{|\beta|^2}{N(\mathfrak{a})}}\right) \quad (\beta \in L \setminus \{0\}, \alpha \in I).$$

Statt (9. 5) kommt daher

$$\phi(\beta, \mathfrak{M}) = \sum_{\alpha \in I, \alpha \equiv [\beta]} \left(\mu(\alpha) \frac{|\mathfrak{M}|}{|M|} \frac{|\beta|^2}{N(\mathfrak{a})} + O_{\mathfrak{M}}\left(\sqrt{\frac{|\beta|^2}{N(\mathfrak{a})}}\right) \right) \quad (\beta \in L \setminus \{0\}).$$

Mittels (9. 3) und (9. 6) folgt statt (9. 7) für $1 \leq x \in \mathbb{R}$ jetzt

$$\sum_{\substack{\beta \in L \setminus \{0\} \\ (2.4), |\beta|^2 \leq x}} \frac{\phi(\beta, \mathfrak{M})}{|\beta|^2} = \frac{|\mathfrak{M}|}{|M|} \frac{\pi x}{3\zeta_H(2)\sqrt{3}} + O_{\mathfrak{M}}(\sqrt{x} \log(2x)).$$

Mittels (9. 4) und (9. 6) folgt statt (9. 8) für $1 \leq x \in \mathbb{R}$ jetzt

$$\sum_{\substack{\beta \in L \setminus \{0\} \\ (2.4), |\beta|^2 \leq x}} \phi(\beta, \mathfrak{M}) = \frac{|\mathfrak{M}|}{|M|} \frac{\pi x^2}{6\zeta_H(2)\sqrt{3}} + O_{\mathfrak{M}}(x^{\frac{3}{2}}).$$

Einsetzen ergibt sofort

Satz 3. Für $\eta \in \mathbb{R}_+, \eta \leq 1$ gilt

$$r(\eta, \mathfrak{M}) = \frac{|\mathfrak{M}|}{|M|} \frac{1}{L(2)\sqrt{3}} + O_{\mathfrak{M}}\left(\sqrt{\eta} \log \frac{2}{\eta}\right).$$

Insbesondere gilt also

$$\frac{r(\eta, \mathfrak{M})}{r(\eta, M)} \rightarrow \frac{|\mathfrak{M}|}{|M|} \quad (\eta \rightarrow 0)$$

(„Gleichverteilung bezüglich \mathfrak{M} “).

§ 11. Es sei $\eta \in \mathbb{R}_+, \eta \leq 1$. Es bezeichne $A_1(\eta)$ bzw. $A_2(\eta)$ die Strecke von $\langle 0, \eta \rangle$ nach $\langle 1, \eta \rangle$ bzw. nach $\langle 1 + \varrho, \eta \rangle$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Es bezeichne $\tau_j(\eta)$ das lineare Maß von $A_j(\eta) \cap V$ ($j=1, 2$). Nach [5] ist⁷⁾

$$(11.1) \quad \tau_1(\eta) = \frac{3}{\pi} + O\left(\sqrt{\eta} \log \frac{2}{\eta}\right).$$

Unter einem *Ford-Kreis* verstehen wir den Durchschnitt einer Ford-Kugel mit der Ebene $x_2 = 0$ in (1. 1); nach § 2 kommt ein echter Kreis dabei genau für diejenigen Ford-Kugeln zustande, deren Stützpunkt auf der reellen Achse $x_2 = x_3 = 0$ liegt.

(11. 1) ist das Analogon zu Satz 2 für Ford-Kreise statt Ford-Kugeln. In [5] findet sich auch ein Analogon zu Satz 3 für Ford-Kreise.

⁷⁾ Vgl. auch [6], 140—142.

Es sei $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $(a, b) = 1$, $0 \leq a \leq b$. Wegen $(1 + \varrho) | 3$ hat $F\left((1 + \varrho) \frac{a}{b}\right)$ den Durchmesser b^{-2} falls $3 \nmid b$ und $3b^{-2}$ falls $3 | b$. Es bezeichne φ die *Euler-Funktion* für \mathbb{Q} . Wie bei der Behandlung von $\tau_1(\eta)$ in [5] kommt

$$\tau_2(\eta) = 2 \sum_{\substack{0 < b \leq \sqrt{\eta^{-1}} \\ 3 \nmid b}} \varphi(b) \sqrt{\eta b^{-2} - \eta^2} + 2 \sum_{\substack{0 < b \leq \sqrt{3\eta^{-1}} \\ 3 | b}} \varphi(b) \sqrt{3\eta b^{-2} - \eta^2}.$$

Nach der klassischen Methode von Dirichlet (1849) findet man für $2 \leq x \in \mathbb{R}$ leicht

$$\sum_{\substack{0 < b \leq x \\ 3 \nmid b}} \varphi(b) = \frac{3x^2}{8\zeta(2)} + O(x \log x), \quad \sum_{\substack{0 < b \leq x \\ 3 | b}} \varphi(b) = \frac{x^2}{8\zeta(2)} + O(x \log x);$$

Teilsummation ergibt

$$\sum_{\substack{0 < b \leq x \\ 3 \nmid b}} \frac{\varphi(b)}{b} = \frac{3x}{4\zeta(2)} + O(\log x), \quad \sum_{\substack{0 < b \leq x \\ 3 | b}} \frac{\varphi(b)}{b} = \frac{x}{4\zeta(2)} + O(\log x).$$

Wie in [5] folgt unter Benutzung von $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$ leicht

$$(11.2) \quad \tau_2(\eta) = \frac{9}{2\pi} + O\left(\sqrt{\eta} \log \frac{2}{\eta}\right).$$

Die Länge von $A_1(\eta)$ bzw. $A_2(\eta)$ ist 1 bzw. $\sqrt{3}$. Es ist $\frac{3}{\pi} \approx 0,955$ und $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,827$. Für kleine $\eta > 0$ gehören also etwa 95,5% aller Punkte von $A_1(\eta)$ auch zu V und nur etwa 82,7% aller Punkte von $A_2(\eta)$ auch zu V .

Nach Satz 3 hat man in V also „ebene Gleichverteilung“, aber nach (11.1) und (11.2) keine „lineare Gleichverteilung“.

§ 12. Es sei $G := \{m + ni : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}\}$. G ist ein euklidischer Ring⁸⁾. Jedes $z \in \mathbb{Q}(i)$ läßt sich eindeutig schreiben als

$$z = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha \in G, 0 \neq \beta \in G, (\alpha, \beta) = 1$$

mit

$$(12.1) \quad 0 \leq \arg \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Wie § 2 erklären wir $D(z)$ und $F(z)$ auch für $z \in \mathbb{Q}(i)$ und sprechen wieder von *Ford-Kugeln*. Wie bei (2.6) haben Ford-Kugeln zu verschiedenen Stützpunkten aus $\mathbb{Q}(i)$ keine inneren Punkte gemeinsam. Wegen $|x_1 + x_2 i|^2 = x_1^2 + x_2^2$ ist $D(z)$ der Werte 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, ... fähig. Man kann sich aber

$$W := \bigcup_{z \in \mathbb{Q}(i)} F(z)$$

nicht nach dem Vorbild von § 7 durch „Packung“ entstanden denken. Dazu gehen wir aus von den Ford-Kugeln mit Durchmesser 1 und Stützpunkt in G , was also V_1 entspricht.

⁸⁾ Vgl. etwa [3], 185–186.

Wir nehmen jetzt alle zulässigen Kugeln mit größtmöglichem Durchmesser hinzu, welche mit den erwähnten Kugeln keine inneren Punkte gemeinsam haben; dabei erhält man offenbar als neue Stützpunkte genau alle $z \in \mathbb{Q}(i)$ mit $D(z)=2$, also die Punkte der Gestalt $z = m + \frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) i$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$) mit Ford-Kugeln vom Durchmesser $\frac{1}{2}$; das entspricht V_2 . Beim nächsten Schritt kann man leider zulässige Kugeln mit einem Durchmesser $> \frac{1}{4}$ unterbringen wie etwa die Kugel $B\left(\frac{1}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) i, 2 - \sqrt{3}\right)$, welche $F(0)$, $F(1)$ und $F\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)$ wegen (1.2) berührt. Ein Analogon zu Satz 1 gibt es für $\mathbb{Q}(i)$ also nicht.

Für $0 \leq \eta \in \mathbb{R}$ sei

$$P^\eta := \{ \langle x_1 + x_2 i, \eta \rangle \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : 0 \leq x_1 < 1 \wedge 0 \leq x_2 < 1 \};$$

es bezeichne $p(\eta)$ den Flächeninhalt von $P^\eta \cap W$. Wie bei (8. 1) hat man sofort

$$p(\eta) = \pi \sum_{\substack{\beta \in G \setminus \{0\}, \alpha \in G \\ (12.1), |\beta|^2 \leq \eta^{-1} \\ (\alpha, \beta) = 1, \alpha\beta^{-1} \in P^0}} \sum (|\beta|^{-2} \eta - \eta^2) \quad (0 < \eta \leq 1).$$

Das von $\beta \in G$ erzeugte Hauptideal von G bezeichnen wir mit $[\beta]$. Für $0 \neq \beta_1 \in G, \beta_2 \in G$ gilt $[\beta_1] = [\beta_2] \Leftrightarrow \beta_2 \beta_1^{-1} \in \{1, i, -1, -i\}$. Jedes Ideal von G ist Hauptideal von G . Es bezeichne J die Menge der von $[0]$ verschiedenen Ideale von G . Für $\beta \in G \setminus \{0\}$ sind

$$\psi(\beta) := \sum_{\substack{\alpha \in G, \alpha\beta^{-1} \in P^0 \\ (\alpha, \beta) = 1}} 1, \quad \psi([\beta]) := \psi(\beta), \quad N([\beta]) := |\beta|^2$$

wohldefiniert. Wie bei (8. 2) und (9. 2) folgt

$$p(\eta) = \pi \eta \sum_{\mathfrak{b} \in J, N(\mathfrak{b}) \leq \eta^{-1}} \psi(\mathfrak{b}) ((N(\mathfrak{b}))^{-1} - \eta) \quad (\eta \in \mathbb{R}_+, \eta \leq 1).$$

Statt (9. 3) hat man jetzt

$$\sum_{\mathfrak{b} \in J, N(\mathfrak{b}) \leq x} 1 = \frac{\pi}{4} x + O(\sqrt{x}) \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Für $1 < s \in \mathbb{R}$ sei

$$\zeta^*(s) := \sum_{\mathfrak{b} \in J} (N(\mathfrak{b}))^{-s}, \quad L^*(s) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}.$$

Nach dem Vorbild von § 9 findet man statt (9. 9) jetzt

$$p(\eta) = \frac{\pi^2}{8 \zeta^*(2)} + O(\sqrt{\eta}) \quad (\eta \in \mathbb{R}_+, \eta \leq 1).$$

Wegen der Zerlegungsgesetze⁹⁾ für $\mathbb{Q}(i)$ gilt $\zeta^*(s) = \zeta(s) L^*(s)$. Statt Satz 2 haben wir damit erhalten

$$p(\eta) = \frac{3}{4 L^*(2)} + O(\sqrt{\eta}) \quad (\eta \in \mathbb{R}_+, \eta \leq 1).$$

⁹⁾ Vgl. etwa [4], 110.

Numerisch findet man rasch $\frac{3}{4L^*(2)} \approx 0,819$. Für kleine $\eta > 0$ gehören also knapp 82% aller Punkte von P^η auch zu W .

Auch § 10 läßt sich übertragen, und man erhält ein Analogon zu Satz 3.

Literatur

- [1] *L. R. Ford*, Rational approximations to irrational complex numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.* **19** (1918), 1—42.
- [2] *L. R. Ford*, Fractions. *Amer. Math. Soc. Monthly* **45** (1938), 586—601.
- [3] *G. H. Hardy* and *E. M. Wright*, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1954, 3. Aufl.
- [4] *E. Hecke*, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Leipzig 1923.
- [5] *G. J. Rieger*, Über Gleichverteilung bei Ford-Kreisen. *Math. Nachr.* **77** (1977), 297—300.
- [6] *G. J. Rieger*, *Zahlentheorie*, Göttingen 1976.

Institut für Mathematik, Technische Universität Hannover, D-3000 Hannover

Eingegangen 17. Oktober 1977