Eine Bemerkung über die Hurwitzschen Zahlen

Von *G. J. Rieger* in Hannover

Zunächst werden hier einige bekannte Aussagen über die Bernoullischen Zahlen B_n $(n \geqq 0)$ und über die damit verwandten Hurwitzschen Zahlen E_n $(n>0)$ und die Matterschen Zahlen F_n $(n>0)$ zusammengestellt. Die Zahlen B_n, E_n, F_n sind induktiv erklärt (vgl. (1. 1), (2. 1), (3. 1)); sie treten auf in den Entwicklungskoeffizienten gewisser Funktionen (vgl. (1. 2), (2. 2), (3. 2)) und im Wert von $\sum \alpha^{-m}$, wobei die Summation über alle ganzen Zahlen $\alpha \neq 0$ des Körpers Q, $Q(\sqrt{-1})$, $Q\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ zu erstrecken ist (vgl. (1. 3), (2. 3), (3. 3)). Einen Satz von von Staudt und Clausen kennt man für B_n, E_n, F_n (vgl. (1. 4), (2. 4), (3. 4)). Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein zahlentheoretisches Ergebnis von Frobenius über die B_n auch für die E_n und für die F_n zu beweisen.

§ 1. Die Bernoullischen Zahlen B_n $(n \geqq 0)$ sind induktiv erklärt vermöge[1])

$$(1.\ 1) \qquad B_0 := 1, \ \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \cdots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0 \qquad (n>1);$$

sie sind rational und erfüllen

$$(1.\ 2) \qquad z(\exp(z)-1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \qquad (|z|<2\pi).$$

Es ist $B_{2n+1}=0$ $(n>0)$. Für ganzrationales $n>0$ gilt bekanntlich

$$(1.\ 3) \qquad \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} r^{-2n} = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} |B_{2n}|.$$

Für den halben Umfang π des Einheitskreises beachten wir noch

$$\pi = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nach von Staudt und Clausen gilt

$$(1.\ 4) \qquad B_n = b_n - \sum_{\substack{(p-1)|n \\ p \text{ prim}}} \frac{1}{p} \qquad (n>0,\ 2|n)$$

[1]) Für den Inhalt von § 1 vgl. man etwa [3], § 4, § 5, § 12.

mit gewissen $b_n \in \mathbb{Z}$. Frobenius hat bewiesen, daß jede Primzahl, die den Nenner von $\frac{B_n}{n}$ teilt, bereits den Nenner von B_n teilt.

§ **2.** Die Hurwitzschen Zahlen E_n $(n>0)$ sind auch induktiv erklärt, und zwar vermöge[2])

$$E_1 := \frac{1}{10}, \quad E_n := \frac{3}{(2n-3)(16n^2-1)} \sum_{k=1}^{n-1} (4k-1)(4n-4k-1) \binom{4n}{4k} E_k E_{n-k} \qquad (n>1). \tag{2. 1}$$

So findet man $E_2 = \frac{3}{10}, E_3 = \frac{3^4 \cdot 7}{10 \cdot 13}, E_4 = \frac{3^4 \cdot 7^2 \cdot 11}{10 \cdot 17}, E_5 = \frac{3^6 \cdot 7^2 \cdot 11}{10}, E_6 = \frac{3^7 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 19}{10 \cdot 13}$,

$$E_7 = \frac{3^9 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 23}{10 \cdot 29}, \quad E_8 = \frac{3^{10} \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 223}{10 \cdot 17},$$

$$E_9 = \frac{3^{14} \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 61}{10 \cdot 13 \cdot 37};$$

Hurwitz hat noch E_{10}, E_{11}, E_{12} angegeben. Es sei

$$w := 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

wir betrachten die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zu den Perioden w und wi und nennen sie $\wp_1$; dann gilt

$$\wp_1(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n} E_n}{4n \cdot (4n-2)!} z^{4n-2}; \tag{2. 2}$$

ferner gilt

$$\sum_{\substack{r=-\infty \\ r^2+s^2 \neq 0}}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (r+si)^{-4n} = \frac{(2w)^{4n}}{(4n)!} E_n \qquad (n>0). \tag{2. 3}$$

Im Hinblick auf (1. 3) und (2. 3) stellt Hurwitz mit Recht fest, daß seine E_n $(n>0)$ eine entsprechende Stellung für die ganzen Gaußschen Zahlen einnehmen wie die B_n $(n \geqq 0)$ für die ganzrationalen Zahlen. Hurwitz beweist nun ein Analogon zum erwähnten Satz von von Staudt und Clausen, das wir in abgeschwächter Form so formulieren: es gilt

$$E_n = a_n + \frac{1}{2} + \sum_{\substack{p \equiv 1 \bmod 4 \\ p \text{ prim} \\ (p-1) \mid 4n}} \frac{c(n,p)}{p} \tag{2. 4}$$

mit gewissen ganzrationalen Zahlen a_n, $c(n,p) \neq 0$ und mit $p \nmid c(n,p)$.

[2]) Für den Inhalt von § 2 vgl. man [1].

§ 3. Die Matterschen Zahlen F_n $(n>0)$ sind auch induktiv erklärt und zwar vermöge[3])

$$F_1 := \frac{3^2}{2^2\cdot 7},\quad F_n := \frac{1}{(n-1)(36n^2-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(6k-1)(6n-6k-1)\binom{6n}{6k}F_k F_{n-k} \qquad (n>1).$$
(3. 1)

So findet man

$$F_2 = \frac{3^5\cdot 5^2}{2^2\cdot 7\cdot 13},\quad F_3 = \frac{3^8\cdot 5^3\cdot 11}{2^2\cdot 7\cdot 19},\quad F_4 = \frac{3^{11}\cdot 5^3\cdot 11^2\cdot 17}{2^2\cdot 7\cdot 13};$$

Matter hat noch $F_5, F_6, \ldots, F_{12}$ angegeben. Es sei

$$v := 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}},\quad \varrho := \frac{-1+i\sqrt{3}}{2};$$

wir betrachteten die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zu den Perioden v und $v\varrho$ und nennen sie $\wp_2$; dann gilt

$$\wp_2(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{6n}F_n}{6n\cdot(6n-2)!}z^{6n-2}; \tag{3. 2}$$

ferner gilt

$$\sum_{\substack{r=+\infty \\ r^2+s^2\neq 0}}^{\infty}\ \sum_{s=-\infty}^{\infty}(r+s\varrho)^{-6n} = \frac{(2v)^{6n}}{(6n)!}F_n \qquad (n>0). \tag{3. 3}$$

Matter beweist nun ein Analogon zu (1. 4) und (2. 4), das wir in abgeschwächter Form so formulieren: es gilt

$$F_n = b_n + \frac{d}{2^b} + \sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 6 \\ p\ prim \\ (p-1)\mid 6n}}\frac{d(n;p)}{p} \tag{3. 4}$$

mit gewissen ganzrationalen Zahlen b_n, d, $b\geqq 0$, $d(n,p)\neq 0$ und $p\nmid d(n,p)$.

§ 4. In Analogie zum erwähnten Satz von Frobenius beweisen wir jetzt

Satz 1. *Jede Primzahl, die den Nenner von* $\frac{E_n}{n}$ *teilt, teilt bereits den Nenner von* E_n $(n>0)$.

Die kanonische Primfaktorzerlegung der rationalen Zahl $\lambda\neq 0$ schreiben wir als

$$\lambda = \pm\prod_{p\ prim} p^{e(\lambda;p)}.$$

Es bezeichne Z_n bzw. D_n den Zähler bzw. Nenner von E_n $(n>0)$. Aus (2. 4) folgt

$$e(Z_m;p) = e(E_m;p)\geqq 0 \qquad (m>0,\ p\ prim,\ p\equiv 3 \bmod 4). \tag{4. 1}$$

[3]) Für den Inhalt von § 3 vgl. man [2].

Hilfssatz 1. *Es sei p prim, $p \equiv 3 \bmod 4$, $n \geqq 1$ ganzrational; dann gilt $e(E_n; p) \geqq e(n; p)$.*

Beweis (Induktion nach n). Für $n = 1, 2, 3$ kommt es nur auf $p = 3$ an, und wegen $Z_1 = 1$, $Z_2 = 3$, $Z_3 = 3^4 \cdot 7$ ist dafür die Behauptung klar. Es sei $n > 3$. Im Fall $e(n; p) = 0$ ist nichts zu beweisen. Es sei also $p | n$. Für $p = 3$ wie auch für $p > 3$ gilt

$$e\left(\frac{3}{(2n-3)(16n^2-1)}; p\right) = 0$$

wegen $p | n$. Wegen (2. 1) genügt es also zu zeigen

$$e(n; p) \leqq e\left(\binom{4n}{4k} E_k E_{n-k}; p\right) \qquad (0 < k < n). \tag{4. 2}$$

Natürlich ist $e(4n; p) = e(n; p)$ (> 0 wegen $p | n$), $e(4k; p) = e(k; p)$. *Fall* 1. $e(k; p) \geqq e(n; p)$. Nach Induktionsvoraussetzung für k folgt wegen $\binom{4n}{4k} \in \mathbb{Z}$ und wegen (4. 1) für $m = n - k$ sofort (4. 2). *Fall* 2. $e(k; p) < e(n; p)$. Dann ist $e(n-k; p) = e(k; p)$; wegen

$$\binom{4n}{4k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{4n-1}{4k-1}, \quad \binom{4n-1}{4k-1} \in \mathbb{Z}$$

ist

$$e\left(\binom{4n}{4k}; p\right) \geqq e\left(\frac{n}{k}; p\right) = e(n; p) - e(k; p);$$

zusammen mit der Induktionsvoraussetzung für k folgt erneut (4. 2).

Hilfssatz 2. *Jede Primzahl $\equiv 1 \bmod 4$, die den Nenner von $\frac{E_n}{n}$ teilt, teilt bereits den Nenner von E_n ($n > 0$).*

Beweis. Für primes $p \equiv 1 \bmod 4$ ist zu zeigen

$$(p | n \wedge p \nmid D_n) \Rightarrow e(Z_n; p) \geqq e(n; p).$$

Für $g \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid g$, $n > 0$ gilt nach Hurwitz [1], (29) zunächst

$$(2g)^{4n-2} (g^{4n} - 1) \frac{E_n}{n} \in \mathbb{Z}. \tag{4. 3}$$

Wir wählen g als Primitivwurzel mod$p$; wegen $2 \nmid g \vee 2 \nmid (g+p)$ darf $2 \nmid g$ vorausgesetzt werden. Es ist $p \nmid 2g$. Wegen $p \nmid D_n$ und wegen (2. 4) ist $(p-1) \nmid 4n$. Mit der Definition von g folgt daraus $p \nmid (g^{4n} - 1)$. Zusammen mit (4. 3) folgt

$$0 \leqq e\left((2g)^{4n-2} (g^{4n} - 1) \frac{E_n}{n}; p\right) = e\left(\frac{E_n}{n}; p\right)$$
$$= e(Z_n; p) - e(D_n; p) - e(n; p).$$

Wegen $e(D_n; p) = 0$ folgt daraus die Behauptung.

Beweis von Satz 1. Der Summand $\frac{1}{2}$ in (2. 4) erfaßt den möglichen Primteiler 2 von n. Hilfssatz 1 bzw. Hilfssatz 2 erfaßt die möglichen Primteiler $p \equiv 3 \bmod 4$ bzw. $p \equiv 1 \bmod 4$ von n.

§ 5. Wir beweisen noch

Satz 2. *Jede ungerade Primzahl, die den Nenner von* $\frac{F_n}{n}$ *teilt, teilt bereits den Nenner* F_n $(n>0)$.

Es bezeichne Z'_n bzw. D'_n den Zähler bzw. Nenner von F_n $(n>0)$. Aus (3. 4) folgt

$$(5.\,1) \qquad e(Z'_m;\,p)=e(F_m;\,p)\geqq 0 \qquad (m>0,\,p\ prim,\,p>2,\,p\not\equiv 1 \bmod 6).$$

Hilfssatz 3. *Es sei* p *prim,* $p>2$, $p\not\equiv 1 \bmod 6$, $n\geqq 1$ *ganzrational; dann gilt* $e(F_n;\,p)\geqq e(n;\,p)$.

Beweis. Man geht fast wörtlich vor wie im Beweis von Hilfssatz 1. Nur an die Stelle von (2. 1) und (4. 1) treten jetzt (3. 1) und (5. 1).

Hilfssatz 4. *Jede Primzahl* $\equiv 1 \bmod 6$, *die den Nenner von* $\frac{F_n}{n}$ *teilt, teilt bereits den Nenner von* F_n $(n>0)$.

Beweis. Für primes $p\equiv 1 \bmod 6$ ist zu zeigen

$$(p|n \wedge p \nmid D'_n) \Rightarrow e(Z'_n;\,p)\geqq e(n;\,p).$$

Für $g\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$, $g\equiv -1 \bmod 6$, $n>0$ gilt nach Matter [2], (22) zunächst

$$(5.\,2) \qquad \frac{2}{3}(2g)^{6n-2}(g^{6n}-1)\frac{F_n}{n}\in\mathbb{Z}.$$

Es sei h eine Primitivwurzel $\bmod p$; dann ist auch $h+tp$ $(t\in\mathbb{Z})$ eine Primitivwurzel $\bmod p$; wegen $p\equiv 1 \bmod 6$ gibt es ein $t>0$ mit $g:=h+tp\equiv -1 \bmod 6$. Es ist $p\nmid 2g$. Wegen $p\nmid D'_n$ und wegen (3. 4) ist $(p-1)\nmid 6n$ und daher $p\nmid (g^{6n}-1)$. Zusammen mit (5. 2) folgt

$$0\leqq e\left(\frac{2}{3}(2g)^{6n-2}(g^{6n}-1)\frac{F_n}{n};\,p\right)=e\left(\frac{F_n}{n};\,p\right)=e(Z';\,p)-e(D'_n;\,p)-e(n;\,p).$$

Wegen $e(D'_n;\,p)=0$ folgt daraus die Behauptung.

Beweis von Satz 2. Hilfssatz 3 bzw. Hilfssatz 4 erfaßt die möglichen ungeraden Primteiler $p\not\equiv 1 \bmod 6$ bzw. $p\equiv 1 \bmod 6$ von n.

Matter beabsichtigte, in (3. 4) noch $d=(-1)^n$, $b=2$ zu beweisen; in Satz 2 kann dann „ungerade" weggelassen werden.

Literatur

[1] *A. Hurwitz*, Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatischen Funktionen, Math. Annalen **51** (1899), 196—226. (= Mathem. Werke. II, 342—373.)

[2] *K. Matter*, Die den Bernoulli'schen Zahlen analogen Zahlen im Körper der dritten Einheitswurzeln, Diss. Zürich 1900, Zürich. Naturf. Ges. **45**, 238—269.

[3] *H. Rademacher*, Topics in Analytic Number Theory, Berlin-Heidelberg-New York 1973.

Institut für Mathematik, Technische Universität Hannover, Welfengarten 1, 3000 Hannover

Eingegangen 18. Februar 1977