

# **Kontrolle zeitaufgelöster Einzelektronen-Tunnelprozesse in einem Quantenpunkt**

Von der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften  
— Dr. rer. nat. —

genehmigte Dissertation  
von

Dipl.-Ing. Timo Wagner

2017

Referent: Prof. Dr. Rolf J. Haug  
Korreferent: Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Peter Hänggi  
Korreferent: Prof. Dr. Michael Oestreich

Tag der Promotion: 07.02.2018

# Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit werden zwei verschiedene experimentelle Ansätze untersucht, die stochastischen Fluktuationen (Schrotrauschen) zwischen den Einzelelektronen-Tunnelereignissen in einem Quantenpunkt zu kontrollieren. Die untersuchte Quantenpunktstruktur basiert auf einem zweidimensionalen Elektronengas in einer AlGaAs/GaAs Heterostruktur. Zur zeitlichen Erfassung der Tunnelereignisse kommt ein Quantenpunktkontakt als sensitiver Ladungsdetektor zum Einsatz. Die Fluktuationen werden anhand der Zählstatistik sowie den Verteilungen der Besetzungszeiten und Rückkehrzeiten charakterisiert.

Der erste Ansatz (*open-loop control*) besteht darin, den Einzelelektronen-Tunnelprozess mit einem externen periodischen Antrieb zu synchronisieren. Es wird gezeigt, dass die Synchronisation ein Optimum sowohl als Funktion der externen Antriebsfrequenz als auch des intrinsischen Schrotrausch-Levels durchläuft. Die Existenz des Optimums demonstriert das Auftreten einer Quanten-Stochastischen-Resonanz, da das Schrotrauschen eine intrinsische Eigenschaft des quantenmechanischen Tunnelprozesses an sich ist.

Im zweiten Ansatz (*closed-loop control*) wird der Einzelelektronen-Tunnelprozess über einen Regelkreis stabilisiert. Dieser basiert auf der Implementierung einer Rückkopplung zwischen den zeitlichen Fluktuationen und der Tunnelrate des Quantenpunktes. Durch die Regelung kommt es zum vollständigen Einfrieren der Zählstatistik. Die optimale Rückkopplungsstärke wird in Abhängigkeit der Regelparameter untersucht. Es zeigt sich, je feiner die zeitlichen Fluktuationen vermessen und korrigiert werden, umso effektiver unterdrückt die Regelung das Schrotrauschen.

**Schlagwörter:** Quantenpunkt, Einzelelektronen-Tunneln, Ladungsdetektion, Zählstatistik, Schrotrauschen, Quanten-Stochastische Resonanz, Rückkopplung





# Abstract

The present thesis investigates two different experimental approaches to control the stochastic fluctuations (shot noise) between the single-electron tunneling events in a quantum dot. The studied quantum dot structure is formed in a two-dimensional electron gas, based on a AlGaAs/GaAs heterostructure. To resolve the tunneling events temporally, a quantum point contact is utilized as a sensitive charge detector. The fluctuations are characterized by the counting statistics as well as the residence and return time distributions.

The first approach (*open-loop control*) is based on the synchronization of the single-electron tunneling process with an external periodic drive. It is shown that the synchronization runs through an optimum, no matter whether the external driving frequency or the intrinsic shot noise level were tuned. The existence of the optimum indicates the occurrence of quantum stochastic resonance, since shot noise is an intrinsic property of the quantum mechanical tunneling process itself.

The second approach (*closed-loop control*) aims to stabilize the tunneling process by a feedback loop. The implementation is based on a feedback between the temporal fluctuations and the tunneling rate of the quantum dot. The feedback causes freezing of the counting statistics. The optimal feedback strength is examined as a function of the control parameters. It turns out that the more accurate the temporal fluctuations are measured and corrected, the more effectively the shot noise is suppressed.

**Keywords:** quantum dot, single-electron tunneling, charge detection, counting statistics, shot noise, quantum stochastic resonance, feedback control



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>13</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>19</b>
2.1. Quantenpunkte . . . . .	19
2.1.1. Kapazitives Modell . . . . .	21
2.1.2. Transportspektroskopie . . . . .	24
2.2. Ladungsdetektion . . . . .	28
2.2.1. Quantenpunktkontakt . . . . .	29
2.2.2. Kopplung . . . . .	31
2.3. Schrotrauschen . . . . .	33
<b>3. Experimentelles</b>	<b>37</b>
3.1. Heterostruktur . . . . .	37
3.2. Fotolithografie . . . . .	39
3.3. Messaufbau . . . . .	42
3.4. Quantenpunkt Charakterisierung . . . . .	44
<b>4. Elektronen-Zählen</b>	<b>51</b>
4.1. Einzelelektronen-Detektion . . . . .	51
4.2. Tunnelraten . . . . .	55
4.3. Zählstatistik . . . . .	59
4.4. Kumulanten . . . . .	61
4.5. Besetzungszeiten und Rückkehrzeiten . . . . .	65
4.6. Detektorbandbreite . . . . .	67
<b>5. Getriebenes Tunneln</b>	<b>71</b>
5.1. Periodischer Antrieb . . . . .	73
5.2. Phasenbeziehung . . . . .	75
5.3. Synchronisationsbedingung . . . . .	77

5.4.	Zählstatistik . . . . .	79
5.5.	Quanten-Stochastische Resonanz . . . . .	81
5.6.	Besetzungszeiten und Rückkehrzeiten . . . . .	84
5.6.1.	Asymmetrische und symmetrische Modulation . . . . .	85
5.6.2.	Einzelbarrieren Modulation . . . . .	89
5.6.3.	Allgemeine Modulation . . . . .	91
5.6.4.	Phasenbeziehung . . . . .	93
5.6.5.	Superposition . . . . .	95
5.7.	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	96
<b>6.</b>	<b>Rückkopplung</b>	<b>99</b>
6.1.	Regelung . . . . .	100
6.2.	Zählstatistik . . . . .	104
6.3.	Unterdrückung des Schrotrauschens . . . . .	106
6.4.	Zielwert . . . . .	109
6.5.	Kontrollbereich . . . . .	110
6.6.	Höhere Kumulanten und Genauigkeit . . . . .	112
6.7.	Optimale Rückkopplung . . . . .	114
6.8.	Schwache und starke Rückkopplung . . . . .	117
6.9.	Übersteuerung . . . . .	119
6.10.	Einzelbarrierenmodell . . . . .	121
6.11.	Besetzungszeiten und Rückkehrzeiten . . . . .	123
6.12.	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	126
<b>7.</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>129</b>
<b>A.</b>	<b>Anhang</b>	<b>133</b>
	<b>Literatur</b>	<b>153</b>

# Symbole

$a$	Asymmetrie der Tunnelraten $a = (\Gamma_{\text{in}} - \Gamma_{\text{out}})/(\Gamma_{\text{in}} + \Gamma_{\text{out}})$
$\alpha_i$	Hebelfaktor $\alpha_i = C_i/C_\Sigma$ des Gates mit Index $i$
$b$	relative Detektorbandbreite $b = \Gamma_{\text{det}}/(\Gamma_{\text{in}} + \Gamma_{\text{out}})$
$\beta$	Rückkopplungsstärke
$\beta_{\text{opt}}$	optimale Rückkopplungsstärke
$c_{\text{qpc}}$	Kopplungskonstante Quantenpunktkontakt
$C_k$	$k$ -te Kumulante
$C_S$	Sourcekapazität
$C_D$	Drainkapazität
$C_G$	Gatekapazität
$C_\Sigma$	Gesamtkapazität
$e$	Elementarladung
$\vec{e}$	Variationsrichtung in $\vec{U}_{\text{dot}} = \vec{U}_{\text{dot},A} + \vec{e}\Delta V$
$\vec{e}_a$	asymmetrische Variationsrichtung der Tunnelraten $\Gamma_{\text{in}}, \Gamma_{\text{out}}$
$\vec{e}_s$	symmetrische Variationsrichtung der Tunnelraten $\Gamma_{\text{in}}, \Gamma_{\text{out}}$
$\vec{e}_i$	Variationsrichtung für die Reintunnelrate $\Gamma_{\text{in}}$
$\vec{e}_o$	Variationsrichtung für die Raustunnelrate $\Gamma_{\text{out}}$
$E_C$	Ladeenergie des Quantenpunktes
$\epsilon_m$	Einteilchenzustände
$f$	Antriebsfrequenz
$f_R$	Frequenz Einhüllende $f_R = (f_1 + f_2)/2$
$f_S$	Frequenz Schwebung $f_S = (f_1 - f_2)/2$
$F_2$	Fanofaktor $F_2 = C_2/C_1$
$f(\mu)$	Fermiverteilung $f(\mu) = 1/(\exp(-\frac{\mu - \mu_F}{k_b T}) + 1)$
$G_{\text{dot}}$	diff. Leitfähigkeit Quantenpunkt $G_{\text{dot}} = \Delta I_{\text{dot}}/\Delta U_{\text{sd,dot}}$
$G_{\text{qpc}}$	diff. Leitfähigkeit QPC $G_{\text{qpc}} = \Delta I_{\text{qpc}}/\Delta U_{\text{sd,qpc}}$
$G_0$	Leitwertquant $G_0 = e^2/h$
$\Gamma_{\text{det}}$	Detektorbandbreite
$\Gamma_{\text{in}}$	Reintunnelrate $\Gamma_{\text{in}} = 1/\langle t_{0i} \rangle$
$\tilde{\Gamma}_{\text{in}}$	Tunnelkopplung in $\Gamma_{\text{in}} = \tilde{\Gamma}_{\text{in}} f(\mu_{N_e})$

$\Gamma_{\text{out}}$	Raustunnelrate $\Gamma_{\text{out}} = 1/\langle t_{i0} \rangle$
$\tilde{\Gamma}_{\text{out}}$	Tunnelkopplung in $\Gamma_{\text{out}} = \tilde{\Gamma}_{\text{out}}(1 - f(\mu_{N_e}))$
$\Gamma_r$	Relaxationsrate der zweiten Kumulante
$\Gamma_T$	Zielrate der Rückkopplung $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau$
$\Gamma^*$	effektive Tunnelrate $\Gamma^* = \Gamma_{\text{in}}\Gamma_{\text{out}}/(\Gamma_{\text{in}} + \Gamma_{\text{out}})$
$I_{\text{dot}}$	Strom durch Quantenpunkt
$I_{\text{qpc}}$	Strom durch Quantenpunktkontakt
$l_{\text{mfp}}$	mittlere freie Weglänge der Elektronen
$k_B$	Boltzmannkonstante
$\kappa_{1,2}$	Steigungen der Coulomb-Diamanten
$\lambda_F$	Fermiwellenlänge
$M_k^z$	$k$ -tes zentrales Moment
$\mu$	Mittelwert
$\mu_F$	Ferminiveau
$\mu(N_e)$	chemisches Potential des Ladungszustandes $N_e$
$n_i$	Anzahl der Reintunnelereignisse
$n_o$	Anzahl der Raustunnelereignisse
$N_e$	Ladungszustand Quantenpunkt
$N_k$	Tunnelereignisse im $k$ -ten Zählintervall
$N_T$	Zielwert Rückkopplung
$\nu$	Schiefe
$\omega$	Wölbung
$\Delta\phi_{\text{in}}$	Phasenbeziehung der Reintunnelereignisse
$\Delta\phi_{\text{out}}$	Phasenbeziehung der Raustunnelereignisse
$\rho$	Häufigkeitsverteilung $\rho(\Delta t_{oi}), \rho(\Delta t_{io}), \rho(\Delta t_{ii}), \rho(\Delta t_{oo}),$ $\rho(n_i), \rho(n_o), \rho(n_o + n_i), \rho(\Delta\phi_{\text{in}}), \rho(\Delta\phi_{\text{out}})$
$S_2$	Sättigungswert der zweiten Kumulante
$S_{2,\text{opt}}$	Sättigungswert der zweiten Kumulante für $\beta_{\text{opt}}$
$\sigma$	Standardabweichung
$\sigma^2$	Varianz
$T$	Temperatur
$T_f$	Antriebsperiode $T_f = 1/f$
$t$	Zeit

$\Delta\tau$	Regelintervall
$\Delta t$	Integrationszeit Zählstatistik
$\Delta t_{oi}$	Besetzungszeit 'rein' $\rightarrow$ 'raus'
$\Delta t_{io}$	Besetzungszeit 'raus' $\rightarrow$ 'rein'
$\Delta t_{ii}$	Besetzungszeit 'rein' $\rightarrow$ 'rein'
$\Delta t_{oo}$	Besetzungszeit 'raus' $\rightarrow$ 'raus'
$U_{B1}$	Spannung Mittelgate 1
$U_{B2}$	Spannung Mittelgate 2
$\vec{U}_{dot}$	Quantenpunkt Gatespannungen $\vec{U}_{dot} = (U_{T1}, U_P, U_{T2})$
$\vec{U}_{dot,A}$	Arbeitspunkt Quantenpunkt
$U_{fb}$	Spannung Kontrollgate
$U_{fb,lim}$	Spannungsgrenzen $-U_{fb,lim} \leq U_{fb} \leq U_{fb,lim}$
$U_P$	Spannung Plungergate
$U_{qpc}$	Spannung Quantenpunktkontaktgate
$U_{sd,dot}$	Biasspannung Quantenpunkt
$U_{sd,qpc}$	Biasspannung Quantenpunktkontakt
$U_{T1}$	Spannung Tunnelgate 1
$U_{T2}$	Spannung Tunnelgate 2
$\Delta U$	Variationsamplitude in $\vec{U}_{dot} = \vec{U}_{dot,A} + \vec{e}\Delta U$
$\Delta U_f$	Antriebsamplitude in $\vec{U}_{dot}(t) = \vec{U}_{dot,A} + \vec{e}\Delta U_f \sin(2\pi ft)$





# 1

## Einleitung

Mit dem berühmten Öltröpfchen-Versuch von 1910 demonstrierte R. A. Millikan die Ladungsquantisierung und bestimmte den Wert der Elementarladung  $e$  [1] (zusammen mit H. Fletcher [2]). Kurz zuvor war eine wegweisende technische Weiterentwicklung der Elektronenröhre, die sogenannte Triode, zum Patent eingereicht worden [3]. Die Triode ermöglichte erstmals die Verstärkung elektrischer Signale. Neben den daraus resultierenden praktischen Anwendungsmöglichkeiten erlaubten die neu entwickelten Verstärkerschaltungen der Forschung die Detektion zuvor nicht nachweisbarer Signale. Die Entwicklung des Verstärkers hat für die Elektronik daher eine vergleichbare Bedeutung wie die Erfindung des Mikroskops für die Optik. Die erreichbare Verstärkung schien zunächst nur vom technischen Aufwand abzuhängen, mit dem alle unerwünschten externen Störquellen der Verstärkerschaltung eliminiert werden könnten. Eine generelle Grenze wie die Wellenlänge des Lichtes beim Mikroskop war zunächst nicht zu erkennen.

Aber bereits 1918 dämpfte W. Schottky "den Menschheitstraum, das Gras wachsen zu hören", wie er in der Einleitung zu seiner Arbeit „Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern“ schreibt [4]. Darin wies er darauf hin, dass die kurz zuvor nachgewiesene Quantisierung der elektrischen Ladung zu einer zeitlichen Fluktuation des elektrischen Stroms führt. Diese als Schrotrauschen bezeichneten Stromschwankungen definieren eine untere Auflösungsgrenze für elektrische Signale.

Wissenschaftlich war am Schrotrauschen zunächst vor allem die Tatsache interessant, dass es eine alternative Bestimmung der Elementarladung  $e$  ermöglichte [5, 6]. Da die erreichte Genauigkeit allerdings hinter der von R. A. Millikan zurückblieb und in der Praxis andere Rauschquellen meist dominieren, spielte das elektrische Schrotrauschen zunächst lange Zeit keine Rolle. Erst mit der Untersuchung der elektronischen Eigenschaften mesoskopischer Systeme rückte es in den Neunzigerjahren wieder zunehmend in den Fokus der Forschung. Denn Schrotrauschmessungen eröffnen einen tiefen Einblick in die inneren physikalischen Prozesse eines Systems [7–9].

Das Schrotrauschen charakterisiert die zeitlichen Fluktuationen, die an einer Potentialbarriere im Stromfluss entstehen. W. Schottky beschrieb den Fall, dass die zeitliche Abfolge der Elektronen dabei einem Poisson-Prozess folgt. Dieser trifft nicht nur für die Elektronenemission einer Glühkathode zu, sondern beschreibt ebenso den Ladungstransport an Halbleiter-Übergängen [10] und Tunnelkontakten [11, 12]. In mesoskopischen Systemen können die Elektronen allerdings nicht mehr als unabhängig angesehen werden. Wechselwirkungen und Korrelationen zwischen ihnen führen beispielsweise in Quantenpunktkontakten [13, 14] oder Quantenpunkten [12, 15, 16] zu messbaren Abweichungen vom Poisson-Prozess.

Aufgrund der meist nur geringen Ströme durch mesoskopische Systeme ist die Auflösung der zeitlichen Stromfluktuationen technisch herausfordernd. Beim Quantenpunkt ist es jedoch möglich diese Schwierigkeiten zu umgehen. Ein Quantenpunkt stellt eine mesoskopische Insel dar, die über zwei Tunnelbarrieren elektrisch kontaktiert ist. Der Stromfluss erfolgt über das Tunneln einzelner Elektronen in und aus den Quantenpunkt. Mit einem sensitiven Elektrometer können die dabei am Quantenpunkt auftretenden zeitlichen Ladungsänderungen präzise detektiert [17] und das Schrotrauschen anhand der Zählstatistik charakterisiert werden [18, 19].

---

Im sogenannten Coulomb-Blockade-Regime bewirkt die elektrostatische Abstoßung zwischen den Elektronen, dass sie den Quantenpunkt immer nur einzeln nacheinander passieren können. Die Rate mit der die sequenziellen Tunnelereignisse erfolgen, kann präzise über externe elektrische Felder gesteuert werden. Zusammen mit der Ladungsdetektion, eröffnet dies die Möglichkeit die zeitliche Abfolge der Elektronen direkt zu beeinflussen, um einen gleichmäßigeren Ladungstransport zu erreichen. Die gezielte Unterdrückung der zeitlichen Fluktuationen kann die Empfindlichkeit von Einzelelektronen-Verstärkern [20] und die Präzision von Einzelelektronen-Emittlern [21] erhöhen.

In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Ansätze verfolgt das Schrottrauschen in einem Quantenpunkt aktiv zu unterdrücken:

1. Der erste Ansatz (*open-loop control*) besteht darin den Tunnelprozess mit einem externen periodischen Antrieb optimal zu synchronisieren. Die Existenz eines Optimums basiert auf der Annahme, dass die Synchronisation des Tunnelprozesses mit einem externen periodischen Antrieb einer Quanten-Stochastischen Resonanz folgt [22–24].
2. Bei dem zweiten Ansatz (*closed-loop control*) findet eine Stabilisierung des Tunnelprozesses über die Implementierung eines Regelkreises statt. Dazu wird die effektive Tunnelrate des Quantenpunktes mit den zeitlichen Fluktuationen der Einzelelektronen-Tunnelereignisse rückgekoppelt. Die Verwendung ähnlicher Regelkreise wurden in der Quantenoptik zur Erzeugung von Laserlicht mit einer Sub-Poisson-Photonenverteilung demonstriert [25, 26].

Nach dieser allgemeinen Einführung und Motivation (**Kapitel 1**) gliedert sich der weitere Inhalt der Arbeit wie folgt:

**Kapitel 2 (Grundlagen)** behandelt als erstes die grundlegenden Eigenschaften von Quantenpunkten sowie ihr Verhalten im elektronischen Transport. Anschließend wird das Prinzip der zeitaufgelösten Ladungsdetektion erläutert. Abschließend findet noch eine genauere Betrachtung des elektrischen Schrotrauschens statt.

**Kapitel 3 (Experimentelles)** beginnt zunächst mit einer Einführung in den Herstellungsprozess der in dieser Arbeit vermessenen Quantenpunktstruktur. Danach folgt eine Beschreibung des experimentellen Messaufbaus. Den Schwerpunkt des Kapitels setzen die anschließenden Charakterisierungsmessungen der Quantenpunktstruktur zum Auffinden des Arbeitspunktes für die zeitaufgelösten Ladungsmessungen.

**Kapitel 4 (Elektronen-Zählen)** geht detailliert auf die zeitaufgelöste Ladungsdetektion am Quantenpunkt ein. Zunächst wird das Vorgehen bei der Digitalisierung des Detektorsignals besprochen. Den längsten Teil bildet aber die Bestimmung der vielfältigen statistischen Größen (Tunnelraten, Zählstatistik, Besetzungszeiten, Rückkehrzeiten) aus den zeitaufgelösten Detektorsignalen. Die Ergebnisse dieses Kapitels dienen als Grundlage für die Experimente in den anschließenden beiden Kapiteln.

**Kapitel 5 (Getriebenes Tunneln)** untersucht die Statistik des Einzelelektronen-Tunnelprozesses unter dem Einfluss eines externen periodischen Antriebs. Zunächst wird das Auftreten einer Quanten-Stochastischen Resonanz demonstriert. Dazu wird gezeigt, dass die Synchronisation der Tunnelereignisse mit dem Antrieb ein Optimum durchläuft, unabhängig davon ob die externe Antriebsfrequenz oder das interne Schrotrausch-Level variiert wird. Abschließend wird der Einfluss des externen Antriebs auf die Verteilungen der Besetzungs- und Wartezeiten analysiert. Daraus zeigt sich, dass man aus den verschiedenen Verteilungen Rückschlüsse auf die Phasenbeziehung und Amplitude des externen Antriebs ziehen kann.

---

**Kapitel 6 (Rückkopplung)** behandelt die Implementierung einer Regelung zur Stabilisierung des Tunnelprozesses. Der Einfluss der Rückkopplung auf den Einzelelektronen-Tunnelprozess wird anhand der Zählstatistik für alle relevanten Zeitskalen ermittelt. Die Auswertung zeigt, dass die zeitlichen Fluktuationen für lange Zeiten vollständig einfrieren und als Funktion der Rückkopplungsstärke unterdrückt werden. Die durchgeführten Messungen zeigen, dass es eine optimale Rückkopplungsstärke gibt, die zu einer maximalen Unterdrückung des Schrotrauschens führt.



# 2

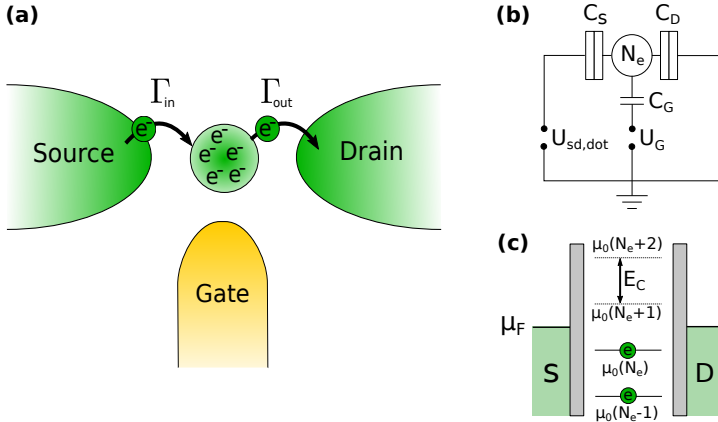
## Grundlagen

In diesem Kapitel werden die physikalischen Grundlagen besprochen, die für das Verständnis und die Analyse der Experimente zur zeitaufgelösten Ladungsdetektion an Quantenpunkten notwendig sind. Der Anfang widmet sich grundlegenden Eigenschaften von Quantenpunkten sowie deren Verhalten im elektrischen Transport. Anschließend wird das Prinzip der zeitaufgelösten Ladungsdetektion mit einem Quantenpunktkontakt erläutert. Abschließend findet noch eine genauere Betrachtung des elektrischen Schrotrauschens statt.

### 2.1. Quantenpunkte

Ein Quantenpunkt kann als ein künstliches Atom angesehen werden [27–29]. Ähnlich wie ein echtes Atom bindet ein Quantenpunkt eine definierte Anzahl  $N_e$  an Elektronen und weist aufgrund deren räumlichen Einschnürung ein diskretes Energiespektrum auf. Da die räumliche Ausdehnung von Quantenpunkten deutlich größer ist als die echter Atome, ist es experimentell möglich, einzelne Quantenpunkte gezielt elektrisch zu kontaktieren und zu kontrollieren [30–34].

Der in dieser Arbeit verwendete Quantenpunkt ist, wie in Abb. 2.1a skizziert, mit zwei benachbarten Elektronenreservoirs (Source und Drain) tunnelgekoppelt und lässt sich über eine zusätzliche Steuerungselektrode (Gate) elektrostatisch beeinflussen. Aus den Reservoirs kann der Quantenpunkt mit weiteren Elektronen geladen oder umgekehrt durch Ab-



**Abbildung 2.1.:** (a) Schematische Abbildung eines Quantenpunktes. Über die Source und Drain-Zuleitungen kann der Quantenpunkt durch Aufnahme weiterer Elektronen geladen, bzw. durch Abgabe von Elektron entladen werden. Die Anzahl  $N_e$  gebundener Elektronen lässt sich über eine Gateelektrode einstellen. Der Einzelelektronen-Ladeprozess findet über stochastisch auftretende Tunnelereignisse mit den Raten  $\Gamma_{in}$  und  $\Gamma_{out}$  statt. (b) Ersatzschaltbild eines Quantenpunktes. Die Gesamtkapazität  $C_{\Sigma} = C_S + C_D + C_G$  setzt sich additiv aus der kapazitiven Kopplung der Tunnelbarrieren und des Gates zusammen. (c) Vereinfachtes Energiespektrum eines Quantenpunktes mit konstanter Ladungsenergie  $E_C$ . Die Besetzungszahl  $N_e$  des Quantenpunktes hängt vom Fermi-niveau  $\mu_F$  in den Zuleitungen ab.

gabe von Elektronen an die Reservoirs entladen werden. Über die Gate-spannung lässt sich die Anzahl  $N_e$  gebundener Elektronen variieren. Am Übergang zweier Ladungszustände  $N_e \leftrightarrow N_e + 1$  ist der Quantenpunkt bistabil, da einzelne Elektronen in und aus den Reservoirs tunneln können. Der stochastische Wechsel zwischen den Besetzungszahlen hängt von den Tunnelraten  $\Gamma_{in}$  und  $\Gamma_{out}$  des Systems ab. Die Detektion und Manipulation der Einzelelektronen-Tunnelprozesse ist Ausgangspunkt aller in dieser Arbeit durchgeführten Experimente.

Damit die Einzelelektronen-Tunnelprozesse überhaupt beobachtbar sind, müssen zwei grundsätzliche Bedingungen erfüllt sein. Erstens muss



die thermische Energie kleiner sein als die Ladeenergie  $E_c$ :

$$k_b T \ll E_c \quad (2.1)$$

Die Ladeenergie  $E_c$  ist der Energiebeitrag der benötigt wird, um die Ladung auf dem Quantenpunkt um ein Elektron zu erhöhen.

Zweitens darf der Quantenpunkt nur schwach an die Zuleitungen koppeln, damit die Elektronen lokalisiert sind. Der Leitwert des Quantenpunktes  $G_{\text{dot}}$  muss dazu kleiner sein als das Leitwertquant [35, 36]:

$$G_{\text{dot}} \ll G_0 = \frac{e^2}{h} \quad (2.2)$$

Diese Bedingung ergibt sich aufgrund der Energie-Zeit-Unschärferelation  $\Delta E \Delta t > h$ , aus der Ladeenergie  $\Delta E = E_c \approx e^2/C_\Sigma$  (Gl. 2.4) und der Entladezeit  $\Delta t = RC_\Sigma \approx C_\Sigma/G_{\text{dot}}$  eines Quantenpunktes.

### 2.1.1. Kapazitives Modell

Um ein zusätzliches Elektron auf den Quantenpunkt zu bringen, muss die Ladeenergie

$$E_c = \mu_0(N_e + 1) - \mu_0(N_e) \quad (2.3)$$

aufgebracht werden. Dabei bezeichnet das elektrochemische Potential  $\mu_0(N_e)$  den Grundzustand eines Quantenpunktes mit  $N_e$  gebunden Elektronen, der im folgenden nur noch vereinfacht als Ladungszustand  $N_e$  bezeichnet wird. Daneben existieren für jede Besetzungszahl  $N_e$  eine Serie ( $m \geq 1$ ) angeregter Zustände  $\mu_m(N_e)$ . Das exakte Energiespektrum  $\mu_m(N_e)$  eines Quantenpunktes hängt von seiner Größe, Form und den Materialeigenschaften ab [37–41]. Letztlich setzt sich das Spektrum aber immer aus zwei verschiedenen Energiebeiträgen zusammen. Der erste Beitrag resultiert aus der Quantisierung der Energien durch die räumliche Einschränkung der Elektronenbewegung (Anregungsspektrum). Der zweite Beitrag wird zur Überwindung der Coulomb-Abstoßung zwischen

den Elektron benötigt (Additionsspektrum). Je nach Größe des Quantenpunktes und Fermiwellenlänge der Elektronen kann entweder der eine oder der andere Beitrag dominieren. Während für metallische Inseln lediglich die Coulomb-Abstoßung eine Rolle spielt, kann in Halbleiter-Quantenpunkten die Quantisierung entscheidend werden.

Näherungsweise kann das Energiespektrum  $\mu_m(N_e)$  durch das *constant interaction model* beschrieben werden. Demnach hängt die Landeenergie [30–33, 42, 43]

$$E_c \approx \epsilon_{N_{e+1}} - \epsilon_{N_e} + \frac{e^2}{C_\Sigma} \quad (2.4)$$

nur von den Einteilchenzuständen  $\epsilon_m$  und der Gesamtkapazität  $C_\Sigma$  des Quantenpunktes ab. Dabei wird vereinfacht angenommen, dass der Quantenpunkt durch eine einzige konstante Kapazität beschrieben werden kann und außer der Coulomb-Abstoßung alle weiteren Wechselwirkungen (Abschirmung, Austauschwechselwirkungen, ...) zwischen den Elektronen und mit der Umgebung vernachlässigbar sind.

Zur Erläuterung des kapazitiven Anteils zeigt Abb. 2.1b ein typisches Ersatzschaltbild. Darin ist der Quantenpunkt wie im Experiment über zwei Tunnelbarrieren mit der Source- und Drain-Zuleitung gekoppelt und zusätzlich mit einer Gateelektrode rein kapazitiv gekoppelt. Die Gesamtkapazität  $C_\Sigma$  des Quantenpunktes ist in dem Falle

$$C_\Sigma = C_S + C_D + C_G. \quad (2.5)$$

Allgemein können beliebig viele Kapazitäten  $C_i$  auftreten.

Die Gesamtenergie setzt sich aus der Summe der Einteilchen-Energien und der elektrostatischen Energie zusammen. Da sich die Anzahl  $N_e$  der Elektronen auf dem Quantenpunkt immer nur ganzzahlig ändern darf, ist unter Berücksichtigung der kapazitiven Kopplung die Gesamtenergie

gegeben durch

$$E(N_e) = \sum_{m=1}^{N_e} \epsilon_m + \frac{1}{2C_\Sigma} \left( -e(N_e - N_0) + \sum_{i=1}^m C_i U_i \right)^2. \quad (2.6)$$

Dabei ist  $N_0$  die Anzahl der Elektronen, die sich ohne angelegte Spannungen  $U_i = 0$  aufgrund der Hintergrunddotierung im Quantenpunkt befinden. Das elektrochemische Potential  $\mu(N_e)$  ist definiert als die Änderung der Gesamtenergie des Quantenpunktes durch das  $N_e$ -te Elektron:

$$\begin{aligned} \mu(N_e) &= E(N_e) - E(N_e - 1) \\ &= \epsilon_{N_e} + (N_e - N_0 - \frac{1}{2}) \frac{e^2}{C_\Sigma} - e \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{C_\Sigma} U_i. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Aus der Differenz zweier benachbarter elektrochemischer Potentiale ergibt sich die Ladeenergie  $E_C = \mu(N_e + 1) - \mu(N_e)$  nach Gl. 2.4.

Der Ladungszustand  $N_e$  des Quantenpunktes hängt vom Fermineiveau  $\mu_F$  in den Zuleitungen ab. Wie in Abb. 2.1c dargestellt, wird der Quantenpunkt solange  $\mu(N_e) < \mu_F$  ist mit Elektronen geladen. Ebenso sieht man anhand von Gl. 2.7, dass sich die elektrochemischen Potentiale  $\mu(N_e)$  durch die Gatespannungen  $U_i$  gegenüber dem Fermineiveau  $\mu_F$  verschieben lassen. Dabei verknüpfen die sogenannten Hebelfaktoren

$$\alpha_i = \frac{C_i}{C_\Sigma} \quad (2.8)$$

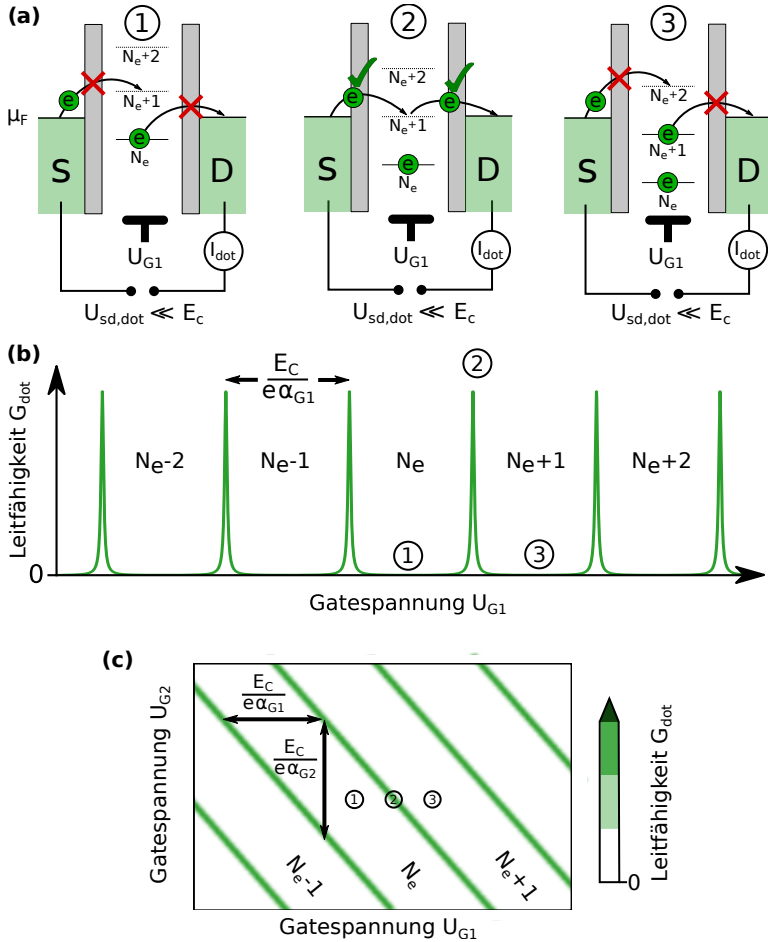
eine externe Spannungsänderung  $\Delta U_i$  mit einer internen Energieverschiebung  $\Delta \mu_{N_e} = -e \alpha_i \Delta U_i$  des Quantenpunktes. Befinden sich  $N_e$  Elektronen auf dem Quantenpunkt, dann findet ein Entladevorgang statt, sobald  $\mu(N_e) > \mu_F$  gilt. Hingegen findet ein Ladevorgang statt, wenn  $\mu(N_e + 1) < \mu_F$  gilt.

### 2.1.2. Transportspektroskopie

Mittels elektrischer Transportmessungen ist es möglich das Energiespektrum eines Quantenpunktes zu charakterisieren. Analog zur Optik wird dieses Verfahren als Transportspektroskopie bezeichnet [31–34].

Abb. 2.2a skizziert einen Quantenpunkt der anfangs mit  $N_e$  Elektronen besetzt ist. In der vorliegenden Situation reicht die Energie in den Zuleitungen nicht aus, um ein zusätzliches Elektron auf den Quantenpunkt zu bringen. Ebenso kann kein Elektron den Quantenpunkt verlassen, da alle Zustände in den Zuleitungen bis zum Fermienergie  $\mu_F$  aufgefüllt sind. Es existieren experimentell nun zwei verschiedene Möglichkeiten diese sogenannte Coulomb-Blockade (erstmalig diskutiert von C. J. Gorter [44]) aufzuheben und einen Tunnelstrom  $I_{\text{dot}}$  durch den Quantenpunkt zu treiben.

Im ersten Fall wird ausgenutzt, dass sich die Ladungszustände  $N_e$  des Quantenpunktes entsprechend Gl. 2.7 über eine Gatespannung  $U_{G1}$  verschieben lassen. Wie in Abb. 2.2a skizziert, können auf diese Weise die verschiedenen Ladungszustände nach und nach in Resonanz mit dem Fermienergie  $\mu_F$  gebracht werden. Je nach Variationsrichtung der Gatespannung  $U_{G1}$  wird dabei die Besetzungszahl  $N_e$  schrittweise um Eins erhöht oder erniedrigt. Wann immer ein Ladungszustand in Resonanz mit dem Fermienergie  $\mu_F$  kommt, reicht bereits eine minimale Biasspannung  $U_{\text{s,d,dot}} \ll E_c$  um einen effektiven Tunnelstrom  $I_{\text{dot}}$  durch den Quantenpunkt zu treiben. In Resonanz fluktuiert die Besetzungszahl zwischen  $N_e$  und  $N_e + 1$ , je nachdem ob der Quantenpunkt gerade von einem Elektron besetzt ist oder nicht. In den Situationen dazwischen verhindert die Coulomb-Blockade einen Stromfluss und die Besetzungszahl  $N_e$  ist zeitlich konstant. Die Leitfähigkeit  $G_{\text{dot}}$  des Quantenpunktes zeigt daher, wie in Abb. 2.2b angedeutet, eine Serie scharfer Coulomb-Peaks als Funktion der Gatespannung  $U_{G1}$  [43, 45]. Die Peakform kann im



**Abbildung 2.2.:** (a) Die Ladungszustände eines Quantenpunktes können über die Gatespannung  $U_{G1}$  in Resonanz mit dem Fermi-niveau  $\mu_F$  der Zuleitungen gebracht werden. (b) Die Leitfähigkeit  $G_{dot}$  zeigt daher eine Serie scharfer Coulomb-Peaks als Funktion der Gatespannung  $U_{G1}$ , die Besetzungszahl  $N_e$  ändert sich dabei schrittweise. Der Peakabstand  $\Delta U_{G1} = E_c / (e\alpha_{G1})$  hängt von der Ladeenergie  $E_c$  und dem Hebelfaktor  $\alpha_{G1}$  ab. (c) Durch Variation zweier Gatespannungen  $U_{G1}$  und  $U_{G2}$  erhält man ein Stabilitätsdiagramm. Die Steigung der Ladelinien entspricht dem Verhältnis der Hebelfaktoren  $\alpha_{G1} / \alpha_{G2}$ .

*weak-coupling* Regime durch [31, 33, 46].

$$G_{\text{dot}} = \frac{e}{4k_B T} \frac{\tilde{\Gamma}_{\text{in}} \tilde{\Gamma}_{\text{out}}}{\tilde{\Gamma}_{\text{in}} + \tilde{\Gamma}_{\text{out}}} \cosh^{-2} \left( \frac{\mu(N_e) - \mu_F}{2k_B T} \right) \quad (2.9)$$

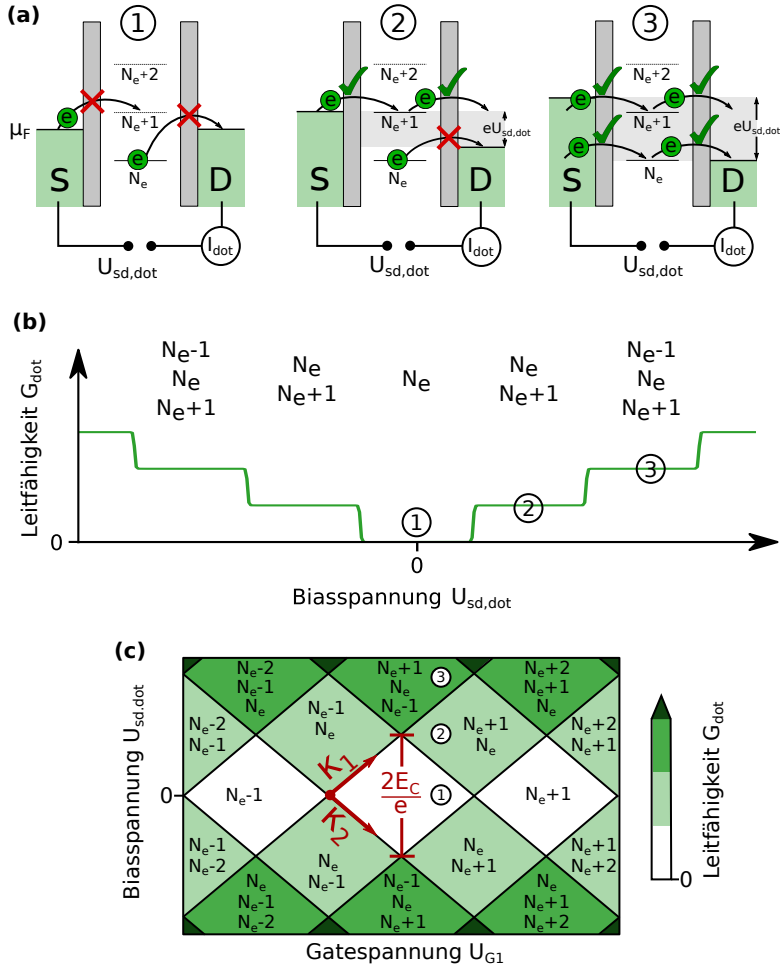
beschrieben werden. Die Peakbreite hängt also von der Temperatur  $T$  sowie von den beiden Tunnelkopplungen  $\tilde{\Gamma}_{\text{in}}$  und  $\tilde{\Gamma}_{\text{out}}$  ab. Der Abstand  $\Delta U_{G_1} = -E_c / (e\alpha_{G_1})$  der Peaks ist durch die Ladeenergie  $E_c$  und den Hebelfaktor  $\alpha_{G_1}$  gegeben. Daraus ergibt sich direkt die Kapazität

$$C_G = \frac{e}{\Delta U_{G_1}} \quad (2.10)$$

des Gates, wenn der kapazitive Anteil die Ladeenergie  $E_c$  dominiert.

Werden zwei Gatespannung  $U_{G_1}$  und  $U_{G_2}$  variiert, erhält man ein Stabilitätsdiagramm des Quantenpunktes. Dazu wird wie in Abb. 2.2c der Tunnelstrom  $I_{\text{dot}}$  in Abhängigkeit der beiden Gatespannung aufgetragen. Für einen einzelnen Quantenpunkt zeigt das Stabilitätsdiagramm dann eine Reihe paralleler Ladelinien. Beim Überqueren einer Ladelinie ändert sich die Besetzungszahl  $N_e$  des Quantenpunktes um Eins. Auf der Ladelinie selbst ist der Quantenpunkt bistabil und die Besetzungszahl fluktuiert stochastisch. Die Steigung der Ladelinien entspricht genau dem Verhältnis der Hebelfaktoren  $\alpha_{G_1}/\alpha_{G_2}$  der beiden Gates. Denn nach Gl. 2.7 kann eine Verschiebung des Ladungszustandes  $\Delta\mu_{N_e} = -e\alpha_{G_1}\Delta U_{G_1}$  durch Gate 1 mittels einer entgegengesetzten Verschiebung  $-\Delta\mu_{N_e} = -e\alpha_{G_2}\Delta U_{G_2}$  durch Gate 2 kompensiert werden. Elektrostatisch ändert sich der Quantenpunkt parallel zu den Ladelinien nicht. Experimentell beeinflussen die Gatespannung allerdings die Tunnelbarrieren. Das Stabilitätsdiagramm zeigt daher die Gatekonfigurationen, in denen Einzelelektron-Transport stattfindet.

Die zweite Möglichkeit, einen Tunnelstrom  $I_{\text{dot}}$  durch den Quantenpunkt zu treiben, besteht darin, eine hinreichend große Biasspannung  $U_{\text{s,d,dot}}$  anzulegen. Durch die Biasspannung verschieben die Fermi-



**Abbildung 2.3.:** (a) Die Biasspannung  $U_{sd,dot}$  verschiebt die Fermi-niveaus in den Zuleitungen gegeneinander. Jeder Ladungszustand, der innerhalb des aufgespannten Transportfensters  $eU_{sd,dot}$  liegt, ermöglicht das Tunneln von Elektronen durch den Quantenpunkt. (b) Die Leitfähigkeit  $G_{dot}$  zeigt daher idealerweise einen stufenförmigen Verlauf in Abhängigkeit der Biasspannung  $U_{sd,dot}$ . (c) Zusammen mit der Variation einer Gatespannung  $U_{G1}$  zeigt die Leitfähigkeit  $G_{dot}$  sogenannte Coulomb-Diamanten. Anhand deren Höhe kann direkt die Ladeenergie  $E_c$  abgelesen werden. Aus den beiden Steigungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  ergibt sich zusammen mit der Gatekapazität  $C_{G1}$  die Gesamtkapazität  $C_\Sigma$  des Quantenpunktes.

niveaus der Zuleitungen zunehmend gegeneinander, wie in Abb. 2.3a illustriert. Sobald ein Ladungszustand innerhalb des aufgespannten Transportfenster  $e\Delta U_{sd,dot}$  liegt, fließt ein Tunnelstrom  $I_{dot}$  durch den Quantenpunkt. Wird die Biasspannung noch weiter erhöht, können weitere Ladungszustände zum Transport beitragen. Idealerweise sollte die Leitfähigkeit  $G_{dot}$  daher wie in Abb.2.3b dargestellt einen stufenförmigen Verlauf aufweisen.

Wird zusätzlich zur Biasspannung  $U_{sd,dot}$  eine Gatespannung  $U_{G1}$  variiert, zeigt die Leitfähigkeit  $G_{dot}$  eine rautenförmige Struktur. Diese Rauten werden oft als Coulomb-Diamanten bezeichnet. In den zentralen weißen Coulomb-Diamanten kann kein Tunnelstrom  $I_{dot}$  fließen, der Quantenpunkt befindet sich hier in der Coulomb-Blockade. In den äußeren Coulomb-Diamanten fließt ein Tunnelstrom  $I_{dot}$  und die Besetzungszahl  $N_e$  des Quantenpunktes fluktuiert, je nachdem wie viele Ladungszustände innerhalb des Transportfensters liegen. Anhand der Höhe  $\Delta U_{sd,dot}^{CD}$  der Coulomb-Diamanten kann direkt die Ladeenergie

$$E_c = \frac{1}{2} e \Delta U_{sd,dot}^{CD} \quad (2.11)$$

des Quantenpunktes abgelesen werden. Die Gesamtkapazität

$$C_\Sigma = C_G (\kappa_1 - \kappa_2) \quad (2.12)$$

ergibt sich zusammen mit der Gatekapazität  $C_G$  aus den beiden Steigungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  der Coulomb-Diamanten.

## 2.2. Ladungsdetektion

Neben dem Transport durch einen Quantenpunkt kann ebenfalls dessen Ladung gemessen werden. Um die Änderung eines einzelnen Elektrons auf dem Quantenpunkt registrieren zu können, wird ein entsprechend



sensitiver Ladungsdetektor benötigt. Interessanterweise stellen Quantenpunkte, aufgrund der scharfen Coulomb-Peaks (Abb. 2.2b), selbst geeignete Elektrometer dar [47, 48]. Die hohe Sensitivität und gute Integrierbarkeit machen vor allem metallische Einzelelektronen-Transistoren (SET: *single-electron transistor*) für eine Vielzahl an Systemen und Anwendungen interessant [49–54].

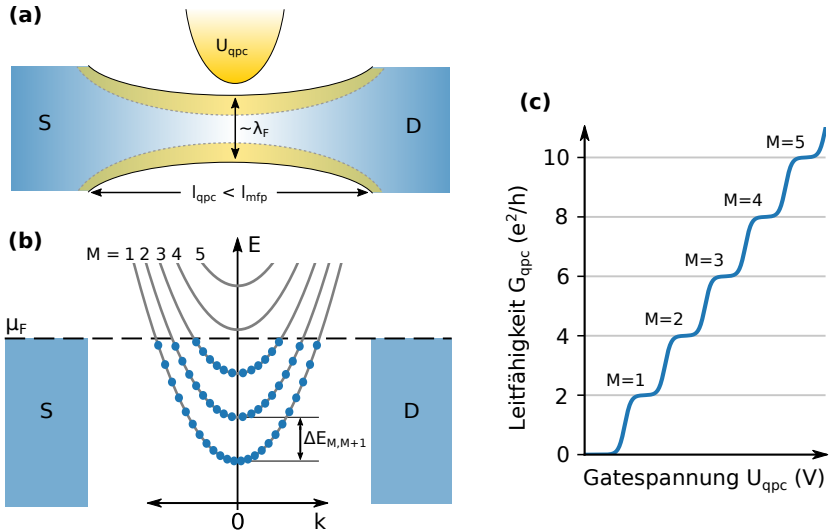
Anstelle eines Quantenpunktes wird in dieser Arbeit ein Quantenpunktkontakt (QPC: *quantum point contact*) als Ladungsdetektor verwendet [55–58], da dieser zwei wesentliche Vorteile gegenüber dem Quantenpunkt mitbringt. Zum einen ist er weniger komplex und lässt sich entsprechend leicht integrieren. Zum anderen besitzt ein QPC selbst keine lokalisierte Ladung, wodurch die Rückkopplung mit dem zu vermessenden System minimal ist.

### 2.2.1. Quantenpunktkontakt

Ein QPC bezeichnet einen eindimensionalen Transportkanal. In Richtung des Kanals können sich die Elektronen frei bewegen, während senkrecht dazu die Bewegung auf der Größenordnung der Fermiwellenlänge  $\lambda_F$  eingeschränkt ist (Abb. 2.4a). Der Transport durch einen QPC findet ballistisch statt, wenn die Kanallänge  $l_{\text{qpc}}$  kürzer wird als die mittlere freie Weglänge  $l_{\text{mfp}}$  der Elektronen. Der Leitwert  $G_{\text{qpc}}$  des QPCs ist dann quantisiert und beträgt ein Vielfaches des Leitwertquants  $G_0$  [33, 59–61]

$$G_{\text{qpc}} = M_{\text{qpc}} \frac{e^2}{h}. \quad (2.13)$$

Dabei entspricht  $M_{\text{qpc}}$  der Anzahl besetzter QPC-Moden, die zum Transport beitragen, dies sind alle Moden unterhalb des Fermi-niveaus  $\mu_F$  (Abb. 2.4b). Je enger der Kanal gemacht wird, desto größer ist der energetische Abstand  $\Delta E_{M, M+1}^{\text{qpc}}$  der Moden. Über eine externe Gatespannung  $U_{\text{qpc}}$  lässt sich die Einschnürung kontinuierlich verengen und so die Moden der Reihe nach über das Fermi-niveau  $\mu_F$  hinaus schieben. Die Leitfä-



**Abbildung 2.4.:** (a) Ein Quantenpunktcontact (QPC) ist ein eindimensionaler Kanal, der auf der Größenordnung der Fermiwellenlänge  $\lambda_F$  eingeschnürt ist. Über eine negative Gatespannung  $U_{qpc}$  kann der Kanal zunehmend verengt werden. Wenn die Kanallänge  $l_{qpc}$  kürzer ist als die mittlere freie Weglänge  $l_{mfp}$ , durchqueren die Elektronen den QPC ballistisch. (b) Jede Mode unterhalb des Fermi-niveaus  $\mu_F$  trägt zum Transport bei. Der energetische Abstand  $E_{M,M+1}$  der Moden hängt von der Kanalbreite ab. (c) Die Leitfähigkeit des QPCs zeigt als Funktion der Gatespannung  $U_{qpc}$  einen stufenförmigen Verlauf. Der Faktor zwei berücksichtigt die Spinartung der Moden.

Die Leitfähigkeit  $G_{qpc}$  eines QPCs zeigt daher, wie in Abb. 2.4c dargestellt, einen stufenförmigen Verlauf als Funktion der Gatespannung  $U_{qpc}$  [62]. Der genaue Übergang zwischen den Plateaus hängt sensitiv von der QPC Geometrie ab [63, 64] und wird mit steigender Temperatur zunehmend flacher [63, 65]. Der Faktor zwei in der Stufenhöhe in Abb. 2.4c berücksichtigt die Spinartung der Moden, die sich durch ein externes Magnetfeld aufheben lässt [65, 66].

Anders als beim Quanten-Hall-Effekt [67] entsprechen die Plateaus niemals perfekt dem Vielfachen des Leitwertquants  $G_0$  da experimentell

ein endlicher Kontaktwiderstand unvermeidbar bleibt. Andererseits lässt sich die Leitwertquantisierung mit einfachen Mitteln bei Raumtemperatur nachweisen [68].

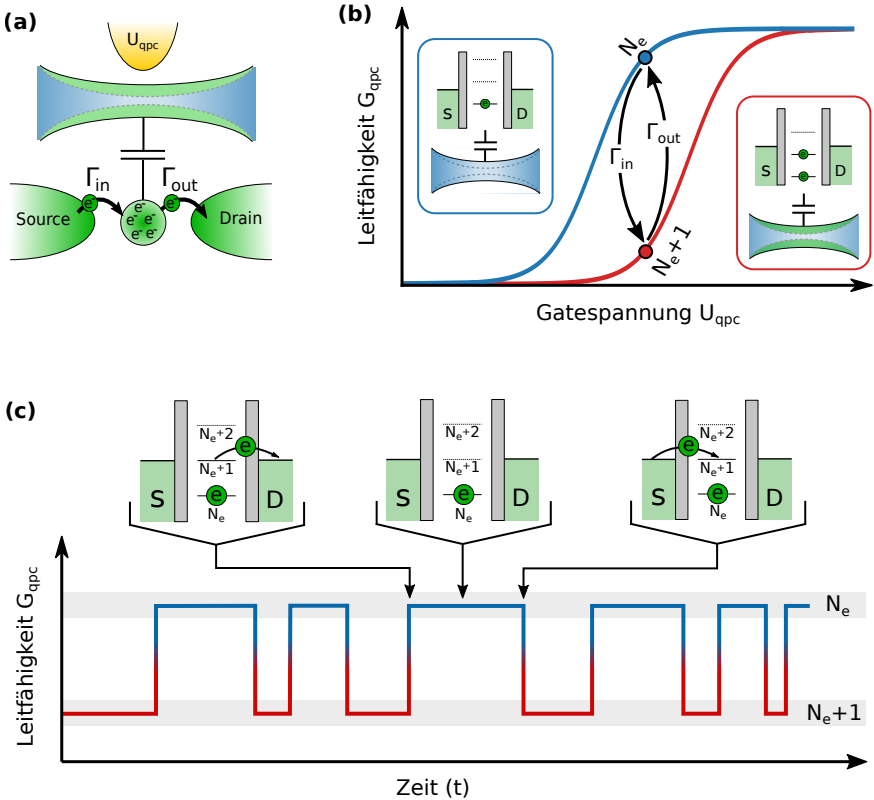
### 2.2.2. Kopplung

Befindet sich der QPC nahe an einem Quantenpunkt, wie in Abb. 2.5 illustriert, dann sind beide Systeme kapazitiv miteinander gekoppelt. In dem Falle hängt die Leitfähigkeit  $G_{\text{qpc}}$  nicht nur von der Gatespannung  $U_{\text{qpc}}$  ab, sondern ebenfalls vom Besetzungszustand  $N_e$  des Quantenpunktes. Zur Ladungsdetektion wird der QPC über die Gatespannung  $U_{\text{qpc}}$  so eingestellt, dass die Leitfähigkeit genau auf der Flanke zwischen zwei Leitwertstufen liegt (Abb. 2.5b). In der Regel wird die letzte Flanke vor der kompletten Abschnürung des Kanals gewählt. Hier bewirkt bereits eine kleine Potentialänderung eine große Variation der Leitfähigkeit  $G_{\text{qpc}}$ .

Wird der Quantenpunkt nun mit einem weiteren Elektron  $N_e + 1$  geladen, dann schließt der QPC aufgrund des zusätzlichen negativen Potentials ein Stück weiter und die Leitfähigkeit sinkt. Befindet sich der Ladungszustand  $N_e + 1$  des Quantenpunktes nun in Resonanz mit den Zuleitungen, springt die Leitfähigkeit des QPCs stochastisch zwischen zwei Niveaus (Abb. 2.5c). Sobald ein Elektron den Quantenpunkt verlässt, steigt die Leitfähigkeit  $G_{\text{qpc}}$ . Sie fällt erst wieder, sobald ein neues Elektron aus der Zuleitung reintunnelt. Der Wechsel der Niveaus hängt von den beiden Tunnelraten  $\Gamma_{\text{in}}$  und  $\Gamma_{\text{out}}$  des Quantenpunktes ab. Bei hinreichender Detektorbandbreite  $\Gamma_{\text{det}} > \Gamma_{\text{in,out}}$  ist es so möglich, die Tunnelereignisse der Elektronen zeitlich einzeln aufzulösen [17, 69–71]. Die zeitaufgelöste Ladungsdetektion wird zum Beispiel genutzt, um den Spinzustand von Quantenpunkt-Qubits elektrisch auszulesen [72] und zur Fehlerdetektion hochpräziser Einzelelektronen-Pumpen in der Metrologie [73–75]. Daneben ermöglicht die Erfassung der zeitlichen Fluktuation zwischen den individuellen Tunnelereignissen die Untersuchung thermodynamischer Nichtgleichgewichtsprozesse [76–78] und erlaubt die Bestim-

## 2. Grundlagen

mung der vollständigen Zählstatistik (*Full Counting Statistics*) [19, 79, 80]. Die experimentelle Detektion wird in Kapitel 4 detailliert beschrieben.



**Abbildung 2.5.:** (a) Der QPC koppelt kapazitiv mit dem Quantenpunkt. (b) Auf der Flanke zwischen zwei Leitwertplateaus reagiert der QPC empfindlich auf Ladungsänderungen des Quantenpunktes. Die Leitfähigkeit des QPCs hängt dort vom Besetzungszustand des Quantenpunktes ab. Befindet sich ein zusätzliches Elektronen  $N_e + 1$  auf dem Quantenpunkt, wird der QPC um ein Stück weiter verengt und die Leitfähigkeit sinkt. (c) Befindet sich der Ladungszustand  $N_e + 1$  des Quantenpunktes in Resonanz mit den Zuleitungen, dann springt die Leitfähigkeit des QPCs stochastisch zwischen zwei Niveaus, abhängig von den beiden Tunnelraten  $\Gamma_{in}$  und  $\Gamma_{out}$ .

## 2.3. Schrotrauschen

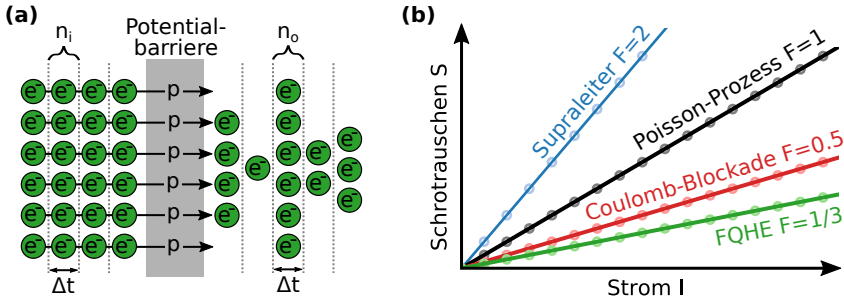
Bereits 1918 erkannte W. Schottky, dass aufgrund einer unvermeidbaren, intrinsischen Rauschquelle in Elektronenröhren eine fundamentale Grenze für die Verstärkung elektrischer Signale existiert [4]. Dieses sogenannte Schrotrauschen ist in heutigen mesoskopischen Leitern die dominante Rauschquelle [8, 9]. Es entsteht immer, wenn ein Strom über eine Potentialbarriere fließt als Folge der Ladungsquantisierung der Elektronen, wie in Abb. 2.6a illustriert. Von links treffen im Zeitintervall  $\Delta t$  immer genau  $n_i$  Elektronen auf eine Potentialbarriere. Abhängig von Potentialhöhe und -breite besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit  $p$ , dass ein Elektron die Barriere überwindet. Auf welchem Weg die Barriere genau überwunden wird, sei es aufgrund thermischer Anregung oder durch quantenmechanisches Tunneln, spielt hier zunächst keine Rolle. Von den  $n_i$  zeitgleich eintreffenden Elektronen schaffen es im Mittel  $\mu = pn_i$  Elektronen auf die andere Seite und es fließt der Strom  $\langle I \rangle = \mu e / \Delta t$ . Die exakte Anzahl  $n_o(\Delta t)$  transmittierter Elektronen schwankt allerdings zeitlich, da die Barriere statistisch überwunden wird. Diese zeitlichen Fluktuationen sind genau das von W. Schottky beschriebene Schrotrauschen aufgrund der Ladungsquantisierung.

Die Verteilung der transmittierten Elektronen  $n_o(\Delta t)$  wird allgemein durch eine Binomialverteilung beschrieben. Diese lässt sich allerdings für kleine Wahrscheinlichkeiten  $p \ll 1$  durch eine Poisson-Verteilung

$$\rho(n_o) = \frac{\mu^{n_o}}{n_o!} e^{-\mu} \quad (2.14)$$

nähern. Für die Poisson-Verteilung sind Varianz  $\sigma^2$  und Mittelwert  $\mu = n_i p$  identisch. Mit dieser Beziehung ergibt sich die Stärke der Stromfluktuationen

$$\langle \Delta I^2 \rangle = \left( \frac{e\sigma}{\Delta t} \right)^2 = \frac{e}{\Delta t} \langle I \rangle \quad (2.15)$$



**Abbildung 2.6.:** (a) Das Schrotrauschen entsteht, wenn ein Strom über eine Potentialbarriere fließt, die von den Elektronen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $p$  überwunden werden kann. Da die  $n_i$  eintreffenden Elektronen die Barriere immer ganz oder gar nicht überwinden, fluktuiert die Anzahl  $n_o$  der im Zeitintervall  $\Delta t$  transmittierten Elektronen stochastisch. (b) Das Schrotrauschen in einem System kann aufgrund von Korrelation zwischen den Elektronen gegenüber dem Poisson-Prozess erniedrigt  $F_2 < 1$  oder erhöht  $F_2 > 1$  sein.

und die spektrale Stromdichte [4, 33]

$$S_P = 2\Delta t \langle \Delta I^2 \rangle = 2e \langle I \rangle. \quad (2.16)$$

Das Schrotrauschen steigt somit linear mit der mittleren Stromstärke  $\langle I \rangle$  an und die Steigung hängt von der Elementarladung  $e$  ab.

Schrotrauschen ist bei weitem nicht einfach eine Störquelle, sondern ermöglicht einen tiefen Einblick in die physikalischen Prozesse eines Systems [7]. Denn zeitliche Korrelationen zwischen den Elektronen führen zu einer messbaren Unterdrückung oder Erhöhung des Schrotrauschens  $S$ . Abb. 2.6b illustriert das Schrotrauschen in einigen verschiedenen physikalischen Systemen. Der Fanofaktor [81]

$$F_2 = \frac{S}{S_P} \quad (2.17)$$

beschreibt die Abweichung des gemessenen Rauschen  $S$  gegenüber dem un-

korrelierten Poisson-Prozess  $S_P$ . Bei einem Fanofaktor  $F_2 < 1$  spricht man daher von einem Sub-Poisson-Prozess und bei  $F_2 > 1$  von einem Super-Poisson-Prozess.

Die ersten Messungen des Schrotrauschens an Elektronenröhren dienten der Bestimmung der Elementarladung  $e$  [5, 6]. Für den Fall, dass der Strom nicht von unabhängigen Elektronen getragen wird, muss sich bei gleichem Strom  $\langle I \rangle$  ein anderes Schrotrauschen ergeben. In einem Supraleiter sind beispielsweise jeweils zwei Elektronen zu einem Cooper-Paar gebunden. Ein supraleitender Strom durch eine Barriere erfährt daher ein doppelt so großes Schrotrauschen [82]. Auch konnte so für verschiedene Quanten-Hall-Zustände die fraktionale Ladung der Quasiteilchen nachgewiesen werden [83, 84].

In mesoskopischen Leitern kann anhand des Schrotrauschens nachgewiesen werden, ob der Transport ballistisch, elastisch oder diffus stattfindet [13, 14].

Im Quantenpunkt bewirkt die Coulomb-Blockade eine Unterdrückung des Schrotrauschens, da zwei Tunnelereignisse nicht zeitgleich stattfinden können [12, 85, 86]. Andere Effekte, wie Cotunneln [15], die Beteiligung angeregter Zustände [16, 87] oder die Wechselwirkung gebundener Elektronen mit den Zuleitungen [88, 89], können eine Super-Poisson-Statistik bewirken. In den genannten Referenzen [12–16, 85–89] wurde das Schrotrauschen des Tunnelstroms direkt gemessen. Für einen Quantenpunkt kann das Schrotrauschen auch sehr präzise aus der Zählstatistik des zeitaufgelösten Detektorsignals ermittelt werden [19, 90]. Dieses Vorgehen wird in Kapitel 4 detailliert diskutiert.





# 3

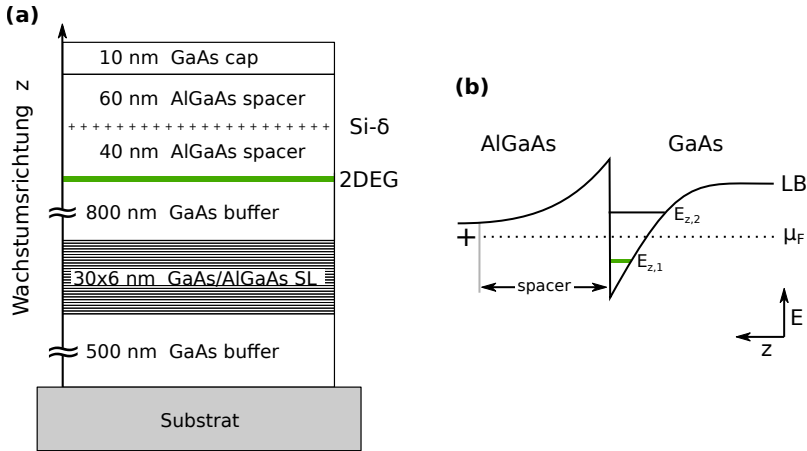
## Experimentelles

In diesem Kapitel werden die im Rahmen der Arbeit angewendeten experimentellen Techniken behandelt. Zunächst wird der Herstellungsprozess für die zu vermessende Quantenpunktstruktur besprochen. Anschließend erfolgt die Vorstellung des Tieftemperatur-Messsystems sowie der verwendeten elektronischen Geräte. Den Abschluss des Kapitels bildet die Charakterisierung des verwendeten Quantenpunktes für die nachfolgenden zeitaufgelösten Einzelelektronen-Tunnelmessungen.

### 3.1. Heterostruktur

Ausgangspunkt der hier untersuchten Quantenpunktstruktur ist ein zweidimensionales Elektronengas (2DEG: *two dimensional electron gas*) in einer AlGaAs/GaAs Heterostruktur [91, 92]. Die verwendete Heterostruktur wurde von E. P. Rugeramigabo mittels Molekularstrahl-epitaxie (MBE: *molecular beam epitaxy*) hergestellt [93]. Abb. 3.1a zeigt die Schichtstruktur gemäß Wachstumsprotokoll. Das grün angedeutete 2DEG bildet sich an der Grenzfläche zwischen GaAs und AlGaAs, 110 nm unterhalb der Oberfläche.

Da die Gitterkonstante von  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  kaum vom Al-Gehalt  $x$  abhängt, lassen sich die beiden Materialien verspannungsfrei aufeinander wachsen. An den atomar scharfen Grenzflächen kommt es durch die Angleichung des Ferminiveaus  $\mu_F$  in beiden Materialien zu einer Verbiegung der Energiebänder. Dabei entsteht, wie in Abb. 3.1b angedeutet, im Lei-



**Abbildung 3.1.:** (a) Epitaktische Schichtabfolge der verwendeten Heterostruktur. An der grün eingezeichneten Grenzschicht zwischen AlGaAs und GaAs bildet sich ein zweidimensionales Elektronengas (2DEG) aus. (b) Schematischer Verlauf des Leitungsbandes (LB) an der Grenzschicht. Dort bildet sich ein nahezu dreieckiger Potentialtopf in Wachstumsrichtung ( $z$ ) aus. Die Fermienergie  $\mu_F$  liegt so, dass nur das unterste Subband  $E_{z,1}$  besetzt ist und sich die Elektronen nur noch senkrecht zur Wachstumsrichtung frei bewegen können.

tungsband ein annähernd dreieckiger Potentialtopf [92]. Für die Ausbildung des 2DEGs ist entscheidend, dass nur das unterste Subband  $E_{z,1}$  mit Elektronen besetzt werden kann. Dazu wird mittels geeigneter Si-Dotierung die Fermienergie  $\mu_F$  unterhalb des 2. Subbandes  $E_{z,2}$  fixiert. Bei hinreichend tiefen Temperaturen können sich die Elektronen nur noch senkrecht zur Wachstumsrichtung  $z$  frei bewegen, weshalb man von einem zweidimensionalen System spricht.

Die elektronischen Eigenschaften des 2DEGs werden anhand der Ladungsträgerdichte  $n_e = 2,4 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und Beweglichkeit charakterisiert  $\mu = 5,1 \times 10^5 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ , die aus den Magnetotransportmessungen an einer Hallbar gewonnen wurden. Darüber lassen sich die Fermiwellenlänge  $\lambda_F = \sqrt{2\pi/n_e} \approx 51 \text{ nm}$  und die mittlere freie Weglänge

$l_{mfp} = h\mu/(e\lambda_F) \approx 5 \mu\text{m}$  berechnen [61]. Da diese im Bereich der lithographisch definierten Strukturgrößen liegen, müssen Quantisierungseffekte und ballistische Transporteigenschaften berücksichtigt werden.

## 3.2. Fotolithografie

Im Rahmen der Arbeit wurde die Lithografie (Photomasken, Lacksysteme, Metallisierung) grundlegend überarbeitet und fehlerbereinigt. Die verwendete Quantenpunktstruktur wurde von J. C. Bayer im Rahmen einer Masterarbeit hergestellt und die Prozessierung detailliert dokumentiert [94]. Die einzelnen Prozessschritte werden daher hier nur kurz skizziert.

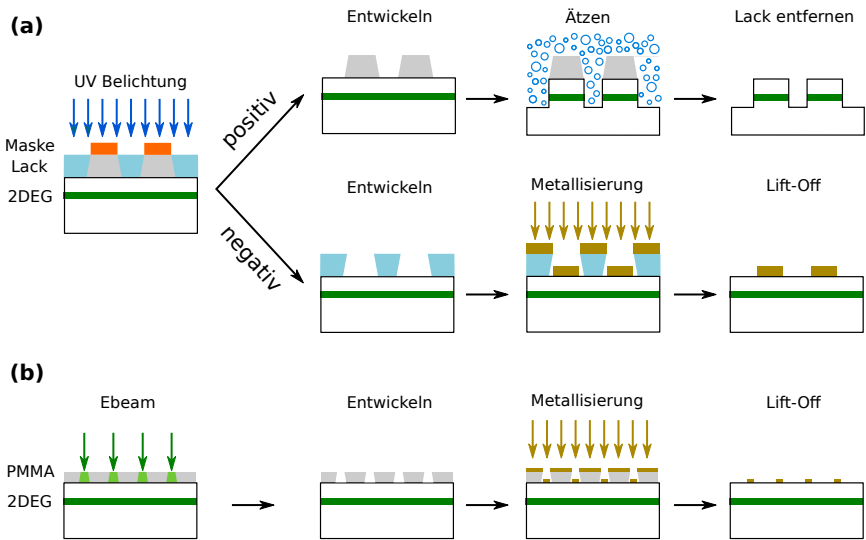
Zunächst wird aus dem Wafer ein  $4,5 \times 4,5 \text{ mm}^2$  großes Probenstück herausgeschnitten und dessen Oberfläche mit Aceton/Isopropanol in einem Ultraschallbad gereinigt. Die anschließende lithografische Strukturierung des Probenstücks setzt sich aus optischer Lithografie und Elektronenstrahl-Lithografie zusammen. Abb. 3.2a illustriert die optischen Prozessschritte und Abb. 3.2b die Elektronenstrahl-Lithografie.

Bei der optischen Lithografie kommen UV-empfindliche Lacke zum Einsatz. Der Lack wird in einer Lackschleuder dünn und eben auf der Probenoberfläche verteilt. Über eine mit Chrom beschichtete Quarzmaske lässt sich anschließend die gewünschte Struktur lithografisch in den Lack übertragen. Die Maske wird dazu in einem Kontaktbelichtungsverfahren auf den Lack gepresst, worauf die Belichtung des Lacks mit der benötigten Dosis folgt. Je nach verwendetem Lacksystem lassen sich danach entweder die belichteten (Positivlack Shipley S1805, Entwickler Microposit MF 319) oder die unbelichteten (Negativlack AZ 5214E, Entwickler AZ 726) Stellen über einen nasschemischen Entwicklungsschritt entfernen. Der auf der Probenoberfläche zurückbleibende Lack dient als Schutzschicht für den anschließenden Ätz- oder Metallisierungsschritt.

Beim Ätzen ( $\text{H}_2\text{O} : \text{H}_2\text{O}_2 : \text{H}_3\text{PO}_4$ ) wird das Probenmaterial an den ungeschützten Stellen abgetragen und das 2DEG zerstört. Der Ätzvor-

gang wird nach der gewünschten Zeit (Ätztiefe/Ätzrate) mit Wasser gestoppt und anschließend mit Aceton/Isopropanol der Lack entfernt. Zurück bleibt die sogenannte Mesa mit einem intakten 2DEG.

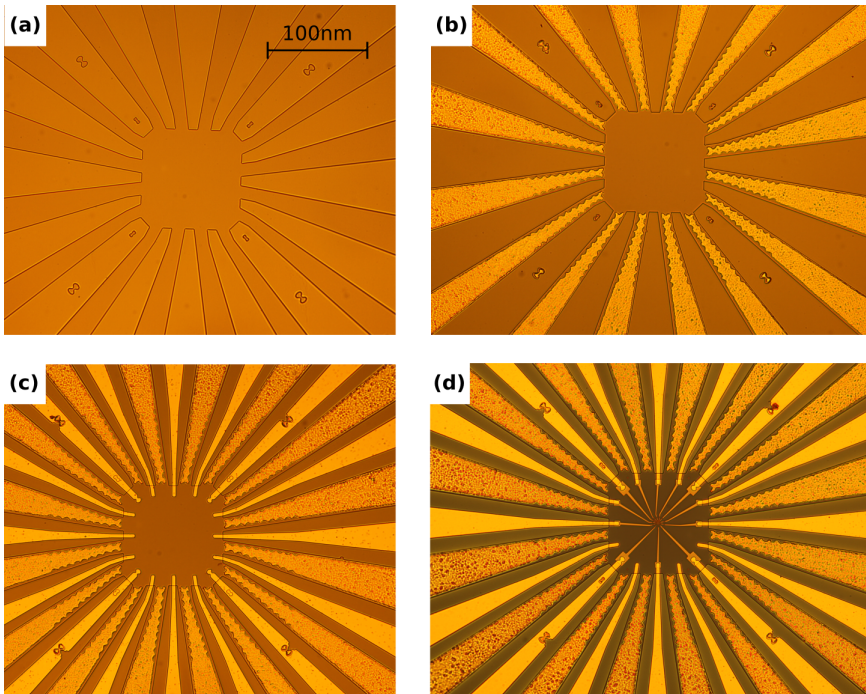
Bei der Metallisierung werden die gewünschten Metallschichten thermisch in einer Vakuumkammer aufgedampft. Nach dem *Lift-Off* Vorgang in Aceton bleibt nur das Metall an den lackfreien Stellen auf der Probenoberfläche zurück. Damit der *Lift-Off* fehlerfrei funktioniert, kommt ein Negativlack zum Einsatz der einen *Undercut* gewährleistet. Der *Undercut* ist notwendig, damit zwischen dem Metall auf der Probenoberfläche und dem Metall auf dem Lack keine Verbindung besteht, da andernfalls sämt-



**Abbildung 3.2.:** (a) Optische Lithografie Schritte: Zum Ätzen der Probenoberfläche wird ein Positivlack verwendet. Bei der Metallisierung kommt ein Negativlack zum Einsatz, der den benötigten *Undercut* aufweist. (b) Bei der Elektronenstrahl-Lithografie wird die Quantenpunktstruktur mit einem Rasterelektronenmikroskop in den Lack geschrieben. Durch die Streuung der Elektronen im Lack entsteht bei der Entwicklung ein *Undercut*, der nach dem Aufbringen der Metallisierung einen fehlerfreien *Lift-Off* ermöglicht.

liche Metallisierung beim *Lift-Off* abgelöst wird.

Mikroskopaufnahmen der Probenoberfläche nach den vier Prozessschritten sind in Abb. 3.3 gezeigt. Im ersten optischen Lithografieschritt wird die Mesa geätzt (Abb. 3.3a). Im zweiten optischen Lithografieschritt werden die ohmschen Kontakte und Bondpads (Au/Ge) aufgedampft und schließlich in einem Vakuumofen einlegiert, damit eine gut leitende Verbindung zum 110nm tief liegenden 2DEG entsteht (Abb. 3.3b). Im letzten optischen Schritt werden die bis auf die Mesa reichenden Gatezuleitungen (Cr/Au) und Marker für die nachfolgende Elektronenstrahl-Lithografie aufgedampft (Abb. 3.3c).



**Abbildung 3.3.:** Probenstrukturierung: **(a)** Geätzte Mestastruktur, **(b)** Ohmsche Kontakte, **(c)** Gatezuleitungen und **(d)** Elektronenstrahl-Lithografie.

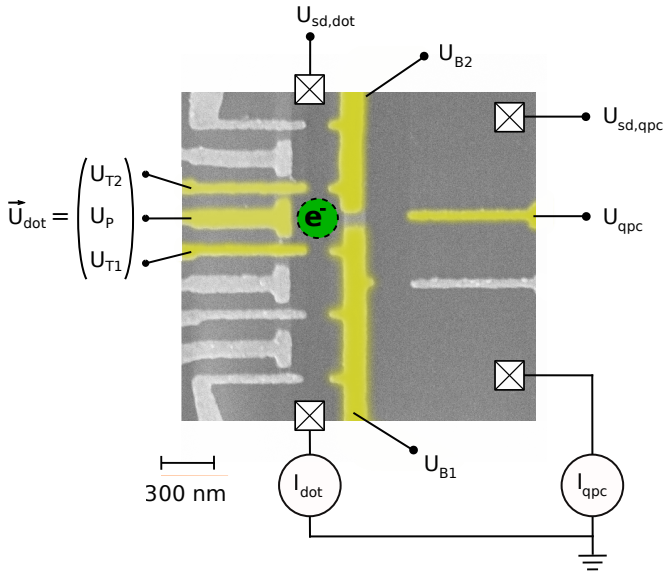
Für die Elektronenstrahl-Lithografie wird ein Lack (PMMA 950k 3%) auf die Probenoberfläche aufgeschleudert, der auf den Beschuss mit Elektronen reagiert. Mit dem fokussierten Elektronenstrahl eines Rasterelektronenmikroskops (SEM: *scanning electron microscope*) wird die Quantenpunktstruktur in den Lack geschrieben. Anschließend werden die beschriebenen Stellen entwickelt (MIBK). Aufgrund der Elektronenstreuung im Lack entsteht dabei ein *Undercut* und die Gates (Cr/Au) können aufgedampft werden. Nach dem *Lift-Off* ist die Strukturierung der Probe abgeschlossen (Abb. 3.3d).

### 3.3. Messaufbau

Zunächst wird hier der in allen Versuchen gemeinsame und grundlegende Teil des Messaufbaus beschrieben. Auf die speziellen Details und Steuerung der verschiedenen Experimente wird separat in jedem Kapitel eingegangen.

Die fertig strukturierte Probe wird in ein Chipgehäuse mit 20 Kontakten eingeklebt und anschließend gebondet. Beim Bonden werden die Kontakte des Chipgehäuses über feine Golddrähte mit den Bondpads der Probe verbunden. Das Chipgehäuse wird anschließend in den Probenstab eingesetzt, an den die benötigten Messgeräte angeschlossen werden.

Damit die thermische Anregung der Elektronen kleiner ist als die Ladeenergie ( $k_B T \ll E_C$ ) des Quantenpunktes muss die Probe gekühlt werden [95]. Dazu wird der Probenstab in einen Kryostaten eingebaut. Zum Einsatz kam ein Teslatron-Kryostat der Firma Oxford Instrument mit variablen Temperatur-Einsatz (VTI). Der VTI kann über ein Nadelventil mit flüssigem  $^4\text{He}$  aus dem Bad des Kryostaten befüllt werden. Über eine Drehschieberpumpe kann der  $^4\text{He}$  Dampfdruck am VTI reduziert und so die Temperatur bis auf etwa 1,5 K abgesenkt werden. Die Probe befand sich in einem separat abgeschlossenen  $^3\text{He}$  Einsatz innerhalb des VTIs. Durch eine zweite am  $^3\text{He}$  Einsatz angeschlossene Drehschie-



**Abbildung 3.4.:** SEM Aufnahme der Quantenpunktstruktur mit der grundlegenden Beschaltung. Der Quantenpunkt Strompfad  $I_{dot}$  und der QPC Strompfad  $I_{qpc}$  werden durch hinreichend negative Gatespannungen  $U_{B1}$  und  $U_{B2}$  galvanisch getrennt. Die sichtbare Lücke wird elektrostatisch geschlossen und dient der Vergrößerung der kapazitiven Kopplung beider Pfade. Der Quantenpunkt (grüne  $e^-$  Insel) wird durch die drei Gatespannungen  $\vec{U}_{dot} = (U_{T1}, U_P, U_{T2})$  geformt, der QPC mittels  $U_{qpc}$ . Die grauen Gates werden in dieser Arbeit nicht verwendet und befinden sich alle auf. Die Kreuze deuten die ohmschen Kontakte an, worüber die Biasspannungen  $U_{sd, dot}$  und  $U_{sd, qpc}$  angelegt werden.

berpumpe kann der Dampfdruck hier ebenfalls reduziert und die Probe bis auf 350 mK abgekühlt werden. Da es sich nicht um einen geschlossenen  $^3\text{He}$  Kreislauf handelt, muss das abgepumpte  $^3\text{He}$  nach etwa 10 Stunden erneut einkondensiert werden. Daher erfolgten nur die Charakterisierungsmessungen der Probe bei 350 mK, wohingegen die zeitaufgelösten Messungen bei 1,5 K durchgeführt wurden.

Die Gates und die ohmschen Kontakte der Probe sind über dünne

Kupferleitungen mit der Messelektronik außerhalb des Kryostaten verbunden. Abb. 3.4 zeigt die grundlegende Verkabelung der Probe. Die Gatespannungen wurden mittels AD5791 20 bit DACs (Digital-Analog-Konverter) angelegt. Die Source-Drain Spannungen an Quantenpunkt  $U_{s,d, \text{dot}}$  und Quantenpunktkontakt  $U_{s,d, \text{qpc}}$  wurden über zwei DACs mit nachgeschaltetem 1 : 1000 Spannungsteiler angelegt.

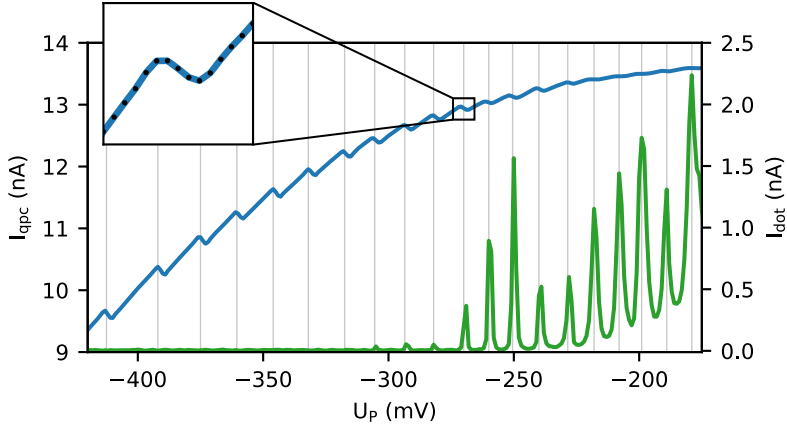
Die Messung der Ströme erfolgte mittels Transimpedanzverstärkern, welche die Ströme in proportionale Spannungen umwandeln. Für den Quantenpunkt Strom  $I_{\text{dot}}$  kam ein ITACO 1211 mit variabler Verstärkung zum Einsatz. Der QPC Strom  $I_{\text{qpc}}$  wurde durch einen FEMTO LCA-100K-50M verstärkt, der sich durch ein geringes Eigenrauschen auszeichnet. Eine Besonderheit existiert auf der Drain-Seite des QPCs. Hier wurde eine Niederkapazitätsleitung ( $\sim 30$  pF) verwendet, um in Kombination mit dem niedrigen Spannungsrauschen des FEMTO Stromverstärkers eine möglichst große Bandbreite für die zeitaufgelösten Messungen zu erreichen [96, 97].

Die von den Stromverstärkern ausgegebenen Spannungen wurden über eine ADC (Analog-Digital-Konverter) Karte mit einem ADwin-Pro II digitalisiert. Bei dem ADwin-Pro II handelt es sich um einen frei programmierbaren Echtzeitkontroller (Anhang A), der in allen Experimenten zentrale Steueraufgaben übernimmt. Die Ansteuerung und Auslesung der verschiedenen Messgeräte erfolgte über einen Messrechner mittels dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten PyMeasure (Anhang A).

## 3.4. Quantenpunkt Charakterisierung

In diesem Abschnitt soll erläutert werden, wie der Quantenpunkt für die in dieser Arbeit durchgeführten zeitaufgelösten Einzelelektronen-Tunnelmessungen eingestellt wurde. Eine ausführliche Charakterisierung der gesamten Struktur und ihrer physikalischen Parameter findet sich in der Masterarbeit von J. C. Bayer [94].



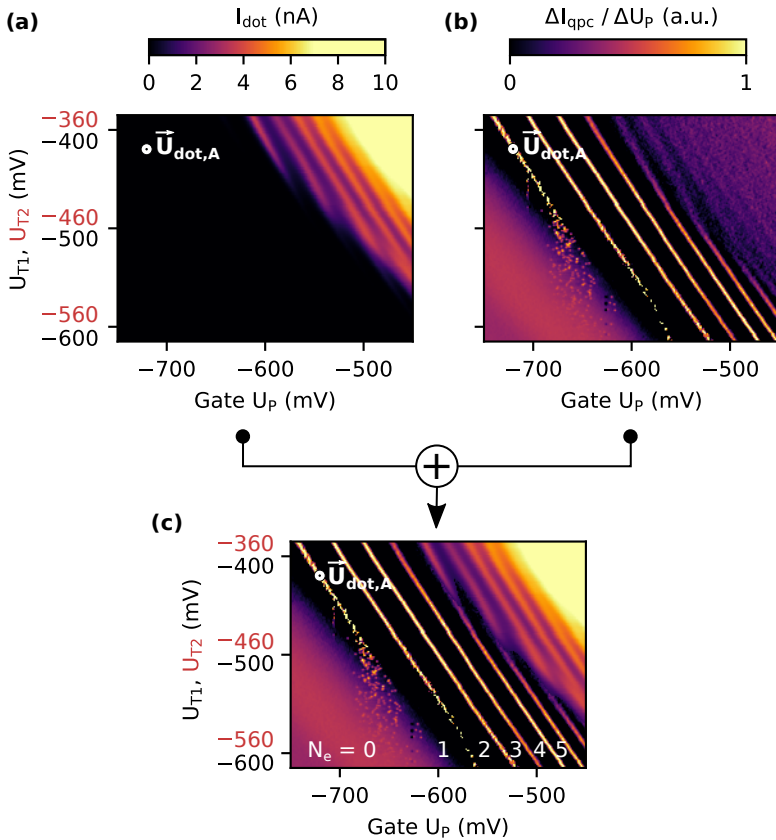


**Abbildung 3.5.:** Quantenpunktstrom  $I_{\text{dot}}$  (grün) und QPC Detektorstrom  $I_{\text{qpc}}$  (blau) in Abhängigkeit des Plungergates  $U_p$ . Für jeden Coulomb-Peak registriert der Detektor die Ladungsänderung am Quantenpunkt. Die angelegten Biasspannungen betragen  $U_{\text{s,d,dot}} = 125 \mu\text{V}$  und  $U_{\text{s,d,qpc}} = 1 \text{mV}$ .

Durch Anlegen negativer Spannungen an die Gates wird das darunterliegende 2DEG verdrängt und die Probe in diesem Bereich elektrisch isolierend. Zunächst wird so der Strompfad  $I_{\text{dot}}$  des Quantenpunktes galvanisch vom Strompfad  $I_{\text{qpc}}$  des QPCs getrennt, indem an die beiden mittleren Gates hinreichend negative Spannungen  $U_{B1}$  und  $U_{B2}$  angelegt werden. Die kleine sichtbare Lücke wird dabei elektrostatisch geschlossen und dient der Vergrößerung der kapazitiven Kopplung beider Pfade. Anschließend wird der Quantenpunkt durch Anlegen von Spannungen  $U_p$  am Plungergate und  $U_{T1}$ ,  $U_{T2}$  den beiden Tunnelgates geformt. Diese drei Gatespannungen sind meistens miteinander gekoppelt und werden daher in  $\vec{U}_{\text{dot}} = (U_{T1}, U_p, U_{T2})$  zusammengefasst. Über die zwischen den Tunnelgates  $U_{T1}$ ,  $U_{T2}$  und Mittelgates  $U_{B1}$ ,  $U_{B2}$  geformten Tunnelbarrieren koppelt der Quantenpunkt an die Elektronenreservoirs der Drain- und Source-Seite. Zum Schluss wird der QPC Ladungsdetektor über die Spannung  $U_{\text{qpc}}$  geformt.

Um einen Strom  $I_{\text{dot}}$  durch den Quantenpunkt zu treiben, wird zunächst eine kleine Biasspannung  $U_{\text{s,d,dot}} \approx 100 \mu\text{V}$  angelegt. Die Gate-Spannungen  $U_{\text{T}_1}$ ,  $U_{\text{T}_2}$  und  $U_{\text{P}}$  werden dann so eingestellt, dass der Strom  $I_{\text{dot}}$  durch den Quantenpunkt die für das Einzelelektronen-Tunneln charakteristischen Coulomb-Blockade Oszillationen zeigt. Anschließend wird eine Biasspannung  $U_{\text{s,d,qpc}} \approx 1 \text{ mV}$  an den QPC angelegt und der Strom  $I_{\text{qpc}}$  mittels der Gatespannung  $U_{\text{qpc}}$  auf eine steile Flanke gestellt, damit er möglichst sensitiv auf Ladungsänderungen am Quantenpunkt reagiert. Abb. 3.5 zeigt beispielhaft die beiden Ströme  $I_{\text{dot}}$  und  $I_{\text{qpc}}$  in Abhängigkeit der Spannung  $U_{\text{P}}$  am Plungergate. Bis etwa  $U_{\text{P}} = -300 \text{ mV}$  zeigt der Strom  $I_{\text{dot}}$  regelmäßige Coulomb-Peaks, immer wenn ein Ladungszustand des Quantenpunktes energetisch im Transportfenster liegt und die Elektronen von Source über den Dot nach Drain tunneln können. Parallel zu den Coulomb-Peaks zeigt der QPC Strom  $I_{\text{qpc}}$  Sprünge, da sich die Ladung auf dem Quantenpunkt um jeweils ein Elektron reduziert und so das Potential am QPC sprunghaft etwas positiver wird. Diese Sprünge sind nicht ganz scharf, da  $I_{\text{qpc}}$  die mittlere Besetzung des Quantenpunktes registriert, die der Verbreiterung der Coulomb-Peaks folgt. Da mit negativer werdender Spannung  $U_{\text{P}}$  die Tunnelbarrieren ebenfalls immer weiter schließen, wird der Tunnelstrom  $I_{\text{dot}}$  schließlich zu klein, um noch aufgelöst werden zu können. Unabhängig davon registriert aber der QPC Detektorstrom  $I_{\text{qpc}}$  weiterhin jede Ladungsänderung des Quantenpunktes und ermöglicht so die Charakterisierung in einem deutlich erweiterten Ladungsbereich.

In Abb. 3.6 ist ein Stabilitätsdiagramm des Quantenpunktes dargestellt in Abhängigkeit des Plungergates  $U_{\text{P}}$  und der beiden Tunnelgates  $U_{\text{T}_1}$ ,  $U_{\text{T}_2}$  im Bereich kleiner Besetzungszahlen  $N_e$ . Die beiden Tunnelgates haben eine konstante Spannungsdifferenz, um ihren etwas asymmetrischen Einfluss auszugleichen. Die Abb. 3.6a zeigt den Quantenpunktstrom  $I_{\text{dot}}$ , Abb. 3.6b das normierte differentielle Detektorsignal  $\Delta I_{\text{qpc}}/\Delta U_{\text{P}}$  und in Abb. 3.6c wurden beide Signale nochmal zur Verdeutlichung überein-

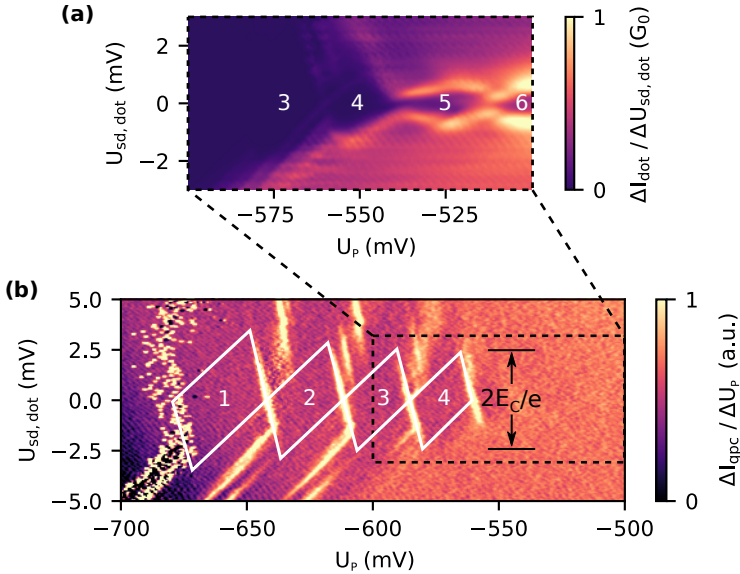


**Abbildung 3.6.:** Stabilitätsdiagramm des Quantenpunktes im Bereich kleiner Besetzungszahlen  $N_e$ : **(a)** Quantenpunktstrom  $I_{\text{dot}}$ , **(b)** differentielles Detektorsignal  $\Delta I_{\text{qpc}} / \Delta U_P$ , **(c)** Strom- und Detektorsignal übereinandergelegt. Für die zeitaufgelösten Detektormessungen wurde der Arbeitspunkt  $\bar{U}_{\text{dot},A}$  auf die Ladelinie des ersten Elektrons gesetzt. Die konstant gehaltenen Spannungswerte betragen  $U_{s,d,\text{dot}} = 100 \mu\text{V}$ ,  $U_{s,d,\text{qpc}} = 0,5 \text{ mV}$ ,  $U_{\text{qpc}} = -1,45 \text{ V}$  und  $U_{B1} = U_{B2} = -420 \text{ mV}$ .

ander gelegt. Jede sichtbare Ladungslinie entspricht einer Resonanz des Quantenpunktes mit den Zuleitungen. Die Steigung der Ladelinien zeigt, dass die kapazitive Kopplung des Plungergates in etwa doppelt so groß ist wie der Einfluss der beiden Tunnelgates zusammen. An den ersten beiden Ladelinien kann man gut erkennen, dass die Barrieren zu negativeren Spannungen an den Tunnelgates schließen. Oben sind die Tunnelbarrieren noch offen und die Ladelinien deutlich zu erkennen. Nach unten verschwinden die Linien, da die Tunnelbarrieren vollständig schließen und die Elektronen am Quantenpunkt nun nicht mehr nach Source oder Drain entladen werden können. Im Übergangsbereich sind die Ladelinien verrauscht, da dort die Tunnelraten von der Größenordnung der Integrationszeit des Detektorstroms  $I_{qpc}$  sind und die Tunnelereignisse entsprechend statistisch verteilt stattfinden. Daran erkennt man bereits, dass entlang der Ladelinie die Tunnelraten kontrolliert werden können, was im folgenden für den Arbeitspunkt  $\vec{U}_{dot,A}$  der zeitaufgelösten Messungen ausgenutzt wird. Die Kontrolle der Tunnelraten erlaubt es außerdem, den Quantenpunkt vollständig zu entleeren und ermöglicht so eine exakte Bestimmung der Besetzungszahlen  $N_e$  des Quantenpunktes.

Ferner wurden in diesem Bereich Messungen in Abhängigkeit der Biasspannung  $U_{sd,dot}$  gemacht. Abb. 3.7a zeigt den differentiellen Leitwert  $G_{dot} = \Delta I_{dot} / \Delta U_{sd,dot}$  des Quantenpunktes und Abb. 3.7b das zugehörige differentielle Detektorsignal  $\Delta I_{qpc} / \Delta U_P$ . In beiden Signalen können die charakteristischen Coulomb-Diamanten identifiziert werden. Die besonders im Detektor parallel zu den Seiten der Coulomb-Diamanten ausgeprägten Linien sind verschiedenen angeregten Zuständen des Quantenpunktes zuzuordnen.

An Hand der Höhe der Coulomb-Diamanten lassen sich die Ladeenergie  $E_C$  des Quantenpunktes ablesen. Im Detektor sind nicht alle Begrenzungen der Coulomb-Diamanten vollständig sichtbar. Für die Resonanzen mit den nächst höheren  $N_e, N_e + 1$  oder niedrigeren Zuständen  $N_e - 1, N_e$  sind die Tunnelraten meist sehr asymmetrisch, was eine De-



**Abbildung 3.7.:** Coulomb Diamanten zur Bestimmung der Ladeenergie  $E_C$ : (a) Differentielle Quantenpunkt-Leitfähigkeit  $G_{\text{dot}} = \Delta I_{\text{dot}} / \Delta U_{\text{s,d,dot}}$ , (b) differenzielles Detektorsignal  $\Delta I_{\text{qpc}} / \Delta U_p$ . Die konstanten Spannungswerte betragen  $U_{\text{s,d,qpc}} = 0,5 \text{ mV}$ ,  $U_{\text{qpc}} = -1,40 \text{ V}$ ,  $U_{\text{T1}} = -490 \text{ mV}$ ,  $U_{\text{T2}} = -450 \text{ mV}$  und  $U_{\text{B1}} = U_{\text{B2}} = -420 \text{ mV}$ .

tektion der Ladungsänderung am Quantenpunkt erschwert [98, 99]. Dadurch ist die Bestimmung der Ladeenergien  $E_C$  nicht immer eindeutig, beträgt aber für den ersten Ladungszustand  $N = 1$  mindestens  $E_C = 2,5 \text{ meV}$ . Für die zeitaufgelösten Einzelelektronen-Tunnelmessungen ist daher eine Temperatur von  $1.5 \text{ K}$  ausreichend wodurch beliebig lange und temperaturstabile Messungen möglich sind.



# 4

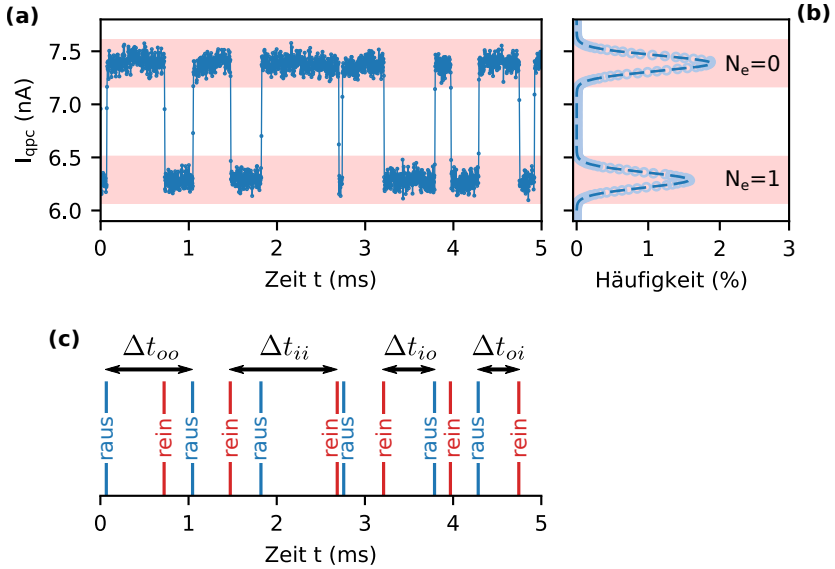
## Elektronen-Zählen

In diesem Kapitel geht es um die Behandlung der Tunnelstatistik eines Quantenpunktes bei zeitlich unveränderten Tunnelraten. Den Anfang macht die experimentelle Detektion der zeitaufgelösten Einzelelektronen-Tunnelereignissen. Anschließend folgt die detaillierte Analyse der verschiedenen statistischen Größen des Zählsignals. Dabei wird zunächst die Extraktion der Tunnelraten des Quantenpunktes erläutert. Es folgt die genaue Untersuchung der zeitlichen Fluktuationen anhand der Zählstatik. Danach werden die Verteilungen der Besetzungs- und Rückkehrzeiten des Quantenpunktes betrachtet. Den Abschluss des Kapitels macht eine Diskussion über den Einfluss der Zeitauflösung des Detektors auf die statistischen Größen.

### 4.1. Einzelelektronen-Detektion

Grundvoraussetzung für die Einzelelektronen-Detektion ist es, dass die Zeitspanne zwischen zwei Tunnelereignissen größer ist als die Zeitauflösung des Detektors. Andernfalls lassen sich die Tunnelereignisse nicht einzeln registrieren. Die Tunnelraten sollten aber auch nicht zu gering sein, damit für die statistische Auswertung in einer praktikablen Messzeit genügend Tunnelereignisse stattfinden. Als Arbeitspunkt  $\bar{U}_{\text{dot},A}$  wurde daher in allen Messungen eine Position auf der ersten Ladelinie ausgewählt und zwar etwas oberhalb des verrauschten Bereiches in Abb. 3.6.

Dort tastet der AdwinPro II das Detektorsignal mit einer Samplingrate



**Abbildung 4.1:** (a) Der zeitaufgelöste Detektorstrom  $I_{\text{qpc}}$  zeigt das sequenzielle Tunneln einzelner Elektronen durch den Quantenpunkt. (b) Anhand vom Histogramm des Detektorstroms werden die rot hinterlegten Intervalle zur Bestimmung der beiden Ladungszustände  $N_e = 0$  und  $N_e = 1$  bestimmt. (c) Aus der zeitlich Abfolge der detektierten Tunnelereignisse lassen sich die Besetzungszeiten  $\Delta t_{io}$  (rein-raus),  $\Delta t_{oi}$  (raus-rein) und die Rückkehrzeiten  $\Delta t_{ii}$  (rein-rein),  $\Delta t_{oo}$  (raus-raus) extrahieren.

von 400 kHz ab und überträgt es an den Messrechner. Ein kurzer Ausschnitt eines zeitaufgelösten Detektorsignals ist in Abb. 4.1a abgebildet. Das Detektorsignal springt wiederholt zwischen zwei verschiedenen Zuständen hin und her, was unmittelbar auf das sequenzielle Tunnel einzelner Elektronen durch den Quantenpunkt zurückzuführen ist. Immer wenn ein Elektron in den Quantenpunkt hinein tunnelt, wird das Potential am QPC negativer und der Strom  $I_{\text{qpc}}$  wird sprunghaft kleiner. Sobald das Elektron wieder hinaus tunnelt, steigt der Strom  $I_{\text{qpc}}$  wieder sprunghaft an, da der QPC sich etwas weiter öffnet. Die Aufzeichnung



und anschließende statistische Auswertung der Tunnelereignisse ist die Grundlage aller in dieser Arbeit durchgeführten Experimente.

Für die statistische Auswertung muss zunächst der Zeitpunkt jedes einzelnen Tunnelereignisses bestimmt werden. Dazu müssen die Stromwerte eindeutig dem Ladungszustand  $N_e = 0$  oder dem Ladungszustand  $N_e = 1$  des Quantenpunktes zugeordnet werden. Die beiden Zustände sind nicht ideal, sondern von dem Detektorrauschen überlagert. Solange keine weiteren intrinsischen oder extrinsischen Rauschquellen existieren, ist die Rauschbande durch das Eigenrauschen des Stromverstärkers dominiert [96, 100]. Dies ist der Grund für die im Messaufbau (Kapitel 3.3) verwendete Kombination aus Niederkapazitätsleitung und Stromverstärker mit geringem Eigenrauschen. Solange die Rauschbanden der beiden Ladungszustände wie hier deutlich voneinander getrennt sind, ist eine sichere Detektion der Tunnelereignisse gewährleistet. In diesem Falle wäre sogar eine Erhöhung der Bandbreite des Detektors denkbar, diese ist allerdings am Limit des verwendeten Stromverstärkers.

Das Histogramm der Stromwerte in Abb. 4.1b zeigt zwei deutlich voneinander getrennte Peaks. Über die beiden Peaks können zwei Intervalle definiert werden. Mithilfe dieser Intervalle lassen sich die Stromwerte dem jeweiligen Besetzungszustand zuordnen. Dazu werden die beiden Peaks durch eine doppelte Normalverteilung [96]

$$\rho(I_{qpc}) = a_0 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{I_{qpc} - \langle I_{qpc,0} \rangle}{\sigma} \right)^2} + a_1 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{I_{qpc} - \langle I_{qpc,1} \rangle}{\sigma} \right)^2} \quad (4.1)$$

beschrieben, die als gestrichelte Linien in Abb. 4.1b eingezeichnet sind. Dabei sind  $\langle I_{qpc,0} \rangle$  und  $\langle I_{qpc,1} \rangle$  die Mittelwerte und  $\sigma$  die Standardabweichung der beiden Peaks. Unterschiede in den Höhen  $a_0$  und  $a_1$  der Peaks zeigen die Asymmetrie der Tunnelraten an. Für den gegebenen Fall sind die Höhen und somit auch die Tunnelraten sehr ähnlich. Anhand der

Normalverteilungen lassen sich für die beiden Ladungszustände

$$N_e = 0 : \langle I_{qpc,0} \rangle \pm 3\sigma \quad N_e = 1 : \langle I_{qpc,1} \rangle \pm 3\sigma, \quad (4.2)$$

zwei Stromintervalle definieren. Da die Peaks sehr deutlich voneinander getrennt sind, wird hier die dreifache Standardabweichung  $\sigma$  als Intervallbreite gewählt. Die beiden Intervalle sind als hellrote Balken in Abb. 4.1a eingezeichnet. Alle Stromwerte, die nun innerhalb des oberen Stromintervalls liegen, gehören zum unbesetzten Zustand  $N_e = 0$  und alle Stromwerte im unteren Stromintervall gehören zum besetzten Zustand  $N_e = 1$ . Stromwerten, die hingegen nicht innerhalb einer der beiden definierten Intervalle liegen, werden dem letzten definierten Ladungszustand zugeordnet. Erst wenn ein Datenpunkt eindeutig in einem anderen Intervall liegt, wird eine Zustandsänderung und damit ein Tunnelereignis registriert. Die Detektion der einzelnen Tunnelereignisse wurde immer direkt in Echtzeit mithilfe des AdwinPro II durchgeführt. Um Veränderungen des Detektorsignals über lange Zeiten durch beispielsweise thermische Fluktuation oder zufällige Umladungseffekte zu berücksichtigen und so Fehler in der Digitalisierung bestmöglich zu vermeiden, werden die Histogramme und Intervalle sekundlich neu berechnet. Ansonsten fand für die statistische Auswertung keinerlei Filterung oder Bearbeitung des Detektorsignals statt.

Die Abb. 4.1c zeigt die auf diese Weise detektierten Tunnelereignisse des abgebildeten Signals. Aus der Abfolge der Tunnelereignisse können als erstes die vier eingezeichneten Zeitintervalle ermittelt werden. Einmal zwischen den direkt aufeinander folgenden Tunnelereignissen die Besetzungszeiten  $\Delta t_{i0}$  (rein-raus) und  $\Delta t_{0i}$  (raus-rein). Des Weiteren können die beiden Rückkehrzeiten  $\Delta t_{ii}$  (rein-rein) und  $\Delta t_{oo}$  (raus-raus) zwischen gleichartigen Tunnelereignissen ermittelt werden.

## 4.2. Tunnelraten

Ganz allgemein gültig können die Reintunnelrate und die Raustunnelrate [19, 70]

$$\Gamma_{\text{in}} = \frac{1}{\langle \Delta t_{\text{oi}} \rangle}, \quad \Gamma_{\text{out}} = \frac{1}{\langle \Delta t_{\text{io}} \rangle} \quad (4.3)$$

aus den mittleren Besetzungszeiten  $\langle \Delta t_{\text{oi}} \rangle$  und  $\langle \Delta t_{\text{io}} \rangle$  bestimmt werden. Ebenso kann die effektive Tunnelrate

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma_{\text{in}} \Gamma_{\text{out}}}{\Gamma_{\text{in}} + \Gamma_{\text{out}}} = \frac{1}{\langle \Delta t_{\text{oi}} \rangle + \langle \Delta t_{\text{io}} \rangle} \quad (4.4)$$

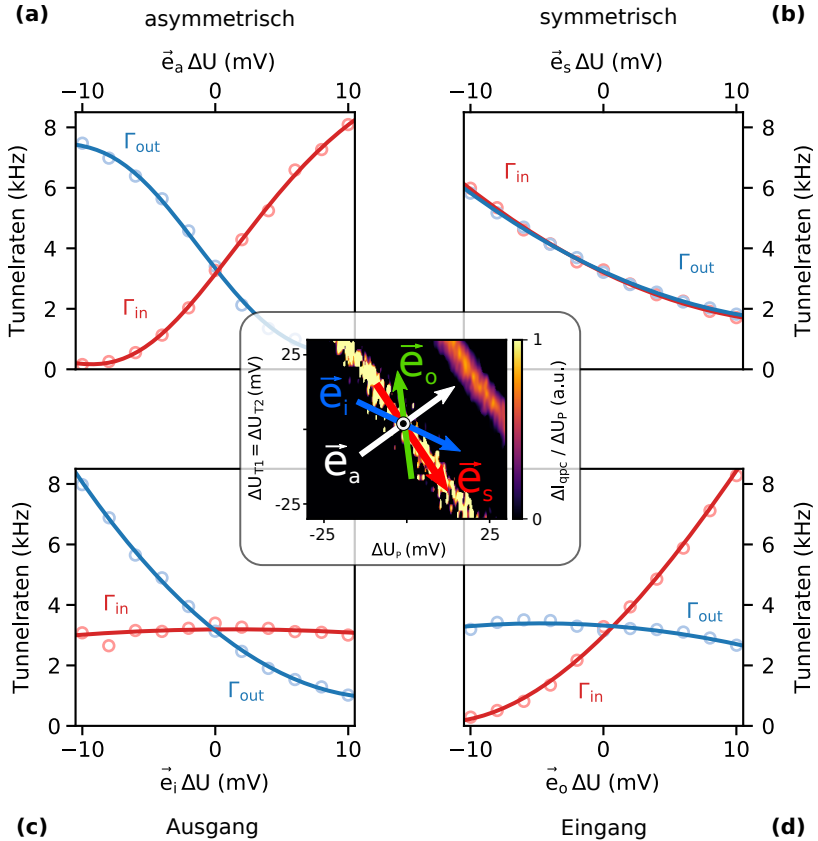
ermittelt werden.

Die kontrollierte Steuerung der Tunnelraten ist Ausgangspunkt aller durchgeführten Experimente. Durch Variation der Gatespannungen um den Arbeitspunkt  $\vec{U}_{\text{dot},\Lambda}$

$$\vec{U}_{\text{dot}} = \vec{U}_{\text{dot},\Lambda} + \vec{e} \Delta U \quad (4.5)$$

lassen sich die Tunnelraten systematisch kontrollieren. Dabei beschreibt der Einheitsvektor  $\vec{e}$  die Variationsrichtung und  $\Delta U$  die Amplitude. Das Inset in Abb. 4.2 zeigt das Stabilitätsdiagramm in einem kleinen Bereich um den Arbeitspunkt  $\vec{U}_{\text{dot},\Lambda}$ . Näher betrachtet werden soll die Abhängigkeit der Tunnelraten für die darin eingezeichneten vier Richtungen  $\vec{e}_a$ ,  $\vec{e}_s$ ,  $\vec{e}_i$  und  $\vec{e}_o$ . Für diese vier Richtungen sind in Abb. 4.2a-d jeweils die beiden Tunnelraten  $\Gamma_{\text{in}}$  und  $\Gamma_{\text{out}}$  in Abhängigkeit der Amplitude gezeigt. Daraus wird deutlich, dass das charakteristische Verhalten der Tunnelraten entscheidend von der Variationsrichtung  $\vec{e}$  abhängt.

Für die Richtung  $\vec{e}_a$  vertikal zur Ladelinie weisen die Tunnelraten ein asymmetrisches Verhalten auf (Abb. 4.2a). Entlang dieser Richtung bestimmt die energetische Verschiebung des Ladungszustandes die Kopplung an die beiden Zuleitungen. Weit oberhalb des Fermi-niveaus  $\mu_F$  existieren kaum besetzte Zustände in den beiden Zuleitungen, deshalb muss



**Abbildung 4.2.:** Verhalten der Tunnelraten  $\Gamma_{in}$  und  $\Gamma_{out}$  um den Arbeitspunkt für die im Inset gezeigten vier Richtungen. **(a)** Vertikal zur Ladelinie  $\vec{e}_a$  verhalten sich beide Tunnelraten asymmetrisch. **(b)** Parallel zur Ladelinie  $\vec{e}_s$  werden sie symmetrisch beeinflusst. **(c, d)** In den Richtungen dazwischen  $\vec{e}_i$  und  $\vec{e}_o$  wird nahezu nur eine Tunnelrate beeinflusst. Für jeden Messpunkt wurde ein zweiminütiges Detektorsignal aufgezeichnet und die Tunnelraten nach Gl. 4.3 aus den mittleren Besetzungszeiten bestimmt. **(inset)** Stabilitätsdiagramm des Quantenpunktes in einem kleinen Bereich um den Arbeitspunkt.

die Reintunnelrate  $\Gamma_{\text{in}}$  klein und die Raustunnelrate  $\Gamma_{\text{out}}$  groß sein. Der Quantenpunkt ist dann die meiste Zeit unbesetzt. Genau andersherum verhält es sich für die beiden Raten weit unterhalb des Ferminiveaus  $\mu_F$  und der Quantenpunkt ist die meiste Zeit von einem Elektron besetzt. Die Tunnelraten müssen sich also beim Übergang vom unbesetzten in den besetzten Zustand kreuzen.

Anders verhält es sich in Richtung  $\vec{e}_s$  der Ladelinie (Abb. 4.2b), hier kommt es zu einer symmetrischen Beeinflussung der Tunnelraten. Entlang der Ladelinie bleibt der Ladungszustand des Quantenpunktes immer energetisch gleich zum Ferminiveau  $\mu_F$ . Die Tunnelraten werden also nur durch die Veränderung der Tunnelbarrieren beeinflusst. Bei sorgfältiger Einstellung des Arbeitspunktes kann eine gleich starke Beeinflussung beider Tunnelbarrieren erzielt werden.

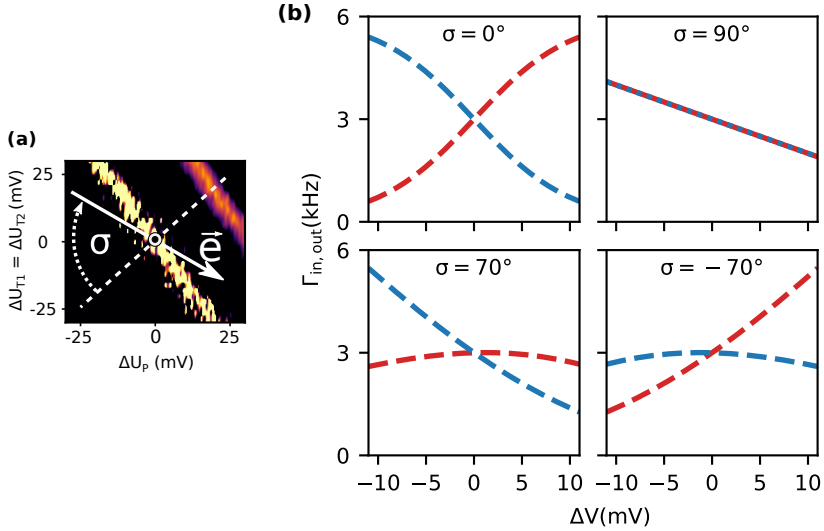
Zwischen diesen beiden entgegengesetzten Fällen kommt es immer zu einem Zusammenspiel beider Einflüsse auf die Tunnelraten. Bewegt man sich durch Rotation der Variationsrichtung vom asymmetrischen zum symmetrischen Fall, muss man eine Situation durchlaufen bei der nur eine einzige Tunnelrate beeinflusst wird. Für die beiden Richtungen  $\vec{e}_o$  und  $\vec{e}_i$  ist dieses für nicht zu großen Amplituden  $\Delta U$  nahezu gegeben (Abb. 4.2c,d).

Die vorgehende qualitative Argumentation für das richtungsabhängige Verhalten der Tunnelraten  $\Gamma_{\text{in}}$  und  $\Gamma_{\text{out}}$  soll im folgenden genauer beschrieben werden. Dazu wird wie in Abb. 4.3a dargestellt die Variationsrichtung  $\vec{e}$  über den Drehwinkel  $\sigma$  ausgedrückt. Die beiden Tunnelraten [101–104]

$$\Gamma_{\text{in}} = \tilde{\Gamma}_{\text{in}} f(\mu) \quad \Gamma_{\text{out}} = \tilde{\Gamma}_{\text{out}} (1 - f(\mu)) \quad (4.6)$$

hängen sowohl von den Tunnelkopplungen  $\tilde{\Gamma}_{\text{in}}$  und  $\tilde{\Gamma}_{\text{out}}$  ab als auch von der Fermiverteilung

$$f(\mu) = \frac{1}{e^{-\frac{\mu - \mu_F}{k_B T}} + 1}. \quad (4.7)$$



**Abbildung 4.3.:** (a) Die Variationsrichtung kann über den Drehwinkel  $\sigma$  ausgedrückt werden. (b) Die Richtungsabhängigkeit des Tunnelraten  $\Gamma_{in}$  und  $\Gamma_{out}$  nach Gl. 4.6-4.9, mit der Steigung  $\gamma = 200 \text{ Hz V}^{-1}$  und  $\alpha = 0.2$ .

Je nach Variationsrichtung  $\vec{e}$  werden die beiden Anteile unterschiedlich stark beeinflusst. Entlang der Ladelinie  $\vec{e}_s$  bleibt der Ladungszustand in Resonanz mit dem Fermineveau  $\mu = \mu_F$  und es wird lediglich die Tunnelkopplung  $\tilde{\Gamma}$  geändert. Geht man von einem linearen Gateeinfluss aus, ergibt sich in Abhängigkeit von Amplitude  $\Delta U$  und Drehwinkel  $\sigma$

$$\tilde{\Gamma}_{in,out}(\Delta U, \sigma) = \tilde{\Gamma}_A - \gamma \Delta U \sin(\sigma). \quad (4.8)$$

Dabei beschreibt  $\tilde{\Gamma}_A$  die Tunnelkopplung am Arbeitspunkt und  $\gamma$  ist die Steigung. Senkrecht  $\vec{e}_a$  zur Ladelinie wird einfachheitshalber angenommen, dass die Tunnelkopplung  $\tilde{\Gamma}$  konstant bleibt und nur der Ladungszustand verschiebt

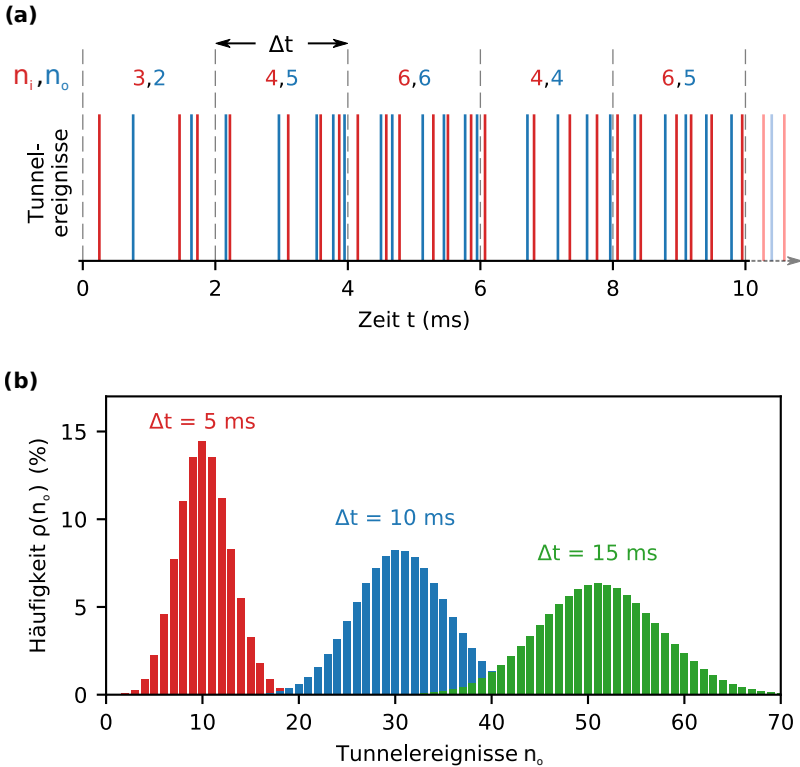
$$\mu(\alpha, \Delta U) = \mu_F + \alpha \Delta U \cos(\sigma). \quad (4.9)$$

Hier ist  $\alpha$  der Hebelfaktor der gekoppelten Gates.

Die Kombination der Gl. 4.6-4.9 gibt die experimentell gefundene Richtungsabhängigkeit der Tunnelraten  $\Gamma_{\text{in}}$  und  $\Gamma_{\text{out}}$  bereits gut wieder. Abb. 4.3b zeigt die theoretischen Tunnelraten für vier verschiedene Rotationswinkel  $\sigma$ , entsprechend den vier experimentellen Variationsrichtungen  $\vec{e}_\alpha$ ,  $\vec{e}_s$ ,  $\vec{e}_o$  und  $\vec{e}_i$  in Abb. 4.2. Die verwendete Steigung  $\gamma = 200 \text{ Hz V}^{-1}$  entspricht etwa Abb. 4.2b und der Hebelfaktor  $\alpha = 0.2$  stimmt gut mit den Charakterisierungsmessungen von J. C. Bayer [94] überein.

### 4.3. Zählstatistik

In dieser Arbeit ist die Auswertung der Zählstatistik das wichtigste Verfahren zur Charakterisierung der Tunnelprozesse. Die Abb. 4.4a zeigt einen längeren Ausschnitt aus der zeitlichen Abfolge der detektierten Tunnelereignisse. Zur Bestimmung der Zählstatistik werden diese zunächst in Zählfenster konstanter Länge  $\Delta t$  zerlegt. Um eine Verwechslung mit anderen Zeitintervallen zu vermeiden, wird  $\Delta t$  im folgenden immer als Integrationszeit bezeichnet. In jedem einzelnen Zählfenster wird die Anzahl  $n_i$  der Reintunnelereignisse und entsprechend die Anzahl  $n_o$  der Raustunnelereignisse bestimmt. Für die untersuchten sequenziellen Einzelelektronen-Tunnelprozesse können sich  $n_i$  und  $n_o$  maximal um ein Ereignis unterscheiden. Aus der Auszählung aller Fenster lassen sich schließlich die drei verschiedene Zählverteilungen  $\rho(n_i)$ ,  $\rho(n_o)$  oder  $\rho(n_i + n_o)$  ermitteln. Diese Verteilungen beschreiben dabei die Fluktuationen der Tunnelereignisse auf der Zeitskala der Integrationszeit  $\Delta t$ . Um die vollständige Zählstatistik zu erhalten, müssen die Verteilungen auf allen relevanten Zeitskalen ermittelt werden. In Abb. 4.4a sind beispielhaft die Zählverteilungen  $\rho(n_o)$  der Raustunnelereignisse für die drei Integrationszeiten  $\Delta t = 5 \text{ ms}$ ,  $\Delta t = 10 \text{ ms}$  und  $\Delta t = 15 \text{ ms}$  dargestellt. Es ist zu erkennen, dass mit zunehmender Integrationszeit  $\Delta t$



**Abbildung 4.4.:** (a) Zur Bestimmung der Zählstatistik wird die sequenzielle Abfolge der detektierten Tunnelereignisse in Zählfenster konstanter Integrationszeit  $\Delta t$  zerlegt. In jedem Fenster wird die Anzahl  $n_i$  der Reintunnelereignisse und die Anzahl  $n_o$  der Raustunnelereignisse bestimmt. Die Tunnelraten waren  $\Gamma_{in} = 2,4$  kHz und  $\Gamma_{out} = 14,3$  kHz. (b) Zählverteilungen  $\rho(n_o)$  der Tunnelereignisse für die drei verschieden lange Integrationszeiten  $\Delta t = 5$  ms,  $\Delta t = 10$  ms und  $\Delta t = 15$  ms. Die Verteilungen beschreiben die statistischen Fluktuation des Tunnelprozesses auf der Zeitskala der Integrationszeit  $\Delta t$ .



der Erwartungswert  $\langle n_o \rangle$  entsprechend größer wird, während gleichzeitig die Varianz  $\sigma^2$  der Verteilung zunimmt.

Die zeitliche Entwicklung der Zählstatistik lässt sich am anschaulichsten anhand der zentralen statistischen Momente

$$M_k^z = \langle (\langle n \rangle - n)^k \rangle = \langle (\mu - n)^k \rangle \quad (4.10)$$

quantifizieren, welche die Verteilung um den Erwartungswert  $\mu = \langle n \rangle$  charakterisieren. Das erste zentrale Moment ist per Definition immer Null. Dem zweiten, dritten und vierten zentralen Moment kann dabei eine geometrische Bedeutung

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = M_k^z = \langle (\mu - n)^2 \rangle \quad (4.11)$$

$$\text{Schiefe: } \nu = M_k^z = \langle (\mu - n)^3 \rangle \quad (4.12)$$

$$\text{Wölbung: } \omega = M_k^z = \langle (\mu - n)^4 \rangle \quad (4.13)$$

zugeordnet werden.

## 4.4. Kumulanten

Statt der zentralen Momente  $M_k^z$  werden allerdings üblicherweise die Kumulanten  $C_k$  angegeben, die sich als Kombinationen der zentralen Momente  $M_k^z$  ausdrücken lassen [105]

$$C_1 = \mu, \quad C_k = M_k^z - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k-1}{j} C_{k-j} M_j^z. \quad (4.14)$$

In dieser Arbeit werden maximal die ersten vier Kumulanten untersucht

$$C_1 = \mu, \quad C_2 = \sigma^2, \quad C_3 = \nu, \quad C_4 = \omega - 3\sigma^4. \quad (4.15)$$

Ein wichtiger Vorteil der Kumulanten  $C_k$  liegt darin, dass sie für die

beiden wichtigsten statistischen Prozesse (Poisson- und Gauß-Prozess) sehr charakteristische Werte annehmen und sich so entsprechende Abweichung der experimentellen Verteilungen unmittelbar darstellen lassen. Für einen Poisson-Prozess sind alle Kumulanten [106]

$$\text{Poisson-Prozess: } C_1 = C_2 = C_3 = C_4 \dots = \mu \quad (4.16)$$

identisch zum Erwartungswert  $\mu$  und beim Gauß-Prozess sind bis auf die ersten beiden Kumulanten [106]

$$\text{Gauß-Prozess: } C_1 = \mu, C_2 = \sigma^2, C_3 = C_4 = \dots = 0 \quad (4.17)$$

alle Kumulanten Null. Die normierten Kumulanten  $C_k/C_1$  geben somit unmittelbar die Abweichung von einem strikten Poisson-Prozess an. Die zweite normierte Kumulante

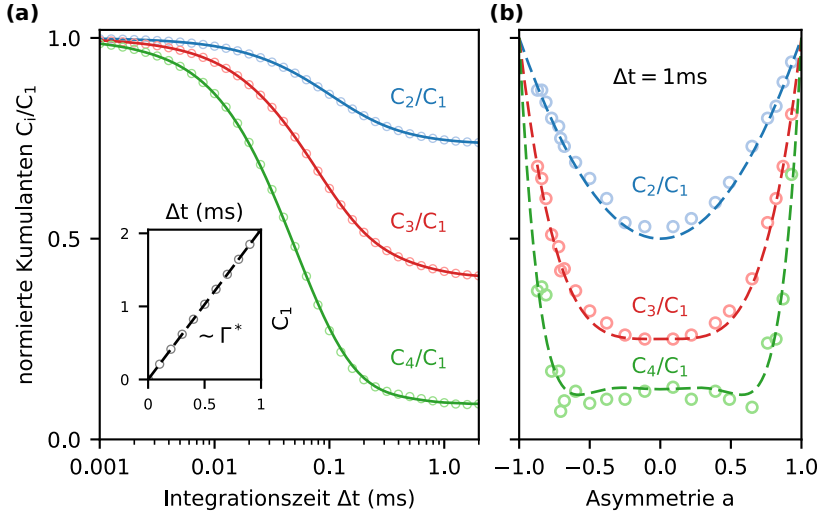
$$F_2 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\sigma^2}{\langle n \rangle}. \quad (4.18)$$

entspricht dabei dem Fanofaktor aus Gl. 2.17. Er charakterisiert die Unterdrückung des Schrotrauschens gegenüber dem Poisson-Prozess.

Abb. 4.5a zeigt die experimentell ermittelten normierten Kummulanten  $C_k/C_1$  für die Verteilungen der Raustunnelereignisse  $\rho(n_o)$  als Funktion der Integrationszeit  $\Delta t$ . Im Inset sieht man zusätzlich, dass die erste Kumulante

$$C_1 = \Gamma^* \Delta t \quad (4.19)$$

linear ansteigt mit der effektiven Tunnelrate  $\Gamma^*$  nach Gl. 4.4. Die normierten Kumulanten  $C_k/C_1$  sind kleiner Eins für größere Integrationszeiten, da auf Grund der Coulomb-Blockade keine zwei Elektronen den Quantenpunkt gleichzeitig besetzen dürfen und es so zu einem *Antibunching* der Tunnelereignisse kommt. Es ist zu erkennen, dass die drei Kurven der normierten Kumulanten  $C_k/C_1$  auf der Zeitskala der Korrelationszeit



**Abbildung 4.5.:** (a) Die normierten Kumulanten  $C_k/C_1$  für die Zählstatistik  $\rho(n_o)$  der Raustunnelereignisse als Funktion der Integrationszeit  $\Delta t$ . Für lange Integrationszeiten  $\Delta t$  sättigen die normierten Kumulanten. Die im Inset gezeigte erste Kumulante  $C_1$  wächst linear an. Die Steigung entspricht der effektiven Tunnelrate  $\Gamma^* = \Gamma_{\text{in}}\Gamma_{\text{out}}/(\Gamma_{\text{in}} + \Gamma_{\text{out}})$ , gegeben durch  $\Gamma_{\text{in}} = 2,4 \text{ kHz}$  und  $\Gamma_{\text{out}} = 14,3 \text{ kHz}$ . (b) Der Sättigungswert hängt dabei von der Asymmetrie  $\alpha = (\Gamma_{\text{in}} - \Gamma_{\text{out}})/(\Gamma_{\text{in}} + \Gamma_{\text{out}})$  der beiden Tunnelraten  $\Gamma_{\text{in}}$  und  $\Gamma_{\text{out}}$  ab. Die experimentell ermittelten Sättigungswerte bei  $\Delta t = 1 \text{ ms}$  stimmen gut überein mit den nach Gl. 4.20 - 4.22 erwarteten Abhängigkeiten (gestrichelte Linien).

$\tau_c = \Gamma_{\text{in}}^{-1} + \Gamma_{\text{out}}^{-1}$  von Eins monoton auf einen konstanten Wert abfallen. Der Übergang charakterisiert das *finite-frequency* Rauschen [90, 107, 108], höhere Kumulanten verhalten sich hier nicht mehr monoton, sondern zeigen ausgeprägte universelle Oszillation in Abhängigkeit der Systemparameter [80, 109].

Der Sättigungswert der normierten Kumulanten  $C_k/C_1$  ist das *zero-frequency* Limit und hängt lediglich von der Asymmetrie  $\alpha = (\Gamma_{\text{in}} - \Gamma_{\text{out}})/(\Gamma_{\text{in}} + \Gamma_{\text{out}})$  der beiden Tunnelraten ab. Die ersten

normierten Kumulanten  $C_k/C_1$  lauten [18, 19, 79]:

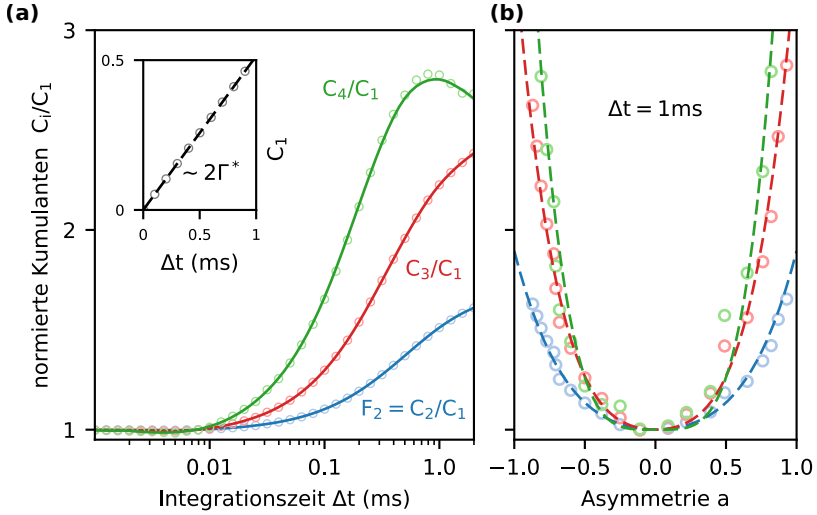
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2}(1 + a^2) \quad (4.20)$$

$$\frac{C_3}{C_1} = \frac{1}{4}(1 + 3a^4) \quad (4.21)$$

$$\frac{C_4}{C_1} = \frac{1}{8}(1 + a^2 - 9a^4 + 15a^6) \quad (4.22)$$

In Abb. 4.5b wird die theoretische Abhängigkeit mit einigen experimentell ermittelten Sättigungswerten verglichen. Die Asymmetrie  $a$  wurde dabei durch Variation des Arbeitspunktes (Abb. 4.2) verändert. Im Falle symmetrischer Tunnelraten ( $a = 0$ ) werden die Fluktuationen am stärksten unterdrückt und der Fanofaktor ist in dem Falle minimal mit  $F_2 = 0.5$ . Mit zunehmender Asymmetry geht der Fanofaktor gegen  $F_2 = 1$ . Im Falle, dass weitere Zustände zum Transport beitragen, kann der Fanofaktor allerdings auch größer Eins werden [101, 110–112].

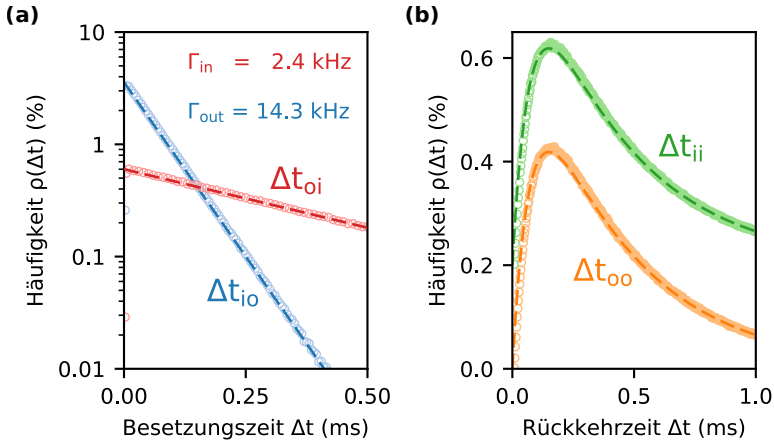
Wird bei der Auswertung nicht explizit zwischen den Rein- und den Raustunnelereignissen unterschieden, kommt es für die Zählstatistik  $\rho(n_i + n_o)$  sämtlicher Tunnelereignisse ('rein' und 'raus') zu anderen Abhängigkeiten. Mit steigender Asymmetrie  $a$  der Tunnelraten kommt es dann zunehmend zu einem *Bunching* der Tunnelereignisse, da dann wahrscheinlicher auf ein Raustunnelereignis unmittelbar ein Reintunnelereignis folgt oder anders herum. Die experimentell ermittelten normierten Kumulanten in Abb. 4.6a werden daher diesmal größer Eins mit zunehmender Integrationszeit  $\Delta t$  und es ist keine Sättigung der normierten Kumulanten zu beobachten. Besonders ist allerdings, dass für symmetrische Tunnelraten ( $a = 0$ ) die Zählstatistik einem Poisson-Prozess gleichen muss und die normierten Kumulanten  $C_k/C_1$  entsprechend Eins sind für alle Integrationszeiten  $\Delta t$ , was deutlich zu erkennen ist in Abb. 4.6b. Anhand der Gesamtstatistik  $\rho(n_i + n_o)$  können daher Korrelationen zwischen den Tunnelprozessen besonderes deutlich gemacht werden.



**Abbildung 4.6.:** (a) Die ersten normierten Kumulanten  $C_k/C_1$  für die Zählstatistik  $\rho(n_i + n_o)$  sämtlicher ('rein' + 'raus') Tunnelereignisse als Funktion der Integrationszeit  $\Delta t$ . Die im Inset gezeigte erste Kumulante  $C_1$  wächst linear an, die Steigung entspricht der doppelten effektiven Tunnelrate  $\Gamma^* = \Gamma_{in}\Gamma_{out}/(\Gamma_{in} + \Gamma_{out})$ , gegeben durch  $\Gamma_{in} = 0,28$  kHz und  $\Gamma_{out} = 3,26$  kHz (b) Wert der normierten Kumulanten bei  $\Delta t = 1$  ms. Im Falle symmetrischer Tunnelraten  $a = 1$  unterscheidet sich die Statistik nicht von einem Poisson-Prozess und alle normierten Kumulanten werden entsprechend Eins. Näherungsweise kann die Abhängigkeit von der Asymmetrie  $a = (\Gamma_{in} - \Gamma_{out})/(\Gamma_{in} + \Gamma_{out})$  durch quadratische Polynome beschrieben werden (gestrichelte Linien).

## 4.5. Besetzungszeiten und Rückkehrzeiten

Die Besetzungszeiten  $\Delta t_{oi}$  und  $\Delta t_{io}$  beschreiben wie lange der Quantenpunkt von einem Elektron unbesetzt bzw. besetzt ist. In Abb. 4.7a sind für ein Detektorsignal die Zählverteilungen  $\rho(\Delta t_{oi})$  (rot) und  $\rho(\Delta t_{io})$  (blau) der Besetzungszeiten aufgetragen. Die beiden Verteilungen (man beachte



**Abbildung 4.7.:** (a) Zählverteilungen  $\rho(\Delta t_{oi})$  (rot) und  $\rho(\Delta t_{io})$  (blau) der Besetzungszeiten. (b) Verteilungen  $\rho(\Delta t_{ii})$  (grün) und  $\rho(\Delta t_{oo})$  (orange) der Rückkehrzeiten. Für eine exzellente statische Genauigkeit wurde ein 60 min langes Detektorsignal mit etwa 14 500 000 Tunnelereignissen ausgewertet. Die gestrichelten Linien sind die ermittelten Fits nach Gl. 4.23-4.25 mit  $\Gamma_{in} = 2,4$  kHz und  $\Gamma_{out} = 14,3$  kHz.

die logarithmische y-Achse) zeigen einen exponentiellen Abfall [19, 111]

$$\rho(\Delta t_{oi}) = \Gamma_{in} e^{-\Gamma_{in}\Delta t_{oi}} \quad (4.23)$$

$$\rho(\Delta t_{io}) = \Gamma_{out} e^{-\Gamma_{out}\Delta t_{io}}, \quad (4.24)$$

da die Tunnelereignisse stochastisch sind. Die Exponenten entsprechen dabei der Reintunnelrate  $\Gamma_{in}$  und Raustunnelrate  $\Gamma_{out}$  des Quantenpunktes, die in diesem Beispiel deutlich asymmetrisch sind. Die gestrichelten Linien in Abb. 4.7a sind die Fits nach Gl. 4.23 und Gl. 4.24 mit  $\Gamma_{in} = 2,4$  kHz und  $\Gamma_{out} = 14,3$  kHz.

Die Häufigkeitsverteilungen  $\rho(\Delta t_{ii})$  (grün) und  $\rho(\Delta t_{oo})$  (orange) der Rückkehrzeiten sind in Abb. 4.1b gezeigt. Die Verteilungen durchlaufen ein Maximum und gehen für kurze Rückkehrzeiten gegen Null, da auf Grund der Coulomb-Blockade zwei Tunnelereignisse nicht direkt aufein-

ander folgen können (Antibunching). Die durchgezogenen Linien sind die theoretischen Verteilungen [113, 114]

$$\rho(\Delta t_{ii}) = \rho(\Delta t_{oo}) = \frac{\Gamma_{in}\Gamma_{out}}{\Gamma_{in} - \Gamma_{out}} (e^{-\Gamma_{out}\Delta t} - e^{-\Gamma_{in}\Delta t}) \quad (4.25)$$

mit den beiden zuvor bestimmten Tunnelraten  $\Gamma_{in} = 2,4$  kHz und  $\Gamma_{out} = 14,3$  kHz. Bemerkenswerterweise sind die beiden Verteilungen für die beiden Rückkehrzeiten identisch. Zur besseren Übersichtlichkeit wurde sie daher in Abb. 4.7b mit einem konstanten Offset aufgetragen. Im Falle symmetrischer Tunnelraten  $\Gamma_{in} = \Gamma_{out} = \Gamma$  vereinfacht sich die Gl. 4.25 zu  $\rho(\Delta t_{ii}) = \rho(\Delta t_{oo}) = \Gamma^2 \Delta t e^{-\Gamma \Delta t}$  [115].

In dieser Arbeit werden bewusst die Begriffe 'Besetzungszeit' (*engl. residence time*) und 'Rückkehrzeit' (*engl. return time*) verwendet, die aus dem Gebiet der Stochastischen Resonanz stammen und dort eindeutig definiert sind. In der Literatur zur Einzelelektronen-Zählstatistik ist die Nomenklatur hingegen nicht so eindeutig, wahlweise wird von 'Tunnelzeit' (*engl. tunneling time*) oder von 'Wartezeit' (*engl. waiting time*) gesprochen. 'Tunnelzeit' ist allerdings eine ungünstige Bezeichnung, da sie fälschlicherweise suggeriert, dass der Tunnelvorgang an sich eine Zeit benötigt. 'Wartezeit' wird hier nicht verwendet, da dieser Begriff sowohl in der Stochastischen Resonanz als auch in der 'Quantenoptik' anderweitig definiert ist.

## 4.6. Detektorbandbreite

Die theoretischen Ergebnisse für die Besetzungszeiten (Gl. 4.23 - 4.24), Rückkehrzeiten (Gl. 4.25) und Kumulanten (Gl. 4.20 - 4.22) sind experimentell nicht ganz richtig, da sie die endliche Bandbreite  $\Gamma_{det}$  des Detektors unberücksichtigt lassen. Im Experiment können sehr kurze Besetzungszeiten  $\Delta t \ll 1/\Gamma_{det}$  vom Detektor nicht mehr zeitlich aufgelöst werden, wodurch wiederum andere Besetzungszeiten fälschlicherweise

zu lang erfasst werden. Dieses hat zur Folge, dass die experimentellen Verteilungen in Abb. 4.7a für sehr kurze Besetzungszeiten abknicken und für lange Besetzungszeiten erhöht sind gegenüber dem idealen exponentiellen Verlauf. Die mittels Gl. 4.23 - 4.24 bestimmten Tunnelraten fallen daher immer etwas kleiner aus. Unter Berücksichtigung des Detektoreinflusses auf die Verteilungen der Besetzungszeiten [116]

$$\rho(\Delta t_{oi}) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_{\Sigma} + \Omega_{in})\Delta t_{oi}} (e^{\Omega_{in}\Delta t_{oi}} - 1) \Gamma_{det} \Gamma_{in}}{\Omega_{in}} \quad (4.26)$$

$$\rho(\Delta t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_{\Sigma} + \Omega_{out})\Delta t_{io}} (e^{\Omega_{out}\Delta t_{io}} - 1) \Gamma_{det} \Gamma_{out}}{\Omega_{out}} \quad (4.27)$$

$$\Gamma_{\Sigma} = \Gamma_{det} + \Gamma_{in} + \Gamma_{out}$$

$$\Omega_{in,out} = \sqrt{\Gamma_{\Sigma}^2 - 4\Gamma_{det}\Gamma_{in,out}}$$

erhält man die Reintunnelrate  $\Gamma_{in} = 14,5$  kHz, die Raustunnelrate  $\Gamma_{out} = 2,5$  kHz und die Detektorbandbreite  $\Gamma_{det} = 320$  kHz.

Alternativ kann die Detektorbandbreite  $\Gamma_{det}$  auch aus den Anstiegszeiten bzw. Abfallzeiten des Detektorsignals bestimmt werden [117]. In Abb. 4.1a ist zu erkennen, dass zwischen zwei Zuständen maximal ein undefinierter Datenpunktpunkt liegt. Dies passt bei der verwendeten Samplingrate von 400 kHz sehr gut zu der aus den Besetzungszeiten ermittelten Detektorbandbreite  $\Gamma_{det}$ .

Der Detektor beeinflusst ebenfalls die Kumulanten  $C_k$  der Zählstatistik, da schnelle Ladungsfluktuationen ungewollt aus der Zählstatistik rausgefiltert werden. Daher müssen die gemessenen Fluktuationen gegenüber dem Poisson-Prozess mit kleiner werdender Detektorbandbreite  $\Gamma_{det}$  zunehmend unterdrückt erscheinen. Unter Berücksichtigung der endlichen Detektorbandbreite  $\Gamma_{det}$  fällt der Sättigungswert des Fanofaktors [79]

$$F_2 = \frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2}(1 + a^2) - \frac{1}{2} \frac{1 - a^2}{(1 + b)^2} \quad (4.28)$$



daher niedriger aus. Dabei ist  $b = \Gamma_{\text{det}}/(\Gamma_{\text{in}} + \Gamma_{\text{out}})$  die relative Detektorbandbreite und  $a = (\Gamma_{\text{in}} - \Gamma_{\text{out}})/(\Gamma_{\text{in}} + \Gamma_{\text{out}})$  weiterhin die Asymmetrie der Tunnelraten. Die Abweichungen vom idealen Detektor sind bei fester Detektorbandbreite  $\Gamma_{\text{det}}$  für symmetrische Tunnelraten  $a = 0$  maximal. Entsprechendes gilt für die höheren Kumulanten [79].

In den Experimenten wurden die Tunnelraten  $\Gamma_{\text{in}}$  und  $\Gamma_{\text{out}}$  immer ein bis zwei Größenordnungen kleiner gehalten als die Detektorbandbreite  $\Gamma_{\text{det}}$ . Daher fällt der Einfluss des Detektors in der Auswertung der Zählstatistik vernachlässigbar klein aus.



# 5

## Getriebenes Tunneln

Unter dem Einfluss einer Lärmquelle ein Gespräch zu führen, gestaltet sich schwierig. Entweder muss lauter als gewöhnlich gesprochen oder eine geschützte Umgebung aufgesucht werden. Auf dieser akustischen Alltagserfahrung basierend, geht man intuitiv davon aus, dass sich die Detektion eines Signals generell verschlechtert, sobald eine Überlagerung durch Umgebungsrauschen stattfindet. Umso erstaunlicher ist es, dass unter bestimmten Bedingungen ein gewisses Rauschlevel verstärkend wirkt und ein zu schwaches Signal über die Detektionsschwelle heben kann. Dieser wenig intuitive, nichtlineare Effekt ist als Stochastische Resonanz (SR) bekannt und wurde erstmals vor über 30 Jahren in der Paläoklimatologie als möglicher Mechanismus hinter dem zyklischen Auftreten der Eiszeiten diskutiert [118, 119]. Heute findet sich die SR aufgrund ihres allgegenwärtigen, stochastischen Ursprungs in den unterschiedlichsten Forschungsbereichen (Physik, Neurowissenschaften, Soziologie, Ökonomie) [22, 120–123].

Meistens kommt die SR in bistabilen Systemen zum Tragen, in denen ein externer, oft harmonischer Antrieb einen Zustandswechsel periodisch begünstigt. Für sich genommen, ist der Antrieb zu schwach (*subthreshold*), um Übergänge zwischen den Zuständen zu erwirken. Diese können lediglich rauschinduziert stattfinden. Ist die Rauschleistung sehr klein, wird nur sehr selten ein Zustandswechsel innerhalb einer Antriebsperiode stattfinden. Für das Extremum einer sehr großen Rauschleistung hingegen ist der Antrieb vernachlässigbar und es finden pro Antriebs-

periode eine Vielzahl stochastischer Zustandsänderungen statt. Dazwischen wird folglich eine bestimmte Rauschleistung existieren, bei der die Zustandsänderungen optimal mit dem externen Antrieb synchronisiert sind. Dieses wiederum impliziert, dass die Erhöhung der Rauschleistung bis zu einem gewissen Level zu einer Verbesserung der Synchronisation führt. Dieser kontraintuitive Einfluss des Rauschens ist Kern der SR und konnte experimentell erstmals an einem AC-getriebenen Schmitt-Trigger nachgewiesen werden [124]. Seitdem wurde die SR an einer Vielzahl unterschiedlichster physikalischer Systeme demonstriert (Laser [125], Optische Falle [126, 127], SQUID [128, 129], Tunnelodiode [130], Kohlenstoffnanoröhren [131], Nanomechanischer Resonator [132], optomechanischer Resonator [133, 134], ballistischer Leiter [135], Einzelelektronen-Ladungsdetektion [136], Exciton-Polariton Anregungen [137], Kalte Atome [138]). Alle bekannten SR-Systeme haben gemeinsam, dass sie entweder das thermische Rauschen nutzen oder Gebrauch von einer zusätzlichen externen Rauschquelle machen. Darüber hinaus zeigen theoretische Arbeiten an quantenmechanischen Systemen, dass die hier intrinsischen Fluktuationen zu einer Quanten-Stochastischen Resonanz (QSR) führen können [23, 24, 139, 140].

In diesem Kapitel wird das Auftreten der QSR im getriebenen Einzelelektronen-Tunneln am Quantenpunkt gezeigt. Als Erstes erfolgt die detaillierte Behandlung des externen periodischen Antriebs. Danach folgt die Analyse der Synchronisation von Tunnelereignissen und externem Antrieb. Dazu wird zunächst die Frequenzabhängigkeit der effektiven Tunnelrate extrahiert und gezeigt, dass die Fluktuationen zwischen den Tunnelereignissen bei der Resonanzbedingung minimal werden. Zur Kontrolle wird gezeigt, dass die Synchronisation nur für den asymmetrischen Antrieb der beiden Tunnelprozesse stattfindet, aber im symmetrischen Falle ausbleibt. Zum abschließenden Nachweis der QSR wird demonstriert, dass die Fluktuationen auch als Funktion des Schrotrausch-Niveaus ein Minimum durchlaufen. Im letzten Teil des Kapitels findet eine detail-

lierte Untersuchung der Besetzungs- und Rückkehrzeiten in Abhängigkeit des Antriebs statt.

## 5.1. Periodischer Antrieb

Die Konfiguration des Quantenpunktes für das getriebene Einzelelektronentunneln ist in Abb. 5.1a gezeigt. Auf eine Biasspannung  $V_{sd, \text{dot}}$  am Quantenpunkt wird hier in den folgenden Messungen verzichtet. Entsprechend können die Elektronen durch beide Tunnelbarrieren sowohl rein- als auch raustunneln und es findet kein gerichteter Ladungstransport statt.

Der Antrieb erfolgt, indem die drei Quantenpunkt-Gatespannungen

$$\vec{U}_{\text{dot}}(t) = \vec{U}_{\text{dot}, \Lambda} + \vec{e} \Delta U_f \sin(2\pi f t) \quad (5.1)$$

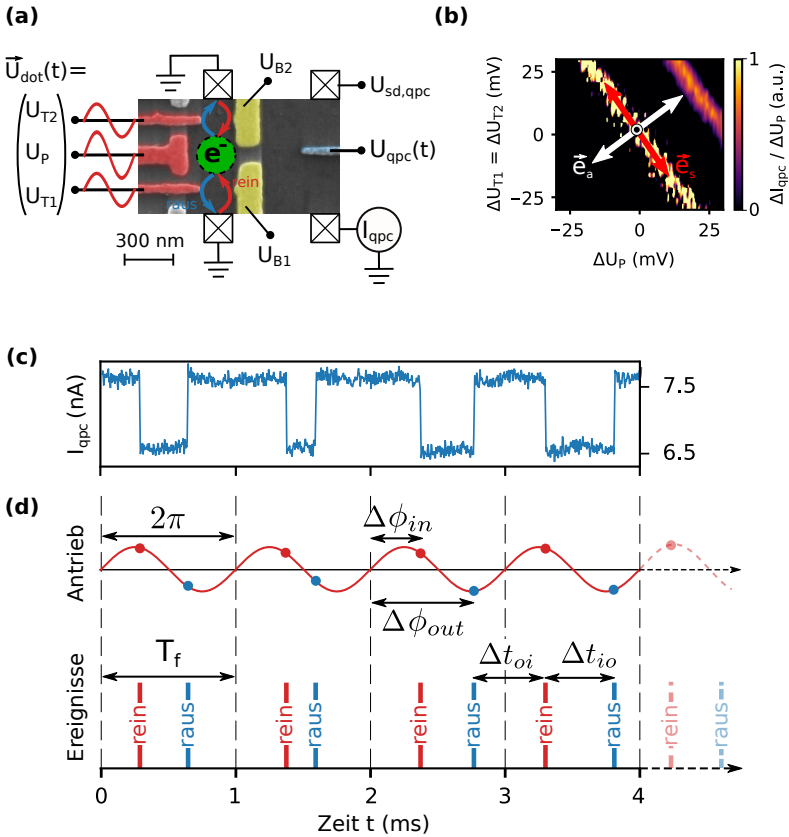
periodisch um den Arbeitspunkt  $\vec{U}_{\text{dot}, \Lambda}$  mit einer Antriebsfrequenz  $f$  und einer Antriebsamplitude  $\Delta U_f$  moduliert werden. Dabei wird ausgenutzt, dass sich über die Modulationsrichtung  $\vec{e}$  die Reintunnelrate  $\Gamma_{\text{in}}$  und die Raustunnelrate  $\Gamma_{\text{out}}$  verschieden beeinflussen lassen (Abb. 4.2).

Damit auch für große Antriebsamplituden  $\Delta U_f$  eine zuverlässige Detektion der Tunnelereignisse gewährleistet ist, muss ein Übersprechen auf den Detektor unterbunden werden. Dazu wird die QPC Gatespannung

$$U_{\text{qpc}}(t) = U_{\text{qpc}}(0) - c_{\text{qpc}}(\vec{e}) \Delta U_f \sin(2\pi f t) \quad (5.2)$$

genau entgegengesetzt moduliert. Der Kopplungsfaktor  $c_{\text{qpc}}(\vec{e})$  hängt von der Modulationsrichtung  $\vec{e}$  ab und wurde für jeden Fall ermittelt.

Um die Synchronisation des Tunnelprozesses mit dem externen Antrieb zu analysieren, wurde parallel zur externen Modulation das zeitaufgelöste Detektorsignal  $I_{\text{qpc}}(t)$  aufgezeichnet. Für die statistische Analyse der Tunnelereignisse wurden immer fünfminütige Detektorsignale mit etwa 1–2 Millionen Tunnelereignissen ausgewertet. In Abb. 5.1b ist ein



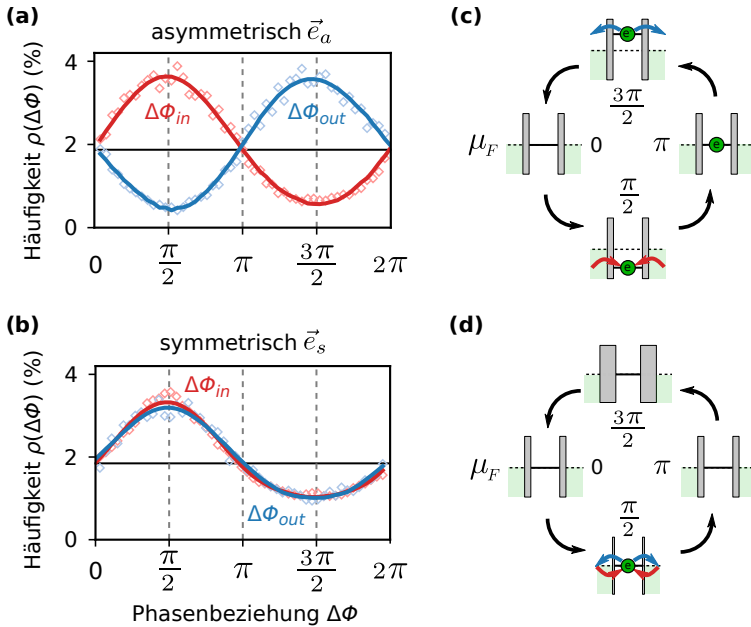
**Abbildung 5.1.:** (a) Konfiguration des Quantenpunktes (grüne  $e^-$  Insel) für das getriebene Einzelelektronen-Tunneln. Der Antrieb erfolgt mittels zeitlicher Modulation der drei Gatespannungen  $\bar{U}_{dot}(t) = (U_{T1}, U_P, U_{T2})$ . Zur Minimierung des Übersprechens auf den Detektor wird  $U_{qpc}(t)$  zusätzlich entgegengesetzt moduliert. Die Elektronen können durch beide Tunnelbarrieren sowohl rein- als auch raustunneln. (b) Die Modulation der Tunnelraten erfolgt meistens in senkrechte Richtung  $\vec{e}_a$  (asymmetrisch) oder paralleler Richtung  $\vec{e}_s$  (symmetrisch) zur Ladelinie. (c) Kurzer Ausschnitt aus einem zeitaufgelösten Detektorsignal  $I_{qpc}(t)$  und (d) der zugehörigen Antriebsperiode sowie den registrierten Tunnelereignissen.

kurzer Ausschnitt eines Detektorsignals gezeigt und darunter in Abb. 5.1c sind die zugehörige Periode des Antriebs sowie die detektierten Tunnelereignisse abgebildet.

## 5.2. Phasenbeziehung

Zunächst sollen die beiden Modulationsrichtungen  $\vec{e}_a$  (asymmetrisch) und  $\vec{e}_s$  (symmetrisch) miteinander verglichen werden. Dazu wird relativ zur aktuellen Periode für jedes Reintunnelereignis die Phasenbeziehung  $\Delta\phi_{in}$  bzw. für jedes Raustunnelereignis die Phasenbeziehung  $\Delta\phi_{out}$  bezüglich der Antriebsperiode ermittelt. Aus allen Tunnelereignissen können schließlich die beiden Phasenverteilungen  $\rho(\Delta\phi_{in})$  und  $\rho(\Delta\phi_{out})$  im Intervall  $\Delta\phi = [0, 2\pi)$  ermittelt werden. Diese beschreiben die statistische Phasenziehung zwischen den Tunnelereignissen und dem externen Antrieb. Für die beiden Modulationsrichtungen  $\vec{e}_a$  und  $\vec{e}_s$  sind in Abb. 5.2a,b die experimentell ermittelten Phasenverteilungen  $\rho(\Delta\phi_{in})$  (rot) und  $\rho(\Delta\phi_{out})$  (blau) gezeigt. Die Modulationsfrequenz  $f = 8$  kHz war für beide Modulationen identisch, während die Amplituden  $\Delta U_f^a = 5,4$  mV und  $\Delta U_f^s = 9,8$  mV unterschiedlich gewählt wurden, um einen vergleichbaren Einfluss zu erzielen.

Für eine Modulation in senkrechter Richtung  $\vec{e}_a$  zur Ladungslinie sind die beiden Phasenverteilungen  $\rho(\Delta\phi_{in})$  und  $\rho(\Delta\phi_{out})$  genau um  $\pi$  gegeneinander verschoben. Der Tunnelprozess wird daher asymmetrisch angetrieben. Wie in Abb. 5.2c illustriert, wird entlang der Richtung  $\vec{e}_a$  der Ladungszustand des Quantenpunktes periodisch um das Fermienergielevel  $\mu_f$  moduliert. Der Einfluss auf die beiden Tunnelbarrieren ist dabei im Wesentlichen vernachlässigbar. Daher tunnelt ein Elektron am wahrscheinlichsten in den Quantenpunkt wenn der Ladungszustand am energetisch niedrigsten ist ( $\Delta\phi = \pi/2$ ) und an viele besetzte Zustände in den Zuleitungen koppelt. Die beste Möglichkeit den Quantenpunkt wieder zu verlassen, besteht sobald der Ladungszustand energetisch am höchsten liegt



**Abbildung 5.2.:** (a) Für Modulationen in  $\vec{e}_a$  Richtung verhalten sich die Phasenverteilungen der Reintunnelereignisse  $\rho(\Delta\Phi_{in})$  und der Raustunnelereignisse  $\rho(\Delta\Phi_{out})$  asymmetrisch zueinander. (b) Für die  $\vec{e}_s$  Richtung sind die beiden Phasenverteilungen hingegen symmetrisch. Die Modulationsfrequenz  $f = 8$  kHz war in beiden Fällen identisch, während die Amplituden  $\Delta U_f^a = 5,4$  mV und  $\Delta U_f^s = 9,8$  mV unterschiedlich gewählt wurden, um einen vergleichbaren Einfluss zu erzielen. (c) Illustration der Phasenbeziehung zwischen den Rein- und den Raustunnelereignissen für den asymmetrischen Fall und (d) für den symmetrischen Fall.

( $\Delta\Phi = 3\pi/2$ ) und viele freie Zustände in den Zuleitungen existieren.

Entlang der Richtung  $\vec{e}_s$  der Ladelinie existiert keine Phasenverschiebung zwischen den beiden Phasenverteilungen  $\rho(\Delta\Phi_{in})$  und  $\rho(\Delta\Phi_{out})$ . Dies zeigt, dass der Tunnelprozess symmetrisch angetrieben wird. Wie in Abb. 5.2d skizziert, bleibt entlang der Ladelinie  $\vec{e}_s$  der Ladungszustand immer energetisch gleich zum Fermi-niveau  $\mu_F$  der Zuleitungen. Allerdings



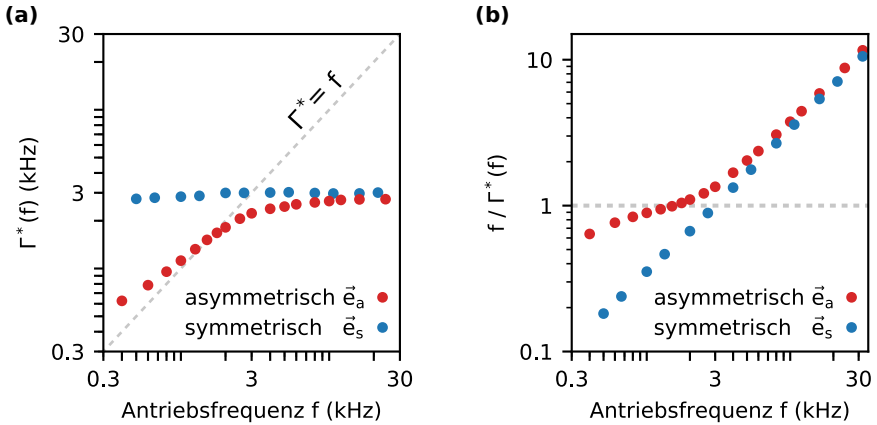
wird diesmal die Dicke der beiden Tunnelbarrieren periodisch verändert. Die Elektronen tunneln daher am wahrscheinlichsten in den Quantenpunkt herein und aus ihm heraus, wenn die Barrieren am dünnsten sind ( $\Delta\phi = \pi/2$ ). Am unwahrscheinlichsten hingegen findet ein Tunnelereignis statt, während die Barrieren am dicksten sind ( $\Delta\phi = 3\pi/2$ ).

Da die Barrieren allerdings niemals vollständig öffnen oder schließen, finden nicht alle Tunnelereignisse synchronisiert mit dem externen periodischen Antrieb statt. Dies verursacht einen stochastischen Hintergrund an Schrotrauschen, der als schwarze horizontale Linie in Abb. 5.2a,b eingezeichnet ist.

### 5.3. Synchronisationsbedingung

Die Abhängigkeit des Tunnelprozesses von der Antriebsfrequenz  $f$  wird als erstes anhand der effektiven Tunnelrate  $\Gamma^*$  untersucht. Dazu wird die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  gemäß Gl. 4.4 aus den mittleren Besetzungszeiten  $\langle\Delta t_{i0}\rangle$  und  $\langle\Delta t_{oi}\rangle$  des Quantenpunktes ermittelt. Abb. 5.3a zeigt die effektiven Tunnelraten  $\Gamma^*$  als Funktion der Antriebsfrequenz  $f$  für die asymmetrische  $\vec{e}_a$  (rot) und die symmetrische  $\vec{e}_s$  (blau) Modulation.

Wenn der externe Antrieb schneller ist als der interne Tunnelprozess  $f \gg \Gamma^*$ , dann benötigen die meisten Elektronen mehrere Perioden ( $\langle\Delta t_{i0}\rangle + \langle\Delta t_{oi}\rangle \gg T_f$ ), um in den Quantenpunkt hinein und wieder heraus zu tunneln. Erfolgt andererseits der externe Antrieb langsamer als der interne Tunnelprozess  $f \ll \Gamma^*$ , dann findet eine Vielzahl von Tunnelereignissen innerhalb einer einzigen Periode ( $\langle\Delta t_{i0}\rangle + \langle\Delta t_{oi}\rangle \ll T_f$ ) statt. In diesen beiden Fällen ist der Tunnelprozess nicht länger synchronisiert mit dem externen Antrieb. Für eine optimale Synchronisation des Tunnelprozesses müssen die Antriebsfrequenz  $f$  und die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  identisch  $f = \Gamma^*$  sein. Diese Synchronisationsbedingung entspricht genau einem Reintunnelereignis und einem Raustunnelereignis pro Periode ( $\langle\Delta t_{i0}\rangle + \langle\Delta t_{oi}\rangle = T_f$ ).



**Abbildung 5.3.:** (a) Die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  und (b) das Verhältnis  $f/\Gamma^*$  in Abhängigkeit der Antriebsfrequenz  $f$  für eine asymmetrische  $\vec{e}_a$  Modulation mit  $\Delta U_f^a = 20$  mV (rot) und eine symmetrische Modulation  $\vec{e}_s$  mit  $\Delta U_f^s = 30$  mV (blau). Im Fall der asymmetrischen  $\vec{e}_a$  Modulation zeigt sich im Verhältnis ein leichtes Plateau bei der Synchronisationsbedingung  $f = \Gamma^*$ , da für einen gewissen Frequenzbereich der interne Tunnelprozess und der externe Antrieb direkt miteinander gekoppelt sind. Im symmetrischen  $\vec{e}_s$  Fall steigt das Verhältnis lediglich linear an, da der Antrieb keine Einfluss auf die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  hat und entsprechend keine Synchronisation stattfindet.

Zur Verdeutlichung der relativen Abweichungen von der Synchronisationsbedingung  $f = \Gamma^*$  zeigt Abb. 5.3b das Verhältnis  $f/\Gamma^*$  in Abhängigkeit der Antriebsfrequenz  $f$ . Für beide Modulationssymmetrien ist die Synchronisationsbedingung in einem Punkt erfüllt. Allerdings ist die Frequenzabhängigkeit in beiden Fällen sehr unterschiedlich.

Im Falle der symmetrischen  $\vec{e}_s$  Modulation hat die Antriebsfrequenz  $f$  fast keinen Einfluss auf die Tunnelrate  $\Gamma^*$ . Entsprechend wächst das Verhältnis  $f/\Gamma^*$  linear an und es kommt zu keiner effektiven Synchronisation des Tunnelprozesses mit dem externen Antrieb. Die leichte sichtbare Abhängigkeit bei kleinen Antriebsfrequenzen  $f$  wird zurückgeführt auf eine experimentell niemals perfekt realisierbare symmetrische Modulation.

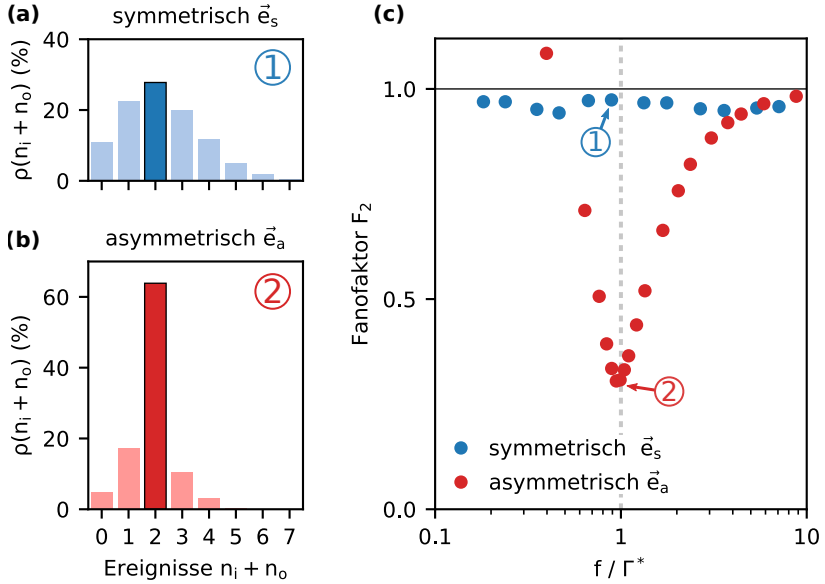
Dagegen zeigt sich allerdings im Fall der asymmetrischen Modulation ein leichtes Plateau bei  $f/\Gamma^* = 1$ , da die effektive Tunnelrate  $\Gamma_f$  sich in einem kleinen Bereich etwa linear zur Antriebsfrequenz  $f$  verhält. Dies bedeutet, dass für einen gewissen Frequenzbereich der interne Tunnelprozess und der externe Antrieb direkt miteinander gekoppelt sind. Dieses Plateau wird auch in theoretischen Arbeiten von Talkner *et al.* [141, 142] beobachtet und genauer untersucht.

## 5.4. Zählstatistik

Es ist zu beachten, dass  $f = \Gamma^*$  eine notwendige aber keine hinreichende stochastische Synchronisationsbedingung darstellt. Denn die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  beschreibt lediglich den zeitlich gemittelten Tunnelprozess. Sie beinhaltet jedoch keinerlei Informationen über die exakte zeitliche Abfolge der einzelnen Tunnelereignisse. Eine zusätzliche Konsequenz der stochastischen Synchronisation ist, dass die Tunnelereignisse regelmäßiger auftreten und konsequenterweise die Fluktuationen zwischen den einzelnen Ereignissen für die Synchronisationsbedingung  $f = \Gamma^*$  minimiert sein müssen.

Die zeitlichen Fluktuationen der Tunnelereignisse lassen sich unmittelbar über die Auswertung der Zählstatistik bestimmen. Dazu wird innerhalb jeder Periode  $T_f$  die Gesamtanzahl  $n_i + n_o$  an Rein- und Raustunnelereignissen ausgewertet und daraus die Zählverteilungen  $\rho(n_i + n_o)$  ermittelt. Die Integrationszeit  $\Delta t$  der Zählstatistik ist hier somit durch die Antriebsperiode  $T_f$  vorgegeben. Da die zeitlichen Fluktuationen zwischen den Rein- und Raustunnelereignissen untersucht werden sollen, wird hier nicht explizit zwischen den beiden Ereignissen unterschieden.

Die beiden Histogramme in den Abb. 5.4a,b zeigen die Zählverteilung  $\rho(n_i + n_o)$  für die symmetrische  $\vec{e}_s$  (blau) und die asymmetrische  $\vec{e}_a$  (rot) Modulation für eine Antriebsfrequenz  $f$  nahe der Synchronisationsbedin-



**Abbildung 5.4.:** Die extrahierten Zählverteilungen  $\rho(n_i + n_o)$  für (a) eine symmetrische  $\vec{e}_s$  Modulation mit  $f/\Gamma^* = 0.90$  und (b) eine asymmetrische  $\vec{e}_a$  Modulation mit  $f/\Gamma^* = 0.99$ . Die Verteilungen zeigen die zeitlichen Fluktuationen der Rein- und Raustunnelereignisse  $n_i + n_o$  innerhalb einer Modulationsperiode  $T_f = 1/f$ . Der Wert für genau zwei Ereignisse  $n_i + n_o = 2$  ist farblich hervorgehoben. (c) Vergleich der Fanofaktoren als Funktion von  $f/\Gamma^*$ . Der Fanofaktor  $F_2$  besitzt im asymmetrischen  $\vec{e}_a$  Falle ein Minimum, da die Synchronisation des Tunnelprozesses mit dem externen Antrieb für die Resonanzbedingung  $f = \Gamma^*$  optimal wird. Keine Synchronisation ist dagegen im symmetrischen  $\vec{e}_s$  Fall beobachtbar. Das Verhältnis  $f/\Gamma^*$  wurde über die Antriebsfrequenz  $f = 0,3 - 30$  kHz variiert und die Werte entsprechen Abb. 5.3, ebenso wie die Amplituden  $\Delta U_f^a = 20$  mV und  $\Delta U_f^s = 30$  mV.

gung  $f \approx \Gamma^*$ . Im asymmetrischen  $\vec{e}_a$  Fall ist der Wert für  $n_i + n_o = 2$  deutlich erhöht gegenüber dem Hintergrund. Vorwiegend findet somit genau ein Rein- und ein Raustunnelereignis per Periode  $T_f$  statt.

Der Fanofaktor  $F_2$  der Zählstatistik erlaubt es den Einfluss des externen Antriebs auf die zeitlichen Fluktuationen des Tunnelprozesses zu quan-

tifizieren. Abb. 5.4c zeigt für die beiden Modulationssymmetrien den Fanofaktor  $F_2$  der Zählstatistik als Funktion des Verhältnisses  $f/\Gamma^*$ . Für die symmetrische  $\vec{e}_s$  Modulation (blau) zeigt sich im Fanofaktor  $F_2$  keine Abhängigkeit vom Verhältnis  $f/\Gamma^*$ . Der Fanofaktor ist immer nahezu Eins, die Fluktuationen entsprechen somit einem Poisson-Prozess und demnach besteht keine zeitliche Korrelation zwischen den Rein- und Raustunnelereignissen. Eine Synchronisation des Tunnelprozesses mit dem externen Antrieb findet also in diesem Falle nicht statt. Dieses spiegelt die Tatsache wieder, dass die beiden Phasenverteilungen in Abb. 5.2b nicht gegeneinander verschoben sind. Ein Elektron, das in den Quantenpunkt herein tunnelt, wird auch wahrscheinlich gleich wieder heraus tunnelt.

Dagegen fällt der Fanofaktor  $F_2$  im asymmetrische  $\vec{e}_a$  Falle (rot) deutlich unter Eins, was einem zeitlich regelmäßigerem Auftreten der Tunnelereignisse entspricht. Bei der Synchronisationsbedingung  $f = \Gamma^*$  durchläuft der Fanofaktor  $F_2$  ein ausgeprägtes Minimum. Für diese Bedingung sind also die Rein- und Raustunnelereignisse in der Tat optimal miteinander synchronisiert, was die zuvor gefundene Kopplung des Tunnelprozesses mit dem externen Antrieb bekräftigt.

## 5.5. Quanten-Stochastische Resonanz

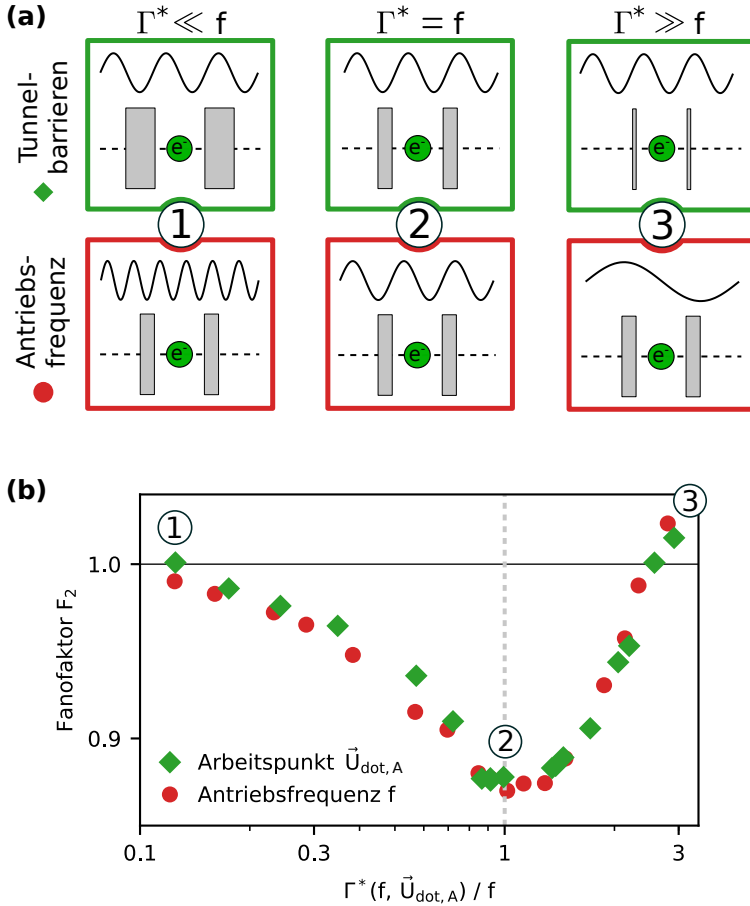
Bisher konnte gezeigt werden, dass für die asymmetrische  $\vec{e}_a$  Modulation um einen gegebenen Arbeitspunkt  $\vec{U}_{\text{dot},A}$  die Synchronisation des Tunnelprozesses mit dem externen Antrieb optimiert werden kann. Dazu muss die Antriebsfrequenz  $f$  so eingestellt werden, dass die Synchronisationsbedingung  $f = \Gamma^*$  erfüllt ist. Üblicherweise möchte man jedoch ein schwaches Signal mit einer fest vorgegeben Frequenz  $f$  detektieren. Die Aufgabe besteht also darin, die optimale Synchronisation zu finden in Abhängigkeit der internen Tunneldynamik.

Die interne Tunneldynamik wird von den Tunnelbarrieren bestimmt. Wenn die Tunnelbarrieren fast geschlossen sind, wird eine schwache ex-

terne Modulation die ohnehin sehr kleinen Tunnelraten  $\Gamma^* \ll f$  nur wenig beeinflussen. Entsprechend wird bei sehr weit geöffneten Tunnelbarrieren eine schwache externe Modulation die große effektive Tunnelrate  $\Gamma^* \gg f$  nur wenig verändern. Diese Argumentation entspricht im Grunde genau der Diskussion für die Variation der Antriebsfrequenz  $f$ . Auch hier findet in beiden Grenzfällen keine Synchronisation des Tunnelprozesses mit dem externen Antrieb statt. Es ist also anzunehmen, dass ebenfalls eine ideale Konfiguration der Tunnelbarrieren existiert, die zu einer optimalen Synchronisation bei  $\Gamma^* = f$  führt. Abb. 5.5a illustriert die drei verschiedenen Situationen. Einmal für die Variation der Tunnelbarriere bei festgehaltener Antriebsfrequenz (grün) und zusätzlich für die Variation der Antriebsfrequenz  $f$  bei unveränderten Tunnelbarrieren (rot).

Die Tunnelbarrieren und somit die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  lassen sich durch Verschieben des Arbeitspunktes  $\vec{U}_{\text{dot},A}$  auf der Ladelinie kontrollieren. Die Synchronisation sollte somit als Funktion des Arbeitspunktes ein Optimum durchlaufen. In Abb. 5.5b wird die Variation des Arbeitspunktes  $\vec{U}_{\text{dot},A}$  bei festgehaltener Antriebsfrequenz  $f$  (grün) mit der Variation der Antriebsfrequenz bei unverändertem Arbeitspunkt  $\vec{U}_{\text{dot},A}$  (rot) verglichen. Die eingekreisten Nummern verweisen auf die in Abb. 5.5a entsprechend illustrierten Konfigurationen. Für beide Kontrollszenarios zeigt der Fanofaktor  $F_2$  erstaunlicherweise die gleiche Abhängigkeit vom Verhältnis  $\Gamma^*/f$ . Die Synchronisation kann also einerseits durch Verschieben des Arbeitspunktes  $\vec{U}_{\text{dot},A}$  oder andererseits durch Variation der Antriebsfrequenz  $f$  optimiert werden.

Ein Anstieg der effektiven Tunnelrate  $\Gamma^*$  entspricht der Erhöhung des intrinsischen Schrotrausch-Levels. Erstaunlicherweise führt dies nicht generell zu einer Verschlechterung der Synchronisation, sondern im Regime  $\Gamma^*/f < 1$  zu einer Verbesserung. Dieser konterintuitive Einfluss des Schrotrauschens ist exakt die Eingangs erwähnte Stochastische Resonanz (SR). Berücksichtigt man die Tatsache, dass der Ursprung des Schrotrauschens hier eine Folge des intrinsischen, quantenmechanischen Tunnel-



**Abbildung 5.5.:** (a) Jedes Verhältnis  $\Gamma^*/f$  besitzt zwei mögliche Konfigurationen aus externer Antriebsfrequenz  $f$  und internen Tunnelbarrieren (definiert durch den Arbeitspunkt  $\vec{U}_{\text{dot}, A}$ ). (b) Die beiden Konfigurationen führen zum gleichen Fanofaktor  $F_2$ . Die Synchronisation kann demnach über die Variation des Arbeitspunktes  $\vec{U}_{\text{dot}, A}$  oder die Antriebsfrequenz  $f$  optimiert werden. Zur Verdeutlichung des Unterschiedes zwischen den beiden Messungen verweisen die eingekreisten Zahlen auf die illustrierten Konfigurationen.

prozesses ist, so demonstriert das Ergebnis das Auftreten einer Quanten-Stochastischen Resonanz (QSR).

Die Synchronisation wurde anhand des Fanofaktors  $F_2$  der Zählstatistik quantifiziert [142]. Über die Zeit wurden eine Vielzahl weiterer SR Maße definiert und zur Auswertung genutzt. Ein verbreitetes SR Maß ist die Fläche unter den Peaks in den Besetzungszeiten (s. das nachfolgende Kapitel 5.6), besser bekannt als *bona fide resonance* [143, 144]. Die Besetzungszeiten bieten zwar einen recht intuitiven Zugang zur Synchronisation des Tunnelprozesses, allerdings liefert die Fläche für einen schwachen Antrieb keinen eindeutigen Nachweis der SR [145]. In diesem Regime sind theoretisch das Signal-Rausch-Verhältnis aus dem zeitlich gemittelten Powerspektrum oder die spektrale Verstärkung ein eindeutiges Maß für die SR [22]. Experimentell ist das Powerspektrum allerdings immer überlagert vom elektronischen Rauschen des Messaufbaus und auch ein kleines Übersprechen des Antriebs ist nicht ganz vermeidbar. Die Auswertung der Zählstatistik umgeht diese Schwierigkeiten, indem durch die Digitalisierung des Signals zunächst alle externen Rauschquellen herausgefiltert werden und nur noch die intrinsischen Fluktuationen des Tunnelprozesses übrigbleiben. Der daraus bestimmte Fanofaktor charakterisiert direkt die Unterdrückung des Schrotrauschens gegenüber einem Poisson-Prozess.

### 5.6. Besetzungszeiten und Rückkehrzeiten

Bisher wurde die Zählstatistik als Funktion der Antriebsfrequenz  $f$  ausgewertet. Abschließend soll ein detaillierter Blick auf die Verteilungen der Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{i0})$ ,  $\rho(\Delta t_{oi})$  und Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$ ,  $\rho(\Delta t_{oo})$  geworfen werden. Aus vielen SR-Systemen ist bekannt, dass die Verteilungen eine Serie an Peaks im Abstand der Antriebsperiode  $T_f$  zeigen [22, 126, 127, 135, 143–147]. In den Systemen wird allerdings nur der asymmetrisch Antrieb untersucht. Die hier implementierte Steuerung des



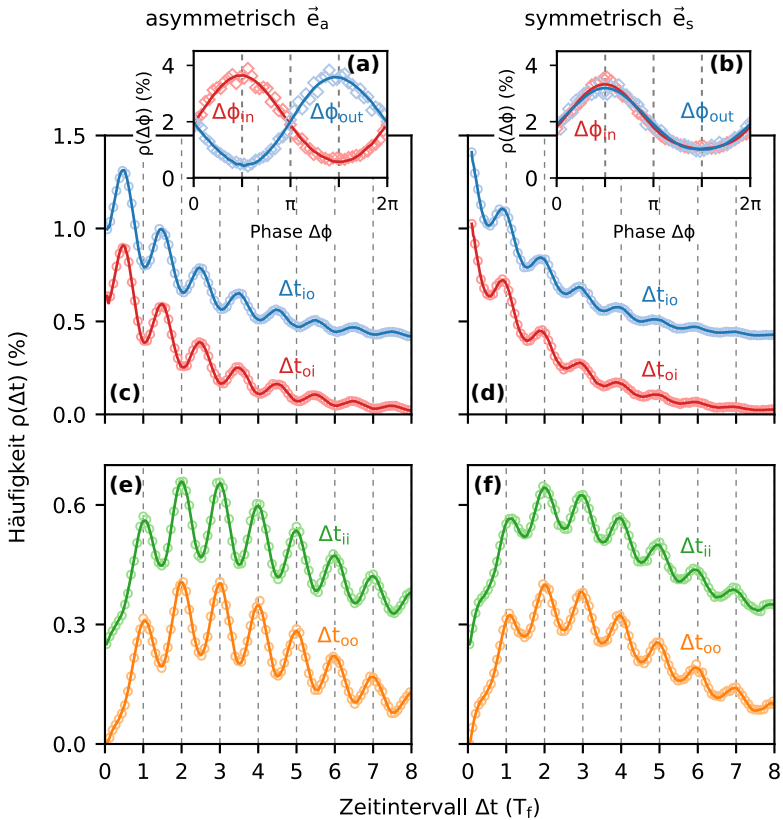
Einzelelektronen-Tunnelprozesses ist sehr variabel und ermöglicht die Untersuchung diverser Antriebsformen. Im folgenden soll gezeigt werden, dass die verschiedenen Verteilungen eine Vielzahl an Informationen über den Antrieb beinhalten.

### 5.6.1. Asymmetrische und symmetrische Modulation

In Abb. 5.6a,b sind noch einmal die bereits diskutierten Phasenverteilungen  $\rho(\Delta\phi_{in})$  (rot) und  $\rho(\Delta\phi_{out})$  (blau) der Tunnelereignisse für die asymmetrische  $\vec{e}_a$  und die symmetrische  $\vec{e}_s$  Modulation gezeigt. Darunter sind in Abb. 5.6c,d die zugehörigen Verteilungen der beiden Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{io})$  (blau) und  $\rho(\Delta t_{oi})$  (rot) sowie in Abb. 5.6e,f die zugehörigen Verteilungen der Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  (grün) und  $\rho(\Delta t_{oo})$  (orange) aufgetragen. Die Frequenz der Modulation war in beiden Fällen  $f = 8 \text{ kHz}$ , die Amplituden betragen  $\Delta U_f^a = 5,4 \text{ mV}$  und  $\Delta U_f^s = 9,8 \text{ mV}$ .

Es fällt zunächst einmal auf, dass alle Verteilungen eine ausgeprägte Serie an Peaks aufweisen. Der Abstand zwischen den Peaks entspricht exakt der Antriebsperiode  $T_f = 1/f$ . Auch das zeigt wieder, dass die Tunnelereignisse nicht mehr vollständig zufällig aufeinander folgen, sondern an den externen periodischen Antrieb gekoppelt sind. Die genaue Lage der Peaks kann anhand der Phasenverteilungen verstanden werden.

Für die asymmetrische  $\vec{e}_a$  Modulation in Abb. 5.6a besitzt die Phasenverteilung der Reintunnelereignisse  $\rho(\Delta\phi_{in})$  ihr Maximum bei  $\Delta\phi_{in} = \pi/2$ , während die Phasenverteilung der Raustunnelereignisse  $\rho(\Delta\phi_{out})$  für  $\Delta\phi_{out} = 3\pi/2$  maximal wird. Somit tunnelt ein Elektron am wahrscheinlichsten zu den Zeitpunkten  $t = \frac{1}{4}T_f, \frac{5}{4}T_f, \dots$  in den Quantenpunkt herein und die beste Möglichkeit ihn wieder zu verlassen, besteht genau eine halbe Periode später bei  $t = \frac{3}{4}T_f, \frac{7}{4}T_f, \dots$ . Es existiert aber ebenfalls die Möglichkeit, dass ein Elektron nicht gleich zum nächst besten Zeitpunkt tunnelt, sondern mehrere vollständige Perioden vor einem Tunnelereignis vergehen. Deshalb besitzen die Besetzungszeiten in Abb. 5.6c



**Abbildung 5.6.:** Vergleich der statistischen Verteilung der Tunnelereignisse für eine asymmetrische  $\vec{e}_a$  und eine symmetrische  $\vec{e}_s$  Modulation: **(a, b)** Phasenverteilungen  $\rho(\Delta\phi_{in})$  und  $\rho(\Delta\phi_{out})$ , **(c, d)** Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{io})$  und  $\rho(\Delta t_{oi})$ , **(e, f)** Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  und  $\rho(\Delta t_{oo})$ . Zur besseren Übersicht besitzen die Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{io})$  einen konstanten Offset von 0.4% und die Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  von 0.25%. Die Frequenz der Modulation war in beiden Fällen  $f = 8$  kHz, die Amplituden betragen  $\Delta U_f^a = 5,4$  mV und  $\Delta U_f^s = 9,8$  mV.

eine Serie von Peaks

$$\text{(asymmetrisch } \vec{e}_a) \quad \Delta t_{i0}^n = \Delta t_{oi}^n = \left(n - \frac{1}{2}\right) T_f \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

bei halbzahligen Vielfachen der Antriebsperiode  $T_f$ . Die Rückkehrzeiten in Abb. 5.6e müssen entsprechend eine Serie von Peaks

$$\text{(asymmetrisch } \vec{e}_a) \quad \Delta t_{ii}^n = \Delta t_{oo}^n = n T_f \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

bei ganzzahligen Vielfachen der Antriebsperiode  $T_f$  aufweisen.

Im Falle der symmetrischen Modulation  $\vec{e}_s$  besitzen hingegen die beiden Phasenverteilungen  $\rho(\Delta\phi_{in})$  und  $\rho(\Delta\phi_{out})$  ihr Maximum bei  $\Delta\phi_{in} = \Delta\phi_{out} = \pi/2$ . Die wahrscheinlichsten Möglichkeiten sowohl zum Reintunneln als auch zum Raustunneln bestehen daher zu den selben Zeitpunkten  $t = \frac{1}{4}T_f, \frac{5}{4}T_f, \dots$ . Ein Elektron kann also entweder gleich wieder aus den Quantenpunkt heraus tunneln oder muss andernfalls eine oder mehrere Perioden  $T_f$  warten. Entsprechend liegen sowohl in Abb. 5.6d die Peaks der Besetzungszeiten

$$\text{(symmetrisch } \vec{e}_s) \quad \Delta t_{i0}^n = \Delta t_{oi}^n = n T_f \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.5)$$

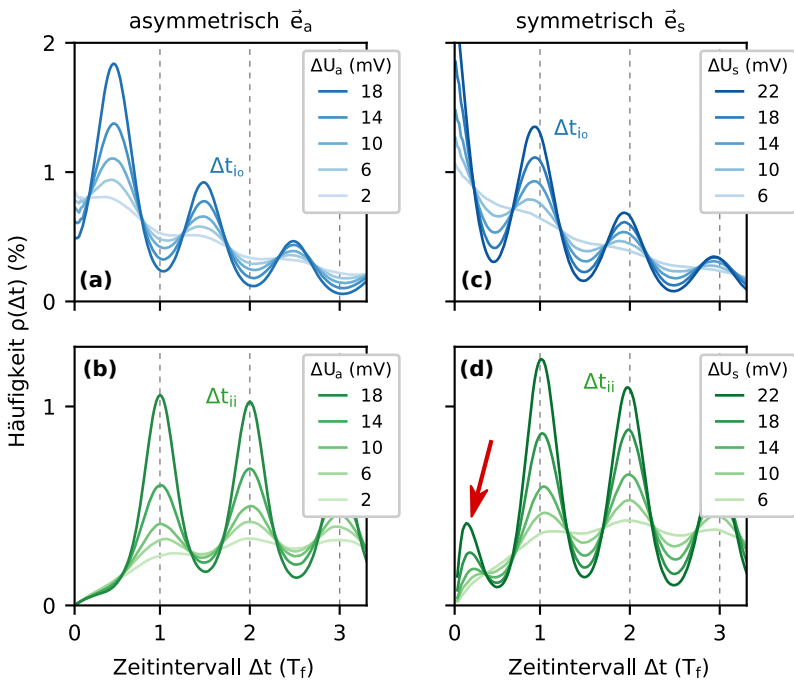
als auch in Abb. 5.6f die Peaks der Rückkehrzeiten

$$\text{(symmetrisch } \vec{e}_s) \quad \Delta t_{ii}^n = \Delta t_{oo}^n = n T_f \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

bei ganzzahligen Vielfachen der Antriebsperiode  $T_f$ .

Die Entwicklung der Peaks aus dem stochastischen Hintergrund bei wachsender Antriebsamplitude  $\Delta U_f$  ist in Abb. 5.7 gezeigt. Für größere Amplituden bestimmt der externe Antrieb zunehmend die Tunnelstatistik. Eine Besonderheit ergibt sich gegenüber der asymmetrischen  $\vec{e}_a$  Modulation (Abb. 5.7a,b) für den symmetrischen  $\vec{e}_s$  Fall (Abb. 5.7c,d). In den Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  bildet sich mit zunehmender Amplitude  $\Delta U_f^s$  bei etwa  $\Delta t \approx 0.2T_f$  ein zusätzlicher Peak (roter Pfeil in Abb. 5.7d) aus. Mit

anwachsender Amplitude öffnen die beiden Barrieren immer weiter und entsprechend wahrscheinlicher wird es, dass ein Elektron sehr schnell rein- und wieder raustunnelt. Dies ist an den stark anwachsenden kurzen Besetzungszeiten (Abb. 5.7c) gut zu erkennen. Andererseits erzwingt aber die Coulomb-Blockade, dass zwei Tunnelereignisse nicht unmittelbar aufeinander folgen können und entsprechend müssen die Rückkehrzeiten auch im getriebenen Falle für  $\Delta t = 0$  immer verschwinden. Gleich-



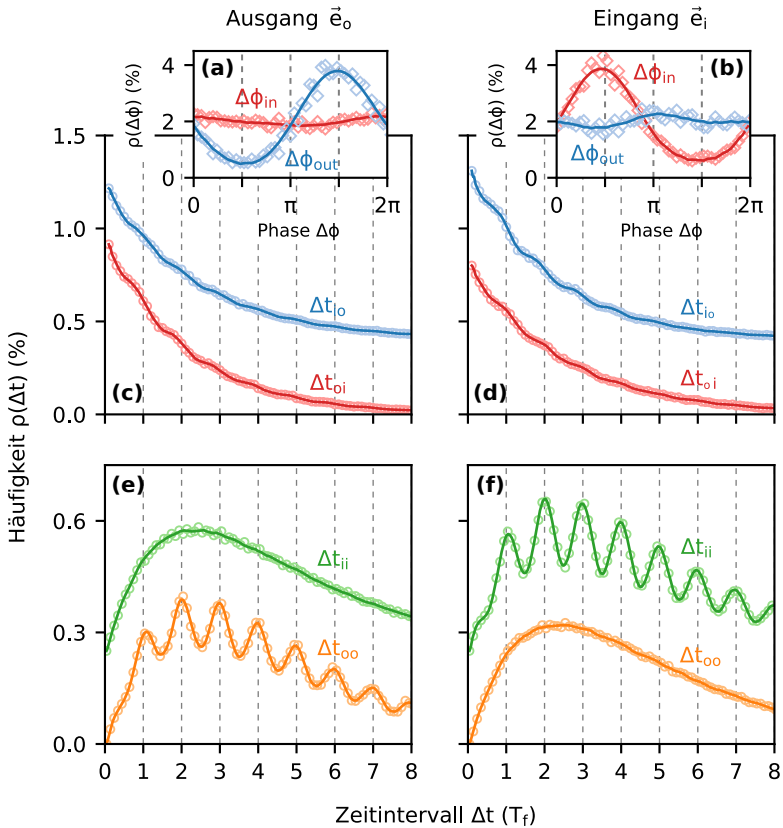
**Abbildung 5.7.:** Entwicklung der statistischen Verteilung der Tunnelereignisse mit zunehmender Antriebsamplitude  $\Delta U_f$  für eine asymmetrische  $\vec{e}_a$  und eine symmetrische  $\vec{e}_s$  Modulation: **(a, c)** Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{i0})$  und **(b, d)** Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ji})$ . Im symmetrischen Fall tritt in den Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ji})$  ein weiterer Peak bei  $\Delta t \approx 0.2T_f$  (roter Pfeil) auf. Die Frequenz der Modulation war in beiden Fällen  $f = 8$  kHz.

zeitig erzwingt die periodische Modulation, dass bei  $\Delta t = T_f/2$  die Rückkehrzeiten ein Minimum haben müssen. Aus diesem Zusammenspiel von Coulomb-Blockade und periodischem Antrieb ergibt sich, dass zwischen  $\Delta t = 0$  und  $\Delta t = T_f/2$  ein zusätzliches Maxima liegt.

### 5.6.2. Einzelbarrieren Modulation

Wie schon in Abb. 4.2 gezeigt, kann durch sorgfältige Einstellung der Richtung eine Situation erzielt werden, bei der entweder nur der Raustunnelprozess  $\vec{e}_o$  oder der Reintunnelprozess  $\vec{e}_i$  beeinflusst wird. Für diese beiden Modulationsrichtungen sind in Abb. 5.8 wiederum die verschiedenen Verteilungen der Tunnelereignisse aufgetragen. Die Phasenverteilung des nicht modulierten Tunnelprozesses ist näherungsweise konstant (Fig. 5.8a,b). Zwischen den Rein- und Raustunnelereignissen existiert daher keine definierte Phasenbeziehung mehr. Entsprechend weisen die Verteilungen der Besetzungszeiten keine Peaks auf (Fig. 5.8c,d). Die noch vorhandene schwache Modulation der Besetzungszeiten ist darauf zurückzuführen, dass sich ein einziger Tunnelprozess experimentell nur näherungsweise beeinflussen lässt.

Zwischen den Ereignissen des zeitlich modulierten Tunnelprozesses besteht allerdings weiterhin eine feste Phasenbeziehung von  $2\pi$ . Die Verteilung der Rückkehrzeiten des modulierten Tunnelprozesses zeigt daher weiterhin deutliche Peaks, wohingegen für den nicht modulierten Prozess keine Peaks auftreten (Fig. 5.8e,f). Anders als bei zeitlich unveränderten Tunnelbarrieren, wo die Verteilungen beider Rückkehrzeiten immer identisch sein müssen (Gl. 4.23-4.24), können sich diese im getriebenen Fall sehr deutlich von einander unterscheiden.

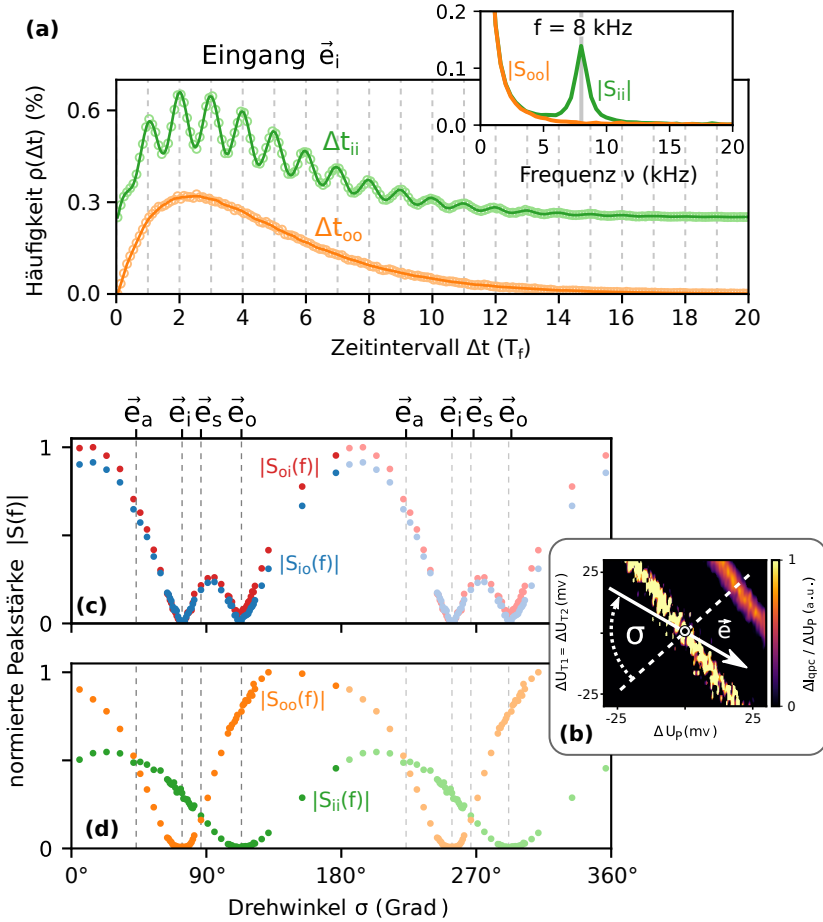


**Abbildung 5.8.:** Vergleich der statistischen Verteilung der Tunnelereignisse bei Modulation des Raustunnelprozesses  $\vec{e}_0$  als auch des Reintunnelprozesses  $\vec{e}_i$ : (a, b) Phasenverteilungen  $\rho(\Delta\phi_{in})$  und  $\rho(\Delta\phi_{out})$ , (c, d) Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{io})$  und  $\rho(\Delta t_{oi})$ , (e, f) Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  und  $\rho(\Delta t_{oo})$ . Zur besseren Übersicht besitzen die blauen Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{io})$  einen konstanten Offset von 0.4% und die grünen Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  von 0.25%. Die Frequenz der Modulation war  $f = 8$  kHz und die Amplitude betrug  $\Delta U_0 = \Delta U_i = 7,0$  mV in beiden Fällen.

### 5.6.3. Allgemeine Modulation

Neben den vier zuvor diskutierten Spezialfällen kann durch Drehung der Modulationsrichtung  $\vec{e}$  jede beliebige Situation dazwischen erreicht werden. Mit der Drehung variiert die Beeinflussung der beiden Tunnelprozesse und die Stärke der Peaks in den Verteilungen verändert sich entsprechend. Da die Peaks periodisch mit  $T_f$  auftreten, kann die Peakstärke ganz allgemein über den Absolutwert des Spektrums  $|S(\nu)|$  (FFT der Verteilungen) bei der Antriebsfrequenz  $\nu = f$  charakterisiert werden. Abb. 5.9a zeigt beispielhaft die Verteilungen der Rückkehrzeiten für die Modulation des Eingangsprozesses  $\vec{e}_i$  sowie die zugehörigen beiden Spektren  $|S_{ii}(\nu)|$  und  $|S_{oo}(\nu)|$ . Für eine Vielzahl an Modulationsrichtungen  $\vec{e}$ , gegeben durch den Drehwinkel  $\sigma$  in Abb. 5.9b, wurden die Spektren aller vier Verteilungen  $\rho(\Delta t_{io})$ ,  $\rho(\Delta t_{oi})$ ,  $\rho(\Delta t_{ii})$  und  $\rho(\Delta t_{oo})$  bestimmt. Die daraus gewonnen Peakstärken  $|S_{io}(f)|$ ,  $|S_{oi}(f)|$ ,  $|S_{ii}(f)|$  und  $|S_{oo}(f)|$  sind in Abb. 5.9c,d in Abhängigkeit des Drehwinkels  $\sigma$  aufgetragen. Die Antriebsfrequenz betrug dabei  $f = 8$  kHz und die Modulationsamplitude  $\Delta U_f = 10$  mV. Der Einfachheit halber wurde beides für alle Drehwinkel konstant gehalten. Die Kopplungskonstante für den Detektor  $c_{qpc}(\vec{e})$  wurde aber an die Drehung entsprechend angepasst.

Die Kreuzungspunkte der beiden Rückkehrzeiten-Peakstärken  $|S_{ii}(f)|$  und  $|S_{oo}(f)|$  in Abb. 5.9d entsprechen dem Fall vollständig symmetrischer  $\vec{e}_s$  und asymmetrischer  $\vec{e}_a$  Modulation. An den Positionen, wo eine der beiden Rückkehrzeiten-Peakstärken  $|S_{ii}(f)|$  und  $|S_{oo}(f)|$  verschwindet, wird entweder nur der Eingangsprozess  $\vec{e}_i$  oder nur der Ausgangsprozess  $\vec{e}_o$  moduliert. Gleichzeitig verschwinden an diesen Stellen auch die Besetzungszeiten  $|S_{io}(f)|$ ,  $|S_{oi}(f)|$  in Abb. 5.9c. Die Peaks der beiden Besetzungszeiten sind demnach immer miteinander gekoppelt. Wohingegen die Peaks der beiden Rücklaufzeiten unabhängig von einander sind.



**Abbildung 5.9.:** (a) Verteilungen der Rückkehrzeiten für die Modulation des Eingangsprozesses  $\vec{e}_i$  und die zugehörigen beiden FFT-Spektren  $|S_{ii}(\nu)|$  und  $|S_{oo}(\nu)|$ . (c) Für eine Vielzahl an Modulationsrichtungen  $\vec{e}$ , gegeben durch den Drehwinkel  $\sigma$ , wurden die Spektren aller vier Verteilungen  $\rho(\Delta t_{io})$ ,  $\rho(\Delta t_{oi})$ ,  $\rho(\Delta t_{ii})$  und  $\rho(\Delta t_{oo})$  bestimmt. (d,e) Aus den Spektren wurden wiederum bei  $\nu = f$  die Peakstärken  $|S_{oi}(f)|$  (rot),  $|S_{io}(f)|$  (blau),  $|S_{oo}(f)|$  (orange) und  $|S_{ii}(f)|$  (grün) abgelesen. Die Antriebsfrequenz  $f = 8$  kHz und die Modulationsamplitude  $\Delta U_f = 10$  mV wurden konstant gehalten. Die Kopplungskonstante für den Detektor  $c_{qpc}(\vec{e})$  wurde bei der Drehung angepasst. Gemessen wurde von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  und die selben Messwerte zur Verdeutlichung der Periodizität von  $180^\circ$  bis  $360^\circ$  fortgesetzt.

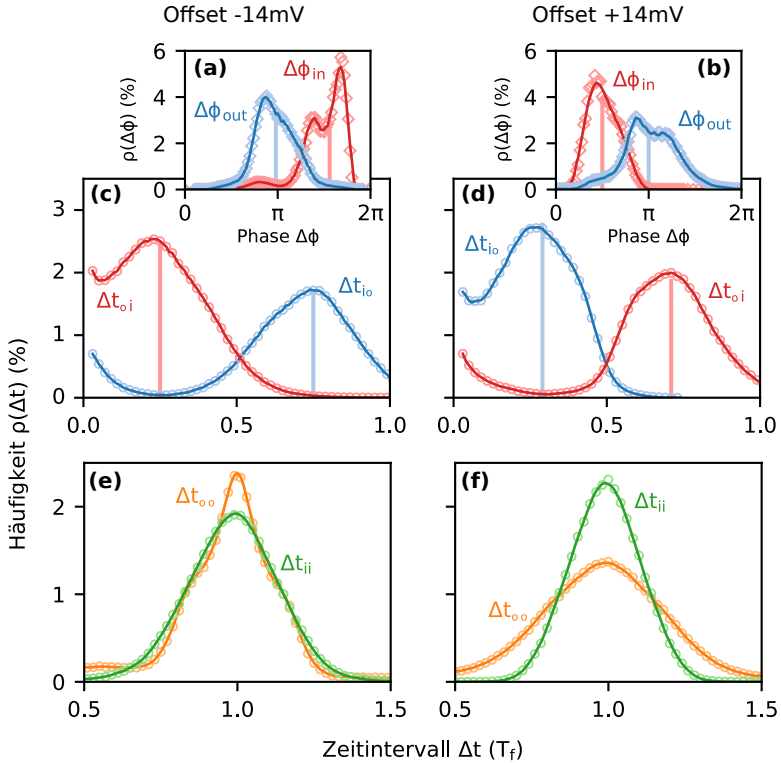


### 5.6.4. Phasenbeziehung

Durch Drehung der Modulationsrichtung ließ sich experimentell eine asymmetrische oder symmetrische Phasenbeziehung zwischen den Rein- und Raustunnelereignissen erreichen. Theoretisch sollte jede beliebige Phasenbeziehung möglich sein, wenn die beiden Tunnelprozesse entsprechend zeitlich verschoben zueinander moduliert werden. Experimentell können die beiden Tunnelbarrieren allerdings nicht einfach unabhängig voneinander angesteuert werden, da der Quantenpunkt kapazitiv an alle Gates koppelt. Jede individuelle Änderung der Gatespannung verschiebt auch immer den Ladungszustand des Quantenpunktes energetisch und führt dadurch zu einer asymmetrischen Modulation. Die Realisierung einer beliebigen Phasenbeziehung lässt sich daher nicht direkt erreichen. Für eine starke, asymmetrische Modulation  $\Delta U_f^a = 20 \text{ mV}$  konnte dies allerdings auf indirekte Weise realisiert werden. Durch Verschieben des Arbeitspunktes um einen Offset

$$\bar{U}_{\text{dot}}(t) = \bar{U}_{\text{dot,A}} + \bar{e}_a (\Delta U_{\text{off}} + \Delta U_f \sin(2\pi f t)) \quad (5.7)$$

konnte die Phasenbeziehung kontrolliert werden. Das ist erstaunlich, da der Offset  $\Delta U_{\text{off}} = \pm 14 \text{ mV}$  selbst keine Phasenverschiebung verursachen sollte, sondern lediglich den stochastischen Hintergrund verändern dürfte. Das Auftreten zusätzlicher Peaks in den nun deutlich komplexeren Phasenverteilungen in Abb. 5.10a,b weist allerdings darauf hin, dass aufgrund der starken Modulation (Offset + Amplitude) weitere Zustände des Quantenpunktes zum Transport beitragen. Dies führt dazu, dass sich eine deutlich von  $\pi$  (asymmetrisch) oder  $2\pi$  (symmetrisch) abweichende Phasenbeziehung zwischen den Rein- und Raustunnelereignissen einstellt. Die eingezeichneten vertikalen Linien zeigen die Schwerpunkte  $\langle \Delta \phi_{\text{in}} \rangle$  und  $\langle \Delta \phi_{\text{out}} \rangle$  der Phasenverteilungen. Für beide Offsets beträgt der Abstand zwischen den Schwerpunkten etwa  $\pi/2$ . Wird der Offset umgekehrt  $\Delta U_{\text{off}} = 14 \text{ mV}$ , kehren auch die Phasenverteilungen um.



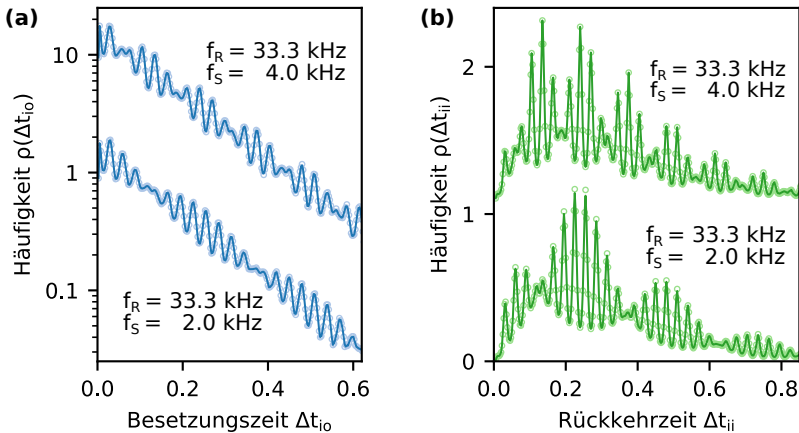
**Abbildung 5.10.:** Statistische Verteilung der Tunnelereignisse bei Modulation um einen Offset: **(a, b)** Phasenverteilungen  $\rho(\Delta\phi_{in})$  und  $\rho(\Delta\phi_{out})$  mit eingezeichneten Schwerpunkten  $\langle\Delta\phi_{in}\rangle$  und  $\langle\Delta\phi_{out}\rangle$ , **(c, d)** Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{io})$  und  $\rho(\Delta t_{oi})$  mit den aus den Schwerpunkten erwarteten Peakpositionen, **(e, f)** Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  und  $\rho(\Delta t_{oo})$ . Die Frequenz der Modulation war  $f = 2$  kHz und die Amplituden betrug  $\Delta U_f^a = 20$  mV.

Schaut man sich die Verteilung der beiden Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{i0})$  und  $\rho(\Delta t_{oi})$  in Abb. 5.10c,d an, so erkennt man, dass die Peaks gegeneinander verschoben sind und etwa bei  $0.25T_f$  und  $0.75T_f$  liegen. Dieses Ergebnis passt gut zu den Schwerpunkten der Phasenverteilungen.

Da die Verteilungen der Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  und  $\rho(\Delta t_{oo})$  nur die periodische Modulation beinhalten, liegen die Peaks in Abb. 5.10e,f wie gehabt bei ganzzahligen Vielfachen der Antriebsperiode  $T_f$ .

### 5.6.5. Superposition

Der externe Antrieb muss nicht auf harmonische Modulationen beschränkt sein, sondern kann prinzipiell beliebig komplex ausfallen. Abb. 5.11 zeigt wie bei der Superposition zweier Modulationen mit unter-



**Abbildung 5.11.:** Bei einer Modulation  $\vec{e}_s$  mit zwei verschiedenen Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  überträgt sich die resultierende Schwebung ebenfalls auf (a) die Verteilungen der Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{i0})$  und (b) die Verteilungen der Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$ . Die obere Verteilung wurden um einen Offset verschoben.

schiedlichen Antriebsfrequenzen  $f_1$  und  $f_2$  die resultierende Schwebung

$$\ddot{U}_{\text{dot}}(t) = \ddot{U}_{\text{dot},A} + \vec{e} \Delta U_f \cos(2\pi f_S t) \sin(2\pi f_R t) \quad (5.8)$$

ebenfalls auf die Verteilungen der Besetzungszeiten und der Rückkehrzeiten übertragen wird. Dabei ist

$$f_S = \frac{f_1 - f_2}{2} \quad (5.9)$$

die Frequenz der Einhüllenden und

$$f_R = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (5.10)$$

die Frequenz der Überlagerung. Die Modulation erfolgte dabei in symmetrische Richtung.

## 5.7. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel wurde der Einfluss eines periodischen, externen Antriebs auf den Tunnelprozess untersucht und dabei das Auftreten einer Quanten-Stochastischen Resonanz (QSR) demonstriert. Anhand der extrahierten Phasenbeziehungen  $\Delta\Phi_{\text{in}}$  und  $\Delta\Phi_{\text{out}}$  der Tunnelereignisse wurde zunächst gezeigt, dass sich die beiden Tunnelprozesse sowohl asymmetrisch als auch symmetrisch zueinander modulieren lassen. Zum Nachweis der QSR wurde anschließend die Synchronisation des Tunnelprozesses untersucht. Im Falle des symmetrischen Antriebs zeigte sich keinerlei Synchronisation mit dem Antrieb und entsprechend auch keine QSR. Beim asymmetrischen Antrieb hingegen durchlief der Fanofaktor  $F_2$  der Zählstatistik ein deutliches Minimum für die Resonanzbedingung  $f = \Gamma^*$  unabhängig davon, ob die externe Antriebsfrequenz oder die internen Tunnelbarrieren (Schrotrausch-Level) variiert wurden.

Der beobachtete Synchronisationsmechanismus zwischen den Tunnel-

ereignissen ist allgemein gültig und hängt nicht von den experimentellen Details des Quantenpunktes ab. Deshalb definiert die hier gezeigte QSR beispielsweise auch einen idealen Arbeitspunkt von Einzelelektronen-Emittern [21, 148, 149]. Diese sind Grundbaustein vieler quantenelektronischer Anwendungen. Eine andere interessante Anwendungsmöglichkeit der QSR findet sich bei den auf SETs basierenden Positionssensoren für nanomechanische Resonatoren [51, 150, 151]. Die stochastischen Fluktuationen des Tunnelprozesses führen hier zu einer unerwünschten *Backaction* mit dem Resonator. Die *Backaction* ließe sich deutlich reduzieren, wenn der Tunnelprozess und die Resonatorfrequenz optimal miteinander synchronisiert würden. Als positiver Nebeneffekt der Synchronisation würde sich das Detektorsignal verbessern.

Abschließend wurde ein Blick auf die Modulation der Besetzungszeiten und Rückkehrzeiten durch den Antrieb geworfen. Es stellte sich dabei heraus, dass die Verteilungen dieser Zeiten Informationen über den Antrieb bergen. Aus den Verteilungen der Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{i0})$  und  $\rho(\Delta t_{oi})$  kann die Phasenbeziehung zwischen den Rein- und Raustunnelereignissen abgelesen werden. Wiederum zeigt sich die Modulationsamplitude der individuellen Tunnelprozesse in den Verteilungen der Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  und  $\rho(\Delta t_{oo})$ .



# 6

## Rückkopplung

Im vorhergehenden Kapitel hing die Unterdrückung der zeitlichen Fluktuationen zwischen den Tunnelereignissen entschieden vom Zusammenspiel des externen Antriebs und der internen Tunneldynamik ab. Aber auch am Punkt optimaler Synchronisation besitzen nicht alle Tunnelereignisse die exakt gleiche Phasenbeziehung. Durch eine Optimierung des Antriebs lassen sich die Fluktuationen zwar stark reduzieren [152], aber letztlich aufgrund des zugrunde liegenden stochastischen Tunnelprozesses niemals ganz vermeiden. Erschwerend kommt hinzu, dass die Abhängigkeit von mikroskopischen Details die Synchronisation störanfällig und die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse technisch herausfordernd macht. Zum Erreichen metrologischer Vorgaben [153] können die gemessenen Fluktuationen in den Fehler eingerechnet werden [154, 155], der physikalische Ausgangsstrom fluktuiert dadurch jedoch nicht weniger.

In diesem Kapitel wird nun die Möglichkeit einer Stabilisierung des Tunnelprozesses auf Basis der Einzelelektronen-Detektion untersucht. Dazu wird eine Rückkopplung (*closed-loop control*) zwischen der effektiven Tunnelrate des Quantenpunktes und den zeitlichen Fluktuationen der Tunnelereignisse implementiert. Zunächst findet die Beschreibung des Regelkreises und seiner einzelnen Komponenten statt. Anschließend wird anhand der Zählstatistik die Unterdrückung des Schrotrauschens in Abhängigkeit der Regelparameter untersucht. Dabei zeigt sich auch, dass die Stärke der Rückkopplung durch die asymmetrische Beeinflussung der Tunnelraten begrenzt ist. Durch eine verbesserte symmetrische Regelung

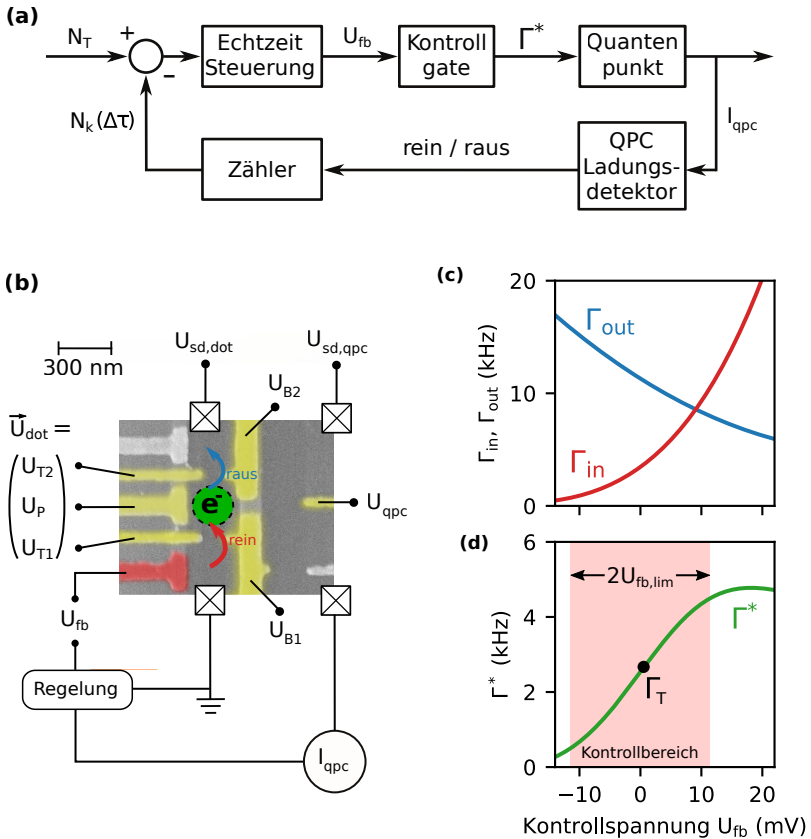
kann schließlich eine deutlich stärkere Rückkopplung realisiert werden. Es stellt sich heraus, dass es eine optimale Rückkopplungsstärke gibt, bei der die Fluktuationen minimal sind und die zugehörige Zählstatik nur noch vom Zielwert der Regelung abhängt. Die experimentell gefundenen Abhängigkeiten werden mit den Erwartungen aus einem analytischen Modell verglichen. Abgeschlossen wird das Kapitel mit den Verteilungen der Besetzungs- und Rückkehrzeiten, die ein anschauliches Verständnis über die Funktionsweise der Regelung liefern.

### 6.1. Regelung

Die hier implementierte Rückkopplung basiert auf einer theoretischen Arbeit von T. Brandes [156]. Die darin vorgeschlagene kontinuierliche Regelung wird allerdings durch ein iteratives Verfahren ersetzt. Es kann jedoch gezeigt werden, dass die kontinuierliche Regelung einen Grenzfall der schrittweisen Regelung dargestellt [157, 158].

Abb. 6.1a zeigt das Blockdiagramm des implementierten Regelkreises. Auf die technische Umsetzung der einzelnen Komponenten und ihren Abhängigkeiten wird im Folgenden genauer eingegangen. Dazu zeigt Abb. 6.1b die experimentelle Konfiguration des Quantenpunktes und des QPC Ladungsdetektors. Wie bereits in den vorhergehenden Experimenten (Abb. 3.6), wurde als Arbeitspunkt  $\vec{U}_{\text{dot},A}$  wieder eine Position auf der ersten Ladelinie des Quantenpunktes ausgewählt. Um einen gerichteten Tunnelprozess zu gewährleisten, wurde eine Biasspannung  $U_{\text{sd, dot}} = 1,5 \text{ mV}$  angelegt. Die Regelung des Tunnelprozesses erfolgt zunächst einmal über die Variation der Kontrollspannung  $U_{\text{fb}}$  an einem zusätzlichen Gate. Die Abhängigkeit der Reintunnelrate  $\Gamma_{\text{in}}$  und der Raustunnelrate  $\Gamma_{\text{out}}$  von der Kontrollspannung  $U_{\text{fb}}$  ist in Abb. 6.1c gezeigt. Der asymmetrische Einfluss resultiert auch hier wieder aus der energetischen Verschiebung des Ladungszustandes des Quantenpunktes gegenüber den Fermi-niveaus der Zuleitungen. Da die Kontrollspannung





**Abbildung 6.1.:** (a) Blockdiagramm des implementierten Regelkreises sowie (b) die zugehörige experimentelle Konfiguration des Quantenpunktes und QPC Ladungsdetektors. (c) Die Reintunnelrate  $\Gamma_{in}$  und die Raustunnelrate  $\Gamma_{out}$  werden asymmetrisch von der Kontrollspannung  $U_{fb}$  beeinflusst. (e) Die Rückkopplung nutzt aus, dass die resultierende effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  sich in einem gewissen Kontrollbereich  $-U_{fb,lim} \leq U_{fb} \leq +U_{fb,lim}$  fast linear verhält. Die vom Zielwert  $N_T$  und dem Zeitintervall  $\Delta\tau$  definierte Zielrate  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau$ , sollte möglichst mittig innerhalb des erlaubten Kontrollbereichs liegen.

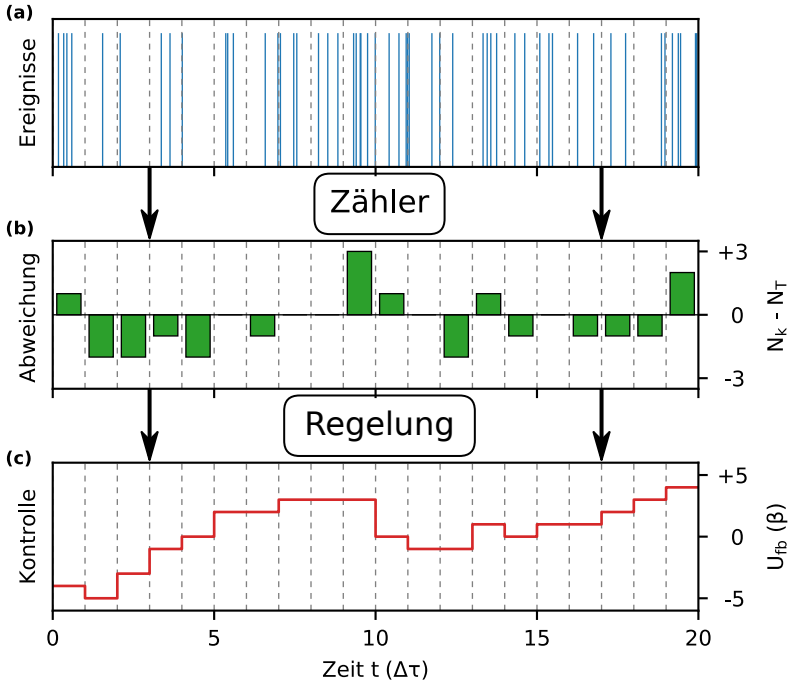
$U_{fb}$  die beiden Tunnelprozesse unterschiedlich stark beeinflusst, sind die Steigungen der beiden Tunnelraten  $\Gamma_{in}$  und  $\Gamma_{out}$  verschieden groß. Für die Regelung ist allerdings nur die in Abb. 6.1d gezeigte effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  (Gl. 4.4) entscheidend. Diese besitzt auf Grund des asymmetrischen Verhaltens der beiden Tunnelraten  $\Gamma_{in}$  und  $\Gamma_{out}$  in einem gewissen Kontrollbereich  $-U_{fb,lim} \leq U_{fb} \leq +U_{fb,lim}$  eine fast lineare Abhängigkeit. Für die Regelung wird nun ausgenutzt, dass innerhalb dieses Kontrollbereichs der effektive Tunnelprozess durch Erhöhung der Kontrollspannung  $U_{fb}$  beschleunigt und durch Verringerung entsprechend verlangsamt werden kann.

Abb. 6.2 zeigt die einzelnen Schritte des implementierten Regelkreises. Die vom Detektor registrierten Tunnelereignisse dienen als Kontrollgröße. Zunächst wird innerhalb eines diskreten Regelintervalls  $\Delta\tau$  die Zahl  $N_k$  der Raustunnelereignisse gezählt (Abb. 6.2a). Anschließend wird die Abweichung  $N_k - N_T$  von dem vorgegeben Zielwert  $N_T$  berechnet (Abb. 6.2b). Schließlich wird am Ende jedes Regelintervalls  $\Delta\tau$  die Kontrollspannung

$$U_{fb,k+1} = U_{fb,k} - \beta (N_k - N_T). \quad (6.1)$$

proportional zur Abweichung angepasst (Abb. 6.2c). Dabei bestimmt die Proportionalitätskonstante  $\beta$  die Rückkopplungsstärke. Sind also innerhalb eines Regelintervalls  $\Delta\tau$  mehr Elektronen getunnelt als vom Zielwert  $N_T$  vorgegeben, wird die Kontrollspannung  $U_{fb}$  und damit auch die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  erniedrigt. Haben hingegen weniger Tunnelereignisse stattgefunden als vorgesehen, müssen die Kontrollspannung  $U_{fb}$  und damit die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  erhöht werden.

Für die Regelung ist eine exakte Kenntnis über die Abhängigkeit der Tunnelrate  $\Gamma^*$  von der Kontrollspannung  $U_{fb}$  nicht notwendig, da immer nur die Kontrollspannung  $U_{fb}$  relativ zum vorhergehenden Wert verändert wird. Allerdings muss die über den Zielwert  $N_T$  und das Regelinter-



**Abbildung 6.2.:** (a) Die in Echtzeit digitalisierten Raustunnelereignisse dienen als Ausgangspunkt der Rückkopplung. (b) Innerhalb eines diskreten Regelintervalls  $\Delta\tau$  (hier 1 ms) wird die Anzahl der getunnelten Elektronen gezählt und die Abweichung  $N_k - N_T$  vom Zielwert  $N_T$  (hier 3) bestimmt. (c) Am Ende jedes Regelintervalls wird die Kontrollspannung  $U_{fb}$  proportional zur Abweichung  $N_k - N_T$  geändert, die Proportionalitätskonstante  $\beta$  bestimmt die Rückkopplungsstärke

voll  $\Delta\tau$  definierte Zielrate

$$\Gamma_T = \frac{N_T}{\Delta\tau} \quad (6.2)$$

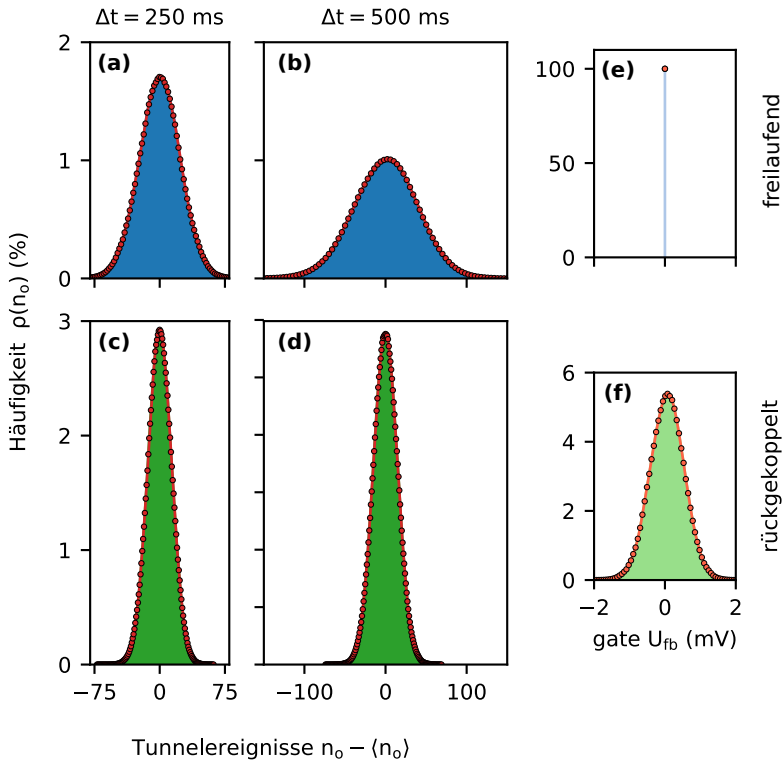
möglichst in der Mitte des Kontrollbereichs  $-U_{fb,lim} \leq U_{fb} \leq +U_{fb,lim}$  liegen. Nur innerhalb des Kontrollbereichs verhält sich die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  monoton und die durchgeführten Spannungskorrekturen  $U_{fb,k+1}$  haben den gewünschten Einfluss auf den Tunnelpro-

zess. Für zu große Kontrollspannungen  $U_{fb} > U_{fb,lim}$  kehrt die Steigung der effektiven Tunnelrate  $\Gamma^*$  um und die Spannungskorrekturen  $U_{fb,k+1}$  haben einen gegenteiligen Effekt. Für zu kleine Kontrollspannungen  $U_{fb} < -U_{fb,lim}$  wächst die Raustunnelrate  $\Gamma_{out}$  sehr schnell an und eine sichere Detektion aller Tunnelereignisse ist nicht mehr gewährleistet. Insbesondere mit anwachsender Rückkopplungsstärke  $\beta$  kann es zu einem Über- oder Unterschreiten des Kontrollbereichs kommen. Damit dieses nicht passieren kann und die Regelung immer stabil arbeitet, wird eine Obergrenze und Untergrenze für die Kontrollspannung  $U_{fb}$  festgelegt. Sollte eine vorgesehene Spannungskorrektur  $U_{fb,k+1}$  außerhalb des Kontrollbereichs liegen, wird stattdessen der entsprechende Grenzwert  $\pm U_{fb,lim}$  gesetzt.

### 6.2. Zählstatistik

Der Einfluss der Regelung auf den Tunnelprozess wird aus der Zählstatistik ermittelt. Man beachte, dass die diskreten Regelintervalle  $\Delta\tau$  nicht mit den hier meist deutlich längeren Integrationszeiten  $\Delta t$  der Zählstatistik zu verwechseln sind. Während  $\Delta\tau$  ein experimenteller Parameter der Regelung ist, sind die Integrationszeiten  $\Delta t$  ein Parameter der statischen Auswertung der detektierten Tunnelereignisse.

Ein qualitatives Bild über den Einfluss der Rückkopplung ergibt sich bereits anhand der Zählverteilungen  $\rho(n_o)$  der Raustunnelereignisse. Dazu werden in Abb. 6.3 die Zählverteilungen für den freilaufenden mit dem rückgekoppelten Quantenpunkt verglichen. Jeweils dargestellt sind die Zählverteilungen für die Integrationszeiten  $\Delta t = 250$  ms und  $\Delta t = 500$  ms. Im freilaufenden Fall kommt es zur bekannten Verbreiterung der Zählverteilungen mit der Integrationszeit  $\Delta t$ , da die Tunnelereignisse zufällig stattfinden und für längere Zeiten größere Abweichungen vom Mittelwert  $\langle n \rangle$  wahrscheinlicher werden. Dieses Verhalten wird durch die Regelung vollständig unterbunden und es treten zwei charakteristische



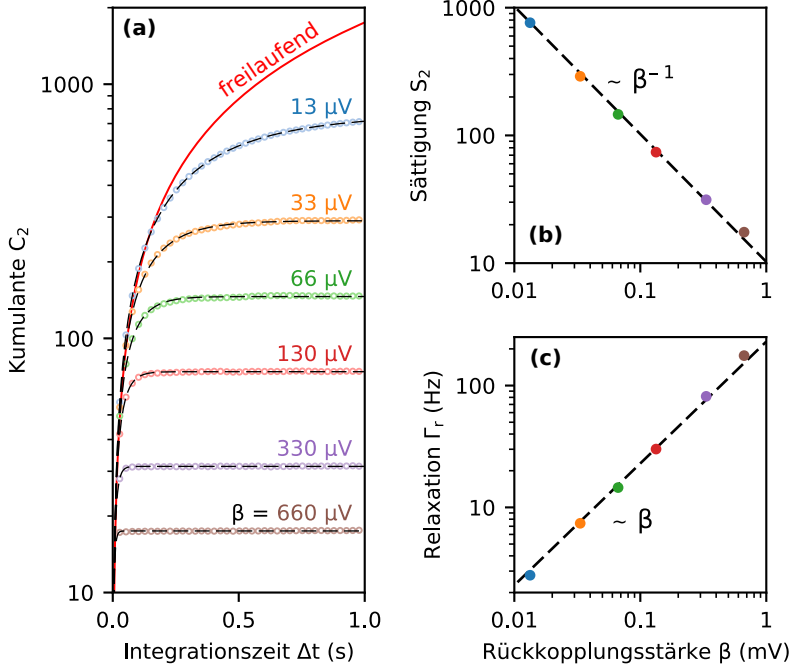
**Abbildung 6.3.:** Vergleich der Zählverteilungen  $\rho(n_o)$  für den freilaufenden mit dem rückgekoppelten Quantenpunkt für zwei verschiedene Integrationszeiten  $\Delta t$ . (a, b) Im freilaufenden Fall (blau) kommt es zu einer Verbreiterung der Häufigkeitsverteilungen mit anwachsender Integrationszeit  $\Delta t$ . (c, d) Mit aktivierter Regelung sind die beiden Verteilungen (grün) sichtlich schmäler und frieren zeitlich ein. (e, f) Die am Kontrollgate angelegten Spannungen  $U_{fb}$  gehen von einer Delta-Funktion über in eine breite Verteilung der Spannungswerte. In beiden Fällen waren die Regelparameter  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 2 \text{ kHz}$ ,  $N_T = 10$ ,  $\Delta\tau = 5 \text{ ms}$  und  $\beta = 66 \mu\text{V}$ .

Effekte auf. Der Erste ist die Verringerung der Breite der Verteilungen, was einer Unterdrückung des Schrotrauschens entspricht. Der zweite Effekt ist das zeitliche Einfrieren der Verteilungen. Entsprechend werden die Fluktuationen der Tunnelereignisse für hinreichend lange Integrationszeiten  $\Delta t$  vollständig stabilisiert. Die Spannung  $U_{fb}$  am Kontrollgate fluktuiert mit aktivierter Regelung allerdings zeitlich und nimmt eine breite Verteilung von Werten an. Vereinfacht gesehen, werden die stochastischen Fluktuation des Tunnelprozesses auf das Kontrollgate übertragen.

### 6.3. Unterdrückung des Schrotrauschens

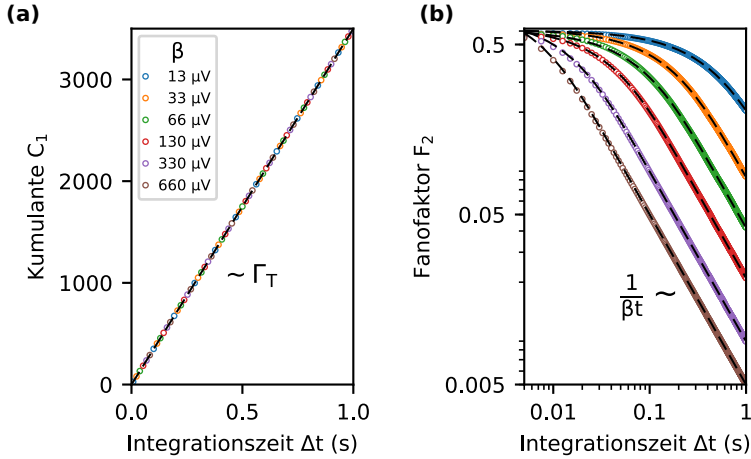
Eine quantitative Beschreibung der Regelung erhält man aus den Kumulanten der Zählstatistik. Abb. 6.4 zeigt den Verlauf der zweiten Kumulante  $C_2$  (Varianz  $\sigma^2$ ) als Funktion der Integrationszeit  $\Delta t$  für einen großen Bereich an Rückkopplungsstärken  $\beta$ . Die Zielrate  $\Gamma_T$  war auf 3,5 kHz eingestellt, bei einem konstant gehaltenem Regelintervall  $\Delta\tau$  von 2,5 ms. Um auch für lange Integrationszeiten  $\Delta t$  eine hohe statistische Genauigkeit zu haben, wurde für jede Stärke jeweils ein 60 min Detektorsignal aufgezeichnet. Dies entspricht bei den gegebenen Parametern 1 444 000 Kontrolloperationen und etwa 12 600 000 Tunnelereignissen. Zum Vergleich ist ebenfalls in Abb. 6.4 die Varianz  $C_2 = 0.5\Gamma_T\Delta t$  eingezeichnet, dem theoretisch kleinstmöglichen Schrotrauschen eines freilaufenden Quantenpunktes. Alle Kurven in Abb. 6.4 sättigen nach einer gewissen Integrationszeit  $\Delta t$ , was dem zeitlichen Einfrieren der Verteilungen der Zählstatistik entspricht. Mit anwachsender Rückkopplungsstärke  $\beta$  nimmt der Sättigungswert  $S_2$  ab und die Verteilungen frieren bereits bei kürzeren Integrationszeiten  $\Delta t$  ein. Die zweite Kumulante [156–158]

$$C_2^{fb}(\Delta t) = S_2(1 - e^{-\Gamma_T \cdot \Delta t}) \quad (6.3)$$



**Abbildung 6.4.:** (a) Die zweite Kumulante  $C_2$  (Varianz) für verschiedene Rückkopplungsstärken  $\beta$  in Abhängigkeit der Integrationszeit  $\Delta t$ . Alle Kurven zeigen das charakteristische Einfrieren der Fluktuation im Tunnelprozess für hinreichend lange Integrationszeiten und eine zunehmende Unterdrückung des Sättigungswertes mit größer werdender Stärke. Die rote Kurve zeigt zum Vergleich die Varianz  $C_2^{st} = 0.5\Gamma_T\Delta t$  (Gl. 4.20) für einen freilaufenden Quantenpunkt mit symmetrischen Tunnelbarrieren. Die gestrichelten schwarzen Linien sind die Fits der Messdaten mit Gl. 6.3. (b, c) Die aus den Fits gewonnenen Sättigungswerte  $S_2$  und Relaxationsraten  $\Gamma_r$  als Funktion der Rückkopplungsstärke. Der Sättigungswert zeigt eine antiproportionale  $S_2 \sim \beta^{-1}$  und die Relaxationsrate eine poroprptionale  $\Gamma_r \sim \beta$  Abhängigkeit. Die Regelparameter waren  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 3,5 \text{ kHz}$ ,  $N_T = 8,75$ ,  $\Delta\tau = 2,5 \text{ ms}$ .

nähert sich exponentiell dem Sättigungswert  $S_2$  an. Dabei beschreibt die Relaxationsrate  $\Gamma_r$  wie schnell die Verteilungen einfrieren und kann gleichzeitig auch als ein Maß für die Bandbreite der Regelschleife angese-



**Abbildung 6.5.:** (a) Die erste Kumulante  $C_1$  (Mittelwert) wächst linear mit der Integrationszeit  $\Delta t$  an. Der lineare Anstieg (schwarz gestrichelt) entspricht der vorgegeben Zielrate  $\Gamma_T$ . (b) Der Fanofaktor  $F_2$  fällt antiproportional  $(\beta\Delta t)^{-1}$  ab für hinreichend lange Integrationszeiten. Die schwarzen gestrichelten Kurven entsprechen Gl. 6.5 mit den aus Abb. 6.4 ermittelten Sättigungswerten und Relaxationsraten. Die Regelparameter waren  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 3,5\text{ kHz}$ ,  $N_T = 8,75$  und  $\Delta\tau = 2,5\text{ ms}$

hen werden. Die Abhängigkeit der beiden Parameter von der Rückkopplungsstärke  $\beta$  wurde durch die Fits nach Gl. 6.3 an die experimentellen Daten bestimmt. Die gestrichelten Linien in Abb. 6.4a zeigen die ermittelten Fitfunktionen und die zugehörigen Parameter sind in Abb. 6.4b,c gegen die Rückkopplungsstärke  $\beta$  aufgetragen. Daraus ist zu erkennen, dass zwischen dem Sättigungswert  $S_2$  und der Rückkopplungsstärke  $\beta$  ein antiproportionaler  $S_2 \sim \beta^{-1}$  Zusammenhang und zwischen der Relaxationsrate  $\Gamma_r$  und Rückkopplungsstärke  $\beta$  ein proportionaler  $\Gamma_r \sim \beta$  Zusammenhang besteht.

Wie in Abb. 6.5a zu sehen, steigt die erste Kummulante  $C_1$  für alle Rückkopplungsstärken  $\beta$  linear mit der Integrationszeit  $\Delta t$  an. Die Steigung



entspricht der effektiven Tunnelrate und ist genau durch die Zielrate  $\Gamma_T$  vorgegeben. Die erste Kumulante  $C_1$  ist also gegeben durch

$$C_1^{\text{fb}}(t) = \Gamma_T \Delta t = \frac{N_T}{\Delta \tau} \Delta t. \quad (6.4)$$

Mit Gl. 6.3 und Gl. 6.4 ergibt sich der Fanofaktor

$$F_2^{\text{fb}} = \frac{C_2^{\text{fb}}}{C_1^{\text{fb}}} = \frac{S_2(1 - e^{-\Gamma_T \cdot \Delta t})}{\Gamma_T \Delta t} \quad (6.5)$$

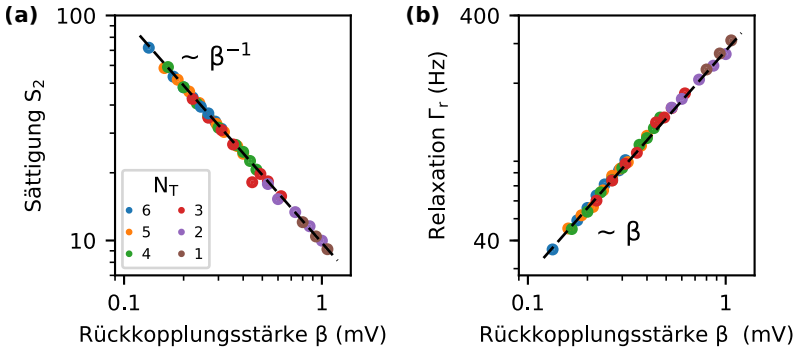
in Abhängigkeit der Rückkopplungsparameter. Da die zweite Kumulante  $C_2^{\text{fb}}$  sättigt, verhält sich für  $\Delta t \gg \Gamma_T$  der Fanofaktor

$$F_2^{\text{fb}} \sim \frac{1}{\beta \Gamma_T \Delta t} \quad (6.6)$$

antiproportional zur Rückkopplungsstärke  $\beta$  und zur Integrationszeit  $\Delta t$ . Bei vorgegebener Zielrate  $\Gamma_T$  kann das Schrotrauschen somit entweder durch Verstärkung der Rückkopplung oder durch längere Integration unterdrückt werden. Abb. 6.5b zeigt den Fanofaktor  $F_2$ , berechnet aus den zuvor bestimmten ersten beiden Kumulanten. In der doppelt-logarithmischen Darstellung ist das antiproportionale Verhalten für lange Integrationszeiten  $\Delta t$  gut erkennbar.

## 6.4. Zielwert

Bisher wurde lediglich der Einfluss der Rückkopplungsstärke  $\beta$  betrachtet, alle anderen Parameter wurden konstant gehalten. In einer weiteren Messreihe wurde zusätzlich der Zielwert  $N_T$  und das Regelintervall  $\Delta \tau$  variiert und zwar so, dass die Zielrate  $\Gamma_T = N_T / \Delta \tau = 4 \text{ kHz}$  konstant bleibt. In Abb. 6.6 sind dabei die aus dem Fit mit Gl. 6.3 gewonnenen Parameter gegen die Rückkopplungsstärke  $\beta$  aufgetragen. Die Farbe der Datenpunkte zeigt den eingestellten Zielwert  $N_T$  an. Der Sättigungswert  $S_2$

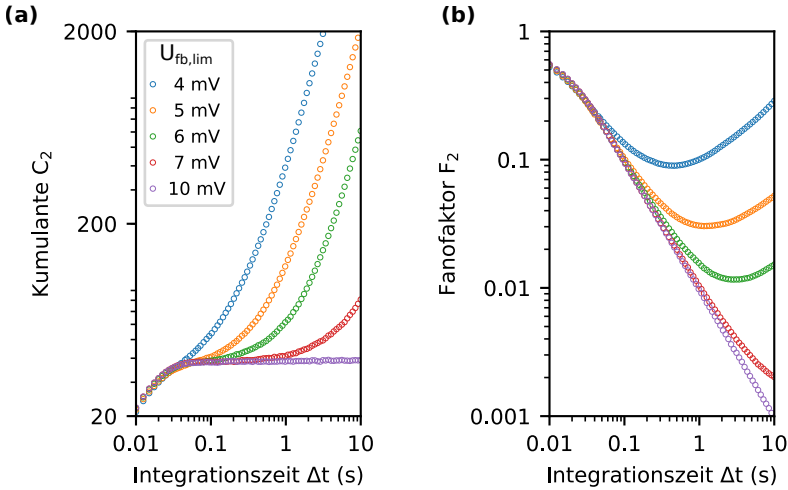


**Abbildung 6.6.:** (a), Sättigungswert  $S_2$  und (b), Relaxationsrate  $\Gamma_r$  in Abhängigkeit der Rückkopplungsstärke  $\beta$  für verschiedene Zielwerte  $N_T$ . Die Zielrate  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 4$  kHz wurde für alle  $N_T$  konstant gehalten, indem das Regelintervall  $\Delta\tau$  entsprechend angepasst wurde.

und die Relaxationsrate  $\Gamma_T$  besitzen die schon zuvor (Abb. 6.4b,c) gefundenen Proportionalitäten und weisen keine Abhängigkeit vom Zielwert  $N_T$  auf. Die Unabhängigkeit vom Zielwert  $N_T$  ist insofern erstaunlich, da bei Verkleinerung des Zielwertes  $N_T$  auch das Regelintervall  $\Delta\tau$  entsprechend verkürzt wird. Bei einer Halbierung des Zielwerts  $N_T$ , werden dann innerhalb der selben Integrationszeit  $\Delta t$  doppelt so viel Kontrolloperationen durchgeführt.

## 6.5. Kontrollbereich

Für die Regelung steht nur ein schmaler Kontrollbereich  $-U_{fb,lim} \leq U_{fb} \leq +U_{fb,lim}$  zur Verfügung. Sollte die Korrekturspannung  $U_{fb,k+1}$  diesen über- oder unterschreiten, wird stattdessen der entsprechende Grenzwert  $\pm U_{fb,lim}$  gesetzt. Allerdings fällt dann die Spannungskorrektur schwächer aus als vom Protokoll vorgesehen. Je schmaler der zur Verfügung stehende Kontrollbereich ist, desto häufiger werden die Grenzwerte überschritten und umso unwirksamer wird die Regelung.



**Abbildung 6.7.:** (a) Der Verlauf der zweiten Kumulante  $C_2$  für unterschiedlich große Kontrollbereiche  $-U_{fb,lim} \leq U_{fb} \leq +U_{fb,lim}$ . Nur wenn die Kontrollspannung  $U_{fb}$  den Kontrollbereich nicht überschreitet, kommt es zum Einfrieren der Fluktuationen. (b) Der Fanofaktor durchläuft bei einem zu klein gewähltem Kontrollbereich ein Minimum und die Unterdrückung des Schrotrauschens hat ein von der Integrationszeit  $\Delta t$  abhängiges Optimum. Die Regelparameter waren  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 4$  kHz,  $N_T = 10$  und  $\Delta\tau = 2,5$  ms.

Bei genauer Betrachtung (z.B. beim Vergleich der blauen Punkte für  $N_T = 6$  mit den braunen Punkten für  $N_T = 1$ ) von Abb. 6.6 fällt auf, dass für kleinere Zielwerte  $N_T$  größere Rückkopplungsstärken  $\beta$  möglich sind. Das liegt daran, dass die Abweichungen  $N_k - N_T$  ebenfalls zunehmend kleiner werden und entsprechend die Fluktuationen in der Kontrollspannung  $\beta(N_k - N_T)$  geringer ausfallen. Innerhalb des gleichen Kontrollbereiches ist so eine stärkere Rückkopplung möglich.

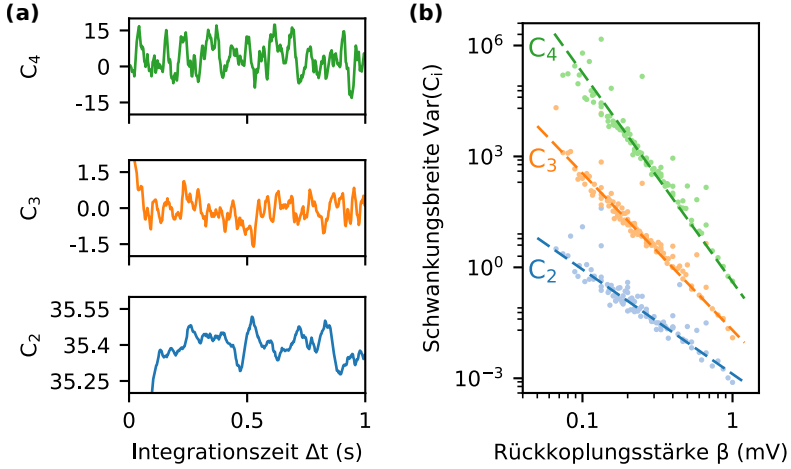
Der Einfluss des Kontrollbereich soll jetzt noch genauer untersucht werden. Abb. 6.7a zeigt die zweite Kumulante  $C_2$  für unterschiedlich große Kontrollbereiche bei konstant gehaltenen Rückkopplungsparametern  $\beta$ ,  $N_T$  und  $\Delta\tau$ . Nur wenn die Kontrollspannung  $U_{fb}$  die vorgegebene

nen Grenzen überhaupt nicht überschreitet, kommt es zum vollständigen Einfrieren der Fluktuationen. Andernfalls steigt die zweite Kumulante  $C_2$  wieder mit der Integrationszeit  $\Delta t$  an, da die aufgetretenen Fluktuationen nicht vollständig stabilisiert werden konnten. Die zugehörigen Fanofaktoren  $F_2$  in Abb. 6.7b durchlaufen daher für zu klein gewählte Kontrollbereiche ein Minimum und entsprechend hat die Unterdrückung des Schrot-rauschens ein von der Integrationszeit  $\Delta t$  abhängiges Optimum. Der zur Verfügung stehende Kontrollbereich begrenzt also die maximal mögliche Rückkopplungsstärke  $\beta$ .

### 6.6. Höhere Kumulanten und Genauigkeit

Ein Einfrieren der höheren Kumulanten kann nicht beobachtet werden, stattdessen schwanken diese um Null als Funktion der Integrationszeit  $\Delta t$ . Es sei darauf hingewiesen, dass im freilaufenden Fall alle Kumulanten linear mit der Integrationszeit  $\Delta t$  anwachsen (Gl. 4.19 - 4.22). Dieses Verhalten wird durch die Regelung also vollständig unterdrückt. Bei genauer Betrachtung zeigt sich, dass auch die zweite Kumulante  $C_2$  noch kleine Schwankungen um ihren Sättigungswert  $S_2$  aufweist. In Abb. 6.8a sind diese Schwankungen in den ersten Kummulanten  $C_2$ ,  $C_3$  und  $C_4$  gut zu erkennen und es zeigt sich, dass die Schwankungsbreite mit der Ordnung der Kumulante anwächst. Um die Schwankungen genauer zu charakterisieren, wird die Schwankungsbreite definiert als die Varianz  $\text{Var}(C_m)$  der Kumulanten im Integrationszeitintervall  $0,25 \text{ s} \leq \Delta t \leq 1,0 \text{ s}$ . Für die Messreihe von Abb. 6.6 wurden für alle Rückkopplungsparameter die ersten vier Kumulanten ermittelt. Die daraus extrahierten Schwankungsbreiten sind in Abb. 6.8b gegen die Rückkopplungsstärke  $\beta$  aufgetragen. Die eingezeichneten gestrichelten Linien zeigen eine gute Übereinstimmung mit dem *empirischen* Potenzgesetz

$$\text{Var}(C_m) = \beta^{-\sqrt{2}m}. \quad (6.7)$$



**Abbildung 6.8.:** (a), Alle Kumulanten zeigen Schwankungen als Funktion der Integrationszeit  $\Delta t$ . (b), Die Schwankungsbreite wird mit zunehmender Rückkopplungsstärke  $\beta$  für alle Kumulanten unterdrückt und folgt dem gestrichelt eingezeichnetem empirischen Potenzgesetz  $\text{Var}(C_m) = \beta^{-\sqrt{2}m}$ . Die Zielrate  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 4 \text{ kHz}$  wurde für alle  $N_T = 1 - 10$  konstant gehalten, indem das Regelintervall  $\Delta\tau$  entsprechend angepasste wurde.

Mit zunehmender Rückkopplungsstärke  $\beta$  werden die Schwankungen demnach immer kleiner. Da die höheren Kumulanten damit auch immer weniger von Null abweichen, lässt sich die eingefrorene Zählstatistik in guter Näherung durch eine Normalverteilung beschreiben.

Hauptsächlich sind die Schwankungen auf den statistischen Fehler zurückzuführen, infolge der begrenzten Stichproben. Mit Verkleinerung der Stichprobengröße bzw. Verkürzung der Messung werden die Schwankungen größer. Das Potenzgesetz ändert sich dadurch aber nicht. Die Schwankungsbreite ist daher ein Maß für die experimentelle Genauigkeit.

## 6.7. Optimale Rückkopplung

Die Rückkopplungsstärke  $\beta$  ist limitiert durch den recht kleinen Kontrollbereich, der aus der asymmetrischen Beeinflussung der Tunnelraten  $\Gamma_{\text{in}}$  und  $\Gamma_{\text{out}}$  durch das Kontrollgate resultiert. Eine symmetrische Beeinflussung der beiden Tunnelraten lässt sich entlang der Ladelinie  $\vec{e}_s$  erreichen (Abb. 6.9a,b), wie bereits in den Experimenten zuvor ausgenutzt. Die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  verhält sich dann für alle Amplituden  $\Delta V$  monoton (Abb. 6.9b). Der Kontrollbereich ist daher nicht mehr beschränkt und die Rückkopplung kann theoretisch beliebig stark werden.

Statt einer Kontrollspannung müssen dazu die drei Quantenpunkt-Gatespannungen

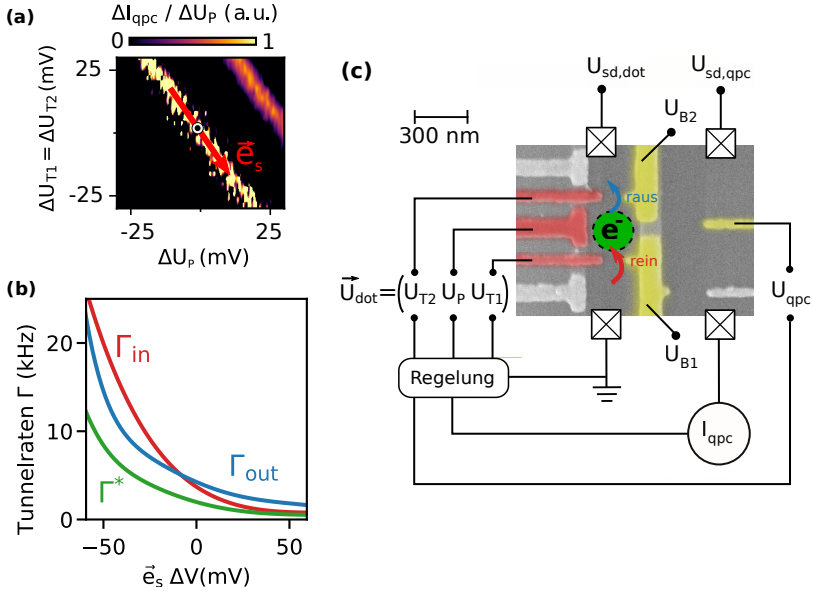
$$\vec{U}_{\text{dot},k+1} = \vec{U}_{\text{dot},k} + \vec{e}_s \beta (N_k - N_T) \quad (6.8)$$

entsprechend geregelt werden (Abb. 6.9c). Gleichzeitig muss für große Rückkopplungsstärken  $\beta$  die QPC Gatespannung

$$U_{\text{qpc},k+1} = U_{\text{qpc},k} - c_{\text{qpc}}(\vec{e}_s) \beta (N_k - N_T) \quad (6.9)$$

proportional  $c_{\text{qpc}}(\vec{e}_s)$  zur Korrektur gegengeregelt werden, um ein Übersprechen auf den Detektor zu minimieren und so eine sichere Detektion der Tunnelereignisse zu gewährleisten.

Auch bei dieser symmetrischen Manipulation der Tunnelraten kommt es zum Einfrieren der Zählstatistik durch die Regelung. In Abb. 6.10a ist der Sättigungswert  $S_2$  für sehr große Rückkopplungsstärken  $\beta$  aufgetragen. Die Farben der Datenpunkte entsprechen jeweils dem eingestellten Zielwert  $N_T$ . Für die kleinsten Rückkopplungsstärken  $\beta$  ist das bereits in Kapitel 6.4 gefundene antiproportionale und vom Zielwert  $N_T$  unabhängige Verhalten des Sättigungswertes erkennbar. Mit anwachsender Rückkopplungsstärke  $\beta$  weichen die Kurven allerdings zunehmend davon ab, erreichen ein Minimum und steigen anschließend wieder an. Die Mini-

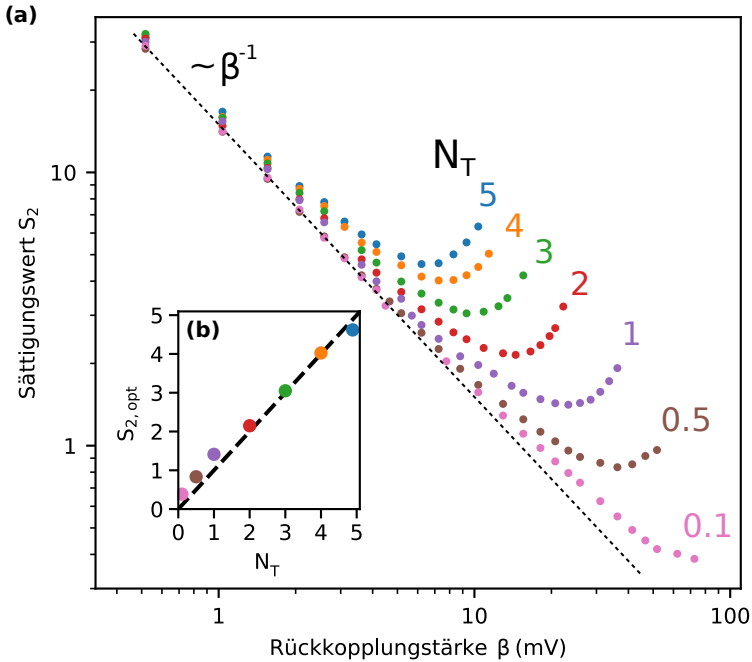


**Abbildung 6.9.:** (a) Die Kontrolle des Tunnelprozesses erfolgt entlang der Ladelinie  $\vec{e}_s$ , (b) um eine symmetrische Beeinflussung der Reintunnelrate  $\Gamma_{in}$  und der Raustunnelrate  $\Gamma_{out}$  zu bekommen. Die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  verhält sich dann monoton für alle Amplituden  $\Delta U$ . (c) Experimentelle Konfiguration des Quantenpunktes.

ma entsprechen der optimalen Rückkopplungsstärke  $\beta_{opt}$  bei gegebenem Zielwert  $N_T$ , denn hier findet die größtmögliche Unterdrückung des Schrotrauschens durch die Regelung statt. Mit kleiner werdendem Zielwert  $N_T$  verschiebt sich  $\beta_{opt}$  zu größeren Werten und der zugehörige Sättigungswert  $S_{2,opt}$  wird immer weiter reduziert. Erstaunlich ist dabei, dass die Regelung auch für Zielwerte  $N_T$  die kleiner sind als Eins weiterhin stabil arbeitet. Die optimalen Sättigungswerte  $S_{2,opt}$  sind in Abb. 6.10b gegen den jeweiligen Zielwert  $N_T$  aufgetragen. Daraus ergibt sich, dass der optimale Sättigungswert  $S_{2,opt}$  gut durch den Zielwert  $N_T$  gegeben ist. Lediglich für sehr kleine Zielwerte  $N_T$  kommt es zu einer

zunehmenden relativen Abweichung.

Die maximale Rückkopplungsstärke  $\beta$  ist bei gegebenem Zielwert  $N_T$  hier nicht mehr durch den Kontrollbereich begrenzt. Allerdings treten ab einem gewissen Punkt angeregte/höhere Zustände (es finden sich mehr als zwei Level im Detektorsignal) des Quantenpunktes auf und verhindern so



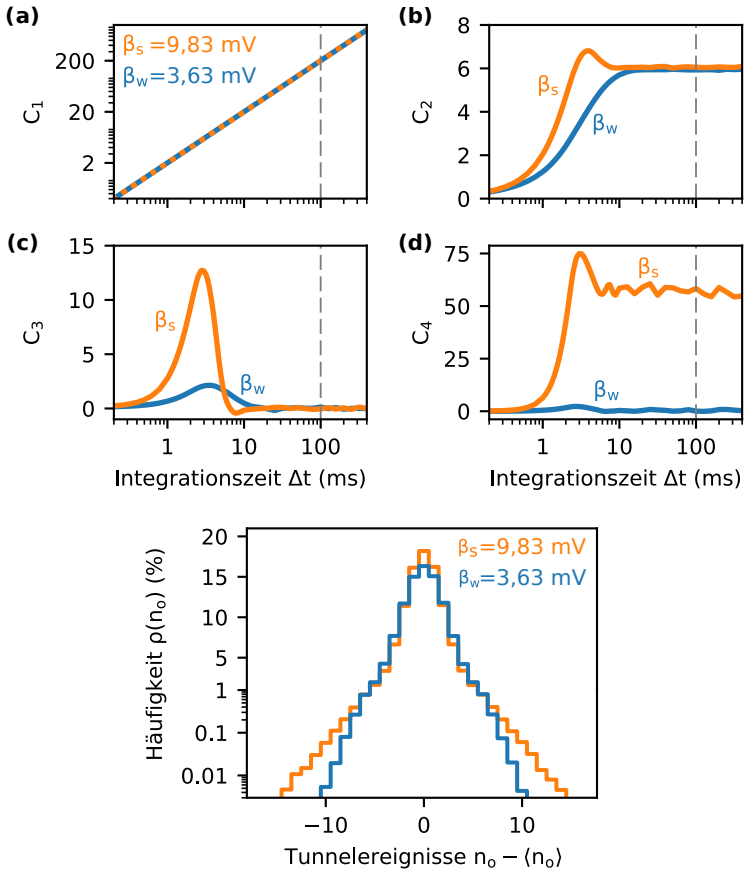
**Abbildung 6.10.:** (a) Der Sättigungswert  $S_2$  der zweiten Kumulante weicht mit ansteigender Rückkopplungsstärke zunehmend vom antiproportionalen  $S_2 \sim \beta^{-1}$  Verhalten ab und durchläuft für sehr große Rückkopplungsstärken ein vom Zielwert  $N_T$  abhängiges Minimum. Die Zielrate  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 2$  kHz wurde für alle  $N_T$  konstant gehalten, indem das Regelintervall  $\Delta\tau$  entsprechend angepasste wurde. (b) Die minimalen Sättigungswerte  $S_{2,opt}$  als Funktion des Zielwertes  $N_T$ . Die schwarze gestrichelte Linie zeigt einen direkten Zusammenhang zwischen dem optimalen Sättigungswert  $S_{2,opt}$  und dem Zielwert  $N_T$  an.



eine weitere Erhöhung. Auch wenn das Niveau des Quantenpunktes energetisch immer gleich bleibt, wird dennoch die elektrostatische Einschnürung und damit seine Form permanent verändert. Für größere Zielwerte  $N_T$  treten die Anregungen bereits bei kleineren Rückkopplungsstärken  $\beta$  auf, weil die statistischen Abweichungen  $N_k - N_T$  größer ausfallen können und damit die Spannungsänderungen  $\beta(N_k - N_T)$  größer werden.

## 6.8. Schwache und starke Rückkopplung

Im Folgenden wird der Bereich links ( $\beta < \beta_{\text{opt}}$ ) vom Optimum  $S_{2,\text{opt}}$  als schwaches Rückkopplungsregime und der Bereich rechts ( $\beta > \beta_{\text{opt}}$ ) davon als starkes Rückkopplungsregime bezeichnet. Bis auf den optimalen Fall können jedem Sättigungswert  $S_2$  jeweils zwei verschiedene Rückkopplungsstärken  $\beta_w$  und  $\beta_s$  zugeordnet werden. Die beiden Regime können also anhand des Sättigungswertes  $S_2$  nicht eindeutig zugeordnet werden. Erst in der Zählstatistik werden charakteristische Unterschiede sichtbar. Dazu wurden die ersten vier Kumulanten  $C_1 - C_4$  auf allen relevanten Zeitskalen bestimmt und in Abb. 6.11a-d dargestellt. Die blauen Kurven gehören mit  $\beta_w = 3,63 \text{ mV}$  zum schwachen und die orangefarbenen Kurven mit  $\beta_s = 9,83 \text{ mV}$  zum starken Rückkopplungsregime. Die erste Kumulante  $C_1$  verhält sich in beiden Regimen identisch und wächst wie vorgesehen mit der Zielrate  $\Gamma_T$  an (Abb. 6.11a). Die Kumulanten  $C_2$ ,  $C_3$  und  $C_4$  zeigen das charakteristische Verhalten der Regelung und sättigen für hinreichend lange Integrationszeiten  $\Delta t \gtrsim 10 \text{ ms}$ . Die beiden Häufigkeitsverteilungen in Abb. 6.11e zeigen die zugehörige eingefrorene Zählstatistik. Im starken Regime sind auf der einen Seite die Ausläufer in den Verteilungen deutlich ausgeprägter, aber auf der anderen Seite ist der Mittelwert  $\langle n_o \rangle$  etwas höher. Das bedeutet, dass Fluktuationen zwar seltener auftreten, dafür aber deutlich größer ausfallen. Deshalb haben beide Histogramme den gleichen Wert für die zweite Kumulante  $C_2$  (Abb. 6.11b), obwohl sich ihre genauen Verteilungen unterscheiden.



**Abbildung 6.11.:** (a-d) Verlauf der ersten vier Kummulanten  $C_1, C_2, C_3$  und  $C_4$  als Funktion der Integrationszeit  $\Delta t$ . Die blauen Kurven ( $\beta_w = 3,63$  mV) gehören zum schwachen und die orangefarbenen Kurven ( $\beta_s = 9,83$  mV) zum starken Rückkopplungsregime. Beide Fälle haben den gleichen Sättigungswert  $S_2$  für die zweite Kumulante  $C_2$ . (e) Zählverteilungen  $\rho(n_o)$  der eingefrorenen Fluktuationen bei  $\Delta t = 100$  ms der beiden Regime. Die Regelparаметer waren  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 2$  kHz,  $N_T = 5$  und  $\Delta\tau = 2,5$  ms

Da beide Histogramme symmetrisch um den Mittelwert  $\langle n_o \rangle$  sind, müssen in beiden Fällen die ungeraden höheren Kumulanten verschwinden, was für  $C_3$  gut erkennbar ist (Abb. 6.11c). Für das starke Regime bewirken die langen Ausläufer allerdings eine Abweichung der geraden höheren Kumulanten von Null.  $C_4$  sättigt deshalb bei einem endlichen Wert (Abb. 6.11d). Die eingefrorene Zählstatistik kann im starken Regime entsprechend nicht mehr durch eine Normalverteilung beschrieben werden.

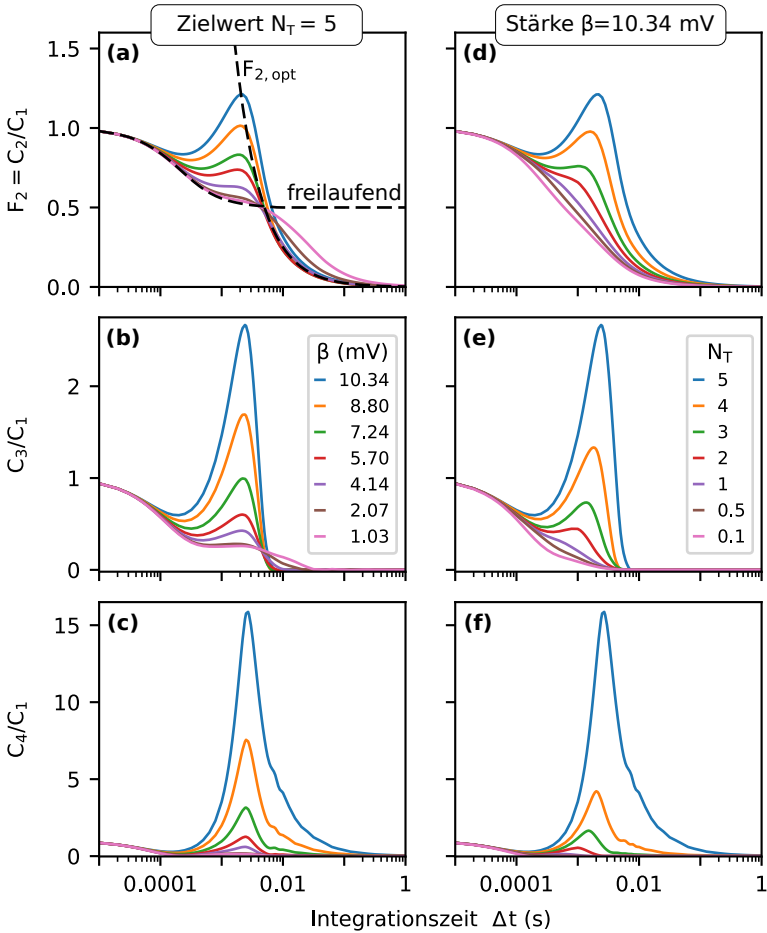
Des Weiteren übersteuern die höheren Kumulanten bei kleinen Integrationszeiten  $\Delta t$  zunächst bevor sie sich ihrem Sättigungswert  $S_2$  annähern. Im starken Rückkopplungsregime ist das Übersteuern deutlich größer und tritt für die zweite Kummulante  $C_2$  im schwachen Regime erst gar nicht auf.

## 6.9. Übersteuerung

Das Übersteuern der Kumulanten bedeutet, dass durch die Regelung auf kurzen Zeitskalen die Fluktuationen der Tunnelereignisse zunehmen. Um die Fluktuationen für alle Integrationszeiten  $\Delta t$  zu quantifizieren, sind in Abb. 6.12 die normierten Kumulanten  $C_i/C_1$  aufgetragen. In Abb. 6.12a-c wurde die Rückkopplungsstärke  $\beta$  variiert bei festgehaltenem Zielwert  $N_T = 5$  und in Abb. 6.12d-f wurde hingegen der Zielwert  $N_T$  verändert bei konstanter Rückkopplungsstärke  $\beta = 6,10 \text{ mV}$ .

Für einen freilaufenden Quantenpunkt fallen alle normierten Kumulanten mit anwachsender Integrationszeit von Eins auf einen konstanten Wert ab, gemäß der frequenzabhängigen Stromstatistik. Die gestrichelten Linien in Abb. 6.12a zeigen das Verhalten für einen symmetrischen, freilaufenden Quantenpunkt. In allen Graphen können drei verschiedene Zeitskalen charakterisiert werden.

Für sehr kurze Integrationszeiten  $\Delta t \ll \Delta \tau$  folgen alle Kurven dem freilaufenden Fall. Die Regelung hat also keinen merklichen Einfluss auf die schnellen Fluktuationen der Tunnelereignisse.



**Abbildung 6.12.:** Die normierten Kumulanten  $F_2 = C_2/C_1$ ,  $C_3/C_1$  und  $C_4/C_1$  in Abhängigkeit der Integrationszeit  $\Delta t$ . **(a,b,c)** Variation der Rückkopplungsstärke  $\beta$  bei konstantem Zielwert  $N_T = 5$ . Die Fanofaktoren für die optimale Rückkopplungsstärke  $F_{2,opt}$  und für den freilaufenden Quantenpunkt ( $\beta = 0$ ) sind schwarz gestrichelt eingezeichnet. Die Regelparameter waren  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 2$  kHz,  $N_T = 5$  und  $\Delta\tau = 2,5$  ms **(d,e,f)** Variation der Zielzahl  $N_T$  bei fester Rückkopplungsstärke  $\beta = 10,34$  mV. Die Zielrate  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 2$  kHz wurde für alle  $N_T$  konstant gehalten, indem das Regelintervall  $\Delta\tau$  entsprechend angepasste wurde.

Für lange Integrationszeiten  $\Delta t \gg \Delta\tau$  gehen alle normierten Kummulanten gegen Null  $C_i/C_1 \sim \Delta t^{-1}$  aufgrund der Sättigung der höheren Kummulanten. Die relativen Fluktuationen werden somit immer kleiner und das Schrotrauschen wird zunehmend unterdrückt mit anwachsender Integrationszeit  $\Delta t$ . Für die optimale Rückkopplungsstärke  $\beta_{\text{opt}}$  hängt hier der Fanofaktor

$$F_{2,\text{opt}} = \frac{S_{2,\text{opt}}}{\Gamma_T \Delta t} = \frac{\Delta\tau}{\Delta t} \quad (6.10)$$

lediglich vom Regelintervall  $\Delta\tau$  ab, da nach Abb. 6.10b für den Sättigungswert  $S_{2,\text{opt}} = N_T$  gilt. Das Regelintervall  $\Delta\tau$  begrenzt somit den Verlauf des Fanofaktors, wie gut an der schwarz gestrichelten Linie in Abb. 6.12a zuerkennen ist.

Auf der Zeitskala des Regelintervalls  $\Delta t \approx \Delta\tau$  tritt die Übersteuerung der Kummulanten auf. Die Höhe des Peaks hängt von der Rückkopplungsstärke  $\beta$  ab und wächst im starken Regime sehr schnell an (Abb. 6.12a-c). Indem der Zielwert  $N_T$  reduziert wird, kann das schwache Rückkopplungsregime erreicht werden und so das Übersteuern unterbunden werden (Abb. 6.12d-f).

## 6.10. Einzelbarrierenmodell

An dieser Stelle sollen die experimentell gefundenen Abhängigkeiten mit einem vereinfachten Modell der Regelung verglichen werden. Das Modellsystem vernachlässigt die innere Struktur des Quantenpunktes und geht lediglich von einer einzelnen Tunnelbarriere aus. Des Weiteren wird zwischen der Tunnelrate  $\Gamma^{\text{mod}}$  und Kontrollspannung  $U_{fb}$  ein direkter linearer Zusammenhang  $\Gamma^{\text{mod}} = m U_{fb}$  angenommen. Im Experiment entspricht  $m$  der Steigung im linearen Kontrollbereich von Abb. 6.1d. Da-

durch lässt sich das Protokoll von Gl. 6.1 in Ratenform

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{fb,k+1}^{\text{mod}} &= \Gamma_{fb,k}^{\text{mod}} - m\beta(N_k - N_T) & (6.11) \\
 &= \Gamma_{fb,k-1}^{\text{mod}} - m\beta(N_{k-1} - N_T) - m\beta(N_k - N_T) \\
 &= \dots \\
 &= \Gamma_{fb,1}^{\text{mod}} - m\beta\left(\sum_{j=1}^k N_j - kN_T\right)
 \end{aligned}$$

ausdrücken. Dieses Modellsystem wurde von P. Strasberg und T. Brandes detailliert untersucht [157, 158]. Die gefundenen analytischen Ergebnisse werden hier kurz zusammengefasst und diskutiert.

Aus dem Modell ergibt sich für den Sättigungswert in Abhängigkeit der Rückkopplungsparameter

$$S_2^{\text{mod}} = \frac{\Gamma_T}{m\beta(2 - m\beta\Delta\tau)}. \quad (6.12)$$

Aus der Ableitung erhält man sofort, dass der Sättigungswert bei  $\beta_{\text{opt}}^{\text{mod}} = (m\Delta\tau)^{-1}$  minimal wird und der zugehörige optimale Sättigungswert

$$S_{2,\text{opt}} = N_T \quad (6.13)$$

direkt dem Zielwert  $N_T$  entspricht. Erstaunlicherweise besitzt das experimentelle Optimum  $S_{2,\text{opt}}$  in Abb. 6.10 den gleichen Zusammenhang, obwohl sich die effektive Tunnelrate  $\Gamma^*$  bei den zugehörigen Rückkopplungsstärken in keiner Weise mehr linear verhält. Der Zusammenhang zwischen Sättigungswert  $S_{2,\text{opt}}$  und Zielwert  $N_T$  erweist sich somit als äußerst robust und Modell unabhängig.

Bei schwacher Rückkopplung ( $m\beta\Delta\tau \ll 1$ ) folgt aus dem Modell ebenso die aus Gl. 6.3 bekannte Abhängigkeit von der Integrationszeit  $\Delta t$

$$C_2^{\text{mod}}(\Delta t) = S_2^{\text{mod}}(1 - e^{-\Gamma_r^{\text{mod}}\Delta t}). \quad (6.14)$$

Der theoretische Sättigungswert und die theoretische Relaxationsrate

$$S_2^{\text{mod}} = \frac{\Gamma_T}{2m\beta}, \quad \Gamma_r^{\text{mod}} = 2m\beta\Gamma_T. \quad (6.15)$$

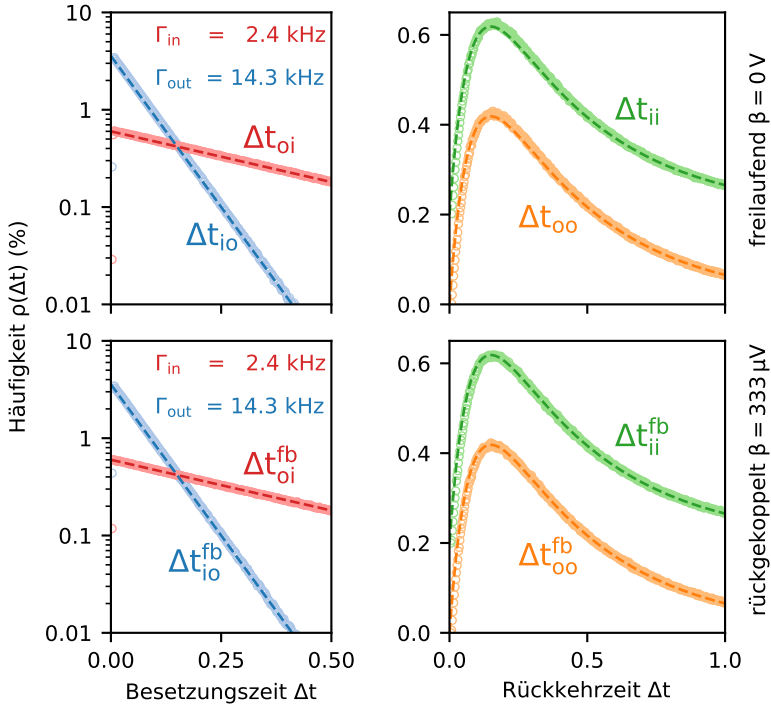
besitzen darin die selben Abhängigkeiten von der Rückkopplungsstärke  $\beta$  wie die experimentellen Größen in Abb. 6.6.

Die wichtigsten experimentell gefundenen Abhängigkeiten für den rückgekoppelten Quantenpunkt werden somit durch das vereinfachte Modellsystem gut wiedergegeben. Die Fluktuationen der höheren Kumulanten um Null (Abb. 6.8) werden allerdings von diesem vereinfachten Modell nicht richtig beschrieben. Auch wird der Sättigungswert  $S_2^{\text{mod}}$  in Gl. 6.12 unendlich bei  $\beta = 2/(m\Delta\tau)$ , da das Modell unphysikalische negative Tunnelraten  $\Gamma$  zulässt.

## 6.11. Besetzungszeiten und Rückkehrzeiten

Ein anschaulicheres Verständnis über die Funktionsweise der Regelung kann aus den Besetzungs- und Rückkehrzeiten gewonnen werden. Dazu vergleicht Abb. 6.13 für den freilaufenden  $\beta = 0 \text{ V}$  und den rückgekoppelten  $\beta = 330 \mu\text{V}$  Quantenpunkt, die Verteilungen der Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{oi})$  (rot) und  $\rho(\Delta t_{io})$  (blau) sowie die Verteilungen der Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$  (grün) und  $\rho(\Delta t_{oo})$  (orange). Erstaunlicherweise unterscheiden sich die Verteilungen in beiden Fälle nicht sichtlich. Die Kontrolle der Besetzungszeiten gestaltet sich deutlich schwieriger [159].

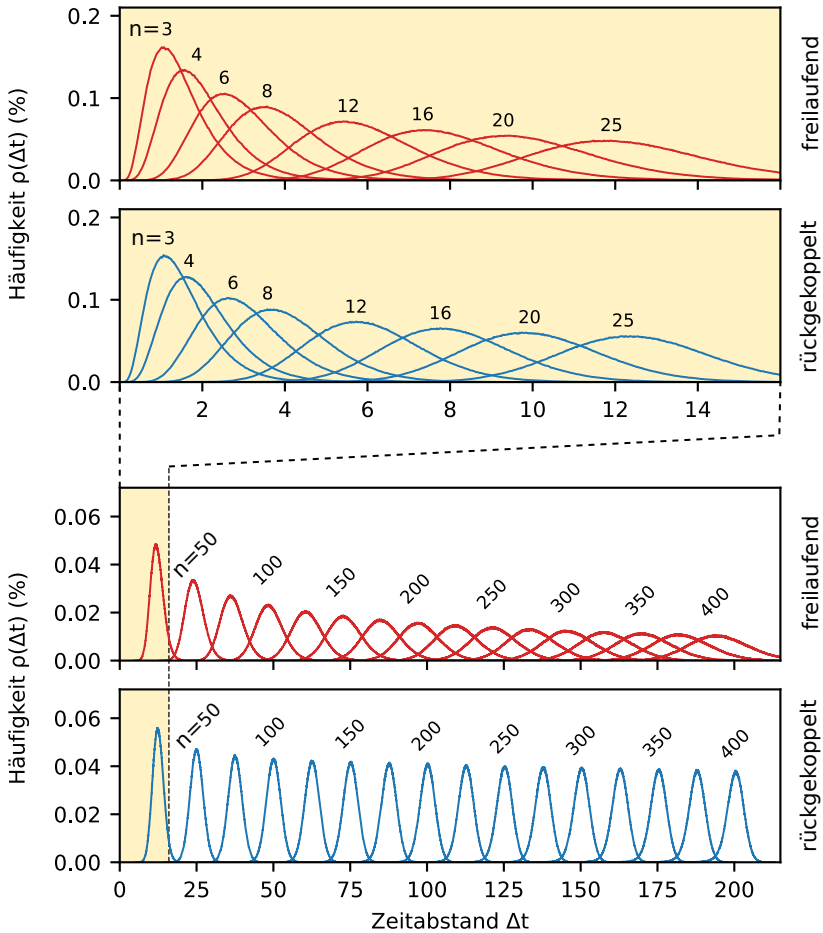
Die Regelung muss die Abfolge der Besetzungszeiten so verändern, dass für längere Zeiten die Fluktuationen der Tunnelereignisse verschwinden. Dies wird deutlich, wenn nicht nur der Abstand auf das nächste  $n = 1$  (Besetzungszeiten) und übernächste  $n = 2$  (Rückkehrzeiten) Tunnelereignis betrachtet wird, sondern der zeitliche Abstand auf das  $n$ -te Tunnelereignis. Die Entwicklung der Verteilungen ist in Abb. 6.14 bis zu  $n=400$  Tunnelereignissen gezeigt. Für die ersten  $n=25$  Tunnelereignisse



**Abbildung 6.13.:** (a) Besetzungszeiten  $\rho(\Delta t_{oi})$ ,  $\rho(\Delta t_{io})$  und (b) Rückkehrzeiten  $\rho(\Delta t_{ii})$ ,  $\rho(\Delta t_{oo})$  für den freilaufenden Quantenpunkt. (c) Besetzungszeiten  $\rho^{fb}(\Delta t_{oi})$ ,  $\rho^{fb}(\Delta t_{io})$  und (d) Rückkehrzeiten  $\rho^{fb}(\Delta t_{ii})$ ,  $\rho^{fb}(\Delta t_{oo})$  für den rückgekoppelten Quantenpunkt. Die Regelparameter waren  $\beta = 330 \mu\text{V}$ ,  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 2 \text{ kHz}$ ,  $N_T = 10$  und  $\Delta\tau = 5 \text{ ms}$ . Die Regelung erfolgte asymmetrisch nach Abb. 6.1. Die gestrichelten Kurven sind die Abhängigkeiten nach Gl. 4.23-4.24 mit  $\Gamma_{in} = 2,4 \text{ kHz}$  und  $\Gamma_{out} = 14,3 \text{ kHz}$ .

treten zunächst keine sichtbaren Unterschiede zwischen freilaufend und geregelt auf. Erst auf langen Zeiten ist wieder ein Einfrieren der Verteilungen durch die Regelung sichtbar, wo hingegen im freilaufenden Fall die Verteilungen breiter werden. Es zeigt sich also auch hier dasselbe Verhalten wie bei der Zählstatistik.





**Abbildung 6.14.:** Verteilungen der Zeitabstände  $\Delta t$  auf das  $n$ -te Tunnelereignisse, ohne  $\beta = 0$  V (rot) und mit aktivierter Regelung  $\beta = 330 \mu\text{V}$  (blau). Erst nach etwa  $n=25$  Tunnelereignissen treten deutliche Unterschiede durch die Regelung auf und es zeigt sich auch hier das auf langen Zeiten charakteristische Einfrieren der Verteilungen. Die Regelparameter waren  $\Gamma_T = N_T/\Delta\tau = 2$  kHz,  $N_T = 10$  und  $\Delta\tau = 5$  ms

## 6.12. Zusammenfassung und Ausblick

Dieses Kapitel befasste sich mit der erfolgreichen Implementierung einer Regelung zur Stabilisierung der Einzelelektronen-Tunnelereignisse in einem Quantenpunkt. Die Regelung hat sich als robust erwiesen und führte zu einem vollständigen Einfrieren der Fluktuationen auf langen Zeiten. Die Zählstatistik wird dann nur noch durch die Rückkopplung bestimmt. Der Sättigungswert  $S_2$  der zweiten Kumulante  $C_2$  verhält sich im Fall schwacher Rückkopplung antiproportional zur Rückkopplungsstärke  $\beta$ . Mit ansteigender Rückkopplung weicht das Verhalten davon zunehmend ab und der Sättigungswert  $S_2$  durchläuft ein Minimum bei  $S_{2,\text{opt}} = N_{\text{T}}$ . Dieses Minimum charakterisiert die optimale Unterdrückung des Schrottrauschens durch die Rückkopplung. Da das Minimum direkt durch den Zielwert  $N_{\text{T}}$  gegeben ist, entspricht der zugehörige Fanofaktor  $F_{2,\text{opt}} = \Delta\tau/\Delta t$  genau dem Verhältnis von Regelintervall  $\Delta\tau$  und Integrationszeit  $\Delta t$ .

Ein interessanter Aspekt der Regelung soll noch ausblickend diskutiert werden. Für die quantenmetrologische Neudefinition des Ampere ist eine hochpräzise Stromquelle notwendig, deren Ausgangsstrom  $I = ef$  über die Elementarladung  $e$  mit einer externen Frequenz  $f$  verknüpft ist [160, 161]. Vorausgesetzt alle Tunnelereignisse finden gerichtet statt, erfüllt nach Gl. 6.4 auch der von der Regelung generierte Strom

$$I = \frac{eN_{\text{T}}}{\Delta\tau} = eN_{\text{T}}f_{\text{fb}} \quad (6.16)$$

diese Bedingung. Dabei ist  $f_{\text{fb}} = 1/\Delta\tau$  die Frequenz der periodischen Rückkopplung. Der Vorteil des Kontrollstroms gegenüber getriebenen Einzelelektronen-Emittern liegt darin, dass der Fehler mit der Integrationszeit  $\Delta\tau$  abnimmt. Für praktische Anwendungen wären höhere Ströme notwendig, als sich mit dem hier verwendeten Messaufbau erzielen lassen. Zur Skalierung können jedoch eine Vielzahl an Quantenpunkten

parallel betrieben werden. Mit individuellen Ladungsdetektoren kann die Zahl  $N_{k,i}$  der Tunnelereignisse für jeden Quantenpunkt separat detektiert werden, aber die Korrektur proportional zur Gesamtanzahl  $N_k = \sum N_{k,i}$  erfolgen. Es ist dafür nicht zwingend notwendig, jeden Quantenpunkt einzeln zu regeln. Die Fluktuationen könnten schon über die Kontrolle eines oder weniger Quantenpunkte stabilisiert und so die Komplexität des Regelkreises reduziert werden. Vorteilhaft ist auch, dass der Parallelbetrieb nicht durch verschiedene Tunnelraten der individuellen Quantenpunkte beeinflusst wird. Dies macht die Skalierung robust gegenüber Unterschieden in den mikroskopischen Details der Quantenpunkte. Zusätzlich zur Parallelisierung können die individuellen Ströme durch die Quantenpunkte erhöht werden. Die dafür notwendige Zeitauflösung lässt sich mittels Hochfrequenz-Ladungsdetektoren (rf-SETs und QPCs) erzielen, für die bereits Bandbreiten über 10 MHz demonstriert wurden [17, 162, 163].



# 7

## Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden erfolgreich zwei unterschiedliche Ansätze demonstriert, die zeitlichen Fluktuationen zwischen den Einzelelektronen-Tunnelereignissen in einem Quantenpunkt aktiv zu reduzieren. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse eröffnen vielfältige Möglichkeiten zur Optimierung von Anwendungen auf der Grundlage von Einzelelektronen-Tunnelprozessen in Quantenpunkten. Beispiele für Applikationen in empfindlichen Sensoren, Einzelelektronen-Emittern oder stabilen Stromquellen werden in den Zusammenfassungen der Kapitel 5 und 6 näher diskutiert. An dieser Stelle sollen abschließend nur noch einmal die wichtigsten inhaltlichen Punkte der Arbeit zusammengefasst werden.

Der untersuchte Quantenpunkt wurde mittels einer Topgate-Struktur elektrostatisch in einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG) erzeugt. Das 2DEG basierte auf einer mittels Molekularstrahlepitaxie (MBE) hergestellten AlGaAs/GaAs Heterostruktur, an dessen Oberfläche lithographisch die Gates aufgebracht wurden. Die Topgate-Struktur ermöglichte die für die Experimente notwendige kontrollierte Steuerung der Rein- und Raustunnelprozesse im Quantenpunkt. Dazu wurden bis zu drei Quantenpunkt-Gates über einen Echtzeitcontroller parallel angesteuert. Um einen sequenziellen Einzelelektronen-Tunnelprozess zu gewährleisten, wurde der Quantenpunkt im Coulomb-Blockade-Regime betrieben.

Zur Bestimmung der zeitlichen Fluktuationen zwischen den Tunnelereignissen wurde ein kapazitiv gekoppelter Quantenpunktkontakt (QPC)

als Ladungsdetektor betrieben. Auf der Flanke zwischen zwei Leitwertplateaus reagierte dieser sensitiv auf Potentialänderungen in seiner Umgebung und konnte so die Ladungsänderungen am Quantenpunkt detektieren. Die hohe Sensitivität des QPCs erlaubte es, den Zeitpunkt jedes einzelnen Tunnelereignisses präzise zu erfassen. Aus der zeitlichen Abfolge konnten die Rein- und Raustunnelrate, die Zählstatistik sowie die Besetzungs- und Rückkehrzeiten extrahiert werden. Die Fluktuationen wurden anhand der Zählstatistik charakterisiert. Der Fanofaktor der Zählstatistik diente in den Auswertungen als Maß für die Unterdrückung des Schrotrauschens.

Der erste Ansatz (*open-loop control*), die stochastischen Fluktuationen zwischen den Tunnelereignissen zu reduzieren, bestand darin, den Tunnelprozess mit einem externen periodischen Antrieb zu synchronisieren. Zunächst wurde anhand der Phasenbeziehungen der Tunnelereignisse gezeigt, dass sich die Rein- und Raustunnelprozesse sowohl asymmetrisch als auch symmetrisch zueinander modulieren lassen. Darauf aufbauend wurde für die beiden Modulationssymmetrien die Synchronisation der Tunnelereignisse mit dem externen Antrieb untersucht. Die Synchronisation bewirkte ein regelmäßigeres Auftreten der Tunnelereignisse, messbar als Verringerung des Fanofaktors. Es zeigte sich, dass überhaupt nur bei asymmetrischem Antrieb eine effektive Synchronisation stattfindet und der Synchronisationsmechanismus dem der Stochastischen Resonanz (SR) für ein bistabiles System entspricht. In einem SR-System durchläuft die Synchronisation ein Optimum als Funktion der Antriebsfrequenz und des Rauschlevels. Ein solches Optimum wurde auch hier für den getriebenen Einzelelektronen-Tunnelprozess gefunden. Der Fanofaktor durchlief sowohl als Funktion der externen Antriebsfrequenz als auch des intrinsischen Schrotrausch-Levels ein Minimum. Allerdings stammte das Rauschen dabei nicht aus einer thermischen oder externen Quelle, sondern war eine intrinsische Eigenschaft des quantenmechanischen Tunnelprozesses an sich. Die experimentellen Ergebnisse demonstrieren ent-

---

sprechend das bis dahin nur theoretisch beschriebene Auftreten einer Quanten-Stochastischen Resonanz.

Außer der Synchronisation wurde der Einfluss des externen Antriebs auf die Besetzungs- und Wartezeit analysiert. In den unterschiedlichen Verteilungen traten im Abstand einer Antriebsperiode Peaks auf. Peakposition und Peakhöhe wurden für eine Vielzahl an Antriebsparametern untersucht. Dabei zeigte sich, dass anhand der Peaks ein detailliertes Bild über den externen Antrieb gewonnen werden kann. So lässt sich aus der Peakposition in den Besetzungszeiten die Phasenbeziehung der Tunnelprozesse ablesen. Dagegen spiegelt die Peakhöhe in den Rückkehrzeiten die Modulationsamplitude der Tunnelprozesse wieder.

Der zweite Ansatz (*closed-loop control*), die stochastischen Fluktuationen zwischen den Tunnelereignissen zu reduzieren, bestand darin, den Tunnelprozess über einen Regelkreis zu stabilisieren. Die Regelung beruhte auf einer Rückkopplung zwischen den zeitlichen Fluktuationen und der effektiven Tunnelrate des Quantenpunktes. Dazu wurden in kurzen Regelintervallen die Tunnelereignisse gezählt und die Abweichung vom vorgegebenen Zielwert bestimmt. Zielwert und Regelintervall legten zusammen die effektive Tunnelrate des Quantenpunktes fest. Die Regelung des Tunnelprozesses erfolgte, indem am Ende jedes Intervalls die Kontrollspannung proportional zur Abweichung angepasst wurde. Die Regelung erwies sich als robust, solange zwischen Kontrollspannung und effektiver Tunnelrate ein monotoner Zusammenhang gewährleistet war. In diesem Falle war sichergestellt, dass der Tunnelprozess immer dann verlangsamt wurde, wenn in einem Intervall mehr Tunnelereignisse vorlagen als vom Zielwert vorgesehen und stets beschleunigt wurde, wenn zu wenige stattfanden. Der Einfluss der Rückkopplung auf den Einzelelektronen-Tunnelprozess wurde über die Zählstatistik ermittelt. Die Auswertung zeigte, dass durch die Regelung die zeitlichen Fluktuationen mit zunehmender Integrationszeit vollständig einfroren und die Zählstatistik dann nur noch von den Regelparametern bestimmt wurde. Das

Einfrieren der Zählstatistik hatte zur Folge, dass der Fanofaktor mit der Integrationszeit gegen Null ging und entsprechend das Schrotrauschen zunehmend unterdrückt wurde. Die Varianz der eingefrorenen Zählstatistik durchlief als Funktion der Rückkopplungsstärke ein Minimum. Der Wert des Minimums entsprach dort in etwa dem eingestellten Zielwert. Ein direkter Zusammenhang zwischen den beiden Größen wurde auch vom diskutierten Modellsystem bestätigt. Die Rückkopplung wurde somit effektiver, je feiner die zeitlichen Fluktuationen vermessen und korrigiert wurden. Erstaunlicherweise arbeitete die Regelung auch dann noch stabil, wenn der Zielwert kleiner war als Eins, also im Mittel weniger als ein Elektron pro Regelintervall den Quantenpunkt passierte.



>>> **import this**

*Beautiful is better than ugly.  
Explicit is better than implicit.  
Simple is better than complex.  
Complex is better than complicated.  
Flat is better than nested.  
Sparse is better than dense.  
Readability counts.  
Special cases aren't special enough to break the rules.  
Although practicality beats purity.  
Errors should never pass silently.  
Unless explicitly silenced.  
In the face of ambiguity, refuse the temptation to guess.  
There should be one– and preferably only one –obvious way to do it.  
Although that way may not be obvious at first unless you're Dutch.  
Now is better than never.  
Although never is often better than \*right\* now.  
If the implementation is hard to explain, it's a bad idea.  
If the implementation is easy to explain, it may be a good idea.  
Namespaces are one honking great idea – let's do more of those!*

# A

## Anhang

### *PEP 20 - The Zen of Python*

Im Anhang soll der kleine Teil ausprobiertter Konzepte und Vorgehensweisen archiviert werden, der sich im Laufe der Arbeit als besonders brauchbar bei der Durchführung der Experimente und anschließenden Datenanalyse erwiesen hat. Konkret werden hierfür Auszüge aus dem Programmcode der Messsoftware, Echtzeitsteuerung und statistischen Analyse dokumentiert.

## PyMeasure

*PyMeasure* wurde im Rahmen dieser Arbeit geschrieben, um einen möglichst nahtlosen Übergang von der Datenerfassung über die Auswertung zur finalen grafischen Darstellung zu gewährleisten. *PyMeasure* soll sich dazu möglichst nahtlos in Python integrieren, um die Grenzen zwischen Programmieren und Messen soweit wie möglich zu verwischen. Im Folgenden werden die grundlegenden Konzepte und Funktionen von *PyMeasure* beschrieben. Auf die internen Details der Funktionen, Module und Gerätekommunikation soll hier nicht weiter eingegangen werden.

### Abhängigkeiten

PyMeasure nutzt intern eine Vielzahl an Pythonpaketen. Es wird daher die Verwendung einer Python Distribution (Anaconda + Conda-Forge, WinPython, Canopy, ...) empfohlen, die alle notwendigen Abhängigkeiten (Numpy, SciPy, Pandas, Matplotlib, PyQtGraph, Jupyter, IPython, Spyder, Cython, PyVisa, ...) für das wissenschaftliche Arbeiten mitbringt.

### Einbinden

Über den *import* Befehl wird *PyMeasure* in Python eingebunden.

---

```
from pymeasure import pym
```

---

Dabei bündelt das *pym* Modul alle für die Anwendung wichtigen Funktionen. Die restlichen Module des *PyMeasure* Pakets sind lediglich für den internen Gebrauch.

### Instruments und Channels

Zwei der zentralen Designkonzepte von *PyMeasure* sind *Instruments* und *Channels*. Bis auf wenige zusätzliche geräteweite *Attributs* sind *Instruments* eine Ansammlung von *Channels*. Ein *Channel* ist dabei meist

---

ein physischer Ein- und/oder Ausgang eines Messgerätes. Diese Abstraktion ermöglicht es ganz unterschiedliche Gerätetypen identisch anzusprechen und gewährleistet so eine hohe Wiederverwertbarkeit des Programmcodes bei unterschiedlichsten experimentellen Konfigurationen.

Zur Verfügung stehende *Instruments* lassen sich in *PyMeasure* unter Angabe ihrer Geräteadresse einbinden. Die Kommunikation findet für die meisten Messgeräte über *PyVISA* statt.

---

```
# Kryo and diagnostic instruments
he3 = pym.instruments.RonnyHe3('ASRL14::INSTR')
valve = pym.instruments.RonnyValve('ASRL2::INSTR')
ilm = pym.instruments.QxfordILM('ASRL1::INSTR', isobus=6)
itc = pym.instruments.QxfordITC503('ASRL1::INSTR', isobus=1)
pt1000 = pym.instruments.Keithley2400(GPIB2::INSTR, defaults=True, reset=False)

# Measurement instruments
dac = pym.instruments.Ad5791Dac('ASRL12::INSTR', defaults=True, reset=False)
adwin = pym.instruments.AdwinPro2(defaults=True, reset=False)
```

---

Der Zugriff auf einen *Channel* erfolgt über den *Key* des *Channels*. Die beiden wichtigsten Methoden sind *read()* und *write()*.

---

```
# Measurement instruments
dac['5b'].write(12)
dac['5b'].read()
>>> 12.0

valve['percent'].write(75)
valve['pressure'].read()
>>> 2e-3
```

---

*Channels* können eine Vielzahl unterschiedlicher *Attributs* besitzen, wie z.B. Integrationszeit, Offset, Faktor, Einheit ... So lassen sich die Ausgänge steppen, Spannungen limitieren, die Integrationszeit einstellen, ...

---

```
dac['5b'].steprate = 0.5
dac['5b'].limit = (-1.0, 0)
adwin['adcl'].integration_time = 1/50
```

---

Oft werden von einem *Instrument* nur wenige *Channels* benötigt. Es ist daher unübersichtlich, diese immer über das zugehörige *Instrument* anzusprechen. *PyMeasure* ermöglicht es daher, die verwendeten *Channels* in einem neuen *Instrument* zu bündeln. Dabei können die *Channels* gleich

unbenannt werden, um ihnen so eine physikalische Bedeutung zu verleihen. Dieses vereinfacht das Arbeiten mit einem komplexen Messaufbau erheblich.

---

```
kryo = pym.Instrument()
kryo['he_level'] = ilm['helium']
kryo['temperature'] = itc['temperature']
kryo['needle'] = itc['needle_valve']
kryo['pressure'] = valve['pressure']
kryo['pump_power'] = valve['percent']

sample = pym.Instrument()
sample['idot'] = adwin['adc1']
sample['iqpc'] = adwin['adc2']
sample['sddot'] = dac['1a']
sample['sdqpc'] = dac['1b']
sample['gt1'] = dac['2b']
sample['gp'] = dac['2b']
sample['gt2'] = dac['2b']
sample['gb1'] = dac['2a']
sample['gb2'] = dac['2b']
sample['gqpc'] = dac['2a']
```

---

Anschließend können die Spannungsteiler, Verstärker, Limits, Stepraten und so weiter konfiguriert werden.

---

```
# ITHACO and FEMTO curent amplifier gain
sample['idot'].factor = 1e9
sample['iqpc'].factor = 1e8

# Voltag divider 1:1000 for quantum dot and QPC bias
sample['sddot'].factor = 1e3
sample['sdqpc'].factor = 1e3

# Gate limits
sample['gt1'].limit = (-0.8, 0)
sample['gp'].limit = (-0.8, 0)
sample['gt2'].limit = (-0.8, 0)
sample['gb1'].limit = (-0.5, 0)
sample['gb2'].limit = (-0.5, 0)
sample['gqpc'].limit = (-2.0, 0)

# Steprate defines with predefined steptime the stepsize = steprate * steptime
sample['gt1'].steprate = 0.5
sample['gp'].steprate = 0.5
sample['gt2'].steprate = 0.5
sample['gb1'].steprate = 0.5
sample['gb2'].steprate = 0.5
sample['gqpc'].steprate = 0.5
```

---

Ab diesem Zeitpunkt muss man nichts mehr über den Messaufbau wissen und kann sich ganz auf das Vermessen der Probe konzentrieren.

---

## Sweeps

Ein weiteres zentrales Designkonzept von *PyMeasure* sind die als *Generatoren* implementierten *Sweeps*. So kann über eine *For-Loop* direkt der Ausgang eines *Channels* gescannt werden. Dadurch lässt sich sehr einfach eine Strom-Spannungs Kennlinie wie in Abb.3.5 aufnehmen.

---

```
sweep = pym.LinearSweep(sample['gp'], start=-0.150, stop=-0.450, points=301)

for step in sweep:
    i_dot = sample['idot'].read()
    i_qpc = sample['iqpc'].read()
```

---

Durch Verschachteln zweier *For-Loops* können beispielsweise die Coulomb-Diamanten in Abb. 3.7 gemessen werden.

---

```
sweep0 = pym.LinearSweep(sample['sddot'], start=-5e-3, stop=5e-3, points=201)
sweep1 = pym.LinearSweep(sample['gp'], start=-0.500, stop=-0.700, points=401)

for step in sweep0:
    for step in sweep1:
        i_dot = sample['idot'].read()
        i_qpc = sample['iqpc'].read()
```

---

Sollen zwei *Channels* gemeinsam gescannt werden, bietet sich die Verwendung von *SweepZip* an. So erfolgte z.B. die Aufnahme des Stabilitätsdiagramms in Abb. 3.6.

---

```
sweep0_1 = pym.LinearSweep(sample['gt1'], -0.360, -0.560, 401)
sweep0_2 = pym.LinearSweep(sample['gt2'], -0.400, -0.600, 401)
sweep1_1 = pym.LinearSweep(sample['gp'], -0.2, -0.7, 501)

for step in pym.SweepZip(sweep0_1, sweep0_2):
    for step in sweep1_1:
        i_dot = sample['idot'].read()
        i_qpc = sample['iqpc'].read()
```

---

## Looper

Der *Looper* bündelt die *Sweeps* und hält das Messskript lesbarer, indem es den technischen Code intern handhabt. Eine Aufgabe des *Loopers* ist es, die Kommunikation zwischen den verschachtelten *Sweeps* zu steuern. Dadurch ist es möglich, eine Messung an bestimmten Stellen zu pausieren oder kontrolliert abzubrechen. Eine weitere Aufgabe ist der Zugriff auf den *Shape* und die aktuelle *Position*.

```
sweep0 = pym.LinearSweep(sample['sddot'], start=-5e-3, stop=5e-3, points=201)
sweep1 = pym.LinearSweep(sample['gp'], start=-0.500, stop=-0.700, points=401)

looper = pym.Looper(sweep0, sweep1)
looper.shape
>>> (201, 401)

for step in looper[0]:
    print()
    for step in looper[1]:
        print(looper.position, end=' ')
>>> ( 0, 0) ( 0, 1) ( 0, 2) ... ( 0, 398) ( 0, 399) ( 0, 400)
    ( 1, 0) ( 1, 1) ( 1, 2) ... ( 1, 398) ( 1, 399) ( 1, 400)
        ...
    (201, 0) (201, 1) (201, 2) ... (201, 398) (201, 399) (201, 400)
```

---

## HDF

Python bietet viele Möglichkeiten, die Messdaten in nahezu jedem Format zu speichern. *PyMeasure* unterstützt insbesondere das *HDF* Dateiformat. *HDF* bietet gute Möglichkeiten, die Messdaten zu strukturieren, zu dokumentieren und wird von den meisten Programmen zur Datenanalyse (IGOR, Matlab, Origin, ...) unterstützt. Daneben kann es einerseits gut mit n-dimensionalen Datenstrukturen der Charakterisierung umgehen.

---

```
# Creat new hdf file
with pym.HdfFile('counting_trace.hdf5') as hdf:

    # Create two datasets in hdf file
    hdf.create_dataset('idot', shape=looper.shape)
    hdf.create_dataset('iqpc', shape=looper.shape)

    # Sweep
    for step in looper[0]:
        for step in looper[1]:
            # Read quantu mdot and qpc current
            idot = sample['idot'].read()
            iqpc = sample['iqpc'].read()

            # Store data at the right positions
            hdf['idot'].add_data(looper.position, idot)
            hdf['iqpc'].add_data(looper.position, iqpc)
```

---

Des Weiteren stellt auch die großen Datenmenge des zeitaufgelösten Detektorsignals kein Problem dar und die eingebaute Kompression hält die Dateigröße zusätzlich klein.

---

```
# Creat new hdf file
with pym.HdfFile('counting_trace.hdf5') as hdf:
```

---

```

# Create two datasets in hdf file
hdf.create_dataset('trace',
                  dtype=np.float64, shape=(0, ), maxshape=(None, ),
                  fillvalue=np.nan, chunks=(10000, ), compression='gzip')

# Count for one hour and store the data every second
for step in SweepTime(points=3600, waitingtime=1):
    # Read data from trace FIFO
    trace = adwin['trace'].read()

    # Exten dataset with trace
    hdf['trace'].extent(trace)

```

---

## LiveGraph

Um eine direkte Bewertung der Messdaten zu ermöglichen, unterstützt *PyMeasure* über *LiveGraph* eindimensionale und zweidimensionale Datenplots. Dabei wurde insbesondere auf Skalierbarkeit geachtet, so soll es möglichst einfach sein, die Dimension der Messung zu erhöhen.

---

```

graph1d = pqg.LiveGraph()
graph1d['idot'] = pqg.Line(looper.shape[-1], pen='r')
graph1d['iqpc'] = pqg.Line(looper.shape[-1], pen='b')
graph1d.run()

graph2d = pqg.LiveGraph()
graph2d['idot'] = pqg.Image(looper.shape[-1])
graph2d['iqpc'] = pqg.Image(looper.shape[-1])
graph2d.run()

```

---

In der Messschleifen können die Messdaten dem Graphen zugefügt werden.

---

```

# Sweep
for step in looper[0]:
    for step in looper[1]:
        # Read quantu mdot and qpc current
        idot = sample['idot'].read()
        iqpc = sample['iqpc'].read()

        # Add data to graph
        graph1d['idot'].add_data(idot)
        graph1d['iqpc'].add_data(iqpc)
        graph2d['idot'].add_data(idot)
        graph2d['iqpc'].add_data(iqpc)

```

---

Die Aktualisierung der Plots übernimmt *LiveGraph* intern, damit die Messgeschwindigkeit nicht versehentlich ausgebremst wird.

## ADWin

Für die Aufzeichnung des zeitaufgelösten Detektorsignals, für die Detektion der Tunnelereignisse sowie für die parallele Ansteuerung der Gates, kam ein ADWinPro 2 der Firma Jäger Messtechnik zum Einsatz. Als Eingang stand eine 16bit ADC Karte und als Ausgang eine 16bit DAC Karte zur Verfügung, die mit 400 kHz gesampelt wurden. Die Programmierung der ADWin Steuerung erfolgt in ADBasic. Die wichtigsten Programmteile der *Event Schleife* sollen hier vorgestellt werden. Auf die Definitionen und Initialisierung der einzelnen Variablen wird wegen der Übersichtlichkeit verzichtet.

### Eingang

Die zum Detektorstrom proportionale Ausgangsspannung des Stromverstärkers wird eingelesen. Zur einfacheren Handhabung erfolgt die Umrechnung des digitalen DAC-Werts in den realen Spannungswert. Gleichzeitig findet die Übertragung des Detektorsignal über den *FIFO* an den Messrechner statt.

---

```
' Read next sample
sample_d = P2_Read_ADCF(adc_card , 1)
sample_f = (sample_d / 32768 - 1) * 10

trace_fifo = sample_f
```

---

### Tunnelereignisse

Die Detektion der Rein- und Raustunnelereignisse erfolgt anhand der Rauschbanden für die beiden Ladungszustände. Die Rauschbanden werden sekundlich vom Messrechner ermittelt und dem ADWin mitgeteilt. Dieser nutzt die aktuellen Banden, um in Echtzeit die Tunnelereignisse zu detektieren. Für die Rückkopplung werden die Raustunnelereignisse mitgezählt.



---

```

' Increase actual residence time
Inc(residence)

If (state = 0) Then
  ' Check for switch 0 → 1
  If ((state1_low_f <= sample_f) And (sample_f <= state1_high_f)) Then

    ' Store residence time in fifo
    residence_fifo = residence

    ' Reset actual residence time
    residence = 0

    ' Change actual state to 1
    state = 1
  EndIf
Else
  ' Check for switch 1 → 0
  If ((state0_low_f <= sample_f) And (sample_f <= state0_high_f)) Then

    ' Store residence time in fifo
    residence_fifo = residence

    ' Reset actual residence time
    residence = 0

    ' Change actual state to 0
    state = 0
  EndIf
EndIf

```

---

## Rückkopplung

Am Ende jedes Intervalls wird die Abweichung vom Erwartungswert bestimmt und die Gatespannungen entsprechend angepasst.

---

```

' Check if feedback mode is activated
If (control_mode = 1) Then

  ' Calculate sample length of feedback interval
  fb_interval_samples = fb_interval * sampling_rate

  ' Increase feedback sample
  Inc(fb_sample)

  ' Check for feedback interval end
  If (fb_sample = fb_interval_samples) Then

    ' Calculate feedback response
    fb_diff = fb_counts - fb_targetnr
    amp_f = amp_f - fb_strength * fb_diff

    ' Check for low feedback boundary
    If (amp_f < fb_limit_low_f) Then
      amp_f = fb_limit_low_f
    EndIf
  EndIf

```

```
    ' Check for high feedback boundary
    If (amp_f > fb_limit_high_f) Then
        amp_f = fb_limit_high_f
    EndIf

    ' Reset feedback samples and counter
    fb_sample = 0
    fb_counts = 0
EndIf
EndIf
```

---

## Antrieb

Für das diskrete Sampling müssen die Spannungswerte für den harmonischen Antrieb berechnet werden.

```
' Check if driving mode is activated
If (control_mode = 2) Then

    ' Calculate points per period
    osc_points = sampling_rate / osc_freq

    ' Increase oscillator position
    Inc(osc_position)

    ' Calculate oscillator amplitude
    amp_f = osc_amp_f * sin(2 * pi * osc_position / osc_point)

    ' Check if period is at the end
    If (oscillator_position = osc_points) Then
        osc_position = 0
    EndIf
EndIf
```

---

## Transformation

Die Amplitude muss in die absoluten Spannungswerte der Gates umgerechnet werden. Gleichzeitig muss auch der Einfluss auf den Detektor über das QPC Gate kompensiert werden.

```
' Transform amplitude to gate vector
vt1_next_f = vt1a_f + amp_f * sin(angle)
vp_next_f = vpa_f + amp_f * cos(angle)
vt2_next_f = vt2a_f + amp_f * sin(angle)
vq_next_f = vqa_f - amp_f * compensate
```

---

---

## Prüfung

Die Praxis hat gezeigt, dass es diverse Fehlerquellen gibt und es sehr ratsam ist, die berechneten Spannungswerte nochmal konservativ zu prüfen. Insbesondere bei der Rückkopplung können sonst schnell viel zu hohe und oder zu niedrige Spannungswerte angelegt werden, was schlimmstenfalls eine Zerstörung und bestenfalls einen zeitraubenden Thermo-cycle der Probe zur Folge hat. Daher wurden feste Grenzen für die Spannungswerte und Spannungsänderungen vorgeschrieben.

---

```
' Set back limit flag
limit_flag = 0

' Check absolute and differential limits for tunnel gate 1
If ((-1.0 <= vt1_next_f) And (vt1_next_f <= 0.0)) Then
    If ((-0.15 <= (vt1_next_f - vt1_f)) And ((vt1_next_f - vt1_f) <= 0.15)) Then
        Inc(limit_flag)
    EndIf
EndIf

' Check absolute and differential limits for plunger gate
If ((-1.0 <= vp_next_f) And (vp_next_f <= 0.0)) Then
    If ((-0.15 < (vp_next_f - vp_f)) And ((vp_next_f - vp_f) < 0.15)) Then
        Inc(limit_flag)
    EndIf
EndIf

' Check absolute and differential limits for tunnel gate 2
If ((-1.0 <= vt2_next_f) And (vt2_next_f <= 0.0)) Then
    If ((-0.15 < (vt2_next_f - vt2_f)) And ((vt2_next_f - vt2_f) < 0.15)) Then
        Inc(limit_flag)
    EndIf
EndIf

' Check absolute and differential limits for qpc gate
If ((-2.0 <= vq_next_f) And (vq_next_f <= 2.0)) Then
    If ((-0.1 < (vq_next_f - vq_f)) And ((vq_next_f - vq_f) < 0.1)) Then
        Inc(limit_flag)
    EndIf
EndIf

' Only change the gates if all gate voltages are fine
If (limit_flag = 4) Then
    vt1_f = vt1_next_f
    vp_f = vp_next_f
    vt2_f = vt2_next_f
    vq_f = vq_next_f
EndIf
```

---

### Ausgang

Zum Schluss müssen die Spannungswerte zu digitalen DAC Werten umgerechnet werden, alle Ausgangsregister beschrieben und die Spannungen schließlich parallel angelegt werden.

---

```
' Calculate dwords from voltages and set DAC output registers
P2_Write_DAC(dac_card, 1, (vt1_f / 10 + 1) * 32768)
P2_Write_DAC(dac_card, 2, (vp_f / 10 + 1) * 32768)
P2_Write_DAC(dac_card, 3, (vt2_f / 10 + 1) * 32768)
P2_Write_DAC(dac_card, 4, (vq_f / 10 + 1) * 32768)

' Apply all output voltages parallel
P2_Start_DAC(dac_card)
```

---

### Zählstatistik

#### Python

Hier wird die Auswertung der Zählstatistik an Hand des nachfolgenden Codebeispiels erläutert. Das Beispiel zeigt funktionstüchtigen Python 3 Code und implementiert alle für die statistische Auswertung notwendigen Funktionen.

---

```
import numpy as np
from collections import defaultdict
from scipy.special import binom

# Simulate poissonian tunneling process
def generate_residence_times(tunneling_rate0, tunneling_rate1, nr_of_events):
    residence_times = []
    for _ in range(0, nr_of_events, 2):
        residence_times.append(-np.log(1.0 - np.random.random()) / tunneling_rate0)
        residence_times.append(-np.log(1.0 - np.random.random()) / tunneling_rate1)

    return residence_times

# Counting histogram class definition
class CountingHistogram(defaultdict):

    def __init__(self):
        super().__init__(int)

    @property
    def events(self):
        return np.array(sorted(self.items(), key=operator.itemgetter(0))).T[0]
```

---

```

@property
def counts(self):
    return np.array(sorted(self.items(), key=operator.itemgetter(0)).T[1])

@property
def elements(self):
    return np.sum(self.counts)

@property
def mean(self):
    return np.sum(self.counts * self.events) / self.elements

# Calculate n-th moment
def central_moment(self, n):
    return np.sum(self.counts * ((self.events - self.mean)**n)) / self.elements

# Calculate n-th cumulants
def cumulants(self, n):
    if n == 0:
        return 1.
    elif n == 1:
        return self.mean
    elif n==2:
        return self.central_moment(2)
    elif n==3:
        return self.central_moment(3)
    elif n==4:
        return self.central_moment(4) - 3 * self.central_moment(2)**2

# Counting function
def py_counting(counting_histogram, event_times, integrationtime, offset=0):

    # Counter variable
    counts = 0

    # Remove all events until offset
    event_times = event_times[event_times >= offset]

    # Iterate over all tunneling events
    for event_time in event_times:

        # Shift counting window to next position
        while ((offset + integrationtime) < event_time):
            offset += integrationtime

        # Add counts to counting histogram
        counting_histogram[counts] += 1

        # Set counter variable back to zero
        counts = 0

    # Increase counter
    counts += 1

# Generate 1 Million residence times with rate_in=1.5kHz and rate_out=3kHz.
residence_times = generate_residence_times(1500, 3000, 1000000)

# Get times of tunneling events by cumulative summing the residence times

```

```
event_times = np.cumsum(residence_times)

# Split event_times into 'in' and 'out' tunneling
in_times = event_times[::2]
out_times = event_times[1::2]

# Create counting histogram to store counts
counting_histogram = CountingHistogram()

# Count the 'in' events for integration time 1s and repeat with 1ms offsets
for offset in np.arange(0, 1., 1e-3):
    py_counting(counting_histogram, in_times, 1., offset)

# Determine the first 4 cumulants of the counting histogram
cumulants = [counting_histogram.cumulants(n) for n in range(5)]
```

---

Ausgangspunkt für die Auswertung der Zählstatistik sind die, aus der Digitalisierung gewonnen Besetzungszeiten. Diese liegen als sequenzielle Abfolge vor. Um die ordnungsgemäße Funktionsweise der Zählalgorithmen zu überprüfen, kann man die stochastischen Besetzungszeiten teilweise von einem Pseudozufallszahlen-Generator erzeugen lassen. Dazu wird hier der sequenzielle Tunnelprozess mit  $\Gamma_{\text{in}} = 1,5 \text{ kHz}$  und  $\Gamma_{\text{out}} = 3,0 \text{ kHz}$  simuliert:

---

```
residence_times = generate_residence_times(1500, 3000, 1000000)
```

---

Für die Zählstatistik wird der Zeitpunkt jedes einzelnen Tunnelereignisses benötigt. Dieses erreicht man durch kumulatives Aufsummieren der sequenziellen Besetzungszeiten:

---

```
event_times = np.cumsum(residence_times)
```

---

Im folgenden sollen nur noch die Reintunnelereignisse weiter ausgewertet werden, daher benötigt man jede zweite Besetzungszeit:

---

```
in_times = event_times[::2]
```

---

Jetzt müssen nur noch die Position des Zählfenster schrittweise variiert werden und die Anzahl der darin liegenden Tunnelereignisse gezählt werden. Dazu wird hier beispielhaft eine Integrationszeit von  $\Delta\tau = 1 \text{ s}$  gewählt und der Offset in 1 ms Schritten verschoben:

---

```
# Count the 'in' events for integration time 100ms and repeat with 10ms offsets
counting_histogram = CountingHistogram()

for offset in np.arange(0, 1., 1e-3):
    py_counting(counting_histogram, in_times, 1., offset)
```

---

---

Um die vollständige Zählstatistik zu erhalten, muss dieser Teil lediglich für eine Vielzahl an Integrationszeiten ausgeführt werden.

Anschließend können die Kumulanten für das Zählhistogramm berechnet werden:

---

```
cumulants = counting_histogram.cumulants(4)
```

---

## Cython

Je nach Datenmenge und gewünschter zeitlicher Auflösung der Zählstatistik kann der hier beschriebene dynamische Python Code allerdings sehr lange Laufzeiten aufweisen. In der Praxis wurde die Zählfunktion daher in Cython implementiert. Dazu sind nur leichte Anpassung des vorherigen Python Codes notwendig:

---

```
%%cython
import numpy as np
cimport numpy as np

# Declare fused type to use generic datatype
ctypedef fused datatype:
    short
    int
    long
    unsigned short
    unsigned int
    unsigned long
    float
    double

# Define counting function
def cy_counting(counting_histogram,
                np.ndarray[datatype, ndim=1] event_times,
                datatype integrationtime,
                datatype offset):

    # Remove all events until offset
    event_times = event_times[event_times >= offset]

    # Declare and define variables
    cdef unsigned long counts = 0
    cdef datatype event
    cdef unsigned long i

    for i in range(event_times.shape[0]):
        event = event_times[i]

        while ((offset + integrationtime) < event):
            offset += integrationtime
```

```
# Add counts to counting histogram
counting_histogram[counts] += 1

# Set counter variable back to zero
counts = 0

# Increase counter
counts += 1
```

---

Cython erzeugt einen schnellen kompilierten C-Code, der über ein Interface unverändert in Python aufgerufen werden kann. Das Timing der beiden Funktionen zeigt, dass die leicht angepasste Cython Funktion etwa 25 mal schneller läuft, als die entsprechende Python Funktion:

---

```
%%timeit
counting_histogram = CountingHistogram(int)
for offset in np.linspace(0, 1., 1000, endpoint=False):
    cy_counting(counting_histogram, in_times, 1., offset)
```

→ 1 loop, best of 3: 4.8 s per loop

```
%%timeit
counting_histogram = CountingHistogram(int)
for offset in np.linspace(0, 1., 1000, endpoint=False):
    py_counting(counting_histogram, in_times, 1., offset)
```

→ 1 loop, best of 3: 2m 8s per loop

---

Hier wurde lediglich der engste Flaschenhals (die Iteration über alle Tunnelereignisse) entfernt. Mit weiteren Anpassungen kann eine weitere Verkürzung der Laufzeit erfolgen.

Das Testen der Funktionen in Python und die schrittweise Portierung der Flaschenhalse nach Cython hat sich als sehr produktive Vorgehensweise erwiesen.



---

## Masseführung

Damit die Zählsignale überhaupt sauber detektierbar sind, ist eine wohl überlegte Massenführung notwendig. Bei der Sternförmigen-Massenführung sollte man sich allerdings nicht unbedingt auf Schutz- oder BNC-Leiter verlassen. Befindet sich die Hauptmasse am Kryostaten, spielen Erdschleifen der Diagnostik keine Rolle. Es gilt vor allem Erdschleifen, an denen Messgeräte oder Signalleitungen beteiligt sind, zu unterbinden. Reicht dies alles nicht aus, muss die Störquelle gesucht und beseitigt werden. Die Suche kann durchaus Tage dauern. Systematik ist dabei das einzige was zählt, alles andere ist nur Voodoo. Letztlich findet sich der Störer immer im eigenen Labor.

## ESD Schutz

Es ist notwendig, Nanostrukturen vor elektrischen Ladungen und Feldern in ihrer makroskopischen Umgebung, zu schützen. Existierende Potentialunterschiede werden durch den unkontrollierten Zu- und Abfluss elektrischer Ladungen ausgeglichen, wobei es zur Zerstörung der Probe kommen kann. Leider wird der Schutz vor elektrostatischen Entladungen (ESD) häufig sträflich vernachlässigt oder unzureichend gehandhabt. Deshalb soll hier der richtige Umgang mit der Probe erläutert werden. Es gilt dabei, dass es keinen halben ESD Schutz gibt und daher immer alle Schutzmaßnahmen einzuhalten sind. Andernfalls resultiert daraus großer Frust und ein langer Zeitverlust.

Vor dem Bonden sind die Gates zunächst noch relativ gut geschützt aufgrund des hohen elektrischen Widerstandes des Substrates. Nach dem Bonden stehen alle Gates über den Chipcarrier in gutem elektrischen Kontakt mit der Umgebung, und ein Ladungsausgleich kann sehr einfach stattfinden. Die Probe ist ab dem Zeitpunkt somit *scharf* gestellt und kann bei falscher Handhabung jederzeit *explodieren*. Es ist zwar auch möglich,

dass die Gates schon vor dem Bonden elektrostatisch zerstört werden. Das hat sich aber in der Praxis als recht unwahrscheinlich erwiesen.

Mit der Probe darf nach dem Bonden nur an geeigneten ESD Arbeitsplätzen offen hantiert werden. Ein optimaler ESD Arbeitsplatz besteht aus:

- Erdungsmatte für Tisch und Boden
- Erdungsarmband (sitzend) oder Fußerdung (stehend)
- ESD Stuhl
- ESD Kleidung: Handschuhe, Kittel
- ESD Werkzeug: Schraubenzieher, Pinzette
- Luftionisierer

Außerdem sind im Arbeitsbereich nur ESD geeignete Materialien und Utensilien erlaubt, während alles andere entfernt werden muss. Wenn es wie am Bonder oder Lichtmikroskop offene Plastikteile gibt, empfiehlt sich der Einsatz eines Luftionisierers um Oberflächenladungen abzubauen.

Beim Einbau der Probe in den Kryostaten gilt neben den Voraussetzungen für den ESD Arbeitsplatz, dass der Probenstab und alle Kontakte auf dem Potential des Arbeitsplatzes liegen. Auch Pumpen und Messgeräte müssen vor ihrem Anschluss zunächst immer auf das richtige Potential gebracht werden.

Zwischen zwei ESD Arbeitsplätzen (beispielsweise vom Bonder zum Kryostaten) muss die Probe in einer geeigneten Verpackung transportiert werden. Die Verpackungen müssen einerseits wie ein faradayscher Käfig wirken und vor externen elektrischen Feldern schützen. Gleichzeitig müssen aber Ladungen langsam ab- und zufließen können, um mögliche Potentialdifferenzen vor dem Auspacken an den Arbeitsplätzen sicher auszugleichen. Weder eine isolierende noch eine metallische Verpackung ist daher geeignet. Geeignete ableitende Probenverpackungen werden daher metallisch beschichtet oder besitzen ein eingeflochtenes Metallgitter.





# Literatur

1. R. A. Millikan. The Isolation of an Ion, a Precision Measurement of its Charge, and the Correction of Stokes's Law. *Science* **32**, 436–448 (1910).
2. H. Fletcher. My Work with Millikan on the Oil-drop Experiment. *Physics Today* **35**, 43–47 (1982).
3. S. Okamura. *History of Electron Tubes* 1. Aufl. (IOS Press, Tokyo, 1994).
4. W. Schottky. Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern. *Ann. Phys.* **362**, 541–567 (1918).
5. C. A. Hartmann. Über die Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt. *Ann. Phys.* **370**, 51–78 (1921).
6. A. W. Hull & N. H. Williams. Determination of Elementary Charge  $e$  from Measurements of Shot-Effect. *Phys. Rev.* **25**, 147–173 (1925).
7. R. Landauer. Condensed-matter physics: The noise is the signal. *Nature* **392**, 658–659 (1998).
8. Y. M. Blanter & M. Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Phys. Rep.* **336**, 1–166 (2000).
9. C. Beenakker & C. Schönberger. Quantum Shot Noise. *Physics Today* **56**, 37–42 (2003).
10. W. Guggenbuehl & M. J. O. Strutt. Theory and Experiments on Shot Noise in Semiconductor Junction Diodes and Transistors. *Proceedings of the IRE* **45**, 839–854 (1957).
11. S. T. Liu & A. Van Der Ziel. Noise in thin film Al-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-Al diodes. *Physica* **37**, 241–245 (1967).

12. H. Birk, M. J. M. de Jong & C. Schönenberger. Shot-Noise Suppression in the Single-Electron Tunneling Regime. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1610–1613 (1995).
13. M. Reznikov *et al.* Temporal Correlation of Electrons: Suppression of Shot Noise in a Ballistic Quantum Point Contact. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3340–3343 (1995).
14. A. H. Steinbach, J. M. Martinis & M. H. Devoret. Observation of Hot-Electron Shot Noise in a Metallic Resistor. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3806–3809 (1996).
15. E. Onac *et al.* Shot-Noise Detection in a Carbon Nanotube Quantum Dot. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 026803 (2006).
16. O. Zarchin *et al.* Electron Bunching in Transport through Quantum Dots in a High Magnetic Field. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 066801 (2007).
17. W. Lu *et al.* Real-time detection of electron tunnelling in a quantum dot. *Nature* **423**, 422–425 (2003).
18. D. A. Bagrets & Y. V. Nazarov. Full counting statistics of charge transfer in Coulomb blockade systems. *Phys. Rev. B* **67**, 085316 (2003).
19. S. Gustavsson *et al.* Counting Statistics of Single Electron Transport in a Quantum Dot. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 076605 (2006).
20. M. H. Devoret & R. J. Schoelkopf. Amplifying quantum signals with the single-electron transistor. *Nature* **406**, 1039–1046 (2000).
21. G. Fève *et al.* An On-Demand Coherent Single-Electron Source. *Science* **316**, 1169–1172 (2007).
22. L. Gammaitoni *et al.* Stochastic resonance. *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223–287 (1998).
23. R. Löfstedt & S. N. Coppersmith. Quantum stochastic resonance. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1947–1950 (1994).

24. M. Grifoni & P. Hänggi. Coherent and Incoherent Quantum Stochastic Resonance. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1611–1614 (1996).
25. J. G. Walker & E. Jakeman. Optical Dead Time Effects And Sub Poissonion Photo-Electron Counting Statistics. *Proc. SPIE* **492**, 274–277 (1985).
26. S. Machida & Y. Yamamoto. Observation of sub-poissonian photoelectron statistics in a negative feedback semiconductor laser. *Opt. Commun.* **57**, 290–296 (1986).
27. M. A. Kastner. Artificial Atoms. *Physics Today* **46**, 24–31 (1993).
28. R. C. Ashoori. Electrons in artificial atoms. *Nature* **379**, 413–419 (1996).
29. L. P. Kouwenhoven & C. Marcus. Quantum dots. *Physics World* **June**, 35–39 (1998).
30. M. A. Kastner. The single-electron transistor. *Rev. Mod. Phys.* **64**, 849–858 (1992).
31. L. P. Kouwenhoven, G. Schön & L. L. Sohn. in *Mesoscopic Electron Transport* 1. Aufl., 1–44 (Springer Science & Business Media, 1997).
32. L. P. Kouwenhoven, D. G. Austing & S. Tarucha. Few-electron quantum dots. *Rep. Prog. Phys.* **64**, 701–736 (2001).
33. T. Ihn. *Semiconductor Nanostructures* 1. Aufl. (Oxford University Press, New York, 2010).
34. R. Hanson *et al.* Spins in few-electron quantum dots. *Rev. Mod. Phys.* **79**, 1217–1265 (2007).
35. D. S. Duncan *et al.* Direct measurement of the destruction of charge quantization in a single-electron box. *Appl. Phys. Lett.* **74**, 1045–1047 (1999).
36. H. Grabert & M. H. Devoret. in *Single Charge Tunneling* 1. Aufl., 1–19 (Springer Science & Business Media, New York, 1992).

37. T. A. Fulton & G. J. Dolan. Observation of single-electron charging effects in small tunnel junctions. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 109–112 (1987).
38. L. P. Kouwenhoven *et al.* Excitation Spectra of Circular, Few-Electron Quantum Dots. *Science* **278**, 1788–1792 (1997).
39. C. Stampfer *et al.* Tunable Graphene Single Electron Transistor. *Nano Lett.* **8**, 2378–2383 (2008).
40. M. Jung *et al.* Shell structures in self-assembled InAs quantum dots probed by lateral electron tunneling structures. *Appl. Phys. Lett.* **87**, 203109 (2005).
41. M. Fuechsle *et al.* Spectroscopy of few-electron single-crystal silicon quantum dots. *Nat. Nanotechnol.* **5**, 502–505 (2010).
42. A. Groshev, T. Ivanov & V. Valtchinov. Charging effects of a single quantum level in a box. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1082–1085 (1991).
43. L. P. Kouwenhoven *et al.* Single electron charging effects in semiconductor quantum dots. *Z. Phys. B* **85**, 367–373 (1991).
44. C. J. Gorter. A possible explanation of the increase of the electrical resistance of thin metal films at low temperatures and small field strengths. *Physica* **17**, 777–780 (1951).
45. U. Meirav, M. A. Kastner & S. J. Wind. Single-electron charging and periodic conductance resonances in GaAs nanostructures. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 771–774 (1990).
46. C. W. J. Beenakker. Theory of Coulomb-blockade oscillations in the conductance of a quantum dot. *Phys. Rev. B* **44**, 1646–1656 (1991).
47. F. Hofmann *et al.* Single electron switching in a parallel quantum dot. *Phys. Rev. B* **51**, 13872–13875 (1995).
48. Y. Hu *et al.* A Ge/Si heterostructure nanowire-based double quantum dot with integrated charge sensor. *Nat. Nanotechnol.* **2**, 622–625 (2007).



49. P. Lafarge *et al.* Two-electron quantization of the charge on a superconductor. *Nature* **365**, 422–424 (1993).
50. M. J. Yoo *et al.* Scanning Single-Electron Transistor Microscopy: Imaging Individual Charges. *Science* **276**, 579–582 (1997).
51. A. N. Cleland & M. L. Roukes. A nanometre-scale mechanical electrometer. *Nature* **392**, 160–162 (1998).
52. Y. Y. Wei *et al.* Edge Strips in the Quantum Hall Regime Imaged by a Single-Electron Transistor. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1674–1677 (1998).
53. M. W. Keller *et al.* A Capacitance Standard Based on Counting Electrons. *Science* **285**, 1706–1709 (1999).
54. V. Venkatachalam *et al.* Local charge of the  $\nu = 5/2$  fractional quantum Hall state. *Nature* **469**, 185–188 (2011).
55. M. Field *et al.* Measurements of Coulomb blockade with a noninvasive voltage probe. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1311–1314 (1993).
56. R. Nemutudi *et al.* Noninvasive lateral detection of Coulomb blockade in a quantum dot fabricated using atomic force microscopy. *J. Appl. Phys.* **95**, 2557–2559 (2004).
57. J. Güttinger *et al.* Charge detection in graphene quantum dots. *Appl. Phys. Lett.* **93**, 212102 (2008).
58. I. Shorubalko *et al.* Self-Aligned Charge Read-Out for InAs Nanowire Quantum Dots. *Nano Lett.* **8**, 382–385 (2008).
59. C. W. J. Beenakker & H. van Houten. Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures. *Solid State Phys.* **44**, 1–228 (1991).
60. J. M. Krans *et al.* The signature of conductance quantization in metallic point contacts. *Nature* **375**, 767–769 (1995).
61. S. Datta. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* 398 S. (Cambridge University Press, 1997).

62. B. J. van Wees *et al.* Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 848–850 (1988).
63. A. Szafer & A. D. Stone. Theory of Quantum Conduction through a Constriction. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 300–303 (1989).
64. M. Büttiker. Quantized transmission of a saddle-point constriction. *Phys. Rev. B* **41**, 7906–7909 (1990).
65. B. J. van Wees *et al.* Quantum ballistic and adiabatic electron transport studied with quantum point contacts. *Phys. Rev. B* **43**, 12431–12453 (1991).
66. B. J. van Wees *et al.* Quantized conductance of magnetoelectric subbands in ballistic point contacts. *Phys. Rev. B* **38**, 3625–3627 (1988).
67. K. v. Klitzing, G. Dorda & M. Pepper. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494–497 (1980).
68. J. L. Costa-Krämer *et al.* Nanowire formation in macroscopic metallic contacts: quantum mechanical conductance tapping a table top. *Surf. Sci.* **342**, L1144–L1149 (1995).
69. T. Fujisawa *et al.* Electron counting of single-electron tunneling current. *Appl. Phys. Lett.* **84**, 2343–2345 (2004).
70. R. Schleser *et al.* Time-resolved detection of individual electrons in a quantum dot. *Appl. Phys. Lett.* **85**, 2005–2007 (2004).
71. L. M. K. Vandersypen *et al.* Real-time detection of single-electron tunneling using a quantum point contact. *Appl. Phys. Lett.* **85**, 4394–4396 (2004).
72. J. M. Elzerman *et al.* Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot. *Nature* **430**, 431–435 (2004).
73. M. W. Keller *et al.* Accuracy of electron counting using a 7-junction electron pump. *Appl. Phys. Lett.* **69**, 1804–1806 (1996).

74. L. Fricke *et al.* Self-Referenced Single-Electron Quantized Current Source. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 226803 (2014).
75. T. Tanttu *et al.* Electron counting in a silicon single-electron pump. *New J. Phys.* **17**, 103030 (2015).
76. O.-P. Saira *et al.* Test of the Jarzynski and Crooks Fluctuation Relations in an Electronic System. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 180601 (2012).
77. B. Küng *et al.* Irreversibility on the Level of Single-Electron Tunneling. *Phys. Rev. X* **2**, 011001 (2012).
78. J. V. Koski *et al.* Experimental realization of a Szilard engine with a single electron. *PNAS* **111**, 13786–13789 (2014).
79. S. Gustavsson *et al.* Measurements of higher-order noise correlations in a quantum dot with a finite bandwidth detector. *Phys. Rev. B* **75**, 075314 (2007).
80. C. Flindt *et al.* Universal oscillations in counting statistics. *PNAS* **106**, 10116–10119 (2009).
81. U. Fano. Ionization Yield of Radiations. II. The Fluctuations of the Number of Ions. *Phys. Rev.* **72**, 26–29 (1947).
82. X. Jehl *et al.* Detection of doubled shot noise in short normal-metal/superconductor junctions. *Nature* **405**, 50–53 (2000).
83. R. de-Picciotto *et al.* Direct observation of a fractional charge. *Nature* **389**, 162–164 (1997).
84. M. Dolev *et al.* Observation of a quarter of an electron charge at the  $\nu = 5/2$  quantum Hall state. *Nature* **452**, 830–834 (2008).
85. A. Nauen *et al.* Shot noise in self-assembled InAs quantum dots. *Phys. Rev. B* **66**, 161303 (2002).
86. A. Nauen *et al.* Shot noise in tunneling through a single quantum dot. *Phys. Rev. B* **70**, 033305 (2004).

87. N. Ubbelohde *et al.* Spin-dependent shot noise enhancement in a quantum dot. *Phys. Rev. B* **88**, 041304 (2013).
88. N. Maire *et al.* Noise at a Fermi-edge singularity in self-assembled InAs quantum dots. *Phys. Rev. B* **75**, 233304 (2007).
89. N. Ubbelohde *et al.* Strong quantum memory at resonant Fermi edges revealed by shot noise. *Sci. Rep.* **2**, 374 (2012).
90. N. Ubbelohde *et al.* Measurement of finite-frequency current statistics in a single-electron transistor. *Nat. Commun.* **3**, 612 (2012).
91. H. L. Störmer *et al.* Two-dimensional electron gas at a semiconductor-semiconductor interface. *Solid State Commun.* **29**, 705–709 (1979).
92. M. J. Manfra. Molecular Beam Epitaxy of Ultra-High-Quality AlGaAs/GaAs Heterostructures: Enabling Physics in Low-Dimensional Electronic Systems. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **5**, 347–373 (2014).
93. M. A. Herman & H. Sitter. *Molecular Beam Epitaxy - Fundamentals and Current Status* 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
94. J. C. Bayer. *Herstellung und Charakterisierung von Mehrfachquantenpunkten*. Masterarbeit (Universität Hannover, 2014).
95. H.-C. Stahl & S. Hunklinger. *Low-Temperature Physics* 1. Aufl. (Springer Science & Business Media, Heidelberg, 2005).
96. C. Fricke. *Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor in der Transportspektroskopie*. Dissertation (Leibniz Universität Hannover, 2009).
97. N. C. Maire. *Rauschspektroskopie von Quantenpunktsystemen*. Dissertation (Leibniz Universität Hannover, 2009).
98. M. C. Rogge *et al.* Coupling symmetry of quantum dot states. *Phys. Rev. B* **72**, 233402 (2005).

99. M. C. Rogge *et al.* Tuning of tunneling rates in quantum dots using a quantum point contact. *Physica E* **34**, 500–503 (2006).
100. S. Gustavsson. *Time-resolved single-electron detection in semiconductor nanostructures*. Dissertation (ETH Zürich, 2008).
101. X. C. Zhang *et al.* Tunable electron counting statistics in a quantum dot at thermal equilibrium. *Phys. Rev. B* **80**, 035321 (2009).
102. J. Güttinger *et al.* Time-resolved charge detection in graphene quantum dots. *Phys. Rev. B* **83**, 165445 (2011).
103. A. Hofmann *et al.* Anisotropy and suppression of spin-flip tunneling. *Phys. Rev. Lett.* **119**, 176807 (2016).
104. A. Hofmann *et al.* Measuring the Degeneracy of Discrete Energy Levels Using a GaAs/AlGaAs Quantum Dot. *Phys. Rev. Lett.* **117**, 206803 (2016).
105. P. J. Smith. A Recursive Formulation of the Old Problem of Obtaining Moments from Cumulants and Vice Versa. *Am. Stat.* **49**, 217–218 (1995).
106. M. Abramowitz & I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions* 1046 S. (Dover, 1972).
107. C. Emary *et al.* Frequency-dependent counting statistics in interacting nanoscale conductors. *Phys. Rev. B* **76**, 161404 (2007).
108. D. Marcos *et al.* Finite-frequency counting statistics of electron transport: Markovian theory. *New J. Phys.* **12**, 123009 (2010).
109. C. Fricke *et al.* High-order cumulants in the counting statistics of asymmetric quantum dots. *Appl. Phys. Lett.* **96**, 202103 (2010).
110. S. Gustavsson *et al.* Counting statistics and super-Poissonian noise in a quantum dot: Time-resolved measurements of electron transport. *Phys. Rev. B* **74**, 195305 (2006).
111. C. Fricke *et al.* Bimodal counting statistics in single-electron tunneling through a quantum dot. *Phys. Rev. B* **76**, 155307 (2007).

112. W. Belzig. Full counting statistics of super-Poissonian shot noise in multilevel quantum dots. *Phys. Rev. B* **71**, 161301 (2005).
113. J. H. Davies *et al.* Classical theory for shot noise in resonant tunneling. *Phys. Rev. B* **46**, 9620–9633 (1992).
114. T. Brandes. Waiting times and noise in single particle transport. *Ann. Phys.* **17**, 477–496 (2008).
115. G. Haack, M. Albert & C. Flindt. Distributions of electron waiting times in quantum-coherent conductors. *Phys. Rev. B* **90**, 205429 (2014).
116. O. Naaman & J. Aumentado. Poisson Transition Rates from Time-Domain Measurements with a Finite Bandwidth. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 100201 (2006).
117. N. Watase *et al.* Single-electron counting statistics with a finite frequency bandwidth. *Jpn. J. Appl. Phys.* **53**, 04EJ01 (2014).
118. C. Nicolis & G. Nicolis. Stochastic aspects of climatic transitions—Additive fluctuations. *Tellus* **33**, 225–234 (1981).
119. R. Benzi *et al.* Stochastic resonance in climatic change. *Tellus* **34**, 10–16 (1982).
120. P. Hänggi. Stochastic Resonance in Biology, How Noise Can Enhance Detection of Weak Signals and Help Improve Biological Information Processing. *ChemPhysChem* **3**, 285–290 (2002).
121. T. Wellens, V. Shatokhin & A. Buchleitner. Stochastic resonance. *Rep. Prog. Phys.* **67**, 45 (2004).
122. M. D. McDonnell & D. Abbott. What Is Stochastic Resonance? Definitions, Misconceptions, Debates, and Its Relevance to Biology. *PLOS Comput. Biol.* **5** (2009).
123. L. Gammaitoni *et al.* Stochastic Resonance: A remarkable idea that changed our perception of noise. *Eur. Phys. J. B* **69**, 1–3 (2009).

124. S. Fauve & F. Heslot. Stochastic resonance in a bistable system. *Phys. Lett. A* **97**, 5–7 (1983).
125. B. McNamara, K. Wiesenfeld & R. Roy. Observation of stochastic resonance in a ring laser. *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2626–2629 (1988).
126. A. Simon & A. Libchaber. Escape and synchronization of a Brownian particle. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3375–3378 (1992).
127. D. Babič *et al.* Stochastic resonance in colloidal systems. *EPL* **67**, 158–164 (2004).
128. A. D. Hibbs *et al.* Stochastic resonance in a superconducting loop with a Josephson junction. *J. Appl. Phys.* **77**, 2582–2590 (1995).
129. K. Wiesenfeld & F. Moss. Stochastic resonance and the benefits of noise: from ice ages to crayfish and SQUIDS. *Nature* **373**, 34–36 (1995).
130. R. N. Mantegna & B. Spagnolo. Stochastic resonance in a tunnel diode. *Phys. Rev. E* **49**, R1792–R1795 (1994).
131. I. Y. Lee *et al.* Nanosignal Processing: Stochastic Resonance in Carbon Nanotubes That Detect Subthreshold Signals. *Nano Lett.* **3**, 1683–1686 (2003).
132. R. L. Badzey & P. Mohanty. Coherent signal amplification in bistable nanomechanical oscillators by stochastic resonance. *Nature* **437**, 995–998 (2005).
133. F. Mueller, S. Heugel & L. J. Wang. Optomechanical stochastic resonance in a macroscopic torsion oscillator. *Phys. Rev. A* **79**, 031804 (2009).
134. F. Monifi *et al.* Optomechanically induced stochastic resonance and chaos transfer between optical fields. *Nat. Photonics* **10**, 399–405 (2016).
135. F. Hartmann *et al.* Stochastic resonance in a nanoscale Y-branch switch. *Appl. Phys. Lett.* **96**, 172110 (2010).

136. K. Nishiguchi & A. Fujiwara. Single-Electron Stochastic Resonance Using Si Nanowire Transistors. *Jpn. J. Appl. Phys.* **50**, 06GF04 (2011).
137. H. Abbaspour *et al.* Stochastic Resonance in Collective Exciton-Polariton Excitations inside a GaAs Microcavity. *Phys. Rev. Lett.* **113**, 057401 (2014).
138. I. Stroescu, D. B. Hume & M. K. Oberthaler. Dissipative Double-Well Potential for Cold Atoms: Kramers Rate and Stochastic Resonance. *Phys. Rev. Lett.* **117**, 243005 (2016).
139. M. Grifoni & P. Hänggi. Nonlinear quantum stochastic resonance. *Phys. Rev. E* **54**, 1390–1401 (1996).
140. M. Grifoni *et al.* Quantum tunneling and stochastic resonance. *Phys. Rev. E* **53**, 5890–5898 (1996).
141. P. Talkner. Statistics of entrance times. *Physica A* **325**, 124–135 (2003).
142. P. Talkner *et al.* Statistics of transition times, phase diffusion and synchronization in periodically driven bistable systems. *New J. Phys.* **7**, 14 (2005).
143. L. Gammaitoni, F. Marchesoni & S. Santucci. Stochastic Resonance as a Bona Fide Resonance. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1052–1055 (1995).
144. G. Giacomelli, F. Marin & I. Rabbiosi. Stochastic and Bona Fide Resonance: An Experimental Investigation. *Phys. Rev. Lett.* **82**, 675–678 (1999).
145. M. H. Choi, R. F. Fox & P. Jung. Quantifying stochastic resonance in bistable systems: Response vs residence-time distribution functions. *Phys. Rev. E* **57**, 6335–6344 (1998).
146. L. Gammaitoni *et al.* Stochastic Resonance in Bistable Systems. *Phys. Rev. Lett.* **62**, 349–352 (1989).



147. A. Longtin, A. Bulsara & F. Moss. Time-interval sequences in bistable systems and the noise-induced transmission of information by sensory neurons. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 656–659 (1991).
148. M. Albert, C. Flindt & M. Büttiker. Distributions of Waiting Times of Dynamic Single-Electron Emitters. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 086805 (2011).
149. E. Potanina & C. Flindt. Electron waiting times of a periodically driven single-electron turnstile. *Phys. Rev. B* **96**, 045420 (2017).
150. R. G. Knobel & A. N. Cleland. Nanometre-scale displacement sensing using a single electron transistor. *Nature* **424**, 291–293 (2003).
151. K. C. Schwab & M. L. Roukes. Putting Mechanics into Quantum Mechanics. *Physics Today* **58**, 36–42 (2005).
152. F. Stein *et al.* Robustness of single-electron pumps at sub-ppm current accuracy level. *Metrologia* **54**, S1 (2017).
153. BIPM. SI brochure: The International System of Units (8th edition). <https://www.bipm.org/en/publications/mises-en-pratique/electrical-units.html> (2008).
154. M. Wulf. Error accounting algorithm for electron counting experiments. *Phys. Rev. B* **87**, 035312 (2013).
155. L. Fricke *et al.* Self-Referenced Single-Electron Quantized Current Source. *Phys. Rev. Lett.* **112**, 226803 (2014).
156. T. Brandes. Feedback Control of Quantum Transport. *Phys. Rev. Lett.* **105**, 060602 (2010).
157. T. Wagner *et al.* Supplementary information to Strong suppression of shot noise in a feedback-controlled single-electron transistor. *Nat. Nanotechnol.* **12**, 218–222 (2017).
158. T. Brandes. A feedback scheme for control of single electron transport. *Phys. Status Solidi B* **254**, 1600548 (2017).

159. T. Brandes & C. Emary. Feedback control of waiting times. *Phys. Rev. E* **93**, 042103 (2016).
160. J. P. Pekola *et al.* Single-electron current sources: Toward a refined definition of the ampere. *Rev. Mod. Phys.* **85**, 1421–1472 (2013).
161. B. Kaestner & V. Kashcheyevs. Non-adiabatic quantized charge pumping with tunable-barrier quantum dots: a review of current progress. *Rep. Prog. Phys.* **78**, 103901 (2015).
162. J. Bylander, T. Duty & P. Delsing. Current measurement by real-time counting of single electrons. *Nature* **434**, 361–364 (2005).
163. M. C. Cassidy *et al.* Single shot charge detection using a radio-frequency quantum point contact. *Appl. Phys. Lett.* **91**, 222104 (2007).





# Lebenslauf

**Name:** Dipl. Ing. Timo Wagner

**Geburtstag:** 6. November 1984

**Geburtsort:** Emsdetten

**seit 2012** Vorbereitung der Dissertation am  
Institut für Festkörperphysik der  
Leibniz Universität Hannover,  
bei Prof. Dr. Rolf Haug

**2011 - 2012** Auslandsjahr an der  
Harvard Universität, Cambridge/USA,  
bei Prof. Dr. Amir Yacoby

**2004 - 2011** Studium der Nanostrukturtechnik an der  
Julius-Maximilians-Universität Würzburg,  
Diplomarbeit: "Transportcharakterisierung von  
Quantenstrukturen in HgTe",  
bei Prof. Dr. Hartmut Buhmann

**1995 - 2004** Maximilian-Kolbe-Gesamtschule, Saerbeck

**1991 - 1995** Wilhelm-Grundschule, Emsdetten



# Publikationen

Teile der Arbeit sind veröffentlicht:

- **Strong suppression of shot-noise in a feedback controlled single-electron transistor,**  
T. Wagner, P. Strasberg, J. C. Bayer, E. P. Rugeramigabo, T. Brandes & R. J. Haug,  
*Nature Nanotechnol.* **12**, 218–222 (2017)
- **Optimal single-electron feedback control,**  
T. Wagner, J. C. Bayer, E. P. Rugeramigabo, & R. J. Haug,  
*Phys. Status Solidi B* **254**, 1600701 (2017)

Teile der Arbeit befinden sich im Review:

- **Tunneling controlled stochastic resonance in a driven single-electron quantum dot,**  
T. Wagner, J. C. Bayer, E. P. Rugeramigabo, P. Hänggi & R. J. Haug,

Weitere Publikationen:

- **Charge reconfiguration in arrays of quantum dots,**  
J. C. Bayer, T. Wagner, E. P. Rugeramigabo, & R. J. Haug,  
*Phys. Rev. B* **96**, 235305 (2017)
- **Influence of oval defects on transport properties in high-mobility two-dimensional electron gases,**  
L. Bockhorn, A. Velieva, S. Hakim, T. Wagner, E. P. Rugeramigabo, D. Schuh, C. Reichl, W. Wegscheider & R. J. Haug,  
*Appl. Phys. Lett.* **108**, 092103 (2016)
- **Partitioning of on-demand electron pairs,**  
N. Ubbelohde, F. Hohls, V. Kashcheyevs, T. Wagner, L. Fricke, B. Kästner, K. Pierz, H. W. Schumacher & R. J. Haug,  
*Nature Nanotechnol.* **10**, 46–49 (2015)
- **Induced superconductivity in the quantum spin Hall edge,**  
S. Hart, H. Ren, T. Wagner, P. Leubner, M. Mühlbauer, C. Brüne, H. Buhmann, L. W. Molenkamp & A. Yacoby,  
*Nature Phys.* **10**, 638–643 (2014)





# Konferenz- und Seminarbeiträge

- *Frühjahrstagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2018 in Berlin (**Vortrag**)
- *International Winterschool: New Developments in Solid State Physics*, 2018 in Mauterndorf/Österreich (**Poster**)
- *International Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems*, 2017 in Penn State/USA (**Poster**)
- *Workshop der NTH School for Contacts in Nanosystems*, 2017 in Braunschweig (**Vortrag**)
- *Frühjahrstagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2017 in Dresden (**Vortrag**)
- *Nanoday*, 2016 in Hannover (**Vortrag**)
- *International Conference on the Physics of Semiconductors*, 2016 in Peking/China (**Vortrag**)
- *International Conference on Superlattices, Nanostructures and Nano-devices*, 2016 in Hongkong/China (**Vortrag**)
- *Frühjahrstagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2016 in Regensburg (**Vortrag**)
- *International Winterschool: New Developments in Solid State Physics*, 2016 in Mauterndorf/Österreich (**Poster**)
- *International Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems*, 2015 in Sendai/Japan (**Poster**)
- *Frühjahrstagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2015 in Berlin (**Vortrag**)
- *International Conference on Superlattices, Nanostructures and Nano-devices*, 2014 in Savannah/USA (**Vortrag**)



# Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei all denen bedanken, die zum Fortschritt und Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt:

- **Prof. Dr. Rolf J. Haug** für die intensive Betreuung der Dissertation und die Möglichkeit, die wissenschaftlichen Ergebnisse auf der ganz Welt präsentieren zu dürfen. Besonders habe ich geschätzt, dass die Tür im wahrsten Sinne des Wortes immer offen stand, egal ob für kurze Fragen oder lange Diskussionen.

- **Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Peter Hänggi** für die exzellente Zusammenarbeit bei der Quanten-Stochastischen Resonanz. Ohne diese wäre die Auswertung sicherlich irgendwo im Dickicht der SR-Maße stecken geblieben. Darüber hinaus möchte ich mich für die Übernahme des Koreferats bedanken.

- **Prof. Dr. Tobias Brandes** und **Dr. Philipp Strasberg** für die produktive Zusammenarbeit bei der Rückkopplung. Ihr stetiges Interesse an den Experimenten war immer Ansporn und Motivation zugleich. Die Nachricht vom plötzlichen Tod von Prof. Dr. Tobias Brandes hat mich sehr getroffen.

- **Prof. Dr. Michael Oestreich** für die freundliche Übernahme des Koreferats und das Interesse an der Arbeit.

- **Dr. Eddy P. Rugeramigabo** für die super stabile Heterostruktur.

- **Johannes C. Bayer** für weit aus mehr als die Herstellung der Probe. Auf seine Unterstützung bei der Umsetzung neuer Ideen war immer Verlass.

- **Ronny Hüther** dafür, dass er alles vor dem vollständigen Zerfall bewahrt.

- **Jan Kühne, Dr. Johannes Rode, Johannes C. Bayer** für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

**Der gesamten Abteilung Nanostrukturen** für eine tolle gemeinsame Zeit sowohl innerhalb als auch außerhalb des Instituts. Es ist immer gut zu wissen, dass man mit seinen Problemen nicht alleine dasteht.

- **allen Elektronen**, die sich freiwillig an den Experimenten beteiligt haben. Aufgrund ihrer Ununterscheidbarkeit muss hier leider auf eine persönliche Namensnennung verzichtet werden.

- **Familie und Freunden** für die permanente Erinnerung daran, dass die Welt nicht unter geht, wenn man einmal ein Elektron verpasst.