

Beschleunigte elektromagnetische Modellierung resonanter Hohlraumstrukturen durch effiziente Abspaltung des statischen Unterraums

M. Sc. Chris-Marvin Hamann, Lehrstuhl Theoretische Elektrotechnik, OvG-Univ. Magdeburg

Prof. Dr.-Ing. Marco Leone, Lehrstuhl Theoretische Elektrotechnik, OvG-Universität Magdeburg

1 Einleitung

Innerhalb von metallischen Gehäusen müssen angesichts hoher Schaltfrequenzen in leistungselektronischen und digitalen elektronischen Systemen bereits beim Schaltungsdesign Hohlraumresonanzen berücksichtigt werden. Für die Untersuchung möglicher Störungen sind aufwändige Simulationen notwendig, die insbesondere im Zeitbereich aufgrund der Resonanzen zusätzlich erschwert werden.

Um eine flexible Analyse komplexer Verbindungsstrukturen mit beliebigen Abschlüssen in metallische Gehäusen beliebiger Form im Frequenz- und Zeitbereich zu ermöglichen, lässt sich ein modales Netzwerkmodell nach [6] aufstellen. Hierzu müssen die Eigenfunktionen des elektrischen und magnetischen Feldes bestimmt werden. Da die analytische Berechnung nur für sehr einfache Strukturen möglich ist, müssen die Eigenwertprobleme numerisch, beispielsweise mit der Finite-Elemente-Methode (FEM), berechnet werden. Dabei ist es nicht notwendig das Eigenwertproblem vollständig zu lösen, da für die Betrachtung einer endlichen Frequenzbandbreite nur die ersten N Eigenfunktionen notwendig sind. Hierfür können entsprechende Unterraumverfahren wie die Arnoldi-Methode angewendet werden.

Jedoch ist bekannt, dass durch die Diskretisierung der Felder mit Kantenelementen in der FEM zusätzliche statische Moden entstehen (sog. „spurious modes“ [8]). Bei feinerer Vernetzung steigt der Anteil dieser Moden signifikant und die genaue Anzahl ist im Vorhinein nicht bekannt. Somit ist es nicht effizient, diese mit zu berechnen und zwischenzuspeichern. Dementsprechend wurden Methoden zur Abtrennung des statischen Unterraums implementiert. Hierzu wurde eine Baum-Kobaum-Zerlegung durchgeführt, um die Systemmatrizen zu reduzieren, wie dies in [7] für das magnetische Feld dargestellt ist. Für das elektrische Feld wurde der Baum, wie in [9] beschrieben, aufgestellt und in die vorige Methode integriert.

Um die notwendigen Transformationsmatrizen für das reduzierte Eigenwertproblem ohne statischen Unterraum aufzustellen, ist die Inverse der Systemmatrix notwendig. Beim Invertieren der dünnbesetzten FEM-Systemmatrix tritt jedoch das sogenannte „fill-in“ auf, welches bewirkt, dass für die Inverse eine dichtbesetzte Matrix resultiert. Bei den üblicherweise hohen Dimensionen der Systemmatrizen der FEM führt dies zu einem hohen Speicheraufwand für die Inversen. So liegt die Größe einer Inversen für ein Netz mit ca. 100000 Tetraedern bei ca. 100 GB, da 10^{10} Matrixelemente explizit gespeichert werden müssen. Aufgrund der sehr großen Anzahl der Matrixelemente ist der Zeitaufwand für die weiteren Berechnungsschritte sehr groß und die Abtrennung des statischen Unterraums ist nur bedingt durchführbar, aufgrund von Begrenzungen des Arbeitsspeichers. Um dieses Problem zu umgehen, wird in dieser Arbeit eine Approximation der dichtbesetzten Inversen der Systemmatrix in Form einer dünnbesetzten Matrix vorgenommen. So ist es möglich, die Inverse einer Matrix $[A]$ über das charakteristische Polynom dieser Matrix darzustellen. Das Polynom kann bei einer endlichen Potenz N abgebrochen werden, um ein approximatives Muster der relevanten Matrixelemente zu erhalten und nur diese zu betrachten. Hierbei ist aus empirischen Untersuchungen eine Approximation bis zur dritten Potenz meist für eine gute Genauigkeit ausreichend. Jedoch muss auch für diesen Ansatz die Inverse explizit aufgestellt werden. Um diese Notwendigkeit zu umgehen, wurde der SPAI-Algorithmus implementiert [4].

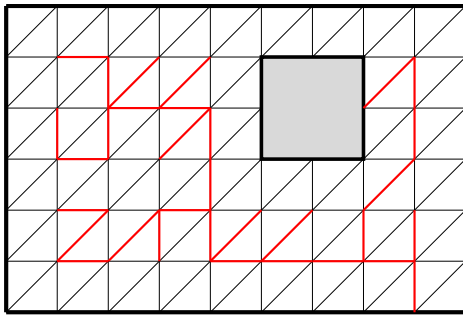


Bild 1: Aufspannender Baum T einer zweidimensionalen Vernetzung

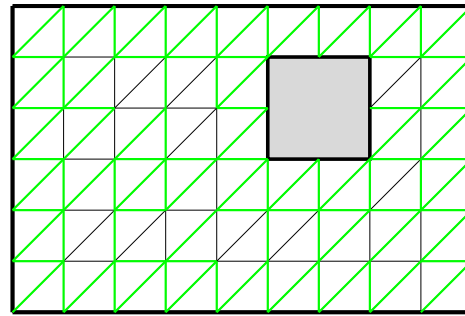


Bild 2: Kobaum C des Baumes T einer zweidimensionalen Vernetzung

Im Rahmen dieser Arbeit wird zunächst die Problemstellung der „spurious modes“ bei der numerischen Berechnung der Eigenfunktionen von Hohlraumstrukturen mittels FEM beschrieben und die notwendige Baumzerlegung vorgestellt, um die statischen Moden abzuspalten. Daraufhin wird die Notwendigkeit der approximierten Systemmatrix-Inversen beschrieben und der implementierte SPAI-Algorithmus vorgestellt. Die Anwendbarkeit des Ansatzes wird anhand des resultierenden modalen Netzwerkmodells [6] demonstriert, welches im Folgenden beschrieben wird. Schließlich wird der vorgestellte Ansatz anhand eines komplexen Beispiels validiert, wobei eine Analyse sowohl im Frequenzbereich als auch im Zeitbereich durchgeführt wird.

2 Abspaltung des statischen Unterraums

Um das Verhalten elektrischer Felder mittels der FEM zu untersuchen, wird üblicherweise von der Wellengleichung [3]

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

ausgegangen. Durch diesen Ansatz ist jedoch die Divergenzfreiheit des elektrischen Feldes \mathbf{E} bei Abwesenheit von Ladungsverteilungen nur implizit enthalten. Dies führt dazu, dass bei der Untersuchung der schwachen Formulierung der Wellengleichung als Variationsproblem für die FEM die Divergenzfreiheit zusätzlich erzwungen werden muss. Wenn jedoch als Basis für die FEM Kantenbasisfunktionen ersten Grades verwendet werden, fehlen die dafür notwendigen Freiheitsgrade und die numerischen Betrachtungen können zu nicht physikalischem Verhalten führen [7].

Nun wird bei der FEM ein Eigenwertproblem der Form [5]

$$[\mathbf{A}] \mathbf{e} = \lambda [\mathbf{B}] \mathbf{e} \quad (2)$$

betrachtet wird, mit den Systemmatrizen $[\mathbf{A}]$ und $[\mathbf{B}]$, welche die diskretisierten Rotationsoperatoren der Wellengleichung (1) darstellen. Aufgrund der oben beschriebenen Problematik entstehen bei der Auswertung dieses Eigenwertproblems zusätzliche statische Moden die sogenannten „spurious modes“. Diese nehmen einen signifikanten Anteil der berechneten Eigenfunktionen ein, vor allem bei genauerer Vernetzung, da die Anzahl der spurious modes mit der Zahl der freien Knoten, also der Tetraederknoten, die nicht auf PEC liegen, übereinstimmt.

Um die statischen Moden bei der Berechnung des Eigenwertproblems zu vernachlässigen, ist es möglich den statischen Unterraum der Systemmatrizen abzutrennen. Hierzu gibt es in der Literatur verschiedene Methoden, wie beispielsweise Baum-Kobaum-Zerlegungen [7], um die linear abhängigen Reihen der Systemmatrizen zu finden. Hierbei wird bei der Betrachtung des elektrischen Felder der Baum über die Kanten der verwendeten Vernetzung so aufgestellt, wie es in den Abbildungen 1 und 2 beispielhaft am zweidimensionalen Fall mit einer strukturierten Vernetzung gezeigt wird [9]. Die Kanten entlang der PEC-Randflächen können hierbei vernachlässigt werden,

da dort die elektrische Feldstärke den Wert Null annimmt und diese somit keinen Einfluss auf das Eigenwertproblem haben. Von allen galvanisch getrennten PEC-Flächen geht jeweils eine Kante des Baumes aus und die anderen Baumkanten verbinden die freien Knoten der Vernetzung. Hierbei entspricht nun der Baum den linear abhängigen Reihen der Systemmatrizen, also der Ursache der statischen Lösungen. Somit ist es möglich die Systemmatrizen wie folgt aufzutrennen:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}^{CC}] & [\mathbf{A}^{TC}] \\ [\mathbf{A}^{CT}] & [\mathbf{A}^{TT}] \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}^{CC}] & [\mathbf{B}^{TC}] \\ [\mathbf{B}^{CT}] & [\mathbf{B}^{TT}] \end{bmatrix} \quad (4)$$

Hierbei entsprechen die Indizes T den zum Baum gehörenden und C den zum Kobaum gehörenden Reihen und Spalten. Der gesuchte Vektor der elektrischen Feldkomponenten entlang der Tetraederkanten \mathbf{e} kann nun über die linear unabhängigen Reihen der Matrizen, also denen des Kobaums dargestellt werden. So lässt sich nun eine Transformationsmatrix $[\mathbf{T}]$ nach [7] aufstellen, die das Gesamtsystem reduziert:

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{B}]^{-1} [[\mathbf{A}^{CC}] \quad [\mathbf{A}^{TC}]]^T \quad (5)$$

Dadurch resultiert das reduzierte Eigenwertproblem

$$[\tilde{\mathbf{A}}]\tilde{\mathbf{e}} = \lambda[\tilde{\mathbf{B}}]\tilde{\mathbf{e}} \quad (6)$$

mit den neuen Systemmatrizen

$$[\tilde{\mathbf{A}}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{T}] \quad (7)$$

$$[\tilde{\mathbf{B}}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{B}] [\mathbf{T}]. \quad (8)$$

Die ursprünglichen Eigenvektoren aus (2) lassen sich hierbei über

$$\mathbf{e} = [\mathbf{T}]\tilde{\mathbf{e}} \quad (9)$$

rekonstruieren. Somit kann über diesen Ansatz das berechnete Eigenwertproblem reduziert werden, ohne dass Informationen über die Felder auf den Kanten verloren gehen.

3 Approximation der inversen Systemmatrix

Für das Aufstellen der reduzierten Systemmatrizen ist, wie in Gleichung (5) offensichtlich, die Inverse der spärlich besetzten Bandmatrix $[\mathbf{B}]$ notwendig. Um das hierbei auftretende „fill-in“ der Inversen $[\mathbf{B}]^{-1}$, zu umgehen, ist es möglich diese als eine spärlich besetzte Matrix zu approximieren, da ein Großteil der Einträge keine relevante Größenordnung haben. Dazu wurde der SPAI-Algorithmus (Sparse Approximate Inverse) [4] implementiert, welcher iterativ eine geeignete Approximation der Inversen bestimmt. Grundlage des Algorithmus' ist hierbei das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{m}_k} \left\| \left[\hat{\mathbf{B}} \right] \mathbf{m}_k - \hat{\mathbf{e}}_k \right\|. \quad (10)$$

Hierbei steht der Index k für die jeweilige Spalte der zu approximierenden Matrix, da der Algorithmus spaltenweise durchgeführt wird, was eine effiziente Parallelisierung ermöglicht. Über die Vorgabe einer booleschen Matrix $[\mathbf{P}]$ werden die zu füllenden Einträge der Inversen bestimmt, wodurch nur die Untermatrix $\left[\hat{\mathbf{B}} \right]$ der zu invertierenden Matrix $[\mathbf{B}]$ betrachtet werden muss. Hierbei eignet sich für die Wahl von $[\mathbf{P}]$ entweder die entsprechende Einheitsmatrix oder eine niedrige ganzzahlige Potenz der zu invertierenden Matrix. Der Vektor \mathbf{m}_k ist die jeweilige Spalte der approximierten Inversen und $\hat{\mathbf{e}}_k$ ein zugehöriger Einheitsvektor. Die Lösung des Optimierungsproblems

ergibt dann die Einträge der approximierten Inversen $[\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1}$. Hinsichtlich einer möglichst guten Approximation ergibt die Norm des Matrixprodukts $[\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1} [\mathbf{B}]$ Zahlenwerte möglichst nahe bei Eins. Dementsprechend ist ein weiterer Vorteil des SPAI-Algorithmus', dass mit dem dazugehörigen Residuum \mathbf{r}_k der Normfehler der jeweiligen Approximationsspalte abgeschätzt werden kann. Dieser wird über das Optimierungsproblem der j -ten Reihe und k -ten Spalte

$$\min_{m_{jk}} \|\mathbf{r}_k + m_{jk} [\hat{\mathbf{B}}] \mathbf{e}_j\|. \quad (11)$$

berechnet. So lässt sich über das Residuum \mathbf{r}_k ein Abbruchkriterium des iterativen Algorithmus' festlegen, damit die Approximation nicht zu konservativ gewählt wird.

3.1 Abweichungen der Eigenwerte durch die Approximation

Über den beschriebenen Algorithmus wird die Inverse $[\mathbf{B}]^{-1}$ in Gleichung (5) durch $[\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1}$ approximiert. Daraus resultiert eine fehlerbehaftete Transformationsmatrix $[\mathbf{T}]_{\text{app}}$, welche für das reduzierte Eigenwertproblem (6) genutzt wird. Um den Einfluss des Approximationsfehlers, quantifiziert durch die Matrix der Einzelresiduen $[\mathbf{R}]$ der Approximation, auf die berechneten Eigenwerte λ_{app} abzuschätzen, wurde die folgende obere Schranke gefunden

$$\frac{|\lambda - \lambda_{\text{app}}|}{|\lambda|} \leq \frac{\|[\mathbf{T}]\| - \|[\mathbf{T}]_{\text{app}}\|}{\|[\mathbf{T}]\|}. \quad (12)$$

Hierbei wird die ∞ -Norm verwendet. Mit der Darstellung der exakten Inversen über

$$[\mathbf{B}]^{-1} = ([\mathbf{E}] + [\mathbf{R}])^{-1} [\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1} \quad (13)$$

lässt sich die Ungleichung umformulieren zu

$$\frac{|\lambda - \lambda_{\text{app}}|}{|\lambda|} \leq \left| 1 - \frac{\|[\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1} [[\mathbf{A}^{CC}] \quad [\mathbf{A}^{TC}]]^T\|}{\|([\mathbf{E}] + [\mathbf{R}])^{-1} [\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1} [[\mathbf{A}^{CC}] \quad [\mathbf{A}^{TC}]]^T\|} \right|. \quad (14)$$

Da der Term $([\mathbf{E}] + [\mathbf{R}])$ eine Norm von nahezu eins hat, ist es zulässig die Invertierung zu vernachlässigen und wir erhalten schließlich als Fehlerabschätzung für die Eigenwerte

$$\frac{|\lambda - \lambda_{\text{app}}|}{|\lambda|} \leq \left| 1 - \frac{\|[\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1} [[\mathbf{A}^{CC}] \quad [\mathbf{A}^{TC}]]^T\|}{\|([\mathbf{E}] + [\mathbf{R}]) [\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1} [[\mathbf{A}^{CC}] \quad [\mathbf{A}^{TC}]]^T\|} \right|. \quad (15)$$

Es ist anzumerken, dass diese Abschätzung eingeschränkter Nutzen hat, da das Aufstellen der Approximation notwendig ist und auch das Zwischenspeichern der gesamten Residualmatrix $[\mathbf{R}]$ bei sehr großer Matrixgröße nicht mehr effizient ist. Jedoch erlaubt diese Ungleichung eine Abschätzung der entstandenen Eigenwertfehler vor Berechnung des Eigenwertproblems und auch eine Abschätzung der Genauigkeit der berechneten Eigenwerte, wenn keine Referenz vorhanden ist.

Für die meisten Anwendungsfälle ist es ausreichend, eine relativ ungenaue Approximation der Inversen durchzuführen mit Normabweichungen im Bereich von $0, 1 \leq \|[\mathbf{R}]\| \leq 0, 5$. Somit ist es meist sinnvoll als Startmuster der approximierten Inversen $[\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1}$ die Einheitsmatrix zu wählen und innerhalb weniger Iterationen einige Elemente hinzuzufügen, um die geforderte Genauigkeit zu erreichen.

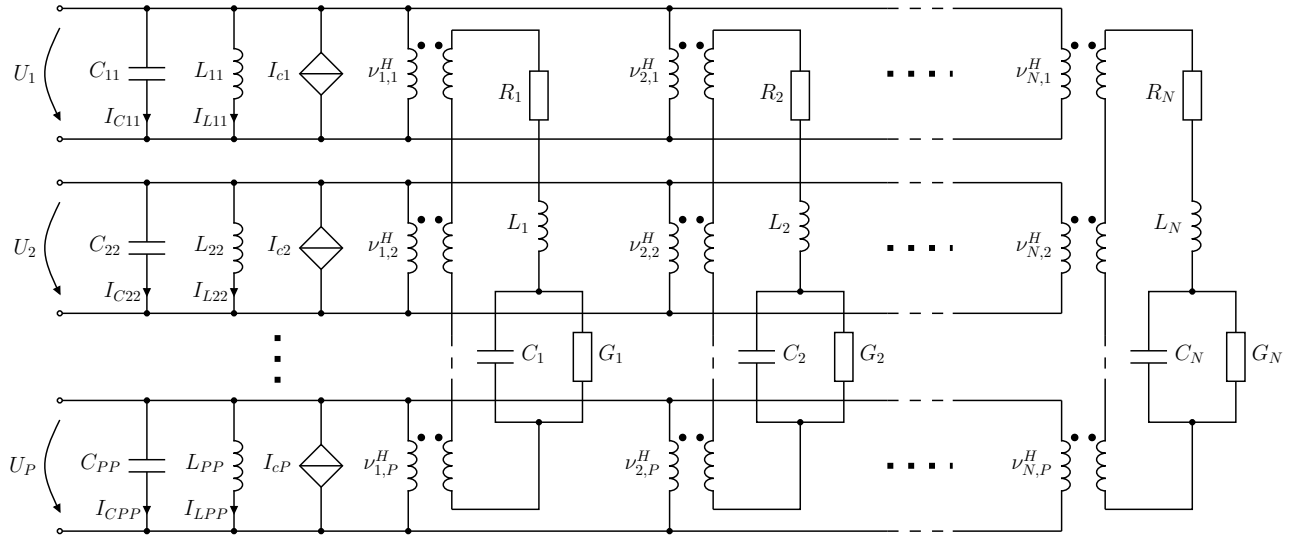


Bild 3: Vollständiges Ersatzschaltbild einer Verbindungsstruktur mit P Ports und N Moden innerhalb eines resonanten Gehäuses

4 Modales Netzwerkmodell

Durch die Berechnung des (reduzierten) Eigenwertproblems resultieren die modalen Feldverteilungen $\tilde{\mathbf{e}}_n$ und Eigenfrequenzen ω_n . Diese können genutzt werden, um ein passives breitbandiges Netzwerkmodell nach [6] aufzustellen. Das Ersatzschaltbild für N Ports und N Moden ist in Abbildung 3 dargestellt. Die entsprechenden Portimpedanzen haben die Form

$$Z_{ij} = \sum_{n=1}^N \frac{\nu_{n,i}^E \nu_{n,j}^E}{\frac{1}{j\omega L_n + R_n} + j\omega C_n + G_n} + \frac{1}{j\omega C_{ij}} + j\omega \tilde{L}_{ij}. \quad (16)$$

Hierbei sind $\nu_{n,i}^E$ und $\nu_{n,j}^E$ die modalen Koppelfaktoren der jeweiligen Ports, die sich aus

$$\nu_{n,i}^E = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{S}_i \rangle \quad (17)$$

mit den Pfadfunktionen der Stromverteilungen \mathbf{S}_i des i -ten Ports berechnen lassen. Die modalen Ersatzschaltbildelemente werden wie folgt berechnet:

$$L_n = \mu \frac{1}{k_n^2 K_{E,n}} \quad (18)$$

$$R_n = \frac{\omega}{Q_V} L_n \Big|_{\omega=\omega_n} \quad (19)$$

$$C_n = \epsilon K_{E,n} \quad (20)$$

$$G_n = \frac{\omega}{Q_D} C_n \Big|_{\omega=\omega_n} \quad (21)$$

Die quasistatischen Elemente C_{ij} und L_{ij} werden über zusätzliche statische Simulationen bestimmt, die nur einmalig durchzuführen sind. Die in (16) reduzierte quasistatische Induktivität ergibt sich demnach aus

$$\tilde{L}_{ij} = L_{ij} - \mu \sum_{n=1}^N \frac{\nu_{n,i}^E \nu_{n,j}^E}{k_n^2 K_{E,n}}. \quad (22)$$

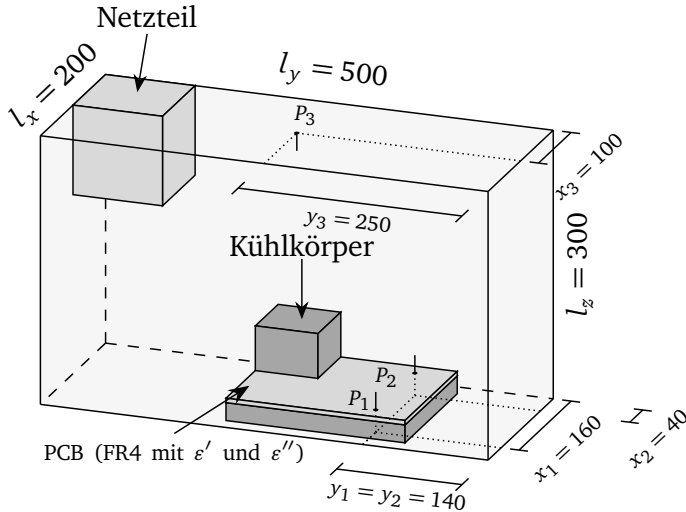


Bild 4: Vereinfachtes Rechnergehäuse mit komplexen innerem Aufbau

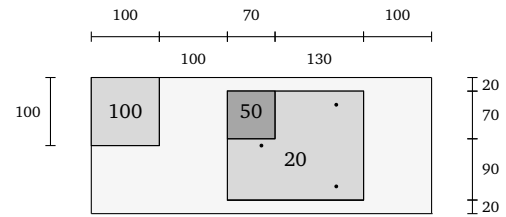


Bild 5: Abmessungen des Aufbaus in mm

Somit hat die Approximation der inversen Systemmatrix $[\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1}$ Einfluss auf die Genauigkeit der resultierenden Eigenfunktionen (6), den Koppelfaktoren (17) und über die resultierenden Eigenfrequenzen (6) auch auf die einzelnen Netzwerkelemente (18)-(21).

5 Validierung anhand eines komplexen Beispiels

Das in Abbildung 3 dargestellte modale Netzwerkmodell kann in Netzwerksimulationen wie SPICE [2] importiert werden, um das Systemverhalten im Frequenz- und Zeitbereich bei beliebiger Beschaltung zu untersuchen. Anhand eines praxisnahen Beispiels soll die Anwendbarkeit des Modells demonstriert werden und die Ergebnisse mit Referenzsimulationen validiert werden. Hierzu wird das in Abbildung 4 dargestellte vereinfachte Rechnergehäuse mit komplexem Innenaufbau untersucht. In Abbildung 5 sind die Abmessungen zusammengefasst. Das Mainboard wird mit einer 2,5 mm dicken FR4-Platte mit den Materialparametern $\epsilon' = 4.4$ und $\epsilon'' = 0.04$ (bei 0.5 GHz) modelliert. Dort sind zwei Ports P_1 und P_2 angebracht, welche als Monopolantennen mit vernachlässigbar kleinem Radius repräsentiert werden. Eine weitere Antenne ist an der Decke als Port P_3 angebracht. Als Pfadfunktion der Stromverteilungen $\mathbf{J}_i = I_i \mathbf{S}_i$ wurde die dreieckige Form in z -Richtung

$$\mathbf{S}_i = \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \left(1 - \frac{z}{L_i}\right) \mathbf{e}_z \quad (23)$$

angesetzt, wobei die Länge mit $L_i = 25$ mm für alle Antennen gleich gewählt wurde. Für das Gehäuse und den inneren Aufbau wurde als Material Aluminium mit der Leitfähigkeit $\kappa = 3,6 \cdot 10^7 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ angenommen.

Um die Genauigkeit der durchgeführten Approximation über die gesamte Frequenzbandbreite zu demonstrieren, werden zunächst alle Eigenwerte und Eigenfunktionen der resonanten Moden betrachtet. Die Größe der Vernetzung wurde hier mit etwa $N_T = 60000$ Tetraedern gewählt, um eine Berechnung des nicht reduzierten Eigenwertproblems als Referenz zu ermöglichen. Die Approximation der Inversen $[\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1}$ wurde mit einem Normresiduum von $r = 0.1$ gewählt, dadurch konnte die Anzahl der Elemente von $[\mathbf{B}]_{\text{app}}^{-1}$ von $2 \cdot 10^9$ auf etwa $10 \cdot 10^6$ verkleinert werden, was einer Reduktion um etwa 99,6% entspricht. Auf diese Weise konnte der benötigte Speicher von 33 GB auf etwa 100 MB beschränkt werden. Die Berechnungszeit zum Aufstellen des reduzierten Systems zum Lösen des Eigenwertproblems wurde dementsprechend von etwa 16 h auf 1 h drastisch

reduziert.

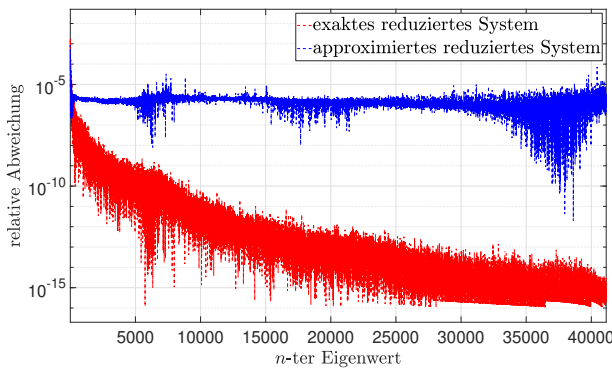


Bild 6: Relative Abweichung der Eigenwerte des reduzierten Eigenwertproblems

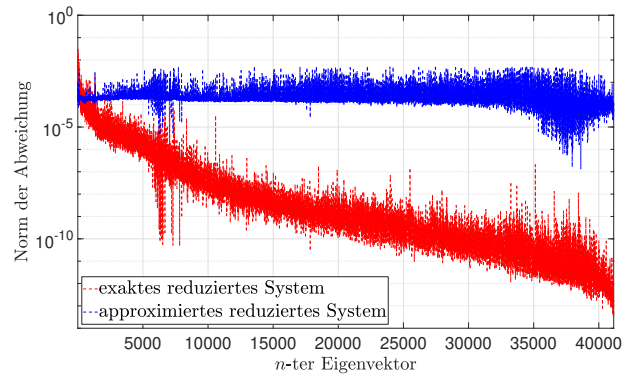


Bild 7: Norm der Abweichung der Eigenvektoren der reduzierten Eigenwertprobleme

Die relative Abweichung der Eigenwerte bei Reduzierung des Eigenwertproblems mit der exakten und approximierten inversen Systemmatrix bezüglich der Ergebnisse des nicht reduzierten Systems sind in Abbildung 6 aufgetragen. Die Fehlernorm für Abweichungen der entsprechenden Eigenfunktionen ist in Abbildung 7 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Fehler, der durch die Systemreduktion mit exakter Inversen entsteht, mit steigender Frequenz sinkt, aber über die gesamte Bandbreite vernachlässigbar gering ist mit maximal 10^{-5} für die Eigenwerte und 10^{-4} für die Fehlernorm der Eigenvektoren. Die Abweichungen der approximierten Systeme sind jedoch annähernd konstant über den betrachteten Frequenzbereich bleiben aber auch hier unerheblich klein mit Maxima bei etwa 10^{-5} für die Eigenwerte und 10^{-4} für die Eigenvektoren. Es ist festzustellen, dass die Genauigkeit des gelösten Eigenwertproblems kaum reduziert wird, obwohl eine relativ grobe Approximation der Inversen der Systemmatrix $[B]$ gewählt wurde.

Zur weiteren Validierung wurden die ersten $N = 20$ Moden verwendet, um die Netzwerkelemente bis zu einer Frequenz $f_{\max} = 1$ GHz zu berechnen. Die quasistatischen Elemente wurden über zusätzliche numerische Simulationen bestimmt. Abbildung 8 zeigt den Verlauf der Impedanz Z_{13} im Frequenzbereich für das reduzierte System mit vollständiger und approximierter Systemmatrix-Inversen und den Verlauf einer Vollwellenlösung aus CST [1] als Referenz. Auch hier sind keine relevanten Abweichungen in den Verläufen zu erkennen. Für eine Validierung im Zeitbereich wurde der Verlauf der Spannung an Port 1 betrachtet, wenn an Port 3 ein trapezförmiger Strompuls mit Anstiegs- und Abfallzeit von 1 ns, der Halbwertsbreite 5 ns und 1 A Amplitude eingespeist wird. Hierbei wird das Netzwerkmodell auf Basis des exakten und approximierten reduzierten Eigenwert-

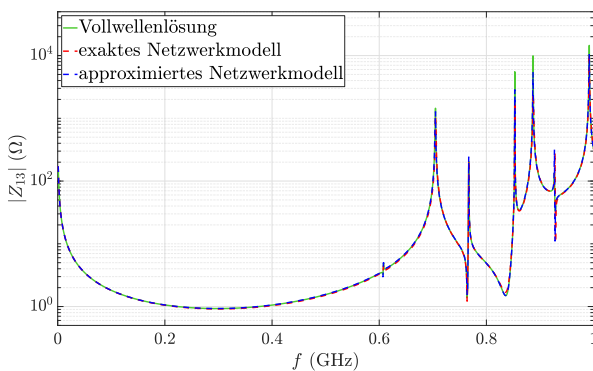


Bild 8: Transferimpedanz zwischen Port 1 und Port 3

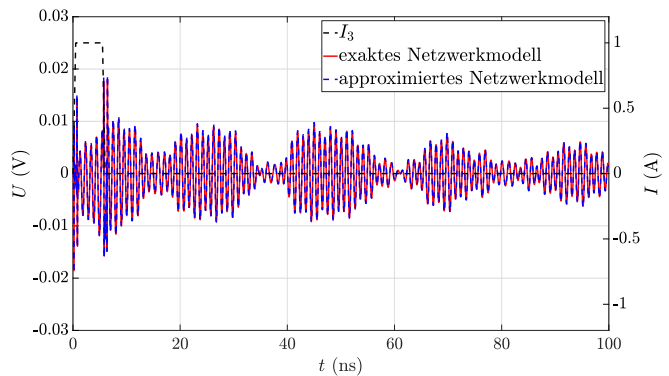


Bild 9: Einkoppelter Strompuls I_3 und Ausgangsspannung an P_1 mit angepasstem Leitungsabschluss

problems verglichen (Abb. 9). Auch hier kann eine sehr gute Übereinstimmung festgestellt werden, wodurch gezeigt werden konnte, dass die reduzierten Systeme weiterhin eine korrekte Analyse des Frequenz- und Zeitbereichsverhaltens ermöglichen.

6 Zusammenfassung

Es wurde eine Reduktion eines Eigenwertproblems für die diskretisierte elektrische Wellengleichung im Rahmen der FEM durch die Abspaltung des statischen Unterraums durchgeführt. Hierbei wurden die Ansätze [9] und [7] kombiniert, um die Abspaltung mittels einer Baum-Kobaum-Zerlegung zu erzielen. Die hierbei notwendige Inverse einer der beiden Systemmatrizen wurde mit dem SPAI-Algorithmus approximiert, um eine effizientere Berechnung des reduzierten Systems zu ermöglichen. Hierbei wurde insbesondere der Einfluss der Approximation auf die Lösung des Eigenwertproblems an einem realitätsnahen komplexen Beispiel untersucht. Auf der Lösung dieses Eigenwertproblems beruht eine modale Netzwerkdarstellung für die gesamte Anordnung. Die deutliche Beschleunigung der Berechnungen und vor allem die Reduzierung des notwendigen Arbeitsspeichers ermöglicht die praktische Anwendbarkeit des modalen Netzwerksyntheseverfahrens für realitätsnahe, komplexe Aufbau- und Verbindungsstrukturen in resonanten Gehäusen.

Literaturangaben

- [1] *CST Studio Suite*. <https://www.3ds.com/de/produkte-und-services/simulia/produkte/cst-studio-suite/>, Januar 2024
- [2] *LTSPICE XVII*. www.analog.com, Januar 2024
- [3] COLLIN, Robert E.: *Foundations for Microwave Engineering*. Wiley-IEEE Press, 2001
- [4] GROTE, Marcus J. ; HUCKLE, Thomas: Parallel preconditioning with sparse approximate inverses. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 18 (1997), Mai, Nr. 3, S. 838–853. <http://dx.doi.org/10.1137/S1064827594276552>. – DOI 10.1137/S1064827594276552
- [5] JIN, Jian-Ming: *The Finite Element Method in Electromagnetics*. 3rd ed. Wiley-IEEE Press, 2014
- [6] LANGE, Christoph ; LEONE, Marco: Broadband circuit model for Electromagnetic-Interference Analysis in Metallic Enclosures. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 60 (2018), Nr. 2, S. 368–375. <http://dx.doi.org/10.1109/TEMC.2017.2709079>. – DOI 10.1109/TEMC.2017.2709079
- [7] MANGES, John B. ; CENDES, Zoltan J.: A generalized tree-cotree gauge for magnetic field computation. In: *IEEE Transactions on Magnets* 31 (1995), Mai, Nr. 3, S. 1342–1347. <http://dx.doi.org/10.1109/20.376275>. – DOI 10.1109/20.376275
- [8] SUN, Din ; MANGES, John B. ; YUAN, Xingchao ; CENDES, Zoltan: Spurious modes in finite-element methods. In: *IEEE Antennas and Propagation Magazine* 37 (1995), Oktober, Nr. 5, S. 12–24. <http://dx.doi.org/10.1109/74.475860>. – DOI 10.1109/74.475860
- [9] VENKATARAYALU, Neelakantam V. ; LEE, Jin-Fa: Removal of spurious dc modes in edge element solutions for modeling three-dimensional resonators. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 54 (2006), Juli, Nr. 7, S. 3019–3025. <http://dx.doi.org/10.1109/TMTT.2006.877057>. – DOI 10.1109/TMTT.2006.877057