

# Analytische Ermittlung der Wicklung-Stator-Kapazität in elektrischen Maschinen zur Vorausberechnung des hochfrequenten Common-Mode-Stroms

J. O. Stockbrügger, B. Ponick

Der Einsatz von Umrichtern ermöglicht einen einfachen drehzahlveränderbaren Betrieb von Elektromotoren. Allerdings treten bei umrichter gespeisten Antrieben parasitäre, hochfrequente Erscheinungen auf. Der Mittelwert der drei Ausgangsspannungen eines Zweipunkt-Wechselrichters ist aufgrund der diskreten Schaltzustände der Leistungstransistoren eine von Null verschiedene Gleichtaktspannung, welche als Common-Mode-Spannung bezeichnet wird. Die Gleichtaktspannung wird durch den Umrichter in die Motorwicklung eingeprägt und verursacht über die Nutisolation einen kapazitiven, hochfrequenten Common-Mode-Strom.

Die Wicklung-Stator-Kapazität setzt sich aus einem Nut- und einem Stirraumanteil zusammen. In diesem Artikel wird eine analytische Bestimmung des Nutanteils der Wicklung-Stator-Kapazität vorgestellt, welche neben der Geometrie des Leiters den Einfluss von Materialien mit unterschiedlichen Permittivitäten berücksichtigt. Die Ermittlung des Nutanteils der Wicklung-Stator-Kapazität basiert auf der Spiegelungsmethode. Das vorgestellte Modell wird mithilfe von FEM-Simulationen für verschiedene Geometrien und Materialien validiert.

Schlüsselwörter: Wicklung-Stator-Kapazität; Wellenspannung; zirkulare Lagerströme; Traktionsantrieb

## **Analytical determination of the winding stator capacity for the prediction of high-frequency common mode current in electrical machines.**

*The use of frequency converters provides easy variable speed operation of electric machines. However, parasitic and high-frequency phenomena occur in inverter-fed drives. As a result of the discrete switching states of the power transistors, the average of the three output voltages of the inverter is a common mode voltage which differs from zero. This common mode voltage is impressed into the motor winding by the inverter and causes a capacitive, high-frequency common mode current via the slot insulation.*

*The winding stator capacity is composed of a slot and an end-winding portion. In this article, an analytical determination of the slot portion of the winding stator capacity is presented, which, in addition to the geometry of the conductor, takes into account the influence of materials with different permittivities. The determination of the slot portion of the winding stator capacity is based on the method of image charges. The method is validated by means of FEM simulations for different geometries and materials.*

Keywords: winding stator capacity; shaft voltage; circulating bearing currents; traction motor

Eingegangen am 9. März 2020, angenommen am 3. April 2020, online publiziert am 16. April 2020  
© Der/die Autor(en) 2020, korrigierte Publikation 2021



## 1. Einleitung

Die Anzahl umrichter gespeister Antriebe steigt auf Grund der guten Regelbarkeit des Motors bei mittlerweile geringen Anschaffungskosten. Infolge der diskreten Schaltzustände der Leistungstransistoren ist der Mittelwert der drei Ausgangsspannungen eines Zweipunkt-Wechselrichters eine von Null verschiedene Gleichtaktspannung, welche als Common-Mode-Spannung bezeichnet wird. Die Gleichtaktspannung wird durch den Umrichter in die Motorwicklung eingeprägt und verursacht über die Nutisolation einen kapazitiven, hochfrequenten Common-Mode-Strom [1]. Das für die Bestimmung der Wicklung-Stator-Kapazität zu betrachtende Gebiet kann der Abb. 1 entnommen werden. In den Nuten des Stators befinden sich die Leiter der Statorwicklung, welche durch die Nutisolation vom geerdeten Stator galvanisch getrennt sind. Für die Isolierung der Windungen gegeneinander wird eine Lackschicht auf die Leiter aufgetragen.

Nach dem aktuellen Stand der Technik basiert die analytische Bestimmung der Wicklung-Stator-Kapazität auf der Berechnung eines

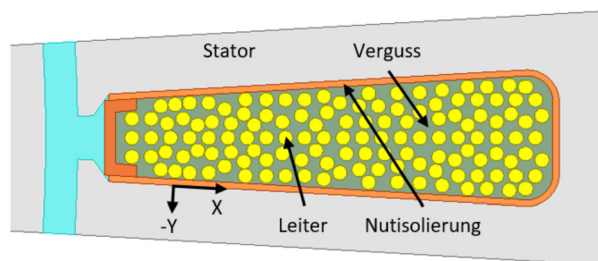


Abb. 1. Beispielhafte Darstellung einer Nutteilung mit Einzelleitern

Stockbrügger, Jan Ole, Institut für Antriebssysteme und Leistungselektronik, Leibniz Universität Hannover, Hannover, Deutschland (E-Mail: [ole.stockbruegger@ial.uni-hannover.de](mailto:ole.stockbruegger@ial.uni-hannover.de)); Ponick, Bernd, Institut für Antriebssysteme und Leistungselektronik, Leibniz Universität Hannover, Hannover, Deutschland

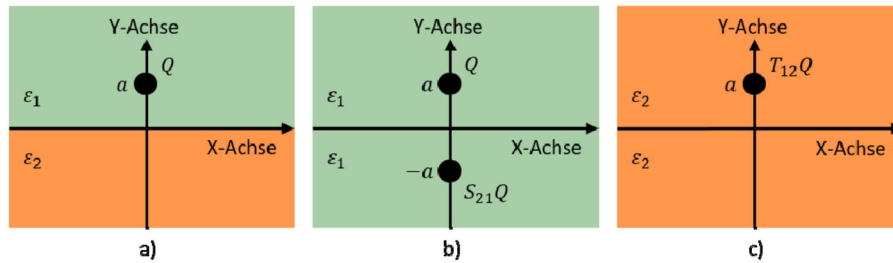


Abb. 2. Anwendung der Spiegelungsmethode an einer dielektrischen Grenzschicht a) Punktladung vor einem dielektrischen Halbraum b) Lösung für den ersten Raumbereich  $y \geq 0$  c) Lösung für den zweiten Raumbereich  $y \leq 0$

einschichtigen Plattenkondensators [1–4]. Die Elektrodenfläche ist das Produkt aus der Aktivteillänge des Antriebs und der Nutmantelfläche. Die Dicke der Nutisolation stellt den Elektrodenabstand dar. In [5] wird für Runddrähte ein Formfaktor ermittelt, welcher gegenüber der ebenen Oberfläche eines Plattenkondensators die Kapazitätsverringerng auf Grund der Welligkeit der Oberfläche der Wicklung berücksichtigt. Der Formfaktor ist abhängig vom Drahtdurchmesser und der Dicke der Nutisolation. Gegenüber Messungen und FEM-Simulationen ergeben sich bei der Anwendung dieses analytischen Ansatzes allerdings zu hohe Kapazitätswerte [1]. Im Folgenden wird ein zweidimensionales Modell zur Ermittlung der Wicklung-Stator-Kapazität vorgestellt, welches die Kontur der Leiter, den Abstand zwischen der Nutisolation und den Leitern, den Abstand zwischen den Leitern sowie neben der Nutisolation das die Statorwicklung umgebende Medium berücksichtigt.

Insgesamt liegen dem Berechnungsmodell folgende Vereinfachungen zugrunde:

- Die Statorwicklung und das Statorblechpaket sind elektrisch ideal leitfähig.
- Innerhalb des betrachteten Gebiets befinden sich keine Raumladungen.
- Die Medien innerhalb der betrachteten Geometrie bestehen aus Materialien mit jeweils konstanter Permittivität.
- Der Einfluss der Lackisolation der Einzelleiter wird vernachlässigt.

## 2. Spiegelung an dielektrischen Grenzflächen

Für die Bestimmung der Wicklung-Stator-Kapazität wird die Spiegelungsmethode als Lösungsverfahren der Poisson-Gleichung angewendet. Mit Hilfe der Spiegelungsmethode werden in das Lösungsgebiet eingebettete dielektrische Grenzflächen oder ideale Leiter durch sogenannte "Spiegelladungen" ersetzt. Nach dieser Ersetzung entsteht ein Ersatzproblem, bei dem nur noch natürliche Randbedingungen auftreten und das resultierende Potential durch Superposition der entsprechenden Werte der Potentiale der Ladungen ermittelt werden kann [6]. Im vorliegenden Feldgebiet erfolgt die Spiegelung an dielektrischen Grenzflächen.

Die erste Grenzfläche liegt am Übergang zwischen dem die Statorwicklung umgebenden Medium und der Nutisolation vor. Die zweite Grenzfläche liegt am Übergang zwischen der Nutisolation und dem Stator vor, welcher auf Grund der idealen Leitfähigkeit eine unendlich hohe Permittivität besitzt. Zur Erläuterung der Spiegelung an zwei dielektrischen Grenzflächen erfolgt zur Einführung die Beschreibung der Spiegelung an einer dielektrischen Grenzfläche.

### 2.1 Spiegelung an einer dielektrischen Grenzfläche

Der Abb. 2a kann das zu untersuchende Feldgebiet entnommen werden. Eine Ladung  $Q$  befindet sich im Abstand  $a$  vor einem dielektrischen Halbraum. Das skalare Potentialfeld im Raumteil der

Ladung ergibt sich durch das Potential der Originalladung  $Q$  und dem Potential einer Spiegelladung  $S_{21}Q$  im Spiegelpunkt (Abb. 2b). Hierbei wird der gesamte Raum mit dem Medium  $\epsilon_1$  ausgefüllt betrachtet. Das skalare Potentialfeld im dielektrischen Halbraum bestimmt sich durch eine Ersatzladung  $T_{12}Q$ , welche an der Stelle der Originalladung  $Q$  platziert wird (Abb. 2c). Die Ersatzanordnung zur Bestimmung des Potentials im dielektrischen Halbraum ist mit dem Medium  $\epsilon_2$  ausgefüllt.

Die Koeffizienten der Spiegel- und der Ersatzladung bestimmen sich über die Stetigkeitsbedingungen des Potentials und der Normalkomponente des D-Felds an der dielektrischen Grenzfläche zu [7]

$$S_{21} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \tag{1}$$

$$T_{12} = \frac{2 \cdot \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \tag{2}$$

Für den Fall einer unendlich hohen Permittivität im dielektrischen Halbraum ergibt sich

$$S_{21} = -1, \tag{3}$$

$$T_{12} = 0. \tag{4}$$

### 2.2 Spiegelung an zwei dielektrischen Grenzflächen

In Abb. 3a befindet sich die Ladung  $Q$  im ersten Medium vor zwei ebenen Materialschichten. Das Vorgehen zur Ermittlung und Positionierung der Spiegel- und der Ersatzladungen kann [8] entnommen werden. Zu Beginn erfolgt die Betrachtung der dielektrischen Grenzfläche zwischen dem ersten und dem zweiten Medium. Für das skalare Potentialfeld im ersten Medium ergibt sich die zur Mediengrenze spiegelsymmetrisch angebrachte Spiegelladung  $S_{21}Q$  (Abb. 3b). Für die Bestimmung des skalaren Potentialfelds im zweiten Material wird die Ersatzladung  $T_{12}Q$  an der Stelle der Originalladung  $Q$  platziert (Abb. 3c). Die Ersatzladung  $T_{12}Q$  verletzt die Stetigkeitsbedingungen an der dielektrischen Grenzfläche zwischen dem zweiten und dem dritten Medium. Die Spiegelung der nun im zweiten Medium als Originalquelle betrachteten Ersatzladung  $T_{12}Q$  ergibt die Spiegelladung  $T_{12}S_{32}Q$  im zweiten Medium und die Ersatzladung  $T_{12}T_{23}Q$  im dritten Medium (Abb. 3d). Die Spiegelladung  $T_{12}S_{32}Q$  im zweiten Medium verletzt die Grenzbedingungen zwischen dem zweiten und dem ersten Material.

Durch die Spiegelung der nun im zweiten Medium als Originalquelle betrachteten Spiegelladung  $T_{12}S_{32}Q$  ergeben sich die Spiegelladung  $T_{12}S_{32}S_{21}Q$  im zweiten Medium und die Ersatzladung  $T_{12}S_{32}T_{21}Q$  im ersten Medium.

Die Spiegelladung  $T_{12}S_{32}S_{21}Q$  im zweiten Medium verletzt anschließend die Stetigkeitsbedingungen zwischen dem zweiten und dem dritten Material, sodass sich durch die Spiegelung der nun im zweiten Medium als Originalquelle betrachteten Spiegelladung

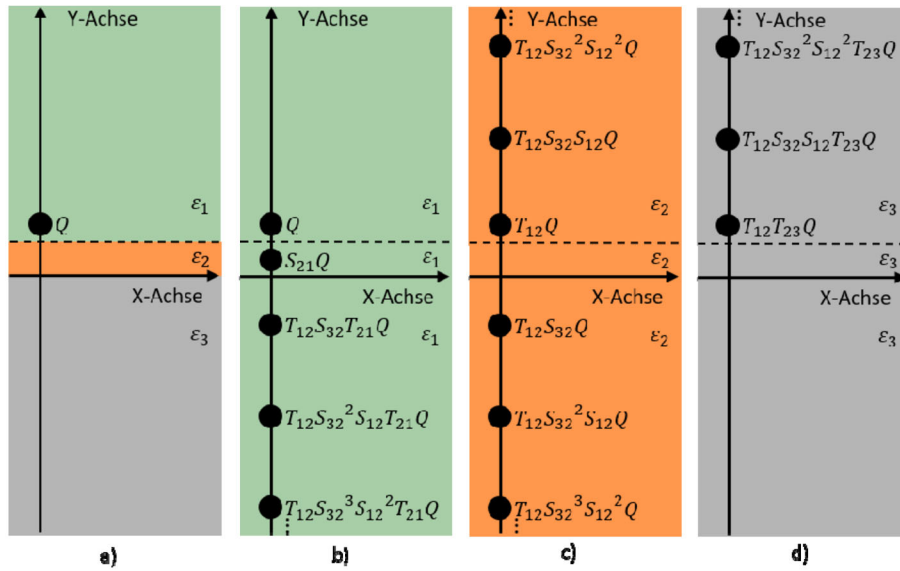


Abb. 3. Anwendung der Spiegelungsmethode an zwei dielektrischen Grenzschichten a) Punktladung vor zwei dielektrischen Grenzschichten; b) Lösung für den ersten Raumbereich; c) Lösung für den zweiten Raumbereich; d) Lösung für den dritten Raumbereich

$T_{12}S_{32}S_{12}Q$  die Spiegelladung  $T_{12}S_{32}^2S_{12}Q$  im zweiten Medium und die Ersatzladung  $T_{12}S_{32}S_{12}T_{23}Q$  im dritten Medium ergeben.

Zur Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen zwischen dem zweiten und dem ersten sowie dem zweiten und dem dritten Material müssen unendlich viele Spiegelladungen im zweiten Medium und unendlich viele Ersatzladungen im ersten und im dritten Medium platziert werden. Die Koeffizienten der in Abb. 3 enthaltenen Spiegel- und Ersatzladungen berechnen sich unter Berücksichtigung der zu betrachtenden Grenzschicht nach den Beziehungen (1) und (2) bzw. Equation (3) und (4).

3. Modellierung und Lösung für das Feldgebiet

Das zur Ermittlung der Wicklung-Stator-Kapazität modellierte Feldgebiet kann der Abb. 4 entnommen werden. Sechs identische, im ersten Medium vorliegende Leiter mit dem Radius  $r_l$  befinden sich räumlich oberhalb der Nutisolation und des Statorblechpakets. Die sechs Elektroden sind unterteilt in eine untere und eine obere Lage, wobei jeweils drei horizontal gleichmäßig verteilte Rundleiter eine Lage bilden. Die Mittelpunkte der Leiter der unteren Lage befinden sich im Abstand  $d_{ls}$  zum Stator. Der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Leiter der unteren und der oberen Lage beträgt  $d_{lv}$ . Der horizontale Abstand zwischen den Mittelpunkten benachbarter Leiter in beiden Lagen beträgt  $d_{lh}$ . Das zweite Medium mit der relativen Permittivität  $\epsilon_2$  symbolisiert die Nutisolation mit der Dicke  $d_{iso}$ . Der Stator wird durch das in der unteren Halbebene vorliegende dritte Medium repräsentiert. Die sechs Rundleiter besitzen die konstanten Potentiale  $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}, \varphi_{15}$  und  $\varphi_{16}$ . Die Zuordnung der Leiter erfolgt im Anschluss anhand der Indizes der Potentiale.

Betrachtet wird die kapazitive Kopplung zwischen dem mittig angeordneten Leiter der unteren Lage und dem Stator. Die benachbarten Leiter dienen der Berücksichtigung der angrenzenden Runddrähte in horizontaler und in vertikaler Richtung. Die realen Leiter werden durch Linienladungen mit dem Potential

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln\left(\frac{1}{|r - \vec{r}_l|}\right)$$

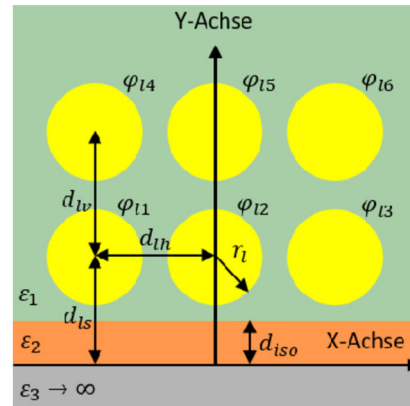


Abb. 4. Darstellung der Geometriegrößen des Feldgebiets

$$= -\frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln\left(\sqrt{(x - x_\lambda)^2 + (y - y_\lambda)^2}\right) \tag{5}$$

ersetzt. Hierbei ist  $r = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$  ein beliebiger Raumvektor, in dessen Koordinaten das Potential bestimmt wird. Die Position der Linienladung wird durch den Vektor  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_\lambda & y_\lambda \end{pmatrix}^T$  beschrieben. Die Linienladungsdichte  $\lambda$  kennzeichnet die Ladung pro Länge. Das skalare Potentialfeld einer Linienladung im Medium vor den zwei in Abb. 4 enthaltenen, ebenen Materialschichten kann durch Überlagerung der Potentiale der in Abb. 3b enthaltenen Spiegel- und Ersatzlinienladungen zu

$$\varphi(r) = \lambda \cdot \left( \begin{array}{l} -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_1} \cdot \ln\left(\sqrt{(x - x_\lambda)^2 + (y - y_\lambda)^2}\right) \\ -\frac{S_{21}}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_1} \cdot \ln\left(\sqrt{(x - x_\lambda)^2 + (y + y_\lambda - 2 \cdot d_{iso})^2}\right) \\ -\frac{T_{12} \cdot S_{32} \cdot T_{21}}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_1} \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} (S_{12} \cdot S_{32})^\mu \\ \cdot \ln\left(\sqrt{(x - x_\lambda)^2 + (y + y_\lambda + \mu \cdot 2 \cdot d_{iso})^2}\right) \end{array} \right) \tag{6}$$

mit

$$S_{32} = -1, \tag{7}$$

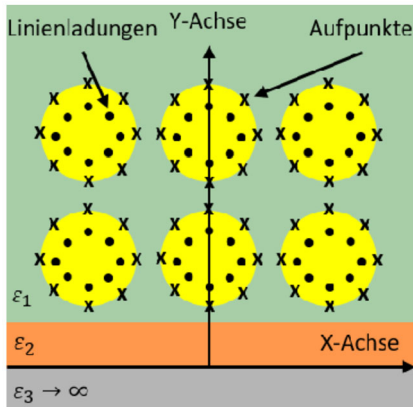


Abb. 5. Darstellung der Platzierung der Linienladungen und der Aufpunkte

$$S_{21} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \tag{8}$$

$$S_{12} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \tag{9}$$

$$T_{12} = \frac{2 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \tag{10}$$

$$T_{21} = \frac{2 \cdot \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tag{11}$$

ermittelt werden. Der erste Summand des zweiten Faktors stellt das Potential der Originallinienladung dar. Der zweite und der dritte Summand des zweiten Faktors beschreiben die Wirkung der Spiegel- und der Ersatzlinienladungen auf das Potentialfeld im ersten Medium.

Bei einer mittigen Positionierung eines Linienleiters je Leiter stellen die Oberflächen der sechs Runddrähte keine Äquipotentialflächen dar. Für eine Ermittlung des Nahfelds werden die auf den Leitern gespeicherten Oberflächenladungen durch eine ganzzahlige Anzahl von Linienladungen mit unterschiedlichen Linienladungsdichten ersetzt, die im Inneren der Runddrähte platziert werden [8]. Mit Hilfe von diskreten, auf den Leiteroberflächen angesetzten Aufpunkten, an deren Positionen die vorgegebenen Leiterpotentiale  $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{14}, \varphi_{15}$  und  $\varphi_{16}$  vorliegen sollen, werden die unbekanntenen Linienladungsdichten bestimmt.

Eine mögliche Anordnung der auf der Leiterkontur vorliegenden Aufpunkte und der innerhalb der Leiter platzierten Linienladungen kann der Abb. 5 entnommen werden.

Jeder der sechs Leiter besitze  $W$  Linienladungen und  $P$  Aufpunkte. Die  $P$  Y-Koordinaten  $y_{l,m}$  der gleichmäßig am Umfang verteilten Aufpunkte der drei Leiter der unteren Lage berechnen sich unabhängig vom betrachteten Leiter  $l$  zu

$$y_{l,m} = r_l \cdot \sin\left(\frac{m \cdot 2 \cdot \pi}{P}\right) + d_{lv} \quad 1 \leq l \leq 3 \quad 1 \leq m \leq P \tag{12}$$

mit den ganzzahligen Laufvariablen  $m$  und  $l$ . Die  $W$  Y-Koordinaten  $y_{\lambda,l,j}$  der symmetrisch am Umfang verteilten Linienladungen der Leiter der unteren Lage, welche ebenfalls unabhängig vom betrachteten Leiter  $l$  sind, bestimmen sich mit Hilfe eines konstanten, auf den Leiterradius wirkenden Reduktionsfaktors  $F_r$  zu

$$y_{\lambda,l,n} = F_r \cdot r_l \cdot \sin\left(\frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{W}\right) + d_{lv} \quad 1 \leq l \leq 3 \quad 1 \leq n \leq W \quad 0 < F_r < 1 \tag{13}$$

mit der ganzzahligen Laufvariable  $n$ . Der Reduktionsfaktor bewirkt eine Platzierung der Linienladungen innerhalb der Rundleiter. Die  $P$

Y-Koordinaten der Aufpunkte und die  $W$  Y-Koordinaten der Linienladungen der drei Leiter der oberen Lage berechnen sich unter Berücksichtigung der Translation in Y-Richtung zu

$$y_{l,m} = y_{l-3,m} + d_{lv} \quad 4 \leq l \leq 6 \quad 1 \leq m \leq P, \tag{14}$$

$$y_{\lambda,l,n} = y_{\lambda,l-3,n} + d_{lv} \quad 4 \leq l \leq 6 \quad 1 \leq n \leq W. \tag{15}$$

Die  $P$  X-Koordinaten der Aufpunkte des ersten  $x_{1,m}$ , des zweiten  $x_{2,m}$ , des dritten  $x_{3,m}$ , des vierten  $x_{4,m}$ , des fünften  $x_{5,m}$  und des sechsten Leiters  $x_{6,m}$  ergeben sich zu

$$x_{1,m} = x_{4,m} = r_l \cdot \cos\left(\frac{m \cdot 2 \cdot \pi}{P}\right) - d_{lh}, \tag{16}$$

$$x_{2,m} = x_{5,m} = r_l \cdot \cos\left(\frac{m \cdot 2 \cdot \pi}{P}\right), \tag{17}$$

$$x_{3,m} = x_{6,m} = r_l \cdot \cos\left(\frac{m \cdot 2 \cdot \pi}{P}\right) + d_{lh}. \tag{18}$$

Unter Berücksichtigung des Reduktionsfaktors können aus (16) bis (18) die  $W$  X-Koordinaten der Linienladungen der sechs Leiter  $x_{\lambda,1,j}, x_{\lambda,2,j}, x_{\lambda,3,j}, x_{\lambda,4,j}, x_{\lambda,5,j}$  und  $x_{\lambda,6,j}$  bestimmt werden zu

$$x_{\lambda,1,n} = x_{\lambda,4,n} = F_r \cdot r_l \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{W}\right) - d_{lh}, \tag{19}$$

$$x_{\lambda,2,n} = x_{\lambda,5,n} = F_r \cdot r_l \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{W}\right), \tag{20}$$

$$x_{\lambda,3,n} = x_{\lambda,6,n} = F_r \cdot r_l \cdot \cos\left(\frac{n \cdot 2 \cdot \pi}{W}\right) + d_{lh}. \tag{21}$$

An den Positionen der insgesamt  $6P$  Aufpunkte kann das Potential in Abhängigkeit von den  $6W$  Linienladungen mittels (6) zu

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi(x_{1,1}, y_{1,1}) \\ \varphi(x_{1,2}, y_{1,2}) \\ \dots \\ \varphi(x_{6,P}, y_{6,P}) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_{6W} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \lambda \quad \mathbf{A} \in \mathbb{M}^{(6P) \times (6W)} \tag{22}$$

berechnet werden. Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  beschreibt den Einfluss der Linienladungen auf die Potentiale in den Aufpunkten und beinhaltet in jedem Element den zweiten Faktor von (6) in Abhängigkeit von dem adressierten Aufpunkt und der adressierten Linienladung. Die Potentiale der Aufpunkte  $\phi$  ergeben sich durch die geforderten Potentiale der Leiterpotentiale zu

$$\phi(u) = \begin{cases} \varphi_{11} & \text{für } 1 \leq u \leq P \\ \varphi_{12} & \text{für } P < u \leq 2P \\ \varphi_{13} & \text{für } 2P < u \leq 3P \\ \varphi_{14} & \text{für } 3P < u \leq 4P \\ \varphi_{15} & \text{für } 4P < u \leq 5P \\ \varphi_{16} & \text{für } 5P < u \leq 6P \end{cases} \quad 1 \leq u \leq 6P \tag{23}$$

mit der ganzzahligen Laufvariable  $u$ .

Ein eindeutig lösbares Gleichungssystem ergibt sich bei gleicher Anzahl der Linienladungen und der Aufpunkte. Mit Hilfe der Pseudoinversen der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}^{-1}$  werden die unbekanntenen Linienladungsdichten bestimmt als

$$\lambda = \mathbf{A}^{-1} \cdot \phi. \tag{24}$$

Die Ermittlung des skalaren Potentialfelds im Medium der Rundleiter ergibt sich abschließend durch die Superposition der entsprechenden Werte der Potentiale der  $6W$  Linienladungen nach (6).

#### 4. Berechnung der Wicklung-Stator-Kapazität

Die Bestimmung der Kapazität zwischen dem mittig platzierten Leiter der unteren Lage und dem Stator  $C_{25}$  erfolgt mit Hilfe der maximalen Kapazitätskoeffizienten, mit welchen der Kapazitätsbegriff auf Systeme übertragen werden kann, die aus mehreren voneinander isolierten Elektroden bestehen [6]. Als Elektroden werden

**Tab. 1. Geometrie- und Materialeigenschaften der untersuchten Modelle**

Variante	$r_l$ in mm	$d_{ls}$ in mm	$d_{lh}$ in mm	$d_{lv}$ in mm	$d_{iso}$ in mm	$\epsilon_{r1}$	$\epsilon_{r2}$
1	0,3	0,50	0,61	0,61	0,1	1,0	3,5
2	0,6	0,85	1,22	1,25	0,2	1,0	3,5
3	0,6	0,95	1,60	1,60	0,3	1,0	3,5
4	0,9	1,25	1,83	1,90	0,3	1,0	2,5
5	0,9	1,25	1,83	1,90	0,3	5,0	2,5
6	1,2	1,80	2,60	2,60	0,4	5,0	2,5

**Tab. 2. Vergleich der analytisch berechneten, längenbezogenen Leiter-Stator-Kapazitäten  $C'_{l2s}$  mit den FEM-Ergebnissen**

Variante	$C'_{l2s,anal}$ in pF/m	$C'_{l2s,FEM}$ in pF/m	Abweichung $C'_{l2s}$ in %
1	32,97	32,17	2,49
2	64,06	60,64	5,64
3	61,65	59,19	4,16
4	61,71	58,76	5,02
5	106,06	104,46	1,53
6	98,74	97,41	1,37

in der vorliegenden Problemstellung der erste Leiter mit der Ladung  $\lambda_{j1}$  und dem Potential  $\varphi_{j1}$ , der zweite Leiter mit der Ladung  $\lambda_{j2}$  und dem Potential  $\varphi_{j2}$ , der dritte Leiter mit der Ladung  $\lambda_{j3}$  und dem Potential  $\varphi_{j3}$ , der vierte Leiter mit der Ladung  $\lambda_{j4}$  und dem Potential  $\varphi_{j4}$ , der fünfte Leiter mit der Ladung  $\lambda_{j5}$  und dem Potential  $\varphi_{j5}$  und der sechste Leiter mit der Ladung  $\lambda_{j6}$  und dem Potential  $\varphi_{j6}$  betrachtet. Die entsprechende Kapazitätskoeffizientenmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} \lambda_{j1} \\ \lambda_{j2} \\ \lambda_{j3} \\ \lambda_{j4} \\ \lambda_{j5} \\ \lambda_{j6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{j11} & C_{j12} & C_{j13} & C_{j14} & C_{j15} & C_{j16} \\ C_{j21} & C_{j22} & C_{j23} & C_{j24} & C_{j25} & C_{j26} \\ C_{j31} & C_{j32} & C_{j33} & C_{j34} & C_{j35} & C_{j36} \\ C_{j41} & C_{j42} & C_{j43} & C_{j44} & C_{j45} & C_{j46} \\ C_{j51} & C_{j52} & C_{j53} & C_{j54} & C_{j55} & C_{j56} \\ C_{j61} & C_{j62} & C_{j63} & C_{j64} & C_{j65} & C_{j66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{j1} \\ \varphi_{j2} \\ \varphi_{j3} \\ \varphi_{j4} \\ \varphi_{j5} \\ \varphi_{j6} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Die resultierenden Ladungen der sechs Rundleiter  $\lambda_{j1}$ ,  $\lambda_{j2}$ ,  $\lambda_{j3}$ ,  $\lambda_{j4}$ ,  $\lambda_{j5}$  und  $\lambda_{j6}$  können nach (22) durch eine Aufteilung des Vektors  $\lambda$  und eine nachfolgende Summation der innerhalb der einzelnen Leiter platzierten Linienladungen bestimmt werden zu

$$\lambda_{jj} = \sum_{i=1+P \cdot (j-1)}^{j \cdot P} \lambda_i \quad 1 \leq j \leq 6 \quad (26)$$

mit der ganzzahligen Laufvariable  $j$ . Für die Ermittlung der Leiter-Stator-Kapazität

$$C_{l2s} = \sum_{k=1}^6 (-C_{l2lk}) = -C_{l2l1} - C_{l2l2} - C_{l2l3} - C_{l2l4} - C_{l2l5} - C_{l2l6} \quad (27)$$

werden die Werte der sechs maxwellschen Kapazitätskoeffizienten  $C_{l2l1}$ ,  $C_{l2l2}$ ,  $C_{l2l3}$ ,  $C_{l2l4}$ ,  $C_{l2l5}$  und  $C_{l2l6}$  benötigt.

Die Bestimmung der Kapazitätskoeffizienten erfolgt sequenziell. Betragen die Leiterpotentiale mit Ausnahme des  $k$ -ten Leiters null Volt, ergibt sich nach (25)

$$C_{l2lk} = \frac{\lambda_{l2}}{\varphi_{lk}} \quad (28)$$

Die Gleichungen (24) und (28) müssen unter Berücksichtigung der Wahl der Leiterpotentiale für jeden Kapazitätskoeffizienten separat

gelöst werden. Die Kapazität zwischen dem mittig platzierten Leiter der unteren Lage und dem Stator kann anschließend durch die Anwendung der Gleichung (27) ermittelt werden.

Für die Bestimmung der Wicklung-Stator-Kapazität erfolgt eine Extrapolation auf die gesamte Nutmantelfläche der Maschine. Die kapazitive Kopplung zwischen dem mittigen Leiter der unteren Lage und dem Stator liegt im Modell in X-Richtung annähernd über den horizontalen Abstand zwischen den Mittelpunkten benachbarter Leiter  $d_{lh}$  vor. Unter Berücksichtigung der Länge der Nutisolierung  $l_{iso}$  und der Länge des Blechpakets  $l_{fe}$  sowie der Anzahl der Statornuten  $N_1$  kann die Wicklung-Stator-Kapazität zu

$$C_{ws} = N_1 \cdot l_{fe} \cdot \frac{l_{iso}}{d_{lh}} \cdot C_{l2s} \quad (29)$$

berechnet werden.

## 5. Validierung des Modells

Die Validierung des Modells erfolgt mit Hilfe von FEM-Software. Die sechs untersuchten Maschinenvarianten, welche sich hinsichtlich ihrer Geometrien und Materialeigenschaften unterscheiden, können der Tab. 1 entnommen werden. Die sechs Rundleiter werden durch jeweils 36 Aufpunkte und 36 Linienladungen dargestellt. Der Reduktionsfaktor beträgt für alle Leiter 0,9.

Die Tabelle 2 enthält die analytisch berechneten und die numerisch bestimmten Leiter-Stator-Kapazitäten. Die Abweichungen liegen im einstelligen Prozentbereich. Die Fehler in der analytischen Lösung sind durch die endliche Anzahl von Aufpunkten und Linienladungen zu begründen. Zusätzlich entstehen Abweichungen in der numerischen Lösung durch die Begrenzung des ersten Mediums in X- und Y-Richtung sowie die Begrenzungen des zweiten und des dritten Mediums in Y-Richtung mit Neumann-Randbedingungen.

Für die Validierung der Berechnung der Wicklung-Stator-Kapazität (29) werden auf Grundlage der in Tab. 1 enthaltenen Geometrien und Materialeigenschaften FEM-Modelle mit 15 Rundleitern je Lage erstellt. Die analytisch berechneten und die numerisch bestimmten Wicklung-Stator-Kapazitäten sowie deren Abweichungen können der Tab. 3 entnommen werden.

Tab. 3. Vergleich der analytisch berechneten, längenbezogenen Wicklung-Stator-Kapazitäten  $C'_{ws}$  mit den FEM-Ergebnissen

Variante	$l_{iso}$ in mm	$C'_{ws,anal}$ in pF/m	$C'_{ws,FEM}$ in pF/m	Abweichung $C'_{ws}$ in %
1	9,14	493,98	518,26	4,68
2	18,26	958,76	949,04	1,02
3	23,6	909,39	917,75	0,91
4	27,42	924,62	916,57	0,88
5	27,42	1589,2	1714,9	7,33
6	38,80	1473,5	1604,0	8,14

Tab. 4. Einfluss des Abstands der unteren und der oberen Leiterlage auf die längenbezogene Leiter-Stator-Kapazitäten  $C'_{lzs}$

Variante 1		Variante 2		Variante 3	
$d_{lv}$ in mm	$C'_{ws,anal}$ in pF/m	$d_{lv}$ in mm	$C'_{ws,anal}$ in pF/m	$d_{lv}$ in mm	$C'_{ws,anal}$ in pF/m
0,61	32,97	1,25	64,06	1,60	61,65
1,22	33,13	2,50	64,25	3,20	62,06
1,83	33,62	3,75	64,77	4,80	62,68
2,44	34,02	5,00	65,19	6,40	63,12
3,05	34,31	6,25	65,49	8,00	63,41
3,66	34,52	7,50	65,70	9,60	63,62
6,10	34,96	12,50	66,14	16,00	64,06
100,00	35,56	100,00	66,69	100,00	64,58

Auf Grund der im einstelligen Prozentbereich vorliegenden Abweichungen kann die vorgestellte Extrapolation (29) zur Bestimmung der Wicklung-Stator-Kapazität angewendet werden. Die untere Leiterlage dominiert die kapazitive Kopplung zum Stator, sodass der kapazitive Einfluss der oberen Leiterlage vernachlässigt werden kann. Die Fehler in der analytischen Lösung entstehen durch die Annahme einer definierten Kopplungsstrecke in X-Richtung des Modells. Es ergeben sich zudem Differenzen infolge der im FEM-Modell enthaltenen Begrenzungen mit Neumann-Randbedingungen.

### 6. Einfluss der oberen Leiterlage auf die Berechnung der Leiter-Stator-Kapazität

Im Folgenden soll auf Grund des geringfügigen kapazitiven Einflusses der oberen Leiterlage die Notwendigkeit der Berücksichtigung der oberen Leiterlage für die Ermittlung der Leiter-Stator-Kapazität  $C'_{lzs}$  untersucht werden. Hierfür wird der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Rundleiter der unteren und der oberen Lage  $d_{lv}$  für die ersten drei in Tab. 1 enthaltenen Modelle variiert. Die Tabelle 4 enthält die analytisch ermittelten Leiter-Stator-Kapazitäten in Abhängigkeit vom vertikalen Abstand.

Es ist zu erkennen, dass die exakte Kenntnis des Abstands zwischen den Leitern der unteren und der oberen Lage nur einen geringen Einfluss auf die Leiter-Stator-Kapazität besitzt. Die Vernachlässigung der oberen Leiterlage wird mit einem vertikalen Leiterabstand von 100 mm simuliert. Die Abweichungen zwischen den Leiter-Stator-Kapazitäten mit den in Tab. 1 angenommenen vertikalen Leiterabständen und den maximal untersuchten Abständen von 100 mm liegen bei den drei untersuchten Varianten in einem Bereich von ca. 4% bis 8%. Die grundsätzliche Vernachlässigung der oberen Leiterlage führt zur Ermittlung von zu großen Kapazitäten. Aus diesem Grund wird in dem hier vorgestellten Feldgebiet die obere Leiterlage berücksichtigt, wobei der genaue Wert des vertikalen Leiterabstands einen untergeordneten Einfluss besitzt.

### 7. Schlussfolgerungen und Ausblick

Diese Arbeit präsentiert eine einfache und schnelle analytische Berechnungsmethodik für die Wicklung-Stator-Kapazität. Die Bestimmung basiert auf der Spiegelungsmethode zur Lösung eines zweidimensionalen Feldgebiets in drei Raumbereichen mit unterschiedlichen Permittivitäten. Die Rundleiter werden durch eine endliche Anzahl von diskreten Aufpunkten und diskreten Linienladungen modelliert. Die Wicklung-Stator-Kapazität berechnet sich durch eine Extrapolation der Kapazität zwischen einem von Rundleitern umgebenem Leiter und dem Stator unter Berücksichtigung der Länge der Nutilisolierung.

Mit Hilfe des vorgestellten Modells kann die Auswirkung von unterschiedlichen Geometrien und Materialien auf die Wicklung-Stator-Kapazität bestimmt werden.

Auf Grund der Verwendung von innerhalb der Elektroden vorliegenden Linienladungen kann die Methode auch zur Bestimmung der Wicklung-Stator-Kapazität von weiteren Leitergeometrien, wie der Hairpin-Technik, angewendet werden.

**Funding Note** Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

**Hinweis des Verlags** Der Verlag bleibt in Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutsadressen neutral.

**Open Access** Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen. Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

**Literatur**

1. Tischmacher, H. (2017): Systemanalysen zur elektrischen Belastung von Wälzlagern bei umrichter gespeisten Elektromotoren. Dissertation, Leibniz Universität Hannover.
2. Mütze, A. (2004): Bearing currents in inverter fed AC-motors. Dissertation, TU Darmstadt.
3. Schuster, M., Springer, J., Binder, A. (2018): Comparison of a 1.1 kW-induction machine and a 1.5 kW-PMSM regarding common-mode bearing currents. In International symposium on power electronics, electrical drives, automation and motion (SPEEDAM), Amalfi. (S. 1–6).
4. Ma, X., Liu, R., Zheng, B., Zhang, Y. (2012): Analysis and calculation of capacitance parameters in induction machines to predict shaft voltage. In 15th international conference on electrical machines and systems (ICEMS), Sapporo (S. 1–5).
5. Berth, M. (1998): Elektrische Belastung der Wicklungsisolierung pulsumrichter gespeister Niederspannungsmotoren, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 21: Elektrotechnik (Vol. 247). Berlin: VDI-Verlag.
6. Küpfmüller, K., Mathis, W., Reibiger, A. (2013): Theoretische Elektrotechnik Eine Einführung. 19. aktualisierte Aufl. (Vol. 19). Berlin Heidelberg: Springer.
7. Henke, H. (2015): Elektromagnetische Felder Theorie und Anwendung. 5. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer.
8. Scheible, J. (1991): Die Lösung des feldtheoretischen Viermedienproblems ebener Schichten. Arch. Elektrotech., 75, 9–17.

**Autoren****Jan Ole Stockbrügger**

studierte Elektro- und Informationstechnik an der Leibniz Universität Hannover und erhielt im März 2018 den Master of Science. Im Anschluss an sein Studium ist er als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Antriebssysteme und Leistungselektronik der Leibniz Universität Hannover angestellt worden. Seine Forschungsschwerpunkte liegen im Bereich der Hochfrequenzeffekte von elektrischen Maschinen.

**Bernd Ponick**

schloss sein Studium der Elektrotechnik an der Universität Hannover ab. Anschließend war er als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Elektrische Maschinen und Antriebe tätig und wurde dort 1994 promoviert. In den folgenden Jahren arbeitete er als Entwicklungsingenieur, Berechnungsleiter und schließlich als Technischer Leiter im Berliner Dynamowerk der Siemens AG. 2003 folgte er einem Ruf auf den Lehrstuhl für Antriebssysteme der Leibniz Universität Hannover und ist seitdem einer der beiden Leiter des dortigen Instituts für Antriebssysteme und Leistungselektronik. Von 2007 bis 2016 war er als Chairman von IEC TC2 für die internationale Normung auf dem Gebiet der rotierenden elektrischen Maschinen verantwortlich.