Historische und philosophische Notizen über das Kontinuum

Thomas Bedürftig · Roman Murawski

Zusammenfassung Was ist das Kontinuum? Beispiele sind Raum und Zeit, Körper, Flächen und Linien. Was das Kontinuierliche an ihnen ist, darüber finden wir in der Geschichte sehr unterschiedliche Antworten. Die historische Mathematik ist in ihrem Fundament bestimmt durch eine anschaulich-philosophische Auffassung des geometrischen Kontinuums. Sie wurde von Aristoteles formuliert und steht im Hintergrund der *Elemente* des Euklid und der nachfolgenden Mathematik. Im 19. Jahrhundert tritt eine radikale Wende im mathematischen Denken ein. Seitdem gibt es die reellen Zahlen. Bis hierhin geben wir eine knappe Übersicht, um zum Schluss Nichtstandard-Auffassungen des Kontinuums vorzustellen und zurückzublicken.

1 Vorbemerkungen

Das Wort „Kontinuum" bedeutet das „Ausgedehnte", das „in sich Zusammenhängende", das „Lückenlose" oder das „Ununterbrochene". Das griechische Wort ist „συνεχέσ" (synechés). Seine Bedeutung ist eher transitiv und meint „das Zusammenhaltende" oder „das Verbindende" und drückt eine Beziehung, eine Relation aus. Berühmte, große Beispiele für das Kontinuum sind der uns umgebende Raum und der stetige Fluss der Zeit. Körper, Flächen und Linien, ihre kontinuierlichen Bestandteile im Raum und Abschnitte in der Zeit sind weitere, überschaubarere Beispiele. Sie können real oder abstrakt gedacht sein. Wir werden sie vornehmlich mathematisch, also geometrisch sehen.

T. Bedürftig (✉)
Fakultät für Mathematik und Physik, Leibniz Universität Hannover, Hannover, Deutschland
E-Mail: beduerftig@idmp.uni-hannover.de

R. Murawski
Fakultät für Mathematik und Informatik, Adam Mickiewicz Universität Poznań, Poznań, Polen
E-Mail: rmur@amu.edu.pl

Der Sprachgebrauch, dem wir uns anschließen, ist so. Das „Kontinuum“ ist einerseits der Oberbegriff über die genannten und weitere Beispiele. Jedes einzelne Beispiel ist „ein Kontinuum“. Von manchem einzelnen Kontinuum aber, einem Körper etwa, einer Fläche, einer Geraden, einem Intervall, spricht man oft auch einfach von „dem Kontinuum“.

Was ist „das Kontinuum“? Das war und ist eine große Frage. Über Raum und Zeit ist viel philosophiert worden. Nehmen wir das Beispiel der Zeit, zu der es eine eigene Philosophie gibt (s. z. B. [44]). Wie schwierig das Problem der Zeit ist, hat Augustinus (354–430) so kommentiert:

> „Was also ist die Zeit? Wenn niemand mich fragt, so weiß ich es; wenn ich es einem Fragenden erklären will, weiß ich es nicht.“

In der Tat. Will man den Zeitbegriff klären, so muss man dies zeitlich, also in der Zeit tun. Das birgt von Vornherein Selbstbezüge in sich. Man philosophiert sehr tief über Anschauung und Empfindung, Antizipation und Erinnerung, es geht um Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft, Anfang und Ende, Werden und Vergehen. In der Moderne ist der Bezug zur Physik fundamental. Unser Anspruch ist sehr bescheiden. Wir nehmen für unsere mathematischen Zwecke einen schlichten Standpunkt ein und betrachten die Zeit wie die anderen Kontinua von außen. Sie ist für uns eine lineare Erscheinung unter anderen.

In der Geschichte der Mathematik hat es schon sehr früh Versuche gegeben, die genannten Bedeutungen des Begriffs „Kontinuum“ zu erläutern und zu sagen, was das Charakteristische des Kontinuierlichen in den Beispielen ist. Sie fallen, wie wir sehen werden, sehr unterschiedlich aus. Die Auffassungen über das Kontinuum, die oft auch nur aus dem Umgang mit Strecken, Flächen und Körpern erschlossen werden können, haben sich in der Geschichte der Mathematik grundlegend gewandelt. Heute sind die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ das mathematische Kontinuum. Aus ihnen gewinnt oder charakterisiert man die weiteren Kontinua.

Wir wollen den Weg über ausgewählte Positionen bis zur heutigen mathematischen Auffassung verfolgen. Wir konzentrieren uns dabei auf knappe Charakterisierungen und verzichten auf weitläufige Kommentare. Unser bescheidenes Ziel ist es, eine Skizze historischer Auffassungen zum Kontinuum zu geben, um einen Hintergrund zu schaffen, vor dem wir unsere heutige mathematische Auffassung bedenken können. Wir wollen zum Nachdenken über einen fundamentalen Begriff anregen.

Sind die reellen Zahlen die endgültige Antwort auf die uralte Frage nach dem Kontinuum? Gegen Ende sprechen wir über Nichtstandard-Auffassungen des Kontinuums und geben eine Antwort auf diese Frage.

2 Vorsokratische Auffassungen

Ein sehr früher Zeuge einer Auffassung, die wir auf das Kontinuum beziehen können, ist *Anaxagoras* (ca. 500–428 v. Chr.). Er sagt:

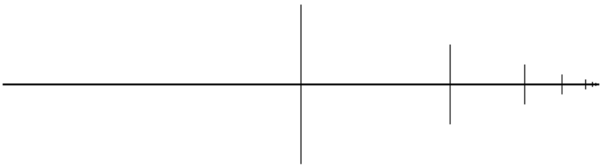
> „Denn von dem Kleinen gibt es kein Allerkleinstes, sondern immer noch ein Kleineres. Denn es ist unmöglich, dass das Seiende durch Teilung bis ins

Unendliche aufhört zu sein. Aber auch von dem Großen gibt es immer noch ein Größeres.“ (Fragmente 3, zitiert nach [13], S. 267)

Zuerst ist für uns der mittlere Satz wichtig. Was ist das Seiende? Dabei denkt Anaxagoras an ganz reale, materielle Dinge im Raum.

Was ist der Raum? Anaxagoras war Physiker und Kosmologe, besser Metereologe, der sich mit den „Dingen in der Höhe“ (μετέωα (metéora), das Erhobene) beschäftigte. Hieraus entstand seine Naturphilosophie. Raum ist für Anaxagoras nie leer. Die Dinge im „Kosmos“ denkt er aus unzähligen Urstoffen gebildet, die gleichmäßig im Raum verteilt sind, nach geistigen Prinzipien bewegt und geordnet werden, die physischen Dinge bilden und alle in allen Dingen sind. Anaxagoras Philosophie ist ein frühes Beispiel eines klaren Dualismus von Geist ($\nu o \widetilde{\upsilon} \varsigma$) und Materie.

Es geht in unserem Zitat um die unbegrenzt fortsetzbare Teilung, die als Charakteristikum des räumlich Physischen genannt wird. Dass diese Teilung nicht ins Leere, ins Nichts führt, scheint aus seiner Raumauffassung zu folgen. Auch ein „Allerkleinstes“ (Fragmente 6, [13], S. 267) gibt es daher nicht. – Wir wollen die Situation der fortgesetzten Teilung, da es uns um Mathematik geht, ins Geometrische übertragen. Dabei denken wir an eine „reale“ Strecke. Dann sieht die „Teilung bis ins Unendliche“ durch fortgesetzte Halbierung z. B. so aus:



„Teilung bis ins Unendliche“ einer „realen“ Strecke (Anaxagoras)

Die Sätze 1 und 3 im obigen Zitat veranschaulichen wir im folgenden Bild – hier auf Intervalle auf einer Geraden übertragen:

„Von dem Kleinen gibt es immer noch ein Kleineres, von dem Großen gibt es immer noch ein Größeres“ (Anaxagoras)

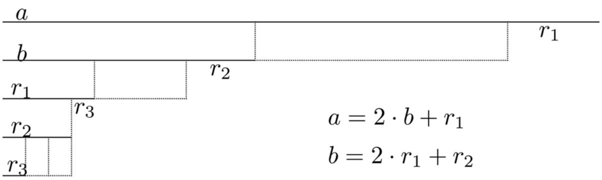
Von innen nach außen gesehen „gibt es immer noch ein Größeres“, von außen nach innen „immer noch ein Kleineres“. Wir haben hier eine frühe Formulierung, die auf das spätere Archimedische Axiom verweist.

Für uns sind das gewohnte Bilder. Die Vorstellung der unbegrenzten Teilbarkeit von Strecken und die unbegrenzte Ausdehung der Geraden gehört auch für uns zur Vorstellung des linearen Kontinuums. Und sie gehörte zur Geometrie der Pythagoreer.

3 Pythagoreer

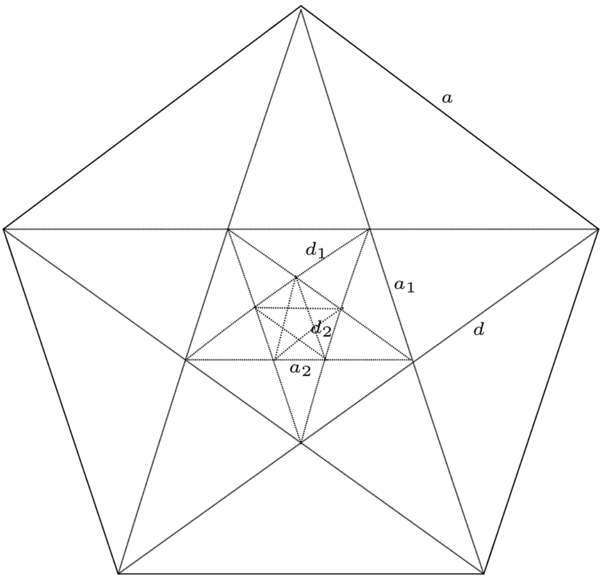
Um Verhältnisse von Strecken zu bestimmen, besaßen die alten Griechen ein praktisches Verfahren: die *Wechselwegnahme*, die heute in der elementaren Zahlentheorie

– auf Zahlen angewendet – als euklidischer Algorithmus bekannt ist. Sie verwendet die Teilung von Strecken. Die Wechselwegnahme sieht so aus: Seien a, b Strecken. Von der größeren a nehme man die kleinere weg, in unserem Beispiel zweimal. Den Rest r_1 nehme man von b weg usw.:



$$a = 2 \cdot b + r_1$$
$$b = 2 \cdot r_1 + r_2$$
$$r_1 = r_2 + r_3$$
$$r_2 = 3 \cdot r_3$$

r_3 ist das gemeinsame Maß von a und b. Man nahm wohl vorübergehend an, dass dieses Verfahren immer zu einem Ergebnis führt. Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch die Pythagoreer um 450 v. Chr. – wie man allgemein annimmt (vgl. [11]) – lehrte etwas anderes. Wir kennen alle z. B. dieses Bild:



Wie ist das Verhältnis von Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck? Die Wechselwegnahme geht hier so:

$$\begin{array}{ccccccccccc} d & = & a & + & d_1 & \qquad & a & = & d_1 & + & a_1 \\ d_1 & = & a_1 & + & d_2 & & a_1 & = & d_2 & + & a_2 \\ d_2 & = & a_2 & + & d_3 & & a_2 & = & d_3 & + & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Was *sieht* man? Es kann kein gemeinsames Maß geben. Die Wechselwegnahme bricht nicht ab. Sie folgt der unendlichen Folge der Fünfecke. *Notwendige Voraus-*

setzung für diese Entdeckung – und deshalb zitieren wir dieses berühmte Bild – ist die Auffassung, dass auch die Folge der Teilungen der Strecken unendlich ist und an kein Ende kommt so, wie es der Auffassung des Anaxagoras entspricht und es heute für unsere *Anschauung* selbstverständlich ist.

4 Demokrit

Demokrit (ca. 460–ca. 370 v. Chr.) war da ganz anderer Auffassung. Er ist uns als konsequenter Materialist und als der Hauptvertreter der alten *Atomisten* bekannt. Er war ein entschiedener philosophischer Gegner von Anaxagoras. Die Atomisten hatten ganz andere Vorstellungen über das Kontinuum als Anaxagoras und die Pythagoreer. Über sie äußert sich Aetius (ca. 50 v. Chr.) so:

> Sie „behaupten, dass die Zerteilung der Stoffe bei den teillosen <Stoffteilchen>[1] zum Stehen komme und sich nicht bis ins Unendliche fortsetzen lasse." (zitiert nach [13], S. 396)

Es geht also wieder zuerst ums *Materielle* und dessen Teilung, die eben nicht unbegrenzt bis ins Unendliche geht, sondern bei den „Atomen" stehen bleibt. Wieder anders als Anaxagoras, der in der Dualität von Geist und Materie dachte, stellt Demokrit die Atome ins Nichts, in den leeren Raum, in dem sie sich bewegen und die physischen Dinge bilden. Seine Naturphilosophie war kausalistisch mit dem letzten Grund „Atom". Auch Seele und Geist, Wahrnehmen und Denken erklärte er atomistisch.

Demokrit selbst hat seine atomistische Vorstellung über die stofflichen Dinge gedanklich ins Geometrische übertragen – in diese Situation:

> „Wenn ein Kegel parallel zur Grundfläche von Ebenen geschnitten wird, wie soll man sich die entstehenden Schnittflächen denken, gleich oder ungleich? Sind sie ungleich, so werden sie den Kegel ungleichmäßig machen, da er viele stufenartige Einschnitte und Vorsprünge erhält; sind sie dagegen gleich, so werden alle Schnitte gleich sein, und der Kegel wird die Erscheinung eines Zylinders bieten." (zitiert nach [22], S. 232).

Demokrit stellte sich, anders kann man diese Aussage nicht verstehen, den Kegel offenbar aus den *Schnittflächen aufgeschichtet* vor. Diese Schnittflächen müssen für ihn eine gewisse Höhe gehabt haben. Sie sind also sehr dünne, in ihrer Höhe nicht weiter teilbare, „atomare" oder *indivisible* Scheiben. Sie sind nicht nur eben, sondern haben auch eine gewisse räumliche Dimension. So rufen sie die „stufenartigen Einschnitte und Vorsprünge" hervor, von denen Demokrit spricht.

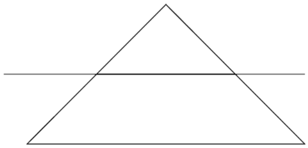
Wir wollen Demokrits Auffassung *ins Lineare* übertragen und am Beispiel einer Strecke veranschaulichen. Das haben wir so auch für die Auffassung des Anaxagoras getan und werden es ebenso für die folgenden Auffassungen über das Kontinuum tun. So können wir diese unmittelbar einander gegenüber stellen und vergleichen.

[1] Ergänzung im zitierten Werk

Das bietet sich an, da das lineare Kontinuum in der Geschichte der Auffassungen und gerade gegen Ende eine besondere Rolle spielt.

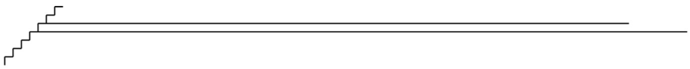
Übertragen wir die Aussage Demokrits zunächst in eine *ebene* Version. Die ausgetauschten Begriffe sind kursiv gesetzt.

> „Wenn ein *Dreieck* parallel zur *Grundlinie* von *Geraden* geschnitten wird, wie soll man sich die entstehenden Schnitt*strecken* denken, gleich oder ungleich? Sind sie ungleich, so werden sie das *Dreieck* ungleichmäßig machen, da es viele stufenartige Einschnitte und Vorsprünge erhält; sind sie dagegen gleich, so werden alle Schnitte gleich sein, und das *Dreieck* wird die Erscheinung eines *Rechtecks* bieten.“



Dreieck mit Schnittgerade

Ein Ausschnitt sähe im ungleichen Falle „unter der Lupe“ so aus:



Teil einer Dreiecksseite und einer Schnittstrecke im Dreieck unter der Lupe des Demokrit

Strecken hier sind analog zu den Schnittflächen beim Kegel sehr schmale, *indivisible* Streifen, die *flächenartig* sind. Ihre Höhe ist sehr klein, aber von einem *festen positiven Betrag*. Andernfalls gäbe es nicht die stufenartigen Einschnitte, die wir hier sehen. Es gibt sehr viele Streifen, es können aber nur – wegen des festen Betrages – *endlich viele* sein. Aus den streifenartigen Strecken ist das Dreieck zusammengesetzt.

Eine weitere Übertragung der Formulierung ins Lineare ist nur partiell möglich. „Schnitt*punkte*“ können nicht „parallel“ sein. Außerdem können sie nicht „ungleich“ sein. „Stufenartige Einschnitte und Vorsprünge“ kann es nicht geben. Es bleibt nur die Analogie, dass Punkte – so wie Flächen bei Demokrit eine indivisible räumliche, Strecken eine indivisible ebene Dimension haben – eine lineare Dimension haben. Punkte sind, so können wir schließen, für Demokrit sehr kleine, atomare Strecken. Aus diesen ist die Gesamtstrecke zusammengesetzt. Aus der Aussage des Demokrit wird – mit einer Ergänzung in Klammern:

> „Wenn eine *Strecke* von *Punkten* geteilt wird, wie soll man sich die entstehenden Schnitt*punkte* denken? Die *Strecke* wird die Erscheinung einer *Strecke* bieten <die aus den Schnittpunkten zusammengesetzt ist>.“

Das sieht – wieder unter der Lupe – so aus:

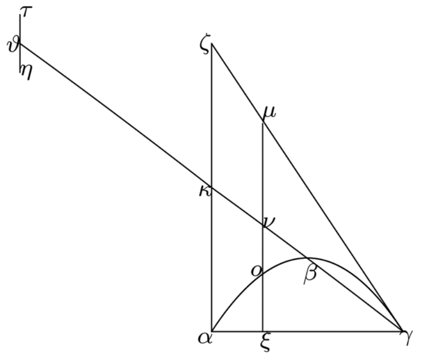
Strecke aus sehr kleinen Strecken (Punkten) nach Demokrit

Wieder haben die Strecken, die die Punkte sind, eine *sehr kleine Länge*. Es können daher wieder nur *endlich viele* kleine Strecken sein, die die Gesamtstrecke zusammensetzen.

5 Archimedes

Wir verlassen jetzt kurz den chronologischen Fortgang, überspringen Aristoteles, dessen Auffassung wir anschließend vorstellen, und kommen zu *Archimedes*. Archimedes (etwa 287–212 v. Chr), so werden wir es sehen, verbindet die Auffassungen des Anaxagoras und des Demokrit, die unbegrenzte Teilbarkeit der Kontinua und, so können wir es sehen, den Atomismus. Wie geschieht das?

Archimedes Auffassung ist gespalten. Er steht als Mathematiker in der Tradition der Pythagoreer und folgt Aristoteles und Euklid (s. u.), anderseits scheint er in seiner Heuristik ein Atomist zu sein – in einem neuen Sinn. Verfolgen können wir das in seiner Methodenlehre. Aus der Skizze zur berühmten Parabelquadratur, aus der wir nur einen Ausschnitt betrachten, können wir Charakteristisches seiner mechanischen Methode ablesen.



Aus der Parabelquadratur nach Archimedes

Wir wollen nicht die geometrischen Details studieren und die Argumentation im Einzelnen nachvollziehen. Wir erkennen aber sofort: Archimedes *wiegt Strecken*. Wir sehen eine Balkenwaage mit dem Drehpunkt κ. Links, in Ñ, hängt die Strecke $\tau\eta$, die kongruent zu ξo ist. Rechts hängt in ν die Strecke $\mu\xi$.

Das zeigt beispielhaft den mechanischen Aspekt der Heuristik des Archimedes. Den anderen, für uns entscheidenden Aspekt, entnehmen wir dem folgenden Zitat:

> „Und weil aus den Strecken im Dreieck $\gamma\zeta\alpha$ das Dreieck $\gamma\zeta\alpha$ besteht und aus den im Parabelsegment der Strecke ξo entsprechend genommenen das Segment

> $\alpha\beta\gamma$, so wird das Dreieck [...] im Gleichgewicht sein mit dem Parabelsegment, [...] ." (Archimedis opera Bd. II, S. 436, zitiert nach [37], S. 113)

Was lesen wir? Ein Dreieck „besteht" in der Auffassung des Archimedes aus Strecken. Wie können wir uns das vorstellen? Vom physikalischen Hintergrund her können wir an eine Zusammensetzung denken:

> Ein Dreieck ist in der Auffassung des Archimedes eine Zusammensetzung von Strecken.

Was bedeutet dies, wenn wir es ins Lineare übertragen? Diese Übertragung können wir in der Parabelquadratur quasi sehen, da die Spuren der zusammengesetzten Strecken auf einer Kathete und der Parabel Punkte sind:

> Eine Strecke ist in der heuristischen Auffassung des Archimedes eine Zusammensetzung von Punkten.

Das hört sich an wie bei Demokrit. Inzwischen aber war viel Zeit vergangen. Über die allgemeine Unkenntnis seiner Zeitgenossen über die Inkommensurabilität hatte sich *Platon* (428–349 v. Chr.), gut 100 Jahre zuvor, deutlich und drastisch so geäußert:

> „Es kam mir vor, als wäre das gar nicht bei Menschen möglich, sondern eher nur beim Schweinevieh. Und da schämte ich mich, nicht nur für mich selbst, sondern auch für alle Hellenen." ([32], Bd. 8 (Gesetze), 819-820 AD)

Zwischen Platon und Archimedes liegen Aristoteles Werke und Euklids *Elemente*. Die unendliche, unbegrenzt fortsetzbare Teilung einer Strecke war philosophischer und mathematischer Alltag. Die Entdeckung der Inkommensurabilität hatte die Mathematik verändert, die Größenlehre in den *Elementen* hervorgebracht und den mathematischen Atomismus überwunden. In der Physik der Zeit aber war die atomistische Auffassung der Materie präsent. Also können wir vermuten, dass die Auffassung des Archimedes nicht der finite Atomismus des Demokrit und der Physiker, sondern ein neuer, ein *infiniter Atomismus* ist:

> Ein Dreieck ist in der Heuristik des Archimedes eine Zusammensetzung *von unendlich vielen* Strecken, die unendlich schmale, unteilbare Streifen sind.

Archimedes selbst hat sich weder über endliche oder unendliche Anzahl, über kleine oder unendlich kleine Maße oder den Status solcher Indivisibilien geäußert, sondern allein mit ihnen operiert und ihre geometrischen Relationen genutzt.

Wir übertragen Archimedes Auffassung, die wir vermuten, wieder ins Lineare:

> Eine Strecke ist eine Zusammensetzung von *unendlich vielen* Punkten, *die unendlich kleine, indivisible (atomare) Strecken sind.*

Eine Veranschaulichung dieser Situation ist nicht mehr möglich. Sie ist rein gedanklich – und folgenreich.

Der transfinite Atomismus des Archimedes ist vereinbar mit der Auffassung des Anaxagoras und der Praxis der Pythagoreer, die von der unbegrenzten Teilbarkeit von Kontinua ausgingen. Wenn wir unsere Schlussfolgerungen über die Auffassung des Archimedes ein wenig weiter verfolgen, so können wir sagen:

> Eine Strecke *besteht* aus unendlich vielen Punkten. Es entsteht also eine Art „Gesamtheit“ aller Punkte.

Die geometrische Strecke stiftet diese Gesamtheit. Die *Vermutung* also ist:

> Archimedes scheint heuristisch schon das *aktual Unendliche* zugelassen zu haben, d.h. das Unendliche als fertig gegebene Gesamtheit.

Dieses zu denken, hatte Aristoteles 100 Jahre zuvor ausgeschlossen, wie er das unendlich Kleine und die Atome ausschloss. Archimedes blieb bekanntlich nicht bei seiner Heuristik stehen, sondern war wieder ganz aristotelisch und euklidisch streng, wenn er die mathematischen Beweise für seine heuristisch gewonnenen Aussagen führte.

Wir wenden uns jetzt der aristotelischen Auffassung über das Kontinuum zu.

6 Aristoteles

Aristoteles (384–322 v. Chr.) ist es, der für die nächsten 2000 Jahre die Auffassung des Kontinuums, so wie die des Unendlichen, bestimmt, auch wenn wie in der Heuristik des Archimedes vereinzelt atomistische Konzeptionen auftreten. Aristoteles knüpft an Anaxagoras und die Pythagoreische Mathematik an. Um das Kontinuierliche klar zu charakterisieren, stellt er es dem Diskontinuierlichen gegenüber. Wir fassen hier die bekannten Auffassungen des Aristoteles knapp zusammen und beziehen uns auf [43] sowie auf die Bemerkungen in [8] im Abschnitt 3.3. Die folgenden kurzen Zitate, die wir aus [43] und Dehn [17] entnehmen, kommen aus dem sechsten Buch der *Physik*.

> Kontinuierlich ist das, das „teilbar in immer wieder Teilbares ist“ (231 b 16).

Das erinnert an Anaxagoras. Die Teile, die bei der Teilung entstehen, sind wieder Kontinua. Wichtig ist, wieder ähnlich wie bei Anaxogoras und in der Praxis der Pythaogoreer:

> Der potentiell unbegrenzte Prozess der Teilung wird nicht als abgeschlossen gedacht.

Dadurch ist die Vorstellung des unendlich Kleinen ausgeschlossen. Bei Aristoteles kommen die Grenzen ins Spiel, die bei den Teilungen entstehen und die Teilkontinua begrenzen:

> Kontinuierlich ist das, „dessen Grenzen Eines sind“.

Hierdurch wird in räumlichen und ebenen Beispielen der Zusammenhang betont. Im Linearen sind das „Eine“ die Punkte, die in der Teilung entstehen und Strecken begrenzen.[2] Es sind die Punkte, die den kontinuierlichen Strecken gegenübergestellt werden.

Punkte sind bei Aristoteles Grenzen (ἔσχατα, wörtlich „die Äußersten“) linearer Kontinua.

Punkte sind das schlechthin Nichtteilbare. Sie können sich nicht berühren wie Kontinua, deren Grenzen bei Berührung zusammenfallen. Aristoteles sagt in der Physik (231 a 28):

„Denn etwas anderes ist das Äußerste und das nicht Äußerste“.

Das nicht Äußerste ist das Innere der kontinuierlichen Strecke. Punkte sind das Äußerste, sie haben kein Äußerstes, keine Grenze. Sie können nicht begrenzt werden. Damit gilt für Aristoteles:

Punkte sind die Repräsentanten des Diskontinuierlichen.

Aus diesem Nichtkontinuierlichen kann nicht Kontinuierliches bestehen.

„Es ist unmöglich, dass etwas Kontinuierliches aus Unteilbarem besteht.“ (231 a 24)

Denn wenn Punkte benachbart sind, dann wäre „zwischen ihnen Linie, also etwas Andersartiges.“ Punkte können sich nicht berühren wie Kontinua, deren Grenzen bei Berührung zusammenfallen. Sich berührende Punkte sind nicht denkbar. Damit ist das zusammenhängende, stetige Liegen von Punkten, die sich berühren müssten, undenkbar. Die Vorstellung der potentiell unendlichen Erschöpfung einer Linie durch Punkte hat zudem für Aristoteles dadurch keinen Bestand, dass bei ihm die Potentialität streng verstanden wird, die Teilung einer Linie also durch Teilpunkte immer im Werden begriffen und nie in irgendeiner Weise als Ganzes gedacht werden kann. Aristoteles schließt endgültig aus, dass Linien und Kontinua aus Punkten bestehen können.

Kontinua sind keine Punktmengen.

Wieder, weil die Teilungsprozesse nicht als abgeschlossen gedacht werden, sind auch atomare, indivisible Strecken unmöglich. Allein die Vorstellung von „Streckenatomen“ ist unmöglich, da das Charakteristikum des Kontinuums der Strecke die Teilbarkeit, des Atoms die Unteilbarkeit ist. Sicherlich also gilt:

Punkte sind keine atomaren Strecken,

wie wir sie bei Demokrit fanden und bei Archimedes vermuteten.

[2] Wie in der Auffassung des Aristoteles der Zusammenhang in den Punkten sich ausdrückt, ist in [7] (S. 4) genauer dargestellt.

7 Euklid

Zu den Auffassungen des *Euklid* (ca. 365–ca. 300 v. Chr.) kommen wir nur implizit, indem wir aufmerksam in seine Mathematik schauen. Wir werden wieder vorsichtig sein in unseren Interpretationen. Hinzu kommt die vermittelte Rezeption der *Elemente* des Euklid, die sich im deutschen Sprachraum wesentlich auf die Übersetzung durch Clemens Thaer (1883–1974) stützt. Wir werden daher manchmal in den griechischen Text schauen.

Die Auffassungen des Aristoteles hatten großen Einfluss auf das Denken der Philosophen im alten Griechenland und damit der Mathematiker unter ihnen, speziell auf Euklid (s. [8], Abschnitt 2.3). Das gilt auch für seine Auffassung des Kontinuums. In den *Elementen* des Euklid, dem mathematischen Lehrbuch der kommenden 2200 Jahre, ist das deutlich erkennbar.

Der euklidische Algorithmus in geometrischer Form, die Wechselwegnahme, ist der Zeuge der unbegrenzten Teilbarkeit der linearen Kontinua, wenn er bei der Suche nach einem gemeinsamen Maß nicht abbricht wie im Buch X der *Elemente*, § 2. Er ist ein Erbe der pythagoreischen Mathematik. Die unbegrenzte Teilbarkeit der Kontinua, die Aristoteles übernahm, entspricht der Auffassung des Anaxagoras.

Wir zitieren einige Definitionen aus dem Buch I:

1. Ein Punkt ist, dessen Teil nichts (nicht eines) (οὐϑέν) ist.
2. Eine Linie aber Länge *ohne* Breite.
3. Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.

Im Buch XI lautet die erste Definition:

1. Massiv (στερεόν) ist, was Länge und Breite und Tiefe hat.

In der Übersetzung von C. Thaer [19] steht hier „Ein Körper“ für das griechische Wort „$\sigma\tau\epsilon\varrho\epsilon\acute{o}\nu$“, das wörtlich „das Starre“, „Feste“, „Massive“ bedeuet. Die „massiven“ Körper in der räumlichen Geometrie stehen in ihrer Bedeutung offenbar sehr nahe bei den konkreten Körpern, näher als ihre „Grenzen“, die Flächen (XI, Definition 2) und wieder deren Grenzen, die Linien (I, Definition 6) und schließlich deren Enden, die Punkte (I, Definition 3).

Die Definition 1 im Buch I der *Elemente* lautet bekanntlich in der Übersetzung von C. Thaer in [19] sehr frei „Ein Punkt ist, was keine Teile hat“ und wird deutsch meist in dieser Formulierung zitiert. Es sieht danach so aus, als wenn Punkte so etwas sind wie Atome. Wörtlich aber müsste man übersetzen, wie wir es getan haben. Das passt nicht zu unteilbaren Atomen. Im Griechischen steht dort für „Punkt“ $\sigma\eta\mu\widetilde{\epsilon\iota}o\nu$, das ursprünglich „Zeichen“ bedeutet. Sowohl das Zeichen wie der Teil, der Nichts ist, erinnern an die Punkte bei Aristoteles. Punkte sind nur Zeichen für Grenzen von Kontinua. Das Teilen von Kontinua auf diese Punkte fortgesetzt, so kann man die griechische Formulierung der 1. Definition verstehen, führen nicht mehr zu Kontinua, sondern sind nichts.

Lesen wir die oben angegebenen Definitionen in der Reihenfolge rückwärts, von den Körpern zu den Flächen, die „nur Länge und Breite“, also keine „Tiefe“ haben, über die Linien „ohne Breite“ zu den Punkten, dann bleibt letzteren schließlich keine Länge – weder eine sehr kleine noch eine unendlich kleine. Euklidisch also ist wie bei Aristoteles die atomistische Denkweise ausgeschlossen. Speziell sind die Punkte des Archimedes in seiner Methodenschrift, die wir als unendlich kleine Strecken sahen, nicht zugelassen, und Archimedes selbst hatte sie auch nicht als mathematisch legitim angesehen.

Die Auffassung einer Linie als Gesamtheit von Punkten ist bei Euklid nicht erkennbar. Geraden, Flächen, Kreise usw. sind eigenständige Elemente in einer Konstruktionsgeometrie. Punkte sind nie Punkte „des Kreises“ oder „der Gerade“, sondern „liegen auf“ diesen. Zwischen Punkten und Geraden, Kreisen usw. besteht allein die rein äußere Beziehung der Inzidenz. Im Verhältnis zu Strecken tauchen Punkte noch als deren Grenzen auf (s. I, Definition 3 unten). Gesamtheiten von Punkten kommen ausschließlich in diskreter Form vor.

Wir bemerken noch, dass anders als bei Aristoteles, bei dem die Kontinua die primären Erscheinungen und Punkte nur deren Grenzen (ἔσχατα) sind, der Punkt (σημεῖον) bei Euklid am Anfang steht. Zwischen Punkten entstehen die kontinuierlichen Strecken, wie es im 1. Postulat steht:

> „Gefordert soll sein, von jedem Punkt zu jedem Punkt eine gerade Linie zu ziehen.“

Die Definition

3. Die Enden (πέρατα) einer Linie sind Punkte.

Im Buch I nimmt jedoch die Aristotelische Auffassung der Punkte als äußerste Grenzen auf. C. Thaer fasst in [19] diese Definition als Relikt einer verunglückten Punkt-Definition auf, die etwas variiert eher in den Bereich der Postulate gehörte. Wir sehen sie als Indiz für den aristotelischen Einfluss an.

Neben den geometrischen Kontinua waren die Größen, die wir in den Büchern V und X der *Elemente* finden, die Repräsentanten des Kontinuierlichen der alten Mathematik. Das Buch V ist eine erstaunliche Erscheinung früher axiomatischer Mathematik. Der Begriff der Größe bleibt undefiniert.

Der Begriff des Verhältnisses von Größen wird in der Definition 4 auf „gleichartige“ (Definition 3) Größen eingeschränkt, die „vervielfältigt einander übertreffen können“. Diese Formulierung wird bisweilen als das später nach Archimedes genannte Axiom interpretiert, vernachlässigend, dass es sich um eine Definition und nicht um ein Postulat oder Axiom handelt. Größen, die nicht in einem Verhältnis stehen, sind nicht ausgeschlossen, sei es, dass sie nicht gleichartig sind oder „vervielfältigt einander“ nicht „übertreffen können“. In jedem Fall aber ist es bemerkenswert, dass das archimedische Axiom als Eigenschaft eines Bereichs von Größen schon hier formuliert ist.

Die im Buch V implizite Annahme einer vierten Proportionalen, die in VI § 12 für lineare Größen (Strecken) konstruiert wird, fordert und beschreibt einen Aspekt der Kontinuierlichkeit des Kontinuums.

Wir halten fest: Das für die Mathematik wesentliche Erbe des Aristoteles und des Euklid waren für die beiden folgenden Jahrtausende unter anderem diese Prinzipien:

1. Das Fundament der Mathematik bilden die anschaulichen, geometrischen Kontinua und die kontinuierlichen Größen.

2. Weder die unbegrenzte Teilung der Kontinua noch das unbegrenzte Hinzufügen von Einheiten kann als abgeschlossen gedacht werden: Das Unendliche ist potentiell und nie aktual.
3. Punkte und Mengen von Punkten repräsentieren das Diskontinuierliche. Geraden, Strecken, Flächen etc. sind keine Mengen von Punkten.
4. Es gibt keine atomaren Linienstücke.
5. Es gibt keine unendlich kleinen Linienstücke.

8 Leibniz

Wir machen einen Zeitsprung von 2000 Jahren in die Zeit des *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716). Wir äußern uns wieder sehr knapp und verweisen auf die *Geschichte der Analysis* [25], auf weitere Ausführungen in der *Philosophie der Mathematik* ([8], Abschnitt 3.3) und auf *G.W. Leibniz: De quadratura arithmetica* [26]. Uns geht es um die Kontinuumsauffassung, die im Hintergrund der Analysis des 17. und 18. Jahrhunderts steht und die Leibniz formuliert hat. Sie geht ganz aus der Kontinuumsauffassung des Aristoteles hervor und überwindet die aristotelische Vorschrift (5).

In der frühen Neuzeit entstehen die Ideen des Archimedes neu, offenbar ohne dass man Kenntnis von seiner Methodenschrift hat. Leibniz stützt sich in seiner Auffassung des Kontinuums auf Vorgänger wie *Johannes Kepler* (1571–1630), *Bonaventura Cavalieri* (1598–1647), *Blaise Pascal* (1623–1662). Kepler und Cavalieri entdecken die Idee der *Indivisibilien* wieder, die von Pascal verwandelt wird. Leibniz liest die Schriften von Pascal und erweitert seine Ideen. Die zugrunde liegende geometrische Idee formuliert er so:

> „Man muß aber wissen, daß eine Linie nicht aus Punkten zusammengesetzt ist, auch eine Fläche nicht aus Linien, ein Körper nicht aus Flächen, sondern eine Linie aus Linienstückchen (*ex lineolis*), eine Fläche aus Flächenstückchen, ein Körper aus Körperchen, die unendlich klein sind (*ex corpusculis indefinite parvis*). Das heißt, es wird gezeigt, dass zwei ausgedehnte *Größen* verglichen werden können (und zwar auch dann, wenn sie inkommensurabel sind), indem man sie in gleiche oder kongruente Teile zerlegt, die beliebig klein sind, [...].“ (*Mathematische Schriften* Bd. 7, S. 273)

Wir haben „indefinite parvum“ – eigentlich „unbestimmt“ oder „unbegrenzt klein“ – mit „unendlich klein“ übersetzt. Leibniz spricht oft von unendlich kleinen Größen (*quantitates infinite parvae*). Die „Linienstückchen“, wenn sie wie hier eine Linie zusammensetzen oder gemeinsame Maße inkommensurabler Strecken sein sollen, müssen unendlich klein sein, da sie keine endliche messbare Größe haben können (s. [26], S. 130).

Leibniz *unterscheidet* zwischen Punkten und unendlich kleinen Linienstückchen, den *Infinitesimalien*. Diese sind, anders als Linienatome, wieder teilbar. Leibniz Auffassung ist also keine atomistische Auffassung.

Der mathematische Zweck der Infinitesimalien liegt für Leibniz bekanntlich in den infinitesimalen *Differentialen*: Die Funktion der Infinitesimalien ist, Verhältnisse in Momenten oder Punkten zu beschreiben, indem man

> „beachtet, daß man dx, dy, dv, dw, dz proportional zu den augenblicklichen Differenzen, d. h. Inkrementen [Zuwächsen, Anm. der Autoren] oder Dekrementen [Verminderungen], der x, y, v, w, z [...] betrachten kann.“ (Zitiert nach [5], S. 162)

Die Differentiale werden in der Verbindung mit endlichen Größen x, y, v, w, z [...] gesehen und erscheinen im Rechnen als selbständige Rechenelemente in einem Kalkül. Das ist ihr mathematischer Zweck, hinter dem die Frage nach dem, was die Infinitesimalien eigentlich sind, zurücktritt:

> „Man kann somit die unendlichen und die unendlich kleinen Linien – auch wenn man sie nicht in metaphysischer Strenge und als reelle Dinge zugibt – doch unbedenklich als ideale Begriffe brauchen, durch welche die Rechnung abgekürzt wird, ähnlich den imaginären Wurzeln in der gewöhnlichen Analysis.“ (Zitiert nach [5], S. 166)

Infinitesimalien also sind für Leibniz nützliche Fiktionen, besser Idealisierungen oder Übertragungen aus finiten Verhältnissen, die arithmetisch wie „imaginäre Wurzeln“ sind und zwischen 0 und allen positiven Größen liegen. Es geht um eine nichtarchimedische Größenarithmetik. Sie sind dabei Größen, die nach ihrer geometrischen Bedeutung fragen. Und da bleibt maßgebend das erste Zitat oben – und der Hinweis unten auf das alte *charakteristische Dreieck*, mit dem alles begann. Wir gehen gleich darauf ein.

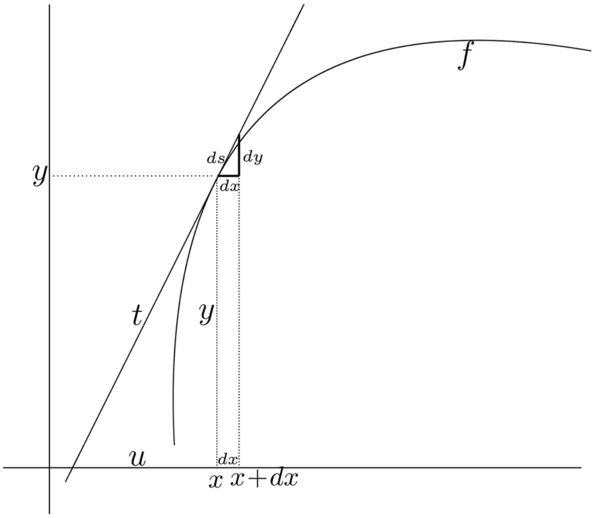
Zuvor bemerken wir noch, dass Leibniz nicht weit von unseren Grenzwerten entfernt war. Infinitesimalien betrachtet Leibniz oft wie Veränderliche (loc. cit.):

> „[...], so zeigt unser Kalkül, dass der Irrtum geringer ist als irgendeine angebbare Größe, da es in unserer Macht steht, das Unvergleichbarkleine – das man ja immer so klein, als man will, annehmen kann, zu diesem Zwecke hinlänglich zu verringern.“

Ganz deutlich wird der Gedanke des Grenzwertes hier:

> „Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man so große oder so kleine Größen wie nötig ist, damit der Fehler geringer sei, als der gegebene Fehler, [...] .“ (Zitiert nach [25], S. 125)

Jetzt kommt der Unterschied zu unseren Vorstellungen. Wir denken bei der Bestimmung der Tangentensteigung an rechtwinklige Sekanten-Dreiecke bestehend aus Sekanten Δs und Katheten Δx, Δy, die im Grenzprozess verschwinden. Bei Leibniz verschwanden die Sekanten-Dreiecke nicht, sondern mündeten in einem unendlich kleinen Dreieck mit den Seiten ds, dx, dy, dem *charakteristischen Dreieck*:



Charakteristisches Dreieck bei Leibniz

Das charakteristisches Dreieck ist unendlich klein, aber im Endlichen spiegelt es sich wieder: Die Verhältnisse der unendlich kleinen Seiten ds, dx, dy entsprechen den Verhältnissen der endlichen Seiten t, y, u in der Abbildung. Hier scheint für Leibniz ein „Licht" in die Sphäre des unendlich Kleinen zu leuchten. Bei der Beobachtung eines ganz ähnlichen Grenzprozesses sagt er:

> „Dennoch aber werden die ds und dx [*unsere Variablen für die originalen eingesetzt*] nicht im absoluten Sinne ‚Nichts' sein, da sie zueinander stets das Verhältnis von $t : u$ bewahren, [...]" (Zitiert nach [5], S. 163).

Für Leibniz scheint dies wie die Versicherung einer Art „Realität" des unendlich kleinen charakteristischen Dreiecks gewesen zu sein. Die Verhältnisse der *unendlich kleinen* Seiten zu den *endlichen* Seiten bildeten die *Brücke*, die aus der Realität der endlichen Größen in den Bereich des Infinitesimalen und zurück führt.

Von „Fiktionen" also im negativen Sinne als Erdichtungen irrealer, unsinniger oder gar falscher (*fictae*) Gebilde, als die man Infinitesimalien manchmal interpretiert und relativiert, kann man, auch wenn Leibniz selbst von Fiktionen (*quantitates fictitiae*) spricht (s. [26], S. 36, S. 128), nicht sprechen. Wir sehen bei Leibniz eine Erweiterung der aristotelischen Kontinuumsauffassung, die eine neue qualitative Dimension hinter der quantitativen Erfassung eröffnet. Infinitesimalien bei Leibniz sind, so meinen wir, neue Idealisierungen in der idealen Welt der geometrischen Kontinua.

9 Übersicht über die Auffassungen zum Kontinuum

Wir geben jetzt eine Übersicht über die Auffassungen der Kontinua, die uns begegnet sind oder begegnen werden, und charakterisieren sie für den linearen Fall möglichst kurz und prägnant. Für ihre grobe Erkennung bezeichnen wir sie in naheliegender Weise und geben in Klammern ihre Hauptvertreter an.

(a) *Finiter Atomismus* (Demokrit)
Eine Linie zerfällt in endlich viele sehr kleine Linienstücke. Diese kleinen Linienstücke sind nicht mehr teilbar. Punkte sind die atomaren Linienstücke. Eine Strecke ist eine endliche Zusammenfügung von Punkten.

(b) *Transfiniter Atomismus* (Archimedes, Cavalieri)
Eine Linie zerfällt in unendlich viele unendlich kleine Linienstücke. Diese kleinen Linienstücke sind nicht mehr teilbar. Punkte sind die atomaren Linienstücke. Eine Linie ist eine unendliche Zusammenfügung von Punkten.

(c) *Visualismus* (Aristoteles)
Linien sind weder Zusammensetzungen von unendlich kleinen Linienstücken noch von Punkten. Teile von Linien und Punkte sind Gegenstände grundsätzlich unterschiedlicher Art. Zwischen ihnen besteht eine nur äußere Beziehung.

(d) *Infinitesimalismus* (Leibniz)
Eine Linie ist aus unendlich vielen unendlich kleinen Linienstücken zusammengesetzt. Diese kleinen Linienstücke sind wieder teilbar. Punkte und Teile von Linien, darunter die unendlich kleinen Linienstücke, sind Gegenstände unterschiedlicher Art. Zwischen ihnen besteht eine nur äußere Beziehung.

Eine weitere Auffassung, zu der wir gleich kommen, ist ein

(e) *Trans-transfiniter Atomismus* (Cantor)
Linien bzw. Teile dieser Linien und Punkte sind Gegenstände grundsätzlich unterschiedlicher Art. Linien und Teile dieser Linien sind (überabzählbar) unendliche Mengen von Punkten.

Zwischen (d) und (e) verläuft die Grenze zwischen „altem“ und „neuem“ Kontinuum. Denn die letzte Auffassung (e), der trans-transfinite Atomismus, ist die, die wir heute täglich praktizieren. Wir nennen sie trans-transfinit, weil sie eine Unendlichkeit heranzieht, die jenseits der potentiellen oder abzählbaren Unendlichkeit liegt und bis ins 19. Jahrhundert undenkbar war.

Wie ist es zu dieser Auffassung gekommen? Darüber ist viel nachgedacht und geschrieben worden. Wir jedoch machen es wieder sehr kurz und raffen die Zeit sowie die vielen Details der vielen Probleme, die auf dem Weg zum neuen Kontinuum lagen.

10 Arithmetisierung des Kontinuums im 19. Jahrhundert

Die kontinuierlichen Größen, die man von den alten Griechen ererbt hatte, die infinitesimalen Größen des 18. Jahrhunderts und der anschaulich-geometrische Hintergrund aus den alten *Elementen* des Euklid bereiteten den Mathematikern im 19. Jahrhundert zunehmend Unbehagen. Sie waren für sie begrifflich unklar und hatten eine gewisse „Unreinheit“ an sich, die dem strenger werdenden Ansprüchen nach Wissenschaftlichkeit und mathematischer Reinheit widersprach. „Rein“, d. h. gedanklich rein oder „logisch“ schienen allein die Zahlen zu sein. – Diese Unterscheidung ist altes pythagoreisches, platonisches und aristotelisches Erbe. Aristoteles wies die Größen der empirischen Welt, die Zahlen aber der Seele zu.

Auf die reinen Zahlen sollte die Mathematik begründet werden. Speziell waren es die irrationalen Zahlen, die zwar „Zahlen“ hießen, die man aber bis dahin nur als Größen im alten Sinne begreifen konnte. Sie vor allem sollten *wirkliche Zahlen* werden. Wir geben zu einem großen Thema nur eine winzige Auswahl von Stichworten an, hinter der sich gewaltige Veränderungen verbergen. Wir verweisen auf die umfangreiche Literatur (s. [8]).

Schritte und Stationen in der Arithmetisierung der Mathematik waren diese:

(a) Die mathematische Legitimation des aktual Unendlichen.
(b) Die Konstruktion der reellen Zahlen.

In der Folge:

(c) Die Ersetzung des Kontinuums durch die reellen Zahlen.
(d) Die Entfernung der Größen aus der reinen Mathematik.
(e) Die Entfernung der Infinitesimalien.

Das gewünschte Ergebnis war die arithmetisierte, reine Mathematik. Vor dem Hintergrund der alten Kontinuumsauffassung ist besonders bemerkenswert:

(f) Das geometrische Kontinuum wurde zur Punktmenge.

Diese Konsequenz, die *Mengenauffassung des Kontinuums*, bedeutet eine zweite fundamentale Veränderung des mathematischen Denkens im 19. Jahrhundert, die ebenso gewichtig ist wie die mathematische Legitimation des aktual Unendlichen.

Praktische Konsequenzen sind:

(g) Geometrische Kontinua können als Kopien aus dem $\mathbb{R}^n$ aufgefasst werden.
(h) Punkte sind Zahlen (oder Zahlen-Tupel).

In dieser gedanklichen Welt leben wir heute. Das lineare Kontinuum ist $\mathbb{R}$, der Raum ein „Äther“ aus Zahlentupeln. Ständig präsenter Zeuge unserer Auffassung ist die „Zahlengerade“, in der Zahlen und Punkte identifiziert sind. Auf der arithmetisierten Basis treiben wir überaus erfolgreich Mathematik.

Der Fortschritt war in der Tat enorm: Das, was bis dahin als undurchdringlicher Nebel im Hintergrund der Mathematik stand, das anschauliche, geometrische Kontinuum, jetzt hatte man es mit $\mathbb{R}$ in der Hand – als unendliche Menge. Es wurde zum definierten Gegenstand und zum mathematischen Instrument. Die Erfolge nicht zuletzt in den Anwendungen waren außerordentlich. Hilbert sprach von einer „Symphonie des Unendlichen“. Diese Symphonie war und ist zwar von einigen Disharmonien begleitet, die aber heute niemanden mehr aus dem Konzept bringen. Auch darüber können wir hier nicht sprechen und verweisen wieder in die umfangreiche Literatur (vgl. [8], 3.3, 4.4, 5.3, 5.4).

War und ist damit ein für alle Mal das *Problem des Kontinuums erledigt*? Wir meinen nein. Die alten Infinitesimalien kehrten noch einmal zurück, auf neuer Grundlage. Mit ihnen entsteht ein anderer Blick auf das Kontinuum.

11 Nichtstandard-Auffassungen des Kontinuums

Eine neue Auffassung des Kontinuums kommt aus der Nichtstandard-Analysis, die auf Nichtstandard-Modellen oder Erweiterungen der reellen Zahlen basiert. Die Körper, die entstehen, werden als *hyperreelle Zahlen* bezeichnet.

Einen *logischen* Weg zu den Nichtstandard-Modellen beschritt Abraham Robinson (1918–1974) im Jahr 1961 in dem berühmten Aufsatz *Non-standard Analysis* [33]. Im Jahr 1966 folgte das Lehrbuch *Non-standard Analysis* [34].

Curt Schmieden (1905–1992) und Detlef Laugwitz (1932–2000) gingen einen anderen Weg. Sie gaben der reellen „Infinitesimalrechnung", wie sie ja immer noch hieß und heißt, die Infinitesimalien zurück, die verloren gegangen waren. Der Aufsatz *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung* [36] erschien 1958. Die Methode war *mengentheoretisch*. 1978 und 1986 schrieb D. Laugwitz die Lehrbücher *Infinitesimalkalkül* [28] und *Zahlen und Kontinuum* [29]. Das letztere schlägt neben dem mengentheoretischen einen logisch-algebraischen Zugang vor.

Der logische Zugang nach Robinson ist formal. Er beginnt mit Nichtstandard-Modellen der reellen Zahlen. Solche Modelle, von denen es viele gibt, ergeben sich als formal-logische Konsequenz aus einem fundamentalen Satz der Logik, dem Vollständigkeitssatz (Gödel, 1929), und aus daraus folgenden modelltheoretischen Sätzen. Ihre Existenz ist „nur" formal, aus der Logik erster Stufe, begründet – so wie die der Nichtstandard-Modelle der natürlichen Zahlen. (Diese hatte *Skolem* schon in den dreißiger Jahren des letzten Jahrhunderts angegeben.) Interessant ist mathematisch ihr Nutzen in Ergänzung und Erweiterung der klassischen Analysis. Der Bezug der Nicht-Standard-Modelle zum arithmetischen Kontinuum der reellen Zahlen, von denen sie abstammen, ist primär algebraisch. Vom anschaulichen, geometrischen Kontinuum scheinen die Nicht-Standard-Modelle weit entfernt zu sein.

Auch der logisch-algebraische Zugang, den Laugwitz entwickelt hat, kommt nicht organisch aus dem anschaulichen Kontinuum. Es geht um eine Art Adjunktion eines transfiniten Elementes, die die Anschauung des Kontinuums willkürlich zu sprengen scheint. Wir machen unten noch einige Bemerkungen über diesen Ansatz.

Anders ist das bei der mengentheoretischen Konstruktion, die in [28] und [29] beschrieben wird und seitdem in vielen Lehrbüchern der Nonstandardanalysis zu finden ist (u.a. [2], Kap. 7, Prestel in Ebbinghaus [18], 211–233, [27, 42]). Sie geht aus von beliebigen Folgen reeller Zahlen, in der in natürlicher Weise Infinitesimalien entstehen.

Um das sofort plastisch zu sehen, wählen wir ein populäres Beispiel. Es ist eine immer wieder gestellte Frage:

Ist a) 0,999... = 1 oder b) 0,999... < 1?

Obwohl ständig a) beteuert und natürlich bewiesen wird, verschwindet die Meinung b) nicht. Was steckt dahinter? Es ist wohl die Problematik des *aktual Unendlichen*.

Es fällt dem Nicht-Mathematiker oder mathematischen Anfänger in der Regel schwer, sich den Grenzwert 1, der zu 0,999... gehört, tatsächlich vorzustellen. Denn dies setzt voraus, dass die Reihe, d. h. die unendliche Folge der Partialsummen (0,9; 0,99; 0,999; ...), die hinter 0,999... steckt, als abgeschlossen und fertig gegeben aufgefasst werden muss. Ein Mathematiker hat das schlicht gelernt oder übernommen. Der mathematische Anfänger kann die zugehörige fertige Reihe nicht denken.

Der Anfänger tut daher etwas Naives – aber nichts Falsches. Er vergleicht *einzeln* jedes Folgenglied mit 1. D.h. er vergleicht die beiden – potentiell oder „eingeschränkt aktual" (vgl. [8], S. 388 f) unendlichen – Folgen (0,9; 0,99; 0,999; ...) und (1; 1; 1; ...). Und in der Tat ist im Vergleich die erste Folge in einem naheliegenden Sinn kleiner als die zweite. Ihre Differenz (0,1; 0,01; 0,001; ...) ist größer als 0 und infinitesimal. Wir kommen gleich darauf zurück.

Folgen rationaler oder reeller Zahlen bilden einen Ring. Dieser Ring, genauer ein Faktorring davon, der nicht archimedisch angeordnet ist, ist der Ausgangspunkt der mengentheoretischen Konstruktion eines nicht-archimedischen Körpers, wie sie Laugwitz in [28, 29], S. 91ff) beschreibt. Wir deuten die mengentheoretische Konstruktion kurz an.

Wir gehen aus von dem Ring aller reellen Zahlenfolgen, konvergenten wie divergenten. Wir bezeichnen den Folgenring dieser Folgen mit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. In $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sind die arithmetischen Operationen folgengliedweise definiert, z. B. $(a_n) \cdot (b_n) = (c_n) :\Leftrightarrow a_n \cdot b_n = c_n$ für alle n. In diesem Ring sind die reellen Zahlen selbst als konstante Folgen repräsentiert. – In ähnlicher Weise werden bekanntlich die reellen Zahlen gewonnen: Der Folgenring $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ist der Ausgangspunkt für die Konstruktion der reellen Zahlen nach Cantor. $\mathbb{R}$ ist der Faktorring des Ringes der Fundamental-Folgen nach dem maximalen Ideal der Nullfolgen.

Die Konstruktion eines – in einem externen Sinn – nicht-archimedischen Körpers nach Schmieden und Laugwitz aus dem Jahr 1958 läuft über den ganzen Folgenring und ein anderes, kleineres Ideal, das Ideal V der schließlich verschwindenen Folgen, d. h. der Folgen, für die nur endlich viele Folgenglieder nicht Null sind.

Zu den Folgen in V gehört die Menge Cof der *cofinalen Mengen* in $\mathbb{N}$, das sind die Mengen M, für die $\mathbb{N} \backslash M$ endlich ist:

$$Cof = \{M \subseteq \mathbb{N} \,|\, \mathbb{N} \backslash M \text{ endlich}\}.$$

Es ist

$$(a_n) \in V \text{ genau dann, wenn } \{n \,|\, a_n = 0\} \in Cof.$$

Folgen sind äquivalent, wenn $a - b \in V$, d. h. hier

$$a \sim b \Leftrightarrow \{n \,|\, a_n = b_n\} \in Cof,$$

wenn also die Folgenglieder fast alle übereinstimmen.

Die Klassen, die Elemente in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V$, bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben $\alpha,\ \beta,\ \gamma,$ ..., die durch Folgen $(a_n),\ (b_n),\ (c_n),$ ... repräsentiert werden. Die Menge der reellen Zahlen wird hier wieder repräsentiert durch die konstanten Folgen (z. B. wie oben die 1 durch (1; 1; 1; ...)). Für Elemente $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V$ haben wir dann z. B.

$\alpha = \beta \Leftrightarrow$ genau dann, wenn $a \sim b$, d.h. $\{n \mid a_n = b_n\} \in Cof.$

$\alpha + \beta =: \gamma \Leftrightarrow \{n \mid a_n + b_n = c_n\} \in Cof,$

$\alpha \cdot \beta =: \gamma \Leftrightarrow \{n \mid a_n \cdot b_n = c_n\} \in Cof,$

$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \{n \mid a_n \cdot b_n = 0\} \in Cof.$

Das Beispiel $\alpha \cdot \beta$ mit $a_n = 1 + (-1)^n$ und $b_n = 1 - (-1)^n$ zeigt, dass der Ring $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V$ nicht nullteilerfrei ist. Der Weg zu einem Körper „hyperreeller“ Zahlen ist abstrakt. Wir kommen gleich dazu. Zunächst zur Anordnung. Es sei

$\alpha < \beta \Leftrightarrow: \{n \mid a_n < b_n\} \in Cof.$

Beispiel:

$(0{,}9; 0{,}99; 0{,}999; ...) < (1; 1; 1; ...)$

$<$ ist transitiv, da Cof ein Mengenfilter ist. D.h. es liegt eine Ordnungsrelation vor. $<$ ist nicht total.

Beispiele: Sei Ω die Klasse in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V$, die von der Folge $(1; 2; 3; ...) = (n)$ repräsentiert wird. Es ist

$\Omega > n$ für alle n und $\frac{1}{\Omega} > 0,$

denn $\frac{1}{\Omega}$ wird von $(\frac{1}{n})$ repräsentiert. Gleichzeitig ist

$\frac{1}{\Omega} < \frac{1}{n}$

für jedes n. Also ist $\frac{1}{\Omega}$ unendlich klein, d.h. unendlich nahe bei 0:

$\frac{1}{\Omega} \approx 0.$

Was ist mit $(-1)^{\Omega}$? Das ist die Klasse mit dem Repräsentanten $((-1)^n)$. Für sie gilt weder

$(-1)^{\Omega} < 0$ noch $(-1)^{\Omega} = 0$ noch $(-1)^{\Omega} > 0.$

Das ist ein Gegenbeispiel gegen die Linearität von $<$. Dieser Mangel wird aufgehoben, wenn wir auf der Basis von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/V$ einen Körper gewinnen. Der Weg dorthin ist wie gesagt abstrakt und unkonstruktiv. Er setzt das Auswahlaxiom voraus.

Der Weg beginnt beim freien Filter Cof. Zu Cof gehört das Ideal V. Jeder feinere freie Filter F umfasst Cof und erzeugt ein V umfassendes Ideal, sagen wir I_F. Für Folgen a, b gilt

$a \in I_F \Leftrightarrow \{n \mid a_n = 0\} \in F,$

a und b sind äquivalent, wenn $a - b \in I_F \Leftrightarrow \{n \mid a_n = b_n\} \in F.$

Das Zornsche Lemma, also das Auswahlaxiom, sichert in der geordneten Menge solcher freien Filter einen maximalen freien Filter U. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/I_U$ ist ein angeordneter Körper, der Körper der hyperreellen Zahlen. Das Auswahlaxiom sichert seine Existenz. Wir wissen aber nicht, wie er aussieht. Er ist nicht eindeutig bestimmt.

Wegen des inkonstruktiven Charakters dieses Weges beschreibt Laugwitz diese Körper auch algebraisch als Ergebnis ${}^{\Omega}K$ einer Art Adjunktion eines unendlich großen Elementes Ω (vgl. [29], Kap. 2), die wir hier nicht weiter ausführen. Er folgt dort in einer angenähert logischen Formulierung dem Leibniz'schen Prinzip „Die Regeln des Endlichen gelten im Unendlichen weiter“:

> „Es sei $A(.)$ eine Aussageform, formuliert in der Sprache von K. Wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ die Aussage $A(n)$ in der Theorie von K wahr ist, dann soll $A(\Omega)$ als wahrer Satz in die neue Theorie ${}^{\Omega}K$ aufgenommen werden.“

Auch hier ist das Ergebnis nicht eindeutig. Die quasi-algebraische Konstruktion ist insofern interessant, als sie mathematisch die gebräuchliche algebraische Adjunktion aufnimmt und diese neue Art der Adjunktion, wie man leicht sieht, wiederholbar ist. Auch die Konstruktion über Folgenringe ist wiederholbar.

Mit beliebigen Folgen reeller Zahlen begann die beschriebene mengentheoretische Konstruktion. Mit solchen Folgen operiert der obige mathematische Anfänger, zu dem wir jetzt zurückkehren. Er vergleicht in naiver Weise Folgen, statt Grenzwerte zu denken, und kommt sogleich über die reellen Zahlen hinaus, bleibt aber im Kontinuum, in dem die reellen Zahlen als Punkte dargestellt sind.

Es ist, wie wir oben schon angedeutet haben, im Kontinuum neben den reellen Zahlen anschaulich durchaus Platz für neue Zahlen, z. B. zwischen 0,999... und 1. Wir fassen beide wieder als Folgen auf. Dann liegt $(0{,}95; 0{,}995; 0{,}9995; \ldots)$ zwischen $(0{,}9; 0{,}99; 0{,}999; \ldots)$ und $(1; 1; 1; \ldots)$, das arithmetische Mittel von beiden. Die Differenz von $0{,}999\ldots = (0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999\ ;\ \ldots)$ und $1 = (1;1;1;\ \ldots)$ ist die Folge $(0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; \ldots) > 0$. Sie ist unendlich klein, nämlich kleiner als $\frac{1}{n} = (\frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \frac{1}{n}; \ldots)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Diese Ordnungsbeziehungen bleiben erhalten beim Übergang zu den hyperreellen Zahlen. Die Alternative b) „$0{,}999\ldots < 1$?“ der alten Frage „Ist $0{,}999\ldots = 1$ oder $0{,}999\ldots < 1$?“ also ist nicht falsch. Sie ist nur nicht standard.

Die mengentheoretische Konstruktion hat so einen sehr konkreten, anschaulichen Anfang, der in unmittelbarer Beziehung zum Kontinuum steht. Laugwitz sagt Folgendes:

> „Für mich ist, es sei wiederholt, das Kontinuum nicht identisch mit der Menge $\mathbb{R}$, [...]“.

Und:

> „Wir haben gesehen, daß das anschauliche Linearkontinuum Platz läßt für die Omegazahlen und nicht als durch die reellen Zahlen ausgeschöpft angesehen werden muss.“ ([29], S. 223)

Es bedeutet eine gewisse Anstrengung, aus den geschilderten Konstruktionen oder logischen Modellen die Konsequenzen für eine neue Kontinuumsauffassung zu ziehen. Es geht darum, Denkgewohnheiten zu überwinden. Diese werden, so sind wir ausgebildet, durch $\mathbb{R}$ bestimmt. $\mathbb{R}$ *ist* heute das Kontinuum, aus dem alle anderen Kontinua abgeleitet werden. Was sind die wesentlichen Elemente einer Nichtstandard-Auffassung?

Wir müssen uns unendlich kleine und unendlich große Zahlen vorstellen und die Nichtstandard-Zahlen, die es in unendlich kleiner Nähe zu den Standardzahlen gibt. Wir müssen – das ist mathematisch besonders schwer – Abschied nehmen von der Gleichsetzung des Kontinuums mit $\mathbb{R}$. Wir müssen, was vielleicht noch schwerer ist, zum alten, anschaulichen, geometrischen Kontinuum zurückkehren. Im geometrischen Kontinuum, in dem der Geraden, stellen wir die neuen Zahlen wieder als Punkte dar – wie die „alten“ reellen Zahlen. Wir müssen akzeptieren, dass im Kontinuum neben und nach den reellen Zahlen noch „Platz“ ist für neue Zahlen, der Platz, den wir vorher durch die Gleichsetzung des Kontinuums mit $\mathbb{R}$ negiert haben.

Wir müssen Abschied nehmen von der Denk- und Redeweise über die „Zahlengeraden“, in der zuvor Punkte und reelle Zahlen identifiziert und so andere Zahlen ausgeschlossen waren. Wir müssen eine „längere“ und „vollere“ Zahlengerade akzeptieren. Nein, *mehr*: Wir müssen und werden nach dieser Erfahrung vorsichtig sein mit einer neuen Identifikation der neuen Zahlen mit *den* Punkten des geometrischen Kontinuums zum Zwecke einer neuen „Zahlengeraden“. Wir werden von Punkten *im* Kontinuum sprechen und Abschied nehmen von der Vorstellung, dass das Kontinuum eine Punktmenge sei.

Die neue Situation ist sehr vorteilhaft. Denn die reellen Zahlen sind ja nicht verloren gegangen. Das Wissen, das wir über die reellen Zahlen mitbringen, können wir komplett auf die Nichtstandard Zahlen übertragen: Alle Sätze über die reellen Zahlen gelten für den Bereich der Nichtstandardzahlen weiter. Die Mathematik wird durch – externe – Unterscheidungen zwischen Standard- und Nichtstandardzahlen reicher und zudem komfortabler, da wir über infinitesimale und infinite Zahlen verfügen. Das macht viele Formulierungen einfacher, die man sonst nur in der Grenzwert-Sprache ausdrücken kann.

Hätten wir frühzeitig in den Verhältnissen zu denken gelernt, wie sie in den Nichtstandard-Modellen herrschen, so wären sie uns nicht fremd. Die Nichtstandard-Modelle heißen nur „nichtstandard“, weil wir gewöhnlich anders denken. Es war eine Fügung der Geschichte, dass wir so zu denken gelernt haben, eine wohl zwangsläufige Fügung. Denn die obigen Konstruktionen zeigen, dass die mathematischen Voraussetzungen für sie nicht gegeben waren – weder die mengentheoretischen noch die logischen –, als die Analysis im 19. Jahrhundert durch den Grenzwertbegriff auf eine neue Grundlage gestellt wurde. Der Grenzwertbegriff, die „Finitisierung“ der unverstandenen infinitesimalen Größen, stand am Anfang der damaligen Entwicklung, die in eine ungeahnte „Infinitisierung“ der Mathematik mündete. Sie brachte die Definitionen der reellen Zahlen und die Mengenlehre hervor. Erst in dieser infiniten, theoretischen Mathematik hatte die Finitisierung ihre Grundlage erreicht. Die logischen Grundlagen entwickelten sich erst im Zuge einer erneuerten Axiomatik zu Beginn des 20. Jahrhunderts.

Wie wenig nichtstandard zu denken und zu rechnen mathematisch noch heute präsent ist, zeigt eine kleine Geschichte, die wir in den Mitteilungen der DMV (2/2003) finden. Sie ist neu abgedruckt in [10] , S. 89 f)[3] – wohl als leuchtendes

[3] Dieses Buch wird von der DMV an Abiturienten als Preis verliehen für besondere Leistungen im mathematischen Abitur.

Vorbild der mathematischen Aufklärung mathematischer Anfänger –, und beginnt mit einem Brief:

> Liebe MathematikerInnen,
> ich bin in der 6. Klasse und wir haben gerade periodische Dezimalbrüche durchgenommen. Wir haben gelernt: $\frac{1}{9} = 0.111...$, $\frac{3}{9} = 0.333...$ usw. Was aber ist dann 0.999...? Unsere Lehrerin hat gesagt, das wäre $\frac{9}{9}$. Das kann aber doch nicht sein. Das wäre doch 1 und 0.999... ist doch ein Unendlichstel kleiner als 1. Gibt es 0.999... überhaupt? Aber eine Zahl, die ich mir ausdenken kann, muss es doch geben. Wie kommt man an 0.999...?
> Ich würde mich über eine Antwort freuen. *Lina*

Ein Mathematiker findet, dass Lina „eine Antwort verdient“ hat. Die „vielleicht enttäuschende“ Antwort kommt sofort: „Deine Lehrerin hat in der Tat recht“. Dann wird über Schreibweisen von Brüchen gesprochen und schließlich ausführlich über die *Standard*-Berechnung des arithmetischen Mittels von 0,999... und 1 argumentiert, ohne das Unendlichstel mit einem Wort zu würdigen. Zum Schluss kommt dann der „Trost“ – „so er denn überhaupt nötig ist“: „Später wirst Du lernen, dass ein Unendlichstel gleich Null ist“.

Was hätten Laugwitz und Robinson dazu gesagt?

12 Schluss

Wir sind vom anschaulichen und geometrischen Kontinuum ausgegangen – und sind um einige Einsichten reicher zu ihm zurückgekehrt. Wir haben durch die Geschichte hindurch verfolgt, wie in sehr unterschiedlicher Weise versucht wurde, das Kontinuum zu charakterisieren oder gar es festzulegen. Wir haben zum Schluss erkannt, dass es weder mathematisch zu arithmetisieren ist, noch als Punktmenge aufgefasst werden kann. Es ist Medium für Punkte, die ins Kontinuum gesetzt werden können, und Medium für die Darstellung von Zahlen – Standard oder Nichtstandard.

Laugwitz unterscheidet einen qualitativen von einem quantitativen Aspekt des Kontinuums. Die reellen Zahlen repräsentieren den quantitativen Aspekt. Sie entstehen im Kontinuum in der transfiniten Fortsetzung des konkreten quantifizierenden Messens. Das ist in den Konstruktionen der reellen Zahlen als Klassen von Intervallschachtelungen oder Fundamentalfolgen realisiert. Die reellen Zahlen sind die *universellen Maßzahlen*.

Das Kontinuum aber besitzt auch qualitative Eigenschaften, die über das rein quantitative im wahrsten Sinne hinausgehen und sich im unendlich Kleinen und Großen zeigen. Sie werden in den mengentheoretischen Konstruktionen der infinitesimalen und infiniten Zahlen realisiert. Das Infinitesimale beschreibt in neuer Weise die Stetigkeit des linearen Kontinuums und erlaubt, in qualitativer Weise z. B. die Stetigkeit von Funktionen f zu erfassen: f ist stetig, wenn aus $x \approx y$ folgt $f(x) \approx f(y)$. Das Kontinuum ist nicht durch das reine Messen erfassbar. Es ist *unermesslich*.

Auch die mengentheoretischen oder quasi-algebraischen Konstruktionen erfassen es nicht. Das zeigt z. B. die Konstruktion durch die logisch-algebraische Adjunktion, die wiederholbar ist. Denn der Nichtstandard-Körper, der entsteht, hat arithmetisch alle die Eigenschaften des Ausgangskörpers. Auch mit den infinitesimalen und infiniten Zahlen ist das Kontinuum *nicht ausgeschöpft*. Der Atomismus, der finit begann, transfinit wurde und heute trans-transfinit herrscht, jede Art von Atomismus scheint dem Phänomen des Kontinuums nicht gerecht zu werden.

Die Nichtstandard-Auffassung des Kontinuums, die sich auf die logische Position stützt, weist noch darüber hinaus. Logisch geht es um Nichtstandard-Modelle ${}^{\star}\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Dabei ist das eine Nichtstandard-Modell so geeignet wie das andere. Diese Nichtstandard-Modelle aber gibt es in *beliebig großer überabzählbarer Mächtigkeit* – über die Mächtigkeit der reellen Zahlen hinaus ([31], Seite 239, Example 7.3.11.3). Das Kontinuum ist von diesem Standpunkt aus nicht nur unermesslich sondern *unerschöpflich*.

Es bleibt das alte anschaulich-geometrische Kontinuum. Es ist, wie Brouwer sich ausdrückte, eine unergründliche „Raumsoße". Weyl sagte es etwas philosophischer: Das Kontinuum ist ein „Medium freien Werdens". Das Kontinuum ist in der Tat, darauf weisen zusätzlich die Probleme rund um die Kontinuumshypothese hin, mathematisch nicht zu erfassen (s. [8], 4.4). Es bleibt – auch mathematisch – *transzendent*.

Die Beobachtungen schließlich, die wir gemacht haben, erfordern noch einige Bemerkungen: Über die mathematischen Zugänge zum Kontinuum und eine daraus resultierende mögliche mathematische Distanz zu Nichtstandard-Auffassungen.

Bis ins späte 19. Jahrhundert hinein gab es nur Ansätze, das Kontinuum zu mathematisieren. Es waren die Größen, die sich bis zuletzt einer expliziten mathematischen Fassung widersetzten. Das Kontinuum blieb anschaulich im Hintergrund der Mathematik – sowohl für die Geometrie wie für die Größen, finit oder infinitesimal. Die mathematischen Zugänge zum Kontinuum seitdem sind sehr unterschiedlich.

Der erste Zugang, der des 19. Jahrhunderts, war eine (zuerst naive) mengentheoretische Konstruktion, ging aus vom Messen und konstruierte die reellen Zahlen als eindeutige Ergebnisse unendlicher Näherungsfolgen in der unendlichen Fortsetzung des Messens. Mit ihnen glaubte man, das Kontinuum erfasst zu haben.

Die mengentheoretische Konstruktion der Nichtstandard-Zahlen von Schmieden und Laugwitz unterscheidet die Messfolgen genauer und findet unendlich kleine und große Differenzen. Das Auswahlaxiom ist maßgebend dafür, dass dieser Ansatz zu einem Körper und zu einer linearen Ordnung der neuen Zahlen führt, die erlaubt, die infiniten und infinitesimalen Verhältnisse ins lineare Kontinuum zu übertragen. Diese neuen Zahlen können zwar mengentheoretisch-konstruktiv gewonnen werden, nicht aber in der mengentheoretisch-eindeutigen Weise wie die reellen Zahlen. Ein solcher Zahlbereich ist weniger konkret, sodass es vielleicht schwierig ist, ihn als wirkliche Alternative anzuerkennen.

Die logisch-algebraische Adjunktion, die [29] vorschlägt, postuliert schlicht das unendlich Große und Kleine. Dieser Zugang scheint am ehesten den mathematischen Gewohnheiten angepasst – bis auf die logische Komponente, die Übertragung von Aussagen auf den neuen Zahlbereich, die als nur formales Postulat angesehen werden kann.

Im rein logischen Zugang nach Robinson sind Nichtstandard-Modelle schließlich rein logische Phänomene. Beide Zugänge, die logisch-algebraische Adjunktion und die logische Feststellung der Nichtstandard-Modelle, gehen aus von der Prädikatenlogik erster Stufe. Der logische Zugang nutzt ausgerechnet deren Ausdrucksschwäche, nämlich die Klasse der archimedischen Körper nicht axiomatisieren zu können. Die Existenz der Nichtstandard-Modelle erhält so eine gewisse Relativität und die Nichtstandard-Modelle selbst erhalten eine zusätzliche Formalität, die den formalen Charakter der Modelle, von dem schon oben die Rede war, noch steigert. Es kann der Eindruck eines logischen Sprachspiels entstehen, der die Akzeptanz der Nichtstandard-Modelle und der Nichtstandard-Methoden im mathematischen Alltag mindert.

Gleiche Vorbehalte können anderen Zugängen gegenüber bestehen, die wir hier nicht besprochen haben. Eine andere grundsätzliche Frage ist zudem, inwiefern Nichtstandardmethoden die Standardanalysis in der Tat erweitern können.

Dennoch: Seit 50 Jahren ist die Nonstandard-Analysis mathematisch integriert und bewährt. Zu Beginn waren die Reaktionen kontrovers und abwartend, bald aber aufgeschlossen und positiv. Es liegen heute sehr gute Lehrbücher vor, alte und neue (s. Literaturverzeichnis). Es ist daher einigermaßen verwunderlich, dass die Nonstandard-Analysis noch immer nur Spezialgebiet und Randerscheinung ist. Sie hat trotz ihrer fundamentalen Beiträge kaum Eingang in den mathematischen Alltag, in die mathematische Anschauung und die Lehre gefunden hat. Das Beispiel oben und ein Blick in die Lehrbücher der Analysis zeigen das (vgl. z. B. [9], S. 237). Bei allen möglichen formalen Vorbehalten, die vielleicht vorliegen und die wir eben angedeutet haben, ist eine Reserve der Nichtstandard-Mathematik gegenüber nicht angemessen. Dies gilt nicht zuletzt für die elementare Lehre.

Was in jedem Falle bleibt – und vielleicht ist dies ein großer „ideologischer" Hemmschuh –, ist die Wirkung der Nichtstandardmodelle und der Nichtstandard-Auffassungen: die klare Relativierung, ja Aufhebung der Identifikation von reellen Zahlen und Kontinuum. – Der Atomismus ist tot. Es lebe das mächtige *Modell* der reellen Zahlen.

Literatur

1. Archimedes: In: Heiberg, J.L. (Hrsg.) Archimedis opera omnia cum comentariis Eutocii, 2. Aufl. Bd. 3, De Gruyter Verlag, Stuttgart (1972). Nachdruck
2. Artmann, B.: Der Zahlbegriff. Vandehoek und Ruprecht, Göttingen (1983)
3. Aristoteles: Physik. C.H. Weiße, Leipzig (1829). Deutsch
4. Bauer, L.: Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu $0{,}\bar{9}$. J Mathematikdidaktik **32**, 79–102 (2011)
5. Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Karl Alber Verlag, Freiburg-München (1964)
6. Becker, O. (Hrsg.): Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (1965)
7. Bedürftig, Th.: Was ist ein Punkt? – Ein Streifzug durch die Geschichte. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, Bd. 5., S. 1–21 (2015)
8. Bedürftig, Th., Murawski, R.: Philosophie der Mathematik, 3. Aufl. De Gruyter Verlag, Berlin (2015)
9. Behrends, E.: Analysis I. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden (2003)
10. Behrends, E., Gritzmann, P., Ziegler, G.M. (Hrsg.): π & Co. – Kaleidosskop der Mathematik. Springer, Berlin–Heidelberg (2008)
11. Bigalke, H.-G.: Rekonstruktionen zur geschichtlichen Entwicklung des Begriffs der Inkommensurabilität. J Mathematikdidaktik **4**, 307–354 (1983)

12. Cantor, G.: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. E. Zermelo, Berlin (1932)
13. Capelle, W. (Hrsg.): Die Vorsokratiker. Alfred Kröner Verlag, Stuttgart (1968)
14. Courant, R., Robbins, H.: Was ist Mathematik. Springer, Berlin/Heidelberg (2001)
15. Cigler, J.: Grundideen der Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag, Mannheim (1992)
16. Dauben, J.W.: Abraham Robinson – The creation of nonstandard analysis, a personal and mathematical odyssey. Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1995)
17. Dehn, M.: Raum, Zeit, Zahl bei Aristoteles vom mathematischen Standpunkt aus. In Seek (1975), 199–218
18. Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Prestel, A., Remmert, R.: Zahlen, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1983)
19. Euklid: In: Thaer, C. (Hrsg.) Die Elemente. Buch I–XIII, 6. Aufl. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (1975). unveränderter Nachdruck
20. Felscher, W.: Naive Mengen und abstrakte Zahlen Bd. I–III. Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Zürich (1978)
21. Flasch, K.: Was ist Zeit?: Augustinus von Hippo. Das XI. Buch der Confessiones. Historisch-philosophische Studie. Vittorio Klostermann, Frankfurt am Main (2004). Text-Übersetzung-Kommentar
22. Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient. Springer, Berlin, Heidelberg (1984)
23. Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, 11. Aufl. Vieweg und Teubner, Stuttgart (1999)
24. Hilbert, D.: Über das Unendliche. Math Ann **95**, 161–190 (1925)
25. Jahnke, H.N. (Hrsg.): Geschichte der Analysis. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin (1999)
26. Knobloch, E. (Hrsg.): Gottfried Wilhelm Leibniz: De quadratura arithmetica circuli elipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg (2016)
27. Landers, D., Rogge, L.: Nichtstandard Analysis. Springer, Berlin, Heidelberg (1994)
28. Laugwitz, D.: Infinitesimalkalkül – Eine elementare Einführung in die Nichstandard-Analysis. Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Zürich (1978)
29. Laugwitz, D.: Zahlen und Kontinuum. Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich (1986)
30. Leibniz, G.W.: In: Gerhardt, C.J. (Hrsg.) Mathematische Schriften. Olms, Hildesheim (1971). Nachdruck
31. Marcja, A., Toffalori, C.: A guide to classical and modern model theory. Springer, Dordrecht/Boston/London (2003)
32. Platon: Werke. G. Eigler, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (2005). 8 Bde
33. Robinson, A.: Non-standard Analysis. Indag Math **23**, 432–440 (1961)
34. Robinson, A.: Non-standard Analysis. North Holland Publishing, Amsterdam (1966)
35. Roquette, P.: Numbers and models, standard and nonstandard. Math Semesterberichte **57**(2), 185–199 (2010)
36. Schmieden, C., Laugwitz, D.: Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. Math Zeitschrift **69**, 1–39 (1958)
37. Schneider, I.: Archimedes. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (1979)
38. Seek, G.A. (Hrsg.): Die Naturphilosophie des Aristoteles. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (1975)
39. Shelah, S.: Classification theory and the number of non-isomorphic models. North Holland Publishing, North Holland, Amsterdam (1978)
40. Shelah, S.: Classification theory. North Holland Publishing, North Holland, Amsterdam (1990)
41. Thiel, Chr. (Hrsg.): Erkenntnistheoretische Grundlagen der Mathematik. Gerstenberg Verlag, Hildesheim (1982)
42. Väth, M.: Nonstandard Analysis. Birkhäuser, Basel (2007)
43. Wieland, W.: Das Kontinuum in der Aristotelischen Physik, S. 261–300 (1962). In Seek (1975)
44. Zimmerli, W.C., Sandbothe, M.: Klassiker der Modernen Zeitphilosophie. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (1993)
45. Zimmermann, B.: Heuristik als ein Element Mathematischer Denk- und Lernprozesse, Fallstudien zur Stellung Mathematischer Heuristik im Bild von Mathematik bei Lehrern und Schülern sowie in der Geschichte der Mathematik. Hamburg (1991). Habilitationsschrift