



STF Optimierung von single-bit CT $\Sigma\Delta$ Modulatoren basierend auf skalierten Filterkoeffizienten

C. Widemann¹, C. Zorn¹, T. Brückner², M. Ortmanns², and W. Mathis¹

¹Institut für theoretische Elektrotechnik, Leibniz Universität Hannover, Appelstraße 9A, 30167 Hannover, Deutschland

²Institut für Mikroelektronik, Universität Ulm, Albert-Einstein-Allee 43, 89081 Ulm, Deutschland

Correspondence to: C. Zorn (zorn@tet.uni-hannover.de)

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Signalübertragungsverhalten von single-bit continuous-time (CT) $\Sigma\Delta$ Modulatoren. Dabei liegt der Fokus der Untersuchung auf dem Peaking der Signaltransferfunktion (STF). Dieser Effekt kann die Performance und die Stabilität des Gesamtsystems negativ beeinflussen, da bei auftretendem STF-Peaking Signale außerhalb des Signalbands verstärkt werden. In dieser Arbeit wird ein neuer Ansatz zur Reduktion des Peakings vorgestellt, der auf der Optimierung der Systemdynamik basiert. Dabei werden die Filterkoeffizienten des Modulators systematisch angepasst. Anhand eines Beispielsystems wird gezeigt, dass der Ansatz genutzt werden kann, um das Übertragungsverhalten des Modulators abhängig vom Ausgangssystem zu verändern. So kann entweder die Systemperformance verbessert werden, ohne Peaking in der STF zu erzeugen, oder das STF-Peaking reduziert werden, ohne die Systemperformance stark zu beeinflussen.

1 Einleitung

Der CT $\Sigma\Delta$ Modulator wird aufgrund seiner impliziten *Anti-Aliasing* Filtereigenschaften (Ortmanns, 2006) in vielen modernen Kommunikationssystemen zur Analog-digital-Wandlung eingesetzt. Eine Vielzahl von wissenschaftlichen Arbeiten zum Thema $\Sigma\Delta$ Modulatoren befasst sich mit der Optimierung des Signal-Rausch-Verhältnisses (engl. *signal-to-noise-ratio*, kurz SNR), der *Dynamic Range* (DR) sowie der maximal stabilen Amplitude (MSA). Die darin vorgestellten High-Performance $\Sigma\Delta$ Modulatoren weisen in vielen Fällen im Frequenzgang ihrer STF eine starke Erhöhung auf, die als *Peaking* bekannt ist. Das Peaking der STF bewirkt eine Verstärkung der Anteile des Eingangssignals im Frequenzbereich der Überhöhung, was zu einer falschen Arbeitsweise des Modulators und damit zu instabilem System-

verhalten führen kann (Maeyer et al., 2005). Eine Optimierung von CT $\Sigma\Delta$ Modulatoren sollte sowohl die Systemperformance verbessern als auch die STF so flach wie möglich halten. Dafür ist ein tieferes Verständnis des dynamischen Verhaltens von $\Sigma\Delta$ Modulatoren nötig. Daher wird der Modulator in dieser Arbeit als *Switched-System* (Gonçalves et al., 2001) betrachtet. Außerdem wird gezeigt, wie die Optimierungsmethode aus Zorn et al. (2011) genutzt werden kann, das Peaking der STF zu reduzieren, ohne dabei die Systemperformance stark zu verändern.

2 Switched-System Modell

Der CT $\Sigma\Delta$ Modulator kann als ein System aus einem linear, zeitinvarianten Transferblock und einer stückweise linearen Rückkopplung betrachtet werden. Das zeitdiskrete Ausgangssignal $y[k]$ wird durch periodische Abtastung der Frequenz $F_s = 1/T_s$ aus dem Ausgangssignal des Quantisierers $y(t)$ gewonnen (vgl. Abb. 1a). Der linear, zeitinvariante Filterblock wird durch die beiden Übertragungsfunktionen für die offenen Schleifen vom Eingangssignal H_{sig} und vom Rückführsignal H_{noise} beschrieben. Durch die Verwendung eines single-bit Komparators als Quantisierer wird das Rückkopplungssignal $r(t)$ ausschließlich zwischen zwei Werten $r(t) \in \{+1, -1\}$ umgeschaltet. In der Regelungstechnik werden derartige Mixed-Signal Systeme zu den *Switched-Systems* gezählt, einer Unterklasse von Hybridsystemen. Ein als Switched-System beschriebener Modulator ist ein zustandsgesteuertes CT System (vgl. Abb. 1b) mit einer endlichen Anzahl von Betriebsmodi, die von der Anzahl der Quantisiererbits abhängt (Lunze, 2000). Das Schleifenfilter kann daher als ein äquivalentes System mit den Eingangssignalen $r(t)$ und $u(t)$ betrachtet werden, wie es in Abb. 2 dargestellt ist.

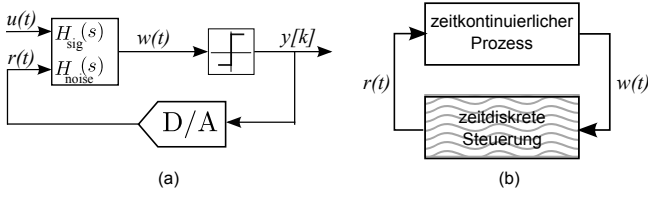


Abb. 1. Switched Model eines single-bit CT $\Sigma\Delta$ Modulators.

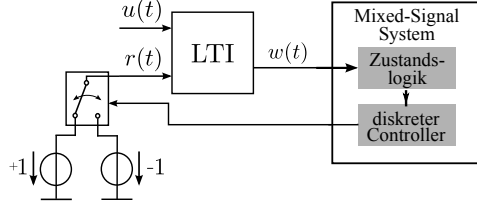


Abb. 2. Single-bit CT $\Sigma\Delta$ Modulator als zustandsgesteuertes CT system.

Das Rückführsignal wird zwischen den beiden Betriebsmodi $(+1, -1)$ umgeschaltet, was durch den Mixed-Signal Block mit Zustandslogik gesteuert wird. Dabei nimmt $r(t)$ den Wert $+1$ für $y[k] < 0$ und -1 für $y[k] \geq 0$ gemäß der Umschaltbedingung

$$y(t) = \text{sign}(w(t)) = \begin{cases} 1, & \text{for } w(t) \geq 0 \\ -1, & \text{for } w(t) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

an den Abtastzeitpunkten $t = kT_s$ an. Das Filter lässt sich im Zustandsraum darstellen durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix}, \quad (2)$$

und

$$w(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t), \quad (3)$$

wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ und $\mathbf{c}^T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ die Systemmatrix, die Eingangsmatrix bzw. der Ausgangsvektor sind. Die n Elemente des Zustandsvektors $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$ gehören zu den Ausgängen der n Integratoren eines CT Schleifenfilters n -ter Ordnung. Die Lösung des Zustandsraums $\mathbf{x}(t)$ aus Gl. (2) ist zwischen zwei aufeinanderfolgenden Umschaltzeitpunkten t_i und t_{i+1} , d.h. $t \in [t_i, t_{i+1})$, gegeben durch (Jordan, 2007; Sun and Ge, 2005):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_i)} \mathbf{x}(t_i) + \int_{t_i}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B} \begin{bmatrix} u(s) \\ r(t_i) \end{bmatrix} ds. \quad (4)$$

Zwischen zwei Umschaltzeitpunkten ist die Lösung des Zustandsraums kontinuierlich, sodass Gl. (4) ausgehend von $\mathbf{x}_i(t_i)$ zur Berechnung des nachfolgenden Umschaltzeitpunkts $\mathbf{x}_{i+1}(t_{i+1})$ genutzt werden kann.

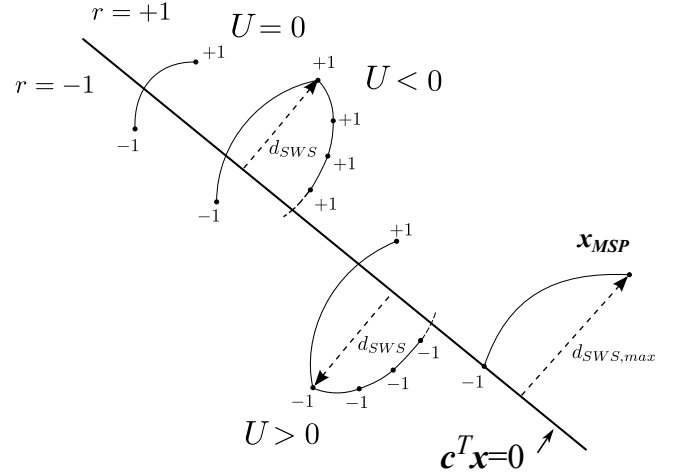


Abb. 3. Qualitatives Verhalten der Zustandstrajektorien in Abhängigkeit von U .

3 Maximaler Integratorpegel

Mit Hilfe des im vorherigen Abschnitt vorgestellten Switched-System Modell können durch eine Analyse der Zustandstrajektorien die Maxima der internen Zustände gefunden werden. Durch den Einsatz eines single-bit Quantisierers und die damit verbundenen zwei Betriebsmodi wird der zugehörige Zustandsraum in zwei Teilräume $S_+ = \{\mathbf{x}(t) \in S : \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \geq 0\}$ und $S_- = \{\mathbf{x}(t) \in S : \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) < 0\}$ aufgeteilt. Die Grenze zwischen diesen beiden Teilräumen, die sog. *Switching-Surface* (SWS), ist durch die Ausgangsgleichung (3) wegen Gl. (1) mit $w(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = 0$ gegeben. Diese lässt sich als eine Hyperebene der Dimension $n - 1$ in Hessescher Normalform interpretieren (Gonçalves et al., 2001). Das qualitative Verhalten der Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(t)$ eines Lyapunov-stabilen Systems (Jordan, 2007) ist in Abb. 3 für verschiedene Werte des konstanten Eingangssignals U dargestellt. Befindet sich die Trajektorie $\mathbf{x}(kT_s)$ zu einem Abtastzeitpunkt im Halbraum S_+ , so gilt für das Rückführsignal $r = -1$. Das System ändert den Betriebsmodus zu $r = +1$ an dem Abtastzeitpunkt, nach dem die Trajektorie die SWS in den Halbraum S_- überquert hat. Die Differentialgleichung (2) des Zustandsraum verdeutlicht, dass das Eingangssignal U und das Rückführsignal $r(t)$ die Geschwindigkeit des Zustandsvektors $\mathbf{x}(t)$ beeinflussen. Durch eine höhere Geschwindigkeit bei höherem $|U|$ kann die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ vor einem Umschaltvorgang weiter in einen Halbraum gelangen, sodass sich der Abstand des Umschaltzeitpunkts zur SWS $d_{SWS} = |w(t)|$ vergrößert. Der größte Abstand $d_{SWS,max}$ beim Abtastzeitpunkt $\mathbf{x}((k+1)T_s)$ wird erreicht, wenn die Trajektorie am vorherigen Abtastzeitpunkt $\mathbf{x}(kT_s)$ genau auf der SWS liegt. Die zugehörigen Punkte der Trajektorie heißen *maximale Umschaltzeitpunkte* (engl. *maximum switching point*) und werden je nach Betriebsmodus mit $MSP_{p/n}$ bezeichnet. Diese können für eine *worst-case*

Analyse genutzt werden, um den maximalen Zustand zu berechnen, wie in Zorn et al. (2010) gezeigt wurde.

Um ein stabiles System zu gewährleisten, muss der Bereich, in dem sich die Trajektorien in Abhängigkeit von der Amplitude des Eingangssignals $u(t)$ bewegen, begrenzt sein. Folglich bewegen sich die inneren Zustände $\mathbf{x}^T(t)$ und $y(t)$ in einer invariante Menge (Schreier et al., 1997). Der berechnete maximale Zustand stellt die Grenze der invarianten Menge eines idealen Systems dar, in dem die Integratoren nicht in Sättigung geraten. Werden dagegen reale Integratoren mit einem Sättigungsbereich betrachtet, legt der maximale Integratorpegel die Begrenzung für die inneren Zustände und den Rand der invarianten Menge fest. Sobald der Unterschied zwischen der Größe der invarianten Mengen des realen und des idealen Systems für eine festgelegte Amplitude des Eingangssignals zu groß wird, kann der Modulator das Signal nicht mehr richtig verarbeiten. In diesem Fall kann das System nicht dem Eingangssignal folgen und der Quantisierungsfehler wird zu groß, wodurch das SNR abnimmt (Hein and Zakhor, 1993).

4 STF Optimierung

Die Idee der Optimierung ist, die Systemdynamik so zu verändern, dass der Unterschied zwischen den invarianten Mengen vom realen und idealen System verringert wird. So wird zum Beispiel ein MSP, bei dem die Integratoren für eine konstante Amplitude U_s bereits in Sättigung sind, durch die Optimierung unter den Sättigungspegel verschoben. Dies geschieht über die Skalierung des MSP für ein konstantes Eingangssignal U mit einem konstanten Faktor $\xi < 1$ in Gl. (4). Für einen Startwert $\mathbf{x}_s(U)$ auf der SWS innerhalb der invarianten Menge mit dem Eingangssignals U ergibt sich

$$\underline{\Phi} \mathbf{x}_s(U) + \underline{\Gamma} \begin{bmatrix} U \\ r \end{bmatrix} = \xi \cdot \mathbf{x}_{msp,p/n}(U), \quad (5)$$

wobei

$$\underline{\Phi} = e^{A T_s} \quad (6)$$

und

$$\underline{\Gamma} = \int_0^{T_s} e^{A s} ds \cdot \mathbf{B} \quad (7)$$

gelten. Darin ist T_s die Abtastperiode des Abtast-Halteglieds und $\underline{\Phi}$ sowie $\underline{\Gamma}$ hängen direkt von den Schleifenfilterkoeffizienten ab.

Es wurde bereits gezeigt (Zorn et al., 2010), wie die Skalierung des MSP und damit auch der Filterelemente durch einen Faktor $\xi < 1$ zu einer Reduzierung der Zeit, in der sich die Integratoren in Sättigung befinden, führen kann. Infolgedessen kann durch die Skalierungsmethode eine verbesserte Systemperformance mit höherem SNR und größerer MSA erreicht werden. Zusätzlich zur SNR und MSA

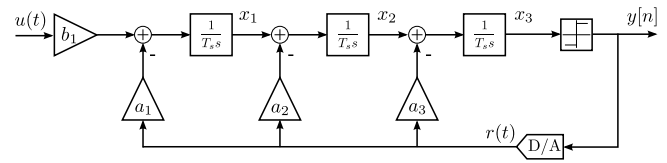


Abb. 4. CT $\Sigma\Delta$ Modulator in CIFB Struktur.

kann durch die Skalierungsmethode die Signaltransferfunktion (STF) des $\Sigma\Delta$ Modulators beeinflusst werden. Es kann gezeigt werden, dass durch die Skalierung der Filterelemente, die durch

$$STF(j\omega) = H_{sig}(j\omega)NTF(e^{j\omega}) \quad (8)$$

gegebene STF eines CT $\Sigma\Delta$ Modulators verbessert werden kann. Dabei hängt die Art der Verbesserung von der Charakteristik der NTF des Systems ab. Im Fall einer konservativ entworfenen NTF mit einer von vornherein flachen STF wurde in Zorn et al. (2010) gezeigt, dass eine Vergrößerung des SNR und der MSA möglich ist. In diesem Fall kann beobachtet werden, dass die STF nahezu flach bleibt und sich ihre Eckfrequenz zur Bandkante verschiebt, sodass Eingangssignale mit Frequenzen außerhalb des Signalbandes bereits bei geringeren Frequenzen abgeschwächt werden. Folglich wird die Systemperformance bei flach bleibender STF verbessert. Anders verhält sich eine aggressiv entworfene NTF mit hoher maximaler SNR, deren zugehörige STF ein starkes Peaking im Frequenzverlauf aufweist. Hier wird das Peaking verringert, ohne dass sich die SNR und MSA stark verändern. Im nächsten Abschnitt werden die beschriebenen Effekte an entsprechenden Beispielsystemen demonstriert.

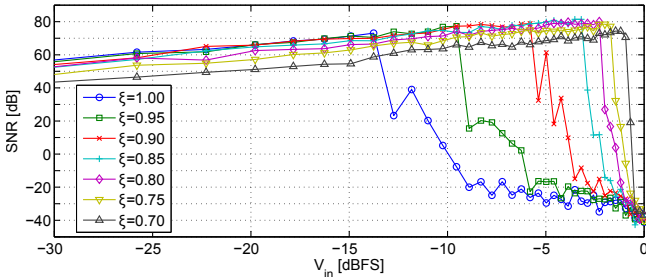
5 Beispiel

Im Folgenden wird als Beispielsystem ein CT $\Sigma\Delta$ Modulator in *chain of integrators with distributed feedback* (CIFB) Topologie, wie er in Abb. 4 dargestellt ist, betrachtet. Dabei wird der Einfluss des *excess loop delay* vernachlässigt. Zunächst werden die Effekte der Skalierungsmethode auf ein konservativ entworfenes System mit den Transferfunktionen NTF_1 und STF_1 gezeigt. Anschließend wird ein aggressiv entworfenes System (NTF_2 und STF_2) untersucht. Konservativ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass bei einem derartigen System zugunsten der Stabilität auf maximale Performance verzichtet wird.

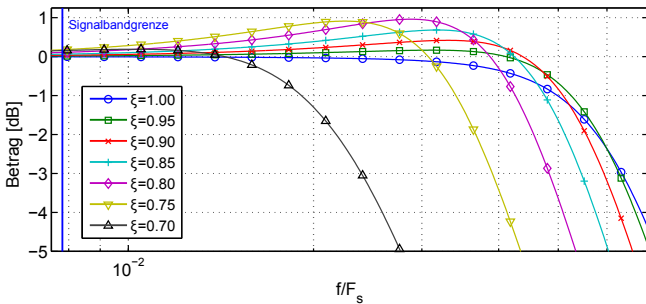
Mit Hilfe der MATLAB-Toolbox von Schreier (2005) wird für eine Überabtastrate $OSR = 64$ die Funktion NTF_1 des konservativen DT $\Sigma\Delta$ Modulators berechnet. Anschließend wird NTF_1 mit dem Ansatz von Loeda (2006) für eine Abtastfrequenz $F_s = 320$ kHz auf den äquivalenten CT $\Sigma\Delta$ Modulator in CIFB Struktur (vgl. Abb. 4) abgebildet. Die dadurch erhaltenen Filterkoeffizienten a_i und $b_1 = a_1$ werden mit der Skalierungsmethode aus Gl. (5) bzw.

Tabelle 1. Skalierte Koeffizienten des konservativen Systems.

ξ	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7
a_1	0.0383	0.0316	0.0249	0.0184	0.0117	0.0051
a_2	0.2149	0.1842	0.1536	0.1229	0.0922	0.0615
a_3	0.6294	0.5879	0.5465	0.5051	0.4636	0.4222

**Abb. 5.** Dynamic Range für verschiedene Skalierungsfaktoren (NTF_1).

Zorn et al. (2011) für verschiedene Faktoren $\xi < 1$ in neue Koeffizientensets überführt. In Tabelle 1 sind die resultierenden Koeffizienten dargestellt.

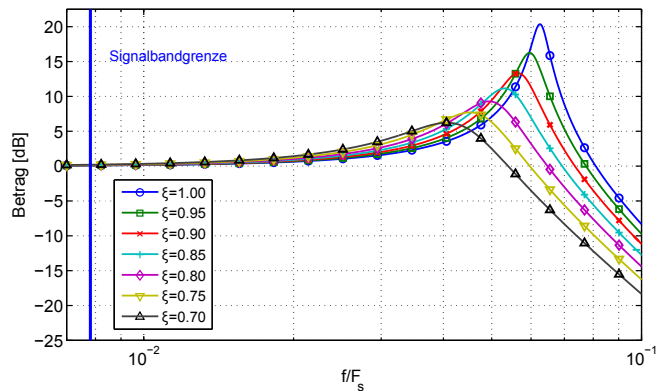
**Abb. 6.** STF₁ für verschiedene Skalierungsfaktoren.

Die entsprechenden *Dynamic Ranges* (SNR über Eingangsamplitude) sind in Abb. 5 vergleichend dargestellt. Darin ist zu sehen, dass durch die Skalierung die maximal stabile Amplitude (MSA) und das maximale SNR vergrößert werden kann.

In Abb. 6 werden die zugehörigen Frequenzgänge von STF₁ für die verschiedenen Faktoren ξ verglichen. Darin ist ersichtlich, dass sich die Eckfrequenz für kleiner werdendes ξ zur Signalbandgrenze des Modulators verschiebt und der Verlauf leicht vom maximal flachen Verlauf von $\xi = 1$ abweicht. Durch die Skalierung der Systemdynamik mit dem Faktor $\xi = 0.8$ kann im Vergleich zum unskalierten System das SNR um ca. 10 dB und die MSA um mehr als 10 dBFS gesteigert werden, wobei die STF nur eine Erhöhung von 1 dB aufweist.

Tabelle 2. Skalierte Koeffizienten des aggressiven Systems.

ξ	0.95	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70
a_1	0.0524	0.0471	0.0417	0.0364	0.0310	0.0257
a_2	0.1265	0.1087	0.0910	0.0733	0.0556	0.0378
a_3	0.3912	0.3657	0.3403	0.3148	0.2893	0.2638

**Abb. 7.** STF₂ für verschiedene Skalierungsfaktoren.

Anders verhält sich das aggressiv entworfene System mit NTF_2 , das ebenfalls mit $OSR = 64$ und $F_s = 320$ kHz arbeitet. Die initialen Koeffizienten ($\xi = 1$, $a_1 = b_1 = 0.0578$, $a_2 = 0.1442$ und $a_3 = 0.4167$) wurden durch Simulation unter der Vorgabe maximalem SNR bestimmt. Tabelle 2 stellt eine Übersicht der Koeffizienten dar, die durch die zuvor beschriebene Skalierungsmethode für dieses System erhalten wurden.

Das unskalierte System NTF_2 mit nur einem *Feedin*-Koeffizienten $b_1 = a_1$ weist in seinem Signalübertragungsverhalten ein Peaking von über 20 dB auf. Durch die Skalierung mit einem Faktor von $\xi = 0.7$ kann dieses Peaking um mehr als 14 dB reduziert werden, wie in Abb. 7 zu sehen ist. Die zugehörigen Dynamic Ranges bleiben bei der Skalierung weitestgehend unverändert, wie in Abb. 8 gezeigt ist.

6 Diskussion

In dieser Arbeit wurde gezeigt welchen Einfluss die Skalierung der Systemdynamik von CT $\Sigma\Delta$ Modulatoren auf deren Signalübertragungsverhalten besitzen. Dazu wurde zunächst eine Modellierung des $\Sigma\Delta$ Modulators als *Switched-System* (Zorn et al., 2010) eingeführt, die der Skalierungsmethode (Zorn et al., 2011) zugrunde liegt. Anhand zweier unterschiedlicher Ausgangssituationen für den CT $\Sigma\Delta$ Modulator in CIFB Struktur wurden die Effekte der Skalierung auf die jeweiligen Signalübertragungseigenschaften und die Dynamic Range untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass bei einem konservativ entworfenem System die Dynamic Range wesentlich vergrößert werden kann, ohne die STF stark zu

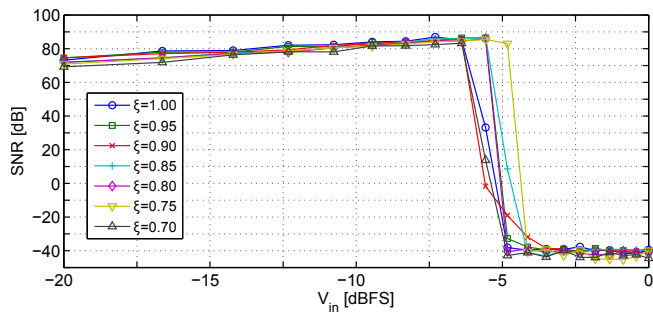


Abb. 8. Dynamic Ranges für verschiedene Skalierungsfaktoren (NTF_2).

verändern. Dagegen wurde bei einem System mit aggressiver Systemperformance ein stark reduziertes Peaking beobachtet, wobei sich die Dynamic Range nur in einem geringen Maß verkleinert hat. Durch die vorgestellte Methode kann das Übertragungsverhalten der STF geändert werden, ohne dass weitere Filterelemente eingefügt werden müssen (Maeyer et al., 2005). Dadurch wird die Ordnung des STF-Tiefpassverhaltens beibehalten.

Danksagung. Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung dieses Projekts.

Literatur

Gonçalves, J. M., Megretski, A., and Dahleh, M. A.: Global stability of relay feedback systems, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46, 550–562, doi:10.1109/9.917657, 2001.

Hein, S. and Zakhor, A.: On the stability of sigma delta modulators, *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 41, 2322–2348, doi: 10.1109/78.224243, 1993.

Jordan, D. W.: *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press, 2007.

Loeda, S.: On the Design of High-Performance Wide-Band Continuous-Time Sigma-Delta Converters Using Numerical Optimization, *IEEE T. Circuits Syst.*, 53, 802–810, 2006.

Lunze, J.: Diagnosis of quantized systems based on a timed discrete-event model, *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, IEEE Transactions on*, 30, 322–335, doi: 10.1109/3468.844356, 2000.

Maeyer, J. D., Raman, J., Rombouts, P., and Weyten, L.: STF Behaviour in a CT $\Sigma\Delta$ Modulator, in: *Proc. of the 12th IEEE Int. Conf. on Electr. Circ. and Syst.*, Gammarth Tunesië, 2005.

Ortmanns, M.: *Continuous-Time Sigma-Delta A/D Conversion*, Springer, Berlin, 2006.

Schreier, R.: *Understanding Delta-Sigma Data Converters*, IEEE Press, New York, 2005.

Schreier, R., Goodson, M., and Zhang, B.: An algorithm for computing convex positively invariant sets for delta-sigma modulators, *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, 44, 38–44, doi:10.1109/81.558440, 1997.

Sun, Z. and Ge, S. S.: *Switched Linear Systems – Control and Design*, Communications and Control Engineering, Springer-Verlag, 2005.

Zorn, C., Stegemann, S., and Mathis, W.: An approach to stability analysis of transfer systems with switched feedback, in: *Signals and Electronic Systems (ICSES), 2010 International Conference on*, 181–184, 2010.

Zorn, C., Stegemann, S., Bruckner, T., Ortmanns, M., and Mathis, W.: A novel optimization method for CT sigma-delta-modulators using a switched system model, in: *Circuits and Systems (IS-CAS), 2011 IEEE International Symposium on*, 1848–1851, doi: 10.1109/ISCAS.2011.5937946, 2011.