Nichtstandard in der elementaren Analysis

Mathematische, logische, philosophische und didaktische Studien zur Bedeutung der Nichtstandardanalysis in der Lehre

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation von

Dipl.-Math. Karl Kuhlemann

2022

Referent:	Prof. Dr. Reinhard Hochmuth
Koreferenten:	apl. Prof. Dr. Thomas Bedürftig Prof. Dr. Markus Haase, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Tag der Promotion:	13. Mai 2022

DOI: http://dx.doi.org/10.15488/12105

URL: https://www.repo.uni-hannover.de/handle/123456789/12202

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei meinen Betreuern und Gutachtern Reinhard Hochmuth und Thomas Bedürftig bedanken, die mich während des gesamten Promotionsstudiums begleitet und in organisatorischer und fachlicher Hinsicht unterstützt haben. Thomas Bedürftig danke ich insbesondere dafür, mein Interesse für Nichtstandardanalysis geweckt und eine Dissertation zu diesem Thema vorgeschlagen zu haben.

Als weiteren Mitgliedern der Promotionskommission danke ich Markus Haase für die Erstellung des dritten Gutachtens und Christoph Walker für die Übernahme des Vorsitzes der Kommission. Roman Murawski danke ich für die ergänzende Begutachtung der logischen und philosophischen Teile der Arbeit, Brigitte Weskamp aus dem Promotionsbüro für ihre freundliche Unterstützung in allen Verfahrensfragen.

Während des Entstehens der Dissertation konnte ich zahlreiche Kontakte knüpfen, die diese Arbeit direkt oder indirekt beeinflusst und bereichert haben und für die ich sehr dankbar bin. Hervorheben möchte ich Mikhail Katz, der mich unter anderem auf die Arbeiten von Simpson und Hamkins aufmerksam gemacht hat und der in verschiedenen Artikeln und E-Mail-Diskussionen wichtige Impulse gegeben hat. Auch die Gespräche über Leibniz mit Siegmund Probst auf mehreren Historikertagungen waren inspirierend.

Gregor Nickel und Ralf Krömer danke ich für die Gelegenheit, einige zentrale Gedanken meiner Arbeit vorab in den *Siegener Beiträgen zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* diskutieren zu können, Benjamin Rott für seine Hinweise zum empirischen Teil. Ebenfalls danke ich allen Dozentinnen und Dozenten, die sich an meiner Umfrage zum Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre beteiligt haben und die in dieser Arbeit anonym bleiben.

Mein besonders herzlicher und persönlicher Dank gilt meiner Frau Susanne, die mich in meinem Vorhaben bestärkt hat und dann mehrere Jahre mit diesem Projekt teilen musste.

Hannover, Mai 2022 Karl Kuhlemann

Kurzzusammenfassung

Die heutige Analysis ist aus der Infinitesimalrechnung von Leibniz und Newton hervorgegangen. Zwei Jahrhunderte lang gehörten Infinitesimalien, also unendlich kleine Größen, zum Handwerkszeug der Mathematiker und bescherten der neu entstandenen Disziplin einen außerordentlichen Aufschwung, bevor sie durch den Weierstraß'schen Grenzwertbegriff und die Konstruktion der reellen Zahlen durch Cantor und Dedekind entbehrlich schienen und schließlich aus der Analysis verbannt wurden. Der Preis für diese Finitisierung und Arithmetisierung der Analysis waren die Akzeptanz des aktual Unendlichen in Gestalt transfiniter Mengen sowie ein sperriger, wenig intuitiver Grenzwertformalismus, der Lernenden an Schulen und Hochschulen bis heute Schwierigkeiten bereitet.

Mit Robinsons *Non-standard Analysis* hielten die Infinitesimalien in den 1960er Jahren – jetzt streng modelltheoretisch begründet – wieder Einzug in die Mathematik. In der Folge wurde Nichtstandardanalysis auf verschiedenen Gebieten innerhalb und außerhalb der Mathematik erfolgreich eingesetzt. Keisler erkannte das didaktische Potential von Robinsons Arbeit und entwarf in den 1970er Jahren eine axiomatische Einführung in die Analysis mit hyperreellen Zahlen ohne die modelltheoretischen Voraussetzungen. Seitdem gab es und gibt es bis heute Projekte mit dem Ziel, Nichtstandardanalysis für die Lehre zu nutzen. Trotz positiver Erfahrungen aus diesen Projekten blieb der Einfluss auf die Lehre insgesamt sehr gering. An den Hochschulen wird Analysis fast ausnahmslos rein auf der Grundlage des Weierstraß'schen Grenzwertbegriffs gelehrt, wobei die reellen Zahlen axiomatisch eingeführt werden. In der Schule zieht man sich zunehmend auf einen propädeutischen Grenzwertbegriff zurück.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine *Standortbestimmung* von Nichtstandard in der Analysis, speziell in der Lehre der Analysis – in mathematischer, logischer, philosophischer und stoffdidaktischer Hinsicht. Insbesondere soll untersucht werden, inwieweit sich unter diesen Aspekten Gründe für die zurückhaltende Aufnahme von Elementen der Nichtstandardanalysis in die Lehre ableiten lassen. Zu diesem Zweck werden zunächst verschiedene Zugänge zur Nichtstandardanalysis, ihre Adaptionen für elementare Einführungen sowie Erfahrungen aus der Lehre überblickend vorgestellt. Dieser Überblick ermöglicht es herauszuarbeiten, inwieweit gewohnte Sichtweisen (zum Beispiel auf die Mengenlehre, das Unendliche, die reellen und die natürlichen Zahlen oder das Kontinuum) durch Nichtstandard herausgefordert werden, welche Voraussetzungen Nichtstandard mathematisch benötigt und in welcher Weise und mit welchem Effekt Nichtstandardmethoden in der elementaren Analysis eingesetzt werden können.

Um mögliche mathematische Probleme aufzudecken, die Vorbehalte gegenüber Nichtstandard begründen können, werden logische, modelltheoretische und mengentheoretische Untersuchungen diskutiert. Zur Analyse einer aus philosophischer Haltung heraus begründeten Ablehnung von Nichtstandard werden verschiedene Grundlagenpositionen sowie ontologische, epistemologische und anwendungsbezogene Fragen behandelt.

Ein empirischer Teil dient als Beleg für einen aktuellen Meinungsquerschnitt, wie Nichtstandardanalysis von den Lehrenden der Analysis wahrgenommen und als Lehrstoff eingeschätzt wird. Quelle ist eine im Rahmen des Dissertationsprojektes per E-Mail durchgeführte und mittels einer qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertete Befragung von Analysislehrenden an deutschen Hochschulen. Die Auswertung ist Ausgangspunkt für die Diskussion mathematischer und didaktischer Vorbehalte gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre. Im Vordergrund steht also die Frage nach der Rechtfertigung von Nichtstandardanalysis als Lehrstoff. Untersuchungen zu weitergehenden Fragestellungen und Aspekten der Auswertung, die man anschließen könnte, etwa hinsichtlich der Prozesse zur Festlegung dessen, was an Schule oder Hochschule gelehrt werden sollte, werden hier nicht weiterverfolgt.

Schlagworte: Nichtstandardanalysis, infinitesimal, Lehre der Analysis, Philosophie der Mathematik.

Mathematics Subject Classification – MSC2020: 26E35, 97I10, 00A30.

Abstract

Today's analysis emerged from the infinitesimal calculus of Leibniz and Newton. For two centuries, infinitesimals, i.e. infinitely small quantities, belonged to the tools of the mathematicians and gave the newly developed discipline an extraordinary upswing, before they seemed dispensable and were finally banished from analysis due to the Weierstrassian concept of limit and the construction of the real numbers by Cantor and Dedekind. The price for this finitization and arithmetization of analysis was the acceptance of the actual infinite in the form of transfinite sets as well as a bulky, not very intuitive formalism of limits, which causes difficulties for learners at schools and universities to this day.

With Robinson's *Non-standard Analysis*, the infinitesimals found their way back into mathematics in the 1960s – now strictly based on model theory. In the following years, non-standard analysis was used successfully in various areas inside and outside of mathematics. Keisler recognized the didactic potential of Robinson's work and in the 1970s designed an axiomatic introduction to analysis with hyperreal numbers without the model-theoretical prerequisites. Since then there have been, and still are, projects aimed at using non-standard analysis for teaching. Despite positive experiences from these projects, the overall impact on teaching remained very small. At universities, calculus is taught almost without exception purely on the basis of Weierstrass's concept of limit, with the real numbers being introduced axiomatically. In school, one increasingly retreats to a propaedeutic notion of limit.

The aim of the present dissertation is to determine the position of the "non-standard" in analysis, especially in the teaching of analysis – in mathematical, logical and philosophical terms and in terms of subject specific didactics. In particular, we shall examine to what extent reasons for the reluctant inclusion of elements of non-standard analysis in teaching can be derived from these aspects. To this end, different approaches to non-standard analysis, their adaptations for elementary introductions and experiences from teaching are presented in an overview. This overview makes it possible to work out to what extent customary perspectives (for example on set theory, the infinite, the real and the natural numbers or the continuum) are challenged by non-standard analysis, which prerequisites non-standard analysis requires mathematically and in what way and with what effect non-standard methods can be used in the elementary analysis.

In order to uncover possible mathematical problems that may account for reservations about non-standard analysis, we discuss logical, model-theoretical and set-theoretical investigations. To analyze a rejection of non-standard analysis based on a philosophical attitude, we deal with various foundational positions as well as ontological, epistemological and application-related questions.

An empirical part serves as evidence for a current cross-section of opinions on how non-standard analysis is perceived by calculus instructors and assessed as a subject matter of teaching. The source is a survey of calculus instructors at German universities carried out by email as part of the dissertation project and evaluated using a qualitative content analysis. The evaluation is the starting point for the discussion of mathematical and didactic reservations against the use of non-standard analysis in teaching. In the foreground is the question of the justification of non-standard analysis as a subject matter of teaching. Studies on further questions and aspects of the evaluation that could follow, for example with regard to the processes for determining what should be taught at school or university, are not pursued further here.

Keywords: Nonstandard analysis, infinitesimal, Analysis education, Philosophy of mathematics.

Mathematics Subject Classification – MSC2020: 26E35, 97I10, 00A30.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Zur Einstimmung

Johann Bernoulli beginnt seine *Vorlesungen zur Differentialrechnung* von 1691/92 mit folgenden Postulaten:

> 1. Eine Größe, die vermindert oder vermehrt wird um eine unendlich kleinere Größe, wird weder vermindert noch vermehrt.
> 2. Jede krumme Linie besteht aus unendlich vielen Geraden, die selbst unendlich klein sind.
> 3. Eine Figur, die zwischen zwei Ordinaten, der Differenz der Abszissen und dem unendlich kleinen Stück einer beliebigen Kurve enthalten ist, wird als Parallelogramm[1] betrachtet.
>
> (Bernoulli 1924, S. 11.)

Diese drei Postulate umreißen in knappen Worten die Grundregeln der Leibniz'schen Infinitesimalrechnung – und sie offenbaren zugleich den logischen Sprengstoff, der gedanklich darin steckt, denn die unendlich kleineren Größen, von denen hier die Rede ist, sind nicht als Null, sondern als echt positiv zu denken und die unendlich kleinen Linienstückchen nicht als Punkte, sondern als echte (und weiter teilbare) Kontinua.

Wie kann aber eine Größe, die vermehrt oder vermindert wird, zugleich *nicht* vermehrt oder vermindert werden, wie es das erste Postulat fordert? Das Problem setzt sich fort im zweiten und dritten Postulat: Wie kann eine krumme Linie auf einem „unendlich kleinen Stück" exakt gerade sein? Müsste sie nicht, wenn die Idee des unendlich Kleinen überhaupt sinnvoll ist, zumindest „unendlich wenig" von einer Geraden abweichen?

Aus dem logischen Dilemma kommt man offenbar nur heraus, wenn man zwischen der *exakten* Gleichheit und einer *verallgemeinerten* Gleichheit, die unendlich kleine Unterschiede zulässt, unterscheidet (was Bernoulli natürlich implizit tut).[2]

Damit eine solche differenzierte Gleichheit sinnvoll ist, muss man annehmen, dass es neben den gewöhnlichen, endlichen Größen noch *außergewöhnliche* Größen gibt, die, verglichen mit den gewöhnlichen Größen, unendlich klein (oder unendlich groß) sind. Leibniz nennt die gewöhnlichen Größen *assignabel*, und außergewöhnlichen *inassignabel*, was zum Ausdruck bringen soll, dass letztere nicht *angegeben* werden können.

Über die verallgemeinerte Gleichheit schreibt Leibniz 1695 in den *Acta Eruditorum*:

1. Nach der heute üblichen Terminologie müsste es *Trapez* heißen.
2. In der modernen Mathematik haben wir für solche Fälle den Begriff der Äquivalenzrelation, also der Gleichheit unter Vernachlässigung gewisser (nicht interessierender) Unterschiede.

> Ich halte nämlich mit Euklid, [Elementa,] Lib. 5, Defin. 5, homogene Größen nur dann für vergleichbar, wenn die eine [Größe], falls man sie mit einer [hier] aber endlichen Zahl multipliziert, die andere [Größe] übertreffen kann. Und was sich nicht um eine solche Größe unterscheidet, erkläre ich für gleich. Dies haben auch Archimedes und alle anderen nach ihm so gehalten. Und genau dies ist gemeint, wenn man sagt, dass die Differenz [zweier Größen] kleiner als eine beliebige gegebene [Größe] ist (Leibniz 2011, S. 273f).

Leibniz bezieht sich hier auf die folgende Definition aus Euklids *Elementen* (nach heutiger Zählung V. Buch, Definition 4):

> Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können (Euklid 1975, S. 91).

Dies ist wohlgemerkt eine *Definition*. Es wird nicht behauptet, dass je zwei Größen stets ein Verhältnis zueinander haben *müssen*.

Wenn Bernoulli in seinem ersten Postulat nicht von unendlich kleinen, sondern von einer unendlich *kleineren* Größe spricht, so bedeutet das, dass diese Größe im Verhältnis zur Referenzgröße unendlich klein ist (wobei die Referenzgröße selbst ebenfalls bereits unendlich klein sein kann). So rechnet Bernoulli zum Beispiel das Differential von x^2 aus als

$$d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = 2x \cdot dx + (dx)^2$$

und setzt dies dann wegen des ersten Postulats gleich $2x \cdot dx$.[3] dx ist unendlich klein und damit auch $2x \cdot dx$, wenn x eine endliche positive Größe ist. Gegen diese unendlich kleine Größe ist $(dx)^2$ unendlich kleiner. Rechnet man statt mit Differentialen direkt mit dem Differentialquotienten, erhält man

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx$$

und kann dies (wegen des ersten Bernoulli-Postulats) gleich $2x$ setzen.

Bei den Rechnungen wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass man mit unendlichen Größen so rechnen darf wie mit endlichen. Neben einem erweiterten Größenbegriff (der endliche und nicht endliche Größen umfasst) und der verallgemeinerten Gleichheit (die unendlich kleine Unterschiede zulässt) kommt also noch eine dritte Zutat ins Spiel, die für den Erfolg der Infinitesimalrechnung maßgeblich ist: Für den Umgang mit den nicht endlichen Größen sollen dieselben Regeln gelten wie für die endlichen. In einem Brief an seinen Förderer Varignon vom 2. Februar 1702 beschreibt Leibniz dieses Prinzip so:

> … und es stellt sich heraus, dass die Regeln des Endlichen [auch] im Unendlichen erfolgreich [anzuwenden] sind … (Leibniz 2011, S. 355).

Welche Regeln des Endlichen sich genau auf das Unendliche übertragen lassen, bleibt (für eine moderne Fassung dieses Prinzips) zu spezifizieren. Sicherlich gehören die Rechenregeln eines angeordneten Körpers dazu, aber nicht nur diese. Zur Behandlung von

3. Bernoulli schreibt die Gleichung mit dem gesonderten Symbol e, das er zuvor durch $e = dx$ einführt (Bernoulli 1924, S. 12).

unendlichen Reihen oder Integralen sollten Summationen bis zu einem unendlichen Index möglich sein und zum Beispiel auch Formeln, die durch vollständige Induktion bewiesen werden (etwa $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$) für unendliches n gelten. Andererseits können nicht alle Regeln im Unendlichen weitergelten. So gilt etwa für die natürlichen Zahlen das Wohlordnungsprinzip: Jede nicht leere Menge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste. Die Menge aller unendlichen natürlichen Zahlen (wenn diese nicht leer ist) kann dagegen keine kleinste enthalten, denn deren Vorgänger wäre ebenfalls unendlich.

Eine Infinitesimalrechnung, die den heutigen Maßstäben gerecht werden soll, muss also mindestens Folgendes bereitstellen:

1. einen Zahlbegriff, der die reellen Zahlen umfasst, die Regeln eines angeordneten Körpers respektiert und zugleich unendliche Zahlen beinhaltet (die verallgemeinerte Gleichheit entspricht dann dem Vorliegen einer unendlich kleinen Differenz),

2. ein hinreichend weitgehendes Prinzip, das sagt, welche Regeln vom Endlichen ins Unendliche übertragen werden können.

Die Nichtstandardanalysis erfüllt beide Punkte; den ersten, indem sie Standardzahlen und Nichtstandardzahlen unterscheidet, wobei letztere gegenüber den Standardzahlen unendlich groß oder unendlich klein sein können. Je nach Zugang geschieht dies durch eine Körpererweiterung (dann kommen zu den reellen Zahlen als den Standardzahlen hyperreelle Nichtstandardzahlen hinzu) oder durch eine Spracherweiterung (dann werden unter den reellen Zahlen bestimmte durch ein neues Prädikat *standard* ausgezeichnet, und die verbleibenden sind die Nichtstandardzahlen). Der zweite Punkt wird durch das *Transferprinzip* geleistet, das sich entweder als Satz aus der Konstruktion der Körpererweiterung ergibt oder als Axiom gefordert wird. Ein daraus abgeleitetes Programm für die elementare Analysis wird in Abschnitt 1.3.2 skizziert.

Seit ihren Anfangstagen hat die Infinitesimalrechnung einerseits durch ihre unbestreitbare Leistungsfähigkeit fasziniert und andererseits aufgrund ihrer unerhörten Methoden heftigen Widerstand und Kritik hervorgerufen. Diese Gegenpole sind bis heute existent. Auch nachdem die Infinitesimalrechnung (jetzt in Gestalt der Nichtstandardanalysis) durch die Arbeiten von Abraham Robinson eine logisch einwandfreie Grundlage erhalten hat und seitdem in der Forschung zahlreiche Erfolge verbuchen konnte, erscheint sie immer noch vielen suspekt. Sie legt es nahe, über scheinbar vertraute Begriffe wie das Unendliche, das Kontinuum oder den Zahlbegriff neu nachzudenken.

Die Leserin / der Leser möge sich selbst beobachten, inwieweit die folgenden Testaussagen bei ihr / ihm Unbehagen oder Widerstand auslösen.

Aussage 1: Das Kontinuum ist keine Punktmenge.

Aussage 2: Es gibt natürliche Zahlen, die größer sind als jede Einsensumme.

Aussage 3: Es gibt reelle Zahlen, die unendlich klein, aber größer als 0 sind.

1.2. Begriffserklärungen

Der Titel der vorliegenden Arbeit lautet *Nichtstandard in der elementaren Analysis*. Es soll daher zunächst erklärt werden, in welchem Sinne die Begriffe *elementare Analysis* und *Nichtstandard* hier verwendet werden.

1.2.1. Elementare Analysis

Der Begriff *elementare Analysis* bezeichnet in dieser Arbeit zusammenfassend den Stoff, der üblicherweise in der universitären Anfängervorlesung Analysis I (teilweise eventuell noch in Analysis II) und (auf Schulniveau reduziert) in der Sekundarstufe II an weiterführenden Schulen gelehrt wird. Es geht also im Wesentlichen um die reelle Analysis einer Veränderlichen bis zum Hauptsatz. Eine typische Inhaltsangabe sieht etwa so aus:

- Körper- und Anordnungsaxiome der reellen Zahlen
- Folgen und Grenzwerte
- Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen
- Unendliche Reihen, Konvergenzkriterien
- Potenzreihen, Exponential- und Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen
- Stetigkeit und Sätze über stetige Funktionen
- Differentialrechnung einer Veränderlichen
- Integralrechnung einer Veränderlichen
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1.2.2. Nichtstandard

Der Duden erklärt den Begriff *Standard* als „etwas, was als mustergültig, modellhaft angesehen wird und wonach sich anderes richtet; Richtschnur, Maßstab, Norm.“[4] *Nichtstandard* wäre demzufolge etwas, was nicht als mustergültig oder modellhaft angesehen wird und was nicht als Richtschnur, Maßstab oder Norm gilt.

Diese allgemeine Bedeutung trifft auf die Nichtstandardanalysis insofern zu, als heute die Analysis fast ausschließlich auf eine andere Art gelehrt wird, nämlich auf der Basis des Weierstraß'schen Grenzwertbegriffs und ohne Verwendung unendlich kleiner Größen. Bis zur Konstruktion der reellen Zahlen im Jahr 1872[5] war dagegen der Gebrauch infinitesimaler Größen in der Analysis allgemein üblich, also *Standard*. Was Standard ist, ist also einem zeitlichen Wandel unterworfen.

4. Siehe Bedeutungserklärungen zu „Standard“ auf `https://www.duden.de/` (zugegriffen am 03.07.2021).

5. Dies ist das Jahr, in dem Cantor und Dedekind ihre Aufsätze über reelle Zahlen veröffentlichten (siehe Cantor 1872 bzw. Dedekind 2017).

Allerdings ist die allgemeine Bedeutung von *Standard* bzw. *Nichtstandard* nicht der Grund für die Bezeichnung *Nichtstandardanalysis* für eine Analysis mit Infinitesimalien (folgerichtig wird die historische Infinitesimalrechnung heute *nicht* Nichtstandardanalysis genannt). Die allgemeine Bedeutung von *Standard/Nichtstandard* dürfte jedoch mitschwingen, wenn Nichtstandardanalysis heute oft als „exotisch“ oder von der Norm abweichend empfunden wird.

Die Bezeichnung *Nichtstandardanalysis* (bzw. im Englischen *Non-standard Analysis*), die auf Abraham Robinson zurückgeht, hat ihren Grund in einer sehr speziellen Bedeutung von *Nichtstandard* in der Modelltheorie, einem Zweig der mathematischen Logik, der untersucht, welche mathematischen Strukturen bestimmte Systeme von Sätzen formaler Sprachen erfüllen. Die Strukturen, die gewissermaßen Pate standen bei der Formulierung der Satzsysteme, sind die sogenannten *Standardmodelle*, andere Strukturen, die die gleichen Satzsysteme erfüllen, heißen demzufolge *Nichtstandardmodelle*.

Robinsons Nichtstandardanalysis heißt so, weil sie ein Nichtstandardmodell der reellen Analysis benutzt, das als Erweiterung des Standardmodells aufgefasst werden kann und in dem es unendliche (unendlich kleine und unendlich große) Zahlen gibt (Genaueres in Abschnitt 2.3.1). Alternative und ebenfalls berechtigte Bezeichnungen wären *erweiterte Analysis*, *neue Analysis* oder *Infinitesimalanalysis* (in Anlehnung an den alten Begriff *Infinitesimalrechnung*).

Die Bezeichnung *Nichtstandardanalysis* wird heute nicht nur für Robinsons Ansatz gebraucht, sondern auch für andere Zugänge zu einer Analysis mit Infinitesimalien (siehe Kapitel 2). Darüber hinaus werden die Methoden der Nichtstandardanalysis in einem deutlich erweiterten (über die Analysis hinausgehenden) mathematischen Kontext (zum Beispiel in der Stochastik oder Topologie) angewendet, sodass man allgemeiner von einer *Nichtstandard-Mathematik* sprechen kann (vgl. hierzu auch Landers und Rogge 1994, S. 2).

Der Begriff *Nichtstandard* steht in der vorliegenden Arbeit allgemein für den Gebrauch von Methoden aus der Nichtstandardanalysis (gleich welchen Zugangs). Bezogen auf die elementare Analysis bedeutet Nichtstandard insbesondere, dass unendliche Zahlen zur Verfügung stehen.

1.3. Problemstellung und Motivation

1.3.1. Warum sollte man sich mit Nichtstandardanalysis befassen?

[6] Detlef Laugwitz schreibt zu der Frage „Was ist Infinitesimalmathematik und wozu betreibt man sie?“:

> Wozu also betreibt man irgendeine Mathematik? Ich sehe vor allem drei mögliche Rechtfertigungsgründe,
>
> 1. den der Anwendung im weitesten Sinne, sei es in der Lösung von Problemen innerhalb und außerhalb der Mathematik, sei es durch die Neu- oder Weiterentwicklung von Methoden;

6. Eine frühere Version dieses Abschnitts ist in Kuhlemann 2016 enthalten.

2. den des Unterrichts, sei es durch Beiträge zu den Inhalten oder durch eine Verbesserung der Vermittlung;
3. den der Reflexion auf die Mathematik selbst, seien es ihre Geschichte oder ihre Weiterentwicklung.

(Laugwitz 1978, S. 10.)

Diese Gründe werden (mit unterschiedlichen Schwerpunkten) bis heute von den Befürwortern der Nichtstandardanalysis zur Rechtfertigung angeführt. Inwieweit sind sie für die elementare Analysis relevant? Gehen wir die Punkte der Reihe nach durch.

Der erste Rechtfertigungsgrund ist eine wesentliche Triebfeder für den Einsatz von Nichtstandard in der Forschung. Nichtstandard ist eine echte Erweiterung von Standard. Schon in Schmieden und Laugwitz 1958 wurde gezeigt, wie die Nichtstandardanalysis „Delta-Funktionen“ als *Nichtstandardfunktionen* realisieren kann, was einfacher und flexibler ist als die sonst notwendigen Delta-Distributionen. Der erste große Erfolg von Robinsons Nichtstandardanalysis war die Lösung des *invariant subspace problem* aus der Funktionalanalysis (Satz von Bernstein und Robinson, siehe Bernstein und Robinson 1966).

Inzwischen gibt es zahlreiche Anwendungen von Nichtstandardmethoden innerhalb und außerhalb der Mathematik. Beispiele aus Funktionalanalysis, Topologie und Stochastik findet man etwa in Väth 2007, Landers und Rogge 1994 und Diener und Diener 1995 (siehe auch Abschnitt 4.5.6). Der Vorteil von Nichtstandard liegt dabei oft darin, dass Objekte explizit konstruiert werden können, für die sonst nur die Existenz beweisbar ist, und dass kontinuierliche Probleme quasi wie endliche behandelt werden können.[7]

Letzteres spielt auch in der elementaren Analysis eine Rolle, wenn Integrale als Summen berechnet werden oder der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen mittels eines infinitesimal unterteilten Intervalls bewiesen wird (siehe Abschnitt 1.3.2).

Der zweite Rechtfertigungsgrund ist für die Verwendung von Nichtstandard in der elementaren Analysis zentral, denn hier geht es vornehmlich um die Vermittlung von Ideen, von Grundbegriffen und Methoden der Analysis, und die Nichtstandardanalysis bietet hier aus Sicht ihrer Befürworter einen einfacheren und intuitiveren Zugang.

Die folgende Aufzählung skizziert das Nichtstandardprogramm für die Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit gewöhnlicher reeller Funktionen (die man sich auf den erweiterten Zahlenbereich fortgesetzt denkt) sowie für Grenzwerte und Häufungspunkte gewöhnlicher reeller Folgen (die man sich auf einen Indexbereich mit unendlich großen natürlichen Zahlen fortgesetzt denkt). Der *Standardteil* einer Zahl ist dabei die infinitesimal benachbarte reelle Zahl. Wenn der Standardteil existiert, so ist er eindeutig bestimmt.

- Eine Funktion ist stetig (an einer Stelle), wenn dort jede unendlich kleine Änderung

7. Die übliche Konstruktion der Nichtstandardwelt mittels Ultrafilter enthält ein nicht konstruktives Element, da der verwendete Ultrafilter nicht explizit angegeben werden kann. Seine Existenz wird mit dem Auswahlaxiom bzw. dem Zorn'schen Lemma bewiesen. Zur Rolle des Auswahlaxioms siehe auch Abschnitt 5.4.10.

dx des Arguments nur eine unendlich kleine Änderung dy des Funktionswerts bewirkt.

- Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion (an einer Stelle) ist der Standardteil des Differentialquotienten, also des Verhältnisses der Funktionswertänderung dy zu einer infinitesimalen Argumentänderung $dx \neq 0$. Anschaulich stellt man sich ein infinitesimales Steigungsdreieck vor.[8] Die Differenzierbarkeit ist gegeben, wenn der Standardteil existiert und unabhängig von der infinitesimalen Argumentänderung ist.

- Das bestimmte Integral einer integrierbaren Funktion über einem abgeschlossenen Intervall ist der Standardteil einer „Rechteck-Summe“ über einer Zerlegung des Intervalls mit infinitesimaler Schrittweite $dx > 0$ (wobei die Rechteckhöhen durch die Funktionswerte an den Zerlegungspunkten gegeben sind). Die Integrierbarkeit ist gegeben, wenn der Standardteil existiert und unabhängig von der infinitesimalen Schrittweite dx ist.

- Die Häufungspunkte einer Folge sind die Standardteile der Folgenglieder mit unendlich großem Index (sofern die Standardteile existieren). Sind alle Folgenglieder mit unendlich großem Index endlich und haben den gleichen Standardteil, ist dieser der Grenzwert der Folge.

Voraussetzungen für die Durchführung dieses Programms, das in Abschnitt 1.3.2 noch etwas genauer ausgeführt wird, sind der erweiterte Zahlenbereich und eine geeignete Fortsetzung von Funktionen und Relationen auf diesen Zahlenbereich.

Der Umgang mit den Grundbegriffen ist dann rein arithmetisch möglich ohne die für die Standardanalysis typischen ε-δ-Abschätzungen. Als Beispiel mag hier die Herleitung der Kettenregel genügen: Sind $y = f(x)$ und $z = g(y)$ differenzierbar, so ist nach der Kettenregel auch $h(x) = g(f(x))$ differenzierbar mit der Ableitung $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. In der Standardanalysis ist zum Beweis dieser Regel eine schwerfällige Grenzwertargumentation erforderlich. In der Nichtstandardanalysis kann man stattdessen direkt mit den Differentialen und Differentialquotienten rechnen. Mit infitesimalem $dx \neq 0$ sowie $dy = f(x+dx) - f(x)$ und $dz = g(y+dy) - g(y)$ erhält man durch Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung und mit $f(x)$ für y

$$\begin{aligned} dz = g(f(x) + f(x+dx) - f(x)) - g(f(x)) &= g(f(x+dx)) - g(f(x)) \\ &= h(x+dx) - h(x). \end{aligned}$$

Da $\frac{dy}{dx} \approx f'(x)$ und $\frac{dz}{dy} \approx g'(y)$ ist (wobei „$\approx$“ für Gleichheit, bis auf einen infinitesimalen Unterschied steht), folgt die Kettenregel (für $dy \neq 0$) aus der simplen Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

8. Zu den Möglichkeiten der Veranschaulichung in der Nichtstandardanalysis durch die Technik der infiniten Vergrößerung siehe auch Kuhlemann 2018a.

(und der Verträglichkeit der Standardteilbildung mit der Multiplikation). Für $dy = 0$ ist die Kettenregel trivialerweise auch erfüllt.

Zum dritten Rechtfertigungsgrund: Die Pionier- und Blütezeit der Analysis wird heute gerne so gesehen, dass begnadete Mathematiker unter Anwendung fragwürdiger Methoden zu tiefen und richtigen Ergebnissen gekommen sind, die nun im Rahmen der Standardanalysis endlich streng begründet werden können, seien es der Hauptsatz, die Beschreibung der „Kettenlinie“, Leibniz’ Reihenentwicklung für π oder Eulers berühmte Gleichung $e^{i\pi} + 1 = 0$. Laugwitz hält es jedoch für falsch, den Bezug zur Geschichte nur in dieser Weise zu sehen. Vielmehr verbindet er mit dem Studium der alten Schriften die Chance, Quellen aufzudecken, die durch die konventionelle Analysis teilweise verschüttet waren und die jetzt durch die Nichtstandardanalysis wieder befruchtend wirken können (vgl. Laugwitz 1978, S. 13f). Er selbst gibt hierfür zahlreiche Beispiele von Leibniz und Bernoulli über Euler bis Cauchy.

Ein einfaches Beispiel ist das (lange Zeit praktizierte, aber in der Standardanalysis verbotene) Rechnen mit „divergenten Reihen“, das nun wieder als methodische Bereicherung in der elementaren Analysis zugelassen werden kann. Der Begriff ist in Anführungszeichen gesetzt, weil es sich in der Nichtstandardanalysis dabei schlicht um Summen mit einem unendlich großen Ergebnis handelt. Mit diesen Summen kann aber ganz normal (wie mit endlichen Summen) arithmetisch gerechnet werden. Man betrachte dazu die folgende einfache Rechnung nach einem Ansatz von Johann Bernoulli (zitiert nach Schmieden und Laugwitz 1958, S. 15). Ω ist darin eine unendlich große Zahl.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\Omega} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\Omega} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\Omega+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{\Omega+1} \approx 1.\end{aligned}$$

Die beiden Summen hinter dem zweiten Gleichheitszeichen sind unendlich groß, wären also als unendliche Reihen in der Standardanalysis divergent. In der Nichtstandardanalysis sind das konkrete unendliche Zahlen, und als Ergebnis kommt (bis auf eine unendlich kleine Abweichung) der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ heraus.

Auch in der Schule sind historische Bezüge sinnvoll und erwünscht. So steht etwa im Kernlehrplan für die Sekundarstufe II an Gymnasien und Gesamtschulen in Nordrhein-Westfalen zu den Aufgaben und Zielen des Fachs Mathematik:

> Schülerinnen und Schüler erfahren, dass Mathematik eine historisch gewachsene Kulturleistung darstellt (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2013, S.12).

Wenn Mathematik ihrer Rolle als allgemeinbildendes Fach gerecht werden soll, gehört ein gewisses Maß an Selbstreflexion der Mathematik als einer sich entwickelnden Wissenschaft in den Unterricht. Wird dies vernachlässigt, entsteht der falsche Eindruck, die Mathematik wäre ein im Prinzip fertig vorliegendes, Ehrfurcht gebietendes Gebäude ewiger Wahrheiten, in dem es zwar immer noch Neues zu entdecken gibt, das aber in seinen Grundfesten unverrückbar ist. Gerade das aktual Unendliche, das Kontinuum und der Zahlbegriff bieten für die Einbeziehung des historischen Kontextes immer wieder Gelegenheit und Anlass, denn die in der Geschichte aufgetretenen Widerstände gegen die heutigen Auffassungen dürften auch beim lernenden Individuum in der Regel nicht ausbleiben.

Mathematik ist – wie jede andere Wissenschaft auch – dem historischen Wandel unterworfen. Ihre Methoden und Begriffe entwickeln sich. Das gilt auch für die Analysis. Während diese Feststellung auf die Vergangenheit bezogen selbstverständlich anmutet, wirkt sie im Hinblick auf die Zukunft fast befremdlich. Aus unserer heutigen Sicht erscheint uns die Analysis – zumindest was ihre Grundlagen angeht – mit dem Weierstraß'schen Grenzwertbegriff und der mengentheoretischen Konstruktion der reellen Zahlen zu einem befriedigenden Abschluss gekommen zu sein und alles Ringen um die heute etablierten Begriffe wie ein konsequentes Streben auf das erreichte Ziel hin.

Ist also die Nichtstandardanalysis lediglich eine logische Spielerei, eine eigentlich unnötige Unternehmung, um überkommene und überflüssig gewordene Ideen einer dunklen Epoche im Nachhinein mit einem seriösen Unterbau auszustatten? Oder ist sie vielmehr die Analysis der Zukunft? Im Vorwort zur zweiten Auflage von Robinsons Buch *Non-Standard Analysis* bezieht Kurt Gödel hierzu eindeutig Position:

> I would like to point out a fact that was not explicitly mentioned by Professor Robinson, but seems quite important to me; namely that non-standard analysis frequently simplifies substantially the proofs, not only of elementary theorems, but also of deep results. This is true, e.g., also for the proof of the existence of invariant subspaces for compact operators, disregarding the improvement of the result; and it is true in an even higher degree in other cases. This state of affairs should prevent a rather common misinterpretation of non-standard analysis, namely the idea that it is some kind of extravagance or fad of mathematical logicians. Nothing could be farther from the truth. Rather there are good reasons to believe that non-standard analysis, in some version or other, will be the analysis of the future.
>
> One reason is the just mentioned simplification of proofs, since simplification facilitates discovery. Another, even more convincing reason, is the following: Arithmetic starts with the integers and proceeds by successively enlarging the number system by rational and negative numbers, irrational numbers, etc. But the next quite natural step after the reals, namely the introduction of infinitesimals, has simply been omitted. I think, in coming centuries it will be considered a great oddity in the history of mathematics that the first exact theory of infinitesimals was developed 300 years after invention of the differential calculus (Robinson 1974, S. xvi).

Angesichts der eindeutigen Dominanz der Standardanalysis, auch ein halbes Jahrhundert nach diesem Zitat, scheint Gödels Einschätzung sich nicht bewahrheitet zu haben. Andererseits ist ein halbes Jahrhundert nicht sehr viel im Verhältnis zur Geschichte der

Analysis insgesamt. Auch die heutigen Grundbegriffe der Standardanalysis, wie reelle Zahl, Funktion oder Menge, haben sich erst innerhalb mehrerer Jahrzehnte durchgesetzt. Und Gödel dachte sicher in längeren Zeiträumen, da er über die rückblickende Betrachtung „in coming centuries“ spekulierte. Die Zukunft ist vor allem eines: offen. Und aus Nichtstandard könnte durchaus wieder Standard werden. In jedem Fall sind die Argumente von Laugwitz und Gödel nicht einfach wegzuwischen, sondern immer noch ein ernst zu nehmender Anlass, sich mit Nichtstandardanalysis zu befassen (vgl. auch Abschnitte 4.5.6 und 4.5.7).

1.3.2. Ein Nichtstandardprogramm der elementaren Analysis

Ich gebe in diesem Abschnitt einen kurzen Abriss eines Nichtstandardprogramms der elementaren Analysis am Beispiel des Zugangs über Körpererweiterung. Dies soll bereits jetzt eine möglichst konkrete Vorstellung davon vermitteln, welche Voraussetzungen erforderlich sind und wie der Zusammenhang zwischen Standard- und Nichtstandardanalysis in Bezug auf grundlegende Begriffsbildungen ist. Die vorgestellten Nichtstandarddefinitionen von Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung, Integral etc. findet man so (mit leichten Variationen in den Bezeichnungen) in verschiedenen elementaren Einführungen, zum Beispiel in Keisler 2012b oder Henle und Kleinberg 1979.

Aussagen der ersten Stufe

Bei der Formulierung des Transferprinzips der Nichtstandardanalysis spielen Aussagen, die sich in einer Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe formulieren lassen (kurz: Aussagen erster Stufe), eine herausragende Rolle. Umfassende Kenntnisse in Prädikatenlogik sind jedoch nicht erforderlich.[9]

Für einen Kurs in elementarer Analysis (etwa zu Beginn eines Studiums) erscheint bereits folgende Definition ausreichend: In der reellen Analysis ist eine Aussage erster Stufe eine mathematische Aussage über reelle Zahlen, Funktionen und Mengen, bei der sich die Quantifizierungen („für alle … gilt“ bzw. „es gibt ein …, für das gilt“) ausschließlich auf reelle Zahlen beziehen.

Da bereits in Anfängervorlesungen Quantoren und logische Junktoren gerne durch die üblichen Symbole ($\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) abgekürzt werden, sind auch die folgenden, etwas präziseren Definitionen für Terme, Ausdrücke und Aussagen erster Stufe immer noch einfach genug:

Terme erster Stufe sind *Konstanten* (Bezeichner für bestimmte reelle Zahlen) oder *Variablen* (Platzhalter für unbestimmte reelle Zahlen) oder von der Form $f(t_1, \ldots, t_n)$, wobei $t_1, \ldots, t_n$ Terme und f der Bezeichner für eine n-stellige Funktion über $\mathbb{R}$ ist.

Ein *Ausdruck erster Stufe* ist

- eine Gleichung $t_1 = t_2$ zwischen zwei Termen t_1 und t_2,

9. Die wichtigsten Begriffe und Sätze der Prädikatenlogik erster Stufe sind in Anhang A.1 zusammengestellt.

- von der Form $(t_1, \ldots, t_n) \in R$, wobei $t_1, \ldots, t_n$ Terme und R der Bezeichner einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist,
- von der Form $(\forall x\, \varphi)$ oder $(\exists x\, \varphi)$, wobei x eine Variable und φ ein Ausdruck erster Stufe ist,
- von der Form $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ oder $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, wobei φ und ψ Ausdrücke erster Stufe sind.

In einer informelleren Notation können Klammern, die für das Verständnis nicht wichtig sind, weggelassen werden und andere leichter lesbare Schreibweisen zugelassen werden, zum Beispiel die Infix-Notation für zweistellige Funktionen ($t_1 + t_2$ statt $+(t_1, t_2)$). Eine n-stellige Relation über $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge R von $\mathbb{R}^n$. Neben der Elementschreibweise $(t_1, \ldots, t_n) \in R$ ist hier auch die attributive Schreibweise $R(t_1, \ldots, t_n)$ sowie, für zweistellige Relationen, die Infix-Notation (zum Beispiel $t_1 < t_2$) geläufig.

Variablen, die nicht durch einen Quantor gebunden sind, heißen *frei*. Ein Ausdruck ohne freie Variablen ist eine mathematische *Aussage* und nach klassischer Logik entweder wahr oder falsch. Die Quantoren beziehen sich auf das zu Grunde gelegte *Diskursuniversum*, im Falle der reellen Analysis also auf die Menge der reellen Zahlen. $\forall x \forall y\, x+y = y+x$ bedeutet demnach, dass für alle reellen Zahlen x, y gilt: $x + y = y + x$.

Die wesentliche Einschränkung von Aussagen erster Stufe gegenüber beliebigen Aussagen der reellen Analysis besteht darin, dass nur *Individuenvariablen* (Variablen für Objekte des Diskursuniversums), also Zahlenvariablen zur Verfügung stehen und nur über diese quantifiziert werden darf. Quantifizierende Aussagen über Mengen oder Funktionen (zum Beispiel „Für alle Teilmengen von $\mathbb{R}$ gilt ...“) sind auf der ersten Stufe nicht möglich.

Beispiele für Aussagen erster Stufe sind die Körper- und Anordnungsaxiome, wie

$$\forall x \exists y\, x + y = 0$$

(zu jeder reellen Zahl gibt es ein additives Inverses). Darin sind x und y Zahlenvariablen (durch die Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$ gebunden), 0 eine Konstante und $+$ eine zweistellige Funktion über $\mathbb{R}$. Auch das archimedische Axiom ist eine Aussage erster Stufe:

$$\forall x \exists n\, (n \in \mathbb{N} \wedge n > x)$$

(zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl). x und n sind Zahlenvariablen (durch die Quantoren $\forall$ bzw. $\exists$ gebunden), der Ausdruck $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet eine einstellige Relation über $\mathbb{R}$, der Ausdruck $n > x$ eine zweistellige Relation über $\mathbb{R}$.

Beispiele für Aussagen, die nicht auf der ersten Stufe formuliert werden können, sind das Supremumsaxiom für reelle Zahlen (jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke) oder das Wohlordnungsprinzip für natürliche Zahlen (jede nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element). In beiden Fällen braucht man eine Quantifizierung über Mengenvariablen. Die Eigenschaft, eine obere Schranke, kleinste obere Schranke oder kleinstes Element einer bestimmten Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu sein, lässt sich dagegen problemlos auf der ersten Stufe formulieren.

Elementares Erweiterungsprinzip

Wir setzen in dem hier vorgestellten Nichtstandardprogramm der elementaren Analysis folgendes Grundpostulat voraus:

Elementares Erweiterungsprinzip: Es gibt eine echte Erweiterung ${}^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ und eine Abbildung $*$, die

1. jeder n-stelligen Relation R über $\mathbb{R}$ eine n-stellige Relation ${}^*R$ über ${}^*\mathbb{R}$ zuordnet,
2. jeder n-stelligen Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$) eine n-stellige Funktion ${}^*f\colon {}^*D \to {}^*\mathbb{R}$ zuordnet,
3. das folgende *Transferprinzip* erfüllt: Ist φ eine Aussage erster Stufe, die in $\mathbb{R}$ gilt, dann gilt in ${}^*\mathbb{R}$ die Aussage ${}^*\varphi$, die aus φ dadurch entsteht, dass alle Funktionen und Relationen durch ihre Bilder unter der Abbildung $*$ ersetzt werden.

Wir nennen das elementare Erweiterungsprinzip im Folgenden auch kurz *Erweiterungsprinzip*. Aus dem Transferprinzip folgt insbesondere, dass ${}^*R \cap \mathbb{R}^n = R$ und dass die Einschränkung von ${}^*f$ auf D gleich f ist. ${}^*R$ und ${}^*f$ heißen die *kanonische Erweiterung* von R bzw. f.[10] ${}^*\varphi$ heißt der *$*$-Transfer* von φ. Die Elemente von ${}^*\mathbb{R}$ heißen *hyperreelle Zahlen*, die Elemente von ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{Z}$, ${}^*\mathbb{Q}$ dementsprechend *hypernatürliche*, *hyperganze* bzw. *hyperrationale Zahlen*. Man beachte, dass das Diskursuniversum der transferierten Aussagen ${}^*\mathbb{R}$ ist. $\forall x$ bedeutet dort also „für alle hyperreellen Zahlen x“ (analog für $\exists x$). Bei der kanonischen Erweiterung von Funktionen und Relationen (insbesondere bei $+, \cdot, <$ etc.) wird der Stern zur besseren Lesbarkeit von Formeln meistens weggelassen, wenn aus dem Zusammenhang erkennbar ist, ob die reelle oder die hyperreelle Funktion bzw. Relation gemeint ist. Nicht weggelassen wird der Stern bei Mengen (zum Beispiel ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{Z}$, ${}^*\mathbb{Q}$). Im Transferprinzip gilt auch die Rückrichtung: Gilt ${}^*\varphi$ in ${}^*\mathbb{R}$, dann gilt φ in $\mathbb{R}$. Dies sieht man, indem man das Transferprinzip auf die Negation $\neg\varphi$ anwendet.

Das Erweiterungsprinzip ergibt sich aus modelltheoretischen Überlegungen oder kann im Rahmen der üblichen Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre ZFC (unter Verwendung des Auswahlaxioms) bewiesen werden (siehe Abschnitt 2.3). Ein solcher Existenzbeweis liegt allerdings außerhalb der Möglichkeiten von Anfängervorlesungen. Bezogen auf den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre ist daher die Frage zu stellen, ob das Erweiterungsprinzip (in dieser oder einer anderen Variante aus Kapitel 2) guten Gewissens Anfängern zugemutet werden kann. Hierzu vorerst folgende Bemerkungen: In den Analysis-Grundvorlesungen werden die reellen Zahlen zumeist axiomatisch eingeführt. Die Existenz eines Modells und die Einzigartigkeit (bis auf Isomorphie) werden in aller

10. Grundsätzlich würde es reichen, die Erweiterung durch $*$ für Relationen *oder* für Funktionen zu fordern, denn man kann Funktionen als spezielle Relationen und umgekehrt Relationen durch ihre charakteristischen Funktionen definieren und so in beiden Fällen die Erweiterung sowohl von Relationen als auch von Funktionen erhalten (siehe zum Beispiel Robinson 1961, S. 432, bzw. Keisler 2007, S. 17). Der Einfachheit halber fordern wir hier (wie auch Henle und Kleinberg 1979) direkt die Erweiterung von Relationen *und* Funktionen.

Regel nur erwähnt, aber nicht bewiesen. Auch in der Standardanalysis lebt man also mit einem unbewiesenen Grundpostulat. Andererseits ist festzuhalten, dass das Erweiterungsprinzip demgegenüber komplexer ist. Wir greifen die Frage in Abschnitt 4.5.5 noch einmal auf.

Standardteil

Definition 1. *Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$. x heißt*

- beschränkt *oder* endlich groß*, wenn es $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $|x| \leq y$,*
- unbeschränkt *oder* unendlich groß *(kurz: $|x| \gg 1$), wenn x nicht beschränkt ist (das heißt, wenn für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x| > y$),*
- infinitesimal *oder* unendlich klein *(kurz: $x \approx 0$), wenn für alle $y \in \mathbb{R}, y > 0$ gilt: $|x| < y$.*

Seien $x, y \in {}^*\mathbb{R}$. x und y heißen infinitesimal benachbart *(kurz $x \approx y$) genau dann, wenn gilt: $x - y \approx 0$. Man sagt dann auch: x und y liegen* unendlich nahe beieinander.[11]

Null ist demnach die einzige infinitesimale Zahl in $\mathbb{R}$. Zwei infinitesimal benachbarte reelle Zahlen müssen also gleich sein. Intuitiv plausible Rechenregeln für infinitesimale, beschränkte und unbeschränkte Zahlen folgen direkt aus den Definitionen, zum Beispiel (vgl. Keisler 2012b, S. 30f):

- Infinitesimal plus (mal) infinitesimal ist infinitesimal.
- Beschränkt plus (mal) beschränkt ist beschränkt.
- Beschränkt mal infinitesimal ist infinitesimal.
- Der Kehrwert einer unbeschränkten Zahl ist infinitesimal.
- Der Kehrwert einer infinitesimalen Zahl ungleich 0 ist unbeschränkt.

Der Nachweis dieser Rechenregeln eignet sich auch sehr gut als Übungsaufgabe für Studierende.

Ebenfalls folgt unmittelbar, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf ${}^*\mathbb{R}$ ist (vgl. Keisler 2012b, S. 36).

Satz 1. *Zu jeder beschränkten hyperreellen Zahl gibt es genau eine infinitesimal benachbarte reelle Zahl.*

11. Die Bezeichnungen und Symbole sind in der Literatur nicht einheitlich. In manchen Texten zur Nichtstandardanalysis werden beschränkte Zahlen *endlich* oder *finit* genannt und unbeschränkte Zahlen *unendlich* oder *infinit*. Manchmal bedeutet *endlich* aber auch „weder unendlich groß, noch unendlich klein“ und *unendlich* dementsprechend „unendlich groß oder unendlich klein“. Der Begriff *infinitesimal* (*unendlich klein*) schließt manchmal die Null ein und manchmal nicht. Statt $\approx$ für *infinitesimal benachbart* sind auch $\simeq$ oder andere Symbole gebräuchlich.

Satz 1 folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Zur beschränkten hyperreellen Zahl x wähle man $s := \sup\{r \in \mathbb{R} \mid r \leq x\} \in \mathbb{R}$. s und x sind infinitesimal benachbart, da s sonst keine obere Schranke bzw. nicht die kleinste obere Schranke wäre. Die Eindeutigkeit folgt, weil zwei infinitesimal benachbarte reelle Zahlen gleich sein müssen.

Definition 2. *Sei $x \in {}^*\mathbb{R}$ beschränkt. Die nach Satz 1 eindeutig bestimmte zu x infinitesimal benachbarte reelle Zahl heißt* der Standardteil von x *und wird mit* $\operatorname{st}(x)$ *bezeichnet.*

Die folgenden Regeln für das Rechnen mit Standardteilen können anhand der Definition leicht verifiziert werden (vgl. Keisler 2012b, S. 37), zum Beispiel als Übungsaufgabe.

Satz 2. *Für alle beschränkten $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ gilt:*

1. $\operatorname{st}(x + y) = \operatorname{st}(x) + \operatorname{st}(y)$.
2. $\operatorname{st}(x \cdot y) = \operatorname{st}(x) \cdot \operatorname{st}(y)$.
3. $\operatorname{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\operatorname{st}(x)}{\operatorname{st}(y)}$, *falls* $\operatorname{st}(y) \neq 0$.
4. $x \leq y \Rightarrow \operatorname{st}(x) \leq \operatorname{st}(y)$.

Existenz unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen

Da ${}^*\mathbb{R}$ nach dem elementaren Erweiterungsprinzip eine echte Körpererweiterung ist, gibt es ein $x \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$. x ist entweder unbeschränkt oder stimmt nicht mit $\operatorname{st}(x)$ überein. Im ersten Fall ist x^{-1} infinitesimal, aber ungleich 0. Im zweiten Fall ist $x - \operatorname{st}(x)$ infinitesimal, aber ungleich 0. Der Kehrwert dieser Zahl ist dann unbeschränkt. Daher gilt

Satz 3. *${}^*\mathbb{R}$ enthält infinitesimale Zahlen ungleich 0 und unbeschränkte Zahlen.*

Mit dem *-Transfer des archimedischen Axioms folgt

Satz 4. *${}^*\mathbb{N}$ enthält unbeschränkte Zahlen.*

Folgen und Grenzwerte

Gemäß der Vereinbarung im elementaren Erweiterungsprinzip bezeichne (a_n) (abhängig vom Kontext) sowohl die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, als auch deren kanonische Erweiterung $(a_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$.

Definition 3. *Sei (a_n) eine unendliche reelle Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$.*

1. *a ist ein* Häufungspunkt *von (a_n) genau dann, wenn es ein $n \in {}^*\mathbb{N}$ gibt, für das gilt:*
$$n \gg 1 \wedge a_n \approx a.$$
2. *a ist* Grenzwert *von (a_n) genau dann, wenn für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ gilt:*
$$n \gg 1 \Rightarrow a_n \approx a.$$

3. (a_n) *ist* konvergent *genau dann, wenn es* $a \in \mathbb{R}$ *gibt, sodass* a *Grenzwert von* (a_n) *ist. Ansonsten ist* (a_n) divergent.

4. (a_n) *ist eine* Cauchy-Folge *genau dann, wenn für alle* $m, n \in {}^*\mathbb{N}$ *gilt:*

$$m, n \gg 1 \Rightarrow a_m \approx a_n.$$

Ist (a_n) konvergent, so ist der Grenzwert a eindeutig bestimmt und wird mit $\lim_{n\to\infty} a_n$ bezeichnet. Für alle $n \gg 1$ gilt dann $\mathrm{st}(a_n) = a$.

Satz 5. *Jede Cauchy-Folge ist konvergent.*

Zum Beweis siehe z. B. Keisler 2012b, S. 500.

Unendliche Reihen

Zu jeder unendlichen reellen Zahlenfolge (a_n) kann man die zugehörige Folge der *Partialsummen* s_n bilden mit

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Die Folge (s_n) heißt eine *unendliche Reihe* und wird auch als $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ geschrieben. Wenn (s_n) konvergiert, schreibt man $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ allerdings auch für den Grenzwert von (s_n), also

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \mathrm{st}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right),$$

für beliebiges $N \gg 1$.

Ausgehend von dieser Definition können die üblichen Sätze und Konvergenzkriterien für unendliche Reihen gezeigt werden (vgl. Keisler 2012b, Kapitel 9).

Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

Definition 4. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *und* $f\colon D \to \mathbb{R}$.

1. f *ist* stetig in a *genau dann, wenn* $a \in D$ *und wenn für alle* $x \in {}^*D$ *gilt:*

$$x \approx a \Rightarrow f(x) \approx f(a).$$

2. f *ist* (punktweise) stetig auf D *genau dann, wenn für alle* $a \in D$ *gilt:* f *ist stetig in* a.

3. f *ist* gleichmäßig stetig auf D *genau dann wenn für alle* $x_1, x_2 \in {}^*D$ *gilt:*

$$x_1 \approx x_2 \Rightarrow f(x_1) \approx f(x_2).$$

Definition 5. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$. $c \in \mathbb{R}$ ist* Grenzwert *von f an der Stelle a (kurz: $\lim_{x\to a} f(x) = c$) genau dann, wenn es ein $x \in {}^*D$ mit $x \approx a$ und $x \neq a$ gibt und wenn für alle $x \in {}^*D$ gilt:*

$$x \approx a \wedge x \neq a \Rightarrow f(x) \approx c.$$

Wenn der Grenzwert existiert, so ist er eindeutig bestimmt. Man beachte, dass für die Definitionen 4 und 5 die Definition für Folgengrenzwerte nicht gebraucht wurde.

Ableitung

Definition 6. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$.*

1. *$m \in \mathbb{R}$ ist Ableitung von f in $a \in D$ genau dann, wenn es ein $x \in {}^*D$ mit $x \approx a$ und $x \neq a$ gibt und wenn für alle $x \in {}^*D$ gilt:*

$$x \approx a \wedge x \neq a \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx m.$$

2. *f ist* differenzierbar in *$a \in D$ genau dann, wenn es ein $m \in \mathbb{R}$ gibt, das Ableitung von f in a ist.*

Ist f differenzierbar in a, so ist die Ableitung dort eindeutig bestimmt und wird mit $f'(a)$ bezeichnet. Für alle $x \in {}^*D, x \approx a, x \neq a$ gilt:

$$f'(a) = \operatorname{st}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right).$$

Ist die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ für alle $x \in D$ differenzierbar in x, dann heißt die Funktion

$$f': D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

die *Ableitungsfunktion*, oder kurz, die *Ableitung* von f.

Integral

Seien $a, b, h \in \mathbb{R}$, $a < b$, $h > 0$ und sei f eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion. Weiter sei

$$S_a^b(f, h) := \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h + f(x_n)(b - x_n)$$

mit $n := \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid a + ih \leq b\}$, $x_i := a + ih$, für $i = 0, \ldots, n$.

Bei fest vorgegebenen f, a, b ist $S(h) := S_a^b(f, h)$ eine auf $\mathbb{R}^+$ definierte reelle Funktion, mit einer auf ${}^*\mathbb{R}^+$ definierten hyperreellen Fortsetzung. Im infinitesimalen Fall schreibt man statt h auch gerne dx.

Definition 7. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. f heißt über $[a,b]$* integrierbar *genau dann, wenn es $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jedes infinitesimale $dx > 0$ gilt:*

$$S_a^b(f, dx) \approx c.$$

c heißt Integral von f über $[a,b]$.

Ist f über $[a,b]$ integrierbar, so ist das Integral eindeutig bestimmt und wird mit $\int_a^b f(x)\,dx$ bezeichnet. Für jedes unbeschränkte $n \in {}^*\mathbb{N}$, $dx = \frac{b-a}{n}$ und $x_i = a + i \cdot dx$ gilt dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \operatorname{st}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,dx\right).$$

Ergänzend definiert man noch

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ein Nichtstandardbeweis

Ausgehend von den Nichtstandarddefinitionen lassen sich die üblichen Sätze der elementaren Analysis auf neuartige Weise beweisen. Als Beispiel gebe ich einen Nichtstandardbeweis des Nullstellensatzes für stetige Funktionen an.

Satz 6. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es eine reelle Zahl $c \in [a,b]$ mit $f(c) = 0$.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 0, \ldots, n$ sei $x_i^{(n)} := a + i \cdot \frac{b-a}{n}$. Sei k der kleinste Index i, für den $f(x_i^{(n)}) \geq 0$ ist. Dann gilt

$$1 \leq k \leq n \wedge f(x_{k-1}^{(n)}) < 0 \wedge f(x_k^{(n)}) \geq 0. \tag{1.1}$$

Das heißt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass (1.1) gilt. Dies ist eine Aussage der ersten Stufe. Daher gilt auch der *-Transfer.

Ist ein unbeschränktes $n \in {}^*\mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt, dann gibt es also ein $k \in {}^*\mathbb{N}$, sodass (1.1) gilt. Wegen $n \gg 1$, ist $x_{k-1} \approx x_k$ (oberer Index n zur Vereinfachung weggelassen). Wegen $a \leq x_k \leq b$, existiert der Standardteil $c := \operatorname{st}(x_k)$, und es ist

$$a = \operatorname{st}(a) \leq c \leq \operatorname{st}(b) = b.$$

Aus $x_{k-1} \approx c \approx x_k$ und der Stetigkeit von f folgt $f(x_{k-1}) \approx f(c) \approx f(x_k)$ und damit

$$|f(x_k)| \leq |f(x_k)| + |f(x_{k-1})| = f(x_k) - f(x_{k-1}) \approx 0,$$

also $f(c) \approx f(x_k) \approx 0$. Da $f(c)$ reell ist, folgt $f(c) = 0$. □

Der Beweis zeigt an einem elementaren Beispiel, wie ein kontinuierliches Problem auf ein diskretes zurückgeführt und dank des Transferprinzips wie im Endlichen behandelt werden kann, ohne die sonst typische ε-δ-Argumentation.

Zugleich offenbart sich hier eine potentielle Denkschwierigkeit für standardgeschulte Mathematiker. Für gewöhnlich stellt man sich das reelle Intervall $[a, b]$ als anschauliches *Kontinuum* vor, als eine Menge, die kein „Dazwischen" mehr erlaubt. Im Nichtstandardbeweis wird diese Vorstellung konterkariert, denn jede einzelne reelle Zahl wird in einem infinitesimalen Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ vom Rest isoliert und erhält eine Nummer i aus dem Bereich der hypernatürlichen Zahlen von 1 bis n ($n \gg 1$). Hieraus ergibt sich zudem die scheinbar paradoxe Situation einer „Abzählung" der überabzählbaren Menge $[a, b]$. Diese und andere potentielle Denkschwierigkeiten werden in Kapitel 5 behandelt.

Ein Vergleich

Man wird kaum bestreiten können, dass die in Abschnitt 1.3.2 angegebenen Nichtstandarddefinitionen direkter und intuitiver sind als die entsprechenden Standarddefinitionen. Man vergleiche etwa die Definitionen für $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zunächst die Standarddefinition:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon). \tag{1.2}$$

In Worten: (a_n) konvergiert gegen a genau dann, wenn die Folgenglieder schließlich (das heißt für hinreichend große Indizes) beliebig nahe bei a liegen (das heißt in einem Abstand kleiner als jedes vorgegebene ε).

Dagegen die Nichtstandarddefinition aus Definition 3:

$$\forall n \in {}^*\mathbb{N}\, (n \gg 1 \Rightarrow a_n \approx a). \tag{1.3}$$

In Worten: (a_n) konvergiert gegen a genau dann, wenn die Folgenglieder schließlich (das heißt für unendlich große Indizes) unendlich nahe bei a liegen.

Die verbalen Definitionen sind sehr ähnlich: Aus „hinreichend groß" wird „unendlich groß" und aus „beliebig nahe" wird „unendlich nahe". Ein Blick auf die Formeln (1.2) und (1.3) verrät jedoch, dass die logische Struktur der Standarddefinition deutlich komplexer ist, denn das „hinreichend groß" hängt vom vorgegebenen „beliebig klein" ab, und die zu erfüllende Bedingung ist in Abhängigkeit von Beidem zu formulieren. In der Nichtstandarddefinition gibt es diese verschachtelte Abhängigkeit nicht: Wenn der Index unendlich groß ist, dann ist der Abstand unendlich klein. Daher kommt die Nichtstandarddefinition mit einem Quantor aus, während die Standarddefinition drei Quantoren braucht.

In ähnlicher Weise kann die Vereinfachung durch Nichtstandard bei den Defintionen für Stetigkeit, Ableitung und Integral gezeigt werden. Die logische Vereinfachung bei den Definitionen der Grundbegriffe ist ein Kernargument, das von den Befürwortern des Einsatzes von Nichtstandardanalysis in der Lehre ins Feld geführt wird.

Ein weiteres Argument, insbesondere für die Schulmathematik, ist, dass mit den Nichtstandarddefinitionen die zentrale Rolle des Grenzwertbegriffs für Folgen entfällt und damit die Reihenfolge der Themenbehandlung im Unterricht flexibler ist. So kann zum

Beispiel auch die (mehr am historischen Ablauf orientierte) Reihenfolge Stetigkeit, Integral, Ableitung, Folgen und Grenzwerte unterrichtet werden.

Die Äquivalenz zu Standard

Mit Ausnahme der Integraldefinition sind die Nichtstandarddefinitionen aus Abschnitt 1.3.2 zu den entsprechenden Standarddefinitionen äquivalent (siehe zum Beispiel Henle und Kleinberg 1979, S. 116-121). Für das Integral gilt: Ist eine Funktion Riemann-integrierbar (im Sinne der Standarddefinition), so ist sie integrierbar im Sinne von Definition 7 (und beide Integrale stimmen dann überein). Die Umkehrung gilt jedoch nicht (Henle und Kleinberg 1979, S. 118f).[12]

Um zu demonstrieren, welcher Art die Äquivalenzbeweise für Standard- und Nichtstandarddefinitionen sind, gebe ich einen Beweis für die Äquivalenz der Grenzwertdefinitionen (1.2) und (1.3) an (vgl. Laugwitz 1986, S. 118).

Zunächst die Richtung (1.2) $\Rightarrow$ (1.3): Sei $N \in {}^*\mathbb{N}$, $N \gg 1$. Dann ist zu zeigen, dass $|a_N - a|$ infinitesimal, also kleiner als jede positive reelle Zahl ist. Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Nach (1.2) gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}\,(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon). \tag{1.4}$$

Als unendlich große Zahl ist N größer als n_0. Aus dem *-Transfer von (1.4) folgt daher $|a_N - a| < \varepsilon$.

Zur Gegenrichtung (1.3) $\Rightarrow$ (1.2): Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ gegeben und sei

$$M_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}\,(m \geq n \Rightarrow |a_m - a| < \varepsilon)\}.$$

Dann ist

$${}^*M_\varepsilon = \{n \in {}^*\mathbb{N} \mid \forall m \in {}^*\mathbb{N}\,(m \geq n \Rightarrow |a_m - a| < \varepsilon)\}.$$

Aufgrund des Wohlordnungsprinzips in $\mathbb{N}$ enthält M_ε (sofern nicht leer) ein kleinstes Element n_0. Formal:

$$\exists n\,(n \in M_\varepsilon) \Rightarrow \exists n_0 \in M_\varepsilon\, \forall n \in M_\varepsilon\, n \geq n_0.$$

Dies ist eine reelle Aussage der ersten Stufe. Der *-Transfer dieser Aussage bedeutet gerade, dass ${}^*M_\varepsilon$ (sofern nicht leer) ein kleinstes Element n_0 enthält. Nach (1.3) enthält ${}^*M_\varepsilon$ alle $n \gg 1$, ist also nicht leer. n_0 kann als kleinstes Element von ${}^*M_\varepsilon$ nicht unendlich groß sein, denn dann wäre auch $n_0 - 1$ unendlich groß und würde zu ${}^*M_\varepsilon$ gehören. Also ist $n_0 \in \mathbb{N}$, und nach Definition von ${}^*M_\varepsilon$ folgt

$$\forall m \in {}^*\mathbb{N}\,(m \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a| < \varepsilon)$$

und damit auch (1.4).

12. Für äquivalente Nichtstandarddefinitionen der Riemann-Integrierbarkeit siehe Definition 14 auf S. 45 oder Satz 46 auf S. 184.

1.3.3. Das Phänomen der geringen Resonanz

Schaut man in gängige einführende Lehrbücher zur Analysis oder in Vorlesungsskripte für Analysis-Grundkurse, so spielt die Nichtstandardanalysis dort augenscheinlich keine Rolle. Eine genauere Betrachtung in den Kapiteln 3 und 4 wird das bestätigen. Nichtstandardanalysis findet – wenn überhaupt – in Spezialveranstaltungen statt, zum Beispiel als Anwendung der Modelltheorie.

In David Talls *Advanced Mathematical Thinking* stellt Michèle Artigue im Abschnitt „The non-standard analysis revival and its weak impact on education" 1991 fest:

> However, it is necessary to emphasize the weak impact of NSA on contemporary education. The small number of reported instances of this approach are often accompanied with passionate advocacy, but this rarely rises above the level of personal conviction (Tall 1991, S. 172).

An dieser Situation hat sich seitdem im Wesentlichen nichts geändert. Was sind die Gründe für die anhaltend geringe Resonanz?

Eine naheliegende Antwort könnte lauten: Weil man die Nichtstandardanalysis nicht braucht. Die Standardanalysis bietet ein in sich geschlossenes und zufriedenstellendes System, das ohne unendliche Zahlen auskommt. Aber das wäre als Begründung zu einfach, denn auf der anderen Seite bleiben die in Abschnitt 1.3.1 besprochenen Rechtfertigungsgründe, die belegen, warum es trotzdem lohnend ist, sich mit Nichtstandardanalysis zu befassen. Es geht nicht darum, die Standardanalysis in der Lehre zu ersetzen, sondern vielmehr darum, die Lehre (und die Mathematik insgesamt) durch Nichtstandard zu bereichern, wo dies sinnvoll möglich ist.

Eine zweite naheliegende Antwort wäre: Weil Nichtstandardanalysis immer noch relativ unbekannt ist. Durchläuft man ein typisches Master- oder Lehramtsstudium der Mathematik, ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass man nie mit Nichtstandardanalysis in Berührung kommt. Auch bei Analysislehrenden an Hochschulen ist es eher die Ausnahme, dass Nichtstandardanalysis zu ihrem aktiven Forschungsgebiet gehört. Wer von Nichtstandardanalysis schon einmal gehört hat, hält sie oft für eine komplizierte Anwendung der Logik, die für die mathematische Praxis wenig relevant und für die Lehre der elementaren Analysis viel zu anspruchsvoll ist. Ob dieses Urteil gerechtfertigt ist, wird in Abschnitt 4.5 diskutiert.

Was wenig bekannt ist oder als ungeeignet gilt, wird naturgemäß wenig eingesetzt. Umgekehrt hat das, was wenig eingesetzt wird, geringe Chancen auf größere Bekanntheit. Aber auch ein solcher sich selbst erhaltender Ursache-Wirkungs-Kreislauf erscheint als Begründung nicht zufriedenstellend, wenn man bereit ist, die Rechtfertigungsgründe aus Abschnitt 1.3.1 anzuerkennen. Ein gewisser Einfluss wäre seit Laugwitz und Robinson zu erwarten gewesen.

Es erscheint mir plausibel, neben der prinzipiell fehlenden Notwendigkeit und der relativ geringen Bekanntheit tiefer liegende Ursachen zu vermuten, die eine Akzeptanz von Nichtstandard behindern und die mit dem ungewohnten Nichtstandarddenken zusammenhängen, zum Beispiel in Bezug auf das Unendliche oder das Kontinuum. In dieser

Richtung äußert sich auch Bedürftig, wenn er (auf die Schule bezogen) Schwierigkeiten eher bei den Lehrenden als bei den Lernenden vermutet:

> Dieses Denken mag für uns, die eine Grenzwertbiographie haben, vielleicht fremd sein, nicht so für Schüler, mit denen wir die Zahlbereichserweiterung zu $^*\mathbb{R}$ entwickeln (Bedürftig 2018, S. 296).

Während die bisherige Literatur in der Diskussion über den Einsatz von Nichtstandaranalysis in der Lehre in der Regel die Perspektive der Lernenden in den Vordergrund stellt, muss eine Analyse der geringen Resonanz von Nichtstandard im Lehrbetrieb insbesondere die Perspektive der Lehrenden in den Fokus nehmen.

1.4. Forschungsfragen und Methode

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine *Standortbestimmung* von Nichtstandard in der Analysis, speziell in der Lehre der Analysis – in mathematischer, logischer, philosophischer und stoffdidaktischer Hinsicht. Insbesondere soll untersucht werden, inwieweit sich unter diesen Aspekten Gründe für die zurückhaltende Aufnahme von Elementen der Nichtstandardanalysis in die Lehre ableiten lassen.

Ein empirischer Teil dient als Beleg für einen aktuellen Meinungsquerschnitt, wie Nichtstandardanalysis von den Lehrenden der Analysis wahrgenommen und als Lehrstoff eingeschätzt wird. Die Auswertung einer entsprechenden Befragung von Lehrenden ist Ausgangspunkt für die Diskussion mathematischer und didaktischer Vorbehalte gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre. Im Vordergrund steht also die Frage nach der Rechtfertigung von Nichtstandardanalysis als Lehrstoff. Untersuchungen zu weitergehenden Fragestellungen und Aspekten der Auswertung, die man anschließen könnte, etwa hinsichtlich der Prozesse zur Festlegung dessen, was an Schule oder Hochschule gelehrt werden sollte, werden hier nicht weiterverfolgt.

Aus der Zielsetzung leiten sich die folgenden Forschungsfragen ab:

FF1: Welche Bedeutung hat die Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre?

FF2: Was denken Analysislehrende an deutschen Hochschulen über den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre?

FF3: Welche Gründe für eine ablehnende Haltung gegenüber Nichtstandard in der Lehre gibt es?

FF4: Wie lassen sich diese Ablehnungsgründe in einen philosophischen, mathematischen und didaktischen Hintergrund einordnen und bewerten?

FF1 wird durch eine Sichtung gängiger Lehrbücher zu den an Hochschulen angebotenen Analysiskursen sowie (als Teil des empirischen Teils) einer Befragung von Analysislehrenden beantwortet. Dies dient der Überprüfung der Feststellung der geringen Resonanz in Abschnitt 1.3.3.

FF2 ist der Hauptgegenstand des empirischen Teils der Arbeit. Grundlage ist eine im Rahmen des Dissertationsprojektes per E-Mail durchgeführte Befragung von Analysislehrenden an deutschen Hochschulen. Als Forschungsmethode kommt die *Qualitative Inhaltsanalyse* nach Mayring zum Einsatz. Eine weitere Differenzierung der Forschungsfrage sowie eine detaillierte Begründung der Wahl und Beschreibung der Anwendung dieser Forschungsmethode findet sich in Kapitel 4.

Die Forschungsfragen FF3 und FF4 werden durch eine systematische Analyse und Diskussion möglicher Vorbehalte gegenüber Nichtstandard unter mathematischen, philosophischen und didaktischen Aspekten unter Einbeziehung einschlägiger Forschungsliteratur beantwortet. Eine Quelle für die Analyse mathematischer und didaktischer Argumente gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre sind die Ergebnisse zu FF2.

Um mögliche mathematische Probleme aufzudecken, die Vorbehalte gegenüber Nichtstandard begründen können, werden logische, modelltheoretische und mengentheoretische Untersuchungen diskutiert. Zur Analyse einer aus philosophischer Haltung heraus begründeten Ablehnung von Nichtstandard werden verschiedene Grundlagenpositionen sowie ontologische, epistemologische und anwendungsbezogene Fragen behandelt.

1.5. Aufbau der Dissertation

Der nachfolgende Teil der Dissertation beginnt mit einem Überblick zur Nichtstandardanalysis, einem geschichtlichen Rückblick und der Vorstellung verschiedener Zugänge. Ausführlich gehe ich auf den *Omega-Kalkül* von Schmieden und Laugwitz, auf Robinsons *Non-Standard Analysis* und auf Nelsons *Interne Mengenlehre* ein. Andere axiomatische, der Internen Mengenlehre verwandte Zugänge werden mit Fokus auf die jeweiligen Unterschiede etwas gröber skizziert. Dieser Überblick ermöglicht es, später unter anderem herauszuarbeiten, inwieweit gewohnte Sichtweisen (zum Beispiel auf die Mengenlehre, das Unendliche, die reellen und die natürlichen Zahlen oder das Kontinuum) durch Nichtstandard herausgefordert werden. Nicht betrachtet werden die aus der Kategorientheorie stammende *Glatte Infinitesimalanalysis*, Connes' *nichtkommutative Geometrie* und Conways *Theorie der surrealen Zahlen*, da mir für diese Zugänge keine Adaptionen für eine Einführung in die Analysis bekannt sind.

Kapitel 3 behandelt den Forschungsstand zur Praxis und zur Akzeptanz der Nichtstandardanalysis in der Lehre. Nach einem Blick in gängige Lehrbücher werden verschiedene elementare Nichtstandardzugänge vorgestellt und verglichen und Erfahrungen aus der Lehre inklusive berichteter Widerstände dargestellt. Dies ist insbesondere für die spätere Bewertung didaktischer Einwände gegen Nichtstandard von Belang.

Kapitel 4 ist der empirische Teil der Arbeit und widmet sich den Forschungsfragen FF1 und FF2 mittels qualitativer Inhaltsanalyse. Grundlage sind die Daten aus der Umfrage unter den Lehrenden. FF3 und FF4 werden unter mathematischen und didaktischen Aspekten angegangen, indem die Rückmeldungen aus der Umfrage analysiert werden, die auf mathematisch bzw. didaktisch begründete Ablehnung von Nichtstandardanalysis in der Lehre schließen lassen.

Kapitel 5 setzt sich detailliert mit möglichen philosophischen, logischen und weiteren mathematischen Argumenten im Hinblick auf die Forschungsfragen FF3 und FF4 auseinander. Hierzu werden Ergebnisse aus der reversen Mathematik, der Mengenlehre und der Modelltheorie herangezogen. Verschiedene Grundlagenpositionen wie Realismus, Konstruktivismus und Formalismus werden kurz charakterisiert zur Vorbereitung der Diskussion ontologischer, epistemologischer und anwendungsbezogener Fragen im Verhältnis von Standard und Nichtstandard. Der Unendlichkeits- und der Kontinuumsbegriff sowie die Rolle der Mengenlehre, der natürlichen und der reellen Zahlen in der Mathematik werden thematisiert und die jeweiligen Herausforderungen der gewohnten Sichtweise durch die Nichtstandardanalysis besprochen. Auf die Rolle des Auswahlaxioms und die Unterscheidung von Sprachebenen wird dabei, wegen der Bedeutung für das Verhältnis von Standard und Nichtstandard, besonders eingegangen. Darüber hinaus wird in diesem Kapitel eine vorlesungsergänzende Veranstaltung skizziert und exemplarisch ausgeführt, die die Schärfung des Grundlagenbewusstseins in den Vordergrund stellt und an Leibniz' Infinitesimalkalkül anknüpft.

Kapitel 6 fasst die wesentlichen Ergebnisse des empirischen Teils und der anschließenden Diskussion sowie die Antworten auf die Forschungsfragen zusammen. Als Ausblick werden mögliche Konsequenzen für die Lehre besprochen.

2. Ein Überblick zur Nichtstandardanalysis

2.1. Zur Geschichte der Nichtstandardanalysis

Die Geschichte der Analysis ist vielfach und umfassend dargestellt worden, in deutscher Sprache zum Beispiel in Jahnke 1999, Körle 2012, Spalt 2015, Sonar 2016. Die Ursprünge der Analysis werden in Regel bis in die Antike, teilweise bis zu den Flächen- und Volumenberechnungen der Ägypter und Babylonier zurückverfolgt. Sonar nennt sein Buch daher „3000 Jahre Analysis".

Im engeren Sinne begann die Analysis mit den Arbeiten von Newton und Leibniz zur Infinitesimalrechnung. Ihnen gelang die Verknüpfung von Tangenten- und Flächenproblem (heute bekannt als der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung), und ihre Methoden waren in einem allgemeinen Rahmen anwendbar.

Das unendlich Kleine spielte in den ersten zweihundert Jahren nach Leibniz und Newton eine entscheidende Rolle (aber auch bereits vorher, zum Beispiel in der Heuristik des Archimedes oder beim Cavalieri-Prinzip). Die Idee des unendlich Kleinen bedingt die Idee des unendlich Großen, sowohl im Sinne einer unendlich großen Größe (zum Beispiel als Kehrwert einer unendlich kleinen Größe), als auch im Sinne einer unendlich großen Anzahl (zum Beispiel, wenn unendlich kleine Größen in der Summe eine endliche Größe ergeben sollen).

Die Zählzahlen $1, 2, 3, \ldots$ müssen sich ins Unendliche fortsetzen lassen, um mit unendlichsten Folgen- bzw. Reihengliedern rechnen zu können, die zum Beispiel bei Johann Bernoulli und bei Euler auftreten. Der Begriff *infinitesimal* (neulateinisch: *infinitesimus*) ist die Ordinalzahlbildung zu *infinitus*, bedeutet demnach eigentlich *unendlichste* (im ordinalen Sinne, nicht als Superlativ).[1] Der Bezug zum unendlich Kleinen ist dadurch gegeben, dass bei Nullfolgen oder bei konvergenten Reihen die unendlichsten Glieder unendlich klein, also infinitesimal sein müssen. Die Verwendung unendlicher Größen oder Zahlen war allerdings auch von Anfang an von Kritik begleitet (zum Beispiel durch Berkeley, Rolle, Nuiewentijt).

Die moderne Analysis, die heute an den Universitäten gelehrt wird, wurde erst möglich mit der Erfindung der reellen Zahlen durch Cantor und Dedekind und der Weierstraß'schen Grenzwertdefinition, die den Gebrauch von Infinitesimalien überflüssig macht. Als weitere Voraussetzung muss die Entwicklung der modernen Quantorenlogik, insbesondere durch Frege und Peirce, genannt werden, mit der die Grenzwertformulierungen in

1. Nach Probst entsprach die von Mercator noch verwendete Bezeichnung *pars infinitissima* nicht dessen tatsächlichem Gebrauch der unendlich kleinen Größen, da der Superlativ *infinitissima* eine *minimale* (nicht weiter teilbare) unendlich kleine Größe bedeute (ähnlich den Cavalieri'schen Indivisiblen). Leibniz sei daher zu *infinitesima* übergegangen und habe so 1673 den Begriff *infinitesimal* geprägt (vgl. Probst 2008, S. 103).

ihrer logischen Struktur erst präzise gefasst werden konnten.

Die Erleichterung über diesen Befreiungsschlag spricht aus den folgenden Sätzen, mit denen Hilbert seinen Artikel *Über das Unendliche* einleitet:

> Weierstraß hat der mathematischen Analysis durch seine mit meisterhafter Schärfe gehandhabte Kritik eine feste Grundlage geschaffen. Indem er unter anderem die Begriffe Minimum, Funktion, Differentialquotient klärte, hat er die der Infinitesimalrechnung noch anhaftenden Mängel beseitigt, sie von allen verschwommenen Vorstellungen über das Infinitesimale gereinigt und die dabei aus dem Begriff des Infinitesimalen entspringenden Schwierigkeiten endgültig überwunden (Hilbert 1926, S. 161).

Gleich anschließend weist Hilbert allerdings darauf hin, dass man damit zwar das Unendlichgroße und das Unendlichkleine erfolgreich aus der Analysis eliminiert habe, dass aber das Unendliche immer noch auftrete in Gestalt unendlicher Zahlenfolgen, welche die reellen Zahlen definieren, und in dem „Begriff des Systems der reellen Zahlen, welches ganz so wie eine fertig und abgeschlossen vorliegende Gesamtheit aufgefaßt wird“ (Hilbert 1926, S. 162).

In der Tat wurde die Verbannung unendlich kleiner Größen aus der Analysis erkauft durch einen intensiven Gebrauch unendlicher Mengen. Nach den Konstruktionen von Cantor oder Dedekind ist jede einzelne reelle Zahl eine aktual unendliche Menge (eine unendliche Menge äquivalenter Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ bzw. ein Dedekind'scher Schnitt in $\mathbb{Q}$). Hieran nimmt heutzutage kaum jemand Anstoß. Wir haben uns durch jahrelange Übung im Mathematikstudium antrainiert, unendliche Mengen als alltäglich und unendlich kleine oder unendlich große Zahlen als exotisch zu empfinden. Einen sachlichen Grund für diese unterschiedliche Wahrnehmung gibt es nicht (siehe Abschnitt 5.2).

Durch den beispiellosen Erfolg der Mengenlehre im Allgemeinen und der Analysis mit den neu erfundenen reellen Zahlen und dem Weierstraß'schen Grenzwertbegriff (der sich mit der ebenfalls neu erfundenen Prädikatenlogik präzise fassen ließ) im Besonderen wurden die infinitesimalen Größen bald nicht mehr vermisst. Cantor bezeichnete sie gar als den „infinitären Cholera-Bacillus der Mathematik“ (Meschkowski 1965, S. 505f).

Trotz dieser radikalen Wende in der Analysis blieben Infinitesimalien als Elemente nichtarchimedischer Körper Gegenstand mathematischer Untersuchungen, wie Paul Ehrlich in seinem Artikel Ehrlich 2006 darlegt, zum Beispiel bei Du Bois-Reymond, Veronese, Levi-Civita, Hahn, Artin und Schreier, Baer.

Es ist sehr einfach, $\mathbb{R}$ oder, allgemeiner, einen beliebigen archimedisch angeordneten Körper K zu einem nichtarchimedischen Körper K' zu erweitern, zum Beispiel durch Adjunktion eines neuen Elementes Ω, das definitionsgemäß größer als alle Elemente aus K ist. Damit ist $K' := K(\Omega)$ ein nichtarchimedischer Körper, der auch infinitesimale Zahlen (zum Beispiel Ω^{-1}) enthält. Außer den Grundrechenarten und der Anordnung ist für die neuen Zahlen allerdings nichts geklärt. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist zum Beispiel nicht klar, ob Ausdrücke wie $\sqrt{\Omega}, 2^{\Omega}, \sin(\Omega), \Omega!$ oder $\sum_{n=1}^{\Omega} n$ sinnvoll definiert werden können. Erweiterungen der Art $\mathbb{R}(\Omega)$ sind daher für die Analysis uninteressant, wenn nicht noch andere Vereinbarungen hinzukommen, wie zum Beispiel bei der Omega-Adjunktion in Laugwitz 1986 (vgl. Abschnitt 3.1.2).

Mit komplexeren nichtarchimedischen Körpererweiterungen können gewisse Fortschritte erzielt werden. Der Levi-Civita-Körper ist (wenn die imaginäre Einheit adjungiert wird) algebraisch abgeschlossen, erlaubt also insbesondere Wurzelziehen (Berz 1996).

Um für eine Infinitesimal-Analysis von Nutzen zu sein, müssen sich die Körpererweiterungen an zentralen Aufgabenstellungen der Analysis bewähren. So sollte sich der Begriff der ganzen Zahlen sinnvoll auf die unendlichen Zahlen erweitern lassen, was Bernoulli und Euler darin hervorhoben, dass sie von „unendlichsten" Folgengliedern sprachen (also von Folgengliedern an unendlichen Stellen). Auf Partialsummenfolgen angewandt heißt das: Man sollte Summen mit unendlichen Indexgrenzen bilden können. Insbesondere sollten sich für eine Integraldefinition unendlich viele infinitesimale Zahlen zu einer endlichen Zahl aufsummieren lassen.

Die oben aufgeführten nichtarchimedischen Körper leisteten dies nicht, sodass Fraenkel 1928 ernüchtert feststellte:

> Die bisher in Betracht gezogenen und teilweise sorgfältig begründeten Arten unendlichkleiner Grössen haben sich zur Bewältigung auch nur der einfachsten und grundlegendsten Probleme der Infinitesimalrechnung (etwa zum Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung oder zur Definition des bestimmten Integrals) als völlig unbrauchbar erwiesen (Fraenkel 1928, S. 116).

Einen Teilerfolg erreichten Schmieden und Laugwitz 1958 mit ihrem Omegakalkül, der unendlich kleine und unendlich große Zahlen zur Verfügung stellt und eine Behandlung aller wesentlichen Teile der klassischen Analysis sowie neuartiger *Nichtstandardfunktionen* (etwa der Deltafunktion) erlaubt (Schmieden und Laugwitz 1958). Der verwendete Zahlbereich der Omegazahlen enthält allerdings Nullteiler und ist nur partiell geordnet. Die Omegazahlen lassen sich daher nicht mit der Vorstellung eines Linearkontinuums in Einklang bringen.

Der Durchbruch gelang Abraham Robinson 1961 mit seiner *Non-standard Analysis* (Robinson 1961). Der dort verwendete Zahlbereich $^*\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen ist ein zu $\mathbb{R}$ elementar äquivalenter Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ (siehe Abschnitt 2.3.1). Durch weitere Arbeiten von Robinson, Zakon und Luxemburg wurde das Konzept auf sogenannte Superstrukturen über beliebigen unendlichen Mengen verallgemeinert und für viele andere Gebiete der Mathematik anwendbar (Robinson 1966, Robinson und Zakon 1969). Die Konstruktion von $^*\mathbb{R}$ oder allgemeiner von Nichtstandarderweiterungen von Superstrukturen verwendet Ultrafilter, deren Existenz (nichtkonstruktiv) mit dem Zorn'schen Lemma bewiesen werden kann.

In den 1970er-Jahren wurden unabhängig voneinander verschiedene axiomatische Zugänge zur Nichtstandardanalysis vorgeschlagen: Die *Interne Mengenlehre* von Edward Nelson (Nelson 1977), die Mengenlehre von Karel Hrbaček (Hrbaček 1978) und die *Alternative Mengenlehre* von Petr Vopěnka (Vopěnka 1979). Alle drei Vorschläge erweitern die Sprache und das Axiomensystem der klassischen Mengenlehre, sodass im resultierenden Mengenuniversum neben den Standardmengen auch Nichtstandardmengen zum Vorschein kommen.[2] Dadurch, dass die Erweiterungen direkt an der Grundlage der Mathematik, der Mengenlehre, ansetzen, sind die Nichtstandardkonzepte von vornherein

2. Neben diesen drei ursprünglichen Vorschlägen gibt es weitere Varianten. Einen umfassenden

sehr allgemein angelegt. Den bislang größten Einfluss auf die praktizierte Mathematik hatte Nelsons Interne Mengenlehre.

Neben den modelltheoretischen und den axiomatischen Ansätzen zur Nichtstandardanalysis gab es ab den 1980er Jahren einen Vorstoß aus der Kategorientheorie, der auf Francis Wiliam Lawvere zurückgeht (Lawvere 1979, Lawvere 1980): die *Glatte Infinitesimalanalysis* (*Smooth Infinitesimal Analysis*). Infinitesimale Größen werden hier durch nilquadratische Elemente realisiert, also Größen, deren Quadrat exakt 0 ist, ohne dass sie selbst 0 sein müssen. Damit solche Größen (ungleich 0) existieren können, wird statt der klassischen Logik die intuitionistische Logik verwendet, in der das *tertium non datur* nicht gilt. Es gibt in der Glatten Infinitesmalanalysis infinitesimale Größen ε, für die weder $\varepsilon = 0$ noch $\varepsilon \neq 0$ gilt.

Ich stelle in diesem Kapitel drei Ansätze genauer vor:

- den Omega-Kalkül nach Schmieden und Laugwitz, da er noch rein konstruktiv und mit elementaren Mitteln nachvollziehbar ist und eine gute Vorbereitung für den Robinson-Ansatz darstellt,
- den modelltheoretischen Ansatz von Robinson, da er nach wie vor die größte Verbreitung unter den Anwendern der Nichtstandardanalysis hat,
- die Interne Mengenlehre von Nelson als Beispiel für einen axiomatischen Zugang, da sie wegen ihrer einfachen Axiomatik bei Anwendern sehr beliebt ist und da sie sich insbesondere als Ausgangspunkt für philosophische und grundlagentheoretische Diskussionen eignet.

Andere axiomatische Zugänge (Externe und Relative Mengenlehren) werden etwas gröber skizziert. Für eine Einführung in die Glatte Infinitesimalanalysis sei auf Bell 2008 verwiesen.

2.2. Omega-Kalkül nach Schmieden und Laugwitz

Cantor hat die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen definiert. Zwei solche Folgen sind äquivalent (das heißt, sie repräsentieren dieselbe reelle Zahl), wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Analog definieren Schmieden und Laugwitz ihre Omegazahlen als Äquivalenzklassen über Folgen eines angeordneten Körpers K (zum Beispiel $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$).[3] Die Unterschiede zu Cantors Definition sind, dass nicht nur Fundamentalfolgen, sondern alle Folgen über K zugelassen werden, und dass die Äquivalenzbedingung strenger ist. Zwei Folgen repräsentieren nur dann dieselbe Omegazahl, wenn sie *überall* (Schmieden und Laugwitz 1958) oder zumindest *fast*

Überblick über die axiomatischen Zugänge zur Nichtstandardanalysis gibt die Monographie Kanovei und Reeken 2004.

3. Siehe Laugwitz 1978. Ursprünglich hatten Schmieden und Laugwitz ihren Ω-Kalkül für rationale Ω-Zahlen definiert (Schmieden und Laugwitz 1958).

überall (Laugwitz 1978) exakt übereinstimmen. „Fast überall“ bedeutet dabei überall, bis auf endlich viele Ausnahmen.

Anders als bei Cantors Definition der reellen Zahlen repräsentieren zum Beispiel die Folgen $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\frac{1}{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ zwei verschiedene Omegazahlen, die sich beide als infinitesimal herausstellen und von denen die erste doppelt so groß ist wie die zweite.

2.2.1. Genetischer Aufbau der Analysis mit Omegazahlen

Die Darstellung des Omegakalküls in diesem Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an Laugwitz 1978. Ergänzend geben wir ein Transferprinzip für Omegazahlen an.

Definition der Omegazahlen

Um Eigenschaften, die fast überall, das heißt für fast alle natürlichen Zahlen gelten, bequem formulieren zu können, führt man die Bezeichnung Cof ein für das System aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, deren Komplement in $\mathbb{N}$ endlich ist:

$$\mathrm{Cof} := \{M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \mathbb{N} \setminus M \text{ ist endlich}\}.$$

Man nennt Cof *das System der kofiniten Teilmengen in* $\mathbb{N}$. Im Folgenden wird immer wieder gebraucht, dass Schnittmengen und Obermengen kofiniter Mengen wieder kofinit sind. Diese Abgeschlossenheitseigenschaften von Cof sind anhand der Definition leicht zu verifizieren.[4] Für alle Mengen A, B gilt also:

$$A, B \in \mathrm{Cof} \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathrm{Cof} \tag{2.1}$$

$$A \in \mathrm{Cof}, A \subseteq B \subseteq \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad B \in \mathrm{Cof} \tag{2.2}$$

In der Menge $K^{\mathbb{N}}$ der Folgen über K sei die Relation $\sim$ definiert durch

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathrm{Cof} \tag{2.3}$$

für alle $a, b \in K^{\mathbb{N}}$ mit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Man prüft leicht nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Reflexivität und Symmetrie sind klar. Für die Transitivität benötigt man (2.1) und (2.2).

Damit kann man die Menge ${}^{\Omega}K$ der Omegazahlen über K als $K^{\mathbb{N}}/\sim$ definieren. Bezeichnet $[a]$ die Äquivalenzklasse von $a \in K^{\mathbb{N}}$ bezüglich $\sim$, so gilt also:

$${}^{\Omega}K = \{[a] \mid a \in K^{\mathbb{N}}\}.$$

Laugwitz bezeichnet die Äquivalenzklasse $[a]$, also die durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ repräsentierte Omegazahl, mit a_Ω oder α (und analog für andere lateinische Buchstaben und ihre griechischen Entsprechungen).

Die Abbildung $\rho\colon K \to {}^{\Omega}K$, die jeder konstanten Folge über K ihre Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ zuordnet ist injektiv, denn zwei verschiedene konstante Folgen stimmen

4. Zusammen mit der Eigenschaft, dass Cof nicht leer ist und nicht die leere Menge enthält, zeichnen sie Cof als *Filter* über $\mathbb{N}$ aus (vgl. Definition 8).

nirgendwo (und damit nicht fast überall) überein. K wird durch ρ in ${}^{\Omega}K$ *eingebettet* und kann (durch die Identifikation von $a \in K$ mit $\rho(a)$) als Untermenge von ${}^{\Omega}K$ aufgefasst werden. Damit kann man Bezeichnungen für Elemente aus K zur Vereinfachung in ${}^{\Omega}K$ weiterverwenden und zum Beispiel wieder 1 statt $[(1, 1, 1, \dots)]$ schreiben. Diese Praxis ist allgemein bei Zahlbereichserweiterungen üblich, zum Beispiel bei $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, wenn man mit 1 die natürliche, die ganze, die rationale und die reelle Zahl Eins bezeichnet.

ρ ist nicht surjektiv, denn die Folge $(1, 2, 3, \dots)$ stimmt mit keiner konstanten Folge fast überall überein. Daher liegt die Zahl $\Omega := [(1, 2, 3, \dots)]$ nicht im Bild von ρ. Der Schritt von K zu ${}^{\Omega}K$ ist also eine echte Erweiterung.

Fortsetzung von Relationen und Funktionen

Für jede m-stellige Relation R über K sei eine entsprechende m-stellige Relation ${}^*R$ über ${}^{\Omega}K$ definiert durch

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in {}^*R \quad :\Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} \mid (a_{1,n}, \dots, a_{m,n}) \in R\} \in \mathrm{Cof}. \tag{2.4}$$

Dabei ist $(a_{j,n})_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils ein Repräsentant von α_j (für $j = 1, \dots, m$). Dass ${}^*R$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt, folgt daraus, dass Schnittmengen und Obermengen kofiniter Teilmengen wieder kofinit sind.

Der Begriff der Funktion wird wie üblich auf den Begriff der Relation zurückgeführt. Mit (2.4) und (2.1), (2.2) lässt sich zeigen: Ist $f \colon D \to K$ mit $D \subseteq K^m$ eine m-stellige Funktion, dann wird durch

$${}^*f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} \mid f(a_{1,n}, \dots, a_{m,n}) = b_n\} \in \mathrm{Cof}. \tag{2.5}$$

eine m-stellige Funktion ${}^*f \colon {}^*D \to {}^{\Omega}K$ definiert.

Die Einbettungsfunktion ρ ist ein injektiver Homomorphismus für jede m-stellige Relation, das heißt, für alle $a_1, \dots, a_m \in K$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_m) \in R \quad \Rightarrow \quad (\rho(a_1), \dots, \rho(a_m)) \in {}^*R.$$

Wird K durch die Einbettung mittels ρ als Untermenge von ${}^{\Omega}K$ aufgefasst, so ist ${}^*R$ eine Fortsetzung von R (und entsprechend ${}^*f$ eine Fortsetzung von f).

Wenn keine Missverständnisse zu befürchten sind, wird daher auf den Stern an den Funktions- und Relationssymbolen verzichtet, insbesondere bei $+$, $\cdot$, $<$. Auf diese Weise hat man

$$\alpha < \beta \quad :\Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < b_n\} \in \mathrm{Cof}, \tag{2.6}$$

$$\alpha + \beta = \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n + b_n = c_n\} \in \mathrm{Cof}, \tag{2.7}$$

$$\alpha \cdot \beta = \gamma \quad :\Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \cdot b_n = c_n\} \in \mathrm{Cof}. \tag{2.8}$$

Bei einstelligen Relationen (das heißt bei Mengen), wie ${}^*\mathbb{N}$ oder ${}^*\mathbb{Q}$, bleibt der Stern in der Regel erforderlich, um sie von den ursprünglichen (in ${}^{\Omega}K$ eingebetteten) Mengen, wie $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Q}$, zu unterscheiden.

Da sich die Rechenregeln für die Addition und Multiplikation von den Folgengliedern der Repräsentanten auf die Omegazahlen übertragen, stellt man fest, dass ${}^{\Omega}K$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

${}^{\Omega}K$ enthält allerdings Nullteiler, denn es ist das Produkt

$$[(1,0,1,0,\dots)]\cdot[(0,1,0,1,\dots)]=0,$$

ohne dass einer der Faktoren Null ist. ${}^{\Omega}K$ ist also kein Körper und kann auch nicht zu einem Körper erweitert werden. Der Kehrwert α^{-1} existiert nur für solche Zahlen α, deren Repräsentantenfolgen (a_n) fast überall ungleich 0 sind.

Außerdem ist ${}^{\Omega}K$ nur partiell geordnet. Zwar ist die Relation $<$ in ${}^{\Omega}K$ irreflexiv und transitiv, aber für die beiden Nullteiler von oben gilt weder die Gleichheit, noch $<$ in der einen oder der anderen Richtung, denn keine dieser Bedingungen gilt (in K) für fast alle Folgenglieder. Trotz dieser Defizite gegenüber K ist mit Hilfe der Omegazahlen eine relativ weitgehende Infinitesimalrechnung möglich, wie in Laugwitz 1978 vorgeführt wird.

Unbeschränkte und infinitesimale Omegazahlen

Aufgrund der Definition von $<$ ergibt sich, dass Nullfolgen, wie $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, infinitesimale Omegazahlen repräsentieren (fast alle Folgenglieder sind kleiner als jede vorgegebene Zahl aus K) und bestimmt divergente Folgen, wie $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, unbeschränkte Omegazahlen (fast alle Folgenglieder sind größer als jede vorgegebene Zahl aus K bzw. kleiner als jede vorgegebene Zahl aus K). Insbesondere ist Ω unbeschränkt und Ω^{-1} infinitesimal.

Da Zahlenfolgen in K Funktionen von $\mathbb{N}$ nach K sind, lassen sich diese zu Funktionen von ${}^*\mathbb{N}$ nach ${}^{\Omega}K$ fortsetzen. Aus einer Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erhält man die Fortsetzung $(a_\nu)_{\nu\in{}^*\mathbb{N}}$. Dabei ist $a_\nu=[(a_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}]$ und $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein Repräsentant von ν. Speziell für $\nu=\Omega$ hat man also $a_\Omega=[(a_i)_{i\in\mathbb{N}}]$ als Rechtfertigung für Laugwitz' Bezeichnungskonvention für Omegazahlen.

Transferprinzip für Omegazahlen

Laugwitz verzichtet bei seinem genetischen Aufbau der Nichtstandardanalysis in Laugwitz 1978 auf die explizite Formulierung eines Transferprinzips und greift stattdessen bei Beweisen direkt auf die Konstruktion der Omegazahlen zurück. Eine explizite Einbeziehung formaler Sprachen ist dadurch in diesem Stadium nicht erforderlich.

Angesichts der festgestellten Unterschiede zwischen K und ${}^{\Omega}K$ (Existenz von Nullteilern, nur partielle Ordnung) ist klar, dass ein Transferprinzip nicht für alle Sätze erster Stufe gelten kann. Tatsächlich sind im Allgemeinen nur mit $\wedge, \forall, \exists$ gebildete Ausdrücke übertragbar. Das Transferprinzip für Omegazahlen ist daher in der Praxis nur von begrenztem Nutzen. Aus systematischen Gründen und im Hinblick auf spätere Verallgemeinerungen sei es hier trotzdem angegeben. Für die im Folgenden verwendeten Bezeichnungen und Begriffe aus der Prädikatenlogik siehe Abschnitt A.1 im Anhang.

Es wird eine geeignete formale Sprache $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ benötigt, in der die übertragbaren Sätze formuliert werden können. Die Symbolmenge $\mathcal{S}$ enthalte zu jedem Element $a\in K$ eine

Konstante und zu jeder (ein- oder mehrstelligen) Relation R über K ein Relationssymbol (entsprechender Stellenzahl). Eine solche Symbolmenge kann nicht effektiv angegeben werden. Der Einfachheit halber nehme man an, dass die Elemente aus K bzw. die Relationen über K selbst die Symbole aus $\mathcal{S}$ sind. Damit können in konkreten Beispielen alle aus der Hintergrundmengenlehre gewohnten Zeichen für Elemente aus K oder Relationen über K in $\mathcal{S}$-Ausdrücken verwendet werden, zum Beispiel 0, $-\frac{2}{3}$ oder (im Fall $K = \mathbb{R}$) π als Konstanten, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ als einstellige Relationssymbole, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ als zweistellige Relationssymbole, $+$, $\cdot$ als dreistellige Relationssymbole. Im Zweifelsfall muss dann dazu gesagt werden, ob eine Zeichenkette als formaler $\mathcal{S}$-Satz oder als Satz der Hintergrundmengenlehre zu lesen ist.

$\mathfrak{A}$ sei die Struktur mit Träger K und $a^{\mathfrak{A}} := a$ für alle Konstanten a und $R^{\mathfrak{A}} := R$ für alle Relationssymbole R. $\mathfrak{B}$ sei die Struktur mit Träger ${}^{\Omega}K$ und $a^{\mathfrak{B}} := \rho(a) = [(a)_{n\in\mathbb{N}}]$ für alle Konstanten a und $R^{\mathfrak{B}} := {}^{*}R$ für alle Relationssymbole R.

Der folgende Satz liefert den Zusammenhang zwischen Aussagen über Omegazahlen und den entsprechenden Aussagen über ihre Repräsentanten.

Satz 7. *Sei φ ein $\mathcal{S}$-Ausdruck, der als logische Symbole ausschließlich $\wedge, \forall, \exists$ und als freie Variablen höchstens $x_1, \ldots, x_m$ enthalte. Dann gilt für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in {}^{\Omega}K$ mit $\alpha_j = [(a_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}]$ für $j = 1, \ldots, m$:*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_{1,n}, \ldots a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m].$$

Einfach ausgedruckt: Eine mit $\wedge, \forall, \exists$ gebildete Aussage gilt für Omegazahlen genau dann, wenn sie gliedweise auf die Repräsentanten bezogen fast überall gilt.

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach dem Aufbau von φ geführt.

1. Fall: φ sei von der Gestalt $Rx_1 \ldots x_m$. Dann gilt die Behauptung nach (2.4).

2. Fall: φ sei von der Gestalt $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ und die Behauptung gelte für φ_1, φ_2.

$$\begin{aligned}
& \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof} \\
\Leftrightarrow\ & \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_1[\ldots] \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi_2[\ldots]\} \in \mathrm{Cof} \\
\overset{(!)}{\Leftrightarrow}\ & \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_1[\ldots]\} \in \mathrm{Cof} \text{ und } \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_2[\ldots]\} \in \mathrm{Cof} \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{B} \models \varphi_1[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] \text{ und } \mathfrak{B} \models \varphi_2[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{B} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\alpha_1, \ldots, \alpha_m].
\end{aligned}$$

An der Stelle (!) wird in der Richtung „$\Rightarrow$“ (2.2) eingesetzt und für die Richtung „$\Leftarrow$“ (2.1).

3. Fall: φ sei von der Gestalt $\forall x\, \varphi_1$ und die Behauptung gelte für $\varphi_1(x, x_1, \ldots x_m)$.

$$\begin{aligned}
& \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models (\forall x\, \varphi_1)[a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof} \\
\Leftrightarrow\ & \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Für alle } a \in K\colon \mathfrak{A} \models \varphi_1[a, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof} \\
\overset{(!)}{\Leftrightarrow}\ & \text{Für alle } \alpha \in {}^{\Omega}K\colon \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_1[a_n, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof} \\
\Leftrightarrow\ & \text{Für alle } \alpha \in {}^{\Omega}K\colon \mathfrak{B} \models \varphi_1[\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m] \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{B} \models (\forall x\, \varphi_1)[\alpha_1, \ldots, \alpha_m].
\end{aligned}$$

An der Stelle (!) wird in der Richtung „$\Rightarrow$“ (2.2) eingesetzt und dass für alle $\alpha = [(a_n)] \in {}^{\Omega}K$ gilt:

$$\begin{aligned} & \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Für alle } a \in K \colon \mathfrak{A} \models \varphi_1[a, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \\ \subseteq\ & \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_1[a_n, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\}. \end{aligned}$$

Zur Richtung „$\Leftarrow$“: Aus

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Für alle } a \in K \colon \mathfrak{A} \models \varphi_1[a, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \notin \mathrm{Cof}$$

folgt, dass es eine Folge (a_n) gibt, sodass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{nicht } \mathfrak{A} \models \varphi_1[a_n, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}].$$

Für $\alpha = [(a_n)]$ gilt daher $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_1[a_n, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \notin \mathrm{Cof}$.

4. Fall: φ sei von der Gestalt $\exists x\, \varphi_1$ und die Behauptung gelte für $\varphi_1(x, x_1, \ldots x_m)$.

$$\begin{aligned} & \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models (\exists x\, \varphi_1)[a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof} \\ \Leftrightarrow\ & \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt } a \in K \colon \mathfrak{A} \models \varphi_1[a, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof} \\ \overset{(!)}{\Leftrightarrow}\ & \text{Es gibt } \alpha \in {}^{\Omega}K \colon \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_1[a_n, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof} \\ \Leftrightarrow\ & \text{Für alle } \alpha \in {}^{\Omega}K \colon \mathfrak{B} \models \varphi_1[\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m] \\ \Leftrightarrow\ & \mathfrak{B} \models (\exists x\, \varphi_1)[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]. \end{aligned}$$

An der Stelle (!) wird in der Richtung „$\Leftarrow$“ (2.2) eingesetzt und dass für alle $\alpha = [(a_n)] \in {}^{\Omega}K$ gilt:

$$\begin{aligned} & \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_1[a_n, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \\ \subseteq\ & \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt } a \in K \colon \mathfrak{A} \models \varphi_1[a, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\}. \end{aligned}$$

Zur Richtung „$\Rightarrow$“: Aus

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt } a \in K \colon \mathfrak{A} \models \varphi_1[a, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof}$$

folgt, dass es eine Folge (a_n) gibt, sodass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_1[a_n, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}].$$

Für $\alpha = [(a_n)]$ gilt daher $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_1[a_n, a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof}$. □

Aus Satz 7 ergibt sich das folgende Transferprinzip:

Satz 8 (Transferprinzip für Omegazahlen)**.** *Für jeden $\mathcal{S}$-Satz φ, der als logische Symbole ausschließlich $\wedge, \forall, \exists$ enthält, gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Beweis. φ enthalte die Konstanten $a_1, \ldots, a_m$ und sonst keine Konstanten. Für $j = 1, \ldots, m$ sei $\alpha_j = \rho(a_j) = [(a_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}]$ mit $a_{j,n} = a_j$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $x_1, \ldots, x_m$ seien Variablen, die in φ nicht vorkommen, und $\hat{\varphi}$ sei der Ausdruck, der entsteht, indem in φ a_j jeweils durch x_j ersetzt wird. Dann gilt

$$\begin{array}{rl} & \mathfrak{A} \models \varphi \\ \Leftrightarrow & \mathfrak{A} \models \hat{\varphi}[a_1, \ldots, a_m] \\ \overset{(!)}{\Leftrightarrow} & \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \hat{\varphi}[a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathrm{Cof} \\ \overset{\text{Satz 7}}{\Leftrightarrow} & \mathfrak{B} \models \hat{\varphi}[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] \\ \Leftrightarrow & \mathfrak{B} \models \varphi. \end{array}$$

An der Stelle (!) ist zu beachten, dass die $a_{j,n}$ nicht von n abhängen und daher die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \hat{\varphi}[a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\}$ entweder gleich $\mathbb{N}$ (und damit $\in$ Cof) oder gleich $\emptyset$ (und damit $\notin$ Cof) ist. □

Als Anwendungsbeispiel für Satz 7 zeigen wir die weiter oben ohne Beweis angegebene Aussage, dass die kanonische Fortsetzung einer Funktion mit Definitionsbereich D eine Funktion mit Definitionsbereich ${}^*D$ ist.

f sei eine m-stellige Funktion mit Definitionsbereich $D \subseteq K^m$, also eine $(m+1)$-stellige Relation über K, für die gilt:

1. Es gibt $a_1, \ldots, a_m, b \in K$ mit $(a_1, \ldots, a_m, b) \in f$ genau dann, wenn $(a_1, \ldots, a_m) \in D$.

2. Für alle $a_1, \ldots, a_m, b_1, b_2 \in K$ gilt: Wenn $(a_1, \ldots, a_m, b_1) \in f$ und $(a_1, \ldots, a_m, b_2) \in f$, dann $b_1 = b_2$.

. Dann ist zu zeigen, dass entsprechende Aussagen für die kanonische Fortsetzung gelten.

Zur ersten Bedingung:

$$\begin{array}{rl} & (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in {}^*D \\ \Leftrightarrow & \{n \in \mathbb{N} \mid (a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}) \in D\} \in \mathrm{Cof} \\ \Leftrightarrow & \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt } b \in K \text{ mit } (a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}, b) \in f\} \in \mathrm{Cof} \\ \overset{\text{Satz 7}}{\Leftrightarrow} & \text{Es gibt } \beta \in {}^{\Omega}K \text{ mit } (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta) \in {}^*f \end{array}$$

Zur zweiten Bedingung:

$$\begin{array}{rl} & (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1) \in {}^*f \text{ und } (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_2) \in {}^*f \\ \overset{\text{Satz 7}}{\Rightarrow} & \{n \in \mathbb{N} \mid (a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}, b_{1,n}) \in f \text{ und } (a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}, b_{2,n}) \in f\} \in \mathrm{Cof} \\ \overset{(2.2)}{\Rightarrow} & \{n \in \mathbb{N} \mid b_{1,n} = b_{2,n}\} \in \mathrm{Cof} \\ \Rightarrow & \beta_1 = \beta_2. \end{array}$$

Also ist ${}^*f$ eine Funktion mit Definitionsbereich ${}^*D$. Die Ersparnis durch Satz 7 ist in diesem Beispiel nicht sehr groß. Beim Nachweis der zweiten Bedingung hätte man auch direkt mit (2.1) argumentieren können. Beim Nachweis der ersten Bedingung erspart man sich aber immerhin die explizite Konstruktion der Repräsentantenfolge für β.

Elementare Analysis mit Omegazahlen

Zentrale Begriffe der Analysis, wie Grenzwert, Stetigkeit, Ableitung, Integral lassen sich mit Omegazahlen im Prinzip wie in Abschnitt 1.3.2 definieren (vgl. Laugwitz 1978, S. 25-39 und 54-68).

Gegenüber der Darstellung in Abschnitt 1.3.2 hat man jedoch folgende Einschränkungen in Kauf zu nehmen:

1. Es gilt kein allgemeines Transferprinzip für Sätze erster Stufe.

2. Nicht jede beschränkte Omegazahl hat einen Standardteil[5] (aber wenn ein Standardteil existiert, ist er eindeutig bestimmt). Für $K = \mathbb{R}$ gilt: a_Ω hat genau dann einen Standardteil, wenn die Folge (a_n) im konventionellen Sinne konvergiert. In diesem Fall ist:
$$\mathrm{st}(a_\Omega) = \lim_{n\to\infty} a_n$$
(vgl. Laugwitz 1978, S. 34).

Der Grund für das Fehlen eines allgemeinen Transferprinzips ist, dass Cof zwar ein Filter, aber kein Ultrafilter ist (vgl. Abschnitt 2.2.2). Eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ kann unendlich sein und ihre Komplementärmenge ebenfalls. Keine der beiden Mengen gehört damit zu Cof.

Auf die Glieder einer Repräsentantenfolge (a_n) der Omegazahl α bezogen heißt das: Wenn eine Aussage nicht für fast alle a_n gilt, folgt nicht, dass die Negation der Aussage für fast alle a_n gilt. Entsprechend: wenn eine Disjunktion zweier Aussagen für fast alle a_n gilt, folgt nicht, dass eine der beiden Aussagen für fast alle a_n gilt. Am konkreten Beispiel $(-1)^\Omega$: Für fast alle Glieder (in diesem Fall sogar für alle Glieder) der Folge $((-1)^n)$ gilt $a_n = -1 \vee a_n = 1$, aber es gilt weder für fast alle Glieder $a_n = -1$ noch für fast alle Glieder $a_n = 1$. Daher ist $(-1)^\Omega$ weder gleich -1 noch gleich 1.

$(-1)^\Omega$ ist auch ein Beispiel für eine beschränkte Omegazahl ohne Standardteil, denn die Folge $((-1)^n)$ ist nicht konvergent.

Da nicht jede beschränkte Omegazahl einen Standardteil hat, müssen in Beweisen an entsprechenden Stellen Zusatzüberlegungen angestellt (zum Beispiel die Existenz konvergenter Teilfolgen beschränkter Folgen ausgenutzt) werden (vgl. etwa Laugwitz 1978, S. 56-58).

Man kann diese Nachteile der Omegazahlen beheben, indem man die Äquivalenzbedingung für die Repräsentantenfolgen modifiziert und „fast überall“ nicht als „überall bis auf endlich viele Ausnahmen“ deutet, sondern so, dass manchmal auch unendlich viele Ausnahmen zulässig sind. Genauer teilt man die Teilmengen von $\mathbb{N}$ in zwei disjunkte Familien ein, von denen die erste Familie ($\mathcal{U}$ genannt) genau die Teilmengen enthält, die als „fast überall“ gelten sollen (unter anderem alle kofiniten Teilmengen) und die zweite Familie den Rest (unter anderem alle endlichen Teilmengen). Wählt man die Aufteilung so, dass die Abgeschlossenheit von $\mathcal{U}$ gegenüber Schnittmengen- und Obermengenbildung erhalten bleibt, dann ist $\mathcal{U}$ ein sogenannter *freier Ultrafilter* und ${}^\Omega K$ ein angeordneter

5. Laugwitz schreibt *Standard-Anteil.*

Körper, der in allen arithmetischen Eigenschaften mit K übereinstimmt (siehe Abschnitt 2.2.2). Statt ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ schreibt man dann in der Regel ${}^{*}\mathbb{R}$, denn es handelt sich um ein Modell der Robinson'schen Nichtstandardanalysis (siehe Abschnitt 2.3.1).

$[(-1)^n]$ ist dann zum Beispiel entweder gleich 1 oder gleich -1, denn es gehört entweder die Menge aller geraden Indizes oder die Menge aller ungeraden Indizes zu $\mathcal{U}$.

2.2.2. Körpererweiterung mittels Ultrafilter

Bei Beweisen von Aussagen über Omegazahlen wurden immer wieder die Eigenschaften (2.1) und (2.2) von Cof ausgenutzt, also dass mit zwei Mengen auch ihre Schnittmenge zu Cof gehört und dass mit einer Menge A auch die Teilmengen von $\mathbb{N}$, die A umfassen, wieder zu Cof gehören. Außerdem ist Cof nicht leer und enthält auch nicht die leere Menge. Diese Eigenschaften machen Cof zu einem sogenannten *Mengenfilter* (kurz: *Filter*) über $\mathbb{N}$. Man nennt Cof auch den *Fréchet-Filter (über* $\mathbb{N}$*)*.

Allgemeiner definiert man Filter über einer beliebigen nichtleeren Indexmenge J.[6]

Definition 8. *Sei J eine nicht leere Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(J)$ ein nicht leeres System von Teilmengen von J. Dann heißt $\mathcal{F}$ ein* Filter *(über J), wenn gilt:*

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(F2) *Für alle $A, B \in \mathcal{F}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{F}$.*

(F3) *Für alle A, B mit $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B \subseteq J$ ist auch $B \in \mathcal{F}$.*

Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt Ultrafilter*, wenn er keinen echten Oberfilter besitzt, das heißt wenn für alle Filter $\mathcal{G}$ über J gilt:*

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}. \tag{2.9}$$

Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt frei*, wenn gilt:*

$$\bigcap \mathcal{F} = \emptyset. \tag{2.10}$$

Da $\mathcal{F}$ nicht leer ist, folgt aus (F3), dass $J \in \mathcal{F}$ ist. Da der Schnitt über alle kofiniten Teilmengen von $\mathbb{N}$ leer ist, ist Cof ein freier Filter über $\mathbb{N}$. Darüber hinaus gilt sogar, dass ein Filter über $\mathbb{N}$ genau dann frei ist, wenn er Cof umfasst. Cof ist jedoch kein Ultrafilter. Dies folgt unmittelbar aus der folgenden Charakterisierung für Ultrafilter (siehe Landers und Rogge 1994, S.12):

Satz 9. *Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über J. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{F}$ ist ein Ultrafilter*
2. *Für alle $A \subseteq J$ ist $A \in \mathcal{F}$ oder $J \setminus A \in \mathcal{F}$.*

6. Andere Indexmengen als $\mathbb{N}$ werden zum Beispiel eingesetzt, um die Existenz von Enlargements zu beweisen (siehe Abschnitt 2.3.2, speziell den Hinweis zu überabzählbaren Indexmengen am Ende von Abschnitt 2.3.2).

Mit dem Zorn'schen Lemma (einem Satz, der über ZF äquivalent zum Auswahlaxiom ist) zeigt man den folgenden *Tarski'schen Ultrafiltersatz* (vgl. Landers und Rogge 1994, S. 11):

Satz 10. *Sei J eine nichtleere Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter über J. Dann existiert ein $\mathcal{F}$ umfassender Ultrafilter.*

Nach Satz 10 existiert insbesondere ein Cof umfassender – und damit freier – Ultrafilter $\mathcal{U}$ über $\mathbb{N}$. Modifiziert man nun alle Definitionen aus Abschnitt 2.2.1 dahingehend, dass man Cof durch $\mathcal{U}$ ersetzt, so kann folgender Satz bewiesen werden (vgl. z. B. Ebbinghaus u. a. 1992, S. 100–102). Ich setze jetzt den hauptsächlich interessierenden Fall $K = \mathbb{R}$ voraus und schreibe $^*\mathbb{R}$ statt $^{\Omega}K$. Entsprechend sei $\mathfrak{A}$ jetzt die Struktur mit Träger $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{B}$ die Struktur mit Träger $^*\mathbb{R}$.

Satz 11. *Sei φ ein $\mathcal{S}$-Ausdruck mit höchstens den freien Variablen $x_1, \ldots, x_m$. Dann gilt für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in {}^*\mathbb{R}$ mit $\alpha_j = [(a_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}]$ für $j = 1, \ldots, m$:*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi[a_{1,n}, \ldots a_{m,n}]\} \in \mathcal{U} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi[\alpha_1, \ldots, \alpha_m].$$

Beweis. Der Beweis von Satz 7 gilt hier entsprechend, denn es wurden dort nur Filtereigenschaften von Cof verwendet. Bei der Induktion nach dem Aufbau von φ ist lediglich noch der Fall der Negation nachzutragen. Ausdrücke mit $\vee$, $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$ lassen sich äquivalent zu Ausdrücken umformen, die als logische Symbole ausschließlich $\neg, \wedge, \exists$ enthalten. Die Fälle $\wedge$ und $\exists$ waren bereits im Beweis von Satz 7 gezeigt worden.

Sei also φ von der Gestalt $\neg\varphi_1$ und gelte die Behauptung für φ_1. Dann hat man

$$\begin{aligned}
& \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \neg\varphi_1[a_{1,n}, \ldots, a_{m,n}]\} \in \mathcal{U} \\
\Leftrightarrow\ & \{n \in \mathbb{N} \mid \text{Nicht } \mathfrak{A} \models \varphi_1[\ldots]\} \in \mathcal{U} \\
\overset{(!)}{\Leftrightarrow}\ & \{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_1[\ldots]\} \notin \mathcal{U} \\
\Leftrightarrow\ & \text{Nicht } \mathfrak{B} \models \varphi_1[\alpha_1, \ldots, \alpha_m] \\
\Leftrightarrow\ & \mathfrak{B} \models \neg\varphi_1[\alpha_1, \ldots, \alpha_m].
\end{aligned}$$

An der Stelle (!) geht die charakteristische Eigenschaft für Ultrafilter aus Satz 9 ein. □

Das entsprechende Transferprinzip lautet damit:

Satz 12 (Transferprinzip für hyperreelle Zahlen)**.** *Für jeden $\mathcal{S}$-Satz φ gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Der Beweis verläuft genauso, wie bei Satz 8. Wenn $\varphi^{\mathfrak{A}}$ und $\varphi^{\mathfrak{B}}$ den in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ interpretierten Satz φ bezeichnen, lässt sich Satz 12 noch kürzer als $\varphi^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{B}}$ schreiben.

Da in $\mathfrak{A}$ die Konstanten und Relationssymbole aus $\mathcal{S}$ trivial interpretiert werden ($a^{\mathfrak{A}} = a$ bzw. $R^{\mathfrak{A}} = R$), unterscheiden sich der formale Satz φ und seine Interpretation $\varphi^{\mathfrak{A}}$ optisch nur dadurch, dass für letztere die informellere Sprache der Hintergrundmengenlehre benutzt wird (und die Zeichen $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ statt $\rightarrow$ bzw. $\leftrightarrow$). Der Unterschied wird weiter dadurch nivelliert, dass zur Angabe konkreter formaler Sätze in der Regel auch eine informelle Notation zugelassen wird, indem man zum Beispiel $x + y = z$ statt $+xyz$ oder $x < y$ statt $< xy$ schreibt.

$\varphi^{\mathfrak{B}}$ ist gerade der *-Transfer von $\varphi^{\mathfrak{A}}$. Satz 12 ist damit die präzise Fassung des elementaren Erweiterungsprinzips aus Abschnitt 1.3.2.

2.3. Nichtstandardanalysis nach Robinson

2.3.1. Elementare Nichtstandardanalysis

Der originäre Zugang Robinsons zur Nichtstandardanalysis in Robinson 1961 ist modelltheoretisch. Das heißt, die Existenz einer geeigneten Struktur für die Nichtstandardanalysis wird aus Sätzen der Modelltheorie (siehe Abschnitt A.1.4) hergeleitet. Dazu wird eine formale Sprache erster Stufe mit überabzählbar vielen Konstanten und Relationssymbolen gebraucht.[7]

Wie in Abschnitt 2.2.2 enthalte die Symbolmenge $\mathcal{S}$ zu jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante und zu jeder (ein- oder mehrstelligen) Relation R über $\mathbb{R}$ ein Relationssymbol (entsprechender Stellenzahl). Der Einfachheit halber nehme man wieder an, dass die reellen Zahlen bzw. die Relationen selbst die Symbole aus $\mathcal{S}$ sind.

$\mathfrak{A}$ sei die Struktur mit Träger $\mathbb{R}$ und der trivialen Interpretation der Konstanten und Relationssymbole ($a^{\mathfrak{A}} = a$ bzw. $R^{\mathfrak{A}} = R$) und $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ die Menge aller $\mathcal{S}$-Sätze, die in $\mathfrak{A}$ gelten (vgl. Abschnitt A.1).

Φ sei die Ausdrucksmenge $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{x > 1, x > 2, x > 3, \dots\}$. Jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar, zum Beispiel durch eine Interpretation $(\mathfrak{A}, \beta_1)$ mit hinreichend großem $\beta_1(x)$. Nach dem Endlichkeitssatz (Satz 73) gibt es dann auch ein Modell $(\mathfrak{B}, \beta)$ von Φ. Dessen Träger nenne man $^*\mathbb{R}$. Wegen $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent. Mit $\Omega := \beta(x)$ enthält $^*\mathbb{R}$ aber auch ein unendlich großes Element.

Da sich $\mathbb{R}$ durch die Zuordnung $a \mapsto a^{\mathfrak{B}}$ in $^*\mathbb{R}$ einbetten lässt und (wegen $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$)

$$R(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(a_1^{\mathfrak{B}}, \dots, a_n^{\mathfrak{B}})$$

für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ für alle n-stelligen Relationen über $\mathbb{R}$ gilt, kann $\mathfrak{A}$ als Substruktur von $\mathfrak{B}$ bzw. umgekehrt $\mathfrak{B}$ als elementare Erweiterung von $\mathfrak{A}$ aufgefasst werden.

Damit lässt sich das Nichtstandardprogramm, wie in Abschnitt 1.3.2 skizziert, verfolgen, ohne die verwendete Erweiterungsstruktur explizit zu konstruieren, im Unterschied zum Vorgehen in Abschnitt 2.2.2. Allerdings ist zu bemerken, dass die Erweiterungsstruktur auch dort nur zum Teil explizit konstruiert wurde, da der verwendete Ultrafilter nicht explizit angegeben werden konnte.

2.3.2. Nichtstandardanalysis in Superstrukturen

Die Mittel aus Abschnitt 2.3.1 bzw. Abschnitt 2.2.2 reichen für eine elementare Analysis zur Behandlung von Standardfunktionen und -relationen über $\mathbb{R}$ aus, bis zu einem gewis-

7. Der Verzicht auf Funktionssymbole in $\mathcal{S}$ bedeutet keine wesentliche Einschränkung (siehe etwa Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 123-126).

sen Grade sogar zur Behandlung von Nichtstandardfunktionen (siehe Robinson 1961, S. 437f). Sollen Nichtstandardmethoden in einem allgemeineren Kontext (zum Beispiel in Topologie, Funktionalanalysis oder Stochastik) eingesetzt werden, so müssen die Mittel erweitert werden. Insbesondere sind hierzu die Begriffe *interne Menge* und *hyperendliche Menge* erforderlich.

Als Grundbereich werden sogenannte *Superstrukturen* betrachtet. Diese sind analog zur von-Neumann-Hierarchie (vgl. Abschnitt 5.4.2) bis V_ω aufgebaut, allerdings in einer Mengenlehre mit Urelementen. Die unterste Stufe der Hierarchie ist daher nicht die leere Menge, sondern eine unendliche Menge S von Urelementen.[8]

Um eine Nichtstandardtheorie für Superstrukturen aufzubauen, wird eine formale Sprache eingeführt, deren Symbolmenge (neben dem Relationssymbol $\in$) für jedes Element der Superstruktur eine Konstante enthält. Da Funktionen und Relationen über S (sowie über den höheren Hierarchiestufen) bereits in der Superstruktur enthalten (und damit als Konstanten in der Symbolmenge vertreten) sind, kann auf Funktionssymbole und weitere Relationssymbole verzichtet werden.

Der Einbettung der Struktur der reellen Zahlen in die umfassendere Struktur der hyperreellen Zahlen in Abschnitt 2.3.1 entspricht nun die Einbettung der Superstruktur über S in eine umfassendere Superstruktur. Dies führt auf den Begriff der *Nichtstandardeinbettung*. Das Transferprinzip gilt dann nicht mehr für alle Sätze der ersten Stufe, aber zumindest für solche, bei denen die Quantifizierungen durch Konstanten oder Variablen beschränkt sind (*transitiv beschränkte Sätze*).

Die folgende Darstellung orientiert sich an Väth 2007 und teilweise an Landers und Rogge 1994.

Transitiv beschränkte Ausdrücke

Die Symbolmenge $\mathcal{S}$ enthalte das zweistellige Relationssymbol $\in$ und ansonsten ausschließlich Konstanten. Ein Ausdruck heißt *transitiv beschränkt*, wenn er nach folgendem Kalkül aufgebaut ist:

1. Jeder quantorenfreie Ausdruck ist transitiv beschränkt.

2. Ist φ ein transitiv beschränkter Ausdruck, x eine Variable und t eine Konstante oder eine Variable ungleich x,[9] dann sind die Ausdrücke $(\forall x\,(x \in t \to \varphi))$ und $(\exists x\,(x \in t \land \varphi))$ transitiv beschränkt. Man schreibt hierfür auch

$$\forall x \in t\,\varphi \quad \text{bzw.} \quad \exists x \in t\,\varphi$$

3. Sind φ und ψ transitiv beschränkte Ausdrücke, dann auch $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.

8. Die Annahme einer unendlichen Menge von Urelementen ist konsistent relativ zu ZFC (siehe Jech 2003, S. 250).

9. In einer Sprache mit Funktionssymbolen treten auch komplexere Terme auf (siehe zum Beispiel Landers und Rogge 1994, S. 59).

Superstrukturen

Definition 9. *Sei S eine nicht leere Menge von Urelementen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei S_n induktiv definiert durch $S_0 := S$ und $S_{n+1} := S_0 \cup \mathcal{P}(S_n)$. Die Menge*

$$\widehat{S} := \bigcup \{S_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

heißt Superstruktur über S.

$\widehat{S}$ und ebenso jede einzelne Stufe S_n sind transitiv, das heißt für jede Menge $A \in \widehat{S}$ (bzw. S_n) gilt auch $A \subseteq \widehat{S}$ (bzw. S_n). Außerdem gelten $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq \widehat{S}$ und $S_0 \in S_1 \in \cdots \in \widehat{S}$.

$\widehat{S}$ heißt die *Standardwelt.* Ihr wird im Folgenden eine *Nichtstandardwelt* gegenübergestellt, sodass Nichtstandardmethoden anwendbar sind.

In vielen Anwendungen ist $S = \mathbb{R}$ oder $S \supseteq \mathbb{R}$. Statt $S = \mathbb{R}$ würde auch $S = \mathbb{N}_0$ reichen, denn die reellen Zahlen können dann innerhalb von $\widehat{S}$ wie üblich konstruiert werden. Für endliches S enthält $\widehat{S}$ nur endliche Mengen. Dieser Fall ist für die Nichtstandardanalysis nicht interessant, weil die im Folgenden definierten elementaren Einbettungen dann nicht zu einer echten Erweiterung der Standardwelt führen.

Elementare Einbettungen

S und T seien nicht leere Mengen von Urelementen, $\widehat{S}$ und $\widehat{T}$ die jeweiligen Superstrukturen. Die Symbolmenge $\mathcal{S}$ enthalte für jedes $s \in \widehat{S}$ genau eine Konstante (und sonst keine Konstanten). Wir nehmen wieder der Einfachheit halber an, dass s selbst die Konstante zu $s \in \widehat{S}$ ist. $\mathfrak{A} := (\widehat{S}, \mathfrak{a})$ und $\mathfrak{B} := (\widehat{T}, \mathfrak{b})$ seien zwei $\mathcal{S}$-Strukturen, für die gilt:

1. $\mathfrak{a}(s) = s$ für alle $s \in \widehat{S}$,
2. $\mathfrak{a}(\in) = \in_{\widehat{S}}$ und $\mathfrak{b}(\in) = \in_{\widehat{T}}$.

Die zweite Bedingung besagt, dass die Interpretation des Relationssymbols $\in$ in den Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gerade dem Elementprädikat der Hintergrundmengenlehre (eingeschränkt auf den Träger der jeweiligen Struktur) entspricht. Damit ist der formale Ausdruck $a \in b$ (mit den Konstanten a, b) in $\mathfrak{A}$ als $a \in b$ und in $\mathfrak{B}$ als $\mathfrak{b}(a) \in \mathfrak{b}(b)$ zu interpretieren.

Die Vereinbarung, die Elemente aus $\widehat{S}$ selbst als Konstanten der formalen Sprache zu verwenden, hat den Vorteil, dass ein formaler Ausdruck φ aus $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ (wenn man noch $\rightarrow$ durch $\Rightarrow$ und $\leftrightarrow$ durch $\Leftrightarrow$ ersetzt) unmittelbar als seine Interpretation in $\mathfrak{A}$ gelesen werden kann, obwohl natürlich formal ein Unterschied besteht. Beispiel: In dem formalen Ausdruck $1 \in \{1, 2\}$ sind 1 und $\{1, 2\}$ jeweils *eine* Konstante. Die Interpretation in $\mathfrak{A}$ sieht genauso aus, ist aber in der Sprache der Hintergrundmengenlehre geschrieben (mit den definierten Konstantensymbolen 1 und 2 sowie dem definierten Operationssymbol $\{.,.\}$).

Definition 10. *Die Abbildung* $*\colon \widehat{S} \to \widehat{T}, s \mapsto {}^*s := \mathfrak{b}(\mathfrak{a}^{-1}(s))$ *heißt* elementare Einbettung[10] *genau dann, wenn gilt:*

10. In Landers und Rogge 1994 wird stattdessen der Begriff *satztreue Einbettung* verwendet.

1. *Für alle transitiv beschränkten Sätze φ gilt: Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann $\mathfrak{B} \models \varphi$,*

2. $^*S = T$.

Wegen der zweiten Bedingung schreibt man für die Einbettung auch $* : \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$. Da mit φ auch $\neg\varphi$ transitiv beschränkt ist, impliziert die erste Bedingung auch die Umkehrung: Wenn $\mathfrak{B} \models \varphi$, dann $\mathfrak{A} \models \varphi$. Bezeichnen $\varphi^{\widehat{S}}$ und $\varphi^{\widehat{T}}$ die Interpretationen von φ in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so erhält man das folgende Transferprinzip:

Satz 13 (Transferprinzip)**.** *Sei $*\colon \widehat{S} \to \widehat{T}$ eine elementare Einbettung und φ ein transitiv beschränkter Satz. Dann gilt:*

$$\varphi^{\widehat{S}} \Leftrightarrow \varphi^{\widehat{T}}$$

Aus Definition 10 lassen sich diverse Verträglichkeitsaussagen für die Abildung $*$ ableiten, zum Beispiel (vgl. Väth 2007, S. 26 und 29f):

- Für alle $a, b \in \widehat{S}$ gilt:

$$a = b \quad\Leftrightarrow\quad {}^*a = {}^*b, \tag{2.11}$$
$$a \in b \quad\Leftrightarrow\quad {}^*a \in {}^*b, \tag{2.12}$$
$$a \subseteq b \quad\Leftrightarrow\quad {}^*a \subseteq {}^*b. \tag{2.13}$$

- Für alle $a \in \widehat{S}$ gilt:

$$a \in S \quad\Leftrightarrow\quad {}^*a \in {}^*S. \tag{2.14}$$

- Für alle $a_1, \ldots, a_n \in \widehat{S}$ gilt:

$$^*\{a_1, \ldots, a_n\} \quad=\quad \{^*a_1, \ldots, {}^*a_n\}, \tag{2.15}$$
$$^*(a_1, \ldots, a_n) \quad=\quad (^*a_1, \ldots, {}^*a_n). \tag{2.16}$$

- Für alle Mengen $A, B \in \widehat{S}$ gilt:

$$^*(A \cup B) \quad=\quad {}^*A \cup {}^*B, \tag{2.17}$$
$$^*(A \cap B) \quad=\quad {}^*A \cap {}^*B, \tag{2.18}$$
$$^*(A \setminus B) \quad=\quad {}^*A \setminus {}^*B, \tag{2.19}$$
$$^*(A \times B) \quad=\quad {}^*A \times {}^*B. \tag{2.20}$$

  Insbesondere ist $^*\emptyset = \emptyset$.

- Für alle zweistelligen Relationen $R \in \widehat{S}$ gilt:
  1. $\mathrm{Def}(^*R) = {}^*\mathrm{Def}(R)$ und $\mathrm{Bild}(^*R) = {}^*\mathrm{Bild}(R)$.
  2. R ist eine Funktion genau dann, wenn $^*R$ eine Funktion ist.

Hinweis: Für Mengen $A, B \in \widehat{S}$ gilt im Allgemeinen *nicht* $^*\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(^*A)$ und *nicht* $^*(B^A) = {}^*B^{^*A}$ (siehe stattdessen Satz 16).

Nach (2.11) ist $*$ injektiv und bildet nach (2.14) Atome auf Atome und Mengen auf Mengen ab.

Die Bezeichnung ${}^*a$ für das Bild von a unter der Abbildung $*$ hat sich in der Nichtstandardanalysis etabliert. Die bei Abbildungen sonst übliche attributive Schreibweise wäre für Argumente, die Mengen sind, missverständlich, da $*(A)$ zum einen für das Bild der Menge A unter der Abbildung $*$ stünde, aber nach gängiger Konvention ebenfalls für die Menge der Bilder der Elemente von A. In der Nichtstandardanalysis besteht aber gerade ein entscheidender Unterschied zwischen diesen beiden Mengen. Väth bezeichnet letztere mit ${}^\sigma A$, also

$$ {}^\sigma A := \{{}^*a \mid a \in A\}. \tag{2.21}$$

Für alle Mengen $A \in \widehat{S}$ gilt (vgl. Väth 2007, S. 26):

$$ {}^\sigma A \subseteq {}^*A \tag{2.22}$$

Aus (2.15) folgt, dass bei dieser Inklusion die Gleichheit gilt, wenn A endlich ist. Bei unendlichen Mengen kann die Inklusion dagegen echt sein.

Nichtstandardeinbettungen

Die Inklusion ${}^\sigma A = \{{}^*a \mid a \in A\} \subseteq {}^*A$ bedeutet, dass bei einer elementaren Einbettung die Abbildung $*$ auf eine Menge A angewendet, die Elemente von A mitnimmt, aber (bei unendlichen Mengen) eventuell weitere Elemente hinzufügt. Dieses „Aufblasen“[11] ist gerade der charakteristische (und gewünschte) Effekt bei *Nichtstandardeinbettungen.*

Definition 11. *Eine elementare Einbettung* $*\colon \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *heißt* Nichtstandardeinbettung*, wenn für alle unendlichen Mengen* $A \in \widehat{S}$ *gilt:* ${}^\sigma A \neq {}^*A$*.*

Es zeigt sich, dass eine elementare Einbettung bereits dann eine Nichtstandardeinbettung ist, wenn für mindestens eine unendliche Menge $A \in \widehat{S}$ gilt: ${}^\sigma A \neq {}^*A$ (vgl. Väth 2007, S. 40).

Standardelemente und Standardmengen

Die Elemente von Bild$(*)$ bei einer elementaren Einbettung $* : \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ heißen die *Standardelemente* von $\widehat{{}^*S}$. Wenn es sich nicht um Atome, sondern um Mengen handelt, werden sie auch *Standardmengen* genannt.

Aus den Verträglichkeitsaussagen (2.17) bis (2.20) folgt, dass mit Standardmengen A, B auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ Standardmengen sind. Allgemein gilt:

Satz 14 (Standard-Definitionsprinzip)**.** *Eine Menge* $A \in \widehat{{}^*S}$ *ist eine Standardmenge genau dann, wenn es eine Standardmenge* B*, einen transitiv beschränkten Ausdruck* φ *mit den einzigen freien Variablen* $x, x_1, \dots, x_n$ *(*$n = 0$ *nicht ausgeschlossen) sowie Standardelemente* $b_1, \dots, b_n$ *gibt, sodass gilt:*

$$ A = \{b \in B \mid \varphi^{\widehat{{}^*S}}[b, b_1, \dots, b_n]\}$$

11. Väth schreibt: It is a good idea to think of $*$ as a “blow-up-functor” (Väth 2007, S. 24).

(Väth 2007, S. 28).

Kurz gesagt: Man erhält Standardmengen durch Aussonderung aus Standardmengen mit transitiv beschränkten Standardausdrücken (also in $\widehat{{}^*S}$ interpretierten $\mathcal{S}$-Ausdrücken, die Standardelemente als Parameter enthalten dürfen).

Interne Elemente und interne Mengen

Definition 12. *Sei* $*\colon \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *eine elementare Einbettung. Die Elemente der Standardmengen heißen* intern. *Die Menge* $\mathcal{I}$ *aller internen Elemente von* $\widehat{{}^*S}$ *heißt die* Nichtstandardwelt.

$$\mathcal{I} := \bigcup \{{}^*A \mid A \in \widehat{S} \setminus S\}.$$

Alle Elemente von $\widehat{{}^*S}$*, die nicht intern sind, heißen* extern.

$\mathcal{I}$ ist eine transitive Teilmenge von $\widehat{{}^*S}$, und es gilt:

$$\mathcal{I} = \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^*S_n$$

(Väth 2007, S. 36).

Satz 15 (Internes Definitionsprinzip)**.** *Eine Menge* $A \in \widehat{{}^*S}$ *ist intern genau dann, wenn es eine interne Menge* B*, einen transitiv beschränkten Ausdruck* φ *mit den einzigen freien Variablen* $x, x_1, \ldots, x_n$ *(*$n = 0$ *nicht ausgeschlossen) sowie interne Elemente* $b_1, \ldots, b_n$ *gibt, sodass gilt:*

$$A = \{b \in B \mid \varphi^{\widehat{{}^*S}}[b, b_1, \ldots, b_n]\}$$

(Väth 2007, S. 37).

Kurz gesagt: Man erhält interne Mengen durch Aussonderung aus internen Mengen mit transitiv beschränkten internen Ausdrücken (also in $\widehat{{}^*S}$ interpretierten $\mathcal{S}$-Ausdrücken, die interne Elemente als Parameter enthalten dürfen).

Aus dem internen Definitionsprinzip folgen analoge Verträglichkeitsaussagen wie für Standardmengen, insbesondere dass für interne Mengen A, B auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ interne Mengen sind.

Satz 16. *Sei* $*\colon \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ *eine elementare Einbettung. Dann gilt für alle Mengen* $A \in \widehat{S}$

$${}^*\mathcal{P}(A) = \{M \subseteq {}^*A \mid M \textit{ ist intern}\}$$

und für alle Mengen $A, B \in \widehat{S}$

$${}^*(B^A) = \{f \in {}^*B^{{}^*A} \mid f \textit{ ist intern}\}$$

(Väth 2007, S. 40).

Eine in $\mathcal{L}^S$ formulierbare Aussage, die in der Standardwelt für alle Teilmengen einer Menge A oder für alle Funktionen von A nach B gilt, gilt in der Nichtstandardwelt für alle internen Teilmengen von A bzw. für alle internen Funktionen von A nach B, denn Sätze der Form $\forall M \in \mathcal{P}(A) \ldots$ bzw. $\forall f \in B^A \ldots$ sind transitiv beschränkt (mit den Konstanten $\mathcal{P}(A)$ bzw. B^A) und daher mit dem Transferprinzip in die Nichtstandardwelt übertragbar.

In der Nichtstandardeinbettung $\widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{{}^*\mathbb{R}}$ gelten zum Beispiel das Wohlordnungsprinzip und das Supremumsprinzip für interne Mengen:

- Jede nicht leere interne Teilmenge von ${}^*\mathbb{N}$ enthält eine kleinste Zahl.
- Jede nicht leere nach oben beschränkte interne Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Die eingebetteten Mengen ${}^\sigma\mathbb{N}, {}^\sigma\mathbb{R}$ und ihre Komplemente in ${}^*\mathbb{N}$ bzw. ${}^*\mathbb{R}$ sind dagegen extern. Für sie gelten die oben angegebenen Aussagen nicht. So enthält etwa die nicht leere Teilmenge ${}^*\mathbb{N} \setminus {}^\sigma\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$ keine kleinste Zahl, und die nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge ${}^\sigma\mathbb{R} \subseteq {}^*\mathbb{R}$ besitzt kein Supremum.

Allgemein gilt für alle Nichtstandardeinbettungen, dass ${}^\sigma A$ für alle unendlichen Mengen A extern ist (siehe Väth 2007, S. 41).

Hyperendliche Mengen

Definition 13. *Eine Menge* $A \in \widehat{{}^*S}$ *heißt* *-endlich *oder* hyperendlich *genau dann, wenn es* $n \in {}^*\mathbb{N}_0$ *und eine interne bijektive Abbildung* $f\colon \{k \in {}^*\mathbb{N}_0 \mid 1 \leq k \leq n\} \to A$ *gibt. In diesem Fall definiert man* ${}^\# A := n$*, ansonsten schreibt man* ${}^\# A = \infty$*.*

${}^\# A$ ist wohldefiniert, denn für eine *-endliche Menge A ist das n aus Definition 13 eindeutig bestimmt (siehe Väth 2007, S. 78). Statt $\{k \in {}^*\mathbb{N}_0 \mid 1 \leq k \leq n\}$ schreibt man auch suggestiver $\{1, \ldots, n\}$. Man beachte dabei jedoch, dass diese Menge im Fall $n \gg 1$ überabzählbar ist.

*-endliche Mengen verhalten sich formal wie endliche Mengen. Zum Beispiel hat jede *-endliche Menge hyperreeller Zahlen stets ein kleinstes und ein größtes Element, und für beliebige *-endliche Mengen A, B gilt (vgl. Väth 2007, S. 82 oder Landers und Rogge 1994, S. 143):[12]

- ${}^\#(A \times B) = {}^\# A \cdot {}^\# B$,
- ${}^\#(A \cup B) = {}^\# A + {}^\# B$, falls $A \cap B = \emptyset$,
- ${}^\#({}^*\mathcal{P}(A)) = 2^{{}^\# A}$.

Des Weiteren können *-endliche Summen und Produkte hyperreeller Zahlen definiert werden. Sei dazu $\mathbb{R}^{<\mathbb{N}}$ die Menge aller endlichen Folgen in $\mathbb{R}$ und $\Sigma : \mathbb{R}^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ die gewöhnliche Summenfunktion. Dann enthält ${}^*(\mathbb{R}^{<\mathbb{N}})$ alle *-endliche Folgen f :

12. Landers und Rogge schreiben $|A|$ statt ${}^\# A$. Ich übernehme die Bezeichnung ${}^\# A$ von Väth.

$\{1, \ldots, h\} \to {}^*\mathbb{R}$, $h \in {}^*\mathbb{N}$, und man definiert $\sum_{n=1}^{h} f(n) := {}^*\Sigma(f)$. (vgl. Väth 2007, S. 84). Für Produkte geht man analog vor.

*-endliche Summen spielen für allgemeinere Integraldefinitionen eine entscheidende Rolle (vgl. Landers und Rogge 1994, S. 156-171).

Das Riemann'sche Integral kann als Standardteil einer *-endlichen Riemann'schen Summe definiert werden (vgl. Laugwitz 1978, S. 139):

Definition 14. *Eine* Feineinteilung *des Intervalls* $[a, b]$ *($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) ist eine *-endliche Folge* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *hyperreller Zahlen mit* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ *und* $dx_k = x_k - x_{k-1} \approx 0$ *für* $k = 1, \ldots, n$.

Eine Riemann'sche Summe *zu einer Feineinteilung von* $[a, b]$ *und einer Standardfunktion* f *mit* $\mathrm{Def}(f) \supseteq [a, b]$ *ist*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, dx_k \quad \text{mit } \xi_k \in {}^*\mathbb{R}, x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k.$$

Wenn alle Riemann'schen Summen zu Feineinteilungen von $[a, b]$ *denselben Standardteil haben, so heißt diese reelle Zahl das bestimmte Integral von* f *zwischen* a *und* b*. Man schreibt dann:*

$$\int_a^b f(x)\, dx := \mathrm{st}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, dx_k\right).$$

Analysis für interne Funktionen

In der Einleitung wurde die Deltafunktion erwähnt, als ein Beispiel für den Einsatz von Nichtstandardfunktionen (also internen Funktionen, die keine Standardfunktionen sind). Die Deltafunktion soll abseits von 0 verschwinden aber insgesamt das Integral 1 haben, was für eine reelle Funktion nicht möglich ist. Man kann sich die Deltafunktion im Reellen näherungsweise als eine Funktion der Form

$$\delta_n(x) := \frac{n}{\pi(1 + x^2 n^2)}$$

mit sehr großem n vorstellen. Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, sogar beliebig oft differenzierbar und hat das Integral 1. Je größer n ist, desto stärker konzentriert sich die Fläche unter dem Graphen bei 0.

In der Nichtstandardanalysis kann man $n \gg 1$ wählen und erhält so eine Funktion, die außerhalb einer infinitesimalen Umgebung von 0 nur infinitesimale Werte annimmt und an der Stelle 0 den unbeschränkten Wert n.

Es leuchtet unmittelbar ein, dass eine Funktion, die innerhalb eines infinitesimalen Intervalls von infinitesimalen bis auf endliche oder sogar unbeschränkte Funktionswerte anwächst, nicht in dem Sinne stetig sein kann, dass aus $x \approx x_0$ stets $f(x) \approx f(x_0)$ folgt. Ebenfalls wird man nicht erwarten können, dass der Differentialquotient an einer Stelle x_0 unabhängig von dx ist oder dass die Riemann'sche Summe zwischen zwei Stellen unabhängig von der gewählten Feineinteilung ist. Es stellt sich daher die Frage, in welcher Weise sich Begriffe der reellen Analysis (kurz: $\mathbb{R}$-Begriffe), wie Limes, Stetigkeit, Ableitung, Integral, auf interne hyperreelle Funktionen verallgemeinern lassen.

Eine naheliegende Möglichkeit besteht darin, die klassischen Epsilon-Definitionen auf den hyperreellen Fall zu übertragen. Dies führt zum Beispiel zu folgenden Definitionen:

- $a \in {}^*\mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes* der internen hyperreellen Folge (a_n), wenn zu jedem hyperreellen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in {}^*\mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \in {}^*\mathbb{N}$ gilt:
$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$
- Ein interne hyperreelle Funktion f heißt *stetig*[13] in x_0, wenn $x_0 \in \mathrm{Def}(f)$ und wenn es zu jedem hyperreellen $\varepsilon > 0$ ein hyperreelles $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in \mathrm{Def}(f)$ gilt:
$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$
- $m \in {}^*\mathbb{R}$ heißt *Ableitung* der internen hyperreellen Funktion f an der Stelle x, wenn x ein Häufungspunkt von $\mathrm{Def}(f)$ ist (wenn also jede ε-Umgebung von x, $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, ein Element von $\mathrm{Def}(f)\setminus\{x\}$ enthält) und wenn zu jedem hyperreellen $\varepsilon > 0$ ein hyperreelles $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $h \in {}^*\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x + h \in \mathrm{Def}(f)$ und $|h| < \delta$ gilt:
$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - m \right| < \varepsilon.$$
- $s \in {}^*\mathbb{R}$ heißt *Integral* der internen hyperreellen Funktion f zwischen a und b, wenn $a, b \in {}^*\mathbb{R}$, $a < b$, $[a, b] \subseteq \mathrm{Def}(f)$ und wenn zu jedem hyperreellen $\varepsilon > 0$ ein hyperreelles $\delta > 0$ existiert, sodass für jede Riemann'sche Summe der Feinheit $< \delta$ gilt: $|r - s| < \varepsilon$ (wobei r der Wert der Riemann'schen Summe ist).

Die Begriffe *konvergent*, *differenzierbar*, *integrierbar* werden wie üblich über die Existenz des Grenzwerts, der Ableitung bzw. des Integrals definiert. Alle klassischen Sätze der Analysis, zum Beispiel der Zwischenwertsatz, die Mittelwertsätze oder der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, lassen sich mit dem Transferprinzip unmittelbar auf den hyperreellen Fall für interne Funktionen übertragen. Insbesondere ist die oben definierte Funktion $\delta_n(x)$, mit $n \gg 1$, auf ganz ${}^*\mathbb{R}$ stetig, beliebig oft differenzierbar und hat das Integral 1.

Eine andere Möglichkeit, die $\mathbb{R}$-Begriffe auf interne Funktionen zu verallgemeinern, besteht darin, die Abbildung $*$ auf eine den jeweiligen $\mathbb{R}$-Begriff definierende Menge anzuwenden und auszunutzen, dass auf diese Weise die internen Elemente mitgeliefert werden. Es ist dann kein Rückgriff auf die Epsilon-Definitionen erforderlich.

Die $\mathbb{R}$-Begriffe Limes, Stetigkeit, Ableitung, Integral seien mittels der Nichtstandarddefinitionen aus Abschnitt 1.3.2 für reelle Funktionen definiert. Die Verallgemeinerung auf interne Funktionen kann dann zum Beispiel folgendermaßen vorgenommen werden:

13. Laugwitz verwendet hierfür, einem Vorschlag von Detlef Spalt folgend, den Begriff *feinstetig* (siehe Laugwitz 1986, S. 132). Landers und Rogge verwenden den Begriff **-stetig* (siehe Landers und Rogge 1994, S. 178.)

- $\tilde{a} \in {}^*\mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* oder *Limes* der internen hyperreellen Folge $(\tilde{f}(n))_{n\in{}^*\mathbb{N}}$, wenn gilt:
$$(\tilde{f}, \tilde{a}) \in {}^*\{(f, a) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f(n) = a\}.$$

- Eine interne hyperreelle Funktion $\tilde{f}$ heißt *stetig* in $\tilde{x}_0$, wenn gilt:
$$(\tilde{f}, \tilde{x}_0) \in {}^*\{(f, x_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid f \text{ Funktion}, f \text{ stetig in } x_0\}.$$

- $\tilde{m} \in {}^*\mathbb{R}$ heißt *Ableitung* der internen hyperreellen Funktion $\tilde{f}$ an der Stelle $\tilde{x}$, wenn gilt:
$$(\tilde{f}, \tilde{x}, \tilde{m}) \in {}^*\{(f, x, m) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f \text{ Funktion}, f'(x) = m\}.$$

- $\tilde{s} \in {}^*\mathbb{R}$ heißt *Integral* der internen hyperreellen Funktion $\tilde{f}$ zwischen $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$, wenn gilt:
$$(\tilde{f}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{s}) \in {}^*\{(f, a, b, s) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f \text{ Funktion}, \int_a^b f(x)\, dx = s\}.$$

Auch mit diesen Definitionen (zur Unterscheidung von den weiter oben angegebenen Epsilon-Definitionen kurz *-Definitionen genannt) lassen sich alle Sätze der klassischen Analysis mit dem Transferprinzip auf den internen hyperreellen Fall übertragen. Insbesondere sind die *-Definitionen äquivalent zu den Epsilon-Definitionen.

Bisweilen werden für die auf interne Funktionen verallgemeinerten $\mathbb{R}$-Begriffe neue Namen vergeben, wie *-Stetigkeit, *-Ableitung, *-Integral (siehe zum Beispiel Landers und Rogge 1994[14]). Es sind aber keine Missverständnisse zu befürchten, wenn die alten Begriffe weiterverwendet werden. Dies schließt an die bisher geübte Praxis an, bei der Fortsetzung von Funktionen und Relationen den Stern in der Bezeichnung wegzulassen.

Ausblick

In Abschnitt 1.3.2 wurde am Beispiel des Zwischenwertsatzes gezeigt, wie kontinuierliche Probleme mit Nichtstandardmethoden im Prinzip wie endliche behandelt werden können. Der Nichtstandardbeweis war möglich, weil die Menge der infinitesimalen Teilintervalle, die die überabzählbar vielen reellen Zahlen des interessierenden Intervalls voneinander isolieren, *-endlich ist, also mit hypernatürlichen Zahlen von 1 bis n ($n \gg 1$) gezählt werden können. ${}^*\mathbb{N}$ muss daher ebenfalls überabzählbar sein.

Andererseits folgt aus den Rechenregeln für Kardinalzahlen, dass mit der Konstruktion aus Abschnitt 2.2.2 ${}^*\mathbb{R}$ nicht mächtiger sein kann als $\mathbb{R}$. Daher sind ${}^*\mathbb{N}, {}^*\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ gleich mächtig.

Es ist plausibel, dass dies für weitergehende Anwendungen in Topologie, Funktionalanalysis oder Stochastik nicht mehr ausreicht, da die dort untersuchten Objekte sich im Allgemeinen auf einer höheren Stufe der Superstruktur befinden. Um jede Menge A der

14. Landers und Rogge führen die *-Ableitung und das *-Integral über die *-Bilder der linearen Funktionale ∂ und $\int$ ein.

Superstruktur durch eine *-endliche Menge einfangen zu können, muss es hinreichend viele hypernatürliche Zahlen geben. Diese Anforderung führt auf den Begriff der *starken Nichtstandardeinbettung* (auch: *Enlargement*). Noch reichhaltigere Nichtstandardwelten, die für manche Bereiche der Topologie und insbesondere der Stochastik relevant sind, erhält man mit *$\widehat{S}$-kompakten (auch: polysaturierten) Nichtstandardeinbettungen* (siehe Landers und Rogge 1994, S. 316).

Definition 15. *Sei $* : \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ eine elementare Einbettung mit $\mathbb{R} \subseteq S$. $*$ heißt eine* starke Nichtstandardeinbettung *oder ein* Enlargement, *falls für jedes System $\mathcal{C} \subseteq \widehat{S} \setminus S$ mit nicht leeren endlichen Durchschnitten gilt:*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} {}^*C \neq \emptyset.$$

(vgl. Landers und Rogge 1994, S. 150)

Satz 17 zeigt, wie starke Nichtstandardeinbettungen mit endlich erfüllbaren Relationen und *-endlichen Mengen zusammenhängen (vgl. Väth 2007, S. 107f).[15]

Definition 16. *Sei $R \in \widehat{S}$ und $R \neq \emptyset$ eine binäre Relation. R heißt* endlich erfüllbar *(im Englischen:* concurrent*) genau dann, wenn zu jeder endlichen Teilmenge $E \subseteq \mathrm{Def}(R)$ ein $y \in \mathrm{Bild}(R)$ existiert, sodass $(x, y) \in R$ für alle $x \in E$ gilt.*

Satz 17. *Sei $*\colon \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ eine elementare Einbettung. Dann sind äquivalent:*

1. *$*$ ist eine starke Nichtstandardeinbettung.*
2. *Für jede endlich erfüllbare Relation $R \in \widehat{S}$ existiert ein $y \in {}^*\mathrm{Bild}(R)$, sodass $({}^*x, y) \in {}^*R$ für alle $x \in \mathrm{Def}(R)$ gilt.*
3. *Für jede Menge $A \in \widehat{S}$ gibt es eine *-endliche Menge H mit*

$$\{{}^*a \mid a \in A\} \subseteq H \subseteq {}^*A.$$

Mit einer starken Nichtstandardeinbettung lassen sich zum Beispiel stetige Wahrscheinlichkeitsinhalte (W-Inhalte) bis auf infinitesimale Abweichung durch *-endliche Summen darstellen und Wahrscheinlichkeiten gewissermaßen wie im Endlichen auszählen (Landers und Rogge 1994, S. 169):

Satz 18. *Sei $*\colon \widehat{S} \to \widehat{{}^*S}$ eine starke Nichtstandardeinbettung. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über $\Omega \in \widehat{S} \setminus S$[16] und P ein stetiger W-Inhalt auf $\mathcal{A}$. Dann existiert eine nicht leere *-endliche Menge $H \subseteq {}^*\Omega$, sodass für jede P-integrierbare Funktion f gilt:*

$$\int f \, dP \approx \frac{1}{|H|} \sum_{\omega \in H} {}^*f(\omega).$$

15. Bei Väth wird dieser Satz für κ-Enlargements formuliert. Bei Enlargements entfällt die Abhängigkeit von κ (vgl. Väth 2007, S. 103).
16. Das heißt: $(\Omega \in \mathcal{A})$ und $(A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A})$ und $(A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A})$.

Zur Existenz von Nichtstandardeinbettungen

In diesem Abschnitt skizziere ich den Beweis zur Existenz von Nichtstandardeinbettungen (vgl. Väth 2007, S. 51-56).[17]

Wie in den vorherigen Abschnitten sei S eine nicht leere Menge von Urelementen und $\widehat{S}$ die zugehörige Superstruktur. Die Symbolmenge $\mathcal{S}$ enthalte das zweistellige Relationssymbol $\in$ und zu jedem $s \in \widehat{S}$ eine Konstante. Wir nehmen wieder der Einfachheit halber an, dass s selbst diese Konstante ist. $\mathfrak{A} = (\widehat{S}, \mathfrak{a})$ sei die $\mathcal{S}$-Struktur mit $\mathfrak{a}(s) = s$ für alle Konstanten s und $\mathfrak{a}(\in) = \in_{\widehat{S}}$.

Es ist zu zeigen, dass es eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathfrak{B} = (\widehat{T}, \mathfrak{b})$ gibt, sodass die Abbildung $*\colon \widehat{S} \to \widehat{T}, s \mapsto {}^*s := \mathfrak{b}(\mathfrak{a}^{-1}(s))$ eine elementare Einbettung ist, dass also $\mathfrak{b}(\in) = \in_{\widehat{T}}$, ${}^*S = T$ und $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ für alle transitiv beschränkten Sätze φ gilt.

Dies geschieht in zwei Schritten. Zunächst wird mit der Ultrapotenzmethode (analog zum Vorgehen in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2) eine zu $\mathfrak{A}$ elementar äquivalente Struktur $\mathfrak{C} = (C, \mathfrak{c})$ definiert. Diese leistet allerdings noch nicht das Gewünschte, da die Interpretation von $\in$ in $\mathfrak{C}$ gemäß der Ultrapotenzmethode komponentenweise über Repräsentanten aus $\widehat{S}^J$ (modulo Ultrafilter) definiert ist und damit nicht der gewöhnlichen mengentheoretischen Elementrelation entspricht. Es gilt also nicht $\mathfrak{c}(\in) = \in_C$. Auf der Basis von $\mathfrak{C}$ wird daher im zweiten Schritt die Zielstruktur $\mathfrak{B}$ so konstruiert, dass $\in$ im Sinne der Hintergrundmengenlehre interpretiert wird und zumindest die transitiv beschränkten Sätze übertragbar bleiben.

Schritt 1: Sei J eine unendliche Menge und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf J. In der Menge $\widehat{S}^J$ sei die Äquivalenzrelation $\sim$ definiert durch

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad \{j \in J \mid f(j) = g(j)\} \in \mathcal{U}.$$

$[f]$ bezeichne wieder die Äquivalenzklasse von f bezüglich $\sim$.

Es sei $C := \widehat{S}^J/\sim$. Die Interpretation der Konstanten aus $\mathcal{S}$ sei definiert durch

$$s^C := [f_{=s}] \quad \text{für alle } s \in \widehat{S}.$$

$f_{=s}$ bezeichne dabei die konstante Funktion mit Funktionswert s, also $f_{=s}(j) := s$, für alle $j \in J$.

Die Interpretation des Relationssymbols $\in$ sei definiert durch

$$[f] \in^C [g] \quad :\Leftrightarrow \quad \{j \in J \mid f(j) \in g(j)\} \in \mathcal{U}$$

Die Wohldefiniertheit ergibt sich aus den Filtereigenschaften von $\mathcal{U}$. Beim Beweis des folgenden Satzes von Łos und Luxemburg geht auch die Eigenschaft von $\mathcal{U}$ ein, ein Ultrafilter zu sein. Der Beweis verläuft analog zu Beweis von Satz 11.

Satz 19. *Für jeden $\mathcal{S}$-Satz φ gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{C} \models \varphi$$

(vgl. Väth 2007, S. 49).

17. Die Bezeichnungen für Strukturen und Interpretationen knüpfen an die bisher verwendeten an und weichen zum Teil von denen bei Väth ab.

Schritt 2: Parallel zu den Stufen S_n der Superstruktur $\widehat{S}$ werden Teilmengen $\mathcal{J}_n \subseteq C$ definiert, deren Vereinigung $\mathcal{J}$ mittels einer „Übersetzungsfunktion“ F bijektiv auf eine Teilmenge $\mathcal{I}$ der Superstruktur $\widehat{T}$ (mit $T := \mathcal{J}_0$) abgebildet wird. Die abstrakte Relation $\in^C$ in $\mathcal{J}$ wird dabei gerade in die gewöhnliche mengentheoretische Elementrelation übersetzt. Das heißt:

$$F([g]) = \begin{cases} [g], & \text{falls } [g] \in \mathcal{J}_0; \\ \\ \{F([f]) \mid [f] \in^C [g]\}, & \text{falls } [g] \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_0. \end{cases} \tag{2.23}$$

Genauer definiert man dazu:

$$\mathcal{J}_n := \{[f] \mid f\colon J \to S_n\}, \quad \mathcal{J} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{J}_n \quad \text{und} \quad T := \mathcal{J}_0.$$

Über T erhebt sich die Superstruktur $\widehat{T}$ mit den Stufen T_n (und $T = T_0$).

Beginnend mit ${}^*S_0 := T_0$ und $F_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{J}_0}$ definiert man dann für $n \geq 1$ induktiv Mengen ${}^*S_n \subseteq T_n$ und Funktionen F_n, sodass

1. $F_n\colon \mathcal{J}_n \to {}^*S_n$ bijektiv ist,
2. $F_n([g]) = \{F_n([f]) \mid [f] \in^C [g]\}$ gilt und
3. F_{n-1} die Einschränkung von F_n auf $\mathcal{I}_{n-1}$ ist.

Damit ist die Funktion $F\colon \mathcal{J} \to \widehat{T}$ durch $F([g]) := F_n([g])$, für $[g] \in \mathcal{J}_n$, wohldefiniert, und es gilt (2.23). Mit $\mathcal{I} := \bigcup_{n=0}^{\infty} {}^*S_n$ ist die Abbildung $F : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ bijektiv. Die Surjektivität gilt nach Konstruktion. Beim Beweis der Injektivität geht Satz 19 ein. Aus ihm folgt, dass für alle $[f], [g] \in C \setminus \mathcal{J}_0$ gilt:

$$\{[h] \in C \mid [h] \in^C [f]\} = \{[h] \in C \mid [h] \in^C [g]\} \quad \Rightarrow \quad [f] = [g]. \tag{2.24}$$

Die Zielstruktur $\mathfrak{B} = (\widehat{T}, \mathfrak{b})$ sei definiert durch

1. $\mathfrak{b}(s) = F(s^C) = F([f_{=s}])$ für alle Konstanten (also für alle $s \in \widehat{S}$),
2. $\mathfrak{b}(\in) = \in_{\widehat{T}}$.

Per Induktion nach dem Aufbau von φ zeigt man den folgenden Satz, wobei der Induktionsanfang im Wesentlichen durch (2.23) gegeben ist und die Induktionsschlüsse ähnlich wie im Beweis von Satz 11 verlaufen:

Satz 20. *Sei φ ein transitiv beschränkter Ausdruck mit den einzigen freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ($n = 0$ zugelassen) und seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{J}$. Dann gilt:*

$$\mathfrak{C} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Für $n = 0$ hat man: Ein transitiv beschränkter Satz mit Konstanten aus $\mathcal{J}$ gilt in $\mathfrak{C}$ genau dann, wenn er in $\mathfrak{B}$ gilt. Zusammen mit Satz 19 ergibt sich daraus das Transferprinzip $\varphi^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{B}}$ für transitiv beschränkte Sätze φ. Also ist die Abbildung $* : \widehat{S} \to \widehat{T}$ eine elementare Einbettung. Damit $*$ eine Nichtstandardeinbettung ist, ist noch eine zusätzliche Bedingung an den verwendeten Ultrafilter $\mathcal{U}$ zu stellen. Es gilt:

Satz 21. *Die Abbildung* $*\colon \widehat{S} \to \widehat{T}, s \mapsto {}^*s := \mathfrak{b}(\mathfrak{a}^{-1}(s))$ *ist eine elementare Einbettung. Für die Einschränkungen von* $*$ *auf die Stufen* S_n *gilt jeweils* $*\colon S_n \xrightarrow{\text{inj}} {}^*S_n$.

$*$ *ist eine Nichtstandardeinbettung genau dann, wenn* $\mathcal{U}$ δ*-unvollständig ist (vgl. Väth 2007, S. 54).*

Dabei heißt ein Filter $\mathcal{F}$ δ-unvollständig, wenn es eine abzählbare Teilmenge $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ gibt mit $\bigcap \mathcal{F}_0 \notin \mathcal{F}$.

Für Ultrafilter auf einer abzählbaren Indexmenge J (zum Beispiel $J = \mathbb{N}$), sind die Eigenschaften *frei* und *δ-unvollständig* äquivalent (siehe Väth 2007, S. 47f).

Ultrafilter auf überabzählbaren Indexmengen J werden zum Beispiel benutzt, um die Existenz starker und $\widehat{S}$-kompakter Nichtstandardeinbettungen zu beweisen (siehe zum Beispiel Landers und Rogge 1994, S. 410-428).[18]

2.4. Interne Mengenlehre

Nach der Nichtstandarderweiterung von Superstrukturen liegt die Frage nach einer Nichtstandarderweiterung des gesamten Mengenuniversums nahe. Dies ist das Motiv der axiomatischen Zugänge wie der Internen Mengenlehre.

Die Grundidee ist, die Sprache der Mengenlehre um ein neues (also undefiniertes) Prädikat namens „standard“ anzureichern und zu postulieren, dass dieses zwar auf alle klassisch (also durch $\in$-Ausdrücke) definierbaren Mengen, aber nicht auf alle Mengen zutrifft. Genaueres regeln Axiome. Das Mengenuniversum erhält dadurch eine zusätzliche Qualität, die für die klassische Mengenlehre unsichtbar ist. Dies wird manchmal verglichen mit einem Übergang vom Schwarzweiß-Sehen zum Farben-Sehen. Die folgende Darstellung orientiert sich an Nelson 1977.

2.4.1. Erweiterung der Sprache

Die Symbolmenge der ZFC-Mengenlehre enthält nur ein einziges Symbol, das zweistellige Relationssymbol $\in$. Dieses wird nicht definiert, sondern gehört sozusagen zur Grundausstattung der Sprache der Mengenlehre. Alle weiteren in der Mengenlehre gebräuchlichen Symbole werden in ZFC durch $\in$-Ausdrücke definiert. Sie sind *definierte Symbole.*

In der Internen Mengenlehre wird der Symbolmenge von ZFC ein neues *undefiniertes Symbol*, das einstellige Relationssymbol s („standard“) hinzugefügt.[19] Das Axiomensys-

18. Ich referenziere hier Landers und Rogge, weil Väth eine andere Methode benutzt, um die Existenz starker und $\widehat{S}$-kompakter Nichtstandardeinbettungen zu konstruieren.

19. Es hat sich eingebürgert, „standard“ grammatikalisch wie ein nicht deklinierbares Adjektiv zu verwenden. Man sagt also zum Beispiel „Für alle standard x gib es ein standard y …“. Nelson hat das

tem ZFC wird um drei zusätzliche Axiomenschemata ergänzt, die den Umgang mit dem neuen Prädikat s regeln.

Ausdrücke, die das Prädikat s direkt oder indirekt (über definierte Prädikate) enthalten, heißen *extern*, alle übrigen Ausdrücke heißen *intern*. Die internen Ausdrücke sind also genau diejenigen, die auch in der ursprünglichen Sprache von ZFC formuliert werden können.

Die Axiome von ZFC werden in IST unverändert übernommen. Insbesondere bedeutet dies, dass die Axiomenschemata der Aussonderung und der Ersetzung nur für $\in$-Ausdrücke, also nur für interne Ausdrücke gelten, mit der zunächst befremdlichen Konsequenz, dass externe Ausdrücke im Allgemeinen nicht mengenbildend sind, dass also für eine beliebige Menge A und einen externen Ausdruck φ im Allgemeinen nicht auf die Existenz der Menge $\{x \in A \mid \varphi\}$ geschlossen werden kann. Insbesondere ist es im Allgemeinen nicht möglich, die Standardelemente einer Menge auszusondern, also die Menge $\{x \in A \mid \mathrm{s}(x)\}$ zu bilden. Nelson nennt eine Aussonderung mit externen Prädikaten eine *illegale Mengenbildung* (*illegal set formation*, Nelson 1977, S. 1165).

Auf der anderen Seite bedeutet die unveränderte Übernahme der ZFC-Axiome, dass der gesamte Bestand der vertrauten ZFC-Mathematik erhalten bleibt. Alle Definitionen bleiben unverändert, zum Beispiel die Definitionen der Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder die Definition des Prädikats *endlich*. Alle in ZFC bewiesenen Sätze bleiben unverändert gültig, zum Beispiel das Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$, das Supremumsprinzip für $\mathbb{R}$ oder der Satz, dass Teilmengen endlicher Mengen wieder endlich sind.

Darüber hinaus kann gezeigt werden, dass IST eine *konservative Erweiterung* von ZFC ist (vgl. Nelson 1977, S. 1192-1197).[20] Das bedeutet: Jeder interne Satz, der in IST beweisbar ist, ist bereits in ZFC beweisbar. IST kann also als ein optional einsetzbares Zusatzwerkzeug für die klassische Mathematik angesehen werden, ohne dass die damit erzielbaren Ergebnisse an zusätzliche Bedingungen geknüpft sind. Dies unterscheidet IST zum Beispiel von ZFC-Erweiterungen, die die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen fordern. Aus der Konservativität folgt insbesondere, dass IST konsistent relativ zu ZFC ist.

2.4.2. Die zusätzlichen Axiome der Internen Mengenlehre

Die zusätzlichen Axiomenschemata in IST heißen Idealisierung (I), Standardisierung (S) und Transfer (T). Das Akronym IST (für englisch *Internal Set Theory*) kann also ebenfalls als Abkürzung für die zusätzlichen Axiomenschemata gedeutet werden.

Es ist üblich (vgl. Nelson 1977 oder Robert 1988), in IST die logischen Symbole der Hintergrundmengenlehre zu verwenden, also $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ statt $\rightarrow, \leftrightarrow$. Zur Formulierung der Axiome werden außerdem durch s relativierte Quantoren verwendet. $\forall^{\mathrm{s}} x\, \varphi$ steht abkürzend für $\forall x\, (\mathrm{s}(x) \Rightarrow \varphi)$ und $\exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi$ für $\exists x\, (\mathrm{s}(x) \wedge \varphi)$.

$\mathrm{fin}(z)$ sei die Abkürzung für eine in ZFC übliche Formalisierung der Eigenschaft „z ist endlich“ (zum Beispiel eine Formalisierung von: Jede injektive Abbildung von z nach z

---

neue Prädikat mit st abgekürzt. Dieses Kürzel ist allerdings bereits für *Standardteil* vergeben, weshalb ich hier s wähle.

20. Nelson gibt an, dass dieses Resultat auf William C. Powell zurückgeht.

ist auch surjektiv). $\mathrm{fin}(z)$ ist damit ein interner Ausdruck. Entsprechend stehe $\forall^{\mathrm{s\,fin}} x\, \varphi$ abkürzend für $\forall^{\mathrm{s}} x\, (\mathrm{fin}(x) \Rightarrow \varphi)$ und $\exists^{\mathrm{s\,fin}} x\, \varphi$ für $\exists^{\mathrm{s}} x\, (\mathrm{fin}(x) \wedge \varphi)$.

Transfer

Das Schema der Transferaxiome drückt aus, dass jede intern formulierbare Eigenschaft, die für alle Standardmengen gilt, bereits für alle Mengen gilt. Weiterhin sorgt es dafür, dass alle in ZFC definierbaren Dinge standard sind.

Schema der Transferaxiome (T). Sei φ ein interner Ausdruck mit höchstens den freien Variablen $x, t_1, \ldots, t_k$. Dann gilt:

$$\forall^{\mathrm{s}} t_1 \ldots \forall^{\mathrm{s}} t_k\, (\forall^{\mathrm{s}} x\, \varphi(x, t_1, \ldots, t_k) \Rightarrow \forall x\, \varphi(x, t_1, \ldots, t_k)) \tag{2.25}$$

$t_1, \ldots, t_k$ heißen in diesem Zusammenhang *Standardparameter* von φ, da der Laufbereich dieser Variablen auf Standardobjekte eingeschränkt ist.

Trivialerweise gilt in (2.25) auch die Richtung „$\Leftarrow$“. Wendet man T auf $\neg\varphi$ an, erhält man als äquivalente Variante T’:

$$\forall^{\mathrm{s}} t_1 \ldots \forall^{\mathrm{s}} t_k\, (\exists x\, \varphi(x, t_1, \ldots, t_k) \Rightarrow \exists^{\mathrm{s}} x\, \varphi(x, t_1, \ldots, t_k)) \tag{2.26}$$

Die Gegenrichtung ist wieder trivial.

Insbesondere folgt aus T’: Wenn es genau ein x mit $\varphi(x, t_1, \ldots, t_k)$ gibt, dann muss dieses x standard sein. Daher ist alles, was durch interne Ausdrücke definiert ist, zum Beispiel die reelle Zahl π, die Mengen $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, die Funktionen $\exp, \sin, \wp$ standard. Ebenfalls sind für Standardmengen A und B auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ und $\mathcal{P}(A)$ wieder Standardmengen, denn all diese Mengen sind durch interne Ausdrücke (mit den Standardparametern A, B) definiert. Ein Paar (x, y) ist genau dann standard, wenn x und y standard sind, denn sowohl die Paarbildung als auch die Zerlegung des Paars in seine Komponenten ist jeweils durch einen internen Ausdruck definiert.

Für einen internen Ausdruck φ sei φ^{s} der Ausdruck, der dadurch entsteht, dass man alle vorkommenden Quantoren $\forall$ und $\exists$ jeweils durch die relativierten Quantoren $\forall^{\mathrm{s}}$ bzw. $\exists^{\mathrm{s}}$ ersetzt. Man nennt φ^{s} die *Relativierung von φ auf Standardmengen.* Durch hinreichend oft wiederholte Anwendung von T bzw. T’ (wobei man von außen nach innen arbeitet) erhält man (vgl. Nelson 1977, S. 1166):

Satz 22. *Für jeden internen Ausdruck $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ gilt:*

$$\forall^{\mathrm{s}} t_1 \ldots \forall^{\mathrm{s}} t_n\, (\varphi^{\mathrm{s}}(t_1, \ldots, t_n) \Leftrightarrow \varphi(t_1, \ldots, t_n)) \tag{2.27}$$

Insbesondere hat man für jeden internen Satz φ (das heißt im Fall $n = 0$): $\varphi^{\mathrm{s}} \Leftrightarrow \varphi$.

In dieser Form wird das Transferaxiom zum Beispiel in Kanovei und Reeken 2004 (S. 84) angegeben.

Mit T und dem Extensionalitätsaxiom folgt:

Satz 23. *Zwei Standardmengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Standardelemente enthalten.*

Um das Transferaxiom auf eine Aussage anwenden zu können, sind zwei Dinge sicherzustellen (vgl. Nelson 1977, S 1167):

1. Die Aussage ist intern.
2. Alle Parameter haben Standardwerte.

Die Verletzung dieser Regel nennt Nelson einen *illegalen Transfer* (ibid.).

In der Praxis ist es häufig so, dass die interne Aussage, die transferiert werden soll, noch definierte Konstanten enthält, von denen man weiß, dass sie standard sind. In diesem Fall ist der Transfer legal, denn Axiom T ist auf Ausdrücke mit Standardparametern anwendbar.

Idealisierung

Das Schema der Idealisierungsaxiome sorgt dafür, dass es überhaupt Nichtstandardmengen gibt und dass ausreichend große endliche Mengen für alle intendierten Anwendungen zur Verfügung stehen.

Schema der Idealisierungsaxiome (I). Sei $\varphi(x, y)$ ein interner Ausdruck mit den freien Variablen x und y (und eventuell weiteren freien Variablen). Dann gilt:

$$\forall^{\mathrm{s\,fin}} z\, \exists x\, \forall y \in z\, \varphi(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \forall^{\mathrm{s}} y\, \varphi(x, y) \tag{2.28}$$

Mit der Sprechweise „x dominiert y“ für $\varphi(x, y)$ (man stelle sich zum Beispiel die Größerrelation $x > y$ vor) besagt das Idealsierungsaxiom, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. Für jede endliche Standardmenge z gibt es ein x, das alle $y \in z$ dominiert.
2. Es gibt ein x, das alle standard y dominiert.

Für die meisten Anwendungen von I ist die Richtung 1. $\Rightarrow$ 2. relevant. Die umgekehrte Richtung wird für die folgende Charakterisierung endlicher Standardmengen gebraucht (vgl. Nelson 1977, S. 1167):

Satz 24. *Sei A eine Menge. Dann gilt: Jedes Element von A ist standard genau dann, wenn A eine endliche Standardmenge ist.*

Aus Satz 24 folgt, dass jede unendliche Menge Nichtstandardelemente enthält.

In Abschnitt 2.3.2 wurde der Begriff *starke Nichtstandardeinbettung* (bzw. *Enlargement*) eingeführt, der es gestattete, jede Menge der Standardwelt in eine *-endliche Obermenge der Nichtstandardwelt einzubetten. Charakteristisch für ein Enlargement war, dass jede endlich erfüllbare Relation der Standardwelt in der Nichtstandardwelt auf ihrem gesamten Definitionsbereich erfüllbar ist (vgl. Satz 17). I (in der Richtung „$\Rightarrow$“)

ist die axiomatische Entsprechung dieser Charakterisierung, jetzt für Prädikate, die auf dem gesamten Mengenuniversum definiert sind.[21] Den endlichen Mengen der Standardwelt $\widehat{S}$ entsprechen in IST die endlichen Standardmengen, den *-endlichen Mengen der Nichtstandardwelt entsprechen in IST die endlichen Mengen). Dementsprechend folgt aus I, dass es „sehr große“ endliche Mengen gibt.

Satz 25. *Es gibt eine endliche Menge, die alle Standardmengen als Elemente enthält.*

Zum Beweis wende man I auf den internen Ausdruck $(\mathrm{fin}(x) \wedge y \in x)$ an (vgl. Nelson 1977, S. 1167).

Eine weitere für die Analysis wichtige Folgerung aus I ist die Existenz unendlich großer Zahlen in $\mathbb{N}$ (und damit auch in $\mathbb{R}$).

Satz 26. *Es gibt ein $h \in \mathbb{N}$ mit $h > n$ für alle standard $n \in \mathbb{N}$ (Landers und Rogge 1994, S. 438).*

Zum Beweis wende man I auf den internen Ausdruck $(x \in \mathbb{N} \wedge (y \in \mathbb{N} \Rightarrow x > y))$ an. Da jede durch eine Einsensumme $1 + \cdots + 1$ darstellbare Zahl standard ist, ist h größer als jede dieser Zahlen und damit größer als $1, 2, 3, \ldots$. Die natürliche Zahl h ist also in diesem Sinne *unendlich groß*. An dieser Stelle sei bereits darauf hingewiesen, dass man bei der Verwendung des Begriffs *endlich* auf die Unterscheidung verschiedener Sprachebenen zu achten hat. Eine Einsensumme (bzw. ihr definierender $\in$-Ausdruck) muss im metasprachlichen Sinne endlich sein. Dieses metasprachliche *endlich* darf nicht mit dem objektsprachlichen *endlich* verwechselt werden, das in der Mengenlehre definiert wird. Dies gilt für ZFC und IST gleichermaßen und wird ausführlicher in Kapitel 5 besprochen.

Standardisierung

Das Schema der Standardisierungsaxiome ist eine gewisse Kompensation für die Nichtanwendbarket des Aussonderungsaxioms für externe Ausdrücke. Grob gesprochen besagt es, dass eine Aussonderung mit externen Prädikaten möglich ist, wenn man dabei nur auf Standardelemente achtet.

Schema der Standardisierungsaxiome (S). Sei $\varphi(z)$ ein (interner oder externer) Ausdruck mit der freien Variablen z (und eventuell weiteren freien Variablen). Dann gilt:

$$\forall^{\mathrm{s}} x \exists^{\mathrm{s}} y \forall^{\mathrm{s}} z \, (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z)) \tag{2.29}$$

Der Aufbau von S und dem Schema der Aussonderungsaxiome (vgl. (A.13) im Anhang A.2.1) ist vollkommen identisch, abgesehen davon, dass die Quantoren in S durch s relativiert sind.

Umgangssprachlich sagt S aus: Zu jeder Standardmenge x gibt es eine Standardmenge y, deren Standardelemente genau die Standardelemente von x sind, die φ erfüllen. Die

21. Die Position der beiden Parameter von φ ist in I gegenüber Definition 16 vertauscht, was aber nur eine Frage der Konvention ist.

Standardmenge y ist nach Satz 23 eindeutig bestimmt und wird mit ${}^{\mathrm{S}}\{z \in x \mid \varphi(z)\}$ bezeichnet.

Es ist wichtig zu beachten, dass Axiom S nur Aussagen über Standardelemente macht: Die Standardelemente von y sind genau die Standardelemente von x, die φ erfüllen. Es kann also Nichtstandardelemente von y geben, die φ nicht erfüllen, ebenso wie Nichtstandardelemente, die φ erfüllen, aber nicht in y sind.

Der folgende Satz zeigt, dass man mit externen Prädikaten eine Standardfunktion definieren kann, solange Standardargumenten Standardfunktionswerte zugeordnet werden. Dies ist zum Beispiel wichtig, um die für Standardargumente definierten Ableitungen einer differenzierbaren Funktion zu einer Ableitungsfunktion fortzusetzen.

Satz 27. *Seien X und Y Standardmengen und $\varphi(x, y)$ ein zweistelliges Prädikat, das jedem standard $x \in X$ genau ein standard $y \in Y$ zuordnet. Dann gibt es genau eine Standardfunktion $f : X \to Y$, sodass für alle standard $x \in X$ und für alle standard $y \in Y$ gilt:*

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x, y) \tag{2.30}$$

Beweis. Man setze $f := {}^{\mathrm{S}}\{(x, y) \in X \times Y \mid \varphi(x, y)\}$ und schließe mit T (vgl. Nelson 1977, S. 1167).[22] Genauer: Nach Definition sind die Standardelemente von f genau die standard $(x, y) \in X \times Y$, für die $\varphi(x, y)$ gilt. Dabei ist (x, y) genau dann standard, wenn x und y standard sind. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem standard $x \in X$ genau ein standard $y \in Y$ mit $\varphi(x, y)$. Daher gibt es zu jedem standard $x \in X$ genau ein standard $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$. Dies ist eine interne Aussage mit Standardparameter f. Per Transfer erhält man: Zu jedem $x \in X$ existiert genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$. Also ist f eine Funktion von X nach Y und erfüllt (nach Konstruktion) (2.30) für alle standard x, y. Nach Satz 23 ist f eindeutig bestimmt. □

2.4.3. Elementare Analysis in der Internen Mengenlehre

In der Robinson'schen Nichtstandardanalysis sind die reellen Zahlen die Standardzahlen und die mittels Körpererweiterung ${}^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ hinzugefügten Zahlen die Nichtstandardzahlen. In der Internen Mengenlehre wird die Unterscheidung zwischen Standardzahlen und Nichtstandardzahlen dagegen innerhalb der reellen Zahlen durch das neue Prädikat *standard* getroffen. Dementsprechend werden sich die Nichtstandarddefinitionen von Begriffen der Analysis dahingehend von den Definitionen in 1.3.2 unterscheiden, dass die Standardzahlen die Rolle der reellen Zahlen übernehmen und die reellen Zahlen die Rolle der hyperreellen Zahlen.

Statt der Notwendigkeit, Begriffe wie *Stetigkeit*, *Ableitung* etc. vom Reellen (Standardfall) auf interne Funktionen im Hyperreellen zu verallgemeinern, ergibt sich in IST die Notwendigkeit, den Standardfall auf den reellen Fall zu verallgemeinern. Den internen Mengen der Robinson'schen Nichtstandardanalysis entsprechen in IST die Mengen schlechthin. Die externen Mengen der Robinson'schen Nichtstandardanalysis haben in IST keine Entsprechung.

22. Der Satz wird dort in einer etwas allgemeineren Version bewiesen.

Standardteil

Die Begriffe *beschränkt, unbeschränkt, infinitesimal* werden mit dem Prädikat *standard* folgendermaßen definiert (und sind demzufolge *externe* Prädikate) (vgl. Nelson 1977, S. 1168):

Definition 17. *Sei $x \in \mathbb{R}$. x heißt*

- beschränkt *genau dann, wenn es ein standard $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $|x| \leq y$,*
- unbeschränkt *(kurz: $|x| \gg 1$), wenn x nicht beschränkt ist,*
- infinitesimal *(kurz: $x \approx 0$), wenn für alle standard $y \in \mathbb{R}, y > 0$ gilt: $|x| < y$.*

Nach Satz 26 enthält $\mathbb{N}$ unbeschränkte Zahlen. Ihre Kehrwerte sind infinitesimal. Somit enthält $\mathbb{R}$ sowohl unbeschränkte als auch infinitesimale Zahlen (ungleich 0).

Mit Axiom S folgt, dass es zu jedem beschränkten $x \in \mathbb{R}$ genau eine infinitesimal benachbarte Standardzahl in $\mathbb{R}$ gibt. Diese wird wieder der Standardteil von x genannt und mit $\mathrm{st}(x)$ bezeichnet.[23] $\mathrm{st}(x)$ kann als Supremum der Menge ${}^{S}\{t \in \mathbb{R} \mid t \leq x\}$ definiert werden (vgl. Nelson 1977, S. 1169).

Stetigkeit und S-Stetigkeit

Überträgt man die Nichtstandarddefinitionen für Limes, Stetigkeit, Ableitung Integral aus Abschnitt 1.3.2 in die Interne Mengenlehre, so hat man erst einmal nur Definitionen für Standardfunktionen und Standardzahlen. Lässt man die Bedingung *standard* fallen, so sind die Definitionen nicht mehr äquivalent zu den klassischen Definitionen. Daher wählt man für die so definierten Begriffe Namen mit dem Präfix S, also zum Beispiel *S-Limes*, *S-Stetigkeit*, *S-Ableitung* und *S-Integral*. Eine Verallgemeinerung auf Begriffe, die zu den klassisch definierten äquivalent sind, geschieht dann mittels Standardisierung. Wir zeigen dies am Beispiel der Stetigkeit.

Eine Übertragung von Definition 4 ohne die Voraussetzung, dass f und a standard sind, führt zu:

Definition 18. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$. f ist* S-stetig in *a genau dann, wenn $a \in D$ und wenn für alle $x \in D$ gilt:*

$$x \approx a \Rightarrow f(x) \approx f(a). \tag{2.31}$$

Definition 18 ist äquivalent zur klassischen ε-δ-Definition der Stetigkeit, wenn f und a standard sind (siehe Robert 1988, S. 52). Eine (nach klassischer Definition) stetige Funktion erfüllt (2.31) jedoch im Allgemeinen nicht, wenn a eine Nichtstandardzahl oder f eine Nichtstandardfunktion ist. So ist zum Beispiel für die stetige Funktion $x \mapsto x^2$ an Stellen $x \gg 1$ zwar $x \approx x + \frac{1}{x}$, aber $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \not\approx x^2$. Und für die stetige Nichtstandardfunktion $x \mapsto x^n$, mit $n \gg 1$, ist zwar $1 \approx 1 + \frac{1}{n}$, aber $(1 + \frac{1}{n})^n \approx e \not\approx 1$.

23. In der Literatur sind auch andere Bezeichnungen zu finden, zum Beispiel x^* (Robert 1988) oder ${}^{\circ}x$ (Diener und Diener 1995).

S-Stetigkeit und klassische Stetigkeit sind also im Allgemeinen nicht äquivalent, sondern nur für Standardfunktionen und Standardargumente. Zwar ist jede konkret angebbare Funktion und jedes konkret angebbare Argument standard. Man möchte aber natürlich eine Nichtstandarddefinition der Stetigkeit, die zur klassischen Definition äquivalent ist und die Nichtstandardfunktionen und -argumente einschließt. Dies gelingt mittels Standardisierung.

Definition 19. *Sei $\tilde{f}$ eine reelle Funktion und $\tilde{a} \in \mathbb{R}$. Dann ist $\tilde{f}$* stetig in *$\tilde{a}$ genau dann, wenn gilt:*

$$(\tilde{f}, \tilde{a}) \in {}^{\mathrm{S}}\{(f, a) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid f \textit{ Funktion}, f \textit{ S-stetig in } a\}.$$

Die allgemeine Stetigkeit ist also implizit über die S-Stetigkeit definiert. In Beweisen über stetige Funktionen kann man sich zunächst auf den Standardfall (also f und a standard) zurückziehen (und daher die einfachere S-Stetigkeit benutzen), um dann per Transfer auf den allgemeinen Fall zu schließen.

Hat man zum Beispiel für alle standard f und standard a gezeigt

$$f \text{ stetig in } a \text{ (im Sinne von Definition 19)} \quad \Leftrightarrow \quad f\ \varepsilon\text{-}\delta\text{-stetig in } a, \tag{2.32}$$

so kann man per Transfer schließen, dass die Äquivalenz für alle reellen Funktionen und für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Dies mag auf den ersten Blick überraschen, weil Axiom T nur für interne Ausdrücke anwendbar ist, in der Definition 19 aber das externe Prädikat *S-stetig* verwendet wird. Axiom T ist aber dennoch anwendbar, weil ein transferfähiger Ausdruck Standardparameter enthalten darf und ${}^{\mathrm{S}}\{(f, a) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid f \text{ Funktion}, f \text{ S-stetig in } a\}$ eine Standardmenge ist.

Weiterer Aufbau der Analysis

Nach dem gleichen Schema kann man gleichmäßige Stetigkeit, Limes, Ableitung, Integral implizit über die entsprechenden S-Begriffe definieren und die üblichen Sätze der elementaren Analysis beweisen, indem man jeweils den Standardfall betrachtet und dann per Transfer auf den allgemeinen Fall schließt (siehe zum Beispiel Robert 1988).

2.5. Andere axiomatische Zugänge

2.5.1. Beschränkte Mengenlehre

Eine Variante der Internen Mengenlehre ist die *Beschränkte Mengenlehre* (*Bounded Set Theory*, kurz BST), die von Kanovei eingeführt worden ist (Kanovei 1991, S. 16).

Zu BST gehören die ZFC-Axiome[24] sowie die Axiomenschemata *Transfer* und *Standardisierung* (wie in IST). Hinzu kommt das Axiom der *Beschränktheit* (das besagt, dass alle Mengen Element einer Standardmenge sind) und das Schema der *beschränkten Idealisierung* (anstelle des Schemas *Idealisierung* in IST).

24. In anderen Quellen (Kanovei und Reeken 2004, Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014) werden für BST statt der ZFC-Axiome die auf Standardmengen relativierten ZFC-Axiome gefordert. Dies ist jedoch unerheblich, da jedes ZFC-Axiom φ ein interner Satz ist und nach dem Transferaxiom daher $\varphi^{\mathrm{s}} \Leftrightarrow \varphi$ gilt (vgl. Satz 22).

Beschränktheit:

$$\forall x \exists^{\mathrm{s}} y \, x \in y. \tag{2.33}$$

Beschränkte Idealisierung:

$$\forall^{\mathrm{s}} u \quad [\forall^{\mathrm{s\,fin}} z \subseteq u \, \exists x \, \forall y \in z \, \varphi(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \, \forall^{\mathrm{s}} y \in u \, \varphi(x,y)] \tag{2.34}$$

für jeden internen Ausdruck $\varphi(x,y)$ mit den freien Variablen x und y (und eventuell weiteren freien Variablen).

Der Unterschied zum Idealsiserungsschema in IST (vgl. (2.28)) besteht darin, dass die (durch die Äquivalenz ausgedrückte) Idealisierung nicht für das ganze Universum, sondern nur beschränkt (auf eine beliebige Standardmenge u) gefordert wird. Dementsprechend gilt Satz 25 nur in einer auf Standardmengen beschränkten Form: Zu jeder Standardmenge u gibt es eine endliche Menge, die alle Standardelemente von u enthält, was für die Praxis in der Regel ausreicht. Für die folgenden Aussagen zu BST siehe Kanovei und Reeken 2004, S. 131-137).

Wie IST ist auch BST eine konservative Erweiterung von ZFC (das heißt, jeder $\in$-Satz, der in BST beweisbar ist, ist bereits in ZFC beweisbar). Aus der Konservativität folgt die Äquikonsistenz von BST und ZFC.

Darüber hinaus hat BST eine weitere Eigenschaft, die bei Kanovei *Standardkern-Interpretierbarkeit* (*standard core interpretability*) heißt und die unter anderem dafür sorgt, dass jedes Modell von ZFC zu einem Modell von BST erweitert werden kann.

Die Standardkern-Interpretierbarkeit von BST bedeutet: Es gibt eine Interpretation[25] von BST in ZFC, sodass (unter dieser Interpretation) das ZFC-Universum $\mathbf{V}$ gerade der Klasse der Standardmengen in BST (dem *Standardkern*) entspricht. Genauer: Es gibt eine $\{\in, \mathrm{s}\}$-Struktur ${}^*\mathbf{v} = ({}^*\mathbf{V}, {}^*\!\in, {}^*\mathrm{s})$ und eine $\in$-Einbettung $*\colon \mathbf{V} \to {}^*\mathbf{V}$ (eine injektive Abbildung, mit ${}^*x \, {}^*\!\in {}^*y \Leftrightarrow x \in y$ für alle $x, y \in \mathbf{V}$), sodass gilt

$$\mathbb{S}^{({}^*\mathbf{v})} := \{z \in {}^*\mathbf{V} \mid {}^*\mathrm{s}(z)\} = \{{}^*x \mid x \in \mathbf{V}\}.$$

$\mathbb{S}^{({}^*\mathbf{v})}$ heißt der *Standardkern* von ${}^*\mathbf{v}$. Informell ausgedrückt hat man damit innerhalb von ZFC eine Erweiterung des ZFC-Universums beschrieben, deren Standardkern das Ausgangsuniversum ist. Kanovei nennt standardkern-interpretierbare Theorien „realistisch“ (wobei er selbst den Begriff stets in Anführungszeichen setzt).

Im Gegensatz zu BST ist IST nicht standardkern-interpretierbar. Es gibt Modelle von ZFC, die nicht zu einem Modell von IST erweitert werden können. Eine ausführliche Diskussion der Vorteile von BST gegenüber IST findet man in Kanovei und Reeken 2004.

25. Der Begriff *Interpretation* wird hier in einem allgemeineren Sinne als im Anhang A.1 gebraucht. Er bedeutet hier, grob gesprochen, ein „Modell“, dessen Träger eine Klasse ist. Dementsprechend sind die Begriffe *Struktur*, *Abbildung*, *injektiv* etc. in diesem Zusammenhang auf Klassen bezogen zu verstehen. Zur Definition der Klasse $\mathbf{V}$ siehe auch Abschnitt 5.4.2.

2.5.2. Externe Mengenlehren

In internen Mengenlehren wie IST oder BST sind externe Prädikate im Allgemeinen nicht mengenbildend. Daher bilden zum Beispiel die Standardelemente von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ keine Menge. Externe Mengenlehren erlauben dagegen auch die Bildung solcher externen Mengen und sind in dieser Hinsicht näher am modelltheoretischen Zugang. Auf der anderen Seite sind sie komplizierter zu beschreiben und haben andere Einschränkungen bezüglich Mengenbildung, zum Beispiel der Art, dass die Potenzmenge einer Menge oder die Menge aller Abbildungen von einer Menge in eine andere im Allgemeinen nicht gebildet werden können. Ich stelle das Beispiel der *Hrbaček-Mengenlehre* (*Hrbaček Set Theory*, kurz HST) vor und beziehe mich dabei auf Kanovei und Reeken 2004, S. 12-21.

In HST spielen drei Klassen eine herausgehobene Rolle

- $\mathbb{S} := \{x \mid \mathrm{s}(x)\}$ (die Klasse der Standardmengen),
- $\mathbb{I} := \{x \mid \mathrm{int}(x)\}$ (die Klasse der internen Mengen) mit

$$\mathrm{int}(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists^{\mathrm{s}} y \, x \in y$$

- $\mathbb{WF} := \{x \mid \mathrm{wf}(x)\}$ (die Klasse der fundierten Mengen) mit

$$\mathrm{wf}(x) \quad :\Leftrightarrow \quad (x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in x \, x \cap y = \emptyset)$$

Wie sich herausstellt, interpretieren alle drei Klassen ZFC, das heißt in allen drei Klassen gelten die Axiome von ZFC (relativiert auf die jeweilige Klasse). Das Diskursuniversum von HST wird mit $\mathbb{H}$ bezeichnet.

Die Axiome von HST sind:

- Die Axiome Ext, Paar, $\bigcup$-Ax, Inf aus ZFC (siehe Anhang A.2.1).
- Das Schema der Aussonderungsaxiome

$$\forall X \exists Y \forall x \, (x \in Y \Leftrightarrow x \in X \wedge \varphi(x)) \tag{2.35}$$

  für jeden $\{\in, \mathrm{s}\}$-Ausdruck $\varphi(x)$ (eventuell mit weiteren Parametern).
- Das Schema der Kollektionsaxiome[26]

$$\forall X \exists Y \forall x \in X \, (\exists y \, \varphi(x,y) \Rightarrow \exists y \in Y \, \varphi(x,y)) \tag{2.36}$$

  für jeden $\{\in, \mathrm{s}\}$-Ausdruck $\varphi(x,y)$ (eventuell mit weiteren Parametern).
- φ^{s} für jedes Axiom φ aus ZFC,
- Transfer: Für jeden $\in$-Ausdruck $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ohne weitere Parameter gilt:

$$\forall^{\mathrm{s}} x_1 \ldots \forall^{\mathrm{s}} x_n \quad (\varphi(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{s}} \Leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{int}}) \tag{2.37}$$

26. Aus dem Schema der Kollektionsaxiome folgt das Schema der Ersetzungsaxiome.

- Transitivität von $\mathbb{I}$:
$$\forall^{\mathrm{int}} x\, \forall y\, (y \in x \Rightarrow \mathrm{int}(y)) \tag{2.38}$$

- Fundierung über $\mathbb{I}$: Für alle nicht leeren Mengen X gibt es $x \in X$ mit $x \cap X \subseteq \mathbb{I}$ (Fundierung würde dagegen $x \cap X = \emptyset$ fordern).

- Standardisierung:
$$\forall X \exists^{\mathrm{s}} Y\; X \cap \mathbb{S} = Y \cap \mathbb{S} \tag{2.39}$$
Die Menge Y ist (wegen Transfer und Ext) eindeutig bestimmt und wird mit ${}^{\mathrm{S}}X$ bezeichnet.

Bemerkungen:

- Anders als in IST gelten in HST die Axiomenschemata der Aussonderung und der Kollektion (und damit auch der Ersetzung) nicht nur für $\in$-Ausdrücke, sondern sogar für $\{\in, \mathrm{s}\}$-Ausdrücke.

- Die ZFC-Axiome Pot, Fund und AC gelten in HST nicht allgemein (dies würde zu Widersprüchen führen), sondern nur relativiert auf Standardmengen.

- Aufgrund der Fundierung über $\mathbb{I}$ bilden die internen Mengen in gewisser Weise ein Fundament des HST-Universums. Die Klasse $\mathbb{I}$ selbst ist nicht fundiert, das heißt es gibt nichtleere Mengen $X \subseteq \mathbb{I}$ ohne $\in$-minimales Element (Beispiel: Die Menge der nichtstandard $\mathbb{I}$-natürlichen Zahlen).

- Es gilt $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{I}$. Sowohl $\mathbb{WF} \cap \mathbb{S}$ als auch $\mathbb{WF} \cap \mathbb{I}$ ist die Klasse der erblich endlichen Mengen.

Wie BST ist auch HST standardkern-interpretierbar. Das heißt, $\mathbb{S}$ interpretiert ZFC. Wegen (2.37) interpretiert auch $\mathbb{I}$ ZFC. HST erlaubt noch eine weitere Interpretation von ZFC. Man kann nämlich per $\in$-Induktion durch ${}^*w := {}^{\mathrm{S}}\{{}^*u \mid u \in w\}$ einen $\in$-Isomorphismus $*$ von $\mathbb{WF}$ auf $\mathbb{S}$ definieren. Daher interpretiert auch $\mathbb{WF}$ ZFC in HST.

Der folgende Satz fasst die wesentlichen Ergebnisse zusammen (siehe Kanovei und Reeken 2004, S. 17).

Satz 28. *Die Klassen $\mathbb{WF}$ und $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{I}$ haben folgende Eigenschaften:*

1. $\in\restriction \mathbb{S}$ *ist fundiert.*[27] $\mathbb{S}$ *interpretiert ZFC.*

2. $\in\restriction \mathbb{WF}$ *ist fundiert.* $\mathbb{WF}$ *ist transitiv,* $\subseteq$*-vollständig*[28] *(es gilt sogar $X \subseteq \mathbb{WF} \Rightarrow X \in \mathbb{WF}$) und interpretiert ZFC. Die Abbildung $*$ ist ein $\in$-Isomorphismus von* $\mathbb{WF}$ *auf* $\mathbb{S}$

27. Die Einschränkung $\in\restriction X$ des Prädikats $\in$ auf eine Menge oder Klasse X heißt fundiert, wenn jede nichtleere Teilmenge von X ein $\in$-minimales Element enthält.

28. Eine Menge oder Klasse X heißt $\subseteq$-vollständig, wenn jede Teilmenge von X auch ein Element von X ist.

3. *$\mathbb{I}$ ist transitiv und interpretiert ZFC. Die Abbildung $*$ ist eine $\in$-elementare Einbettung von $\mathbb{WF}$ in $\mathbb{I}$. Für jeden $\in$-Satz $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (ohne weitere Parameter) gilt folgender *-Transfer:*

$$\forall^{\mathrm{wf}} x_1 \ldots \forall^{\mathrm{wf}} x_n \quad (\varphi(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{wf}} \Leftrightarrow \varphi({}^*x_1, \ldots, {}^*x_n)^{\mathrm{int}})$$

Die Menge ω (auch als $\mathbb{N}_0$ bezeichnet[29]) wird (wie in ZFC) als kleinste Limeszahl definiert (vgl. Abschnitt 5.2.2). Ihre Elemente heißen *natürliche Zahlen*. Eine Menge X heißt *endlich*, wenn es eine Bijektion von $n\,(:= \{0, \ldots, n-1\})$ auf X gibt für ein $n \in \omega$. ${}^*\omega$ (das Bild von ω unter der Abbildung $*$) heißt die Menge der **-natürlichen Zahlen*. Eine Menge X heißt **-endlich* oder *hyperendlich*, wenn es eine interne Bijektion von $n\,(:= \{0, \ldots, n-1\})$ auf X gibt für ein $n \in {}^*\omega$ (vgl. Kanovei und Reeken 2004, S. 26). Der weitere Aufbau der Analysis gestaltet sich ähnlich wie im modelltheoretischen Zugang.

2.5.3. Relative Mengenlehren

In relativen Mengenlehren ist das Prädikat *standard* nicht einstellig, sondern zweistellig. Eine Menge x ist also nicht per se standard oder nicht, sondern gegebenenfalls im Verhältnis zu einer anderen Menge y. Diese Idee geht auf Péraire zurück, der ausgehend von Nelsons IST eine *Relative Internal Set Theory* (RIST) definiert hat (siehe Péraire 1992). Weitere relative Mengenlehren stammen von Hrbaček (Hrbaček 2009, Hrbaček 2010).

Die hier vorgestellte *Relative Bounded Set Theory* (RBST) von Hrbaček ist die relative Variante von BST und Grundlage des Lehrbuchs „Analysis with ultrasmall numbers“ (Hrbaček, Lessmann und O’Donovan 2014), dessen Anhang die folgenden Ausführungen zur RBST entnommen sind. Das zweistellige Prädikat *standard* wird dort mit dem Symbol $\sqsubseteq$ bezeichnet und erfüllt die folgenden Axiome der

Relativierung:

$$\forall p\, p \sqsubseteq p \tag{2.40}$$
$$\forall p \forall q \forall r\, (p \sqsubseteq q \wedge q \sqsubseteq r \Rightarrow p \sqsubseteq r) \tag{2.41}$$
$$\forall p \forall q\, (p \sqsubseteq q \vee q \sqsubseteq p) \tag{2.42}$$
$$\forall p\, \emptyset \sqsubseteq p \tag{2.43}$$
$$\forall p \exists q\, (p \sqsubseteq q \wedge \neg q \sqsubseteq p) \tag{2.44}$$

$\sqsubseteq$ hat damit die Eigenschaften einer totalen Quasiordnung[30] auf dem Universum mit $\emptyset$ als einem kleinsten Element und ohne ein größtes Element.

Außer in der kumulativen Hierarchie (vgl. Abschnitt 5.4.2) ist das Universum von RBST also noch in einer weiteren Dimension hierarchisch organisiert, nämlich in „Ebenen

29. In Kanovei und Reeken 2004 steht $\mathbb{N}$, da dort die Null zu $\mathbb{N}$ gehört.
30. Im Gegensatz zu einer Ordnung muss eine Quasiordnung nicht antisymmetrisch sein, das heißt aus $\sqsubseteq$ und $\sqsupseteq$ folgt nicht $=$.

der Standardheit" (*levels of standardness*) oder – was im Deutschen etwas schöner klingt – in Ebenen der Beobachtbarkeit. In Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014 wird $p \sqsubseteq q$ als „p ist beobachtbar relativ zu q" gelesen. Man kann sich diese Hierarchie so veranschaulichen, dass auf jeder Ebene die Mengen der gleichen Ebene und die der darunter liegenden Ebenen beobachtbar sind.

Für die weiteren Axiome ist es vorteilhaft, $\mathrm{s}_p(q)$ oder (in der Klassenschreibweise) $q \in \mathrm{s}_p$ statt $q \sqsubseteq p$ zu schreiben. Unter s_p kann man sich dann das Universum bis zur Ebene von p vorstellen, also die Klasse aller Mengen, die standard bzw. beobachtbar relativ zu p sind.

In RBST wird gefordert, dass die Axiome von BST (also ZFC plus *Beschränktheit*, *Transfer*, *Standardisierung* und *beschränkte Idealisierung*), in einer „relativen Version" gelten, das heißt jeweils mit dem Prädikat s_p statt s für alle p. Das Transferschema (in der Version aus Satz 22)

$$\forall^{\mathrm{s}} x_1 \ldots \forall^{\mathrm{s}} x_n \, (\varphi(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{s}} \Leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \tag{2.45}$$

aus BST (für jeden $\in$-Ausdruck $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$) lautet in seiner relativen Version dann zum Beispiel so:

Relativer Transfer: Für jeden $\in$-Ausdruck $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gilt:

$$\forall p \, \forall^{\mathrm{s}_p} x_1 \ldots \forall^{\mathrm{s}_p} x_n \, (\varphi(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{s}_p} \Leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)) \tag{2.46}$$

Insbesondere gilt $\forall p \, (\varphi^{\mathrm{s}_p} \Leftrightarrow \varphi)$ für jeden $\in$-Satz φ.[31]

Man definiert: q ist standard relativ zu $p_1, \ldots, p_n$ genau dann, wenn $q \sqsubseteq p_i$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt dann: q ist standard relativ zu $p_1, \ldots, p_n$ genau dann, wenn $q \sqsubseteq (p_1, \ldots, p_n)$.

RBST unterscheidet sich von IST und BST dadurch, dass die mit dem Prädikat *standard* definierten Begriffe wie *ultraklein*, *ultranahe*, *ultragroß*, *beobachtbarer Nachbar*[32] etc. relativ zu einem *Kontext* $p_1, \ldots, p_n$ definiert sind. Sie heißen daher *relative Begriffe*.

Definition 20. *Sei $p := (p_1, \ldots, p_n)$. Dann definiert man:*

1. *$x \in \mathbb{R}$ ist* ultraklein *relativ zu $p_1, \ldots, p_n$ genau dann, wenn $x \neq 0$ und*

$$\forall^{\mathrm{s}_p} y \, (y \in \mathbb{R} \wedge y > 0 \Rightarrow |x| < y).$$

2. *$x, y \in \mathbb{R}$ sind* ultranahe *oder* Nachbarn *(kurz: $x \approx y$) relativ zu $p_1, \ldots, p_n$ genau dann, wenn $x - y$ ultraklein oder 0 ist relativ zu $p_1, \ldots, p_n$.*

3. *$x \in \mathbb{R}$ ist* ultragroß *relativ zu $p_1, \ldots, p_n$ genau dann, wenn*

$$\forall^{\mathrm{s}_p} y \, (y \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| > y).$$

31. Damit ist es wieder unerheblich, ob man in RBST die ZFC-Axiome oder die durch s_p relativierten ZFC-Axiome (für alle p) annimmt (vgl. Fußnote 24).

32. In Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014 werden diese Begriffe anstelle von *infinitesimal*, *unendlich nahe*, *unbeschränkt*, *Standardteil* verwendet. Die Autoren schreiben außerdem $\simeq$ statt $\approx$. Im Unterschied zur bisherigen Verwendung von *infinitesimal* schließt *ultraklein* die Null aus.

Satz 29. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn x nicht ultragroß ist relativ zu $p_1, \ldots, p_n$, dann gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{s}_p(y)$ und $x \approx y$ relativ zu $p_1, \ldots, p_n$. y heißt der* beobachtbare Nachbar *von x relativ zu $p_1, \ldots, p_n$.*

Der Beweis von Satz 29 verläuft analog zu Beweisen in IST oder BST, nur dass die Schritte immer relativ zum Kontext ausgeführt werden. Die Regeln für das Rechnen mit $\approx$ und st übertragen sich entsprechend (also immer relativ zum Kontext). So gilt zum Beispiel:

$$\begin{aligned} & (x, y \text{ nicht ultragroß} \wedge x \approx a \wedge y \approx b) \text{ relativ zu } p_1, \ldots, p_n \\ \Rightarrow\ & xy \approx ab \text{ relativ zu } p_1, \ldots, p_n. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Das explizite Mitführen des Kontextes ist auf die Dauer sehr umständlich und scheint zunächst ein großer Nachteil von RBST zu sein. In der Praxis wird die Umständlichkeit in den Formulierungen jedoch durch die folgende Konvention umgangen.

Konvention zu Kontexten: Wenn relative Begriffe in Sätzen, Definitionen oder Beweisen ohne explizite Angabe eines Kontextes verwendet werden, sind sie relativ zum Kontext des Satzes, der Definition bzw. des Beweises zu verstehen.

Wir verdeutlichen dies am Beispiel der Stetigkeitsdefinition.

Definition 21. *Eine reelle Funktion f heißt* stetig *in a genau dann, wenn $a \in \mathrm{Def}(f)$ und wenn für alle $x \in \mathrm{Def}(f)$ gilt:*

$$x \approx a \Rightarrow f(x) \approx f(a). \tag{2.48}$$

Die Definition ist äußerlich analog zu Definition 18 für die S-Stetigkeit in IST. (2.48) ist aber hier (aufgrund der Konvention zu Kontexten) relativ zum Kontext der Definition zu verstehen. Der Kontext besteht in diesem Fall aus den Parametern f und a. (2.48) bedeutet also ausführlich:

$$x \approx a \text{ relativ zu } f, a \Rightarrow f(x) \approx f(a) \text{ relativ zu } f, a. \tag{2.49}$$

Der Vorteil von RBST gegenüber IST oder BST zeigt sich nun darin, dass die allgemeine Stetigkeit nicht erst implizit über S-Stetigkeit definiert werden muss (vgl. Definition 19), sondern direkt verwendbar (und äquivalent zur ε-δ-Stetigkeit) ist.

So ist zum Beispiel die Funktion $f(x) = x^2$ in allen Punkten a stetig im Sinne von Definition 21, denn aus $x \approx a$ (relativ zu a) folgt x nicht ultragroß (relativ zu a) und (nach den Rechenregeln für $\approx$, siehe (2.47)) daher $x^2 \approx a^2$ (relativ zu a). Das Gegenbeispiel für S-Stetigkeit aus Abschnitt 2.4.3 kommt hier nicht zum Tragen, weil für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht $a + \frac{1}{a} \approx a$ (relativ zu a) gilt.[33]

33. $a + \frac{1}{a} \approx a$ (relativ zu a), also $\frac{1}{a} \approx 0$ (relativ zu a), würde bedeuten, dass für alle positiven reellen $y \in \mathrm{s}_a$ gilt: $\left|\frac{1}{a}\right| < y$. Das ist aber nicht der Fall, da s_a unter anderem alle Zahlen enthält, die mittels $\in$-Ausdruck (mit a als Parameter) definierbar sind, also zum Beispiel $\left|\frac{1}{a}\right|$.

In RBST wird ein $\{\in, \sqsubseteq\}$-Ausdruck $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ als *intern* bezeichnet, wenn jegliche Vorkommen des Prädikats *standard* relativ zu den Parametern $x_1, \ldots, x_n$ sind, mit anderen Worten, wenn er aus einem $\{\in, \mathrm{s}\}$-Ausdruck hervorgeht, indem alle Vorkommen von s durch $\mathrm{s}_{(x_1,\ldots,x_n)}$ ersetzt werden. Ein Begriff heißt *intern*, wenn er durch einen internen Ausdruck definiert ist. So wie die Stetigkeit werden Ableitung, Integral und Limes durch interne Ausdrücke definiert, sind also interne Begriffe. Beim Operieren mit internen Begriffen tritt der Kontext (aufgrund der Konvention zu Kontexten) gar nicht mehr explizit in Erscheinung. Der weitere Aufbau einer elementaren Analysis auf der Basis von RBST wird in Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014 ausgeführt (siehe auch Abschnitt 3.1.4).

3. Forschungsstand zur Praxis und Akzeptanz in der Lehre

3.1. Nichtstandard in der elementaren Analysis

3.1.1. Lehrbücher zur Analysis

Die Lehrbücher, die üblicherweise als vorlesungsbegleitende Literatur zur Analysis empfohlen werden (deutschsprachig zum Beispiel die Lehrbücher von Barner und Flohr, Behrends, Deitmar, Forster, Grieser, Heuser, Hildebrandt, Königsberger, Walter, englischsprachig zum Beispiel Lang, Royden, Rudin, Spivak), wählen durchweg einen klassischen Zugang auf der Basis des Weierstraß'schen Grenzwertbegriffs. Die reellen Zahlen werden axiomatisch eingeführt, Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit, sofern thematisiert, zumeist mit Hinweisen auf die Literatur beantwortet. In Deitmar 2021 wird die Konstruktion der reellen Zahlen (ausgehend von den rationalen Zahlen) im Anhang ausgeführt und die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) von $\mathbb{R}$ als vollständig angeordnetem Körper gezeigt.

Nichtstandardanalysis wird in diesen Lehrbüchern – von wenigen Ausnahmen (zum Beispiel bei Behrends und Heuser) abgesehen – nicht erwähnt. Infinitesimalien kommen, wenn überhaupt, in historischen Anmerkungen zur Sprache. Heusers Lehrbuch zur Analysis Teil 2 enthält ein eigenes Kapitel zur Geschichte der Analysis („ein historischer *tour d'horizon*"), das den Zeitraum von den Pythagoreern bis zu Dedekinds Definition der reellen Zahlen umreißt und mit dem folgenden Resümee endet:

> Nach einer langen Wanderung durch die Steinwüste der Exhaustion und das Schattenreich der Infinitesimalien war die Analysis zurückgekehrt zu ihrem Ursprung, zu Pythagoras, der in Kroton verkündet hatte: „Alles ist Zahl" (Heuser 2008, S.700).[1]

Die Nichtstandardanalysis wird zuvor zumindest in einer Fußnote angesprochen:

> Infinitesimale Größen sind, wenn auch in ganz anderer Form als ihre Erfinder sich denken konnten, vor etwa zwanzig Jahren[2] in der sogenannten *non-standard-analysis* wieder zum Leben erweckt worden. Sie sind natürlich

1. Zutreffender müsste man wohl feststellen, dass aus Pythagoras' „Alles ist Zahl" heute ein „Alles ist Menge" geworden ist (siehe Abschnitt 5.4).
2. Die Zeitangabe bezieht sich vermutlich auf die erste Auflage von 1981, ist aber auch in der 14. Auflage von 2008 noch so zu finden.

> keine reellen Zahlen, sondern Objekte, die von außen zu **R** hinzugefügt werden.[3] Den interessierten Leser verweisen wir auf D. Laugwitz: *Infinitesimalkalkül. Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis* (Mannheim/Wien/Zürich 1978) (Heuser 2008, S. 680, Hervorhebung im Original).

Eine etwas ausführlichere Würdigung erfährt die Nichtstandardanalysis bei Behrends, der immerhin auch Vorteile anerkennt.

> Es gibt einen aus der Modelltheorie entstandenen und vor einigen Jahrzehnten viel diskutierten alternativen Zugang zur Analysis, in dem die „unendlich kleinen Größen" ein Comeback erleben (die *Nonstandard-Analysis*). Hauptvorteil ist, dass man endlich „versteht", was LEIBNIZ und den anderen wohl vorgeschwebt haben könnte, außerdem kommt man viel schneller zu den Hauptsätzen der Analysis (Behrends 2015, S. 76, Hervorhebung im Original).

Gleich danach schränkt der Autor jedoch ein:

> Dabei muss man sich allerdings, wenn man alles so streng wie allgemein üblich entwickeln möchte, sehr ausführlich mit sehr verzwickten Teilen der Modelltheorie beschäftigen, und deswegen spricht einiges dafür, dass diese Variante der Analysis nur eine Episode bleiben wird (ibid.).

Hierzu ist anzumerken, dass die modelltheoretische Konstruktion von Nichtstandard-Erweiterungen zwar vergleichsweise kompliziert ist, aber nicht unbedingt benötigt wird, um (auf der Basis von Axiomen oder Vereinbarungen) nonstandard *in* Modellen zu arbeiten. Dies gilt insbesondere für die Schule und die Anfängervorlesungen, wo man darauf vertraut, dass geeignete Modelle existieren (so wie man es auch bezüglich der reellen Zahlen tut). Wie dies geschehen kann, wurde bereits in Abschnitt 1.3.2 angedeutet.

Es gibt nicht viele Lehrbücher, die einen Nichtstandardeinstieg in die Analysis wählen. Das erste Lehrbuch dieser Art war der *Elementary Calculus* von Keisler. Die erste Auflage stammt aus dem Jahr 1976 (Keisler 1976), die zweite aus 1986. Eine überarbeitete Fassung aus 2012 ist online frei verfügbar (Keisler 2012b) sowie gedruckt als dritte Auflage (Keisler 2012a). Mit fast 1000 Seiten ist dieses Buch sehr umfangreich und ausführlich. Wesentlich schlanker (135 Seiten) ist der *Infinitesimal calculus* von Henle und Kleinberg (Henle und Kleinberg 1979). Beide Lehrbücher sind englischsprachig und führen die hyperreellen Zahlen axiomatisch ein (siehe Abschnitt 3.1.3). In deutscher Sprache gibt es vor allem die Bücher von Laugwitz (Laugwitz 1978, Laugwitz 1986), die gute elementare Einführungen in die Nichtstandardanalysis sind, aber keine Analysis-Lehrbücher im eigentlichen Sinne. Sie sind nur noch antiquarisch verfügbar.

Von Laugwitz' genetischem Aufbau der Analysis mit Omegazahlen (siehe Abschnitt 2.2.1) beeinflusst sind Henles „Non-nonstandard Analysis" (Henle 1999) und Taos Online-Post „A cheap version of nonstandard analysis" (Tao 2012). Beide Beiträge zeigen knapp und exemplarisch, was mit einer Konstruktion auf der Basis des Fréchet-Filters Cof an

3. Einschränkend muss man hier hinzufügen: Dies gilt für Robinsons Nichtstandardanalysis. Nelson hat mit seiner Internen Mengenlehre gezeigt, dass Infinitesimalien auch innerhalb der reellen Zahlen möglich sind (siehe Abschnitt 2.4).

Infinitesimalrechnung möglich ist. Sie sind aber keine vollständigen Lehrbücher. Eine andere nichtarchimedische Erweiterung von $\mathbb{R}$, die ohne Ultrafilter konstruierbar ist, stellt das System der *superreellen Zahlen* von David O. Tall dar (siehe Tall 1980b). Ich gehe auf diese konstruktiven elementaren Zugänge in Abschnitt 3.1.2 genauer ein.

An einführenden Analysis-Lehrbüchern auf der Basis von Nelsons Interner Mengenlehre (siehe Abschnitt 2.4) ist mir nur Deledicq und Diener 1989 (französisch) bekannt (siehe Abschnitt 3.1.4). Es ist nur noch antiquarisch erhältlich. Robert 1988 ist eine knappe und gut lesbare Einführung in die Interne Mengenlehre und behandelt im ersten Teil elementare Analysis. Insgesamt richtet es sich eher an Studierende im fortgeschrittenen Studium. Das Lehrbuch Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014 (englisch) nutzt eine vereinfachte Version der *Relative Bounded Set Theory* RBST (siehe Abschnitt 2.5.3) und ist für den Analysisunterricht auf High-School- oder College-Level gedacht.

Deutschsprachige Lehrbücher mit der Zielgruppe Schule bzw. Lehrende an Schulen sind Baumann und Kirski 2019 und Baumann, Bedürftig und Fuhrmann 2020.[4] Zur Motivation des Einsatzes von Nichtstandardanalysis in der Schule siehe auch Bedürftig und Kuhlemann 2020.

3.1.2. Konstruktive elementare Zugänge

Konstruktion mit Fréchet-Filter

In Abschnitt 2.2.1 wurde der genetische Aufbau der Analysis mit Omegazahlen aus Laugwitz 1978 vorgestellt. Grundlage dort war die mit dem Fréchet-Filter Cof gebildete Menge ${}^{\Omega}\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathrm{Cof}$ der Omegazahlen.

Die Vorteile des Omegakalküls liegen in der einfachen Konstruktion der Omegazahlen und der einfachen Fortsetzbarkeit aller reellen Funktionen. Des Weiteren sind Gleichungen und Ungleichungen sowie deren Konjunktionen von $\mathbb{R}$ auf ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ übertragbar, was bereits für viele Überlegungen ausreicht. Der Hauptnachteil ist, dass ${}^{\Omega}\mathbb{R}$ kein angeordneter Körper, sondern nur ein partiell geordneter Ring mit Nullteilern ist. Es gilt nur ein eingeschränktes Transferprinzip (siehe Satz 8).

Was die Frage der Eignung der Ω-Zahlen für einen Einstieg in die Analysis angeht, sind die geschilderten Nachteile weniger störend beim Rechnen als bei der Veranschaulichung. Insbesondere wegen des Fehlens der totalen Ordnung kann man sich die Ω-Zahlen nicht linear geordnet auf einer Geraden veranschaulichen. Auf der „Formelebene“ bieten diese Zahlen dennoch didaktisches Potential, da Definitionen und Herleitungen gegenüber der Standardanalysis einfacher werden.

Henle vereinfacht in Henle 1999 gegenüber Laugwitz 1978 noch weiter, indem er auf die (für Anfänger möglicherweise schon recht abstrakte) Äquivalenzklassenbildung verzichtet und direkt mit den Folgen arbeitet. Hierdurch bleibt der unmittelbare Bezug zur Standardanalysis erhalten, man bedient sich aber zugleich der suggestiven Notation der Nichtstandardanalysis.

4. Weitere Informationen und Unterrichtsmaterial findet man zum Beispiel auf der Internetseite `www.nichtstandard.de` (besucht am 02.10.2021).

Folgen werden bei Henle zur Unterscheidung von reellen Zahlen mit fett gedruckten Buchstaben bezeichnet. Beispiel: $\mathbf{a} := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dabei ist zugelassen, dass die Folgenglieder für endlich viele Indizes nicht definiert sind. Gleichungen oder Ungleichungen mit Folgen (zum Beispiel $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{a} > 0$), ebenso Elementbeziehungen (zum Beispiel $\mathbf{a} \in D$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$) sind so zu interpretieren, dass sie für die Komponenten der Folgen *ab einem gewissen Index* (also *fast überall*, das heißt *mit endlich vielen Ausnahmen*) gelten.[5] Achtsamkeit ist bei Verwendung des Symbols $\neq$ geboten. So bedeutet $\mathbf{a} \neq 0$ *nicht* „nicht $\mathbf{a} = 0$“ sondern „$a_n \neq 0$ fast überall“. Funktionen werden komponentenweise auf Folgen fortgesetzt. Beispiel: $\sin(\mathbf{a}) := (\sin(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Analog zur Nichtstandardanalysis mit hyperreellen Zahlen definiert man:

- $\mathbf{a}$ heißt *unendlich klein* ($\mathbf{a} \approx 0$) genau dann, wenn für alle positiven $r \in \mathbb{R}$ gilt: $|\mathbf{a}| < r$.
- $\mathbf{a}$ heißt *endlich groß* oder *beschränkt* genau dann, wenn es $r \in \mathbb{R}$ mit $|\mathbf{a}| < r$ gibt.

Und für Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ definiert man wie in der Nichtstandardanalysis mit hyperreellen Zahlen:

- f ist *stetig* in $r \in D$ genau dann wenn für alle $\mathbf{a} \in D$ gilt:
$$\mathbf{a} \approx r \Rightarrow f(\mathbf{a}) \approx f(r).$$
- f ist *gleichmäßig stetig* auf D genau dann, wenn für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D$ gilt:
$$\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \Rightarrow f(\mathbf{a}) \approx f(\mathbf{b}).$$
- Ist r ein innerer Punkt von D und $d \in \mathbb{R}$, dann gilt $f'(r) = d$ genau dann, wenn für alle $\mathbf{\Delta x} \approx 0$, $\mathbf{\Delta x} \neq 0$ gilt:
$$\frac{f(r + \mathbf{\Delta x})}{\mathbf{\Delta x}} \approx d.$$

Die Definitionen sind gegenüber den Standarddefinitionen so einfach geworden, weil die sonst notwendigen Quantoren in der Definition von $\approx$ stecken. $\mathbf{a} \approx 0$ bedeutet ja definitionsgemäß nichts anderes als

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon).$$

Das Fehlen der totalen Ordnung wirkt sich dahingehend aus, dass nur ein abgeschwächtes Standardteilprinzip gilt und man für manche Überlegungen zu Teilfolgen übergehen muss. Henle schreibt $\mathbf{a} \subset \mathbf{b}$ für „$\mathbf{a}$ ist eine Teilfolge von $\mathbf{b}$“. Dann lautet das

Standardteilprinzip Wenn $\mathbf{a}$ beschränkt ist, dann gibt es $\mathbf{c} \subset \mathbf{a}$ und $r \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{c} \approx r$.

5. Durch diese Vereinbarung wird die „Gleichheit“ von Folgen zu einer *Äquivalenzrelation*, Henle verzichtet aber darauf, dies explizit so zu definieren.

Die Notwendigkeit, zu einer Teilfolge überzugehen, besteht zum Beispiel beim Beweis der Kettenregel, des Zwischenwertsatzes oder der Aussage, dass jede stetige Funktion integrierbar ist (siehe Henle 1999).

Zur Definition des Integrals greift Henle auf Folgen von Treppenfunktionen zurück.

Definition 22. *Für eine Funktion f und ein Intervall $[p, q]$ gilt*

$$\int_p^q f\,dx = r$$

genau dann, wenn es Folgen $\mathbf{d}, \mathbf{u}$ von Treppenfunktionen auf $[p, q]$ gibt mit $\mathbf{d} \leq f \leq \mathbf{u}$ und

$$\int_p^q \mathbf{d}\,dx \approx r \approx \int_p^q \mathbf{u}\,dx.$$

Dabei sind Treppenfunktionen und das Integral für Treppenfunktionen wie üblich definiert. Das Integral für Folgen von Treppenfunktionen ist komponentenweise erklärt. $\mathbf{d} \leq f \leq \mathbf{u}$ bedeutet, dass für fast alle n gilt: $d_n \leq f \leq u_n$ auf $[p, q]$.

Verallgemeinerte Adjunktion eines unendlich großen Elements

Die oben geschilderten Nachteile der Konstruktion $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathrm{Cof}$ als Erweiterung von $\mathbb{R}$ werden überwunden, wenn man statt des Filters Cof einen Cof umfassenden Ultrafilter $\mathcal{U}$ verwendet (siehe Abschnitt 2.2.2). Die so entstehende Erweiterung $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ ist, wie $\mathbb{R}$, ein angeordneter Körper, und man hat das volle Transferprinzip (siehe Satz 12). Eine Konstruktion mittels Ultrafilter erscheint jedoch für Anfängerkurse wenig geeignet.

Laugwitz bietet in Laugwitz 1986 noch einen alternativen Weg an, der zwar nicht vollständig konstruktiv ist, der aber einen expliziten Rückgriff auf Ultrafilter vermeidet. Dieser Weg besteht in einer verallgemeinerten Adjunktion eines unendlich großen Elements Ω und dem Postulieren eines Prinzips, mit dem wahre Aussagen über den erweiterten Zahlbereich gewonnen werden können. Laugwitz nennt es das *Leibniz'sche Prinzip* in Anlehnung an eine Formulierung aus einem Brief von Leibniz an Varignon, nach der die Regeln des Endlichen im Unendlichen weiter gelten (vgl. Zitat auf S. 2). In Laugwitz 1986 wird das Vorgehen für einen beliebigen archimedisch geordneten Körper K formuliert.

Adjunktion von Ω Jede Folge $a(n) \in K$, definiert für alle hinreichend großen natürlichen n, oder, anders ausgedrückt, für alle $n \geq n_0$ mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$, gibt ein Element des erweiterten Zahlbereichs ${}^{\Omega}K$ an; wir schreiben für dieses Element $a(\Omega)$ und nennen es eine Omegazahl (Laugwitz 1986, S. 85).

Leibniz'sches Prinzip Sei $A(.)$ eine Aussageform, formuliert in der Sprache von K. Wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ die Aussage $A(n)$ in der zugrundegelegten Theorie von K wahr ist, dann soll $A(\Omega)$ als wahrer Satz in die neue Theorie von ${}^{\Omega}K$ aufgenommen werden (Laugwitz 1986, S. 88).

Die hier angegebene Adjunktion von Ω ist gegenüber der Körperadjunktion $K(\Omega)$ eine Verallgemeinerung, da als $a(n)$ beliebige Folgen und nicht nur rationale Ausdrücke in n zugelassen sind. Damit sind zum Beispiel auch $(1+\frac{1}{\Omega})^\Omega$ oder $\sum_{k=0}^{\Omega}\frac{1}{k!}$ definierte Omegazahlen. Die „Sprache von K“, auf die sich das Leibniz'sche Prinzip bezieht, ist die Sprache erster Stufe mit Konstanten für jedes Element von K sowie Funktions- und Relationssymbolen für alle Funktionen bzw. Relationen über K.[6]

Mit dem Leibniz'schen Prinzip beweist man, dass ${}^\Omega K$ ein angeordneter Körper ist. Interessant sind hier die Existenz des multiplikativen Inversen und die Trichotomie der Ordnungsrelation $<$, denn diese Axiome gelten in $K^{\mathbb{N}}/\mathrm{Cof}$ nicht. Ist eine Folge $a(n) \in K$ gegeben, so gilt für hinreichend große (sogar für alle) n: $a(n) = 0 \vee \exists x\, a(n) \cdot x = 1$. Also gilt nach dem Leibniz'schen Prinzip: $a(\Omega) = 0 \vee \exists x\, a(\Omega) \cdot x = 1$. Sind Folgen $a(n)$ und $b(n)$ gegeben, so gilt für alle hinreichend großen (sogar für alle) n: $a(n) = b(n) \vee a(n) < b(n) \vee a(n) > b(n)$. Also gilt nach dem Leibniz'schen Prinzip: $a(\Omega) = b(\Omega) \vee a(\Omega) < b(\Omega) \vee a(\Omega) > b(\Omega)$. Welche dieser Möglichkeiten zutrifft, kann aber für konkret gegebene Omegazahlen nicht immer entschieden werden.

Am Beispiel $(-1)^\Omega$ bedeutet die Anwendung des Leibniz'schen Prinzips: Da die Aussageform $(-1)^n = 1 \vee (-1)^n = -1$ in K für hinreichend große (sogar für alle) n gilt, gilt $(-1)^\Omega = 1 \vee (-1)^\Omega = -1$ in ${}^\Omega K$. Welche der Möglichkeiten zutrifft, bleibt unbestimmt.

Die Unbestimmtheit von Ω in der Theorie von ${}^\Omega K$ stört beim weiteren Aufbau der Analysis genauso wenig, wie die Unbestimmtheit des Ultrafilters $\mathcal{U}$ in der Konstruktion ${}^*K := K^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ für den Aufbau der Analysis mit ${}^*K$ stört. Es ist zum Beispiel nicht entscheidend, ob $\mathcal{U}$ die Menge der geraden oder die Menge der ungeraden Zahlen enthält. Laugwitz bemerkt:

> Die Theorie von ${}^\Omega K$ ist sozusagen der gemeinsame Kern aller möglichen Nichtstandard-Theorien zu den ${}^*K$. Sie enthält alle diejenige Infinitesimalmathematik, welche von der willkürlichen Wahl eines speziellen Ultrafilters und sogar von der Existenz der Ultrafilter selbst unabhängig ist (Laugwitz 1986, S. 103).

Superreelle Zahlen

Die einfachste Art, $\mathbb{R}$ zu einem nichtarchimedischen Körper zu erweitern besteht darin, ein neues Element zu adjungieren, das definitionsgemäß unendlich groß (größer als jede reelle Zahl) oder alternativ unendlich klein (positiv, aber kleiner als jede positive reelle Zahl) ist. Dieser Ansatz wird mit den superreellen Zahlen verallgemeinert, indem neben einem neuen, unendlich kleinen Element ε noch bestimmte Reihen in ε hinzugenommen werden (vgl. Tall 1980b). Tall definiert seine superreellen Zahlen als formale Laurent-Reihen in ε mit reellen Koeffizienten und endlichem Hauptteil (das heißt, nur endlich

6. Laugwitz lässt auch Symbole aus der Mengenlehre zu (zum Beispiel $\in$, $\cup$, $\cap$). Da nur Individuenvariablen (für Elemente aus K) zur Verfügung stehen, ergeben sich hierdurch keine erweiteren Ausdrucksmöglichkeiten. Man kann damit aber zum Beispiel das vertraute $x \in \mathbb{N}$ statt des ungewohnten $\mathbb{N}x$ schreiben.

viele Koeffizienten mit negativem Index sind ungleich Null), also als Reihen der Form

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i \varepsilon^i \tag{3.1}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{R}$. „Formal“ bedeutet, dass Konvergenzbetrachtungen hier keine Rolle spielen. Technisch gesehen lassen sich die superreellen Zahlen mit denjenigen Elementen aus $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ identifizieren, bei denen nur endlich viele Glieder mit negativem Index ungleich Null sind. Die Darstellung als Reihe in ε dient der Intuition, zum Beispiel um die Definitionen von Addition, Multiplikation und Anordnung für superreelle Zahlen zu motivieren. ε ist dabei als eine unendlich kleine Zahl zu denken.

Die Menge aller superreellen Zahlen bezeichnet Tall mit $\mathfrak{R}$. Es ist $\mathbb{R} \subseteq \mathfrak{R}$. Die reellen Zahlen in $\mathfrak{R}$ sind genau diejenigen, für die in (3.1) alle Koeffizenten außer a_0 verschwinden. Addition, Multiplikation, Anordnung und das additive Inverse werden auf naheliegende Weise (durch formales Operieren mit der Reihendarstellung (3.1)) definiert. Auch das multiplikative Inverse für $\alpha \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$ existiert. Ist $\alpha = \sum_{i=m}^{\infty} a_i \varepsilon^i$ mit $a_m \neq 0$ gegeben, dann gibt es $\beta = \sum_{j=-m}^{\infty} b_j \varepsilon^j$ mit $\alpha\beta = 1$, denn aus

$$\left(\sum_{i=m}^{\infty} a_i \varepsilon^i\right) \cdot \left(\sum_{j=-m}^{\infty} b_j \varepsilon^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_{m+j} b_{-m+k-j} \varepsilon^k = 1$$

lassen sich die Koeffizienten b_j rekursiv bestimmen. Es ist $b_{-m} = a_m^{-1}$ und für $k \geq 1$

$$b_{-m+k} = -a_m^{-1} \sum_{j=1}^{k} a_{m+j} b_{-m+k-j}.$$

$\mathfrak{R}$ wird so zu einem angeordneten Körper. Da außerdem $\varepsilon^{-1} > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist $\mathfrak{R}$ ein nichtarchimedischer Oberkörper von $\mathbb{R}$.

Beschränkte (endlich große), unbeschränkte (unendlich große) und infinitesimale (unendlich kleine) Zahlen sowie der Standardteil beschränkter Zahlen werden wie üblich definiert. Die beschränkten superreellen Zahlen sind genau diejenigen, für die alle Koeffizienten mit negativem Index verschwinden. Standardteil einer beschränkten superreellen Zahl ist der Koeffizient mit Index Null.

Jede analytische Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ (D offenes Intervall) lässt sich zu einer Funktion $f\colon D^{\#} \to \mathfrak{R}$ fortsetzen mit $D^{\#} = \{x \in \mathfrak{R} \mid \mathrm{st}(x) \in D\}$, indem man für $\delta \approx 0$ definiert:

$$f(x+\delta) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n,$$

wobei $f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h^n$ die Potenzreihenentwicklung von f an der Stelle $x \in D$ (und h hinreichend klein) ist. Durch Einsetzen der Reihendarstellung von δ und Ausmultiplizieren erhält man die Reihendarstellung von $f(x+\delta)$ als Reihe in ε.

Für analytische Funktionen lassen sich die Begriffe *Stetigkeit* und *Ableitung* wie in der Nichtstandardanalysis üblich definieren und zum Beispiel die Ableitungsregeln herleiten und die Ableitungen konkreter Funktionen berechnen. Ähnlich wie bei Keisler können Definitionen oder Beweissituationen geometrisch durch „Mikroskope“ oder „Teleskope“ veranschaulicht werden, indem man einen passenden Vergrößerungs- bzw- Verkleinerungsfaktor (die passende ε-Potenz) wählt.

Einschränkungen gegenüber einer elementaren Analysis mit hyperreellen Zahlen sind:

- Es können nur analytische Funktionen betrachtet werden.
- Es stehen keine unendlich großen ganzen Zahlen zur Verfügung.
- Es gilt kein allgemeines Transferprinzip für Aussagen der ersten Stufe.

Durch das Fehlen unendlich großer ganzer Zahlen lassen sich Folgen und Reihen nicht in der Weise verallgemeinern, wie es im Hyperreellen (mit hyperganzen Indizes und Summationsgrenzen) möglich ist. Integrale lassen sich nicht mittels Riemann'scher Summen definieren.

Tall definiert das Integral analytischer Funktionen über den Begriff der Flächenfunktion (siehe Definition 23) und beweist damit den Hauptsatz.

Definition 23. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt $A_f : D^{\#} \times D^{\#} \to \mathfrak{R}$ eine* Flächenfunktion, *wenn gilt*

1. $A_f(u,v) + A_f(v,w) = A_f(u,w)$ *für alle* $u, v, w \in D^{\#}$
2. $\frac{A_f(x,x+\theta)}{\theta} \approx f(x)$ *für alle* $x \in D^{\#}$ *und für alle* $\theta \approx 0$, $\theta \neq 0$.

Nach dem Hauptsatz gilt für eine Flächenfunktion A_f, beliebiges $a \in D$ und $F(x) := A_f(a,x)$ (für alle $x \in D^{\#}$): $F' = f$. Umgekehrt ist für eine analytische Funktion F mit $F' = f$ durch $A_f(a,b) := F(b) - F(a)$ eine Flächenfunktion definiert.

3.1.3. Axiomatische Einführung der hyperreellen Zahlen

Keisler geht in seinem *Elementary Calculus* (der nach eigenen Angaben für Analysis-Anfängervorlesungen und einen Zeitraum von drei bis vier Semestern konzipiert ist) von folgenden drei Prinzipien aus:

Erweiterungsprinzip

1. Die reellen Zahlen bilden eine Untermenge der hyperreellen Zahlen und die Ordnungsrelation $x < y$ für reelle Zahlen ist eine Untermenge der Ordnungsrelation für hyperreelle Zahlen.
2. Es gibt eine hyperreelle Zahl, die größer als Null ist, aber kleiner als jede positive reelle Zahl.
3. Für jede reelle Funktion einer oder mehrerer Variablen gibt es eine zugehörige hyperreelle Funktion $^*f$ mit derselben Anzahl von Variablen. $^*f$ heißt die *natürliche Fortsetzung* von f (vgl. Keisler 2012a, S. 27).[7]

7. In Abschnitt 1.3.2 hatten wir $^*f$ die *kanonische Erweiterung* von f genannt.

Transferprinzip Jede reelle Aussage, die für eine oder mehrere reelle Funktionen gilt, gilt auch für die hyperreellen natürlichen Fortsetzungen dieser Funktionen (vgl. Keisler 2012a, S. 28).

Unter einer reellen Aussage versteht Keisler eine Kombination von Gleichungen oder Ungleichungen reeller Ausdrücke sowie Aussagen, die spezifizieren, ob ein reeller Ausdruck definiert ist oder nicht.

Standardteilprinzip Jede endliche hyperreelle Zahl liegt unendlich nahe bei genau einer reellen Zahl. Die einer hyperreellen Zahl b infinitesimal benachbarte reelle Zahl heißt Standardteil von b und wird mit $\operatorname{st}(b)$ bezeichnet (vgl. Keisler 2012a, S. 36).

Auf dieser Basis wird der Kalkül der Analysis wie in Abschnitt 1.3.2 skizziert aufgebaut. Eine formalere Version der oben angegebenen Prinzipien findet man in Keisler 2007 mit den Axiomen A-E. Dort wird auch eine Konstruktion der hyperreellen Zahlen mittels Ultrafilter ausgeführt (Kapitel 1G) und (in Kapitel 15A) der Beweis erbracht, dass die Beschränkung auf Kombinationen von Gleichungen und Ungleichungen im Transferprinzip nicht wesentlich ist und das (scheinbar allgemeinere) elementare Erweiterungsprinzip für Sätze erster Stufe (vgl. Abschnitt 1.3.2) aus den Axiomen A-E folgt.

Die hypernatürlichen Zahlen führt Keisler im *Elementary Calculus* als Bildmenge der natürlichen Fortsetzung der Gaußklammer-Funktion $x \to [x]$ ein, weist aber in Keisler 2007 darauf hin, dass man mit dem für Funktionen formulierten Erweiterungsprinzip jede beliebige Relation $P \subseteq \mathbb{R}^n$ fortsetzen kann, indem man deren charakteristische Funktion $1_P \colon \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$, (mit $1_P(x) = 1 \Leftrightarrow x \in P$) betrachtet und definiert:

$$^*P := \{x \in {}^*\mathbb{R}^n \mid {}^*1_P(x) = 1\}$$

(vgl. Keisler 2007, S. 19).

Henle und Kleinberg geben in ihrem *Infinitesimal Calculus* eine kurze (nicht zu formale) Einführung in Sprachen und Strukturen (zum Teil mit Beispielen außerhalb der Mathematik) und definieren anschließend eine Sprache L zur Beschreibung der Struktur der reellen Zahlen (auch genannt: *das System der reellen Zahlen*). L enthält neben den üblichen logischen Symbolen Konstanten für alle reellen Zahlen sowie Funktions- und Relationssymbole für alle Funktionen bzw. Relationen über den reellen Zahlen. Damit ist klar, dass das *Alphabet* dieser Sprache nicht explizit angegeben werden kann, sondern eine abstrakte Menge ist.

Eine Struktur S heißt (vgl. Henle und Kleinberg 1979, S. 25.) *ein System der hyperreellen Zahlen*[8], wenn gilt:

1. S enthält das System der reellen Zahlen. Das bedeutet: Alle reellen Zahlen sind in S enthalten und alle Funktionen und Relationen, die für $\mathbb{R}$ definiert sind, sind auch für die Zahlen in S definiert.

8. Henle und Kleinberg weisen an dieser Stelle darauf hin, dass S durch die geforderten Eigenschaften nicht eindeutig bestimmt ist und daher der unbestimmte Artikel angebracht ist.

2. S enthält infinitesimale Zahlen. Das bedeutet: Es gibt eine Zahl in S, die größer als 0, aber kleiner als jede positive reelle Zahl ist.

3. In S und $\mathbb{R}$ sind die gleichen Sätze wahr. Wenn B ein Satz der Sprache L ist, dann gilt: B ist wahr in S genau dann, wenn B in $\mathbb{R}$ wahr ist.

Die definierenden Eigenschaften eines Systems der hyperreellen Zahlen entsprechen dem elementaren Erweiterungsprinzip aus Abschnitt 1.3.2. Allerdings ist anzumerken, dass in der Formulierung bei Henle und Kleinberg nicht exakt zwischen einer Struktur und ihrem Träger sowie zwischen einem Satz der Sprache L und seiner Interpretation in einer Struktur unterschieden wird.

Henle und Kleinberg belassen es nicht bei der bloßen Definition des Begriffs *System der hyperreellen Zahlen*, sondern geben auch an, wie ein spezifisches solches System (sie bezeichnen es mit $\mathbb{H}\mathbb{R}$) konstruiert werden kann, wobei allerdings die anspruchsvolleren Teile (der Existenzbeweis für den verwendeten Ultrafilter und der Beweis des Transferprinzips) in den Anhang ausgelagert werden. Sie stellen es dem Leser frei, die Konstruktion von $\mathbb{H}\mathbb{R}$ zu überspringen, da die Kenntnis der Konstruktion für den weiteren Aufbau der Analysis nicht erforderlich sei. Eine analoge Situation liegt in der Standardanalysis vor, wenn die reellen Zahlen axiomatisch eingeführt werden und die Möglichkeit ihrer Konstruktion in Lehrbüchern nur erwähnt bzw. die Konstruktion (wie in Deitmar 2021) im Anhang ausgeführt wird.

3.1.4. Nichtstandard durch Spracherweiterung

In Deledicq und Diener 1989 steht am Anfang ein Paradoxon, das mit der Existenz unendlich großer natürlicher Zahlen verbunden ist: Geht man davon aus, dass die Menge E aller endlichen Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ die 0 enthält und mit jeder Zahl n auch deren Nachfolger $n+1$, dann ist nach dem Prinzip der vollständigen Induktion $E = \mathbb{N}_0$. Alle Zahlen in $\mathbb{N}_0$ sind demnach endlich. Es gibt keine unendlich großen natürlichen Zahlen.

Die Auflösung des Paradoxons in der Internen Mengenlehre besteht darin anzunehmen, dass es keine *Menge E* gibt, die genau alle endlichen Zahlen enthält, das heißt, dass sich die endlichen Zahlen in $\mathbb{N}_0$ nicht zu einer Menge im Sinne der klassischen Mathematik zusammenfassen lassen.

Deledicq und Diener motivieren so die Einführung eines neuen Prädikats *standard* in die Sprache der Mathematik und definieren damit beschränkte (endlich große), unbeschränkte (unendlich große) und infinitesimale (unendlich kleine) Zahlen wie in Abschnitt 2.4.3 (Definition 17). Um den Einstieg in die Interne Mengenlehre zu erleichtern, stellen die Autoren vorläufige Prinzipien zum Umgang mit dem neuen Prädikat auf und bringen das vollständige Axiomensystem von IST erst im zweiten Teil des Buches. Die vorläufigen Prinzipien sind die folgenden:

Erstes Prinzip Ist M ein Objekt, das ohne (direkte oder indirekte) Verwendung des Prädikats *standard*, ggf. unter Verwendung anderer Standardobjekte definiert ist, dann ist M standard.

Zweites Prinzip Sei M eine Menge, die ohne (direkte oder indirekte) Verwendung des Prädikats *standard* definiert ist. Dann gilt: Alle Elemente von M sind standard genau dann, wenn M endlich ist.

Transferprinzip Sei $P(x)$ eine Eigenschaft, die ohne (direkte oder indirekte) Verwendung des Prädikats *standard* formuliert ist. Dann ist $P(x)$ für alle x wahr genau dann, wenn $P(x)$ für alle standard x wahr ist.

Das zweite Prinzip ist der wichtige Spezialfall (Satz 25) des Idealisierungsaxioms aus IST. Aus ihm folgt, dass jede unendliche Menge Nichtstandardelemente enthält und dass in $\mathbb{N}_0$ alle Standardzahlen *vor* allen Nichtstandardzahlen kommen. Das Transferprinzip entspricht dem Transferaxiom aus IST (allerdings ohne Parameter). Ließe man in $P(x)$ noch Standardparameter zu, wäre das erste Prinzip eine Folgerung aus dem Transferprinzip.

Auf der Basis der oben genannten drei Prinzipien werden im ersten Teil des Buches die Begriffe S-Stetigkeit, S-Grenzwert, S-Ableitung, S-Integral behandelt und die wesentlichen Sätze dazu bewiesen.

Genau genommen setzen Deledicq und Diener noch ein weiteres Prinzip voraus, das

Standardteilprinzip Jede beschränkte reelle Zahl ist infinitesimal benachbart zu einer reellen Standardzahl.

Dieses Prinzip formulieren die Autoren zwar als Satz, verschieben aber den Beweis in den zweiten Teil, wo das für den Beweis notwendige Standardisierungsaxiom zur Verfügung steht. Dort wird auch der Zusammenhang zwischen den S-Begriffen und den jeweils korrespondierenden Begriffen der klassischen Analysis thematisiert und der Hauptsatz bewiesen.

Analysis mit ultrakleinen Zahlen

Das Lehrbuch Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014 beruht auf der *Relative Bounded Set Theory* (RBST) (siehe Abschnitt 2.5.3). Dabei wird die sogenannte *Standardperspektive* eingenommen (siehe dazu Abschnitt 5.4.8). Das bedeutet, man stellt sich vor, das vertraute Universum der traditionellen Mathematik (das zum Beispiel die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sowie Funktionen und Relationen über diesen Mengen enthält) wird im Rahmen einer erweiterten Mathematik um neue, ideale Objekte (wie zum Beispiel unendlich große natürliche Zahlen oder unendlich kleine reelle Zahlen) angereichert. Auch vertraute Mengen, wie $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{N}$ enthalten also in dieser Sichtweise neue, ideale Elemente. Der Wahrheitsgehalt von Aussagen der traditionellen Mathematik bleibt dabei unangetastet. Wahre Aussagen bleiben wahr und falsche falsch. So ist zum Beispiel auch in der erweiterten Mathematik $\mathbb{R}$ ein vollständig angeordneter Körper.

Hrbaček, Lessmann und Donovan bringen ein Gleichnis aus der Zoologie. Dort gibt es die Klasse der Säugetiere. Dazu zählen zum Beispiel Löwen, Pferde, Fledermäuse, Wale und Kängurus. In der erweiterten Sichtweise enthält die Klasse der Säugetiere auch fiktive Wesen (ideale Elemente) wie Einhörner und Yetis. Diese fiktiven Wesen haben dieselben säugetiertypischen Eigenschaften wie reale Säugetiere (sind homöotherm, säugen ihre Jungen und so weiter) (vgl. Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014, S. 4).

Um über die neuen Objekte sprechen zu können, wird die Sprache der traditionellen Mathematik um einen neuen Begriff erweitert, der in der traditionellen Mathematik keine Bedeutung hat, der also nicht mit bereits bekannten Begriffen definiert werden kann, sondern undefiniert bleibt. Dieser neue Begriff wird von den Autoren des Lehrbuchs *beobachtbar* getauft, genauer, *beobachtbar relativ zu*, denn es handelt sich um eine zweistellige Relation. Für alle Objekte p, q gilt demnach entweder „q ist beobachtbar relativ zu p" oder „q ist nicht beobachtbar relativ zu p". Objekte, die beobachtbar relativ zu *jedem* beliebigen Objekt sind, werden auch *standard* genannt. Intuitiv sind das (in der Standardperspektive) alle Objekte der traditionellen Mathematik, während die neuen, idealen Objekte (zum Beispiel unendlich große Zahlen) sich dadurch auszeichnen, dass sie *nicht* standard, also *nicht* relativ zu jedem Objekt beobachtbar sind.

Als weitere Sprechweise wird vereinbart: q ist beobachtbar relativ zu $p_1, \dots, p_k$, wenn p beobachtbar relativ zu mindestens einem der p_i, $i = 1, \dots k$, ist. $p_1, \dots, p_k$ heißt in diesem Zusammenhang der *Kontext*. Damit ist klar: Wenn q beobachtbar relativ zu einem bestimmten Kontext ist, dann gilt das auch für jeden erweiterten Kontext.

Begriffe, die vom Begriff *beobachtbar* abgeleitet werden und ebenfalls vom Kontext abhängen, heißen *relative Begriffe*. Beispiele sind die Begriffe *ultraklein*, *ultragroß* und *ultranahe*, die von den Autoren statt der sonst üblichen Begriffe *unendlich klein* (oder *infinitesimal*), *unendlich groß* (oder *unbeschränkt*) bzw. *unendlich nahe* (oder *infinitesimal benachbart*) verwendet werden (vgl. Definition 20).[9]

Zur Vereinfachung von Formulierungen wird dann die (bereits auf Seite 64 vorgestellte) *Konvention über Kontexte* vereinbart: Wenn relative Begriffe in Sätzen, Definitionen oder Beweisen ohne explizite Angabe eines Kontextes verwendet werden, sind sie relativ zum Kontext des Satzes, der Definition bzw. des Beweises zu verstehen.

Eine Aussage heißt *intern*, wenn der Kontext aller darin vorkommenden relativen Begriffe durch die Parameter der Aussage gegeben ist.

Die Analysis mit ultrakleinen Zahlen baut auf folgenden Prinzipen auf (vgl. Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014, S. 32f), die im Wesentlichen eine informelle Version der Axiome aus RBST (teilweise auf Spezialfälle reduziert) sind oder aus den Axiomen folgen.

Prinzip der relativen Beobachtbarkeit Für alle p, q, r gilt:

1. p ist beobachtbar relativ zu p.
2. Wenn p beobachtbar relativ zu q ist und q beobachtbar relativ zu r, dann ist p beobachbar relativ zu r.
3. Wenn p nicht beobachtbar relativ zu q ist, dann ist q beobachtbar relativ zu p.

9. Als Grund für die Einführung neuer Begriffe geben die Autoren an, dass die Verwendung der etablierten Begriffe möglicherweise zu verwirrenden Formulierungen führt, wenn man zum Beispiel sagt, dass die *endliche* Menge $\{1, \dots, N\}$ eine *unendlich* große Elementanzahl hat, wenn N unendlich groß ist (vgl. Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014, S. 6).

Stabilitätsprinzip Eine interne Aussage ist äquivalent zu jeder Aussage, die durch Erweiterung ihres Kontextes um weitere Parameter entsteht.

Existenzprinzip Es existieren ultrakleine reelle Zahlen.

Abgeschlossenheitsprinzip (Existenz-Version) Für eine interne Aussage mit den Parametern $p, p_1, \ldots, p_k$ gilt: Wenn $p_1, \ldots, p_k$ beobachtbar sind und es ein Objekt p gibt, für das die Aussage wahr ist, dann gibt es ein beobachtbares Objekt p, für das die Aussage wahr ist.

Prinzip des beobachtbaren Nachbarn Wenn eine reelle Zahl nicht ultragroß ist, liegt sie ultranahe bei einer beobachtbaren Zahl.

Definitionsprinzip Interne Aussagen können verwendet werden, um Mengen und Funktionen zu definieren. Diese Mengen und Funktionen sind beobachtbar, wenn alle Parameter ihrer Definition beobachtbar sind.

Auf der Basis dieser Prinzipien wird die Analysis, wie in Abschnitt 2.5.3 angedeutet, entwickelt. Die Herleitung der Prinzipien aus den Axiomen von RBST wird in Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014 im Anhang ausgeführt. Die letzten vier Prinzipien sind relativ zum Kontext zu verstehen (Konvention über Kontexte).

3.1.5. Zusammenfassung und Vergleich

Tabelle 3.1 fasst die in diesem Kapitel behandelten elementaren Zugänge zur Nichtstandardanalysis mit ihren wesentlichen Vor- und Nachteilen zusammen. Nicht berücksichtigt wird dabei das Kriterium, ob *interne Mengen* und darauf aufbauend *hyperendliche Mengen* betrachtet werden können.

Während dieses Kriterium für fortgeschrittene Anwendungen der Nichtstandardanalysis absolut entscheidend ist (weshalb zum Beispiel superreelle Zahlen für diese Zwecke ausscheiden), kommt man in der elementaren Analysis weitgehend ohne diese anspruchsvolleren Konzepte aus. In den axiomatischen Zugängen von Keisler sowie Henle und Kleinberg stehen sie nicht ohne Weiteres zur Verfügung, und auch in den konstruktiven Zugängen von Henle oder Tao wird ganz darauf verzichtet. Eine Konsequenz dieser Beschränkung ist, dass das Integral nicht mittels beliebiger hyperendlicher unendlich feiner Zerlegungen des Integrationsintervalls definiert werden kann (siehe Definition 14), sondern mittels äquidistanter unendlich feiner Zerlegungen (siehe Definition 7). Wie bereits in Abschnitt 1.3.2 erwähnt, führen beide Definitionen im Falle Riemann-integrierbarer Funktionen auf das gleiche Integral, aber gemäß Definition 7 sind auch Funktionen integrierbar, die nicht Riemann-integrierbar sind (vgl. Henle und Kleinberg 1979, S. 118f). In der elementaren Analysis (zum Beispiel beim Beweis gängiger Integralsätze oder des Hauptsatzes) stört dieser Umstand nicht.

Eine Behandlung interner und hyperendlicher Mengen ist zwar auch in Konstruktionen mit Fréchet-Filter und in der Theorie *Adjunktion plus Leibniz'sches Prinzip* möglich (siehe Laugwitz 1978 bzw. Laugwitz 1986). Allerdings wird das Programm dadurch deutlich anspruchsvoller, und es stellt sich die Frage, ob dieser Aufwand wegen der spezifischeren

Integraldefinition allein gerechtfertigt ist, wenn man nur an der Analysis für Standardfunktionen interessiert ist.

In den auf internen Mengenlehren beruhenden Zugängen durch Spracherweiterung entfällt die Definition interner und hyperendlicher Mengen, da alle Mengen intern sind und *endliche* Mengen auch eine unendlich große (ultragroße) Elementanzahl haben können. Stattdessen hat man hier auf die Unterlassung „illegaler Mengenbildungen“ zu achten (siehe Abschnitt 2.4.1). In Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014 wird das Integral mittels Riemann'scher Summen zu beliebigen unendlich feinen Zerlegungen definiert. Deledicq und Diener 1989, und Robert 1988 begnügen sich mit einer Integraldefinition mittels äquidistanter Zerlegungen.

Tabelle 3.1.: Zusammenfassung und Vergleich der elementaren Nichtstandardeinführungen

Zugang	Referenz	Vorteile	Nachteile
Konstruktion mit Fréchet-Filter	Laugwitz 1978, Henle 1999, Tao 2012	Einfache Konstruktion, unmittelbarer Bezug zur Standardanalysis	Kein angeordneter Körper, eingeschränktes Transferprinzip
Superreelle Zahlen	Tall 1980b	Einfache Konstruktion	Einschränkung auf analytische Funktionen, keine unendlich großen natürlichen Zahlen, kein Transferprinzip
Adjunktion plus Leibniz'sches Prinzip	Laugwitz 1986	Keine Konstruktion erforderlich, vollwertiges Transferprinzip	Leibniz'sches Prinzip muss als Axiom akzeptiert werden.
Hyperreelle Zahlen axiomatisch	Keisler 2012a	Keine Konstruktion erforderlich, vollwertiges Transferprinzip (Axiom)	Elementares Erweiterungsprinzip muss als Axiom akzeptiert werden.
Spracherweiterung	Deledicq und Diener 1989, Robert 1988, Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014	Rolle der Mengenlehre wird transparent. Grundlagenbewusstsein wird geschärft.	Stärkere Bezugnahme auf Mengenlehre, Achtsamkeit für „illegale“ Mengenbildungen und Transfers notwendig.

Tabelle 3.2.: Anzahl der Studierenden, die eine Lösung versucht haben (Sullivan 1976, S. 373).

	Kontrollgruppe (68 Studierende)	Experimentelle Gruppe (68 Studierende)
Grundbegriffe definieren	48	52
Grenzwerte berechnen	49	68
Beweise führen	18	45
Grundbegriffe anwenden	60	60

3.2. Erfahrungen aus der Lehre

3.2.1. Die Hypothese des kognitiven Vorteils

Erste Untersuchungen über die Einsetzbarkeit von Nichtstandardanalysis in Anfängerkursen stammen von Kathleen Sullivan. Für ihre Dissertation hat sie ein Experiment an vier kleinen Privat-Colleges und einer größeren öffentlichen High-School im Raum Chicago und Milwaukee begleitet und die Ergebnisse auszugsweise im *American Mathematical Monthly* veröffentlicht (Sullivan 1976). Eine Kontrollgruppe wurde 1972/73 auf traditionelle Weise in Analysis unterrichtet und eine experimentelle Gruppe von denselben Lehrenden 1973/74 auf der Basis von Keislers *Elementary Calculus* (einer früheren Version von 1971). Beide Gruppen waren gleich groß und von den Voraussetzungen her vergleichbar.[10]

Bestandteile der Untersuchung waren ein fünfzigminütiger Test in beiden Gruppen, Interviews mit den Lehrenden der beiden Gruppen sowie eine Befragung von zwölf Lehrenden, die in den zurückliegenden drei Jahren nach Keislers *Elementary Calculus* unterrichtet hatten. In dem Test wurde die Fähigkeit geprüft, Grundbegriffe zu definieren, Grenzwerte zu berechnen, Beweise zu führen und Grundbegriffe anzuwenden. Tabelle 3.2 zeigt, wie viele Studierende in den beiden Vergleichgruppen eine Lösung in den verschiedenen Aufgabenbereichen versucht haben. In den Bereichen „Grundbegriffe anwenden" war das Ergebnis in beiden Gruppen gleich, in allen anderen Bereichen lag die experimentelle Gruppe vor der Kontrollgruppe.

Eine genauere Analyse der Lösungen und Lösungsversuche wird in Sullivan 1976 nur für die dritte Aufgabe angegeben, bei der der Unterschied zwischen den beiden Gruppen besonders deutlich war. Die Aufgabe lautete:

> Sei $f(x)$ gegeben durch $f(x) = x^2$ für $x \neq 2$ und $f(x) = 0$ für $x = 2$. Zeigen Sie mit der Grenzwertdefinition $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.[11]

10. Die Vergleichbarkeit der Gruppen wurde durch die Angabe von *SAT mathematics ability scores* dokumentiert (Sullivan 1976, S. 372).

11. Die Aufgabe erfasst die korrekte Anwendung der Grenzwertdefinition an einer Unstetigkeitsstelle. Nach Keislers Grenzwertdefinition (siehe auch Definition 5 in Abschnitt 1.3.2) ist zu zeigen, dass aus $0 \neq \alpha \approx 0$ $f(2+\alpha) \approx 4$ folgt, was sich aus der einfachen Rechnung $f(2+\alpha) = (2+\alpha)^2 = 4+4\alpha+\alpha^2 \approx 4$ ergibt. Nach der Standard-Grenzwertdefinition muss man statt α eine Nullfolge (a_n), $a_n \neq 0$, einsetzen und zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein n ermitteln, ab dem $|f(2+a_n) - 4| < \varepsilon$ ist.

Tabelle 3.3.: Antworten der Studierenden zu Frage 3 (Sullivan 1976, S. 373).

	Kontrollgruppe (68 Studierende)	Experimentelle Gruppe (68 Studierende)
nicht versucht	22	4
Standardargumentation		
Zufriedenstellender Beweis	2	
Unvollständiger Beweis	15	14
Inkorrekte Argumente	29	23
Nichtstandardargumentation		
Zufriedenstellender Beweis		25
Inkorrekte Argumente		2

25 von 68 in der experimentellen Gruppe lieferten einen zufriedenstellenden Beweis ab, während es in der Kontrollgruppe nur 2 von 68 waren. 22 in der Kontrollgruppe hatten gar keinen Beweisversuch unternommen (in der experimentellen Gruppe 4). Die weiteren Werte sind in Tabelle 3.3 angegeben.

Die Rückmeldung der Lehrenden fielen in der Tendenz eindeutig zu Gunsten des Nichtsandardansatzes aus. Im ersten Teil der Befragung wurden die Lehrenden gebeten, ihre Zustimmung oder Ablehnung zu bestimmten Aussagen zu bekunden (siehe Tabelle 3.4).[12] Im zweiten Teil wurden die Lehrenden gefragt, welcher Zugang in Bezug auf verschiedene Aspekte Vorteile hat (siehe Tabelle 3.5). In der überwiegenden Einschätzung der Lehrenden hat demnach der Nichtstandardzugang einen kognitiven Vorteil gegenüber dem Standardzugang, insbesondere für das Erlernen und das Verständnis der Grundbegriffe sowie durch die intuitiveren Beweise.

Sullivan resümiert, dass ihre Untersuchung die These stütze, dass Keislers Ansatz tatsächlich eine praktikable Alternative für die Lehre der Analysis sei. Befürchtungen, dass Studierende, die Analysis über diesen Zugang lernen, die Grundfertigkeiten weniger beherrschen könnten, seien nicht gerechtfertigt. Die positiven Eindrücke wurden von Wattenberg aufgrund von Lehrerfahrung an Universitäten in Wisconsin und Massachusetts bestätigt (siehe Wattenberg 1983).

In jüngerer Zeit haben Hernandez und Fernandez Sullivans Ergebnisse durch eine Untersuchung an der University of Puerto Rico in Rio Piedras bestätigt und um Ergebnisse zur Integralrechnung ergänzt (Hernandez und Lopez Fernandez 2018), ebenso Ely an der University of Idaho (Ely 2020). Eine weitere relativ aktuelle Erhebung, die ebenfalls in diese Richtung weist, wurde an der Bar-Ilan-Universität durchgeführt (siehe Abschnitt 3.2.3).

Mir sind keine empirischen Studien bekannt, die die Hypothese des kognitiven Vorteils des Nichtstandardzugangs explizit widerlegen oder umgekehrt einen kognitiven Nachteil nachweisen würden. Sehr wohl gibt es allerdings Stimmen, die Keislers axiomatische

12. Im Original wurden noch weitere Fragen gestellt, und die Zustimmung bzw. Ablehnung wurde nach zwei Intensitätsstufen differenziert. Insofern ist die Darstellung in Tabelle 3.4 ein Auszug und eine Vergröberung.

Tabelle 3.4.: Rückmeldung der Lehrenden, Teil 1 (Sullivan 1976, S. 374).

	stimme zu	neutral	stimme nicht zu
Die Studierenden hatten Probleme die Axiome der hyperreellen Zahlen zu akzeptieren	4	1	7
Die Studierenden schienen „unendlich klein“ als natürlichen Begriff zu empfinden.	9	2	1
Die Studierenden, die zwei Semester Nichtstandardanalysis gelernt haben, werden Nachteile haben, wenn im dritten Semester Standardanalysis unterrichtet wird.	1	1	10
Ich fürchte, die Einführung von Infinitesimalien hat die Studierenden bezüglich der reellen Zahlen verwirrt.	2	0	10

Tabelle 3.5.: Rückmeldung der Lehrenden, Teil 2 (Sullivan 1976, S. 374). Antwortmöglichkeiten: Standard (Std.), Nichtstandard (Nstd.), kein Unterschied (k. U.).

Aussage trifft eher zu auf	Std.	Nstd.	k. U.
Die Studierenden lernen die Grundbegriffe leichter.		8	4
Die Studierenden schienen motivierter zu sein.		5	7
Die Beweise waren leichter zu erklären und intuitiver.	1	10	1
Die Studierenden fanden es leichter, ihre Fragen zu stellen.		2	9
Die Studierenden hatten am Ende ein besseres Verständnis der Grundbegriffe.		5	7

Tabelle 3.6.: Ergebnis der Befragung zu Beginn des Kurses (Tall 1980a)

$N = 42$	1	2	3	4	5	6
Natürliche Zahlen	40	2	0	0	0	0
Reelle Zahlen	39	3	0	0	0	0
Komplexe Zahlen	32	8	1	0	1	0
Infinitesimalien	23	9	8	0	2	0
Superreelle Zahlen	18	12	8	2	2	0
Hyperreelle Zahlen	15	7	11	6	3	0

Einführung der hyperreellen Zahlen kritisch sehen, zum Beispiel Bishop 1977 (siehe hierzu auch Abschnitt 5.8.2).

3.2.2. Die kognitive Existenz von Infinitesimalien

Die meisten Mathematiker sind heute bereit, die Existenz eines mathematischen Objekts zu akzeptieren, wenn sich die Existenz in ZFC beweisen lässt. Einige haben ein besseres Gefühl bei Objekten, die sich in ZF allein konstruieren lassen. Konstruktivisten stellen noch strengere Anforderungen an die Konstruktion (siehe Abschnitt 5.1.5). Bei Studierenden (und erst recht bei Schülerinnen und Schülern) ist allerdings von einem intuitiveren Existenzverständnis auszugehen, das weder an einen Existenzbeweis in ZF oder ZFC noch an einen konstruktivistischen Existenzbeweis geknüpft ist. Tall hat hierfür den Begriff *kognitive Existenz* (*cognitive existence*) verwendet, der ausdrücken soll, dass Begriffe Teil einer akzeptablen kohärenten Struktur im Geist der Studierenden werden (Tall 1980a, S. 4). Er spricht dann auch von einem *Glauben an die kognitive Existenz* oder vom *kognitiven Glauben* an die Existenz.

In einem Einführungskurs zur Nichtstandardanalysis für Studierende im dritten Studienjahr hat er untersucht, wie sich der kognitive Glaube an die Existenz von Zahlensystemen mit Infinitesimalien (speziell von superreellen und hyperreellen Zahlen) im Verlauf der Veranstaltung entwickelt hat. Anders als bei Sullivan hatten die Studierenden also bereits zwei Jahre Erfahrung in Standardanalysis.

In dem Kurs wurden die superreellen Zahlen nicht streng formal konstruiert, sondern als Potenzreihen vorgestellt, die man algebraisch manipulieren und geometrische veranschaulichen kann. Die hyperreellen Zahlen wurden zunächst axiomatisch eingeführt und dann mit dem Zorn'schen Lemma konstruiert.[13] Unmittelbar nach dieser Konstruktion wurde die erste Befragung durchgeführt (siehe Tabelle 3.6), fünf Wochen später, am Ende des Kurses, eine zweite. Die Frage lautete jeweils: Halten Sie folgende Zahlensysteme für kohärente mathematische Ideen? Die Antwortmöglicheiten waren: definitiv ja (1), ziemlich sicher (2), neutral / keine Meinung (3), verwirrt (4), ziemlich sicher nicht (5), definitiv nicht (6).

Tall stellt fest, dass die zustimmenden Antworten (Kategorien 1 und 2) für Infini-

13. Die Studierenden hatten laut Tall bis zu diesem Zeitpunkt wenig oder keine Erfahrung mit dem Zorn'schen Lemma.

Tabelle 3.7.: Ergebnis der Befragung am Ende des Kurses (Tall 1980a)

$N = 46$	1	2	3	4	5	6
Natürliche Zahlen	43	3	0	0	0	0
Reelle Zahlen	39	5	1	0	0	0
Superreelle Zahlen	27	13	4	2	0	0
Hyperreelle Zahlen	15	20	5	4	2	0

tesimalien in der ersten Befragung sogar noch etwas höher liegen als für superreelle und hyperreelle Zahlen und dass der kognitive Glaube an die Existenz superreeller oder hyperreeller Zahlen sich durch den Gebrauch dieser Zahlensysteme während des Kurses verstärkt hat. Als Ergebnisse einer weiteren Befragung gibt er an: Nur 7 der 46 Kursteilnehmer bemängelten, dass die superreellen Zahlen nicht formal konstruiert worden waren. 10 waren nicht glücklich mit dem Einsatz des Zorn'schen Lemmas bei der Konstruktion der hyperreellen Zahlen, obwohl 22 die Konstruktion als essentiell ansahen. Tall interpretiert das so, dass die Konstruktion eher als notwendig erachtet wird, wenn der kognitive Glaube an die Existenz geringer ist.

Robert Ely hat in seiner Dissertation (Ely 2007) bestätigt, dass viele Studierende robuste Vorstellungen einer reellen Zahlengerade haben, die infinitesimale und unendlich große Größen und Entfernungen einschließen. 31% der von ihm befragten Studierenden aus Analysiskursen gaben konsistent über mehrere Fragebogenelemente an, dass es unendlich kleine Zahlen und / oder Entfernungen gibt (Ely 2007, zitiert nach Ely 2010, S. 139). In einer ausführlichen Fallstudie mit einer Studentin (Sarah) stellte er zahlreiche Ähnlichkeiten fest zwischen Sarahs Vorstellungen und Leibniz' Vorstellungen, die später in Robinsons Nichtstandardanalysis formalisiert wurden (siehe zum Beispiel die tabellarische Übersicht in Ely 2010, S. 140f). Nach Ely kann es sich daher nicht um bloße Missverständnisse handeln:

> These similarities suggest that these student conceptions are not mere misconceptions, but are nonstandard conceptions, pieces of knowledge that could be built into a system of real numbers proven to be as mathematically consistent and powerful as the standard system. This provides a new perspective on students' "struggles" with the real numbers, and adds to the discussion about the relationship between student conceptions and historical conceptions by focusing on mechanisms for maintaining cognitive and mathematical consistency (Ely 2010, S. 117).

Noch deutlicher zugunsten einer Vorstellung des unendlich Kleinen ist die Auswertung in L. Bauer 2011 zur Frage „$0{,}\overline{9} < 1$ oder $0{,}\overline{9} = 1$?" ausgefallen. Befragt wurden 256 Gymnasiasten der Klassen 7 bis 12, 50 Mathematikstudierende (nach dem dritten Semester) sowie 51 Lehramtsstudierende verschiedener Fächer. 50 % der Mathematikstudierenden haben sich demnach für $0{,}\overline{9} < 1$ ausgesprochen. Bei den Lehramtsstudierenden anderer Fächer waren es sogar über 90 %, bei den Gymnasiasten über 72 %. Selbst drei

Tabelle 3.8.: Ergebnis der Umfrage von Katz und Polev (Katz und Polev 2017). Die Zahlen in Klammern beziehen sich auf die Studierenden, die eine korrekte Begriffsdefinition angeben konnten.

Für das Verständnis des Begriffs	Stetigkeit	Gleichmäßige Stetigkeit	Konvergenz
fanden die A-track-Def. hilfreich:	10% (9%)	21% (24%)	10% (13%)
fanden die B-track-Def. hilfreich:	69% (75%)	74% (80%)	62% (70%)

Semester ε-δ-Analysis konnten offenbar bei der Hälfte der Mathematikstudierenden die Vorstellung einer unendlich kleinen Differenzen zwischen Zahlen nicht ausradieren.

3.2.3. Ein Experiment an der Bar-Ilan-Universität

Mikhail G. Katz und Luie Polev von der Bar-Ilan-Universität in Ramat Gan, Israel, haben Analysis für ca. 120 Erstsemester des Jahrgangs 2014/15 zunächst mit Infinitesimalien auf der Basis von Keislers *Elemantary Calculus* (Keisler 2012a) unterrichtet und dann im zweiten Semester auf der Basis der gängigen ϵ-δ-Definitionen (das Vorgehen wurde auch in den folgenden beiden Jahrgängen bis zur Veröffentlichung in Katz und Polev 2017 beibehalten). Katz und Polev nennen den ersten Weg *B-track* und den zweiten Weg *A-track*.[14]

Am Ende des Kursus wurden die Studierenden befragt, welche Definitionen sie als hilfreicher empfunden haben, um die grundlegenden Begriffe der Analysis zu verstehen, speziell ging es um die Begriffe *Stetigkeit*, *gleichmäßige Stetigkeit* und *Konvergenz*. Dazu sollten die Studierenden die Aussage „the definition helped me understand the concept" nach folgendem Schema bewerten: (1) agree strongly; (2) agree; (3) undecided; (4) disagree; (5) disagree strongly.

84 Studierende haben sich an der Umfrage beteiligt. Das Ergebnis ist in Tabelle 3.8 zusammengefasst (Rückmeldungen (1) und (2) als „fanden hilfreich" gewertet). Katz und Polev kommentieren das Ergebnis so:

> To summarize, what we tried to do in the course is to impart to the students the fundamental concepts of the calculus in a way that is the least painful to the students, while making sure that they have the necessary background in the ε-δ techniques to continue in the second semester course taught via EDC [Epsilon-Delta Calculus]. The results of the poll suggest that starting with the intuitive B-track definitions succeeds in this sense. Once the students understand the basic concepts via their intuitive B-track formulations, they are able to relate more easily to the A-track paraphrases of the definitions (Katz und Polev 2017, S. 94).

14. Die Buchstaben A und B sollen an Archimedes bzw. Bernoulli erinnern, da der A-track ein archimedisch geordnetes Kontinuum verwendet, während im B-track, wie bei Bernoulli, unendlich kleine Größen zum Einsatz kommen.

Die Umfrage enthielt ebenfalls die folgende Testfrage: Zeigen Sie $\lim_{x\to 2}(x+5) = 7$ einmal via A-track und einmal via B-track.[15] 98% versuchten einen Beweis via B-track (davon 85% erfolgreich), 71% versuchten einen Beweis via A-track (davon 20% erfolgreich).

3.2.4. Gibt es Widerstand?

Angesichts der berichteten positiven Erfahrungen mit experimentellen Nichtstandardkursen zur Analysis stellt sich die Frage, warum dieser Zugang in der Lehre so wenig verbreitet ist. Tall sieht einen Zusammenhang zwischen dem Aufwand, den man in die ε-δ-Analysis investiert hat einerseits und der Wertschätzung für diesen Zugang bzw. dem Widerstand gegen alternative Zugänge andererseits. Während seiner Untersuchung zur kognitiven Existenz infinitesimaler Zahlen (siehe Abschnitt 3.2.2) hatte er in Interviews mit den Studierenden diesen Zusammenhang beobachtet und vermutet ihn auch bei den Lehrenden.

> When several students, representing a cross-section of all abilities, were interviewed in depth after the course, it became clear that their heavy investment in ε-δ analysis made them have a high regard for it, even though it still presented them with technical difficulties.
>
> The vast majority of university teachers have a similar investment, so a cultural resistance to non-standard analysis is only natural (Tall 1980a, S. 6).

Demnach wäre die Standardanalysis in der Lehre ein sich selbst erhaltendes System, und jeder alternative Zugang nahezu chancenlos. Tatsächlich haben weder Keisler in Wisconsin noch Katz an der Bar-Ilan-Universität es geschafft, ihre experimentellen Analysiskurse dauerhaft in den mathematischen Fakultäten zu etablieren.

Keisler hatte 1969 damit begonnen, Analysis-Einführungskurse unter Verwendung der hyperreellen Zahlen zu geben. Sein daraus hervorgegangenes Lehrbuch *Elementary Calculus* von 1976 für einen dreisemestrigen Analysis-Kurs wurde ungefähr 20 Jahre an der University of Wisconsin Madison eingesetzt. Während dieser Zeit konnte Keisler neun Mitglieder des Fachbereichs dafür gewinnen, diesen Kurs zu unterrichten. Danach fehlten weitere Freiwillige, sodass der Kurs nicht weitergeführt wurde, wie Rebecca Vinsonhaler aus ihrer persönlichen Kommunikation mit Keisler aus dem Jahr 2014 berichtet (Vinsonhaler 2016). Ein Grund für die Schwierigkeiten, Dozentinnen und Dozenten für den Kurs zu finden, liege nach Keisler darin, dass viele Lehrende den zusätzlichen Aufwand scheuten, sich mit dem neuen Ansatz vertraut zu machen, umso mehr für einen „service course“ wie Analysis. Zudem spiele die geringe Vertrautheit mit mathematischer Logik eine Rolle. Ein weiteres mögliches Hindernis sei die Sorge des mathematischen Fachbereichs, ein Experimentieren mit den (auch von anderen Fachbereichen in Anspruch genommenen) Analysis-Kursen könne dem eigenen Fachbereich schaden. Wenn die anderen Fachbereiche die Experimente nicht guthießen und beschlössen, eigene Analysis-Kurse

15. Die unterschiedlichen Lösungswege sind analog zu jenen in Fußnote 11.

zu geben, würde dies zu einem Verlust an Kontrolle und eventuell sogar zu Stellenabbau im mathematischen Fachbereich führen.

Laut Keisler wurden die Freiwilligen, die den *Elementary Calculus* unterrichteten, manchmal von ihren Kollegen angefeindet („sometimes faced hostility from their colleagues“ (Keisler, zitiert nach Vinsonhaler 2016, S. 272)).

Mikhail Katz berichtet ebenfalls von einer gewissen Feindseligkeit innerhalb der mathematischen Fakultät gegen den Nichtstandardansatz, trotz positiver Rückmeldungen von den Studierenden:

> We taught using the infinitesimal method for 5 years in the computer science department, and trained close to 1000 students. We also taught in the mathematics department for 2 years where the classes were considerably smaller: on the order of 40 students in each class. The students were very satisfied but the approach generated a considerable amount of hostility among the faculty and was abandoned last year. This year a new chairman came in in the computer science department who seems more favorably inclined. We did opinion surveys among computer science students who took our courses and they are overwhelmingly in favor of the infinitesimal approach (they are familiar with both approaches, both because we taught epsilon-delta in our course, and also because the follow-up second semester course was pure epsilon-delta). This seems to have made an impression on the current chair. At any rate it remains to be seen if this is ever reinstated. In the math department there are also a couple of people who are favorably inclined but the higher-ups ... oppose it (Katz, persönliche Mitteilung vom 30.09.2020).

Ein Argument der Gegenseite war laut Katz: „we have got to be able to give the students a complete and satisfying answer to the question: ‘what is number?’“

Interessant ist hier zweierlei. Zum ersten die vorgebrachte Begründung aus der Fakultät gegen den Einsatz von Nichtstandard. Offenbar wird den reellen Zahlen (im Gegensatz zu den hyperreellen) zuerkannt, ihre axiomatische Einführung würde den Studierenden vollständig und zufriedenstellend die Frage beantworten, was Zahlen sind. Zum zweiten haben (zumindest an der Bar Ilan Universität) Informatiker anscheinend weniger Vorbehalte gegenüber Nichtstandardanalysis als Mathematiker (ganz entgegen der Sorge, die Keisler im mathematischen Fachbereich die anderen Fachbereiche betreffend vermutet hat). Ein Erklärungsansatz könnte sein, dass für Informatiker die reellen Zahlen (als aktuale Unendlichkeiten) ebenso weit von der Realität entfernt scheinen wie die hyperreellen Zahlen, während für viele Mathematiker die reellen Zahlen gewissermaßen die Realität *sind* (siehe hierzu auch die Diskussion in Kapitel 5).

Aus didaktischer Sicht ist noch Katz’ Hinweis wichtig, dass in den angebotenen Kursen neben der Infinitesimalmethode auch die Epsilon-Delta-Technik unterrichtet wurde. Es ging also bei dem Einsatz von Nichtstandard in den Analysis-Kursen nicht darum, den Grenzwertbegriff zu ersetzen, sondern darum, den Einstieg zu erleichtern. Auch Keislers *Elementary Calculus* behandelt die Epsilon-Delta-Definition des Grenzwertes (Abschnitt 5.8 in Keisler 2012b).

Im nachfolgenden Kapitel 4 stellen wir die Frage, wie Lehrende an deutschen Hochschulen über den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre denken.

4. Empirischer Teil: Eine Umfrage zur Akzeptanz in der Lehre

Dieses Kapitel ist der Beantwortung der folgenden Forschungsfrage gewidmet (vgl. Abschnitt 1.4):

FF2: Was denken Analysislehrende an deutschen Hochschulen über den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre?

Hierzu wurden Analysislehrende befragt und die Ergebnisse der Befragung nach der Methode der *Qualitativen Inhaltsanalyse* ausgewertet. Diese Forschungsmethode wird im Anhang B kurz vorgestellt, ihre Wahl begründet (Abschnitt 4.1.1) und ihre Anwendung auf den vorliegenden Fall beschrieben (Abschnitt 4.1.2). Die konkrete Anwendung der Methode ist Inhalt der Abschnitte 4.2 bis 4.5. Die oben noch sehr allgemein formulierte Forschungsfrage FF2 wird dabei weiter differenziert in verschiedene Unterfragen (siehe Abschnitt 4.3.2).

4.1. Die Forschungsmethode der Qualitativen Inhaltsanalyse

4.1.1. Zur Wahl der Forschungsmethode

Die qualitative Inhaltsanalyse ist eine verbreitete wissenschaftliche Methode, die im Prinzip überall eingesetzt werden kann, wo sprachliches Material ausgewertet werden soll. Insbesondere die Methode der induktiven Kategorienbildung (siehe Abschnitt B.2.1) ist für offene Fragestellungen wie „Was denken ... über ... “ oder „Welche Gründe nennen ... “ sehr fruchtbar. Nach Mayring strebt sie eine möglichst naturalistische, gegenstandsnahe Abbildung des Materials an, hat aber gegenüber der *offenen Kodierung* innerhalb der *Grounded Theory* (Strauss und Corbin 1997) den Vorteil, dass sich der Kategorienbildungsprozess systematischer beschreiben lässt (vgl. Mayring 2015, S. 86).

Die Forschungsmethode der qualitativen Inhaltsanalyse trifft damit sehr gut den Bedarf der vorliegenden Arbeit zur Beantwortung der oben gestellten Forschungsfrage.

4.1.2. Zur Anwendung der Forschungsmethode

In den folgenden Abschnitten wird die konkrete Umsetzung des Ablaufmodells aus Abbildung B.1 auf den vorliegenden Fall ausgeführt. Im Einzelnen sind dies

- Festlegung des Materials (Abschnitt 4.2.1)
- Analyse der Entstehungssituation (Abschnitt 4.2.2)

- Formale Charakteristika des Materials (Abschnitt 4.2.3)
- Richtung der Analyse (Abschnitt 4.3.1)
- Theoretische Differenzierung der Fragestellung (Abschnitt 4.3.2)

Die anschließenden Schritte werden dann je Forschungsunterfrage im Abschnitt 4.4 behandelt:

- Festlegung von Analysetechnik, Ablaufmodell und Kategoriensystem
- Definition der Analyseeinheiten
- Materialdurchlauf (mit Rücküberprüfung und ggf. Anpassung des Kategoriensystems)

Die Ergebnisse der Analyse werden in Abschnitt 4.5 zusammengestellt und interpretiert.

4.2. Bestimmung des Ausgangsmaterials

4.2.1. Festlegung des Materials

Im April 2018 wurde eine Befragung per E-Mail unter den Analysislehrenden an deutschen Hochschulen mit mathematischer Fakultät durchgeführt (Liste der beteiligten Hochschulen: siehe Anhang E) und nach der Methode der Qualitativen Inhaltsanalyse (siehe Mayring 2015) ausgewertet.

Die Adressaten für die Umfrage wurden anhand der von den Hochschulen veröffentlichten Vorlesungsverzeichnisse für das Wintersemester 2017/2018 ermittelt. Maßgeblich war jeweils die angebotene Einführungsvorlesung zur Analysis (in der Regel Analysis I).

Bei der Definition des Kriteriums zur Auswahl der Adressaten standen folgende Überlegungen im Vordergrund:

- Das Kriterium sollte klar und einfach formulierbar sein.
- Es sollte eindeutig anwendbar und frei von Willkür sein.
- Es sollte eine für die Fragestellung möglichst geeignete und ausreichend große Zielgruppe identifizieren.

Vor diesem Hintergrund fiel die Entscheidung auf das oben beschriebene Kriterium und den Kommunikationsweg E-Mail.

4.2.2. Analyse der Entstehungssituation

In einer ersten E-Mail wurden die Lehrenden um die Beantwortung der folgenden Frage gebeten:

(IF1) Berücksichtigen Sie in Ihren Vorlesungen zur Analysis I/II auch Elemente oder Methoden der Nichtstandardanalysis?

Denjenigen, die die erste E-Mail beantwortet haben, wurden in einer zweiten E-Mail die folgenden Anschlussfragen gestellt:

(IF2) Könnte nach Ihrer Einschätzung Nichtstandardanalysis in der Lehre sinnvoll eingesetzt werden (evtl. ergänzend zu den Standardvorlesungen, z. B. als Proseminar)?

(IF3) Welches sind die Hauptgründe für Ihre Einschätzung?

Die Teilnahme an der Umfrage war freiwillig. Von 66 angeschriebenen Personen haben 50 die erste E-Mail beantwortet. Von diesen 50 haben 26 die zweite E-Mail beantwortet. Einige Antworten auf die erste E-Mail enthielten bereits ausführliche Bewertungen und Begründungen. In diesen Fällen wurde die zweite E-Mail mit den Fragen IF2 und IF3 versandt, mit der Bitte, der ersten gegebenen Antwort bei Bedarf noch etwas hinzuzufügen.

Die Befragten wurden durch den Einleitungstext der ersten E-Mail darüber informiert, dass es sich um eine Befragung im Rahmen eines Dissertationsprojektes handelt, in dem es u. a. um die Untersuchung der Einsatzmöglichkeiten von Nichtstandardanalysis in der Lehre geht (siehe nachfolgender Mail-Text).

> Sehr geehrte Frau / Sehr geehrter Herr ...,
>
> ich bin Doktorand am Institut für Didaktik der Mathematik an der Leibniz Universität Hannover und arbeite dort mit Herrn Prof. Thomas Bedürftig und Herrn Prof. Reinhard Hochmuth an einem Projekt zur Nichtstandardanalysis. Es gibt in Deutschland einige Schulprojekte, in denen Nichtstandard-Methoden, also das Rechnen mit unendlich kleinen (infinitesimalen) und unendlich großen (infiniten), allgemein mit hyperreellen Zahlen, ergänzend oder alternativ zum Grenzwertformalismus unterrichtet werden.
>
> In meiner Dissertation geht es u. a. um die Untersuchung der Einsatzmöglichkeiten von Nichtstandardanalysis in der Lehre. Daher habe ich die Bitte an Sie, mich durch die Beantwortung der folgenden Frage bei meinem Vorhaben zu unterstützen:
>
> Berücksichtigen Sie in Ihren Vorlesungen zur Analysis I/II auch Elemente oder Methoden der Nichtstandardanalysis?
>
> Für eine Rückmeldung wäre ich Ihnen sehr verbunden. Auch negative Rückmeldungen, wenn Nichtstandardanalysis für Sie keine Rolle spielt, sind für mich eine wertvolle Information.
>
> Mit freundlichen Grüßen
>
> Karl Kuhlemann

Alle Antworten aus der Umfrage bilden das Ausgangsmaterial für die anschließende Analyse. Das vollständige Ausgangsmaterial ist in Anhang C wiedergegeben. Die Interviewpartner werden dort unter den Pseudonymen P01 bis P50 geführt. Diese Pseudonyme werden auch im Folgenden zur Referenzierung einzelner Interviews verwendet und in eckige Klammern hinter zitierte Textstellen gesetzt.

4.2.3. Formale Charakteristika des Materials

Durch das gewählte Kommunikationsmedium E-Mail lagen die Interviews von vornherein in schriftlicher Form vor. Bei der Übertragung in das Textverarbeitungsprogramm wurden offensichtliche Tippfehler korrigiert, Besonderheiten, wie der Verzicht auf Umlaute oder Großschreibung oder das Festhalten an der alten Rechtschreibung wurden jedoch beibehalten.

4.3. Fragestellung der Analyse

4.3.1. Richtung der Analyse

Die Richtung der Analyse ergibt sich aus der Fragestellung „Was denken Analysislehrende an deutschen Hochschulen über den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre?“ Es geht also um den kognitiven Hintergrund der Kommunikatoren (der Analyis-Lehrenden), genauer gesagt, um die Einstellung der Kommunikatoren gegenüber einem Gegenstand, dem Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre.

Durch die Differenzierung der Fragestellung im nächsten Abschnitt ergibt sich, dass auch der Handlungshintergrund der Kommunikatoren in die Analyse einbezogen wird.

4.3.2. Theoretische Differenzierung der Fragestellung

Aus der Sichtung der Lehrbücher in Abschnitt 3.1.1 ergibt sich, dass Nichtstandardanalysis in der aktuellen Hochschullehre augenscheinlich keine Rolle spielt. Ein systematischer Überblick hierzu fehlt jedoch, insbesondere was die Vorlesungspraxis und die Einstellungen der Lehrenden anbelangt. Die Hauptfrage FF2 („Was denken Analysislehrende an deutschen Hochschulen über den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre?“) lässt sich daher in folgender Weise differenzieren.

FF2a: Werden in den Vorlesungen zur Analysis I/II Elemente oder Methoden der Nichtstandardanalysis berücksichtigt?

FF2b: Wie wird die Einsatzmöglichkeit von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre von den Lehrenden bewertet?

FF2c: Welche Argumente für bzw. gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre werden von den Lehrenden angeführt?

4.4. Ablaufmodell der Analyse

4.4.1. Zu FF2a: Inhaltliche Strukturierung

Zur Beantwortung von Forschungsfrage FF2a dient das Antwortmaterial zur Interviewfrage IF1. Da diese geschlossene Frage von allen Interviewpartnern, bis auf einen, eindeutig beantwortet wurde (siehe Tabelle 4.1), erübrigt sich eine explizite Anwendung der qualitativen Inhaltsanalyse. Formal handelt es sich um eine inhaltliche Strukturierung

Tabelle 4.1.: Auswertung der Antworten auf Interviewfrage IF1 (Einsatz von Elementen/Methoden der Nichtstandardanalysis in Vorlesung Analysis I/II)

Antwort	Anzahl
Ja	0
Nein	49
Nicht eindeutig	1
Summe	50

(mit den Kategorien *Ja* und *Nein* plus ggf. Restkategorien), die den Handlungshintergrund der Kommunikatoren abfragt.

Die Antworten auf Interviewfrage IF1 lassen sich folgendermaßen zusammenzufassen: Keine der befragten Personen setzt Elemente und Methoden der Nichtstandardanalysis in ihren Vorlesungen Analysis I oder II ein. Eine Person (P47) hat den Begriff *Nichtstandardanalysis* fehlinterpretiert. Die Antwort deutet darauf hin, dass P47 keine Elemente oder Methoden der Nichtstandardanalysis einsetzt. Da die zweite, nachfassende E-Mail unbeantwortet blieb, wird die Antwort vorsichtshalber der Restkategorie *Nicht eindeutig* zugeordnet. Zwei Personen (P17 und P36) haben bereits ein Proseminar zur Nichtstandardanalysis durchgeführt. P33 wurde durch die Umfrage angeregt, zukünftig eventuell ein Proseminar oder Seminar zur Nichtstandardanalysis durchzuführen.

4.4.2. Zu FF2b: Skalierende Strukturierung

Zur Beantwortung von Forschungsfrage FF2b dienen in erster Linie die Antworten auf die Interviewfrage IF2. Es befinden sich jedoch auch wertende Aussagen in den Antworten auf die anderen Interviewfragen, sodass das gesamte Material auszuwerten ist.

Die geschlossene Frage IF2 („Könnte nach Ihrer Einschätzung Nichtstandardanalysis in der Lehre sinnvoll eingesetzt werden (evtl. ergänzend zu den Standardvorlesungen, z. B. als Proseminar)?") wurde von den Befragten nicht bloß mit „Ja" oder „Nein" beantwortet, sondern zu einer differenzierteren Bewertung genutzt, sowohl den Grad der Zustimmung bzw. Ablehnung betreffend, als auch die mögliche Unterscheidung nach Veranstaltungsarten. Eine Auswertung mittels der offenen Frage FF2b („Wie wird die Einsatzmöglichkeit von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre von den Lehrenden bewertet?") ist daher angemessen.

Für eine Analyse von Einstellungen zu einem Gegenstand bietet sich eine skalierende Strukturierung an, denn Einstellungen sind in der Regel in einer bestimmten Hinsicht positiv oder negativ und eventuell noch unterschiedlich stark ausgeprägt. Dies kann durch Einschätzungsdimensionen (Variablen) mit jeweiligem Wertebereich (Ausprägungen bzw. Skalenpunkte) abgebildet werden. Im einfachsten Fall sind die Skalenpunkte auf einer Ordinalskala angeordnet (zum Beispiel niedrig, mittel, hoch).

Der skalierenden Strukturierung für den vorliegenden Fall liegt das Ablaufmodell aus Abbildung B.4 zugrunde, dessen Schritte nachfolgend konkretisiert werden.

Bestimmung der Analyseeinheiten. *Auswertungseinheit*, *Kontexteinheit* und *Kodiereinheit* ist der einzelne Fall, also alle gegebenen Antworten einer Person. Das liegt daran, dass die Einstellung zum Gegenstand der Befragung je Person ermittelt und dazu das gesamte Antwortmaterial der jeweiligen Person herangezogen werden soll.

Festlegung der Einschätzungsdimension. Eine erste Sichtung des Antwortmaterials zeigt, dass eine eindimensionale Auswertung die Einschätzung der Kommunikatoren nicht differenziert genug wiedergibt, denn die Einsatzmöglichkeit der Nichtstandardanalysis kann für die Grundvorlesungen zur Analysis negativ, aber für ergänzende Veranstaltungen, wie Seminare und Proseminare, positiv bewertet werden. Die Interviewfrage IF2 hat zu einer solchen Differenzierung ausdrücklich eingeladen.

Es erscheint also sinnvoll, die Bewertungen für die folgenden Veranstaltungsarten getrennt zu analysieren: Grundvorlesungen (Analysis I/II), ergänzende Veranstaltungen im Grundstudium bzw. Bachelor-Studium (Proseminare, Seminare, ergänzende Vorlesungen) und Spezialveranstaltungen im fortgeschrittenen Studium bzw. Master-Studium (Vorlesungen, Seminare, Oberseminare). Spezifischere Bewertungen werden auf dieses Niveau abstrahiert. Fehlt bei der Bewertung ein Bezug zu einer Veranstaltungsart, wird sie auf die Lehre allgemein bezogen.

Als Einschätzungsdimensionen ergeben sich also

- GV (Grundvorlesung)
- EV (ergänzende Veranstaltung)
- SV (Spezialveranstaltungen im fortgeschrittenen Studium)
- Allgemein (ohne Bezug zu einer Veranstaltungsart)

Bestimmung der Ausprägungen. Die Ausprägungen können für alle Einschätzungsdimensionen einheitlich verwendet werden, denn sie sollen ausdrücken, wie hoch die Eignung des Themas Nichtstandardanalysis für die jeweilige Veranstaltungsart bzw. für die Lehre allgemein eingeschätzt wird. Konkret werden folgende Ausprägungen definiert.

- gut geeignet
- möglich
- weniger geeignet
- nicht geeignet

Definition, Ankerbeispiele, Kodierregeln. Die Definition der Ausprägungen mit jeweiligen Ankerbeispielen ist in Tabelle 4.2 angegeben. In den Ankerbeispielen werden konkrete Veranstaltungsarten genannt, die Kategorien werden aber für alle Einschätzungsdimensionen analog verwendet.

Bei der Einschätzung von Fundstellen kommen folgende Kodierregeln zum Einsatz:

Tabelle 4.2.: Kategoriensystem zur skalierenden Strukturierung (FF2b). NSA steht abkürzend für Nichtstandardanalysis.

Kategorie	Definition	Ankerbeispiele
Gut geeignet	Hält NSA für gut geeignet (für diese Veranstaltungsart).	Als Stoff für ergänzende Vorlesungen und Seminare finde ich sie aber sehr gut [P17].
Möglich	Hält den Einsatz von NSA (in dieser Veranstaltungsart) für möglich (ohne erkennbare Tendenz dafür oder dagegen).	Natürlich ist das vorstellbar, wie z. B. im Rahmen eines (Pro-) Seminars [P32]. Als Proseminar-Thema könnte ich es mir prinzipiell vorstellen [P40].
Weniger geeignet	Hält den Einsatz von NSA (in dieser Veranstaltungsart) zwar für möglich, hat aber geringe Motivation dazu bzw. hält andere Themen für wichtiger.	Daher eignet sich das Thema sicherlich z. B. für ein Proseminar, aber meine Motivation dazu wäre reichlich gering [P24].
Nicht geeignet	Hält NSA für nicht geeignet (für diese Veranstaltungsart).	Halte ich nicht für sinnvoll [P10]. Die hyperreellen Zahlen sind für eine Grundvorlesung völlig ungeeignet [P26].
Ambivalent	Hält NSA (für diese Veranstaltungsart) einerseits für geeignet, andererseits für nicht geeignet.	

- Wenn nur Interviewfrage IF1 beantwortet wurde, wird eine Bewertung auf die Veranstaltungsart Grundvorlesung bezogen (weil die Frage sich hierauf bezog), es sei denn, in der Antwort wird explizit auf eine andere Veranstaltungsart Bezug genommen.

- Wenn eine Bewertung ansonsten nicht eindeutig einer Veranstaltungsart zuzuordnen ist, dann wird sie auf die Lehre allgemein bezogen.

- Formulierungen wie „eignet sich“ oder „kommt infrage“ oder „ist vorstellbar“ werden als *gut geeignet* gewertet, wenn positive Verstärker („gut“, „allemal“) hinzukommen oder darüber hinaus Argumente für einen Einsatz von Nichtstandardanalysis angegeben werden (P12). Sie werden als *weniger geeignet* gewertet, wenn Einschränkungen („eignet sich eventuell, aber ...“) oder Argumente gegen einen Einsatz gegen Nichtstandardanalysis angegeben werden. Ansonsten werden sie als *möglich* gewertet.

- Fehlen explizite Bewertungsformulierungen („eignet sich“ bzw. „eignet sich nicht“), sind aber Begründungen angegeben, warum man Nichtstandardanalysis eingesetzt hat / nicht eingesetzt hat oder einsetzen würde / nicht einsetzen würde, so wird dies als *gut geeignet* bzw. *nicht geeignet* gewertet (P15, P23. P27).

- Ein Bericht über positive Erfahrungen mit dem Einsatz von Nichtstandardanalysis wird als *gut geeignet* gewertet (P17, P36).

- Werden für eine Veranstaltungsart verschiedene Bewertungen abgegeben (eventuell aufgrund einer weiteren Differenzierung), wird dies als *ambivalent* gewertet. Beispiel: P22 unterscheidet zwischen Nichtstandardanalysis im strengen Sinne und Nichtstandardanalysis im intuitiven Sinne.

Materialdurchlauf. Die Schritte 5 (Materialdurchlauf: Fundstellenbezeichnung) und 6 (Materialdurchlauf: Bearbeitung und Extraktion der Fundstellen) aus Abbildung B.4 sind im Anhang C dokumentiert.

Ergebnisaufbereitung. Das Ergebnis des Materialdurchlaufs ist in Tabelle 4.3 nach Interviews aufgeschlüsselt und zusammenfassend in Tabelle 4.4 dargestellt. Insgesamt waren 29 Interviews für die Forschungsfrage FF2 auswertbar, enthielten also Fundstellen für die skalierende Strukturierung.

In einer weiteren Zusammenfassung ist festzustellen:

- 10 Personen (34 %) beurteilen die Einsatzmöglichkeiten von Nichtstandardanalysis in der Lehre ausschließlich negativ (allgemein oder für alle Veranstaltungsarten nicht oder weniger geeignet): P03, P12, P15, P19, P23, P24, P27, P28, P37, P39.

- 4 Personen (14 %) halten den Einsatz höchstens in Spezialveranstaltungen im fortgeschrittenen Studium für möglich oder gut geeignet: P26, P29, P33, P38.

Tabelle 4.3.: Skalierende Strukturierung (FF2b)

Fall	Grundvorlesung	Ergänzende Veranst.	Spezialveranst.	Lehre allgemein
P02	nicht geeignet	gut geeignet		
P03				nicht geeignet
P10	nicht geeignet	gut geeignet		
P12				weniger geeignet
P13		gut geeignet		
P15	nicht geeignet			
P17	nicht geeignet	gut geeignet		
P19	nicht geeignet	weniger geeignet		
P20	nicht geeignet	gut geeignet		
P22		gut geeignet	gut geeignet	ambivalent
P23	nicht geeignet			
P24		weniger geeignet		
P26	nicht geeignet		gut geeignet	
P27				nicht geeignet
P28	nicht geeignet			
P29	nicht geeignet		möglich	
P31		möglich		
P32		möglich		
P33	nicht geeignet		möglich	
P36	nicht geeignet	gut geeignet		
P37				nicht geeignet
P38	nicht geeignet		möglich	
P39		weniger geeignet		
P40	nicht geeignet	möglich		
P41	nicht geeignet	möglich		
P44	nicht geeignet	möglich		
P45				möglich
P49	gut geeignet	gut geeignet		
P50	gut geeignet	gut geeignet		gut geeignet

Tabelle 4.4.: Auswertung der skalierenden Strukturierung (FF2b)

Kategorie	GV	EV	SV	Allg.
gut geeignet	2	9	2	1
möglich	0	5	3	1
weniger geeignet	0	3	0	1
nicht geeignet	16	0	0	3
ambivalent	0	0	0	1
k. A.	11	12	24	22
Summe	29	29	29	29

- 6 Personen (21 %) stehen zumindest dem ergänzenden Einsatz neutral gegenüber (allgemein oder für ergänzende Veranstaltung möglich): P31, P32, P40, P41, P44, P45.
- 9 Personen (31 %) stehen dem ergänzenden Einsatz positiv gegenüber (für ergänzende Veranstaltung gut geeignet): P02, P10, P13, P17, P20, P22, P36, P49, P50. 2 dieser Personen (7 % von allen) beurteilen die Einsatzmöglichkeiten grundsätzlich positiv (allgemein oder für ergänzende Veranstaltung und Grundvorlesung gut geeignet): P49, P50.

Die Prozentangaben beziehen sich auf die 29 Interviews, die für Forschungsfrage FF2b auswertbar waren.

4.4.3. Zu FF2c: Zusammenfassung mit induktiver Kategorienbildung

Eine Welche-Fragestellung deutet nach Mayring immer auf induktive Kategorienbildung hin (vgl. Mayring 2015, S. 88). Daher wird auch hier das Material durch eine Zusammenfassung mit induktiver Kategorienbildung ausgewertet. Das Ablaufmodell entspricht dem in Abbildung B.3, wobei die Zusammenfassung gemäß Abbildung B.2 durchgeführt wird.

Die theoretische Ausgangssituation wurde in den Kapiteln 2 und 3 dargestellt. Gegenstand und Material sind gemäß Abschnitt 4.2 vorgegeben, das Ziel der Analyse ist durch die Forschungsfrage FF2c bestimmt:

> Welche Argumente für bzw. gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre werden von den Lehrenden angeführt?

Zur Beantwortung dieser Frage dienen in erster Linie die Antworten auf die Interviewfrage IF3 („Welches sind die Hauptgründe für Ihre Einschätzung?"). Da die zuvor gestellte Frage IF2 auf die Einschätzung der Einsatzmöglichkeit von Nichtstandardanalysis in der Lehre abzielte, ist FF2c eine angemessene Frage zur Auswertung der Antworten auf IF3. Es befinden sich jedoch auch Begründungen für die jeweilige Einschätzung in den Antworten auf die anderen Interviewfragen, sodass wieder das gesamte Material auszuwerten ist.

Selektionskriterium für die Kategoriendefinition. Jede Aussage, die eine Begründung für oder gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre darstellt.

Abstraktionsniveau. Verschiedene Kategorien sollen in der Regel wesentlich verschiedene Aspekte der Begründung ausdrücken. So werden zum Beispiel *Fehlende Voraussetzungen* und *Hoher Abstraktionsgrad* als Kategorien unterschieden. Zwar bezieht sich das Argument fehlender Vorraussetzungen oft auf Themen, die auch einen hohen Abstraktionsgrad haben, es werden aber unterschiedliche Aspekte angesprochen, die beide für die jeweilige Argumentation wesentlich sind. Spezifischere Nennungen unter dem Aspekt der fehlenden Voraussetzungen oder unter dem Aspekt des hohen Abstraktionsgrades, zum Beispiel Modelltheorie oder Ultrafilter, führen dagegen nicht zu eigenen Kategorien. Bei der Generalisierung wird noch der (dem Kontext der Paraphrase entnommene) Bezug zur Veranstaltungsart festgehalten. Bei der zweiten Reduktion wird der Bezug zur Veranstaltungsart nur dann beibehalten, wenn er für das Argument wesentlich ist.

Definition der Analyseeinheiten. *Auswertungseinheit* ist bei induktiver Kategorienbildung immer das gesamte Material, da das endgültige Kategoriensystem auf alle Interviews bezogen ist (vgl. Mayring 2015, S. 88). *Kontexteinheit* ist das einzelne Interview (alle Antworten einer Person). *Kodiereinheit* ist jedes Bedeutung tragende Element, das dem Selektionskriterium genügt, das also eine Begründung für oder gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre darstellt. Theoretisch kann dies ein einzelnes Wort sein, in der Regel ist es ein Aussagesatz. In einigen Fällen enthält ein Satz mehrere Kodiereinheiten (insbesondere bei Formulierungen mit „sowohl … als auch … “ oder „weder … noch … “). In diesen Fällen wird er bei der Paraphrasierung aufgetrennt (zum Beispiel bei P17 oder P50).

Materialdurcharbeitung. Die Schritte der Zusammenfassung des Materials zur induktiven Kategorienbildung sind im Anhang D dokumentiert. Tabelle 4.5 zeigt das Kategoriensystem und die Auswertung des Materials unter diesem Kategoriensystem. In der Spalte *#Kod.* ist die Anzahl der Kodierungen unter dieser Kategorie angegeben, in der Spalte *#Int.* die Anzahl der Interviews mit Kodierung unter dieser Kategorie, in der Spalte *Anteil* der prozentuale Anteil der Interviews mit Kodierung unter dieser Kategorie, bezogen auf alle 29 Interviews, die zu den Forschungsfragen FF2b und FF2c auswertbar waren.

Die am häufigsten genannten Argumente gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis waren demnach

- Geringe Relevanz für die Mathematik (48 %)
- Fehlende Zeit in den Grundvorlesungen (21 %)
- Geringer Mehrwert gegenüber Standardanalysis (17 %)
- Fehlender Nutzen für späteres Studium (14 %)

Zählt man, in wie vielen der 29 Interviews Argumente für bzw. gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis genannt wurden, erhält man folgende Verteilung:

- in zwei Interviews (7 %) ausschließlich Argumente dafür (P13, P22),
- in zwei Interviews (7 %) sowohl Argumente dafür, als auch dagegen (P10, P17),
- in drei Interviews (10 %) weder Argumente dafür noch dagegen (P32, P45, P49),
- in den restlichen 22 Interviews (76 %) ausschließlich Argumente dagegen.

Tabelle 4.5.: Auswertung zu FF2c

Kategorie	#Kod.	#Int.	Anteil
Verständnisfördernd	2	2	7 %
Elegantere und intuitivere Beweise	1	1	3 %
Entwicklung von Intuition	1	1	3 %
Stoffwiederholung in ergänzenden Veranstaltungen	1	1	3 %
Förderung von Grundlagenbewusstsein	1	1	3 %
Andere inhaltliche Vorgaben	3	3	10 %
Geringe Zahl geeigneter Lehrbücher	1	1	3 %
Fehlende personelle Ressourcen	1	1	3 %
Fehlende Kompetenz bei den Lehrenden	1	1	3 %
Fehlende Zeit in den Grundvorlesungen	6	6	21 %
Fehlende Voraussetzungen	3	3	10 %
Überforderung der Studierenden	2	2	7 %
Verwirrung der Studierenden	4	4	14 %
Hoher Abstraktionsgrad	2	2	7 %
Geringe Relevanz für die Mathematik	15	14	48 %
Keine Relevanz für eigenes Forschungsgebiet	1	1	3 %
Geringer Mehrwert gegenüber Standardanalysis	5	5	17 %
Fehlender Nutzen für späteres Studium	4	4	14 %
Summe	54		

4.4.4. Inhaltsanalytische Gütekriterien

Bei der Anwendung inhaltsanalytischer Gütekriterien ist die Frage zu stellen, wie valide und zuverlässig die hier gewonnenen Ergebnisse sind.

Auf die Bestimmung der Intercoderreliabilität als Maß für eine einheitliche Anwendung des Kodierleitfadens kann hier verzichtet werden, weil das Material nur von einer Person ausgewertet wurde. Das regelgeleitete Vorgehen, zum Beispiel bei der Kategorienbildung, bei der Bildung von Analyseeinheiten oder bei der Selektion und Kennzeichnung von Fundstellen mittels eines definierten Kodierleitfadens, sorgt für einen transparenten Analyseprozess. Das ausgewertete Material ist vollständig im Anhang angegeben, sodass auch die Anwendung des Kodierleitfadens in allen Schritten nachvollzogen werden kann.

Bezüglich der Validität ist zu beachten, dass das ausgewertete Material aus einer Umfrage mit freiwilliger Teilnahme und einem zuvor festgelegten Adressatenkreis stammt (siehe Abschnitt 4.2.1). Die in diesem Kapitel vorgestellten Antworten auf die Forschungsfragen FF2a, FF2b und FF2c sind also jeweils auf die zu diesen Fragen auswertbaren Rückmeldungen zu beziehen und nicht uneingeschränkt verallgemeinerungsfähig. Für das in dieser Arbeit verfolgte Ziel einer Standortbestimmung von Nichtstandard in der Lehre der Analysis ist diese Einschränkung jedoch nicht ausschlaggebend. Bei dem angewendeten Kriterium zur Auswahl der Befragten (die Lehrenden der Analysis-Einführungsveranstaltung eines bestimmten Semesters an allen deutschen Hochschulen) und der tatsächlichen Beteiligung an der Umfrage ist davon auszugehen, dass wesentliche Positionen und Argumente im auswertbaren Material zu finden und Tendenzen erkennbar sind, auch wenn die quantitativen Auswertungen (zum Beispiel Prozentzahlen in den jeweiligen Antwortkategorien) nicht unmittelbar auf die Gesamtheit der Befragten oder die Gesamtheit der Analysislehrenden übertragen werden können.

4.5. Ergebniszusammenfassung und Interpretation

Die ursprüngliche und noch sehr allgemein gestellte Forschungsfrage dieses Kapitels, „FF2: Was denken Analysislehrende an deutschen Hochschulen über den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre?“, wurde in Abschnitt 4.3.2 in folgender Weise differenziert:

FF2a: Werden in den Vorlesungen zur Analysis I/II Elemente oder Methoden der Nichtstandardanalysis berücksichtigt?

FF2b: Wie wird die Einsatzmöglichkeit von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre von den Lehrenden bewertet?

FF2c: Welche Argumente für bzw. gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre werden von den Lehrenden angeführt?

4.5.1. Die Verbreitung von Nichtstandard

Die Ergebnisse aus Abschnitt 4.4.1 haben das Bild, das sich durch die Lehrbuchanalyse (siehe Abschnitt 3.1.1) ergeben hat, bestätigt: Nichtstandardanalysis spielt in der Hochschullehre so gut wie keine Rolle. Keiner der 50 Lehrenden, die sich an der Umfrage beteiligt haben, setzt Elemente und Methoden der Nichtstandardanalysis in ihren Vorlesungen Analysis I oder II ein. Zwei Personen gaben an, bereits ein Proseminar zur Nichtstandardanalysis durchgeführt zu haben. Eine Person wurde durch die Umfrage angeregt, zukünftig eventuell ein Proseminar oder Seminar zur Nichtstandardanalysis durchzuführen.

4.5.2. Die Bewertung von Nichtstandard (aus der Sicht der Lehrenden)

Die Ergebnisse aus Abschnitt 4.4.2 lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- 10 Personen (34 %) beurteilen die Einsatzmöglichkeiten von Nichtstandardanalysis in der Lehre ausschließlich negativ (allgemein oder für alle Veranstaltungsarten nicht oder weniger geeignet).
- 4 Personen (14 %) halten den Einsatz höchstens in Spezialveranstaltungen im fortgeschrittenen Studium für möglich oder gut geeignet.
- 6 Personen (21 %) stehen zumindest dem ergänzenden Einsatz neutral gegenüber (allgemein oder für ergänzende Veranstaltung möglich).
- 9 Personen (31 %) stehen dem ergänzenden Einsatz positiv gegenüber (für ergänzende Veranstaltung gut geeignet). 2 von diesen Personen (7 % von allen) beurteilen die Einsatzmöglichkeiten grundsätzlich positiv (allgemein oder für ergänzende Veranstaltung und Grundvorlesung gut geeignet).

Die Prozentangaben beziehen sich auf die 29 Interviews, die für FF2b und FF2c auswertbar waren.

Tabelle 4.6.: Auswertung zu FF2c mit Oberkategorien

Oberkategorie	Kategorie (Anzahl Nennungen)
Kognitiver Vorteil	Verständnisfördernd (2) Elegantere und intuitivere Beweise (1) Entwicklung von Intuition (1)
Stoffwiederholung	Stoffwiederholung in ergänzenden Veranstaltungen (1)
Grundlagenbewusstsein	Förderung von Grundlagenbewusstsein (1)
Ungünstige Rahmenbedingungen	Andere inhaltliche Vorgaben (3) Geringe Zahl geeigneter Lehrbücher (1) Fehlende personelle Ressourcen (1) Fehlende Kompetenz bei den Lehrenden (1) Fehlende Zeit in den Grundvorlesungen (6)
Überforderung	Fehlende Voraussetzungen (3) Überforderung der Studierenden (2) Verwirrung der Studierenden (4) Hoher Abstraktionsgrad (2)
Geringe Relevanz	Geringe Relevanz für die Mathematik (14)
Persönliche Gründe	Keine Relevanz für eigenes Forschungsgebiet (1)
Fehlender Nutzen	Geringer Mehrwert gegenüber Standardanalysis (5) Fehlender Nutzen für späteres Studium (4)

4.5.3. Die Argumente der Lehrenden

Die von den Lehrenden genannten Argumente für bzw. gegen den Einsatz von Nichtstandard in der Lehre sind in Tabelle 4.6 zusammengefasst. Die Anzahl der Interviews, in denen das jeweilige Argument genannt wurde (von insgesamt 29 Interviews), ist jeweils in Klammern angegeben. Im Unterschied zur Darstellung in Tabelle 4.5 in Abschnitt 4.4.3 sind die Kategorien hier noch weiter zu Oberkategorien aggregiert zur Vorbereitung auf die Interpretation hinsichtlich möglicher Widerstände (siehe Abschnitt 4.5.4).

4.5.4. Gründe für eine ablehnende Haltung gegenüber Nichtstandard in der Lehre

Konflikte mit Denkgewohnheiten oder Wertvorstellungen sind mögliche Ursachen für eine ablehnende Haltung gegenüber dem Gegenstand, der diese Konflikte auslöst. Es liegt daher nahe, bei der Interpretation der Ergebnisse aus Tabelle 4.6 hinsichtlich möglicher Ablehnungsgründe gegenüber Nichtstandard den Fokus auf die Kategorien zu legen, die auf solche Konflikte schließen lassen, und weniger auf die Kategorien, die auf ungünstige Rahmenbedingungen verweisen. Ich sehe hier folgende Ansatzpunkte:

Überforderung

Annahme:	Nichtstandardanalysis kann in Anfängerkursen (aufgrund fehlender Voraussetzungen) nicht mit der gebotenen Strenge gelehrt werden.
Folge:	Ablehnung aufgrund des Konflikts mit der Wertvorstellung „mathematische Strenge“ in der Hochschullehre.

Annahme:	Nichtstandardanalysis ist für Anfänger zu schwierig.
Folge:	Ablehnung aufgrund des Konflikts mit anerkannten didaktischen Prinzipien (nicht verwirren, nicht überfordern, keine unangemessen hohe Abstraktion gleich zu Beginn).

Geringe Relevanz

Annahme:	Nichtstandardanalysis ist für die Mathematik wenig relevant.
Folge:	Ablehnung aufgrund des Konflikts mit dem Anspruch, etwas Relevantes zu lehren.

Fehlender Nutzen

Annahme:	Nichtstandardanalysis bringt keinen Nutzen für das spätere Studium (da nicht mehr gebraucht) und hat keinen Mehrwert gegenüber der Standardanalysis.
Folge:	Ablehnung aufgrund des Konflikts mit dem Anspruch, etwas Nützliches zu lehren.

Um zu prüfen, ob es sich bei den oben aufgeführten Annahmen um berechtigte Urteile oder eher um Vorurteile handelt, gehen wir den folgenden Fragen nach:

- Wie schwierig ist Nichtstandard?
- Wie relevant ist Nichtstandard?
- Welchen Nutzen bringt Nichtstandard?

4.5.5. Wie schwierig ist Nichtsstandard?

Der Überblick in Kapitel 2 hat gezeigt, dass Nichtstandardanalysis ein durchaus anspruchsvolles Themengebiet ist. Es dürfte weitgehende Einigkeit darüber bestehen, dass man in Analysis I weder Robinsons modelltheoretische Argumentation, noch Luxemburgs Ultrafilterkonstruktion, noch Nelsons Axiome der Internen Mengenlehre oder verwandte Axiomensysteme lehren kann. Die hierfür benötigten Konzepte sind für Anfänger in der Tat zu schwierig bzw. nicht verfügbar. Sie werden aber auch nicht gebraucht, wenn man lediglich potentiellen Verständnisschwierigkeiten der Studierenden bei den Grundbegriffen der elementaren Analysis begegnen will. In Abschnitt 3.1 wurden verschiedene reduzierte Programme vorgestellt, mit denen Methoden der Nichtstandardanalysis auch Anfängern zugänglich gemacht werden können.

Die geringsten Veränderungen gegenüber den Standardvorlesungen erfordert das Vorgehen nach Henle 1999, da hier noch direkt mit den reellen Folgen operiert wird unter Einbeziehung von Begriffen und Denkweisen der Nichtstandardanalysis. Eine Konstruktion neuer Zahlen mittels Äquivalenzklassen oder neue Axiome sind hier nicht notwendig. In dieser Weise war auch bereits Laugwitz in seinen Anfängervorlesungen vorgegangen (vgl. Laugwitz 1986, S. 242).[1]

Einen hohen Wirkungsgrad hat meines Erachtens auch ein an Keisler und Henle/Kleinberg angelehntes Vorgehen auf der Basis des *elementaren Erweiterungsprinzips* (im Folgenden auch kurz *Erweiterungsprinzip* genannt). Schauen wir uns dieses Prinzip noch einmal an. In seiner Kurzform lautet es:

> Es gibt eine elementare Erweiterung der Struktur der reellen Zahlen.

Ausführlicher lautet es (wie in Abschnitt 1.3.2 formuliert):

Elementares Erweiterungsprinzip: Es gibt eine echte Erweiterung $^*\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}$ und eine Abbildung $*$, die

1. jeder n-stelligen Relation R über $\mathbb{R}$ eine n-stellige Relation $^*R$ über $^*\mathbb{R}$ zuordnet,
2. jeder n-stelligen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$) eine n-stellige Funktion $^*f : {}^*D \to {}^*\mathbb{R}$ zuordnet,
3. das folgende *Transferprinzip* erfüllt: Ist φ eine Aussage erster Stufe, die in $\mathbb{R}$ gilt, dann gilt in $^*\mathbb{R}$ die Aussage $^*\varphi$, die aus φ dadurch entsteht, dass alle Funktionen und Relationen durch ihre Bilder unter der Abbildung $*$ ersetzt werden.

Aussagen erster Stufe müssen dazu nicht formal definiert werden. Es reicht, sie informell durch die Einschränkung zu charakterisieren, dass Quantifizierungen ausschließlich über Zahlvariablen erlaubt sind.

Motiviert man das Erweiterungsprinzip durch Leibniz' Leitgedanken zur Infinitesimalrechnung (etwa analog zu den historischen Anknüpfungspunkten in Abschnitt 5.7.1) und erläutert es anhand einiger Beispiele, erscheint es mir als Ausgangspunkt für die elementare Analysis nicht als zu schwierig. Im Grunde ist es sogar recht einfach zu verstehen, wenn man die reellen Zahlen als gegeben annimmt.[2] Der entscheidende Vorteil dieses Zugangs ist, dass mit einem einzigen zusätzlichen Prinzip, dem Erweiterungsprinzip, Nichtstandardbeweise mit gleicher Strenge geführt werden können wie Standardbeweise.

Eine andere Frage ist, ob das Erweiterungsprinzip in einer Einführungsveranstaltung als zusätzliches Axiom akzeptabel ist, ohne konkrete Beispiele für Nichtstandardzahlen zu haben. In dieser Hinsicht unterscheidet sich die Erweiterung $^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ von der Erweiterung $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$, wo man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ *konstruiert* (und $\mathbb{R}$ dann einbettet).

1. Weitergehende Vorlesungen im Stile seines Buches „Zahlen und Kontinuum", die das Thema Infinitesimalmathematik ausführlicher behandeln, hat er in Abständen von etwa vier Jahren für Studierende mittlerer Semester gehalten (vgl. Laugwitz 1986, S. 242).

2. Formal ist das Erweiterungsprinzip ein Axiomenschema in einer Sprache mit überabzählbar vielen Symbolen (vgl. Abschnitt 2.3.1), aber auf dieser formalen Ebene werden Axiome in den Anfängervorlesungen nicht behandelt.

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, dass in einer Anfängervorlesung auch die Axiome der reellen Zahlen akzeptiert werden müssen, ohne dass man eine Konstruktion der reellen Zahlen zu sehen bekommt. Allerdings hat man dort den Vorteil, die reellen Zahlen als die „vertrauten unendlichen Dezimalbrüche“ wiederzufinden.[3] Wir fragen also noch einmal: Ist das Erweiterungsprinzip in einer Einführungsveranstaltung als Axiom akzeptabel?

Hierzu kann man Folgendes anführen. Erstens: In der Studie von Sullivan (siehe Abschnitt 3.2.1) hatten die Studierenden (nach dem Eindruck der Lehrenden) keine Probleme, die Axiome der hyperreellen Zahlen (im Wesentlichen also das Erweiterungsprinzip) zu akzeptieren.[4] Zweitens: Das Erweiterungsprinzip ist ein Postulat, das – wie die Axiome der reellen Zahlen – mathematisch gerechtfertigt ist (da es entsprechende Modelle gibt) und das Studierenden dazu dienen kann, sich die historisch geleitete und intuitive Begriffswelt der Analysis auf einer präzisen Grundlage zu erschließen. In den geschilderten Experimenten mit Keislers Ansatz bekommen die Studierenden anschließend die Weierstraß'sche Begriffswelt daneben gestellt (die ohne das Erweiterungsprinzip auskommt), haben aber trotzdem noch die kognitive Brücke zur intuitiveren Begriffswelt. Drittens, schließlich, ist das Erweiterungsprinzip in gewisser Weise eine konsequente Verallgemeinerung (und damit Verstärkung) der Forderung, dass ${}^*\mathbb{R}$ ein angeordneter Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$ sein soll. Die Verallgemeinerung im Erweiterungsprinzip besteht darin, dass die Abbildung $*$ nicht nur der Relation $<$ und den Funktionen $+$ und $\cdot$, sondern jeder Relation und jeder Funktion über $\mathbb{R}$ eine Erweiterung zuordnet, und dass das Transferprinzip nicht nur für Körper- und Anordnungsaxiome, sondern für alle Aussagen erster Stufe gilt.

Insgesamt ist festzustellen, dass Nichtstandardmethoden nicht zwangsläufig zu schwierig sind, um in Anfängervorlesungen einbezogen werden zu können. Die hierzu vorhandenen Konzepte führen nach bisheriger Erfahrung aus der Lehre nicht zu einer Verwirrung der Studierenden. Die in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.3 geschilderten Rückmeldungen der Lehrenden und Studierenden weisen eher in die entgegengesetzte Richtung: Die Einbeziehung von Nichtstandard wurde von den Studierenden als motivations- und verständnisfördernd empfunden. Auch die Anschlussfähigkeit an Standardveranstaltungen sowie die Fähigkeit, den Kalkül korrekt anzuwenden und Standardprüfungsaufgaben zu lösen wurde gemäß den in Abschnitt 3.2 berichteten Erfahrungen durch den Nichtstandardeinstieg nicht beeinträchtigt.

Der Vorwurf der Überforderung der Studierenden durch zu hohe Abstraktion trifft auf die hier diskutierten, reduzierten Programme ebenfalls nicht zu. Durch die Verfügbarkeit unendlich kleiner und unendlich großer Zahlen bieten sich im Gegenteil ganz neue Mög-

3. Der Begriff steht in Anführungszeichen, weil sich unendliche Dezimalbrüche bei einer genaueren Analyse als weniger vertraut herausstellen, als man denken könnte, was an der grundsätzlichen Problematik des aktual Unendlichen liegt (siehe hierzu die Diskussion in Kapitel 5 (speziell in 5.2, 5.4 und 5.5)). Für eine Kritik aus didaktischer Perspektive an der Einführung der reellen Zahlen als unendliche Dezimalbrüche siehe auch Bedürftig 2018 und Bedürftig und Kuhlemann 2020.

4. In Talls Experiment (siehe Abschnitt 3.2.2) hatte etwa die Hälfte der Kursteilnehmer angegeben, dass sie die Konstruktion der hyperreellen Zahlen für essentiell hielt, aber die Situation ist nicht vergleichbar, da es sich dort um Studierende im dritten Studienjahr handelte.

lichkeiten der Veranschaulichung. Das Instrument der unendlichfachen Vergrößerung oder Verkleinerung durch entsprechende „Mikroskope“ bzw. „Teleskope“ wird von Keisler, Tall, Deledicq & Diener und anderen Lehrbuchautoren intensiv genutzt und als wesentlicher Vorteil eines Nichtstandardeinstiegs in die Analysis gewertet. Wie weit dieses Instrument trägt, wurde in Kuhlemann 2018a untersucht.

4.5.6. Wie relevant ist Nichtstandard?

Landers und Rogge schreiben im Vorwort ihres Lehrbuches über die Bedeutung von Nichtstandard: „Die Nichtstandard-Mathematik hat in den letzten Jahrzehnten einen großen Aufschwung erfahren. Sie hat die Entwicklungen in den verschiedenartigsten Gebieten beeinflusst und befruchtet“ (Landers und Rogge 1994, S. V). Die Autoren begründen weiter:

> Es hat sich gezeigt, daß Nichtstandard-Methoden ein mächtiges Instrument zur Behandlung von mathematischen Fragestellungen sind. Nichtstandard-Methoden wurden seit Robinson dazu eingesetzt, um einerseits bekannte Ergebnisse durchsichtiger und natürlicher zu beweisen und andererseits neue mathematische Einsichten zu gewinnen sowie offene Probleme der klassischen Mathematik zu lösen. Sehr erfolgreich eingesetzt wurden Nichtstandard-Methoden bisher in der Topologie, Funktionalanalysis, Stochastik sowie in der Mathematischen Physik und der Mathematischen Ökonomie. Gerade in den angewandten Wissenschaften hat sich gezeigt, daß der Nichtstandard-Bereich $^*\mathbb{R}$ zur Modellbildung häufig besser geeignet ist als der klassische Bereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen (Landers und Rogge 1994, S. 2).

Landers und Rogge selbst legen ihren Schwerpunkt auf Topologie und Stochastik. Zahlreiche Beispiele für Anwendungen in verschiedenen Bereichen findet man zum Beispiel in Albeverio u. a. 1986 (*Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics*), Arkeryd, Cutland und Henson 1997 (*Nonstandard Analysis: Theory and Applications*), Davis 1977 (*Applied nonstandard analysis*), Diener und Diener 1995 (*Nonstandard Analysis in Practice*), Loeb und Wolff 2015 (*Nonstandard analysis for the working mathematician*), Lutz und Goze 1981 (*Nonstandard Analysis: A Practical Guide with Applications*) und Väth 2007 (*Nonstandard Analysis*). Speziell zu Anwendungen in der Ökonomie siehe auch Anderson 2008 (*Infinitesimal methods in mathematical economics*). Das Buch von Loeb und Wolff enthält ebenfalls einen Teil über Ökonomie. Väth, der insbesondere Topologie und Funktionalanalysis im Blick hat, sieht die Stärke der Nichtstandardmethoden darin, dass man mit ihnen mathematische Begriffe „explizit“ beschreiben kann, die sich mit Standardmethoden nur „implizit“ und in umständlicher Weise beschreiben lassen (zum Beispiel Hahn-Banach-Limits) (vgl. Väth 2007, S. vii, Anführungszeichen auch im Original).

Prominente Erfolge der Nichtstandardanalysis sind die Lösung des *invariant subspace problem* durch den Satz von Bernstein und Robinson (siehe Bernstein und Robinson 1966) und die deutliche Vereinfachung von Gleasons Lösung des fünften Hilbert'schen

Problems (Beweis, dass jede lokal euklidische Gruppe eine Lie-Gruppe ist, siehe Hirschfeld 1990 und Tao 2014).

Schaut man sich die Anzahl der Veröffentlichungen mit der Klassifizierung „26E35 Nonstandard analysis" (gemäß MSC2020-Mathematics Subject Classification System) in zbMATH Open an, sieht man, dass Nichtstandardanalysis seit den 1960er Jahren ein aktives Forschungsfeld war und immer noch ist (mit einer besonderen Hochphase in den 1980ern und 1990ern). Die Abbildungen 4.1 bis 4.6 zeigen die Verteilung der Veröffentlichungen von 1963 bis 2020 mit folgenden Klassifizierungscodes:

- 26E35 Nonstandard analysis
- 03H05 Nonstandard models in mathematics
- 03H10 Other applications of nonstandard models (economics, physics, etc.)
- 03H15 Nonstandard models of arithmetic
- 28E05 Nonstandard measure theory
- 54J05 Nonstandard topology

Zu beachten ist, dass die Dokumente oft mehreren Klassifizierungscodes zugeordnet sind (zum Beispiel 26E35 Nonstandard analysis und 54J05 Nonstandard topology).[5]

5. Die Zahlen sind der Internetseite `https://www.zbmath.org/` (besucht am 18.04.2021) entnommen und wurden von mir grafisch aufbereitet.

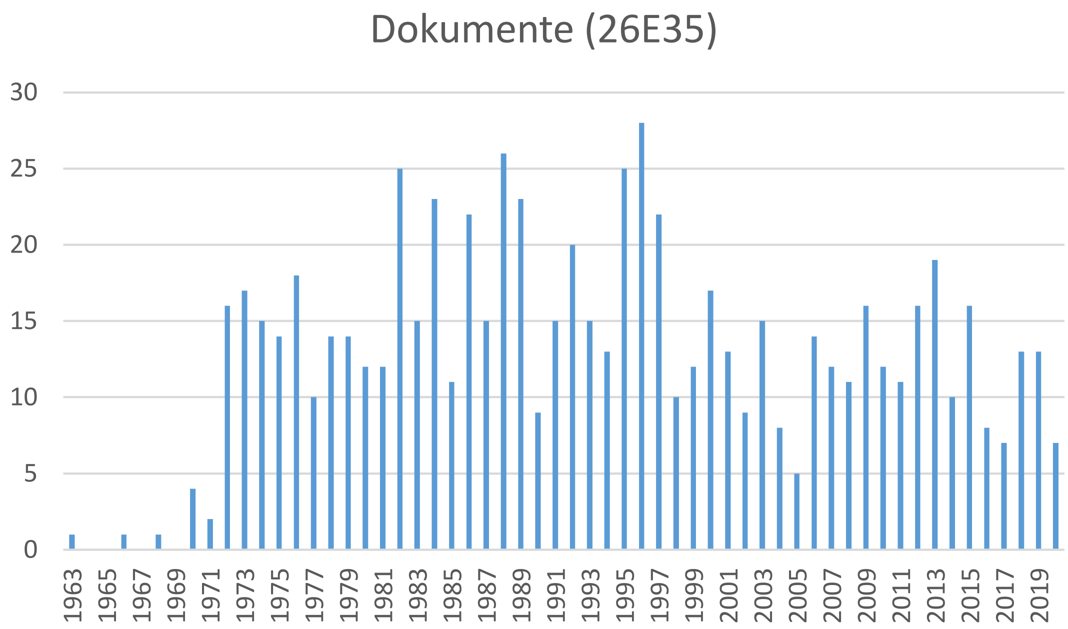

Abbildung 4.1.: Anzahl der veröffentlichten Dokumente mit MSC 26E35 (Nonstandard analysis)

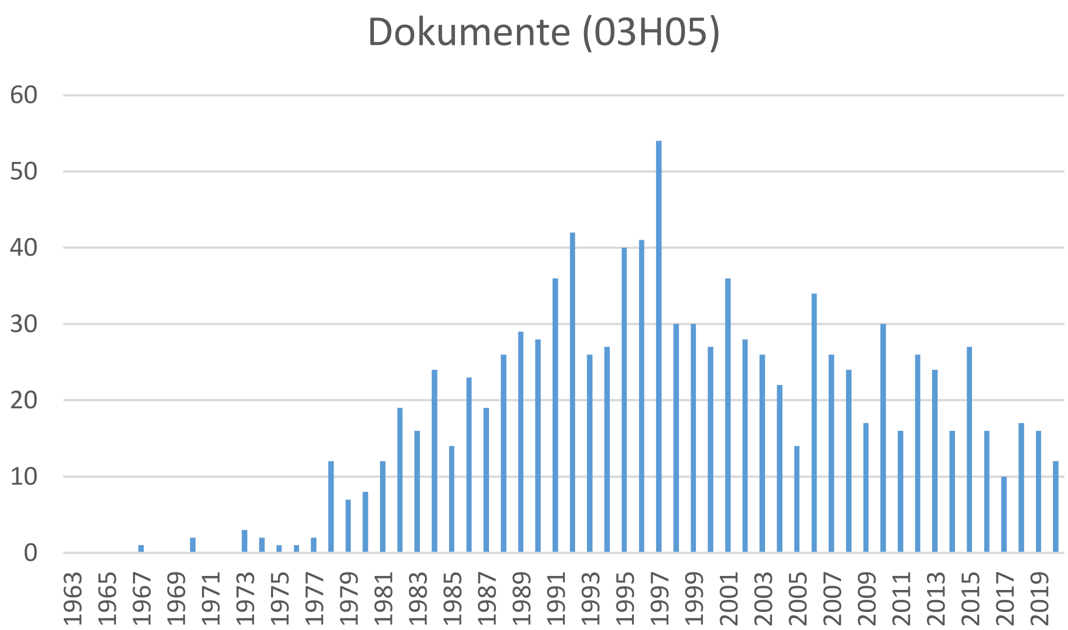

Abbildung 4.2.: Anzahl der veröffentlichten Dokumente mit MSC 03H05 (Nonstandard models in mathematics)

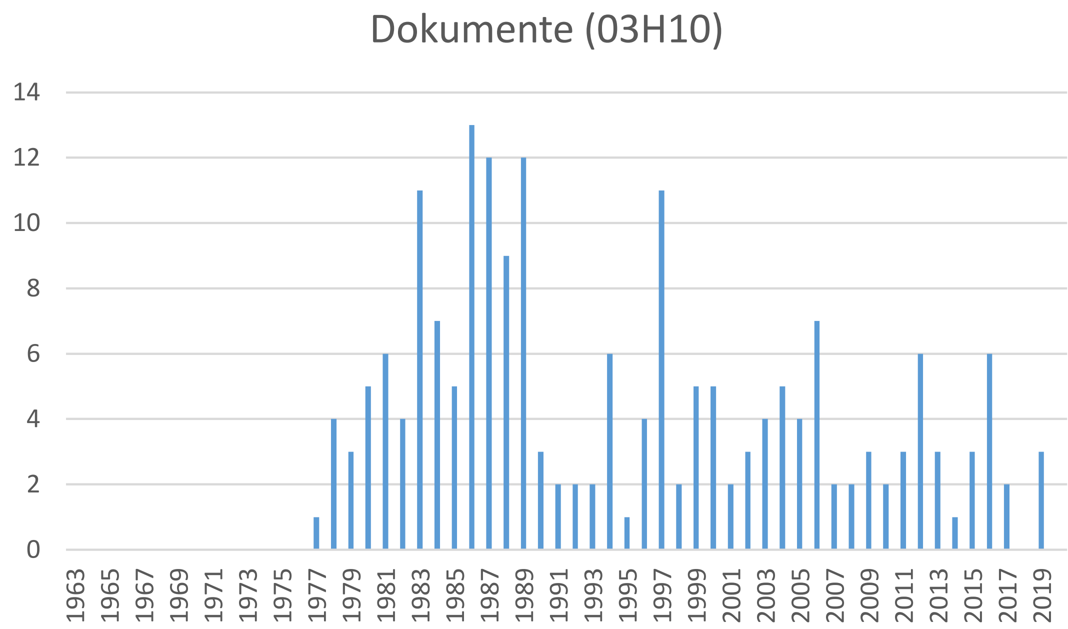

Abbildung 4.3.: Anzahl der veröffentlichten Dokumente mit MSC 03H10 (Other applications of nonstandard models (economics, physics, etc.))

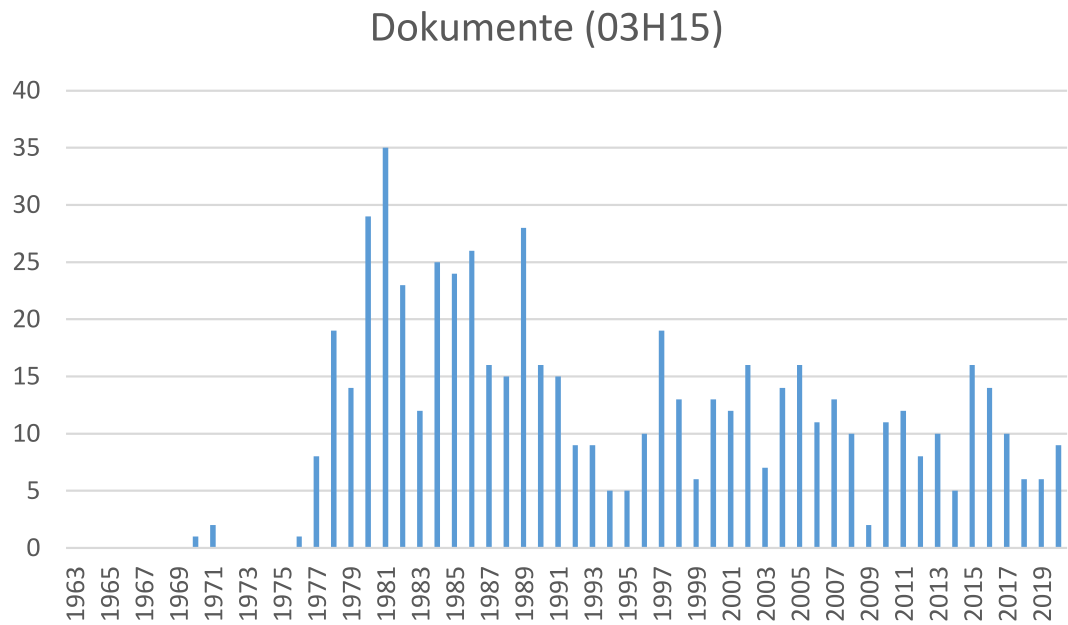

Abbildung 4.4.: Anzahl der veröffentlichten Dokumente mit MSC 03H15 (Nonstandard models of arithmetic)

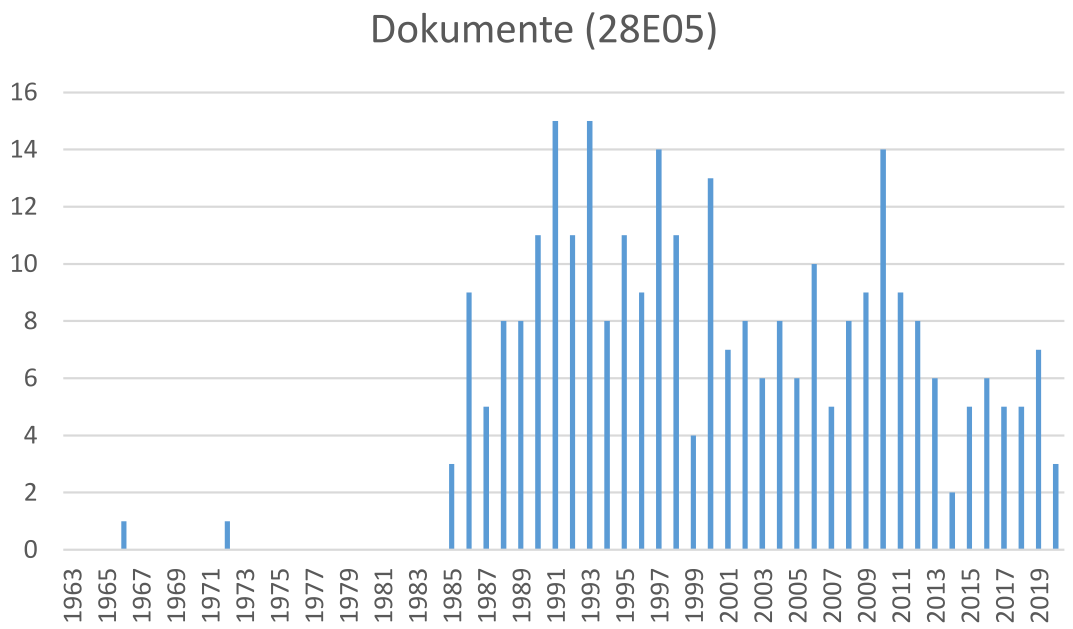

Abbildung 4.5.: Anzahl der veröffentlichten Dokumente mit MSC 28E05 (Nonstandard measure theory)

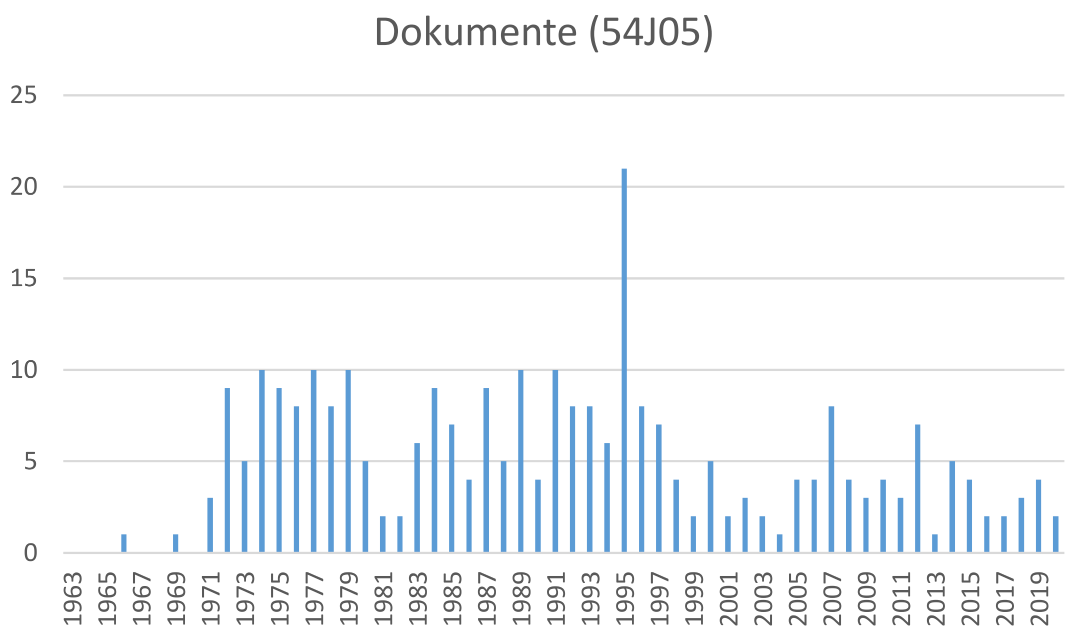

Abbildung 4.6.: Anzahl der veröffentlichten Dokumente mit MSC 54J05 (Nonstandard topology)

4.5.7. Welchen Nutzen bringt Nichtstandard?

Grenzwerte gehören zum grundlegenden Handwerkszeug der Mathematik. Die Literatur zur Analysis ist in der Sprache der Grenzwerte (gemäß der Weierstraß'schen Definition) geschrieben. Wer sich diese Literatur erschließen will, muss daher die Sprache der Grenzwerte beherrschen. Daraus ergibt sich zwangsläufig:

- Wer einen Studienabschluss in Mathematik anstrebt, muss in der Lage sein, den Weierstraß'schen Grenzwertbegriff zu verstehen und anzuwenden. Definitionen mit drei alternierenden Quantoren dürfen keine Hürde darstellen.

Und sicherlich ist auch wahr:

- Der Weierstraß'sche Grenzwertbegriff ist nicht schwer zu verstehen im Vergleich zu fast allem, was im Mathematikstudium noch kommt.

Besteht also überhaupt eine Veranlassung, über eine Vereinfachung des Einstiegs in die Analysis nachzudenken? Oder ist der Grenzwertbegriff einfach ein früher Lackmustest zur Eignung für ein Mathematikstudium?

So unbestreitbar wie die Tatsache, dass der Grenzwertbegriff zentral für die Analysis ist, so unbestreitbar ist die Tatsache, dass viele Studienanfänger sich schwer damit tun.[6] Aber nicht jeder, der am Anfang Schwierigkeiten hat, ist für das Mathematikstudium ungeeignet. Die Schwierigkeiten liegen oft allgemein in der Umstellung von der elementaren, eher informellen Schulmathematik zur fortgeschrittenen, formal-axiomatischen Hochschulmathematik. Alles, was diese Umstellung für Studierende leichter macht, ist daher willkommen. Tall beschreibt den Übergang von der elementaren zur fortgeschrittenen Mathematik so:

> The move from elementary to advanced mathematical thinking involves a significant transition: from *describing* to *defining*, from *convincing* to *proving* in a logical manner based on those definitions. This transition requires a cognitive reconstruction which is seen during the university students' initial struggle with formal abstractions as they tackle the first year of university. It is the transition from the *coherence* of elementary mathematics to the *consequence* of advanced mathematics, based on abstract entities which the individual must construct through deductions from formal definitions (Tall 1991, S. 20, Hervorhebungen im Original).

Die Gründe für die Schwierigkeiten dieses Übergangs sind vielfältig (siehe zum Beispiel die Quellen aus Fußnote 6). Im Hinblick auf mögliche Vorteile der Nichtstandardanalysis erscheinen mir folgende Aspekte hervorhebenswert.

- Die Herausforderung, komplexere logische Ausdrücke zu verstehen, speziell solche mit geschachtelten Quantoren (siehe Selden und Selden 1995).

6. Siehe hierzu zum Beispiel Bezuidenhout 2001, Oehrtman 2009, Oehrtman, Swinyard und Martin 2014, Swinyard 2011, Swinyard und Larsen 2012, Tall und Vinner 1981, Tall 1990.

- Eine Diskrepanz zwischen Vorstellungen, die Studierende mit einem Begriff verknüpfen (*concept image*) und der Begriffsdefinition (*concept definition*) (Tall und Vinner 1981).

Ausdrücke mit bis zu drei geschachtelten Quantoren spielen insbesondere in der Analysis gleich zu Beginn (bei der Grenzwertdefinition) eine Rolle. Ihre korrekte Interpretation ist entscheidend für das Verständnis und die Anwendung der so definierten Begriffe. Feinheiten, wie die Reihenfolge der Quantoren und die damit verbundene Abhängigkeit der Variablen untereinander sind relevant (zum Beispiel bei der Unterscheidung von Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit). Hier bieten die Nichtstandarddefinitionen wegen der reduzierten Komplexität Vorteile (siehe Abschnitt 1.3.2).

Eine Schwierigkeit im Verständnis des Grenzwertbegriffs liegt in der „ungekapselten Definition“ (Cornu 1991). Das Dialogische in der Definition $\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} \ldots$ („Du gibst mir ein beliebiges ε vor, und ich finde dazu ein geeignetes N“) legt die Vorstellung eines Prozesses nahe, bei dem zu einer Folge immer kleiner werdender ε jeweils ein passendes N anzugeben ist. Von Studierenen wird ein Grenzwert daher oft im Sinne eines potentiell unendlichen Prozesses aufgefasst statt als fester Wert (vgl. Bressoud u. a. 2016, S. 4).

Oehrtman hat Vorstellungen („Metaphern“ genannt) zusammengetragen, die Studierende bemühen, um in dem Spannungsfeld zwischen Prozess und Wert die Bedeutung von Grenzwertaussagen zu erfassen (Oehrtman 2009). Hierzu zählen die Metaphern *collapse* (der Prozess kollabiert irgendwann in den Grenzwert), *proximity* (wenn x nahe bei y liegt, dann liegt $f(x)$ nahe bei $f(y)$), *infinity as number* (Unendlich, das in Gleichungen oder Ungleichungen verwendet oder als Argument in Funktionen eingesetzt wird), *physical limitation* (Annahme einer kleinsten positiven Zahl) und *approximation* (vgl. Bressoud u. a. 2016, S. 7).

Die Annahme einer kleinsten positiven Zahl (*physical limitation*) ist weder mit Standard- noch mit Nichtstandardanalysis vereinbar. Die Metapher *approximation* kann sowohl in der Standardanalysis (als beliebige Annäherung), als auch in der Nichtstandardanalysis (als unendliche Annäherung) gedeutet werden. Die anderen Metaphern haben dagegen eine direktere und präzise Deutung in der Nichtstandardanalysis: *infinity as number* als unendlich große Nichtstandardzahlen, *proximity* als inifinitesimale Nachbarschaft und *collapse* als das Übergehen zum Standardteil bei unendlicher Annäherung. Dazu passen Elys Feststellung, dass Studierende robuste Vorstellungen einer Zahlengerade inklusive infinitesimaler und unendlich großer Entfernungen haben (siehe Abschnitt 3.2.2) und die Ergebnisse von Katz und Polev, wonach der Nichtstandardeinstieg als hilfreich für das Verständnis der Grundbegriffe empfunden wurde und sich auch positiv auf das Verständnis der Standarddefinitionen ausgewirkt hat (siehe Abschnitt 3.2.3).

Ein weiterer Aspekt, der zu beachten ist: Längst nicht alle Studierenden, die Analysiskurse belegen, streben einen Studienabschluss in Mathematik an. In technischen oder naturwissenschaftlichen Studiengängen wird später vielfach eher informell infinitesimal als formal „epsilontisch“ argumentiert. Studierenden dieser Fächer dürfte ein Nichtstandardeinstieg in die Analysis entgegenkommen.[7]

7. Eine historische Anmerkung: Bereits im 19. Jahrhundert gab es Widerstand gegen eine zu starke Formalisierung der Analysis auf der Basis des Weierstraß'schen Grenzwertbegriffs, da sie als ungeeignet

In Abschnitt 3.2.1 wurde die Hypothese des kognitiven Vorteils der Infinitesimalmathematik diskutiert, für die es in der Literatur einige Belege und (soweit mir bekannt) keine explizite Widerlegung gibt. Die Nichtstandardanalysis macht ein *Angebot* für die Lehre, das zumindest erwogen werden sollte. Sofern man der Hypothese des kognitiven Vorteils folgt, liegt hierin ein didaktischer Nutzen und ein Mehrwert der Nichtstandardanalysis. Es geht nicht darum, den Grenzwertbegriff abzuschaffen oder zu ersetzen, sondern darum, den Einstieg in die Analysis zu erleichtern. Nichtstandard unterstützt und ergänzt Standard. Dies gilt nicht nur didaktisch, sondern auch mathematisch (siehe Abschnitt 4.5.6).

Ein weiterer Nutzen von Nichtstandard in der Lehre liegt daher in einer Horizonterweiterung in Bezug auf die Methoden in der Mathematik. Wenn Studierende frühzeitig erfahren, dass es nichts Verwerfliches ist, mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen zu rechnen, weckt dies vielleicht ihr Interesse, sich später eingehender mit Nichtstandardmethoden zu befassen und diese bei einer Spezialisierung im fortgeschrittenen Studium zum Beispiel in Funktionalanalysis, Topologie oder Stochastik ebenfalls in ihr Methodenspektrum einzubeziehen. Insofern kann nicht behauptet werden, Nichtstandard habe keinen Nutzen für das spätere Studium.

4.5.8. Gibt es weitere Gründe für eine ablehnende Haltung?

Die bisher diskutierten Gründe für eine ablehnende Haltung gegenüber Nichtstandard in der Lehre waren im Wesentlichen auf Vorurteile zurückzuführen, die einer genaueren Prüfung nicht standhalten. Daneben kann eine ablehnende Haltung aber auch durch Denkgewohnheiten verursacht sein, die mit bestimmten bewusst oder unbewusst eingenommenen mathematikphilosophischen Positionen verknüpft sind. Als ein Indiz für Ablehnungsgründe dieser Art hatten wir bereits in Abschnitt 3.2.4 das Argument aus der mathematischen Fakultät der Bar-Ilan-Universität gegen die experimentellen Analysiskurse identifiziert („we have got to be able to give the students a complete and satisfying answer to the question: 'what is number?'“). Die Tatsache, dass in der Umfrage „geringe Relevanz für die Mathematik“ am häufigsten als Begründung gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre genannt wurde, könnte ebenfalls ein Indiz für mathematikphilosophisch begründete Ablehnung sein, denn Relevanz wird immer aus einer bestimmten Sicht auf die Mathematik heraus beurteilt.

Es scheint daher lohnend, die Rolle der Nichtstandardanalysis für die Philosophie der Mathematik genauer herauszuarbeiten, um Denkgewohnheiten als mögliche Ursachen für eine Ablehnung von Nichtstandard in der Lehre identifizieren und bewerten zu können. Dies geschieht im nachfolgenden Kapitel 5.

---

für die anwendungsorientierten Ingenieurs-Studiengänge angesehen wurde (vgl. Purkert 1990).

5. Mathematikphilosophische Diskussion

5.1. Aus der Philosophie der Mathematik und den Mathematischen Grundlagen

5.1.1. Ein Blick in die Geschichte

Ist Mathematik ohne Philosophie denkbar? Die frühen Hochkulturen in Ägypten und Sumer verfügten über weitreichende mathematische Kenntnisse, ohne dass uns Zeugnisse einer philosophischen Beschäftigung mit Mathematik überliefert sind. Auch heute ist es möglich, ein Mathematikstudium zu absolvieren oder mathematische Forschung zu betreiben, ohne sich über philosophische Fragen den Kopf zu zerbrechen. Die Philosophie kommt ins Spiel, wenn man innehält, einen Schritt zurücktritt und reflektiert, was man tut, wenn man Mathematik betreibt.

Spätestens seit der griechischen Antike sind Philosophie und Mathematik eng verflochten. Originär philosophische Fragen nach dem Wesen der Dinge und nach den Möglichkeiten der Erkenntnis stellten sich in besonderer Weise in Bezug auf die Mathematik, deren Gegenstände einerseits der unmittelbaren Sinneserfahrung entrückt, andererseits in vielfältiger Weise in der Erfahrungswelt verwirklicht schienen.

Für Platon war das Reich der Mathematik Teil einer idealen Realität, die für den Menschen aufgrund seiner Intuition, einer Art Erinnerung der Seele, erkennbar ist. Die daraus abgeleitete philosophische Position des *mathematischen Platonismus* oder des *metaphysischen Realismus* blieb bis in die Neuzeit vorherrschend und ist bis heute attraktiv. Die euklidische Geometrie galt über zweitausend Jahre als Paradebeispiel für sicheres Wissen und ihre axiomatische Methode, das *more geometrico*, als beispielgebend für strenge und über jeden Zweifel erhabene Erkenntnisgewinnung.

Die Entwicklung der Algebra führte zu einer mehrfachen Erweiterung des Zahlbegriffs und damit jeweils zur Frage nach dem ontologischen Status der neuen Zahlen. Inwieweit konnten negative, irrationale, imaginäre Zahlen als *existent* oder überhaupt als Zahlen betrachtet werden? Noch problematischer schienen die infinitesimalen Größen zu sein, mit denen die Analysis aufwartete. Durfte man unendlich kleine Veränderungen einer Größe, unendlich ferne Punkte oder unendlichste Folgenglieder in Beweisen verwenden? Existierten solche Dinge? Angesichts des aristotelischen Verbots aktualer Unendlichkeiten schien dies mehr als fraglich und jedenfalls weit entfernt von der Strenge eines more geometrico.

Von einer Philosophie der Mathematik als philosophischem Teilgebiet kann nach Bedürftig und Murawski ab dem 19. Jahrhundert gesprochen werden mit den Bemühungen um die Begründung der Analysis (Bedürftig und Murawski 2019, S. 460). Der unbestreitbare Erfolg der von Newton und Leibniz begründeten Infinitesimalrechnung einerseits und die als unzureichend empfundene Rechtfertigung ihrer Methoden andererseits machten eine philosophische Auseinandersetzung mit dieser neuen Mathematik unabdingbar. Mit den Arbeiten von Cantor, Dedekind und Weierstraß gelang es zwar, die Analysis ohne infinitesimale Größen zu rekonstruieren. Der Preis dafür aber war, das aktual Unendliche in Gestalt transfiniter Mengen zuzulassen, was zu neuer Kritik und neuer Verunsicherung führte. Mit der mengentheoretischen Definition der reellen Zahlen und der Arithmetisierung des Kontinuums wurde die Anschauung als valide Grundlage der Mathematik durch ein abstraktes Mengenkonzept abgelöst. Bereits zu Beginn des 19. Jahrhunderts war das Vertrauen in die Anschauung als verlässliche Erkenntnisquelle durch die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien erschüttert worden. Axiome büßten ihren Absolutheitsanspruch als evidente, nicht anzweifelbare Wahrheiten ein und konnten später, im Formalismus, als bloße Vereinbarungen angesehen werden.

Anfang des 20. Jahrhunderts nahmen die Mathematiker ihre Grundlagen gewissermaßen in die eigenen Hände. Mathematische Logik und axiomatische Mengenlehre bildeten sich heraus; in der durch Antinomien in der Mengenlehre ausgelösten Grundlagenkrise entstanden die klassischen Grundlagenpositionen Logizismus, Formalismus und Intuitionismus. Die Logik mit ihren Teildisziplinen Beweistheorie und Modelltheorie lieferte Erkenntisse, die wiederum auf die Philosphie zurückwirkten. Als ein Meilenstein und eine gewisse Zäsur gelten die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze, da sie prinzipielle Grenzen der axiomatischen Methode in formalen Systemen aufzeigen. Das Scheitern des Hilbert-Programms in seiner ursprünglichen Form (als Versuch, die infinitistische Mathematik und speziell die Mengenlehre finitistisch zu rechtfertigen) sowie die unvermeidliche Unvollständigkeit formaler Theorien (die widerspruchsfrei und rekursiv axiomatisierbar sind und die Arithmetik umfassen) führten zu einer gewissen Ernüchterung. Die Unentscheidbarkeit relativ einfacher, aber intuitiv relevant erscheinender Aussagen, wie der Kontinuumshypothese, im Rahmen der üblichen Mengenlehre lässt die Mengentheoretiker bis heute nach geeigneten Erweiterungen des Axiomensystems suchen, die eine Entscheidung auf eine intuitiv plausible Weise herbeiführen.[1]

Der mathematische Alltagsbetrieb geht, von solchen Grundlagenproblemen unbehelligt, weiter. Mit mathematischer Logik und axiomatischer Mengenlehre hat sich die mathematische Gemeinschaft ein Fundament geschaffen, das von der überwiegenden Mehrheit als geeignet und tragfähig angesehen wird. Es bildet (meist unausgesprochen) den akzeptierten Rahmen für mathematisches Arbeiten.

Ein solcher breiter Konsens in Bezug auf die Mathematischen Grundlagen darf allerdings nicht darüber hinwegtäuschen, dass die grundlegenden philosophischen Fragen nach dem Wesen mathematischer Gegenstände und unseren Möglichkeiten, etwas über sie zu wissen, unbeantwortet bleiben.

5.1.2. Gibt es richtige und falsche Mathematik?

So, wie wir Mathematik aus der Schule oder dem Studium kennen, erscheint sie uns oft absolut und objektiv, als eine Sammlung von Definitionen, Sätzen und Beweisen und

1. Das Forschungsprogramm „V = ultimate L" von W. H. Woodin etwa würde (bei Erfolg) die Kontinuumshypothese positiv entscheiden (siehe Woodin 2017).

von Verfahren zur Lösung bestimmter Probleme, als eine im Wesentlichen kumulative Disziplin, die über Jahrtausende Wissen angesammelt hat, die zwar immer noch erweitert und ausgebaut wird, aber in ihrem Bestand stabil bleibt. Bestehende Begriffe und Theorien können verallgemeinert oder neue Zusammenhänge entdeckt werden, ganz neue Teildisziplinen mit neuen Begriffen können entstehen, aber was einmal als wahr bewiesen worden ist, bleibt für alle Zeiten wahr und war es bereits vor der Entdeckung des Beweises. Mathematische Wahrheiten sind für die Ewigkeit – und vor allem objektiv, also frei von Meinungen und persönlichen Vorlieben. Experten sollten sich immer darüber verständigen können, was eine gültige Definition oder was ein gültiger Beweis ist.

Wer sich mit Geschichte oder Philosophie der Mathematik befasst, weiß, dass dieses Idealbild nicht stimmt. Mathematik ist nicht (ausschließlich) kumulativ, sondern evolutiv. Und sie ist nicht (vollständig) objektiv, sondern eingebettet in einen philosophischen Wertekanon, der (bewusst oder unbewusst) den Rahmen setzt, in dem sich Mathematik vollzieht.

> Eine Philosophie schließlich, die versucht, das Phänomen der Mathematik als Wissenschaft zu erörtern, ihre Fundamente zu bestimmen und zu diskutieren, beschreibt einerseits Mathematik, wie sie betrieben wird, und ist andererseits aufgerufen, methodologische Normen festzustellen, zu erörtern – und Position zu beziehen. Sie hat also deskriptiven wie normativen Charakter (Bedürftig und Murawski 2019, S. 462).

Philosophie der Mathematik beschreibt also nicht nur, was Mathematik *ist* und wie sie betrieben *wird*, sondern auch was sie sein *soll* bzw. wie sie betrieben werden *soll*. Vereinfacht gesagt, unterscheidet sie zwischen guter und schlechter Mathematik bzw. zwischen richtiger und falscher Mathemaik (in einem normativen Sinn).

Naturgemäß ist eine solche Bewertung weder einheitlich noch abschließend vorzunehmen, sondern dem historischen Wandel unterworfen und zu jeder Zeit ein Ringen unterschiedlicher Positionen. Insofern ist klar, dass philosophische Grundüberzeugungen auch die Quelle von Widerstand gegen bestimmte Teile der Mathematik sein können.

Die folgenden Fragen mögen hier als Beispiele genügen: Ist konstruktive Mathematik besser als inkonstruktive, konkrete besser als abstrakte, anwendbare besser als rein theoretische, finitistische besser als infinitistische? Ist das Auswahlaxiom akzeptabel? Sind implizite Definitionen überhaupt Definitionen? Sind prädikative Definitionen besser als imprädikative? Sind direkte Beweise besser als indirekte?

5.1.3. Mathematikphilosophische Grundfragen

Die mathematikphilosophischen Grundfragen können grob in drei Bereiche eingeteilt werden.

Ontologische Fragen: In welcher Weise sind bzw. existieren mathematische Objekte? Wird Mathematik entdeckt oder erfunden?

Epistemologische Fragen: In welchem Sinne können wir in der Mathematik etwas wissen? Was bedeutet Wahrheit in der Mathematik? Wie gelangen wir zu Erkenntnissen? Wie können wir die Methoden zur Erkenntnisgewinnung rechtfertigen? Wo liegen die Grenzen der Erkenntnis?

Fragen zur Anwendbarkeit: In welchem Verhältnis stehen Mathematik und Realität? Warum sind Ergebnisse der Mathematik auf die Welt anwendbar?

Je nach mathematikphilosophischer Position werden diese Fragen sehr unterschiedlich beantwortet. Die Vielfalt der Positionen kann und braucht in ihrer Gesamtheit hier nicht dargestellt zu werden (für einen Überblick siehe etwa Bedürftig und Murawski 2019). Ich greife mit Realismus (5.1.4), Konstruktivismus (5.1.5) und Formalismus (5.1.6) drei Positionen heraus, die das Spektrum für die folgende Diskussion ausreichend abdecken.[2] An den Abschnitt zum Formalismus schließen sich noch Abschnitte zur Reversen Mathematik (die für das relativierte Hilbert-Programm relevant ist) und zur mathematischen Praxis an.

Entsprechend der mathematikphilosophischen Grundfragen lassen sich die Präferenz für Standard oder die Ablehnung von Nichtstandard unter ontologischen, epistemologischen und anwendungsbezogenen Aspekten diskutieren. Bezogen auf den Zahlbegriff kann man fragen: Sind Nichtstandardzahlen genauso *real* wie Standardzahlen? Können wir über Nichtstandardzahlen genauso sicher etwas *wissen* wie über Standardzahlen? Können Aussagen über Nichtstandardzahlen irgendeine *Bedeutung* für die Realität haben? Diese Fragen behandeln wir in den Abschnitten 5.8 bis 5.10.

Zuvor widmen wir dem Unendlichen (5.2), dem Kontinuum (5.3), der Mengenlehre (5.4) sowie den natürlichen und den reellen Zahlen (5.5 bzw. 5.6)[3] jeweils einen eigenen Abschnitt und stellen die gewohnte Sichtweise und die Herausforderung durch Nichtstandard heraus, denn, wie am Ende von Abschnitt 4.5.8 bemerkt, kann die Herausforderung von Denkgewohnheiten die Ursache für eine ablehnende Haltung gegenüber Nichtstandardanalysis sein.

5.1.4. Realismus

Der mathematische Realismus zeichnet sich dadurch aus, dass mathematischen Gegenständen eine Existenz unabhängig vom menschlichen Denken zugebilligt wird. Je nachdem, auf welche Gegenstände sich das Realismus-Postulat bezieht und in welcher Weise Existenz unabhängig vom menschlichen Denken verstanden wird, gibt es zahlreiche Varianten und Abstufungen des mathematischen Realismus.

Metaphysischer Realismus (Platonismus)

Die klassiche Form des mathematischen Realismus ist der *metaphysische Realismus*, in Anlehnung an Platons Philosophie auch *mathematischer Platonismus* genannt. Die

2. J. D. Monk hat geschätzt, dass 65% der Mathematiker Platonisten, 30% Formalisten und 5% Intuitionisten (und damit auch Konstruktivisten) sind (Monk 1976, S. 3).

3. Die Abschnitte 5.5 und 5.6 enthalten Teile aus Kuhlemann 2018b in einer überarbeiteten Fassung.

Gegenstände der Mathematik, ursprünglich also natürliche Zahlen, geometrische Objekte und, daraus abgeleitet, die Größen gehören demnach einer idealen, immateriellen, aber realen Welt an.

Auf die moderne Mathematik bezogen begegnet uns diese Position als *mengentheoretischer Realismus* oder *Mengenlehrerealismus.* Cantor, als Begründer der Mengenlehre, war von der realen Existenz aktual unendlicher Vielheiten überzeugt. Diese tiefe Überzeugung ließ ihn trotz aller Widerstände (zum Beispiel von Kronecker) und trotz der ihm selbst bekannten Beispiele inkonsistenter Vielheiten (wie der Menge aller Mengen oder der Menge aller Ordinalzahlen) an seiner neuen Theorie des aktual Unendlichen festhalten.

Auch für Gödel existierten mathematische Gegenstände, wie die der Mengenlehre, *objektiv.* Zumindest hielt Gödel den Glauben an ihre Existenz für genauso legitim, wie den Glauben an die Existenz physischer Körper. In *Russell's mathematical logic* sagte er über Klassen (classes) und Begriffe (concepts):

> Classes and concepts may, however, also be conceived as real objects, namely, classes as "pluralities of things" or as structures consisting of a plurality of things and concepts as the properties and relations of things existing independently of our definitions and constructions.
>
> It seems to me that the assumption of such objects is quite as legitimate as the assumption of physical bodies and there is quite as much reason to believe in their existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory systems of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions and in both cases it is impossible to interpret the propositions one wants to assert about these entities as propositions about the "data", i.e., in the latter case the actually occurring sense perceptions (Gödel 1944, S. 137).

Nach Gödel haben wir eine Art „Wahrnehmung“ für die Objekte der Mengenlehre, eine mathematische Intuition, durch die sich uns die Axiome der Mengenlehre als *wahr* aufdrängen.

Die Philosophin Penelope Maddy hat sich zunächst für einen (an Gödel angelehnten) mengentheoretischen Realismus ausgesprochen (Maddy 1990), diese Position allerdings später zugunsten ihres *Mathematischen Naturalismus* oder „Thin Realism“ revidiert (Maddy 1997, Maddy u. a. 2007). Nach letzterer Auffassung muss die Rechtfertigung für mengentheoretische Axiome aus der Mathematik selbst kommen, nicht von außen (zum Beispiel der Philosophie oder der Physik). Die Rechtfertigung der Axiome liegt in ihrer Fruchtbarkeit innerhalb der Mathematik (inklusive der Mengenlehre selbst). Am Ende ihres Buches *Naturalism in Mathematics* schreibt Maddy:

> …set theory aims to MAXIMIZE and UNIFY because of its foundational role. But it must also include an analysis of the purely set theoretic goals that motivate the development of set theory on its own terms … (Maddy 1997, Hervorhebung im Original).

Mit dem Kriterium der Fruchtbarkeit kommen pragmatische und eventuell ästhetische Aspekte in die Bewertung von Mathematik hinein. Eine solche Position ist nicht an einen metaphysischen Realismus gebunden. Die Herausforderung besteht darin zu begründen, inwieweit die Fruchtbarkeit objektiv beurteilt werden kann.

Empirisch gebundene Formen des Realismus

Während der metaphysische Realismus eine erfahrungsunabhängige Erkenntnisquelle voraussetzt (sonst könnte man nichts über unendliche Mengen wissen), betonen andere Formen des Realismus eine Kopplung der Mathematik an die Erfahrungswissenschaften und knüpfen damit an die empiristische Konzeption von John Stuart Mill an (Mill 1875).

Quine und Putnam sehen für Teile der Mathematik eine direkte Verbindung zur physikalischen Realität. Nach ihrem *Unentbehrlichkeitsargument* (*indispensability argument*) ist die Mathematik so stark in die Physik integriert, dass es nicht möglich ist, Realist in Bezug auf physikalische Theorien zu sein, ohne auch Realist in Bezug auf die mathematischen Theorien zu sein (vgl. Putnam 1975, S. 74). Bei diesem Verständnis von Realismus geht es weniger um Existenz im metaphysischen Sinn, als um Objektivität der Erkenntnis.

> The question of realism is the question of the objectivity of mathematics and not the question of the existence of mathematical objects (Putnam 1975, S. 70).

Die Existenz der Objekte ist eine *postulierte Existenz*. Zur Unterscheidung von *realism in ontology* und *realism in truth-value* siehe auch Shapiro 1997, S. 37.

Für Torsten Wilholt, der seine Philosophie *behutsamer Mathematischer Realismus* nennt (Wilholt 2004, S. 284)[4], ist Mathematik eine zweigeteilte Wissenschaft mit einem realistischen und einem rein deduktivistisch-formalen Teil. Die *Realistische Mathematik* ist nach dieser Auffassung ursprünglich in Einheit mit ihren ersten primären Anwendungen entstanden, ihre Gegenstände sind *Universalien*, die Realisierungen in der Erfahrungswelt besitzen, zum Beispiel als Eigenschaften oder Relationen (S. 282-284). Positive ganze Zahlen sind Eigenschaften von *Aggregaten* bestimmter kausaler Prozesse (S. 178-193), positive reelle Zahlen Eigenschaften realer *Größenverhältnisse* (S. 193-216). Sie gehören für Wilholt zur Realistischen Mathematik.[5] Damit er zu befriedigenden mathematischen Theorien kommt, muss Wilholt die Universalien *ante rem* verstehen. Das bedeutet zum Beispiel für die natürlichen Zahlen: Da jede natürliche Zahl einen Nachfolger haben soll, muss man die Zahleneigenschaften von physikalisch realisierten Aggregaten ins Kontrafaktische extrapolieren. Wenn u die Zahleneigenschaft des maximal möglichen Aggregats A ist, dann ist $u + 1$ die Zahleneigenschaft, die ein aus A und P gebildetes Aggregat *hätte*, wenn es noch einen weiteren Prozess P *gäbe*, den man

---

4. Die weiteren Seitenangaben in diesem Abschnitt beziehen sich auf Wilholt 2004.

5. Dass die Gleichsetzung der positiven reellen Zahlen mit Eigenschaften realer Größenverhältnisse problematisch ist, wird in Bedürftig und Murawski 2019 (S. 263f) diskutiert. Eine darüber hinausgehende Problematik in Bezug auf die positiven ganzen Zahlen thematisiere ich in Abschnitt 5.5.3.

A hinzufügen *könnte* (S. 182f). Genauso müssen Größenverhältnisse ins Kontrafaktische extrapoliert werden, um bestimmte Abgeschlossenheitseigenschaften der rationalen und der reellen Zahlen zu garantieren (S. 207). Analog zur hochgradig formalisierbaren Realistischen Mathematik lassen sich nach Wilholt formale Systeme ohne direkten Realitätsbezug studieren. Statt von Wahrheit spricht Wilholt hier von *Akzeptierbarkeit* der Axiome (und ihrer Implikationen) (S. 284).

Das aktual unendliche Universum

Wir verstehen in diesem Kapitel unter *Realismus* zusammenfassend jede Position, die die objektive Existenz eines aktual unendlichen Universums mathematischer Gegenstände annimmt mit real und objektiv bestehenden Beziehungen zwischen den Gegenständen. Ob Existenz in einem metaphysischen Sinne verstanden wird (Platonismus) oder im Sinne einer objektiv wahren Existenzaussage ohne ontologischen Anspruch (realism in truth-value), ob als (empirisch begründete) postulierte Existenz (Quine/Putnam) oder als Existenz von Universalien ante rem (Wilholt), soll für den hier verwendeten Begriff des *Universums* nicht entscheidend sein.

Ein solches Universum kann axiomatisch mit einer geeigneten formalen Sprache beschrieben werden, allerdings bleiben wegen der Gödel'schen Unvollständigkeitssätze stets Aussagen, die mit den festgelegten Axiomen weder bewiesen, noch widerlegt werden können.

Eine Konsequenz der realistischen Position ist, dass Aussagen über das Universum (nach klassischer Logik) in einem absoluten Sinne entweder wahr oder falsch sind, und zwar auch dann, wenn wir den Wahrheitswert nicht kennen oder wenn wir ihn (wie im Fall einer unentscheidbaren Aussage) auf der Basis der festgelegten Axiome prinzipiell nicht ermitteln können. Insbesondere ist auch jede Quantifizierung über das Universum (Allaussage, Existenzaussage) entweder wahr oder falsch. Realistische Mathematik ist *Tatsachenmathematik*.

5.1.5. Konstruktivismus

Unter dem Begriff Konstruktivismus werden unterschiedliche Strömungen zusammengefasst, die als Reaktion auf den Infinitismus der Cantor'schen Mengenlehre und der darin aufgetretenen Inkonsistenzen entstanden sind. Zu diesen Strömungen zählen Intuitionismus, Prädikativismus, Finitismus und Ultrafinitismus (vgl. zum Beispiel Bedürftig und Murawski 2019, S. 116-118). Verbindendes Element ist die Forderung, dass Mathematik in gewissem Sinne *konstruktiv* und *effektiv* sein soll. Existenzbeweise sind Konstruktionen.[6] Damit scheiden abstrakte mengentheoretische Konzepte, die das Potenzmengen- oder das Auswahlaxiom verwenden, aus (siehe auch Abschnitt 5.4.10). Das Unendliche wird höchstens in seiner abzählbaren (Prädikativismus) oder in seiner potentiellen Ausprägung (Finitismus) akzeptiert (siehe Abschnitt 5.2.1). Der Ultrafinitismus ist noch restriktiver.

6. Zur Ontologie dieser Konstruktionen gibt es verschiedene Positionen: Objektivismus, Intentionalismus, Mentalismus, Nominalismus (siehe Bedürftig und Murawski 2019, S. 118).

Der von Brouwer begründete Intuitionismus lehnt die klassische Logik ab und setzt Wahrheit mit dem Vorliegen eines (konstruktiven) Beweises gleich. Indirekte Beweise oder der Satz vom ausgeschlossenen Dritten werden nicht akzeptiert. „$A \vee B$ ist wahr“ bedeutet „Man hat einen Beweis für A oder man hat einen Beweis für B“. Damit ist $A \vee \neg A$ nicht automatisch wahr. Viele Regeln der klassischen Logik gelten in der intuitionistischen Mathematik nicht. Eine vollständige Formalisierung der intuitionistischen Logik stammt von Heyting (Heyting 1930).

Durch die Einschränkungen, die der Konstruktivismus fordert, fallen fast die komplette Mengenlehre und damit auch Teile der klassischen Analysis fort. Schon die Definition der reellen Zahlen (siehe Abschnitt 5.6) ist nicht wie üblich möglich. Konstruktivistische Entwürfe der Analysis gibt es zum Beispiel von Lorenzen (Lorenzen 1965) und Bishop (Bishop 1967).

Finitismus und primitiv-rekursive Arithmetik

Der Finitismus ist auch im Zusammenhang mit dem gleich zu besprechenden Formalismus relevant, da Hilbert für die Metamathematik finite Methoden gefordert hat (siehe Abschnitt 5.1.6). Tait hat (in Tait 1981) vorgeschlagen, unter finitistischer Argumentation eine primitiv-rekursive Argumentation im Sinne der Skolem'schen Arithmetik (Skolem 1923) zu verstehen. Diese wird auch *primitiv-rekursive Arithmetik* (kurz: PRA) genannt. Der Titel von Skolems Arbeit, „Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich“, umreißt zugleich das Programm. Es geht um einen Aufbau der elementaren Arithmetik ohne Rückgriff auf einen aktual unendlichen Laufbereich der verwendeten Variablen. PRA erlaubt die Symbolisierung beliebiger primitiv-rekursiver Funktionen und das Bilden quantorenfreier Ausdrücke. Als Beweismittel für Generalisierungen steht die folgende Induktionsregel zur Verfügung: Von $\varphi(0)$ und $\varphi(x) \Rightarrow \varphi(\sigma(x))$ kann auf $\varphi(y)$ geschlossen werden. Darin ist φ ein quantorenfreier Ausdruck und σ die Nachfolgerfunktion.[7]

Die konstruktivistische Rechtfertigung für die Induktionsregel auf der Basis des potentiell Unendlichen besteht darin, dass jede konstruierbare Zahl (und damit im Sinne des Konstruktivismus jede existierende Zahl), sagen wir $g(0)$ (mit einer primitiv-rekursiven Funktion g), aufgelöst werden kann zu $\sigma \ldots \sigma(0)$ (mit endlich vielen Anwendungen von σ). Damit besteht ein Beweis für $\varphi(g(0))$ in einer endlich-maligen Anwendung des Induktionsschritts $\varphi(x) \Rightarrow \varphi(\sigma(x))$.

Um zum Beispiel einen klassischen arithmetischen Ausdruck der Form $\forall x \exists y\, \varphi(x, y)$ zu beweisen, muss man eine geeignete primitiv-rekursive Funktion f konstruieren und den

7. Simpson gibt in Simpson 2009 ein formales Axiomensystem von PRA mit Quantoren an, weist jedoch darauf hin, dass es eine quantorenfreie Axiomatisierung gibt. Das Induktionsschema kann zunächst mit beschränkter Quantifizierung so formuliert werden:

$$\varphi(0) \wedge \forall x < y\, (\varphi(x) \Rightarrow \varphi(\sigma(x))) \Rightarrow \varphi(y).$$

Ein Ausdruck mit ausschließlich beschränkten Quantoren ist in PRA äquivalent zu quantorenfreien Ausdrücken. Eine eigene Schlussregel für die Induktion ist dann nicht erforderlich.

Ausdruck $\varphi(x, f(x))$ per Induktion beweisen.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass auch das Vertrauen darauf, dass jede primitive Rekursion terminiert und damit finitistisch unproblematisch ist, eine gewisse Idealisierung beinhaltet. Nelson (der diesbezüglich dem Ultrafinitismus zugerechnet wird) hat die Berechtigung dieses Vertrauens infrage gestellt (siehe Nelson 2007). In seinem Buch *Predicative Arithmetic* schreibt er:

> It appears to be universally taken for granted by mathematicians, whatever their views on foundational questions may be, that the impredicativity inherent in the induction principle is harmless—that there is a concept of number given in advance of all mathematical constructions, that discourse within the domain of numbers is meaningful. But numbers are symbolic constructions; a construction does not exist until it is made; when something new is made, it is something new and not a selection from a preexisting collection. There is no map of the world because the world is coming into being (Nelson 1986, S. 2).

5.1.6. Formalismus

Der auf Hilbert zurückgehende mathematische Formalismus unterscheidet zwischen finitistischer und infinitistischer Mathematik. Die finitistische Mathematik gilt per se als sicher, während die infinitistische Mathematik (insbesondere die Cantor'sche Mengenlehre) prinzipiell als unsicher angesehen wird und durch Formalisierung und metamathematische Überlegungen mit „finiten Methoden" gerechtfertigt werden soll (Hilbert-Programm). Genauer hatte Hilberts formalistisches Programm zwei Ziele. Es sollte (jeweils mit finiten Methoden) gezeigt werden,

1. dass die infinitistische Mathematik *konservativ* gegenüber der finitistischen ist, das heißt, dass jede Aussage der finitistischen Mathematik, die mit Mitteln der infinitistischen Mathematik beweisbar ist, auch finitistisch beweisbar ist.

2. dass die infinitistische Mathematik *konsistent* ist, also keine Widersprüche produziert.

Hilbert hat nicht genau definiert, was er unter finiten Methoden verstand. In der heutigen Beweistheorie wird als Präzisierung des Begriffs oft das formale System der *Primitiv-Rekursiven Arithmetik* (PRA) angenommen, da es als Theorie des potentiell Unendlichen verstanden werden kann und die wesentlichen in der Metamathematik benötigten Mittel bereitstellt.

Aufgrund der Gödel'schen Unvollständigkeitssätze war das Hilbert-Programm in seiner ursprünglichen Form nicht realisierbar. Mit den Ergebnissen der Reversen Mathematik können aber gewisse Teile der Mathematik finitistisch gerechtfertigt werden. Dies wird als *relativiertes Hilbert-Programm* bezeichnet (siehe Abschnitt 5.1.7).

Für einen Formalisten ist das aktual Unendliche eine nützliche Fiktion. In seinem Artikel „Über das Unendliche" schreibt Hilbert:

> Das Gesamtergebnis ist dann: das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig – eine bemerkenswerte Harmonie zwischen Sein und Denken (Hilbert 1926 S. 190).

In ähnlicher Weise äußert sich Robinson:

> My position concerning the foundations of Mathematics is based on the following two main points or principles.
>
> (i) Infinite totalities do not exist in any sense of the word (i.e., either really or ideally). More precisely, any mention, or purported mention, of infinite totalities is, literally, meaningless.
>
> (ii) Nevertheless, we should continue the business of Mathematics "as usual," i.e. we should act as if infinite totalities really existed.
>
> (Robinson 1965, S. 230.)

Wie Hilbert sieht also auch Robinson das aktual Unendliche weder in der Natur („really"), noch im Denken („ideally") realisiert. Es hat keine *Referenten* und ist in diesem Sinne *bedeutungslos* („meaningless").

In diesem Kapitel verstehen wir unter Formalismus eine Position, die finitistisch in Bezug auf die Metamathematik und fiktionalistisch in Bezug auf die infinitistische Mathematik ist. Die Gegenstände der Metamathematik (Zeichenreihen, metasprachliche natürliche Zahlen) werden als gedankliche Konstruktionen verstanden, deren Bereich offen und nur potentiell unendlich ist. Es wird kein fertiges, aktual unendliches „Universum der Metamathematik" angenommen. Aktual unendlichen Gesamtheiten der infinitistischen Mathematik wird nur eine *theoretische Existenz* zugebilligt. Solche Gesamtheiten (Mengen oder Klassen) „existieren" nur in einem formalen Sinne, das heißt vereinbarungsgemäß im Rahmen einer formalisierten axiomatischen Theorie (in der Hoffnung, dass die Theorie konsistent ist). Gleichwohl sprechen wir über das aktual Unendliche im Rahmen der axiomatischen Theorie, *als ob* es real existierte (gemäß Robinsons oben unter Punkt (ii) ausgesprochener Empfehlung). So verwenden wir die klassische Logik auch bei Quantifizierungen über das gesamte Universum. Wir wissen zum Beispiel, dass die Kontinuumshypothese CH in ZFC nicht entscheidbar ist, aber aus ZFC folgt (gemäß klassischer Logik) $\mathrm{CH} \vee \neg\mathrm{CH}$.

So wie wir realistische Mathematik als Tatsachenmathematik bezeichnet haben, können wir jetzt sagen: Formalistische Mathematik ist *Vereinbarungsmathematik.*

5.1.7. Reverse Mathematik und das relativierte Hilbert-Programm

Reverse Mathematik ist ein auf Harvey Friedman (Friedman 1975) zurückgehendes Forschungsprogramm zu den Grundlagen der Mathematik, das untersucht, welche Sätze mathematischer Kerngebiete (zum Beispiel Analysis, Geometrie, Algebra, Kombinatorik, Differentialgleichungen) in welchen formalen Systemen beweisbar sind. Dabei stellt sich in vielen Fällen heraus, dass das formale System, das gebraucht wird, um einen mathematischen Satz zu beweisen, äquivalent zu diesem Satz ist. Die philosophische Bedeutung der Reversen Mathematik liegt darin, dass sich mit ihr das Hilbert-Programm zumindest teilweise realisieren lässt (siehe Murawski 1993).

Simpson (vgl. Simpson 2009, S. 1) unterscheidet mengentheoretische Mathematik (*set-theoretic mathematics*) und gewöhnliche, das heißt nicht mengentheoretische Mathematik (*ordinary mathematics*). Mit mengentheoretischer Mathematik sind die Gebiete der Mathematik gemeint, die erst durch die mit der Mengenlehre verbundenen Grundlagenrevolution möglich geworden sind, wie allgemeine Topologie, abstrakte Funktionalanalysis und abstrakte Mengenlehre selbst. Die gewöhnliche Mathematik umfasst die Gebiete, die unabhängig von abstrakter Mengenlehre sind und die zum großen Teil auch bereits vor der Grundlagenrevolution untersucht worden sind. Hierzu zählen Geometrie, Zahlentheorie, Differentialgleichungen, reelle und komplexe Analysis, abzählbare Algebra, Topologie vollständiger separabler metrischer Räume[8], mathematische Logik und Berechenbarkeitstheorie.

Nach Simpson entspricht diese Unterscheidung in etwa der Unterscheidung von „abzählbarer Mathematik“ und „überabzählbarer Mathematik“, wenn man zur abzählbaren Mathematik noch die Untersuchung (möglicherweise überabzählbarer) vollständiger separabler metrischer Räume zählt. Die folgende Darstellung orientiert sich an Simpson 2009.

Das System Z_2 der Arithmetik zweiter Stufe

Die Untersuchung findet in der Arithmetik zweiter Stufe (abgekürzt mit Z_2) statt. Dieses System ist schwächer als vollwertige Mengenlehren wie ZFC oder NBG, reicht aber aus, um wesentliche Teile der klassischen Mathematik abzubilden. Es eignet sich daher gut für grundlagentheoretische Untersuchungen. Alle mathematischen Begriffe (Zahlen, Funktionen etc.) sind dazu als natürliche Zahlen oder als Mengen natürlicher Zahlen zu kodieren.

Die Sprache L_2 von Z_2 enthält zwei Sorten von Variablen, *Zahlenvariablen* (bezeichnet mit Kleinbuchstaben wie i, j, k, m, n) und *Mengenvariablen* (bezeichnet mit Großbuchstaben wie X, Y, Z). Im Unterschied zur Sprache L_1 der Arithmetik erster Stufe (der Peano-Arithmetik) enthält L_2 auch Ausdrücke der Form $t \in X$, wobei t ein numerischer Term und X eine Mengenvariable ist. Ebenso erlaubt L_2 Quantifizierungen über Mengenvariablen. Quantoren mit einer Zahlenvariablen (wie $\forall n$, $\exists n$) werden *Zahlenquantoren* genannt und Quantoren mit einer Mengenvariablen (wie $\forall X$, $\exists X$) *Mengenquantoren*.

Neben den auf der ersten Stufe formulierbaren Axiome (auch Basisaxiome genannt) enthält Z_2 das *Induktionsaxiom*

$$(0 \in X \land \forall n\,(n \in X \to n + 1 \in X)) \to \forall n\,(n \in X) \tag{5.1}$$

und das *Komprehensionsschema*

$$\exists X \forall n\,(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)) \tag{5.2}$$

8. Ein metrischer Raum heißt separabel, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

für alle L_2-Ausdrücke φ, in denen X nicht frei vorkommt.

Aus (5.1) und (5.2) folgt das volle L_2-Induktionsschema

$$(\varphi(0) \wedge \forall n\,(\varphi(n) \to \varphi(n+1))) \to \forall n\,\varphi(n) \tag{5.3}$$

für *beliebige* L_2-Ausdrücke.

Wichtige Teilsysteme von Z_2

Fünf Teilsysteme von Z_2 spielen in der Reversen Mathematik eine herausragende Rolle und werden von Simpson „the Big Five" genannt. Aufsteigend nach Beweisstärke sortiert heißen sie RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0. Sie unterscheiden sich in der Stärke des Komprehensionsschemas, also darin, welche Mengen gebildet werden können. Das Subskript 0 deutet jeweils an, dass ein gegenüber (5.3) eingeschränktes Induktionsschema gilt. Ich gehe auf die ersten drei Teilsysteme etwas genauer ein.

RCA steht für „Recursive Comprehension Axiom". Neben den Basisaxiomen enthält RCA_0 das Σ^0_1-Induktionsschema (das heißt (5.1) für alle Σ^0_1-Ausdrücke φ) und das folgende sogenannte Δ^0_1-Komprehensionsschema:

$$\forall n\,(\varphi(n) \leftrightarrow \psi(n)) \to \exists X \forall n\,(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)), \tag{5.4}$$

wobei $\varphi(n)$ ein Σ^0_1-Ausdruck und $\psi(n)$ ein Π^0_1-Ausdruck ist und X in $\varphi(n)$ nicht frei vorkommt.[9]

In RCA_0 lassen sich bereits das Zahlensystem bis zu den reellen und komplexen Zahlen aufbauen, der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen und der Satz von Peano für gewöhnliche Differentialgleichungen beweisen. Ebenfalls lassen sich in RCA_0 (durch Gödelisierung) die Syntax der Prädikatenlogik und abzählbare Modelle definieren sowie der Korrektheitssatz beweisen (eine Satzmenge, die ein abzählbares Modell hat ist konsistent) (vgl. Simpson 2009, S. 73-96).

Das System WKL_0 enthält zusätzlich zu den RCA_0-Axiomen ein Axiom, das als Schwaches Königs-Lemma (*Weak König's Lemma*) bezeichnet wird. Es besagt, dass jeder unendliche binäre Baum einen unendlichen Pfad besitzt. Genauer gesagt enthält WKL_0 eine Kodierung dieser Aussage in die Sprache L_2.

Über RCA_0 sind folgende Sätze äquivalent zu WKL_0 (vgl. Simpson 2009, S. 36f):

- Jede stetige reellwertige Funktion auf $[0, 1]$ ist gleichmäßig stetig.
- Jede stetige reellwertige Funktion auf $[0, 1]$ ist Riemann-integrierbar.
- Maximum-Prinzip: Jede stetige reellwertige Funktion auf $[0, 1]$ nimmt ihr Maximum an.
- Gödel'scher Vollständigkeitssatz: Jede höchstens abzählbare konsistente Menge von Sätzen im Prädikatenkalkül hat ein abzählbares Modell.

9. Ein Σ^0_1-Ausdruck ist ein Ausdruck der Form $\exists m\,\varphi(m)$, ein Π^0_1-Ausdruck ist ein Ausdruck der Form $\forall m\,\varphi(m)$, wobei $\varphi(m)$ ein L_2-Ausdruck ist, in dem alle Quantoren beschränkte Zahlenquantoren sind (also von der Form $\forall m \leq m_0$ bzw. $\exists m \leq m_0$).

Die Abkürzung ACA steht für „Arithmetic Comprehension Axiom“. Das System ACA_0 enthält zusätzlich zu den RCA_0-Axiomen das Induktionsschema (5.3) für alle arithmetischen Ausdrücke, also ein Induktionsschema wie die Peano-Arithmetik PA (vgl. (5.13) in Abschnitt 5.4.7). Über RCA_0 sind folgende Sätze äquivalent zu ACA_0 (vgl. Simpson 2009, S. 34f):

- Supremumsprinzip: Jede von oben beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine kleinste obere Schranke.

- Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge reeller Zahlen (oder von Punkten im $\mathbb{R}^n$) hat eine konvergente Teilfolge.

Das relativierte Hilbert-Programm

Wie in Abschnitt 5.1.6 erwähnt, können mit den Ergebnissen der Reversen Mathematik gewisse Teile der Mathematik finitistisch gerechtfertigt werden, was als *relativiertes Hilbert-Programm* bezeichnet wird. Wir fassen hierzu die wichtigsten Aussagen aus Simpson 2009, S. 369-379, zusammen.

Definition 24. *Ein formales System S heißt finitistisch reduzierbar, wenn alle Π^0_2-Sätze, die in S beweisbar sind, auch in* PRA *beweisbar sind.*

Ein Π^0_2-Satz ist dabei ein Satz der Form $\forall m \exists n\, \varphi(m,n)$, wobei $\varphi(m,n)$ ein L_2-Ausdruck ist, in dem alle Quantoren beschränkte Zahlenquantoren sind.[10] Von den „Big Five“ sind genau RCA_0 und WKL_0 finitistisch reduzierbar.

Die finitistische Reduzierbarkeit von WKL_0 bedeutet: Jeder in WKL_0 beweisbare Π^0_2-Satz ist bereits in PRA beweisbar oder, anders ausgedrückt, WKL_0 ist konservativ über PRA bezogen auf Π^0_2-Sätze.[11] Darüber hinaus gilt: Die Konservativität von WKL_0 über PRA ist (als Π^0_2-Satz kodiert) in WKL_0 und damit in PRA beweisbar. Identifiziert man finite Methoden mit PRA, so kann dieses Ergebnis der Reversen Mathematik daher als partielle Realisierung des Hilbert-Programms aufgefasst werden.

5.1.8. Die mathematische Praxis

Muss man sich als Mathematiker für eine philosophische Position entscheiden? Oder kann man eine agnostische oder sogar eine ambivalente oder oszillierende Position einnehmen?

Nach Davis und Hersh herrscht die Meinung vor, dass der typische Mathematiker „an Werktagen Platonist und an Sonntagen Formalist ist“ (Davis und Hersh 1994, S. 337). Das heißt, solange er mathematisch arbeitet, ist er davon überzeugt, eine objektive Realität zu erforschen, soll er diese Realität philosophisch darlegen, zieht er es vor vorzugeben, letztlich doch nicht an eine solche Realität zu glauben. Paul Cohen schreibt:

10. Zur Definition der arithmetischen Hierarchie siehe z. B. Shoenfield 1967, Kapitel 7.5.

11. Gibt es in WKL_0 einen Beweis für den Π^0_2-Satz $\forall m \exists n\, \varphi(m,n)$, dann gibt es in PRA einen Beweis für $\varphi(m, f(m))$ mit einer primitiv-rekursiven Funktion f (vgl. Simpson 2015, S. 8).

> The Realist position is probably the one which most mathematicians would prefer to take. It is not until he becomes aware of some of the difficulties in the set theory that he would even begin to question it. If these difficulties particularly upset him, he will rush to the shelter of Formalism, while his normal position will be somewhere between the two, trying to enjoy the best of two worlds (Cohen 1971, S. 11).

Laut Shapiro interessieren sich die meisten Mathematiker nicht im Geringsten für Philosophie. Er nennt es das *philosophy-last-if-at-all principle* (Shapiro 1997, S. 7). Den arbeitenden Mathematiker charakterisiert er als „arbeitenden Realisten“ (analog zum Werktags-Platonisten bei Davis und Hersh):

> I define a *working realist* to be someone who uses or accepts the inferences and assertions suggested by traditional realism, items like excluded middle, the axiom of choice, impredicative definition, and general extensionality (ibid.).

Auf der „Arbeitsebene“ sind sich also Realisten und Formalisten einig (Konstruktivisten sind hier außen vor, dürften aber in der Minderheit sein). Solange das, was man untersucht, sich in ZFC modellieren lässt, ist es „real“ oder kann so behandelt werden.

Nach Stephen G. Simpson liegt die Bedeutung von ZFC darin, einen gemeinsamen Rahmen für die Mathematik und einen Standard für mathematische Strenge bereitzustellen.

> The ZFC formalism provides two extremely important benefits for mathematics as a whole: a common framework, and a common standard of rigor (Simpson 2014, S. 6).

Der „Arbeits-Realismus“ prägt unser Denken. Diese Feststellung ist wichtig für unsere Sicht auf Nichtstandard. Der Arbeits-Realismus erschwert mitunter, unser Denken für Nichtstandard zu öffnen, denn Nichtstandard scheint unseren Arbeits-Realismus anzugreifen. In den nächsten Abschnitten werden wir dies genauer untersuchen.

5.2. Das Unendliche

> Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig.
>
> *(Hilbert, 1926, Über das Unendliche, S. 163)*

5.2.1. Potentiell vs. aktual unendlich

Umgangssprachlich verwenden wir „unendlich“ oft im Sinne von „sehr viel“ oder „sehr groß“, etwa wenn wir in eine Sache unendlich viel Mühe investieren oder jemandem unendlich dankbar sind. Auch die Zahl der Sandkörner am Strand steht bisweilen sinnbildlich für unendlich. Aber bereits Archimedes rechnete vor, wie viele Sandkörner man brauchen würde, um eine Kugel von der Größe des Kosmos (der nach damaliger Vorstellung von der Himmelssphäre begrenzt war) zu füllen. Die Zahl war für damalige Verhältnisse riesenhaft und erforderte eine neue Art der Darstellung, aber sie war nicht unendlich.

Auf Aristoteles geht die Unterscheidung zwischen potentieller und aktualer Unendlichkeit zurück.

> Ferner kann etwas entweder in Beziehung auf das Hinzufügen oder in Beziehung auf das Hinwegnehmen oder in beiden Beziehungen unendlich sein. Daß es nun ein Unendliches für sich abgetrennt seiend – und doch sinnlich wahrnehmbar – gäbe, ist unmöglich (Aristoteles, Metaphysik K 10, 1066b1).[12]

Aristoteles ließ also nur ein beliebig Vermehrbares, ein *potentiell* Unendliches zu, jedoch nicht ein *aktual* Unendliches als fertiges Ganzes.

Am Beispiel der natürlichen Zahlen: Die Zählreihe $1, 2, 3, \ldots$ kann beliebig weit fortgeführt werden, es gibt keine letzte Zahl, die kein weiteres Hinzufügen mehr zuließe. Aber eine unendliche Zählreihe als fertiges Ganzes existiert nicht. Oder an einem geometrischen Beispiel: Die durch zwei Punkte festgelegte gerade Linie kann zu beiden Seiten beliebig verlängert werden, aber eine unendliche gerade Linie als Ganzes existiert nicht.

Die Scheu vor dem aktual Unendlichen können wir – zumindest wenn wir Mathematiker sind – heute kaum noch nachvollziehen. Unendliche Zählreihen oder unendliche Linien, allgemein unendliche Mengen sind selbstverständliche Gegenstände mathematischen Arbeitens geworden. Unvoreingenommen betrachtet ist die aristotelische Position jedoch weiterhin sehr plausibel. Wie sollte etwas, was ohne Ende ist, jemals fertig sein? Es ist und bleibt ein Paradoxon – ein Paradoxon, an das wir uns gewöhnt haben und das wir mit dem Unendlichkeitsaxiom in ZFC sogar explizit postulieren.

Seit dem Siegeszug der Cantor'schen Mengenlehre scheint für das potentiell Unendliche mathematisch nur noch die Rolle eines historischen Begriffs zu bleiben. Allerdings gilt dies nicht für die Mathematischen Grundlagen und die Philosophie der Mathematik. Stephen G. Simpson vergleicht vier philosophische Positionen in Bezug auf ihre Einstellung zum potentiell bzw. aktual Unendlichen.

> **Ultrafinitism:** Infinities, both potential and actual, do not exist and are not acceptable in mathematics.
>
> **Finitism:** Potential infinities exist and are acceptable in mathematics. Actual infinities do not exist and we must limit or eliminate their role in mathematics.

12. Übersetzung gemäß Aristoteles 2009, S. 217.

Predicativism: We may accept the natural numbers, but not the real numbers, as a completed infinite totality. Quantification over $\mathbb{N}$ is acceptable, but quantification over $\mathbb{R}$, or over the set of all subsets of $\mathbb{N}$, is unacceptable.

Infinitism: Actual infinities of all kinds are welcome in mathematics, so long as they are consistent and intuitively natural.

(Simpson 2015, S. 3)

Simpson selbst spricht sich für den Finitismus aus, da er ihn am ehesten mit der von ihm vertretenen philosophischen Position des Objektivismus für vereinbar hält, die er so beschreibt: Die Epistemologie des Objektivismus setzt eine enge Beziehung zwischen *Existenz* und *Bewusstsein*, zwischen einer (unabhängig von unserem Bewusstsein) vorhandenen Realität und unserem bewussten Willensakt des Erfassens von Objekten voraus. Nach Simpson sollte die Mathematik nach einem objektiven Verständnis der mathematischen Aspekte der Realität trachten. Es sei wünschenswert, die Mathematik – oder zumindest die anwendbaren Teile der Mathematik – auf eine objektive Grundlage zurückzuführen (vgl. Simpson 2014). Dieses Ziel verfolgt er im Rahmen der Reversen Mathematik (siehe Abschnitt 5.1.7).

Wir kommen auf die Bedeutung des potentiell Unendlichen in Abschnitt 5.5 zurück.

5.2.2. Arithmetisches vs. unarithmetisches Unendlich

Die Idee eines aktualen Unendlich wurde – auch von Mathematikern – mit Philosophie und Theologie in Verbindung gebracht und vom aktual Unendlichen in der Mathematik (sofern zugelassen) unterschieden, so zum Beispiel bei Leibniz (vgl. Bosinelli 1991) oder bei Cantor (vgl. Cantor 1932, S. 378). Wir konzentrieren uns hier auf das aktual Unendliche in der Mathematik, und zwar unter einem Aspekt, der für die Unterscheidung von Standard- und Nichtstandardanalysis wichtig ist. Es geht dabei um das euklidische Axiom „Das Ganze ist größer als sein Teil“ (im Folgenden kurz: *Teil-Ganzes-Axiom*).

Zählen bis unendlich

Kann man das Zählen bis ins Unendliche und darüber hinaus denken? Cantor hat dies bekanntlich getan, und zwar im ordinalen wie im kardinalen Sinne, und kam so zu seinen transfiniten Ordinal- bzw. Kardinalzahlen.[13] In der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre ZF definiert man die natürlichen Zahlen mengentheoretisch nach von Neumann durch $0 := \emptyset$ und $z+1 := z \cup \{z\}$ und dann ω als die kleinste Menge, die 0 und zu jedem Element z auch seinen Nachfolger $z+1$ enthält. Die vom Prädikat $\in$ induzierte Relation $\in_\omega$ über ω entspricht der Kleiner-Relation in den natürlichen Zahlen, denn nach Konstruktion ist jedes $z \in \omega$ die Menge seiner $\in_\omega$-Vorgänger. Daher ist $(\omega, \in_\omega)$ eine Wohlordnung. Auch ω selbst ist die Menge seiner $\in_\omega$-Vorgänger, hat aber keinen unmittelbaren Vorgänger.

13. Die folgenden Ausführungen zu Ordinal- und Kardinalzahlen entnimmt man zum Beispiel Ebbinghaus 2021.

Es liegt daher nahe, den Zählvorgang nach allen natürlichen Zahlen (den endlichen Ordinalzahlen) mit ω und dann nach dem Prinzip der von-Neumann-Zahlen $z+1 := z \cup \{z\}$ im Transfiniten fortzusetzen. Dies führt auf transfinite Ordinalzahlen.

Allgemein ist x eine *Ordinalzahl* (kurz: $\mathrm{Oz}\, x$), wenn $(x, \in_x)$ eine Wohlordnung ist und jedes Element von x die Menge seiner $\in_x$-Vorgänger ist. Ordinalzahlen, die keinen unmittelbaren Vorgänger haben, heißen *Limeszahlen*, alle anderen Ordinalzahlen *Nachfolgerzahlen*. Man kann in ZF zeigen, dass es zu jeder Ordinalzahl eine mächtigere Ordinalzahl gibt und dass die Ordinalzahlen eine echte Klasse bilden. Die wesentlichen Ordnungseigenschaften von Ordinalzahlen lassen sich auf die gesamte Klasse (mit $\in$ als Ordnungsprädikat) übertragen. Meist schreibt man dann $<$ statt $\in$. Zwei Ordinalzahlen α, β sind stets vergleichbar, das heißt, es gilt entweder $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta < \alpha$.

Kardinalzahlen sind diejenigen Ordinalzahlen, bei denen die Mächtigkeit auf die nächst höhere Stufe springt. Sie werden durch die *Aleph-Operation* definiert.[14] Die Argumente werden hier üblicherweise als untere Indizes geschrieben. Man setzt $\aleph_0 := \omega$ und $\aleph_{\alpha+1}$ als die kleinste Ordinalzahl, die mächtiger als $\aleph_\alpha$ ist. Für Limeszahlen δ definiert man $\aleph_\delta := \bigcup\{\aleph_\beta \mid \beta < \delta\}$. Damit die Operation auf dem gesamten Universum definiert ist, setzt man noch $\aleph_x := \emptyset$, falls x keine Ordinalzahl ist. Eine Menge x ist eine *Kardinalzahl*, wenn $x \in \omega$ oder wenn es eine Ordinalzahl α gibt mit $x = \aleph_\alpha$.

In ZFC lässt sich zeigen (und das Auswahlaxiom ist dabei wesentlich), dass jede Menge x zu genau einer Kardinalzahl gleichmächtig ist. Diese Kardinalzahl wird mit $|x|$ oder $\mathrm{card}(x)$ bezeichnet und die *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* von x genannt. Kardinalzahlen sind ein Maß für die Größe aktual unendlicher Mengen. Sie „zählen“ die Elemente unendlicher Vielheiten.

Mit Kardinalzahlen kann man in gewisser Weise rechnen, wenn auch nicht so wie gewohnt. Man definiert dazu eine kardinale Addition, Multiplikation und Exponentiation wie folgt:

- $\kappa + \mu := |(\kappa \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})|$,
- $\kappa \cdot \mu := |\kappa \times \mu|$,
- $\kappa^\mu := |{}^{\mu}\kappa|$.

Die kardinalen Operationen setzen die in ω definierten gewöhnlichen arithmetischen Operationen fort. Die Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen bleibt auch im Transfiniten kommutativ und assoziativ, aber es gelten seltsam „unarithmetische“ Regeln. Für Kardinalzahlen κ, μ, von denen mindestens eine transfinit ist, gilt $\kappa + \mu = \max\{\kappa, \mu\}$ und (wenn keine der beiden 0 ist) ebenfalls $\kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.[15] Die Regeln spiegeln grob gesagt wider, dass die Bildung von Vereinigungsmengen oder von kartesischen Produkten im Transfiniten nicht zu einer „Vermehrung“ führt (anders, als man es aus dem Endlichen kennt). Das Teil-Ganzes-Axiom ist verletzt. Aus der Definition der kardinalen

14. Das globale Rekursionstheorem für Ordinalzahlen (siehe Ebbinghaus 2021, S. 103) ermöglicht rekursive Definitionen von Operationen auf dem Mengenuniversum.

15. Zur Kardinalzahlarithmetik siehe Ebbinghaus 2021, S. 133.

Exponentiation folgt, dass die Potenzmenge einer unendlichen Menge A die Mächtigkeit $2^{|A|}$ hat (so, wie man es von endlichen Mengen kennt). Diese ist stets größer als $|A|$.

Cantors transfinite Ordinal- und Kardinalzahlen gehören in der Mathematik heute zum Standard. Kann man auch auf eine andere Weise bis unendlich und darüber hinaus zählen? Bereits Leibniz und Johann Bernoulli haben in einem Briefwechsel darüber diskutiert, ob eine unendliche Reihe ein unendlichstes Glied (und danach weitere Glieder) haben müsse. Während Bernoulli dies klar befürwortet hat, war Leibniz zurückhaltend und wandte ein, dass dies zumindest kein zwingender Schluss sei.[16] Bernoullis unendlichste Glieder stehen in einem ordinalen Sinne an einer unendlichen Position. Dennoch besteht ein wesentlicher Unterschied zu Cantors transfiniten Ordinalzahlen. Während erstere stets Nachfolger und Vorgänger haben, gilt das nicht für transfinite Ordinalzahlen. Sie haben Nachfolger, aber keine Vorgänger, wenn sie Limeszahlen sind. Hier liegen also zwei gänzlich unterschiedliche Konzepte des unendlichen Zählens vor. Unendliche Gesamtheiten, und damit die Möglichkeit eines kardinalen Unendlich, wurden vor Cantor in der Regel abgelehnt, da sie (wie schon Galilei feststellte) das Teil-Ganzes-Axiom verletzen.

Das Unendliche messen

Kann man das Messen bis ins Unendliche und darüber hinaus denken? Gibt es also unendliche Größen? Cantors Kardinalzahlarithmetik gibt hierauf keine Antwort, denn die Multiplikation einer transfiniten Kardinalzahl mit einer Größe (bzw. einer reellen Zahl) ist dort nicht vorgesehen.

Leibniz hat einen Unterschied gemacht zwischen *unbegrenzten Unendlichkeiten* (infinita interminata), wie einer unbegrenzten, unendlich ausgedehnten geraden Linie, und *begrenzten Unendlichkeiten* (infinita terminata), wie einer Strecke von 0 bis zu einem unendlich entfernten Punkt. Unbegrenzte Unendlichkeiten lehnte er als widersprüchlich ab, weil sie (wie unendliche Gesamtheiten) das Teil-Ganzes-Axiom verletzen, während er begrenzte Unendlichkeiten als nützliche Fiktionen in seinem Infinitesimalkalkül verwendete (siehe Leibniz 2016, S. 61). Gerechnet wird mit diesen Größen wie mit gewöhnlichen Größen. Die Kehrwerte der infinita terminata sind infinitesimal.

Ein ganz anderer Umgang mit unendlichen Größen ist in der heutigen Maßtheorie üblich (siehe zum Beispiel H. Bauer 1992). Dort kompaktifiziert man die Menge $\mathbb{R}$ zu $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und definiert $-\infty < x < +\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Gerechnet wird mit den *uneigentlichen Zahlen* $+\infty$ und $-\infty$ so:

$$
\begin{aligned}
x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x &= \pm\infty, \text{ für } x \in \mathbb{R} \\
(\pm\infty) + (\pm\infty) &= \pm\infty \\
x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x &= \pm\infty, \text{ für } 0 < x \leq +\infty \\
x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x &= \mp\infty, \text{ für } -\infty \leq x < 0 \\
0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 &= 0
\end{aligned}
$$

16. Den Briefwechsel diskutiert Spalt in Spalt 2019 und kommt zu dem Ergebnis, dass Leibniz eine unendliche Zahl ablehnte. Allerdings hat Leibniz Bernoulli gegenüber nicht behauptet, dass es kein unendlichstes Glied geben könne, sondern nur, dass es sich nicht notwendigerweise so verhalte.

$(\pm\infty) + \mp\infty$ ist nicht definiert. Auch eine Division durch $\pm\infty$ ist nicht definiert. Eine Maßfunktion kann Werte aus $[0, +\infty]$ annehmen. Die von Leibniz abgelehnten infinita interminata haben hier das Maß $+\infty$.

Der Teil und das Ganze

Detlef D. Spalt konstatiert in seinem Buch „Analysis im Wandel und Widerstreit“:

> Welche kennzeichnende(n) Eigenschaft(en) hat das „aktuale“ Unendlich? Fatalerweise ist dies völlig unklar! (Spalt 2015, S. 676)

Nach Spalt gibt es dazu (mindestens) zwei grundverschiedene und einander ausschließende Auffassungen, eine, die das euklidische Axiom „Das Ganze ist größer als sein Teil“ beibehält, und eine die es verwirft.

Die erste Auffassung erlaubt ein arithmetisches Unendlich, wie es in der Nichtstandardanalysis verwendet wird. Dann enthält zum Beispiel die Menge der ganzen Zahlen von 1 bis zu einer geraden unendlichen Zahl ν doppelt so viele ganze Zahlen wie gerade Zahlen. Die Strecke von 0 bis zu einem unendlich entfernten Punkt μ ist doppelt so lang wie die Strecke von 0 bis $\frac{\mu}{2}$, und die Strecke von 1 bis μ ist um 1 kürzer als die Strecke von 0 bis μ.

Die zweite Auffassung erlaubt mathematische Gegenstände, die ebenso groß sind wie ein echter Teil ihrer selbst. Die Verletzung des euklidischen Axioms wird in der Mengenlehre gerade zur charakterstischen Eigenschaft des aktual Unendlichen. (Eine Menge heißt Dedekind-unendlich, wenn sie sich bijektiv auf eine echte Teilmenge abbilden lässt.) Die unendliche Menge der natürlichen Zahlen enthält genauso viele gerade Zahlen wie Zahlen insgesamt.

Die Folge ist ein unarithmetisches Unendlich, mit dem sich nicht wie gewohnt rechnen lässt. Insbesondere gelten nicht die Kürzungsregeln. Für eine unendliche Kardinalzahl κ gilt zum Beispiel $\kappa = \kappa + 1$, ohne dass $0 = 1$ folgt. Genauso verhält es sich mit $+\infty$ in der Maßtheorie.

Ausschluss oder Koexistenz

Die Mathematik hat sich mit der Durchsetzung der Cantor'schen Mengenlehre dafür entschieden, das Teil-Ganzes-Axiom preiszugeben. In der reellen Arithmetik hat man sich auf das potentiell Unendliche beschränkt und das archimedische Axiom beibehalten: Es gibt beliebig große, aber keine unendlich großen reellen Zahlen. Nichtarchimedische Körper wurden zwar weiterhin untersucht (siehe zum Beispiel Ehrlich 2006), spielten jedoch für die Entwicklung der Analysis keine große Rolle mehr.

Die Entscheidung für das eine schließt aber das andere nicht aus, wie die Nichtstandardanalysis seit Schmieden/Laugwitz und Robinson beweist. Im Gegensatz zu Spalt sehe ich in den beiden Auffassungen des aktual Unendlichen nicht einander ausschließende Alternativen, sondern lediglich zwei unterschiedliche, aber koexistente Unendlichkeitsbegriffe. Eine Menge A hat eine bestimmte Kardinalität $|A|$ und – wenn A *-endlich ist

– ebenfalls eine bestimmte *-Elementanzahl $^{\#}A$ (vgl. Definition 13). Ebenso koexistieren beide Unendlichkeitsbegriffe in der Maßtheorie. Ein unbegrenztes Intervall hat das Maß $+\infty$. Das begrenzte Intervall $[0, \mu]$ (mit Nichtstandardzahl μ) hat die (arithmetisch-unendliche) Länge μ. In der Internen Mengenlehre tritt das arithmetische Unendlich gar nicht explizit auf, sondern wird als nichtstandard-endlich zu einer Unterform von endlich.

5.2.3. Herausforderung: Das aktual Unendliche in der Arithmetik

Die gewohnte Sichtweise

- Aktual unendliche Mengen sind selbstverständliche Gegenstände der Mathematik.
- Unendlich große und unendlich kleine Zahlen sind zwar in nichtarchimedischen Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ möglich, spielen aber in der Praxis kaum eine Rolle.

Herausforderung durch Nichtstandard

- Unendlich große und unendlich kleine Zahlen sind selbstverständliche Gegenstände der Mathematik.
- Das arithmetische Unendlich und das kardinale Unendlich stehen gleichberechtigt nebeneinander und sind gleichermaßen nützliche Konzepte in der Mathematik.

5.3. Das Kontinuum

5.3.1. Das Wesen des Kontinuums

Im Alltag erfahren wir Kontinuierliches als Fließen der Zeit oder als Ausgedehntsein des uns umgebenden Raumes. In der Geometrie werden als Kontinua Linien, Flächen oder Körper betrachtet. Sie sind Idealisierungen von Alltagskontinua wie physikalischen Linien, Flächen und Körpern. Die Frage, was das Kontinuum (als abstrakter Oberbegriff für Kontinuierliches) seinem Wesen nach *ist*, wurde in der Geschichte sehr unterschiedlich beantwortet.[17]

Die verschiedenen Auffassungen lassen sich in atomistische und nicht atomistische einteilen. Nach den atomistischen Auffassungen ist das Kontinuum aus Atomen zusammengesetzt, also aus elementaren Bestandteilen, die nicht weiter teilbar sind. Atome sind das Primäre, das Kontinuum etwas Zusammengesetztes (also nicht primär). Je nachdem, ob das Kontinuum als nur endlich teilbar angesehen wird (Demokrit) oder als unendlich teilbar (Cavalieri), sind die Atome von endlicher Größe oder aber unendlich klein (Indivisiblen bei Cavalieri).

Eine besondere Form der atomistischen Kontinuumsauffassung ist der heute übliche überabzählbare Atomismus[18]. Sie wurde erst durch die Cantor'sche Mengenlehre möglich

17. Für einen Überblick siehe zum Beispiel Bedürftig und Murawski 2019, Kapitel 3.3.
18. Bedürftig und Murawski nennen ihn *trans-transfiniten Atomismus* (Bedürftig und Murawski 2019, S. 213).

mit ihren Kardinalitäten jenseits des Abzählbaren. Die Atome sind nach dieser Auffassung ausdehnungslose Punkte. Das heißt: Punkte haben (als Bestandteile einer Linie) die Länge 0. Dies erzeugt erstens das Paradoxon, dass eine Vervielfachung von 0 etwas Positives ergeben muss und zweitens das Paradoxon, dass dieses Positive nicht eindeutig bestimmt ist. Mit naiver Anschauung (und $\mathfrak{c}$ als der Mächtigkeit des Kontinuums) wäre zum Beispiel $\mathfrak{c} \cdot 0 = 1$ für die Einheitsstrecke und $\mathfrak{c} \cdot 0 = 2$ für die bijektiv auf das Doppelte gestreckte Einheitsstrecke. Natürlich darf man mit Kardinalzahlen und Längen so nicht rechnen (nach Kardinalzahlarithmetik ist $\mathfrak{c} \cdot 0 = 0$ und $\mathfrak{c} \cdot 1 = \mathfrak{c} \cdot 2 = \mathfrak{c}$), aber das zeigt nur, dass man eine überabzählbare Punktmenge anschaulich nicht erfassen kann (im Gegensatz zu einer Strecke).

Man beachte, dass auch nach atomistischer Auffassung des Kontinuums *Zusammensetzung* mehr ist als bloße *Zusammenfassung*. Daher müssen zum Beispiel der *Menge* $\mathbb{R}$ ihre Struktureigenschaften (Anordnung, Körpereigenschaften, Metrik) in Gestalt von Relationen (also weiteren Mengen) separat mitgegeben werden.

Gemäß nicht atomistischer Auffassungen ist das Kontinuum nicht aus unteilbaren Bausteinen (Punkten oder Atomen) zusammengesetzt, sondern selbst primär, ein Gegenstand eigener Art. Dies ist die vorherrschende Sichtweise in der Zeit von Aristoteles bis ins 19. Jahrhundert hinein. Nach Aristoteles ist Kontinuierliches stets teilbar, und zwar nur in wieder Kontinuierliches. Es ist für ihn daher unmöglich, dass etwas Kontinuierliches aus Unteilbarem besteht. Punkte als unteilbare Nicht-Kontinua sind demnach nicht bereits in einem Kontinuum *vorhanden* (als dessen Bestandteile), sondern sie werden ins Kontinuum *gesetzt*. Sie teilen oder begrenzen lineare Kontinua, aber sie konstituieren sie nicht.

5.3.2. Kontinuum vs. Menge

Wenn man in der Mathematik heute von *dem* Kontinuum spricht, meint man meistens die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, aber dies ist eine relativ junge Sichtweise auf das Kontinuum, die sich erst Ende des 19. Jahrhunderts herausgebildet hat. Voraussetzung waren die Entwicklung der Mengenlehre durch Georg Cantor und die mengentheoretische Konstruktion der reellen Zahlen, wesentlich durch Cantor und Dedekind.

Von der Ursprungsidee sind Kontinuum und Menge zwei einander ausschließende Konzepte. Eine Menge ist nach Cantor die Zusammenfassung *wohlunterschiedener* Dinge. Das klassische Kontinuum hingegen ist etwas Homogenes, in dem keine wohlunterschiedenen Dinge als Bestandteile des Kontinuums auszumachen sind. Erst mit Cantor, Dedekind und Hilbert (vorbereitet durch Bolzano) wird das Kontinuum zur Punktmenge erklärt und damit der Mengenlehre zugänglich gemacht. Dies ist aber ein entscheidender Wandel im Denken (siehe Bedürftig und Murawski 2019, Kapitel 3.3).

5.3.3. Das Cantor-Dedekind-Postulat

Streng genommen ist das anschauliche Kontinuum kein Gegenstand der Mathematik mehr. In der *reinen* Mathematik wird es durch den (mengentheoretisch definierten) vollständig angeordneten Körper der reellen Zahlen ersetzt. Der Bezug zur Anschauung wird durch den Begriff der *reellen Zahlengeraden* hergestellt, die (gemäß atomistischer Kontinuumsauffassung) aus ausdehnungslosen Punkten besteht, wobei jeder Punkt umkehrbar eindeutig einer reellen Zahl entspricht. Nur von den Intuitionisten, die eine mengentheoretische Rekonstruktion des Kontinuums als überabzählbare Punktmenge ablehnen, wird das Kontinuum als eigenständige Intuition vorausgesetzt.

Wilholt, der in seinem behutsamen Mathematischen Realismus realistische und formale Mathematik unterscheidet, zählt die reellen Zahlen noch zur realistischen Mathematik und identifiziert die positiven reellen Zahlen (als Universalien ante rem) mit realen, physikalischen Größenverhältnissen (siehe Abschnitt 5.1.4).

Eine realistische oder zumindest realitätsnahe Vorstellung der reellen Zahlen dürfte unter Mathematikern und Mathematikanwendern weit verbreitet sein. Sie wird scheinbar gerechtfertigt durch den erfolgreichen Einsatz der reellen Zahlen in den Naturwissenschaften. Wir können sie prägnant durch folgende Gleichung ausdrücken:

> (Idealisierte) physikalische Gerade = anschauliche, geometrische Gerade = reelle Zahlengerade

Fletcher u. a. 2017 folgend nennen wir diese Gleichsetzung das *Cantor-Dedekind-Postulat.*

5.3.4. Das archimedische Axiom

Gemäß Euklids Definition 4 aus Buch V der Elemente haben zwei Größen ein Verhältnis zueinander, wenn sie vervielfältigt einander übertreffen können (Euklid 1975, S. 91). In der vorangehenden Definition 3 wird eingeschränkt, dass es sich um gleichartige Größen handeln muss, also zum Beispiel um zwei Linien, zwei Winkel, zwei Flächen oder zwei Volumina (ibid.).

Euklid *definiert* also hier, was es bedeutet, dass zwei gleichartige Größen ein Verhältnis zueinander haben, er behauptet nicht, dass zwei gleichartige Größen stets ein Verhältnis zueinander haben. In Buch III, Proposition 16 gibt er ein Gegenbeispiel, indem er feststellt, dass der Winkel zwischen Kreis und Tangente kleiner sei als jeder gradlinige spitze Winkel (Euklid 1975, S. 57).

Leibniz nimmt an verschiedenen Stellen Bezug auf Euklids Definition 4, zum Beispiel bei seiner Definition *unvergleichlicher Größen*. In einem Brief vom 14./24. Juni 1695 schreibt er an de l'Hospital:

> J'appelle *grandeurs incomparables*, dont l'une multipliée par quelque nombre fini que ce soit, ne sçauroit exceder l'autre; de la même façon qu'Euclide la pris dans sa cinquieme definition du cinquiéme livre (Leibniz 1695, Hervorhebung im Original).[19]

Auch dies ist zunächst nur eine Definition und nicht die Behauptung, dass es unvergleichliche Größen gebe. Die Bedeutung dieser Definition für Leibniz' Kontinuumsvorstellung

19. *Unvergleichlich* nenne ich *Größen*, von denen eine, mit einer beliebigen endlichen Zahl multipliziert, die andere nicht übertreffen kann; so wie Euklid es in seiner fünften Definition [in heutigen Ausgaben Definition 4] des fünften Buches getan hat (eigene Übersetzung).

wird unter Historikern kontrovers diskutiert. Nach synkategorematischer Lesart handelt es sich um eine Leerdefinition, die auf nichts zutrifft, da Aussagen mit infinitesimalen oder unendlichen Größen nur als abkürzende Redeweisen für kompliziertere Aussagen mit gewöhnlichen, endlichen Größen zu verstehen sind. Nach formalistischer Lesart beschreibt die Definition *inassignable Größen*, wie die infinitesimalen Differentiale oder die unendlichen, aber begrenzten *infinita terminata*, die den gewöhnlichen Größen zumindest als Fiktion hinzugedacht werden können (vgl. etwa Rabouin und Arthur 2020 einerseits und Bair u. a. 2018 und Bair u. a. 2021 andererseits).

Heute werden angeordnete Körper als *archimedisch* bezeichnet, wenn sie das *archimedische Axiom* erfüllen, wenn also für alle positiven Körperelemente x, y gilt: $\exists n \in \mathbb{N}\, nx > y$. In axiomatischen Einführungen der reellen Zahlen wird das archimedische Axiom entweder separat gefordert oder aus dem Supremumsaxiom gefolgert.

Ob das Kontinuum die archimedische Eigenschaft besitzt (das heißt, ob das archimedische Axiom gilt), hängt davon ab, was man unter dem Kontinuum versteht. Setzt man es gemäß dem Cantor-Dedekind-Postulat mit $\mathbb{R}$ gleich, dann hat es qua *Setzung* die archimedische Eigenschaft. Sieht man in $\mathbb{R}$ nur eine mögliche (aber nicht zwingende) mengentheoretische Modellierung des anschaulichen Kontinuums, so eröffnet sich die Möglichkeit, nach Belieben auch nichtarchimedische Modelle wie $^*\mathbb{R}$ in Betracht zu ziehen.[20]

Allerdings ist selbst im ersten Fall die Existenz infinitesimaler Größen nicht ausgeschlossen. Diese Option ergibt sich daraus, dass zur Formulierung der archimedischen Eigenschaft auf die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen zurückgegriffen wird und unendliche natürliche Zahlen nicht ausgeschlossen werden können. Wir kommen hierauf in Abschnitt 5.6 zu sprechen.

5.3.5. Herausforderung: Das nichtarchimedische Kontinuum

Die gewohnte Sichtweise

- Das anschauliche Linearkontinuum (die geometrische Gerade) besteht aus überabzählbar vielen ausdehnungslosen Punkten.
- Es ist archimedisch geordnet.
- Die Punkte können (bei willkürlicher Festlegung von 0 und 1) mit den reellen Zahlen identifiziert werden (Cantor-Dedekind-Postulat).

Herausforderung durch Nichtstandard

- Das anschauliche Linearkontinuum (die geometrische Gerade) ist keine Punktmenge. Es ist überhaupt *keine Menge*, sondern eine eigenständige mathematische

20. Philip Ehrlich hat gezeigt, dass Conways System **No** der surrealen Zahlen in gewisser Hinsicht das maximal mögliche mengentheoretisch-arithmetische Modell des Kontinuums darstellt: Es ist das *absolute arithmetische Kontinuum modulo NBG* (von-Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre mit globalem Auswahlaxiom). Jeder angeordnete Körper (dessen Universum eine Klasse in NBG ist) kann dort eingebettet werden (Ehrlich 2012).

Leitidee, unabhängig vom Mengenbegriff.

- Mengentheoretische Konstruktionen können bestimmte Aspekte dieser Leitidee nachbilden und sind in diesem Sinne *Modelle* des anschaulichen Kontinuums.
- Standard- und Nichtstandardmodelle stehen gleichberechtigt nebeneinander und sind gleichermaßen nützliche Konzepte in der Mathematik.

5.4. Mengenlehre

Mengenlehre ist heute die „Realität“ des Mathematikers, unabhängig davon, ob seine philosophische Position eher realistisch oder formalistisch ist (siehe Abschnitt 5.1.8). Daher verdient sie eine besondere Beachtung, wenn es um mögliche mathematisch oder philosophisch begründete Vorbehalte gegen Nichtstandarderweiterungen der Mengenlehre geht, wie sie in den Abschnitten 2.4 und 2.5 vorgestellt worden sind. Notwendigerweise spielt dabei die Unterscheidung zwischen Hintergrundmengenlehre und Objektmengenlehre eine Rolle. Ebenso sind inhaltliche Vorstellungen, wie die kumulative Hierarchie, die Interpretierbarkeit einer Mengenlehre in einer anderen oder Multiversum-Theorien relevant.

5.4.1. Zur Bedeutung der Mengenlehre in der Mathematik

In der Phase der Etablierung der Mengenlehre, Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts, stellte sich heraus, dass sich alle bis dahin verwendeten mathematischen Begriffe (insbesondere Zahlen, Größen, Kurven, Funktionen und Relationen) mengentheoretisch definieren ließen – wenn man zu gewissen Zugeständnissen bereit war. Tatsächlich waren die Zugeständnisse gewaltig, auch wenn das heute nicht mehr so empfunden wird. Aktual unendliche Gesamtheiten mussten akzeptiert und das Teil-Ganzes-Axiom aufgegeben werden. Die anschaulichen Größen mussten zu mengentheoretisch konstruierten reellen Zahlen umgedeutet und das anschauliche, homogene Kontinuum atomisiert werden. Auf der anderen Seite waren auch die Vorteile gewaltig. Mit einer in der Prädikatenlogik formalisierbaren Mengenlehre auf der Basis der Zermelo-Fraenkel'schen Axiome stand unabhängig von der Anschauung „ein gemeinsamer Rahmen und ein gemeinsamer Standard der Strenge“ für die Mathematik zur Verfügung, wie wir Simpson in Abschnitt 5.1.8 zitiert haben.

Man kommt im Prinzip mit einer reinen Mengenlehre ohne Urelemente aus. Hierdurch kommt der Mengenlehre eine besondere und grundlegende Rolle innerhalb der Mathematik zu. Diskussionen über die Grundlagen der Mengenlehre können so auch immer als Diskussionen über die Grundlagen der Mathematik insgesamt verstanden werden.[21]

Ein weiterer Vorteil besteht aus Sicht der Logik. Die Mengenlehre ist in einer sehr einfachen Sprache, einer Sprache erster Stufe mit $\in$ als einzigem nichtlogischen Symbol, formalisierbar. Damit lässt sich (außer dem Grundbegriff *Menge* selbst) im Prinzip jeder

21. Neben der Mengenlehre gibt es alternative Grundlagenprogramme für die Mathematik, zum Beispiel aus der Kategorientheorie oder der Typentheore (siehe Awodey 2011).

mathematische Begriff durch einen $\in$-Ausdruck formal definieren und jede mathematische Aussage als $\in$-Satz formalisieren.

Da Funktionen und Relationen definitionsgemäß Mengen sind, kann auch über solche Objekte quantifiziert werden, obwohl nur eine Sorte von Variablen (Individuenvariablen) zur Verfügung steht. Die wesentliche Beschränkung von Sprachen erster Stufe wird damit gewissermaßen umgangen. Zugleich erhält man die Vorteile, die Sprachen erster Stufe aus Sicht der mathematischen Logik auszeichnen. Insbesondere gelten wichtige modelltheoretische Sätze wie der Endlichkeitssatz oder der Gödel'sche Vollständigkeitssatz (siehe Anhang A.1.4).

Anhang A.2.1 enthält eine Zusammenstellung des Axiomensystems ZFC (Zermelo-Fraenkel'sches Axiomensystem mit Auswahlaxiom). Dieses hat neben dem Neumann-Berays-Gödel'schen Axiomensystem NBG heute die größte Bedeutung und Verbreitung.

5.4.2. Das Mengenuniversum als kumulative Hierarchie

In ZF (das Auswahlaxiom wird nicht gebraucht) sorgt das Fundierungsaxiom für den hierarchischen Aufbau des Mengenuniversums. Wenn man bei der einfachsten Menge, der leeren Menge, beginnend durch fortgesetzte Potenzmengenbildung und anschließend (im Limesfall) durch Vereinigung zu immer komplexeren und umfassenderen Mengen fortschreitet und dieses Vorgehen ins Transfinite extrapoliert, dann ist das Fundierungsaxiom über den restlichen Axiomen (also über ZF^0) äquivalent zu der Aussage, dass man das gesamte Universum auf diese Weise ausschöpft.

Das globale Rekursionstheorem für Ordinalzahlen (siehe zum Beispiel Ebbinghaus 2021, S. 103) ermöglicht rekursive Definitionen von Operationen auf dem Mengenuniversum. Eine wichtige Anwendung dieses Satzes ist die Definition der von Neumann'schen Hierarchie V. Wie bei der Aleph-Operation (siehe Abschnitt 5.2.2) werden die Argumente hier üblicherweise als untere Indizes geschrieben.

Definition 25.

$$\begin{aligned} V_x &= \emptyset,\ \textit{falls}\ \neg \mathrm{Oz}\, x; \\ V_0 &= \emptyset; \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha); \\ V_\delta &= \bigcup\{V_\beta \mid \beta < \delta\},\ \textit{falls}\ \delta\ \textit{Limeszahl} \end{aligned}$$

(vgl. Ebbinghaus 2021, S. 107).

Definition 26. $\mathbf{V}x :\leftrightarrow \exists \alpha\, x \in V_\alpha$ *(ibid.).*

Konventionsgemäß sind kleine griechische Buchstaben Variablen für Ordinalzahlen. Entsprechend steht $\exists\alpha$ abkürzend für $\exists\alpha\,(\mathrm{Oz}\,\alpha \wedge \dots)$. Statt „$\mathbf{V}x$“ wird häufig die Klassenschreibweise „$x \in \mathbf{V}$“ verwendet. Über ZF^0 ist das Fundierungsaxiom äquivalent zu $\forall x\, x \in \mathbf{V}$ (Ebbinghaus 2021, S. 110). In ZF und in ZFC ist das Mengenuniversum daher identisch mit der Klasse $\mathbf{V}$.

Durch die von Neumann'sche Hierarchie wird der kumulativ-hierarchische Aufbau des Mengenuniversums besonders deutlich.[22] Das Universum erhebt sich in Stufen über der leeren Menge durch fortgesetzte Potenzmengenbildung und (im Limesfall) Vereinigung. Jede Stufe umfasst alle vorherigen Stufen.

Die Übereinstimmung des Zermelo-Fraenkel'schen Mengenuniversums mit der kumulativen Hierarchie wird oft als Indiz dafür gewertet, dass der axiomatischen Theorie ein intuitiv schlüssiges Konzept für den Mengenbegriff zu Grunde liegt, sodass es schwer vorstellbar erscheint, dass ZF oder ZFC widersprüchlich sind (siehe zum Beispiel Ebbinghaus 2021, S. 153). Ein *Beweis* der Konsistenz innerhalb der Theorie selbst ist nach den Gödel'schen Unvollständigkeitssätzen allerdings nicht möglich.

5.4.3. Die konstruktible Hierarchie

Neben der von Neumann'schen Hierarchie V spielt für modelltheoretische Betrachtungen noch die *konstruktible Hierarchie* L mit der zugehörigen Klasse $\mathbf{L}$ der *konstruktiblen Mengen* eine wichtige Rolle. Gödel hat sie 1938 eingeführt, um zu beweisen, dass das Auswahlaxiom AC, die Kontinuumshypothese CH ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$) und die verallgemeinerte Kontinuumshypothese GCH ($\forall \alpha\, 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$) konsistent relativ zu ZF sind (siehe Gödel 1938, Gödel 1939, Gödel 1940).

Die Idee der konstruktiblen Hierarchie ist, dass jede Stufe $L_{\alpha+1}$ nicht die komplette Potenzmenge von L_α ist, sondern nur diejenigen Mengen enthält, die sich durch einen $\in$-Ausdruck auf der Basis der Stufe L_α *definieren* lassen. Da man in der Sprache der Mengenlehre nicht direkt über Ausdrücke sprechen oder quantifizieren kann (siehe Abschnitt 5.4.5), muss man dazu die Syntax und Semantik formaler Sprachen mit mengentheoretischen Mitteln nachbilden, ähnlich wie man mit den von-Neumann-Zahlen die naiven natürlichen Zahlen mengentheoretisch nachbildet (vgl. Abschnitt 5.5.2). Weitere Details hierzu und zu den folgenden Ausführungen findet man in Ebbinghaus 2021, S. 182-194. In ZF lässt sich so eine einstellige Operation Defpot definieren, die eine „konstruktible Version" der Potenzmengenoperation $\mathcal{P}$ darstellt, indem sie Folgendes leistet:

$$\forall y\, \mathrm{Defpot}(y) \subseteq \mathcal{P}(y) \tag{5.5}$$

und für alle $\in$-Ausdrücke $\varphi(z, \overset{n}{x})$

$$\forall y\, \forall \overset{n}{x}\ (x_1 \in y \wedge \cdots \wedge x_n \in y \rightarrow \{z \in y \mid [\varphi(z, \overset{n}{x})]^y\} \in \mathrm{Defpot}(y)) \tag{5.6}$$

Darin steht $\overset{n}{x}$ abkürzend für $x_1, \ldots, x_n$ und $[\varphi(z, \overset{n}{x})]^y$ für den $\in$-Ausdruck, der aus $\varphi(z, \overset{n}{x})$ entsteht, indem man alle Quantoren auf y relativiert. Analog zu den Definitionen 25 und 26 definiert man dann die Operation L und die Klasse $\mathbf{L}$ (vgl. Ebbinghaus 2021, S. 184):

22. Das Scott'sche Axiomensystem erfasst den Gedanken der kumulativen Hierarchie axiomatisch. Dieses Axiomensystem stellt sich als gleichwertig zu ZF heraus (siehe Ebbinghaus 2021, S. 166-174).

Definition 27.

$$\begin{aligned} L_x &= \emptyset, \textit{ falls } \neg \mathrm{Oz}\, x; \\ L_0 &= \emptyset; \\ L_{\alpha+1} &= \mathrm{Defpot}(L_\alpha); \\ L_\delta &= \bigcup \{L_\beta \mid \beta < \delta\}, \textit{ falls } \delta \textit{ Limeszahl.} \end{aligned}$$

Definition 28. $\mathbf{L}x :\leftrightarrow \exists \alpha\, x \in L_\alpha$.

Durch die Beschränkung auf konstruktible Mengen ist die Klasse **L** im Allgemeinen wesentlich übersichtlicher als die Klasse **V**. Unter anderem ist es möglich, in ZF explizit ein zweistelliges Prädikat zu definieren, das **L** wohlordnet (Ebbinghaus 2021, S. 190-192). Außerdem gelten in **L** alle Axiome von ZF, das Auswahlaxiom sowie die verallgemeinerte Kontinuumshypothese (jeweils relativiert auf **L**). Man sagt auch, **L** ist bezüglich ZF ein *inneres Modell* von ZF+AC+GCH, denn jedes Modell von ZF umfasst (mit dem durch **L** beschriebenen Teil) ein Modell von ZF+AC+GCH. Daraus folgt: Wenn ZF konsistent ist, dann ist auch ZF+AC+GCH konsistent.

Cohen hat 1963 seine neu entwickelte Forcing-Methode vorgestellt und damit gezeigt, dass auch die Negationen ¬AC und ¬CH (also auch ¬GCH) konsistent relativ zu ZF sind (siehe Cohen 1963, Cohen 1964, Cohen 1966). Zusammen mit Gödels Ergebnis bedeutet dies, dass AC, CH und GCH unabhängig von ZF sind.

Die Annahme, dass die konstruktible Hierarchie bereits das gesamte Mengenuniversum ausschöpft, dass also $\forall x\, \mathbf{L}x$ gilt, wird als *Konstruktibilitätsaxiom*, kurz $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, bezeichnet. Da **L** bezüglich ZF ein inneres Modell von $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ ist, ist auch das Konstruktibilitätsaxiom konsistent relativ zu ZF.

5.4.4. Vielfalt der Modelle

Da die innerhalb von ZF definierte kumulative Hierarchie V, ausgehend von der eindeutig bestimmten leeren Menge durch eine eindeutig (durch transfinite Rekursion) definierte Abfolge eindeutig definierter Schritte (Potenzmengenbildung bzw. im Limesfall Vereinigung) das Universum ausschöpft, könnte der Eindruck entstehen, das Universum sei damit eindeutig bestimmt. Das ist jedoch nicht der Fall. Wenn ZF widerspruchsfrei ist, dann gibt es nach dem Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski (Satz 76) unendlich viele verschiedene, zueinander nicht isomorphe Modelle von ZF, unter anderem abzählbare Modelle sowie Modelle beliebig großer Kardinalität.

Das Auswahlaxiom AC ist nach Ergebnissen von Gödel und Cohen über ZF unentscheidbar. Das gleiche gilt für die Kontinuumshypothese CH und die verallgemeinerte Kontinuumshypothese GCH. Also gibt es unter den ZF-Modellen sowohl Modelle von ZFC, als auch Modelle von $\mathrm{ZF} + \neg\mathrm{AC}$. Unter den ZFC-Modellen gibt es wieder unendlich viele verschiedene, zueinander nicht isomorphe, zum Beispiel Modelle von $\mathrm{ZFC} + \mathrm{GCH}$ und Modelle von $\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{GCH}$ (vgl. Ebbinghaus 2021, S. 183). In jedem dieser Modelle schöpft V das gesamte Universum, also die Trägermenge des jeweiligen Modells, aus.

V selbst ist kein Modell von ZFC, denn **V** ist (im Gegensatz zu den einzelnen Hierarchiestufen V_α keine Menge). Gemäß dem zweiten Gödel'schen Unvollständigkeitssatz kann innerhalb von ZFC kein Modell von ZFC definiert werden, ja nicht einmal die Existenz eines solchen Modells bewiesen werden (siehe Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 119f). Innerhalb geeigneter Erweiterungen von ZFC ist dies dagegen durchaus möglich. Ergänzt man ZFC zum Beispiel um Axiome, die die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen implizieren, und ist κ die kleinste unerreichbare Kardinalzahl, dann ist V_κ ein Modell von ZFC (Jech 2003, S. 167).

Modelle für ein Axiomensystem der Mengenlehre werden immer einer bereits vorausgesetzten Mengenlehre entnommen. Dieser Umstand erfordert es, zwischen Objektmengenlehre und Hintergrundmengenlehre und damit zwischen verschiedenen Sprachebenen zu unterscheiden.

5.4.5. Metasprache und Objektsprache

In der mathematischen Logik untersuchen wir die Sprache der Mathematik mit mathematischen Methoden; und wir gebrauchen dazu Sprache, und zwar (auch) die Sprache der Mathematik. Die drohende Zirkularität dieses Vorgehens wird durch die Unterscheidung von Sprachebenen durchbrochen. Sprache tritt also in der Logik in (mindestens) zweifacher Hinsicht auf: einerseits als Untersuchungsgegenstand – dann heißt sie *Objektsprache* – und andererseits als Werkzeug oder Mittel der Untersuchung – dann heißt sie *Metasprache*.

Objektsprachen sind *formale* Sprachen. Was zu einer Objektsprache gehört ist durch ihr Alphabet und ihre Kalküle (Termkalkül, Ausdruckskalkül) festgelegt (siehe Abschnitt A.1.1). In einer Objektsprache zu „sprechen“ bedeutet, einen objektsprachlichen Ausdruck anzugeben. Einen objektsprachlichen Beweis zu führen bedeutet, eine dem Sequenzenkalkül entsprechende Sequenz von Ausdrücken anzugeben (siehe Abschnitt A.1.3).

Terme und Ausdrücke einer Objektsprache haben zunächst keine Bedeutung. Sie erhalten eine Bedeutung erst durch eine *Interpretation*, also eine Funktion, die den nichtlogischen Symbolen (Konstanten, Funktionssymbolen, Relationssymbolen) entsprechende Elemente, Funktionen bzw. Relationen einer passenden Struktur zuordnet und freie Variablen mit Elementen des Trägers der Struktur belegt. Eine Interpretation eines formalen Ausdrucks kann zu einer wahren oder zu einer falschen Aussage führen. Im ersten Fall heißt die Interpretation ein *Modell* des Ausdrucks. Wenn der Ausdruck keine freien Variablen enthält (also ein *Satz* ist), heißt auch die verwendete Struktur ein Modell des Ausdrucks (siehe Abschnitt A.1.2).

Die praktizierte Mathematik findet nicht in einer Objektsprache, sondern in einer (um Fachbegriffe angereicherten) Umgangssprache statt, allerdings wird in Grundlagendiskussionen in der Regel davon ausgegangen, dass Mathematik im Rahmen der Mengenlehre und damit *prinzipiell* in einer Objektsprache der ersten Stufe formuliert werden könnte.

5.4.6. Hintergrundmengenlehre und Objektmengenlehre

In Einführungen zur Logik wird die Mengenlehre meist in naiver Weise (das heißt ohne axiomatische Grundlage) verwendet. Modelle werden einem Mengenuniversum entnommen, dessen Existenz als gegeben angenommen wird. Mit ZFC steht für diese Betrachtungen eine axiomatische Theorie zur Verfügung.

Tatsächlich kann man die gesamte Logik erster Stufe (Syntax und Semantik) auf der Basis von ZFC aufbauen (zum Beispiel mit den Elementen von ω als mengentheoretischem Ersatz für die Variablen und mit geeigneten n-Tupeln zur Kodierung von Termen, Ausdrücken, Sequenzen, Belegungen, Interpretationen und Strukturen). Die Modellbeziehung lässt sich auf der Basis von ZFC mittels $\in$-Ausdrücken definieren. Der Vollständigkeitssatz und andere modelltheoretische Sätze (siehe Abschnitt A.1.4) lassen sich durch $\in$-Sätze symbolisieren und aus ZFC ableiten (siehe Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 119-122).[23]

So wie die Sprache einmal als Werkzeug (Metasprache) verwendet wird und einmal Untersuchungsgegenstand (Objektsprache) ist, so tritt uns auch Mengenlehre in zweifacher Weise gegenüber: Einmal als Werkzeug (für syntaktische und semantische Überlegungen) und einmal als Untersuchungsgegenstand. Im ersten Fall nennt man sie *Hintergrundmengenlehre*, im zweiten Fall *Objektmengenlehre*.

Wenn die Begriffe der beiden Ebenen vermischt werden, gelangt man schnell zu paradoxen Aussagen. Als Beispiel sei hier kurz das *Skolem'sche Paradoxon* erläutert (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 120): Unter der Voraussetzung, dass ZFC widerspruchsfrei ist, besitzt ZFC nach dem Satz von Löwenheim-Skolem ein Modell $\mathfrak{A}$ mit abzählbarem Träger A. Andererseits lässt sich aus ZFC ein $\in$-Satz ableiten, der besagt, dass es eine überabzählbare Menge U gibt und damit überabzählbar viele Objekte im Diskursuniversum A. Wie passt das zusammen?

Der Widerspruch löst sich auf, wenn man die Begriffe der Objektmengenlehre (im Folgenden zur Verdeutlichung mit Superskript $\mathfrak{A}$ gekennzeichnet) und die der Hintergrundmengenlehre auseinanderhält. Die Überabzählbarkeit$^{\mathfrak{A}}$ von U bedeutet, dass es kein Element von A gibt, das die Interpretation einer Injektion$^{\mathfrak{A}}$ von U in $\omega^{\mathfrak{A}}$ ist. Dies steht nicht im Widerspruch zu der Aussage, dass es in der Hintergrundmengenlehre eine Injektion von $\{x \in A \mid x \in^{\mathfrak{A}} U\}$ in ω gibt. U ist also *intern* betrachtet (im Sinne der Objektmengenlehre) überabzählbar$^{\mathfrak{A}}$, aber *extern* betrachtet (im Sinne der Hintergrundmengenlehre) abzählbar.

Für einen Mengenlehre-Realisten ist das Universum der Hintergrundmengenlehre das *wahre* Mengenuniversum. In ihm hat jeder $\in$-Satz (auch ein in ZFC unentscheidbarer) einen eindeutigen Wahrheitswert, ist entweder wahr oder falsch. Axiomensysteme wie ZF und ZFC (und ggf. Erweiterungen davon) erfassen wesentliche Eigenschaften des wahren Mengenuniversums, auch wenn sie nicht vollständig sein können. Innerhalb der Hintergrundmengenlehre können unterschiedliche Modelle von ZFC (als Objektmengenlehre) untersucht werden.

Für einen Formalisten ist das Mengenuniversum eine Fiktion und Mengenlehre eine formale Theorie ohne semantisches Gegenstück, ohne Referenten. Modelltheoretische Überlegungen finden innerhalb dieser Fiktion statt, im Vertrauen darauf, dass die ver-

23. Die Autoren weisen (mit Referenzierung von Barwise 1975) darauf hin, dass man zum Beweis des Vollständigkeitssatzes mit einem wesentlich schwächeren Axiomensystem als ZFC auskommt (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 122). Wie in Abschnitt 5.1.7 erwähnt, lässt sich der Vollständigkeitssatz sogar in der finitistisch reduzierbaren Theorie WKL_0 herleiten.

einbarten Axiome der Hintergrundmengenlehre (in der Regel also ZFC) konsistent sind.

Für einen Konstruktivisten ist ein Mengenuniversum auf der Basis von ZFC kein sinnvoller Untersuchungsgegenstand.

5.4.7. Die sogenannten Standardmodelle

Die natürlichen Zahlen oder die reellen Zahlen lassen sich durch ihre arithmetischen Axiome (die sämtlich in einer Sprache der ersten Stufe formulierbar sind) allein nicht eindeutig charakterisieren. Das Induktionsaxiom für die natürlichen Zahlen bzw. das Vollständigkeitsaxiom für die reellen Zahlen lässt sich auf der ersten Stufe nur durch ein Axiomenschema nachempfinden, welches aber keine Eindeutigkeit garantiert. Nach dem Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski (Satz 76) haben diese Axiomensysteme Modelle beliebig großer Kardinalität.

In einer Zermelo-Fraenkel'schen Hintergrundmengenlehre werden die natürlichen Zahlen üblicherweise als von-Neumann-Zahlen definiert (siehe Abschnitt 5.2.2). Die Menge ω aller natürlichen Zahlen ist dann die kleinste Menge, die $0^\omega := \emptyset$ enthält und mit jedem x auch dessen Nachfolger $x \cup \{x\}$ (wobei die Operationen $\cup$ und $\{.\}$ durch $\in$-Ausdrücke definiert sind). Sie existiert nach dem Unendlichkeitsaxiom.[24]

Mit dem Rekursionstheorem kann man die Addition $+^\omega$ und die Multiplikation $\cdot^\omega$ wie üblich rekursiv definieren. Dann ist die Struktur $(\omega, 0^\omega, +^\omega, \cdot^\omega)$ ein Modell der *Peano-Arithmetik* der ersten Stufe (kurz: PA), also ein Modell der Axiome

$$\forall x \neg x + 1 = 0 \tag{5.7}$$

$$\forall x \, x + 0 = x \tag{5.8}$$

$$\forall x \, x \cdot 0 = 0 \tag{5.9}$$

$$\forall x \forall y \, (x + 1 = y + 1 \to x = y) \tag{5.10}$$

$$\forall x \forall y \, x + (y + 1) = (x + y) + 1 \tag{5.11}$$

$$\forall x \forall y \, x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x \tag{5.12}$$

und des Axiomenschemas

$$\varphi(0) \wedge \forall x \, (\varphi(x) \to \varphi(x + 1)) \to \forall x \, \varphi(x) \tag{5.13}$$

für alle $\{0, +, \cdot\}$-Ausdrücke $\varphi(x)$ (optional mit weiteren Parametern) (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 184).

Man nennt $\mathfrak{N} := (\omega, 0^\omega, +^\omega, \cdot^\omega)$ das *Standardmodell der Arithmetik*. Nichtstandardmodelle der Arithmetik wurden zuerst von Skolem untersucht (Skolem 1934).

Ausgehend von ω kann man das Zahlensystem bis zu den reellen Zahlen auf eine der bekannten Arten aufbauen (siehe zum Beispiel Ebbinghaus u. a. 1992). Die so konstruierte Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit den (durch $\in$-Ausdrücke definierten) Konstanten $0^\mathbb{R}$ und $1^\mathbb{R}$, den zweistelligen Funktionen $+^\mathbb{R}$ und $\cdot^\mathbb{R}$ sowie der zweistelligen Relation $<^\mathbb{R}$ sind

24. In einer Klassenmengenlehre ohne Unendlichkeitsaxiom kann ω als echte Klasse definiert werden (siehe zum Beispiel Bedürftig und Murawski 2001).

ein Modell der Körperaxiome, der Anordnungsaxiome und des folgenden Axiomenschemas (welches das Prinzip der kleinsten oberen Schranke für durch φ definierte Mengen formalisiert):

$$\begin{aligned} &\exists x\, \varphi(x) \wedge \exists b \forall x\, (\varphi(x) \to x \leq b) \\ &\to \exists g\, (\forall x\, (\varphi(x) \to x \leq g) \wedge \forall c\, (\forall x\, (\varphi(x) \to x \leq c) \to g \leq c)) \end{aligned} \tag{5.14}$$

für alle $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-Ausdrücke $\varphi(x)$ (optional mit weiteren Parametern) (vgl. Bedürftig und Murawski 2019, S. 356). $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1 +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}})$ ist das *Standardmodell der reellen Arithmetik*. Nichtstandardmodelle sind zum Beispiel entsprechende Strukturen mit hyperreellen Zahlen.[25]

Standardmodelle sind immer einer bereits vorausgesetzten Hintergrundmengenlehre entnommen. Wie steht es aber mit der Mengenlehre selbst? Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, gibt es nach dem Gödel'schen Vollständigkeitssatz ein Modell von ZFC. Aber (wie bereits in Abschnitt 5.4.2 erwähnt) ist die Existenz eines solchen Modells nicht innerhalb von ZFC, sondern höchstens in Erweiterungen von ZFC beweisbar. Insbesondere gibt es kein Standardmodell von ZFC innerhalb von ZFC. Ein Ausweichen auf eine umfassendere Mengenlehre (zum Beispiel mit Axiomen für große Kardinalzahlen) würde das Problem nur verschieben, da es dann kein Standardmodell für die umfassendere Mengenlehre gäbe.

Will man den Standardmodellen eine objektive und absolute Existenz zugestehen, so muss man ein außermathematisches Postulat an den Anfang stellen, das die Existenz eines objektiven und absoluten Mengenuniversums fordert, in dem die Standardmodelle (und alle anderen Modelle) zu Hause sind. Dies ist die Position der Mengenlehre-Realisten. Es ist auch die Arbeitsposition von Shapiros „working realist" (siehe Abschnitt 5.1.4). Das Universum der Hintergrundmengenlehre wird als *real* empfunden und kann wegen des Fundierungsaxioms mit der intuitiv plausiblen Klasse **V** zur von Neumann'schen Hierarchie gleichgesetzt werden (vgl. Abschnitt 5.4.2). Es ist das uns vertraute Mengenuniversum mit all den uns vertrauten Mengen wie $\mathbb{N}_0$ (bzw. ω), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, und so fort. „Vertraut" ist dabei kein mathematischer Begriff. Er bezeichnet das, was der „working realist" als real empfindet.

Für einen Formalisten ist das Mengenuniversum eine Fiktion. Damit sind auch alle Standardmodelle Fiktion. Sie haben keine Referenten. Robinson formuliert es so:

> I will mention here the assumption that there exists a standard or intended model of Arithmetic or (alternatively, but relatedly) of Set Theory. Clearly, to the formalist, the entire notion of standardness must be meaningless, in accordance with our first basic principle (Robinson 1965, S. 242).

„Our first basic priciple" bezieht sich dabei auf Punkt (i) aus dem Robinson-Zitat auf Seite 126, also auf die Aussage, dass unendliche Gesamtheiten weder ideell noch real existieren.

25. Strukturen hyperreeller Zahlen leisten allerdings noch wesentlich mehr, da sie elementare Erweiterungen der Struktur der reellen Zahlen sind bezogen auf eine Sprache, die zu *jeder* reellen Zahl und zu *jeder* Relation über $\mathbb{R}$ ein Symbol enthält (siehe Abschnitt 2.3.1).

5.4.8. Nichtstandard-Perspektiven auf die Mengenlehre

In den Abschnitten 2.4 und 2.5 wurden mehrere konservative Erweiterungen von ZFC vorgestellt, die es durch ein zusätzliches Prädikat ermöglichten, Standardmengen und Nichtstandardmengen zu unterscheiden. Die Frage ist: Was passiert bei diesen Erweiterungen mit dem „vertrauten Mengenuniversum", also mit der Realität des „working realist". Interessanterweise kann man hierzu verschiedene Sichtweisen einnehmen (vgl. Fletcher u. a. 2017, S. 19f).

Die interne Perspektive: Das vertraute Mengenuniversum wird als das Universum der erweiterten Theorie aufgefasst, dessen Beschreibung lediglich durch die Erweiterung reichhaltiger wird. Dem Universum wird also nichts hinzugefügt, man kann nur differenzierter über das Universum sprechen. Diese Perspektive wird von Nelson in seiner Internen Mengenlehre eingenommen (siehe Abschnitt 2.4).

Die Standardperspektive: Das vertraute Mengenuniversum wird als Teiluniversum (die Klasse der Standardmengen) eines umfassenderen Universums der internen Mengen aufgefasst. Alle unendlichen Standardmengen erhalten in dem umfassenderen Universum zusätzlich (fiktive) Nichtstandardelemente. Diese Perspektive wird in Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014 eingenommen.

Die externe Perspektive: Das vertraute Mengenuniversum wird als Teiluniversum (die Klasse der fundierten Mengen) eines umfassenderen Universums aufgefasst, das neben internen auch externe Mengen enthält. Diese Perspektive wird von Kanovei bevorzugt (siehe Kanovei und Reeken 2004).

Die interne Perspektive und die Standardperspektive unterscheiden sich nicht bezüglich ihrer Mathematik, die in beiden Fällen im Universum der internen Mengen stattfindet. Tatsächlich besteht aus formalistischer Sicht (aus der jegliche Mengenuniversen Fiktionen sind) überhaupt kein Unterschied zwischen den beiden Perspektiven. Die eingenommene Perspektive spielt aber möglicherweise für die Akzeptanz der Nichtstandardtheorie eine Rolle. In Hrbaček, Lessmann und O'Donovan 2014 wird berichtet, dass das Lehrbuch erst akzeptiert wurde, als die interne auf die Standardperspektive geändert wurde.

Für viele Realisten (oder arbeitende Realisten) ist es offenbar leichter zu akzeptieren, dass vertrauten Mengen fiktive Elemente hinzugefügt werden, als anzunehmen, dass vertraute Mengen Elemente enthalten, von denen man bisher nichts ahnte.

Für Realisten ist aber noch ein weiterer Hinweis wichtig. In Abschnitt 2.5 wurde erläutert, dass BST und HST nicht nur konservative Erweiterungen von ZFC sind, sondern dass sie sogar in ZFC interpretierbar sind. Vereinfacht gesagt bedeutet dies, dass jedes ZFC-Universum (durch eine entsprechende Interpretation) zu einem BST- oder HST-Universum umgedeutet werden kann, in dem sich das alte ZFC-Universum als die Klasse der Standardmengen (in BST) bzw. als die Klasse der fundierten Mengen (in HST) wiederfindet. In diesem Sinne sind also BST oder HST genauso real wie ZFC. Die Entscheidung, ob es im realen Mengenuniversum Nichtstandardobjekte geben soll, ist damit auch für ZFC-Realisten wahlfrei. Man könnte einwenden, dass eine solche Interpretation in ZFC zwar möglich sei, dass sie aber nicht die „wahren Gegebenheiten" im Mengenuniversum widerspiegele. Eine solche Argumentation ist in der Mathematik allerdings sonst nicht üblich. Dazu ein Vergleich: Wir nehmen uns in der Mengenlehre auch die Freiheit, bei Bedarf die Existenz von Urelementen anzunehmen, weil dies in ZFC modellierbar ist (siehe etwa Jech 2003, S. 250).

5.4.9. Multiversum-Theorien

Für Formalisten steht über das Mengenuniversum nur das fest, was aus den vereinbarten Axiomen ableitbar ist. Der Mengenbegriff ist nur insoweit fixiert, wie es die Axiome zulassen. Es gibt keinen absoluten Mengenbegriff. Dieser formalistische Relativismus hat seine realistische Entsprechung in den Multiversum-Theorien (für einen Überblick siehe zum Beispiel Antos u. a. 2015). Ihnen ist gemeinsam, dass sie nicht von einem einzigen realen Mengenuniversum ausgehen, sondern von einer Vielzahl mengentheoretischer Universen, die sämtlich existieren und jeweils unterschiedliche Mengenbegriffe instantiieren. Die Vielfalt der Modelle (siehe Abschnitt 5.4.4) wird gewissermaßen auf die Ebene von Universen übertragen.

Hamkins gibt mehrere Prinzipien (*Multiverse Axioms*) an, die die Existenz bestimmter Universen relativ zu anderen postulieren (Hamkins 2012). Zum Beispiel existieren Universen, wenn sie in einem anderen Universum definierbar oder interpretierbar sind (*Realizability Principle*) oder wenn sie aus einem anderen Universum durch Forcing hervorgehen (*Forcing Extension Principle*). Die Prinzipien formalisieren, dass es kein bestimmtes Universum gibt, das wir als *das* absolute Hintergrund-Universum betrachten können. So ist zum Beispiel nach dem *Countability Principle* jedes Universum abzählbar aus der Sicht eines anderen Universums oder, nach dem *Well-foundedness Mirage* nicht fundiert aus der Sicht eines anderen Universums. Innerhalb von ZFC konstruieren Gitman und Hamkins ein sogenanntes *Toy-Model* ihres Multiversums (Gitman und Hamkins 2010). Da es nach dieser Multiversum-Theorie keinen absoluten Mengenbegriff gibt, bezweifelt Hamkins ebenfalls, dass wir einen absoluten Endlichkeitsbegriff haben, denn dieser ist an die innerhalb der Mengenlehre definierten natürlichen Zahl geknüpft (Hamkins 2014). Wir kommen auf die natürlichen Zahlen in Abschnitt 5.5 genauer zu sprechen.

Man kann darüber diskutieren, ob ein Multiversum-Realismus befriedigender ist als die formalistische Position, derzufolge es verschiedene formale Mengenlehren (und damit Mengenbegriffe) gibt, aber keine zugehörigen Mengenuniversen. Auf jeden Fall ist ein absoluter Mengenbegriff sowohl aus formalistischer, als auch aus realistischer Position anzweifelbar.

5.4.10. Die Rolle des Auswahlaxioms

Abgesehen vom Extensionalitätsaxiom und vom Fundierungsaxiom, die jeweils grundlegende Wesensmerkmale des Mengenbegriffs zum Ausdruck bringen, sind die Axiome von ZF *Existenzaxiome*. Sie fordern die Existenz gewisser Mengen (zum Teil in Abhängigkeit von Parametern). ZF ist in dem Sinne *effektiv*, als dass sich für jede axiomatisch geforderte Existenz eine bestimmte Instanz *definieren* lässt: Für das Unendlichkeitsaxiom ist die Menge ω definierbar. Für die restlichen Existenzaxiome sind zu jeder gegebenen

Menge die Potenzmenge, die Vereinigungsmenge sowie die Aussonderungs- und Ersetzungsmengen definierbar bzw. zu je zwei gegebenen Mengen die Paarmenge. Hierdurch ist es überhaupt möglich Operationen wie $\mathcal{P}$, $\bigcup$ oder $\{.,.\}$ in ZF zu definieren.

Die Situation ändert sich grundlegend, wenn wir das Auswahlaxiom AC (*axiom of choice*) hinzunehmen. Es unterscheidet sich von den anderen Existenzaxiomen dadurch, dass die Existenz, die es fordert, unbestimmt bleibt. In einer gängigen Formulierung lautet AC: Zu jeder Familie nicht leerer und paarweise disjunkter Mengen gibt es eine *Auswahlmenge*, also eine Menge, die aus jeder Menge der Familie genau ein Element enthält. Eine alternative Formulierung ist: Zu jeder Familie nicht leerer Mengen gibt es eine *Auswahlfunktion*, also eine Funktion, die jeder Menge der Familie ein Element der Menge zuordnet. Im Allgemeinen ist es jedoch nicht möglich, zu einer gegebenen Familie nicht leerer Mengen eine bestimmte Auswahlfunktion explizit anzugeben, also durch einen $\in$-Ausdruck zu definieren. Insbesondere hat man keine definierbare „Auswahlfunktionsoperation“, die jeder Familie nicht leerer Mengen eine bestimmte Auswahlfunktion zuordnet.[26]

Mathematische Herleitungen, die das Auswahlaxiom verwenden, um die Existenz einer Menge zu beweisen, ohne die Menge explizit zu definieren, werden üblicherweise als *inkonstruktiv* oder *nicht konstruktiv* bezeichnet. Es ist allerdings zu beachten, dass diese Begriffe im Konstruktivismus anders verwendet werden. Eine Menge zu konstruieren bedeutet dort, ein effektives Verfahren anzugeben, mit dem man (potentiell) die Elemente der Menge konstruieren und voneinander unterscheiden kann (vgl. Abschnitt 5.1.5 und die Ausführungen zum Konstruktivismus in Abschnitt 5.8.2). Konstruktivisten lehnen daher auch das klassische Potenzmengenaxiom als inkonstruktiv ab.

Für die Analysis reichen in der Regel abzählbare Versionen des Auswahlaxioms, wie das Axiom der *abzählbaren Auswahl* CC (axiom of *countable choice*) oder das Axiom der *abhängigen Auswahl* DC (axiom of *dependent choice*). CC lautet: Zu jeder *abzählbaren* Familie nicht leerer Mengen gibt es eine Auswahlfunktion. DC lautet: Ist R eine zweistellige Relation auf einer nicht leeren Menge A und gibt es zu jedem $a \in A$ ein $b \in A$ mit bRa, dann gibt es eine Folge (a_n) mit $a_{n+1}Ra_n$ für alle $n \in \omega$. Es gilt AC $\Rightarrow$ DC $\Rightarrow$ CC (siehe Jech 2003, S. 50).

Der inkonstruktive Charakter des Auswahlaxioms schlägt auf die Sätze durch, die mit diesem Axiom bewiesen werden. Sie liefern in der Regel bloße Existenzaussagen ohne eine Möglichkeit, eines der Objekte, deren Existenz sie sichern, zu bestimmen. In den Grundvorlesungen wird mit dem Auswahlaxiom zum Beispiel bewiesen,

- dass jeder Vektorraum eine Basis hat,
- dass aus der ε-δ-Stetigkeit die Folgenstetigkeit folgt.[27]

26. Nimmt man zu ZFC noch das Konstruktibilitätsaxiom $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ hinzu, ist die Definition einer solchen Auswahlfunktionsoperation durchaus möglich, denn es gibt eine definierbare Wohlordnung auf $\mathbf{L}$ (siehe Abschnitt 5.4.3), und man kann die Operation zum Beispiel so definieren, dass die gemäß Wohlordnung erste Auswahlfunktion genommen wird.

27. Die Umkehrung dieser Aussage ist bereits in Z^0 (ZF ohne Fundierungsaxiom und ohne Ersetzungsaxiome) beweisbar (siehe Ebbinghaus 2021, S. 114).

- dass jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist.[28]

Für die letzten beiden Beispiele reicht CC. In der Mengenlehre wird AC zum Beispiel gebraucht, um zu zeigen, dass jede Menge zu einer Kardinalzahl gleichmächtig ist und somit je zwei Mengen stets bezüglich ihrer Mächtigkeit vergleichbar sind. Das Auswahlaxiom hat aber auch kontraintuitive Konsequenzen, wie die Existenz nicht Lebesgue-messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder das Banach-Tarski-Paradoxon (Tomkowicz und Wagon 2016). Seine Rolle für die anwendbare Mathematik ist daher umstritten.

Nach Ergebnissen von Gödel und Cohen ist AC unabhängig von ZF (siehe Abschnitt 5.4.3). Das heißt, wenn ZF konsistent ist, dann ist auch ZFC konsistent, aber ebenso ZF zusammen mit der Negation des Auswahlaxioms. Zur Geschichte des Auswahlaxioms siehe zum Beispiel Moore 1982.

Das Auswahlaxiom ist über ZF äquivalent zum Wohlordnungssatz (jede Menge ist wohlordenbar) sowie zum Zorn'schen Lemma (eine Halbordnung im Sinne von $\leq$, in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element) (siehe zum Beispiel Ebbinghaus 2021, S. 117-121). Eine umfangreiche Darstellung der Rolle des Auswahlaxioms in der Mathematik findet man in Jech 1973 und Howard und Rubin 1998.

Mit dem Zorn'schen Lemma wird zum Beispiel der Ultrafiltersatz bewiesen (jeder Filter lässt sich zu einem Ultrafilter erweitern), der für die Konstruktion der hyperreellen Zahlen und allgemeiner der Nichtstandardeinbettungen in Abschnitt 2.3.2 gebraucht wird. Die Vorbehalte gegenüber dem Auswahlaxiom bezüglich seiner Rolle für die anwendbare Mathematik werden daher oft auf die Nichtstandardanalysis übertragen (siehe Abschnitt 5.10). Genauer ist der Ultrafiltersatz über ZF äquivalent zum Boole'schen Primidealsatz (BPI), der schwächer als AC ist, aber nicht aus ZF allein folgt (Jech 1973, S. 17). Andererseits ist ZF+BPI nicht stark genug, um CC zu beweisen.

Ist das Auswahlaxiom für die Nichtstandardanalysis unentbehrlich? Die axiomatischen Zugänge wie IST scheinen zunächst einen Ausweg zu bieten, da sie ohne Ultrafilterkonstruktion auskommen und man daher auf das Auswahlaxiom verzichten könnte. Aus der so abgeschwächten Theorie $\mathrm{ZF} + \mathrm{I} + \mathrm{S} + \mathrm{T}$ folgt allerdings der Boole'sche Primidealsatz und damit auch der Ultrafiltersatz (siehe Hrbaček 2012). Daher ist diese Theorie nicht konservativ über ZF. Auf der anderen Seite braucht man für eine elementare Nichtstandardanalysis nicht die volle Idealisierung und Standardisierung aus IST. Eine Nichtstandardtheorie, die konservativ über ZF ist, wird in (Hrbaček und Katz 2021) vorgestellt. Diese ist auch Grundlage für die in Abschnitt 5.7 skizzierte Veranstaltung.

5.4.11. Herausforderung: Nichtstandard-Mengenuniversen

Die gewohnte Sichtweise

- Für die Mathematik steht ein Universum der Hintergrundmengenlehre zur Verfügung, das den Axiomen von ZFC (mindestens aber ZF) genügt.

28. Der Beweis beruht darauf, dass für jede der abzählbar vielen Mengen eine Abzählung *gewählt* wird.

- Dieses Mengenuniversum kann mit der Klasse **V** zur von Neumann'schen Hierarchie identifiziert werden.
- Es stellt Modelle für alle konsistenten Theorien zur Verfügung.
- Unentscheidbare Aussagen über Mengen haben einen eindeutigen Wahrheitswert (realistische Position) oder könnten durch zusätzliche Axiome entschieden werden (formalistische Position). Sie haben keinen Einfluss auf die anwendbare Mathematik.
- Endliche Mengen können mit naiven endlichen Zusammenfassungen identifiziert werden.

Herausforderung durch Nichtstandard

- Das Universum der Hintergrundmengenlehre ist nicht absolut.
- Durch die konservativen Nichtstandarderweiterungen von ZFC erhält es unvertraute Eigenschaften unter Beibehaltung aller vertrauten Eigenschaften.
- Vertraute Mengen (zum Beispiel $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$) enthalten unvertraute Elemente (zum Beispiel Nichtstandardzahlen).
- Der Endlichkeitsbegriff ist nicht absolut. Insbesondere ist der mengentheoretische Endlichkeitsbegriff vom naiven Endlichkeitsbegriff zu unterscheiden.

5.5. Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind die ältesten, die wir kennen. Wir benutzen sie als Ordinalzahlen, um Dinge in eine Reihenfolge zu bringen, als Kardinalzahlen beim Zählen von Dingen oder einfach zum Rechnen.

Der Prozess des Zählens, der die natürlichen Zahlen hervorbringt, kann in einfachster Weise durch fortgesetzte Wiederholung eines bestimmten Zeichens (zum Beispiel Striche auf einem Blatt Papier oder Kerben auf einem Knochen) dokumentiert werden. Strichlisten sind in vielen Bereichen des täglichen Lebens immer noch ein probates Mittel zur Repräsentation kleinerer natürlicher Zahlen, seien es die Anzahl konsumierter Getränke, ausgezählte Stimmen bei einer Wahl oder Punktestände in Spiel und Sport. Für größere Zahlen oder zum Rechnen verwenden wir in der Regel das Dezimalsystem, das uns so in Fleisch und Blut übergegangen ist, dass wir Zahlen vielfach mit ihrer Dezimaldarstellung identifizieren.

Die Frage, was natürliche Zahlen eigentlich sind, überlassen Mathematiker gerne den Philosophen, um sich selbst auf den axiomatischen Standpunkt zurückzuziehen. Das Spektrum der philosophischen Antworten reicht von „natürliche Zahlen sind real“ bis „natürliche Zahlen sind nichts als die Zeichen, die zu ihrer Darstellung verwendet werden“. Aber auch die mathematische, die axiomatische Antwort ist nicht so eindeutig, wie vielfach angenommen wird.

5.5.1. Peano-Strukturen

Was wir von den natürlichen Zahlen in der Mathematik erwarten, wird seit Peano und Dedekind durch die Peano-Dedekind'schen Axiome – meist kurz nur *Peano-Axiome* genannt – festgelegt. Sie charakterisieren die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig, sind aber wegen des Induktionsaxioms nicht auf der ersten Stufe formulierbar (siehe Anhang A.1.5). Mit der Konstanten 0, dem einstelligen Funktionssymbol σ (für die Nachfolgerfunktion) und der Prädikatsvariablen X sieht eine Formalisierung der Peano-Axiome auf der zweiten Stufe in moderner Notation zum Beispiel so aus (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 52f):

$$\forall x \forall y\, (\sigma x = \sigma y \to x = y), \tag{5.15}$$

$$\forall x\, \neg \sigma x = 0, \tag{5.16}$$

$$\forall X (X0 \wedge \forall x\, (Xx \to X\sigma x) \to \forall y\, Xy). \tag{5.17}$$

Die Axiome drücken aus, dass die Nachfolgerfunktion injektiv ist (ungleiche Zahlen haben auch ungleiche Nachfolger), dass die Null nicht Nachfolger einer Zahl ist und dass das Prinzip der vollständigen Induktion gilt (was für Null gilt und mit jeder Zahl auch für deren Nachfolger, das gilt für alle Zahlen). Die Modelle dieses auf der zweiten Stufe formulierten Axiomensystems sind gerade die *Peano-Strukturen*, also die Strukturen mit einer Trägermenge A und einer auf A definierten Funktion σ^A (die Interpretation von σ) und einem Element 0^A aus A (der Interpretation von 0), sodass gilt:

(P1) $\sigma^A \colon A \xrightarrow{\text{inj}} A$,

(P2) $0^A \notin \text{Bild}(\sigma^A)$,

(P3) $\forall B\, \big[B \subseteq A \wedge 0^A \in B \wedge \forall x\, (x \in B \Rightarrow \sigma^A(x) \in B) \Rightarrow B = A\big]$.

(P1) bis (P3) sind die *mengentheoretisch formulierten Peano-Axiome*. Nach dem Satz von Dedekind (siehe zum Beispiel Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 53) sind alle Peano-Strukturen isomorph. Für den Mathematiker ist es daher gleichgültig, welche Peano-Struktur zur Definition der natürlichen Zahlen herangezogen wird.

In ZFC werden die natürlichen Zahlen üblicherweise als von-Neumann-Zahlen definiert (siehe Abschnitt 5.2.2). Genauer definiert man:

- x ist *induktiv*, wenn $\emptyset \in x$ und $\forall z\, (z \in x \Rightarrow z \cup \{z\} \in x)$.
- $\omega := \{z \mid \forall y\, (\text{induktiv}(y) \Rightarrow z \in y)\}$.

Nach dem Unendlichkeitsaxiom existiert eine induktive Menge. Daher kann ω mit dem Aussonderungsaxiom gewonnen werden (siehe Anhang A.2.1). ω enthält also gerade die Elemente, die in *jeder* induktiven Menge enthalten sind. Anders ausgedrückt: Für jede induktive Menge x gilt $\omega \subseteq x$ (siehe Ebbinghaus 2021, S. 39f). Da die Menge ω selbst induktiv ist, ist sie die (im Sinne der Mengeninklusion) *kleinste induktive Menge*.

Mit $0^\omega := \emptyset$ und $\sigma^\omega(z) := z \cup \{z\}$ ist $(\omega, 0^\omega, \sigma^\omega)$ eine Peano-Struktur (siehe Ebbinghaus 2021, S. 67f).

5.5.2. Objektzahlen und Metazahlen

In einer Objektmengenlehre, welche die Definition von Peano-Strukturen und die Ableitung des Satzes von Dedekind erlaubt, müssen die natürlichen Zahlen der Objektsprache (kurz: *Objektzahlen*) von den natürlichen Zahlen der Metasprache (kurz: *Metazahlen*) unterschieden werden. Wir erläutern dies am Beispiel ZFC. Zur Verdeutlichung verwenden wir $\mathfrak{n}$ (statt n) als Platzhalter für Metazahlen.

Mit den gängigen definierten Funktionssymbolen $\cup$ und $\{.\}$ definiere man ein weiteres Funktionssymbol σ durch $\sigma x := x \cup \{x\}$. Dann gibt es zu jeder Metazahl $\mathfrak{n}$ einen objektsprachlichen Term

$$\sigma^{\mathfrak{n}}\emptyset := \underbrace{\sigma \dots \sigma}_{\mathfrak{n}\text{-mal}}\emptyset,$$

der den $\mathfrak{n}$-fachen Nachfolger von $\emptyset$ bezeichnet. Zu jeder Metazahl $\mathfrak{n}$ gibt es somit eine entsprechende Objektzahl $\sigma^{\mathfrak{n}}\emptyset$. Soweit sind die Überlegungen rein syntaktischer Natur und kommen mit dem potentiell Unendlichen aus.

Setzt man eine Hintergrundmengenlehre voraus, die aktual unendliche Mengen und die Ableitung des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes erlaubt, sind modelltheoretische Betrachtungen möglich. Für konsistente Axiomensysteme gibt es dann in der Hintergrundmengenlehre Modelle. Sei also (unter der Annahme der Konsistenz von ZFC) $\mathfrak{A}$ ein Modell von ZFC und A die Trägermenge des Modells. Die Interpretation des Symbols $\in$ und der (in der Objektsprache) definierten Symbole (wie $\emptyset$, ω, σ) wird jeweils durch das Superskript $\mathfrak{A}$ gekennzeichnet. Dann hat jeder Term $\sigma^{\mathfrak{n}}\emptyset$ eine eindeutige Interpretation in A, nämlich $(\sigma^{\mathfrak{n}}\emptyset)^{\mathfrak{A}} = (\sigma^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{n}}(\emptyset^{\mathfrak{A}})$ (die Funktion $\sigma^{\mathfrak{A}}$ $\mathfrak{n}$-mal auf $\emptyset^{\mathfrak{A}}$ angewendet). Damit hat jede Metazahl eine eindeutige Entsprechung im Modell (genauer, in der Trägermenge des Modells).

$\mathcal{M}$ bezeichne in der Hintergrundmengenlehre die Menge der Metazahlen. Die Menge

$$\mathcal{N} := \{(\sigma^{\mathfrak{n}}\emptyset)^{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{n} \in \mathcal{M}\}$$

ist eine Teilmenge von A. Da sie ein Konstrukt der Hintergrundmengenlehre ist, steht sie in der Objektmengenlehre nicht zur Verfügung. Daher kann sie nicht zur Definition der Menge der natürlichen Zahlen innerhalb der Objektmengenlehre dienen. Man kann aber die Menge $\mathcal{N}$ in der Hintergrundmengenlehre mit der Menge

$$\mathcal{N}' := \{a \in A \mid a \in^{\mathfrak{A}} \omega^{\mathfrak{A}}\}$$

vergleichen. $\mathcal{N}$ enthält genau die Entsprechungen der Metazahlen im Modell. $\mathcal{N}'$ enthält genau die Objektzahlen, aber *extern* betrachtet (als Elemente der Trägermenge des Modells). Es gilt folgender

Metasprachlicher Satz 1. *Sei $\mathfrak{A}$ ein Modell von ZFC. Dann gilt: $\mathcal{N}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{N}'$.*

Beweis. Da $\mathfrak{A}$ ein Modell von ZFC ist, gilt $\emptyset^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \omega^{\mathfrak{A}}$ und für alle a aus A: wenn $a \in^{\mathfrak{A}} \omega^{\mathfrak{A}}$, dann $\sigma^{\mathfrak{A}}(a) \in^{\mathfrak{A}} \omega^{\mathfrak{A}}$. Mittels metasprachlicher Induktion folgt daraus für jede Metazahl $\mathfrak{n}$: $(\sigma^{\mathfrak{n}}\emptyset)^{\mathfrak{A}} \in^{\mathfrak{A}} \omega^{\mathfrak{A}}$. Also ist $\mathcal{N}$ eine Teilmenge von $\mathcal{N}'$. □

Die Gleichheit von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}'$ gilt im Allgemeinen nicht. Zwar gilt für alle a aus A mit induktiv$^{\mathfrak{A}}(a)$ auch $\omega^{\mathfrak{A}} \subseteq^{\mathfrak{A}} a$, es ist aber nicht gesagt, dass $\mathcal{N}$ überhaupt ein Element von A ist. Daher ist der Schluss auf $\mathcal{N}$ nicht anwendbar.

Vereinfacht gesagt gibt es möglicherweise „mehr“ Objektzahlen als Metazahlen. Diese Möglichkeit findet sich in ZFC-Modellen bestätigt, die den Erweiterungen aus Abschnitt 2.4 oder 2.5 genügen.

5.5.3. Welches sind die richtigen natürlichen Zahlen?

Die Notwendigkeit, zwischen den natürlichen Zahlen der verschiedenen Sprachebenen zu unterscheiden, mag zu der Frage verleiten, welches denn nun die „richtigen“ natürlichen Zahlen sind. Allerdings verlassen wir mit einer solchen Frage den Zuständigkeitsbereich der Mathematik, zumindest der Mathematik, wie sie heute verstanden wird.

Formalisierte Mathematik – oder Mathematik, die den Anspruch erhebt, prinzipiell formalisierbar zu sein – setzt immer bereits die natürlichen Zahlen voraus (allein, um einen unbegrenzten Vorrat an Variablen zu haben). Solange man auf der syntaktischen Ebene bleibt und zum Beispiel Term-, Ausdrucks- oder Sequenzenkalküle mit beweistheoretischen Mitteln untersucht, kommt man mit dem potentiell Unendlichen aus (zum Beispiel auf der Basis von PRA). Sobald eine Semantik ins Spiel kommt, braucht man Modelle, und das bedeutet, man braucht eine (wiederum formalisierbare) Hintergrundmengenlehre – oder zumindest ein hinreichend starkes Teilsystem von Z_2, zum Beispiel WKL_0 (siehe Abschnitt 5.1.7). In diesen formalen Systemen sind die natürlichen Zahlen wieder Objektzahlen und von den Metazahlen (die dann genau genommen schon Metametazahlen sind) zu unterscheiden.

Was bedeutet dies für unsere Ausgangsfrage? Die Antwort hängt vom mathematikphilosophischen Standpunkt ab.

Der Formalismus ist finitistisch in Bezug auf die Metamathematik. Das heißt, der Anspruch, über eine aktual unendliche Gesamtheit aller Metazahlen zu sprechen, wird gar nicht erhoben. Demnach wären die nur potentiell unendlichen Metazahlen am ehesten als die „richtigen“ natürlichen Zahlen zu bezeichnen. Alles, was darüber hinausgeht, führt zu Objektzahlen einer formalen Theorie, die von den Metazahlen zu unterscheiden sind. Sowohl für die Metazahlen, als auch für Objektzahlen hat man das Phänomen der Unvollständigkeit in Kauf zu nehmen. Das heißt, es bleiben in jedem Fall unentscheidbare Aussagen.

Eine solche Antwort ist für Realisten nicht akzeptabel. Nach realistischer Auffassung muss jede arithmetische Aussage (auch eine unbeschränkt quantifizierende) eine eindeutige Antwort haben, unabhängig davon, ob wir diese innerhalb einer formalen Theorie ermitteln können. Wilholt nimmt eine pragmatische Haltung gegenüber Fragen der Konsistenz oder Vollständigkeit ein, solange es nur um formale Systeme geht, bezeichnet eine solche Haltung aber als „nicht hinnehmbar“ (Wilholt 2004, S. 234) in Bezug auf die Kernbereiche der klassischen Mathematik (zu denen er insbesondere die elementare Arithmetik und die reelle Analysis zählt).

Wir wenden uns noch einmal seinem behutsamen Mathematischen Realismus zu, wonach natürliche Zahlen Universalien ante rem sind, also Zahleigenschaften faktischer oder kontrafaktischer Aggregate (siehe Abschnitt 5.1.4). Ausgehend von den (vermutlich nicht unbegrenzt möglichen) physikalisch realen Aggregaten, kann ich in den kontrafaktischen Aggregaten (die entstehen würden, wenn es weitere kausale Prozesse gäbe, die man hinzufügen könnte) nur einen *potentiell* unendlichen Bereich erkennen. Ich sehe nicht, wie sich daraus eine Rechtfertigung ableitet, über die Gesamtheit *aller* Zahleigenschaften oder über *beliebige Gesamtheiten* von Zahleigenschaften zu sprechen, wie dies in (P3) (Wilholt 2004, S. 182) geschieht ((P3) dort ist eine für Aggregate formulierte Version des Peano'schen mengentheoretisch formulierten Induktionsaxioms, also (P3) in Abschnitt 5.5.1). Die aus dem behutsamen Realismus abgeleiteten natürlichen Zahlen passen also besser zur finitistischen Auffassung.

Ein Mengenlehre-Realist kann die „richtigen“ natürlichen Zahlen mit den Elementen der *realen* Menge ω gleichsetzen. Allerdings kann man auch als Realist nicht sicher sein, dass das reale Mengenuniversum über ZFC hinaus nicht auch den Axiomen von IST (oder anderen Nichtstandarderweiterungen von ZFC) genügt. Für die Existenz von natürlichen Nichtstandardzahlen bestehen (nach den Überlegungen aus Abschnitt 5.4.8) mindestens folgende Optionen:

- Die Nichtstandardzahlen können gemäß der internen Perspektive als Elemente von ω angenommen werden.
- Die Nichtstandardzahlen können gemäß der Standardperspektive als fiktive Elemente den realen Zahlen hinzugedacht werden.
- Die Nichtstandardzahlen können durch eine Interpretation von BST (oder HST) in ZFC als real angesehen werden.

Wir halten fest: Sowohl aus einer formalistischen, als auch aus einer realistischen Position heraus kann die Existenz arithmetisch-unendlicher natürlicher Zahlen nicht ausgeschlossen werden. Die Gleichsetzung der naiven, intuitiv gegebenen natürlichen Zahlen mit den Elementen von ω ist nicht haltbar.

5.5.4. Herausforderung: unendliche natürliche Zahlen

Die gewohnte Sichtweise

- In der Hintergrundmengenlehre gibt es ein (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmtes Modell $(\omega, 0^\omega, \sigma^\omega)$ der Peano-Axiome.
- Die naiven natürlichen Zahlen können mit den Elementen von ω identifiziert werden.
- Es gibt keine unendlichen natürlichen Zahlen, da die endlichen Kardinalzahlen definitionsgemäß genau die natürlichen Zahlen sind.

Herausforderung durch Nichtstandard

- Die naiven natürlichen Zahlen sind von den natürlichen Zahlen der Hintergrundmengenlehre zu unterscheiden.

- Die natürlichen Zahlen der Hintergrundmengenlehre sind (definitionsgemäß) kardinal-endlich, sie können aber arithmetisch-unendlich sein.

5.6. Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen können über den rationalen Zahlen (mit mengentheoretischen Mitteln) auf unterschiedliche Weise konstruiert werden, zum Beispiel mittels Fundamentalfolgen oder Dedekind'scher Schnitte. Diese Arbeit wurde im Wesentlichen 1872 von Cantor und Dedekind geleistet (Cantor 1872, Dedekind 2017). Dieses Jahr kann daher als Geburtsjahr der reellen Zahlen gelten. Eine weitere Konstruktionsmöglichkeit nutzt Intervallschachtelungen (Bachmann 1892). Axiomatische Beschreibungen der reellen Zahlen gehen auf Hilbert (Hilbert 1900) und Tarski (Tarski 1937) zurück.

Insgesamt kann das Zahlensystem (über die Zwischenstufen $\mathbb{N}_0$ $(:= \omega)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) in der reinen Mengenlehre ZFC (sogar bereits in Z^0) aufgebaut werden (Ebbinghaus 2021, S. 82-84). Alle vollständig angeordneten Körper sind auf eindeutige Weise isomorph zu $(\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}})$ (siehe Mainzer 1988b, S. 42).

5.6.1. Die reellen Zahlen in den Analysis-Kursen

In Analysis-Kursen werden die reellen Zahlen zumeist axiomatisch eingeführt. Wie in Abschnitt 5.4.7 erwähnt, sind die reellen Zahlen – arithmetisch – nicht in einer Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe charakterisierbar. Axiomatisierungen auf der ersten Stufe lassen immer auch Nichtstandardmodelle zu. Es ist möglich, die reellen Zahlen in einer Sprache der zweiten Stufe zu charakterisieren, aber eine solche Sprache reicht nicht, wenn auch Objekte höherer Ordnung, wie Mengen von Teilmengen von $\mathbb{R}$ oder Mengen von Funktionen, betrachtet werden sollen. Üblich sind daher Axiomatisierungen unter Einbeziehung der Mengenlehre. Im Grunde handelt es sich dabei um Erweiterungen einer axiomatischen Mengenlehre, wobei die benutzten Mengenlehre-Axiome in den Analysis-Lehrbüchern in der Regel nicht explizit genannt werden.

Das in Deutschland weit verbreitete Lehrbuch von Otto Forster beginnt (nach einem einleitenden Paragraphen zur vollständigen Induktion) in §2 mit den Worten

> Wir setzen in diesem Buch die reellen Zahlen als gegeben voraus. Um auf sicherem Boden zu stehen, werden wir in diesem und den folgenden Paragraphen einige Axiome formulieren, aus denen sich alle Eigenschaften und Gesetze der reellen Zahlen ableiten lassen (Forster 2016, S. 17).

Anschließend werden zunächst die Körperaxiome und die Anordnungsaxiome vorgestellt, die noch rein arithmetisch (also ohne Mengenvokabular) formulierbar sind. Beim archimedischen Axiom und bei den Definitionen von reellen Zahlenfolgen, Konvergenz und Vollständigkeit (mittels Cauchy-Folgen) tritt dann die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen in Erscheinung, und da wird die Unterscheidung zwischen Metasprache und Objektsprache relevant, denn die naheliegende „Definition“ von $\mathbb{N}$ als Menge aller Einsensummen $1 + \cdots + 1$ ist in der Objektsprache nicht möglich, da sie einen Rückgriff auf metasprachliche Begriffe beinhaltet. Andererseits darf das Symbol $\mathbb{N}$ erst dann zur Formulierung von Axiomen, Definitionen und Sätzen der Analysis benutzt werden, *wenn* es in der Objektsprache definiert worden ist.[29]

Ein korrekter Weg, um die Menge der (objektsprachlichen) natürlichen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{R}$ (oder analog als Teilmenge eines beliebigen angeordneten Körpers K) zu gewinnen, ist folgender:

1. Man nenne eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ *induktiv*, wenn $1 \in M$ ist und wenn mit jedem $x \in M$ auch $x + 1 \in M$ ist.[30]

2. Man definiere $\mathbb{N}$ als den Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Die Definition ist möglich, da es induktive Teilmengen von $\mathbb{R}$ gibt (zum Beispiel $\mathbb{R}$ selbst) und da der Durchschnitt induktiver Mengen wieder induktiv ist. Voraussetzung sind Mengenaxiome, die diese Schlüsse zulassen (hier insbesondere das Potenzmengenaxiom und das Schema der Aussonderungsaxiome).

$\mathbb{N}$ ist nach Definition die (im Sinne der Mengeninklusion) kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$, das heißt, für jedes induktive $M \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{N} \subseteq M$. Eine unmittelbare Folgerung ist der Satz der vollständigen Induktion: Jede induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist mit $\mathbb{N}$ identisch. Daraus ergibt sich als wichtige Konsequenz die *Wohlordnung* von $\mathbb{N}$: Jede nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ enthält ein minimales Element (vgl. Behrends 2015, S. 45).

Auch Forster definiert die Menge der natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$ als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ und bezeichnet sie vorübergehend mit $\mathcal{N}$.[31] Dass diese Menge die 'richtigen' (Forster 2016, S. 28) natürlichen Zahlen enthält (und die Bezeichnung $\mathbb{N}$ damit gerechtfertigt ist), begründet er damit, dass sie die (mengentheoretisch formulierten) Peano-Axiome ((P1) bis (P3) aus Abschnitt 5.5.1) erfüllt, welche die natürlichen Zahlen charakterisieren. Zuvor schreibt er:

> $\mathcal{N}$ besteht also genau aus den Zahlen, die sich aus der 0 durch sukzessive Addition von 1 erhalten lassen (ibid.).

Wie oben angemerkt, ist eine solche Formulierung insofern problematisch, als sie die Sprachebenen vermischt. Durch sukzessive Addition von 1 erhält man zwar zu jeder metasprachlichen natürlichen Zahl (die angibt, wie viele Einsen man addiert hat) eine objektsprachliche natürliche Zahl. Es ist aber in der Objektsprache nicht möglich, die Menge genau dieser Zahlen zu bilden. Daher ist nicht auszuschließen, dass die Menge $\mathbb{N}$ Zahlen enthält, die nicht durch Terme der Form $1 + \cdots + 1$ erreicht werden. Solche

29. Wenn man $\mathbb{N}$ als eigenes Konstantensymbol in die ursprüngliche Symbolmenge aufnähme (oder alternativ ein einstelliges Relationssymbol für das Prädikat „ist eine natürliche Zahl"), liefe es auf das Gleiche hinaus, denn man müsste das Axiomensystem dann um entsprechende definierende Axiome für die neue Konstante bzw. das neue Prädikat ergänzen.

30. Je nachdem, ob 0 zu $\mathbb{N}$ gehören soll oder nicht, wird entweder $0 \in M$ oder $1 \in M$ für induktive Mengen M verlangt. In Mainzer 1988b und Forster 2016 ist zum Beispiel $0 \in \mathbb{N}$, in Behrends 2015 und Heuser 2009 dagegen $0 \notin \mathbb{N}$. Entsprechend unterscheiden sich die Definitionen induktiver Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. die Definitionen von $\mathbb{N}$.

31. In früheren Ausgaben definiert Forster die positiven natürlichen Zahlen als endliche Einsensummen, vermischt also die Sprachebenen (vgl. zum Beispiel Forster 1983, S. 15).

Zahlen wären mit Fug und Recht *unendlich groß* zu nennen. Eine genauere Analyse dieses Problems haben wir in Abschnitt 5.5.2 durchgeführt. Auch die Peano-Axiome verhindern nicht, dass es in $\mathbb{N}$ (und nach dem Satz von Dedekind damit in jeder Peano-Struktur) unendlich große Zahlen geben kann.

Hat man die Menge $\mathbb{N}$, wie oben beschrieben, in der Objektsprache zur Verfügung, kann man das archimedische Axiom wie bei Forster formulieren. Ebenso kann man Folgen, Cauchy-Folgen und die Konvergenz von Folgen definieren und das Vollständigkeitsaxiom wie bei Forster formulieren („Jede Cauchy-Folge konvergiert“).

Statt des archimedischen Axioms und des mittels Cauchy-Folgen formulierten Vollständigkeitsaxioms wird in anderen Lehrbüchern das Supremumsaxiom (z. B. in Deitmar 2021, Grieser 2015) oder das Dedekind'sche-Schnitt-Axiom (z. B. in Behrends 2015, Heuser 2009) verwendet. Die archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$ und die Konvergenz aller Cauchy-Folgen sind dann Folgerungen. Wird die Vollständigkeit über das Intervallschachtelungs-Axiom definiert (wie z. B. in Königsberger 2004), wird wieder zusätzlich das archimedische Axiom gebraucht. Bei jeder dieser Varianten der Axiomatisierung ist $\mathbb{N}$ als kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu definieren. Nicht alle Autoren machen sich (und ihren Lesern) diese Mühe. In Deitmar 2021 und Königsberger 2004 werden einfach die naiv eingeführten natürlichen Zahlen ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$) in $\mathbb{R}$ weiterverwendet.

Behrends gibt zunächst eine „unkritische“ (Behrends 2015, S. 37) Definition von $\mathbb{N}$ (innerhalb eines angeordneten Körpers K) an:

> Unter den natürlichen Zahlen in K verstehen wir die Gesamtheit derjenigen Elemente, die sich als endliche Summe von Einsen schreiben lassen, also $1, 1+1, 1+1+1$, usw.; üblicherweise schreibt man $2 := 1+1$, $3 := 1+1+1$, ... Wir werden hier das Zeichen $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen in K verwenden (ibid.).

Anschließend räumt er ein, dass diese Definition nicht zum Weiterarbeiten taugt, weil nicht klar sei, was „endliche Summe“ oder „usw.“ bedeuten soll, und führt den Leser zur „kritischen“ (Behrends 2015, S. 38) Definition $\mathbb{N} := \bigcap \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ das System der induktiven Teilmengen von K). Allerdings erliegt er direkt danach der Versuchung, die natürlichen Zahlen mit den Einsensummen gleichzusetzen, wenn er schreibt:

> Es ist plausibel, dass dieses $\mathbb{N}$ gerade die Zahlen 1, $1+1$, usw. enthalten muss:
>
> - 1 muss zu $\mathbb{N}$ gehören, da 1 in allen induktiven Mengen liegt, ebenso $1+1$, $1+1+1$, ...
> - Andere Elemente als $1, 1+1, 1+1+1, \dots$ können nicht in $\mathbb{N}$ liegen. Die 0 z.B. deswegen nicht, weil $\{x \mid x \in K, x > 0\}$ eine induktive Menge ist, die 0 nicht enthält (ibid.).

Ähnliches findet man bei Heuser (der die Menge der natürlichen Zahlen mit $\mathbf{N}$ bezeichnet). $\mathbf{N}$ wird als Schnittmenge aller induktiven Teilmengen des angeordneten Körpers K definiert. Im Kapitel „Folgerungen aus dem Schnittaxiom“ steht dann:

> Wir werden sehen ..., daß die vertraute Vorstellung von der nach oben unbeschränkten Menge **N** tatsächlich zutrifft; der Beweis hierfür kann jedoch das Schnittaxiom nicht entbehren, mit anderen Worten: Er kann nicht mit alleiniger Benutzung der Körper- und Ordnungsaxiome erbracht werden (es gibt „nichtarchimedisch“ angeordnete Körper, deren „natürliche Zahlen“ – die n-gliedrigen Summen $1 + 1 + \cdots + 1$, 1 das Einselement des Körpers – alle unter einem festen Körperelement liegen; [...].) (Heuser 2009, S. 71.)

Zwar ist richtig, dass die Menge der natürlichen Zahlen in der Menge der reellen Zahlen nach oben unbeschränkt ist und dass es nichtarchimedisch angeordnete Körper gibt, aber die natürlichen Zahlen dürfen nicht mit den n-gliedrigen Summen $1+1+\cdots+1$ identifiziert werden, da n hier eine metasprachliche natürliche Zahl ist.

5.6.2. Rekursive Definitionen

Ein anderes Beispiel für die Vermischung von Metasprache und Objektsprache ist die Definition der Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \cdots + a_n$$

für $n \in \mathbb{N}$ und eine gegebene Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (siehe z. B. Rudin 1976, S. 59).

Die rechte Seite stellt einen Term der Objektsprache dar, der nur für eine metasprachliche natürliche Zahl n sinnvoll ist. Dies reicht zur Definition der Partialsummenfolge nicht aus. Korrekt ist die rekursive Definition

$$s_1 := a_1, \quad s_{n+1} := s_n + a_{n+1}.$$

Aber auch hier klafft eine Lücke in der Argumentation. Dass rekursive Definitionen überhaupt möglich sind, folgt aus dem (in Analysiskursen in der Regel nicht bewiesenen) Rekursionssatz. Der Rekursionssatz fußt auf dem Satz der vollständigen Induktion, der wiederum aus der Definition von $\mathbb{N}$ als kleinster induktiver Teilmenge von $\mathbb{R}$ folgt.

Der Rekursionssatz kann für Funktionen (die auf Mengen definiert sind) oder allgemeiner für Operationen (die auf dem gesamten Universum definiert sind) formuliert werden (Ebbinghaus 2021, S. 73). Die zweite Version setzt das Schema der Ersetzungsaxiome voraus und wird dann gebraucht, wenn Operationen rekursiv definiert werden sollen, zum Beispiel die n-fache Potenzmenge einer Menge A durch $\mathcal{P}^1(A) := \mathcal{P}(A)$ und $\mathcal{P}^{n+1}(A) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(A))$ für $n \in \mathbb{N}$.

5.6.3. Die unterschlagenen Mengenaxiome

Da die übliche Analysis sich der Mengensprache bedient, enthalten viele Analysis-Lehrbücher oder -Vorlesungsskripte eine kurze Einführung in die (naive) Mengenlehre (siehe z. B. Behrends 2015, Deitmar 2021, Grieser 2015, Heuser 2009). Es wird dabei stets darauf geachtet, dass die Mengenlehre nicht als zur Analysis gehörig erscheint. Vielmehr scheint die Mengenlehre einer anderen Ebene anzugehören und ein selbstverständlicher Unterbau zu sein, der mit der axiomatischen Theorie nichts zu tun hat. Behrends vergleicht das Verhältnis von Analysis zur Mengenlehre mit dem Verhältnis dessen, was man in der Fahrschule über das Autofahren lernt, zum Studium von Kraftfahrzeugbau und Verkehrsrecht. Er schreibt:

> So ähnlich verhält es sich mit dem Stellenwert der Mengenlehre innerhalb der Analysis. Es kann hier nicht die Absicht sein, Sie in die Feinheiten des Gebiets einzuführen, dafür ist in späteren Semestern immer noch Zeit. Hier geht es nur um ein *erstes Kennenlernen*, insbesondere brauchen wir einige *Vokabeln*.

In der Tat braucht man für die Analysis keine höhere oder abstrakte Mengenlehre (z. B. Ordinalzahltheorie), aber wesentliche Grundsätze schon. Es ist schlechterdings unmöglich, axiomatische Analysis mit dem Vokabular der Mengenlehre zu machen ohne Axiome, die den Umgang mit Mengen regeln. Warum sollte man die Kommutativität der Addition reeller Zahlen axiomatisch fordern müssen, nicht aber die Möglichkeit, Vereinigungs- oder Potenzmengen zu bilden? Man kann Mengenlehre auch nicht auf die Metasprachebene verbannen (als Hintergrundmengenlehre), wenn die Axiome der reellen Zahlen die Mengensprache verwenden. Man braucht die Mengenlehre als *Objektmengenlehre* innerhalb der Analysis.

Insgesamt werden für die Analysis die folgenden Axiome der ZFC-Mengenlehre benötigt (siehe Bedürftig und Murawski 2019, S. 356f):

- Extensionalitätsaxiom
- Potenzmengenaxiom
- Axiom der Vereinigung
- Auswahlaxiom
- Schema der Ersetzungsaxiome

Das Paarmengenaxiom und das Schema der Aussonderungsaxiome folgen aus den vorgenannten, werden aber oft in Einführungen in die axiomatische Mengenlehre (zum Beispiel Ebbinghaus 2021) gesondert angegeben, weil diese Axiome historisch betrachtet vor dem Schema der Ersetzungsaxiome formuliert worden sind und man mit ihnen über weite Strecken auch ohne dieses Schema auskommt. Wie oben erwähnt, wird das Schema der Ersetzungsaxiome zum Beispiel gebraucht, um den Rekursionssatz für Operationen zu beweisen.

Ein Existenzaxiom ist überflüssig, wenn die Existenz mindestens einer Menge durch andere Axiome sichergestellt wird, wie in ZFC durch das Unendlichkeitsaxiom. In der mengentheoretischen Axiomatisierung der reellen Zahlen braucht man ein Axiom, das die Existenz einer Menge fordert, die alle reellen Zahlen enthält. Das Unendlichkeitsaxiom ist dann überflüssig, weil man die Menge der natürlichen Zahlen (wie oben beschrieben) durch Aussonderung aus der Menge der reellen Zahlen gewinnt. Das Fundierungsaxiom aus ZFC wird für die Analysis nicht gebraucht. Seine Rolle für die Mengenlehre wurde in Abschnitt 5.4.2 besprochen.

5.6.4. Endliche Mengen

Die meisten Analysis-Lehrbücher definieren zwar die Begriffe *abzählbar* und *überabzählbar* (und zeigen mit dem Cantor-Argument die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$), würdigen aber den Begriff *endlich* keiner Definition (Behrends ist hier eine Ausnahme). Dabei ist dieser Begriff weniger trivial, als es zunächst den Anschein hat. Auch hier ist es wieder wichtig, zwischen den Sprachebenen zu unterscheiden.

Für die Objektsprache liegt folgende Definition nahe: Eine Menge M ist genau dann endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt, sodass M und $\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ gleichmächtig sind, wobei die Gleichmächtigkeit zwischen zwei Mengen wie üblich über die Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen ihnen definiert ist. Die leere Menge ist von dieser Endlichkeitsdefinition eingeschlossen ($n = 0$).

Behrends gibt die gleiche Definition an und weist auch auf die unerwartete Schwierigkeit des Endlichkeitsbegriffs hin:

> Eine Menge M wird *endlich* genannt, wenn sie leer ist oder wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ so gibt, dass die Menge $\{1, \ldots, n\}$ (das ist die Abkürzung von $\{m \mid m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n\}$) und M gleichmächtig sind, wenn man also die Elemente aus M mit den Zahlen von 1 bis n durchnummerieren kann. Die Zahl n heißt die *Anzahl der Elemente von M*. Es gelten dann die folgenden Aussagen:
>
> - Eine Menge M ist genau dann endlich, wenn es keine echte Teilmenge von M gibt, die gleichmächtig zu M ist.
> - Teilmengen endlicher Mengen sind wieder endlich.
> - Die Vereinigung von zwei endlichen Mengen ist endlich.
> - Die Potenzmenge einer endlichen Menge ist endlich.
>
> Die *Beweise* sollen hier nicht geführt werden, da wir von diesen Ergebnissen keinen Gebrauch machen werden.[32] (Wenn Sie es selbst versuchen, werden Sie feststellen, dass sie schwieriger sind, als man es bei diesen „offensichtlichen“ Tatsachen erwarten würde.) (Behrends 2015, S. 66)

Beweise für diese und weitere „offensichtliche“ Tatsachen über endliche Mengen findet man zum Beispiel in Ebbinghaus 2021, S. 77-81. Der erste Punkt in der Aufzählung oben ist die Äquivalenz von *endlich* und *Dedekind-endlich*; für den Beweis benötigt man in der Richtung „$\Leftarrow$“ das Auswahlaxiom. Die Richtung „$\Rightarrow$“ sowie die anderen Punkte in der Liste ergeben sich im Wesentlichen durch Induktionsbeweise. Schon die Wohldefiniertheit der Elementanzahl muss durch vollständige Induktion erst gezeigt werden.

Folgender Satz über endliche Mengen wird in der Analysis häufig gebraucht (aber üblicherweise nicht bewiesen):

32. Von einigen dieser Ergebnisse wird in der Analysis allerdings sehr wohl Gebrauch gemacht, zum Beispiel beim Beweis der Wohldefiniertheit des Integrals für Treppenfunktionen.

- Jede endliche nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält eine kleinste und eine größte Zahl.

Der Beweis kann durch vollständige Induktion nach der Elementanzahl geführt werden.

5.6.5. Konsequenzen für die Lehre?

Ausgangspunkt der Kritik in diesem Abschnitt über reelle Zahlen war die mangelnde Unterscheidung von Metasprache und Objektsprache in Analysis-Einführungen und die daraus resultierende ungerechtfertigte Gleichsetzung der natürlichen Zahlen mit den Einsensummen. Ein weiterer Kritikpunkt war die Vernachlässigung der implizit verwendeten Mengenlehreaxiome.

Die Lehre der Analysis scheint hierdurch zunächst wenig beeinträchtigt zu sein. Die Mengenlehre wird zwar naiv gebraucht, aber im Sinne der (nicht explizit vereinbarten) ZFC-Axiome. Und die Analysis funktioniert anscheinend trotz der nicht sauberen Trennung von Sprachebenen. Sie funktioniert deswegen, weil wir beim Beweisen von Theoremen axiomatisch arbeiten und die theoretischen (also objektsprachlichen) natürlichen Zahlen und das theoretische „endlich“ verwenden, obwohl viele dabei eher an die metasprachlichen natürlichen Zahlen und das metasprachliche „endlich“ denken dürften. Wer verspürt schon die Notwendigkeit zu beweisen, dass die Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich ist?

Der Punkt ist, dass die Vermischung der Sprachebenen das „Nichtstandard-Denken“, wie es vielleicht der Intuition eines Leibniz und anderer Analysis-Pioniere zu Grunde lag, behindert. Wir berauben uns so der Möglichkeit, arithmetisch-unendliche Zahlen in unserer Standard-Theorie zu *denken*. Dabei sind sie (potentiell) vorhanden. Wir müssen sie nicht unbedingt erst konstruieren (zum Beispiel als hyperreelle Zahlen).

Die Vermischung von Sprachebenen und die Unterschlagung der in der Analysis benötigten Mengenlehreaxiome sind ein didaktischer Kompromiss, der bewusst Lücken in der Anwendung der axiomatischen Methode lässt und Abstriche bei der sonst hoch gehaltenen mathematischen Strenge macht.

Eine (vielleicht beabsichtigte) Folge dieser Vorgehensweise ist, dass die sogenannte Standardtheorie (ungerechtfertigt) als ganz natürlich erscheint, während ebenso natürliche Nichtstandardtheorien unbeachtet bleiben. Unterscheidet man von Anfang an konsequent zwischen den Sprachebenen und bezieht die benötigte Mengenlehre ein, so führt dies in ganz natürlicher Weise zu einer (potentiell) reichhaltigeren Theorie. Es eröffnet die Möglichkeit einer Nichtstandardanalysis innerhalb der reellen Zahlen. Man braucht keine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$, keine hyperreellen Zahlen, denn das Infinitesimale und alles, was daraus folgt, schlummert (potentiell) bereits unerkannt in $\mathbb{R}$. Zugleich bieten sich interessante Ansatzpunkte für eine Diskussion historischer Bezüge, mathematischer Grundlagen und des Selbstverständnisses der Mathematik. Ein solcher Ansatz erscheint mir daher zumindest für vorlesungsbegleitende oder -ergänzende Veranstaltungen zur Analysis erwägenswert. In Abschnitt 5.7 stelle ich vor, wie dies konkret aussehen könnte.

In den Standard-Vorlesungen würde eine (gegenüber Nichtstandard-Methoden) unvoreingenommene Sichtweise durch die Beachtung der folgenden Punkte begünstigt:

- Eine (behutsame) Sensibilisierung für die Unterscheidung von Sprachebenen und die Unterscheidung von metasprachlichen und objektsprachlichen natürlichen Zahlen.

- Die Wahrung der Option auf metasprachlich „unerreichbare Zahlen“ durch präzise Formulierung: Jede Einsensumme ist eine natürliche Zahl, die Umkehrung bleibt offen.

- Eine (behutsame) Sensibilisierung für die Verwendung mengentheoretischer Axiome (die, sofern nicht explizit als Axiome formuliert, zumindest als bewusste zusätzliche Vereinbarungen wahrgenommen werden könnten).

- Einstieg und Experimente mit Grenzwerten *und* Nichtstandard-Elementen und -Methoden in Anfängervorlesungen ohne formalen Aufwand.

Die Einbeziehung „infinitesimaler“ Konzepte neben dem Grenzwertformalismus dient nicht nur der kritischen Würdigung der historischen Wurzeln der Analysis, sondern auch dem Verständnis mathematischer Grundlagen und dem intuitiven Erfassen von Begriffsbildungen und Beweisideen. Die hier durchgeführte Analyse zeigt, dass dies gefahrlos möglich ist, denn Infinites und Infinitesimales ist ja potentiell vorhanden.

Gehören philosophische und geschichtliche Betrachtungen in die mathematische Ausbildung? Bedürftig und Murawski schreiben dazu:

> Philosophie der Mathematik ist, das zeigen Rückmeldungen von Studierenden und Lernenden an Schule und Universität, ein Defizit in der mathematischen Ausbildung. Es fehlt in der Lehre oft der Blick auf Hintergründe, Geschichte und Zusammenhänge (Bedürftig und Murawski 2015, Vorwort).

5.6.6. Herausforderung: unendlich große und unendlich kleine reelle Zahlen

Die gewohnte Sichtweise

- In der Hintergrundmengenlehre gibt es ein (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmtes Modell der vollständig angeordneten Körper. Der Träger eines (beliebigen) dieser Modelle wird als $\mathbb{R}$ definiert.

- Da $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist, kann es keine unendlich großen und keine (von Null verschiedenen) unendlich kleinen reellen Zahlen geben.

- $\mathbb{R}$ ist das „natürliche“ Modell des anschaulichen Linearkontinuums (vgl. auch Abschnitt 5.3.5).

Herausforderung durch Nichtstandard

- Da natürliche Zahlen arithmetisch-unendlich sein können, verhindert die archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$ nicht die Existenz unendlich großer und (von Null verschiedener) unendlich kleiner reeller Zahlen.

- In der Konsequenz sind infinitesimale Größen im anschaulichen Linearkontinuum selbst dann nicht ausgeschlossen, wenn es mit $\mathbb{R}$ identifiziert wird.

5.7. Elemente einer vorlesungsergänzenden Veranstaltung

Die hier dargestellte Einführung ist als optionale, die Grundvorlesung begleitende oder ergänzende Veranstaltung gedacht. Es wird also davon ausgegangen, dass die Grundkonzepte der elementaren Analysis mit ihren herkömmlichen Definitionen bekannt sind. Es sollen in erster Linie folgende Ziele verfolgt werden:

1. das Bewusstsein schärfen für die Lücken an mathematischer Strenge in den Grundvorlesungen, für den mengentheoretischen Hintergrund sowie für die historischen Wurzeln der Analysis,
2. eine Reflexion der Grundlagen und des Selbstverständnisses der Mathematik als axiomatisch-deduktiver Wissenschaft anregen,
3. die Nichtstandardanalysis als optionale und effektive Bereicherung des Methodenspektrums vorstellen,
4. eine alternative und intuitive Beschreibung der Grundkonzepte der Analysis anbieten,
5. den Bezug zwischen Standardanalysis und Nichtstandardanalysis herstellen,
6. den Stoff der Grundvorlesung unter einem neuen Blickwinkel wiederholen und festigen.

Es wird ein für das Grundstudium angemessenes Niveau eingehalten und auf eine Formalisierung der Sprache weitgehend verzichtet. Eine Ausnahme bildet lediglich Abschnitt 5.7.10, wo die Äquivalenz zwischen Standard und Nichtstandard gezeigt wird. Hier kommen vermehrt logische Formeln und Äquivalenzumformungen vor und das Abstraktionsniveau ist höher, um den Zusammenhang zwischen Infinitesimalmathematik und Weierstraß'scher Epsilontik in möglichst durchsichtiger und allgemeiner Weise darzustellen.

Die verwendete Mengenlehre wird zwar in die Axiomatik einbezogen, aber auf das Notwendigste beschränkt. Insbesondere werden keine anspruchsvolleren Konzepte wie Ultrafilter gebraucht. Die Nichtstandardaxiome sind eine abgeschwächte Version der zusätzlichen Axiome aus Edward Nelsons Interner Mengenlehre (Nelson 1977). Ich beziehe mich dabei auf das Axiomensystem SPOT aus Hrbaček und Katz 2021.

Ein besonderes Augenmerk wird auf die Unterscheidung der naiven Alltagszahlen $1, 2, 3, \ldots$ von den natürlichen Zahlen der Theorie gelegt, denn hierin liegt ein Schlüssel zum Verständnis axiomatischer Theorien im Allgemeinen und zur optionalen Bereicherung um Nichtstandardelemente im Besonderen.

Aufgrund der verfolgten Ziele ist der hier eingeschlagene Weg nicht der kürzeste und direkteste, um Nichtstandardelemente in die Lehre der Analysis einzubauen. Einen solchen findet man etwa in der Einleitung angedeutet (siehe Abschnitt 1.3.2). Mit dem dort vorangestellten Grundpostulat (dem elementaren Erweiterungsprinzip) stehen Nichtstandardmethoden unmittelbar zur Verfügung um den Preis, dass die Schärfung des Grundlagenbewusstseins und der Bezug zwischen Standard- und Nichtstandardmathematik im Hintergrund bleiben.

5.7.1. Historischer Anknüpfungspunkt Leibniz

Leibniz unterscheidet *assignable Gößen* (Größen, die wir angeben können wie 1, $\frac{13}{5}$, $\sqrt{2}$, 10^{10}) und *inassignable Größen* (Größen, die wir nicht angeben können, weil sie kleiner bzw. größer als jede assignable Größe sind).[33] Größen sind bei Leibniz stets positiv.

Eine Größe heißt *unendlich klein* oder *infinitesimal*, wenn sie kleiner als jede assignable Größe ist. Infinitesimale Größen sind insbesondere kleiner als jeder angebbare Stammbruch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}, \dots$

Eine Größe heißt *unendlich groß*, wenn sie größer als jede assignable Größe ist. Unendlich große Größen sind insbesondere größer als jede der angebbaren natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$

Inassignable Größen sollen sich – abgesehen davon, dass sie nicht angebbar sind – in nichts von assignablen Größen unterscheiden. In einem Brief an Varignon beschreibt Leibniz dieses Transferprinzip so:

> … et il se trouve que les regles du fini reussissent dans l'infini … et que *viceversa*, les regles de l'infini reussissent dans le fini … (Leibniz 1702a, S. 15, Hervorhebung im Original).[34]

Als Folgerung ergibt sich, dass wir mit unendlichen und infinitesimalen Größen wie gewohnt rechnen können. Zur Existenzfrage sagt Leibniz:

> Und es kommt nicht darauf an, ob es derartige Quantitäten in der Natur der Dinge gibt, denn es reicht aus, sie durch eine Fiktion einzuführen … (Leibniz 2016, S. 129).

Unter Verwendung solcher Fiktionen können wir etwa die Steigung der Normalparabel an der Stelle x bestimmen, indem wir uns dort ein Steigungsdreieck mit der infinitesimalen waagerechten Kathete dx denken und dessen Steigung errechnen als

$$\frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = 2x + dx$$

Dass man nun zur Bestimmung der Steigung der Kurve, hier also der Normalparabel, den infinitesimalen Summanden dx weglassen kann, begründet Leibniz folgendermaßen:

33. In Leibniz 2016 wird *assignabel* mit *angebbar* oder *zuweisbar* übersetzt, zum Beispiel in dem auf Seite 167 dieser Arbeit angegebenen Zitat.

34. Übersetzung in Leibniz 2011, S. 355: … und es stellt sich heraus, dass die Regeln des Endlichen [auch] im Unendlichen erfolgreich [anzuwenden] sind … und dass *umgekehrt* die des Unendlichen [auch] im Unendlichen erfolgreich [anzuwenden] sind …

> Ich halte nämlich mit Euklid, [Elementa,] Lib. 5, Defin. 5, homogene Größen nur dann für vergleichbar, wenn die eine [Größe], falls man sie mit einer [hier] aber endlichen Zahl multipliziert, die andere [Größe] übertreffen kann. Und was sich nicht um eine solche Größe unterscheidet, erkläre ich für gleich. Dies haben auch Archimedes und alle anderen nach ihm so gehalten. Und genau dies ist gemeint, wenn man sagt, dass die Differenz [zweier Größen] kleiner als eine beliebige gegebene [Größe] ist (Leibniz 2011, S. 273f).

Diese „verallgemeinerte Gleichheit“ lässt also infinitesimale Unterschiede zu. Jede gewöhnliche, endliche Größe ist gewissermaßen eingehüllt in eine fiktive Wolke verallgemeinert gleicher Größen, die man im Endergebnis wieder abstreifen kann.

Für Leibniz sind inassignable Größen nützliche Fiktionen,

> ... da sie Abkürzungen des Redens und Denkens und daher des Entdeckens ebenso wie des Beweisens liefern, so dass es nicht immer notwendig ist, Einbeschriebenes oder Umbeschriebenes zu benutzen und *ad absurdum* zu führen, und zu zeigen, dass der Fehler kleiner als ein beliebiger zuweisbarer ist (Leibniz 2016, S. 129).

Zugleich deutet Leibniz hier einen systematischen Zusammenhang an, zwischen dem abkürzenden Rechnen mit inassignablen Größen und der umständlicheren, aber seit der Antike anerkannten *Exhaustionsmethode*, bei der Einbeschriebenes und Umbeschriebenes benutzt und ad absurdum geführt wird. In einem Brief an Pinsson formuliert Leibniz die Rechtfertigung inassignabler Größen so:

> Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée (Leibniz 1701).[35]

Modern gewendet drückt sich hier die Äquivalenz von Nichtstandard- und Standardanalysis aus. Auf beiden Wegen gelangt man zu den gleichen Ergebnissen, einmal mit einem echten Infinitesimalkalkül und einmal mit dem konventionellen Weierstaß'schen Grenzwertkalkül.

5.7.2. Eine moderne Übersetzung der Leibniz'schen Ideen

In der hier skizzierten Einführung in die Analysis übertragen wir die im letzten Abschnitt vorgestellten Ansätze aus Leibniz' Infinitesimalkalkül in den Rahmen einer modernen axiomatischen Theorie.

- Statt des historischen Größenbegriffs setzen wir den axiomatisch noch zu präzisierenden Begriff der *reellen Zahl*. Dieser soll auch 0 und negative Zahlen umfassen.
- Wir verstehen die Analysis als eine axiomatische Theorie, die von reellen Zahlen und Mengen (zusammenfassend auch *Objekte* genannt) handelt. Eine Funktion f fassen wir als ihren Graphen $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{Def}(f)\}$ und damit als Menge auf.

35. Denn anstelle des Unendlichen oder des unendlich Kleinen nimmt man so große oder so kleine Größen, wie nötig ist, damit der Fehler geringer sei, als der gegebene Fehler (eigene Übersetzung).

- Um assignable und inassignable Größen unterscheiden zu können, führen wir das Prädikat *standard* ein. Dieses wird nicht definiert, sondern gehört (wie *reelle Zahl* und *Menge*) zu den Grundbegriffen der axiomatischen Theorie.

- Alle Objekte, die wir in der Analysis eindeutig definieren können (insbesondere also alle explizit angebbaren Zahlen), sollen standard sein. Andererseits sollen sich Nichtstandardobjekte in nichts von Standardobjekten unterscheiden, was sich ohne das Prädikat *standard* ausdrücken lässt. Dies gewährleisten wir durch ein Axiom, das *Transferaxiom*, welches die Rolle des oben zitierten Leibniz'schen Transferprinzips übernimmt, wonach Regeln des Endlichen auch im Unendlichen anwendbar sind und umgekehrt.

- Aus Leibniz' „es reicht aus, sie durch eine Fiktion einzuführen" machen wir ein Axiom, das die Existenz von Nichtstandardzahlen fordert.

Bemerkung: Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass, von einem formalistischen Standpunkt aus gesehen, sich der ontologische Status von Nichtstandardzahlen in keiner Weise von demjenigen aktual unendlicher Mengen unterscheidet. Auch letztere existieren im Rahmen einer Theorie aufgrund entsprechender Axiome. Während heute die Fiktion unendlicher Mengen zumeist ohne Bedenken akzeptiert wird, war dies zu Leibniz' Zeiten nicht der Fall. Leibniz hielt zwar unendliche Größen für nützliche Fiktionen, unendliche Zusammenfassungen (also Mengen) jedoch für widersprüchlich, weil sie das Axiom „Das Ganze ist größer als sein Teil" verletzen (vgl. Abschnitt 5.2.2). In modernen, die Mengenlehre einbeziehenden Theorien können wir heute beides haben: unendliche Mengen und unendliche Größen (bzw. Zahlen).

5.7.3. Vorbemerkungen zur Axiomatik

Wir bauen die Analysis als axiomatische Theorie auf. Das heißt, wir stellen Axiome auf und leiten Sätze daraus ab. Die Begriffe, die in den Axiomen verwendet werden, sind die *Grundbegriffe* der Theorie. Sie werden nicht definiert. Zur Bereicherung der Sprache können *definierte Begriffe* eingeführt werden. Sie dienen dem Komfort.

Wir postulieren die Existenz eines *Theorie-Universums* (auch *Diskurs-Universum* oder kurz *Universum* genannt), in dem die Axiome (und damit auch die abgeleiteten Sätze) gelten. Dieses Universum verstehen wir als *aktual unendlich*. Das heißt, wir stellen uns vor, dass das Universum in seiner Gesamtheit fertig gegeben vorliegt. Quantifizierende Aussagen wie „Für alle x gilt ... " oder „Es gibt ein x, für das ... gilt" sind immer auf das Universum bezogen.

Es ist nicht möglich, innerhalb einer axiomatischen Theorie Aussagen zu formulieren oder zu beweisen, die aus der Theorie herausführen, die also Begriffe verwenden, die weder zu den Grundbegriffen, noch zu den definierten Begriffen der Theorie gehören. Die Grundbegriffe der Analysis sind die einstelligen Prädikate *reelle Zahl* und *Menge*, die zweistelligen Rechenoperationen $+$ und $\cdot$, die Konstanten 0 und 1 sowie die zweistelligen Prädikate $<$ und $\in$. In der hier vorgestellten Analysis kommt noch das einstellige

Prädikat *standard* hinzu. Definierte Begriffe können zum Beispiel weitere Konstanten für Zahlen oder Mengen sein oder weitere Prädikate oder Operationen.

Neben den Grundbegriffen und definierten Begriffen dürfen Aussagen der Analysis im Prinzip nur noch das Gleichheitszeichen, logische Verknüpfungen und Quantifizierungen über Variablen (als Platzhalter für Objekte des Universums) enthalten. Wir führen keine formale Sprache ein, verwenden aber logische Symbole zur Abkürzung und ansonsten die Umgangssprache.

5.7.4. Mengenaxiome der Analysis

Anders als in vielen Analysis-Einführungen werden die benötigten Mengenaxiome ausdrücklich in die Axiomatik einbezogen. Mengen existieren nicht als intuitiv gegebene Zusammenfassungen, sondern weil ihre Existenz aus Axiomen folgt. Nur so kann die Analysis als axiomatische Theorie verstanden werden. Die Existenz der Mengen ist, wie die Existenz der reellen Zahlen, eine *theoretische*, eine axiomatisch postulierte Existenz.

Wir geben zu Beginn die Mengenaxiome an, die wir im Folgenden verwenden. Die verbleibenden der Zermelo-Fraenkel'schen Axiome (Ersetzungsaxiom, Auswahlaxiom) brauchen wir hier nicht. Sie könnten aber ad hoc im Bedarfsfall thematisiert werden.

Zuvor definieren wir noch: Eine Aussage(form) heißt *intern*, wenn sie das Prädikat *standard* weder direkt noch indirekt (das heißt über definierte Begriffe) enthält. Die übrigen Aussage(formen) heißen *extern*. Alle Aussagen der konventionellen Analysis sind somit intern. Aussageformen können im Unterschied zu Aussagen freie Variablen (Variablen, die nicht durch einen Quantor gebunden sind) enthalten. Wenn nichts anderes gesagt ist, enthalte die Aussageform $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ höchstens die freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

Aussageformen werden zum Beispiel verwendet, um neue Konstanten, Prädikate oder Operationen zu definieren. Einstellige Prädikate nennen wir auch *Eigenschaften*.

Extensionalitätsaxiom: Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

Existenzaxiom: Es gibt eine Menge, die alle reellen Zahlen enthält.

Aussonderungsaxiom: Sei $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ eine *interne* Aussageform. Dann gilt für alle $x_1, \ldots, x_n$: Es gibt zu jeder Menge M eine Menge M', die genau alle $x \in M$ enthält, für die $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ gilt.

Die (von $x_1, \ldots, x_n$ abhängige) Menge M' ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit $\{x \in M \mid \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)\}$ bezeichnet. Der Fall $n = 0$ ist hier zugelassen und soll bedeuten, dass in φ außer x keine freien Variablen (auch *Parameter* genannt) vorkommen.

Auf der Basis dieser Axiome können die Konstanten $\mathbb{R}$ (die Menge der reellen Zahlen) und $\emptyset$ (die leere Menge), das zweistellige Prädikat $\subseteq$ und die zweistellige Mengenoperation $\cap$ sowie die einstellige Mengenoperation $\bigcap$ definiert werden. $\bigcap M$ (für eine nicht leere Menge M) enthält alle Objekte, die in allen Elementen von M enthalten sind.

Als Beispiel definieren wir die Konstante $\mathbb{R}$. Nach dem Existenzaxiom gibt es eine Menge M, die alle reellen Zahlen enthält. Nach dem Aussonderungsaxiom gibt es die eindeutig bestimmte Menge $\{x \in M \mid x \text{ ist eine reelle Zahl}\}$. Für diese führen wir das Symbol $\mathbb{R}$ ein. Ab jetzt können wir also $x \in \mathbb{R}$ statt „x ist eine reelle Zahl" schreiben.

Bemerkungen:

1. An dieser Stelle kann thematisiert werden, warum es kein analoges Existenzaxiom gibt, das die Existenz einer Menge fordert, die alle Mengen enthält.

2. Das Aussonderungsaxiom ist, genau genommen, kein einzelnes Axiom, sondern ein sogenanntes Axiomenschema. Das heißt, für jede interne Aussageform hat man ein Axiom nach diesem Schema. Da Aussageformen keine Objekte des postulierten Universums, sondern Objekte unserer Sprache sind, kann man kein Axiom der Art „Für alle Aussageformen φ gilt ..." formulieren. Stattdessen formuliert man die Axiome, die gelten sollen, als Schema. Obwohl nach diesem Schema potentiell unendlich viele Axiome gebildet werden können, dürfen in jedem Beweis nur endlich viele und konkret anzugebende Axiome verwendet werden.

3. Dass das Aussonderungsaxiom nur für interne Aussageformen formuliert ist, wird sich später als wesentlich herausstellen. Zunächst ist festzuhalten, dass dieses Axiom damit vollständig mit dem entsprechenden Axiom der konventionellen Analysis (wo es das Prädikat *standard* nicht gibt) übereinstimmt. Es gibt also, was die Mengenbildung betrifft, keine Einschränkungen gegenüber der konventionellen Analysis.

4. Eine Aussonderung mit externen Aussageformen, zum Beispiel

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist standard}\}$$

   ist durch das Aussonderungsaxiom nicht gedeckt und wird *illegale Mengenbildung* genannt. Ein solcher „Mengenterm" ist ebenso wenig definiert wie der „Bruch" $\frac{1}{0}$.

Paarmengenaxiom: Für alle x, y gibt es eine Menge, die genau x und y als Elemente enthält. Sie ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit $\{x, y\}$ bezeichnet.

Vereinigungsmengenaxiom: Zu jeder Menge M gibt es eine Menge, die genau die Elemente der Elemente von M enthält. Sie ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit $\bigcup M$ bezeichnet.

Potenzmengenaxiom: Zu jeder Menge M gibt es die Potenzmenge, die genau die Teilmengen von M enthält. Sie ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet.

Mit diesen Axiomen können Mengen der Form $\{x_1, \ldots x_n\}$ und die Mengenoperation $\cup$ definiert werden. Zusammen mit dem Potenzmengenaxiom lassen sich geordnete Paare, kartesische Produkte und die Projektionsoperationen für geordnete Paare definieren (vgl. zum Beispiel Behrends 2015, S. 11, Fußnote 6), Funktionen als rechtseindeutige Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (bzw. n-stellige Funktionen als rechtseindeutige Teilmengen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$), Definitionsbereich $\mathrm{Def}(f)$ und Bildbereich $\mathrm{Bild}(f)$ für eine Funktion f (jeweils mit den Projektionsoperationen).

Mengenbildungen der Art $\{f(x) \mid x \in A\}$ mit einer Funktion f und $A \subseteq \mathrm{Def}(f)$ sind ebenfalls mit dem Aussonderungsaxiom möglich (als $\{y \in \mathrm{Bild}(f) \mid \exists x \in A\, f(x) = y\}$). Das Ersetzungsaxiom wird hierfür nicht benötigt.

5.7.5. Die Axiome der reellen Zahlen

Die Körper- und Anordnungsaxiome werden genau wie in der Standardanalysis formuliert und die üblichen Sätze daraus abgeleitet. Wir gehen hier nur auf die Einbettung der natürlichen Zahlen genauer ein. Hat man die Menge $\mathbb{N}$ definiert, kann man das archimedische Axiom wie gewohnt formulieren.

Das Vollständigkeitsaxiom wird in der Standardanalysis zum Beispiel als Supremumsaxiom oder (zusammen mit dem archimedischen Axiom) über die Konvergenz aller Cauchy-Folgen formuliert. In der hier vorgestellten Axiomatik ergibt sich die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ aus dem Standardteilaxiom. Wir führen dieses Axiom in Abschnitt 5.7.7 ein und gewinnen daraus das Supremumsprinzip als Satz.

Einbettung der natürlichen Zahlen

Bei der Einbettung der natürlichen Zahlen bietet es sich an, die in Abschnitt 5.6.1 behandelte Problematik zu thematisieren: Warum kann man $\mathbb{N}$ nicht einfach als die Menge aller endlichen Einsensummen definieren? Man müsste dazu innerhalb der Theorie definieren, was eine endliche Einsensumme ist, also ein Term der Gestalt

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}},$$

wobei n eine natürliche Zahl ist. Man brauchte also bereits den Begriff der natürlichen Zahl in Bezug auf Terme bzw. die Summanden in einem Term. Terme sind aber keine Objekte des postulierten Universums der Analysis, sondern Objekte der *Sprache der Analysis*, genauer, Zeichenreihen mit einem bestimmten Aufbau, die (wenn sie keine Variablen enthalten) Objekte des Universums *bezeichnen*. Wir können daher innerhalb der Theorie nicht über Terme sprechen und keine Aussagen über Terme beweisen.

Wir müssen also die umgangssprachlichen natürlichen Zahlen, mit denen wir über Terme, Aussageformen und Beweise sowie über Alltagsgegenstände sprechen, unterscheiden von den natürlichen Zahlen einer axiomatischen Theorie wie der Analysis. Die Zahlen des ersten Typs heißen in diesem Zusammenhang auch *metasprachliche* natürliche Zahlen (kurz: *Metazahlen*) und die Zahlen des zweiten Typs *objektsprachliche* natürliche Zahlen (kurz: *Objektzahlen*).

Zwischen Metazahlen und Objektzahlen besteht folgender Zusammenhang: Zu jeder Metazahl n gibt es eine Objektzahl, die durch einen Einsensummenterm mit n Einsen dargestellt wird. Damit ist nicht gesagt, dass umgekehrt jede Objektzahl durch einen Einsensummenterm darstellbar ist.

Die Menge $\mathbb{N}$ der Objektzahlen wird als die (im Sinne der Mengeninklusion) kleinste induktive Menge definiert, also als diejenige induktive Menge, die Teilmenge jeder induktiven Menge ist, wobei eine Menge M induktiv heißt, wenn gilt: $1 \in M$ und $\forall n\,(n \in M \Rightarrow n + 1 \in M)$. Die Existenz und die Eindeutigkeit dieser Menge kann aus den bisher angegebenen Axiomen bewiesen werden. Da $\mathbb{R}$ ebenfalls induktiv ist, folgt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$. Mit der Mengenoperation $\bigcap$ kann $\mathbb{N}$ definiert werden als

$$\mathbb{N} := \bigcap\{N \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid N \text{ ist induktiv}\}.$$

Metasprachliche Definitionen und Beweise

Wie bei den natürlichen Zahlen zwischen Metazahlen und Objektzahlen unterschieden werden muss, so muss auch bei induktiven Beweisen und bei rekursiven Definitionen jeweils zwischen der metasprachlichen Version (die außerhalb der axiomatischen Theorie angewendet wird) und der objektsprachlichen, theoretischen Version (die als Beweis- bzw. Definitionsprinzip innerhalb der axiomatischen Theorie angewendet wird) unterschieden werden.

Um dieser Unterscheidung optisch Rechnung zu tragen, verwenden wir für die Metazahlen die Symbole $1, 2, 3, \ldots$ und die metasprachliche Variable $\mathfrak{n}$ und für die Objektzahlen die Symbole $1, 2, 3, \ldots$ und die Variable n.

Wir betrachten die Metazahlen als *potentiell unendlich*. Das heißt, wir nehmen an, dass wir die Zählreihe $1, 2, 3, \ldots$ beliebig weit fortführen können (so weit, wie wir es jeweils brauchen), aber wir erheben nicht den Anspruch, dass die Metazahlen in ihrer Gesamtheit fertig vorliegen. Im Gegensatz dazu haben wir für das postulierte Universum der Analysis aus den Axiomen bewiesen, dass es die *aktual unendliche* Menge $\mathbb{N}$ aller Objektzahlen gibt.

Metasprachliche rekursive Definition. Man kann einen metasprachlichen Begriff $F(\mathfrak{n})$ rekursiv definieren, indem man angibt, was $F(1)$ ist und wie man $F(\mathfrak{n}+1)$ aus $F(\mathfrak{n})$ gewinnt.

Man beachte, dass wir F hier nicht als fertige Gesamtheit aller Paare $(\mathfrak{n}, F(\mathfrak{n}))$ auffassen, sondern als operative Bauanleitung, wie wir $F(1)$, $F(2)$, $F(3), \ldots$ prinzipiell beliebig weit (so weit, wie wir es jeweils brauchen) konstruieren können.

Metasprachliche Induktion. Wenn eine Aussageform $A(\mathfrak{n})$ für $\mathfrak{n} = 1$ gilt und wenn man für ein beliebig vorgegebenes $\mathfrak{n}$ von $A(\mathfrak{n})$ auf $A(\mathfrak{n}+1)$ schließen kann, dann gilt $A(\mathfrak{n})$ für jedes $\mathfrak{n}$.

Auch hier beachte man, dass dies nicht als eine Aussage über eine fertige Gesamtheit aller Metazahlen zu verstehen ist, sondern so, dass man im Voranschreiten in der potentiell unendlichen Zählreihe $1, 2, 3, \ldots$ nur auf Zahlen $\mathfrak{n}$ stoßen wird, für die $A(\mathfrak{n})$ gilt.

Die Rechtfertigung für das metasprachliche Induktionsprinzip ist, dass man für jedes $\mathfrak{n}$ die Schlusskette

$$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \cdots \Rightarrow A(\mathfrak{n})$$

und damit einen Beweis für $A(\mathfrak{n})$ hat.

Eine solche Rechtfertigung hat man in einer axiomatischen Theorie und damit für die Objektzahlen nicht zur Verfügung. Die entsprechenden Definitions- und Beweisprinzipien müssen vielmehr erst auf der Basis der Axiome bewiesen werden.

Vollständige Induktion und rekursive Definitionen

Aufgrund der Definition von $\mathbb{N}$ gilt folgender Satz:

Satz 30 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Sei $\varphi(n)$ eine interne Aussageform (optional mit Parametern), und es gelte $\varphi(1)$ und $\forall n\,(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))$. Dann gilt $\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Nach dem Aussonderungsaxiom gibt es die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$. Nach Voraussetzung ist M induktiv und daher $\mathbb{N} \subseteq M$. Daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkungen:

1. Wie beim Aussonderungsaxiom gilt auch hier: Satz 30 ist, genau genommen, kein einzelner Satz, sondern ein Satzschema. Das heißt, für jede interne Aussageform $\varphi(n)$ hat man einen entsprechenden Satz, potentiell unendlich viele.
2. Die Bedingung, dass $\varphi(n)$ eine interne Aussageform sein muss, bedeutet keine Einschränkung gegenüber der konventionellen Analysis, wo es das Prädikat *standard* nicht gibt und somit auch keine externen Aussageformen.

Satz 31 (Rekursionssatz für Funktionen)**.** *A sei eine nicht leere Menge, $a \in A$ und $F\colon A \to A$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to A$, für die gilt:*

1. $f(1) = a$,

2. $f(n+1) = F(f(n))$.

Beweis. [36] Zur Eindeutigkeit: Sei $g : \mathbb{N} \to A$ eine weitere Funktion mit den im Satz angegebenen Eigenschaften. Dann gilt $f(1) = a = g(1)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f(n) = g(n) \Rightarrow f(n+1) = F(f(n)) = F(g(n)) = g(n+1).$$

Mit Satz 30 folgt $f = g$.

Zur Existenz: $\varphi(h)$ sei die folgende interne Aussageform (mit den weiteren Parametern A, F und a):

36. Der hier angegebene Beweis orientiert sich an Mainzer 1988a, S. 15f.

> $h \subseteq \mathbb{N} \times A$, $(1, a) \in h$ und für alle $n \in \mathbb{N}$, $b \in A$ gilt $((n, b) \in h \Rightarrow (n + 1, F(b)) \in h)$.

Diese Aussageform definiert eine (von A, F, a abhängige) Eigenschaft. Die gesamte Menge $\mathbb{N} \times A$ hat diese Eigenschaft.

f sei die (im Sinne der Inklusion) kleinste Menge, mit dieser Eigenschaft, also

$$f := \bigcap \{h \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A) \mid \varphi(h)\}$$

Wie bei $\mathbb{N}$ folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieser Menge aus den bisherigen Axiomen.

f ist eine zweistellige Relation. Nach Konstruktion ist $\mathrm{Def}(f) \subseteq \mathbb{N}$ induktiv, also $\mathrm{Def}(f) = \mathbb{N}$. Es bleibt die Rechtseindeutigkeit von f zu zeigen. Dies geschieht per vollständiger Induktion. Induktionsanfang: Es gilt $(1, a) \in f$. Gäbe es $a' \neq a$ mit $(1, a') \in f$, würde $f \setminus \{(1, a')\}$ immer noch φ erfüllen, und f wäre nicht die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft. Induktionsschluss: Nach Induktionsvoraussetzung gelte für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass es genau ein $b \in A$ mit $(n, b) \in f$ gibt. Dann gilt $(n+1, F(b)) \in f$. Gäbe es $b' \neq b$ mit $(n + 1, b') \in f$, würde $f \setminus \{(n + 1, b')\}$ immer noch φ erfüllen, und f wäre nicht die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft. $\square$

Der Rekursionssatz ermöglicht rekursive Definitionen, zum Beispiel die Definition der Partialsummenfolge zu einer gegebenen Folge reeller Zahlen.

Endliche Mengen

Der Begriff *endliche Menge* und die *Elementanzahl* endlicher Mengen werden wie gewohnt definiert (siehe zum Beispiel Behrends 2015, S. 66).

Die folgenden beiden Sätze werden durch vollständige Induktion bewiesen.

Satz 32 (Wohlordnungsprinzip). *Jede nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ enthält ein kleinstes Element.*

Satz 33. *Jede endliche nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält ein Minimum und ein Maximum.*

Archimedisches Axiom

Das archimedische Axiom wird wie in der Standardanalysis formuliert, und es werden die üblichen Folgerungen daraus abgeleitet.

Archimedisches Axiom: Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n mit $n > x$.

Alles, was wir bisher ausgeführt haben, wird in gleicher Weise in der Standardanalysis gebraucht, auch wenn es dort in der Regel nicht explizit erwähnt wird. Abgesehen vom zusätzlichen Prädikat *standard* (das wir noch nicht gebraucht haben) gibt es also in der Axiomatik bisher keinen Unterschied zwischen Standard- und Nichtstandardanalysis.

5.7.6. Die Nichtstandardaxiome der Analysis

Transferaxiom

Wir kommen jetzt erstmals zu einem Axiom, das es in der Standardanalysis nicht gibt. Demzufolge wird erstmals das Prädikat *standard* explizit auftauchen. Wir verwenden die relativierten Quantoren $\forall^{\mathrm{s}} x$ und $\exists^{\mathrm{s}} x$ für „Für alle standard x" bzw. „Es gibt ein standard x".[37]

Das Transferaxiom soll sicherstellen, dass sich die Nichtstandardobjekte in nichts von den Standardobjekten unterscheiden, was sich ohne das Prädikat *standard* formulieren lässt. Wir fordern also: Ist $\varphi(x)$ eine beliebige interne Aussageform, dann gilt

$$\forall^{\mathrm{s}} x \, \varphi(x) \Rightarrow \forall x \, \varphi(x). \tag{5.18}$$

Trivialerweise gilt hier auch die Rückrichtung „$\Leftarrow$".

Wendet man (5.18) auf $\neg\varphi$ an, erhält man die duale Variante

$$\exists x \, \varphi(x) \Rightarrow \exists^{\mathrm{s}} x \, \varphi(x). \tag{5.19}$$

Auch hier gilt trivialerweise die Rückrichtung „$\Leftarrow$".

Aus (5.19) folgt, dass jedes konventionell definierte Objekt standard ist, denn die Definition besteht in einer internen Aussageform $\varphi(x)$, die genau für ein x erfüllt ist. Nach (5.19) muss dieses x dann standard sein. Damit sind zum Beispiel die reellen Zahlen 10^{10}, $-\frac{13}{5}$, $\sqrt{2}$, π, die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und die Funktionen sin, cos, exp standard.

In der endgültigen Fassung des Transferaxioms ist noch zugelassen, dass die Aussageform $\varphi(x)$ weitere freie (also nicht durch Quantoren gebundene) Variablen $x_1, \dots, x_n$ enthält, deren Laufbereich aber auf Standardobjekte eingeschränkt ist. Sie werden daher *Standardparameter* genannt.

Transferaxiom: Sei $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ eine *interne* Aussageform ohne weitere freie Variablen ($n = 0$ zugelassen). Dann gilt für alle standard $x_1, \dots, x_n$:

$$\forall^{\mathrm{s}} x \, \varphi(x, x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \forall x \, \varphi(x, x_1, \dots, x_n).$$

Analog zu (5.19) gilt in diesem Fall ebenfalls für alle standard $x_1, \dots, x_n$:

$$\exists x \, \varphi(x, x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \exists^{\mathrm{s}} x \, \varphi(x, x_1, \dots, x_n).$$

Hieraus folgt: Alles, was sich durch interne Aussageformen mit Standardparametern definieren lässt, ist standard. Insbesondere gilt:

- Für standard $x, y \in \mathbb{R}$ sind $x + y$ und $x \cdot y$ standard.
- Für Standardmengen A, B sind $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $\bigcup A$, $\bigcap A$, $\mathcal{P}(A)$ standard.

37. Man kann diese neuen Symbole im Prinzip eliminieren, indem man $\forall x \, (x \text{ standard} \Rightarrow \dots)$ statt $\forall^{\mathrm{s}} x \dots$ schreibt und $\exists x \, (x \text{ standard} \wedge \dots)$ statt $\exists^{\mathrm{s}} x \dots$.

- $\{x, y\}$ ist genau dann standard, wenn x und y standard sind (analog für Dreiermengen etc.).
- (x, y) ist genau dann standard, wenn x und y standard sind (analog für Tripel etc.).
- Standardfunktionen haben für Standardargumente Standardfunktionswerte. Definitionsbereich und Bildbereich von Standardfunktionen sind Standardmengen.

Bemerkungen:

1. Das Transferaxiom kann bei Bedarf mehrmals hintereinander angewandt werden. Gilt zum Beispiel eine interne Aussageform $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ für alle standard x_1, ..., x_n, so liefert eine n-malige Anwendung des Transferaxioms $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ für alle x_1, ..., x_n.
2. Das Transferaxiom ist auf interne Aussageformen (mit Standardparametern) anwendbar. Ohne diese Voraussetzungen ist eine Anwendung des Axioms nicht erlaubt und wird *illegaler Transfer* genannt. Würde das Transferaxiom allgemein auch für externe Aussageformen gelten, wäre das zusätzliche Prädikat *standard* sinnlos, denn es würde mit der Aussageform „x ist standard“ sofort folgen, dass alle Objekte des Universums standard sind.

Nach dem Transferaxiom sind alle Mengen, die sich eindeutig durch interne Aussageformen definieren lassen (zum Beispiel $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$), standard. Das bedeutet jedoch *nicht*, dass alle Elemente dieser Mengen ebenfalls standard sind. Wie wir in der Einleitung angekündigt haben, ist es gerade der Sinn der erweiterten Theorie, Nichtstandardzahlen in $\mathbb{R}$ zur Verfügung zu haben.

Es ist also zumindest nicht ausgeschlossen (mehr können wir im Moment noch nicht sagen), dass Standardmengen auch Nichtstandardelemente enthalten. Nach dem Transferaxiom ist allerdings klar, dass eine Standardmenge bereits durch ihre Standardelemente eindeutig bestimmt ist (selbst wenn es noch Nichtstandardelemente in ihr geben sollte). Für einen Vergleich von zwei Standardmengen reicht es daher aus, sich die Standardelemente anzuschauen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 34. *Seien A und B zwei Standardmengen. Dann gilt:*

1. *Wenn ($x \in A \Rightarrow x \in B$) für alle standard x gilt, dann ist $A \subseteq B$.*
2. *Wenn ($x \in A \Leftrightarrow x \in B$) für alle standard x gilt, dann ist $A = B$.*

Beweis. Zu 1.: Für alle standard x gelte $x \in A \Rightarrow x \in B$. Dies ist eine interne Aussageform (mit den Standardparametern A und B). Daher ist das Transferaxiom anwendbar und es folgt $x \in A \Rightarrow x \in B$ für alle x, also $A \subseteq B$. Zu 2.: analog. $\square$

Idealisierungsaxiom

Bislang wissen wir nicht, ob es überhaupt Nichtstandardobjekte in unserem postulierten Universum gibt. Das Transferaxiom sagt lediglich aus, dass jedes Objekt, das wir konventionell definieren können, standard ist und dass Nichtstandardobjekte (falls es sie geben sollte) bezogen auf die Standardanalysis vollkommen unauffällig sind.

An dieser Stelle müssen wir uns entscheiden. Wollen wir, dass es Nichtstandardobjekte gibt? Dann müssen wir dies durch ein entsprechendes Axiom fordern. Wenn wir auf ein solches Axiom verzichten, bleibt das Prädikat *standard* wirkungslos, und die Analysis muss konventionell betrieben werden. Man beachte, dass auch in diesem Fall nicht folgt, dass es *keine* Nichtstandardobjekte gibt. Man weiß nur nichts über ihre Existenz.

Da Nichtstandardobjekte uns die Möglichkeit infinitesimaler Zahlen eröffnen, entscheiden wir uns für ein Axiom, das die Existenz von Nichtstandardobjekten sichert. Im Gegensatz zur Idealisierung in IST (siehe Abschnitt 2.4) reicht uns hier ein Idealisierungsaxiom für reelle Zahlen.

Idealisierungsaxiom für reelle Zahlen: Es gibt $x \in \mathbb{R}$, sodass für alle standard $y \in \mathbb{R}$ gilt: $x > y$.

Definition 29. *1. $x \in \mathbb{R}$ heißt*

- endlich groß *oder* beschränkt *genau dann, wenn es ein standard $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $|x| \leq y$,*
- unendlich groß *oder* unbeschränkt *(kurz: $|x| \gg 1$) genau dann, wenn x nicht endlich groß ist, das heißt, wenn für alle standard $y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x| > y$,*
- unendlich klein *oder* infinitesimal *(kurz: $x \approx 0$), wenn für alle standard $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ gilt: $|x| < y$.*

2. $x, y \in \mathbb{R}$ heißen infinitesimal benachbart *(kurz: $x \approx y$) genau dann, wenn $x - y \approx 0$. Man sagt auch: x und y liegen* unendlich nahe *beieinander.*

Aus der Definition folgt, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{R}$ ist. Nach dem Idealisierungsaxiom gibt es unendlich große Zahlen und (als deren Kehrwerte) auch infinitesimale Zahlen ungleich 0. Wegen des archimedischen Axioms gibt es auch unendlich große natürliche Zahlen und es gilt:

Satz 35. *Sei $x \in \mathbb{R}$*

- *x ist endlich groß genau dann, wenn es ein standard $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|x| \leq n$,*
- *x ist unendlich groß genau dann, wenn für alle standard $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|x| > n$.*
- *x ist infinitesimal genau dann, wenn für alle standard $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|x| < \frac{1}{n}$.*

Intuitiv plausible Rechenregeln für endliche, unendliche und infinitesimale Zahlen (zum Beispiel „endlich mal infinitesimal ist infinitesimal“) können leicht anhand der Definition verifiziert werden. Die Null ist eine besondere infinitesimale Zahl:

Satz 36. 0 *ist die einzige infinitesimale Standardzahl.*

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ infinitesimal und standard. Nach Definition 29 gilt $\forall^{\mathrm{s}} y > 0\,(|x| < y)$. Dies ist eine interne Aussageform mit Standardparameter x. Daher ist das Transferaxiom anwendbar und es folgt $\forall y > 0\,(|x| < y)$. Daraus folgt $x = 0$. □

Es folgt, dass zwei infinitesimal benachbarte Standardzahlen gleich sind.

Bemerkungen:

1. Die Begriffe *endlich* und *unendlich* (jeweils mit dem Zusatz „groß") werden hier als *arithmetische*, also auf reelle Zahlen bezogene Begriffe definiert. Die gleichen Begriffe werden in der Mengenlehre mit einer anderen, einer *kardinalen*, also auf die Mächtigkeit von Mengen bezogenen Bedeutung belegt (vgl. Abschnitt über endliche Mengen auf Seite 174). Diese kontextabhängige Bedeutung der Begriffe *endlich* und *unendlich* kann zu verwirrenden Formulierungen führen, wenn beide Kontexte in einer Aussage zusammenkommen. Zum Beispiel ist für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ im kardinalen Sinne endlich, hat aber (falls $n \gg 1$) eine (arithmetisch) unendlich große Elementanzahl.[38]

2. Wenn klar ist, dass die Größe einer Zahl und nicht die Mächtigkeit einer Menge gemeint ist, sagen wir statt „x ist endlich groß bzw. unendlich groß" auch „x ist endlich bzw. unendlich", insbesondere, wenn x eine natürliche Zahl ist. „Unendlich klein" verkürzen wir dagegen nicht zu „unendlich".

3. Der Gedanke, dass es unendlich große natürliche Zahlen geben kann, ist ungewohnt, gerade weil natürliche Zahlen zur Definition endlicher Mengen herangezogen werden. Er ist aber essentiell für das Grundlagenverständnis der Mathematik. Mag die Unterscheidung zwischen Metazahlen und Objektzahlen in der Standardanalysis wie eine pedantische Formalie ohne tiefere Bedeutung erscheinen, ist die Möglichkeit von Nichtstandarderweiterungen der Theorie der schlagende Beweis dafür, dass diese Unterscheidung absolut notwendig ist und – wie die weitere Untersuchung zeigen wird – absolut nützlich.

Standardteilaxiom

Das Standardteilaxiom kann als die Nichtstandardversion des Vollständigkeitsaxioms verstanden werden. Die Idee des konventionellen Vollständigkeitsaxioms ist, dass Problemstellungen, die in den rationalen Zahlen nur beliebig genau gelöst werden können, in dem erweiterten Zahlenbereich $\mathbb{R}$ eine exakte Lösung haben sollen. Ein einfaches Beispiel ist die Aufgabe, die Gleichung $x^2 = 2$ zu lösen. Allgemeiner drückt sich diese Forderung an die reellen Zahlen in der Konvergenz aller Cauchy-Folgen oder im Supremumsprinzip aus.

38. Einige Autoren verwenden daher für das arithmetische *unendlich groß* Kunstbegriffe wie *i-groß* oder *ultragroß*.

Die bislang aufgeführten Axiome der reellen Zahlen (Körper- und Anordnungsaxiome, archimedisches Axiom) gelten sämtlich ebenfalls in den rationalen Zahlen. Dennoch sind wir durch die Verfügbarkeit von Nichtstandardzahlen in gewisser Hinsicht einen Schritt weiter als in der Standardanalysis, denn wir können zum Beispiel die Gleichung $x^2 = 2$ mit rationalen Nichtstandardzahlen nicht nur beliebig genau, sondern unendlich genau lösen. Man wähle etwa ein beliebiges unendliches $n \in \mathbb{N}$ und dazu das kleinste $m \in \mathbb{N}$, für das $(\frac{m}{n})^2 \geq 2$ ist. Dann ist $(\frac{m-1}{n})^2$ noch kleiner als 2 und $(\frac{m}{n})^2 \approx 2$.[39]

Wüsste man nun, dass in der infinitesimalen Nachbarschaft von $\frac{m}{n}$ eine reelle Standardzahl s liegt, dann hätte man mit s eine exakte Lösung, denn aus $s \approx \frac{m}{n}$ folgt (da $\frac{m}{n}$ endlich ist) $s^2 \approx (\frac{m}{n})^2 \approx 2$ und damit (da s^2 standard ist) $s^2 = 2$. In der Tat wird die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ durch das folgende Axiom ausgedrückt.

Standardteilaxiom: Für alle endlichen $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein standard $y \in \mathbb{R}$ mit $x \approx y$.

Die Zahl y im Standardteilaxiom ist eindeutig bestimmt (weil $\approx$ transitiv ist und zwei infinitesimal benachbarte Standardzahlen gleich sind). Sie wird der *Standardteil* von x genannt und mit $\mathrm{st}(x)$ bezeichnet. Die folgenden Regeln für das Rechnen mit Standardteilen können anhand der Definition leicht verifiziert werden.

Satz 37. *Für alle endlichen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. *$x + y$ ist endlich und* $\mathrm{st}(x + y) = \mathrm{st}(x) + \mathrm{st}(y)$,
2. *$x \cdot y$ ist endlich und* $\mathrm{st}(x \cdot y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$,
3. *$\frac{x}{y}$ ist endlich und* $\mathrm{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\mathrm{st}(x)}{\mathrm{st}(y)}$*, falls y nicht infinitesimal ist,*
4. *$x \leq y \Rightarrow \mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$.*

Aus dem Standardteilaxiom (und dem archimedischen Axiom) folgt die konventionelle Beschreibung der Vollständigkeit, zum Beispiel in Gestalt des Supremumsprinzips. Die Begriffe *obere Schranke* und *Supremum* werden dabei wie üblich, also durch interne Aussageformen definiert.

Satz 38 (Supremumsprinzip)**.** *Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke (Supremum).*

Beweis. Wir zeigen, dass die Behauptung für Standardmengen gilt. Nach dem Transferaxiom gilt sie dann allgemein.

Sei also $A \subseteq \mathbb{R}$ standard, nicht leer und nach oben beschränkt. Nach dem Transferaxiom gibt es ein standard $a \in A$ und eine obere Schranke r von A, die standard ist. Sei $\alpha \approx 0$, $\alpha > 0$ und

$$M := \{j \in \mathbb{N} \mid a + j\alpha \text{ ist obere Schranke von } A\}.$$

39. Aus $\frac{(m-1)^2}{n^2} < 2 \leq \frac{m^2}{n^2}$ folgt $0 \leq \frac{m^2}{n^2} - 2 < \frac{m^2}{n^2} - \frac{(m-1)^2}{n^2} = \frac{2m-1}{n^2} = \frac{1}{n}(2\frac{m}{n} - \frac{1}{n}) \approx 0$, da $\frac{m}{n}$ endlich und $n \gg 1$ ist.

Nach dem archimedischen Axiom gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $a + n\alpha > r$. Also ist $M \neq \emptyset$ und hat nach dem Wohlordnungsprinzip ein Minimum m. $a + m\alpha$ ist endlich (zum Beispiel kleiner als die Standardzahl $r + 1$). Setze $s := \mathrm{st}(a + m\alpha)$.

s ist eine obere Schranke von A, denn nach Definition von m gilt für alle $x \in A$ $x \leq a + m\alpha$, nach Satz 37 (Punkt 4) also $\mathrm{st}(x) \leq s$. Damit gilt für alle standard x

$$x \in A \Rightarrow x \leq s.$$

Dies ist eine interne Aussageform (mit den Standardparametern A und s). Nach dem Transferaxiom gilt sie daher für alle x.

s ist die *kleinste* obere Schranke von A, denn angenommen, es gäbe eine obere Schranke t von A mit $t < s$. Nach dem Transferaxiom gäbe es dann ein standard t mit dieser Eigenschaft. Da die Differenz verschiedener Standardzahlen nicht infinitesimal sein kann, folgte $t < a+(m-1)\alpha$. Damit wäre t keine obere Schranke im Widerspruch zur Annahme. □

In $\mathbb{R}$ liegen zwischen zwei Standardzahlen unendlich viele Nichtstandardzahlen. In $\mathbb{N}$ erwarten wir dagegen, dass jede Nichtstandardzahl größer ist als alle Standardzahlen bzw. umgekehrt, dass alle Zahlen, die kleiner sind als eine Standardzahl, ebenfalls standard sind. Dies bestätigt der folgende Satz.[40]

Satz 39. *Sei $n \in \mathbb{N}$ standard. Dann sind auch alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ standard.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ standard und $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Dann ist m endlich und es gibt nach dem Standardteilaxiom ein standard $r \in \mathbb{R}$ mit $m \approx r$. Daraus folgt $m-1 < r-\frac{1}{2} < m < r+\frac{1}{2} < m+1$. Es gibt also $k \in \mathbb{N}$ mit $r-\frac{1}{2} < k < r+\frac{1}{2}$. Dies ist eine interne Aussageform (mit Standardparameter r). Daher ist das Transferaxiom anwendbar, und es folgt, dass es ein standard k mit $r - \frac{1}{2} < k < r + \frac{1}{2}$ gibt. Da das offene Intervall $\left]r - \frac{1}{2}, r + \frac{1}{2}\right[$ höchstens eine ganze Zahl enthalten kann, folgt $m = k$. Also ist m standard. □

5.7.7. Abschließende Bemerkungen zur Axiomatik

Zwei wesentliche Herausforderungen bei der Anwendung der Nichtstandardtheorie liegen darin, illegalen Transfer und illegale Mengenbildung zu vermeiden. Bei Anwendungen des Transferaxioms ist stets darauf zu achten, dass die zu transferierende Aussage intern ist und höchstens noch Standardparameter enthält. Bei Mengenbildungen durch Aussonderung muss man sich immer davon überzeugen, dass die Aussageform, mit der man aussondert, intern ist. Auf Letzteres wollen wir noch etwas genauer eingehen.

Dass das Aussonderungsaxiom nur für interne Aussageformen verfügbar ist, bedeutet zwar keine Einschränkung gegenüber der Standardanalysis, erscheint aber, mit einem naiven Mengenverständnis betrachtet, unbefriedigend. Warum sollte man aus einer beliebigen Menge nicht die Teilmenge zum Beispiel aller ihrer Standardelemente aussondern können?

40. Den Beweis übernehmen wir aus Hrbaček und Katz 2021. In IST (mit dem wesentlich allgemeineren Idealisierungsaxiom) folgt der Satz unmittelbar aus Satz 24 (der Charakterisierung endlicher Standardmengen).

Zunächst ist festzustellen, dass ein naives Mengenverständnis auf der Basis der Komprehension mit beliebigen Prädikaten zu Widersprüchen geführt hat und man daher mit Beginn des 20. Jahrhunderts einen axiomatisch begründeten Mengenbegriff angestrebt hat. Axiome regeln seither, welche Mengen man als existent annehmen darf und was man mit ihnen anstellen darf.

In der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre wird das allgemeine Komprehensionsaxiom abgeschwächt zum Aussonderungsaxiom. Statt der intuitiv plausiblen Mengenbildung nach dem Schema $\{x \mid \varphi(x)\}$ ist nur noch die Aussonderung aus bereits gegebenen Mengen erlaubt, also die Mengenbildung nach dem Schema $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ (wobei die Existenz von A zuvor gesichert sein muss). Was ist nun die Motivation, dieses Aussonderungsschema nicht auch für das neue Prädikat *standard* zuzulassen?

Wir befinden uns in einer ähnlichen Situation, wie zum Ende des 19. Jahrhunderts, als man beschloss, aktual unendliche Mengen in mathematischen Betrachtungen zuzulassen. Man musste dazu ein Jahrtausende altes und plausibles Prinzip, welches zu den euklidischen Axiomen gehörte, aufgeben: Das Ganze ist größer als sein Teil. Wir haben schon erwähnt, dass Leibniz unendliche Gesamtheiten genau aus diesem Grund abgelehnt hat.

Wenn man aktual unendliche Mengen haben will, muss man dieses Axiom opfern, um Widersprüche zu vermeiden. Und wenn man in $\mathbb{N}$ jenseits aller Standardzahlen (zu denen alle explizit benennbaren Zahlen gehören) weitere – und demzufolge unendlich große – Zahlen haben möchte, dann muss man die Aussonderung mit dem Prädikat, das Standard- und Nichtstandardzahlen unterscheidet, opfern.

Wäre eine Mengenbildung wie $\{x \in \mathbb{N} \mid \mathrm{st}(x)\}$ möglich, dann stünde sie im Widerspruch zum (bewiesenen) Wohlordnungsprinzip, denn das Komplement dieser Menge in $\mathbb{N}$ wäre nicht leer, hätte aber kein kleinstes Element.

Wie hat man sich die Menge $\mathbb{N}$ vorzustellen? Auf eine oben offene Abfolge von Standardzahlen folgt eine unten offene Abfolge von Nichtstandardzahlen. Unter den Standardzahlen gibt es keine größte (mit n ist auch $n+1$ standard) und unter den Nichtstandardzahlen keine kleinste (mit n ist auch $n-1$ nichtstandard). Es ist jedoch nicht möglich, die Menge $\mathbb{N}$ genau zwischen den Standardzahlen und den Nichtstandardzahlen aufzutrennen, denn dies wäre eine Aussonderung mit dem externen Prädikat *standard*. Dagegen ist es problemlos möglich, die Menge $\mathbb{N}$ bei einer beliebigen Zahl (standard oder nicht standard) aufzutrennen.

Eine möglicherweise hilfreiche Analogie aus dem Alltag ist das *Haufenparadoxon*, das die Schwierigkeit beschreibt, einen vagen Begriff wie den des Haufens exakt zu definieren. Wann ist eine Ansammlung von Elementen (zum Beispiel Sandkörnern) ein Haufen? Intuitiv sollten es so viele sein, dass die Ansammlung nach Entfernen eines ihrer Elemente immer noch ein Haufen ist. Andererseits ist ein einzelnes Element intuitiv kein Haufen. Es ist nicht möglich eine exakte und intuitiv plausible Grenze zwischen Haufen und Nichthaufen anzugeben.

Ebenso ist es nicht möglich, mit den Axiomen der Mengenlehre in den natürlichen Zahlen eine Grenze zwischen Standard- und Nichtstandardzahlen zu ziehen oder in den reellen Zahlen eine Grenze zwischen endlichen und unendlichen Zahlen (Letzteres würde dem Supremumsprinzip widersprechen).

5.7.8. Externe Kriterien für zentrale Begriffe der Analysis

Die zentralen Begriffe der Analysis (Konvergenz und Limes, Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Ableitung, Integrierbarkeit und Integral etc.) seien konventionell, das heißt durch *interne* Aussageformen definiert. Diese Definitionen setzen wir als bekannt voraus.

In den folgenden Abschnitten geben wir *externe* Kriterien an, die sich für Standardparameter (also zum Beispiel bezogen auf Standardfunktionen und Standardpunkte) als äquivalent zu den internen Definitionen herausstellen werden. Den Beweis für diese Äquivalenz stellen wir zurück bis Abschnitt 5.7.10. Zuvor zeigen wir in Abschnitt 5.7.9, wie mit den externen Kriterien gearbeitet werden kann.

Der Nutzen der externen Kriterien besteht darin, dass man für konventionelle (also intern formulierte) Sätze eine alternative Beweismethode nach folgendem Schema zur Verfügung hat:

1. Beweis der Aussage des Satzes für Standardparameter (Standardfunktionen und Standardzahlen) unter Verwendung der externen Kriterien.
2. Verallgemeinerung der Aussage per Transfer (dies ist möglich, da die Aussage intern ist).

Limes

Satz 40. *Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ standard. f ist* konvergent *genau dann, wenn es ein standard $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$n \gg 1 \quad \Rightarrow \quad f(n) \approx a.$$

In diesem Fall gilt

$$a = \lim_{k\to\infty} f(k) = \operatorname{st}(f(n))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \gg 1$.

Satz 41. *Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ standard. f ist eine* Cauchy-Folge *genau dann, wenn für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$m, n \gg 1 \quad \Rightarrow \quad f(m) \approx f(n).$$

Satz 42. *Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ beide standard. a ist ein* Häufungspunkt von f *genau dann, wenn es $n \in \mathbb{N}$, $n \gg 1$ gibt mit $f(n) \approx a$.*

Stetigkeit

In den folgenden Definitionen sei $\mathcal{F}$ die Menge aller reellwertigen Funktionen f mit $\operatorname{Def}(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Satz 43. *Seien $f \in \mathcal{F}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beide standard. f ist* stetig in x_0 *genau dann, wenn $x_0 \in \operatorname{Def}(f)$ und wenn für alle $x \in \operatorname{Def}(f)$ gilt:*

$$x \approx x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \approx f(x_0). \tag{5.20}$$

Anders ausgedrückt: f ist *stetig in* x_0 genau dann, wenn $x_0 \in \mathrm{Def}(f)$ und

$$\forall dx \approx 0\,(x_0 + dx \in \mathrm{Def}(f) \Rightarrow f(x_0 + dx) \approx f(x_0)). \tag{5.21}$$

Satz 44. *Sei* $f \in \mathcal{F}$ *standard.* f *ist* gleichmäßig stetig *genau dann, wenn für alle* $x_1, x_2 \in \mathrm{Def}(f)$ *gilt:*

$$x_1 \approx x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \approx f(x_2). \tag{5.22}$$

Ableitung

Satz 45. *Seien* $f \in \mathcal{F}$ *und* $x_0 \in \mathrm{Def}(f)$ *beide standard, und es gebe mindestens ein* $x \in \mathrm{Def}(f) \setminus \{x_0\}$ *mit* $x \approx x_0$*.* f *ist* differenzierbar in x_0 *genau dann, wenn es ein standard* $a \in \mathbb{R}$ *gibt, sodass für alle* $x \in \mathrm{Def}(f) \setminus \{x_0\}$ *mit* $x \approx x_0$ *gilt:*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx a. \tag{5.23}$$

In diesem Fall gilt

$$a = f'(x_0) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

für alle $x \in \mathrm{Def}(f) \setminus \{x_0\}$ *mit* $x \approx x_0$*.*

Anders ausgedrückt: $f'(x_0) = a$ gilt genau dann, wenn es in $\mathrm{Def}(f)$ eine zu x_0 infinitesimal benachbarte Zahl ungleich x_0 gibt und

$$\forall dx \approx 0 \left(x_0 + dx \in \mathrm{Def}(f) \wedge dx \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \approx a\right). \tag{5.24}$$

Bemerkung. In der konventionellen Definition der Differenzierbarkeit von f an der Stelle x_0 wird vorausgesetzt, dass x_0 ein Häufungspunkt von $\mathrm{Def}(f)$ ist (vgl. zum Beispiel Forster 2016, S.164). Dieser Voraussetzung entspricht hier das externe Kriterium, dass es in $\mathrm{Def}(f)$ eine zu x_0 infinitesimal benachbarte Zahl ungleich x_0 geben muss.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 45 erhält man: Sind f und x_0 standard und ist f in x_0 differenzierbar, so gilt für alle $x \approx x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x, x_0), \tag{5.25}$$

mit $\frac{o(x,x_0)}{x-x_0} \approx 0$.

Integral

Wie in der Standardanalysis definiert man Treppenfunktionen, die Menge $\mathcal{T}[a,b]$ aller Treppenfunktionen über dem Intervall $[a,b]$ und das Integral für Treppenfunktionen. Und wie in der Standardanalysis zeigt man, dass $\mathcal{T}[a,b]$ ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen über $[a,b]$ ist und dass das Integral ein monotones lineares Funktional auf $\mathcal{T}[a,b]$ ist (siehe zum Beispiel Forster 2016).

In der Standardanalysis kann das Integral einer Funktion mittels Riemann'scher Summen definiert werden, die nichts anderes als Integrale von Treppenfunktionen sind, welche die Integrandenfunktion an bestimmten Zwischenpunkten interpolieren. Das Integral existiert, wenn die Riemann'schen Summen (unabhängig von der Unterteilung des Intervalls und der Wahl der Zwischenpunkte) beliebig nahe bei einem festen Wert liegen, sofern die Unterteilung hinreichend fein ist.

Diese Definition lässt sich in eine entsprechende Nichtstandardbeschreibung übersetzen. Das Integral ist dann der gemeinsame Standardteil der Riemann'schen Summen zu unendlich feinen Unterteilungen (sofern dieser existiert).

Definition 30. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Eine endliche streng monoton wachsende Folge $(x_i)_{0 \le i \le n}$ mit $x_0 = a$ und $x_n = b$ heißt eine* endliche Unterteilung *von $[a, b]$.*

Die positive reelle Zahl $\delta := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i \in \mathbb{N} \wedge 1 \le i \le n\}$ heißt die Feinheit *der Unterteilung. $(x_i)_{0 \le i \le n}$ heißt* unendlich fein, *wenn $\delta \approx 0$ ist.*

Ist darüber hinaus eine Folge $(\xi_i)_{1 \le i \le n}$ von Zwischenpunkten $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gegeben, dann heißt das Paar $Z := ((x_i)_{0 \le i \le n}, (\xi_i)_{1 \le i \le n})$ eine Riemann-Unterteilung von $[a, b]$ (mit Teilpunkten x_i und Zwischenpunkten ξ_i).[41] *Die Feinheit von $(x_i)_{0 \le i \le n}$ wird als die Feinheit von Z bezeichnet.*

Definition 31. *Sei $f \in \mathcal{F}$, $[a, b] \subseteq \mathrm{Def}(f)$ und $Z := ((x_i)_{0 \le i \le n}, (\xi_i)_{1 \le i \le n})$ eine Riemann-Unterteilung von $[a, b]$. Dann heißt*

$$R(Z, f) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

die Riemann'sche Summe zu Z und f.

$f_Z \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f_Z(x) = f(\xi_i)$ für $x \in [x_{i-1}, x_i[$, $1 \le i \le n$ und $f_Z(b) = f(\xi_n)$ heißt die zu Z gehörige Treppenfunktion von f.

Aufgrund der Definition des Integrals für Treppenfunktionen gilt

$$\int_a^b f_Z(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = R(Z, f). \tag{5.26}$$

Satz 46. *Seien $f \in \mathcal{F}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ alle drei standard und $a < b$. f ist* integrierbar von a bis b *genau dann, wenn $[a, b] \subseteq \mathrm{Def}(f)$ und wenn es ein standard $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jede unendlich feine Riemann-Unterteilung Z von $[a, b]$ gilt:*

$$R(Z, f) \approx r. \tag{5.27}$$

In diesem Fall gilt

$$r = \int_a^b f(x)\, dx = \mathrm{st}\,(R(Z, f))$$

für alle unendlich feinen Riemann-Unterteilungen Z von $[a, b]$.

41. Der Begriff *Riemann-Unterteilung* ist in der Literatur nicht allgemein gebräuchlich, vereinfacht aber im Folgenden viele Formulierungen.

5.7.9. Einige Sätze und Beweise

Sätze über Folgen

Satz 47. *Jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Beweis. Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ standard und es gelte $f(m) \approx f(n)$ für alle $m, n \gg 1$. Dann ist f beschränkt, das heißt, es gibt ein $r \in \mathbb{R}$ mit $|f(n)| \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (sonst gäbe es für alle n ein $m > n$ mit $|f(m)| > |f(n)| + 1$ im Widerspruch zu $f(m) \approx f(n)$ für $m, n \gg 1$). Da f standard ist, gibt es nach dem Transferaxiom ein standard $r \in \mathbb{R}$, das f beschränkt. Also sind alle $f(n)$ endlich. Man wähle $m \gg 1$ und setze $a := \mathrm{st}(f(m))$. Dann gilt nach Voraussetzung für alle $n \gg 1$: $f(n) \approx f(m) \approx a$. Das heißt, f konvergiert gegen a.

Für allgemeines f folgt die Behauptung per Transfer. □

Satz 48. *Seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergent. Dann gilt:*

1. *$f + g$ ist konvergent und*
$$\lim_{n\to\infty}(f(n) + g(n)) = \lim_{n\to\infty}(f(n)) + \lim_{n\to\infty}(g(n)),$$
2. *$f \cdot g$ ist konvergent und*
$$\lim_{n\to\infty}(f(n) \cdot g(n)) = \lim_{n\to\infty}(f(n)) \cdot \lim_{n\to\infty}(g(n)),$$
3. *$\frac{f}{g}$ konvergent und*
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} f(n)}{\lim_{n\to\infty} g(n)},$$
falls $\lim_{n\to\infty} g(n) \neq 0$,
4. *$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(f(n)) \leq \lim_{n\to\infty}(g(n))$.*

Beweis. Für standard f, g folgt die Behauptung aus Satz 37 und Satz 40. Der allgemeine Fall folgt per Transfer. □

Die Grenzwertsätze spielen in der Nichtstandardanalysis keine große Rolle, da dort meistens direkt mit den Standardteilen gerechnet wird.

Sätze über stetige Funktionen

Satz 49. *Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, \lambda f, fg\colon D \to \mathbb{R}$ und die Funktion $\frac{f}{g}\colon D' \to \mathbb{R}$ stetig.*

Beweis. Folgt für Standardparameter unmittelbar aus den Rechenregeln für infinitesimale Zahlen und allgemein per Transfer. □

Satz 50. *Seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. f sei in $a \in D$ und g in $b := f(a)$ stetig. Dann ist die Funktion $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in a.*

Beweis. Seien f, g und a standard. Dann ist auch $b := f(a)$ standard. Sei $x \in D$ mit $x \approx a$ gegeben. Da f stetig in a ist, folgt $f(x) \approx b$. Da g stetig in b ist, folgt $g(f(x)) \approx g(b) = g(f(a))$. Also ist $g \circ f$ stetig in a.

Für allgemeine f, g, a folgt die Behauptung per Transfer. □

Satz 51 (Nullstellensatz)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es eine reelle Zahl $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.*

Beweis. Seien f, a, b standard. Sei $n \in \mathbb{N}, n \gg 1$, $x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ für $i = 0, \dots n$ und k der kleinste Index i mit $f(x_i) \geq 0$. Dann gilt

$$1 \leq k \leq n \wedge f(x_{k-1}) < 0 \wedge f(x_k) \geq 0. \tag{5.28}$$

Wegen $n \gg 1$, ist $x_{k-1} \approx x_k$. Da a, b standard sind und $a \leq x_k \leq b$, existiert der Standardteil $c := \mathrm{st}(x_k)$, und es ist

$$a = \mathrm{st}(a) \leq c \leq \mathrm{st}(b) = b.$$

Aus $x_{k-1} \approx c \approx x_k$ und der Stetigkeit von f folgt $f(x_{k-1}) \approx f(c) \approx f(x_k)$ und damit

$$|f(x_k)| \leq |f(x_k)| + |f(x_{k-1})| = f(x_k) - f(x_{k-1}) \approx 0,$$

also $f(c) \approx f(x_k) \approx 0$. Mit f und c ist auch $f(c)$ standard und es folgt $f(c) = 0$. Für allgemeines f, a, b folgt die Behauptung per Transfer. □

Satz 52. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Seien f, a, b standard. Für alle x mit $a \leq x \leq b$ folgt nach Satz 37 (und weil a und b standard sind)

$$a = \mathrm{st}(a) \leq \mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(b) = b \tag{5.29}$$

Daher liegen für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ auch die jeweiligen Standardteile in $[a, b]$. Wenn $x_1 \approx x_2$ ist, sind ihre Standardteile gleich. Da f stetig ist, folgt daraus

$$f(x_1) \approx f(\mathrm{st}(x_1)) = f(\mathrm{st}(x_2)) \approx f(x_2)$$

Das bedeutet, f ist nach Satz 44 gleichmäßig stetig.

Für allgemeine f, a, b folgt die Behauptung per Transfer. □

Satz 53. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a, b]$ sein Minimum und sein Maximum an.*

Beweis. Seien f, a, b standard. Sei $n \in \mathbb{N}, n \gg 1$ und $x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ für $i = 0, \dots, n$. Unter den endlich vielen reellen Zahlen $f(x_i)$ sei $f(x_{i_1})$ die kleinste und $f(x_{i_2})$ die größte. Für alle i gilt also

$$f(x_{i_1}) \leq f(x_i) \leq f(x_{i_2}) \tag{5.30}$$

Da a, b standard sind, sind x_{i_1}, x_{i_2} endlich und es existieren die Standardteile $\check{x} := \mathrm{st}(x_{i_1})$ und $\hat{x} := \mathrm{st}(x_{i_2})$. Wie bei (5.29) folgt, $\check{x}, \hat{x} \in [a, b]$. Weil f stetig und standard ist, gilt $f(\check{x}) = \mathrm{st}(f(x_{i_1}))$ und $f(\hat{x}) = \mathrm{st}(f(x_{i_2}))$.

Für alle standard $x \in [a, b]$ gibt es ein i mit $x = \mathrm{st}(x_i)$ und (wieder weil f stetig und standard ist) $f(x) = \mathrm{st}(f(x_i))$. Geht man in (5.30) zu den Standardteilen über, so erhält man

$$f(\check{x}) \leq f(x) \leq f(\hat{x}).$$

Per Transfer folgt, dass diese Ungleichung für alle $x \in [a, b]$ gilt. f nimmt also in $\check{x}$ sein Minimum und in $\hat{x}$ sein Maximum an.

Für allgemeine f, a, b folgt die Behauptung per Transfer. $\square$

Sätze der Differentialrechnung

Satz 54. *Sei $f \colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0. Dann ist f stetig in x_0.*

Beweis. Seien f, x_0 standard. Ist f in x_0 differenzierbar, dann ist $f'(x_0)$ standard (insbesondere also endlich) und es gilt nach (5.25) für alle $x \approx x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x, x_0),$$

mit $\frac{o(x,x_0)}{x-x_0} \approx 0$. Da $f'(x_0)$ endlich ist, folgt $f(x) \approx f(x_0)$. Also ist f stetig in x_0.

Für allgemeine f, x_0 folgt die Behauptung per Transfer. $\square$

Satz 55. *Seien $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, \lambda f, fg \colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in D$:*

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
2. $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$.
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in D differenzierbar und es gilt für alle $x \in D$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Beweis. Die Ableitungsregeln können unter Verwendung der Differentiale $df = f(x + dx) - f(x)$ und $dg = g(x + dx) - g(x)$ errechnet werden. Wir rechnen exemplarisch die Produktregel (3.) vor. f, g, x seien standard, $x \in D$ und $dx \approx 0$, $dx \neq 0$ mit $x + dx \in D$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(fg) &= f(x + dx)g(x + dx) - f(x)g(x) \\ &= (f(x) + df)(g(x) + dg) - f(x)g(x) \\ &= df \cdot g(x) + f(x) \cdot dg + df \cdot dg. \end{aligned}$$

Division durch dx ergibt

$$\frac{d(fg)}{dx} = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}dg.$$

Da f, g, x standard sind und f und g differenzierbar in x, sind alle Terme endlich und man kann zu den Standardteilen übergehen. Da g stetig in x ist, ist $dg \approx 0$ und es folgt $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Für allgemeine f, g, x folgt die Behauptung per Transfer. □

Satz 56 (Kettenregel)**.** *Seien $f\colon V \to \mathbb{R}$ und $f\colon V \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(V) \subseteq W$. f sei in $x \in V$ differenzierbar und g sei in $y := f(x) \in W$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f\colon V \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt:*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \tag{5.31}$$

Beweis. Seien f, x standard. Sei $dx \approx 0$, $dx \neq 0$. Wir rechnen mit den Differentialen $df = f(x+dx) - f(x)$ und $dg = g(f(x)+df) - g(f(x))$. Da f in x stetig ist, folgt $df \approx 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
d(g \circ f) &= g(f(x+dx)) - g(f(x)) \\
&= g(f(x)+df) - g(f(x)) \\
&= g(f(x)) + dg - g(f(x)) \\
&= dg
\end{aligned}$$

Falls $df = 0$, folgt (bereits in der zweiten Gleichungszeile) $d(g \circ f) = 0$, also $(g \circ f)'(x) = f'(x) = 0$ und damit (5.31). Falls $df \neq 0$, folgt

$$\frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$$

Da f in x und g in $f(x)$ differenzierbar ist, sind alle Terme endlich und man kann zu den Standardteilen übergehen. Es folgt (5.31).

Für allgemeine f, x folgt die Behauptung per Transfer. □

Satz 57. *Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ und $c \in]a, b[$. Ist f differenzierbar in c und besitzt in c ein lokales Extremum, dann ist $f'(c) = 0$.*

Beweis. Seien f, c standard. f besitze in c ein lokales Maximum (der Fall eines Minimums verläuft analog). Da f und c standard sind, gibt es nach dem Transferaxiom ein standard $\varepsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$. Für positives $h \approx 0$ gilt also $f(c \pm h) - f(c) \leq 0$ und daher

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \leq \frac{f(c-h) - f(c)}{-h}.$$

Durch Übergehen zu den Standardteilen folgt (wegen der Differenzierbarkeit von f in c)

$$f'(c) \leq 0 \leq f'(c),$$

also $f'(c) = 0$. Für allgemeine f, c folgt die Behauptung per Transfer. □

Wie üblich folgen aus Satz 57 der Satz von Rolle, der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und dass auf $[a, b]$ stetige und auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit verschwindender Ableitung konstant sind.

Sätze der Integralrechnung

Satz 58. *Sei $a < b < c$ und $f\colon [a, c] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 46 für Standardparameter und allgemein per Transfer. □

Satz 59. *Seien $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f \leq g$. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 37 und Satz 46 für Standardparameter und allgemein per Transfer. □

Proposition 1. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $b - a$ endlich groß. Sei $f \in \mathcal{T}[a, b]$ und sei $f(x) \approx 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx 0.$$

Beweis. Es sei $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ eine endliche Unterteilung von $[a, b]$ und es gelte $f(x) = c_i$ für $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$. Sei $c := \max_{1 \leq i \leq n} |c_i|$. Dann ist $c \approx 0$ und es folgt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^n |c_i|(x_i - x_{i-1}) \leq c(b - a) \approx 0.$$

□

Satz 60. *Jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Beweis. Seien f, a, b zunächst standard. Es ist zu zeigen, dass zu jeder unendlich feinen Riemann-Unterteilung Z die zugehörige Riemann'sche Summe $R(Z, f)$ endlich ist und dass für je zwei unendlich feine Riemann-Unterteilungen Z, Z' sich die Riemann'schen Summen nur infinitesimal unterscheiden.

Sei $Z = ((x_i)_{0 \leq i \leq n}, (\xi_i)_{1 \leq i \leq n})$ eine unendlich feine Riemann-Unterteilung von $[a, b]$. Als stetige Funktion nimmt f in $[a, b]$ sein Minimum $\check{y}$ und sein Maximum $\hat{y}$ an. Da f standard ist, sind auch $\check{y}$ und $\hat{y}$ standard, und es gilt:

$$\check{y}(b - a) = \check{y} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \hat{y} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \hat{y}(b - a).$$

Also ist $R(Z,f)$ endlich.

Seien $Z = ((x_i)_{0\leq i\leq n}, (\xi_i)_{1\leq i\leq n})$ und $Z' = ((x'_i)_{0\leq i\leq n'}, (\xi'_i)_{1\leq i\leq n'})$ zwei unendlich feine Riemann-Unterteilungen von $[a,b]$ und f_Z bzw. $f_{Z'}$ die zugehörigen Treppenfunktionen gemäß Definition 31.

Für alle $x \in [a,b[$ gibt es ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ und ein $j \in \{1,\ldots,n'\}$ mit $x \in [x_{i-1}, x_i[$ und $x \in \left[x'_{j-1}, x'_j\right[$. Dann ist $f_Z(x) = f(\xi_i)$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ und $f_{Z'}(x) = f(\xi'_j)$ mit $\xi'_j \in [x'_{j-1}, x'_j]$. Für $x = b$ gilt dies ebenfalls mit $i = n$ und $j = n'$. Da Z und Z' unendlich fein sind, ist $\xi_i \approx x \approx \xi'_j$. Da f auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist, folgt

$$f_Z(x) = f(\xi_i) \approx f(x) \approx f(\xi'_j) = f_{Z'}(x).$$

Also ist $(f_Z - f_{Z'})(x) \approx 0$ für alle $x \in [a,b]$. Mit (5.26) und Proposition 1 folgt

$$R(Z,f) - R(Z',f) = \int_a^b f_Z(x)\,dx - \int_a^b f_{Z'}(x)\,dx = \int_a^b (f_Z - f_{Z'})(x)\,dx \approx 0.$$

Für allgemeine f, a, b folgt die Behauptung per Transfer. □

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$I \subseteq \mathbb{R}$ sei ein (eigentliches oder uneigentliches, aber nicht entartetes) Intervall.

Satz 61. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$. Für $x \in I$ sei*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

Dann ist die Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Beweis. Seien f, a standard und x_0 ein innerer Punkt von I und standard. I umfasst eine Umgebung von x_0, nach dem Transferaxiom also auch eine Standardumgebung von x_0. Damit enthält I auch alle von x_0 infinitesimal benachbarten Punkte. Sei $h \approx 0, h > 0$ (für $h < 0$ schließe man analog). Dann ist auch $x_0 + h \in I$. Als stetige Funktion nimmt f in $[x_0, x_0 + h]$ (bezogen auf dieses Intervall) sein Minimum in einem Punkt $\check{x}$ und sein Maximum in einem Punkt $\hat{x}$ an. Dann gilt $f(\check{x}) \leq f(x) \leq f(\hat{x})$ für alle $x \in [x_0, x_0 + h]$ und $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = F(x+h) - F(x_0)$, also

$$f(\check{x}) \cdot h \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq f(\hat{x}) \cdot h.$$

Nach Division durch h und Übergang zu den Standardteilen folgt

$$\mathrm{st}(f(\check{x})) \leq \mathrm{st}\left(\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}\right) \leq \mathrm{st}(f(\hat{x})).$$

Die Standardteile existieren, weil f in I sein Minimum und sein Maximum annimmt, die jeweils standard und untere bzw. obere Schranke sind. Wegen $\check{x} \approx x_0 \approx \hat{x}$ und weil $f(x_0)$ standard ist, folgt $\mathrm{st}(f(\check{x})) = F'(x_0) = \mathrm{st}(f(\hat{x})) = f(x_0)$.

Für allgemeine f, a, x_0 folgt die Behauptung per Transfer. □

Satz 62. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Folgt wie üblich aus Satz 61, weil die Differenz zweier Stammfunktionen konstant ist. □

5.7.10. Äquivalenz zur Standardanalysis

Zur Abkürzung von logischen Formeln vereinbaren wir für diesen Abschnitt die folgende Konvention: Die Variablen k, m, n stehen für natürliche Zahlen, die Variablen $x, y, \varepsilon, \delta$ für reelle Zahlen. Zum Beispiel stehe $\forall n \exists x$ abkürzend für $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x \in \mathbb{R}$.

Die Grundkonzepte der elementaren Analysis lassen sich im Wesentlichen alle durch Aussageformen der Art $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \ldots$ definieren. Man kann diese Definitionen als quantitativ bezeichnen, denn sie drücken aus, wie man einen bestimmten Abstand beliebig klein ($< \varepsilon$) bekommt, wenn man einen bestimmten anderen Abstand hinreichend klein ($< \delta$) wählt, wobei das zu wählende δ vom vorgegebenen ε abhängt. Die entsprechenden externen Kriterien aus Abschnitt 5.7.8 sind dagegen qualitativer Natur: Ein bestimmter Abstand ist unendlich klein, wenn man einen bestimmten anderen Abstand unendlich klein wählt. Die (für Standardparameter bestehende) Äquivalenz der quantitativen mit den qualitativen Kriterien und auch den Unterschied an Komplexität drückt in allgemeiner Form der folgende Satz aus.

Satz 63. *Sei $\varphi(x, y)$ eine interne Aussageform (optional mit Standardparametern). Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

$$\forall x \approx 0\, \exists y \approx 0\, \varphi(x, y) \tag{5.32}$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x\, (|x| < \delta \Rightarrow \exists y\, (|y| < \varepsilon \wedge \varphi(x, y))) \tag{5.33}$$

Bevor wir den Satz beweisen, schauen wir uns in einigen Beispielen an, wie daraus (für Standardparameter) die Äquivalenz der quantitativen, internen Kriterien mit den qualitativen, externen Kriterien folgt.

Beispiel Stetigkeit. $\varphi(x, y)$ sei die Aussageform

$$x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \Rightarrow f(x_0 + x) = f(x_0) + y$$

mit Standardparametern f und x_0.

Dann wird (für $x_0 \in \mathrm{Def}(f)$) die Aussage „f ist stetig in x_0“ nach konventioneller Definition durch (5.33) ausgedrückt und nach dem externen Kriterium aus Satz 43 durch (5.32).

Etwas ausführlicher: (5.33) wird zunächst zu

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x\, [|x| < \delta \Rightarrow \exists y\, (|y| < \varepsilon \wedge (x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \Rightarrow f(x_0 + x) = f(x_0) + y))].$$

Da die Prämisse $x_0 + x \in \mathrm{Def}(f)$ in $\varphi(x, y)$ nicht von y abhängt (und $\exists y\,(|y| < \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt ist), kann man sie vor den Quantor $\exists y$ ziehen und erhält für den Ausdruck in eckigen Klammern hinter $\forall x$

$$|x| < \delta \Rightarrow (x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \Rightarrow \exists y\,(|y| < \varepsilon \wedge f(x_0 + x) = f(x_0) + y)).$$

Dies ist äquivalent zu

$$|x| < \delta \wedge x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \Rightarrow (\exists y\,(|y| < \varepsilon \wedge f(x_0 + x) = f(x_0) + y))$$

und dies wiederum äquivalent zu

$$|x| < \delta \wedge x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \Rightarrow |f(x_0 + x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Der Gesamtausdruck $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x\, [\dots]$ ist damit gerade die konventionelle Definition der Stetigkeit von f in x_0 (statt x wird dort meistens Δx geschrieben).

Entsprechend wird (5.32) zunächst zu

$$\forall x \approx 0\, \exists y \approx 0\, (x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \Rightarrow f(x_0 + x) = f(x_0) + y),$$

was (weil $x_0 + x \in \mathrm{Def}(f)$ nicht von y abhängt) äquivalent umgeformt werden kann zu

$$\forall x \approx 0\, (x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \Rightarrow \exists y \approx 0\, f(x_0 + x) = f(x_0) + y)$$

und weiter zu

$$\forall x \approx 0\, (x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \Rightarrow f(x_0 + x) \approx f(x_0)).$$

Dies ist das externe Kriterium (5.21) für Stetigkeit von f in x_0 (dort mit dx statt x geschrieben).

Beispiel Häufungspunkt einer Menge. $\varphi(x, y)$ sei die Aussageform

$$y \neq 0 \wedge x_0 + y \in D$$

mit Standardparametern x_0 und D.

Dann wird die Aussage „x_0 ist ein Häufungspunkt von D“ nach konventioneller Definition durch (5.33) ausgedrückt und nach dem externen Kriterium „Es gibt in D eine zu x_0 infinitesimal benachbarte Zahl ungleich x_0“ (vgl. Bemerkung nach Satz 45) durch (5.32).

In diesem Fall hängt $\varphi(x, y)$ gar nicht von x ab, und (5.33) vereinfacht sich zu

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists y\, (|y| < \varepsilon \wedge y \neq 0 \wedge x_0 + y \in D)$$

(wegen der Unabhängigkeit von x, fällt die Prämisse $|x| < \delta$ und damit auch die Abhängigkeit von δ weg). Dies ist die konventionelle Definition von „x_0 ist ein Häufungspunkt von D“. Entsprechend vereinfacht sich (5.32) zu

$$\exists y \approx 0\, (y \neq 0 \wedge x_0 + y \in D),$$

also dem externen Kriterium „Es gibt in D eine zu x_0 infinitesimal benachbarte Zahl ungleich x_0“.

Beispiel Ableitung. $\varphi(x, y)$ sei die Aussageform

$$x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \wedge x \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} = a + y$$

mit Standardparametern f, x_0, a.

Dann wird (für einen Häufungspunkt x_0 von $\mathrm{Def}(f)$) die Aussage $f'(x_0) = a$ nach konventioneller Definition durch (5.33) ausgedrückt und nach dem externen Kriterium aus Satz 45 durch (5.32).

Genauer: Mit analogen Schritten wie im Beispiel Stetigkeit lässt sich (5.33) umformen zu

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \left(|x| < \delta \wedge x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \wedge x \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} - a \right| < \varepsilon \right).$$

Dies ist die konventionelle Definition von $f'(x_0) = a$ (statt x wird dort meistens Δx oder h geschrieben).

Entsprechend lässt sich (5.32) umformen zu

$$\forall x \approx 0 \left(x_0 + x \in \mathrm{Def}(f) \wedge x \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} \approx a \right).$$

Dies ist das externe Kriterium (5.24) für $f'(x_0) = a$ (dort mit dx statt x geschrieben).

Beispiel Limes. $\varphi(x, y)$ sei die Aussageform

$$x^{-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x^{-1}) = a + y$$

mit Standardparametern f und a.

Dann wird die Aussage „f konvergiert gegen a“ nach konventioneller Definition durch (5.33) ausgedrückt und nach dem externen Kriterium aus Satz 40 durch (5.32). Die Argumentation verläuft analog zu den Beispielen Stetigkeit und Ableitung.

Die übrigen externen Kriterien aus Abschnitt 5.7.8 (mit Ausnahme des Integrals) lassen sich analog zu den vorherigen Beispielen behandeln. Für das Integral brauchen wir eine etwas erweiterte Variante von Satz 63 mit einer zusätzlichen Quantifizierung über die Variable Z (für die Riemann-Unterteilungen).

Satz 64. *Sei $\varphi(x, y, Z)$ eine interne Aussageform (optional mit Standardparametern). Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

$$\forall Z \, \forall x \approx 0 \, \exists y \approx 0 \, \varphi(x, y) \tag{5.34}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall Z \, \forall x \, (|x| < \delta \Rightarrow \exists y \, (|y| < \varepsilon \wedge \varphi(x, y, Z))) \tag{5.35}$$

Beispiel Integral. $\varphi(x, y, Z)$ sei die Aussageform:

> „Wenn Z eine Riemann-Unterteilung von $[a, b]$ der Feinheit x ist, dann gilt $R(Z, f) = r + y$“,

mit Standardparametern f, a, b, r.

Dann wird (für $[a, b] \subseteq \mathrm{Def}(f)$) die Aussage $\int_a^b f(t)\, dt = r$ nach konventioneller Definition durch (5.35) ausgedrückt und nach dem externen Kriterium aus Satz 46 durch (5.34). Die Argumentation verläuft analog zu den Beispielen Stetigkeit und Ableitung.

Wir geben nun einen Beweis der Sätze 63 und 64 an. Der Beweis gliedert sich in zwei Schritte. Im ersten Schritt beweisen wir eine Version, die mit natürlichen Zahlen formuliert ist und die wir im zweiten Schritt in die beabsichtigte Form mit ε und δ bringen. Als Hilfsmittel brauchen wir den Satz der abzählbaren Idealisierung, den wir zuvor bereitstellen.

Abzählbare Idealisierung

Im Allgemeinen ist der Schluss von $\forall n \exists x \ldots$ auf $\exists x \forall n \ldots$ ein typischer Fehlschluss. Wenn es zu jedem n ein passendes x gibt, muss es deswegen kein x geben, das für alle n passt. So gibt es zum Beispiel für alle $n \in \mathbb{N}$ eine obere Schranke x der natürlichen Zahlen von 1 bis n, aber keine obere Schranke x aller natürlichen Zahlen (dies widerspräche dem archimedischen Axiom).

In der Nichtstandardarithmetik ist ein solcher Schluss dagegen erlaubt – wenn es um *interne Eigenschaften* geht und wenn n auf *Standardobjekte* eingeschränkt wird. Genauer gilt: Was für 1 bis n zugleich erfüllbar ist (mit beliebig großem standard n), das ist für alle standard n zugleich erfüllbar – und umgekehrt.

Dies drückt – noch etwas präziser – der folgende Satz aus:

Satz 65 (Abzählbare Idealisierung)**.** *Sei $\varphi(n, X)$ eine interne Aussageform (optional mit weiteren Parametern). Dann sind äquivalent:*

1. $\forall^{\mathrm{s}} n\, \exists X\, \forall m \leq n\, \varphi(m, X)$,
2. $\exists X\, \forall^{\mathrm{s}} n\, \varphi(n, X)$.

Beweis. [42] „$\Leftarrow$“: Sei X mit $\forall^{\mathrm{s}} n\, \varphi(n, X)$ gegeben. Nach Satz 39 sind für beliebiges standard n auch alle $m \leq n$ standard. Also gilt $\varphi(m, X)$ für alle $m \leq n$.

„$\Rightarrow$“: Nach dem Aussonderungsaxiom kann folgende Menge gebildet werden:

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists X \forall m \leq n\, \varphi(m, X)\}.$$

Nach Voraussetzung enthält M alle standard n. Angenommen, M enthielte nur Standardelemente. Dann wäre (da $\mathbb{N}$ Nichtstandardelemente enthält) $\mathbb{N} \setminus M \neq \emptyset$ und enthielte nach dem Wohlordnungsprinzip ein Minimum n_0. Dann wäre n_0 nichtstandard und

42. Wir geben hier den Beweis aus Hrbaček und Katz 2021 (Lemma 2.2) wieder.

$n_0 - 1 \in M$, also nach Annahme standard. Widerspruch! Also enthält M Nichtstandardelemente. Sei $m_0 \in M$ nichtstandard. Nach Definition von M gilt $\exists X \forall m \leq m_0\, \varphi(m, X)$. Da $n \leq m_0$ für alle standard n gilt, folgt $\exists X \forall^{\mathrm{s}} n\, \varphi(n, X)$. □

Wendet man Satz 65 auf $\neg\varphi(n, X)$, erhält man die duale Fassung:

Satz 66 (Abzählbare Idealisierung, duale Fassung)**.** *Sei $\varphi(n, X)$ eine interne Aussageform (optional mit weiteren Parametern). Dann sind äquivalent:*

1. $\exists^{\mathrm{s}} n\, \forall X \exists m \leq n\, \varphi(m, X)$
2. $\forall X \exists^{\mathrm{s}} n\, \varphi(n, X)$.

Bemerkung: Wir verwenden hier den Großbuchstaben X als Variable, um zu verdeutlichen, dass die Quantifizierung über X nicht auf die reellen Zahlen relativiert ist (wie zu Beginn des Abschnitts für x vereinbart). Satz 65 heißt *Abzählbare Idealisierung*, weil aus ihm unter anderem folgt, dass zu jeder abzählbaren Standardmenge A eine endliche Menge E existiert, die alle Standardelemente von A enthält.

Äquivalenzbeweis (Schritt 1)

Satz 67. *Sei $\varphi(x, y)$ eine interne Aussageform (optional mit weiteren Parametern). Dann sind äquivalent:*

$$\forall x \approx 0\, \exists y \approx 0\, \varphi(x, y), \tag{5.36}$$

$$\forall^{\mathrm{s}} m\, \exists^{\mathrm{s}} n\, \forall x \left[|x| < \frac{1}{n} \Rightarrow \exists y \left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x, y) \right) \right]. \tag{5.37}$$

Beweis. [43] Der Beweis besteht im Kern in einer zweifachen Anwendung der abzählbaren Idealisierung (davon einmal in der dualen Form). Der Rest ist eine im Grunde elementare Äquivalenzumformung. Unter anderem werden folgende logische Umformungsregeln gebraucht, deren Gültigkeit aus logischen Grundregeln abgeleitet werden kann: Sind α und β Aussageformen und kommt die Variable v in α nicht frei vor, dann gelten

$$(\alpha \Rightarrow \forall v\, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad \forall v\, (\alpha \Rightarrow \beta) \tag{5.38}$$

$$(\forall v\, \beta \Rightarrow \alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \exists v\, (\beta \Rightarrow \alpha) \tag{5.39}$$

Diese gelten auch mit relativierten Quantoren wie $\forall^{\mathrm{s}}$ bzw. $\exists^{\mathrm{s}}$.

Nach Satz 35 ist eine reelle Zahl x genau dann infinitesimal, wenn sie für alle standard $n \in \mathbb{N}$ kleiner als $\frac{1}{n}$ ist. Daher ist (5.36) äquivalent zu folgender Aussage:

$$\forall x \left[\forall^{\mathrm{s}} n \left(|x| < \frac{1}{n} \right) \Rightarrow \exists y\, \forall^{\mathrm{s}} m \left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x, y) \right) \right],$$

43. Wir geben hier den Beweis aus Hrbaček und Katz 2021 (Proposition 2.6) wieder.

wobei wir ohne Einschränkung annehmen können, dass die Variablen m und n in $\varphi(x,y)$ nicht frei vorkommen. Nach Satz 65 (abzählbare Idealisierung), angewendet auf den Teil $\exists y\,\forall^{\mathrm{s}} m\,(\dots)$, ist dies äquivalent zu

$$\forall x \left[\forall^{\mathrm{s}} n \left(|x| < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \forall^{\mathrm{s}} m\,\exists y\,\forall k \leq m \left(|y| < \frac{1}{k} \wedge \varphi(x,y)\right)\right].$$

Da $\forall k \leq m\,\left(|y| < \frac{1}{k}\right)$ äquivalent ist zu $|y| < \frac{1}{m}$, können wir weiter umformen zu

$$\forall x \left[\forall^{\mathrm{s}} n \left(|x| < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \forall^{\mathrm{s}} m\,\exists y \left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y)\right)\right].$$

Nach (5.38) ist dies äquivalent zu

$$\forall x\,\forall^{\mathrm{s}} m \left[\forall^{\mathrm{s}} n \left(|x| < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \exists y \left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y)\right)\right]$$

und nach (5.39) äquivalent zu

$$\forall x\,\forall^{\mathrm{s}} m\,\exists^{\mathrm{s}} n \left[|x| < \frac{1}{n} \Rightarrow \exists y \left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y)\right)\right].$$

Vertauschung der ersten beiden Allquantoren ergibt

$$\forall^{\mathrm{s}} m\,\forall x\,\exists^{\mathrm{s}} n \left[|x| < \frac{1}{n} \Rightarrow \exists y \left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y)\right)\right].$$

Mit Satz 66 (abzählbare Idealisierung, duale Fassung), angewendet auf den Teil $\forall x\,\exists^{\mathrm{s}} n\,[\dots]$, erhalten wir

$$\forall^{\mathrm{s}} m\,\exists^{\mathrm{s}} n\,\forall x\,\exists k \leq n \left[|x| < \frac{1}{k} \Rightarrow \exists y \left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y)\right)\right].$$

Nach (5.39) können wir $\exists k \leq n\,\left[|x| < \frac{1}{k} \Rightarrow \dots\right]$ äquivalent ersetzen durch $\left[\forall k \leq n\,\left(|x| < \frac{1}{k}\right) \Rightarrow \dots\right]$ und erhalten

$$\forall^{\mathrm{s}} m\,\exists^{\mathrm{s}} n\,\forall x \left[\forall k \leq n \left(|x| < \frac{1}{k}\right) \Rightarrow \exists y\,(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y))\right].$$

Da $\forall k \leq n\,(|x| < \frac{1}{k} \Rightarrow \dots)$ äquivalent ist zu $|x| < \frac{1}{n}$ können wir weiter umformen zu

$$\forall^{\mathrm{s}} m\,\exists^{\mathrm{s}} n\,\forall x \left[|x| < \frac{1}{n} \Rightarrow \exists y\,(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y))\right].$$

$\square$

Hrbaček und Katz weisen darauf hin, dass sich der Beweis von Satz 67 auf den Fall verallgemeinern lässt, dass in (5.37) an Stelle von $\forall x \approx 0$ eine beliebige Abfolge von Allquantoren $\forall x_i$ (optional relativiert durch ≈ 0) steht und an Stelle von $\exists y \approx 0$ eine beliebige Abfolge von Existenzquantoren $\exists y_i$ (optional relativiert durch ≈ 0).

Wir führen hier den für das Integral relevanten Fall einer zusätzlichen Quantifizierung über Z aus.

Satz 68. *Sei $\varphi(x,y,Z)$ eine interne Aussageform (optional mit weiteren Parametern). Dann sind äquivalent:*

$$\forall Z\,\forall x \approx 0\,\exists y \approx 0\,\varphi(x,y,Z), \tag{5.40}$$

$$\forall^{\mathrm{s}} m\,\exists^{\mathrm{s}} n\,\forall Z\,\forall x\,\left[|x| < \frac{1}{n} \Rightarrow \exists y\,\left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y,Z)\right)\right]. \tag{5.41}$$

Beweis. Nach Satz 67 ist (5.40) äquivalent zu:

$$\forall Z\,\forall^{\mathrm{s}} m\,\exists^{\mathrm{s}} n\,\forall x\,\left[|x| < \frac{1}{n} \Rightarrow \exists y\,\left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y,Z)\right)\right].$$

Nach Vertauschung der ersten beiden Allquantoren und Anwendung der abzählbaren Idealisierung (duale Fassung) erhalten wir

$$\forall^{\mathrm{s}} m\,\exists^{\mathrm{s}} n\,\forall Z\,\exists k \leq n\,\forall x\,\left[|x| < \frac{1}{k} \Rightarrow \exists y\,\left(|y| < \frac{1}{m} \wedge \varphi(x,y,Z)\right)\right].$$

Da $\exists k \leq n\,\forall x\,\left[|x| < \frac{1}{k} \Rightarrow \dots\right]$ äqivalent ist zu $\forall x\,\left[|x| < \frac{1}{n} \Rightarrow \dots\right]$, können wir umformen zu (5.41). □

Äquivalenzbeweis (Schritt 2)

Statt mit natürlichen Zahlen m, n, kann man Satz 67 und Satz 68 mit reellen Zahlen ε, δ formulieren. Wir geben die erweiterte Variante mit der (nur im Bedarfsfall vorhandenen) Variable Z an.

Satz 69. *Sei $\varphi(x,y,Z)$ eine interne Aussageform (optional mit weiteren Parametern). Dann sind äquivalent:*

$$\forall Z\,\forall x \approx 0\,\exists y \approx 0\,\varphi(x,y,Z) \tag{5.42}$$

$$\forall^{\mathrm{s}} \varepsilon > 0\,\exists^{\mathrm{s}} \delta > 0\,\forall Z\,\forall x\,(|x| < \delta \Rightarrow \exists y\,(|y| < \varepsilon \wedge \varphi(x,y,Z))) \tag{5.43}$$

Beweis. Nach Satz 68 ist zu zeigen, dass (5.41) und (5.43) äquivalent sind.

„$\Leftarrow$“: Gilt $\forall^{\mathrm{s}} \varepsilon > 0\,\exists^{\mathrm{s}} \delta > 0\,\forall Z\,\forall x\,(\dots)$ und ist ein standard m gegeben, dann wähle man ein standard $\varepsilon < \frac{1}{m}$, dazu ein passendes standard δ und standard n mit $\frac{1}{n} < \delta$. Ist dann x mit $|x| < \frac{1}{n}$ (und damit auch $< \delta$) gegeben, dann gibt es nach Voraussetzung ein y mit $|y| < \varepsilon$ (und damit auch $< \frac{1}{m}$) und $\varphi(x,y,Z)$.

„$\Rightarrow$“: Gilt umgekehrt $\forall^{\mathrm{s}} m\,\exists^{\mathrm{s}} n\,\forall Z\,\forall x\,(\dots)$ und ist ein standard $\varepsilon > 0$ gegeben, dann wähle man ein standard m mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$ und dazu ein passendes standard n und standard $\delta > 0$ mit $\delta < \frac{1}{n}$. Ist dann x mit $|x| < \delta$ (und damit auch $< \frac{1}{n}$) gegeben, dann gibt es nach Voraussetzung ein y mit $|y| < \frac{1}{m}$ (und damit auch $< \varepsilon$) und $\varphi(x,y,Z)$. □

Beweis von Satz 63 und 64. In Satz 69 sind in $\varphi(x,y,Z)$ beliebige weitere Parameter zugelassen. Schränkt man die weiteren Parameter auf Standardwerte ein, kann man das Transferaxiom auf (5.43) anwenden (einmal für ε und einmal für δ). In der einfachen Variante (ohne Z) erhält man Satz 63, in der erweiterten Variante (mit Z) Satz 64. □

5.7.11. Ausblick

Standardisierungsaxiom

In der vorliegenden Darstellung haben wir die konventionellen, internen Definitionen der grundlegenden Begriffe der Analysis als bekannt vorausgesetzt und in Abschnitt 5.7.8, bezogen auf Standardparameter, äquivalente externe Kriterien angegeben. Es stellt sich die Frage, ob man diese Begriffe durch die externen Kriterien *definieren* kann, ohne um die Existenz äquivalenter interner Definitionen zu wissen. Dies ist auf *implizite* Weise möglich, wenn man das Standardisierungsaxiom der Internen Mengenlehre zur Verfügung hat (siehe Abschnitt 2.4.3). Das Standardisierungsaxiom entspricht dem Aussonderungsaxiom für beliebige Aussageformen, wobei im Axiom alle Quantoren auf Standardobjekte zu relativieren sind (siehe Abschnitt 2.4.2).

Allerdings wird man sich ohnehin Klarheit verschaffen wollen über das Verhältnis der konventionellen Definitionen zu den externen Kriterien. Daher ist das Standardisierungsaxiom (für die elementare Analysis) nicht zwingend erforderlich. Die externen Kriterien sind dann (wie in Abschnitt 5.7.9 gesehen) als Bereicherung des Methodenspektrums nutzbringend einsetzbar.

Konservativität

Es lässt sich zeigen, dass die hier dargestellte Analysis konservativ gegenüber ZF (der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre ohne Auswahlaxiom) ist. Das heißt, jeder Satz, der in der hier dargestellten Analysis beweisbar ist, ist bereits über ZF beweisbar (siehe Hrbaček und Katz 2021). Dies gilt nicht mehr, wenn man das Standardisierungsaxiom hinzufügt. Dieses impliziert den Boole'schen Primidealsatz und damit den Ultrafiltersatz (jeder Filter lässt sich zu einem Ultrafilter erweitern). Dieser Satz ist zwar schwächer als das Auswahlaxiom, jedoch nicht in ZF beweisbar.[44]

Es gibt auch in der konventionellen Analysis Sätze, deren Beweise das Auswahlaxiom (zumindest in seiner abzählbaren Form) erfordern (zum Beispiel die Äquivalenz von Folgenstetigkeit und ε-δ-Stetigkeit). Für solche Fälle ist den Axiomen aus Abschnitt 5.7.4 eine entsprechende Version des Auswahlaxioms hinzuzufügen.

Die Interne Mengenlehre ist eine konservative Erweiterung von ZFC (der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre mit Auswahlaxiom) und umfasst neben dem Transferaxiom das Standardisierungsaxiom und ein (gegenüber der Version aus Abschnitt 5.7.6) allgemeineres Idealisierungsaxiom (siehe Abschnitt 2.4.2).

5.8. Ontologische Fragen

In diesem und den beiden nachfolgenden Abschnitten 5.9 und 5.10 greifen wir noch einmal die philosophischen Grundfragen aus Abschnitt 5.1.3 auf, und zwar in Bezug auf Standard- und Nichtstandardzahlen. Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung der hyperreellen Zahlen in ZFC und der reellen Zahlen in den Nichtstandarderweiterungen

44. Zur Rolle des Auswahlaxioms siehe auch Abschnitt 5.4.10.

der Mengenlehre. Diese sind erstens für die Nichtstandardanalysis besonders relevant, da sie ein leistungsfähiges Transferprinzip mitbringen, und zweitens hinsichtlich der philosophischen Grundfragen besonders interessant, wegen der nichtkonstruktiven Elemente in den jeweiligen Theorien. Andere Zahlensysteme, die unendlich große und unendlich kleine Zahlen beinhalten, wie die mit dem Filter Cof definierten Omegazahlen von Laugwitz (siehe Abschnitt 2.2.1) oder die superreellen Zahlen von Tall (siehe Abschnitt 3.1.2) lassen sich innerhalb von ZF definieren und gelten daher als weniger problematisch. Allerdings sind diese Zahlensysteme wegen des eingeschränkten bzw. fehlenden Transferprinzips bei Weitem nicht so leistungsfähig. Die Omegazahlen bilden zudem nur einen partiell geordneten Ring.

Beginnen wir also mit den ontologischen Fragen. Existieren Nichtstandardzahlen in der gleichen Weise wie Standardzahlen oder stehen sie auf einer niedrigeren ontologischen Stufe? Existieren sie überhaupt oder sind sie sogar widersprüchliche Begriffe? Es ist klar, dass ontologische Fragen in Abhängigkeit von philosophischen Grundüberzeugungen zu diskutieren sind. Widersprüchlichkeit ist allerdings für keine mathematikphilosophische Position mit Existenz verträglich. Wir stellen daher als erstes die Frage:

- Sind Nichtstandardzahlen widersprüchlich?

Und dann:

- Existieren Nichtstandardzahlen?

Hierbei beleuchten wir realistische, formalistische und konstruktivistische Positionen, wie sie in Abschnitt 5.1 beschrieben worden sind.

5.8.1. Sind Nichtstandardzahlen widersprüchlich?

Infinitesimale Größen

Größen sind die historischen Vorläufer der reellen Zahlen und unendliche und infinitesimale Größen die historischen Vorläufer der unendlich großen bzw. unendlich kleinen Nichtstandardzahlen. Das unendlich Kleine bedingt dabei (durch Kehrwertbildung) das unendlich Große.

So nützlich unendlich kleine Größen in der damals neuen Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz waren, so umstritten waren sie auch. Von Anfang an hatten sie mit dem Vorwurf zu kämpfen, ein Ding der Unmöglichkeit zu sein. Eine Größe, die zu Beginn einer Rechnung ungleich Null ist und dann im Verlauf der Rechnung auf wundersame Weise zu Null wird, musste eine Provokation darstellen. George Berkeley legte hier genüsslich den Finger in die Wunde, wenn er die verschwindenden Inkremente „o“ in Newtons Fluxionsrechnung kritisierte:

> I admit that Signs may be made to denote either any thing or nothing: And consequently that in the original Notation $x+o$, o might have signified either an Increment or nothing. But then which of these soever you make it signify, you must argue consistently with such its Signification, and not proceed upon a double Meaning: Which to do were a manifest Sophism (Berkeley 1734, S. 24).

Berühmt geworden ist Berkeleys Verspottung der verschwindenden Inkremente als „Geister verstorbener Größen" („Ghosts of departed Quantities", Berkeley 1734, S. 59).

Auch Cantor hat heftig gegen die unendlich kleinen Größen polemisiert, zum Beispiel in seinem Brief an Giulio Vivanti vom 13. Dezember 1893, wo er sie den „infinitären Cholera-Bacillus" der Mathematik nennt und „papierne Größen", die „gar keine andere Existenz haben als auf dem Papiere ihrer Entdecker und Anhänger" (Meschkowski 1965, S. 505f). Cantor war davon überzeugt, die Unmöglichkeit infinitesimaler Größen gezeigt zu haben. Allerdings beruhten seine Unmöglichkeitsbeweise auf unvereinbaren, aber nicht zwingenden Annahmen über die Größensysteme. Eine detaillierte Auseinandersetzung mit den Argumenten Cantors findet man in Ehrlich 2006.

Die moderne Antwort

In der heutigen Nichtstandardanalysis sind die scheinbar widersprüchlichen Attribute von Infinitesimalien auf befriedigende Weise in Einklang gebracht. Infinitesimalien sind nicht erst ungleich Null und dann gleich Null, sie sind nicht variable oder verschwindende Größen, sondern feste Zahlen, wie Standardzahlen auch. *Infinitesimal* bedeutet *betragsmäßig kleiner als jede positive Standardzahl.* Damit ist Null die einzige infinitesimale Standardzahl. Infinitesimalien sind (wie schon bei Leibniz) beliebig weiter teilbar. Es gibt keine kleinste positive Infinitesimalzahl.

Die „verallgemeinerte Gleichheit" ist die Äquivalenzrelation „$\approx$". Das wundersame „Zu-Null-werden" eines infinitesimalen Unterschieds am Ende der Berechnung eines Differentialquotienten ist schlicht das Übergehen zum Standardteil, denn die Ableitung ist als Standardteil des Differentialquotienten definiert (analog für das Integral und andere Begriffe der Analysis).

Ein großes Verdienst der Nichtstandardanalysis ist es, mit dem Transferprinzip präzise erklären zu können, welche Aussagen über Standardzahlen sich auf den erweiterten Zahlenbereich übertragen lassen. Im Robinson-Ansatz sind das die Aussagen erster Stufe. In den Nichtstandardmengenlehren entspricht dem Transferprinzip das Transferaxiom, das für interne Aussagen gilt.

So wie Konsistenz heute in der Regel verstanden wird, nämlich als relative Konsistenz über ZFC, kann man also feststellen: Infinitesimalien (und allgemeiner die Nichtstandardzahlen) sind nicht widersprüchlich.

5.8.2. Existieren Nichtstandardzahlen?

Die realistische Position

Aus ZFC folgt die Existenz von elementaren nichtarchimedischen Körpererweiterungen von $\mathbb{R}$ und, allgemeiner, die Existenz von Nichtstandardeinbettungen, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben. Für einen ZFC-Realisten steht also die Existenz von Nichtstandardzahlen außer Frage. Für Multiversum-Realisten (siehe Abschnitt 5.4.9) sind darüber hinaus auch die Universen der verschiedenen Nichtstandardmengenlehren real, in denen Nichtstandardzahlen innerhalb der reellen Zahlen existieren können.

Reelle Nichtstandardzahlen existieren in verschiedenen konservativen Nichtstandarderweiterungen von ZFC (zum Beispiel IST). Sie können daher auch von ZFC-Realisten (gemäß der internen Perspektive) als real angesehen oder (gemäß der Standardperspektive) dem realen Universum als Fiktionen hinzugedacht werden. Darüber hinaus können interpretierbare Nichtstandarderweiterungen von ZFC (zum Beispiel BST oder HST) als „real“ (im Sinne der Interpretation) aufgefasst werden (siehe Abschnitt 5.4.8).

Ähnliche Aussagen gelten für ZF-Realisten und Vertreter des empirischen Realismus, die die in ZF definierbaren Standardmodelle von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ für real halten: Da es konservative Nichtstandarderweiterungen von ZF gibt (siehe Hinweis am Ende von Abschnitt 5.4.10), können Nichtstandardzahlen (gemäß der internen Perspektive) als real angesehen oder (gemäß der Standardperspektive) dem realen Universum als Fiktionen hinzugedacht werden.

Die konstruktivistische Position

Für Konstruktivisten bedeutet Existenz Konstruierbarkeit (in endlich vielen Schritten über den natürlichen Zahlen). Unendliche Mengen, Funktionen, Folgen haben keine *Objekt*-Existenz, sondern existieren nur im Sinne eines explizit angebbaren Konstruktionsverfahrens, das eine *potentiell* unendliche Konstruktion erlaubt. Bedürftig und Murawski bezeichnen dies als „eingeschränkte Existenz“ (Bedürftig und Murawski 2019, S. 179).

Nach Erret Bishop (vgl. Bishop und Bridges 1985, S. 67) besteht die Definition einer *Menge* A darin anzugeben, was zu tun ist, um ein Element von A zu konstruieren, und was zu tun ist, um zu zeigen, dass zwei Elemente von A *gleich* sind (im Sinne einer Äquivalenzrelation $=_A$). Beispiel: Um ein Element der Menge $\mathbb{Q}$ zu konstruieren, bildet man ein Paar (p, q) mit $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, und definiert

$$(p, q) =_{\mathbb{Q}} (p', q') \quad :\Leftrightarrow \quad pq' =_{\mathbb{Z}} p'q.$$

Zuvor kann man analog vorgehen, um $\mathbb{Z}$ auf der Basis von $\mathbb{N}$ zu definieren. Wenn der Kontext klar ist, wird der untere Index am Gleichheitszeichen zur Vereinfachung weggelassen.

Die Definition einer *Operation* f von A nach B (für zwei Mengen A, B) besteht darin anzugeben, was zu tun ist, um zu einer gegebenen Konstruktion eines $a \in A$ eine Konstruktion von $f(a) \in B$ zu erhalten. Wenn dabei aus $a = a'$ stets $f(a) = f(a')$ folgt, heißt f eine *Funktion* oder *Abbildung*. Ein *Folge* ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$.

Bevor wir zur Frage der Existenz von Nichtstandardzahlen kommen, ist es hilfreich, sich zu vergegenwärtigen, in welchem Sinne die reellen Zahlen oder die Menge $\mathbb{R}$ in der konstruktiven Analysis existieren. Ich beziehe mich hier wieder auf Bishop und Bridges 1985, S. 18.

Eine Folge (x_n) rationaler Zahlen heißt *regulär*, wenn gilt:

$$|x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1} \quad (m, n \in \mathbb{N}). \tag{5.44}$$

Eine *reelle Zahl* ist eine reguläre Folge rationaler Zahlen. Zwei reelle Zahlen $x \equiv (x_n)$ und $y \equiv (y_n)$ sind *gleich*, wenn gilt:

$$|x_n - y_n| \leq 2n^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{5.45}$$

Die so definierte „Gleichheit“ zwischen reellen Zahlen ist, wie man leicht nachrechnen kann, eine *Äquivalenzrelation.*

Betrachten wir die einfache Aussage $\sqrt{2} \in [1,2]$. Nach realistischer oder formalistischer Auffassung ist dies eine Aussage über zwei in Beziehung stehende (reale oder fiktive) Objekte: $\sqrt{2}$ und $[1,2]$. Beide sind Entitäten in einem (realen oder fiktiven) Universum (zum Beispiel einem ZFC-Universum). Nicht so im Konstruktivismus. Dort haben unendliche Mengen, wie wir oben festgestellt haben, keine Objekt-Existenz, sondern nur eine eingeschränkte Existenz. Die Symbole $\sqrt{2}$ und $[1,2]$ sind für sich genommen ohne Bedeutung. Eine Bedeutung ergibt sich erst in ihrer Verwendung innerhalb einer Aussage wie zum Beispiel $\sqrt{2} \in [1,2]$. Dies ist aber lediglich eine abkürzende Schreibweise für eine Aussage über natürliche Zahlen.

Existenzformulierungen in Definitionen oder Sätzen müssen im Konstruktivismus immer die Konstruktion dessen, was existieren soll, einbeziehen. Die Stetigkeitsdefinition sieht dann zum Beispiel so aus (vgl. Bishop und Bridges 1985, S. 38):

Definition 32. *Eine auf einem kompakten Intervall I definierte reellwertige Funktion f ist* stetig *auf I, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\omega(\varepsilon)$ existiert, sodass für alle $x, y \in I$ mit $|x-y| \leq \omega(\varepsilon)$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Die Operation $\varepsilon \mapsto \omega(\varepsilon)$ heißt der* Modulus der Stetigkeit *für f.*

Im Unterschied zur klassischen ε-δ-Definition muss also hier die Konstruktion eines geeigneten δ zu einem vorgegebenen ε explizit durch eine Operation (den Modulus) sichergestellt sein. Dies entspricht dem generellen Prinzip der konstruktivistischen Mathematik: Existenz bedeutet Konstruierbarkeit. Auf Basis dieser Definition kann zum Beispiel konstruktivistisch gezeigt werden, dass die Funktion $x \mapsto x^2$ auf $[0,1]$ stetig ist. Andere Ergebnisse der klassischen Analysis, wie zum Beispiel der Nullstellensatz für stetige Funktionen mit Vorzeichenwechsel, gelten konstruktivistisch nicht, da eine Nullstelle im Allgemeinen nicht konstruiert werden kann. Stattdessen kann nur gezeigt werden, dass eine reelle Zahl existiert (also konstruiert werden kann), deren Funktionswert betraglich beliebig klein ist (vgl. Bishop und Bridges 1985, S. 40).

Für Bishop liegt die Bedeutung einer Aussage in ihrem rechnerischen Inhalt, und eine solche Bedeutung sieht er in der formalistisch geprägten Mathematik vernachlässigt. Der Nichtstandardanalysis wirft er diesbezüglich sogar eine „Entkernung von Bedeutung“ („debasement of meaning“) vor. In *Crisis in Contemporary Mathematics* schreibt er:

> My interest in non-standard analysis is that attempts are being made to introduce it into calculus courses. It is difficult to believe that debasement of meaning could be carried so far (Bishop 1975, S. 513f).

Entsprechend kritisch urteilt Bishop daher auch in seiner Rezension über Keislers Lehrbuch zur Nichtstandardanalysis, *Elementary Calculus*:

> Although it seems to be futile, I always tell my calculus students that mathematics is not esoteric: It is common sense. (Even the notorious ε, δ definition of limit is common sense, and moreover is central to the important practical problems of approximation and estimation.) They do not believe me. In fact the idea makes them uncomfortable because it contradicts their previous experience. Now we have a calculus text that can be used to confirm their experience of mathematics as an esoteric and meaningless exercise in technique (Bishop 1977, S. 208).

Sanders setzt sich mit den Vorwürfen von Bishop und Connes auseinander, dass der Nichtstandardanalysis aufgrund ihrer Nichtkonstruktivität der rechnerische Inhalt (*computational content*) fehle.[45] In seinem Artikel *The unreasonable effectiveness of Nonstandard Analysis* stellt Sanders eine Schablone (*template*) bereit, $\mathfrak{CI}$ genannt, mit der man einen reinen Nichtstandardsatz und seinen Beweis in eine konstruktive Version umwandeln kann. Mit „rein" ist hier gemeint, dass für Begriffe Stetigkeit, Ableitung, Integral etc. die Nichtstandarddefinitionen verwendet werden. Genauer gesagt, werden Sätze und Beweise aus den Systemen P oder H umgewandelt, die konservative Erweiterungen der Peano- bzw. der Heyting-Arithmetik sind. Die Erweiterung ist jeweils ein Fragment der Internen Mengenlehre von Nelson.

Sanders beschreibt die Wirkungsweise seiner Schablone so:

> Intuitively speaking, the 'effective version' of a mathematical theorem is obtained by replacing all its existential quantifiers by functionals providing the objects claimed to exist. In other words, the object claimed to exist by the theorem at hand can be computed (in a specific technical sense) from the other data present in the theorem (Sanders 2020, S. 462).

„computed (in a specific technical sense)" bedeutet hier eine Berechnung über primitiv rekursive Funktionen im Sinne von Gödels System T (siehe Gödel 1958).

Die Schablone $\mathfrak{CI}$ ist laut Sanders anwendbar auf die meisten Sätze der „gewöhnlichen" (also nicht mengentheoretischen) Mathematik, wie sie in der Reversen Mathematik auf Basis der „Big Five" verstanden wird (siehe Abschnitt 5.1.7). Im Detail sind die Untersuchungen technisch anspruchsvoll. Die Ergebnisse zeigen aber, dass die Aussagen der Nichtstandardanalysis sehr wohl einen rechnerischen Inhalt (und damit eine „Bedeutung" im Bishop'schen Sinne) haben.

Eine Objekt-Existenz, vergleichbar der Existenz natürlicher Zahlen, kommt im Konstruktivismus weder den reellen Zahlen, noch den Nichtstandardzahlen zu.

Weitere Ausführungen zu konstruktivistischer Nichtstandardanalysis findet man zum Beispiel in Palmgren 1997 und Palmgren 1998 (Nichtstandardmodelle werden in Martin-Löfs konstruktiver Typentheorie konstruiert) sowie Berg, Briseid und Safarik 2012 (eine Version von Nelsons Interner Mengenlehre, die mit Bishops konstruktiver Analysis kompatibel ist). Eine an die konstruktive Analysis von Weyl und Lorenzen anknüpfende

45. Connes versteht „konstruktiv" dabei klassisch aus der Sicht von ZF (siehe Abschnitt 5.9.1), Bishop dagegen aus der Sicht des konstruktivistischen Grundlagenprogramms. Beide Aspekte werden von Sanders behandelt.

konstruktive Nichtstandardanalysis hatte bereits Walter Schnitzspan in seiner Dissertation entwickelt (Schnitzspan 1976).

Die formalistische Position

Die formalistische Position ist in Bezug auf die Ontologie die am wenigsten problematische, da mathematische Objekte nur eine formale Existenz im Rahmen einer als konsistent angenommenen Theorie beanspruchen. Üblicherweise nimmt man in der Mathematik heute an, dass ZFC konsistent ist. Da das Auswahlaxiom unabhängig von ZF ist, ist es in Bezug auf die Konsistenzfrage unproblematisch. Damit haben hyperreelle Zahlen aus formalistischer Sicht das gleiche Existenzrecht wie alles, dessen Existenz aus ZF ableitbar ist. Als konservative Erweiterungen von ZFC, genießen IST, BST, HST das gleiche Vertrauen wie ZFC.

Sein oder Nichtsein, ist das hier die Frage?

Wie relevant sind ontologische Fragen für die Mathematik? Ist es wichtig, dass mathematische Objekte real existieren?

Die moderne, formalistisch geprägte Mathematik gibt keine ontologischen Antworten. Behrends weist in den Vorbemerkungen seines Analysis-Lehrbuchs darauf hin,

> ...dass Mathematik nicht untersucht, was ist, sondern was sich folgern lässt (Behrends 2015, S. 5).

Aus einer solchen deduktivistischen Position heraus gibt es keine ontologischen Einwände gegen Nichtstandardzahlen, denn ihre Existenz kann im Rahmen konservativer Erweiterungen weithin akzeptierter Theorien wie ZF oder ZFC konsistent angenommen werden.

Erstaunlich modern klingt die Feststellung, mit der Leibniz bereits 1676 den Gebrauch unendlicher und infinitesimaler Größen in seinem Calculus verteidigt hat (und auf die wir uns bereits in Abschnitt 5.7.1 bezogen haben):

> Und es kommt nicht darauf an, ob es derartige Quantitäten in der Natur der Dinge gibt, denn es reicht aus, sie durch eine Fiktion einzuführen, da sie Abkürzungen des Redens und Denkens und daher des Entdeckens ebenso wie des Beweisens liefern, so dass es nicht immer notwendig ist, Einbeschriebenes oder Umbeschriebenes zu benutzen und ad absurdum zu führen, und zu zeigen, dass der Fehler kleiner als ein beliebiger zuweisbarer ist (Leibniz 2016, S. 129).

Leibniz hat Infinitesimalien in dieser Hinsicht oft mit imaginären Wurzeln verglichen (zum Beispiel in Leibniz 1702a). An anderer Stelle (Leibniz 1702b) nennt er sie *wohlbegründete Fiktionen* („des fiction bien fondée“).

Vertreter eines ZF-Realismus oder eines empirisch gebundenen Realismus (siehe Abschnitt 5.1.4) könnten zwar die reale Existenz von Nichtstandardzahlen leugnen, nicht aber die Möglichkeit, sie als nützliche Fiktonen einzuführen (im Rahmen konservativer Erweiterungen). Mehr verlangt die moderne Mathematik nicht. Und mehr hat auch Leibniz nicht verlangt.

5.8.3. Zusammenfassung der ontologischen Antworten

Nichtstandardzahlen sind Elemente konservativer Erweiterungen von ZF und ZFC. In diesem Sinne sind sie nicht widersprüchlich. Sie existieren für ZFC- oder Multiversum-Realisten als hyperreelle Zahlen bzw. als reelle Nichtstandardzahlen. Auch im ZF- oder im empirisch gebundenen Realismus kann ihre Existenz nicht ausgeschlossen werden. Mindestens können Nichtstandardzahlen als nützliche Fiktionen angenommen werden.

Für Konstruktivisten haben sowohl reelle Standardzahlen, als auch Nichtstandardzahlen nur eine eingeschränkte Existenz und keine Objekt-Existenz, die der Existenz der natürlichen Zahlen vergleichbar wäre.

Für Formalisten stellt sich die Frage nach metaphysischer Existenz nicht. Nichtstandardzahlen existieren (wie auch die reellen Zahlen) im Rahmen geeigneter formaler Theorien, die als konsistent angenommen werden (und deren relative Konsistenz über ZF gesichert ist).

5.9. Epistemologische Fragen

Was können wir über Nichtstandardzahlen oder Nichtstandardobjekte wissen? Können wir, ihre Existenz vorausgesetzt, überhaupt etwas über sie wissen bzw. irgendetwas Konkretes über sie aussagen? Und wenn ja: Ist unser Wissen über Nichtstandardobjekte genauso sicher (bzw. genauso unsicher) wie unser Wissen über Standardobjekte? Wir diskutieren dazu die folgenden Fragen:

- Wie bestimmt ist Nichtstandard?
- Wie sicher ist Nichtstandard?

5.9.1. Wie bestimmt ist Nichtstandard?

Wichtige reelle Zahlen (etwa $\sqrt{2}, \pi, e$) sowie die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen sind für die meisten Mathematiker (für solche, die ZF oder ZFC als Grundlage akzeptieren) konkrete und definierte Gegenstände. Sie sind in der Sprache der Mengenlehre, also (prinzipiell) durch $\in$-Ausdrücke auf der Basis der ZF-Axiome *definierbar*.[46] Genauer:

- Es gibt $\in$-Ausdrücke, die die Symbole $\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}}$ auf der Basis von ZF definieren, dergestalt, dass aus ZF folgt: $(\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}})$ ist ein vollständig angeordneter Körper.
- Aus ZF folgt außerdem: Alle vollständig angeordneten Körper sind in eindeutiger Weise isomorph zu $(\mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}})$.
- Es gibt $\in$-Ausdrücke, die konkrete irrationale Zahlen definieren.

46. Zum Begriff der *Definition* von Konstanten, Funktions- und Relationssymbolen in formalen Sprachen siehe zum Beispiel Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 135.

Entsprechende Aussagen gelten für $^*\mathbb{R}$ bzw. Nichtstandardzahlen in $^*\mathbb{R}$ nicht. Die Konstruktion der hyperreellen Zahlen (und allgemeiner der zugehörigen Nichtstandardwelt) verwendet einen δ-unvollständigen Ultrafilter $\mathcal{U}$ über einer geeigneten Indexmenge J (siehe Abschnitt 2.3.2). Die Existenz eines solchen Ultrafilters (bei festgelegtem J) folgt zwar aus ZFC (wobei das Auswahlaxiom wesentlich ist), dieser ist aber keineswegs eindeutig bestimmt. Wegen der Nichtkonstruktivität des Existenzbeweises ist es auch nicht möglich, willkürlich einen bestimmten Ultrafilter festzulegen. Daher ist $^*\mathbb{R}$ nicht in der Weise bestimmt, wie es $\mathbb{R}$ ist.

Die Zahlbereichserweiterung $^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ ist nicht kanonisch

Die Zahlbereichserweiterungen der Kette $\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$ sind jeweils motiviert durch gewisse Abgeschlossenheitsforderungen, entweder algebraischer Art oder, im Fall $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$, gegenüber Grenzwertbildung. Die Erweiterungen sind in dem Sinne *kanonisch*, als dass sie (bis auf Isomorphie) die eindeutige oder zumindest die sparsamste Antwort auf die motivierende Problemstellung darstellen. $\mathbb{Z}$ ist der kleinste Ring der $\mathbb{N}$ umfasst, $\mathbb{Q}$ der kleinste Körper der $\mathbb{Z}$ umfasst, $\mathbb{R}$ *die* Erweitertung von $\mathbb{Q}$ zu einem vollständig angeordneten Körper und $\mathbb{C}$ *der* algebraische Abschluss von $\mathbb{R}$.

Im Gegensatz dazu ist der Übergang von $\mathbb{R}$ zu einem nichtarchimedischen, elementar äquivalenten Erweiterungskörper $^*\mathbb{R}$ *nicht* kanonisch. Es gibt unendlich viele solche Erweiterungen mit wesentlich verschiedenen Eigenschaften, zum Beispiel beliebig großer Kardinalität bzw. Saturierung. Daher sind unterschiedliche Konstruktionen von $^*\mathbb{R}$ im Allgemeinen nicht isomorph. Bell und Machover konstatieren:

> We therefore regard nonstandard analysis as an important tool of clarification, exposition and research – often beautiful, sometimes very powerful, but never exclusive (Bell und Machover 1977, S. 573).

Gibt es definierbare Nichtstandardzahlen?

In der Nichtstandardanalysis wird keine einzige hyperreelle Nichtstandardzahl konkret definiert (also durch die Angabe eines definierenden Ausdrucks eindeutig bestimmt). Bezogen auf eine Konstruktion der hyperreellen Zahlen mittels Ultrafilter kann man zwar Repräsentantenfolgen für gewisse Nichtstandardzahlen konkret angeben, zum Beispiel die Folge $(1, 2, 3, \dots)$ für „die" hypernatürliche Zahl Ω, aber welche Zahl das ist (etwa, ob sie gerade oder ungerade ist), hängt vom Ultrafilter ab, und ein konkreter Ultrafilter kann nicht angegeben werden. Streng genommen müsste man bei solchen Bezeichnungen hyperreeller Zahlen den Utrafilter mitführen und zum Beispiel $(1, 2, 3, \dots)_{\mathcal{U}}$ schreiben. Diese Zahl ist ebenso unbestimmt, wie es der Ultrafilter $\mathcal{U}$ ist.

Sind also überhaupt konkrete Nichtstandardzahlen definierbar? Alain Connes argumentiert folgendermaßen: Jede gegebene Nichtstandardzahl produziert in kanonischer Weise eine nicht Lebesgue-messbare Teilmenge des reellen Intervalls $[0, 1]$. Aus Arbeiten von Cohen und Solovay folgt aber, dass es unmöglich ist, eine solche Teilmenge explizit anzugeben (Connes 2003, S. 14).

> So, what this says is that for instance in this example, nobody will actually be able to name a non standard number. A nonstandard number is some sort of chimera which is impossible to grasp and certainly not a concrete object (ibid).

Connes bezieht sich hier auf eine Arbeit von Solovay, die mittels Cohens Forcing-Methode zeigt, dass es ein ZF-Modell gibt, in dem jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist (siehe Solovay 1970).[47] In diesem Modell gilt nicht das volle Auswahlaxiom AC, aber die schwächere Version DC (Axiom der *abhängigen Auswahl*, engl. *dependent choice*). Das bedeutet: ZF und DC reichen zusammen nicht aus, um nicht Lebesgue-messbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu konstruieren.[48]

Auf der anderen Seite gibt es sehr wohl (relativ) konsistente Erweiterungen von ZF, in denen konkrete Nichtstandardzahlen und nicht Lebesgue-messbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ definierbar sind. So folgen aus ZF plus Gödels Konstruktibilitätsaxiom $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ das Auswahlaxiom und die Existenz einer explizit angebbaren Wohlordnung aller Mengen (siehe Abschnitt 5.4.3). Damit ist sowohl eine bestimmte Erweiterung $^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ definierbar (zum Beispiel die mit dem gemäß Wohlordnung ersten Ultrafilter konstruierte), als auch eine bestimmte Nichtstandardzahl (zum Beispiel die gemäß Wohlordnung erste) (vgl. Pruss 2021, 3.1.).

In Nelsons Interner Mengenlehre und in verwandten axiomatischen Zugängen (siehe Abschnitte 2.4 und 2.5) entfällt zwar die Notwendigkeit einer Ultrafilterkonstruktion von $^*\mathbb{R}$, denn die Nichtstandardzahlen sind in der definierbaren Menge $\mathbb{R}$ zu finden, eine konkrete Nichtstandardzahl ist aber auch dort nicht zu fassen. Das Idealisierungsaxiom sorgt zwar für die Existenz von Nichtstandardobjekten, gibt aber keine Möglichkeit, ein bestimmtes herauszugreifen. Alle durch interne Prädikate definierbaren Objekte sind wegen des Transferaxioms standard. Externe Prädikate sind nur in Verbindung mit dem Standardisierungsaxiom erlaubt, das ebenfalls nur Standardobjekte liefert.

Definierbare Modelle

Die Unbestimmtheit der Körpererweiterung $^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ im Allgemeinen schließt nicht aus, dass Modelle, die gewisse Zusatzbedingungen erfüllen, eindeutig bestimmt sein können (bis auf Isomorphie). Ich zitiere hierzu ein Ergebnis von Kanovei und Shelah (vgl. Kanovei und Shelah 2004, Theorem 1):

Satz 70. *Es gibt eine definierbare, abzählbar saturierte Erweiterung $^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$, die elementar ist (im Sinne der Sprache, die für jede Relation über $\mathbb{R}$ ein Symbol enthält).*

47. Genauer besagt das Ergebnis von Solovay: Wenn es ein Modell von ZFC + „Es existieren stark unerreichbare Kardinalzahlen" gibt, dann gibt es ein Modell von ZF, in dem jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist.

48. Eine detaillierte, kritische Auseinandersetzung mit Connes' Argument findet man in Kanovei, Katz und Mormann 2013. Unter anderem weisen die Autoren auf eine Zirkularität hin, die darin besteht, dass die laut Connes kanonisch konstruierte nicht messbare Menge dieselbe Information wie ein Ultrafilter trägt und andererseits die Konstruktion das Transferprinzip benutzt, welches auf dem Gebrauch von Ultrafiltern beruht.

Und allgemeiner (vgl. Kanovei und Shelah 2004, Abschnitt 4, Punkte 1 und 2):

Satz 71. *Zu jeder unendlichen Kardinalzahl κ gibt es eine definierbare, κ-saturierte elementare Erweiterung $^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ mit κ als einzigem Parameter der Definition.*[49] *Es gibt* spezielle *elementare Erweiterungen von $\mathbb{R}$ beliebig großer Kardinalität. Spezielle Modelle gleicher Kardinalität sind isomorph.*

Satz 71 macht eine Aussage über sogenannte *spezielle Modelle*. Ein Modell $\mathfrak{A}$ mit Träger A heißt *speziell*, wenn es die Vereinigung einer elementaren Kette von Modellen $\mathfrak{A}_\beta$ ist mit Kardinalzahlen $\beta < \mathrm{card}(A)$, wobei die $\mathfrak{A}_\beta$ jeweils β^+-saturiert sind (β^+ bezeichnet die nächstgrößere Kardinalzahl nach β). Spezielle Modelle gleicher Kardinalität sind isomorph (vgl. Chang und Keisler 1990, S. 292–295).

Wie wichtig ist Bestimmtheit?

Wie oben erläutert, ist die Körpererweiterung $^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ nicht kanonisch. Dies muss jedoch nicht als Nachteil verstanden werden. Im Gegenteil: Man kann für unterschiedliche Zwecke jeweils eine passende Körpererweiterung wählen.[50]

Um die Nichtstandardzahlen in der Analysis nutzbringend einzusetzen, ist es nicht notwendig, ein konkretes, definierbares Modell für $^*\mathbb{R}$ zu haben. Es reicht, um die Existenz geeigneter Modelle zu wissen. Für die elementare Analysis ist jede beliebige Ultrafilterkonstruktion geeignet, für fortgeschrittene Anwendungen, ist eine ausreichend saturierte Nichtstandardeinbettung erforderlich.

Es ist ebenfalls nicht notwendig, konkrete Nichtstandardzahlen zu definieren, denn Nichtstandardzahlen werden stets in einem qualitativen Sinne gebraucht. Es kommt nie darauf an, eine ganz bestimmte Nichtstandardzahl zu verwenden. Beim Beweis des Zwischenwertsatzes etwa konnte eine beliebige infinitesimale Zahl zur Zerlegung des Intervalls genommen werden. Und die Nichtstandarddefinitionen von Stetigkeit, Ableitung, Integral sind von der Art „… wenn für alle $h \approx 0$ gilt …“ Selbst in einer Mengenlehre, in der konkrete Nichtstandardzahlen definierbar sind (zum Beispiel in ZF + $(\mathbf{V} = \mathbf{L})$), könnte man getrost auf die Verwendung explizit definierter Nichtstandardzahlen verzichten, da sie für die Analysis keinen Mehrwert haben.

Machover gesteht zu, dass die Nichtstandarddefinition, zum Beispiel von Stetigkeit, intuitiver und einfacher anwendbar sei als die klassische ε-δ-Definition und dass es daher verführerisch sei, in Analysiskursen nur die Nichtstandarddefinition zu verwenden. Diese könne aber die Standarddefinition nicht ersetzen, da Invarianz von der gewählten

49. Definierbarkeit heißt hier *Ordinalzahl-Definierbarkeit* (siehe Jech 2003, S. 194). Eine Menge X heißt *ordinalzahl-definierbar* (engl. *ordinal-definable*), wenn es einen $\in$-Ausdruck φ und Ordinalzahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ gibt mit $X = \{u \mid \varphi(u, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\}$. Ordinalzahl-Definierbarkeit ist in der Objektsprache der Mengenlehre ausdrückbar, obwohl dort nicht über $\in$-Ausdrücke quantifiziert werden kann. Es lässt sich nämlich zeigen, dass die ordinalzahl-definierbaren Mengen gerade die Elemente der Klasse $OD = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} \mathrm{cl}\{V_\beta \mid \beta < \alpha\}$ sind, wobei cl den *Gödel-Abschluss* bezeichnet, also den Abschluss unter den *Gödel-Operationen* $G_1, \dots G_{10}$ (siehe Jech 2003, S. 177f).

50. In Kanovei, Katz und Mormann 2013 wird diesbezüglich eine Parallele zur Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu algebraischen Zahlkörpern gezogen. Diese ist ebenfalls nicht kanonisch. Für unterschiedliche Zwecke können jeweils andere Erweiterungen sinnvoll sein.

Erweiterung gezeigt werden müsste. Dies gehe aber auf einfache Weise nur, indem man die Äquivalenz zur Standarddefinition zeige (Machover 1993, S. 208).

Kanovei, Katz und Mormann weisen jedoch zu Recht daraufhin, dass es bei einem didaktisch motivierten Einsatz von Nichtstandardanalysis nicht darum geht, Standard durch Nichtstandard zu ersetzen, sondern vielmehr darum, den Einstieg in die Begriffswelt der Analysis durch die intuitiveren Nichtstandarddefinitionen zu erleichtern. Es geht also nicht um ein Entweder-Oder, sondern um die zeitliche Reihenfolge (Kanovei, Katz und Mormann 2013, S. 32).

Außerdem steht bei einer Einführung in die Analysis das Arbeiten auf einer axiomatischen Grundlage im Vordergrund. Fragen der Konstruktion von Modellen oder der Kategorizität des Axiomensystems sind methodisch und didaktisch zunächst von untergeordneter Bedeutung.

5.9.2. Wie sicher ist Nichtstandard?

Die kurze Antwort lautet: relativ sicher (also so sicher wie Standard). In Abschnitt 2.4 wurde dargelegt, dass IST konservativ über ZFC ist: Jeder interne Satz, der in IST beweisbar ist, ist auch in ZFC beweisbar. Damit ist IST insbesondere konsistent relativ zu ZFC: Wenn ZFC widerspruchsfrei ist (wovon allgemein ausgegangen wird), dann auch IST. Da das Auswahlaxiom unabhängig von ZF ist, ist IST damit auch relativ konsistent zu ZF.

Darüber hinaus gilt nach Hrbaček und Katz 2021: Die ZF-Erweiterung SPOT ist konservativ über ZF, und dies ist in ZF beweisbar. Die Konservativität ist (bei geeigneter Kodierung) als Π^0_2-Satz in WKL_0 formulierbar und daher sogar finitistisch (das heißt in PRA) beweisbar (vgl. Definition 24 Abschnitt 5.1.7).

5.9.3. Zusammenfassung der epistemologischen Antworten

- Nichtstandardzahlen sind im Vergleich zu konkret definierten Standardzahlen nur qualitativ bestimmt (zum Beispiel durch $x \approx 0$ oder $n \gg 1$).
- Eine weitergehende Bestimmtheit ist nicht wichtig für die Nützlichkeit von Nichtstandardzahlen.
- Nichtstandard ist genauso sicher wie Standard.

5.10. Fragen zur Anwendbarkeit

Bei den reellen Zahlen ist der Name Programm. Sie sind angetreten, um zahlenmäßig zu erfassen, was augenscheinlich real ist: die kontinuierlichen Phänomene in Raum und Zeit. Demgegenüber scheinen die hyperreellen Zahlen dem Namen nach über das Ziel hinaus zu schießen; sie scheinen mehr zu sein, als man zur Beschreibung der realen Welt braucht. Wir fragen daher:

- Welche Bedeutung haben Nichtstandardzahlen für die reale Welt?

Und dann:

- Ist Nichtstandardanalysis auf die reale Welt anwendbar?

Bei der Behandlung dieser Fragen interessiert uns insbesondere, ob es in der Bedeutung für die reale Welt einen Unterschied zwischen Standardzahlen und Nichtstandardzahlen gibt bzw. ob es hinsichtlich der Anwendbarkeit auf die reale Welt einen Unterschied zwischen Standardanalysis und Nichtstandardanalysis gibt. Unter der „realen Welt“ verstehen wir hier zusammenfassend und ganz allgemein den Untersuchungsgegenstand der Erfahrungswissenschaften.

5.10.1. Welche Bedeutung haben Nichtstandardzahlen für die reale Welt?

Nichtstandardzahlen können offenbar nicht das Ergebnis einer physikalischen Messung sein. Das Gleiche gilt für irrationale Standardzahlen. Physikalische Messgeräte decken immer nur einen konkret begrenzten Messbereich ab und erlauben nur eine konkret begrenzte Messgenauigkeit. Bei digitalen Messgeräten hängt beides von der Anzahl der verfügbaren Anzeigestellen ab, bei analogen Messgeräten von der Ausdehnung des Anzeigefeldes und der Feinheit der Ableseskala. Eine physikalische Messung ist letztlich nichts anderes als eine Zählung von Einheiten.

Besteht also überhaupt ein Unterschied zwischen irrationalen Zahlen und Nichtstandardzahlen hinsichtlich ihrer Bedeutung für die reale Welt? Stellen wir uns eine Apparatur vor, mit der wir eine physikalische Größe, zum Beispiel eine angelegte Spannung stufenlos verändern können. Die Spannung werde allmählich von 0 Volt (zum Zeitpunkt t_0) auf 1 Volt (zum Zeitpunkt t_1) erhöht. Vergleichen wir folgende Aussagen:

(A1) Es gibt einen Zeitpunkt zwischen t_0 und t_1, an dem die angelegte Spannung $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ Volt betrug.

(A2) Es gibt einen Zeitpunkt zwischen t_0 und t_1, an dem die angelegte Spannung infinitesimal war.

Welche dieser Aussagen ist physikalisch sinnvoll? Geht man davon aus, dass physikalische Größen (eventuell auch Raum und Zeit) gequantelt sind, kann man beide Aussagen infrage stellen, denn irrationale oder infinitesimale Spannungen haben dann keine physikalische Bedeutung. In einer klassischen physikalischen Beschreibung sind beide Aussagen sinnvoll, bezogen auf ein *mathematisches Modell*, das irrationale und infinitesimale Zahlen enthält.

Die Analyse in den vorangegangenen Abschnitten (speziell 5.3 bis 5.6 sowie 5.8) hat gezeigt, dass eine Gleichsetzung des physikalischen oder des anschaulichen Kontinuums mit dem mathematischen Modell der reellen Zahlen nicht zulässig ist. Das Kontinuum kann archimedisch (durch $\mathbb{R}$) oder nichtarchimedisch (durch die verschiedenen ${}^*\mathbb{R}$) modelliert werden. Und selbst wenn wir uns für das Modell $\mathbb{R}$ entscheiden, sind Infinitesimalien nicht ausgeschlossen. Die reellen Zahlen sind ein Konstrukt der Mengenlehre und ob es unter ihnen unendlich große und unendlich kleine gibt, hängt davon ab, welche Annahmen wir über das Mengenuniversum machen, dem wir die reellen Zahlen entnehmen. Es ändert daher auch nichts, wenn wir die reellen Zahlen axiomatisch in einer Sprache der zweiten Stufe einführen, denn die Modelle dieser Theorie sind innerhalb einer transfiniten Mengenlehre definiert, in der Metazahlen und Objektzahlen zu unterscheiden sind (siehe Abschnitt 5.5.2). In keinem Fall kann die Existenz von Nichtstandardzahlen in $\mathbb{R}$ ausgeschlossen werden. Man kann lediglich die Entscheidung treffen, über Nichtstandardzahlen nicht sprechen zu wollen. Schon aus diesem Grund ist die Gleichsetzung der (positiven) reellen Zahlen mit realen Größenverhältnissen (ante rem) problematisch.

Die Bedeutung der reellen Zahlen in IST[51] oder der hyperreellen Zahlen in ZFC für die reale Welt liegt darin, dass sie Elemente einer mathematischen Struktur sind, mit der sich viele Phänomene der realen Welt gut modellieren lassen, das heißt, theoretische Vorhersagen werden durch reale Beobachtungen hinreichend gut bestätigt. Das gilt für die Nichtstandardanalysis mindestens in dem Maße, wie es für die Standardanalysis gilt, denn alle Ergebnisse der Standardanalysis lassen sich in der Nichtstandardanalysis reproduzieren. Darüber hinaus bietet Nichtstandardanalysis zusätzliche Möglichkeiten der Modellierung (siehe Abschnitt 5.10.3).

In der Praxis, also als tatsächliche Messergebnisse, kommen weder irrationale Standardzahlen noch Nichtstandardzahlen vor. In der Theorie (zum Beispiel in Formeln, die Phänomene der realen Welt modellieren sollen) können hingegen sowohl irrationale Standardzahlen (zum Beispiel $\pi, e, \sqrt{2}$), als auch Nichtstandardzahlen vorkommen. Die Besonderheit der Nichtstandardzahlen in diesem Zusammenhang ist, dass sie nur qualitativ bestimmt sind, zum Beispiel als $\xi \approx 0$ oder $\nu \gg 1$ (siehe hierzu etwa die Beispiele aus Abschnitt 5.10.3). Dass keine Nichtstandardzahl durch eine definierte Konstante bezeichnet werden kann, wurde bereits in Abschnitt 5.4.6 besprochen. Die Nichtstandardzahlen teilen dieses Schicksal mit fast allen Standardzahlen.

5.10.2. Ist Nichtstandardanalysis auf die reale Welt anwendbar?

Die Quintessenz aus dem letzten Abschnitt war, dass $\mathbb{R}$ oder $^*\mathbb{R}$ nur als mengentheoretisch konstruierte Modelle auf die reale Welt anwendbar sind und dass die Ableitbarkeit der Existenz von Nichtstandardzahlen in $\mathbb{R}$ von der vorausgesetzten Mengenlehre abhängt. In ZFC ist das Auswahlaxiom entscheidend für die Konstruktion von $^*\mathbb{R}$. In IST ist das Auswahlaxiom ebenfalls enthalten und selbst IST ohne Auswahlaxiom impliziert den Ultrafiltersatz (siehe Abschnitt 5.4.10). Vom Auswahlaxiom ist bekannt, dass es Konsequenzen hat, die der Anschauung zuwider laufen, zum Beispiel die Existenz nicht Lebesgue-messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}$ und das Banach-Tarski-Paradoxon. Man kann daher fragen, ob Modelle, deren Existenzbeweis vom Auswahlaxiom abhängt, überhaupt geeignet sind, um sie auf die reale Welt anzuwenden. Selbst in Büchern über Nichtstandardanalysis findet man diesbezüglich skeptische Aussagen, so zum Beispiel bei Väth:

> However, the use of nonstandard analysis has the drawback that even the simplest results make use of the axiom of choice ...

51. Die folgenden Überlegungen gelten analog für die in Abschnitt 2.5 besprochenen Nichtstandarderweiterungen von ZFC.

> The above observation is an essential disadvantage since this means in the author's opinion that nonstandard analysis is not a good model for "real world" phenomena (Väth 2007, S. 85).

Demgegenüber hatten Landers und Rogge festgestellt (vgl. das Zitat auf S. 109): „Gerade in den angewandten Wissenschaften hat sich gezeigt, daß der Nichtstandard-Bereich $^*\mathbb{R}$ zur Modellbildung häufig besser geeignet ist als der klassische Bereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen“ (Landers und Rogge 1994, S. 2). Was stimmt also? Die Frage ist, wann ein Modell ein *gutes* Modell für Phänomene der realen Welt ist. Müssen die Elemente des Modells dazu Entsprechungen in der realen Welt haben? Wenn das der Fall wäre, müsste man, wie wir gesehen haben, auch das Modell der reellen Zahlen infrage stellen. Muss ein gutes Modell vom Auswahlaxiom unabhängig sein? Zwar benötigt die Konstruktion der reellen Zahlen im Gegensatz zur Konstruktion der hyperreellen Zahlen das Auswahlaxiom nicht. Viele Anwendungen der Standardanalysis kommen dennoch nicht ohne Auswahlaxiom (zumindest in seiner abzählbaren Version) aus.[52] Zudem wurde in Abschnitt 5.4.10 dargelegt, dass es konservative Erweiterungen von ZF gibt, die Nichtstandardzahlen und ein Transferaxiom bereitstellen. Es stimmt also nicht, dass Nichtstandardanalysis zwingend vom Auswahlaxiom abhängt.

Unbestreitbar wird Nichtstandardanalysis in den Erfahrungswissenschaften erfolgreich eingesetzt, sei es in Ökonomie (Loeb und Wolff 2015), Finanzmathematik (Arkeryd, Cutland und Henson 1997) oder Physik (Diener und Diener 1995, Arkeryd, Cutland und Henson 1997). Mathematische Modellierungen (standard oder nichtstandard) in den Erfahrungswissenschaften gehen fast immer mit Idealisierungen einher. Die Stärke der Nichtstandardanalysis, liegt dabei oft darin, dass (zusätzlich zum Standard) eine andere Art der Idealisierung zur Verfügung steht, die in gewisser Weise näher an der Realität liegt und einfacher zu handhaben ist, etwa indem eine sehr große Anzahl (zum Beispiel von Agenten, Atomen, Raumregionen oder Ereignissen) durch eine unendlich große Anzahl N (eine Nichtstandardzahl) ersetzt wird, die dennoch wie eine endliche Anzahl behandelt werden kann.[53] In Abschnitt 5.10.3 betrachten wir dazu ein Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die reellen Zahlen (ebenso wie die hyperreellen Zahlen) ein Konstrukt der Mengenlehre sind und eine Gleichsetzung mit physikalischen Phänomenen problematisch ist (vgl. Abschnitt 5.10.1). Selbst wenn es wahr sein sollte, dass bestimmte Standardzahlen mit physikalischen Längenverhältnissen korrespondieren (so wie es manche Formen des Realismus postulieren, vgl. Abschnitt 5.1.4) und Nichtstandardzahlen ausschließlich Idealisierungen innerhalb mathematischer Modelle sind, besteht kein Grund, diese Modelle nicht auf die reale Welt anzuwenden oder sie für weniger anwendbar zu halten. Die Nützlichkeit ist Rechtfertigung genug. Die Abhängigkeit der hyperreellen Zahlen vom Auswahlaxiom steht dem nicht entgegen,

52. Bascelli u. a. 2014 weisen darauf hin, dass zum Beispiel die σ-Additivität des Lebesgue-Maßes nicht in ZF beweisbar ist (S. 851).

53. Die Andersartigkeit der Idealisierung in der Nichtstandardanalysis führt dabei bisweilen zu Missverständnissen. Siehe zum Beispiel die Einwände in Williamson 2007, Easwaran 2014, Pruss 2014, Pruss 2021, Parker 2019 und die Entgegnungen in Bascelli u. a. 2014, Bottazzi und Katz 2020a, Bottazzi und Katz 2020b.

ebenso wenig die Feststellung, dass die Erweiterung ${}^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ nicht kanonisch ist oder dass keine konkrete Nichtstandardzahl definierbar ist.

Schon für Leibniz war klar, dass man die Frage nach der Anwendbarkeit von der Frage der metaphysischen Existenz trennen muss. In einem Brief von 1716 an Samuel Masson betont er, dass die Infinitesimalrechnung nützlich sei, wenn es darum gehe, die Mathematik auf die Physik anzuwenden, er behaupte aber nicht, damit die Natur der Dinge zu erklären, denn er betrachte infinitesimale Größen als nützliche Fiktionen.[54]

5.10.3. Ein Beispiel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Stellen wir uns ein Zufallsexperiment mit einer Art Glücksrad vor, das zufällig und ohne Präferenz einen beliebigen Punkt auf dem Kreis auswählt. Der Einfachheit halber identifizieren wir den Kreis mit dem Intervall $[0, 1[$. Eine typische Modellierung eines solchen Experiments ist eine gleichverteilte Zufallsvariable X über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, wobei die Ergebnismenge Ω das reelle Intervall $[0, 1[$ ist, das Ereignissystem $\mathcal{A}$ die Borel'sche σ-Algebra in Ω und P das Borel-Maß. In diesem Modell hat jedes Elementarereignis $\{\omega\}$, mit $\omega \in \Omega$, die Wahrscheinlichkeit 0. Wegen der σ-Additivität von P hat auch jedes abzählbare Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0.

In einer diskreten Modellierung verwendet man zum Beispiel (für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$) die Ergebnismenge

$$\Omega_n := \{\frac{k}{n} \mid k = 0, \ldots, n-1\}$$

und den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), P_n)$ mit $P_n(A) = \frac{|A|}{|\Omega_n|} = \frac{|A|}{n}$. Jedes Elementarereignis $\{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega_n$ hat dann die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$. Hier hat nur das unmögliche Ereignis $\emptyset$ die Wahrscheinlichkeit 0.

Jedes physikalische Experiment mit einem materiellen Glücksrad kann mit einem solchen diskreten Modell (und hinreichend großem n) angemessen beschrieben werden, denn die Messgenauigkeit ist bei physikalischen Experimenten begrenzt. Die stetige Modellierung abstrahiert von physikalischen Begrenzungen, stellt also eine Idealisierung der realen Situation dar.

Die stetige Modellierung ist jedoch nicht die einzig mögliche Idealisierung. In den hyperreellen Zahlen bietet sich eine Modellierung durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_\nu, {}^*\mathcal{P}(\Omega_\nu), P_\nu)$ an, wobei ν eine unendliche hypernatürliche Zahl ist.

Zwischen der stetigen reellen Modellierung mit Maß P und der diskreten hyperreellen Modellierung mit Maß P_ν besteht folgender Zusammenhang: Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$P(A) \approx P_\nu({}^*A \cap \Omega_\nu).$$

Alexander Pruss hat eingewandt (siehe Pruss 2021), dass hyperreelle Wahrscheinlichkeiten *unterbestimmt* (*underdetermined*) seien in dem Sinne, dass

54. Im Original: „Le calcul infinitesimal est utile, quand il s'agit d'appliquer la Mathematique à la Physique, cependant ce n'est point par là que je pretends rendre compte de la nature des choses. Car je considere les quantités infinitesimales comme des fictions utiles“ (Leibniz 1716, S.629).

1. Elementarereignissen keine eindeutige infinitesimale Wahrscheinlichkeit zugewiesen werden kann und
2. es zu jedem hyperreellwertigen Wahrscheinlichkeitsmaß überabzählbar viele weitere gibt, die zu den gleichen entscheidungstheoretischen Präferenzen führen (und damit für die Modellierung realer Zufallsexperimente gleichwertig sind).[55]

Botazzi und Katz haben jedoch darauf hingewiesen, dass die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse eindeutig bestimmt ist, sobald man die hyperfinite Ergebnismenge festgelegt hat (im Beispiel oben also die hypernatürliche Zahl ν) und dass das Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig bestimmt ist, wenn man es als intern voraussetzt (Bottazzi und Katz 2020b).[56] Dies ist in der Robinson'schen Nichtstandardanalysis eine natürliche Voraussetzung. Tatsächlich ist $P(A)$ als hyperendliche Summe $\sum_{\omega \in A} P(\omega)$ nur für interne P wohldefiniert.[57]

Modelliert man nicht mit hyperreellen Zahlen, sondern in IST, tritt die Einschränkung auf interne Maße und Ereignisse gar nicht in Erscheinung, da alle Mengen intern sind. Nelson entwickelt in seinem Buch *Radically Elementary Probability Theory* (Nelson 1987) mit minimalen Mitteln aus seiner Internen Mengenlehre eine Wahrscheinlichkeitstheorie, die so leistungsfähig ist, dass selbst anspruchsvolle Themen wie die Brown'sche Bewegung behandelt werden können. Radikal elementar ist diese Wahrscheinlichkeitstheorie, weil sie ganz im Endlichen bleibt und ohne Maß- und Integrationstheorie auskommt. Ein *endlicher Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Paar (Ω, P), bestehend aus einer endlichen Ergebnismenge Ω und einer Funktion $P \colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ mit $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Ein *Ereignis* ist eine beliebige Teilmenge von Ω. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist definiert als $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.[58] Eine *Zufallsvariable* ist eine beliebige Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Der *Erwartungswert* einer Zufallsvariable X ist definiert als $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$. Ein *stochastischer Prozess* ist eine Abbildung $\xi : T \to \mathbb{R}^\Omega$ mit einer endlichen Indexmenge T. Für jedes $t \in T$ ist $\xi(t)$ dann eine Zufallsvariable (oft mit X_t bezeichnet). Ist zum Beispiel $T = \{1, \ldots, \nu\}$ und X eine Zufallsvariable auf (Ω, P), dann ist (Ω^ν, P^ν) mit

$$P^\nu(\omega_1, \ldots, \omega_\nu) := \prod_{n=1}^{\nu} P(\omega_n)$$

ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum, und die Zufallsvariablen X_n mit

$$X_n(\omega_1, \ldots, \omega_\nu) := X(\omega_n), \quad 1 \leq n \leq \nu,$$

55. Zu einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaß P definiert Pruss für jedes positive $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_α durch $P_\alpha(A) = \operatorname{Std} P(A) + \alpha \operatorname{Inf} P(A)$, wobei Std und Inf hier den Standardteil bzw. den infinitesimalen Anteil finiter hyperreeller Zahlen bezeichnen. Mit seinem Theorem 1 spezifiziert er die entscheidungstheoretische Gleichwertigkeit von P und allen P_α.

56. Einen analogen Einwand bringt Pruss für Wahrscheinlichkeitsmaße, die das Ω-Limit-Axiom erfüllen. Auch die Argumentation in Bottazzi und Katz 2020b gegen diesen Einwand verläuft analog. Die Unterbestimmtheit verschwindet, wenn man sich auf interne Wahrscheinlichkeitsmaße beschränkt.

57. Das bedeutet nicht, dass in der Robinsonschen Nichtstandardanalysis nur interne Maße betrachtet werden (vgl. zum Beispiel Landers und Rogge 1994, § 31, zum Thema *Loeb-Maße*).

58. Die hierdurch auf $\mathcal{P}(\Omega)$ definierte Funktion wird wieder mit P bezeichnet, da keine Missverständnisse zu befürchten sind.

sind unabhängig. Dieser stochastische Prozess beschreibt die ν-fache unabhängige Wiederholung eines durch X gegebenen Zufallsexperiments. In Nelsons radikal elementarer Wahrscheinlichkeitstheorie kann nun für ν eine Nichtstandardzahl gewählt werden, um zum Beispiel die Gesetze der großen Zahlen zu formulieren (Nelson 1987, Kap. 16).

In der konventionellen Wahrscheinlichkeitstheorie nimmt man zur Formulierung der Gesetze der großen Zahlen eine unendliche Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an. Man vergegenwärtige sich, welcher Aufwand notwendig ist, um unendliche Produkte von Wahrscheinlichkeitsräumen zu definieren und die Existenz unendlicher Familien unabhängiger Zufallsvariablen zu zeigen (vgl. H. Bauer 2002, § 9). Selbst wenn Ω nur zwei Elemente enthält (zum Beispiel bei der Modellierung eines Münzwurfs) ist $\Omega^{\mathbb{N}}$ eine überabzählbare Ergebnismenge. Jedes Elementarereignis des Produktraums (das Ergebnis eines unendlich wiederholten Münzwurfs) hat die Wahrscheinlichkeit 0. Nur bestimmte (messbare) Teilmengen von $\Omega^{\mathbb{N}}$ sind Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist nicht mehr die Summe der Wahrscheinlichkeiten der umfassten Elementarereignisse, sondern ein Integral und so weiter.

Entscheidend ist die Feststellung, dass sowohl die konventionelle Modellierung mit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch die Nichtstandard-Modellierung mit $X_1, \ldots, X_\nu$ $(\nu \gg 1)$ gegenüber realen Experimenten eine Idealisierung darstellen. Nelson schreibt:

> The conventional approach involves an idealization, because one cannot actually complete an infinite number of observations. The second approach also involves an idealization, because one cannot actually complete a nonstandard number of observations. In fact it is the nature of mathematics to deal with idealizations (Nelson 1987, S. 13).

Die Idealisierung besteht in beiden Fällen darin, einen quantitativen, aber vom realen Anwendungskontext abhängigen Begriff („groß“) durch einen qualitativen theoretischen Begriff („unendlich groß“) zu ersetzen. Der Unterschied liegt im jeweils verwendeten Unendlichkeitskonzept (siehe Abschnitt 5.2).

5.10.4. Zusammenfassung der Antworten zur Anwendbarkeit

- Sowohl $\mathbb{R}$ als auch ${}^*\mathbb{R}$ sind mengentheoretisch konstruierte Modelle und in ihrer Anwendung auf die reale Welt Idealisierungen.
- Idealisierungen können auf unterschiedlichen Unendlichkeitskonzepten beruhen. Die Nichtstandardanalysis stellt neben unendlichen Mengen auch unendlich große und unendlich kleine Zahlen zur Idealisierung bereit.
- Ob die Existenz von Nichtstandardzahlen in $\mathbb{R}$ ableitbar ist, hängt von der verwendeten Mengenlehre ab.
- Es gibt konservative Erweiterungen von ZF, die Nichtstandardzahlen und ein Transferaxiom bereitstellen.
- Nichtstandardzahlen sind (sofern sie in Modellierungen realer Phänomene explizit auftreten) nur qualitativ bestimmt.

- Die Nützlichkeit von Nichtstandardzahlen bei der Modellierung von Phänomenen der realen Welt hängt nicht vom ontologischen Status der Nichtstandardzahlen ab.

6. Schlussbetrachtung

6.1. Zusammenfassung und Einordnung der Ergebnisse

6.1.1. Die Forschungsfragen im Überblick

In der Einleitung, Abschnitt 1.4, hatten wir als Ziel dieser Arbeit eine *Standortbestimmung* von Nichtstandard in der Analysis, speziell in der Lehre der Analysis, angegeben und daraus die folgenden Forschungsfragen abgeleitet:

FF1: Welche Bedeutung hat die Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre?

FF2: Was denken Analysislehrende an deutschen Hochschulen über den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre?

FF3: Welche Gründe für eine ablehnende Haltung gegenüber Nichtstandard in der Lehre gibt es?

FF4: Wie lassen sich diese Ablehnungsgründe in einen philosophischen, mathematischen und didaktischen Hintergrund einordnen und bewerten?

FF2 wurde in Abschnitt 4.3.2 in folgender Weise differenziert:

FF2a: Werden in den Vorlesungen zur Analysis I/II Elemente oder Methoden der Nichtstandardanalysis berücksichtigt?

FF2b: Wie wird die Einsatzmöglichkeit von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre von den Lehrenden bewertet?

FF2c: Welche Argumente für bzw. gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre werden von den Lehrenden angeführt?

6.1.2. Zur Bedeutung der Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre (FF1, FF2a)

Die Lehrbücher, die üblicherweise als vorlesungsbegleitende Literatur zur Analysis empfohlen werden, wählen durchweg einen klassischen Zugang auf der Basis des Weierstraß'schen Grenzwertbegriffs (vgl. Abschnitt 3.1.1). Nichtstandardanalysis wird in diesen Lehrbüchern, von wenigen Ausnahmen abgesehen, nicht erwähnt. Infinitesimalien kommen, wenn überhaupt, in historischen Anmerkungen zur Sprache.

Sucht man in Vorlesungsverzeichnissen nach Veranstaltungen zur Nichtstandardanalysis, findet man nur vereinzelte Angebote, zum Beispiel:

- Universität Düsseldorf, Sommersemester 2018: Vorlesung Nichtstandard-Analysis.[1] Literatur: Henson 1997, Robinson 1966.
- RWTH Aachen, Wintersemester 2012/13: Proseminar Nonstandard Analysis.[2] Literatur: Goldblatt 1998 sowie ein Skript von A. Krieg zur Vorlesung *Zahlbereichserweiterungen*.
- Universität Freiburg, Sommersemester 2009: Vorlesung Nichtstandardanalysis (ab 4. Semester).[3] Literatur: Albeverio u. a. 1986, Robinson 1966.
- Universität Hamburg, Wintersemester 2007/08: Proseminar „Grundlagen der Nichtstandardanalysis“.[4] Literatur: Henson 1974, Landers und Rogge 1994.
- Ruhr-Universität Bochum, Sommersemester 2007: Seminar über Nichtstandard Analysis (ab 4. Semester).[5] Literatur: Diverse (Literaturliste mit 17 Einträgen).

Die Veranstaltungen in Düsseldorf, Freiburg und Bochum richteten sich an mittlere und höhere Semester. Die Angebote aus Aachen und Hamburg waren als Proseminare und ohne Semesterangabe ausgewiesen. Das Proseminar an der RWTH Aachen begann mit der Konstruktion von $\mathbb{R}$, um die anschließende Ultrafilterkonstruktion von $^*\mathbb{R}$ vorzubereiten. Das Transferprinzip wurde formuliert, aber nicht bewiesen. Als Anwendungen der hyperreellen Zahlen wurden Folgen, Grenzwerte, stetige Funktionen und gleichmäßige Stetigkeit behandelt. Das Proseminar an der Universität Hamburg behandelte die ersten zehn Kapitel (von insgesamt 38 Kapiteln) aus Landers und Rogge 1994, also neben der Ultrafilterkonstruktion von $^*\mathbb{R}$ und elementarer Nichtstandardanalysis auch die Nichtstandardeinbettung von Superstrukturen (ohne Existenzbeweis). Bei dieser Veranstaltung bestand die Option, durch vertiefende Bearbeitung eines Themas (anhand eines Artikels aus der Forschungsliteratur) statt des Proseminarscheins einen Hauptseminarschein zu erwerben.

Die Umfrageergebnisse aus Abschnitt 4.4.1 haben das Bild, das sich in den Lehrbüchern und im Veranstaltungsangebot widerspiegelt, bestätigt: Nichtstandardanalysis spielt bei der Einführung in die Analysis an der Hochschule so gut wie keine Rolle. Keiner der 50 Lehrenden, die sich an der Umfrage beteiligt haben, setzt Elemente und Methoden der Nichtstandardanalysis in den Vorlesungen Analysis I oder II ein. Zwei Personen gaben an, bereits ein Proseminar zur Nichtstandardanalysis durchgeführt zu haben. Eine Person wurde durch die Umfrage angeregt, zukünftig eventuell ein Proseminar oder Seminar zur Nichtstandardanalysis durchzuführen.

1. `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/NSA_SS18/#veranstaltungen` (zugegriffen am 30.05.2021). Kurzskript zur Vorlesung sowie Übungsblätter sind dort online verfügbar.
2. `http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ws12/nsa/` (zugegriffen am 30.05.2021). Ausarbeitungen zu den gehaltenen Vorträge sind dort online verfügbar.
3. `https://www.math.uni-freiburg.de/lehre/v/ss09/sommersemester09su10.html` (zugegriffen am 30.05.2021).
4. `https://www.math.uni-hamburg.de/home/loewe/WS0708-PSNSA.html` (zugegriffen am 30.05.2021).
5. `https://www.ruhr-uni-bochum.de/ffm/Lehrstuehle/singular/150403.html` (zugegriffen am 30.05.2021). Vortragsliste und Literaturliste ist dort online verfügbar.

6.1.3. Die Einschätzung der Lehrenden (FF2b, FF2c)

Die Antworten zur Einschätzung der Lehrenden, was die Eignung von Nichtstandardanalysis für die Lehre anbelangt, ergeben ein differenzierteres Bild, wenn man verschiedene Veranstaltungsarten betrachtet (vgl. Abschnitte 4.4.2 und 4.5.2). Unter den 29 Lehrenden, die eine Einschätzung abgegeben haben, ist die Verteilung wie folgt: 10 Personen (34 %) beurteilen die Einsatzmöglichkeiten von Nichtstandardanalysis in der Lehre ausschließlich negativ (allgemein oder für alle Veranstaltungsarten nicht oder weniger geeignet). Explizit „für Grundvorlesungen nicht geeignet“ urteilen 16 Personen (55 %) (siehe Tabelle 4.4). 4 Personen (14 %) halten den Einsatz höchstens in Spezialveranstaltungen im fortgeschrittenen Studium für möglich oder gut geeignet. 6 Personen (21 %) stehen zumindest dem ergänzenden Einsatz neutral gegenüber (allgemein oder für ergänzende Veranstaltung möglich). 9 Personen (31 %) stehen dem ergänzenden Einsatz positiv gegenüber (für ergänzende Veranstaltung gut geeignet), 2 davon (7 % von allen) beurteilen die Einsatzmöglichkeiten grundsätzlich positiv (allgemein oder für ergänzende Veranstaltung und Grundvorlesung gut geeignet).

Insgesamt lässt sich also feststellen, dass die Lehrenden, die eine Einschätzung abgegeben haben, zwar mehrheitlich der Ansicht sind, dass Nichtstandardanalysis für die Grundvorlesungen ungeeignet ist, dass aber fast jeder dritte mindestens einem Einsatz in ergänzenden Veranstaltungen gegenüber positiv eingestellt ist.

Schaut man sich die Argumente der Lehrenden für bzw. gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis an (vgl. Abschnitte 4.4.3 und 4.5.3), so findet man auf der Seite der Befürworter Aspekte des kognitiven Vorteils (verständnisfördernd, Entwicklung von Intuition, elegantere und intuitivere Beweise), die Möglichkeit zur Stoffwiederholung sowie die Förderung von Grundlagenbewusstsein. Als Gegenargumente werden ungünstige Rahmenbedingungen (fehlende Zeit in den Grundvorlesungen, andere inhaltliche Vorgaben, geringe Zahl geeigneter Lehrbücher, fehlende personelle Ressourcen und fehlende Kompetenz bei den Lehrenden), Überforderung oder Verwirrung der Studierenden (wegen fehlender Voraussetzungen, hohen Abstraktionsgrades oder mühsamer, hinderlicher Notation), die geringe Relevanz für die Mathematik und der fehlende Nutzen (geringer Mehrwert gegenüber Standardanalysis, fehlender Nutzen für späteres Studium) angeführt.

6.1.4. Zur ablehnenden Haltung gegenüber Nichtstandard (FF3)

Zur Analyse möglicher Gründe für eine ablehnende Haltung gegenüber Nichtstandard in der Lehre haben wir den Fokus auf die Bewertungskategorien gelegt, die auf mögliche Konflikte mit Denkgewohnheiten oder Wertvorstellungen schließen lassen, und nicht auf die Bewertungskategorien, die auf ungünstige Rahmenbedingungen verweisen.[6]

Aufgrund der in der Umfrage genannten Argumente *fehlende Voraussetzungen*, *Überforderung der Studierenden*, *geringe Relevanz für die Mathematik* und *fehlender Nutzen*

6. Auch die berichteten institutionellen Widerstände gegen experimentelle Nichtstandard-Analysiskurse hatten ihre Ursache in einer ablehnenden Haltung oder einer vermuteten ablehnenden Haltung von Personen gegenüber der Nichtstandardanalysis (vgl. Abschnitt 3.2.4).

haben sich in Abschnitt 4.5.4 folgende Ansatzpunkte für eine ablehnende Haltung gegenüber Nichtstandard in der Lehre ergeben:

- Konflikt mit der Wertvorstellung „mathematische Strenge" in der Hochschullehre.
- Konflikt mit anerkannten didaktischen Prinzipien (nicht verwirren, nicht überfordern, keine unangemessen hohe Abstraktion gleich zu Beginn).
- Konflikt mit dem Anspruch, etwas Relevantes zu lehren.
- Konflikt mit dem Anspruch, etwas Nützliches zu lehren.

Die relativ häufige Nennung des Gegenarguments *geringe Relevanz* (in 14 von 29 Interviews) hat dazu Anlass gegeben, in Kapitel 5 das typische, in einem Mathematikstudium vermittelte Bild von Mathematik auf Denkgewohnheiten hin zu untersuchen, die in besonderer Weise durch Nichtstandard herausgefordert werden und daher zu einer ablehnenden Haltung bei den Lehrenden führen können, die als Vermittler dieses Mathematikbildes auftreten. Die Denkgewohnheiten betreffen in erster Linie den Unendlichkeitsbegriff, den Zahlbegriff, die Kontinuumsvorstellung und die Rolle der Mengenlehre.

Aktual unendliche Mengen sind im Mathematikstudium gleich von Beginn an selbstverständliche Gegenstände der Mathematik, während unendlich große Zahlen zunächst überhaupt nicht, später eventuell als unendliche Ordinal- und Kardinalzahlen oder als uneigentliche Zahlen $\pm\infty$ bei der Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ vorkommen. Solche unendlichen Zahlen sind keine Körperelemente und führen nicht zu unendlich kleinen Zahlen. In Analysislehrbüchern wird darauf hingewiesen, dass die Symbole dx und dy im Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ historische Schreibfiguren sind, und nicht als eigenständige Größen verwendet werden dürfen (vgl. zum Beispiel Behrends 2015, S. 247). Dieser Hinweis ist für die Standardanalysis durchaus angebracht, hinterlässt aber möglicherweise den Eindruck, unendlich kleine Zahlen seien grundsätzlich dubios. Nichtarchimedische Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ sind zwar durch Körperadjunktion leicht herzustellen, spielen aber im Studium kaum eine Rolle, ebenso wie kompliziertere nichtarchimedische Körper, und so ist es gut möglich, ein Mathematikstudium zu beenden, ohne jemals mit unendlich kleinen Zahlen in Berührung gekommen zu sein.

Ebenfalls von Beginn an wird im Mathematikstudium der axiomatisch-deduktive Charakter der Mathematik betont. Wir erinnern an das Behrendszitat auf Seite 204 „dass Mathematik nicht untersucht, was ist, sondern was sich folgern lässt" (Behrends 2015, S. 5) und das Zitat von Tall auf Seite 114 über die „*consequence* of advanced mathematics, based on abstract entities which the individual must construct through deductions from formal definitions" (Tall 1991, S. 20, Hervorhebungen im Original). Aber die Axiome, die am Anfang der Deduktion stehen, kommen nicht aus dem Nichts. Das Vollständigkeitsaxiom in der Analysis (zum Beispiel in Gestalt des Dedekind'schen Schnittaxioms) ist eine Übertragung der (geschichtlich relativ jungen) Cantor-Dedekind'schen Kontinuumsvorstellung, also der Vorstellung des Linearkontinuums als einer ($\mathbb{Q}$ umfassenden) Menge ausdehnungsloser Punkte, bei der jede Auftrennung in einen linken und einen rechten Teil durch genau einen Punkt hervorgebracht wird. In der Folge ist das Kontinuum überabzählbar und archimedisch geordnet. Es entsteht leicht der Eindruck, durch die Axiome der reellen Zahlen würde das anschauliche Kontinuum *beschrieben* und nicht eine *Vereinbarung* über eine abstrakte Menge getroffen, deren Elemente gedanklich in das anschauliche Kontinuum projiziert werden. Wie abstrakt die reellen Zahlen sind, wird erst deutlich, wenn man sie tatsächlich mengentheoretisch mit allen Zwischenschritten konstruiert. Wohl kaum jemand stellt sich diese Konstruktion von mehrfach ineinander geschachtelten aktual unendlichen Mengen vor, wenn er an reelle Zahlen denkt. Wohlweislich wird in Analysisvorlesungen in der Regel auf die Konstruktion verzichtet.

Auch wenn Mengenlehre- und Logikvorlesungen keine Pflichtveranstaltungen im Rahmen eines Mathematikstudiums sind, vermittelt ein solches Studium in der Regel doch ein bestimmtes Grundlagenverständnis, das auf Mengenlehre und Logik fußt und das quasi zum *Common Sense* der modernen Mathematik geworden ist. Dazu zählt die Annahme der Existenz eines Mengenuniversums, das durch geeignete Axiomensysteme (zum Beispiel ZFC) beschrieben werden kann und das als Reservoir für Modelle konsistenter Theorien dient. Dieses Universum der Hintergrundmengenlehre ist damit gewissermaßen die „Realität“ hinter dem offiziellen Formalismus, etwas, auf das Mathematikerinnen und Mathematiker vertrauen, wenn sie sich nicht gerade selbst mit mathematischen Grundlagenkonzepten befassen (vgl. Abschnitt 5.4). In dieser als real empfundenen Hintergrundmengenlehre gibt es einen (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmten vollständig angeordneten Körper $\mathbb{R}$ und eine (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte Peano-Struktur ω, die man zum Beispiel als kleinste induktive Unterstruktur von $\mathbb{R}$ wiederfindet und dann üblicherweise $\mathbb{N}_0$ (oder $\mathbb{N}$) nennt. Daher liegt es nahe (nicht in einem ontologischen, aber in einem strukturalistischen Sinne), die Elemente von $\mathbb{N}$ als *die* natürlichen Zahlen und (bedingt durch die oben beschriebene Kontinuumsvorstellung) $\mathbb{R}$ als *das* Kontinuum anzusehen.

Selbst in Lehrbüchern, in denen die Unterscheidung zwischen den theoretischen natürlichen Zahlen und den metasprachlich verwendeten, naiven natürlichen Zahlen thematisiert wird, ist die Wahrnehmung für diese Unterscheidung nicht durchgängig vorhanden. Wir erinnern an die Formulierungen bei Forster, Behrends und Heuser, die die natürlichen Zahlen mit den Einsensummen gleichsetzen (vgl. Abschnitt 5.6.1). In der Folge verschwimmt auch der Unterschied zwischen dem theoretischen und dem naiven Endlichkeitsbegriff (vgl. Abschnitt 5.6.4). Unendliche natürliche Zahlen sind in diesem Bild von vornherein ausgeschlossen, ebenso unendlich kleine reelle Zahlen (ungleich 0).

Nichtstandardmathematik kann Widerstand hervorrufen, weil sie dazu zwingt, das gewohnte Bild der Mathematik infrage zu stellen. Neben den dominierenden Cantor'schen Unendlichkeitsbegriff (und die uneigentlichen Zahlen $\pm\infty$) tritt ein weiterer Unendlichkeitsbegriff mit ganz anderen Eigenschaften (vgl. Abschnitt 5.2.2). Unendlich große und unendlich kleine Zahlen sind plötzlich ganz selbstverständliche Gegenstände der Mathematik. Das arithmetische Unendlich und das kardinale Unendlich stehen gleichberechtigt nebeneinander und beanspruchen, gleichermaßen nützliche Konzepte für die Mathematik zu sein.

Der neue arithmetische Unendlichkeitsbegriff wirkt auch auf die Kontinuumsvorstellung. Das Linearkontinuum kann nicht mehr einfach mit der reellen Zahlengerade identifiziert werden. Vielmehr ist es vorteilhaft, sich das Kontinuum gar nicht von vornherein als Punktmenge vorzustellen, sondern es (wie vor Erfindung der Mengenlehre) als eigenständige mathematische *Leitidee*, unabhängig vom Mengenbegriff, zu verstehen.[7] Mengentheoretische Konstruktionen wie ℝ oder *ℝ können bestimmte Aspekte dieser Leitidee nachbilden und sind in diesem Sinne *Modelle* des anschaulichen Kontinuums, aber nicht mit diesem identisch.

Eine besondere Herausforderung stellt die Interne Mengenlehre (IST) von Edward Nelson dar (vgl. Abschnitt 2.4), da sie als konservative Erweiterung von ZFC die oben beschriebene mathematische „Realität" zwar einerseits erhält, aber andererseits vertraute Gegenstände unvertraut erscheinen lässt und in besonderer Weise die Notwendigkeit der Unterscheidung von Sprachebenen und der Unterscheidung zwischen theoretischen und naiven Begriffen vor Augen führt. Das mengentheoretische *endlich* ist nicht das naive *endlich*, die natürlichen Zahlen der Mengenlehre (von-Neuman-Zahlen) sind nicht die naiven natürlichen Zahlen. Das gilt in ZFC genauso wie in IST, aber in IST ist der Unterschied explizit und offenkundig. ℕ enthält Nichtstandardzahlen, die größer sind als jede Einsensumme, ℝ enthält positive Zahlen, die kleiner sind als der Kehrwert jeder Einsensumme. Jede unendliche Menge enthält Nichtstandardobjekte. Andererseits gibt es eine endliche Menge, die *alle* Standardobjekte (unter anderem alle Einsensummen) enthält. Solche scheinbaren Paradoxa sind mit dem Standardbild der Mathematik nur schwer vereinbar.

Und als sei das noch nicht Zumutung genug, verlangt die durch IST nahegelegte *interne Perspektive* (vgl. Abschnitt 5.4.8) von uns anzunehmen, dass all die Nichtstandardobjekte auch in unserem vertrauten ZFC-Universum schon dagewesen sind, nur von uns nicht *gesehen* wurden. Das *Sichtbarmachen* gelingt in IST (und verwandten Theorien) durch Spracherweiterung (vgl. Abschnitt 2.4.1).

6.1.5. Kritische Reflexion der Ablehnungsgründe (FF4)

Die Analyse in Abschnitt 4.5 hat gezeigt, dass die mathematisch oder didaktisch begründete Ablehnung von Nichtstandard in der Lehre im Wesentlichen auf Vorurteilen der Lehrenden beruht. Dies betrifft sowohl das befürchtete Dilemma, die Studierenden entweder zu überfordern oder Abstriche bei der mathematischen Strenge machen zu müssen, als auch die Einschätzung, mit Nichtstandard etwas Nutzloses oder Irrelevantes zu lehren.

Mit einer einzigen zusätzlichen Voraussetzung, dem elementaren Erweiterungsprinzip, können Nichtstandardbeweise der elementaren Analysis mit der gleichen mathematischen Strenge geführt werden wie Standardbeweise (vgl. Abschnitte 1.3.2 und 4.5.5). Es sind dazu keine unangemessen abstrakten Konzepte (formale Prädikatenlogik, Modelltheorie oder Ultrafilter) erforderlich. Nach den bisherigen Erfahrungen mit experimentellen Analysiskursen werden Studierende durch einen Nichtstandardeinstieg weder verwirrt, noch überfordert. Vielmehr gibt es Hinweise darauf, dass ein solcher Einstieg den vorhandenen Begriffsvorstellungen von Studierenden entgegenkommt und das intuitive Verständnis der Grundbegriffe fördert (vgl. Abschnitte 3.2.1, 3.2.2 und 3.2.3). Die Rückmeldungen der Studierenden selbst sind ebenfalls positiv. Für Studierende der

7. Weyl nannte das Kontinuum ein „Medium freien Werdens" (Weyl 1921, S. 49).

Natur-, Ingenieur- oder Wirtschaftswissenschaften besteht zusätzlich der Vorteil, dass der Nichtstandardeinstieg näher an der Argumentation ist, die in diesen Fächern bei der Anwendung von Analysis gepflegt wird.

Ein genereller Nutzen der Nichtstandardmathematik liegt in der Erweiterung des Horizonts (zum Beispiel in Bezug auf Grundlagenfragen und die historische Perspektive) und in der Bereicherung des Methodenspektrums. Letztere ist auch der Hauptgrund für die Relevanz von Nichtstandard innerhalb und außerhalb der Mathematik (vgl. Abschnitt 4.5.6).

Neben den didaktischen Ablehnungsgründen, die unmittelbar aus den Antworten der Lehrenden herauszulesen waren, liegt ein großes Potential für Widerstand gegen Nichtstandardmathematik (in der Lehre und im Allgemeinen) in den Denkgewohnheiten, die mit dem oben beschriebenen Standardbild der Mathematik einhergehen und die durch Nichtstandard herausgefordert werden (vgl. Abschnitt 6.1.4). Zu diesen Denkgewohnheiten zählt das Primat des Cantor'schen Unendlichkeitsbegriffs, der sich im Unendlichkeitsaxiom von ZFC manifestiert und der die moderne Mathematik auf der Basis von Mengenlehre erst möglich gemacht hat. Doch Cantors Auffassung ist nicht die einzig mögliche und nicht die ursprüngliche Weise, das aktual Unendliche in der Mathematik zu denken. Wir erinnern uns daran, dass Leibniz unendliche Größen als Fiktionen zugelassen, aber unendliche Vielheiten, die das Teil-Ganzes-Axiom verletzen, abgelehnt hatte (vgl. Abschnitt 5.2.2). Da beide Unendlichkeitskonzepte in ZFC oder in konservativen Erweiterungen von ZFC problemlos koexistieren und fruchtbar für die Mathematik sind, besteht kein Anlass zu einer einseitigen Bevorzugung des Cantor'schen Unendlich.[8]

Die zweite relevante Denkgewohnheit betrifft das Primat der Standardmodelle, verbunden mit dem Cantor-Dedekind-Postulat (der Gleichsetzung des Linearkontinuums mit $\mathbb{R}$) und der Standardmodellhypothese, also der impliziten Annahme, dass die von-Neumann-Zahlen der Hintergrundmengenlehre den intuitiv gegebenen natürlichen Zahlen entsprechen (vgl. Abschnitte 5.3.3, 5.4.7, 5.5.3). Eine solche Sichtweise ist jedoch nicht haltbar. Das Cantor-Dedekind-Postulat ist, wie oben beschrieben, eine (nicht zwingende) Setzung und kein Faktum, und die Gleichsetzung von Objektzahlen (einer axiomatischen Hintergrundmengenlehre) und (intuitiv gegebenen) Metazahlen ist nicht zulässig (vgl. Abschnitt 5.5.2). Die ausgezeichnete Stellung von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ (als Träger gewisser Standardmodelle) ergibt sich immer erst im Rahmen einer bereits vorausgesetzten transfiniten Hintergrundmengenlehre. Sie lässt sich nicht aus einem empirisch gebundenen Realismus (der zum Beispiel natürliche Zahlen als Universalien realer Aggregate und positive reelle Zahlen als Universalien realer Größenverhältnisse versteht) allein ableiten. Solche der erfahrbaren Realität entnommenen Zahlen führen (auch bei kontrafaktischer Extrapolation) maximal auf potentiell unendliche Zahlbereiche (vgl. Abschnitte 5.5.3 und 5.10.1). Aktual unendliche Modelle, die im Rahmen einer transfiniten Hintergrundmengenlehre betrachtet werden, bedingen immer die Unterscheidung von Metazahlen und Objektzahlen und damit auch die Möglichkeit von Nichtstandardzahlen (vgl. Abschnitt 5.5.2).

8. Es besteht sogar die Möglichkeit, Nichtstandardanalysis in „schwachen Theorien“ zu entwickeln, die gar kein Cantor'sches Unendlich beinhalten (siehe zum Beispiel Avigad 2001).

Vorbehalte gegenüber Nichtstandard werden oft damit begründet, dass die Zahlbereichserweiterung $^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ nicht kanonisch ist, das Auswahlaxiom erfordert und nicht erlaubt, auch nur eine einzige Nichtstandardzahl explizit anzugeben (vgl. Abschnitt 5.9.1). Die hyperreellen Zahlen scheinen damit ontologisch, epistemologisch und in Bezug auf ihre Anwendbarkeit auf die reale Welt gegenüber den reellen Zahlen im Hintertreffen zu sein. Die Ausführungen in Kapitel 5 haben gezeigt, dass diese Einschätzung als Argument gegen Nichtstandardmathematik einer genaueren Analyse nicht standhält, und zwar unabhängig von der eingenommenen philosophischen Grundlagenposition. Dass die Erweiterung $^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ nicht kanonisch ist, ist kein Nachteil, sondern eher ein Vorteil, da bei Bedarf Erweiterungen mit zusätzlichen Eigenschaften (zum Beispiel einer bestimmten Saturierung) gewählt werden können. Konkret definierte Nichtstandardzahlen werden in der Nichtstandardanalysis nicht gebraucht. So kommt es in den Nichtstandarddefinitionen von Stetigkeit, Ableitung, Folgengrenzwerten und so weiter nur auf die qualitative Bestimmtheit der verwendeten Nichtstandardzahlen an (zum Beispiel, dass sie infinitesimal oder unendlich groß sind). Das Auswahlaxiom wird zwar in ZFC für die Konstruktion der hyperreellen Zahlen gebraucht. Es gibt aber konservative Erweiterungen von ZF, die reelle Nichtstandardzahlen enthalten. Daher ist das Auswahlaxiom für die Nichtstandardanalysis nicht zwingend erforderlich (vgl. Abschnitt 5.4.10). Nichtstandard ist damit genauso sicher wie Standard und braucht nicht notwendig stärkere Voraussetzungen als Standard (vgl. Abschnitt 5.9.2).

In Bezug auf ihre Anwendung in den Erfahrungswissenschaften sind sowohl die reellen, als auch die hyperreellen Zahlen Idealisierungen, denn ihre Konstruktion erfordert den Einsatz aktual unendlicher Mengen, die in unserer Erfahrung keine Entsprechung haben (vgl. Abschnitte 5.10.1 und 5.10.2). Die Nichtstandardanalysis stellt neben unendlichen Mengen auch unendlich große und unendlich kleine Zahlen zur Idealisierung bereit. Sofern solche Zahlen in Modellierungen realer Phänomene explizit auftreten, sind sie nur qualitativ bestimmt (zum Beispiel als $x \approx 0$ oder $n \gg 1$), was aber ihre Nützlichkeit bei der Modellierung nicht schmälert (vgl. Abschnitt 5.10.3). Wie die Interne Mengenlehre zeigt, existieren unendlich kleine und unendlich große Zahlen sogar in $\mathbb{R}$ (wenn man ZFC zu IST erweitert). Da diese Erweiterung konservativ ist, ist sie epistemologisch unbedenklich.

Die Frage nach der Existenz von Nichtstandardzahlen haben wir in Abschnitt 5.8.2 unter verschiedenen philosophischen Grundlagenpositionen beleuchtet. Die meisten Mathematikerinnen und Mathematiker akzeptieren heute ZFC als Grundlage für die Mathematik, gleich ob als Realisten oder als Formalisten. Nichtstandardzahlen existieren für ZFC- oder Multiversum-Realisten als hyperreelle Zahlen bzw. als reelle Nichtstandardzahlen. Auch im ZF- oder im empirisch gebundenen Realismus kann ihre Existenz nicht ausgeschlossen werden. Mindestens können Nichtstandardzahlen als nützliche Fiktionen angenommen werden, so wie es Leibniz bereits empfohlen hat. Für Formalisten stellt sich die Frage nach metaphysischer Existenz nicht. Nichtstandardzahlen existieren (wie auch die reellen Zahlen) im Rahmen geeigneter formaler Theorien, die als konsistent angenommen werden (und deren relative Konsistenz über ZF gesichert ist). Konstruktivisten lehnen aktual unendliche Mengen ab. Daher existieren für sie weder die reellen noch die hyperreellen Zahlen (zumindest nicht in der Weise, wie sie üblicherweise konstruiert werden). Auf der anderen Seite gibt es konstruktivistische Varianten sowohl der Standardanalysis als auch der Nichtstandardanalysis.

Unabhängig von den diskutierten philosophischen Grundlagenpositionen lässt sich also hinsichtlich Ontologie, Epistemologie und Anwendbarkeit eine kategorische Unterscheidung zwischen Standardzahlen und Nichtstandardzahlen nicht aufrecht erhalten.

6.2. Fazit

6.2.1. Mögliche Konsequenzen für die Lehre

Die experimentellen Analysiskurse von Keisler sowie die aktuelleren Lehrerfahrungen von Katz und Ely zeigen, dass eine Nichtstandardeinführung in die Analysis mit einer nachgelagerten Behandlung des Weierstraß'schen Grenzwertbegriffs möglich ist und positive Effekte auf die Motivation und den Lernerfolg der Studierenden hat (vgl. Abschnitte 3.2.1 und 3.2.3). Allerdings bedeutet ein solches Vorgehen gegenüber den Standardvorlesungskonzepten eine tiefgreifende Umstellung, und die Bereitschaft zum Experimentieren mit den Grundvorlesungen ist nicht sehr groß (was unter anderem an den besprochenen Vorbehalten gegenüber der Nichtstandardanalysis liegen dürfte).

In der Umfrage zur Einschätzung der Einsatzmöglichkeiten von Nichtstandardanalysis in der Lehre (FF2b) waren die Rückmeldungen der Lehrenden zu 55 % explizit negativ und nur zu 7 % explizit positiv in Bezug auf den Einsatz in den Grundvorlesungen. Andererseits waren 31 % der Rückmeldungen positiv in Bezug auf den Einsatz in ergänzenden Veranstaltungen (vgl. die Zusammenfassung in Abschnitt 6.1.3). Dieser Anteil ist höher, als es das tatsächliche Angebot an Nichtstandardveranstaltungen vermuten lässt (vgl. Abschnitt 6.1.2).

Es stellt sich daher die Frage, wie sich diese Bereitschaft nutzen und das Potential der Nichtstandardanalysis für die Lehre besser ausschöpfen lässt. Ich sehe mindestens drei Szenarien, wie Elemente der Nichtstandardanalysis in die Lehre integriert werden könnten, ohne die Grundvorlesungen umfangreich umzugestalten.[9]

Integration in die Grundvorlesung

Mit geringfügigen Ergänzungen zum Standardvorgehen kann man sich die suggestive Kraft der Nichtstandardnotation zunutze machen in der Weise, wie es Laugwitz bereits praktiziert hat und wie es Henle 1999 anregt (vgl. Abschnitt 3.1.2). Durch die Nutzung des Fréchet-Filters bleibt der unmittelbare Bezug zur Standardanalysis gewahrt, aber der Effekt ist dennoch enorm, gerade für die Begriffe Folgengrenzwert, Funktionsgrenzwert, Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Ableitung. Die Absorption von Quantoren in den Notationen $x \approx 0$ und $n \gg 1$ schafft eine kognitive Brücke von der Intuition zur Definition oder, in den Begriffen von Tall, zwischen dem *concept image* und der *concept definition*.

9. Die Möglichkeit, zusätzlich vertiefende Vorlesungen und Seminare zur Nichtstandardanalysis für mittlere und höhere Semester anzubieten, bleibt hiervon unberührt.

Vorlesungsbegleitende Veranstaltung

In einer vorlesungsbegleitenden Veranstaltung (zum Beispiel einem Proseminar) kann die Analysis noch einmal unter Ausnutzung des elementaren Erweiterungsprinzips mit hyperreellen Zahlen aufgebaut werden (vgl. Abschnitt 1.3.2). Bezüge zur Grundvorlesung und Überlegungen zur Äquivalenz beider Zugänge, bieten die Gelegenheit, sich noch einmal intensiv mit den Standarddefinitionen auseinanderzusetzen und zugleich ein intuitives Bild für diese Begriffe zu entwickeln. Die Konstruktion der hyperreellen Zahlen oder zumindest eine Andeutung derselben, könnte am Schluss einer solchen Veranstaltung stehen, wenn die Zahlbereichserweiterung ${}^*\mathbb{R} \supset \mathbb{R}$ durch die Anwendungen ausreichend motiviert ist.

Vorlesungsergänzende Veranstaltung

Als dritte Möglichkeit kann man die historischen und philosophischen Aspekte stärker betonen und die Schärfung des Grundlagenbewusstseins in den Vordergrund stellen durch eine vorlesungsergänzende Veranstaltung (zum Beispiel einem Proseminar ab dem zweiten Semester), wie sie in Abschnitt 5.7 skizziert worden ist. Die Wiederholung von Stoff aus den Grundvorlesungen unter einem neuen Blickwinkel ist hierbei ein positiver Nebeneffekt. Weitere Ziele einer solchen Veranstaltung wurden zu Beginn von Abschnitt 5.7 angegeben.

6.2.2. Schlusswort

Im letzten Abschnitt wurden verschiedene Szenarien aufgezeigt, wie Elemente der Nichtstandardanalysis in der Lehre eingesetzt werden könnten. Wünschenswert wären hierzu jeweils praktische Erfahrungen und Untersuchungen des Effekts aus der Sicht der Lehrenden und aus der Sicht der Studierenden.

Zum Schluss kommen wir noch einmal auf die drei Testaussagen am Ende des einstimmenden Abschnitts 1.1 aus der Einleitung zu sprechen. Ich hatte dort die Leserin / den Leser dazu eingeladen, sich selbst zu beobachten, inwieweit die folgenden Aussagen bei ihr / ihm Unbehagen oder Widerstand auslösen.

Aussage 1: Das Kontinuum ist keine Punktmenge.

Aussage 2: Es gibt natürliche Zahlen, die größer sind als jede Einsensumme.

Aussage 3: Es gibt reelle Zahlen, die unendlich klein, aber größer als 0 sind.

Am Ende der Lektüre besteht nun die Gelegenheit, diese Grundfragen neu zu stellen. Inwieweit diese Aussagen verbreiteten, aber angreifbaren Annahmen, wie dem Cantor-Dedekind-Postulat und der Standardmodellhypothese zuwiderlaufen, wurde in Kapitel 5 ausführlich diskutiert und in diesem Kapitel noch einmal zusammenfassend angesprochen. Insgesamt wurden in dieser Arbeit mathematische, philosophische und didaktische Argumente gegen Nichtstandard analysiert, reflektiert und bewertet mit dem Ergebnis, dass diese vielfach auf Routinen und vorgefassten Meinungen beruhen. Ich hoffe, mit dieser Arbeit Denkanstöße für einen vorurteilsfreien Diskurs über die Nichtstandardanalysis und ihre Einsatzmöglichkeiten in der Lehre gegeben zu haben.

A. Ergänzungen zur Logik und Mengenlehre

A.1. Prädikatenlogik erster Stufe

Die Entwicklung der mathematischen Logik im 20. Jahrhundert hat gezeigt, dass für die Mathematik im Prinzip eine sehr einfache Sprache, eine sogenannte Sprache erster Stufe, ausreicht. Das ergibt sich daraus, dass die übliche Mengenlehre in einer Sprache der ersten Stufe axiomatisierbar ist (siehe Abschnitt A.2.1) und dies für die Mathematik insoweit ausreicht, wie die Mathematik in der Mengenlehre nachgebildet werden kann.

Die folgende Darstellung der wichtigsten Begriffe und Bezeichnungen für Sprachen erster Stufe orientiert sich an Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018.

A.1.1. Die Syntax der Sprachen erster Stufe

Eine Sprache erster Stufe ist eine Menge von Zeichenreihen über einem bestimmten Zeichenvorrat (dem *Alphabet* der Sprache), die nach bestimmten Regeln (*Kalkülen*) gebildet sind. Zur Definition einer solchen Sprache gehört also die Angabe des Alphabets und die Angabe der Kalküle zur Bildung derjenigen Zeichenreihen, die zur Sprache gehören sollen. Dies geschieht zunächst losgelöst von einer Bedeutung der Zeichenreihen.

Das *Alphabet* einer Sprache erster Stufe enthält die Zeichen der fest definierten Zeichenmenge

$$\mathcal{A} := \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, \equiv, (,), v_0, v_1, v_2, \dots\}$$

sowie die Zeichen einer sprachspezifischen Zeichenmenge $\mathcal{S}$, der *Symbolmenge* oder *Signatur* der Sprache. Das Alphabet der Sprache ist also $\mathcal{A}_\mathcal{S} := \mathcal{A} \cup \mathcal{S}$.

Die Zeichen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ aus $\mathcal{A}$ heißen *Junktoren* („nicht, und, oder, impliziert, genau dann wenn“), die Zeichen $\forall$ und $\exists$ *Quantoren* („für alle“ bzw. „es gibt“). $\equiv$ ist das *Gleichheitszeichen* („ist gleich“), die Klammern (,) sind Strukturierungssymbole und $v_0, v_1, v_2, \dots$ *Variablen.* Oft werden andere Buchstaben (zum Beispiel x, y, z) als Platzhalter für Variablen verwendet.

Die sprachspezifische Symbolmenge $\mathcal{S}$ umfasst die folgenden zu $\mathcal{A}$ und untereinander disjunkten Mengen:

- für jedes $n \geq 1$ eine (eventuell leere) Menge n-stelliger *Relationssymbole*,
- für jedes $n \geq 1$ eine (eventuell leere) Menge n-stelliger *Funktionssymbole*,
- eine (eventuell leere) Menge von *Konstanten.*

Für die Arithmetik spielen folgende Symbolmengen eine wichtige Rolle und erhalten daher besondere Bezeichnungen:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}} := \{+, \cdot, 0, 1\}, \quad \mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}^{<} := \{<, +, \cdot, 0, 1\},$$

wobei $<$ ein zweistelliges Relationssymbol, $+$ und $\cdot$ zweistellige Funktionssymbole und 0 und 1 Konstanten sind.

Im Hinblick auf eine Anwendung in Robinsons Non-Standard Analysis (siehe Abschnitt 2.3) sei darauf hingewiesen, dass unendliche (sogar überabzählbare) Symbolmengen zugelassen sind.

Aus den Zeichen des Alphabets $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ werden nach bestimmten Regeln $\mathcal{S}$-Terme und $\mathcal{S}$-Ausdrücke gebildet. Ist der Bezug zur Symbolmenge $\mathcal{S}$ klar oder unwichtig, spricht man auch kürzer von *Termen* bzw. *Ausdrücken*.

Terme

$\mathcal{S}$-Terme sind die Zeichenreihen über $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, die in endlich vielen Schritten nach folgenden Regeln (dem *Termkalkül*) gebildet werden können (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 14):

(T1) Jede Variable ist ein $\mathcal{S}$-Term.

(T2) Jede Konstante aus $\mathcal{S}$ ist ein $\mathcal{S}$-Term.

(T3) Sind $t_1, \dots, t_n$ $\mathcal{S}$-Terme und f ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist $ft_1 \dots t_n$ ein $\mathcal{S}$-Term.

Ausdrücke

$\mathcal{S}$-Ausdrücke sind die Zeichenreihen über $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, die in endlich vielen Schritten nach folgenden Regeln (dem *Ausdruckkalkül*) gebildet werden können (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 15):

(A1) Sind t_1, t_2 $\mathcal{S}$-Terme, dann ist $t_1 \equiv t_2$ ein $\mathcal{S}$-Ausdruck.

(A2) Sind $t_1, \dots, t_n$ $\mathcal{S}$-Terme und R ein n-stelliges Relationssymbol, dann ist $Rt_1 \dots t_n$ ein $\mathcal{S}$-Ausdruck.

(A3) Ist φ ein $\mathcal{S}$-Ausdruck, dann ist $\neg\varphi$ ein $\mathcal{S}$-Ausdruck.

(A4) Sind φ, ψ $\mathcal{S}$-Ausdrücke, dann sind $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ $\mathcal{S}$-Ausdrücke.

(A5) Ist φ ein $\mathcal{S}$-Ausdruck und x eine Variable, dann sind $(\forall x \varphi)$ und $(\exists x \varphi)$ $\mathcal{S}$-Ausdrücke.

Die Ausdrücke in (A1) und (A2) heißen *atomar*, die Ausdrücke in (A3) bis (A5) *zusammengesetzt*. Zur Einsparung von Klammern vereinbart man implizite Linksklammerung bei gleichartigen Junktoren und dass $\wedge$ und $\vee$ stärker binden als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$. Terme mit zweistelligen Funktionssymbolen und Ausdrücke mit zweistelligen Relationssymbolen werden häufig in der Infixnotation geschrieben, also zum Beispiel $x + y$ statt $+xy$ bzw. $x < y$ statt $< xy$.

$\mathcal{T}^{\mathcal{S}}$ sei die Menge aller $\mathcal{S}$-Terme, $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ die Menge aller $\mathcal{S}$-Ausdrücke. Darüber hinaus sei $\mathcal{L}_n^{\mathcal{S}}$ die Menge aller $\mathcal{S}$-Ausdrücke, in denen höchstens die Variablen $v_0, \ldots, v_{n-1}$ frei (also nicht durch einen Quantor gebunden) vorkommen. Insbesondere ist damit $\mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ die Menge aller $\mathcal{S}$-Ausdrücke ohne freie Variablen. Die Elemente von $\mathcal{L}_0^{\mathcal{S}}$ werden *$\mathcal{S}$-Sätze* genannt.[1] $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ ist die durch $\mathcal{S}$ bestimmte Sprache erster Stufe.

Da Terme und Ausdrücke induktiv über die jeweiligen Kalküle definiert sind, lassen sich auch weitere für Terme oder Ausdrücke geltende Begriffe induktiv definieren. Ebenso werden Aussagen über Terme oder Ausdrücke in der Regel induktiv über den Aufbau der Terme bzw. Ausdrücke geführt (durch sogenannte *metasprachliche Induktion*). Beispielsweise kann man die Menge aller freien Variablen eines Ausdrucks induktiv definieren oder durch metasprachliche Induktion beweisen, dass man jeden Term und jeden Ausdruck in eindeutiger Weise wieder in die Terme und Ausdrücke zerlegen kann, aus denen er (durch Anwendung der Kalküle) entstanden ist (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 17-25).

A.1.2. Die Semantik der Sprachen erster Stufe

Den Termen und Ausdrücken einer Sprache $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ kann durch *Interpretation* in mathematischen *Strukturen* eine Bedeutung verliehen werden. Terme stehen durch die Interpretation für Elemente des Grundbereichs der Struktur. Jeder formale Ausdruck φ aus $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ wird durch die Interpretation zu einer wahren oder falschen Aussage. Im ersten Fall sagt man, die Interpretation sei ein *Modell* von φ.

Die Begriffe *($\mathcal{S}$-)Struktur*, *($\mathcal{S}$-)Interpretation*, *Modell* werden im Folgenden genauer erklärt.[2]

Strukturen

Definition 33. *Eine $\mathcal{S}$-Struktur ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *A ist eine nicht-leere Menge, der sogenannte* Grundbereich *oder* Träger *von $\mathfrak{A}$.*
2. *$\mathfrak{a}$ ist eine auf $\mathcal{S}$ definierte Abbildung. Für sie gilt:*
   a) *Für jedes n-stellige Relationssymbol R aus $\mathcal{S}$ ist $\mathfrak{a}(R)$ eine n-stellige Relation über A.*
   b) *Für jedes n-stellige Funktionssymbol f aus $\mathcal{S}$ ist $\mathfrak{a}(f)$ eine n-stellige Funktion über A.*

1. *Satz* ist in diesem Kontext ein rein syntaktischer Begriff, bezeichnet also nicht (wie sonst in der Mathematik) eine wahre Aussage.

2. Wie bei den syntaktischen Begriffen *$\mathcal{S}$-Term* und *$\mathcal{S}$-Ausdruck* wird auch bei den semantischen Begriffen *$\mathcal{S}$-Struktur* und *$\mathcal{S}$-Interpretation* der Präfix „$\mathcal{S}$-“ weggelassen, wenn der Bezug zur Symbolmenge $\mathcal{S}$ klar oder unwichtig ist.

c) Für jede Konstante c aus $\mathcal{S}$ ist $\mathfrak{a}(c)$ ein Element von A.

(vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 29).

Statt $\mathfrak{a}(R)$, $\mathfrak{a}(f)$, $\mathfrak{a}(c)$ schreibt man häufig $R^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ bzw. $c^{\mathfrak{A}}$ oder R^A, f^A bzw. c^A. Wenn die Anzahl der Konstanten, Funktions- und Relationssymbole endlich ist, werden statt die Abbildung $\mathfrak{a}$ anzugeben, häufig einfach ihre Bilder aufgezählt. Damit wird zum Beispiel eine $\{R, f, c\}$-Struktur mit Träger A angegeben als (A, R^A, f^A, c^A).

Beispiele:

- $\mathfrak{N}_\sigma := (\omega, \sigma^\omega, 0^\omega)$, mit ω als Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich Null), σ^ω als Nachfolgerfunktion in ω und 0^ω als Null in ω, ist eine $\{\sigma, 0\}$-Struktur, wobei σ ein einstelliges Funktionssymbol und 0 eine Konstante ist.
- $\mathfrak{N} := (\omega, +^\omega, \cdot^\omega, 0^\omega, 1^\omega)$, mit ω als der Menge der natürlichen Zahlen, $+^\omega$ und $\cdot^\omega$ als Addition bzw. Multiplikation in ω und 0^ω und 1^ω als Null- bzw. Einselement in ω, ist eine $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}$-Struktur.
- $\mathfrak{R}^< := (\mathbb{R}, <^\mathbb{R}, +^\mathbb{R}, \cdot^\mathbb{R}, 0^\mathbb{R}, 1^\mathbb{R})$, mit $\mathbb{R}$ als der Menge der reellen Zahlen, $<^\mathbb{R}$ als Kleiner-Relation in $\mathbb{R}$, $+^\mathbb{R}$ und $\cdot^\mathbb{R}$ als Addition bzw. Multiplikation in $\mathbb{R}$ und $0^\mathbb{R}$ und $1^\mathbb{R}$ als Null- bzw. Einselement in $\mathbb{R}$, ist eine $\mathcal{S}^<_{\mathrm{Ar}}$-Struktur.

Interpretationen

Um aus einer Struktur eine Interpretation zu machen (sodass jeder Ausdruck wahr oder falsch wird), muss man noch den Variablen Werte zuweisen, denn Ausdrücke können freie Variablen enthalten. Dies geschieht durch eine *Belegungsfunktion* oder, kurz, eine *Belegung*.

Ist $\mathfrak{A}$ eine $\mathcal{S}$-Struktur mit Träger A, dann heißt jede Abbildung $\beta\colon \{v_0, v_1, v_2, \dots\} \to A$ eine *Belegung in* $\mathfrak{A}$.

Definition 34. *Eine $\mathcal{S}$-Interpretation $\mathfrak{I}$ ist ein Paar $(\mathfrak{A}, \beta)$, bestehend aus einer $\mathcal{S}$-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung β in $\mathfrak{A}$ (Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 30).*

Die Interpretation $\mathfrak{I}(t)$ eines Terms t wird nun induktiv über seinen Aufbau definiert:

1. Für eine Variable x sei $\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$.
2. Für eine Konstante $c \in \mathcal{S}$ sei $\mathfrak{I}(c) := c^{\mathfrak{A}}$.
3. Für ein n-stelliges Funktionssymbol $f \in \mathcal{S}$ sei $\mathfrak{I}(ft_1 \dots t_n) := f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n))$.

Durch die Interpretation $\mathfrak{I}$ wird jedem Term t ein Element $\mathfrak{I}(t)$ des Trägers A zugeordnet. Enthält t die Variablen $x_1, \dots, x_n$ und ist $\beta(x_i) = a_i \in A$ für $i = 1, \dots, n$, so schreibt man statt $\mathfrak{I}(t)$ auch $t^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]$ oder $t^A[a_1, \dots, a_n]$.

Modellbeziehung

Über den Aufbau von Ausdrücken kann jetzt induktiv die Modellbeziehung definiert werden. $\mathfrak{I} \models \varphi$ steht dabei für „$\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ“ und „:gdw“ für „definitionsgemäß genau dann, wenn“. $\mathfrak{I}\frac{a}{x}$ bezeichne diejenige Interpretation, die die Variable x mit a belegt und ansonsten mit $\mathfrak{I}$ übereinstimmt.

Definition 35 (Modellbeziehung)**.** *Für* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ *setzen wir:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2 \quad &:\text{gdw} \quad \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2) && \text{(A.1)}\\
\mathfrak{I} \models Rt_1 \dots t_n \quad &:\text{gdw} \quad R^{\mathfrak{A}}\mathfrak{I}(t_1) \dots \mathfrak{I}(t_n) && \text{(A.2)}\\
\mathfrak{I} \models \neg\varphi \quad &:\text{gdw} \quad \textit{nicht } \mathfrak{I} \models \varphi && \text{(A.3)}\\
\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \psi) \quad &:\text{gdw} \quad \mathfrak{I} \models \varphi \textit{ und } \mathfrak{I} \models \psi && \text{(A.4)}\\
\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \psi) \quad &:\text{gdw} \quad \mathfrak{I} \models \varphi \textit{ oder } \mathfrak{I} \models \psi && \text{(A.5)}\\
\mathfrak{I} \models (\varphi \rightarrow \psi) \quad &:\text{gdw} \quad \mathfrak{I} \models \varphi \textit{ impliziert } \mathfrak{I} \models \psi && \text{(A.6)}\\
\mathfrak{I} \models (\varphi \leftrightarrow \psi) \quad &:\text{gdw} \quad \mathfrak{I} \models \varphi \textit{ genau dann, wenn } \mathfrak{I} \models \psi && \text{(A.7)}\\
\mathfrak{I} \models \forall x\varphi \quad &:\text{gdw} \quad \textit{für alle } a \in A \textit{ gilt } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi && \text{(A.8)}\\
\mathfrak{I} \models \exists x\varphi \quad &:\text{gdw} \quad \textit{es gibt } a \in A \textit{ mit } \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi. && \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

(vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 33)

Ist Φ eine Menge von Ausdrücken, dann heißt $\mathfrak{I}$ Modell von Φ, wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$ für alle φ aus Φ gilt.

Da Definition 35 dem induktiven Aufbau von Ausdrücken folgt, bedeutet $\mathfrak{I} \models \varphi$ gerade, dass φ bei der Interpretation $\mathfrak{I}$ in eine wahre Aussage übergeht.

Enthält ein Ausdruck φ keine freien Variablen, so hängt die Modelleigenschaft einer Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ nicht von der Belegung β, sondern nur von der Struktur $\mathfrak{A}$ ab. In diesem Fall schreibt man statt $\mathfrak{I} \models \varphi$ auch $\mathfrak{A} \models \varphi$ oder $A \models \varphi$ (wobei A der Träger von $\mathfrak{A}$ ist). Bei der letzten Schreibweise muss zuvor geklärt worden sein, wie die Symbole aus $\mathcal{S}$ zu interpretieren sind.

Durch die Interpretation $\mathfrak{I}$ wird jeder Ausdruck φ (ggf. mit den freien Variablen $x_1, \dots, x_n$) in eine Aussage der Hintergrundmengenlehre (in der die Struktur definiert ist) übersetzt (zum Begriff der Hintergrundmengenlehre siehe Abschnitt 5.4.6). Diese Aussage wird auch mit $\varphi^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n]$ oder $\varphi^{A}[a_1, \dots, a_n]$ bezeichnet, wobei $a_1, \dots, a_n$ wieder die Belegungen der Variablen $x_1, \dots, x_n$ sind.

Folgerungsbeziehung

Mittels der Modellbeziehung lässt sich präzisieren, was es bedeuten soll, dass ein Ausdruck φ aus einer Menge Φ von Ausdrücken folgt.

Definition 36. *Sei* Φ *eine Menge von Ausdrücken und* φ *ein Ausdruck. Dann definiert man:* φ folgt aus Φ *(kurz:* $\Phi \models \varphi$*) genau dann, wenn jede Interpretation, die Modell von* Φ *ist, auch Modell von* φ *ist (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 34).*

Enthält Φ nur ein Element ψ, schreibt man auch $\psi \models \varphi$ statt $\{\psi\} \models \varphi$.
Darüber hinaus definiert man (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 35f):

- Ein Ausdruck φ heißt *allgemeingültig* (kurz: $\models \varphi$) genau dann, wenn gilt: $\emptyset \models \varphi$.
- Ein Ausdruck φ heißt *erfüllbar* genau dann, wenn es eine Interpretation gibt, die Modell von φ ist.
- Eine Ausdrucksmenge Φ heißt *erfüllbar* genau dann, wenn es eine Interpretation gibt, die Modell aller Ausdrücke aus Φ ist.

A.1.3. Der formale Beweisbegriff

Ziel ist es, dem nicht scharf bestimmten, inhaltlich-mathematischen Beweisbegriff einen formalen Beweisbegriff an die Seite zu stellen, der rein syntaktisch definiert ist. Der formale Beweisbegriff muss also über das Operieren mit Ausdrücken definiert sein und darf nicht auf Interpretationen der Ausdrücke in Strukturen Bezug nehmen.

Sequenzen

Eine *Sequenz* ist eine nicht-leere Folge (Aneinanderreihung) $\varphi_1 \dots \varphi_n \varphi$ von Ausdrücken. $\varphi_1 \dots \varphi_n$ heißt in diesem Zusammenhang der *Antezedens* und φ der *Sukzedens* der Sequenz. Der Antezedens einer Sequenz kann leer sein (Fall $n = 0$). $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$ nennt man die *Glieder* der Sequenz. Durch metasprachliche Induktion lässt sich zeigen, dass eine Sequenz eindeutig in ihre Glieder zerfällt (Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 21). Insbesondere sind daher Antezedens und Sukzedens wohldefiniert.

Die Idee hinter diese Definition ist, dass eine Sequenz für eine bestimmte Beweissituation steht, in der die Ausdrücke im Antezedens die Annahmen darstellen und der Sukzedens den daraus abgeleiteten Ausdruck.

Eine Ableitung (ein formaler Beweis) eines Ausdrucks φ aus einer Ausdrucksmenge Φ ist dann eine endliche Abfolge von Sequenzen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, wobei $\Gamma_m = \varphi_1 \dots \varphi_n \varphi$ ist und $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$ sind und jede Sequenz Γ_j aus vorhergehenden durch Anwendung einer *Sequenzenregel* gewonnen wird. Welche Sequenzenregeln zur Verfügung stehen, legt ein *Sequenzenkalkül* fest.

Sequenzenkalkül

Sequenzenregeln sind formale Nachbildungen elementarer mathematischer Schlussweisen. Jede solche Regel gibt an, welche neue Sequenz Γ_{j+1} man (gemäß dieser Regel) als nächste aufnehmen darf, wenn bereits bestimmte Sequenzen (die Prämissen der Regel) unter den Sequenzen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_j$ vorhanden sind.

Ich gebe drei Beispiele für Sequenzenreglen an (für einen vollständigen Sequenzenkalkül siehe Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 72). Darin sind φ, ψ beliebige Ausdrücke und Γ eine beliebige endliche (eventuell leere) Folge von Ausdrücken.

Eine Regel mit einer Prämisse ist die *Antezedensregel*: Wenn bereits eine Sequenz $\Gamma\psi$ vorhanden ist, dann darf man $\Gamma'\psi$ als neue Sequenz aufnehmen, wenn jedes Glied von Γ auch ein Glied von Γ' ist.

Inhaltlich drückt diese Regel aus, dass man die Annahmen (die Ausdrücke im Antezedens) beliebig umsortieren und (vorübergehend) um weitere Annahmen erweitern darf.

Ein Beispiel für eine Regel mit zwei Prämissen ist die *Regel der Fallunterscheidung*: Wenn bereits die Sequenzen $\Gamma\chi\psi$ und $\Gamma\neg\chi\psi$ vorhanden sind, dann darf man $\Gamma\psi$ als neue Sequenz aufnehmen.

Damit ein Beweis überhaupt begonnen werden kann, muss es auch prämissenlose Regeln geben, also Regeln, die sagen, welche Sequenzen man ohne Voraussetzung neu aufnehmen darf.

Ein Beispiel hierfür ist die Voraussetzungsregel: Man darf ohne Voraussetzung eine Sequenz $\Gamma\psi$ aufnehmen, wenn ψ ein Glied von Γ ist.

Diese Regel drückt aus, dass man jeden Ausdruck aus Annahmen ableiten kann, zu denen der Ausdruck selbst gehört.

Alle Sequenzenregeln zusammen bilden den sogenannten *Sequenzenkalkül* $\mathfrak{S}$.

Definition 37. *Ein Ausdruck φ ist aus einer Ausdrucksmenge Φ* formal beweisbar *oder* ableitbar *(kurz $\Phi \vdash \varphi$) genau dann, wenn es endlich viele Ausdrücke $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aus Φ gibt mit*

$$\vdash \varphi_1 \ldots \varphi_n \varphi$$

(vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 64).

Korrektheit und Vollständigkeit des Sequenzenkalküls

Da der Sequenzenkalkül den natürlichen Schlussweisen der klassischen Logik nachgebildet ist, ist er in folgendem Sinne korrekt: Wenn ein Ausdruck φ aus der Ausdrucksmenge Φ ableitbar ist ($\Phi \vdash \varphi$), dann gilt auch, dass φ aus Φ folgt ($\Phi \models \varphi$). Dies lässt sich mittels Definition 36 für jede einzelne Regel des Sequenzenkalküls nachweisen und dann per metasprachlicher Induktion verallgemeinern.

Dass auch die umgekehrte Aussage gilt, besagt der Gödel'sche Vollständigkeitssatz (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 90):

Satz 72 (Vollständigkeitssatz)**.** *Für $\Phi \subseteq \mathcal{L}^S$ und $\varphi \in \mathcal{L}^S$ gilt: Wenn φ aus Φ folgt ($\Phi \models \varphi$), dann ist φ aus Φ ableitbar ($\Phi \vdash \varphi$).*

A.1.4. Einige Begriffe und Sätze aus der Modelltheorie

Zur Existenz von Modellen

Satz 73 (Endlichkeitssatz)**.** *Sei $\Phi \subseteq \mathcal{L}^S$ und $\varphi \in \mathcal{L}^S$.*

1. *φ folgt aus Φ ($\Phi \models \varphi$) genau dann, wenn es eine endliche Ausdrucksmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt, aus der φ folgt (das heißt, für die $\Phi_0 \models \varphi$ gilt).*

2. *Φ ist erfüllbar genau dann, wenn jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar ist.*

(vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 93)

Satz 74 (Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Jede höchstens abzählbare Menge von Ausdrücken, die erfüllbar ist, ist erfüllbar über einer höchstens abzählbaren Menge (d.h., sie besitzt ein Modell, dessen Träger höchstens abzählbar ist) (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 91).*

Allgemeiner gilt:

Satz 75 („Absteigender“ Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Jede erfüllbare Ausdrucksmenge $\Phi \subseteq \mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ ist über einer Menge erfüllbar, deren Mächtigkeit nicht größer als die Mächtigkeit von $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ ist (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 92).*

Satz 76 (Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski)**.** *Φ sei eine Ausdrucksmenge, die über einer unendlichen Menge erfüllbar ist und κ eine Mächtigkeit größer oder gleich der Mächtigkeit von Φ. Dann ist Φ über einer Menge der Mächtigkeit κ erfüllbar (vgl. Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 94).*

Jedes Axiomensystem, das in einer Sprache der ersten Stufe formulierbar ist und das ein unendliches Modell hat, hat beliebig große Modelle.

Elementare Äquivalenz und Isomporhie

Für die Existenz von Nichtstandardmodellen ist entscheidend, dass sich unendliche Strukturen nicht in der Sprache erster Stufe bis auf Isomorphie charakterisieren lassen.

Definition 38. *$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien $\mathcal{S}$-Strukturen.*

1. *Eine Abbildung $\pi\colon A \to B$ heißt ein* Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ *(kurz: $\pi\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$)* :gdw
   a) *π ist eine Bijektion von A auf B.*
   b) *Für n-stelliges $R \in \mathcal{S}$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:*
   $$R^{\mathfrak{A}} a_1 \dots a_n \quad \text{gdw} \quad R^{\mathfrak{B}} \pi(a_1) \dots \pi(a_n).$$
   c) *Für n-stelliges $f \in \mathcal{S}$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:*
   $$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)).$$
   d) *Für $c \in \mathcal{S}$ ist $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$.*
2. *$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen* isomorph *(kurz: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$) genau dann, wenn es einen Isomporphismus $\pi\colon \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gibt.*

(Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 41.)

Definition 39. *1. Zwei $\mathcal{S}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen* elementar äquivalent *(kurz: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn für jeden $\mathcal{S}$-Satz φ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw $\mathfrak{B} \models \varphi$.*

2. Für eine $\mathcal{S}$-Struktur $\mathfrak{A}$ sei $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) := \{\varphi \in \mathcal{L}_0^{\mathcal{S}} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$. $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ *heißt die* Theorie *von $\mathfrak{A}$.*

(Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 99.)

Satz 77. *Zu jeder unendlichen Struktur gibt es eine elementar äquivalente nicht isomporphe Struktur (Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 100).*

Substrukturen

Definition 40. *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathcal{S}$-Strukturen. Dann heißt $\mathfrak{A}$* Substruktur *von $\mathfrak{B}$ (kurz: $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), wenn*

1. *$A \subseteq B$;*
2. *a) für n-stelliges $R \in \mathcal{S}$ ist $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$*
   (d.h. für alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt: $R^{\mathfrak{A}} a_1 \ldots a_n$ gdw $R^{\mathfrak{B}} a_1 \ldots a_n$);

   b) für n-stelliges $f \in \mathcal{S}$ ist $f^{\mathfrak{A}}$ die Restriktion von $f^{\mathfrak{B}}$ auf A^n;

   c) für $c \in \mathcal{S}$ ist $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.

(Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 43.)

A.1.5. Grenzen der Symbolisierbarkeit auf der ersten Stufe

Die wesentliche Beschränkung der Logik erster Stufe besteht darin, dass nur Individuenvariablen, aber keine Relations- oder Funktionsvariablen zur Verfügung stehen. In der Semantik auf der ersten Stufe sind daher Quantifizierungen nur über die Elemente des Trägers von Strukturen (also über Objekte *erster Stufe*) möglich, nicht jedoch über Relationen oder Funktionen über dem Träger (Objekte zweiter Stufe). Als Konsequenz dieser Beschränkung lassen sich viele wichtige Strukturen nicht (bis auf Isomorphie) eindeutig auf der ersten Stufe charakterisieren. Dies betrifft zum Beispiel die Peano-Strukturen oder die vollständig angeordneten Körper.

Da alle Peano-Strukturen zueinander isomorph sind (siehe etwa Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 53) und ebenfalls alle vollständig angeordneten Körper zueinander isomorph sind (siehe etwa Mainzer 1988b, S 42), folgt aus Satz 77:

- Es gibt keine Menge von $\{\sigma, 0\}$-Ausdrücken, die genau die Peano-Strukturen als Modelle hat.
- Es gibt keine Menge von $\mathcal{S}_{\mathrm{Ar}}^{<}$-Ausdrücken, die genau die vollständig angeordneten Körper als Modelle hat.

Eine Charakterisierung dieser Strukturen erfordert eine Logik zweiter Stufe, in der auch Relationsvariablen zur Verfügung stehen.[3]

3. Auf eigene Funktionsvariablen kann verzichtet werden (siehe Ebbinghaus, Flum und Thomas 2018, S. 147).

A.2. Zermelo-Fraenkel'sche Mengenlehre

Der folgende Abschnitt enthält eine Zusammenstellung des mit ZFC bezeichneten Zermelo-Frenkel'schen Axiomensystems mit Auswahlaxiom.

A.2.1. Das Axiomensystem ZFC

Die Mengenlehre kommt grundsätzlich mit einer sehr sparsamen Sprache aus. Ihre Symbolmenge $\mathcal{S} := \{\in\}$ enthält nur ein einziges Symbol, das zweistellige Relationssymbol $\in$ („ist Element von").

In der Praxis wird die Sprache durch *definierte* Symbole angereichert, die formale Ausdrücke kürzer und lesbarer machen. Das zweistellige Relationssymbol $\subseteq$ kann zum Beispiel definiert werden durch

$$x \subseteq y :\leftrightarrow \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in y).$$

Ein $\in$-Ausdruck $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$, für den (auf der Basis der noch anzugebenden Axiome) gezeigt werden kann, dass es für alle $x_1, \ldots, x_n$ genau ein y mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ gibt, heißt *funktional*. Mit einem solchen funktionalen Ausdruck kann ein neues n-stelliges Funktionssymbol definiert werden, zum Beispiel das einstellige Funktionssymbol $\mathcal{P}$ durch

$$y = \mathcal{P}(x) :\leftrightarrow \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x),$$

unter der Voraussetzung, dass der rechte Ausdruck funktional ist.

Ein funktionaler Ausdruck ohne Eingangsparameter (das heißt $n = 0$) definiert eine Konstante. Beispiel: Die Konstante $\emptyset$ (leere Menge) kann definiert werden durch

$$y = \emptyset :\leftrightarrow \forall z\, \neg z \in y, \tag{A.10}$$

unter der Voraussetzung, dass der rechte Ausdruck funktional ist.

Definierte Symbole lassen sich durch den Einsatz ihrer Definitionen wieder eliminieren, sodass eine Sprache durch definierte Symbole zwar komfortabler, aber nicht ausdrucksstärker wird.

In einer inhaltlichen Deutung bezeichnen Relationssymbole Beziehungen zwischen Mengen (auch *Prädikate* genannt) und Funktionssymbole Abbildungen, die auf dem gesamten Mengenuniversum definiert sind (auch *Operationen* genannt).

Ich gebe die Axiome jeweils in einer umgangssprachlichen und einer formalen Version an. Die Darstellung orientiert sich an Ebbinghaus 2021.

Existenzaxiom (Ex). Es gibt eine Menge. Formal:

$$\exists x\, x = x \tag{A.11}$$

Extensionalitätsaxiom (Ext). Zwei Mengen, die die gleichen Elemente enthalten, sind gleich. Formal:

$$\forall x\, \forall y\, (\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) \tag{A.12}$$

Schema der Aussonderungsaxiome (Aus). Sei φ ein Ausdruck mit der freien Variablen z und optional weiteren freien Variablen $a_1, \ldots, a_n$ (Parameter genannt). Dann gibt es für alle $a_1, \ldots, a_n$ und für alle Mengen x eine Menge y, die genau die Elemente $z \in x$ enthält, für die $\varphi(z, a_1, \ldots, a_n)$ gilt. Formal:

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n \, \forall x \, \exists y \, \forall z \, (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, a_1, \ldots, a_n)) \tag{A.13}$$

Die (ggf. von $a_1, \ldots, a_n$ abhängige) Menge y ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit

$$\{z \in x \mid \varphi(z, a_1, \ldots, a_n)\}$$

bezeichnet.

Definition der leeren Menge. Nach dem Existenzaxiom gibt es eine Menge x und nach dem Aussonderungsaxiom die eindeutig bestimmte Menge $y = \{z \in x \mid z \neq z\}$, die (wegen $z = z$ für alle z) kein Element enthält ($\forall z \, \neg z \in y$). Nach dem Extensionalitätsaxiom ist der rechte Ausdruck in (A.10) funktional und definiert die Konstante $\emptyset$ (die *leere Menge*).

Paarmengenaxiom (Paar). Für alle x, y existiert eine Menge u, die genau x und y als Elemente enthält. Formal:

$$\forall x \forall y \exists u \, (\forall z \, (z \in u \leftrightarrow z = x \vee z = y)) \tag{A.14}$$

Die Menge u ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt, wird *die Paarmenge von x und y* genannt und mit $\{x, y\}$ bezeichnet.

Vereinigungsmengenaxiom ($\bigcup$-Ax). Zu jeder Menge x gibt es eine Menge u, die genau die Elemente der Elemente von x enthält. Formal:

$$\forall x \exists u \forall y \, (y \in u \leftrightarrow \exists z \, (y \in z \wedge z \in x)) \tag{A.15}$$

Die Menge u ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird *die Vereinigung von x* genannt und mit $\bigcup x$ bezeichnet.

Ein analoges Axiom für Durchschnitte ist nicht erforderlich, denn die Menge $\bigcap x$, die genau alle z enthält, die in allen Elementen von x enthalten sind, kann bereits mit dem Aussonderungsaxiom gewonnen werden.

Mit den bisherigen Mengenaxiomen lassen sich auch die zweistelligen Funktionssymbole $\cup, \cap, \setminus$ für die entsprechenden Mengenoperationen (Vereinigung, Schnitt, Differenz) definieren und die bekannten Rechenregeln dafür ableiten.

Mit $\cup$ lassen sich ausgehend von Paarmengen sukzessive Dreier-, Vierer-, Fünfermengen und so weiter bilden.

Potenzmengenaxiom (Pot). Zu jeder Menge x gibt es eine Menge y, deren Elemente genau die Teilmengen von x sind. Formal:

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x) \tag{A.16}$$

Die Menge y ist nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt, wird *die Potenzmenge von* x genannt und mit $\mathcal{P}(x)$ bezeichnet.

Unendlichkeitsaxiom (Inf). Es gibt eine Menge, die $\emptyset$ enthält und mit jeden z auch $z \cup \{z\}$. Formal:

$$\exists x\, (\emptyset \in x \wedge \forall z\, (z \in x \rightarrow z \cup \{z\} \in x)). \tag{A.17}$$

Der Ausdruck hinter $\exists x$ definiere das einstellige Prädikat „ist induktiv". Dann besagt das Unendlichkeitsaxiom, dass es eine induktive Menge gibt. Mit dem Aussonderungsaxiom definiert man ω als die (im Sinne der Mengeninklusion) kleinste induktive Menge (die nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt ist). Mit $\emptyset$ als Null und $\sigma(z) := z \cup \{z\}$ als Nachfolgerfunktion erfüllt sie die Peanoaxiome. Ihre Elemente können daher als mengentheoretischer Ersatz für die natürlichen Zahlen gelten.

Das Unendlichkeitsaxiom fordert die Existenz einer Menge. Damit ist das Existenzaxiom als eigenständiges Axiom überflüssig. Es wird dann wichtig, wenn Varianten des Axiomensystems ohne Unendlichkeitsaxiom (und ohne andere Axiome, die die Existenz einer Menge sicherstellen) betrachtet werden sollen.

Fundierungsaxiom (Fund). Jede nicht leere Menge besitzt ein $\in$-minimales Element. Formal:

$$\forall x\, (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y\, (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)))$$

Der Ausdruck hinter dem $\rightarrow$ formalisiert, dass es in x ein Element y gibt, das kein Element mit x gemeinsam hat, und das ist gerade die Definition der Aussage, dass x ein $\in$-minimales Element besitzt.

Die Motivation des Fundierungsaxioms wird klar, wenn man sich überlegt, was es bedeuten würde, wenn x kein $\in$-minimales Element besäße. Dann hätte jedes $y \in x$ ein Element mit x gemeinsam, wäre also insbesondere nicht leer. Es gäbe $x_1 \in x$ und $x_2 \in x_1 \cap x$. Mit dem gleichen Argument gäbe es $x_3 \in x_2 \cap x$, allgemein $x_{j+1} \in x_j \cap x$. Man erhielte eine absteigende Elementkette $x \ni x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \ldots$, die entweder unendlich wäre oder in einen Zirkel mündete.

Das Fundierungsaxiom verhindert also unendliche absteigende sowie zirkuläre Elementketten, insbesondere verhindert es Mengen, die sich selbst als Element enthalten.

Positiv formuliert sorgt das Fundierungsaxiom für einen hierarchischen Aufbau von unten nach oben.

Schema der Ersetzungsaxiome (Ers). Sei φ ein Ausdruck mit den freien Variablen x und y sowie optional weiteren Parametern $a_1, \ldots, a_n$. Dann gilt für alle $a_1, \ldots, a_n$: Wenn

$\varphi(x, y, a_1, \dots, a_n)$ funktional ist, dann gibt es zu jeder Menge u eine Menge v, die genau die y mit $\varphi(x, y, a_1, \dots, a_n)$ und $x \in u$ enthält. Formal:

$$\forall a_1 \dots \forall a_n \, (\forall x \exists^{=1} y \, \varphi(x, y) \to \forall u \, \exists v \, \forall x \, (x \in v \leftrightarrow x \in u \land \varphi(x, y))) \tag{A.18}$$

Der Teilausdruck $\forall x \exists^{=1} y \, \varphi(x, y)$ formalisiert darin die Aussage „$\varphi(x, y)$ ist funktional", ordnet also jedem x genau ein y zu. Die in φ optional noch vorhandenen Parameter $a_1, \dots, a_n$ werden hier zur Verkürzung der Ausdrücke in der Darstellung unterdrückt.

Ist $\varphi(x, y)$ funktional, so ist die (ggf. von $a_1, \dots, a_n$ abhängige) Menge v nach dem Extensionalitätsaxiom eindeutig bestimmt und wird mit

$$\{y \mid x \in u \land \varphi(x, y)\}$$

bezeichnet. Hat man zum funktionalen Ausdruck $\varphi(x, y)$ ein Operationssymbol F eingeführt durch

$$\mathrm{F}(x) = y \quad :\leftrightarrow \quad \varphi(x, y),$$

so schreibt man für die Menge v auch

$$\{\mathrm{F}(x) \mid x \in u\}.$$

Auswahlaxiom (AC). Zu jeder Menge u von nicht leeren, paarweise disjunkten Mengen gibt es eine Auswahlmenge v, die aus jedem Element von u genau ein Element enthält. Formal:

$$\begin{aligned} \forall u \, ((\emptyset \notin u \land \forall x \forall y \, (x \in u \land y \in u \to x = y \lor x \cap y = \emptyset)) \\ \to \exists v \forall x \, (x \in u \to \exists^{=1} z \, (z \in x \land z \in v))) \end{aligned} \tag{A.19}$$

Das Auswahlaxiom ist von ZF unabhängig. Das heißt, wenn ZF widerspruchsfrei ist, dann ist auch ZFC widerspruchsfrei, aber auch ZF zusammen mit der Negation des Auswahlaxioms. Das Auswahlaxiom ist über ZF äquivalent zum Wohlordnungssatz (jede Menge ist wohlordenbar) sowie zum Zorn'schen Lemma (eine Halbordnung im Sinne von $\leq$, in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt ein maximales Element) (siehe zum Beispiel Ebbinghaus 2021, S. 117-121).

Das Auswahlaxiom ist für die Nichtstandardanalysis von Bedeutung, weil die Konstruktion der hyperreellen Zahlen die Existenz freier Ultrafilter voraussetzt, die wiederum mit dem Zorn'schen Lemma bewiesen wird (siehe Kapitel 2).

A.2.2. Teilsysteme von ZFC

Das System der in Abschnitt A.2.1 angegebenen Axiome bis zum Fundierungsaxiom (also Ex, Ext, Aus, Paar, $\bigcup$-Ax, Pot, Inf, Fund) wird *Zermelo'sches Axiomensystem* genannt und mit Z bezeichnet.

Das System Z+Ers wird *Zermelo-Fraenkel'sches Axiomensystem* genannt und mit ZF bezeichnet. Paar und Aus sind dann als eigenständige Axiome überflüssig, da sie mit den restlichen Axiomen von Z plus Ers bewiesen werden können. Das Auswahlaxiom AC komplettiert ZF zu ZFC (Zermelo-Fraenkel'sches Axiomensystem mit Auswahlaxiom).

Die Varianten der Systeme Z, ZF und ZFC ohne Fundierungsaxiom werden manchmal durch Hinzufügen eines Superskripts 0 gekennzeichnet: Z^0, ZF^0 bzw. ZFC^0.

B. Die Forschungsmethode der Qualitativen Inhaltsanalyse

B.1. Merkmale der Qualitativen Inhaltsanalyse

Die Qualitative Inhaltsanalyse ist eine Methode aus der empirischen Sozialforschung, die mit fixiertem Material (zum Beispiel mit Audiodateien bzw. Transskripten davon) arbeitet. Sie zeichnet sich durch folgende Merkmale aus (vgl. Mayring 2015, S. 50-53):

- Einbettung des Materials in den Kommunikationszusammenhang: Der Interpret muss angeben, auf welchen Teil im Kommunikationsprozess er seine Schlussfolgerungen aus der Materialanalyse beziehen will (zum Beispiel die Entstehung beim Kommunikator oder die Wirkung beim Rezipienten). Dies legt die *Richtung der Analyse* fest.

- Systematisches, regelgeleitetes Vorgehen: Die Textanalyse folgt einem (vom Gegenstand und von der Fragestellung abhängigen) konkreten Ablaufmodell und orientiert sich an vorab festgelegten Regeln (zum Beispiel für die Bildung von Analyseeinheiten oder für die Selektion und Kodierung von Fundstellen).

- Kategorien im Zentrum der Analyse: Das Kategoriensystem stellt das zentrale Instrument für die Analyse dar. Es kann durch theoretische Überlegungen hergeleitet werden (deduktive Kategorienbildung) oder (als Ergebnis der Analyse) durch Zusammenfassung aus dem Material extrahiert werden (induktive Kategorienbildung).

- Gegenstandsbezug statt Technik: Die gewählte Verfahrensweise ist auf den jeweiligen Gegenstand zu beziehen und muss sich am Material als adäquat erweisen. Die Grundverfahren (zum Beispiel Zusammenfassung, Explikation, Strukturierung) können für die konkrete Studie modifiziert und kombiniert werden.

- Überprüfung der spezifischen Instrumente durch Pilotstudien: Die Verfahrensweise muss in einer Pilotstudie (durch Probedurchläufe) getestet werden. Die Ablaufmodelle sehen hierzu Rücklaufschleifen (zum Beispiel zur Revision des Kategoriensystems) vor.

- Theoriegeleitetheit der Analyse: Der Stand der Forschung (den Gegenstand der Analyse betreffend) wird bei der Explizierung der Fragestellung und bei Verfahrensentscheidungen herangezogen.

- Einbezug quantitativer Analyseschritte: Im Analyseprozess sind die Punkte anzugeben, an denen quantitative Analyseschritte sinnvoll eingebaut werden können.

- Gütekriterien: Objektivität, Validität (Gültigkeit) und Reliabilität (Zuverlässigkeit) werden nachvollziehbar durch Theoriegeleitetheit und Dokumentation der Verfahrensentscheidungen. Bei Auswertung des Materials durch mehrere Personen, ist die sogenannte *Intercoderreliabilität* ein Maß für die einheitliche Anwendung des Kodierleitfadens.

B.2. Ablaufmodell der Analyse

Das allgemeine inhaltsanalytische Ablaufmodell ist in Abbildung B.1 dargestellt. Es beschreibt die Schritte, die unabhängig von der konkreten Ausgestaltung der Analyse durchlaufen werden.

Mit den ersten drei Schritten wird das Ausgangsmaterial bestimmt und gewürdigt. Hierzu gehören die Festlegung des Materials (wie ist die Auswahl zustande gekommen?), die Analyse der Entstehungssituation (von wem für wen unter welchen Bedingungen wurde das Material produziert?) und die Angabe formaler Charkteristika des Materials (handelt es sich zum Beispiel um original geschriebenen Text oder um Tonaufzeichnungen, die nach bestimmten Regeln transskribiert wurden?).

Mit der Richtung der Analyse (vierter Schritt) wird festgelegt, auf welchen Teil im Kommunikationsprozess sich die Materialanalyse und die anschließende Interpretation richtet, das heißt, ob etwas über den Gegenstand des Textes (zum Beispiel den soziokulturellen Hintergrund) ausgesagt werden soll oder über den Textverfasser (Kommunikator) oder die Zielgruppe der Kommunikation (Rezipienten). Geht es um den Kommunikator, so können wiederum unterschiedliche Aspekte von Interesse sein. Nach Mayrings inhaltsanalytischem Kommunikationsmodell (vgl. Mayring 2015, S. 59) sind dies

- Emotionaler Hintergrund: emotionaler Zustand; emotionale Beziehungen zu den Interagierenden; emotionaler Bezug zum Gegenstand

- Kognitiver Hintergrund: Bedeutungshorizont; Wissenshintergrund; Erwartungen, Interessen, Einstellungen

- Handlungshintergrund: Intentionen, Pläne; Machtressourcen; bisherige Handlungen, auf Interagierende und Gegenstand bezogen

Die Differenzierung der Fragestellung (fünfter Schritt) ergibt sich theoriegeleitet aus der gestellten Forschungsfrage, die damit in verschiedene Unterfragen aufgefächert wird, um alle relevanten Aspekte abzudecken.

Abhängig vom Gegenstand und von der Fragestellung (bzw. der jeweiligen Unterfrage) werden die passende Analysetechnik, das konkrete Ablaufmodell und das Kategoriensystem festgelegt (sechster Schritt). Diese Verfahrensentscheidungen können je Unterfrage unterschiedlich getroffen werden. Die verschiedenen Analysetechniken werden in Abschnitt B.2.1 erläutert.

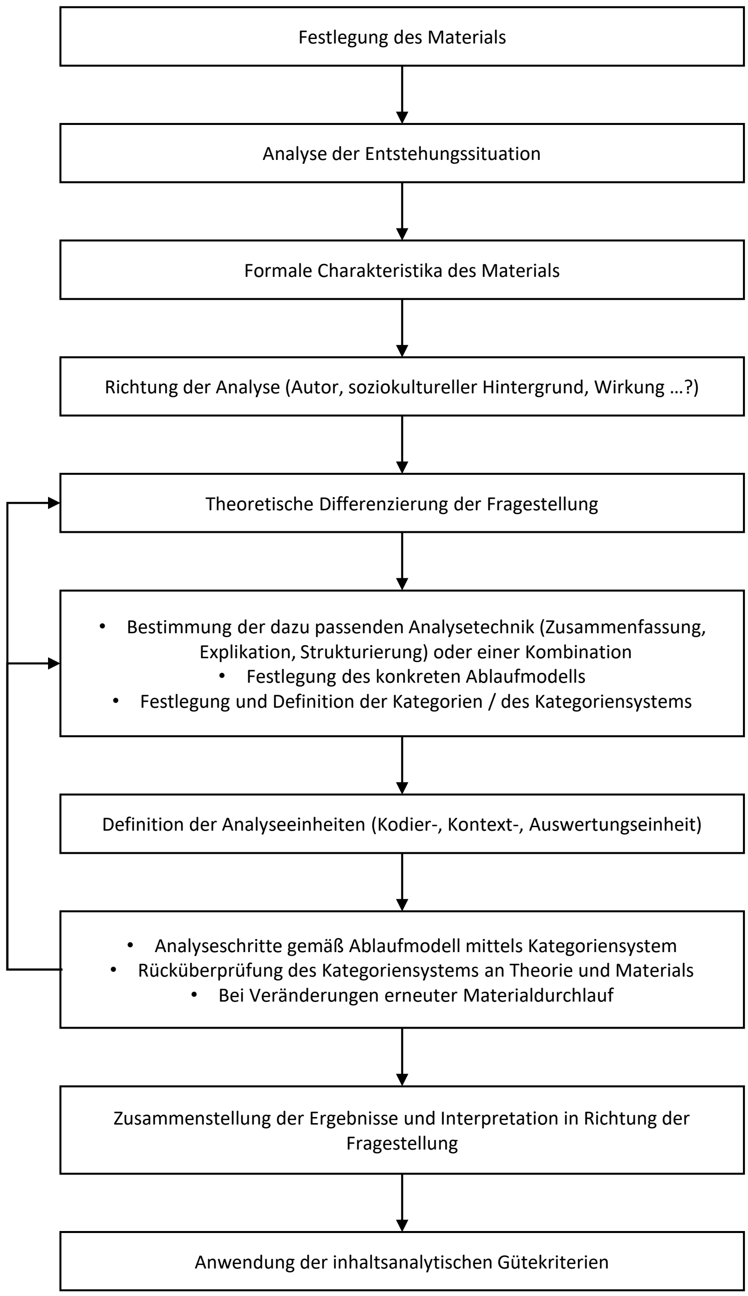

Abbildung B.1.: Allgemeines inhaltsanalytisches Ablaufmodell (Mayring 2015, S. 62)

Um die Präzision der Analyseinhalte zu erhöhen, werden im siebten Schritt *Analyseeinheiten* festgelegt, was insbesondere für quantitative Analyseschritte wichtig ist. Mayring definiert dazu folgende Analyseeinheiten:

- Die *Kodiereinheit* legt fest, welches der kleinste Materialbestandteil ist, der ausgewertet werden darf, was der minimale Textteil ist, der unter eine Kategorie fallen kann.
- Die *Kontexteinheit* legt den größten Textbestandteil fest, der unter eine Kategorie fallen kann.
- Die *Auswertungseinheit* legt fest, welche Textteile jeweils nacheinander ausgewertet werden.

(Mayring 2015, S. 61)

Die anschließende Durchführung der Analyse (achter Schritt) sieht eine Rücküberprüfung und ggf. eine Veränderung des Kategoriensystems mit erneutem Materialdurchlauf vor. Eine Veränderung ist immer dann erforderlich, wenn sich das vorab festgelegte Kategoriensystem nicht als zielführend im Hinblick auf die Fragestellung oder in Bezug auf die Gütekriterien erweist (zum Beispiel durch eine unzureichende Intercoderreliabilität). Zum Schluss werden die Ergebnisse der Analyse zusammengestellt und interpretiert (neunter Schritt) unter Anwendung der Gütekriterien (zehnter Schritt).

B.2.1. Qualitative Techniken

Die qualitative Inhaltsanalyse ist keine feststehende Technik. Sie bedient sich aber bestimmter Grundtechniken (Grundformen des Interpretierens), die je nach Forschungsfrage und Material ausgewählt und ggf. angepasst oder kombiniert werden können. Diese Grundtechniken werden von Mayring folgendermaßen angegeben und beschrieben:

Zusammenfassung: Ziel der Analyse ist es, das Material so zu reduzieren, dass die wesentlichen Inhalte erhalten bleiben, durch Abstraktion einen überschaubaren Corpus zu schaffen, der immer noch ein Abbild des Grundmaterials ist.

Explikation: Ziel der Analyse ist es, zu einzelnen fraglichen Textteilen (Begriffen, Sätzen, . . .) zusätzliches Material heranzutragen, das das Verständnis erweitert, das die Textstelle erläutert, erklärt, ausdeutet.

Strukturierung: Ziel der Analyse ist es, bestimmte Aspekte aus dem Material herauszufiltern, unter vorher festgelegten Ordnungskriterien einen Querschnitt durch das Material zu legen oder das Material aufgrund bestimmter Kriterien einzuschätzen.

(Mayring 2015, S. 67)

Ich beschränke mich darauf, die in dieser Arbeit verwendeten Techniken der Zusammenfassung (zur induktiven Kategorienbildung) und der Strukturierung (bei deduktiver

Kategorienanwendung) genauer darzustellen. Letztere wird angewendet, um die Einstellung der Lehrenden gegenüber dem Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Lehre zu strukturieren (siehe Abschnitt 4.4.2). Mit der Technik der Zusammenfassung werden die Kategorien zur Erfassung der Argumente für bzw. gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis gebildet (siehe Abschnitt 4.4.3).

B.2.2. Zusammenfassung und induktive Kategorienbildung

Abbildung B.2 zeigt das Ablaufmodell der zusammenfassenden Inhaltsanalyse. Die Zusammenfassung wird in vier Schritten (Paraphrasierung, Generalisierung, erste und zweite Reduktion) nach jeweils vorher festgelegten Regeln vorgenommen (in Abbildung B.2 als Z1- bis Z4-Regeln bezeichnet). Ein konkretes Regelsystem wird in Tabelle B.1 angegeben.

Die *Paraphrasierung* dient dazu, die relevanten Textstellen auf eine einheitliche Sprachebene zu bringen. Mit der *Generalisierung* werden die Paraphrasen auf ein einheitliches Abstraktionsniveau gebracht. Die *Reduktion* soll aus den generalisierten Paraphrasen das Wesentliche herausziehen. Dazu wird auf verschiedene Zusammenfassungsstrategien (Makrooperatoren) zurückgegriffen (vgl. Mayring 2015, S. 45-47): *Selektion* (nur zentral inhaltstragende Paraphrasen übernehmen), *Bündelung* (verstreut liegende Propositionen zusammenfassend wiedergeben), *Konstruktion* (eine Folge von Propositionen durch eine neue, umfassende ersetzen), *Integration* (aus einer Folge von Propositionen die umfassende auswählen).

Die Technik der Zusammenfassung wird insbesondere zur induktiven Kategorienbildung benutzt, um das Kategoriensystem für die Analyse direkt aus dem Material abzuleiten. Hierfür ist es wichtig, das Thema der Kategorienbildung (als *Selektionskriterium* für relevante Textstellen) und das bei der Zusammenfassung angestrebte *Abstraktionsniveau* anzugeben. Beides ergibt sich theoriegeleitet aus der Fragestellung bzw. dem Ziel der Analyse. Beim Durcharbeiten des Materials wird jede selektierte Textstelle entweder in eine bereits gebildete Kategorie einsortiert (*Subsumption*) oder als neue Kategorie aufgenommen.

Das Prozessmodell der induktiven Kategorienbildung ist in Abbildung B.3 dargestellt.

B.2.3. Strukturierung und deduktive Kategorienanwendung

Bei der Grundtechnik der Strukturierung unterscheidet Mayring vier Formen:

- Eine *formale Strukturierung* will die innere Struktur des Materials nach bestimmten formalen Strukturierungsgesichtspunkten herausfiltern.
- Eine *inhaltliche Strukturierung* will Material zu bestimmten Themen, zu bestimmten Inhaltsbereichen extrahieren und zusammenfassen.
- Eine *typisierende Strukturierung* will auf einer Typisierungsdimension einzelne markante Ausprägungen im Material finden und diese genauer beschreiben.

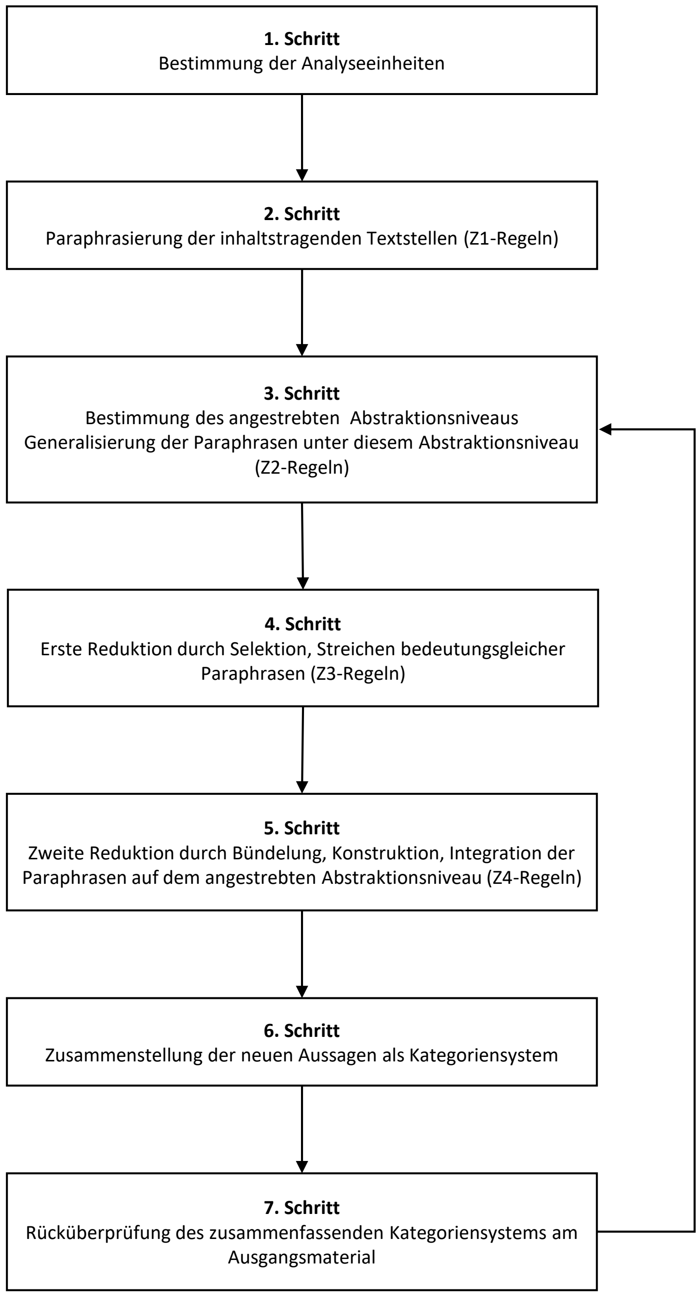

Abbildung B.2.: Ablaufmodell zusammenfassender Inhaltsanalyse (Mayring 2015, S. 70)

Tabelle B.1.: Regelsystem für die zusammenfassende Inhaltsanalyse (Mayring 2015, S. 72)

Z1:	**Paraphrasierung**
Z1.1:	Streiche alle nicht (oder wenig) inhaltstragenden Textbestandteile wie ausschmückende, wiederholende, verdeutlichende Wendungen!
Z1.2:	Übersetze die inhaltstragenden Textstellen auf eine einheitliche Sprachebene!
Z1.3:	Transformiere sie auf eine grammatikalische Kurzform!
Z2:	**Generalisierung auf das Abstraktionsniveau**
Z2.1:	Generalisiere die Gegenstände der Paraphrasen auf die definierte Abstraktionsebene!
Z2.2:	Generalisiere die Satzaussagen (Prädikate) auf die gleiche Weise!
Z2.3:	Belasse die Paraphrasen, die über dem angestrebten Abstraktionsniveau liegen!
Z2.4:	Nimm theoretische Vorannahmen bei Zweifelsfällen zu Hilfe!
Z3:	**Erste Reduktion**
Z3.1:	Streiche bedeutungsgleiche Paraphrasen innerhalb der Auswertungseinheiten!
Z3.2:	Streiche Paraphrasen, die auf dem neuen Abstraktionsniveau nicht als wesentlich inhaltstragend erachtet werden!
Z3.3:	Übernehme [sic!] die Paraphrasen, die weiterhin als zentral inhaltstragend erachtet werden (Selektion)!
Z3.4:	Nimm theoretische Vorannahmen bei Zweifelsfällen zu Hilfe!
Z4:	**Zweite Reduktion**
Z4.1:	Fasse Paraphrasen mit gleichem (ähnlichen) Gegenstand und ähnlicher Aussage zu einer Paraphrase (Bündelung) zusammen!
Z4.2:	Fasse Paraphrasen mit mehreren Aussagen zu einem Gegenstand zusammen (Konstruktion/Integration)
Z4.3:	Fasse Paraphrasen mit gleichem (ähnlichen) Gegenstand und verschiedener Aussage zu einer Paraphrase (Konstruktion/Integration) zusammen!
Z4.4:	Nimm theoretische Vorannahmen bei Zweifelsfällen zu Hilfe!

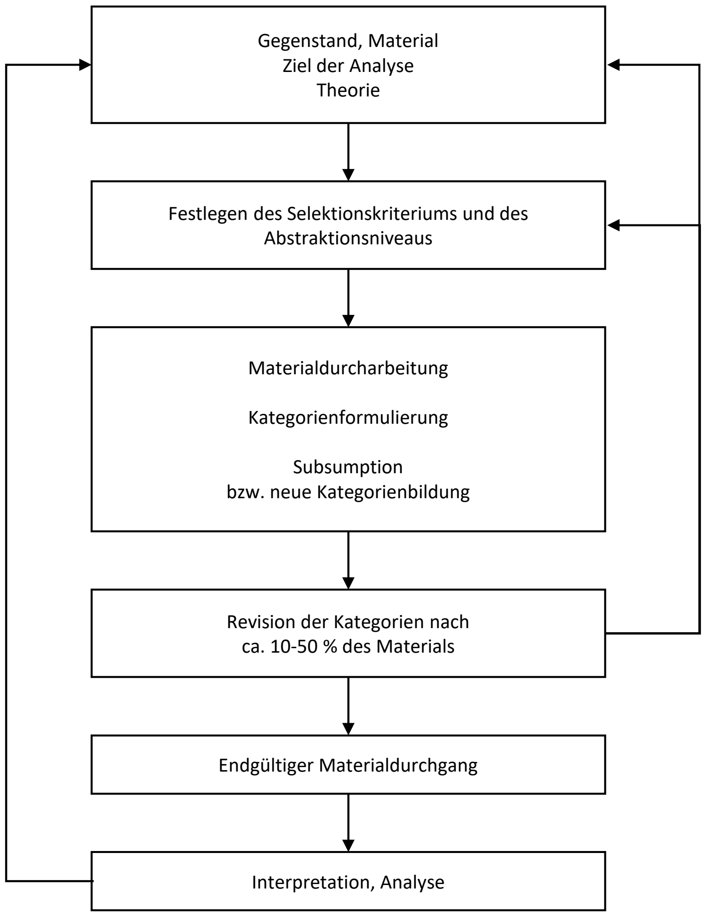

Abbildung B.3.: Prozessmodell induktiver Kategorienbildung (Mayring 2015, S. 86)

- Eine *skalierende Strukturierung* will zu einzelnen Dimensionen Ausprägungen in Form von Skalenpunkten definieren und das Material daraufhin einschätzen.

(Mayring 2015, S. 99)

Für die in Abschnitt 4.4.2 genutzte skalierende Strukturierung gibt Abbildung B.4 das Ablaufmodell wieder.

Nach der Bestimmung der Analyseeinheiten (erster Schritt) werden im zweiten Schritt theoriegeleitet *Einschätzungsdimensionen* (Variablen) und im dritten Schritt für jede Variable *Ausprägungen* auf einer Ordinalskala festgelegt (zum Beispiel niedrig – mittel – hoch). Diese Ausprägungen oder Skalenpunkte bilden das Kategoriensystem für die Analyse. Dabei sind auch Restkategorien (zum Beispiel „nicht eindeutig" oder „weder-noch") vorzusehen.

Im vierten Schritt wird der Kodierleitfaden erstellt, bestehend aus einer möglichst genauen *Definition* der Kategorien, *Ankerbeispielen* (Textstellen, die besonders eindeutig zugeordnet werden können) und *Kodierregeln* (die eine eindeutige Zuordnung ermöglichen, wo Abgrenzungsprobleme zwischen den Kategorien bestehen).

In den nächsten beiden Schritten werden die Fundstellen im Material bezeichnet und anhand des Kodierleitfadens eingeschätzt, also jeweils einer Kategorie zugeordnet. Mit dem siebten Schritt ist eine Überprüfung und, sofern erforderlich, Revision des Kategoriensystems vorgesehen. Im achten Schritt folgt die Auswertung der durchgeführten Einschätzungen.

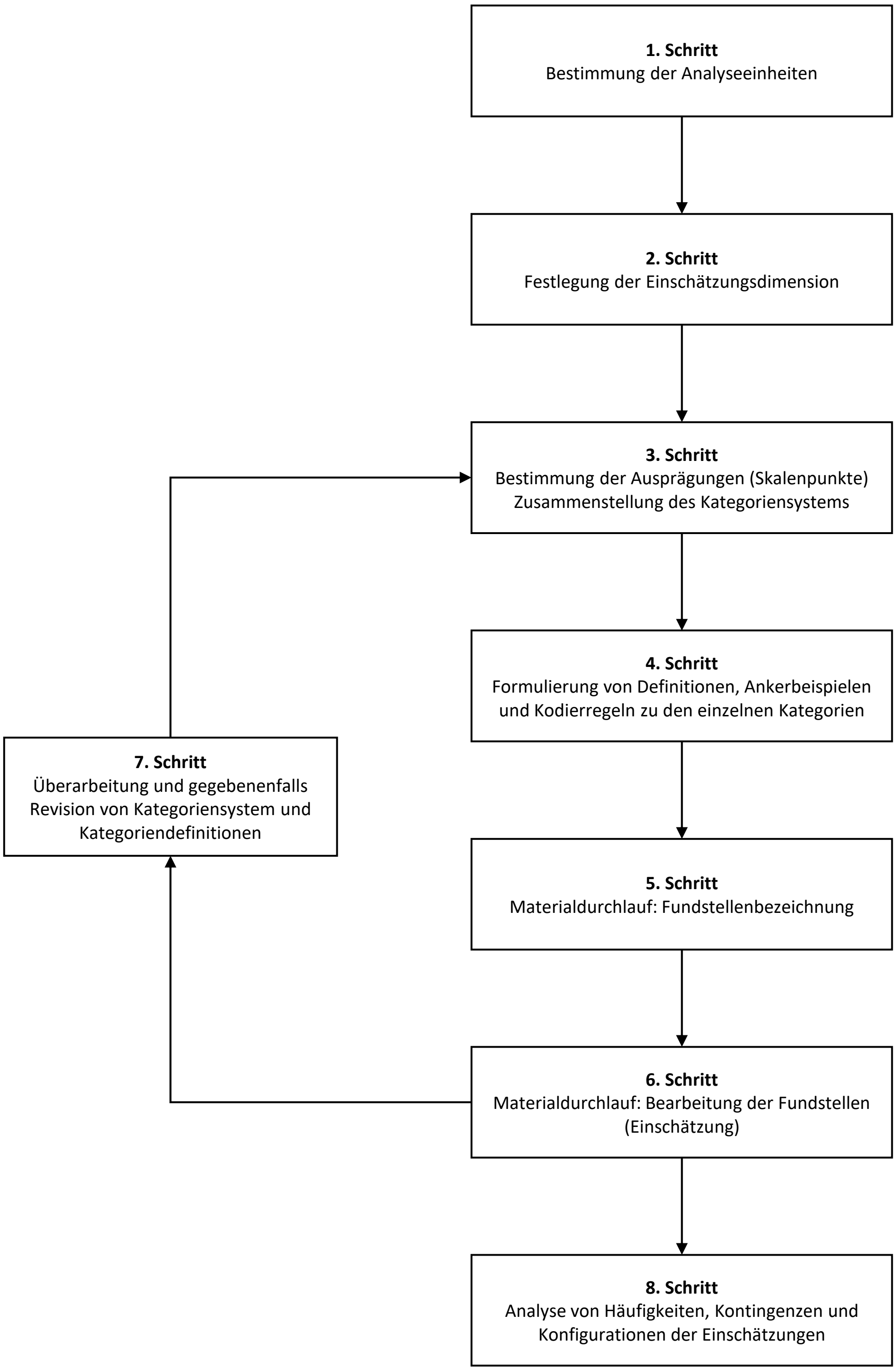

Abbildung B.4.: Ablaufmodell skalierender Strukturierung (Mayring 2015, S. 107)

C. Vollständige Liste der Antworten aus der Umfrage

Dieser Anhang enthält die vollständigen Antworten der befragten Analysis-Lehrenden auf die folgenden Fragen:

(IF1) Berücksichtigen Sie in Ihren Vorlesungen zur Analysis I/II auch Elemente oder Methoden der Nichtstandardanalysis?

(IF2) Könnte nach Ihrer Einschätzung Nichtstandardanalysis in der Lehre sinnvoll eingesetzt werden (evtl. ergänzend zu den Standardvorlesungen, z. B. als Proseminar)?

(IF3) Welches sind die Hauptgründe für Ihre Einschätzung?

Die Antworten sind dementsprechend jeweils mit *Antwort 1*, *Antwort 2* bzw. *Antwort 3* bezeichnet oder, wenn die Interviewfragen 2 und 3 zusammen beantwortet wurden, mit *Antwort 2/3*. Einige der Befragten haben nur die erste Frage beantwortet.

Aus Gründen der Anonymisierung wurden im Text Ortsnamen durch [Ort], Hochschulnamen durch [Hochschule], Personennamen durch [Name], Namen von Bundesländern durch [Bundesland] und konkrete Hyperlinks durch [Hyperlink] ersetzt, wenn sie Rückschlüsse auf den Verfasser der Antwort zuließen.

Fundstellenbezeichnung. Im Rahmen der qualitativen Inhaltsanalyse wurden die Fundstellen im Text in eckige Klammern gesetzt und mit kleinen Superskripten gekennzeichnet, und zwar bei der skalierenden Strukturierung (siehe Abschnitt 4.4.2) mit den Superskripten gv, ev, sv, al für die Einschätzungsdimensionen GV (Grundvorlesung), EV (Ergänzende Veranstaltung), SV (Spezialveranstaltung) bzw. Allg. (Lehre allgemein), und bei der zusammenfassenden Inhaltsanalyse (siehe Abschnitt 4.4.3) mit dem Superskript b (für *Begründung*). Die weitere Bearbeitung der Fundstellen mit Superskript b im Rahmen der zusammenfassenden Inhaltsanalyse ist in Anhang D dokumentiert.

Beispiele für Fundstellenbezeichnungen:

> [Non-Standard Analysis ist ein schönes Themengebiet, das sowohl als Proseminar oder Seminarthema in Frage kommt, als auch als Thema einer breitenbildenden Vorlesung in unserem Bachelorstudium.]$^{\mathrm{ev}}$

für eine Fundstelle zur Einschätzungsdimension EV (Ergänzende Veranstaltung) bei der skalierenden Strukturierung zu Forschungsfrage 2.

> [Z.B. Beweise über Stetigkeit und stetige Funktionen lassen sich mit der Nichtstandardanalysis eleganter und intuitiver führen als mit der epsilon-delta Charakterisierung.][b]

für eine Fundstelle zur zusammenfassenden Inhaltsanalyse zu Forschungsfrage 3.

Kodierung. Die Einschätzung der Fundstellen bei der skalierenden Strukturierung ist jeweils im Anschluss an die Antworten unter *Kodierung* angegeben (Ausprägungen gemäß Tabelle 4.2). Neben den Einschätzungsdimensionen GV (Grundvorlesung), EV (Ergänzende Veranstaltung), SV (Spezialveranstaltung) bzw. Allg. (Lehre allgemein) steht jeweils die Ausprägung (gut geeignet / möglich / weniger geeignet / nicht geeignet / ambivalent). Ist für eine Einschätzungsdimension keine Fundstelle vorhanden, steht dort ein Strich (-). Zum Beispiel bedeutet die Kodierung

GV: nicht geeignet EV: gut geeignet SV: - Allg.: -

dass die befragte Person den Einsatz von Nichtstandardanalysis für Grundvorlesungen als nicht geeignet einschätzt, für ergänzende Veranstaltungen als gut geeignet und dass sie keine Aussagen macht, die sich auf Spezialveranstaltungen oder die Lehre allgemein beziehen.

P01

Antwort 1: Ich benutze keine Nichtstandard Analysis.

P02

Antwort 1: Wenn es um die von mir selbst gehaltenen Vorlesungen zur Analysis im ersten Studienjahr geht, kann ich die Frage mit Nein beantworten. [Die inhaltlichen Vorgaben lassen zur Zeit keinen Raum, um neben den klassischen Ansätzen Aspekte der Non-Standard Analysis einzubauen.][b] Wenn Sie mich als Studiendekan des Fachbereichs Mathematik angeschrieben haben, um zu erfahren, was in [Ort] in den Studiengängen gemacht wird, dann kann ich die Frage nur zum Teil beantworten. In unseren Modulbeschreibungen ist Non-Standard Analysis derzeit in keinem Modul vorgesehen, ich kann aber nicht mit Sicherheit, ob nicht der eine oder andere Kollege sie dennoch erwähnt.

Antwort 2: [Non-Standard Analysis ist ein schönes Themengebiet, das sowohl als Proseminar oder Seminarthema in Frage kommt, als auch als Thema einer breitenbildenden Vorlesung in unserem Bachelorstudium.][ev]

Antwort 3: Die Hauptgründe wofür? Die Non-Standard Analysis nicht in den ersten beiden Studienjahren ins Curriculum einzubauen? [[Die Analysis mit Grenzwertbildung zu ersetzen durch die Non-Standard Analysis, wäre nicht sinnvoll, da ein solides Verständnis des Grenzwertbegriffs für nahezu alle mathematischen Gebiete wichtig ist.][b]

[Die Non-Standard Analysis als zweiten Zugang parallel ins Curriculum der ersten beiden Studienjahre aufzunehmen, scheitert an dem zur Verfügung stehenden zeitlichen Rahmen.][b]][gv] [Es gibt viele andere Themengebiete, die derzeit als wichtiger eingeschätzt werden.][b]

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: gut geeignet SV: - Allg.: -

P03

Antwort 1: Ich verwende keine Methoden der Nichtstandard-Analysis.

Antwort 2: [Eher nicht.][al]

Antwort 3: [Ich sehe den Mehrwert nicht wirklich.][b] [Es gibt viele andere (aus meiner Sicht interessantere) Themen, wie Topologie, Geometrie und dynamische Systeme die sich alle für Proseminare eignen.][b]

Kodierung: GV: - EV: - SV: - Allg.: nicht geeignet

P04

Antwort 1: Die Antwort zu Ihrer Frage lautet: nein.

P05

Antwort 1: Nichtstandard-Analysis spielt in [Ort] in Analysis keine Rolle und wird auch nicht thematisiert.

P06

Antwort 1: Diese Themen spielen in meinen Analysis-Vorlesungen gar keine Rolle, sie kommen nicht vor.

P07

Antwort 1: Ich kann Ihnen schnell antworten. In meinen Vorlesungen benutze ich nicht die Nichtstandard-Analysis.

P08

Antwort 1: Nein, spielt für mich keine Rolle.

P09

Antwort 1: Nichtstandard-Analysis spielt in meiner Analysis-I-II-Vorlesung keine Rolle.

Antwort 2/3: Letztlich ist es immer eine Frage nach Prioritäten, um den Stoffumfang nicht weiter oder unnötig zu vergrößern bzw. um an die eigenen Forschungsgebiete heranführen zu können.

P10

Antwort 1: Ich berücksichtige in meinen Vorlesungen zur Analysis I/II leider keine Elemente oder Methoden der Nichtstandard-Analysis. Möchte Ihnen dies auch detailliert begründen: [In den Analysis 1+2 Vorlesungen zu Beginn des Studiums halte ich es nicht für sinnvoll, die Nichtstandard-Analysis zu lehren.][gv] Für die meisten unserer [Ort] Mathe-Studierenden bedeutet schon die Umstellung von Schulmathematik auf die Hochschulmathematik eine Herausforderung. [Da die Nichtstandard-Analysis sehr umfassend ist, bräuchte man gewisse mathematische Vorkenntnisse, die man nicht im Curriculum von Schulen wiederfindet.][b] Wie z.B. Definitionen von Filter, Ultrafilter, Äquivalenzklassen, Erweiterungskörper, infinitesimal benachbart usw. [Das wäre sub summarum für die meisten unserer Mathe-Studierenden (leider) eine Überforderung.][b] [Die Einführung des hyperreellen Zahlensystems beinhaltet zudem einen hohen Grad an Abstraktion.][b] [Ich könnte mir aber vorstellen, dass Nichtstandard-Analysis im weiteren Verlauf des Mathe-Studiums als Wahlfach oder als Vertiefung in die Analysis angeboten wird.][ev] Zum Schnuppern für interessierte Studierende. Man bräuchte m.E. sowieso eine eigene Vorlesung, um der Nichtstandard-Analysis umfassend gerecht zu werden. [Hat man die Vorarbeit erstmal geleistet und ist mit der Nichtstandard-Analysis vertraut, sehe ich signifikante Vorteile bzgl. des besseren Verstehens für Studierende.][b] [Z.B. Beweise über Stetigkeit und stetige Funktionen lassen sich mit der Nichtstandard-Analysis eleganter und intuitiver führen als mit der epsilon-delta Charakterisierung.][b]

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: gut geeignet SV: - Allg.: -

P11

Antwort 1: Ich habe bisher nicht die Analysis-Vorlesung für Mathematiker gegeben. Ich schicke Ihnen im Anhang die offizielle Modulbeschreibung der Analysis I/II Vorlesung - vielleicht hilft Ihnen das weiter (sieht sehr standard aus).

P12

Antwort 1: In meinen Analysisvorlesungen spielt die Nichtstandard-Analysis keine Rolle.

Antwort 2/3: [Die Nichtstandard-Analysis (mit der ich mich selbst noch als Student tatsaechlich in einem Proseminar einmal zumindest oberflaechlich beschaeftigt habe), spielt nach meiner Einschaetzung in der modernen Mathematik keine wesentliche und sicherlich keine tragende Rolle.][b] [Ich wuerde daher Veranstaltungen dazu als nicht so wichtig ansehen. Ob „sinnvoll“ oder nicht, das kann ich nicht sagen. Es ist aus meiner Sicht auch nichts Schlimmes daran, sich mit der Nichtstandard-Analysis zu beschaeftigen.][al]

Kodierung: GV: - EV: - SV: - Allg.: weniger geeignet

P13

Antwort 1: In meiner Analysis I/II verwende ich keine Konzepte der Nichtstandard-Analysis.

Antwort 2/3: Danke für Ihre Nachricht. [Ich denke, dass sich das Thema sicherlich für ein Proseminar o.Ä. eignen würde.][ev] [Hauptgrund dafür ist ein potentiell besseres Verständnis dafür, wie mit Grenzwerten (gegen 0 und gegen unendlich) formal korrekt gerechnet werden kann.][b]

Kodierung: GV: - EV: gut geeignet SV: - Allg.: -

P14

Antwort 1: Die Antwort auf Ihre Frage lautet: nein.

P15

Antwort 1: Vielen Dank für Ihre Anfrage. [Ich habe gerade die Analysis-I-Vorlesung gehalten. Ich habe dabei KEINE Nichtstandard-Analysis unterrichtet. [Da der Zeitplan recht eng ist, wäre dafür auch bei meiner Vorlesungsplanung keine Zeit dafür gewesen.][b]][gv] Ich weiß, dass sich [Name] als Student für Nichtstandard-Analysis interessiert hat. Vielleicht wäre er für Sie ein guter Ansprechpartner.

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: - SV: - Allg.: -

P16

Antwort 1: An der [Hochschule] beginnen wir die Analysis-Ausbildung mit den Peano-Axiomen und konstruieren dann die ganzen sowie die rationalen Zahlen mit Hilfe von Äquivalenzklassen. Die reellen Zahlen werden, je nach Lehrkraft, mit Hilfe von Intervallschachtelungen oder Dedekindschen Schnitten eingeführt. Sobald die reellen Zahlen bereitstehen, wird der Grenzwertformalismus ganz klassisch diskutiert. Elemente der Nichtstandard-Analysis spielen also in unserer Analysis-Ausbildung keine Rolle. Trotzdem bin ich an Ihren Ergebnissen interessiert. Welche Vorteile ergeben sich für SchülerInnen und Studierende (oder aber auch für Lehrende), wenn Elemente der Nichtstandard-Analysis mit diskutiert werden?

P17

Antwort 1: In der Vorlesung spielt Nichtstandard-Analysis keine Rolle. Allerdings habe ich bereits ein Proseminar zur Nichtstandard-Analysis nach dem Buch von Alain Robert abgehalten, an dem sich auch einige Lehramtsstudierende beteiligt haben.

Antwort 2: [[In der Vorlesung wuerde ich die NSA aus Zeitgruenden nicht einsetzen.]^{b} Sie kann meiner Meinung auch die Standardanalysis nicht ersetzen.]^{gv} [Das liegt zum einen an der geringeren Verbreitung]^{b} und [zum anderen an der vergleichsweise kleinen Zahl geeigneter Lehrbuecher.]^{b} [Je nach Zugang wird auch die Notation muehsam und eher hinderlich.]^{b} [Als Stoff fuer ergaenzende Vorlesungen und Seminare finde ich sie aber sehr gut.]^{ev}

Antwort 3: Mir hat der Zugang ueber die Internal Set Theory gut gefallen. [Auf diese Weise sind die Studierenden einmal explizit mit der mengentheoretischen Begruendung der Mathematik in Beruehrung gekommen. Dabei treten auch erstaunliche Dinge wie Eigenschaften endlicher Mengen auf.]^{b} Das Niveau der Studierenden war natuerlich sehr unterschiedlich, und bei einigen waren die Grundlagen in der „herkoemmlichen“ Mathematik so schwach, dass sie das Seminar sicher nicht mit Gewinn besucht haben. [Bei den meisten hatte ich einen positiven Eindruck. Sie konnten mit den Argumenten der NSA ebenso gut umgehen wie mit der Standardmathematik.]^{ev} Ob der aktive Vergleich der verschiedenen Zugaenge zur Analysis durchgefuehrt wurde, kann ich nicht einschaetzen. (Viele der behandelten Themen hatten kein direktes Gegenstueck in der Standardvorlesung.) [Auf jeden Fall hatte ich nicht den Eindruck, dass jemand durch die NSA verwirrt wurde.]^{ev}

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: gut geeignet SV: - Allg.: -

P18

Antwort 1: Danke für Ihre Nachfrage; ich benutze keine Nichtstandard-Analysis in meiner Lehre, wünsche Ihnen aber viel Erfolg mit Ihrem Projekt.

P19

Antwort 1: Obwohl ich es interessant finde, habe ich das nie streng gemacht und bin letztlich auch Laie. So beschränkt es sich bei mir nur darauf, beim Rechnen a la

Leibniz-Kalkül zu erwähnen, dass man das auch rigoros machen kann und das Wort Nichtstandard-Analysis zu erwähnen.

Antwort 2: [Ja, könnte, [aber nur ergänzend und nicht zu früh, z.B. Ende Bsc oder im Msc.]^{gv}]^{ev}

Antwort 3: [Es würde aus meiner Sicht Anfänger zu sehr verwirren, die Nichtstandard-Analysis parallel zur klassischen zu lehren]^{b} und [da die Nichtstandard-Analysis ein sehr randständiges Dasein hat (zumindest derzeit) sollte die klassische den Vorrang haben.]^{b} Ferner, ich mag mich täuschen, aber [der einfachste/direkteste Weg benötigt wohl Ultrafilter und damit ein Konzept, das schon recht abstrakt ist.]^{b} Um ehrlich zu sein: [vor die Wahl gestellt würde ich bei freien Ressourcen wohl eher eine Veranstaltung zu mathematischer Logik und Mengenlehre empfehlen]^{ev}, damit der klassische Weg auch mal vollständiger gemacht wird. Allerdings wäre es im Falle einer Veranstaltung zu Nichtstandard-Analysis hilfreich didaktisch durchdachte Materialen zur Verfügung zu haben, daher wünsche ich viel Erfolg.

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: weniger geeignet SV: - Allg.: -

P20

Antwort 1: Das ist eine interessante Forschungsfrage. Zu Ihrer Anfrage: ... Nein.

Antwort 2: [Als Proseminar kann ich mir das gut vorstellen]^{ev}, [als größeres Thema der Standardvorlesung eher nicht.]^{gv}

Antwort 3: [Hier spielen für mich primär die historischen Gegebenheiten eine Rolle: Die Anwendungen der Analysis in den meisten Bereichen basieren auf den klassischen Epsilon-Delta-Zugängen, sodass die Studierenden darin hinreichend geübt sein sollten.]^{b}

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: gut geeignet SV: - Allg.: -

P21

Antwort 1: Nein, mache ich nicht.

P22

Antwort 1: In meinen Vorlesungen Analysis 1&2 werden keine Methoden der Nichtstandard-Analysis verwendet.

Antwort 2: [[Im strengen Sinn nur bei sehr guten, fortgeschrittenen und interessierten Studierenden, nicht schon in einem Proseminar.][sv] In einem intuitiven Sinn kann die Vorstellung und der Einsatz von „infinitesimalen Größen“ hilfreich sein.][al]

Antwort 3: Die reellen Zahlen werden aus Zeitgründen meist axiomatisch eingeführt. Vor einer Erweiterung des Zahlkörpers auf hyperreelle Zahlen sollten die Studierenden den Aufbau des Zahlsystems verstanden haben, also die Peano-Axiome und dann die Konstruktion der Mengen der ganzen, rationalen, reellen Zahlen. Dies verlangt schon einen großen gedanklichen Aufwand (insb. den sicheren Umgang mit Äquivalenzklassen, mit Äquivalenzklassen von Äquivalenzklassen, die Konstruktionen von Addition und Multiplikation, die Ordnung, etc.). Das wäre für ein Proseminar geeignet und sinnvoll, insbesondere da diese Zahlsysteme im Alltag (jedenfalls natürliche und rationale Zahlen), in der Schule, in den MINT-Fächern relevant sind. [Natürlich können Vorlesungen und Seminare über Nichtstandardanalysis im Studium angeboten werden. Da Sie aber den Einsatz von Nichtstandardanalysis in Schulprojekten erwähnten, geht es offenbar gar nicht um eine strenge Begründung dieser Methoden, sondern eher um einen intuitiven Umgang mit infinitesimalen Größen, um Begriffe wie Stetigkeit, Ableitung, Integral und deren Rechenregeln zu motivieren. Das kann natürlich hilfreich sein und wird ja in Mathematik und Physik durchaus gemacht (Begriffe wie Volumenelement etc.).][al] [Ein Proseminar, in dem ein Teil des Stoffes aus den Analysisvorlesungen mit intuitiver Nichtstandardanalysis hergeleitet wird, kann sinnvoll sein.][ev] [Die Studierenden würden gleichzeitig den Stoff wiederholen][b] [und Intuition entwickeln.][b] Man bräuchte als Vorlage für die Studierenden ein Lehrbuch, in dem das modellhaft vorgeführt wird (Definitionen und Beweise mit epsilon-delta vs. infinitesimaler Argumentation).

Kodierung: GV: - EV: gut geeignet SV: gut geeignet Allg.: ambivalent

P23

Antwort 1: [Solche Betrachtungen spielen bei uns in [Ort] keine Rolle (egal, welchen Kollegen Sie fragen). [Der Mehrwert ist sehr gering][b] und [die Verwirrung der Studierenden im Gegenzug sehr hoch.][b]][gv]

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: - SV: - Allg.: -

P24

Antwort 1: In meinen Vorlesungen zur Analysis I/II kommen keine Elemente der Nichtstandardanalysis vor.

Antwort 2/3: Aus Ihrer Sicht, habe ich wahrscheinlich ein zu negatives Bild der Nichtstandard-Analysis und Sie können mich vielleicht eines besseren belehren. [Mein bisheriger Eindruck ist, dass man dabei mit viel zusätzlichem notationellem und methodischem

Aufwand, eine alternative Methode bekommt, die Grundlagen der Analysis zu definieren, aber ohne dass sich wirklich neue Erkenntnisse oder eine vereinfachte, leichter zu verstehende, Darstellung, ergeben.][b] [Für mich ist dieser Zweig der Analysis damit einer, der es sicherlich Wert war, untersucht zu werden, der sich aber (bisher?) als eher totes Ende entpuppt hat.][b] [Daher eignet sich das Thema sicherlich z.B. für ein Proseminar, aber meine Motivation dazu wäre reichlich gering.][ev] [Ich vertiefe hier lieber ein Thema, das in der Grundausbildung zu kurz kommt, aber im fortgeschrittenen Analysis-Studium eine Hilfe darstellt. Zumindest hier in [Ort] gilt das definitiv nicht für die Methoden der Nicht-Standardanalysis][b]und auch [in meinem Forschungsumfeld spielen diese keine Rolle.][b]

Kodierung: GV: - EV: weniger geeignet SV: - Allg.: -

P25

Antwort 1: Bei mir ist alles sehr Standard ...

P26

Antwort 1: Diese Idee scheint mir aehnlich zum Einsatz der Mengenlehre in der Schule zu sein. Dieser hat sich in den 1960/1970-er Jahren zu einer Europa-weiten Katastrophe entwickelt: Zuerst im Ursprungsland Westdeutschland und spaeter sogar im Ostblock, wo man fuerchtete, dass die boesen westlichen Imperialisten die Wissenschhaft erobern moechten. [[Zur Nichtstandard-Analysis benoetigt man eine Logik-Vorlesung][b], also kann man erweiterte reelle Achse im ersten Semester nicht unterrichten.][gv] [Nichtstandard-Analysis ist eine geeignete Spezialvorlesung als Ergaenzung zu den Stochastischen Differentialgleichungen und / oder zu einer Vorlesung ueber Brownsche Bewegung.][sv] [Die hyperreellen Zahlen sind fuer eine Grundvorlesung voellig ungeeignet.][gv] Es reicht, dass man irrationale Zahlen rechtfertigen muss.

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: - SV: gut geeignet Allg.: -

P27

Antwort 1: Ich habe viele Jahre in [Bundesland] verbracht, wo 2004 die Leistungskurse abgeschafft wurden, aber demnächst in abgemilderter Form wiederkehren sollen. Jetzt bin ich in [Bundesland], wo es ebenfalls keine Leistungskurse gibt, aber bald wieder (mit angeblich 5 Stunden pro Woche).

Die inhaltlichen Rahmenbedingungen der Schulen sind sicherlich bekannt: in [Bundesland] gibt es seit vielen Jahren keinerlei Mengenbegriff. Es gibt in [Bundesland] und in [Bundesland] keine Quotientenregel der Ableitung, bei der Kettenregel ist in [Bundesland] darauf zu achten, daß die innere Funktion immer linear sein muß. Es geht das

Gespenst eines neuen Lehrplans um in [Bundesland], in dem es heißt, daß von den beiden Funktionen sinus und cosinus nur noch eine im Unterricht vorkommen soll. Das Ministerium schreibt die Lehrpläne hier ohne Input der Fachdidaktiken oder Fachwissenschaften, was diesen Unfug erklärt.

Die Schüler von heute sind die Lehramtsstudenten von morgen, und deren Motivationsniveau ist oft eher niedrig. Es gibt aber auch einige brauchbare Studierende. In der Analysis-I-Klausur hatte ich die Fragen „Beweisen Sie, daß eine Folge reeller Zahlen keine zwei Grenzwerte haben kann“ und „Beweisen Sie durch dreimalige Anwendung der epsilon-delta-Definition: wenn zwei Funktionen u und v an einer Stelle x_0 stetig sind, dann ist dort auch die Funktion $u + 7v$ stetig“.

Mit diesen beiden Fragen kamen die Lehramtsstudierenden recht akzeptabel zurecht. Die zweite Frage war vorher eine Hausaufgabe. Ein befreundeter Lehrer in [Bundesland] hat berichtet (wörtliches Zitat) „Ja, wir machen noch Stetigkeit. Aber nur mit epsilon, auf keinen Fall mit delta!“ Es läuft aber alles recht präformal ab. Lehrer, die die klassische Epsilontik korrekt unterrichten können, sind in [Bundesland] nicht überall zu finden (eine ungefähre Epsilontik reicht ja, und um ein korrektes Epsilontik-Verständnis bei den Schülern zu erreichen, bräuchte man viele Stunden, die man nicht hat). Eine Nichtstandardanalysis ist mir in den Schulen von [Bundesland] nicht bekannt.

An der Uni haben wir alle Hände voll zu tun, die Studierenden auf ein akzeptables Niveau wissenschaftlicher Exaktheit zu bringen nach 12 Jahren Schulbildung, in denen es nur präformal zuging. [[Eine Nichtstandardanalysis würde die Studierenden vollends verwirren.][b]][al]

Ich hoffe, diese Angaben helfen Ihnen irgendwie weiter.

Kodierung: GV: - EV: - SV: - Allg.: nicht geeignet

P28

Antwort 1: Ich kann Ihre Frage gerne beantworten. In meinen Vorlesungen zur Analysis finden Methoden der Nichtstandard-Analysis keinen Platz. [In der Vorlesung Analysis I hat man kaum Zeit für solche Themen.][b] [Und das übliche Argument, dass man durch den Einsatz von Nichtstandard-Methoden den Grenzwertbegriff vermeiden kann, überzeugt mich nicht.][b] [Ich sehe das eher so, dass man diese Theorie zusätzlich kennenlernen kann, aber in den Grundvorlesungen spielt sie kaum eine Rolle.][gv] Die einzige Stelle in der Analysis 1, wo ich ein bisschen in Berührung mit Nichtstandard-Analysis komme, sind die Ableitungsregeln. Dort erwähne ich, wie man formal z.B. die Kettenregel als dy/dx=dy/du du/dx und die Formel für die Ableitung der inversen Funktion als dy/dx = 1/(dx/dy) aufschreiben und sich merken kann. Aber diese Rechnungen werden nur als formale Rechnungen präsentiert.

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: - SV: - Allg.: -

P29

Antwort 1: Die Antwort ist nein, Nichtstandard-Analysis spielt in den Anfängervorlesungen in [Ort] keine Rolle. [Zum einen gibt es ein Curriculum, was den Inhalt der Anfängervorlesungen in wesentlichen Zügen festlegt.][b] [Zum anderen bin ich auch persönlich der Meinung, dass Nichtstandard-Analysis in den Anfängervorlesungen nichts zu suchen hat.][gv] [Ich kann verstehen, wenn dieses Thema in vorgeschrittenen Spezialveranstaltungen behandelt wird][sv], [nur sollten die Anfängerveranstaltungen (insbesondere mit Hinblick auf die knappe zur Verfügung stehende Zeit) Dingen gewidmet bleiben, die in späteren, darauf aufbauenden Veranstaltungen von den meisten Studierenden benötigt werden. Und diese übergreifende Funktion kann ich bei der Nichtstandard-Analysis beim besten Willen nicht erkennen.][b]

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: - SV: möglich Allg.: -

P30

Antwort 1: Nein, ich verwende keine Methoden aus der Nichtstandard-Analysis in den Vorlesungen Analysis I und II.

P31

Antwort 1: Nichtstandard-Analysis findet in meinen Vorlesungen keine Verwendung oder auch nur Erwähnung. (Ich kenne sie aber auch nur als Zaungast.)

[Nichtstandard-Analysis ist m.E. eine der vielen Entwicklungen in der Mathematik oder der Wissenschaft allgemein, die nach einem stürmischen Beginn ihre Bedeutung verloren haben.][b] In der Mathematik müssen sich neu definierte Rahmen und Strukturen durch Lösung eines (möglichst prominenten) Problems, das mit den vorher bekannten Mitteln nicht gelöst werden konnte oder zumindest nur eine obskure, komplizierte Lösung besaß, bewähren. Auch eine wichtige Anwendung einer neuen Technik kann überzeugen. In den 1980er Jahren wurde beispielsweise der Chaostheorie durch vermessene Äußerungen über deren Bedeutung, die dann später nicht zu halten waren, großer Schaden zugefügt. Ähnliche Dinge lassen sich über Wavelets sagen, die in den 1990er Jahren als Wunderwaffe der Harmonischen Analysis gehandelt wurden.

Offen gesagt hielte ich eine Behandlung von Nichtstandard-Analysis im Schulunterricht für eine ziemliche Schnapsidee, denn die Unterrichtszeit ist für solch exotische Inhalte zu knapp bemessen, und in Deutschland -wie übrigens überall in der westlichen Weltliegt das Hauptproblem bei mangelnden kalkulatorischen Fähigkeiten (dazu gab es eine sehr prominent besetzte Veranstaltung am 2.3.2018 am IQB in Berlin).

Antwort 2/3: [Gegen ein Proseminar zur Nichtstandard-Analysis gäbe es von mir aus nichts einzuwenden][ev] – im Gegenteil, m.E. sollten Seminare einerseits zum Erwerb von kommunikativen Kompetenzen und aber andererseits auch zur Vertiefung von Inhalten genutzt werden, die nicht zum Mainstream-Curriculum gehören. Ich biete aus diesem Grund für das zweite Studiensemester z.B. gern ein Proseminar über Matrixanalysis an.

Kodierung: GV: - EV: möglich SV: - Allg.: -

P32

Antwort 1: Hier ganz kurz als Rückmeldung, in meinen Veranstaltungen zur Analysis I und II werden keine Themen der Nichtstandard-Analysis behandelt (wenn man mal von kleinen Bemerkungen zu weiteren Themen der Mathematik an der einen oder anderen geeigneten Stelle absieht).

Antwort 2: [Natürlich ist das vorstellbar, wie z.B. im Rahmen eines (Pro-) Seminars.][ev]

Antwort 3: Da existiert keine Besonderheit bzgl. des von Ihnen genannten Themas. Weiterführende/ergänzende Themen zu den Pflichtveranstaltungen können gerade im Rahmen von Proseminaren thematisiert werden und da wird die vollständige Bandbreite von geeigneten Themen verwendet, wobei natürlich jeder Hochschullehrer sicher seine eigenen Präferenzen hat.

Kodierung: GV: - EV: möglich SV: - Allg.: -

P33

Antwort 1: Bisher nicht. [[Da aus bekannten Gründen die Grundvorlesungen sehr überladen sind][b], [hielt ich dies bisher eher als Stoff für eine Spezialvorlesung][sv]][gv], wie z.B. in diesem Semester an der [Hochschule] vom Kollegen [Name] angeboten: [Hyperlink]

Antwort 2: Um eine solide Einschätzung geben zu können, bin ich zu wenig Experte in NSA. Aber ich nehme Ihre Anfrage als Anregung, um evtl. ein Proseminar oder Seminar zu NSA zu veranstalten.

Antwort 3: Durch Einführung des Bachelors sind die Grundvorlesungen bereits auf ein Mindestmaß an Stoff reduziert, der unbedingt notwendig ist, um weiterführende Vorlesungen zu verstehen. Da ich zu wenig Experte bin, kann ich nicht einschätzen inwiefern die Methoden der NSA auf tiefergehende wichtige Stoffgebiete, wie z.B. Numerik, Funktionalanalysis, Optimierung, Stochastik, etc., bei denen Grenzprozesse eine entscheidende Rolle spielen, schon übertragen sind bzw. sich übertragen lassen. [Die NSA hat sich historisch nie durchgesetzt][b], wofür es vielleicht Gründe gibt, die ich aber, wie ich zugeben muss, nicht wirklich kenne.

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: - SV: möglich Allg.: -

P34

Antwort 1: In der Analysis verwende ich keine Nichtstandard-Analysis.

P35

Antwort 1: Nein, ich werde sie nicht unterrichten.

P36

Antwort 1: [Ich habe vor ein paar Jahren mal ein Proseminar zum Thema NSA für Lehramtsstudierende abgehalten, im wesentlichen aus den Gründen heraus, die Sie auch genannt haben. Das hat eigentlich ganz gut geklappt][ev], aber [dabei ist mir auch aufgefallen, dass für einen rigorosen Einsatz ein nicht unerheblicher aussagenlogischer Apparat benötigt wird (Transferprinzipien, Ultrafilter).][b]

[In der Hochschullehre, speziell in der Analysis I/II, habe ich es daher nicht eingesetzt.][gv]

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: gut geeignet SV: - Allg.: -

P37

Antwort 1: In meiner Vorlesung spielt die Nichtstandard-Analysis keine Rolle.

Antwort 2: [Nein.][al]

Antwort 3: [Ich sehe zur Zeit andere Baustellen an den ueblichen Analysis-Vorlesungen in Deutschland. Sie sind fuer viele Studienanfaenger wegen des Abstraktionsgrads zu anspruchsvoll.][b]

Kodierung: GV: - EV: - SV: - Allg.: nicht geeignet

P38

Antwort 1: Dazu hab' ich zumindest eine Meinung. [Nämlich, dass Nichtstandard-Analysis in der Anfängervorlesung nichts zu suchen hat.][gv] [Die „Standard"-Konzepte sind gerade schwer genug, und so viel wichtiger][b], dass ich die Idee fast schon etwas gruselig finde.

[Man kann ja, wenn man in der Mathematik hinreichend gefestigt ist, durchaus mal spaßeshalber einen Blick in die Nichtstandard-Analysis werfen.][sv] Ich habe vor Jahren mal ein Seminar dazu veranstaltet. [Und dabei gelernt, dass Nichtstandard-Analysis, wenn man sie vernünftig betreibt, kein bisschen einfacher ist als „Standard"-Analysis.][b] Puh, schon für die Existenz der unendlich kleinen Zahlen (d.h. Existenz eines brauchbaren

Modells) brauchte man Ultrafilter, wenn ich mich richtig erinnere. Und dann gibt es immer noch Leute, die das als intuitiveren Zugang verkaufen! Die, die ich kenne, sind allerdings schon emeritiert — mir scheint, dass die Nichtstandard-Analysis ihre Fanbasis deutlich verloren hat in den letzten Jahren. Und leider gab es Leute, für die das fast schon eine Glaubensfrage war. Na ja, dieser Hype ist eh vorbei.

[Für die allermeisten Mathematiker bringt die Nichtstandard-Analysis meiner Meinung nach nichts][b], und [deshalb sollte man BITTE NICHT in der Schule damit experimentieren — und auch nicht in Ana 1+2.][gv] Dass es natürlich auch wunderschön sein kann, steht auf einem anderen Blatt — aber als sooo schön hat es sich im Seminar dann auch nicht herausgestellt. Trotzdem gibt es tolle Sachen in dem Umfeld. Zum Beispiel die von Berlenkamp/Conway/Guy populär gemachte (und auch weitgehend erfundene) kombinatorische Spieltheorie, die den Zahlbegriff nochmal ein bissel erweitert. Dazu hab' ich schon mal ein Proseminar gemacht, mit sehr viel Spaß.

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: - SV: möglich Allg.: -

P39

Antwort 1: In der Tat spielt Nichtstandard-Analysis in meinen Grundlagenveranstaltungen zur Analysis keine Rolle. Ich hoffe, das hilft Ihnen (dennoch) wenigstens ein bisschen weiter.

Antwort 2: [Ich sehe das kritisch, [da ich im Rahmen solcher Ergänzungen viele andere Themen für sinnvoller (bzw. perspektivreicher) halte.][b]][ev]

Antwort 3: S.o.: [Ich halte, kurz gesagt – das mag persönlicher Geschmack sein – Nichtstandard-Analysis nicht für essentiell wichtig mit Blick auf Aufbaufähiges.][b]

Kodierung: GV: - EV: weniger geeignet SV: - Allg.: -

P40

Antwort 1: [[Für diese Themen ist (leider) kein Platz in der Vorlesung.][b]][gv] Ich habe die Kompaktifizierung der Menge der reellen Zahlen erwähnt, mehr aber nicht.

Antwort 2/3: [Ich fühle mich, ehrlich gesagt, nicht kompetent genug hierfür.][b] [Als Proseminar-Thema könnte ich es mir prinzipiell vorstellen.][ev] Ich müsste mich aber selbst erst mal einlesen. Meine Kenntnisse zur Nichtstandard-Analysis sind eher rudimentär.

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: möglich SV: - Allg.: -

P41

Antwort 1: Leider habe ich diese Konzepte in der Vorlesung nicht verwendet.

Antwort 2/3: Ich habe keine klare Meinung zu diesem Thema. [Sicherlich kann es in einem Proseminar behandelt werden.][ev] [[Gegen einen größeren Einsatz in der Vorlesung spricht nach meiner Meinung, dass sich das alte System sehr gut bewährt hat und dass die Vorteile der Nicht-Standard Analysis nicht eindeutig sichtbar sind.][b]][gv]

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: möglich SV: - Allg.: -

P42

Antwort 1: Nichtstandard-Analysis spielt in meiner Vorlesung keine Rolle.

P43

Antwort 1: Haben Sie besten Dank für Ihre Anfrage. Allerdings setze ich keine Elemente oder Methoden der Nichtstandard-Analysis in meinen Vorlesungen zur Analysis ein.

P44

Antwort 1: Nichtstandard-Analysis wird in meinen Analysis-Vorlesungen nicht berücksichtigt. Ich beabsichtige jedoch, irgendwann ein (Pro-)Seminar über Nichtstandard-Analysis anzubieten.

Antwort 2/3: [Sehr viele Studierende – vor allem Lehramtsstudierende – haben große Probleme, den Inhalt der Grundvorlesungen in Analysis zu meistern. [Daher halte ich es nicht für sinnvoll, auch Nichtstandard-Analysis in diesen Vorlesungen zu behandeln.][gv]][b] [Es ist wichtiger, dass die Studierenden solide Kenntnisse der konventionellen Analysis erwerben, bevor sie Ausflüge ins Exotischere machen.][b]

[Seminare und Proseminare sind jedoch für solche weiterführenden Themen geeignet. Insbesondere haben sie den Vorteil, dass sie von den Kernvorlesungen klar abgegrenzt sind. Insofern halte ich Nichtstandard-Analysis für ein passendes (Pro-)seminarthema.][ev] Zum Vergleich: Andere für mich interessante Themen für (Pro-)seminare sind „Paradoxa der Mathematik“ (Banach-Tarski usw.), „Grenzen der Mathematik“ (Auswahlaxiom, Gödelsätze usw.).

Kodierung: GV: nicht geeignet EV: möglich SV: - Allg.: -

P45

Antwort 1: Nein, in meinen Vorlesungen zur Analysis I/II spielen Methoden der nichtstandarden Analysis keine Rolle. Ehrlich gesagt, finde ich so manches Schulprojekt oder auch gewisse Bestandteile der Mathematik-Lehrpläne etwas überambitioniert. Grundlegende Fertigkeiten und Kenntnisse, die wir gern bei unseren Studienanfängern sehen würden, bleiben dabei auf der Strecke.

Antwort 2: [Das kann ich mir durchaus vorstellen.][a1]

Antwort 3: Für die von Ihnen erwähnten Schulprojekte fehlen meiner Meinung nach den Schülern oft die nötigen Vorkenntnisse, um sich Gewinn bringend mit der ausgewählten Thematik zu befassen. Stattdessen wird dann lediglich „über die Dinge“ geredet. Dadurch wird den Schülern eine falsche Vorstellung darüber vermittelt, was Mathematik ist und wie man sich mit dieser zu beschäftigen hat, ganz abgesehen davon, dass wertvolle Zeit für die Vermittlung und das Erlernen von grundlegenden Fähigkeiten und Fertigkeiten (logisches Denken, Abstraktion, Beweisführung, Umformen von Termen . . .) verloren geht. Mir scheint, dass die Meinung besteht, dass ohne solche Projekte Schüler nicht für Mathematik begeistert werden können. Das ist aber nicht so, sondern zeigt nur, dass es den Lehrplangestaltern offenbar an Phantasie fehlt.

Kodierung: GV: - EV: - SV: - Allg.: möglich

P46

Antwort 1: Nein.

P47

Antwort 1: Wenn ich ihre Fragen richtig verstanden habe, dann würde ich sagen: Was Sie ‘Nicht-Standard Analysis’ nennen ist bei mir (und meinen Kollegen) Standard Analysis und wird in Analysis I/II/III unterrichtet (um folgende Mathematik Formeln zu verstehen, müssen Sie die ‘Latex’ Sprache kennen). Z.b. Was $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. -∞) sowie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (bzw. -∞) beduetet, wird präzis definiert. In AnaIII wird $a+\infty = \infty$ (für $a \in \mathbb{R}$) in der Masstheorie (für $a \in \mathbb{R}$): diese ist auch sehr nützlich.

P48

Antwort 1: Vielleicht liegt es daran, dass ich mit dem Begriff der ”Nichtstandard-Analysis”nicht hinreichend vertraut bin, aber meines Wissens verwende ich keine Elemente davon in meinen Grundvorlesungen.

P49

Antwort 1: Nein. Zwar habe ich vor langer Zeit mich mit der nonstandard analysis befaßt, aber Gegenstand der VL ist sie nicht.

Antwort 2: [NSA könnte man auch in der Standard-Analysis-VL sinnvoll einsetzen][gv], das bedarf allerdings ein wenig Arbeit. [Als Thema eines Proseminars taugt es allemal.][ev]

Antwort 3: Wenn man nicht den Weg nach Robinson einschlägt, sondern das Buch von Laugwitz zugrunde legt, so läßt sich das „hohe Abstraktionsniveau“ lange Zeit vermeiden. Schließlich hat Laugwitz die NSA auch in seinen Ingenieursvorlesungen vermittelt.

Kodierung: GV: gut geeignet EV: gut geeignet SV: - Allg.: -

P50

Antwort 1: Leider ist unsere Ana I/II Vorlesung bisher relativ klassisch angelegt. Daher sind bedauerlicherweise Non-Standard Analysis Methoden im Programm nicht berücksichtigt, aber [die Idee zukünftig einmal Bezüge in dieser Richtung einzubauen fände ich sehr gut.][gv]

Antwort 2/3: [Sofern es die Studienordnung zulässt und Spielraum lässt, fände ich es in Ihrem vorgeschlagenen Rahmen sogar sehr sinnvoll.][al] Hier in [Ort] bilden wir leider nur Grund- und Regelschullehrer aus und mein Team für die ganze Fachmathematik besteht nur aus mir und zwei Hochdeputatsassistenten. [Daher haben wir in [Ort] bedauerlicherweise weder die personellen Ressourcen][b] [noch die nötigen Flexibilitäten in der Studienordnung][b], da wir z.B. noch nicht mal zur Ana II eine Übung anbieten können, daher könnten wir bedauerlicherweise auch keine ergänzenden Proseminare anbieten. [Wenn die Rahmenbedingungen, die aber vom Budget der Landesregierung abhängen, andere wären, wäre ich auf jeden Fall der Meinung dass es sinnvoll wäre, im Rahmen eines Proseminars Inhalte dieser Richtung anzubieten und würde das voll unterstützen.][ev]

Kodierung: GV: gut geeignet EV: gut geeignet SV: - Allg.: gut geeignet

D. Dokumentation der Zusammenfassung des Materials zu FF2c

Dieser Anhang dokumentiert die Durchführung der einzelnen Schritte bei der Zusammenfassung des Materials zur Forschungsfrage FF2c (vgl. Abschnitt 4.4.3):

> Welche Argumente für bzw. gegen den Einsatz von Nichtstandardanalysis in der Hochschullehre werden von den Lehrenden angeführt?

Abschnitt D.1 beschreibt die Schritte *Paraphrasierung* und *Generalisierung*, Abschnitt D.2 die *Reduktionsschritte*. In den Tabellen wird *Nichtstandardanalysis* durch NSA abgekürzt.

D.1. Paraphrasierung und Generalisierung

Die Spalte *Paraphrasierung* der nachfolgenden Tabelle enthält die gemäß Z1-Regeln (vgl. Tabelle B.1) parahrasierten Fundstellen (im Anhang C mit Superskript b gekennzeichnet), die Spalte *Generalisierung* die gemäß Z2-Regeln generalisierten Paraphrasen. In der Spalte *Generalisierung* ist ebenfalls angegeben, worauf sich die Argumente für (pro) oder gegen (contra) den Einsatz von NSA beziehen. GV steht für *Grundvorlesung*, EV für *Ergänzende Veranstaltung* und SV für *Spezialveranstaltung* (im fortgeschrittenen Studium). Fehlt der Bezug zu einer bestimmten Veranstaltungsart, wird *Pro allg.* bzw. *Contra allg.* angegeben.

Beispiel: Eine in Anhang C bezeichnete Fundstelle in der Antwort von P12 ist:

> [Die Nichtstandard-Analysis (mit der ich mich selbst noch als Student tatsaechlich in einem Proseminar einmal zumindest oberflaechlich beschaeftigt habe), spielt nach meiner Einschaetzung in der modernen Mathematik keine wesentliche und sicherlich keine tragende Rolle.][b]

Der entsprechende Paraphrasierung in der folgenden Tabelle ist:

> Die NSA spielt nach meiner Einschätzung in der modernen Mathematik keine wesentliche und sicherlich keine tragende Rolle. [P12]

Die zugehörige Generalisierung in der folgenden Tabelle ist:

> Contra allg.: Geringe Relevanz für die Mathematik

Tabelle D.1.: Inhaltliche Strukturierung zu FF2c

Paraphrasierung	Generalisierung
Die inhaltlichen Vorgaben lassen zur Zeit keinen Raum, um neben den klassischen Ansätzen Aspekte der NSA einzubauen. [P02]	Contra GV: Andere inhaltliche Vorgaben.
Die Analysis mit Grenzwertbildung zu ersetzen durch die NSA, wäre nicht sinnvoll, da ein solides Verständnis des Grenzwertbegriffs für nahezu alle mathematischen Gebiete wichtig ist. [P02]	Contra GV: Grenzwertanalysis ist wichtiger als NSA.
Die NSA als zweiten Zugang parallel ins Curriculum der ersten beiden Studienjahre aufzunehmen, scheitert an dem zur Verfügung stehenden zeitlichen Rahmen. [P02]	Contra GV: Für eine zusätzliche Berücksichtigung von NSA fehlt die Zeit.
Es gibt viele andere Themengebiete, die derzeit als wichtiger eingeschätzt werden. [P02]	Contra GV: Andere Themen sind wichtiger als NSA
Ich sehe den Mehrwert nicht wirklich. [P03]	Contra allg.: Fehlender Mehrwert
Es gibt viele andere (aus meiner Sicht interessantere) Themen, wie Topologie, Geometrie und dynamische Systeme die sich alle für Proseminare eignen. [P03]	Contra EV: Viele andere Themen sind interessanter.
Da die NSA sehr umfassend ist, bräuchte man gewisse mathematische Vorkenntnisse, die man nicht im Curriculum von Schulen wiederfindet. [P10]	Contra allg.: Fehlende Voraussetzungen
Das wäre für die meisten unserer Mathe-Studierenden (leider) eine Überforderung. [P10]	Contra allg.: Überforderung der Studierenden
Die Einführung des hyperreellen Zahlensystems beinhaltet einen hohen Grad an Abstraktion. [P10]	Contra allg.: Hoher Abstraktionsgrad
Hat man die Vorarbeit geleistet und ist mit der NSA vertraut, sehe ich signifikante Vorteile bzgl. des besseren Verstehens für Studierende. [P10]	Pro allg.: Verständnisfördernd
Beweise über Stetigkeit und stetige Funktionen lassen sich mit der NSA eleganter und intuitiver führen als mit der Epsilon-Delta-Charakterisierung. [P10]	Pro allg.: Elegantere und intuitivere Beweise
Die NSA spielt nach meiner Einschätzung in der modernen Mathematik keine wesentliche und sicherlich keine tragende Rolle. [P12]	Contra allg.: Geringe Relevanz für die Mathematik

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle D.1.: Inhaltliche Strukturierung zu FF2c (Fortsetzung)

Paraphrasierung	Generalisierung
Hauptgrund dafür ist ein potentiell besseres Verständnis dafür, wie mit Grenzwerten (gegen 0 und gegen unendlich) formal korrekt gerechnet werden kann. [P13]	Pro EV: Verständnisfördernd
Da der Zeitplan recht eng ist, wäre bei meiner Vorlesungsplanung keine Zeit für NSA gewesen. [P15]	Contra GV: Fehlende Zeit
In der Vorlesung würde ich die NSA aus Zeitgründen nicht einsetzen. [P17]	Contra GV: Fehlende Zeit
Das liegt zum einen an der geringeren Verbreitung. [P17]	Contra GV: Geringe Verbreitung.
Das liegt zum anderen an der vergleichsweise kleinen Zahl geeigneter Lehrbücher. [P17]	Contra GV: Geringe Zahl geeigneter Lehrbücher
Je nach Zugang wird die Notation mühsam und eher hinderlich. [P17]	Contra GV: Mühsame, eher hinderliche Notation
Mit dem Zugang über die *Internal Set Theory* sind die Studierenden einmal explizit mit der mengentheoretischen Begründung der Mathematik in Berührung gekommen. Dabei treten auch erstaunliche Dinge wie Eigenschaften endlicher Mengen auf. [P17]	Pro EV: Förderung von Grundlagenbewusstsein
Es würde aus meiner Sicht Anfänger zu sehr verwirren, die NSA parallel zur klassischen zu lehren. [P19]	Contra allg.: Verwirrung der Studierenden
Da die NSA ein sehr randständiges Dasein hat (zumindest derzeit) sollte die klassische den Vorrang haben. [P19]	Contra allg.: Geringe Relevanz für die Mathematik
Der einfachste/direkteste Weg benötigt wohl Ultrafilter und damit ein Konzept, das schon recht abstrakt ist. [P19]	Contra allg.: Hoher Abstraktionsgrad
Hier spielen für mich primär die historischen Gegebenheiten eine Rolle: Die Anwendungen der Analysis in den meisten Bereichen basieren auf den klassischen Epsilon-Delta-Zugängen, sodass die Studierenden darin hinreichend geübt sein sollten. [P20]	Contra GV: Grenzwertanalysis ist wichtiger als NSA.
Die Studierenden würden den Stoff wiederholen. [P22]	Pro EV: Stoffwiederholung
Die Studierenden würden Intuition entwickeln. [P22]	Pro EV: Entwicklung von Intuition

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle D.1.: Inhaltliche Strukturierung zu FF2c (Fortsetzung)

Paraphrasierung	Generalisierung
Der Mehrwert ist sehr gering. [P23]	Contra allg.: Geringer Mehrwert
Die Verwirrung der Studierenden ist im Gegenzug sehr hoch. [P23]	Contra allg.: Verwirrung der Studierenden
Mein bisheriger Eindruck ist, dass man dabei mit viel zusätzlichem notationellem und methodischem Aufwand, eine alternative Methode bekommt, die Grundlagen der Analysis zu definieren, aber ohne dass sich wirklich neue Erkenntnisse oder eine vereinfachte, leichter zu verstehende Darstellung ergeben. [P24]	Contra allg.: Hoher Aufwand ohne Mehrwert.
Für mich ist dieser Zweig der Analysis damit einer, der es sicherlich Wert war, untersucht zu werden, der sich aber (bisher?) als eher totes Ende entpuppt hat. [P24]	Contra allg.: Geringe Relevanz für die Mathematik
Ich vertiefe hier lieber ein Thema, das in der Grundausbildung zu kurz kommt, aber im fortgeschrittenen Analysis-Studium eine Hilfe darstellt. Zumindest hier in ... gilt das definitiv nicht für die Methoden der NSA. [P24]	Contra EV: Fehlender Nutzen für späteres Studium
In meinem Forschungsumfeld spielen Methoden der NSA keine Rolle. [P24]	Contra allg.: Keine Relevanz für eigenes Forschungsgebiet
Zur NSA benötigt man eine Logik-Vorlesung. [P26]	Contra allg.: Fehlende Voraussetzung
Eine NSA würde die Studierenden vollends verwirren. [P27]	Contra allg.: Verwirrung der Studierenden
In der Vorlesung Analysis I hat man kaum Zeit für solche Themen. [P28]	Contra GV: Fehlende Zeit
Das übliche Argument, dass man durch den Einsatz von Nichtstandard-Methoden den Grenzwertbegriff vermeiden kann, überzeugt mich nicht. [P28]	Contra GV: NSA kann Standardanalysis nicht ersetzen.
Zum einen gibt es ein Curriculum, was den Inhalt der Anfängervorlesungen in wesentlichen Zügen festlegt. [P29]	Contra GV: Andere inhaltliche Vorgaben.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle D.1.: Inhaltliche Strukturierung zu FF2c (Fortsetzung)

Paraphrasierung	Generalisierung
Die Anfängerveranstaltungen sollten (insbesondere mit Hinblick auf die knappe zur Verfügung stehende Zeit) Dingen gewidmet bleiben, die in späteren, darauf aufbauenden Veranstaltungen von den meisten Studierenden benötigt werden. Und diese übergreifende Funktion kann ich bei der NSA beim besten Willen nicht erkennen. [P29]	Contra GV: Fehlender Nutzen für späteres Studium
NSA ist m. E. eine der vielen Entwicklungen in der Mathematik oder der Wissenschaft allgemein, die nach einem stürmischen Beginn ihre Bedeutung verloren haben. [P31]	Contra allg.: Geringe Relevanz für die Mathematik
Die Grundvorlesungen sind sehr überladen. [P33]	Contra GV: Fehlende Zeit
Die NSA hat sich historisch nie durchgesetzt. [P33]	Contra allg.: Geringe Relevanz für die Mathematik
Mir ist aufgefallen, dass für einen rigorosen Einsatz ein nicht unerheblicher aussagenlogischer Apparat benötigt wird (Transferprinzipien, Ultrafilter). [P36]	Contra GV: Starke Voraussetzungen notwendig
Ich sehe zur Zeit andere Baustellen an den üblichen Analysis-Vorlesungen in Deutschland. Sie sind für viele Studienanfänger wegen des Abstraktionsgrads zu anspruchsvoll. [P37]	Contra GV: Andere Prioritäten
Die „Standard"-Konzepte sind gerade schwer genug und so viel wichtiger. [P38]	Contra GV: Standardkonzepte sind wichtiger.
NSA ist, wenn man sie vernünftig betreibt, kein bisschen einfacher als „Standard"-Analysis. [P38]	Contra allg.: NSA ist nicht einfacher als Standardanalysis
Für die allermeisten Mathematiker bringt die NSA meiner Meinung nach nichts. [P38]	Contra GV: Fehlender Nutzen
Im Rahmen solcher Ergänzungen halte ich viele andere Themen für sinnvoller (bzw. perspektivreicher). [P39]	Contra EV: Fehlender Nutzen für späteres Studium
Ich halte, kurz gesagt – das mag persönlicher Geschmack sein – NSA nicht für essentiell wichtig mit Blick auf Aufbaufähiges. [P39]	Contra allg.: Geringe Relevanz für die Mathematik
Für diese Themen ist (leider) kein Platz in der Vorlesung. [P40]	Contra GV: Fehlende Zeit
Ich fühle mich, ehrlich gesagt, nicht kompetent genug hierfür. [P40]	Contra allg.: Fehlende Kompetenz bei den Lehrenden

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle D.1.: Inhaltliche Strukturierung zu FF2c (Fortsetzung)

Paraphrasierung	Generalisierung
Gegen einen größeren Einsatz in der Vorlesung spricht nach meiner Meinung, dass sich das alte System sehr gut bewährt hat und dass die Vorteile der NSA nicht eindeutig sichtbar sind. [P41]	Contra GV: Kein Mehrwert gegenüber Standardanalysis
Sehr viele Studierende – vor allem Lehramtsstudierende – haben große Probleme, den Inhalt der Grundvorlesungen in Analysis zu meistern. Daher halte ich es nicht für sinnvoll, auch NSA in diesen Vorlesungen zu behandeln.[P44]	Contra GV: Überforderung der Studierenden
Es ist wichtiger, dass die Studierenden solide Kenntnisse der konventionellen Analysis erwerben, bevor sie Ausflüge ins Exotischere machen. [P44]	Contra GV: Standardanalysis ist wichtiger als NSA
Wir haben bedauerlicherweise nicht die personellen Ressourcen. [P50]	Contra allg.: Fehlende personelle Ressourcen
Wir haben bedauerlicherweise nicht die nötige Flexibilität in der Studienordnung. [P50]	Contra allg.: Fehlende Flexibilität in der Studienordnung

Ende der Tabelle

D.2. Reduktion

Die folgende Tabelle zeigt das Ergebnis der Reduktionsschritte unter Anwendung der Z3- bzw. Z4-Regeln aus Tabelle B.1. Die erste Spalte enthält die (generalisierten) Paraphrasen nach Streichen von Dopplungen (Regel Z3.1). Die anderen Paraphrasen wurden als zentral inhaltstragend übernommen (Regel Z3.3). Die zweite Spalte enthält die nach der zweiten Reduktion verbliebenen Paraphrasen, wobei die angewandte Z4-Regel jeweils in der letzten Spalte angegeben ist. Der Bezug zur Veranstaltungsart wurde in der zweiten Reduktion nur dann beibehalten, wenn er für die Begründung wesentlich ist (bei „Stoffwiederholung in ergänzenden Veranstaltungen“ und „Fehlende Zeit in den Grundvorlesungen“).

Wie im vorherigen Abschnitt steht GV für *Grundvorlesung*, EV für *Ergänzende Veranstaltung*, SV für *Spezialveranstaltung* (im fortgeschrittenen Studium) und *allg.* für *auf die Lehre allgemein bezogen.*

Tabelle D.2.: Inhaltliche Strukturierung zu FF2c, Reduktion

Erste Reduktion	Zweite Reduktion	Regel
Pro allg.: Verständnisfördernd	Verständnisfördernd	Z.4.1
Pro EV: Verständnisfördernd		

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle D.2.: Inhaltliche Strukturierung zu FF2c, Reduktion (Fortsetzung)

Erste Reduktion	Zweite Reduktion	Regel
Pro allg.: Elegantere und intuitivere Beweise	Elegantere und intuitivere Beweise	
Pro EV: Entwicklung von Intuition	Entwicklung von Intuition	
Pro EV: Stoffwiederholung	Stoffwiederholung in ergänzenden Veranstaltungen	
Pro EV: Förderung von Grundlagenbewusstsein	Förderung von Grundlagenbewusstsein	
Contra GV: Andere inhaltliche Vorgaben	Andere inhaltliche Vorgaben	Z.4.1
Contra GV: Curriculum sieht NSA nicht vor.		
Contra allg.: Fehlende Flexibilität in der Studienordnung		
Contra GV: Geringe Zahl geeigneter Lehrbücher	Geringe Zahl geeigneter Lehrbücher	
Contra allg.: Fehlende personelle Ressourcen	Fehlende personelle Ressourcen	
Contra allg.: Fehlende Kompetenz bei den Lehrenden	Fehlende Kompetenz bei den Lehrenden	
Contra GV: Fehlende Zeit	Fehlende Zeit in den Grundvorlesungen	
Contra allg.: Fehlende Voraussetzungen	Fehlende Voraussetzungen	Z.4.1
Contra GV: Starke Voraussetzungen notwendig		
Contra allg.: Überforderung der Studierenden		
Contra GV: Überforderung		
Contra GV: Mühsame, eher hinderliche Notation	Verwirrung der Studierenden	Z.4.1
Contra allg.: Verwirrung der Studierenden		
Contra allg.: Hoher Abstraktionsgrad	Hoher Abstraktionsgrad	
Contra allg.: Geringe Relevanz für die Mathematik	Geringe Relevanz für die Mathematik	Z.4.1
Contra GV: Andere Themen sind wichtiger als NSA		
Contra EV: Viele andere Themen sind interessanter.		

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle D.2.: Inhaltliche Strukturierung zu FF2c, Reduktion (Fortsetzung)

Erste Reduktion	Zweite Reduktion	Regel
Contra GV: Grenzwertanalysis ist wichtiger als NSA.		
Contra GV: NSA kann Standardanalysis nicht ersetzen.		
Contra GV: Geringe Verbreitung.		
Contra GV: Andere Prioritäten		
Contra GV: Standardkonzepte sind wichtiger.		
Contra allg.: Keine Relevanz für eigenes Forschungsgebiet	Keine Relevanz für eigenes Forschungsgebiet	
Contra allg.: Geringer Mehrwert gegenüber Standardanalysis	Geringer Mehrwert gegenüber Standardanalysis	Z.4.1
Contra allg.: Hoher Aufwand ohne Mehrwert		
Contra allg.: NSA ist nicht einfacher als Standardanalysis		
Contra GV: Kein Mehrwert gegenüber Standardanalysis		
Contra EV: Fehlender Nutzen für späteres Studium	Fehlender Nutzen für späteres Studium	Z.4.1
Contra GV: Fehlender Nutzen		

Ende der Tabelle

E. Liste der an der Umfrage beteiligten Hochschulen

Tabelle E.1.: Liste der an der Umfrage beteiligten Hochschulen

Name der Hochschule
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Bergische Universität Wuppertal
Beuth Hochschule für Technik Berlin
Brandenburgische Technische Universität Cottbus
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Eberhard Karls Universität Tübingen
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Fernuniversität Hagen
Freie Universität Berlin
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Georg-August-Universität Göttingen
Goethe-Universität Frankfurt
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Hochschule für Philosophie München
Hochschule für Technik Stuttgart
Humboldt-Universität zu Berlin
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Justus-Liebig Universität Gießen
Karlsruher Institut für Technologie
Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Ostbayerische Technische Hochschule Regensburg (OTH Regensburg)
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Philipps-Universität Marburg
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Ruhr-Universität Bochum
RWTH Aachen University

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Tabelle E.1.: Liste der an der Umfrage beteiligten Hochschulen (Fortsetzung)

Name der Hochschule
Technische Universität Berlin
Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig
Technische Universität Chemnitz
Technische Universität Darmstadt
Technische Universität Dortmund
Technische Universität Dresden
Technische Universität Ilmenau
Technische Universität Kaiserslautern
Technische Universität München
Universität Augsburg
Universität Bayreuth
Universität Bielefeld
Universität Bremen
Universität des Saarlandes
Universität Duisburg-Essen
Universität Erfurt
Universität Hamburg
Universität Heidelberg
Universität Kassel
Universität Koblenz-Landau, Studienort Koblenz
Universität Koblenz-Landau, Studienort Landau
Universität Konstanz
Universität Leipzig
Universität Osnabrück
Universität Paderborn
Universität Passau
Universität Potsdam
Universität Regensburg
Universität Rostock
Universität Siegen
Universität Stuttgart
Universität Ulm
Universität Vechta
Universität zu Köln
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Ende der Tabelle

Literaturverzeichnis

Albeverio, Sergio, Raphael Høegh-Krohn, Jens Erik Fenstad und Tom Lindstrøm. 1986. *Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics.* Bd. 122. Pure and applied mathematics. Orlando u.a.: Academic Press.

Anderson, Robert. 2008. Infinitesimal Methods in Mathematical Economics. *SSRN.* https://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3769003.

Antos, Carolin, Sy-David Friedman, Radek Honzik und Claudio Ternullo. 2015. Multiverse Conceptions in Set Theory. *Synthese* 192 (8): 2463–2488. https://doi.org/10.1007/s11229-015-0819-9.

Aristoteles. 2009. *Aristoteles' Metaphysik. Zweiter Halbband: Bücher VII (Z) bis XIV (N). Neubearbeitung der Übersetzung von Hermann Bonitz.* 4. Aufl. Herausgegeben von Horst Seidl. Bd. 308. Philosophische Bibliothek. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Arkeryd, Leif O., Nigel J. Cutland und C. Ward Henson. 1997. *Nonstandard Analysis: Theory and Applications.* Bd. 493. Mathematical and Physical Sciences. Dordrecht: Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1017/CBO9781139172110.

Avigad, Jeremy. 2001. Weak theories of nonstandard arithmetic and analysis. In *Reverse mathematics 2001 (Simpson 2016),* 19–46.

Awodey, Steve. 2011. From Sets to Types, to Categories, to Sets. In *Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics,* 76:113–126. Western Ontario Series in Philosophy of Sience. Dordrecht, London: Springer.

Bachmann, Paul. 1892. *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen.* Leipzig: Teubner.

Bair, Jacques, Piotr Błaszczyk, Robert Ely, Peter Heinig und Mikhail G. Katz. 2018. Leibniz's well-founded fictions and their interpretations. *Matematychni Studii* 49 (2): 186–224. https://doi.org/10.15330/ms.49.2.186-224.

Bair, Jacques, Piotr Błaszczyk, Robert Ely, Mikhail G. Katz und Karl Kuhlemann. 2021. Procedures of Leibnizian infinitesimal calculus: an account in three modern frameworks. *British Journal for the History of Mathematics:* 1–40. https://doi.org/10.1080/26375451.2020.1851120.

Barwise, Jon. 1975. *Admissible sets and structures: an approach to definability theory.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Bascelli, Tiziana, Emanuele Bottazzi, Frederik Herzberg, Vladimir Kanovei, Karin U. Katz, Mikhail G. Katz, Tahl Nowik, David Sherry und Steven Shnider. 2014. Fermat, Leibniz, Euler, and the gang: The true history of the concepts of limit and shadow. *Notices of the American Mathematical Society* 61 (8): 848–864.

Bauer, Heinz. 1992. *Maß-und Integrationstheorie.* 2. Aufl. Berlin, New York: Walter de Gruyter.

———. 2002. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* 5. Aufl. Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Bauer, Ludwig. 2011. Mathematik, Intuition, Formalisierung: eine Untersuchung von Schülerinnen- und Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$. *Journal für Mathematik-Didaktik* 32 (1): 79–102. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s13138-010-0024-9.pdf.

Baumann, Peter, Thomas Bedürftig und Volkhardt Fuhrmann, Hrsg. 2020. dx, dy – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen. Eine Handreichung. Teil I. Besucht am 17. April 2021. http://www.nichtstandard.de/pdf/Handreichung-2020-Teil1.pdf.

Baumann, Peter, und Thomas Kirski. 2019. *Infinitesimalrechnung. Analysis mit hyperreellen Zahlen.* Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56792-0.

Bedürftig, Thomas. 2018. Über die Grundproblematik der Grenzwerte. *Mathematische Semesterberichte* 65 (2): 277–298. https://doi.org/10.1007/s00591-018-0220-0.

Bedürftig, Thomas, und Karl Kuhlemann. 2020. *Grenzwerte oder infinitesimale Zahlen?* Springer Spektrum. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-658-31908-3.pdf.

Bedürftig, Thomas, und Roman Murawski. 2001. *Zählen. Grundlage der elementaren Arithmetik.* Bd. 7. Studium und Lehre Mathematik. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

———. 2015. *Philosophie der Mathematik.* 3. Aufl. Berlin, Boston: de Gruyter.

———. 2019. *Philosophie der Mathematik.* 4. Aufl. Berlin, Boston: de Gruyter.

Behrends, Ehrhard. 2015. *Analysis Band 1. Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni. Von Studenten mitentwickelt.* 6. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bell, John Lane. 2008. *A primer of infinitesimal analysis.* 2. Aufl. Cambridge University Press.

Bell, John Lane, und Moshé Machover. 1977. *A course in mathematical logic.* Amsterdam u.a.: North-Holland Publ. Comp.

Berg, Benno van den, Eyvind Briseid und Pavol Safarik. 2012. A functional interpretation for nonstandard arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic* 163 (12): 1962–1994. https://doi.org/10.1016/j.apal.2012.07.003.

Berkeley, George. 1734. *The analyst; or, a discourse addressed to an infidel mathematician. Wherein it is examined whether the object, Principles, and inferences of the modern analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious mysteries and Points of Faith. By the author of The minute philosopher.* London: printed for J. Tonson in the Strand.

Bernoulli, Johann. 1924. *Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli aus dem Jahre 1691/92: nach der in der Basler Universitätsbibliothek befindlichen Handschrift übersetzt, mit einem Vorwort und Anmerkungen versehen von Paul Schafheitlin.* Herausgegeben von Paul Schafheitlin. Bd. 211. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig: Akad. Verl.-Ges.

Bernstein, Allen R., und Abraham Robinson. 1966. Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos. *Pacific Journal of Mathematics* 16 (3): 421–431.

Berz, Martin. 1996. Calculus and Numerics on Levi-Civita Fields. In *Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools,* 19–37.

Bezuidenhout, Jan. 2001. Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International journal of mathematical education in science and technology* 32 (4): 487–500. https://doi.org/10.1080/00207390010022590.

Bishop, Errett. 1967. *Foundations of constructive analysis.* Bd. 60. McGraw-Hill series in higher mathematics. New York u.a.: McGraw-Hill.

———. 1975. The crisis in contemporary mathematics. *Historia Mathematica* 2 (4): 507–517.

———. 1977. Book review: Elementary calculus. *Bull. Amer. Math. Soc* 83 (2): 205–208.

Bishop, Errett, und Douglas Bridges. 1985. *Constructive analysis.* Bd. 279. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61667-9.

Bosinelli, Fabio C.M. 1991. Über Leibniz' Unendlichkeitstheorie. *Studia Leibnitiana* 23 (2): 151–169. http://www.jstor.org/stable/40694174.

Bottazzi, Emanuele, und Mikhail G. Katz. 2020a. Infinite Lotteries, Spinners, Applicability of Hyperreals. *Philosophia Mathematica* 29, Nr. 1 (Oktober): 88–109. https://doi.org/10.1093/philmat/nkaa032.

———. 2020b. Internality, transfer, and infinitesimal modeling of infinite processes. *Philosophia Mathematica* 29, Nr. 2 (September): 256–277. https://doi.org/10.1093/philmat/nkaa033.

Bressoud, David, Imène Ghedamsi, Victor Martinez-Luaces und Günter Törner. 2016. *Teaching and learning of calculus.* Cham: Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8.

Cantor, Georg. 1872. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* 5 (1): 123–132. https://doi.org/10.1007/BF01446327.

———. 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Herausgegeben von Ernst Zermelo. Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00274-2.

Chang, Chen Chung, und H. Jerome Keisler. 1990. *Model theory.* 3. Aufl. Bd. 73. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam, New York: North-Holland Press.

Chong, Chitat, Qi Feng, Theodore A. Slaman und W. Hugh Woodin, Hrsg. 2014. *Infinity and Truth.* Bd. 25. Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore. World Scientific.

Cohen, Paul J. 1963. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 50 (1): 1143–1148.

———. 1964. The independence of the continuum hypothesis, II. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 51 (1): 105–110.

———. 1966. *Set theory and the continuum hypothesis.* Reading, Mass., New York u.a.: Benjamin.

———. 1971. Comments on the foundations of set theory. In *Axiomatic Set Theory, Part 1 (Scott und Jech 1971),* 9–15.

Connes, Alain. 2003. Cyclic Cohomology, Noncommutative Geometry and Quantum Group Symmetries, 1–71. Dezember. https://doi.org/10.1007/978-3-540-39702-1_1.

Cornu, Bernard. 1991. Limits. In *Advanced mathematical thinking (Tall 1991),* 153–166.

Davis, Martin. 1977. *Applied nonstandard analysis.* New York u.a.: Wiley.

Davis, Philip J., und Reuben Hersh. 1994. *Erfahrung Mathematik.* Basel: Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5040-7.

Dedekind, Richard. 2017. *Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und Irrationale Zahlen.* Klassische Texte der Wissenschaft. Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54339-9.

Deitmar, Anton. 2021. *Analysis.* 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62858-4.

Deledicq, André, und Marc Diener. 1989. *Leçons de calcul infinitésimal.* Paris: Armand Colin.

Diener, Francine, und Marc Diener, Hrsg. 1995. *Nonstandard Analysis in Practice.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Easwaran, Kenny. 2014. Regularity and hyperreal credences. *Philosophical Review* 123 (1): 1–41. https://www.jstor.org/stable/44282331.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter. 2021. *Einführung in die Mengenlehre.* 5. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-63866-8.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, u. a. 1992. *Zahlen.* 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58155-7.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Jörg Flum und Wolfgang Thomas. 2018. *Einführung in die mathematische Logik.* 6. Aufl. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-58029-5.

Ehrlich, Philip. 2006. The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes. *Archive for History of Exact Sciences* 60:1–121. https://doi.org/10.1007/s00407-005-0102-4.

———. 2012. The absolute arithmetic continuum and the unification of all numbers great and small. *Bulletin of Symbolic Logic* 18 (1): 1–45. https://doi.org/10.2178/bsl/1327328438.

Ely, Robert. 2007. *Student Obstacles and Historical Obstacles to Foundational Concepts of Calculus.* University of Wisconsin–Madison. https://hdl.handle.net/2027/wu.89097475107.

———. 2010. Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education* 41 (2): 117–146. https://www.jstor.org/stable/20720128.

———. 2020. Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM Mathematics Education* 53:591–604. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2.

Euklid. 1975. *Die Elemente: Buch I-XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Fletcher, Peter, Karel Hrbacek, Vladimir Kanovei, Mikhail G. Katz, Claude Lobry und Sam Sanders. 2017. Approaches to analysis with infinitesimals following Robinson, Nelson, and others. *Real Analysis Exchange* 42 (2): 193–252. https://doi.org/10.14321/realanalexch.42.2.0193.

Forster, Otto. 1983. *Analysis 1.* 4. Aufl. Braunschweig, Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn.

Forster, Otto. 2016. *Analysis 1.* 12. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Fraenkel, Abraham Adolf. 1928. *Einleitung in die Mengenlehre.* 3. Aufl. Bd. 9. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-42029-4.

Friedman, Harvey. 1975. Some systems of second order arithmetic and their use. In *Proceedings of the international congress of mathematicians (Vancouver, BC, 1974),* 1:235–242. Citeseer.

Gerhardt, Carl Immanuel, Hrsg. 1875–1890. *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz.* Berlin: Weidmann.

Gitman, Victoria, und Joel David Hamkins. 2010. A Natural Model of the Multiverse Axioms. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 51 (4): 475–484. https://doi.org/10.1215/00294527-2010-030.

Gödel, Kurt. 1938. The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci* 24:556–557.

———. 1939. Consistency-proof for the generalized continuum-hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci* 25:220–224.

———. 1940. *The consistency of the continuum hypothesis.* Annals of Mathematics Studies No. 3. Princeton, N. J.: Princeton University Press.

———. 1944. Russell's mathematical logic. In *The philosophy of Bertrand Russell,* herausgegeben von Paul Arthur Schilpp, 123–153. Evanstown: Northwestern University.

———. 1958. Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes. *dialectica* 12 (3-4): 280–287.

Goldblatt, Robert. 1998. *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis.* Bd. 188. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0615-6.

Goldenbaum, Ursula, und Douglas Jesseph, Hrsg. 2008. *Infinitesimal differences: Controversies between Leibniz and his contemporaries.* Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Grieser, Daniel. 2015. *Analysis I: Eine Einführung in die Mathematik des Kontinuums.* Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-05947-7.

Hamkins, Joel David. 2012. The set-theoretic multiverse. *The Review of Symbolic Logic* 5 (3): 416–449. https://doi.org/10.1017/S1755020311000359.

———. 2014. Are we correct in thinking we have an absolute concept of the finite? In *Infinity and Truth (Chong, Feng, Slaman und Woodin 2014),* 230–231.

Henle, James M. 1999. Non-nonstandard analysis: real infinitesimals. *The Mathematical Intelligencer* 21 (1): 67–73.

Henle, James M., und Eugene M. Kleinberg. 1979. *Infinitesimal calculus.* Cambridge, MA: MIT Press.

Henson, C. Ward. 1974. The isomorphism property in nonstandard analysis and its use in the theory of Banach spaces. *The Journal of Symbolic Logic* 39 (4): 717–731. `https://doi.org/10.2307/2272856`.

———. 1997. Foundations of nonstandard analysis. In *Nonstandard analysis (siehe Arkeryd, Cutland und Henson 1997),* 1–50. Springer.

Hernandez, Luz Marina, und Jorge M. Lopez Fernandez. 2018. Teaching Calculus with Infinitesimals: New Perspectives. *The Mathematics Enthusiast* 15 (3): 371–390. `https://scholarworks.umt.edu/tme/vol15/iss3/2`.

Heuser, Harro. 2008. *Lehrbuch der Analysis Teil 2.* 14. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

———. 2009. *Lehrbuch der Analysis Teil 1.* 17. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Heyting, Arend. 1930. Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. *Sitzungsbericht Preußische Akademie der Wissenschaften Berlin, physikalisch-mathematische Klasse II:* 42–56.

Hilbert, David. 1900. Über den Zahlbegriff. *Jahresberichte der DMV* 8.

———. 1926. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen* 95 (1): 161–190. `https://doi.org/10.1007/BF01206605`.

Hirschfeld, Joram. 1990. The Nonstandard Treatment of Hilbert's Fifth Problem. *Transactions of the American Mathematical Society* 321 (1): 379–400. `https://doi.org/10.2307/2001608`.

Howard, Paul, und Jean E. Rubin. 1998. *Consequences of the Axiom of Choice.* Bd. 59. Mathematical surveys and monographs. Providence, RI: American Mathematical Society.

Hrbaček, Karel. 1978. Axiomatic foundations for nonstandard analysis. *Fundamenta Math.* 98:1–19.

———. 2009. Relative set theory: Internal view. *Journal of Logic and Analysis* 1 (8): 1–108. `https://doi.org/10.4115/jla.2009.1.8`.

———. 2010. Relative set theory: Some external issues. *Journal of Logic and Analysis* 2 (8): 1–37. `https://doi.org/10.4115/jla.2010.2.8`.

———. 2012. Axiom of Choice in nonstandard set theory. *Journal of Logic and Analysis* 4, Nr. 8 (April): 1–9. `https://doi.org/10.4115/jla.2012.4.8`.

Hrbaček, Karel, und Mikhail G. Katz. 2021. Infinitesimal analysis without the axiom of choice. *Annals of Pure and Applied Logic* 172 (6): 102959. `https://doi.org/10.1016/j.apal.2021.102959`.

Hrbaček, Karel, Olivier Lessmann und Richard O'Donovan. 2014. *Analysis with ultrasmall numbers.* Boca Raton, London, New York: Chapman-Hall/CRC Press.

Jahnke, Hans Niels, Hrsg. 1999. *Geschichte der Analysis.* Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Jech, Thomas J. 1973. *The axiom of choice.* Bd. 75. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam u.a.: North-Holland Publ. Co.

———. 2003. *Set theory.* 3. Aufl. Berlin. Heidelberg: Springer. `https://doi.org/10.1007/3-540-44761-X`.

Kanovei, Vladimir G. 1991. Undecidable hypotheses in Edward Nelson's internal set theory. *Russian Mathematical Surveys* 46 (6): 1–54. `https://doi.org/10.1070/RM1991v046n06ABEH002870`.

Kanovei, Vladimir, Mikhail G. Katz und Thomas Mormann. 2013. Tools, objects, and chimeras: Connes on the role of hyperreals in mathematics. *Foundations of Science* 18 (2): 259–296. `https://doi.org/10.1007/s10699-012-9316-5`.

Kanovei, Vladimir, und Michael Reeken. 2004. *Nonstandard Analysis: Axiomatically.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.

Kanovei, Vladimir, und Saharon Shelah. 2004. A definable nonstandard model of the reals. *The Journal of Symbolic Logic* 69 (1): 159–164. `https://doi.org/10.2178/jsl/1080938834`.

Katz, Mikhail G., und Luie Polev. 2017. From Pythagoreans and Weierstrassians to True Infinitesimal Calculus. *Journal of Humanistic Mathematics* 7 (1): 87–104. `https://doi.org/10.5642/jhummath.201701.07`.

Keisler, H. Jerome. 1976. *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach.* 1. Aufl. Boston, Massachusetts: Prindle, Weber & Schmidt.

———. 2007. *Foundations Of Elementary Calculus.* Madison: University of Wisconsin. Besucht am 21. August 2021. `https://people.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html`.

———. 2012a. *Elementary Calculus – An Infinitesimal Approach.* 3. Aufl. Dover Publications Inc.

———. 2012b. *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach.* Madison: University of Wisconsin. Besucht am 21. August 2021. `https://people.math.wisc.edu/~keisler/calc.html`.

Königsberger, Konrad. 2004. *Analysis 1.* 6. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Körle, Hans-Heinrich. 2012. *Die phantastische Geschichte der Analysis: Ihre Probleme und Methoden seit Demokrit und Archimedes. Dazu die Grundbegriffe von heute.* 2. Aufl. Oldenbourg Wissenschaftsverlag. https://doi.org/10.1524/9783486716252.

Kuhlemann, Karl. 2016. Nichtstandard in der elementaren Analysis – Kröte oder Froschkönig? In *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik,* herausgegeben von Ralf Krömer und Gregor Nickel, 7:1–27. https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-11051.

———. 2018a. Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung. In *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik,* herausgegeben von Ralf Krömer und Gregor Nickel, 10:47–65. https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-14260.

———. 2018b. Zur Axiomatisierung der reellen Zahlen. In *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik,* herausgegeben von Ralf Krömer und Gregor Nickel, 10:67–105. https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-14260.

Landers, Dieter, und Lothar Rogge. 1994. *Nichtstandard Analysis.* Berlin Heidelberg: Springer.

Laugwitz, Detlef. 1978. *Infinitesimalkalkül: Eine elementare Einführung in die Nichtstandard-Analysis.* Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut.

———. 1986. *Zahlen und Kontinuum.* Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut.

Lawvere, F. William. 1979. Categorical dynamics. In *Topos theoretic methods in geometry,* herausgegeben von Anders Kock, 30:1–28. Various publications series. Mathematisk Institut, Aarhus Universitet.

———. 1980. Toward the description in a smooth topos of the dynamically possible motions and deformations of a continuous body. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques* 21 (4): 377–392. Besucht am 22. August 2021. http://www.numdam.org/article/CTGDC_1980__21_4_377_0.pdf.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 1923–. *Leibniz-Edition, Akademie-Ausgabe. Sämtliche Schriften und Briefe.* Zitiert als A.Reihe, Band, Nummer (zum Beispiel A.III, 9, N.4). https://leibnizedition.de.

———. 1695. *Brief an l'Hospital vom 14./24. Juni 1695.* A.III, 6, N.135.

———. 1701. *Brief an Pinsson vom 29. August 1701.* A.I, 20, N.290.

———. 1702a. *Brief an Varignon vom 2. Februar 1702.* A.III, 9, N.4.

———. 1702b. *Brief an Varignon vom 20. Juni 1702.* A.III, 9, N.29.

———. 1716. *Brief an Samuel Masson.* in Gerhardt 1875–1890, Bd. VI, 624–629.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 2011. *Gottfried Wilhelm Leibniz: Die mathematischen Zeitschriftenartikel.* Herausgegeben von Hans-Jürgen Heß und Malte-Ludof Babin. Hildesheim, Zürich, New York: Georg Olms Verlag.

———. 2016. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae.* Herausgegeben von Eberhard Knobloch. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. `https://doi.org/10.1007/978-3-662-52803-7`.

Loeb, Peter A., und Manfred P. H. Wolff. 2015. *Nonstandard Analysis for the Working Mathematician.* 2. Aufl. Dordrecht u.a.: Springer. `https://doi.org/10.1007/978-94-017-7327-0`.

Lorenzen, Paul. 1965. *Differential und Integral: eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis.* Frankfurt am Main: Akademische Verlagsgesellschaft.

Lutz, Robert, und Michel Goze. 1981. *Nonstandard Analysis: A Practical Guide with Applications.* Bd. 881. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer. `https://doi.org/10.1007/BFb0093397`.

Machover, Moshe. 1993. The place of nonstandard analysis in mathematics and in mathematics teaching. *The British journal for the philosophy of science* 44 (2): 205–212. `https://doi.org/10.1093/bjps/44.2.205`.

Maddy, Penelope. 1990. *Realism in mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

———. 1997. *Naturalism in mathematics.* Oxford: Clarendon Press.

Maddy, Penelope, u. a. 2007. *Second philosophy: A naturalistic method.* Oxford u.a.: Oxford University Press.

Mainzer, Klaus. 1988a. Natürliche, ganze und rationale Zahlen. In *Zahlen (Ebbinghaus u. a. 1992),* 9–22. Berlin, Heidelberg: Springer.

———. 1988b. Reelle Zahlen. In *Zahlen (Ebbinghaus u. a. 1992),* 23–44. Berlin, Heidelberg: Springer.

Mayring, Philipp. 2015. *Qualitative Inhaltsanalyse.* 12. Aufl. Weinheim, Basel: Beltz Verlag.

Meschkowski, Herbert. 1965. Aus den Briefbüchern Georg Cantors. *Archive for History of Exact Sciences* 2 (6): 503–519. `https://doi.org/10.1007/BF00324881`.

Mill, John Stuart. 1875. *A system of logic, ratiocinative and inductive: Being a connected view of the principles of evidence and the methods of scientific investigation.* London: Longmans, Green, Reader, and Dyer. `https://nl.sub.uni-goettingen.de/volumes/id/F101006848`.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, Hrsg. 2013. *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Heftnummer 4720.*

Monk, James Donald. 1976. *Mathematical logic.* Bd. 37. Graduate Texts in Mathematics. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9452-5.

Moore, Gregory H. 1982. *Zermelo's axiom of choice: Its origins, development, and influence.* New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-9478-5.

Murawski, Roman. 1993. On the Philosophical Meaning of Reverse Mathematics. In *Philosophie der Mathematik: Akten des 15. Internationalen Wittgenstein-Symposiums: 16. bis 23. August 1992, Kirchberg am Wechsel (Österreich),* 1:173–184. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Nelson, Edward. 1977. Internal Set Theory: A New Approach to Nonstandard Analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society* 83 (6): 1165–1198.

———. 1986. *Predicative Arithmetic.* Bd. 32. Mathematical notes. Princeton, NJ u.a.: Princeton University Press.

———. 1987. *Radically elementary probability theory, Annals of mathematics studies.* Bd. 117. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ u.a.: Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400882144.

———. 2007. Hilbert's Mistake. Besucht am 25. August 2021. www.math.princeton.edu/~nelson/papers/hm.pdf.

Oehrtman, Michael. 2009. Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education* 40 (4): 396–426. https://www.jstor.org/stable/40539345.

Oehrtman, Michael, Craig Swinyard und Jason Martin. 2014. Problems and solutions in students' reinvention of a definition for sequence convergence. *The Journal of Mathematical Behavior* 33:131–148. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.11.006.

Palmgren, Erik. 1997. A sheaf-theoretic foundation for nonstandard analysis. *Annals of Pure and Applied Logic* 85 (1): 69–86.

———. 1998. Developments in constructive nonstandard analysis. *Bulletin of Symbolic Logic:* 233–272. https://www.jstor.org/stable/421031.

Parker, Matthew W. 2019. Symmetry arguments against regular probability: A reply to recent objections. *European Journal for Philosophy of Science* 9 (1): 1–21.

Péraire, Yves. 1992. Théorie relative des ensembles internes. *Osaka Journal of Mathematics* 29 (2): 267–297.

Probst, Siegmund. 2008. Indivisibles and Infinitesimals in Early Mathematical Texts of Leibniz. In *Infinitesimal Differences: Controversies between Leibniz and his Contemporaries (Goldenbaum und Jesseph 2008),* herausgegeben von Ursula Goldenbaum und Douglas Jesseph, 95–106. Berlin, New York: Walter de Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110211863.95.

Pruss, Alexander R. 2014. Infinitesimals are too small for countably infinite fair lotteries. *Synthese* 191 (6): 1051–1057. https://doi.org/10.1007/s11229-013-0307-z.

———. 2021. Underdetermination of infinitesimal probabilities. *Synthese* 198 (1): 777–799. https://doi.org/10.1007/s11229-018-02064-x.

Purkert, Walter. 1990. Infinitesimalrechnung für Ingenieure—Kontroversen im 19. Jahrhundert. In *Rechnen mit dem Unendlichen (Spalt 1990),* 179–192. Springer.

Putnam, Hilary. 1975. What is mathematical truth? *Historia Mathematica* 2 (4): 529–533. https://doi.org/10.1016/0315-0860(75)90116-0.

Rabouin, David, und Richard T. W. Arthur. 2020. Leibniz's syncategorematic infinitesimals II: their existence, their use and their role in the justification of the differential calculus. *Archive for History of Exact Sciences* 74:401–443. https://doi.org/10.1007/s00407-020-00249-w.

Robert, Alain M. 1988. *Nonstandard Analysis.* New York u.a.: John Wiley & Sons.

Robinson, Abraham. 1961. Non-standard analysis. *Indagationes Mathematicae* 23:432–440.

———. 1965. Formalism 64. In *Logic, methodology and philosophy of science: proceedings of the 1964 international congress, held at the Hebrew University of Jerusalem, Israel, from August 26 to September 2, 1964,* 228–246. Amsterdam u.a.: North-Holland.

———. 1966. *Non-standard analysis.* Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

———. 1974. *Non-standard analysis.* 2. Aufl. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam: North-Holland Pub. Co.

Robinson, Abraham, und Elias Zakon. 1969. A set-theoretical characterization of enlargements. In *Applications of model theory to algebra, analysis and probability (Proceedings of the 1967 International Symposium, California Institute of Technology),* herausgegeben von Wilhelmus Anthonius Josephus Luxemburg, 109–122. New York u.a.: Holt, Rinehart and Winston.

Rudin, Walter. 1976. *Principles of mathematical analysis.* 3. Aufl. New York u.a.: McGraw-Hill.

Sanders, Sam. 2020. The unreasonable effectiveness of Nonstandard Analysis. *Journal of Logic and Computation* 30 (1): 459–524. https://doi.org/10.1093/logcom/exaa019.

Schmieden, Curt, und Detlef Laugwitz. 1958. Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. *Math. Zeitschr.* 69:1–39. https://doi.org/10.1007/BF01187391.

Schnitzspan, Walter. 1976. Konstruktive Nonstandard-Analysis. Diss., Technische Hochschule Darmstadt.

Scott, Dana S., und Thomas J. Jech, Hrsg. 1971. *Axiomatic Set Theory, Part 1.* Bd. 13, 1. Proceedings of symposia in pure mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society.

Selden, John, und Annie Selden. 1995. Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics* 29 (2): 123–151.

Shapiro, Stewart. 1997. *Philosophy of mathematics: Structure and ontology.* Oxford u.a.: Oxford University Press.

Shoenfield, Joseph R. 1967. *Mathematical logic.* Boca Raton, London, New York: CRC Press. https://doi.org/10.1201/9780203749456.

Simpson, Stephen G. 2009. *Subsystems of second order arithmetic.* 2. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511581007.

———. 2014. Toward objectivity in mathematics. In *Infinity and Truth (Chong, Feng, Slaman und Woodin 2014),* 157–169. World Scientific.

———. 2015. *Potential versus actual infinity: insights from reverse mathematics.* Annual Logic Lecture, Group in Philosophical and Mathematical Logic, University of Connecticut, April 1-3, 2015. Besucht am 28. August 2021. http://www.personal.psu.edu/t20/talks/uconn1504/talk.pdf.

———, Hrsg. 2016. *Reverse mathematics 2001.* Bd. 21. Lecture notes in logic. Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781316755846.

Skolem, Thoralf. 1923. *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich.* Videnskapsselskapets Skrifter. 1. Mat.-Naturv. Klasse. 1923. No. 6. Kristiania: Jacob Dybwad.

———. 1934. Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. *Fundamenta mathematicae* 23 (1): 150–161.

Solovay, Robert M. 1970. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Annals of Mathematics* 92 (1): 1–56. https://www.jstor.org/stable/1970696.

Sonar, Thomas. 2016. *3000 Jahre Analysis: Geschichte – Kulturen – Menschen.* 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48918-5.

Spalt, Detlef D. 1990. *Rechnen mit dem Unendlichen: Beiträge zur Entwicklung eines kontroversen Gegenstandes.* Basel, Boston Berlin: Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5242-5.

———. 2015. *Die Analysis im Wandel und Widerstreit.* Freiburg, München: Karl Alber.

———. 2019. *Eine kurze Geschichte der Analysis: für Mathematiker und Philosophen.* Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57816-2.

Strauss, Anselm, und Juliet M. Corbin, Hrsg. 1997. *Grounded theory in practice.* Thousand Oaks, London, New Delhi: Sage Publications.

Sullivan, Kathleen. 1976. The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach. *The American Mathematical Monthly* 83 (5): 370–375. https://doi.org/10.1080/00029890.1976.11994130.

Swinyard, Craig. 2011. Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior* 30 (2): 93–114. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.01.001.

Swinyard, Craig, und Sean Larsen. 2012. Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education* 43 (4): 465–493. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0465.

Tait, William W. 1981. Finitism. *The Journal of Philosophy* 78 (9): 524–546. https://www.jstor.org/stable/2026089.

Tall, David O. 1980a. *Intuitive infinitesimals in the calculus.* Poster presented at the Fourth International Congress on Mathematical Education, Berkeley, 1980, with abstract appearing in Abstracts of short communications, page C5. Besucht am 29. August 2021. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1980c-intuitive-infls.pdf.

———. 1980b. Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes. *The Mathematical Gazette* 64 (427): 22–49. https://www.jstor.org/stable/3615886.

———. 1990. Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus on Learning Problems in mathematics* 12 (3 & 4): 49–63. Besucht am 29. August 2021. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1990b-inconsist-focus.pdf.

———, Hrsg. 1991. *Advanced mathematical thinking.* Bd. 11. Mathematics Education Library. New York, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers.

Tall, David O., und Shlomo Vinner. 1981. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12 (2): 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619.

Tao, Terence. 2012. A cheap version of nonstandard analysis. Besucht am 3. April 2021. https://terrytao.wordpress.com/2012/04/02/a-cheap-version-of-nonstandard-analysis/.

———. 2014. *Hilbert's fifth problem and related topics.* Bd. 153. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Tarski, Alfred. 1937. *Einführung in die mathematische Logik und die Methodologie der Mathematik.* Wien: Julius Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-5928-6.

Tomkowicz, Grzegorz, und Stan Wagon. 2016. *The Banach-Tarski Paradox.* Bd. 163. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge, New York: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781107337145.

Väth, Martin. 2007. *Nonstandard Analysis.* Basel, Bosten, Berlin: Birkhäuser Verlag.

Vinsonhaler, Rebecca. 2016. Teaching calculus with infinitesimals. *Journal of Humanistic Mathematics* 6 (1): 249–276. https://scholarship.claremont.edu/jhm/vol6/iss1/17.

Vopěnka, Petr. 1979. *Mathematics in Alernative Set Theory.* Leipzig: Teubner.

Wattenberg, Frank. 1983. Unterricht im Infinitesimalkalkül: Erfahrungen in den USA. *MU. Der Mathematikunterricht* 4 (83): 7–36.

Weyl, Hermann. 1921. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift* 10 (1-2): 39–79. https://doi.org/10.1007/BF02102305.

Wilholt, Torsten. 2004. *Zahl und Wirklichkeit: eine philosophische Untersuchung über die Anwendbarkeit der Mathematik.* Paderborn: mentis.

Williamson, Timothy. 2007. How probable is an infinite sequence of heads? *Analysis* 67 (3): 173–180. https://doi.org/10.1093/analys/67.3.173.

Woodin, W. Hugh. 2017. In Search of Ultimate-L the 19th Midrasha Mathematicae Lectures. *Bulletin of symbolic logic* 23 (1): 1–109. http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:34649600.

Lebenslauf

Zur Person

Name:	Karl Kuhlemann
Geburtsdatum:	14.03.1965

Schulausbildung

1971 – 1975:	Paul-Gerhardt-Grundschule, Lüdinghausen
1975 – 1984:	St. Antonius-Gymnasium, Lüdinghausen
4.6.1984:	Allgemeine Hochschulreife

Studium

10/1985 – 6/1991:	Studium der Mathematik (Diplom) an der Westfälischen Wilhelms-Universität, Münster
27.6.1991:	Abschluss Diplomstudiengang (Thema der Diplomarbeit: „Der Maaß-Raum zum Gaußschen Zahlkörper“)
10/1994 – 7/1996:	Studium der Informatik (LA. Sek. II) an der Westfälischen Wilhelms-Universität, Münster
1.1.2016:	Beginn des Promotionsstudiums Mathematik an der Leibniz Universität, Hannover

Berufstätigkeit

10/1984 – 10/1985:	Wehrdienst
8/1991 – 12/1995:	IBM Deutschland GmbH, Düsseldorf
Seit 1/1996:	Finanz Informatik GmbH & Co. KG, Münster

Liste der wissenschaftlichen Veröffentlichungen

Als Autor

2016. Nichtstandard in der elementaren Analysis – Kröte oder Froschkönig? In *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik.* 7:1–27. Universitätsverlag Siegen.

2018a. Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung. In *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik.* 10:47–65. Universitätsverlag Siegen.

2018b. Zur Axiomatisierung der reellen Zahlen. In *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik.* 10:67–105. Universitätsverlag Siegen.

2021. Neue Blicke auf alte Infinitesimalien: Nichtstandard-Analysis und Leibniz' inassignable Größen. In *Exkursionen in die Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts. Beiträge zur Jahrestagung Mainz, 29. Mai – 2. Juni 2019.* WTM Verlag Münster.

Als Co-Autor

Bair, Jacques, Piotr Błaszczyk, Robert Ely, Mikhail G. Katz und Karl Kuhlemann. 2021. Procedures of Leibnizian infinitesimal calculus: an account in three modern frameworks. *British Journal for the History of Mathematics*, 1–40.

Bedürftig, Thomas, und Karl Kuhlemann. 2020. *Grenzwerte oder infinitesimale Zahlen?* Springer Spektrum.

Katz, Mikhail G., Karl Kuhlemann, David Sherry, Monica Ugaglia und Mark van Atten. 2021. Two-Track Depictions of Leibniz's Fictions. *The Mathematical Intelligencer.*

Katz, Mikhail G., Karl Kuhlemann, David Sherry und Monica Ugaglia. 2021. Leibniz on bodies and infinities: Rerum natura and mathematical fictions. *The Review of Symbolic Logic*, 1–31.