

Performante, parametervariante Modellierung thermischer Prozesse bei der Vulkanisation von Kautschukerzeugnissen

Computation-efficient thermal Modeling of parameter-varying Rubber Curing Processes

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte

Dissertation

von
Tobias Frank, M. Sc.

2021

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Tobias Ortmaier

2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Stephan Kabelac

Tag der Promotion: 20. Oktober 2021

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechatronische Systeme der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover. Zunächst möchte ich mich bei Frau Professorin Raatz und Herrn Professor Kabelac für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes sowie des Koreferats bedanken. Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Professor Ortmaier für die fachliche und fürsorgliche Betreuung während meiner Promotion sogar über seine Institutszeit hinaus. Vielen Dank für die konstruktiven Anmerkungen und Anregungen, welche diese Dissertation maßgeblich geprägt haben.

Ich bedanke mich bei meinen Projektpartnern von der Continental Reifen Deutschland GmbH Herrn Dr. Axel Becker und Herrn Holger Krohne für die Betreuung und Durchführung des Forschungsprojektes sowie bei Herrn Ruben Steinhoff vom Institut für Thermodynamik für die überaus konstruktive Zusammenarbeit und Diskussionen im Rahmen von zahlreichen Projekttreffen und darüber hinaus.

Herzlichen Dank an alle Kolleg*innen und Studierenden mit denen ich am Institut für Mechatronische Systeme zusammenarbeiten durfte, für die stets freundliche, konstruktive und hilfsbereite Atmosphäre wie es sie sonst wohl nur selten gibt. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Steffen Bosselmann, mit dem ich zusammen am Forschungsprojekt gearbeitet habe. Vielen Dank für die unzähligen Anregungen, Diskussionen und Ideen.

Meiner Familie und meinen Freunden danke ich für den emotionalen Rückhalt während meines Studiums und meiner Promotion. Besonders danke ich meinen Eltern für die Ermöglichung meines Studiums und meines Werdegangs.

Der wohl größte Dank gebührt meiner Frau Stefanie, welche mich stets aufopferungsvoll unterstützt und motiviert hat. Stefanie, Linnea und Johann ich liebe euch.

Hannover, Oktober 2021

Tobias Frank

Kurzfassung

In einer Vielzahl industrieller Anwendungen trägt die Temperatur maßgeblich zum Prozess-erfolg bei. Ein Beispiel stellt die Vulkanisation von Kautschukerzeugnissen dar, bei der viskoelastische Verbundkörper in einer Heizpresse einen Energieeintrag durch Wärme bei gleichzeitiger Formgebung erhalten. Nach dem Abkühlvorgang liegt schließlich das rein elasti-sche Endprodukt vor. Ein thermisches Modell des Produktes kann zur Prozessauslegung und -optimierung oder aber auch zur Überwachung oder Regelung verwendet werden, um die Produktqualität zu erhöhen und/oder den Energieverbrauch zu reduzieren.

Bei der Erstellung der thermischen Modelle muss die partielle Wärmeleitungsdifferentialgleichung örtlich und zeitlich diskretisiert werden. Liegen komplexe Geometrien mit mehreren Komponenten vor, können finite Elemente zur Bildung eines Netzes aus Stützstellen verwendet werden, an deren Knoten die zeitlich veränderlichen Temperaturen berechnet werden. Oftmals kommt es dabei zu Systemen mit einer sehr hohen Anzahl von Zustandsgleichungen, was einen beachtlichen zeitlichen Berechnungsaufwand für eine Simulation zur Folge hat.

Dieser Arbeit liegt der zentrale Zielkonflikt zwischen Berechnungsdauer der Simulation und Modellkomplexität bzw. -genauigkeit zu Grunde. Zur Lösung wird die hochdimensionale Systembeschreibung in einen linearen und einen zustandsabhängigen Systemteil zerlegt. Pro-jektoren zur Modellordnungsreduktion werden anhand des linearen Teils berechnet und auf die gesamte Systemdarstellung angewendet. Ferner wird die Ausführung des zustandsabhängigen Systemteils von der zeitlichen Diskretisierung entkoppelt und nur bei einem Überschreiten einer festgelegten Zustandsänderung neu berechnet. Durch Anpassungen dieses Grenzwertes kann der adressierte Zielkonflikt zur Laufzeit angepasst und für Echtzeitfähigkeit abgestimmt werden. Somit ist es erstmalig möglich, dreidimensionale Temperaturverteilungen echtzeitfähig auch auf eingeschränkter Hardware wie z.B. industrielle Steuerungen zu berechnen und innerhalb regelungstechnischer Methoden zu verwenden.

Als beispielhafte Anwendungen wird ein Vulkanisationsprüfstand mit Hilfe von Messungen im Rahmen einer Identifikation parametrisiert und anschließend verifiziert. Die validierten Modelle werden abschließend zur echtzeitfähigen Prädiktion des Abkühlvorgangs von Kautschuker-zeugnissen sowie zur Überwachung der Oberflächentemperaturverteilung der Heizform durch ein Kalman-Filter eingesetzt.

Schlagwörter: verteilt-parametrische Systeme, linear parametervariante Systeme, Modellord-nungsreduktion, Parameteridentifikation, echtzeitfähige Prädiktion, Zustandsschätzung

Abstract

In manifold industrial applications, temperature contributes significantly to process success. One example is rubber curing, where viscoelastic composites are placed inside a mold and receive energy input through heat with simultaneous shaping. After the subsequent cooling process at ambient temperature, the product has reached its final state of cure. A precise model of temperature distributions over time can greatly benefit process planning, monitoring and control. Thus, product quality can be increased and energy consumption decreased.

In order to create a thermal model, the partial heat conduction differential equation must be discretized in terms of time and space. If complex geometries with several components are present, finite elements can be used to form a mesh at whose nodes the time-varying temperatures are calculated. Often, this results in systems with a very high number of state equations, which require a considerable amount of time to solve during a simulation.

This thesis is based on the central conflict of objectives between calculation time of the simulation and model complexity and accuracy, respectively. To solve this problem, the high-dimensional system description is separated into a linear and a parameter-varying system part. Projectors for model order reduction are calculated on the basis of the linear part and applied to the entire system representation. Furthermore, execution of the parameter-varying system part is decoupled from the temporal discretization and only recalculated in case of a change of state beyond a predefined threshold. And thus, the addressed conflict can be adjusted at runtime by parameter inputs and adapted to real-time requirements. Eventually, it is possible to calculate three-dimensional temperature distributions in real time even on limited hardware such as industrial programmable logic controller and to use them within model-based control methods.

As exemplary applications, a test bench for rubber curing is parameterized and subsequently validated by means of measurements using iterative solution methods within a parameter identification. The validated models will eventually be used for real-time prediction of the cooling process as well as for monitoring surface temperature distributions of the heating mold using a kalman filter.

Keywords: Distributed Parameter System, Linear Parameter-varying Systems, Model Order Reduction, Parameter Identification, Real-Time Prediction, State Estimation

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	2
1.2	Stand der Forschung	3
1.3	Zielsetzung und Vorgehensweise	8
2	Thermische Modellierung	10
2.1	Thermodynamische Grundlagen	12
2.1.1	Wärmeleitung	13
2.1.2	Konvektion	14
2.1.3	Wärmestrahlung	16
2.1.4	Kombination von Konvektion und Strahlung	18
2.2	Methode der finiten Elemente bei thermisch transienten Modellen	18
2.2.1	Formulierung von Anfangs- und Randbedingungen	19
2.2.2	Diskretisierung anhand der Methode der finiten Elemente	20
2.3	Linear parametervariantes Zustandsraummodell	24
2.3.1	Parametrische Beschreibung variierender Materialien	25
2.3.2	Parametrische Beschreibung der Wärmeübergänge	26
2.3.3	Separation in linearen und parametervarianten Systemteil	29
2.3.4	Superposition von Eigen- und Fremddynamik	33
3	Grundlagen zur Reduktion der Modellordnung	36
3.1	Konzepte und Zielvorgaben zur Senkung der Berechnungsdauer	36
3.2	Projektionsbasierte Modellordnungsreduktion	39
3.3	Gütekriterien zur Bewertung reduzierter Modelle	41
3.3.1	Einfluss der Projektion	41
3.3.2	Systemnormen	42
3.3.3	Abweichung im Zeitbereich	43

3.4	Reduktionsverfahren für lineare Systeme	44
3.4.1	Balanced Truncation	45
3.4.2	Proper Orthogonal Decomposition	47
3.4.3	Krylov Unterraum Verfahren	48
	Rationale Krylov Algorithmen	49
	Tangentiale Interpolation	53
	Iterative Rational Krylov Algorithm - IRKA	55
3.5	Parametrische Modellordnungsreduktion	58
3.5.1	POD/POD-Greedy Algorithmus	58
3.5.2	Discrete-Empirical-Interpolation-Method	59
3.5.3	Interpolative Verfahren	60
3.5.4	Cross-Gramian Verfahren	61
4	Performante Ausführung der thermischen Simulation	63
4.1	Ordnungsreduktion der vorliegenden Systembeschreibung	63
4.1.1	Anwendung auf linear parametervariante Systeme	64
4.1.2	Simulative Analysen der Verfahren zur Reduktion der Modellordnung	69
	Analyse des balancierten Abschneidens am Abkühlmodell des Reifens	69
	Analyse Blockkrylov und tangentiale Interpolation am Abkühlmodell	71
	Analyse des IRKA am Abkühlmodell	74
4.1.3	Gesamtvergleich der Reduktionsergebnisse	74
4.2	Numerische Lösung von Anfangswertproblemen	80
4.2.1	Existenz und Eindeutigkeit	80
4.2.2	Runge-Kutta-Verfahren	81
	Explizite Einschrittverfahren	81
	Implizite Einschrittverfahren	83
4.2.3	Analyse der Lösungsalgorithmen	84
5	Beispielhafte Anwendungen der performanten Modellierung	90
5.1	Parametrierung der thermischen Modelle	90
5.1.1	Formulierung der Parameterräume und des Optimierungsproblems . .	91
5.1.2	Identifikation am Prüfkörper	93
5.1.3	Bestimmung unbekannter Modellparameter des Heizplattenmodells .	94
5.2	Echtzeitfähige Anwendungen	100
5.2.1	Prädiktion des nichtlinearen Abkühlvorgangs	101
5.2.2	Beobachtergestützte Schätzung der Oberflächentemperaturverteilung	105

6 Zusammenfassung und Ausblick	110
6.1 Zusammenfassung	110
6.2 Ausblick	114
Anhang	115
A.1 Ausheizgrad bei der Vulkanisation von Kautschukerzeugnissen	115
Literatur	117

Abbildungsverzeichnis

2.1	Betrachtete Modelle im schematischen Aufbau	10
2.2	Örtliche Diskretisierung der Geometrien durch finite Elemente	21
2.3	Temperaturabhängigkeit des WÜK $\alpha_{\text{tot}}(T)$ für Innen- und Außenoberfläche des Reifenmodells [Fra+18]	27
2.4	Besetztheitsstruktur der Systemmatrizen \mathbf{A} und \mathbf{A}_α	31
2.5	Superpositionsprinzip von Eigen- und Fremddynamik bei vorgegebener inhomogener Temperaturverteilung $T_0 = \bar{x}(0)$ und Abkühlen an der Umgebungstemperatur T_U	34
3.1	Berechnete a-priori Fehlerschranken und ermittelte Fehler in der Approximation der Eigendynamik (a) und Fremddynamik (b) des linearen Abkühlmodells vom Reifen	46
3.2	Bodediagramm eines Übertragungspfades des durch den Eingangs-Krylov-Unterraum reduzierten, linearen Abkühlmodells vom Reifen für verschiedene Anzahlen von Momenten k_0 und k_∞	52
3.3	Relativer Zustandsfehler $\varepsilon_{2,x}(t)$ im transienten und stationären Zeitbereich der Abkühlung für verschiedene Krylov-Ordnungen k_0 und k_∞	53
3.4	Beispielhafte Konvergenzentwicklung des IRKA im relativen Fehler der \mathcal{H}_2 -Norm für Eigen- und Fremddynamik mit $q_0 = q_u = 12$	56
3.5	Beispielhaftes Bodediagramm für den Amplitudengang der durch den IRKA reduzierten Fremddynamik des linearen Abkühlmodells vom Reifen für verschieden viele Entwicklungsstellen	57
3.6	Relativer Zustandsfehler für Eigen- und Fremddynamik des linearen Abkühlmodells vom Reifen bei verschiedener Wahl der Anfangsentwicklungsstellen	58
4.1	Verteilung der zeitlich gemittelten Zustandsfehler mit und ohne Adaption der Materialparameter bei gleichzeitiger 10 % Schwankung [Fra+20]	66
4.2	Anpassungsmöglichkeiten der Materialparameter der Prüfkörpergeometrie bei verschiedenen Werkstoffen [Fra+20]	67
4.3	Mittler Zustandsfehler bei adaptierten und nicht adaptierten Parameterschwankungen im Material und bei Wärmeübergängen der Heizplatte [Fra+20]	68
4.4	Relativer Fehler bei der Reduktion des linearen Abkühlsystems mittels BT	70

4.5	Verteilung des zeitgemittelten Zustandsfehlers $\Delta^{(t)}\bar{x}$ bei MOR der linearen Eigen- und Fremddynamik mittels BT für $q_0 = 15, q_u = 13$	70
4.6	Fehlerintervalle für die NL-Simulation der Systemausgänge $\mathbf{y}(t)$ sowie der Zustände $\mathbf{x}(t)$ mit $q_0 = 17, q_u = 16, T_G = 2 \text{ K}$ und $h = 0, 1 \text{ s}$ [Zei+20]	71
4.7	Relativer Zustandsfehler $\varepsilon_{2,x}(t)$ und $\varepsilon_{2,y}(t)$ für das Block-Eingangs-RK sowie rechtstangential interpolierte Abkühlsystem mit $s_l \in \{0; 0, 1; \infty\}$	72
4.8	Bodediagramm eines Übertragungspfades der Fremddynamik des Abkühlsystems für verschiedene RK-basierte Reduktionsverfahren	73
4.9	Sensor- und exemplarische Zustandsverläufe mit Fehlertoleranzbändern für die ordnungsreduzierte Abkühlsimulation mit TI für Eigen- und BK-UR für Fremddynamik ($T_G = 1 \text{ }^\circ\text{C}$ und $h = 0, 1 \text{ s}$) [Zei+20]	73
4.10	Fehlerintervalle über der Abkühlzeit für $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ der IRKA-reduzierten, NL-Abkühlsimulation mit $T_G = 1 \text{ K}, h = 0, 1 \text{ s}, q_0 = 15, q_u = 18$ [Zei+20]	74
4.11	Relativer Fehler bei der Reduktion des linearen Abkühlsystems mittels IRKA	75
4.12	Projektionsfehler ζ_{proj} für durch unterschiedliche MOR-Verfahren generierte Projektoren des Abkühlsystems	76
4.13	RMS-Fehler für verschiedene Ordnungen des linearen Abkühlsystems infolge verschiedener Reduktionsverfahren [Zei+20]	77
4.14	Zeitabhängiger relativer Zustandsfehler $\varepsilon_2(t)$ bei der Wahl verschiedener Reduktionsverfahren [Zei+20]	77
4.15	Reduktionsergebnisse des NL-Abkühlsystems mit $q_0 = 16, q_u = 14, T_G = 2 \text{ K}$ und $h = 0, 1 \text{ s}$	78
4.16	Abweichungen der Systemausgänge bei Verwendung unterschiedlicher Reduktionsverfahren und Ordnungen [Zei19]	79
4.17	Qualitative Übersicht der Reduktionsverfahren Truncated Balanced Realizations (TBR), RK und IRKA am Abkühlsystem [Zei19; Zei+20]	79
4.18	Relativer Zustandsfehler des Endzustandes $\varepsilon_{2,x}(t_{\text{end}})$ verschiedener Lösungsverfahren und Zeitschrittweiten h für $q = 28$ Zustände des linearen Systemteils bei der Ausführung auf dem IPC	84
4.19	Rechenzeit t_R verschiedener Lösungsverfahren und Zeitschrittweiten h für $q = 28$ Zustände des linearen Systemteils bei der Ausführung auf dem IPC	85
4.20	Abweichung der Ausgänge Δ^{RMS} und Rechenzeit t_R am nichtlinearen Abkühlsystem des Reifens für verschiedene Ordnungen q und Schrittweiten h mit $T_G = 2 \text{ K}$ und $\Phi_{\text{impl Euler}}$	85
4.21	Rechenzeit und RMS-Fehler der expliziten RuKu-Verfahren in Abhängigkeit der Zeitschrittweite beim reduzierten NL-Abkühlsystem mit $q_0 = 19$ (TI), $q_u = 18$ (RK) und $T_G = 1 \text{ K}$ [Fra+20]	86

4.22	Rechenzeit und RMS-Fehler der impliziten RuKu-Verfahren in Abhängigkeit der Zeitschrittweite beim reduzierten NL-Abkühlsystem mit $q_0 = 19$ (TI), $q_u = 18$ (RK) und $T_G = 1$ K [Fra+20]	87
4.24	Rechenzeit und RMS-Fehler in Abhängigkeit des Grenzwertes T_G beim reduzierten NL-Abkühlsystem mit $r_0 = 19$ (TI), $r_u = 18$ (RK) und $T_G = 1$ K [Fra+20]	89
4.25	Zeitlicher Vergleich der Simulation zwischen Gesamtmodell und reduziertem System mit Φ_{Euler} , $T_G = 10$ K, $t_{\text{end}} = 45$ min, $r_0 = 19$ (TI) und $r_u = 18$ (RK) [Fra+20]	89
5.1	Verifizierung Prüfkörpermodell für Aufheiz- und Abkühlverhalten [Fra+20] .	94
5.2	Beispielhaftes Verifizierungsergebnis bei identifizierten Materialparametern und Wärmeübergängen der Heizplatte [Fra+20]	96
5.3	Empirisch ermittelte WÜK Kennfelder bei freier Konvektion und Strahlung für die drei Oberflächenareale der Heizplatte [Fra+19]	97
5.4	Sprungantworten zur Identifikation der Randbedingungen [Fra+19]	98
5.5	Verifizierung der freien Konvektion im zyklischen Prozess [Fra+19]	99
5.6	Verifizierung der erzwungenen Konvektion im zyklischen Prozess [Fra+19] .	100
5.7	Architektur des Versuchsstandes	101
5.8	Beispielhafte Temperaturverteilungen im Heizprozess für den Prüfkörper (a) und den Reifenquerschnitt (b)	102
5.9	Schema der Abkühlprädiktion bei Kautschukprodukten	103
5.10	Aufbau des TCCom Objektes zur Prädiktion	104
5.11	Temperaturverläufe sowie Abweichungen zwischen aufgenommener Messung und linearisiertem bzw. adaptiertem Modell im echtzeitfähigem Betrieb ohne Rückführung [FWO20]	105
5.12	Geschätzte Oberflächentemperatur $\hat{T}_{\text{Al,surf}}$ im Vergleich zu den Sensorwerten T_S [FWO20]	107
5.13	Abweichung zwischen geschätzten und gemessenen Temperaturen zum in Abbildung 5.12 dargestellten Zeitpunkt	108
5.14	Beispielhafte Heizverläufe und Abweichungen zwischen gemessenen T_S und geschätzten Temperaturwerten \hat{T}_{sim} an den Sensorpositionen [FWO20] . . .	109
5.15	Gemittelte Abweichungen zwischen gemessenen und geschätzten Temperaturen für die Verläufe aus Abbildung 5.14 [FWO20]	109
A.1	Beispielhafter Temperatur- und Ausheizgradverlauf im Prüfkörper	116

Abkürzungsverzeichnis

BT	Balanced Truncation
BTI	Bladder Tire Interface - Reifeninnenseite
DEIM	Discrete Empirical Interpolation Method
DGL	Differentialgleichung
DGS	Differentialgleichungssystem
EKF	Extended-Kalmanfilter
EW	Eigenwert
FEM	Finite-Elemente-Methode
HP	Heizplatte
IRKA	Iterative Rational Krylov Algorithm
MTI	Mold Tire Interface - Reifenaußenseite
MIMO	Multiple-Input-Multiple-Output
MOR	Modellordnungsreduktion
NL	Nichtlinear
PK	Prüfkörper
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RB	Randbedingung
RK	Rationaler Krylov Algorithmus
RMS	Root Mean Squared Error
RuKu	Runge Kutta Verfahren
SISO	Single-Input-Single-Output
SWZ	Singulärwertzerlegung
TI	Tangentiale Interpolation
UR	Unterraum
WÜK	Wärmeübergangskoeffizient
ZRM	Zustandsraum

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

A	Systemmatrix
\tilde{A}	Reduzierte Systemmatrix
\tilde{A}_0	Reduzierte Systemmatrix der Eigendynamik
\tilde{A}_u	Reduzierte Systemmatrix der Fremddynamik
A_α	Systemmatrix des nichtlinearen Anteils
A	Fläche
B	Eingangsmatrix
\tilde{B}	Reduzierte Eingangsmatrix
\tilde{B}_0	Reduzierte Eingangsmatrix der Eigendynamik
\tilde{B}_u	Reduzierte Eingangsmatrix der Fremddynamik
C	Ausgangsmatrix
\tilde{C}	Reduzierte Ausgangsmatrix
\tilde{C}_0	Reduzierte Ausgangsmatrix der Eigendynamik
\tilde{C}_u	Reduzierte Ausgangsmatrix der Fremddynamik
C_R	Robin-Rand
C_D	Dirichlet-Rand
C_N	Neumann-Rand
C_{12}	Strahlungsaustauschzahl
D	Durchgangsmatrix
E	Deskriptormatrix
\tilde{E}	Reduzierte Deskriptormatrix
Q	Lastmatrix
Q^*	Zustandsabhängige Lastmatrix
G	Übertragungsfunktion
\tilde{G}	Reduzierte Übertragungsfunktion
Gr	Grashof-Zahl
H	Binärmatrix
I_n	Einheitsmatrix
K	Konduktivitätsmatrix
$K^{(l)}$	Konduktivitätsmatrix des Einzelements

\mathbf{K}_R	Steifigkeitsanteil durch Robin-RB
\mathbf{K}^*	Zustandsabhängiger Steifigkeitsanteil
$\hat{\mathbf{K}}$	Approximierte Konduktivitätsmatrix
$\hat{\mathbf{K}}_R$	Approximierter Robinanteil der Konduktivitätsmatrix
\mathbf{M}	Wärmekapazitätsmatrix
M_j	Markovparameter
L	Anzahl von Entwicklungsstellen
L_Ω	Lipschitzkonstante
$\mathbf{M}^{(l)}$	Wärmekapazitätsmatrix des Einzelelements
Nu	Nusselt-Zahl
Pr	Prandtl-Zahl
\mathbf{P}	Projektor
\mathcal{P}	Gramsche Steuerbarkeitsmatrix
\mathcal{Q}	Gramsche Beobachtbarkeitsmatrix
Q	Wärmeenergie in J
\dot{Q}	Wärmestrom in W
R	Residuum
Re	Reynolds-Zahl
T	Thermodynamische Temperatur
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
T_0	Anfangstemperatur °C
T_U	Thermodynamische Umgebungstemperatur °C
T_G	Thermodynamische Trigger-Temperatur K
T_S	Gemessene Temperatur in °C
\mathbf{V}	Projektionsmatrix
\mathbf{W}	Projektionsmatrix
\mathbf{X}	Laplacetransformierter Zustandsvektor
$\tilde{\mathbf{X}}$	Laplacetransformierter, reduzierter Zustandsvektor
\mathbf{Y}	Laplacetransformierter Ausgangsvektor
$\tilde{\mathbf{Y}}$	Laplacetransformierter, rekonstruierter Ausgangsvektor
$\mathbf{Z}^{(l)}$	Zuordnungsmatrix des Elements l
\mathbf{b}	SISO Eingangsvektor
b_l	Gewichte eines RuKu-Verfahrens
\mathbf{c}	SISO Ausgangsvektor
c	Spezifische Wärmekapazität in J/(kg · K)
c_l	Knoten eines RuKu-Verfahrens

\mathbf{f}	Zustandsfunktion
\mathbf{f}_φ	Formfunktion
\mathbf{g}	Nichtlineare Korrekturfunktion
$\tilde{\mathbf{g}}$	Reduzierte Korrekturfunktion
$\tilde{\mathbf{g}}_0$	Reduzierte Korrekturfunktion der Eigendynamik
$\tilde{\mathbf{g}}_u$	Reduzierte Korrekturfunktion der Fremddynamik
h	Zeitschrittweite s
i	Imaginäre Einheit
k_B	Boltzmann-Konstante in $J \cdot K^{-1}$
k_{s_0}	Stufe des Krylovunterraums um s_0
\mathbf{l}	Linkstangentiale Richtung
\mathbf{l}_l	Linkstangentiale Richtung in s_l
$\tilde{\mathbf{l}}_k$	Linksresiduum von $\tilde{\mathbf{G}}$
\mathbf{m}_j	Moment der Übertragungsfunktion
\mathbf{n}	Einheitsnormalenvektor
n_α	Anzahl WÜK Parameter
n_B	Anzahl der Oberflächenzustände
n_{comp}	Anzahl der Materialkomponenten
n_{dim}	Räumliche Dimension
n_{elem}	Anzahl an Elementen
n_{FE}	Anzahl Knoten pro Element
n_p	Anzahl Parameter
n_{nl}	Anzahl nichtlinearer Zustände
n_O	Anzahl Oberflächenareale
n_{pol}	Polynomgrad WÜK
n_{que}	Anzahl Stützstellen WÜK
n_u	Anzahl Systemeingänge
n_S	Anzahl der Snapshots
n_{umg}	Anzahl Umgebungstemperaturen
n_x	Systemdimension
n_y	Anzahl Systemausgänge
\mathbf{q}	Lastvektor
q	Reduzierte Ordnung
q_0	Reduzierte Ordnung der Eigendynamik
q_u	Reduzierte Ordnung der Fremddynamik
p	Index einer Norm
p_{fl}	Druck in Pa

\mathbf{p}_α	Parametervektor WÜK
$\mathbf{p}_{\rho c}$	Parametervektor ρc
\mathbf{p}_λ	Parametervektor λ
$\mathbf{q}^{(l)}$	Lastvektor des Einzelements
\mathbf{r}	Rechtstangentiale Richtung
\mathbf{r}_l	Rechtstangentiale Richtung in s_l
$\tilde{\mathbf{r}}_k$	Rechtsresiduum von $\tilde{\mathbf{G}}$
s	Komplexe Frequenz
s_l	Entwicklungsstelle
t	Zeit
t_R	Berechnungsdauer der Simulation
T_B	Oberflächen-/Kantentemperaturen °C
t_j	Diskreter Zeitpunkt
t_{sim}	Simulationszeit
\mathbf{u}	Systemeingangsvektor
u_{fl}	Spezifische innere Energie J
\mathbf{v}	Zustand der Fremddynamik
$\tilde{\mathbf{v}}$	Reduzierter Zustand der Fremddynamik
\mathbf{v}_0	Anfangszustand der Fremddynamik
\mathbf{w}	Zustand der Eigendynamik
$\tilde{\mathbf{w}}$	Reduzierter Zustand der Eigendynamik
\mathbf{w}_0	Anfangszustand der Eigendynamik
\mathbf{w}_{fl}	Geschwindigkeitsvektorfeld eines Fluids
\mathbf{x}	Systemzustandsvektor
\mathbf{x}_j	Partition des Systemzustandsvektors
$\tilde{\mathbf{x}}$	Reduzierter Systemzustandsvektor
$\hat{\mathbf{x}}$	Rekonstruierter Systemzustandsvektor
\mathbf{x}_0	Anfangszustand
$\tilde{\mathbf{x}}_0$	Reduzierter Anfangszustand
\mathbf{x}_{nl}	Nichtlinearer Oberflächenzustand
$\mathbf{x}^{(l)}$	Elementzustandsvektor
\mathbf{x}_j	Numerische Lösung des Zustands \mathbf{x} zum Zeitpunkt t_j
$\Delta\tilde{\mathbf{x}}$	Zeitgemittelter Zustandsvektor
\mathbf{y}	Systemausgangsvektor
$\hat{\mathbf{y}}$	Approximierter Systemausgangsvektor
\mathbf{z}_0	Linearkombinationsvektor der Initialbasis
z_B	Oberflächen-/Kantenkoordinaten

z Ortsvektor

Griechische Buchstaben

Δ	Projektionsfehler
Δ^{proj}	Abbildungsmatrix des Projektionsfehlers
Δ^{RMS}	RMS-Fehler
Σ	Singulärwertmatrix
Σ_j	Partition der Singulärwertmatrix
Σ	System
$\tilde{\Sigma}$	Ordnungsreduziertes System
$\Sigma_{0,\text{lin}}$	Linearisiertes System der Eigendynamik
$\tilde{\Sigma}_{0,\text{lin}}$	Reduziertes System der Eigendynamik
$\Sigma_{u,\text{lin}}$	Linearisiertes System der Fremddynamik
$\tilde{\Sigma}_{u,\text{lin}}$	Reduziertes System der Fremddynamik
Φ	Verfahrens-/ Inkrementfunktion
$\dot{\phi}$	Wärmestromdichte
$\dot{\phi}_s$	Wärmestromdichte eines schwarzen Strahlers
$\dot{\phi}_N$	Wärmestromdichte der Neumann-RB
$\dot{\phi}_R$	Wärmestromdichte der Robin-RB
$\dot{\Psi}$	Dissipationsleistungsfunktion
ψ	Testfunktion
Ω	Offenes Gebiet
Ω_j	Offenes Teilgebiet
$\partial\Omega$	Topologischer Rand von Ω
α	Wärmeübergangskoeffizient
α_0	Wärmeübergangskoeffizient im Arbeitspunkt
α_{tot}	Gesamtwärmeübergangskoeffizient
α_{Konv}	Konvektiver Wärmeübergangskoeffizient
α_{Str}	Wärmeübergangskoeffizient der Strahlung
γ	Impulsanregung
δ	Dirac-Distribution
δ_{proj}	Absolut gemittelter Projektionsfehler
ζ_{proj}	Projektionsfehler
η	Dynamische Viskosität in $\text{Pa} \cdot \text{s}$
η_ν	Stufen eines RuKu-Verfahrens

λ	Wärmeleitfähigkeit in $W/(m \cdot K)$
Λ	Wärmeleitfähigkeitstensor $W/(m \cdot K)$
λ_j	Eigenwert bzw. Polstelle
$\tilde{\lambda}_k$	Polstelle des reduzierten Systems
ϵ	Emissionsgrad
$\epsilon_{p,x}$	Relativer Zustandsfehler
ξ	Residuum
π	Kreiszahl
ρ	Dichte $kg \cdot m^{-3}$
σ_j	Singulärwert
ω	Kreisfrequenz in s^{-1}

Sonstige Symbole & Operatoren

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}_+	Menge der positiven reellen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{C}_{+,-}$	Menge der komplexen Zahlen mit positivem, negativem Realteil
\mathbb{K}	Körper der reellen oder komplexen Zahlen
\mathbb{X}_0	Raum aller Anfangszustände
\mathcal{X}_0	Initialbasis
\Re	Realteil
\Im	Imaginärteil
div	Divergenz eines Vektorfeldes
∇	Nabla-Operator, Gradient
\mathcal{L}	Operator der Laplacetransformation
$\circ \longrightarrow \bullet$	Bildbereichstransformation
\mathcal{H}_p	Hardy-Norm
\mathcal{L}_p	Lebesgue-Norm
$()^T$	Transposition
$()^H$	Adjungierte
$()_{\alpha,:}$	Zeile α
$\text{tr}()$	Spur
$\text{span}()$	Lineare Hülle

<code>colspan()</code>	Lineare Hülle der Spaltenvektoren
\oplus	Direkte Summe
\mathcal{K}_k	Krylovunterraum der Stufe k
\mathcal{V}	Bildraum der Projektion
<code>[]</code>	Gaußklammer

1 Einleitung

Die Verwendung mathematischer Modelle zur Beschreibung von Industrieprozessen nimmt in den vergangenen Jahren stetig zu und wird auch zukünftig von zentraler Bedeutung sein [WCB17]. Insbesondere im Kontext der Industrie 4.0 ist es unabdingbar, modellbasierte Methoden zur Auslegung, Überwachung und/oder Regelung zu verwenden, mit den Zielen die Produktqualität zu erhöhen, Energie oder Kosten zu sparen sowie den gesamten Entwicklungs- und Produktionsablauf zu verbessern [Lu17].

Vielfältige Industrie- und Herstellungsprozesse stehen dabei unter direktem Einfluss von Temperatureffekten, wobei zwischen dem Auftreten als ungewollte Störgröße und einer relevanten Einflussgröße zum Produktionserfolg unterschieden werden kann. Gleichzeitig liegt dieser Temperatureinfluss oftmals gekoppelt mit elektrischen, chemischen oder mechanischen Wirkprinzipien vor, welche sich auch gegenseitig beeinflussen können. So muss besonders beim Schweißen, Sintern, Warmwalzen oder Umformen das Ausgangsmaterial in einem bestimmten Temperaturbereich gehalten werden, um die gewünschten Bearbeitungseffekte zu erzielen [Hu+13]. Bei elektrischen Komponenten wie Halbleiterelementen, Leistungsreglern oder Elektromotoren können Verluste im laufenden Betrieb zu lokal erhöhten Temperaturen (Hotspots) führen, welche entweder die Bauteilcharakteristik stören oder sogar das gesamte Bauteil zerstören können [Sun+18]. Ein besonderer Einfluss liegt bei chemische Reaktionen wie dem Vulkanisieren von Gummimischungen oder Aushärten von Verbundwerkstoffen vor, bei denen die eingebrachte Energie durch Zufuhr von Wärme direkte Auswirkungen auf die chemischen Vernetzungsreaktionen und somit die Produktqualität hat [Gho16]. Ähnlich verhält es sich bei Lebensmitteln oder Halbleiterwerkstoffen, Glas und Metallen, welche auch in Zusammenhang mit einer Oberflächenbehandlung wie Lackierungen oder Anstrichen, durch Konvektions- oder Glühöfen Temperatureinträge erfahren [Yi+17].

Eine thermische Modellierung und anschließende Analyse kann in all diesen Fällen von großer Bedeutung sein, um den Einfluss der Temperatur besser zu verstehen, darzustellen und die Prozesse entsprechend auszulegen und zu überwachen. Grundvoraussetzung ist dabei sowohl eine genaue als auch recheneffiziente (performante) Simulation der Modelle, was in den meisten Fällen jedoch einen Zielkonflikt darstellt. So führen genaue und aufwendige Modellierungsansätze, wie sie zum Beispiel im Rahmen einer mehrdimensionalen finite Elemente Analyse vorliegen, meist zu einem genauen Ergebnis, liefern dieses allerdings erst nach einer erheblichen Berechnungszeit [LQ10]. Modellbasierte Methoden benötigen jedoch entweder eine Vielzahl

an Simulationsiterationen, beispielsweise bei der Minimierung eines Kostenfunktionalis im Zuge einer Parameteridentifikation oder aber unterliegen harten Echtzeitanforderungen, wie sie bei der Ausführung auf industriellen Steuerungen auftreten [Lu17].

1.1 Problemstellung

Die im Verlauf dieser Promotion betrachteten thermischen Vorgänge sind an die industriellen Prozesse rund um die Vulkanisation von Kautschukerzeugnissen und insbesondere deren Verbundprodukte wie beispielsweise PKW-Reifen angelehnt, aber nicht explizit darauf beschränkt. Ziel dieser Vulkanisationsprozesse ist die Formgebung durch mechanische Krafteinwirkung bei gleichzeitiger Änderung mechanischer Produktparameter durch temperaturbedingte chemische Vernetzungsreaktionen im Material. Der anfänglich viskoelastische Zustand des Rohproduktes wird dabei in einen rein elastischen überführt. Dafür werden die unvulkanisierten Produkte in eine Heizpresse eingelegt und unter Druck mit einem vorgegebenen Temperaturprofil beheizt. Nach Ablauf der Heizdauer wird der Reifen aus der Heizpresse entnommen und es findet ein Abkühlprozess an der Umgebungsluft statt, währenddessen der Großteil der Vernetzungsreaktionen im Inneren des Materials abläuft [KV86]. Zur Quantifizierung des Anteils der abgelaufenen Reaktionen und somit auch der Qualität der einzelnen Komponenten sowie des Gesamtproduktes ist die zeitliche Temperaturverteilung während des Heiz- und Abkühlprozesses sowie insbesondere der daraus ermittelte Ausheizgrad (siehe Anhang A.1) von entscheidender Bedeutung [BW80]. Da diese Verteilung jedoch nur über eine hohe Anzahl von Sensoren messbar wäre und ein Einbringen von Sensoren irreversible Schäden am Produkt nach sich ziehen würde, ist die modellbasierte Berechnung und Überwachung der Temperaturverteilungen im laufenden Prozess eine vielversprechende Alternative.

Neben der thermischen Betrachtung des Kautschukerzeugnisses ist auch die Modellierung und Regelung der Heizpresse von entscheidender Bedeutung, um die während der Auslegung festgelegten Prozessparameter einzuhalten und zu überwachen. Aufgrund der komplexen Geometrie und einer Vielzahl von verbauten Komponenten ergeben sich für PKW-Reifen sowie für die Heizpresse hochdimensionale Modelle, welche durch Prozessanforderungen und Rahmenbedingungen nur eingeschränkt vereinfacht werden können. Beispiele hierfür sind Parametervariationen in den Materialeigenschaften durch vorige Prozessschritte oder die natürlich auftretenden Schwankungen des Kautschukrohmaterials. Weiterhin treten in belüfteten Industriehallen wetter- und saisonbedingte Veränderungen der Umgebungstemperaturen auf, welche kontrollierte thermische Randbedingungen insbesondere beim Abkühlvorgang erschweren. Diese Parameterabhängigkeiten bleiben bei der Verwendung numerischer Diskretisierungsverfahren wie der Methode der finiten Elemente nicht erhalten, was Parametrierungen nach dem Aufstellen der Zustandsgleichungen ausschließt. Bei den vorliegenden Systemen

handelt es sich zudem um Mehrgrößensysteme, bei denen eine hohe Anzahl von Ein- und Ausgängen auftreten kann.

Zusammengefasst ergeben sich damit besonders beim Vulkanisationsprozess die folgenden Herausforderungen bei der Verwendung modellbasierter Verfahren:

- Verteilt-parametrische, thermische Systeme sehr hoher Ordnung auf Grund komplexer Geometrien und des Aufbaus aus mehreren Komponenten,
- nichtlineare Zustandsgleichungen durch temperaturabhängige Randbedingungen,
- Simulation von zeitlich veränderlichen Zustandsverteilungen,
- große Anzahl von Ein- und Ausgängen,
- Abbildung von Parametervariationen im Material,
- unbekannte thermische Randbedingungen, Wärmeübergänge und Materialparameter sowie
- Beschränkungen der Simulationsdauer durch erforderliche Echtzeitfähigkeit oder bei der iterativen Lösung von Optimierungsproblemen.

Insgesamt liegt ein zentraler Zielkonflikt zwischen Modellgenauigkeit/-komplexität und Berechnungsdauer der Simulation vor, welcher anforderungsspezifisch gelöst werden muss. Bisher entwickelte Herangehensweisen bei der Verwendung thermischer Modelle hoher Ordnung in regelungstechnischen Problemstellungen werden nachfolgend hinsichtlich ihrer Verwendbarkeit dargestellt und diskutiert.

1.2 Stand der Forschung

Besonders in der Gummiverarbeitung ist die Vorgabe und Einhaltung von der geplanten Ausheizgradverteilung von großer Bedeutung, da der Umfang der chemischen Vernetzungsreaktionen direkten Einfluss auf die Produktqualität hat. Im Zuge dessen wurden umfangreiche Modellierungsansätze in den letzten Jahren erforscht [GN05; Gho16; NTO11; SD16; Su+15; WDJ15]. Ebenfalls thematisiert wurden die Verwendungen datenbasierter Modellierungsansätze wie zum Beispiel [KID09; KID12]. Im Wesentlichen lässt sich der Stand der Forschung in drei unterschiedliche Herangehensweisen einteilen, um die Berechnungsdauer thermischer Simulationen zu senken:

- Vereinfachungen in der Geometrie und im Arbeitspunkt,

- mathematische Reduktion der Modellordnung sowie
- datenbasierte Verfahren.

Diese Lösungsmöglichkeiten werden nachfolgen anhand verschiedener Forschungsarbeiten detaillierter betrachtet.

Vereinfachungen in der Geometrie und im Arbeitspunkt

Eine vereinfachte Modellierung der physikalischen Realität erfordert zumeist tieferes Verständnis der Prozesse und der zu Grunde liegenden Wirkprinzipien, um daraus zulässige Annahmen für die Modellbildung abzuleiten. Diese stellen jedoch einen schnellen und effektiven Ansatz zur Reduktion der Berechnungsdauer thermischer Systeme dar. Ein Beispiel hierfür ist das Ausnutzen von Symmetrieeffekten falls diese vorliegen. Auf diese Weise können kleinere Teilgebiete betrachtet werden oder es kann sogar eine Reduktion der räumlichen Dimension in Frage kommen, wodurch die Anzahl notwendiger örtlicher Stützstellen und somit die Anzahl der Zustandsgleichungen stark verringert. So wird in [CYP04] ein räumlich beschränktes, dreidimensionales finite Elemente Modell zur Auslegung von Vulkanisationsprozessen verwendet, welches allerdings immer noch eine beachtliche Berechnungsdauer aufweist und nur für wenige aufeinanderfolgende Simulationen geeignet ist. Deutlich performanter sind die in [ZWJ16] verwendeten nichtlinearen Teilmodelle bei der Edelstahlherstellung auf einer Heizstraße. Die symmetrische Form des Werkstoffes erlaubt dabei die Verwendung eines eindimensionalen Modells. Weiterhin kann die Anzahl der örtlichen Stützstellen (Diskretisierung) auf Grund der hohen thermischen Leitfähigkeit bei Metallen zusätzlich gesenkt werden.

Die Autoren von [Spe+13; Spe+14] nutzen ein erweitertes Kalman-Filter (EKF) für die Überwachung der Stahltemperatur bei Warmwalzprozessen. Da diese von nichtlinearen Wärmestrahlungseffekten, diversen mechanischen Kontakten und Parameterschwankungen beeinflusst werden, ist eine physikalische Interpretierbarkeit der Modellierung wünschenswert. Im Zuge dessen wurde zur Modellierung auf die eindimensionale nichtlineare Wärmeleitungsgleichung mit möglichst wenig Temperaturknoten als räumliche Stützstellen zurückgegriffen. Aussagen über Temperaturverteilungen im gesamten Werkstück und insbesondere an den Rändern sind auf diese Weise jedoch nur eingeschränkt möglich.

In [Ade15; AAO19] werden mit Hilfe einer genetischen Optimierung Heiztemperaturen und Zykluszeiten unter Vorgabe eines zu erreichenden Ausheizgrades im Material bestimmt. Dabei wird ebenfalls ein vereinfachtes Modell genutzt, welches in einer Dimension aufgestellt ist und die verschiedenen Materialparameter des Verbundes mittelt. Auch hier ist der vereinfachte Ansatz nicht auf die Vulkanisation von Gummiverbundwerkstoffen zu übertragen, da durch die verschiedenen Bauteile lokal stark unterschiedliche Materialcharakteristika vorliegen. Deutlich

komplexere und detaillierte Modellierungsansätze des Vulkanisationsprozesses wie in [CKA06] sind auf Grund ihrer hohen Rechenzeiten dagegen nicht in Optimierungsaufgaben verwendbar und werden lediglich empirisch parametrisiert.

Ein weiteres großes Feld der thermischen Modellierungsansätze liegt in der Kombination mit elektrischen Wirkmechanismen, wie sie beispielsweise bei der Motorüberwachung auftreten. Dabei werden auch hauptsächlich vereinfachte Modelle eingesetzt [Lan+15]. Bei der thermischen Auslegung und Überwachung von Halbleitermodulen ist besonders die genaue Abbildung von Randbedingungen entscheidend. Da Modelle aus finiten Elementen bei der echtzeitfähigen Überwachung nicht eingesetzt werden können, verwendet [BMB18] thermische Netze mit wenigen Stützstellen, welche jedoch zu lokal hohen Abweichungen in den Temperaturverteilungen führen können. Noch einfacher und mit lediglich drei Knoten werden in [Sun+18] die Temperaturen eines Motors zum besseren Wärmemanagement modelliert.

Eine weitere Möglichkeit zur Modellvereinfachung liegt in der Linearisierung an einem ausgewählten Arbeitspunkt. In [SDM14] wird beispielsweise ein Modell zur thermischen Auslegung elektrischer Komponenten durch zeitliche Mittelung der thermischen Randbedingungen linearisiert. Diese Linearisierungen sind jedoch nur für kleine Abweichungen um den gewählten Arbeitspunkt zulässig. Besonders bei Vulkanisationsprozessen ist jedoch ein großes Temperaturspektrum abzubilden, was den Einsatz von linearisierten Modellen stark eingrenzt.

Zusammenfassend sind die vorgestellten Ansätze gut zur Reduktion der Modellgröße bei symmetrischen Werkstoffen hoher thermischer Leitfähigkeiten geeignet, bei denen eine genaue Abbildung von räumlichen Temperaturverteilungen nicht von großer Bedeutung ist. Insbesondere bei zu vulkanisierenden Verbundwerkstoffen, Polymeren und Kautschukmischungen, welche zur Vernetzung in einer Heizpresse erwärmt und in Form gebracht werden, sind diese Ansätze nicht vollumfänglich anwendbar. Da der Erfolg dieser Prozesse maßgeblich von dem Energieeintrag in den Querschnitt abhängt, ist die genaue Modellierung von zeitlich veränderlichen Temperaturverteilungen im gesamten Material notwendig. Weiterhin können auf Grund des für die Vulkanisation entscheidenden Abkühlvorgangs keine nichtlinearen Strahlungseffekte vernachlässigt werden. Die geringe Wärmeleitfähigkeit der Materialien verhindert ebenso vereinfachende Annahmen zur Temperaturhomogenität. Die in dieser Arbeit durchgeführte thermische Modellierung ist Bestandteil des zweiten Kapitels.

Mathematische Reduktion der Modellordnung

Methoden zur Modellordnungsreduktion (MOR) sind eine vielversprechende Maßnahme zur deutlichen Verringerung der Berechnungsdauer bei gleichzeitigem Erhalt hinreichender Approximationsgüte. Leicht anzuwenden und bereits weitgehend erforscht sind diese im Falle

eines linearen oder linearisierten Modells und können daher nach der Anwendung der vorig thematisierten Modellvereinfachungen zusätzlich verwendet werden.

Im Rahmen der Dissertation [Böh18] wurde eine modellbasierte Temperaturregelung von Umformwerkzeugen in der Karosserieherstellung entwickelt. Aufgrund der komplexen Geometrie ist ein dreidimensionales Modell aus finiten Elementen verwendet worden. Da sich der Arbeitsbereich der Anwendung auf ein sehr enges Temperaturfenster beschränkt, ist eine Linearisierung zulässig. Im Zuge dessen können lineare Modellordnungsreduktionsverfahren (siehe Abschnitt 3.1) angewendet werden. Die optimale Sensor-/Aktorplatzierung sowie Zustandsschätzung der Oberflächentemperaturverteilung wurden anschließend mit Hilfe von modellbasierten Verfahren umgesetzt und zur Regelung verwendet.

Im Rahmen der Dissertation [Bos21] wurden mathematische Methoden zur Ordnungsreduktion bei einem Vulkanisationsprozess angewendet. Durch den großen Arbeitsbereich bei Vulkanisationsprozessen, ist eine Linearisierung in diesem Umfang jedoch nur eingeschränkt möglich. Ein symmetrischer Versuchsstand zur Vulkanisation von Kautschukerzeugnissen ermöglichte die Verwendung eines zweidimensionalen Modells des Querschnitts. Für die Heizpresse wurde ein dreidimensionales Modell verwendet. Aufgrund des regelmäßigen und symmetrischen Aufbaus sowie der begrenzten Anzahl an Materialien wurde auf thermische Netzwerke zur örtlichen Diskretisierung zurückgegriffen. Diese wurden wenn möglich linearisiert und mit den auch in [Böh18] verwendeten, linearen MOR Methoden reduziert, wobei durch Abkühlprozesse zusätzliche inhomogene Anfangsbedingungen berücksichtigt wurden. Die Temperaturverteilung des Prüfkörpers, welcher beim Abkühlen stark nichtlinearen strahlungs- und konvektionsabhängigen Effekten unterliegt, wurde über ein unreduziertes, nichtlineares Modell abgebildet. Durch das homogene Material konnte dieses mit einer spärlichen räumlichen Diskretisierung hinreichend genau approximiert werden, sodass eine geringe Berechnungsdauer entstand. Auf diese Weise konnten die thermischen Modelle zur Optimierung der Stellgrößen sowie in modellbasierten Prozessregelungen verwendet werden. Bei der Übertragung der Methode auf die komplexen Reifenmodelle im Rahmen dieser Arbeit sind jedoch mehrere Materialkomponenten und komplexere Geometrien zu berücksichtigen, sodass eine feinere örtliche Diskretisierung mit einer damit einhergehenden Vielzahl von Zuständen verwendet werden muss.

Weitere Beispiele für MOR bei thermischen Modellen finden sich auch bei der Löt- und Schweißtechnik [Pá+19] sowie allgemeinen Maschineneinsätzen [Yua+17] und elektrischen Komponenten [GvD17] wieder. Maßgebliche Nachteile der klassischen MOR Verfahren liegen in dem Verlust der physikalischen Interpretierbarkeit von Parametern und Zuständen und der beschränkten Anwendbarkeit auf lineare Systeme hoher Ordnung [BGW15].

Parametrische MOR [Ben+17b], bei der ausgewählte Systemparameter erhalten bleiben, oder Verfahren für nichtlineare Systeme basieren meist auf einzelnen Messungen oder simulierten Zustandstrajektorien der vollständigen Systeme den sogenannten „snap-shots“. Dafür sind aller-

dings reale Experimente erforderlich oder es müssen bereits valide, komplexe Referenzmodelle verwendet werden. Rötzer et al. verwenden ein thermisches Modell zur Schätzung der Temperaturverteilung von Stahlproben in einem Glühofen [RJK17]. Da es sich um symmetrische Proben handelt, kann die räumliche Dimension auf einen zweidimensionalen Querschnitt reduziert werden. Insbesondere durch die thermische Strahlung ergeben sich stark temperaturabhängige Randbedingungen, was zu einer nichtlinearen Modellbeschreibung führt. Die Methode der finiten Elemente wurde zur örtlichen Diskretisierung verwendet, was eine hohe Modellordnung zur Folge hat. Zur Ordnungsreduktion wurde mit Proper Orthogonal Decomposition (siehe Abschnitt 3.5.1) ein Verfahren für nichtlineare Systeme verwendet. Dieses beruht auf einer Basis aus verschiedenen simulierten Zustandstrajektorien des unreduzierten Originalmodells. Das so erhaltene reduzierte Modell wird zur optimalen Sensorplatzierung und innerhalb eines EKF zur Schätzung der Temperaturverteilung verwendet. Das Filter gleicht dabei unbekannte Parameterschwankungen aus und wird zur modellbasierten Temperaturregelung des Glühofens verwendet. Bei der Übertragung auf Vulkanisationsprozesse ergeben sich zwei wesentliche Schwierigkeiten. Die geringe thermische Leitfähigkeit und Abwesenheit von Sensoren ergeben eine schlechte Beobachtbarkeit, sodass eine online-Adaption an Parameterschwankungen nicht umsetzbar ist [Bos21]. Weiterhin erfordert das Verfahren zur Modellordnungsreduktion eine Vielzahl von Simulationsdurchläufen des unreduzierten Modells, was für die sich in dieser Arbeit ergebenden Systeme sehr hoher Ordnung mit einem erheblichen Zeitaufwand von mehreren Tagen verbunden wäre. Weitere so erhaltene parameterabhängige thermische Modelle werden in den letzten Jahren sporadisch im Bereich elektrischer Komponenten oder der Motorüberwachung eingesetzt [Qi+16; Qi+17; Sun+18; van+18; GvD17]. Für die in dieser Arbeit vorliegende Problemstellung existiert kein vollumfänglich geeignetes Verfahren zur mathematischen Reduktion der Modellordnung, sodass eine neue Methode zur Modellierung komplexer thermischer Systeme erarbeitet wurde. Eine detaillierte Beschreibung der Verfahren zur MOR und deren Vergleich ist in Kapitel 3 zu finden.

Datenbasierte Verfahren

Die dritte Kategorie zur Einsparung von Rechenzeit umfasst die datenbasierten Verfahren zur Modellbildung, bei denen keine physikalische Gleichung als Ausgangspunkt dient. Grundvoraussetzung dafür ist ein umfangreicher Datensatz bestehend aus Messdaten oder Simulationsergebnissen bereits validierter Modelle. In [Gia+16] wird beispielsweise die Anwendung künstlicher neuronaler Netze zur schnelleren Simulation des Temperaturverhaltens bei Hochspannungsunterverteilungen analysiert, da vollständige Simulationen mit finiten Elementen zu zeitaufwändig sind. Weiterhin finden die neuronalen Netze Anwendung zur Prädiktion der Aushärtung von Verbundwerkstoffen [JSR12] oder in Form von Support Vector Machines bei

der Überwachung von Temperaturverläufen entlang einer Heizlinie [Zha+18]. Bei der Herstellung von Aluminiumlegierungen und Sicherstellung einer homogenen Temperaturverteilung präsentieren [She+16] einen Ansatz mit self-growing radial basis function neural network (SGRBFNN) um Verkopplungen im Prozess abzubilden. In [KID09; KID12] wurden detaillierte Untersuchungen im Bereich der Vulkanisation von Gummi mit datenbasierter Modellierung durchgeführt. So erstellte black-box Modelle sind zwar sehr performant in der Ausführung, jedoch ist der Aufwand zur Datenakquise nicht unerheblich [Are+18] oder bei Temperaturverteilungen im Material schlichtweg nicht möglich. Zusätzlich muss die Robustheit gegenüber Parameterschwankungen oder Störungen im Prozess sichergestellt sein. Die Auslegung thermischer Komponenten und Systeme durch Simulationen im Prototypingprozess ist ebenfalls nur eingeschränkt machbar, da die physikalischen Parameter nicht direkt abgelesen und optimiert werden können [JSR12]. Ein Vergleich zwischen modellbasierter und datenbasierter Prädiktionsverfahren für einzelne Messpunkte wurde in einer eigenen Veröffentlichung [Fra+18] bezogen auf den Vulkanisationsvorgang thematisiert, kann jedoch bei der Berechnung von Temperaturverteilungen mit mehreren tausend Stützstellen nicht angewendet werden.

Allen Arbeiten innerhalb des beschriebenen Stands der Forschung gemein ist die Notwendigkeit einer performanten, thermischen Simulation für modellbasierte Verfahren. Diese Arbeit leistet einen methodischen Beitrag zur Formulierung und Parametrierung von Modellen bei der Verwendung in der modellbasierten Prozessauslegung und -regelung ohne Notwendigkeit einer vorigen Modellvereinfachung oder zeitaufwendigen Datenakquise. Auf diese Weise kann die performante Systembeschreibung ohne weitere Prozesskenntnisse aus den Geometrien automatisiert abgeleitet und auf andere Komponenten angewendet werden.

1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise

Um zeitvariante Temperaturverteilungen zu berechnen und den vorliegenden Zielkonflikt zwischen Approximationsgüte und notwendiger Berechnungsdauer zu lösen, wird folgende Vorgehensweise verwendet. Zunächst wird im Rahmen einer thermischen Modellbildung die partielle Wärmeleitungsgleichung mit auftretenden thermischen Randbedingungen für die betrachteten Geometrien aufgestellt. Aus den numerischen Matrizen, welche im Zuge der örtlichen Diskretisierung mit finiten Elementen entstehen, werden parameterabhängige Systembeschreibungen generiert. Diese enthalten alle relevanten Materialparameter, Wärmeübergänge und Randbedingungen in parametrischer und interpretierbarer Form. Im Rahmen einer neu entwickelten Methode zur performanten Ausführung dieser Systemrealisierung werden projektive Verfahren der MOR hinsichtlich formulierter Gütekriterien untersucht und verglichen. Anpassbare Parameter und zustandsabhängige Funktionen bleiben dabei erhalten. Anschließend werden die kontinuierlichen Zustandsgleichungen zeitlich diskretisiert, wobei explizite und

implizierte Lösungsverfahren hinsichtlich Fehler und Berechnungsdauer verglichen werden. Wesentliches Augenmerk liegt dabei auch auf der Abbildung zustandsabhängiger Randbedingungen, deren Zeitintervall zur Berechnung während der Simulation angepasst werden kann. Im Rahmen beispielhafter Applikationen werden mit Hilfe der parametrischen und performanten Simulationsausführung Modelle im Rahmen von Optimierungsproblemen in einer Identifikation parametrisiert und an Versuchsständen abschließend anhand von Messungen validiert. Als mögliche Anwendungsfälle werden eine echtzeitfähige Prädiktion von Ausheizgrad- und Temperaturverteilungen in den Kautschukerzeugnissen sowie die Schätzung der Oberflächen-temperaturverteilung auf der Heizplatte ausgeführt. Zusammenfassend ergeben sich damit die nachfolgenden Schwerpunkte, welche kapitelweise behandelt werden:

2. thermodynamische Modellierung und Formulierung der Zustandsgleichungen,
3. Grundlagen zu Methoden der (P)MOR,
4. Reduktion und zeitliche Diskretisierung der Systembeschreibung sowie
5. beispielhafte Anwendung einer Parameteridentifikation und echtzeitfähigen Implementierung.

2 Thermische Modellierung

Im Rahmen dieser Dissertation wird die thermische Modellierung beispielhaft an drei unterschiedlichen Systemen durchgeführt. Eine Heizplatte sowie ein Gummiprüfkörper liegen als Labormessaufbau für Vulkanisationsprozesse zur Durchführung von Messungen vor und werden daher zu Validierungszwecken und für die praktische Umsetzung betrachtet. Der Prüfkörperquerschnitt und die Heizplatte sind schematisch in Abbildung 2.1a dargestellt. Näheres zum Aufbau des Systems ist in [Bos21] zu finden. Weiterhin dient ein Reifen, modelliert durch den in Abbildung 2.1b zu sehenden Querschnitt, als komplexeres Beispiel für die Anwendung der entwickelten Methoden. Da Temperaturmessungen zu diesem Modell nicht zur Verfügung stehen, beziehen sich sämtliche Untersuchungen auf eine simulative Referenzlösung mit einer kommerziellen Simulationsumgebung.

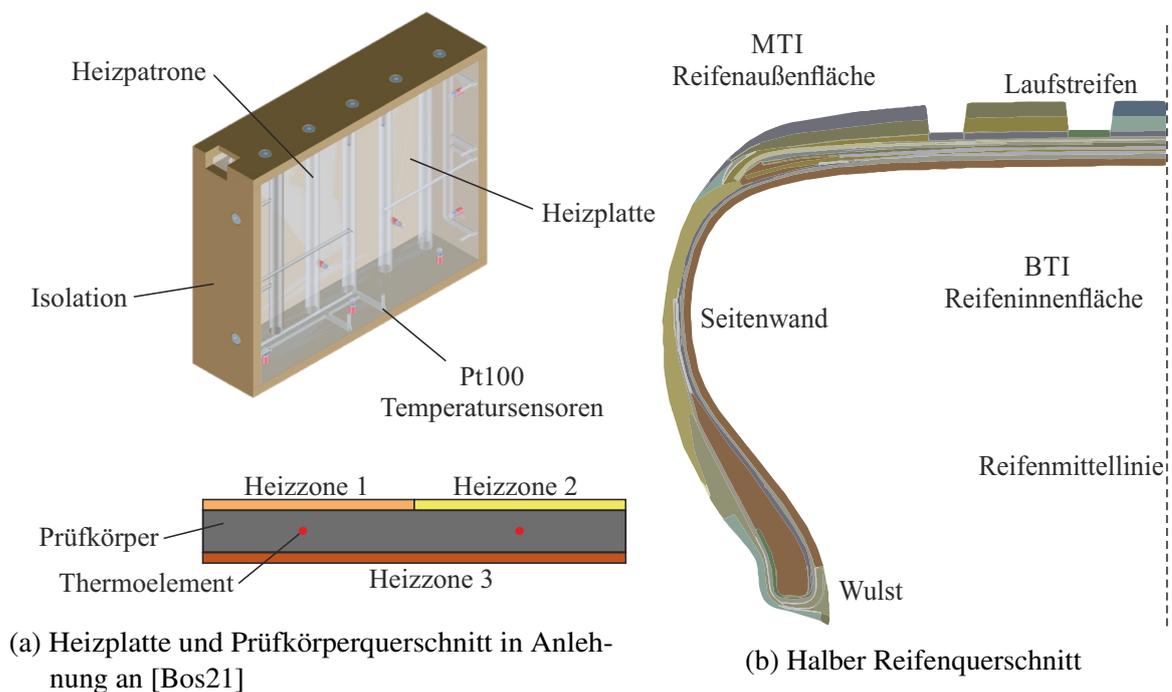


Abbildung 2.1: Betrachtete Modelle im schematischen Aufbau

Das Reifenmodell besteht aus 23 verschiedenen Komponenten mit je nach Mischung unterschiedlichen thermischen Materialparametern. Diese sind in Abbildung 2.1b farblich gekennzeichnet. Dargestellt ist ein halber Reifenquerschnitt mit gestrichelter Reifenmittellinie und den

drei Hauptbereichen des Reifens: Laufstreifen mit Profilirillen, Seitenwand und Wulst. Eingebrachte Stahlgürtellagen im Laufstreifensegment resultieren in der entsprechenden Schicht in eine richtungsabhängige Wärmeleitfähigkeit. Als Eingangsgrößen während des Heizprozesses können bis zu fünf Temperaturen über die Außenkante, das sogenannte Mold-Tire-Interface (MTI), und eine Heiztemperatur über die Innenkante, das Bladder-Tire-Interface (BTI), beaufschlagt werden. Während Abkühlvorgängen an der freien Umgebung wird zwischen Umgebungstemperaturen an der Reifenaußen- und Reifeninnenfläche unterschieden, da sich durch geringere Luftzirkulation innen am Reifen höhere Umgebungstemperaturen einstellen. Virtuelle Sensoren können im Querschnitt platziert werden, um die Temperaturverläufe an bestimmten Stellen auszugeben. Reale Sensoren sind in den späteren Endprodukten nicht vorhanden und dienen lediglich zur Verifizierung in Experimenten. Es wird aus Gründen der Symmetrie wie abgebildet ein zweidimensionales Modell des halben Querschnitts verwendet mit einer als adiabatisch betrachteten Trennlinie durch den Laufstreifen als Symmetrieachse.

Der Prüfkörper besteht aus einer einzigen Kautschukmischung und ist quaderförmig mit den Abmaßen $250 \text{ mm} \times 200 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$. Drei verschiedene Bereiche können über eine zonierte Laborheizpresse annähernd unabhängig voneinander mit einer Temperatur beaufschlagt werden. Dazu wird der Prüfkörper zwischen zwei Heizplatten eingelegt und unter mechanischem Druck aufgeheizt. Beim Abkühlen an der Umgebung wird eine Referenzumgebungstemperatur der Raumluft betrachtet. Zwei Thermoelemente sind nahe der Mittellinie unter den zwei Heizzonen eingebracht und können zur Messung der Temperaturverläufe im Inneren verwendet werden. Ein zweidimensionales Modell des Querschnitts wird auf Grund der symmetrischen, quaderförmigen Form gewählt.

Die betrachtete, quaderförmige Heizplatte besteht aus einer Aluminiumlegierung mit den Abmaßen $250 \text{ mm} \times 200 \text{ mm} \times 60 \text{ mm}$. Sie ist an fünf Seitenflächen umgeben von einer 10 mm dicken thermischen Isolationsschicht, sodass lediglich die zur Beheizung des Prüfkörpers genutzte Metalloberfläche frei liegt. Sechs Heizpatronen mit jeweils drei separat ansteuerbaren Elementen können für die Wärmeerzeugung im Inneren der Heizplatte verwendet werden. Es stehen zwölf Pt100 Sensoren zur Messung der Temperaturen 5 mm unterhalb der Oberfläche zur Verfügung. Weiteres zur Beschreibung des Versuchsstandes kann der Dissertation [Bos21] entnommen werden.

Zur Formulierung einer mathematischen Abbildungsvorschrift, mit welcher sich das zeitabhängige Skalarfeld der Temperatur innerhalb der vorgestellten Geometrien berechnen lässt, ist die Anwendung thermodynamischer Gesetzmäßigkeiten auf dem zu betrachtenden Gebiet notwendig. Die Vorgehensweise, um aus den physikalischen Beschreibungen mathematische Zustandsgleichungen zu formulieren, wird in diesem Kapitel dargestellt. Dabei werden die folgenden Schritte behandelt:

- Aufstellung der Wärmeleitungsgleichung mit Wärmeübergangs-Randbedingungen unter Anwendung der thermodynamischen Hauptsätze (Abschnitt 2.1),
- Örtliche Diskretisierung der entstehenden partiellen Differentialgleichung (DGL) mit finiten Elementen (Abschnitt 2.2) sowie
- Formulierung von parametervarianten Zustandsdifferentialgleichungen (Abschnitt 2.3).

2.1 Thermodynamische Grundlagen

Gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist eine Änderung der Energie innerhalb eines Systems Ω nur durch den Transport von Energie über die äußeren Systemgrenzen $\partial\Omega$ möglich. Dieser Transport erfolgt durch die Verrichtung von Arbeit und/oder dem Austausch von Wärme Q . Im Gegensatz zur Arbeit verursacht der Energietransport durch Wärme immer auch eine Entropieänderung im System, welche durch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik beschrieben wird. Eine unmittelbare Folge daraus ist, dass die zeitliche Änderung der Wärme, der Wärmestrom \dot{Q} in Watt, immer entgegengesetzt zum Temperaturgradienten zwischen den Austauschmedien stattfindet. Wärmeströme lassen sich dabei in zwei wesentliche Transportmechanismen einteilen: Wärmeleitung und elektromagnetische Strahlung (Wärmestrahlung). Die Wärmeleitung beinhaltet dabei sowohl den Transport innerhalb eines Stoffes sowie an der Grenzfläche zwischen Feststoff und Fluid. Letzteres wird auch als konvektiver Wärmeübergang bezeichnet, stellt jedoch keinen eigenen Transportmechanismus dar [Nus15]. Um den Wärmetransport dieser Mechanismen auch über verschiedene Grenzflächen vergleichbar zu machen, wird der Wärmestrom als flächenspezifisch betrachtet.

Definiton 2.1 *Der flächenspezifische Wärmestrom*

$$\dot{\phi} := \frac{d\dot{Q}}{dA} \quad \text{mit} \quad \left[\dot{\phi} \right] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (2.1)$$

heißt **Wärmestromdichte**.

Die Richtung der Wärmestromdichte ist bei räumlichen Wärmeströmen stets senkrecht zu dem Flächenelement dA . Da konvektive Wärmeübergänge in dieser Dissertation eine wichtige Randbedingung zur Berechnung von Temperaturverteilungen sind, werden diese im Rahmen eines separaten Unterabschnitts näher erläutert. Die folgenden Abschnitte orientieren sich an den Lehrbüchern [HM14; BW17; HU94; CM90] sowie dem VDI-Wärmeatlas [Ges06] und gliedern sich damit in die drei Unterpunkte: Wärmeleitung, Konvektion und Wärmestrahlung.

2.1.1 Wärmeleitung

Liegt in einem Feststoff oder ruhenden Medium ein Temperaturgradient vor, so erfolgt der Wärmeaustausch zwischen benachbarten Molekülen in Form von Schwingungsenergie. Dieser Vorgang wird als Wärmeleitung oder Konduktion bezeichnet und kann durch das FOURIER'sche Gesetz beschrieben werden. Dieses stellt die Proportionalität zwischen der Wärmestromdichte im Material bezogen auf den vorliegenden Gradienten dar:

$$\dot{\phi} = -\Lambda \cdot \nabla(T). \quad (2.2)$$

Am negativem Vorzeichen lässt sich die vorig erwähnte Einhaltung der Entropiebilanz, wonach innere Energie immer von hoher zu niedriger Temperatur transportiert wird, erkennen. Weiterhin ist die Richtung stets senkrecht zu den isothermen Potentiallinien des Temperaturskalarfeldes. Der stoff-, temperatur- und druckabhängige Proportionalitätsfaktor Λ in W/mK wird als Wärmeleitfähigkeitstensor bezeichnet, wobei die Druckabhängigkeit in der Praxis bei Festkörpern vernachlässigbar ist [Ges06]. Weiterhin können für die betrachteten Temperaturbereiche alle Wärmeleitfähigkeiten hinsichtlich ihrer Temperaturabhängigkeit linearisiert werden. Im Rahmen dieser Dissertation werden Systeme aus zusammengesetzten Materialkomponenten betrachtet. Dabei wird im Allgemeinen davon ausgegangen, dass die Wärmeleitungseigenschaften innerhalb der einzelnen Komponenten orts- und richtungsunabhängig sind. Für diese isotropen Materialien wird statt des Tensors eine skalare Wärmeleitfähigkeit λ gesetzt [HU94]. Lediglich zur Modellierung von Stahlgürtellagen im Reifen, bei denen Stahlfäden in einer vorgegebenen Richtung eingearbeitet sind, wird innerhalb dieser Schicht ein orthotropes, also ein in Richtung der einzelnen Koordinatenachsen konstantes, Koeffizientenverhalten angenommen. Ebenso werden bei der späteren Abbildung geometrischer Veränderungen im Modell orthotrope Eigenschaften verwendet, wenn sich die geometrischen Verhältnisse in Richtung einer Koordinatenachse verändern. In diesen beiden Sonderfällen liegt ein Tensor vor, bei dem ausschließlich die Hauptdiagonale besetzt ist. Zeitliche Änderungen des skalaren Temperaturfeldes $T(\mathbf{z}, t)$ innerhalb des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$, $\forall \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n_{\text{dim}}})^T \in \Omega$ und für die Zeit $t \in \mathbb{R}^+$ können mit Hilfe der allgemeinen instationären Wärmeleitungsgleichung berechnet werden. Dafür werden zwei- und dreidimensionale Modelle verwendet $n_{\text{dim}} \in \{2, 3\}$. Wenn der Wärmeaustausch ausschließlich über Konduktion erfolgt, lässt sich die Gleichung

$$c(\mathbf{z})\rho(\mathbf{z})\frac{\partial T(\mathbf{z}, t)}{\partial t} = \text{div}(\Lambda(\mathbf{z})\nabla T(\mathbf{z}, t)) + \omega(\mathbf{z}, t) \quad (2.3)$$

aus einer Energiebilanz an einem infinitesimalen Volumenelement unter Berücksichtigung des FOURIER'schen Gesetzes (2.2) aufstellen [HU94]. Hierbei ist ρ in die Dichte, c die spezifische Wärmekapazität und $\omega(\mathbf{z}, t)$ in eine Dissipationsfunktion, welche interne Wärmeerzeugung

bspw. durch Heizpatronen oder Wärmetransportverluste berücksichtigt. Für die Gleichung (2.3) wurden dabei die folgenden drei Annahmen getroffen:

Annahme 2.1 *Alle thermischen Materialparameter $c(\mathbf{z})$, $\rho(\mathbf{z})$ und $\Lambda(\mathbf{z})$ sind im betrachteten Arbeitsbereich zeit- und temperaturinvariant.*

Annahme 2.2 *Gebiet Ω besteht aus n_{comp} Komponenten $\Omega_j \subset \Omega$, $j \in \{1, \dots, n_{\text{comp}}\}$, $n_{\text{comp}} \in \mathbb{N}^+$ mit örtlich homogen verteilten Materialeigenschaften $c\rho(\mathbf{z}_j) = (c\rho)_j$ und $\Lambda(\mathbf{z}_j) = \Lambda_j$, $\forall \mathbf{z}_j \in \Omega_j$. Weiterhin werden alle diese Komponenten als disjunkt angenommen $\Omega_j \dot{\cup} \Omega_i$, $\forall i \neq j$.*

Annahme 2.3 *Der komponentenspezifische Wärmeleitfähigkeitstensor Λ_j kann für isotrope Materialien als skalares λ_j angenommen werden. Für Komponenten mit richtungsabhängigen Stahleinlagen sowie Geometrieänderungen in Koordinatenrichtungen wird auf orthotrope Eigenschaften zurückgegriffen, wobei nur die Tensordiagonale besetzt ist und aus $\text{diag}(\lambda_{j,z_1} \dots \lambda_{j,z_{n_{\text{dim}}}})$ besteht.*

In den meisten Fällen kann λ unter Verwendung von Annahme 2.3 für die lokalen Teilgebiete $\Omega_j \subset \Omega$ aus dem Divergenz Operator ausgeklammert werden. Nur bei Reifenkomponenten, in denen Metallfäden in Gummischichten eingebettet sind (Gürtellagen), ergeben sich richtungsabhängige Wärmeleitkoeffizienten durch die höhere Leitfähigkeit in Längsrichtung der Fäden. Diese werden später gesondert berücksichtigt. Daher kann die Wärmeleitungsgleichung an dieser Stelle über den Laplace-Operator Δ ausgedrückt werden:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \omega. \quad (2.4)$$

Ausgeschrieben in kartesischen Koordinaten ergibt sich die Wärmeleitungs-DGL (2.3) im Gebiet Ω zu

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z_3^2} \right) + \omega. \quad (2.5)$$

Die partielle DGL (2.4) bildet die mathematische Grundlage zur Berechnung der Temperaturverteilung in den vorliegenden Systemen. Der Wärmeaustausch mit der Umgebung wird als Randbedingungen in Form von Konvektion und Strahlung in den folgenden Abschnitten hinzugefügt.

2.1.2 Konvektion

Im vorigen Abschnitt wurde die Wärmeleitung und der Energieaustausch innerhalb der Systemgrenzen $\partial\Omega$ beschrieben. Werden diese jedoch von einem Fluid umströmt, findet über die

Kontaktfläche ein konvektiver Wärmeübergang statt, bei dem Wärme durch die Bewegung des Umgebungsmediums abtransportiert wird. Dies trifft in dieser Dissertation auf die Systemgrenzen zur Umgebung zu, an denen ein Übergang der Feststoffe zur gasförmigen Umgebungsluft vorliegt. Weitere Ursache für den Wärmetransport ist wie zuvor eine Temperaturdifferenz. In diesem Fall wird sie zwischen Temperatur an der Systemgrenze $T_B = T(z_B)$ mit $z_B \in \partial\Omega$ und Umgebungsluft T_U berechnet. Um den Wärmeübergang nun quantitativ beschreiben zu können, muss die auftretende Wärmestromdichte durch die Außenoberfläche/-kante $\dot{\phi}_{\text{Konv}}$ ins Verhältnis zur dafür ursächlichen Temperaturdifferenz gesetzt werden:

Definiton 2.2 *Zur Beschreibung von Wärmeübergängen wird*

$$\alpha(z_B, T_B)_{\text{Konv}} := \frac{\dot{\phi}_{\text{Konv}}}{T_B - T_U} \quad \text{in} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right] \quad (2.6)$$

als **Wärmeübergangskoeffizient** definiert. Dieser ist sowohl orts- als auch temperaturabhängig.

Der Wärmeübergangskoeffizient (WÜK) ist folglich ein Maß für die Güte des Energietransports in Form von Wärme auf Grund einer vorliegenden Temperaturdifferenz an der Systemgrenze [HU94]. Die Bestimmung und somit die Quantifizierung von konvektiven Wärmeübergängen ist eine zentrale Aufgabe in der Thermodynamik. Dabei wird zwischen natürlicher Konvektion, bei der die Luftströmung durch wärmebedingte Dichteunterschiede von selbst stattfindet, und erzwungener Konvektion, welche durch künstlich erzeugte Druckunterschiede zu Stande kommt, unterschieden [BW17]. Eine besondere Herausforderung liegt dabei in der wechselseitigen Beeinflussung von Strömungs- und Temperaturfeld bei der natürlichen Konvektion, da die vorherrschenden Temperaturen den Auftrieb der Strömung beeinflussen und umgekehrt. Folglich müssen drei verkoppelte Differentialgleichungen aufgestellt werden, welche Strömungsfeld $\mathbf{w}_\text{fl}(t, \mathbf{z})$, Temperaturfeld $T(t, \mathbf{z})$, Dichte- $\rho(t, \mathbf{z})$ sowie Druckfeld $p_\text{fl}(t, \mathbf{z})$ und spezifische, innere Energie $u_\text{fl}(t, \mathbf{z})$ zueinander ins Verhältnis setzen. Aus Erhaltungssätzen werden die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{w}_\text{fl}) \quad (2.7a)$$

als Massenbilanz, die Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{w}_\text{fl} = -\nabla p_\text{fl} + \eta \Delta \mathbf{w}_\text{fl} + \rho \sigma_\text{F} \quad (2.7b)$$

als Impulsbilanz und die Energiegleichung (hier dissipationsfrei)

$$\rho \frac{d}{dt} u_\text{fl} = -p_\text{fl} \text{div}(\mathbf{w}_\text{fl}) + \text{div}(\lambda \nabla T) \quad (2.7c)$$

als Energiebilanz aufgestellt¹, wodurch der konvektive Wärmeübergang vollständig beschrieben wird [CM90; BW17]. Dabei bezeichnet η die dynamische Viskosität und σ_F die externe Kraftdichte. Weil sich diese Gleichungen im Allgemeinen nicht analytisch berechnen lassen, muss auf numerische Lösungsmethoden zurückgegriffen werden. Da diese jedoch aufwendig zu formulieren sind und die Berechnungsdauer mehrere Stunden betragen kann, werden zur Abschätzung oftmals empirische Korrelationen genutzt. In der Grenzschichttheorie nach Prandtl werden nur dünne Schichten direkt über der Kontaktfläche zur Bestimmung des konvektiven WÜK betrachtet. Dadurch lassen sich in Kombination mit (2.7) dimensionslose Ähnlichkeitskenngrößen formulieren:

Definiton 2.3 *Die dimensionslose Kenngröße*

$$\text{Nu} := \frac{\alpha \mathcal{L}}{\lambda} \quad (2.8)$$

heißt Nusselt-Zahl. Die Länge \mathcal{L} in m ist die charakteristische Anströmlänge. Die Wärmeleitfähigkeit der Umgebungsluft wird an dieser Stelle mit λ bezeichnet.

Für freie Luftströmungen können die Korrelationen der Form $\text{Nu} = f_{\text{Nu}}(\text{Pr}, \text{Gr})$ aus [Ges06] zur Berechnung genutzt werden. Bei künstlich erzeugten Umströmungen dominiert die erzwungene Konvektion und es gelten Korrelationen der Form $\text{Nu} = f_{\text{Nu}}(\text{Pr}, \text{Re})$. Hierbei bezeichnet Pr die stoffcharakteristische Prandtl-Zahl des Fluides und Gr bzw. Re die strömungscharakteristische Grashof- bzw. Reynoldszahl. Die Verwendung dieser empirischen Zusammenhänge zur Bestimmung der WÜK stellt den Stand der Technik dar und wird zur Bestimmung der WÜK in Kapitel 5.1 verwendet. Vorgreifend wird an dieser Stelle jedoch auch schon der Vorteil von Parameteridentifikationsverfahren zur Bestimmung der WÜK deutlich, da hierbei auf aufwändige numerische Simulationen des Strömungsfeldes sowie die empirischen Abschätzungen verzichtet werden kann. Die Ergebnisse zeigen dabei deutlich bessere Übereinstimmungen in der Abbildung der Wärmeübergänge.

2.1.3 Wärmestrahlung

Neben den konvektiven Wärmeübergängen ist die Emission und Absorption elektromagnetischer Wellen ein weiterer Transportmechanismus von Energie über die Systemgrenze. Die dabei auftretenden Wellenlängen von ca. 0,1 - 1000 μm liegen im Infrarotbereich. Ein umgebendes Trägermedium ist dabei nicht notwendig, sondern sorgt sogar für eine Verschlechterung des Transports, da jedes Medium oberhalb des absoluten Nullpunktes Wärmestrahlung emittiert und absorbiert. Um die Wärmestromdichte auf Grund von Strahlung zu bestimmen, wird diese mit dem Wärmestrom durch eine festgelegte Referenzoberfläche verglichen.

¹ Mit dem totalen Differential $\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{w}_R^T \nabla$.

Definiton 2.4 *Der Emissionsgrad*

$$\epsilon(z_B, T_B) := \frac{\dot{\phi}_{\text{Str}}}{\dot{\phi}_s} \in [0, 1] \quad (2.9)$$

beschreibt das Verhältnis der Wärmestromdichten zwischen der betrachteten Oberfläche $\dot{\phi}_{\text{Str}}$ und der eines idealen schwarzen Strahlers $\dot{\phi}_s$. Der Emissionsgrad ist dabei sowohl temperatur- als auch ortsabhängig.

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\dot{\phi}_s(T_B) = \sigma T_B^4 \quad (2.10)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante σ beschreibt die Wärmestromdichte eines schwarzen Strahlers. Multipliziert man diese mit dem für die betrachtete Oberfläche ermittelten Emissionsgrad, ergibt sich die tatsächliche Wärmestromdichte. Weiterhin sind allerdings auch Wechselwirkungen mit der Umgebung zu berücksichtigen. Ist die Oberfläche von einem Fluid umgeben oder gar von anderen Oberflächen, entsteht ein Strahlungsaustausch, der berücksichtigt werden muss. Dieser ist von den einzelnen Emissionsgraden und der Geometrie abhängig.

Definiton 2.5 Die *Strahlungsaustauschzahl* C_{12} quantifiziert die gegenseitige Bestrahlung zweier Medien. Die Wärmestromdichte zwischen zwei Medien mit den Temperaturen $T_{B,1}$ und $T_{B,2}$ kann so durch

$$\dot{\phi}_{12} = C_{12}(T_{B,1}^4 - T_{B,2}^4) \quad (2.11)$$

bestimmt werden.

Diese Wechselwirkungen treten beispielsweise im inneren eines Reifens auf, da sich die Innenwände gegenseitig anstrahlen. Für zwei geometrisch einfache Körper und Anordnungen mit den Emissionsgraden ϵ_1, ϵ_2 wird $C_{12} = C_{12}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ analytisch berechnet. Bei komplexen Konfigurationen muss auf empirische Berechnungen zurückgegriffen werden [Ges06]. Bei Strahlungsabgabe an die Umgebungsluft setzt man die zweite Referenztemperatur auf einen sehr weit entfernten Punkt mit Umgebungstemperatur. Dadurch ergibt sich näherungsweise die Wärmestromdichte zur Umgebung

$$\dot{\phi}_{\text{Str}}(T_B, z_B) = C_{B,U}(T_B, z_B)\sigma(T_B^4 - T_U^4). \quad (2.12)$$

Wie auch schon bei den konvektiven Wärmeübergängen stellt die genaue Parametrierung des Wärmeübergangs eine Herausforderung dar. Hierbei bieten die in Abschnitt 5.1 vorgestellten Methoden großes Verbesserungspotenzial im Hinblick auf die Genauigkeit und vor allem dem Aufwand der Parametrierung.

2.1.4 Kombination von Konvektion und Strahlung

Die vorliegenden Abschnitte beschreiben die möglichen Arten der Wärmeübertragung, verdeutlichen jedoch auch die Probleme bei der Bestimmung der geeigneten Wärmeübergangskoeffizienten bzw. Strahlungsaustauschzahlen und Emissionsgrade. Neben der aufwendigen numerischen Berechnung und den empirischen Abschätzungen existieren auch Verfahren zur Identifikation dieser Parameter aus Messdaten. Einen Überblick über mögliche Bestimmungsmethoden liefert Kapitel 5.1. Um die Anzahl von zu identifizierenden Parametern möglichst gering zu halten, lässt sich ein kombinierter Wärmeübergang aus Konvektion und Strahlung einführen. Dabei wird der gemeinsame WÜK $\alpha_{\text{tot}}(T_B, z_B)$ definiert, welcher stark nichtlinear von der Temperatur abhängt. Es gilt

$$\alpha_{\text{tot}}(T_B, z_B) = \alpha_{\text{Konv}}(T_B, z_B) + \alpha_{\text{Str}}(T_B, z_B) \quad (2.13)$$

mit dem Strahlungswärmeübergangskoeffizienten

$$\alpha_{\text{Str}}(T_B, z_B) = C_{\text{B,U}}(T_B, z_B) \sigma \frac{T_B^4 - T_U^4}{T_B - T_U}. \quad (2.14)$$

Weiterhin bietet dieser Ansatz den Vorteil, dass die nichtlineare Abhängigkeit der Temperatur in den Parameter α_{tot} verschoben wurde, was bei der späteren Aufstellung von linearen parametervarianten Zustandsgleichungen von entscheidender Bedeutung ist.

2.2 Methode der finiten Elemente bei thermisch transienten Modellen

Die im vorigen Abschnitt aufgestellte partielle, instationäre, parabolische DGL (2.3) soll nun hinsichtlich der Temperatur und unter Berücksichtigung der Wärmeübergänge an den Systemgrenze gelöst werden. Da dies nur in trivialen Fällen noch analytisch durchführbar ist, wird ein numerisches Approximationsverfahren verwendet. Dabei wird die DGL im Gebiet Ω räumlich diskretisiert und so in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt. Dabei gilt, je feiner die gewählte Diskretisierung, desto genauer die Approximationsgüte, aber desto höher auch die Systemordnung und somit der Berechnungsaufwand. Dieser entstehende Zielkonflikt ist eine zentrale Herausforderung und wird in Kapitel 3 noch genauer behandelt. Ein probates Mittel zur räumlichen Diskretisierung ist die Annäherung durch finite Differenzen, meist finite Volumen. Auf Grund der Einfachheit und Anschaulichkeit eignet sich dieses Verfahren besonders für einfache und symmetrische Geometrien. Werden die Systeme hingegen komplexer und ist eine verbesserte numerische Stabilität gefordert, werden in der Regel finite

Elemente zur Diskretisierung verwendet. Dies ist für alle behandelten Geometrien in dieser Dissertation der Fall. Die nachfolgenden Unterkapitel behandeln den Einbau von Anfangs- und Randbedingungen bis hin zum Zusammensetzen der Elementmatrizen und basieren auf den Lehrbüchern [Cyr02; HU94] und [LQ03].

2.2.1 Formulierung von Anfangs- und Randbedingungen

Um die aufgestellte Wärmeleitungsgleichung (2.3) eindeutig zu lösen, müssen Anfangsbedingungen und Randbedingungen (RB), insbesondere Konvektions- und Strahlungseffekte, bestimmt werden. Dazu wird eine anfängliche Temperaturverteilung $T_0(\mathbf{z})$ angenommen, woraus eine inhomogene Anfangsbedingung

$$T(\mathbf{z}, t = 0) = T_0(\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega \quad (2.15)$$

folgt. Nur in besonderen Fällen kann diese zu einer homogenen Anfangsbedingung vereinfacht werden, was vor allem bei startenden Heizprozessen zutrifft. Dort wird als Startwert vereinfacht an jedem Ort \mathbf{z} die Umgebungstemperatur angenommen $T_0 \approx T_U$. Treten jedoch Abkühlprozesse nach einem vorigen Aufheizen auf, muss die Anfangsbedingung ortsabhängig berücksichtigt werden.

Ein zeitabhängiges Oberflächentemperaturprofil $T_D(t)$ kann durch Dirichlet-RB

$$T(\mathbf{z}_B, t) = T_D(t) \quad (2.16)$$

auf dem topologischen Rand $\partial\Omega$ von Ω aufgeprägt werden. Diese Form der Randbedingung findet im Rahmen dieser Dissertation jedoch keine Anwendung, da die Annahme eines definierten Temperaturprofils auf der Systemgrenze stark anwendungsspezifisch wäre und vor allem zu Modellvereinfachung getroffen wird, wenn diese Profile bekannt sind. Wärmeströme an den Systemgrenzen können nach dem FOURIER'schen Gesetz (2.2) durch Neumann-RB

$$\dot{\phi}_N(\mathbf{z}_B, t) = -\lambda \nabla T(\mathbf{z}_B, t) \quad (2.17)$$

festgesetzt werden. Die gemäß Unterkapitel 2.1.4 zusammengefassten konvektiven und strahlungsbedingten Wärmeübergänge werden durch die Robin-RB

$$\dot{\phi}_R(\mathbf{z}_B, t) = \alpha_{\text{tot}}(T_B, \mathbf{z}_B) (T(\mathbf{z}_B, t) - T_U) \quad (2.18)$$

eingebunden.

2.2.2 Diskretisierung anhand der Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente wird zur räumlichen Diskretisierung der zunächst unendlich-dimensionalen Lösung $T(\mathbf{z}, t)$ der partiellen Wärmeleitungsgleichung verwendet. Die grundlegende Idee besteht darin das Gesamtgebiet Ω in $n_{\text{elem}} \in \mathbb{N}^+$ kleinere disjunkte Teilgebiete $C_l \subset \Omega$, die sogenannten finiten Elemente, aufzuteilen:

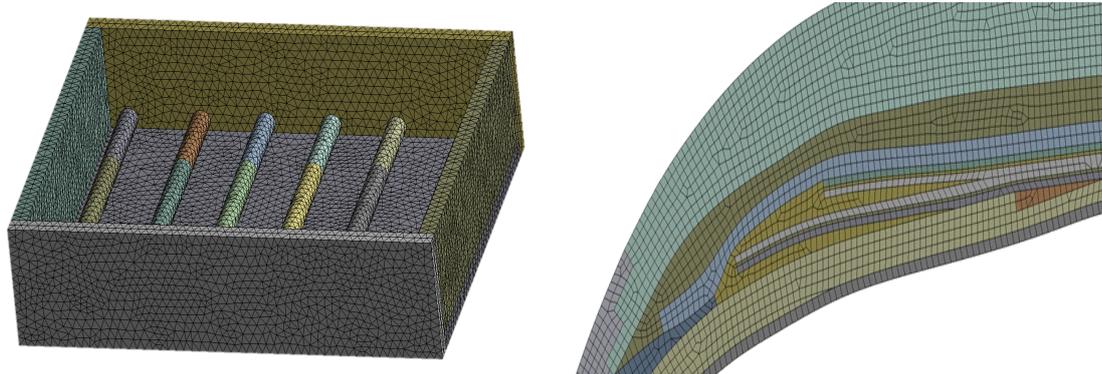
$$\Omega = \dot{\bigcup}_{l \in \{1, \dots, n_{\text{elem}}\}} C_l. \quad (2.19)$$

Diese können sowohl Volumen-, Flächen- oder Linienelemente sein. Damit werden dann zeitabhängige Temperaturfunktionen $\mathbf{x}(t)$ an einer endlichen Zahl n_x von örtlichen Stützstellen (Knoten) im gesamten Gebiet Ω berechnet. Dafür wird das Temperaturfeld $T(\mathbf{z}, t)$ im finiten Element C_l durch eine Näherungslösung approximiert, in der eine örtliche und eine zeitliche Komponente separat auftreten. Es gilt

$$T(\mathbf{z}, t) \approx \tilde{T}(\mathbf{z}, t) := \sum_{j=1}^{n_{\text{FE}}} a_j(t) \varphi_j(\mathbf{z}) = \mathbf{a}^T(t) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^{n_{\text{FE}}}. \quad (2.20)$$

Die örtlichen Ansatzfunktionen φ_j können dabei verschiedene geometrische Formen annehmen und sind abhängig vom gewählten finiten Element. Die zeitliche Komponente \mathbf{a} stellt die Temperatur an den Ecken oder auch Knoten der Elemente dar. Die Anzahl der Knoten pro Element bzw. die Dimension der geometrischen Ansatzfunktionen wird mit n_{FE} bezeichnet. In dieser Dissertation werden im Wesentlichen Drei- und Vierecke im zweidimensionalen bzw. Tetraeder ($n_{\text{FE}} = 4$) und Hexaeder ($n_{\text{FE}} = 8$) im dreidimensionalen Fall verwendet. Für die Systemränder müssen analog dazu Elemente aus der jeweils darunterliegenden räumlichen Dimension eingesetzt werden, also Linien- bzw. Flächenelemente. Abbildung 2.2 stellt beispielhaft die entstehenden Netze zur örtlichen Diskretisierung anhand der Methode der finiten Elemente für Heizplatte und Reifenquerschnitt dar. Für die vollständigen Systeme ergeben sich beispielhaft die folgenden Anzahlen von Knoten n_x : Reifenmodell: $n_x^{\text{R}} = 7167$; Prüfkörper: $n_x^{\text{PK}} = 5271$; Heizplatte: $n_x^{\text{HP}} = 29173$.

Bei thermischen Systeme ist die Wahl von Elementen ohne zusätzliche kanten-trennende Knoten zulässig, man bezeichnet diese auch als Elemente 1.Ordnung. Setzt man die so erhaltene Näherungslösung $\tilde{T}(\mathbf{z}, t)$ in die Wärmeleitungsgleichung (2.3) ein, verbleibt eine Abweichung (Residuum) zur tatsächlichen Lösung. Bei der sogenannten schwachen Formulierung wird



(a) Tetra- und Hexaederelemente im Netz der Heizplatte

(b) Ausschnitt des Reifenquerschnitts mit viereckigen Netzelementen

Abbildung 2.2: Örtliche Diskretisierung der Geometrien durch finite Elemente

gefordert, dass dieses Residuum über jedem finiten Element C_l (im Folgenden vereinfacht als C bezeichnet) zu null wird

$$\int_C \left(\rho c \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - \nabla \Lambda \nabla \tilde{T} - \omega \right) \psi \, dC \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.21)$$

Dazu werden dimensionslose Testfunktionen $\psi(\mathbf{z})$ definiert, um die Approximationsfehler zu gewichten und so die obere Gleichung zu erfüllen. Dies bezeichnet man auch als Methode der gewichteten Residuen [Cyr02; LQ03]. Die Testfunktionen müssen dafür einmal stetig differenzierbar sein und definitionsgemäß auf dem Dirichlet-Rand ∂C_D verschwinden

$$\psi(\mathbf{z}) = 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \partial C_D. \quad (2.22)$$

Nachdem die Näherungslösungen $\tilde{T}(\mathbf{z}, t)$ eingesetzt werden, wird Gleichung (2.21) umgeformt und die Randbedingungen eingearbeitet. Das Integral wird in Einzelsummanden aufgeteilt und unter Anwendung der 1. Greenschen Formel wird der Wärmeleitfähigkeitstensor aus dem Divergenz Operator gezogen. Damit ergibt sich unter den getroffenen Annahmen 2.1, 2.2 und 2.3 die Darstellung

$$\int_C \rho c \psi \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \, dC + \int_C \nabla \psi \cdot \Lambda \nabla \tilde{T} \, dC = \int_C \psi \omega \, dC + \int_{\partial C} \psi \mathbf{n} \cdot (\Lambda \nabla \tilde{T}) \, d(\partial C) \quad (2.23)$$

mit dem senkrecht auf den Rand stehenden Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} . Anschließend werden die

natürlichen Randbedingungen eingesetzt, diese ergeben sich aus den Teilrändern der Neumann- ∂C_N und Robin- ∂C_R Randbedingungen. Für den rechten Integralterm gilt damit

$$\int_{\partial C} \psi \mathbf{n} \cdot (\Lambda \nabla \tilde{T}) d(\partial C) = \int_{\partial C_N} \psi (-\dot{\phi}_N) \mathbf{n} d(\partial C) + \int_{\partial C_R} \psi \alpha_{\text{tot}} (\tilde{T} - T_U) d(\partial C), \quad (2.24)$$

da die Dirichlet-Randbedingungen mit der Berücksichtigung von Gleichung (2.22) entfällt. Durch diese schwache Formulierung ist lediglich die einfache örtliche Differenzierbarkeit der Lösungsfunktion notwendig, da keine verkoppelten Nabla-Operatoren mehr vorliegen. Das örtliche Diskretisierungsverfahren wird abschließend durch die Wahl der Basis- und Testfunktionen $\varphi_j(\mathbf{z})$ und $\psi_j(\mathbf{z})$ definiert. Bei der hier verwendeten beliebigen aber identischen Wahl $\psi_j = \varphi_j$ wird von der Galerkin-Methode gesprochen. In diesem Kontext bildet die Basisfunktion φ die diskreten Knotentemperaturen $x_j(t)$ eines einzelnen Elements auf eine kontinuierliche Temperaturverteilung $\tilde{T}(\mathbf{z}, t)$ ab:

$$\mathbf{x}(t) \mapsto \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{x}(t) = \tilde{T}(\mathbf{z}, t). \quad (2.25)$$

Da diese Abbildungsvorschrift nur von der Form der gewählten Elemente (Dreieck, Viereck, Tetraeder, Hexaeder) abhängt, wird diese definiert als:

Definiton 2.6 Die Basisfunktionen $\varphi(\mathbf{z})$ werden durch ihre Verwendung als **Formfunktionen** $\mathbf{f}_\varphi(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n_{\text{FE}}}$ bezeichnet und erfüllen $\tilde{T}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{f}_\varphi^T(\mathbf{z}) \mathbf{x}(t)$.

Für eine gegebene Elementkonfiguration können die Formfunktionen auf unterschiedliche Weisen explizit berechnet werden, siehe dazu [HU94] und [Cyr02]. Die ursprüngliche Wärmeleitungsgleichung, wird nun durch Einsetzen des Ansatzes (2.20) diskretisiert. Dadurch ergibt sich das folgende System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \int_C \rho c \mathbf{f}_\varphi \mathbf{f}_\varphi^T d(\partial C) \dot{\mathbf{x}}(t) + \left[\sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{dim}}} \int_C \Lambda_{i,j} \frac{\partial \mathbf{f}_\varphi}{\partial z_i} \frac{\partial \mathbf{f}_\varphi^T}{\partial z_j} d(\partial C) + \int_{\partial C_R} \alpha_{\text{tot}} \mathbf{f}_\varphi \mathbf{f}_\varphi^T d(\partial C) \right] \mathbf{x}(t) \\ = \int_C \mathbf{f}_\varphi \omega d(\partial C) + \int_{\partial C_N} \mathbf{f}_\varphi (-\dot{\phi}_N) \mathbf{n} d(\partial C) + \int_{\partial C_R} \mathbf{f}_\varphi \alpha_{\text{tot}} T_U d(\partial C), \end{aligned} \quad (2.26)$$

anhand dessen die Knotentemperaturen $\mathbf{x}(t)$ numerisch berechnet werden können. Zur kompakteren Beschreibung werden die einzelnen Summanden auch in Matrixschreibweise dargestellt. Durch die darin enthaltenen dyadischen Produkte $\mathbf{f}_\varphi \mathbf{f}_\varphi^T$ haben die Matrizen die Dimension n_{FE}^2 . Eine Besonderheit tritt durch den vorliegenden Wärmeleitfähigkeitstensor auf, weshalb der zweite Integralterm in (2.26) aus bis zu 9 Summanden bestehen kann. Gemäß Annahme

2.3 treten im Rahmen dieser Dissertation jedoch höchstens orthotrope Leitfähigkeiten auf, wodurch nur maximal drei Summanden berechnet werden müssen. Weiterhin können durch Annahme 2.2 alle anderen Parameter komponentenweise betrachtet werden und somit in einzelnen Teilgebieten als konstant angenommen werden, was den Aufbau der Matrizen zusätzlich vereinfacht.

Definiton 2.7 Die Einzelementmatrizen werden nachfolgend definiert.

(i) **Wärmekapazitätsmatrix:**

$$\mathbf{M} := \int_C \rho_C \mathbf{f}_\varphi \mathbf{f}_\varphi^T d(\partial C) \in \mathbb{R}^{n_{\text{FE}} \times n_{\text{FE}}}, \quad (2.27a)$$

(ii) **Konduktivitätsmatrix:**

$$\mathbf{K} := \sum_{i=1}^{n_{\text{dim}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{dim}}} \int_C \Lambda_{i,j} \frac{\partial \mathbf{f}_\varphi}{\partial z_i} \frac{\partial \mathbf{f}_\varphi^T}{\partial z_j} d(\partial C) \in \mathbb{R}^{n_{\text{FE}} \times n_{\text{FE}}}, \quad (2.27b)$$

(iii) **Konduktivitätsmatrix-Anteil durch Robin-RB:**

$$\mathbf{K}_R := \int_{\partial C_C} \alpha_{\text{tot}} \mathbf{f}_\varphi \mathbf{f}_\varphi^T d(\partial C) \in \mathbb{R}^{n_{\text{FE}} \times n_{\text{FE}}}, \quad (2.27c)$$

(iv) **Lastvektor:**

$$\mathbf{q}_{\text{ges}}(t) := \int_C \mathbf{f}_\varphi \omega d(\partial C) + \int_{\partial C_N} \mathbf{f}_\varphi (-\dot{\phi}_N) \mathbf{n} d(\partial C) + \int_{\partial C_R} \mathbf{f}_\varphi \alpha_{\text{tot}} T_U d(\partial C) \in \mathbb{R}^{n_{\text{FE}}}. \quad (2.27d)$$

Damit ergibt sich die FEM-Modelldynamik äquivalent zu (2.26) als ein DGS

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}(t) + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_R] \mathbf{x}(t) = \mathbf{q}_{\text{ges}}(t), \quad (2.28)$$

welches als lineare, numerische Systembeschreibung vorliegt. Dieser Zusammenhang kann für jedes Einzelement C_l des Diskretisierungsverfahren aufgestellt werden und wird im Nachhinein zu vollständigen Elementmatrizen zusammengesetzt. Beim Zusammensetzen werden die Matrizen zudem als dünn besetzte Bandmatrizen aufgestellt, was erhebliche Berechnungsvorteile in der späteren Simulation nach sich zieht. Die Zuordnung zwischen örtlichen Stützstellen (Knotennummer) und Gleichungsnummer erfolgt durch eine Indextabelle. Diese Bijektion muss beim Vergleich zwischen FEM- und ordnungsreduziertem Modell berücksichtigt werden. An den Elementübergängen liegen gemeinsame Knoten vor, sodass die resultierende Systemknotenzahl n_x in jedem Fall kleiner als die Summe aller auftretenden Elementknoten

ist $n_x \ll n_{\text{elem}} n_{\text{FE}}$. Mittels binärer Zuordnungsmatrizen $\mathbf{Z}^{(l)} \in \mathbb{R}^{n_{\text{FE}} \times n_x}$ werden die Systemknoten $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ auf die Elementknoten abgebildet: $\mathbf{x}^{(l)} = \mathbf{Z}^{(l)} \mathbf{x}$. Dadurch lassen sich die Systemmatrizen des Gesamtsystems

$$\mathbf{M} = \sum_{l=1}^M \mathbf{Z}^{(l)T} \mathbf{M}^{(l)} \mathbf{Z}^{(l)}, \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{l=1}^M \mathbf{Z}^{(l)T} \mathbf{K}^{(l)} \mathbf{Z}^{(l)} \text{ und} \quad (2.29b)$$

$$\mathbf{q} = \sum_{l=1}^M \mathbf{Z}^{(l)T} \mathbf{q}^{(l)} \quad (2.29c)$$

aus denen der Einzelemente $\mathbf{M}^{(l)}$, $\mathbf{K}^{(l)}$ und $\mathbf{q}^{(l)}$ bilden. In der Praxis wird das Zusammensetzen nicht durch speicheraufwendige Zuordnungsmatrizen bewirkt, sondern direkt durch Einsortieren über sog. Indextafeln. Der Einbau von Randbedingungen erfolgt nachträglich durch weitere Elementtabellen [Cyr02] und [HU94].

2.3 Linear parametervariantes Zustandsraummodell

Im vorigen Abschnitt wurde die Erstellung eines linearen, numerischen Modells vorgestellt, zu dessen Aufstellung und Lösung kommerzielle Software als Stand der Technik zur Verfügung steht. Dabei können die entstandenen Gesamtmatrizen aus den Gleichungen (2.29) an einem festen Arbeitspunkt als numerische Matrizen exportiert werden. Im Folgenden wird nun die Aufstellung eines linear parametervarianten Zustandsraummodells beschrieben, um die Parameterabhängigkeiten, welche in den erhaltenen Matrizen nicht mehr analytisch vorliegen, zugänglich zu machen. Dafür ist die affine Matrizenstruktur aus (2.29) von wesentlicher Bedeutung. Ziel ist die Formulierung eines Parametervektors $\mathbf{p} \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$ in dem alle für die jeweilige Anwendung relevanten Material- und RB-parameter aufgeführt sind. Die Zustandsraumdarstellung ergibt sich damit parameterabhängig zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{p}, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \end{aligned} \quad (2.30)$$

mit Zustandsabbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n_p} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ und der Ausgangsabbildung $\mathbf{h} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$. Weiterhin werden Eingangssignal $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, Ausgangssignal $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ und Anfangszustand $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$ eingeführt. Zur Bestimmung der parameterabhängigen Zustandsabbildung \mathbf{f} wird im folgenden Unterabschnitt die Variation von Materialparamete-

tern beschrieben. Im darauffolgenden Unterabschnitt werden die temperaturabhängigen RB eingearbeitet.

2.3.1 Parametrische Beschreibung variierender Materialien

Die Extraktion einer parametervarianten Beschreibung von Materialparametern aus den numerischen Matrizen wird nachfolgend erläutert. Dazu werden zunächst alle varianten Materialparameter definiert. Die Materialdefinition erfolgt dabei komponentenweise gemäß Annahme 2.2:

Definiton 2.8 *Der Parameterraum \mathcal{P} enthält die folgenden Materialparameter:*

(i) $\mathbf{p}_{\rho c} \in \mathbb{R}^{n_{\text{comp}}}$ enthält alle Produkte aus Dichte und spezifischer Wärmekapazität $(\rho c)_j$ der einzelnen Systemkomponenten Ω_j .

(ii) $\mathbf{p}_{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_{\text{comp}}}$ beschreibt alle Wärmeleitfähigkeiten λ_j der einzelnen Komponenten Ω_j .

Die Materialeigenschaften Dichte ρ und spezifische Wärmekapazität c lassen sich dabei durch ihre Produktverknüpfung nicht separat parametrieren bzw. identifizieren. Es erfolgt anschließend die Aufstellung der linearisierten Elementmatrizen gemäß dem Abschnitt 2.2 an allen Parameterstellen $\hat{\mathbf{p}}$ gemäß

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}|_{(\hat{\mathbf{p}}_{\rho c} \rightarrow \mathbf{0})}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{M}_{\rho c, j} = \mathbf{M}|_{(\hat{\mathbf{p}}_{\rho c, j} = 1)} - \mathbf{M}_0, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}|_{(\hat{\mathbf{p}}_{\lambda} \rightarrow \mathbf{0})}, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{K}_{\lambda, j} = \mathbf{K}|_{(\hat{\mathbf{p}}_{\lambda, j} = 1)} - \mathbf{K}_0. \quad (2.34)$$

Dabei werden die Matrizen an zwei Stützstellen gebildet und anschließend voneinander subtrahiert. Durch den proportionalen Zusammenhang zwischen Matrix und Materialparameter sind zwei Stützstellen ausreichend. Zur einfacheren Berechnung werden diese bei $p = 1$ und $p \rightarrow 0$ gewählt. Die eigentliche Elementmatrix \mathbf{M} wird danach durch die affine Form der Matrix $\tilde{\mathbf{M}}$

² Im Sonderfall der Stahlcordlagen im Reifen enthält \mathbf{p}_{λ} auch orthotrope Leitfähigkeitseinträge, womit sich die Dimension von \mathbf{p}_{λ} zusätzlich um 2 erhöht. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Erhöhung nicht explizit mathematisch berücksichtigt.

komponentenweise approximiert [Fen+16; Qi+16]. Selbiges gilt für die Konduktivitätsmatrix \mathbf{K} und deren Approximation $\tilde{\mathbf{K}}$:

$$\mathbf{M} \approx \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{p}_{\rho c}) = \mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^{n_{\text{comp}}} \mathbf{M}_{\rho c, j} p_{\rho c, j}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{K} \approx \tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{p}_{\lambda}) = \mathbf{K}_0 + \sum_{j=1}^{n_{\text{comp}}} \mathbf{K}_{\lambda, j} p_{\lambda, j}. \quad (2.36)$$

Nach diesen Berechnungsvorschriften können die Materialparameter nach der räumlichen Diskretisierung und dem Export der numerischen Matrizen noch angepasst werden. Dies ist im späteren Kapitel zur Reduktion der Modellordnung von entscheidender Bedeutung, um Parameteranpassung in reduzierten Modellen durchführen zu können. Zusätzlich müssen im Folgenden noch die Randbedingungen aus Konvektion und Wärmestrahlung parametrisiert und eingearbeitet werden.

2.3.2 Parametrische Beschreibung der Wärmeübergänge

Die Wärmeübergänge haben nach (2.27c) und (2.27d) sowohl einen Einfluss auf den Robin-RB Anteil der Konduktivitätsmatrix \mathbf{K}_R als auch auf den Lastvektor \mathbf{q} . Dieser wird zunächst zerlegt in ein Produkt aus Lastmatrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ und dem in (2.30) eingeführten Eingangsvektor $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{q} = \underbrace{[\mathbf{Q}_{\omega}, \mathbf{Q}_{\alpha}(\alpha_{\text{tot}})]}_{=: \mathbf{Q}} \underbrace{[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{T}_U]^\top}_{=: \mathbf{u}(t)}. \quad (2.37)$$

Der Eingangsvektor kann dabei elektrische Leistungen $\boldsymbol{\omega}$ enthalten, z.B. für eine etwaige volumetrische Wärmeerzeugung durch Heizpatronen sowie verschiedene Umgebungstemperaturen für die thermischen Randbedingungen $\mathbf{T}_U \in \mathbb{R}^{n_{\text{umg}}}$. Nach Gleichung (2.18) kann die Wärmestromdichte aller Wärmeübergänge durch den zusammengefassten Wärmeübergangskoeffizienten α_{tot} beschrieben werden. Dieser hängt nichtlinear von den jeweiligen Oberflächentemperaturen des Systems ab, aber auch von der Geometrie und Oberflächenbeschaffenheit. Da eine Zuordnung von einem separaten WÜK für jedes einzelne Oberflächenelement, zu einer Vielzahl von Parameterfunktionen führen würde, findet hier eine oberflächenspezifische Trennung in n_O verschiedene Areale statt.

Annahme 2.4 Die temperaturabhängigen WÜK-Funktionen können für einzelne Oberflächenareale des Gesamtsystems $\partial\Omega_i$ zusammengefasst werden. Dies gilt bei gleicher Oberflächenbeschaffenheit und geometrischer Nähe. Es folgen aus den Einzeloberflächen

$\partial\Omega_i \subset \partial\Omega$, $i \in \{1, \dots, n_O\} \subset \mathbb{N}^+$ die oberflächenspezifischen WÜK-Funktionen

$$\alpha_{\text{tot}}(T(\mathbf{z}_{B,i}, t), \mathbf{z}_{B,i}) = \alpha_{\text{tot},i}(T(\mathbf{z}_{B,i}, t)) \quad \forall \mathbf{z}_{B,i} \in \mathbb{R}^{n_B} \subset \partial\Omega_i.$$

Für jede dieser einzelnen Oberflächenareale lässt sich auch eine separate Umgebungstemperatur im Eingangsvektor zuweisen. Zwei beispielhaft zusammengefasste WÜK Verläufe sind für die Innen- und Außenoberflächen eines Reifenmodells in Abbildung 2.3 dargestellt. Eine derart getrennte Betrachtung der Reifenoberfläche ist notwendig, da an der äußeren Fläche in belüfteten Hallen Kombinationen aus erzwungener und natürlicher Konvektion entstehen können, wohingegen auf der inneren Seite die natürliche Strömung deutlich vermindert ist und erhöhte Strahlungswechselwirkungen auftreten. Der Funktionsverlauf des inneren WÜK liegt somit unterhalb des Äußeren. Die so entstehenden Verläufe können durch einen Parametervektor

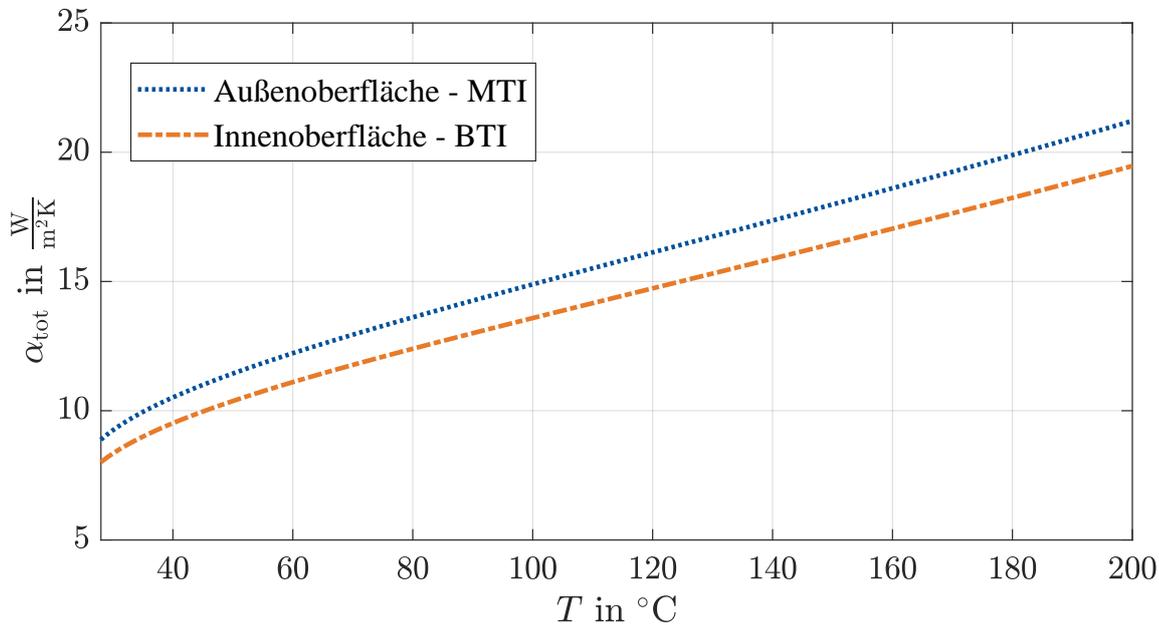


Abbildung 2.3: Temperaturabhängigkeit des WÜK $\alpha_{\text{tot}}(T)$ für Innen- und Außenoberfläche des Reifenmodells [Fra+18]

\mathbf{p}_α auf zwei verschiedene Weisen beschrieben werden. Zum einen kann eine polynomiale Approximation des Verlaufs mit beliebigem Grad $n_{\text{pol}} \in \mathbb{N}$, welches bei $n_{\text{pol}} = 0$ in einem linearisierten Zustandsraum resultiert, verwendet werden. Die Polynomkoeffizienten stehen dabei in den entsprechenden Spalten und pro separatem Oberflächenareal wird $\mathbf{P}_{\text{pol}} \in \mathbb{R}^{n_B \times n_{\text{pol}}}$ um eine Zeile erweitert. Die oberflächenspezifischen Polynome lauten damit

$$\alpha_{\text{tot},i}(T) = \sum_{j=1}^{n_{\text{pol}}} P_{\text{pol},i,j} T^j. \quad (2.38)$$

Zum anderen ist die stückweise Approximation durch kubische Splines [FC80], bei der $n_{\text{que}} \in \mathbb{N}^+$ Stützstellen („query-points“) T_j gewählt werden, möglich. Dieses Verfahren ist dabei deutlich intuitiver zu parametrieren als die Vorgabe der Polynomkoeffizienten für Gleichung (2.38). Die Parametermatrix $\mathbf{P}_{\text{spl}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{B}} \times n_{\text{que}}}$ enthält die jeweiligen WÜK $\tilde{\alpha}_{i,j}$

$$P_{\text{spl},i,j} = \tilde{\alpha}_{i,j}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n_{\text{que}}\}. \quad (2.39)$$

Beide Ansätze wurden in dieser Dissertation untersucht und eine detaillierte Beschreibung zur Ermittlung der WÜK-Funktionen und Wahl der beschreibenden Parameter wird im Kapitel 5.1 zur Identifikation temperaturabhängiger Randbedingungen gegeben. Für eine bessere Lesbarkeit werden die beschreibenden Parameter in dem Vektor \mathbf{p}_α zusammengefasst. Die Dimension von \mathbf{p}_α ergibt sich damit aus der Anzahl der Oberflächenareale und der Wahl des Approximationsgrades bzw. Anzahl der Stützstellen. Damit lässt sich der Parameterraum für die vorliegenden Modelle nun wie folgt erweitern:

Definiton 2.9 *Der Parameterraum \mathcal{P} beinhaltet neben den Materialien auch die folgenden RB-Parameter:*

(iii) $\mathbf{p}_\alpha \in \mathbb{R}^{n_\alpha}$ mit $n_\alpha = n_{\text{O}} \cdot (n_{\text{pol}} \vee n_{\text{que}})$ enthält die oberflächenspezifischen Approximationsparameter der temperaturabhängigen WÜK-Funktionen $\alpha_{\text{tot},i}$.

Um den Anteil der Robin-RB in der Konduktivitätsmatrix parameterabhängig zu beschreiben, wird dieser mit dem konstanten WÜK $\hat{\alpha}$ von 1 und 0 für alle Oberflächen beaufschlagt. So lässt sich der Anteil aus den exportierten Konduktivitätsmatrizen erhalten mit

$$\mathbf{K}_{\text{R}}|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=1)} = \mathbf{K}|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=1)} - \mathbf{K}|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=0)}. \quad (2.40)$$

Zur Aufstellung der vom WÜK abhängigen Spalten \mathbf{Q}_α müssen die einzelnen oberflächenzugehörigen Spalten bei 1 linearisiert und zusammengesetzt werden:

$$\mathbf{Q}_\alpha|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=1)} = [\mathbf{q}|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot},1}=1)}, \dots, \mathbf{q}|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot},n_{\text{O}}}=1)}] \in \mathbb{R}^{n_{\text{x}} \times n_{\text{O}}}. \quad (2.41)$$

Definiton 2.10 *Die Funktion $\mathbf{f}_\alpha : \mathbb{R}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}^{n_{\text{x}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{x}} \times n_{\text{x}}}$ bildet aus den Parametern \mathbf{p}_α und den Temperaturen \mathbf{x} , die auftretenden WÜK für jeden Eintrag der Matrix $\hat{\mathbf{K}}_{\text{R}}$. Analog dazu konstruiert die Funktion $\mathbf{f}_{\alpha,Q} : \mathbb{R}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}^{n_{\text{x}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{x}} \times n_{\text{O}}}$ die temperaturabhängigen WÜK der Spalten $\hat{\mathbf{Q}}_\alpha$ der Eingangsmatrix.*

Damit kann der in Gleichung (2.27c) aufgestellte Anteil der Robin-RB und die WÜK abhängige Spalte in der Eingangsmatrix aus Gleichung (2.37) approximiert werden durch:³

$$\mathbf{K}_R \approx \hat{\mathbf{K}}_R = \mathbf{K}_R|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=1)} \odot \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x}), \quad (2.42)$$

$$\mathbf{Q}_\alpha \approx \hat{\mathbf{Q}}_\alpha = \mathbf{Q}_\alpha|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=1)} \odot \mathbf{f}_{\alpha,Q}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x}). \quad (2.43)$$

Die Funktionen \mathbf{f}_α und $\mathbf{f}_{\alpha,Q}$ bilden dabei aus den Parametern \mathbf{p}_α zunächst je nach Approximationsverfahren den Verlauf der oberflächenspezifischen WÜK-Funktionen. Anschließend werden diese durch die Abhängigkeiten aus den Gleichungen (2.29) je nach Knotenlage den passenden Gleichungseinträgen zugeordnet. Dies wird durch Indextabellen realisiert.

2.3.3 Separation in linearen und parametervarianten Systemteil

Setzt man alle vorig ermittelten parameterabhängigen Approximationen in die Gleichung (2.28) ein, so erhält man die folgende Form:

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{p}_{\rho c}) \dot{\mathbf{x}}(t) + [\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{p}_\lambda) + \hat{\mathbf{K}}_R(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x})] \mathbf{x}(t) = [\mathbf{Q}_\omega, \hat{\mathbf{Q}}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x})] \mathbf{u}(t). \quad (2.44)$$

Alle in dieser Gleichung enthaltenen Matrizen lassen sich durch eine affine Vorschrift mit Hilfe der Parametervektoren zusammensetzen. Dies wurde durch die Linearisierung und den Export von verschiedenen numerischen Matrizen erreicht. Wenn die Invertierbarkeit der Wärmekapazitätsmatrix vorausgesetzt wird, lässt sich die obige Beschreibung direkt in das linear parametervariante Zustandsraummodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{-\hat{\mathbf{M}}^{-1} [\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}_R(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x})]}_{\mathbf{A}(\mathbf{x})} \mathbf{x} + \underbrace{\hat{\mathbf{M}}^{-1} [\mathbf{Q}_\omega, \hat{\mathbf{Q}}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x})]}_{\mathbf{B}(\mathbf{x})} \mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x}) \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (2.45)$$

überführen. Dabei wird davon ausgegangen, dass vor der eigentlichen Lösung der Gleichung alle Materialparameter $\mathbf{p}_{\rho c}$ und \mathbf{p}_λ festgesetzt wurden. Man erhält die zustandsabhängige Systemmatrix $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ sowie die Eingangsmatrix $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$. In dieser Form ist die Anwendung weiterer Verfahren zur Reduktion der Modellordnung nicht ohne weiteres möglich. Daher wird die Systembeschreibung noch einmal umgeformt. Die Grundidee besteht nun darin, das System in einen dominanten linearen Teil und einen zustandsabhängigen Anteil

³ \odot bezeichnet dabei die elementweise Multiplikation der Matrizen (Hadamard-Produkt)

aufzuteilen. Dafür werden die zustandsabhängigen WÜK-Funktionen in einen konstanten und einen varianten Teil

$$\alpha_{\text{tot}}(x) = \alpha_0 + \alpha^*(x) \quad (2.46)$$

zerlegt. Diese Verschiebung wird ebenfalls im darstellenden Parametervektor \mathbf{p}_α^* berücksichtigt. Daraus folgt eine Zerlegung der zustandsabhängigen Matrizen

$$\hat{\mathbf{Q}}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{Q}}|_{\alpha_0} + \hat{\mathbf{Q}}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}), \quad (2.47a)$$

$$\hat{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{K}}_R(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{K}}|_{\alpha_0} + \hat{\mathbf{K}}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}). \quad (2.47b)$$

Die Gleichung (2.45) lässt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \underbrace{-\hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}|_{\alpha_0}}_A \mathbf{x}(t) + \underbrace{\hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{Q}}|_{\alpha_0}}_B \mathbf{u}(t) - \underbrace{\hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}) \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{Q}}_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}) \mathbf{T}_U(t)}_{g(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}, \mathbf{T}_U)} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}(t), \mathbf{T}_U(t)) \end{aligned} \quad (2.48)$$

umformen und ist somit separiert in einen linearen Anteil sowie eine nichtlineare Funktion. Die Wahl der oberflächenspezifischen Arbeitspunkte α_0 kann dabei beliebig getroffen werden, da Abweichungen formal durch den Korrekturterm $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_{\text{umg}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}, \mathbf{T}_U) = -\hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}) \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{Q}}_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}) \mathbf{T}_U(t) \quad (2.49)$$

ausgeglichen werden. Durch weiteres Einsetzen der Gleichungen (2.42) und (2.43) ergibt sich die Korrekturfunktion

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha^*(t) &= \left(-\hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K}_R|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=1)} \odot \mathbf{f}_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}) \right) \mathbf{x}(t) \\ &\quad + \left(\hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}_\alpha|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=1)} \odot \mathbf{f}_{\alpha, Q}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}) \right) \mathbf{T}_U(t), \end{aligned} \quad (2.50)$$

Besondere Beachtung ist lediglich bei einer späteren Ordnungsreduktion notwendig, bei der deutlich fehlerhafte Arbeitspunkte zu Approximationsfehlern führen können. Näheres ist im dazugehörigen Kapitel 3 erläutert. Bevor jedoch eine Modellordnungsreduktion angewendet wird, werden zunächst noch weitere Vereinfachungen im vollständigen Zustandsraum durchgeführt, welche die Berechnungsdauer verkürzen. Da die temperaturabhängigen Wärmeübergänge zur Umgebung lediglich an den Systemoberflächen auftreten, wird bezüglich dieser im Korrekturterm berücksichtigten Wärmeübergänge eine Annahme getroffen:

Annahme 2.5 Die Anzahl n_{nl} der Zustände $\mathbf{x}_{\text{nl}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{nl}}}$, welche durch einen temperaturab-

hängigen WÜK beeinflusst werden, ist deutlich kleiner als die Anzahl der gesamten Zustände $n_{nl} \ll n_x$.

Um diese relevanten Zustände aus den Gesamtzuständen zu extrahieren wird die Binärmatrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{nl}}$ aufgestellt, sodass gilt $\mathbf{x}_{nl} = \mathbf{H}^T \mathbf{x}$. Eingesetzt in (2.50) resultiert daraus die Korrekturfunktion $\mathbf{g}_\alpha : \mathbb{R}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}^{n_{nl}} \times \mathbb{R}^{n_{umg}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ zu

$$\mathbf{g}_\alpha(t) = \mathbf{H} \left[\underbrace{\left(-\mathbf{H}^T \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K}_R |_{(\hat{\alpha}_{tot}=1)} \mathbf{H} \odot \mathbf{f}_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{H}^T \mathbf{x}) \right)}_{\mathbf{A}_\alpha} \mathbf{H}^T \mathbf{x}(t) + \underbrace{\left(\mathbf{H}^T \hat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{Q}_\alpha |_{(\hat{\alpha}_{tot}=1)} \odot \mathbf{f}_{\alpha,Q}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{H}^T \mathbf{x}) \right)}_{\mathbf{B}_\alpha} \mathbf{T}_U(t) \right], \quad (2.51)$$

mit den angepassten Berechnungsfunktionen der WÜK pro Oberflächenknoten $\mathbf{f}_{\alpha,Q}^* : \mathbb{R}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}^{n_{nl}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{nl}} \times \mathbb{R}^{n_{umg}}$ und $\mathbf{f}_\alpha^* : \mathbb{R}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}^{n_{nl}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{nl}} \times \mathbb{R}^{n_{nl}}$ und den damit elementweise multiplizierten Matrizen $\mathbf{A}_\alpha \in \mathbb{R}^{n_{nl} \times n_{nl}}$, $\mathbf{B}_\alpha \in \mathbb{R}^{n_{nl} \times n_{umg}}$.

Der notwendige Rechenaufwand zur intensivsten Berechnung in der Korrekturfunktion sinkt damit von $\mathcal{O}(n_x^2)$ in Gleichung (2.48) auf $\mathcal{O}(n_{nl} n_x)$ in Gleichung (2.51) und kann durch eine Modellordnungsreduktion noch weiter reduziert werden. Für das Beispiel Reifenmodell ist die resultierende Änderung der Matrizenstruktur und Dimension dargestellt in Abbildung 2.4.

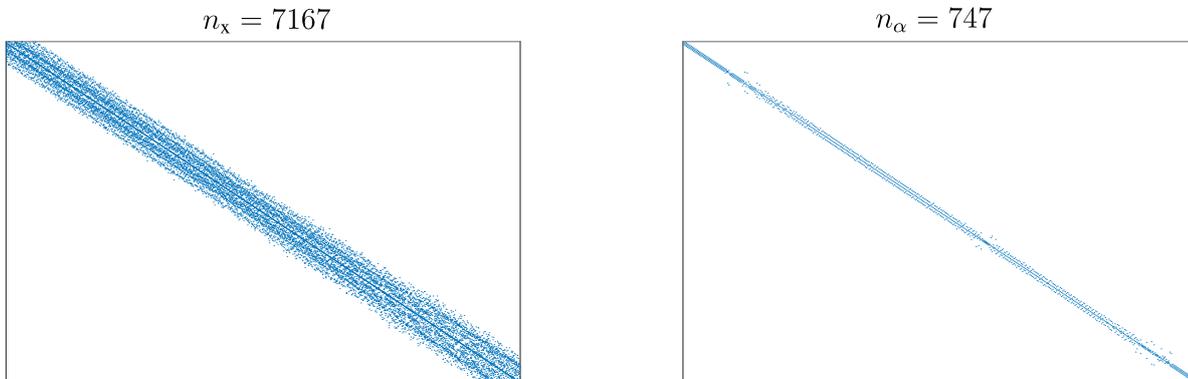


Abbildung 2.4: Besetztheitsstruktur der Systemmatrizen \mathbf{A} und \mathbf{A}_α

Die Matrix \mathbf{A}_α weist standardmäßig im zweidimensionalen Fall eine Bandstruktur mit drei Einträgen pro Zeile auf. Der Wärmeübergangskoeffizient ist somit über Linienelemente der Kante aufgetragen, sodass sich die korrespondierende Temperatur aus dem Knoten auf der Hauptdiagonalen sowie seinen zwei örtlichen Nachbarn ergibt. Dies entspricht der Verwendung zweier Linienelemente auf der Systemkante in der Zustandsgleichung. Übertragen auf ein dreidimensionales System würde sich die Bandstruktur je nach Anzahl der Knotennachbarn auf

der Oberfläche deutlich auffächern, was die Verwendung bei Berechnungen erschwert. Wird hingegen der Wärmeübergangskoeffizient knotenspezifisch anstelle von elementspezifisch aufgestellt, ergibt sich die Matrix \mathbf{A}_α als reine Diagonalmatrix, da lediglich der betrachtete Knoten bzw. Zustand in die Gleichung eingeht. Dieses Vorgehen ist besonders im dreidimensionalen Fall aus Effizienzgründen zu wählen, verringert im zweidimensionalen Fall allerdings ebenfalls den Berechnungsaufwand. Bei feiner Diskretisierung der Randlemente, wie sie bei komplexen Geometrien meistens schon vorliegt, ist eine zusätzliche Mittelung über benachbarte Randknoten auf Grund ähnlicher Temperaturen nicht sinnvoll. Es ist damit von keinem großen Einfluss auf die Abbildungsgüte auszugehen. Der auftretende Fehler für die hier betrachteten Modelle liegt dabei im Bereich der numerischen Genauigkeit. Nachfolgende Ausführungen betrachten zunächst den allgemeinen Fall eines elementweise aufgeprägten Wärmeübergangskoeffizienten, bis in Abschnitt 4.1 nähere Betrachtungen zur Reduktion der Berechnungsdauer erfolgen.

Da das Hinzufügen und Berechnen der Korrekturfunktion $\mathbf{g}_\alpha(t)$ in jedem Zeitschritt den Rechenaufwand im Vergleich zu linearen Modellen erhöht, wird die Ausführung von der zeitlichen Diskretisierung der Simulation entkoppelt und über mehrere Zeitschritte konstant gehalten. Als Zeitpunkt der Neuberechnung der Korrektur wird $\tau_{i+1} \in \mathbb{R}^+$ definiert, sodass gilt $\mathbf{g}_\alpha(t) = \mathbf{g}_i \forall t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$. Der Zeitpunkt τ_{i+1} kann auf verschiedene Weisen ermittelt werden. Entweder über eine separate zeitliche Abfolge mit fest definierten Werten, wobei die Ausführungsfrequenz deutlich niedriger ist, als die der Simulation oder wenn ein Eintrag j der Oberflächentemperatur $\mathbf{x}_{nl}(t)$ sich im Vergleich zur letzten Neuberechnung $\mathbf{x}_{nl}(\tau_i)$, um mehr als einen definierten Grenzwert T_G geändert hat:

$$\tau_{i+1} = t, \text{ wenn } |x_{nl,j}(t) - x_{nl,j}(\tau_i)| > T_G \quad (2.52)$$

Für \mathbf{g}_i gilt damit:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{H}[\mathbf{A}_\alpha \odot \mathbf{f}_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}_{nl}(\tau_i))] \mathbf{x}_{nl}(\tau_i) \quad (2.53)$$

$$+ \mathbf{H}[\mathbf{B}_\alpha \odot \mathbf{f}_{\alpha,Q}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}_{nl}(\tau_i))] \mathbf{T}_U(\tau_i). \quad (2.54)$$

Dies bietet enorme Zeitersparnis und ist zulässig, da die vergleichsweise hohen Zeitkonstanten thermischer Systeme und die temperaturabhängigen WÜK Funktionen große Zeitschritte erlauben. In Hinblick auf Ordnungsreduktionen sind jedoch auf Grund der Stabilität eher kleinere Zeitschrittweiten zu wählen. Nähere Untersuchungen zur zeitlichen Diskretisierung und Ausführungszeiten sind im Kapitel 4 zu finden.

2.3.4 Superposition von Eigen- und Fremddynamik

In Gleichung (2.15) wurden inhomogene Anfangstemperaturverteilungen angenommen, wie sie bei Abkühlprozessen nach voriger Beheizung auftreten können. Bei der späteren Anwendung von projektiven Verfahren zur Reduktion der Modellordnung können jedoch lediglich homogene Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ oder Substitutionen wie $\hat{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, welche für im Vorfeld unbekannte oder veränderliche Anfangsbedingungen ungeeignet sind, berücksichtigt werden. Um dennoch Anfangsbedingungen vorgeben zu können, werden die Eigenbewegung und fremderregte Dynamik voneinander entkoppelt [Fra+18; BGM17].

Satz 2.1 [Lun16; BGM17] *Durch die Methode „Variation der Konstanten“ ergibt sich aus der Theorie linearer DGS für $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$ die Bewegungsgleichung*

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0}_{=: \mathbf{w}(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau}_{=: \mathbf{v}(t)} \quad (2.55)$$

als Überlagerung von homogener und partikulärer Lösung des linearen Zustandsraums, wobei die Transitionsmatrix durch die Taylorreihenentwicklung $e^{\mathbf{A}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k$ angenähert werden kann.

Folglich wird die Eigendynamik beschrieben durch die homogene Lösung $\mathbf{w}(t)$ bei Vorgabe von \mathbf{x}_0 ohne weitere externe Anregung. Weiterhin folgt der Verlauf der Fremddynamik $\mathbf{v}(t)$ aus einer externen Erregung und homogener Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Die so gebildeten linearen Zustandsräume lauten $\Sigma_{0,\text{lin}}$ für Eigen- und $\Sigma_{\mathbf{u},\text{lin}}$ für die Fremddynamik

$$\Sigma_{0,\text{lin}} : \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathcal{X}_0 \gamma, \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{0} \quad (2.56a)$$

$$\Sigma_{\mathbf{u},\text{lin}} : \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad (2.56b)$$

Beide Systeme verfügen nun über homogene Anfangsbedingungen und sind in dieser Form für eine projektive MOR geeignet. Für die Eigenbewegung Σ_0 wird die aus dem Heizvorgang resultierende Temperaturverteilung beim Übergang zum Abkühlen als Systemeingang $\gamma(t) := \delta(t) \mathbf{z}_0$ mit dem *Dirac*-Impuls $\delta(t)$ beim Abkühlmodell vorgegeben. Da diese jedoch a-priori nicht bekannt ist, wird zunächst eine Basis $\mathcal{X}_0 \in \mathbb{R}^{n_x \times \mu}$ konstruiert, die den Raum aus allen denkbaren Anfangszuständen $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{R}^{n_x}$ aufspannt. Da die Zustände des Systems starke Verkopplungen aufweisen, kann die Basis für eine hinreichend genaue Approximation deutlich weniger Spalten $\mu \ll n_x$ aufweisen. Es gilt:

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}_0 \exists \mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^{\mu} : \mathbf{x}_0 \approx \mathcal{X}_0 \mathbf{z}_0. \quad (2.57)$$

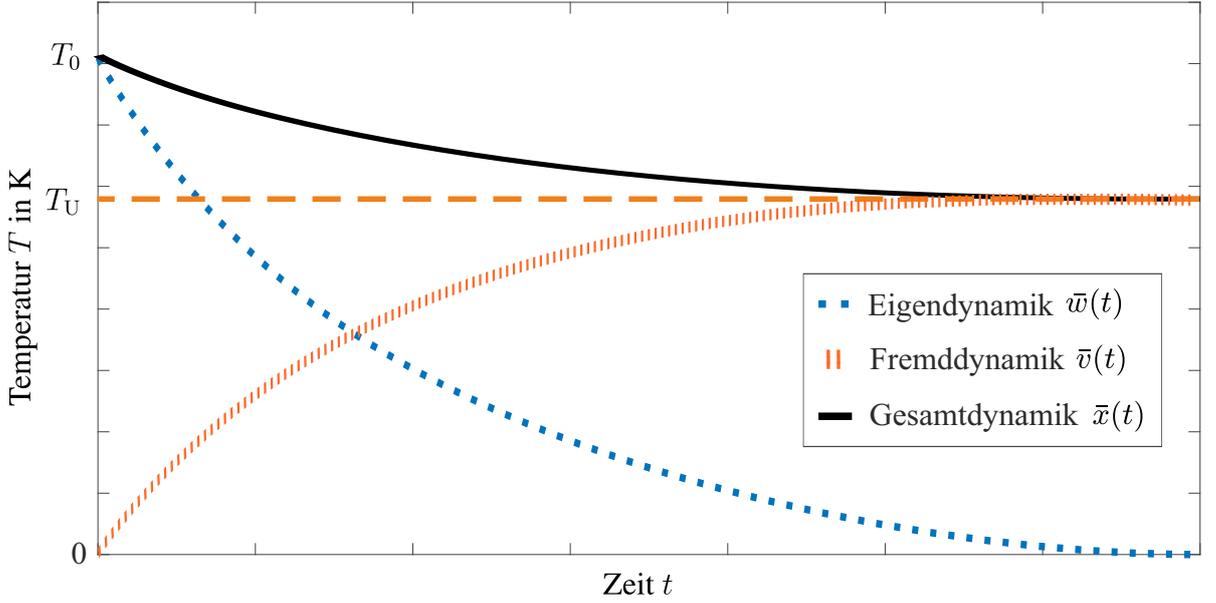


Abbildung 2.5: Superpositionsprinzip von Eigen- und Fremddynamik bei vorgegebener inhomogener Temperaturverteilung $T_0 = \bar{x}(0)$ und Abkühlen an der Umgebungstemperatur T_U

Beispielhaft stellt Abbildung 2.5 einen linearen Abkühlprozess aus einem transienten Heizvorgang dar. Die örtlich gemittelten Zustände der Eigen- und Fremddynamik \bar{w} und \bar{v} werden zu \bar{x} superponiert.

Weiterhin lässt sich auch die Korrekturfunktion (2.54) unter Verwendung von $\mathbf{w}_{\text{nl}} = \mathbf{H}^T \mathbf{w}$ und $\mathbf{v}_{\text{nl}} = \mathbf{H}^T \mathbf{v}$ in zwei Teile separieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{0,i} &= \mathbf{H} [\mathbf{A}_\alpha \odot \mathbf{f}_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}_{\text{nl}}(\tau_i))] \mathbf{w}_{\text{nl}}(\tau_i), \\ \mathbf{g}_{u,i} &= \mathbf{H} [\mathbf{A}_\alpha \odot \mathbf{f}_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}_{\text{nl}}(\tau_i))] \mathbf{v}_{\text{nl}}(\tau_i) + \mathbf{H} [\mathbf{B}_\alpha \odot \mathbf{f}_{\alpha,Q}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}_{\text{nl}}(\tau_i))] T_U(\tau_i). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Diese enthalten die Parameterabhängigkeiten \mathbf{p}_α^* sowie die superponierten Oberflächentemperaturen $\mathbf{x}_{\text{nl}}(\tau_i) = \mathbf{v}_{\text{nl}}(\tau_i) + \mathbf{w}_{\text{nl}}(\tau_i)$. Beide Korrekturterme $\mathbf{g}_{0,i}$ und $\mathbf{g}_{u,i}$ können zu den linearen Systemdarstellungen $\Sigma_{0,\text{lin}}$ und $\Sigma_{u,\text{lin}}$ addiert werden. Die Superposition der so entstehenden Gesamtsysteme Σ_0 und Σ_u , welche nur im linearen Systemfall gültig ist, kann trotz der nichtlinearen Berechnungen der Korrekturterme erfolgen, da diese abschnittsweise konstant gehalten werden. Für die im folgenden Kapitel vorgestellten Verfahren der Ordnungsreduktion liegen da-

mit die folgenden zwei verkoppelten Zustandsräume vor, welche explizit die Berücksichtigung von inhomogenen Anfangsbedingungen erlauben:

$$\Sigma_0 : \dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{w} + \boldsymbol{\mathcal{X}}_0 \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{g}_{0,i}, \quad \boldsymbol{w}_0 = \mathbf{0} \quad (2.59a)$$

$$\Sigma_u : \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{B} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{g}_{u,i}, \quad \boldsymbol{v}_0 = \mathbf{0}. \quad (2.59b)$$

Die NL-Korrekturen \boldsymbol{g}_0 und \boldsymbol{g}_u können nun zur Bildung der Gesamtsysteme Σ_0 und Σ_u zu den linearen Anteilen in der Zustandsgleichung von $\Sigma_{0,\text{lin}}$ und $\Sigma_{u,\text{lin}}$ addiert werden. Auf diese Weise lassen sich die variierenden Wärmeübergangskoeffizienten auch bei inhomogenen Anfangsbedingungen zur Simulation eines Abkühlvorgangs verwenden.

In diesem Kapitel wurde zunächst die Wärmeleitungsgleichung unter Berücksichtigung von thermischen Randbedingungen aufgestellt und mit Hilfe der Methode der finiten Elemente örtlich diskretisiert. Aus den resultierenden numerischen Matrizen wurde auf Grundlage der affinen Parameterabhängigkeiten anschließend eine linear-parametervariante Systembeschreibung generiert. Zur nachfolgenden Verwendung von Verfahren zur MOR wurde diese in einen linearen sowie zustandsabhängigen Anteil aufgeteilt. Ferner wurden im letzten Abschnitt inhomogene Anfangsbedingungen durch eine Separation von Eigen- und Fremddynamik berücksichtigt, was schlussendlich auf die Systemrealisierungen (2.59) führt, welche das vollständige, thermische Modell darstellen und in den folgenden Kapiteln reduziert werden. Dazu werden in Kapitel 3 zunächst die Grundlagen, Zielvorgaben und Gütekriterien zur MOR erläutert und anhand des linearen Systemteils verdeutlicht. Anschließend erfolgt in Kapitel 4 die Reduktion und Lösung der Systemgleichungen (2.59) durch die im Rahmen dieser Promotion neu entwickelte Methode.

3 Grundlagen zur Reduktion der Modellordnung

Die im vorherigen Kapitel hergeleitete Systembeschreibung liegt als Differentialgleichungssystem mit der teilweise sehr hohen Ordnung n_x vor. Dementsprechend erfordert die Lösung, insbesondere im transienten Fall, ein hoher Berechnungsaufwand. Die gebildete Modellbeschreibung soll allerdings im Rahmen von modellbasierten Methoden zur Prozessüberwachung und -regelung auf echtzeitfähigen Systemen bzw. industriellen Steuerungen ausgeführt werden (siehe Kapitel 5.2). Weiterhin können die Lösungsalgorithmen von Optimierungsproblemen z.B. zur Identifikation von Parametern viele Simulationsiterationen in kurzer Zeit erfordern (Kapitel 5.1). Methoden zur Reduktion der Modellordnung bieten die Möglichkeit die Anzahl der Zustandsgleichungen zu reduzieren und so die performante Ausführung der Simulation bei hinreichend erhaltener Genauigkeit zu ermöglichen. Dieses Kapitel befasst sich daher mit den Grundlagen zur Modellordnungsreduktion, wofür zunächst in Abschnitt 3.1 Zielvorgaben und die Konzepte der Modellvereinfachung sowie der mathematischen Reduktion der Modellordnung zur Senkung der Berechnungsdauer vorgestellt werden. Letzterem kommt im Rahmen dieser Dissertation eine besondere Rolle zu, weshalb die dazugehörigen Verfahren anschließend in Abschnitt 3.2 genauer erläutert werden. Nach der Definition von Gütekriterien zur Bewertung der verschiedenen Reduktionsverfahren in Sektion 3.3, werden die Algorithmen für lineare (Abschnitt 3.4 sowie parametrische Systeme (3.5) vorgestellt.

3.1 Konzepte und Zielvorgaben zur Senkung der Berechnungsdauer

Zunächst können Vereinfachungen im vorher beschriebenen Modellierungsprozess sowie der späteren Ausführung durchgeführt werden. Dazu gehören vor allem Anpassungen der vorliegenden CAD-Geometrien, bei denen konstruktive Details wie zum Beispiel Schraubverbindungen oder Bohrlöcher vernachlässigt werden, um die Anzahl von feineren Netzelementen bei der späteren örtlichen Diskretisierung zu verringern. Durch geeignete Vernachlässigungen von geometrischen Details können zum Beispiel auch Symmetrieeffekte genutzt werden, um das System in einer niedrigeren räumlichen Dimension zu betrachten, was oftmals einen großen Einfluss auf die Rechenzeitersparnis ohne Modellordnungsreduktion zeigt. Weiterhin können Bereiche von niedrigerem Interesse in der Modellierung ausgeschlossen oder stark vereinfacht werden. Auf diese Weise ist unter Umständen eine gröbere örtliche Diskretisierung ohne

Einbußen bei der Genauigkeit der relevanten Bereiche möglich [TBG09]. Die Vereinfachung der Geometrie erfordert sowohl ein tieferes Verständnis der physikalischen Prozesse, um die Zulässigkeit und Auswirkung der Maßnahmen zu bewerten, als auch Routine in der CAD-Konstruktion für das zeitaufwendige Anpassen. Daher wurden verschiedenste automatisierte Mechanismen entwickelt, um die konstruktive Anpassung zu erleichtern. Ein gutes Beispiel dafür sind die virtuellen Topologien [SBB97].

Neben den konstruktiven Maßnahmen können auch Vereinfachungen des Netzes aus finiten Elementen wie bspw. Knotenverschiebungen oder -vereinigungen zu Einsparungen bei der Rechenzeit führen [Böh18]. Prinzipiell sind alle diese getroffenen Vereinfachungen durch vergleichende thermische Simulationen oder sogar Messungen auf Zulässigkeit zu prüfen. Detailliert beschriebene Algorithmen und Vorgehensweisen sind in [FZL19; Mou+13] zu finden. Jeder Modellierungsprozess sollte zumindest eine rudimentäre geometrische Überarbeitung hinsichtlich der physikalischen Simulation enthalten [Had+18]. Bei der späteren Simulationsausführung kann die Wahl von größeren Schritten bei der zeitlichen Diskretisierung ebenfalls zu einer deutlichen Verringerung der Berechnungszeit beitragen. Allerdings ist darauf zu achten, dass die örtliche und zeitliche Diskretisierungen nicht getrennt voneinander betrachtet werden können, da Elementgröße und Zeitschritt voneinander abhängen und einen Einfluss auf die Simulationsgenauigkeit haben [SBS02]. Eine weitere Maßnahme kann die Linearisierung in einem Betriebspunkt sein, um das im Allgemeinen nichtlineare System in ein lineares DGL-System zu überführen und die Wahl der Lösungsverfahren zu vereinfachen. Die Vereinfachung von Geometrien und den entstehenden Netzen zur örtlichen Diskretisierung wurde wie zum Beispiel auch in [Böh18] im Rahmen dieser Dissertation überprüft und durchgeführt.

Weiterhin stellen mathematische Verfahren zur Reduktion der Modellordnung eine Alternative dar, bei denen durch den gewählten Reduktionsalgorithmus die Anzahl der Zustandsgleichungen von n_x auf q mit $q \ll n_x$ verringert wird. Im Allgemeinen wird zu einem linearen Originalsystem in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

mit Systemausgang $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$, der hohen Ordnung $\dim(\mathbf{x}) = n_x \gg 10^3$ und den Systemmatrizen

$\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D},) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \times \mathbb{R}^{n_x \times n_u} \times \mathbb{R}^{n_y \times n_x} \times \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ eine reduzierte Systemdarstellung

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t), & \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

mit der Realisierung $\tilde{\Sigma} = (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{D}) \in \mathbb{R}^{q \times q} \times \mathbb{R}^{q \times n_u} \times \mathbb{R}^{n_y \times q} \times \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$, den rekonstruierten Systemausgängen $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n_y}$ und der Ordnung q gesucht. Durch Anwendung der Laplace-Transformation folgt aus den Matrizen der Zustandsraumdarstellung die Übertragungsfunktionsmatrix des Originalsystems $\mathbf{G}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ mit $s \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s). \quad (3.3)$$

Analog dazu lässt sich aus den reduzierten Matrizen die reduzierte Übertragungsfunktionsmatrix $\tilde{\mathbf{G}}$ berechnen. Einige Reduktionsverfahren basieren auf einer Approximation der Übertragungsfunktionen, sodass $\mathbf{G} \approx \tilde{\mathbf{G}}$ gilt. Es ist offensichtlich, dass mit der Forderung $q \ll n_x$ und der damit einhergehenden Verringerung der Zustandsgleichungen auch ein Verlust von Informationen resultiert. Es entsteht dabei ein zentraler Zielkonflikt zwischen Berechnungsdauer und Approximationsgüte. Allgemeine Zielvorgaben an Verfahren zur Reduktion sind in [Ant05; MG10; Sop11; Ben+17a] formuliert und lauten bezogen auf die Problemstellung im Rahmen dieser Dissertation:

1. Eine möglichst exakte Abbildung der originalen Systemausgänge $\mathbf{y}(t) \stackrel{!}{\approx} \hat{\mathbf{y}}(t) \forall t \in \mathbb{R}^+$ durch die approximierten Ausgangssignale $\hat{\mathbf{y}}(t)$ zur Parametrierung und Validierung der ordnungsreduzierten Modelle anhand von gemessenen Temperaturen
2. Eine möglichst genaue Rekonstruktion aller Originalzustände $\mathbf{x}(t) \stackrel{!}{\approx} \hat{\mathbf{x}}(t) \forall t \in \mathbb{R}^+$ durch den approximierten Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}(t)$ über das gesamte transiente Verhalten, um Temperaturverteilungen bestimmen zu können
3. Numerische Stabilität und numerische Effizienz des Reduktionsverfahrens
4. Anwendbarkeit auch bei hochdimensionalen Systemen mit mehr als $n_x > 10^4$ Zuständen
5. Erhalt einer Vielzahl von physikalisch interpretierbaren Systemparameter zur Abbildung von Parameterabhängigkeiten und -schwankungen
6. Berücksichtigung mehrfacher zustandsabhängiger Systemparameter während der laufenden Simulation zur Berücksichtigung temperaturabhängiger Randbedingungen

7. Erhalt der wesentlichen Systemeigenschaften (Stabilität, Steuer- und Beobachtbarkeit) zur Verwendung von modellbasierten Methoden zur Prozessüberwachung und -regelung
8. Anwendbarkeit bei nicht-quadratischen Mehrgrößensystemen
9. Abschätzung von Fehlerschranken im Vorfeld der Ausführung
10. Größenbeschränkung der reduzierten Matrizen zur Einbindung als Modul auf echtzeitfähigen Systemen
11. Keine mehrfachen Simulationen der vollständigen Systeme zur Generierung von Zustandstrajektorien für datenbasierende Verfahren, da die Berechnungsdauer sehr hoch ist

Zur Berechnung der reduzierten Realisierung existieren eine Vielzahl von Verfahren, welche grundlegender oder stark anwendungsspezifischer Natur sind. Jede einzelne Methode besitzt verschiedene Vor- und Nachteile, wobei keine der bisher veröffentlichten alle gestellten Anforderungen vollumfänglich erfüllt. Es muss daher hinsichtlich dieser abgewogen und priorisiert werden. Als vielversprechende Verfahren haben sich die im folgenden Abschnitt beschriebenen projektionsbasierten Reduktionen etabliert.

3.2 Projektionsbasierte Modellordnungsreduktion

Die grundlegende Idee der projektionsbasierten Verfahren zur Modellordnungsreduktion liegt in dem Projizieren des originalen Zustandsvektors \boldsymbol{x} in einen Zustandsraum mit deutlich weniger Freiheitsgraden, den sogenannten Projektionsunterraum \mathcal{V} . Für die Durchführung einer Projektion sind die Beschreibungen von Projektionsrichtung und Projektionsunterraum entscheidend. Die Matrix $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n_x \times q}$ enthält die Basisvektoren zur Beschreibung des Projektionsunterraumes \mathcal{V} . Senkrecht zur Projektionsrichtung liegt der richtungsbeschreibende Unterraum \mathcal{W} dessen Basisvektoren in \boldsymbol{W} enthalten sind.

Aus den beiden Basen \boldsymbol{W} und \boldsymbol{V} kann der sogenannte Projektor $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{W}^T \boldsymbol{V})^{-1} \boldsymbol{W}^T$ gebildet werden. Dieser induziert die als Projektion bezeichnete lineare Abbildung $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$ und vereinfacht sich durch die biorthonormale Beziehung von \boldsymbol{W} und \boldsymbol{V} zu $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V} \boldsymbol{W}^T$. Diese Projektion lässt sich weiterhin in zwei Arten einteilen [Sop11]:

Definiton 3.1 *Abhängig von der Wahl von \boldsymbol{V} , $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{n_x \times q}$ gelten für den Projektor \boldsymbol{P} folgende Bezeichnungen:*

- (i) Für $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$ heißt \boldsymbol{P} *orthogonale/Galerkin-Projektion* und es gilt $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$.
- (ii) Für $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{W}$ heißt \boldsymbol{P} *schiefe/Petrov-Galerkin-Projektion*.

Die senkrechte Projektion entlang \mathcal{W} lässt sich ausdrücken als

$$\mathbf{W}^T(\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

mit der Basis $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_x \times q}$ und dem projizierten Vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n_x}$. Dieser wird durch $\tilde{\mathbf{x}}$ im reduzierten Unterraum \mathcal{V} dargestellt

$$\hat{\mathbf{x}}(t) := \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (3.5)$$

Das ineinander Einsetzen der vorigen Gleichungen sowie Umstellen liefert die Vorschrift zur Ordnungsreduktion

$$\tilde{\mathbf{x}} := (\mathbf{W}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{x}(t). \quad (3.6)$$

Eine Besonderheit bei der Bestimmung der Projektionsmatrizen zur Ordnungsreduktion ist die Forderung, dass die Spaltenvektoren beider Matrizen senkrecht zueinander stehen (biorthogonaler Fall), wodurch $\mathbf{W}^T \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{I}}$ mit Einheitsmatrix $\tilde{\mathbf{I}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ gilt. Somit kann der reduzierte Zustandsvektor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}$ berechnet werden durch

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{x}(t). \quad (3.7)$$

Zur Rücktransformation wird folgenden Vorschrift nach (3.6) verwendet

$$\mathbf{x}(t) \approx \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (3.8)$$

Da die Reduktion immer mit einem Informationsverlust einhergeht, ist der rücktransformierte Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}(t)$ nur eine Näherung der tatsächlichen Lösung. Das so entstehende Residuum $\xi(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ verschwindet durch die Petrov-Galerkin-Bedingung

$$\xi(t) \perp \text{colspan}(\mathbf{W}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{W}^T \xi(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.9)$$

welche die Anforderung an \mathbf{W} stellt, dass alle Spalten von \mathbf{W} orthogonal zu eben jenem Residuum sein müssen. [Sop11; Wol14] Damit kann das folgende vorher überbestimmte Gleichungssystem nun gelöst werden

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V}}_{=: \tilde{\mathbf{A}}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{B}}_{=: \tilde{\mathbf{B}}} \mathbf{u}(t) + \underbrace{\mathbf{W}^T \xi(t)}_{=: \mathbf{0}}, & \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{W}^T \mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{V}}_{=: \tilde{\mathbf{C}}} \tilde{\mathbf{x}}(t). \end{cases} \quad (3.10)$$

Wird nun diese Transformationen auf die in Kapitel 2 hergeleiteten Systembeschreibungen zu

Eigendynamik $\tilde{\Sigma}_{0,\text{lin}}$ aus (2.56a) und Fremddynamik $\tilde{\Sigma}_{u,\text{lin}}$ aus (2.56b) angewendet, resultieren daraus die folgenden Realisierungen:

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_{0,\text{lin}} &= (\mathbf{W}_0^T \mathbf{A} \mathbf{V}_0, \mathbf{W}_0^T \mathcal{X}_0, \mathbf{C} \mathbf{V}_0) =: (\tilde{\mathbf{A}}_0, \tilde{\mathbf{B}}_0, \tilde{\mathbf{C}}_0) \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_0} \times \mathbb{R}^{q_0 \times \mu} \times \mathbb{R}^{n_y \times q_0} \\ \tilde{\Sigma}_{u,\text{lin}} &= (\mathbf{W}_u^T \mathbf{A} \mathbf{V}_u, \mathbf{W}_u^T \mathbf{B}, \mathbf{C} \mathbf{V}_u) =: (\tilde{\mathbf{A}}_u, \tilde{\mathbf{B}}_u, \tilde{\mathbf{C}}_u) \in \mathbb{R}^{q_u \times q_u} \times \mathbb{R}^{q_u \times n_u} \times \mathbb{R}^{n_y \times q_u}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

In den folgenden Abschnitten werden die verschiedenen MOR-Verfahren zur Berechnung geeigneter Projektoren respektive Projektionsmatrizen vorgestellt. Zunächst werden jedoch Gütekriterien zur Bewertung und Vergleichbarkeit der Methoden eingeführt.

3.3 Gütekriterien zur Bewertung reduzierter Modelle

Die verwendeten Reduktionsmethoden haben bezüglich der formulierten Anforderungen in Abschnitt 3.1 unterschiedliche Stärken und Schwächen bei der Approximation der Systeme. Daher müssen Gütekriterien definiert werden, anhand derer die Eignung der Algorithmen bewertet werden kann. Eine Einteilung kann in a-priori und a-posteriori Fehler erfolgen, diese beziehen sich auf die Simulationsdurchführung.

3.3.1 Einfluss der Projektion

In diesem Bewertungsmaß erfolgt ein Vergleich von durch die Ordnungsreduktion bestimmten Projektoren. Dabei wird der originale Zustandsvektor reduziert und anschließend rücktransformiert $\mathbf{x} \approx \mathbf{V} \mathbf{W}^T \mathbf{x}$. Das so entstehende Residuum Δ^{proj} kann zur Einordnung der Projektionsgüte genutzt werden, in dem der Projektor mit der Identität $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ verglichen wird

$$\Delta^{\text{proj}} = [\mathbf{I} - \mathbf{V} \mathbf{W}^T] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}. \quad (3.12)$$

Dieses ist unabhängig von einer Lösung des Zustandsraumes und kann somit als a-priori Fehlermaß verwendet werden. Zur Angabe eines skalaren Fehlermaßes δ_{proj} kann der absolute Mittelwert des Residuums gemäß

$$\delta_{\text{proj}} := \frac{1}{n_x^2} \left| \sum_{\alpha=1}^{n_x} \sum_{\beta=1}^{n_x} \Delta_{\alpha,\beta}^{\text{proj}} \right| \in \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad \Delta^{\text{proj}} = (\Delta_{\alpha,\beta}^{\text{proj}})_{\alpha,\beta \in \{1, \dots, n_x\}} \quad (3.13)$$

verwendet werden. Jedoch wird der Betrag nicht elementweise gebildet, da das Fehlermaß sonst mit der Dimension des reduzierten Zustandsraums ansteigen und einen Vergleich verschieden großer Projektoren verhindern würde. Daraus ergibt sich jedoch, dass sich Abweichungen mit unterschiedlichen Vorzeichen aufheben und in dem so definierten Fehlermaß keine Beachtung

finden. Daher wird ein Fehlermaß ζ_{proj} eingeführt, welches die zeilenweise Abweichung des Projektors zu Zeilenvektoren e_α der Identität angibt. Dabei beschreibt $(\cdot)_{\alpha,:}$ die Zeile α der jeweiligen Matrix:

$$\begin{aligned}\zeta_{\text{proj}} &:= \frac{1}{n_x} \sum_{\alpha=1}^{n_x} \left| \sqrt{\sum_{\beta=1}^{n_x} (\mathbf{V} \mathbf{W}^T)_{\alpha,\beta}^2} - \underbrace{\|e_\alpha\|_2}_{=1} \right| \\ &= \frac{1}{n_x} \sum_{\alpha=1}^{n_x} \left| \|(\mathbf{V} \mathbf{W}^T)_{\alpha,:}\|_2 - 1 \right| \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}\quad (3.14)$$

3.3.2 Systemnormen

In der Bewertung der Approximationsgüte von Modellordnungsreduktionen bilden Normen eine wichtige Komponente. Sie lassen sich in Signal- und Systemnormen in Zeit- und Frequenzbereich unterteilen. Das Hauptziel einer MOR kann als $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| \leq \epsilon \cdot \|\mathbf{u}\|$ definiert werden, wobei ϵ die Fehlertoleranz angibt. Klassische p -Normen wurden durch [Sop11] mit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ auf zeitabhängige Signale erweitert

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}_p} := \begin{cases} \left[\int_{\mathcal{I}} \|\mathbf{u}(t)\|_p^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t \in \mathcal{I}} \|\mathbf{u}(t)\|_p, & \text{für } p = \infty. \end{cases} \quad (3.15)$$

Zur Einführung eines weiteren a-priori Gütekriteriums ist es sinnvoll eine Systemnorm zu verwenden, welche die Übertragungsfunktionen berücksichtigt. Durch Betrachtung der Singulärwerte $\sigma_j(\mathbf{G}) \in \mathbb{R}$ des j -ten Pfades der Übertragungsfunktionsmatrix ergibt sich die Schatten- p -Norm

$$\|\mathbf{G}\|_{\text{s},p} := \begin{cases} \left[\sum_{j=1}^{\min\{n_y, n_u\}} \sigma_j^p(\mathbf{G}) \right]^{\frac{1}{p}}, & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \max_{1 \leq j \leq \min\{n_y, n_u\}} \sigma_j(\mathbf{G}), & \text{für } p = \infty. \end{cases} \quad (3.16)$$

Daraus abgeleitet ergeben sich die \mathcal{H}_p -Norm angewendet auf die Übertragungsfunktion nach [Ant05]

$$\|\mathbf{G}\|_{\mathcal{H}_p} := \begin{cases} \left[\frac{1}{2\pi} \sup_{\theta > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{G}(\theta + j\omega)\|_{\text{s},p}^p d\omega \right]^{\frac{1}{p}}, & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{s \in \mathbb{C}^+} \|\mathbf{G}(s)\|_{\text{s},p}, & \text{für } p = \infty. \end{cases} \quad (3.17)$$

Der sogenannte **Hardy-Raum** $\mathcal{H}_p^{n_y \times n_u}(\mathbb{C}^+) := \{ \mathbf{G} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{n_y \times n_u} \mid \|\mathbf{G}\|_{\mathcal{H}_p} < \infty \}$ enthält dabei alle in $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_p}$ beschränkten Funktionen. Zur Bewertung von Ordnungsreduktionen sind die \mathcal{H}_2 -Norm sowie die \mathcal{H}_∞ -Norm üblich. $\|\mathbf{G}\|_{\mathcal{H}_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathbf{G}(j\omega))$ kann dabei recht schnell bestimmt werden [BMS05; Sop11], jedoch ist auf Grund der hohen Dimension die Berechnung der \mathcal{H}_2 -Norm zeitaufwändig und wird daher wie folgt numerisch bestimmt. Für Systeme im Zeitbereich wird nach [Wol14] die Spur

$$\|\mathbf{G}\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{Q} \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T) \quad (3.18)$$

aus der Gram'schen Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{P} oder der Gram'schen Beobachtbarkeitsmatrix \mathbf{Q} berechnet. Zur Bewertung der Approximationsgüte zwischen reduzierter und originaler Übertragungsfunktion wird die Differenz innerhalb der \mathcal{H}_∞ und der \mathcal{H}_2 Normen gebildet. Zur Bestimmung von $\|\mathbf{G} - \tilde{\mathbf{G}}\|_{\mathcal{H}_2}$ ist nach [Wol14] die Berechnung der Gram'schen Matrizen sowie die Lösung \mathbf{X}_B oder $\mathbf{X}_C \in \mathbb{R}^{n_x \times q}$ einer der Sylvestergleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{X}_B + \mathbf{X}_B \tilde{\mathbf{A}}^T + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}^T &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{X}_C + \mathbf{X}_C \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{C}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

notwendig. Mit dem Skalarprodukt $\langle \mathbf{G}, \tilde{\mathbf{G}} \rangle_{\mathcal{H}_2} := \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{X}_C \tilde{\mathbf{B}}) = \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{X}_B \tilde{\mathbf{C}}^T)$ ergibt sich daraus das Fehlermaß

$$\|\mathbf{G} - \tilde{\mathbf{G}}\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|\mathbf{G}\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \|\tilde{\mathbf{G}}\|_{\mathcal{H}_2}^2 - 2 \langle \mathbf{G}, \tilde{\mathbf{G}} \rangle_{\mathcal{H}_2}. \quad (3.20)$$

3.3.3 Abweichung im Zeitbereich

Als a-posteriori Gütekriterien können die Zustands- $\mathbf{x}(t) \stackrel{!}{\approx} \hat{\mathbf{x}}(t)$ oder Ausgangssignale $\mathbf{y}(t) \stackrel{!}{\approx} \hat{\mathbf{y}}(t)$ miteinander verglichen werden. Besonders bei den Zuständen muss bei der Berechnung eines skalaren Gütekriteriums sowohl über die örtliche Verteilung als auch den Zeitverlauf gemittelt werden, was zu starken Verzerrungen führen kann. Für eine Zeitreihe wird bei zeitdiskreter Implementierung das Root-Mean-Squared Fehlermaß über die t diskreten Zeitpunkte t_j mit $j \in \{1, \dots, m_t\}$ für den jeweiligen Zustand x_i durch

$$\Delta_i^{\text{RMS}} \approx \sqrt{\frac{1}{m_t} \sum_{j=1}^{m_t} [x_i(t_j) - \hat{x}_i(t_j)]^2} \quad (3.21)$$

angenähert. Zur Berechnung des skalaren Fehlermaßes

$$\Delta^{\text{RMS}} := \frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} \Delta_i^{\text{RMS}} \quad (3.22)$$

wird der Fehler über alle Zustände gemittelt. Selbige Fehlermaße werden auch für die Systemausgänge gebildet. Bei verschiedener räumlicher oder zeitlicher Diskretisierung zwischen den zu vergleichenden Modellen muss entsprechend interpoliert werden. Um dieses Fehlerkriterium über verschiedene Zustandstrajektorien hinweg vergleichbar zu machen, ist eine Angabe des relativen Fehlers unter Verwendung klassischer Normen zweckmäßig:

$$\varepsilon_{p,x}(t) := \frac{\|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\|_p}{\|\mathbf{x}(t)\|_p} \in \mathbb{R}^+ . \quad (3.23)$$

Besonders für $p = 2$ kann $\varepsilon_{2,x}(t)$ für eine bessere Interpretierbarkeit verwendet werden. Im Gegensatz zu den vorigen Abschnitten ermöglichen Fehlerkriterien im Zeitbereich zwar ein anschaulicheres Fehlermaß, erfordern jedoch eine im Vorfeld durchgeführte numerische Lösung der Systemgleichung. Daher kann der Fehler beim Berechnen der Lösung den eigentlichen Approximationsfehler durch die Projektion beeinflussen.

Nach der Definition der Gütekriterien in diesem Abschnitt, werden im Folgenden die verwendeten Reduktionsverfahren genauer beschrieben.

3.4 Reduktionsverfahren für lineare Systeme

Nach dem Aufstellen der Zielvorgaben und dem Definieren der Gütekriterien werden nun zunächst die Verfahren zur Berechnung der in Abschnitt 3.2 eingeführten Projektionsmatrizen \mathbf{V} , \mathbf{W} für lineare Systeme erläutert und auf den linearen Teil der Systembeschreibung (2.59) aus Kapitel 2 angewendet. Die projektiven Verfahren zur Reduktion linearer Systeme lassen sich nach [Ant05] in drei Kategorien einteilen:

- Modale Verfahren,
- Verfahren mit Singulärwertzerlegungen,
- Krylov-Unterraum-Verfahren.

Die modalen Reduktionsverfahren zählten lange zum Stand der Technik bei der Reduktion von FEM-Modellen [Sop11], benötigen für eine gute Approximation jedoch eine verhältnismäßig hohe Anzahl an reduzierten Zustandsgleichungen. Daher sind sie für Systeme mit höheren Dimensionen, wie sie im Rahmen dieser Dissertation auftreten, eher ungeeignet. Weiterhin lassen sich keine Fehlerschranken vor der Durchführung der Reduktion definieren oder anwenden. Daher werden im Folgenden Balanced Truncation und Proper Orthogonal Decomposition (POD)

als Vertreter der Verfahren auf Basis der Singulärwertzerlegung betrachtet sowie verschiedene Krylov-Unterraum-Verfahren wie z.B. Momentenabgleich und (tangente) Interpolation untersucht.

3.4.1 Balanced Truncation

Bei dem Verfahren Balanced Truncation werden die Systemzustände aufsteigend nach der Größe der benötigten Energie zur Ansteuerung sowie der Unbedeutsamkeit der Energieübertragung auf den Systemausgang sortiert. Anschließend erfolgt das Abschneiden der unbedeutenden Zustände aus dieser Abfolge, sodass diese nicht weiter betrachtet werden (Truncation). Zur Beurteilung der energetischen Beiträge eines Zustands finden die Gram'schen Matrizen für Steuerbarkeit \mathcal{P} und Beobachtbarkeit \mathcal{Q} Verwendung, welche mit Hilfe der Lyapunov Gleichungen bestimmt werden [TP87]. Diese werden anschließend so transformiert, dass beide identisch sind und nur Diagonaleinträge σ_i besitzen. Zur Bestimmung der Transformationsmatrix T erfolgt die Zerlegung der Gram'schen Matrizen in Choleskyfaktoren $\mathcal{P} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T$, $\mathcal{Q} = \mathbf{S} \mathbf{S}^T$. Danach gilt:

Satz 3.1 [TP87; Wol14; Ant05] *Die Transformationsmatrix T zum Balancieren der Systembeschreibung ergibt sich aus der Singulärwertzerlegung $\mathbf{S}^T \mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{L}^T$ mit $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ zu*

$$\mathbf{T} = \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}^T \mathbf{S}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R} \mathbf{L} \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.24)$$

Die Eigenwerte des Produktes der transformierten Gram'schen Matrizen $\hat{\mathcal{P}} = \mathbf{T} \mathcal{P} \mathbf{T}^T$ und $\hat{\mathcal{Q}} = \mathbf{T}^{-T} \mathcal{Q} \mathbf{T}^{-1}$ entsprechen den Eigenwerten (EW) der untransformierten Matrizen:

$$EW_j(\hat{\mathcal{P}} \hat{\mathcal{Q}}) = EW_j(\mathcal{P} \mathcal{Q}). \quad (3.25)$$

Definiton 3.2 [BMS05] *Die Systemkonstanten $\sigma_j := \sqrt{EW_j(\mathcal{P} \mathcal{Q})}$ heißen **Hankel-Singulärwerte (HSV)** des Systems.*

Nach dem Balancieren des Systems wird dieses in den relevanten oberen Teil $\mathbf{\Sigma}_1$, welcher dann die reduzierte Systemrealisierung darstellt, und in den abgeschnittenen unteren Teil $\mathbf{\Sigma}_2$ getrennt (Systempartitionierung):

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1 & \\ & \mathbf{\Sigma}_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{\Sigma}_1 \in \mathbb{R}^{q \times q}, \quad \mathbf{\Sigma}_2 \in \mathbb{R}^{n_x - q \times n_x - q}, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^q, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_x-q}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Das reduzierte System besteht somit aus $\Sigma_1 = (\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1)$. Die HSV können als a-priori Fehlerschranke zur Wahl der reduzierten Ordnung genutzt werden [BMS05]. Dabei ist die \mathcal{H}_∞ -Norm der Übertragungsfunktionen kleiner als die Summe der in der Reduktion nicht berücksichtigten HSV

$$\|\boldsymbol{G}(s) - \tilde{\boldsymbol{G}}(s)\|_{\mathcal{H}_\infty} \leq 2 \sum_{j=q+1}^{n_x} \sigma_j. \quad (3.28)$$

Abbildung 3.1 zeigt die sich gemäß der Fehlerabschätzung ergebene obere Fehlerschranke der Ordnungsreduktion für Eigen- und Fremddynamik eines Beispielsystems. Der langsamere Zerfall der HSV für die Eigenbewegung sorgt dabei für einen höheren Fehler bei gleicher Ordnung im Vergleich zur Fremddynamik.

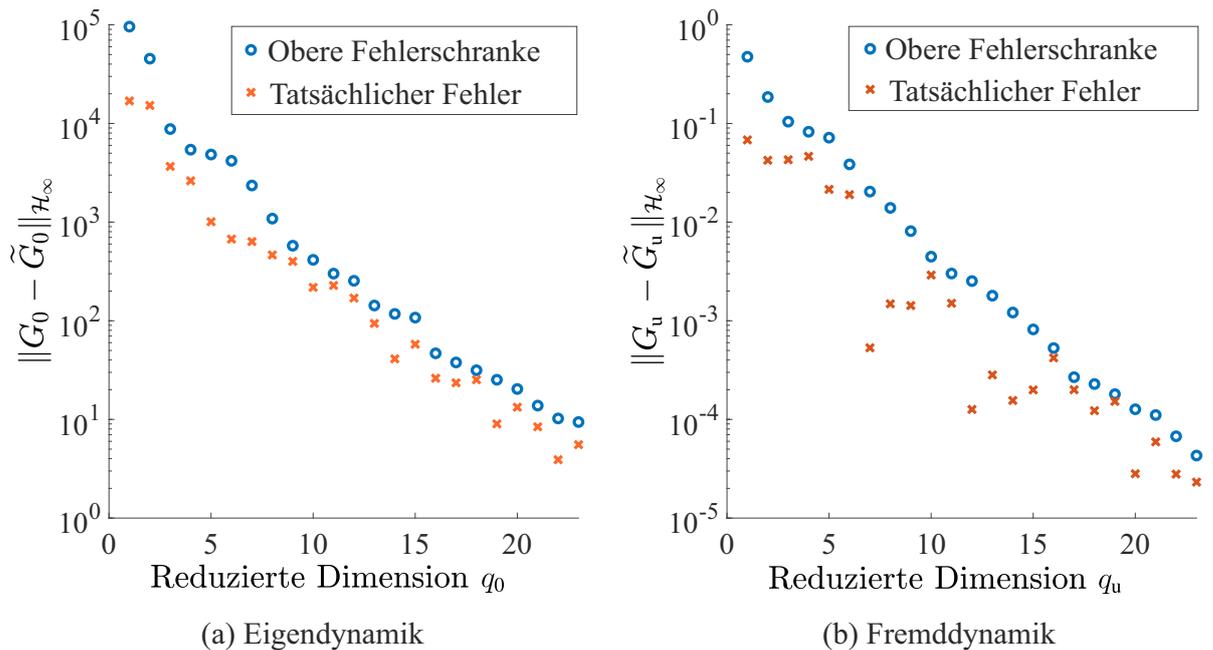


Abbildung 3.1: Berechnete a-priori Fehlerschranken und ermittelte Fehler in der Approximation der Eigendynamik (a) und Fremddynamik (b) des linearen Abkühlmodells vom Reifen

Da das Gütekriterium in der \mathcal{H}_∞ -Norm keine intuitive Bewertung zur notwendigen Ordnung zulässt, existieren verschiedene Entscheidungsverfahren zur Festlegung der Grenze zur System-

partitionierung [Har02]. Ein wesentlicher Vorteil bei der Verwendung von Balanced Truncation zur Berechnung einer reduzierten Systemdarstellung ist der Erhalt aller wesentlicher Systemeigenschaften wie Stabilität, Steuer- und Beobachtbarkeit. Dies ist jedoch mit der aufwendigen Berechnung der Gram'schen Matrizen aus beiden Lyapunovgleichungen sowie deren Singulärwertzerlegung verbunden, was für Systeme höherer Ordnungen $n_x > 3.000$ nicht mehr zweckmäßig ist [WPL13; Sop11]. Für größere Systeme können die Gram'schen Matrizen über eine Niedrigrang-Approximation im Rahmen der Alternating Directions Implicit (ADI) - oder Rational Krylov Subspace-Methode (RKSM) [WPL13; BLT09] angenähert werden. Damit einher geht allerdings der Verlust der Fehlerschranke (3.28) sowie sämtlicher Garantien zum Erhalt der Systemeigenschaften. Da die Systeme im Rahmen dieser Dissertation alle höherer Ordnung sind, wird für alle BT-Reduktionen auf die ADI-Methode zurückgegriffen.

3.4.2 Proper Orthogonal Decomposition

Das Verfahren Proper Orthogonal Decomposition (POD) findet vor allem bei der Reduktion von nichtlinearen und parametrischen Systemen Verwendung [Ben+17a; BMS05], kann jedoch auch im linearen Fall angewendet werden. Daher werden in diesem Abschnitt zunächst die grundlegenden Konzepte des Algorithmus beleuchtet, die Verwendung im parametrischen Kontext erfolgt im späteren Abschnitt 3.5.1. Zur Bestimmung der Projektoren wird zunächst eine Matrix aus $n_S \in \mathbb{N}^+$ Stichproben von Zustandsvektoren zu verschiedenen Zeitpunkten des vollständigen Modells (sogenannte „snap-shots“) gebildet $\mathcal{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S]$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x \times n_S}$ mit $r = \text{span}(\mathcal{X})$. Die reduzierte Ordnung ergibt sich daraus im möglichen Intervall $q \in [1, n_S]$. Anschließend wird ein Minimierungsproblem aufgestellt und der Projektor $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n_x \times q}$ als dessen Lösung gemäß

$$\text{POD}_q(\mathcal{X}) = \min_{\mathbf{V}} \sum \frac{1}{n_S} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{x}_i\|_2^2 \quad (3.29)$$

berechnet. Nach [Vol11] lässt sich zeigen, dass die Lösung dieses Problems durch Singulärwertzerlegung von \mathcal{X} bestimmt werden kann

$$\text{SVZ}(\mathcal{X}) : \mathcal{X} = \mathbf{V}_1 \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}_2^T, \quad (3.30)$$

mit den orthogonalen Matrizen $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{n_x \times r}$ und $\mathbf{V}_2 \in \mathbb{R}^{r \times n_S}$ sowie den Singulärwerten $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$. Aus den Singulärwerten kann wiederum die Fehlerschranke

$$\sum_{j=1}^{n_S} \left\| \mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^q (\mathbf{x}_j^T \mathbf{v}_{1,i}) \mathbf{v}_{1,i} \right\|_2^2 = \sum_{i=k+1}^q \sigma_i \quad (3.31)$$

ermittelt werden. Der Projektor V besteht also schlussendlich aus den ausgewählten q linken Spalten der Matrix V_1 . Die Wahl der Ordnung wird dabei empirisch durch Fehleranalysen des reduzierten Modells überprüft und gegebenenfalls angepasst. Weiterhin wird für die Projektoren im Rahmen der POD meistens $W = V$ gesetzt [BMS05]. Vorteile des Verfahrens sind die relativ leichte Implementierung und Berechnung der Projektoren, aber besonders die Anwendbarkeit im Rahmen der parametrischen Modellordnungsreduktion (siehe Abschnitt 3.5). Ein Nachteil liegt jedoch in der Notwendigkeit von vorliegenden „snap-shots“, für die das vollständige Modell mehrfach gelöst werden muss, was für große Modelle und komplexe Systeme mit erheblichem Rechenaufwand verbunden ist. Im Gegensatz zu Balanced Truncation lassen sich keine Aussagen zur Stabilität, Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit des reduzierten Systems treffen.

3.4.3 Krylov Unterraum Verfahren

Neben modalen und auf SWZ-basierenden Methoden bilden Verfahren mit Krylov Unterräumen eine große und vielfältige Kategorie projektiver Reduktionsverfahren. Grundlegender Ansatz ist es dabei, die Übertragungsfunktion des Originalsystems $G(s)$ durch $\tilde{G}(s)$ zu approximieren. Dabei wird eine endliche Zahl L von Entwicklungsstellen sogenannte „shifts“ $s_l \in \mathbb{C}$ gewählt, welche $G(s)$ an den entsprechenden Frequenzen interpolieren, sodass gilt:

$$G(s_l) \stackrel{!}{=} \tilde{G}(s_l) \quad \forall l = 1, \dots, L. \quad (3.32)$$

Ein großer Vorteil von Krylov-basierten Reduktionsverfahren ist die Verwendbarkeit bei Systemen mit sehr hoher Ordnung $n_x > 10^5$ sowie die im Vergleich zu anderen Verfahren deutlich schnellere Berechnung der Projektoren [Ben+17a]. Weiterhin existieren auf Grund der Vielfältigkeit je nach vorliegendem Systemtyp verschiedene Methoden zur Konstruktion der Projektoren. Nachteile sind jedoch der Verlust der Systemeigenschaften sowie die Bestimmung geeigneter Entwicklungsstellen. Durch die hohe Anzahl an numerischen Freiheitsgraden und keine im Vorfeld berechenbare Fehlerschranke existiert bis heute kein eindeutiges Verfahren zur Wahl der Entwicklungsstellen [MG10]. Nachfolgend werden die gängigsten Krylov Verfahren zur MOR kurz erläutert.

Rationale Krylov Algorithmen

Um die Forderung in Gleichung (3.32) zu erfüllen wird die originale Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(s)$ im Rahmen einer Taylorreihenentwicklung approximiert. An einem Entwicklungspunkt $s_0 \in \mathbb{C}$ gilt somit

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} -\mathbf{m}_j(s_0)(s - s_0)^j, \quad (3.33)$$

mit den Taylorreihenoeffizienten $\mathbf{m}_j(s_0) \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$.

Definiton 3.3 [Ant05] Die Taylorreihenoeffizienten als Matrizen $\mathbf{m}_j(s_0) \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ werden als **Momente** der Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(s)$ an der Entwicklungsstelle s_0 bezeichnet. Die Grenzwerte $\mathbf{M}_j := \lim_{s_0 \rightarrow \infty} \mathbf{m}_j(s_0) \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ heißen **Markovparameter**.

Die Momente lassen sich dabei nach [Ant05] auch ohne Bildung der partiellen Ableitungen der Taylorreihe mit Hilfe von Gleichung (3.3) direkt aus der Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(s)$ bestimmen

$$\mathbf{m}_j(s_0) = \mathbf{C}(\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)^{-(j+1)} \mathbf{B}. \quad (3.34)$$

Mit Definition 3.3 lassen sich daraus auch die Markovparameter als

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{C} \mathbf{A}^j \mathbf{B} \quad (3.35)$$

ermitteln. Diese können in der Taylorreihe

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{M}_j s^{-(j+1)} \quad (3.36)$$

verwendet werden. Eine ausschließlich durch Markovparameter approximierte Übertragungsfunktion

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C} \underbrace{\mathbf{A}^0 \mathbf{B}}_{\in \mathcal{K}_1(\mathbf{A}, \mathbf{B})} s^{-1} + \mathbf{C} \underbrace{\mathbf{A}^1 \mathbf{B}}_{\in \mathcal{K}_2(\mathbf{A}, \mathbf{B})} s^{-2} + \dots + \mathbf{C} \underbrace{\mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{B}}_{\in \mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{B})} s^{-k} + \dots \quad (3.37)$$

enthält dabei k Krylov-Unterräume \mathcal{K}_k . Nach [Sop11; Gri97; Saa03] können diese Krylov-Unterräume allgemein aus den Systemmatrizen wie folgt definiert werden:

Definiton 3.4 (i) $\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \text{span}\{\mathbf{b}, \mathbf{A} \mathbf{b}, \mathbf{A}^2 \mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}\} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ bezeichnet einen **Krylov-Unterraum** der Stufe k für SISO-Systeme.
(ii) $\mathcal{K}_k(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \text{span}\{\mathbf{B}, \mathbf{A} \mathbf{B}, \mathbf{A}^2 \mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}\} \subseteq \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ bezeichnet einen **Block-Krylov-Unterraum** der Stufe k für MIMO-Systeme.

Die gemäß dieser Definition verwendeten Krylov-Unterräume beziehen sich lediglich auf System- und Eingangsmatrix unter Verwendung der anschaulichen Markovparameter. Für ein beliebiges s_0 gelten hingegen die folgenden Definitionen von [Sop11; LS04]:

Definiton 3.5 *Arten und Verfahren*

- (i) $\mathcal{K}_k((\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)^{-1}, (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{B})$ bezeichnet **Eingangs-Krylov-Unterräume**.
- (ii) $\mathcal{K}_k((\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)^{-\text{T}}, (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)^{-\text{T}} \mathbf{C}^{\text{T}})$ bezeichnet **Ausgangs-Krylov-Unterräume**.
- (iii) *Basieren die Krylov-Methoden entweder auf (i) oder (ii) heißen diese **einseitigen Verfahren**. Werden hingegen (i) und (ii) genutzt, heißen diese **zweiseitige Verfahren**.*

Nach Aufstellen der k Momente an der Entwicklungsstelle s_0 erfolgt der geforderte Momentenabgleich zwischen originalem und reduziertem System

$$\mathbf{m}_j(s_0) \stackrel{!}{=} \widetilde{\mathbf{m}}_j(s_0) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{M}_j \stackrel{!}{=} \widetilde{\mathbf{M}}_j \quad \forall j = 1, \dots, k. \quad (3.38)$$

Ein direkter Abgleich ist jedoch nur für Systeme kleiner Ordnung $n_x \leq 10$ numerisch stabil [Sop11], weshalb ein indirekter Ansatz über die biorthogonalen Projektionsmatrizen \mathbf{V} , \mathbf{W} gemäß Definition 3.1 erfolgt. Unter der Voraussetzung, dass $s_0 \in \mathbb{C}$ kein Eigenwert von \mathbf{A} ist, folgt die Invertierbarkeit von $(\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)$ und somit gilt:

Satz 3.2 *Gemäß [Gri97; Wol14; Ant05] gelten die folgenden Bedingungen:*

(i) *Wenn*

$$\mathcal{K}_k((\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)^{-1}, (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{B}) \subseteq \text{colspan}(\mathbf{V}), \quad (3.39a)$$

dann gilt $\mathbf{m}_j(s_0) = \widetilde{\mathbf{m}}_j(s_0)$ mindestens $\forall j = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{n_u} \rfloor$.

(ii) *Wenn*

$$\mathcal{K}_k((\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)^{-\text{T}}, (\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)^{-\text{T}} \mathbf{C}^{\text{T}}) \subseteq \text{colspan}(\mathbf{W}), \quad (3.39b)$$

dann gilt $\mathbf{m}_j(s_0) = \widetilde{\mathbf{m}}_j(s_0)$ mindestens $\forall j = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{n_y} \rfloor$.

(iii) *Gelten die Aussagen (i) und (ii), so ist $\mathbf{m}_j(s_0) = \widetilde{\mathbf{m}}_j(s_0) \forall j = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{n_u} \rfloor + \lfloor \frac{k}{n_y} \rfloor$.*

Ein Momentenabgleich liegt demnach vor, wenn die Vektoren der Krylov-Unterräume durch Linearkombinationen der Spalten aus \mathbf{V} bzw. \mathbf{W} beschrieben werden können. Um nun eine Reduktion durchzuführen, muss die Entwicklungsstelle s_0 und die Anzahl der abgeglichenen Momente $k_{s_0} \in \mathbb{N}$ um diese Stelle angegeben werden. Ferner ist es jedoch meist erforderlich die Übertragungsfunktion an verschiedenen Entwicklungsstellen $s_l \in \mathbb{C}$, $l = 1, \dots, L$ zu approximieren, um höhere Genauigkeiten in einem weiteren Frequenzbereich zu erzielen. Dazu wird Satz 3.2 durch die Vereinigung mehrerer Krylov-Unterräume erweitert [Gri97; Sop11]. Demnach gilt:

Satz 3.3 Nach [Gri97; Sop11] folgt:

(i) Die Projektionsmatrix \mathbf{V} stellt eine Basis der Vereinigung

$$\bigcup_{l=1}^L \mathcal{K}_k((\mathbf{A} - s_l \mathbf{I}_n)^{-1}, (\mathbf{A} - s_l \mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{B}) \subseteq \text{colspan}(\mathbf{V}), \quad (3.40a)$$

dar, sodass $\mathbf{m}_j(s_l) = \widetilde{\mathbf{m}}_j(s_l) \forall j = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{n_u} \rfloor \forall l = 1, \dots, L$ gilt.

(ii) Die Projektionsmatrix \mathbf{W} stellt eine Basis der Vereinigung

$$\bigcup_{l=1}^L \mathcal{K}_k((\mathbf{A} - s_l \mathbf{I}_n)^{-T}, (\mathbf{A} - s_l \mathbf{I}_n)^{-T} \mathbf{C}^T) \subseteq \text{colspan}(\mathbf{W}), \quad (3.40b)$$

dar, sodass $\mathbf{m}_j(s_l) = \widetilde{\mathbf{m}}_j(s_l) \forall j = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{n_y} \rfloor \forall l = 1, \dots, L$ gilt.

(iii) Gelten beide Aussagen (i) und (ii), dann ist

$$\mathbf{m}_j(s_l) = \widetilde{\mathbf{m}}_j(s_l) \forall j = 1, \dots, \lfloor \frac{k}{n_u} \rfloor + \lfloor \frac{k}{n_y} \rfloor \forall l = 1, \dots, L.$$

Da die Zeitkonstanten der hier vorliegenden thermischen Systeme recht groß sind, ist eine Approximation des Übertragungsverhaltens vor allem im niedrigen Frequenzbereich bzw. im stationären Verhalten auf den ersten Blick entscheidend für ein genaues Simulationsergebnis. Jedoch muss bei der Berücksichtigung inhomogener Anfangsbedingungen gemäß Systembeschreibung (2.56) die Impulsantwort des Systems abgebildet werden, was eine Berücksichtigung höherer Frequenzanteile notwendig macht. Weiterhin erfolgt die Aufschaltung von Eingangsgrößen im Modell oft sprunghaft als Leistungs- oder Temperatureingabe. Zur Berücksichtigung dieser beiden Effekte kann der Anfangs- bzw. Endwertsatz der \mathcal{L} (Laplace)-Transformation genutzt werden, um geeignete Entwicklungsstellen zu generieren:

Satz 3.4 [Lun16] Es seien $\mathbf{x}(t)$ differenzierbar sowie $\mathbf{x}(t)$ und $\dot{\mathbf{x}}(t)$ \mathcal{L} -transformierbar. Dann gilt mit $\mathbf{x}(t) \circ \text{---} \bullet \mathbf{X}(s)$:

$$(i) \lim_{t \rightarrow +0} \mathbf{x}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathbf{X}(s) \quad \text{als Anfangswertsatz,}$$

$$(ii) \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{X}(s) \quad \text{als Endwertsatz.}$$

Somit ist für eine Entwicklungsstelle $s_0 = 0$ vor allem eine gute Übereinstimmung im stationären Zustand $t \rightarrow \infty$ zu erwarten, während die Markovparameter das transiente Verhalten bei $t \rightarrow 0$ abbilden. Daher werden als mögliche Entwicklungsstelle zunächst $s_0 = 0$ sowie für den hochfrequenten transienten Bereich $s_0 = \infty$ untersucht. Dies entspricht dem Abgleich der Momente $\mathbf{m}_j(0)$ bzw. der Markovparameter M_j . In Abbildung 3.2 ist der Amplitudengang eines Übertragungspfades des linearen Abkühlsystems $\Sigma_{u,\text{lin}}$ bezogen auf das Reifenmodell für abgegliche Momente um 0 und ∞ dargestellt.

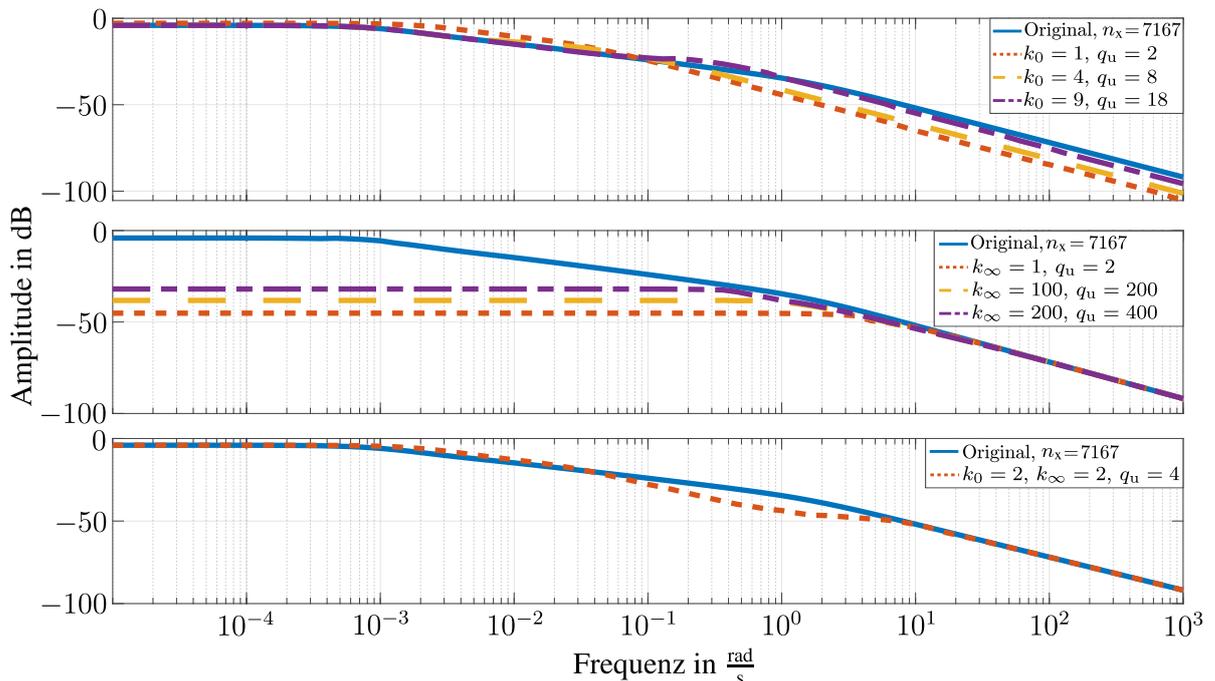


Abbildung 3.2: Bodediagramm eines Übertragungspfad des durch den Eingangs-Krylov-Unterraum reduzierten, linearen Abkühlmodells vom Reifen für verschiedene Anzahlen von Momenten k_0 und k_∞

Im oberen Bodediagramm liegt gemäß Interpolation um $s_0 = 0$ eine gute Approximation des stationären Verhaltens vor, wobei für eine ausreichend hohe Anzahl von Momenten und daraus folgender höherer Ordnung, sich auch in höheren Frequenzbereichen eine gute Annäherung an den Verlauf ergibt. Im mittleren Diagramm stellt sich durch die Markovparameter eine sehr gute Abbildung des hochdynamischen Bereiches ein, wobei es zu deutlichen Abweichungen bei niedrigen Frequenzen kommt. Erst eine deutliche Erhöhung der Momente bzw. reduzierten Ordnung führt zu einer signifikanten Verbesserung bei weiterhin großen Abweichungen. Für thermische Systeme ist es folglich von Vorteil niederfrequente Entwicklungsstelle zu bevorzugen, da die reduzierte Ordnung deutlich niedriger gewählt werden kann. Eine gleichzeitige Betrachtung beider Entwicklungsstellen führt zu einer relativ guten Annäherung über den gesamten Amplitudengang, bei kleinstmöglicher Ordnung. Im Zeitbereich ergeben sich damit die in Abbildung 3.3 dargestellten Effekte durch die Wahl der Entwicklungsstellen. Hierbei ist die kombinierte Wahl der Entwicklungsstellen hinsichtlich des relativen Zustandsfehlers $\varepsilon_{2,x}$ am besten geeignet. Neben den beiden betrachteten Entwicklungsstellen werden zur besseren Annäherung des Übertragungsverhaltens in der Regel weitere Zwischenpunkte gewählt. Mögliche Entscheidungskriterien zur Auswahl werden bspw. in [GG96] diskutiert. Aus den geeigneten Entwicklungsstellen können die Projektionsmatrizen V und W gemäß Satz 3.2

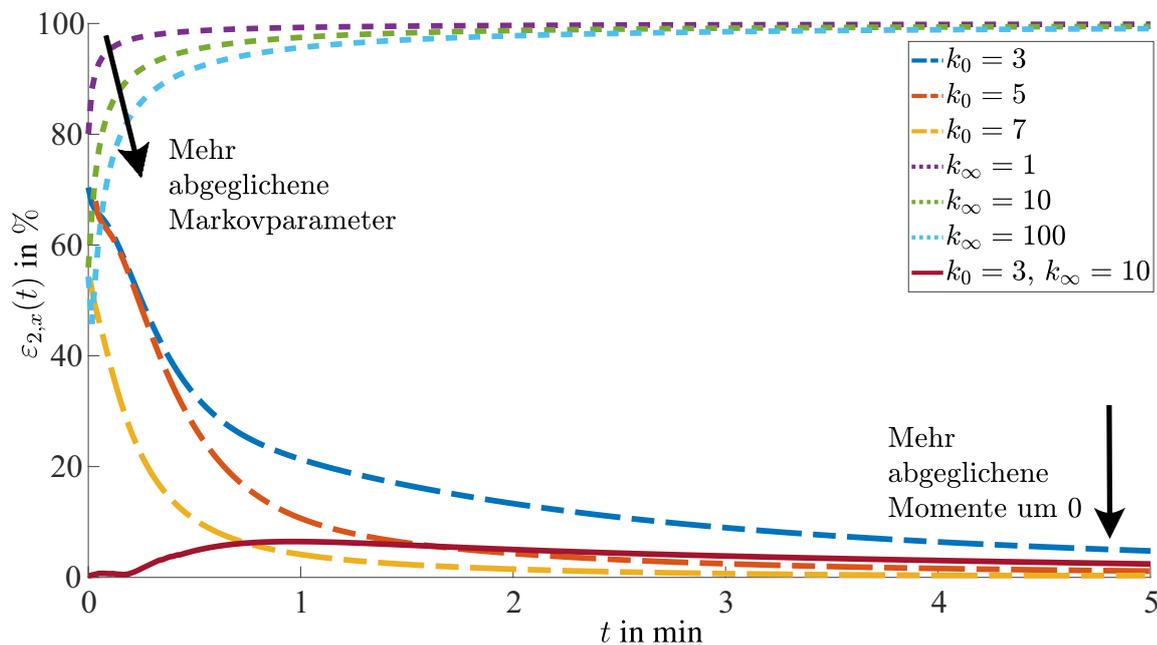


Abbildung 3.3: Relativer Zustandsfehler $\varepsilon_{2,x}(t)$ im transienten und stationären Zeitbereich der Abkühlung für verschiedene Krylov-Ordnungen k_0 und k_∞

bestimmt werden. Für große Systemordnungen ist jedoch die dafür notwendige direkte Invertierung von $(\mathbf{A} - s_0 \mathbf{I}_n)$ numerisch nicht effizient, weshalb die Invertierung in ein zu lösendes lineares Gleichungssystem überführt wird. Weiterhin konvergieren Krylovmatrizen gegen die zu den Eigenwerten λ_j von \mathbf{A} gehörenden Eigenvektoren und es können linear abhängige Spaltenvektoren (Deflation) entstehen. Eine Orthogonalisierung in jedem Iterationsschritt, wie z.B. durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens, schafft dabei Abhilfe. Der in dieser Dissertation verwendete Arnoldi-Algorithmus nach [Ant05; Sop11] berücksichtigt die auftretende Herausforderung bei der Berechnung der Projektionsmatrizen. Als Alternative kann der Lanczos-Algorithmus genutzt werden, dieser führt jedoch zu höheren Berechnungsdauern und ist daher für sehr hohe Ordnungen weniger geeignet [Wit+02].

Tangentiale Interpolation

Für Mehrgrößensysteme bedeutet die Forderung des Momentenabgleichs in Gleichung (3.38) und $\mathbf{G}(s_l) \stackrel{!}{=} \tilde{\mathbf{G}}(s_l) \forall l = 1, \dots, L$ eine Vervielfachung der Bedingungen zum Berechnen der Projektionsmatrizen je nach Anzahl der Ein- und Ausgänge $n_u n_y L$ [MG10]. Hat der Krylov-Unterraum die Stufe k , dann ergibt sich daraus für die reduzierte Ordnung des Eingangskrylov-Unterraum $q_{\text{ein}} = n_u k$ sowie $q_{\text{aus}} = n_y k$ für den Ausgangsraum. Da in dieser Dissertation besonders für das Beheizungssystem $n_u = 18$, $n_y = 12$, aber gerade auch in der Übertragung

auf industriell verwendete Systeme mit $n_u > 200$ sowie $n_y > 400$, sehr große MIMO-Systeme vorliegen, ist die Verkoppelung von Ein- bzw. Ausgangsdimension und reduzierter Ordnung problematisch. Selbiges gilt für die Eingangsmatrix der Eigendynamik, da diese nach Gleichung (2.57) zum Beispiel aus $\mu > 50$ verschiedenen Anfangsbedingungen bestehen kann. Damit wäre die Ordnung des reduzierten Systems der Eigendynamik zwangsweise ein Vielfaches von μ . Zur Entkopplung von der reduzierten Ordnung und den Ein- und Ausgangsdimensionen wird die Übertragungsfunktion tangential entlang der Richtungen $\mathbf{l}_l \in \mathbb{C}^{n_y}$, $\mathbf{r}_l \in \mathbb{C}^{n_u}$ interpoliert. Nachfolgend werden dazu die theoretischen Grundlagen nach [MG10; Ben+17a; Sop11] erläutert.

Definiton 3.6 Für $\mathbf{G}, \tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ gelten mit der **Rechtstangentialrichtung** $\mathbf{r}_l \in \mathbb{C}^{n_u}$ und der **Linkstangentialrichtung** $\mathbf{l}_l \in \mathbb{C}^{n_y}$ folgende Bezeichnungen:

- (i) Wenn $\mathbf{G}(s_l) \mathbf{r}_l = \tilde{\mathbf{G}}(s_l) \mathbf{r}_l$ gilt, heißt $\tilde{\mathbf{G}}$ **rechtstangential Interpolierende** von $\mathbf{G}(s)$ entlang der Richtung \mathbf{r}_l in s_l .
- (ii) Wenn $\mathbf{l}_l^T \mathbf{G}(s_l) = \mathbf{l}_l^T \tilde{\mathbf{G}}(s_l)$ gilt, heißt $\tilde{\mathbf{G}}$ **linkstangential Interpolierende** von $\mathbf{G}(s)$ entlang der Richtung \mathbf{l}_l in s_l .
- (iii) Wenn $\mathbf{l}_l^T \mathbf{G}(s_l) \mathbf{r}_l = \mathbf{l}_l^T \tilde{\mathbf{G}}(s_l) \mathbf{r}_l$ gilt, heißt $\tilde{\mathbf{G}}$ **bitangential Hermit-Interpolierende** von $\mathbf{G}(s)$ entlang der Richtungen \mathbf{r}_l und \mathbf{l}_l in s_l .

Diese tangentialen Richtungen werden nun verwendet, um geeignete Projektionsmatrizen \mathbf{V}, \mathbf{W} zu bestimmen. Die Berechnung wird durch folgenden Satz vorgegeben:

Satz 3.5 [MG10; Ben+17a; Sop11] Es seien \mathbf{V}, \mathbf{W} und $\tilde{\mathbf{G}}$ wie bisher. Ferner sei $s_0 \in \mathbb{C}$ kein EW von \mathbf{A} und $\mathbf{G}^{(j)}(s_0)$ bezeichne die j -te Ableitung von \mathbf{G} nach s in s_0 .

(i) Wenn

$$({}_{s_0} \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{k-1} ({}_{s_0} \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r} \in \text{colspan}(\mathbf{V}) \quad \forall k = 1, \dots, N_1, \quad (3.41a)$$

$$\text{dann gilt } \mathbf{G}^{(j)}(s_0) \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{G}}^{(j)}(s_0) \mathbf{r} \quad \forall j = 1, \dots, N_1 - 1.$$

(ii) Wenn

$$(({}_{s_0} \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-T})^{k-1} ({}_{s_0} \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-T} \mathbf{C}^T \mathbf{l} \in \text{colspan}(\mathbf{W}) \quad \forall k = 1, \dots, N_2, \quad (3.41b)$$

$$\text{dann gilt } \mathbf{l}^T \mathbf{G}^{(j)}(s_0) = \mathbf{l}^T \tilde{\mathbf{G}}^{(j)}(s_0) \quad \forall j = 1, \dots, N_2 - 1.$$

(iii) Gelten die Aussagen (i) und (ii),

$$\text{so gilt } \mathbf{l}^T \mathbf{G}^{(j)}(s_0) \mathbf{r} = \mathbf{l}^T \tilde{\mathbf{G}}^{(j)}(s_0) \mathbf{r} \quad \forall j = 1, \dots, N_1 + N_2 - 1.$$

Um mehrere tangentialen Richtungen zu berücksichtigen, können die Basen wie im vorigen Abschnitt vereinigt werden. Dabei gehören zu den allgemeinen Entwicklungsstellen s_l die Richtungen $\mathbf{r}_l, \mathbf{l}_l$. Die erhaltene, reduzierte Ordnung kann durch Multiplikation der Anzahl von Entwicklungsstellen L mit der Stufe N : $q = L \cdot N$ errechnet werden. Der Rechenaufwand des Verfahrens wird im Wesentlichen durch das Lösen eines Gleichungssystems bestimmt, weshalb dieses auch bei höheren Ordnungen gut anwendbar ist [Ant05]. Im Rahmen dieser Dissertation werden ausschließlich reelle Entwicklungsstellen aus $\{0; 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}; 0,5; 1; \infty\}$ gewählt, da diese bei empirischen Betrachtungen mit den vorliegenden Zeitkonstanten zu guten Ergebnissen führen. Allgemeine Empfehlungen zur Auswahl der Stellen sind in [GG96; Gri97; Sop11] enthalten. Ein existierendes Verfahren zur iterativen Bestimmung \mathcal{H}_2 -optimaler Entwicklungsstellen wird nachfolgend vorgestellt.

Iterative Rational Krylov Algorithm - IRKA

Zur automatischen Bestimmung geeigneter Entwicklungsstellen kann der IRKA-Algorithmus nach [FBG12] eingesetzt werden. Weitere Ausführungen basieren unter anderem auch auf [Ben+17a; Sop11]. Dabei wird über mehrere Iterationen der Approximationsfehler der Übertragungsfunktionen $\|\mathbf{G} - \tilde{\mathbf{G}}\|_{\mathcal{H}_2}$ in der \mathcal{H}_2 -Norm minimiert. Es ergibt sich ein nicht-konvexes Minimierungsproblem der Form

$$\|\mathbf{G} - \tilde{\mathbf{G}}\|_{\mathcal{H}_2} = \min_{\dim(\tilde{\mathbf{G}}_q)=q} \|\mathbf{G} - \tilde{\mathbf{G}}_q\|_{\mathcal{H}_2}. \quad (3.42)$$

Die Meier-Luenberger-Bedingung für SISO-Systeme besagt nun, dass jede Lösung $\tilde{\mathbf{G}}(s) = \tilde{\mathbf{c}}^T (s \mathbf{I}_q - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{C}$ des Optimierungsproblems (3.42) mit nur einfachen Polstellen $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_q \in \mathbb{C}$ in ihren gespiegelten Polen das Originalsystem $G(s) = \mathbf{c}^T (s \mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$ interpoliert:

$$G(-\tilde{\lambda}_k) = \tilde{G}(-\tilde{\lambda}_k), \quad G'(-\tilde{\lambda}_k) = \tilde{G}'(-\tilde{\lambda}_k) \quad \forall k = 1, \dots, q. \quad (3.43)$$

Durch eine Partialbruchzerlegung lässt sich diese Aussage auch auf MIMO-Systeme erweitern:

$$\tilde{\mathbf{G}}(s) = \sum_{k=1}^q \frac{\tilde{\mathbf{l}}_k \tilde{\mathbf{r}}_k^T}{s - \tilde{\lambda}_k} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{l}}_k \in \mathbb{C}^{n_y}, \tilde{\mathbf{r}}_k \in \mathbb{C}^{n_u}. \quad (3.44)$$

Unter der Annahme, dass $\tilde{\mathbf{G}}$ nur einfache Polstellen besitzt, gilt der Satz:

Satz 3.6 [Ben+17a; MG10] *Es seien $\tilde{\mathbf{G}}(s)$ die Lösung des Optimierungsproblems (3.42) der Ordnung q mit Polen $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_q \in \mathbb{C}$ einfacher Vielfachheit. Dann gilt*

$$\mathbf{G}(-\tilde{\lambda}_k) \tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{G}}(-\tilde{\lambda}_k) \tilde{\mathbf{r}}_k \quad (3.45a)$$

$$\tilde{\mathbf{l}}_k^T \mathbf{G}(-\tilde{\lambda}_k) = \tilde{\mathbf{l}}_k^T \tilde{\mathbf{G}}(-\tilde{\lambda}_k) \quad (3.45b)$$

$$\tilde{\mathbf{l}}_k^T \mathbf{G}'(-\tilde{\lambda}_k) \tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{l}}_k^T \tilde{\mathbf{G}}'(-\tilde{\lambda}_k) \tilde{\mathbf{r}}_k \quad \forall k = 1, \dots, q. \quad (3.45c)$$

Die notwendigen Pole $\tilde{\lambda}_k$ des reduzierten Systems sind jedoch vor der Reduktion unbekannt. Um dennoch lokal \mathcal{H}_2 -optimale Systeme zu erzeugen, kann der Iterative Rational Krylov Algorithm (IRKA) verwendet werden. In jeder Iteration wird das reduzierte System gebildet und anschließend die Entwicklungsstellen anhand des Satzes 3.6 durch Spiegelung neu gesetzt. Dafür müssen allerdings anfängliche Entwicklungsstellen übergeben werden. Unterschreitet die relative Änderung der Entwicklungsstellen eine vorgegebene Toleranz, bricht der Algorithmus ab und das zuletzt gebildete reduzierte System wird verwendet. Ein abschließender Beweis über die Konvergenzbedingungen des IRKA konnte bisher nicht erbracht werden [FBG12]. Das Konvergenzverhalten bei der Reduktion des Reifenmodells ist in Abbildung 3.4 beispielhaft dargestellt. Die Eigenbewegung konvergiert bei einer gesetzten Toleranz von $\text{tol} = 10^{-3}$ bereits nach 8 Iterationen, die Fremddynamik erst nach 12.

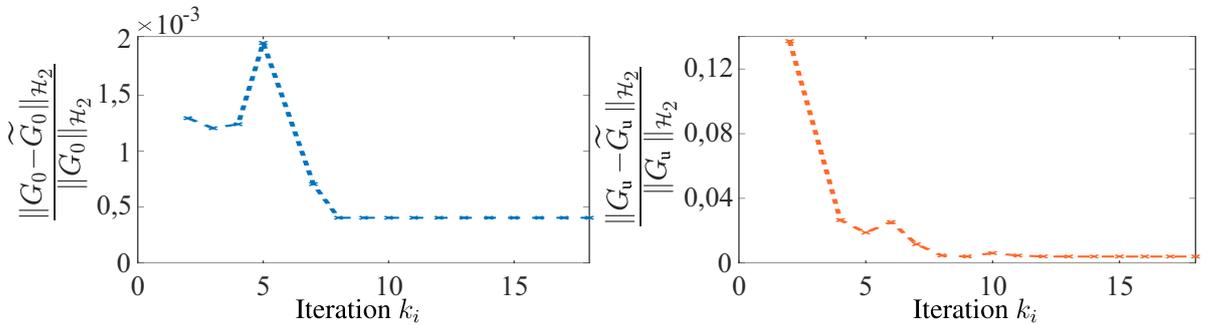


Abbildung 3.4: Beispielhafte Konvergenzentwicklung des IRKA im relativen Fehler der \mathcal{H}_2 -Norm für Eigen- und Fremddynamik mit $q_0 = q_u = 12$

Im Amplitudengang der Abbildung 3.5 lässt sich die eingangs erwähnte gleichmäßige Abdeckung des gesamten Frequenzbereichs für bereits geringe Ordnungen beobachten. Da die Wahl der Anfangsentwicklungsstellen die Konvergenzgeschwindigkeit erheblich beeinflussen kann, sollten systemtypische Stellen verwendet werden, wie zum Beispiel die q größten Eigenwerte des Ausgangssystems [Cas+19; Cas+17]. Abbildung 3.6 zeigt den Einfluss der Anfangsentwicklungsstellen auf den relativen Zustandsfehler beim Abkühlvorgang des Reifenmodells. Auch hier zeigt sich, dass die Eigendynamik mit höherem Fehler reduziert wird, allerdings ist

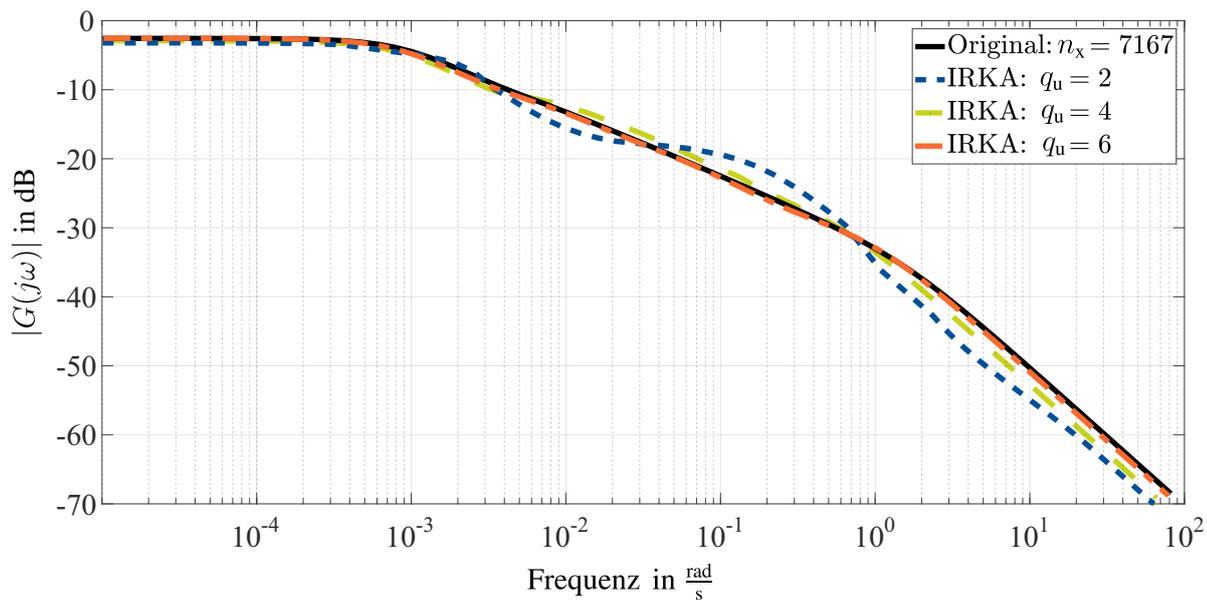


Abbildung 3.5: Beispielhaftes Bodediagramm für den Amplitudengang der durch den IRKA reduzierten Fremddynamik des linearen Abkühlmodells vom Reifen für verschieden viele Entwicklungsstellen

der Unterschied nicht so gravierend wie beim Balanced Truncation Verfahren in Abbildung 3.1.

Alle bisher vorgestellten Verfahren sind in dieser Form ausschließlich für lineare Systembeschreibungen gültig. Sie werden jedoch im Rahmen dieser Dissertation auf die im vorigen Kapitel hergeleitete nichtlineare Systemdarstellung angewendet. Im nachfolgenden Abschnitt werden zunächst bestehende Verfahren zur parametrischen Modellordnungsreduktion beschrieben und hinsichtlich ihrer Verwendbarkeit bewertet, bevor in Kapitel 4 die Anwendung der selbst entwickelten Methode auf die vorliegende Systembeschreibung erfolgt.

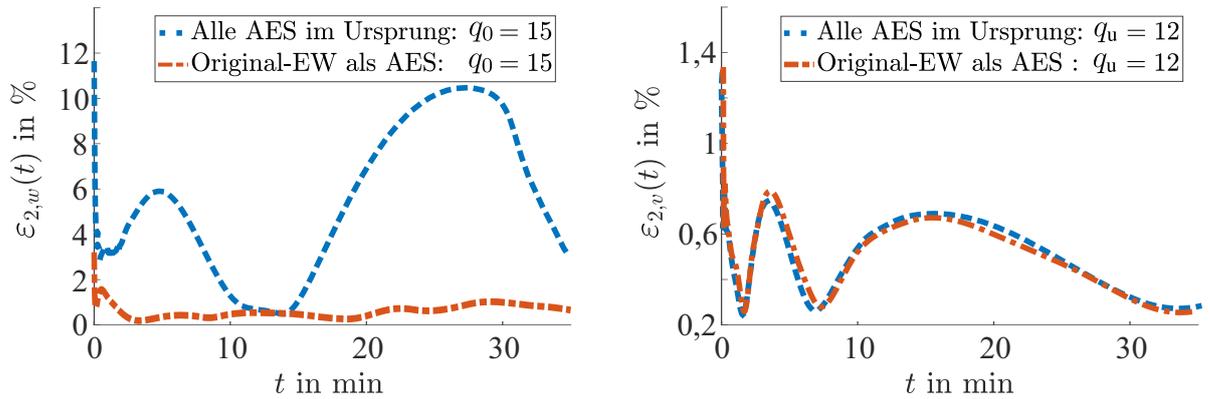


Abbildung 3.6: Relativer Zustandsfehler für Eigen- und Fremddynamik des linearen Abkühlmodells vom Reifen bei verschiedener Wahl der Anfangsentwicklungsstellen

3.5 Parametrische Modellordnungsreduktion

Eine Erweiterung der bisher beschriebenen Verfahren auf parameterabhängige oder nichtlineare Systeme stellen Methoden der parametrischen Modellordnungsreduktion dar. Ausgangspunkt für die parametrische Systemdarstellung sei die Verallgemeinerung des linear parametervarianten Systems aus Gleichung (2.44) in der Form

$$M(\mathbf{p})\dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{K}(\mathbf{p})\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) + \mathbf{Q}(\mathbf{p})\mathbf{u}(t) \quad (3.46)$$

$$\mathbf{y}(t, \mathbf{p}) = \mathbf{C}(\mathbf{p})\mathbf{x}(t, \mathbf{p}). \quad (3.47)$$

Viele der Verfahren basieren dabei auf der in dieser Dissertation gemäß Abschnitt 2.3.1 vorliegenden affinen Parameterabhängigkeit. Das Ziel ist dabei die physikalische Interpretierbarkeit der variablen Parameter trotz Reduktion der Modellordnung zu erhalten, um diese zum Beispiel im Rahmen von Identifikationsverfahren zu bestimmen. Jedoch existieren dabei unterschiedliche Herausforderungen, wodurch keine der Methoden direkt auf die in dieser Dissertation vorliegende Systembeschreibung anwendbar ist.

3.5.1 POD/POD-Greedy Algorithmus

Eine Möglichkeit die parameterabhängige Form aus Gleichung (3.46) zu reduzieren, ist eine Anpassung des POD Algorithmus [Vol11]. Dabei wird wie im linearen Fall aus Abschnitt 3.4.2 eine Menge aus Zustandsvektoren benötigt, welche jetzt zusätzlich neben J zeitlichen auch noch K parameterspezifische „snap-shots“ enthält $\mathcal{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_S] = [\mathbf{x}_{0,p_1}, \dots, \mathbf{x}_{J,p_K}]$ [Ben+17a]. Folglich ergeben sich $K(J+1)$ notwendige Lösungen des vollständigen Systems. Aufgrund der hohen Systemordnung sowie der relativ hohen Parameterzahl von bis zu $n_p = 12$ bei der

Heizplatte, ist die Konstruktion der „snap-shots“ durch Lösen des originalen Zustandsraumes nicht in vertretbarer Zeit möglich. Da die Anzahl der notwendigen Stichproben für eine gute Systemabbildung entscheidend aber nur schwer zu bestimmen ist, wurde als Erweiterung der POD-greedy Algorithmus vorgestellt [HO08]. Dieser verbessert das reduzierte Modell iterativ, in dem der am schlechtesten approximierter Parameterzusammenhang gefunden wird. Nach Gleichung (3.29) ergibt sich aus einer Iteration die Instanz POD_i . Diese wird mit Hilfe eines Gütekriteriums aus Abschnitt 3.3 bezogen auf die Parameterabbildung getestet. Es ist folglich auch ein Validierungsdatensatz notwendig, welcher verschiedene Parameterstellen abdeckt. Die Parameter werden entsprechend ihrer Abbildungsgenauigkeit sortiert und deren Abweichungen $\mathbf{x}(p_j) - \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{x}(p_j)$ spaltenweise in \mathcal{X}' eingetragen. Die neue POD-Instanz berechnet sich dann aus dem so erhaltenen \mathcal{X}' durch $\mathbf{V}' = POD_{i+1}(\mathcal{X}')$. Der Gesamtprojektor \mathbf{V}_p wird dann zusammengesetzt zu $\mathbf{V}_p = [\mathbf{V}, \mathbf{V}']$. Auf diese Weise wird solange iteriert bis die relative Fehleränderung eine gesetzte Toleranz unterschreitet. Verfahren zur Beschleunigung der Konvergenz sind in [Haa13] vorgestellt. Es ist ersichtlich, dass dieses Vorgehen zwar die Genauigkeit verbessert, jedoch wiederum eine Erhöhung von Simulationsdurchläufen des vollständigen Modells nach sich zieht. Dennoch gilt POD als Mittel der Wahl bei einer Vielzahl von Anwendungen wie zum Beispiel der Modellierung von Parameterunsicherheiten [SH06], in Zusammenhang mit Machine Learning zur Verbesserung der Parameterabhängigkeiten [Swi+19] und im Bereich der strömungsmechanischen Analysen (CFD) [Ast04]. Auf Grund der Betrachtungen von Zustandsstichproben zeigen POD-basierte Verfahren vor allem bei Gütekriterien im Zeit- als im Frequenzbereich gute Ergebnisse. Während der klassische POD Algorithmus den mittleren Fehler reduziert, kann POD-greedy gezielt zur Verringerung des maximalen Fehlers verwendet werden. Besonders oft wird POD im Zusammenspiel mit der nachfolgenden Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) zur Ordnungsreduktion nichtlinearer Systeme verwendet, bei denen eine gute Zustandsapproximation von Bedeutung ist.

3.5.2 Discrete-Empirical-Interpolation-Method

Eine mit der POD verwandte Methode stellt die Discrete Empirical Interpolation Method (DEIM) nach [CS10] dar. Der Vorteil liegt in der direkten Anwendbarkeit auf nichtlineare Systeme und parametrischer MOR [AHS14]. Die Vorgehensweise wird anhand der Gleichung (2.48), wie sie in dieser Dissertation zu Grunde liegt, demonstriert. Die allgemeine Systembeschreibung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{g}_x(\mathbf{x}(t)) \quad (3.48)$$

enthält zusätzlich zum linearen Anteil die nichtlineare, zustandsabhängige Funktion $\mathbf{g}_x : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$. Ziel im Rahmen der Ordnungsreduktion durch DEIM ist die Projektion

auf einen kleineren Unterraum $\Psi \in \mathbb{R}^{n_x \times q}$, sodass gilt $\mathbf{g}_x \approx \Psi \mathbf{d}$ mit den Amplituden $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^q$. Die Lösbarkeit dieses überbestimmten Zusammenhangs wird durch die Multiplikation mit einer binären Matrix $\mathbf{P}_d \in \mathbb{R}^{n_x \times q}$ hergestellt. Damit werden lediglich q Zeilen oder auch Interpolationspunkte der nichtlinearen Funktion benötigt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_d^T \mathbf{g}_x &= \mathbf{P}_d^T \Psi \mathbf{d} \\ \mathbf{d} &= (\mathbf{P}_d^T \Psi)^{-1} \mathbf{P}_d^T \mathbf{g}_x \\ \mathbf{g}_x &\approx \Psi (\mathbf{P}_d^T \Psi)^{-1} \mathbf{P}_d^T \mathbf{g}_x. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Der Unterraum Ψ wird dabei durch POD aus einem Satz von „snap-shots“ der nichtlinearen Funktion \mathbf{g}_x erstellt. Der DEIM Algorithmus kann jedoch bei Diskretisierungen mit finiten Elementen unvorteilhaft sein, wenn die Anzahl an Interpolationspunkten, ausgewählt durch \mathbf{P}_d , zu hoch ist [TR13]. Dies ist insbesondere bei Strukturanalysen oder temperaturabhängigen Materialparametern der Fall, da diese nichtlinearen Funktionen jeden einzelnen Meshknoten betreffen. Um diesem Problem zu begegnen, kann die nichtlineare Funktion elementbezogen aufgestellt werden, bevor das Knotengleichungssystem zusammengesetzt wird (Unassembled DEIM). Diese Vorgehensweise zieht allerdings deutlich höhere Berechnungsdauern nach sich [TR13].

3.5.3 Interpolative Verfahren

Eine Kategorie von Verfahren zur parametrischen Modellordnungsreduktion kann durch die Interpolation zwischen einzelnen reduzierten Zustandsräumen charakterisiert werden [Ben+17a]. Bei der sogenannten Matrixinterpolation [Pan+10] werden zunächst Parameterstellen p_1, \dots, p_K ausgewählt und das originale System an jeder dieser Stellen linearisiert und mit separaten Projektionsmatrizen reduziert. Damit erhält man K unterschiedliche Realisierungen $\Sigma_j = (\tilde{\mathbf{A}}_j, \tilde{\mathbf{B}}_j, \tilde{\mathbf{C}}_j, \tilde{\mathbf{D}}_j, \tilde{\mathbf{E}}_j)$, welche durch die jeweiligen Projektionsmatrizen $\mathbf{V}_j, \mathbf{W}_j$ konstruiert werden. Anschließend werden diese über Transformationsmatrizen $\mathbf{S}_j, \mathbf{T}_j \in \mathbb{R}^{q \times q}$ und Gewichte Ω zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{p}) &= \sum_{j=1}^K \Omega_j(\mathbf{p}) \mathbf{S}_j \tilde{\mathbf{E}}_j \mathbf{T}_j^{-1}, & \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p}) &= \sum_{j=1}^K \Omega_j(\mathbf{p}) \mathbf{S}_j \tilde{\mathbf{A}}_j \mathbf{T}_j^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}) &= \sum_{j=1}^K \Omega_j(\mathbf{p}) \mathbf{S}_j \tilde{\mathbf{B}}_j, & \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{p}) &= \sum_{j=1}^K \Omega_j(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{C}}_j \mathbf{T}_j^{-1}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die Transformationen werden aus den lokalen Projektoren sowie einer Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n_x \times q}$ konstruiert: $\mathbf{S}_j = (\mathbf{W}_j^T \mathbf{R})^{-1}$, $\mathbf{T}_j = \mathbf{R}^T \mathbf{V}_j$. Die Matrix \mathbf{R} ergibt sich aus der SWZ von $[\Omega_1(\mathbf{p}) \mathbf{V}_1, \dots, \Omega_K(\mathbf{p}) \mathbf{V}_K]$. Vorteil des Verfahrens ist die einfache Implementierbarkeit und Überlagerung durch Superposition. Allerdings müssen im Vorfeld feste, bekannte Parameterstützstellen definiert werden und weiterhin kann bei höheren Parameterzahlen keine effiziente Reduktion erfolgen. Da die reduzierten Matrizen vor der Simulation interpoliert werden müssen, kann der Speicherbedarf durch die erhöhte Anzahl an zu verarbeitenden Matrizen kritisch für die Moduleinbindung auf echtzeitfähigen Systemen sein. Neben den Matrizen ist auch eine Interpolation der Übertragungsfunktionen möglich [BB09]. Dabei werden Lagrange Polynome L_j verwendet, um zwischen den lokalen Übertragungsfunktionen $\tilde{\mathbf{G}}_j(s) = \tilde{\mathbf{C}}_j(s \tilde{\mathbf{E}}_j - \tilde{\mathbf{A}}_j)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_j$ zu interpolieren:

$$\tilde{\mathbf{G}}(s, \mathbf{p}) = \sum_{j=1}^K L_j(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{G}}_j(s). \quad (3.51)$$

Bei dieser Methode können jedoch keine Zustandsverteilungen bestimmt werden und sie ist nicht anwendbar auf mehrere unabhängige Parameter [BB09]. Mit Berücksichtigung tangentialer Interpolationsrichtungen, welche den Gradienten bzw. die Hessematrix der originalen Übertragungsfunktion bezogen auf die Parameter verwenden, und \mathcal{H}_2 -optimale Entwicklungsstellen, die mit dem IRKA bestimmt werden, kann eine stückweise, tangentiale \mathcal{H}_2 Interpolation vorgenommen werden [Bau+11]. Weiterhin kann durch Taylorreihenentwicklung im Rahmen eines Momentenabgleichs nach Satz 3.2 ein Multi-Parameter Moment Matching durchgeführt werden [Dan+04; Wei+99]. Eine besondere Herausforderung liegt dabei vor allem in der Wahl geeigneter frequenz- und parameterabhängiger Entwicklungsstellen, was für eine Vielzahl von Parametern äußerst kritisch ist. Weiterhin erfolgt die Interpolation vor der Reduktion, was die Modellierung zeit- oder zustandsabhängiger Parameter ausschließt.

3.5.4 Cross-Gramian Verfahren

Diese Methode bestimmt die Projektionsmatrizen durch SWZ der parameterabhängigen Cross-Gramian Matrix $\mathbf{W}_x(p_k)$ nach [HO14; Ben+17a]

$$\mathbf{W}_x(p_k) = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}|_{p_k} t} \mathbf{B}|_{p_k} \mathbf{C}|_{p_k} e^{\mathbf{A}|_{p_k} t} dt. \quad (3.52)$$

Diese wird allerdings nicht durch das aufwendige Lösen der Sylvestergleichungen bestimmt, sondern stattdessen empirisch über Matrizen aus „snap-shots“ von Impulsantworten an K

diskreten Parameterstellen ermittelt. Es entsteht eine über alle Parameterpunkte gemittelte Matrix

$$\overline{\mathbf{W}}_x = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{W}_x(p_k). \quad (3.53)$$

Das Verfahren ist dabei ähnlich zur parameterabhängigen POD aus Abschnitt 3.5.1. Die Zusammenstellungen ergeben sich zu $\mathcal{X}_\delta(p_k) = [\mathbf{x}(t_0, p_k), \dots, \mathbf{x}(t_J, p_k)]$, $\mathcal{X}_\delta(p_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times (J+1)}$ und den adjungierten „snap-shots“ $\hat{\mathcal{X}}_\delta(p_k) = [\hat{\mathbf{x}}(t_0, p_k), \dots, \hat{\mathbf{x}}(t_J, p_k)]$, $\hat{\mathcal{X}}_\delta(p_k) \in \mathbb{R}^{n_x \times (J+1)}$ mit

$$\mathbf{x}(t, p_k) = \int_0^t e^{A|_{p_k} \tau} \mathbf{B}|_{p_k} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad \hat{\mathbf{x}}(t, p_k) = \int_0^t e^{(A|_{p_k})^T \tau} (\mathbf{C}|_{p_k})^T \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.54)$$

Mit der Zeitdifferenz Δt ergibt sich die approximierte Cross-Gramian Matrix $\hat{\mathbf{W}}_x$:

$$\overline{\mathbf{W}}_x \approx \hat{\mathbf{W}}_x = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Delta t \mathcal{X}_\delta(p_k) \hat{\mathcal{X}}_\delta(p_k)^T. \quad (3.55)$$

Der Projektor der Ordnungsreduktion \mathbf{V} folgt dann aus der SWZ

$$\text{SWZ}(\hat{\mathbf{W}}_x) = \mathbf{V}_1 \mathbf{S} \mathbf{V}_2 \quad (3.56)$$

und wird gesetzt, indem die q linken Spalten von \mathbf{V}_1 extrahiert werden. Analog zum Abschnitt 3.5.1 wird $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ gesetzt. Die Approximationsgüte im zeitlichen Bereich ist zu vergleichen mit POD, da ebenfalls Zeitsignale zur Konstruktion der Projektoren genutzt werden. Durch die Berücksichtigung der Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitseigenschaften wird im Allgemeinen aber auch eine höhere Übereinstimmung im Frequenzbereich erreicht. Großer Nachteil der Methode ist die Beschränkung auf rein quadratische Systeme, weshalb eine Anwendung für die hier betrachteten Systeme nicht in Frage kommt.

Zusammengefasst sind die in Abschnitt 3.5 vorgestellten Verfahren zur Reduktion parametrischer Systeme nicht geeignet für die in Kapitel 2 aufgestellte Systembeschreibung, weshalb im nachfolgenden Kapitel eine eigene Methode zur performanten Simulation thermischer Systeme beschrieben wird. Dabei werden die linearen Verfahren aus Abschnitt 3.4 verwendet, um die Projektionsmatrizen anhand des linearen Systemteils zu bestimmen. Die Korrekturfunktion wird anschließend mit den erhaltenen Matrizen projiziert.

4 Performante Ausführung der thermischen Simulation

Anknüpfend an die bereits existierenden Methoden zur Reduktion der Modellordnung aus dem vorigen Kapitel wird im Folgenden die in Kapitel 2 erarbeitete vollständige, thermische Systembeschreibung mit Hilfe eines neu entwickelten Verfahrens in der Ordnung reduziert und in eine performant zu lösende Darstellung überführt (Abschnitt 4.1). Dabei werden verschiedene Ansätze der bestehenden Verfahren verwendet und kombiniert, sodass etwaige Nachteile der Reduktionsverfahren kompensiert werden können. Auf diese Weise kann die neue Methode für linear parametervariante Systeme sehr hoher Ordnungen mit einer Vielzahl variierender Parameter verwendet werden. Anschließend wird in Abschnitt 4.2 die numerische Lösung der reduzierten Systemrealisierung durch verschiedene zeitliche Diskretisierungsverfahren beschrieben. Einstellungen und Wahl der Lösungsalgorithmen werden hinsichtlich Berechnungsdauer und Approximationsgüte untersucht.

4.1 Ordnungsreduktion der vorliegenden Systembeschreibung

Die beiden Systemrealisierungen Σ_0 und Σ_u aus (2.59a) und (2.59b) stellen den Ausgangspunkt für die Reduktionsverfahren dar. Da die Realisierungen Σ_0 und Σ_u in einen rein linearen Anteil und eine Korrekturfunktion g aufgespalten wurden, liegt eine Systembeschreibung wie auch beim DEIM Algorithmus in Gleichung (3.48) zu Grunde. Die Projektionsmatrizen werden für den linearisierten Systemteil durch Verfahren der klassischen linearen Modellordnungsreduktionen bestimmt. Dabei muss auf Grund der hohen Systemordnung für Balanced Truncation auf eine Approximation der Gram'schen Matrizen durch den ADI-Algorithmus zurückgegriffen werden, wodurch der Erhalt von Systemeigenschaften nicht mehr gewährleistet ist (vgl. Abschnitt 3.4.1). Weiterhin anwendbar sind die auf Krylov-UR basierenden Verfahren Blockkrylov, tangentielle Interpolation sowie IRKA. POD Verfahren werden auf Grund des hohen Rechenaufwandes bei der Lösung des unreduzierten Systems zur Generierung von „snap-shots“ nicht verwendet. Die genutzten linearen Verfahren werden in den folgenden Abschnitten hinsichtlich der formulierten Gütekriterien aus Abschnitt 3.3 untersucht und miteinander verglichen.

4.1.1 Anwendung auf linear parametervariante Systeme

Nach der Bestimmung der Projektionsmatrizen müssen diese auch auf die Korrekturfunktion $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_{\text{umg}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ aus Gleichung (2.48) angewendet werden. Unabhängig von der Zerlegung in Eigen- und Fremddynamik gilt dafür allgemein gemäß Gleichung (3.2):

$$\tilde{\Sigma}_{\text{nl}} : \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t) + \mathbf{W}^T \mathbf{g}(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(t), \mathbf{T}_U(t)), & \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Trotz der Multiplikation mit den Projektoren muss für die Evaluation von \mathbf{g} der reduzierte Zustandsvektor erst in den originalen Zustandsraum rücktransformiert werden, um dann wieder reduziert zu werden. In dieser Form liegt folglich keine reduzierte Systemdarstellung im eigentlichen Sinne mehr vor [Phi03], da der höchste Berechnungsaufwand für den Schritt immer noch bei $\mathcal{O}(n_x^2)$ liegt. Ähnlich zu Gleichung (3.49) beim DEIM-Algorithmus wurde durch die Binärmatrix \mathbf{H} in Gleichung (2.51) die Anzahl der Zustandsgleichungen verringert, unter der Annahme 2.5, wonach die Anzahl der Oberflächenzustände deutlich kleiner als die Gesamtzahl an Zuständen ist. Die so erhaltene Funktion $\mathbf{g}_\alpha : \mathbb{R}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}^{n_{\text{nl}}} \times \mathbb{R}^{n_{\text{umg}}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ erfordert nur noch $\mathcal{O}(n_x n_{\text{nl}})$ Operationen bei der aufwendigsten Berechnung innerhalb der Funktion. Bei der Anwendung der Ordnungsreduktion ergeben sich approximierte Oberflächenzustände

$$\mathbf{x}_{\text{nl}} = \mathbf{H}^T \mathbf{x} \approx \hat{\mathbf{x}}_{\text{nl}} = \mathbf{H}^T \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{nl}}}, \quad (4.2)$$

sodass sich nach [Fra+18] die reduzierte, stückweise konstante Korrekturfunktion

$$\tilde{\mathbf{g}}_i = \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{H}}_{\tilde{\mathbf{H}}} [\mathbf{A}_\alpha \odot \mathbf{f}_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \hat{\mathbf{x}}_{\text{nl}}(\tau_i))] \hat{\mathbf{x}}_{\text{nl}}(\tau_i) \quad (4.3)$$

$$+ \tilde{\mathbf{H}} [\mathbf{B}_\alpha \odot \mathbf{f}_{\alpha,Q}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \hat{\mathbf{x}}_{\text{nl}}(\tau_i))] \mathbf{T}_U(\tau_i) \quad (4.4)$$

ergibt. Die Matrix $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{q \times n_{\text{nl}}}$ kann vor der eigentlichen Simulation bestimmt werden, sodass sich der maximale Berechnungsaufwand auf $\mathcal{O}(n_{\text{nl}}^2)$ verringert. Eine zusätzliche Verringerung des Rechenaufwands kann durch die geschickte Wahl von Randelementen beim Aufprägen der temperaturabhängigen Randbedingungen erfolgen. Wie in Abschnitt 2.3.3 beschrieben liegt die Matrix \mathbf{A}_α statt einer dünnbesetzten Bandstruktur als Diagonalmatrix vor, wenn der WÜK knoten- anstatt elementspezifisch gewählt wird. Durch Extraktion der Diagonalelemente ergibt sich der Vektor $\mathbf{a}_\alpha = \text{diag}(\mathbf{A}_\alpha)$, $\mathbf{a}_\alpha \in \mathbb{R}^{n_{\text{nl}}}$. Die Funktion der WÜK bildet damit nur

noch in eine Dimension ab $\mathbf{f}_\alpha^* : \mathbb{R}^{n_\alpha} \times \mathbb{R}^{n_{nl}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{nl}}$. Damit und aus der Assoziativität des Hadamardproduktes folgt für die Korrekturfunktion

$$\tilde{\mathbf{g}}_i = \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{H}}_{\tilde{\mathbf{H}}} [\mathbf{a}_\alpha \odot \mathbf{f}_\alpha^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \hat{\mathbf{x}}_{nl}(\tau_i)) \odot \hat{\mathbf{x}}_{nl}(\tau_i)] \quad (4.5)$$

$$+ \tilde{\mathbf{H}} [\mathbf{B}_\alpha \odot \mathbf{f}_{\alpha,Q}^*(\mathbf{p}_\alpha^*, \hat{\mathbf{x}}_{nl}(\tau_i))] \mathbf{T}_U(\tau_i) \quad (4.6)$$

mit dem nun verringerten maximalen Rechenaufwand $\mathcal{O}(q n_{nl})$. Eine weitere Reduktion kann durch das Zusammenfassen von kleinen Oberflächenbereichen erreicht werden. So wird zum Beispiel der Einfluss der konvektiven Randbedingungen eines Knotens auf seine Nachbarn übertragen, wenn diese innerhalb einer geometrischen Nähe liegen. Mit diesem Schritt findet eine Anpassung der Oberflächendiskretisierung bei der Berechnung des temperaturabhängigen Teils statt, ohne das Mesh bzw. die Ordnungsreduktion zu ändern. Je nach Wärmeleitfähigkeit des betrachteten Oberflächenmaterials führt diese Anpassung jedoch zu unterschiedlichen Approximationsfehlern. So führen geringe Leitfähigkeiten zu hohen Temperaturgradienten an der Oberfläche, was die Zusammenfassung großer Teilgebiete einschränkt.

Die Berücksichtigung von Materialparametern in den ordnungsreduzierten Modellen basiert auf der affinen Struktur der numerischen Elementmatrizen aus den Gleichungen (2.35), (2.36) und wurde in [Fra+20] publiziert. Die Projektoren werden anhand einer Parameterstützstelle $\hat{\mathbf{p}} \in \mathcal{P}$ berechnet, welche als initialer Arbeitspunkt festgelegt wird. Dafür werden die Materialparameter aus Tabellenwerten abgelesen. Die reduzierten Matrizen ergeben sich dann durch die Kompensation der Abweichungen vor der Simulation aber ohne erneutes Durchführen der zeitaufwendigen Projektionsberechnung:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}|_{\hat{\mathbf{p}}_{c\rho}, \hat{\mathbf{p}}_\lambda} - \mathbf{W}^T \left[\frac{\sum_{j=1}^{n_{\text{comp}}} \mathbf{K}_{\lambda,j} \cdot (p_{\lambda,j} - \hat{p}_{\lambda,j})}{\sum_{j=1}^{n_{\text{comp}}} \mathbf{M}_{c\rho,j} \cdot (p_{c\rho,j} - \hat{p}_{c\rho,j})} \right] \mathbf{V}, \quad (4.7)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}|_{\hat{\mathbf{p}}_{c\rho}} + \mathbf{W}^T \left[\frac{\hat{\mathbf{Q}}}{\sum_{j=1}^{n_{\text{comp}}} \mathbf{M}_{c\rho,j} \cdot (p_{c\rho,j} - \hat{p}_{c\rho,j})} \right]. \quad (4.8)$$

Die Matrizen in der Korrekturfunktion der zustandsabhängigen Parameter verändern sich zu

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha|_{\hat{\mathbf{p}}_{c\rho}} - \mathbf{H}^T \left[\frac{\mathbf{K}_R|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=1)}}{\sum_{j=1}^{n_{\text{comp}}} \mathbf{M}_{c\rho,j} \cdot (p_{c\rho,j} - \hat{p}_{c\rho,j})} \right] \mathbf{H}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{B}_\alpha|_{\hat{\mathbf{p}}_{c\rho}} - \mathbf{H}^T \left[\frac{\mathbf{Q}_\alpha|_{(\hat{\alpha}_{\text{tot}}=1)}}{\sum_{j=1}^{n_{\text{comp}}} \mathbf{M}_{c\rho,j} \cdot (p_{c\rho,j} - \hat{p}_{c\rho,j})} \right]. \quad (4.10)$$

Durch die Verwendung der Projektoren \mathbf{W} , \mathbf{V} , welche durch ein an $\hat{\mathbf{p}}$ linearisiertes System

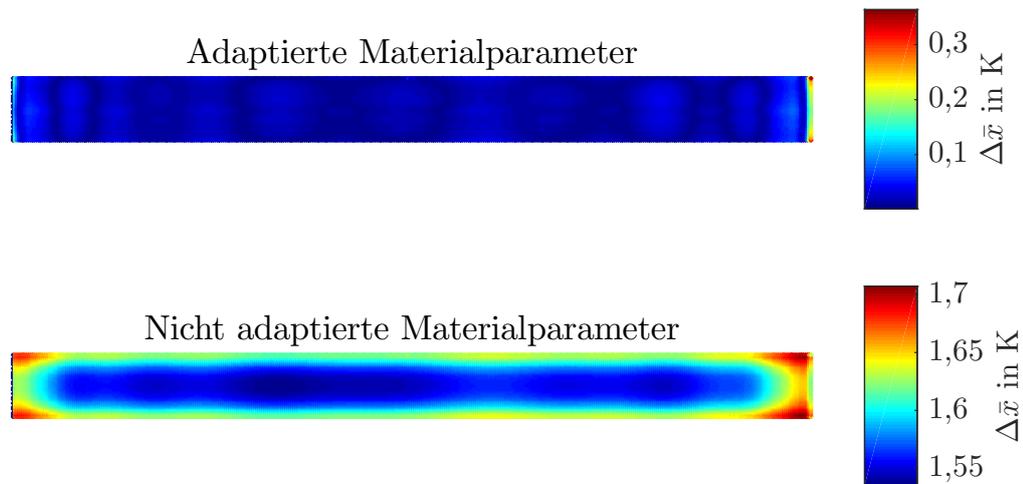


Abbildung 4.1: Verteilung der zeitlich gemittelten Zustandsfehler mit und ohne Adaption der Materialparameter bei gleichzeitiger 10 % Schwankung [Fra+20]

berechnet wurden, treten erwartungsgemäß Abweichungen auf. Zur Modellierung von kleinen Materialparameterschwankungen, wie sie bspw. bei der Produktion von Gummimischungen auftreten, ist der Ansatz aber geeignet [Qi+16]. Für den Gummiprüfkörper zeigt Abbildung 4.1 die Auswirkungen von Materialschwankungen um 10% bezogen auf die zeitlich gemittelte Zustandsverteilung eines beispielhaften Heiz- und Abkühlprozesses. Wird lediglich mit dem nicht adaptierten, reduzierten Modell simuliert, zeigt sich im Vergleich zum vollständigen Modell mit richtigen Parametern eine Abweichung von 1,5 – 1,7 K. Mit durchgeführter Adaption des reduzierten Modells gemäß den vorigen Gleichungen liegen die Abweichungen trotz Beibehalten des Projektors im Wesentlichen unter 0,1 K. Inwieweit sich abweichende Materialparameter im Prüfkörpermodell korrigieren lassen, ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Dort zeigt sich für verschiedene Grundmaterialien (Stahl, Kunststoffmischung, Kautschukmischung) eine gute Korrekturmöglichkeit der Parameter über kleine Abweichungen hinaus. Die Graphen zeigen den Verlauf des zeitlich und örtlich gemittelten Zustandsfehlers $\Delta^{\text{RMS}} \bar{x}$ an mit eingefärbtem Toleranzband zur Angabe des minimalen bzw. maximalen Zustandsfehlers im Vergleich zum Originalmodell. Für die Heizplatte wurden die Wärmeübergänge zwischen Isolation und Heizplatte $\lambda_{\text{I-HP}}^{\text{HP}}$ und Heizpatronen und Heizplatte $\lambda_{\text{H-HP}}$ sowie die unbekannte Zusammensetzung der Heizpatronen $\lambda_{\text{H}}^{\text{HP}}$ und $c\rho_{\text{H}}^{\text{HP}}$ als zu bestimmende Materialparameter ausgewählt. Die Auswirkungen von Schwankungen bei angepassten und unangepasstem Modell sind in Abbildung 4.3 gezeigt. Die Ersatzwärmeleitfähigkeit der Heizpatronen zeigt wenig Einfluss auf den Fehler in der Zustandsabbildung und Adaptionen führen dementsprechend kaum zu Verbesserungen. Die übrigen Parameter haben unangepasst großen Einfluss auf den

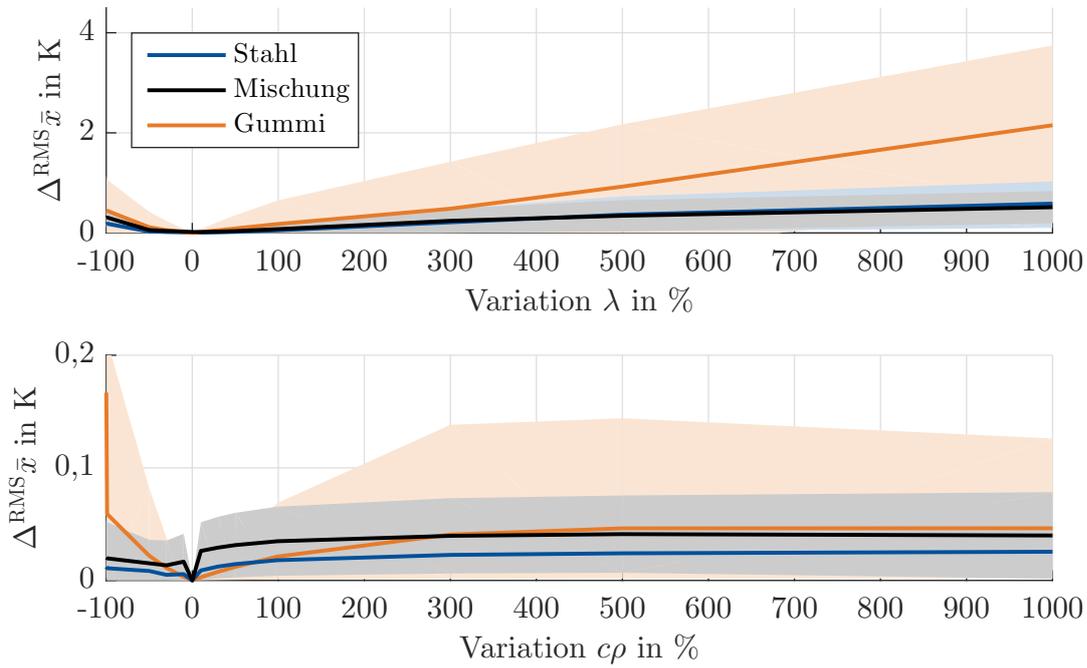


Abbildung 4.2: Anpassungsmöglichkeiten der Materialparameter der Prüfkörpergeometrie bei verschiedenen Werkstoffen [Fra+20]

Zustandsfehler, lassen sich jedoch gut korrigieren ohne eine erneut durchgeführte MOR. Insbesondere bei der Identifikation dieser unbekannt Parameter, dargestellt in Kapitel 5.1, wird der Vorteil der performanten Adaption der reduzierten Modelle durch das iterative Lösen von Optimierungsproblemen deutlich. Nach den Parameteranpassungen ergeben sich die folgenden Realisierungen:

$$\tilde{\Sigma}_0 : \left\{ \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{w}}} &= \tilde{\mathbf{A}}_0 \tilde{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{X}}_0 \boldsymbol{\gamma} + \tilde{\mathbf{g}}_{0,i}(\mathbf{p}_\alpha^*, \hat{\mathbf{x}}_{\text{nl}}(\tau_i), \mathbf{T}_U(\tau_i)), & \tilde{\mathbf{w}}_0 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \quad (4.11a)$$

$$\tilde{\Sigma}_u : \left\{ \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{v}}} &= \tilde{\mathbf{A}}_u \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{g}}_{u,i}(\mathbf{p}_\alpha^*, \hat{\mathbf{x}}_{\text{nl}}(\tau_i), \mathbf{T}_U(\tau_i)), & \tilde{\mathbf{v}}_0 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \right. \quad (4.11b)$$

mit den Dynamik spezifischen Reduktionen:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{nl}} = \tilde{\mathbf{H}}_0^* \tilde{\mathbf{w}} + \tilde{\mathbf{H}}_u^* \tilde{\mathbf{v}}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_0^* = \mathbf{H} \mathbf{V}_0, \quad \tilde{\mathbf{H}}_u^* = \mathbf{H} \mathbf{V}_u, \quad (4.12a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{W}_0^T \mathbf{H}, \quad \tilde{\mathbf{H}}_u = \mathbf{W}_u^T \mathbf{H}, \quad (4.12b)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_u = \mathbf{W}_u^T \mathbf{A} \mathbf{V}_u, \quad \tilde{\mathbf{A}}_0 = \mathbf{W}_0^T \mathbf{A} \mathbf{V}_0, \quad (4.12c)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{W}_0^T \mathbf{X}_0, \quad \tilde{\mathbf{B}}_u = \mathbf{W}_u^T \mathbf{B}. \quad (4.12d)$$

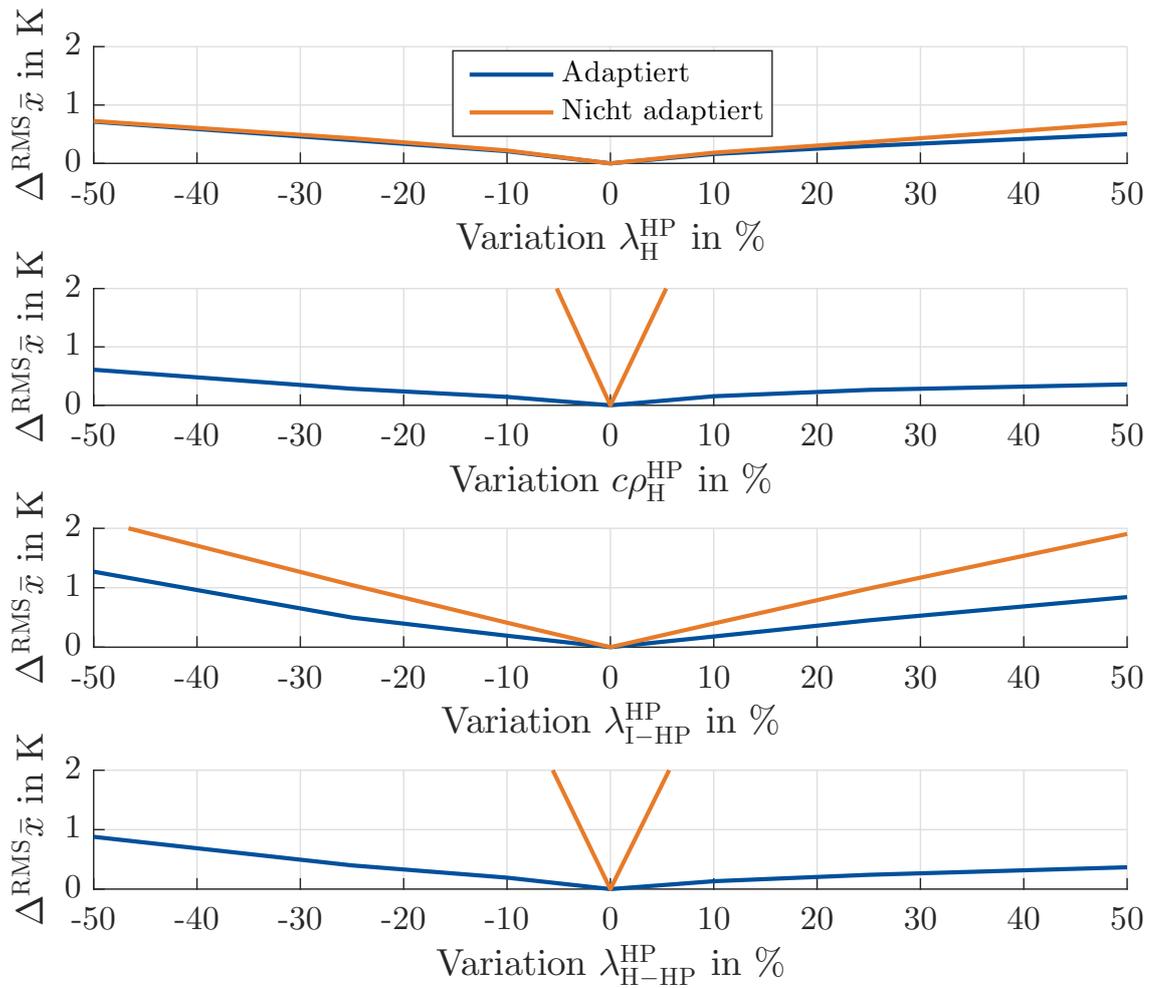


Abbildung 4.3: Mittlerer Zustandsfehler bei adaptierten und nicht adaptierten Parameterschwankungen im Material und bei Wärmeübergängen der Heizplatte [Fra+20]

4.1.2 Simulative Analysen der Verfahren zur Reduktion der Modellordnung

Der durch die Modellordnungsreduktion bedingte Informationsverlust sowie die Abweichungen durch Vereinfachungen der Korrekturfunktion, können durch eine Referenzlösung des Originalsystems quantifiziert werden. Thermische transiente Analysen mit der finite Elemente Software ANSYS Mechanical[®] werden dafür zu Grunde gelegt. Die für lineare Systeme geeigneten Reduktionsalgorithmen Balanced Truncation sowie die Krylov-Methoden werden mit der Matlab[®] sssMOR-Toolbox aus [Cas+17; Cas+19] durchgeführt. Zur Untersuchung der Verfahren wird auf Grund der komplexen Geometrie das Modell des Reifenquerschnitts gewählt. Ferner liegt in der Prozesssimulation ein Aufheiz- und Abkühlvorgang vor, was die Berücksichtigung von inhomogenen Anfangsbedingungen erfordert. Das Originalsystem des Reifens umfasst $n_{x,R} = 7.167$ Zustände. Eine Heiztemperatur von $T_h = 170^\circ\text{C}$ wird über $t_h = 10$ min eingestellt. Anschließend erfolgt über $t_c = 35$ min der Abkühlvorgang an konstanter Umgebungstemperatur von $T_{\text{amb}} = 28^\circ\text{C}$. Da der Reifen sich während des Heizprozesses vollständig umschlossen in einer Heizpresse befindet, liegen keine temperaturabhängigen Randbedingungen vor, woraus eine rein lineare Systembeschreibung folgt. Da die Reduktion eines linearen Systems keine Neuerung im Vergleich zum Stand der Technik darstellt, beziehen sich die nachfolgenden Untersuchungen auf die Simulation des anschließenden Abkühlvorgangs. Die Anfangstemperaturverteilung der Abkühlsimulation ergibt sich aus der inhomogenen Temperaturverteilung nach dem Aufheizen und wird mit dem expliziten Eulerverfahren und einer Zeitschrittweite von 0,1 s berechnet. In den folgenden Abschnitten werden die Verfahren Balanced Truncation sowie die Krylov-Methoden hinsichtlich der Gütekriterien bei Anwendung auf die Systeme aus dem vorigen Abschnitt miteinander verglichen.

Analyse des balancierten Abschneidens am Abkühlmodell des Reifens

Zunächst wird die rein lineare Realisierung des Abkühlmodells anhand BT für große Systeme mit approximierten Gram'schen Matrizen reduziert. Die reduzierte Ordnung kann dabei anhand einer a-priori Fehlerschranke festgelegt werden. Abbildung 4.4 zeigt den relativen Zustandsfehler $\varepsilon_{2,x}$ für die lineare Eigen- und Fremddynamik in Abhängigkeit der jeweiligen reduzierten Dimensionen und der verstrichenen Abkühlzeit t . Für zu kleine Ordnungen $q < 10$ zeigt sich neben großen Abweichungen zu Beginn auch ein deutlicher Unterschied in der Approximation des stationären Zustands. Die Autoren [Har02; BMS05] stellen dafür verschiedene Untersuchungen und Verbesserungen vor, um die stationäre Genauigkeit von BT bei niedrigen Ordnungen zu erhöhen. Die örtliche Fehlerverteilung über alle Simulationszeitschritte gemittelt $\Delta \bar{x} := \frac{1}{m_t} \sum_{j=1}^{m_t} |\mathbf{x}(t_j) - \tilde{\mathbf{x}}(t_j)|$ ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Die Abweichungen in der reduzierten Eigenbewegung sind dabei deutlich größer, sodass eine höhere Modellordnung q_0 erforderlich ist. Für die hier gewählten Ordnungen liegen die gemittelten Zustandsfehler der

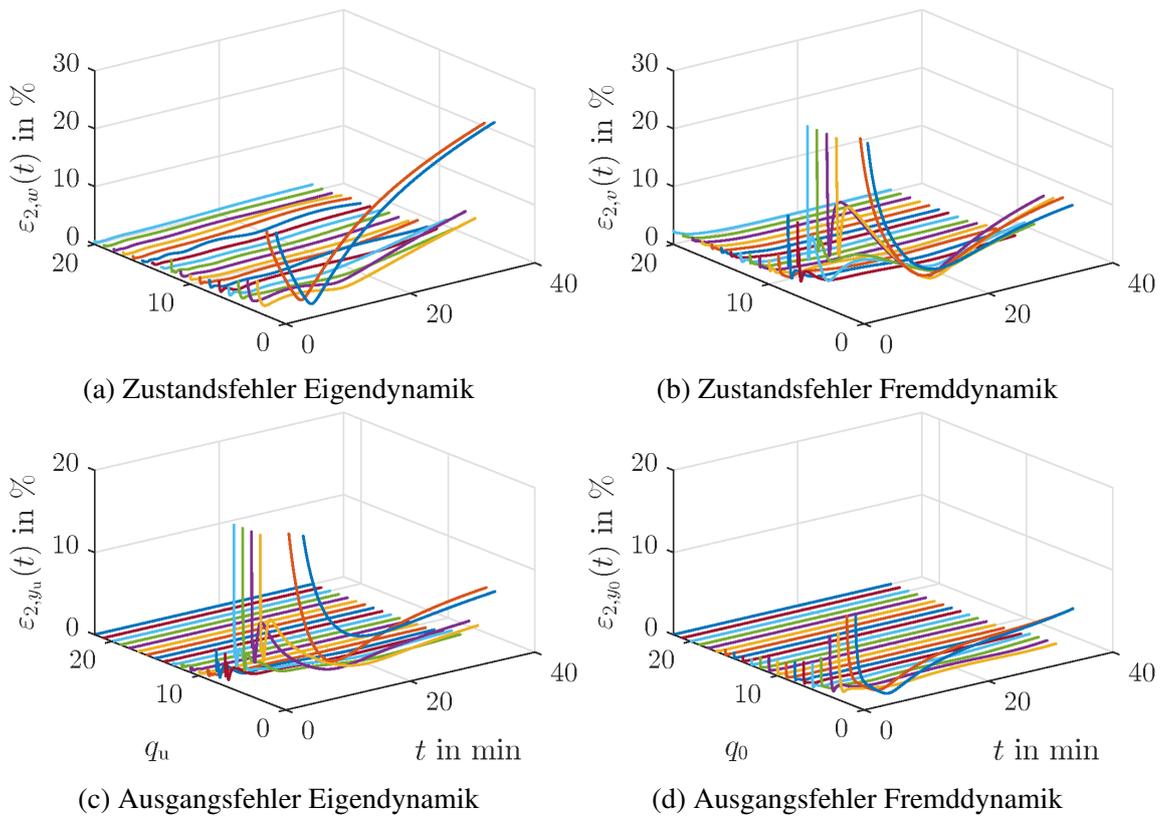
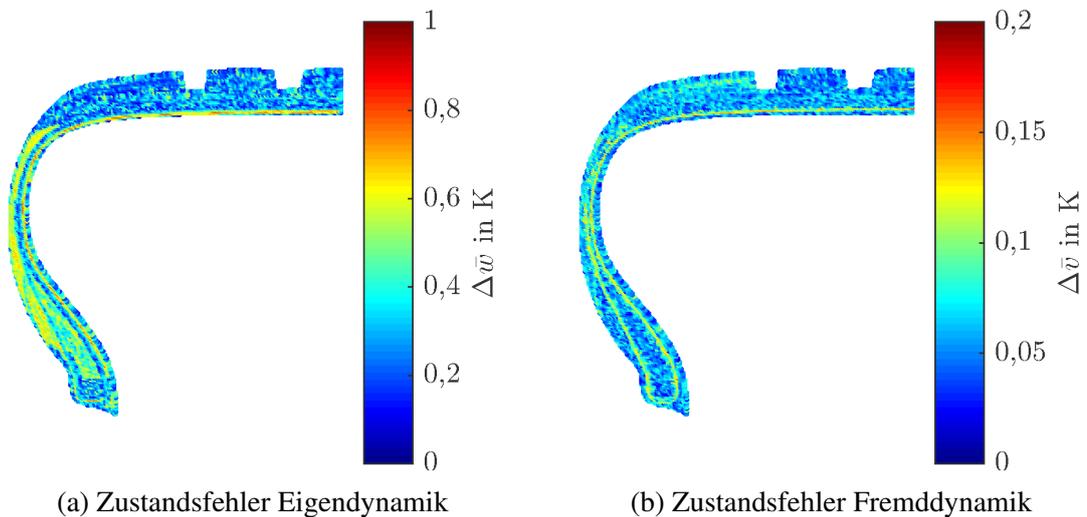


Abbildung 4.4: Relativer Fehler bei der Reduktion des linearen Abkühlsystems mittels BT

Abbildung 4.5: Verteilung des zeitgemittelten Zustandsfehlers $\Delta^{(t)}\bar{x}$ bei MOR der linearen Eigen- und Fremddynamik mittels BT für $q_0 = 15, q_u = 13$

linearen Anteile jedoch in einem tolerierbaren Fehlerbereich. Die Zustandsfehler gehen im Rahmen der nichtlinearen Korrekturfunktionen jedoch zusätzlich in die Systemgleichungen ein wodurch sich die Abweichungen erhöhen. Abbildung 4.6 zeigt den zeitlichen Verlauf der Abweichungen in den virtuellen Sensoren und approximierten Zuständen anhand von Toleranzbändern für einen Grenzwert zur Neuberechnung der Korrektur von $T_G = 2$ K. Während die Sensoren noch gut abgebildet werden können, zeigen sich Abweichungen von mehreren Kelvin in den Zuständen. Ähnliche Effekte konnten die Autoren [DSP11] bei der Anwendung von BT bei einer nichtlinearen Systembeschreibung beobachten. Weiterhin lässt sich durch das Auftreten vieler kleiner Fehlerspitzen im zeitlichen Verlauf gut das Neuberechnen der Korrekturfunktion erkennen. Zu Beginn erfolgt dieses auf Grund des schnelleren Abkühlens noch deutlich häufiger als am Ende der Simulation.

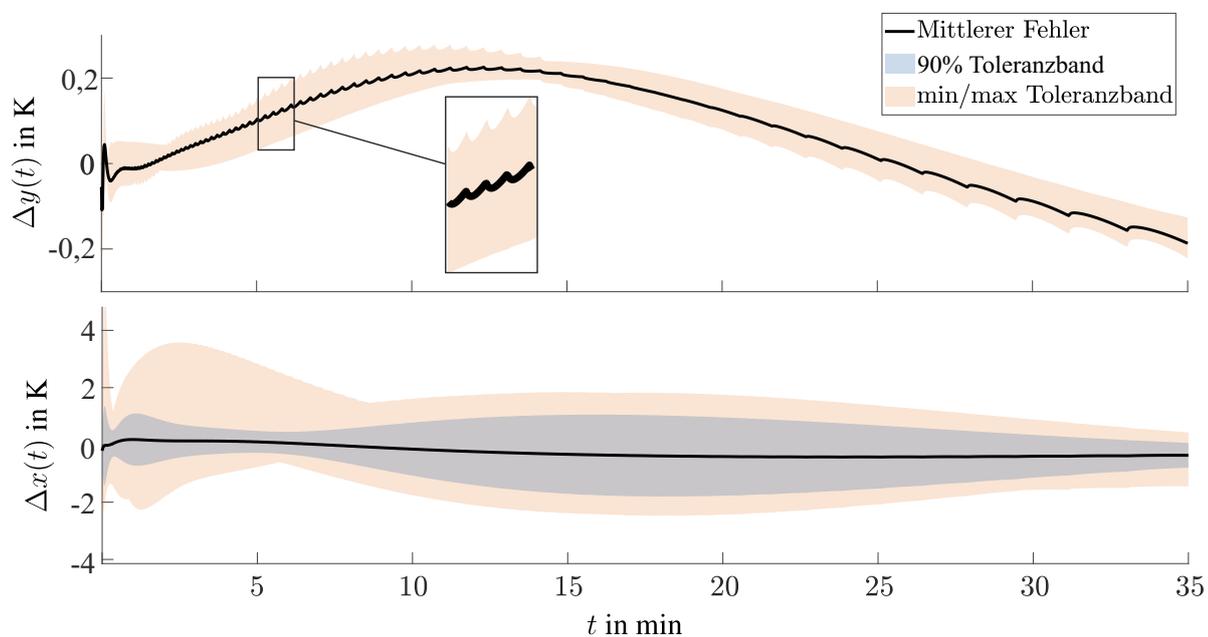


Abbildung 4.6: Fehlerintervalle für die NL-Simulation der Systemausgänge $y(t)$ sowie der Zustände $x(t)$ mit $q_0 = 17$, $q_u = 16$, $T_G = 2$ K und $h = 0,1$ s [Zei+20]

Eine abschließende Bewertung der erreichten Genauigkeiten von BT im Vergleich mit weiteren MOR-Verfahren ist am Ende dieses Kapitels in Abschnitt 4.1.3 zu finden.

Analyse Block Krylov und tangentielle Interpolation am Abkühlmodell

Krylov-Verfahren sind nicht nur wie in Abschnitt 3.4.3 bei hohen Systemordnungen prädestiniert zur Reduktion, sie eignen sich auch gut zur Approximation der gesamten Zustandsverteilungen. Abbildung 4.7 stellt die relativen Zustands- und Ausgangsfehler bei der Verwendung

von Blockkrylov sowie tangentialer Interpolation dar. Erwartungsgemäß ist der Fehler bei tangentialer Interpolation höher, da nur bestimmte Interpolationsrichtungen der Übertragungsfunktion berücksichtigt werden. Gleichzeitig zeigt sich jedoch kein großer Unterschied in der Approximationsgüte zwischen Ausgangs- und Zustandsverläufen. Betrachtet man den Ampli-

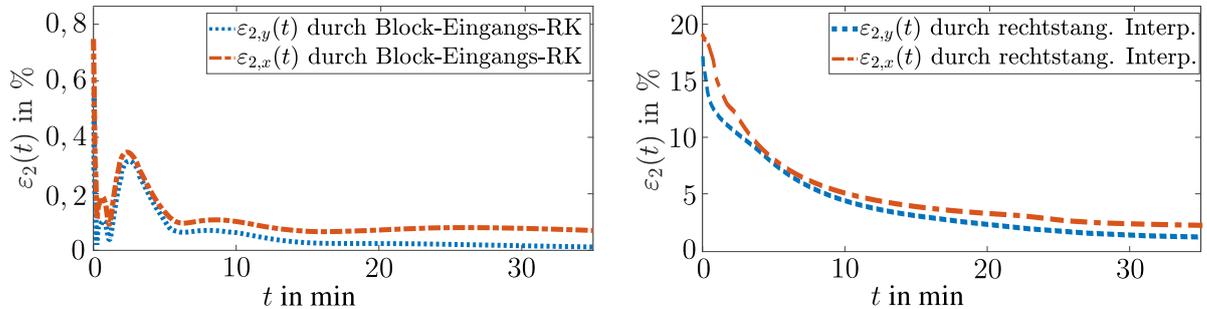


Abbildung 4.7: Relativer Zustandsfehler $\varepsilon_{2,x}(t)$ und $\varepsilon_{2,y}(t)$ für das Block-Eingangs-RK sowie rechtstangential interpolierte Abkühlsystem mit $s_l \in \{0; 0, 1; \infty\}$

tudengang des fremderregten Systems in Abbildung 4.8 zeigt sich der deutliche Unterschied zwischen tangentialer Interpolation und Blockkrylov bei gleicher reduzierter Ordnung $q_u = 10$. Eine Betrachtung von linksseitiger Interpolation oder reinen Ausgangs-Krylov-UR ist an dieser Stelle nicht sinnvoll, da gemäß Satz 3.2 und 3.5 die Eingangsmatrix nicht im jeweiligen Reduktionsalgorithmus berücksichtigt wird. Da jedoch die Zustandsverteilung und gerade auch die temperaturabhängigen Randbedingungen von Interesse sind, ist die Verwendung der Eingangsmatrizen unumgänglich. Beidseitige Verfahren führen unter Berücksichtigung der Ausgangsmatrix lediglich zu einer besseren Anpassung an das Ausgangsverhalten, bei leichter Verschlechterung des Zustandabbilds. Sie sind daher auch weniger gut für die Verwendung bei den vorliegenden Modellen geeignet. Ein vielversprechender Ansatz liegt in der Kombination verschiedener Verfahren, je nach zu reduzierender Dynamik und System. Für die Eigenbewegung zeigt sich tangentiale Interpolation als besser geeignet, wohingegen wie gezeigt Blockkrylov-UR bei der Abbildung der Fremderregung eine bessere Approximationsgüte erreicht. Abbildung 4.9 zeigt die gute Übereinstimmung der Ausgangssignale bei der so ausgeführten Kombination der Reduktionsverfahren.

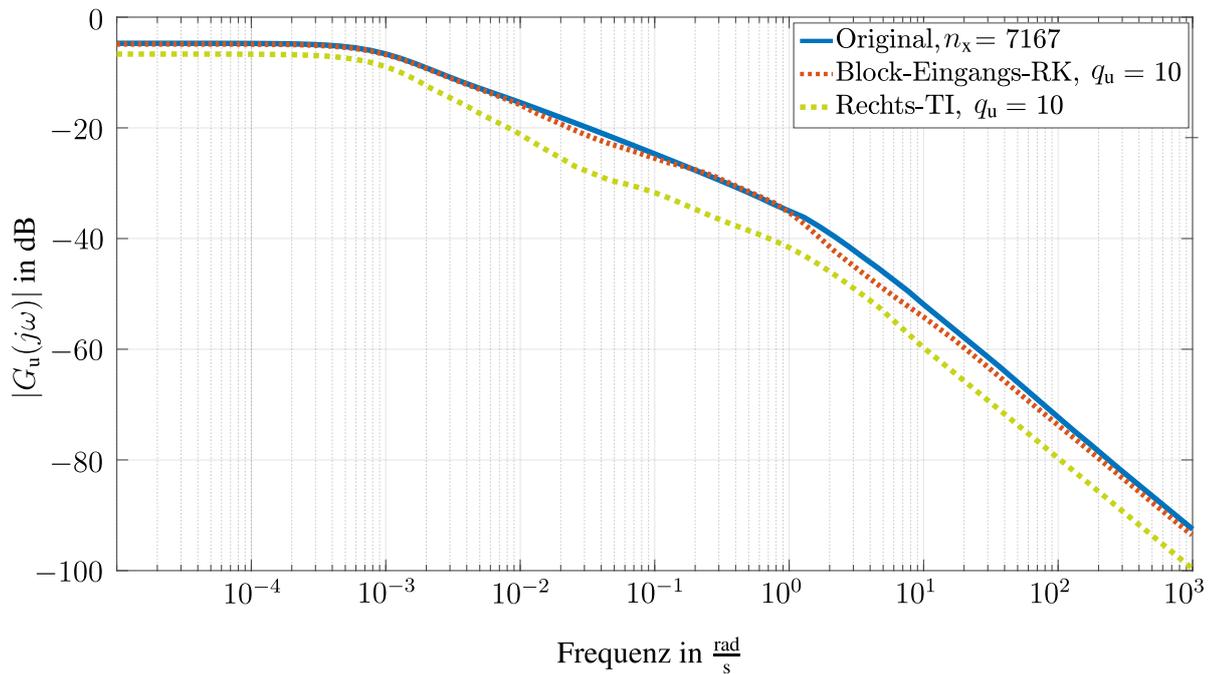


Abbildung 4.8: Bodediagramm eines Übertragungspfad der Fremddynamik des Abkühlsystems für verschiedene RK-basierte Reduktionsverfahren

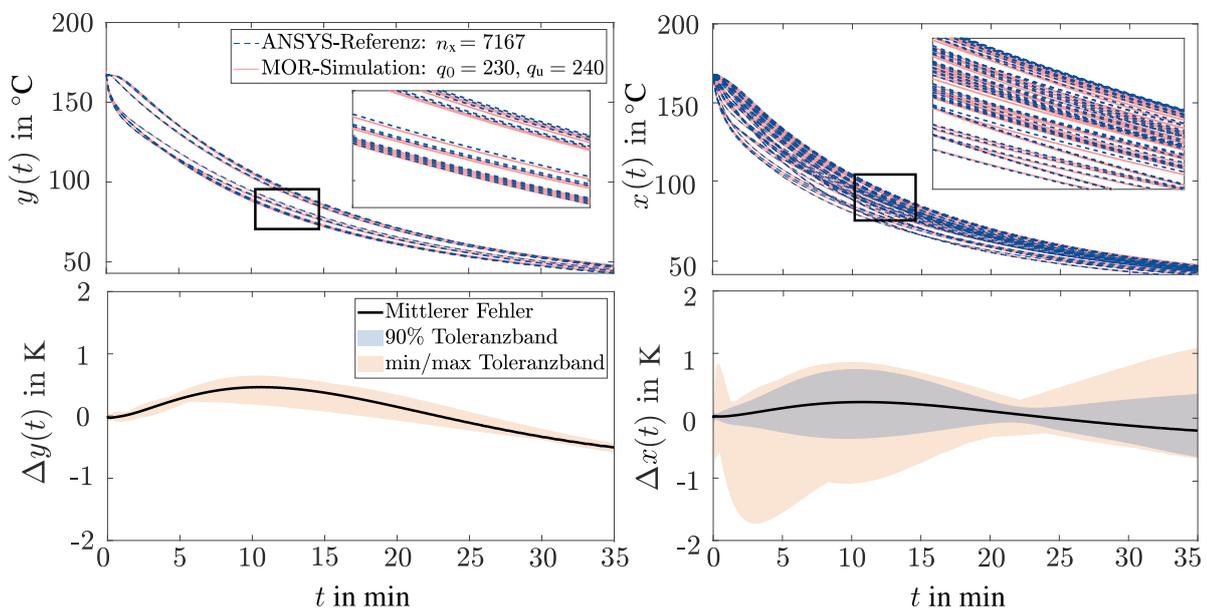


Abbildung 4.9: Sensor- und exemplarische Zustandsverläufe mit Fehlertoleranzbändern für die ordnungsreduzierte Abkühlsimulation mit TI für Eigen- und BK-UR für Fremddynamik ($T_G = 1\text{ °C}$ und $h = 0, 1\text{ s}$) [Zei+20]

Analyse des IRKA am Abkühlmodell

Da beim IRKA im Rahmen einer Optimierung die \mathcal{H}_2 -Norm der Abweichung zwischen originaler und reduzierter Übertragungsfunktion minimiert wird, eignet sich der Algorithmus vor allem sehr gut zur Approximation von Ausgangssignalen $\mathbf{y}(t)$. Da bei der Korrektur des ordnungsreduzierten Systems jedoch eine gute Abbildung der Zustandsverteilung, insbesondere der Oberflächenzustände, gegeben sein muss und die dieser Dissertation zu Grunde liegende Zielsetzung in der Berechnung von Temperaturverteilungen liegt, ist die Verwendbarkeit erwartungsgemäß eher eingeschränkt. Abbildung 4.10 zeigt daher eine höhere Abweichung als bspw. Balanced Truncation, da insbesondere im Verlauf der Zustandsfehler große Ausreißer auftreten. Bei der Untersuchung der relativen Fehler $\varepsilon_2(t)$ unter Berücksichtigung der Ab-

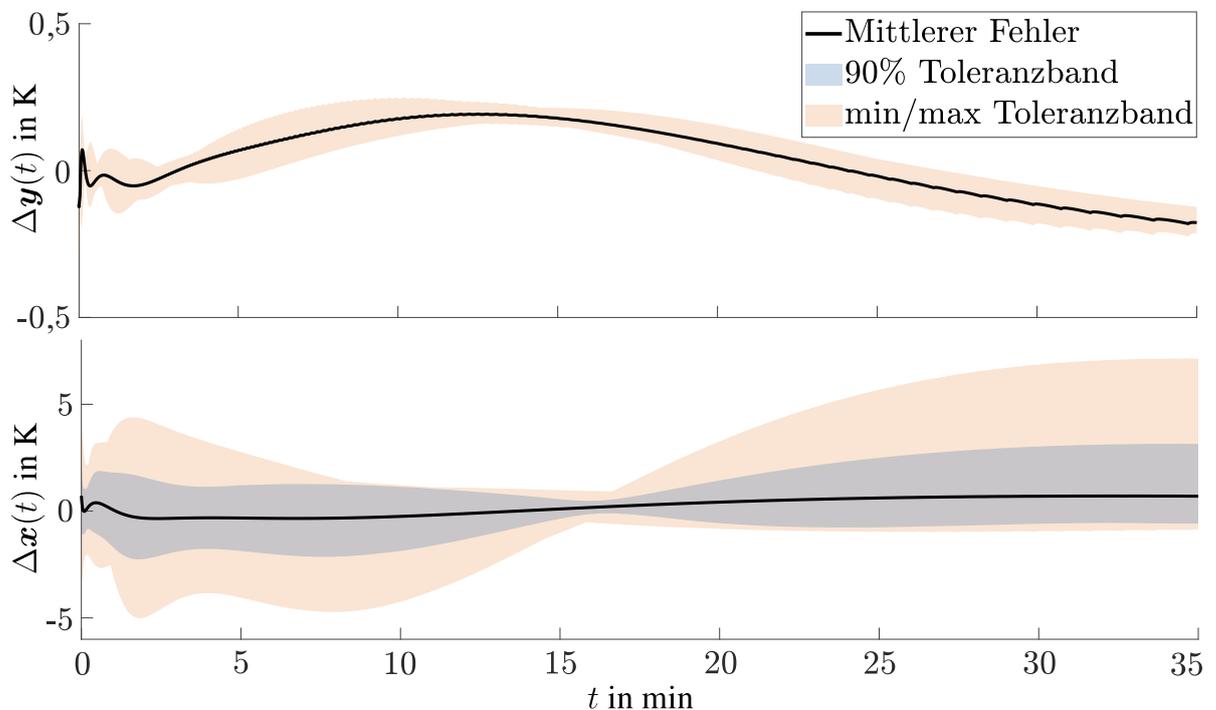


Abbildung 4.10: Fehlerintervalle über der Abkühlzeit für $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ der IRKA-reduzierten, NL-Abkühlsimulation mit $T_G = 1$ K, $h = 0,1$ s, $q_0 = 15$, $q_u = 18$ [Zei+20]

kühlzeit und verschiedener Ordnungen lässt sich besonders für die Eigendynamik auch keine Fehlerreduktion durch Erhöhung der reduzierten Ordnung feststellen (siehe Abbildung 4.11).

4.1.3 Gesamtvergleich der Reduktionsergebnisse

In diesem Abschnitt werden die betrachteten Reduktionsverfahren hinsichtlich der in Abschnitt 3.3 formulierten Gütekriterien miteinander verglichen. Zunächst wird der Projektionsfehler $\zeta_{\text{proj}}(\mathbf{P})$

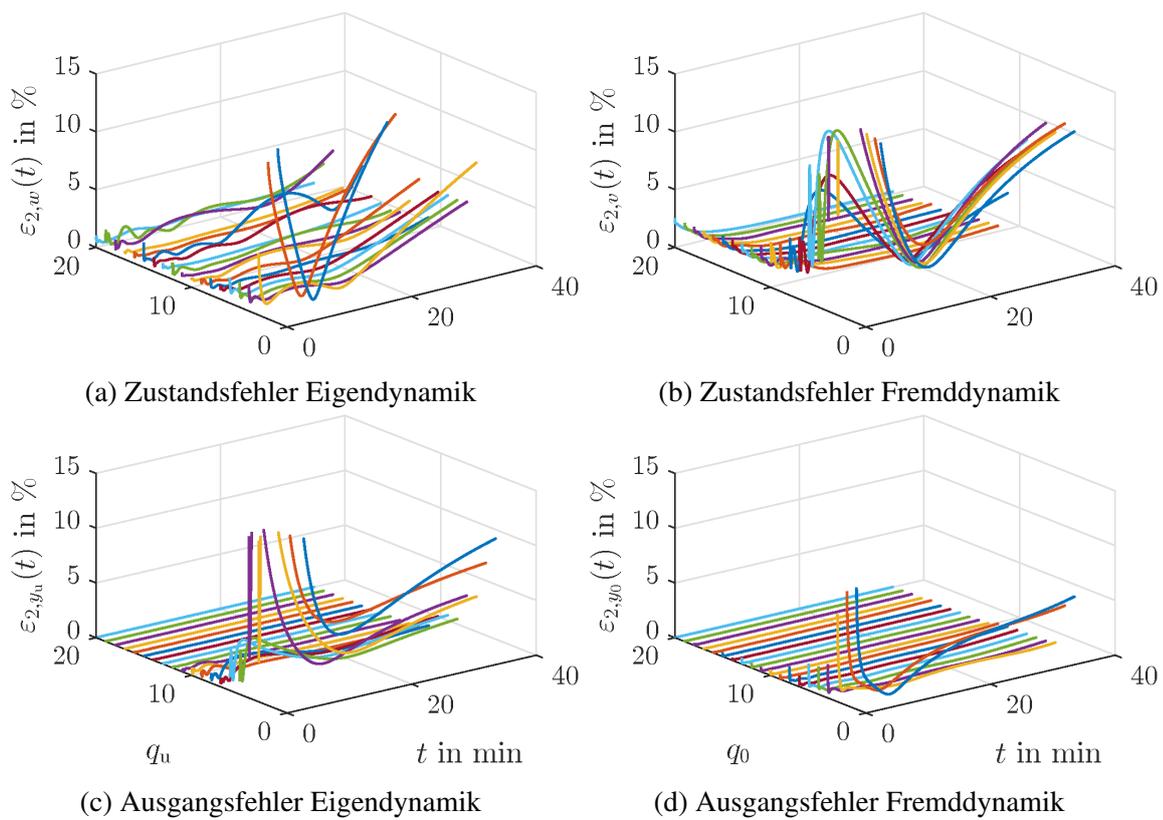


Abbildung 4.11: Relativer Fehler bei der Reduktion des linearen Abkühlsystems mittels IRKA

der biorthogonalen Projektion $P = V W^T$ für den nichtlinearen Abkühlvorgang analysiert. Dieser eignet sich auf Grund der schlechten Interpretierbarkeit nur als qualitatives Kriterium. Abbildung 4.12 zeigt für die nicht optimierten Krylovverfahren eine gleichbleibende Projektionsgüte unabhängig der gewählten reduzierten Ordnung. Die Verwendung des IRKA sorgt durch Konvergenzprobleme bei der iterativen Bestimmung eines lokalen Minimums für deutliche Schwankungen in Abhängigkeit der gewählten Ordnung. Abhilfe kann mehrmaliges Durchführen mit verschiedenen übergebenen Anfangsentwicklungsstellen schaffen, wodurch der Reduktionsaufwand jedoch beachtlich erhöht wird. Besonders groß ist dabei die Schwankung bei der Modellierung der Eigendynamik. Erwartungsgemäß steigt die Projektionsgüte tendenziell bei BT mit zunehmender Ordnung, da mehr Hankel-Singulärwerte betrachtet werden. Eine anschaulichere Fehlerdarstellung ist durch die Betrachtung des RMS-Fehlers in

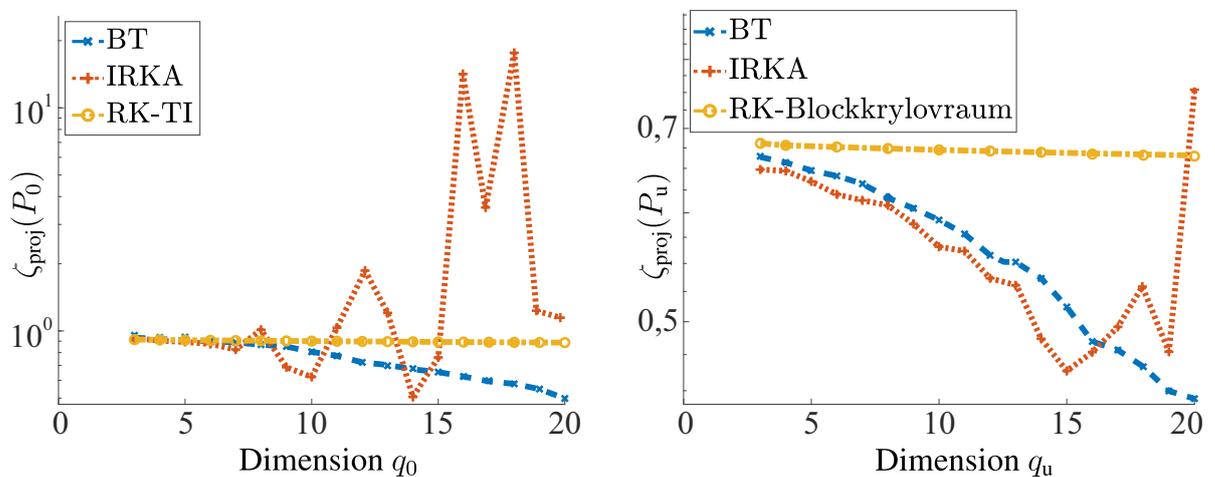


Abbildung 4.12: Projektionsfehler ζ_{proj} für durch unterschiedliche MOR-Verfahren generierte Projektoren des Abkühlsystems

Abbildung 4.13 für beide Dynamiken dargestellt. Es wiederholt sich das schlechte Abschneiden der TI bei der Fremderregung, was auch durch Erhöhen der reduzierten Ordnung nicht kompensiert werden kann. Weiterhin zeigt sich ebenfalls das unregelmäßige Abschneiden des IRKA bei der Zustandsabbildung in der Eigenbewegung. Prinzipiell existierten aber dennoch vielversprechende Verfahrenskombinationen mit geringer Ordnung von $q < 20$ zur Reduktion des Reifenmodells. Neben der Betrachtung des RMS-Fehlers in Abhängigkeit der reduzierten Ordnung ist die Analyse des relativen Zustandsfehlers $\varepsilon_2(t)$ über die Zeit ein entscheidendes Kriterium zur Wahl des Reduktionsverfahrens. Je nach Anforderung kann eine gute Übereinstimmung im stationären Zustand oder in der Umgebung des Startzeitpunktes wichtig sein. Gerade bei zeitlich gemittelten Fehlerkriterien können starke Anfangsschwingungen durch

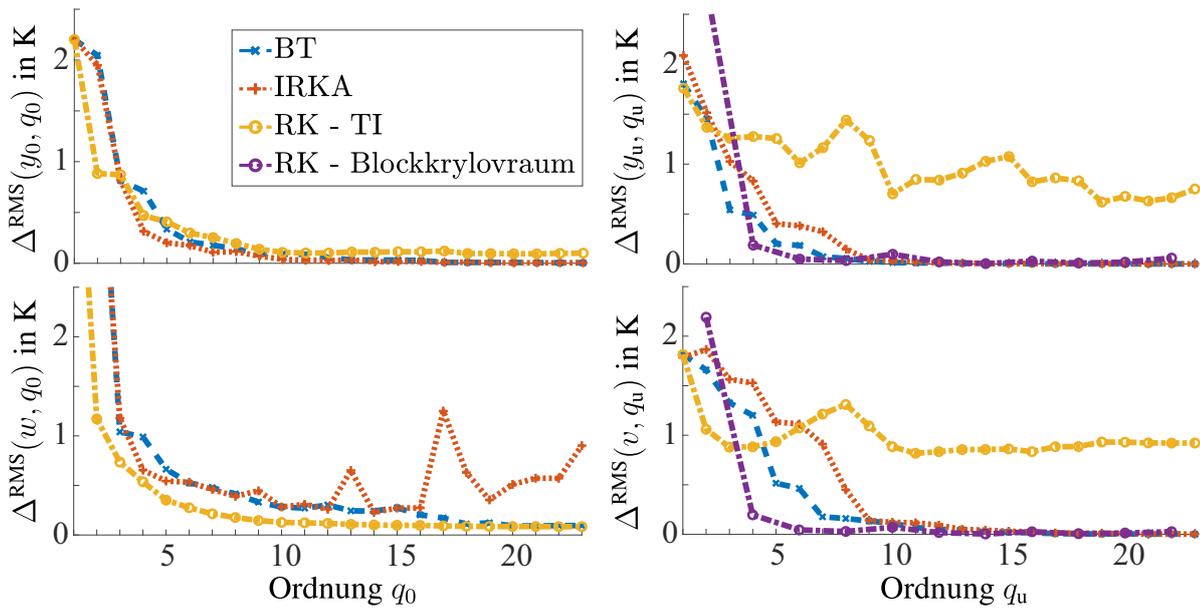


Abbildung 4.13: RMS-Fehler für verschiedene Ordnungen des linearen Abkühlsystems infolge verschiedener Reduktionsverfahren [Zei+20]

einen längeren Simulationsabschnitt vernachlässigt werden. Abbildung 4.14 zeigt dazu den zeitlichen Verlauf des Reduktionsfehlers für die verschiedenen Verfahren.

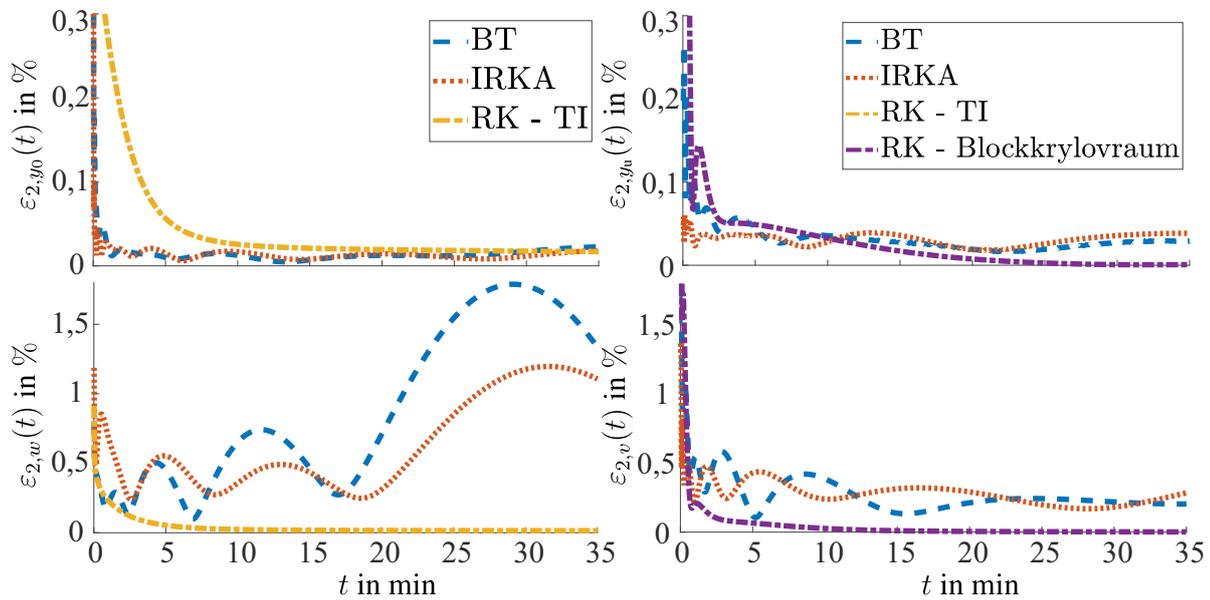


Abbildung 4.14: Zeitabhängiger relativer Zustandsfehler $\varepsilon_2(t)$ bei der Wahl verschiedener Reduktionsverfahren [Zei+20]

Die bereits diskutierten Schwächen von BT und IRKA in der Approximation der Eigenbewegung werden gerade im zeitlichen Zustandsverlauf deutlich. Jedoch zeigen sich bereits für kleine gewählte Ordnungen bessere Annäherungen der Verfahren bei den Anfangszuständen. Da gerade eine gute Abbildung des Anfangszustandes für Abkühlvorgänge von entscheidender Bedeutung ist, muss die gewählte Ordnung des reduzierten Systems weiter erhöht werden. Daraus wird ersichtlich, dass eine reine Bewertung der Verfahren anhand der Projektionsgüte oder des zeitlich gemittelten Fehlers nicht für eine fundierte Wahl des Verfahrens ausreicht. In Abbildung 4.15 und Abbildung 4.16 sind die Resultate für verschiedene Kombinationen der reduzierenden Verfahren dargestellt. Der erste Eintrag bezieht sich dabei auf Eigendynamik und der zweite auf das Verfahren zur Reduktion der Fremderregung. Die Bezeichnung RK bei Eigendynamik entspricht dabei immer der vorher erwähnten tangentialen Interpolation.

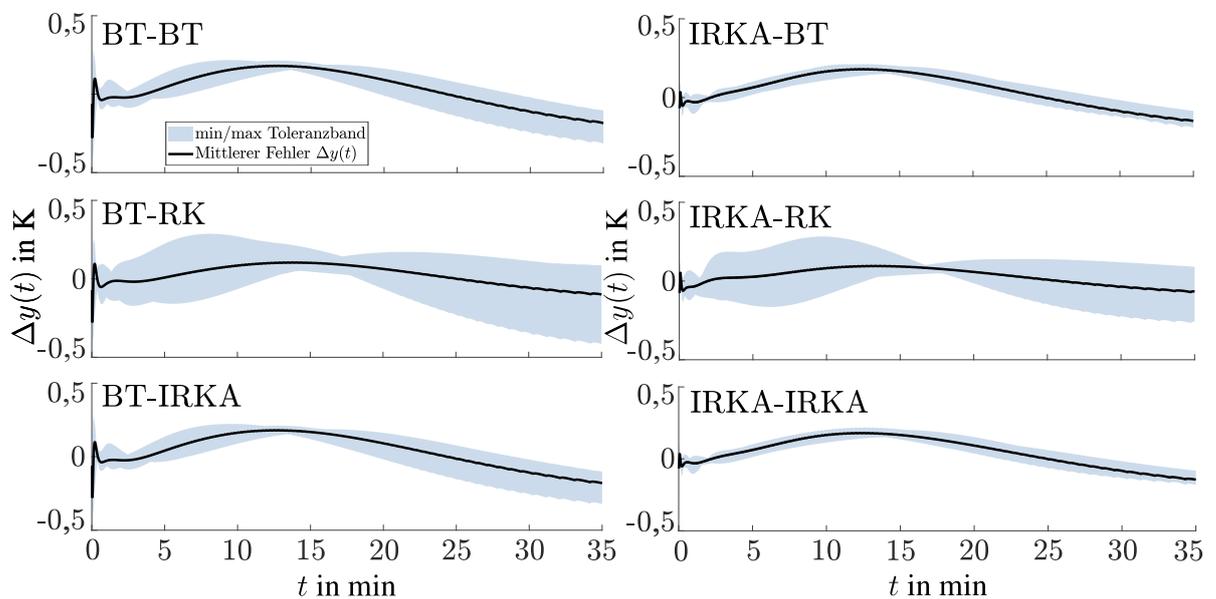


Abbildung 4.15: Reduktionsergebnisse des NL-Abkühlsystems mit $q_0 = 16$, $q_u = 14$, $T_G = 2$ K und $h = 0,1$ s

Diese und weitere Untersuchungen im Zustandsbereich und bei den anderen Modellen wurden dazu verwendet eine abschließende Übersicht über die Genauigkeit der Verfahren bei der Simulation des Abkühlvorgangs zu erstellen. Diese ist in Abbildung 4.17 qualitativ dargestellt. Der erste Eintrag des Tupels bezeichnet dabei die Approximationsgüte der Zustände \hat{x} und der zweite stellt die der Ausgänge \hat{y} dar. Zusammengefasst liefert der Eingangs-Krylov-Unterraum bei der Fremddynamik und rechtstangentiale Interpolation bei der Eigenbewegung die vielversprechendsten Ergebnisse.

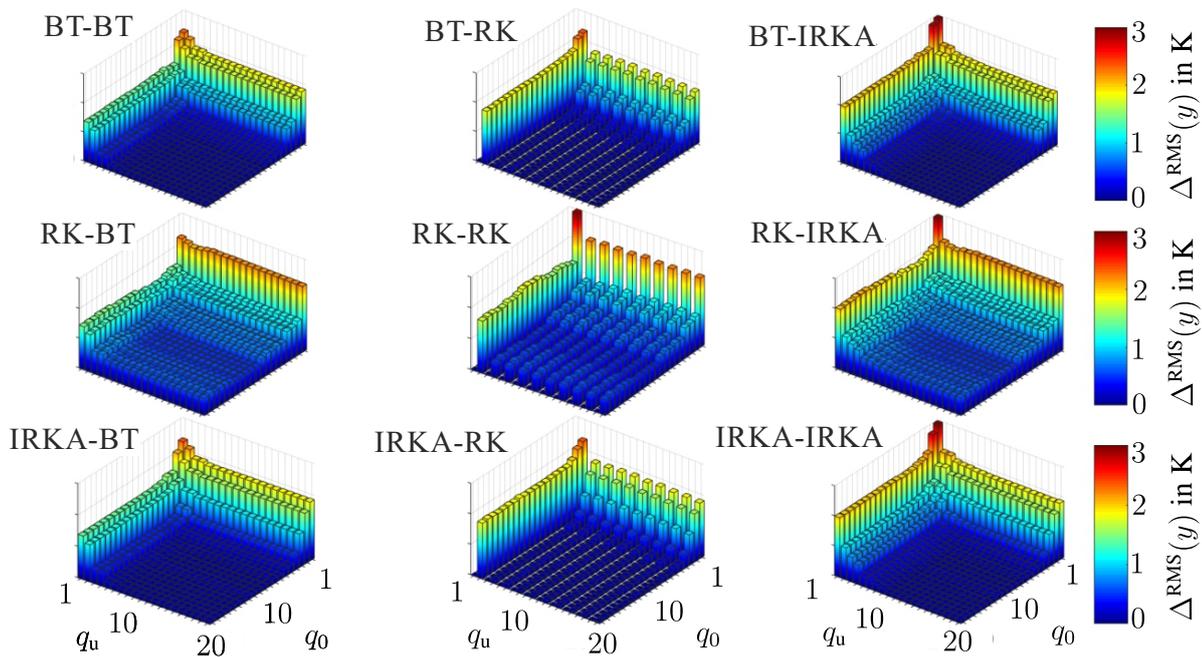


Abbildung 4.16: Abweichungen der Systemausgänge bei Verwendung unterschiedlicher Reduktionsverfahren und Ordnungen [Zei19]

++ Sehr gut
+ Gut
0 Durchwachsen
- Schlecht

	TBR	RK				IRKA
		Block-Krylov-Unterraum		Tangentiale Interpolation		
Eigendynamik $w(t)$	(0,+)	Eingangsraum	Ausgangsraum	Rechtstangential	Linkstangential	(0,++)
			(-,0)	(-,0)	(+,+)	
Fremddynamik $v(t)$	(+,++)	Beidseitig		Bitangential		(+,++)
			(-,,-)	(-,+)	(0,-)	

Abbildung 4.17: Qualitative Übersicht der Reduktionsverfahren Truncated Balanced Realizations (TBR), RK und IRKA am Abkühlsystem [Zei19; Zei+20]

4.2 Numerische Lösung von Anfangswertproblemen

Neben der in Kapitel 2 ausgeführten örtlichen Diskretisierung müssen die Systembeschreibungen nach der Reduktion der Ordnung weiterhin auch zeitlich diskretisiert werden, da eine analytische Lösung der Gleichungssysteme nicht möglich ist. Zu diesem Zweck werden numerische Verfahren zur Bestimmung der Lösung eingesetzt. Bei den hier vorliegenden Systemen (2.30) handelt es sich um Anfangswertprobleme mit der Bedingung $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0$. Die sich damit befassenden theoretischen Ausführungen in diesem Kapitel beruhen auf [KM74; Bou02; Ang+17; Are+13]. Die bisher getätigten Betrachtungen im Rahmen der Modellordnungsreduktion wurden mit einer kleinen Zeitschrittweite durchgeführt, um Fehler durch die zeitliche Diskretisierung zu minimieren. Gerade für Simulationen unter Echtzeitbedingungen oder bei einer Vielzahl notwendiger Simulationsiterationen ist es allerdings auf Grund der hohen Berechnungsdauer nicht möglich diese kleinen Zeitschritte zu verwenden. In den nachfolgenden Abschnitten wird dafür ein effizientes Lösungsverfahren ausgewählt und parametrisiert.

4.2.1 Existenz und Eindeutigkeit

Vor dem eigentlichen Lösen der Problemstellung muss die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung festgestellt werden. Dafür wird der Satz von Picard-Lindelöf verwendet, welcher sich aus dem Banach'schen Fixpunktsatz abgeleitet.

Satz 4.1 [Bou02; Are+13] *Sei $\mathbf{f} : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ mit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}_+$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ stetig auf $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$. Wenn dann $\forall \Omega \subset \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ die Lipschitz-Bedingung*

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\|_2 \leq L_\Omega \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 \quad \forall t \in \mathcal{I} \text{ und } (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in \Omega \quad (4.13)$$

mit der Lipschitzkonstanten $L_\Omega \geq 0$ gilt, so existiert $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{J}$ eine eindeutig bestimmte, stetige Lösung $\mathbf{x}(t)$ des AWP $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Werden nun die hergeleiteten Zustandsgleichungen in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}(t), \mathbf{T}_U(t))$ gemäß Gleichung 2.48 in die Bedingung eingesetzt, resultiert daraus

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\|_2 &= \|\mathbf{A} \mathbf{x}_1 + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}_1, \mathbf{T}_U) - (\mathbf{A} \mathbf{x}_2 + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}_2, \mathbf{T}_U))\|_2 \\ &= \|\mathbf{A} \mathbf{x}_1 - \mathbf{A} \mathbf{x}_2 + \mathbf{g}(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}_1, \mathbf{T}_U) - \mathbf{g}(\mathbf{p}_\alpha^*, \mathbf{x}_2, \mathbf{T}_U)\|_2 \\ &\stackrel{(2.48)}{=} \|\hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}|_{\alpha_0} \mathbf{x}_1 + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}|_{\alpha_0} \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}^* \mathbf{x}_1 + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \hat{\mathbf{K}}^* \mathbf{x}_2\|_2 \\ &= \|\underbrace{-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{K}^*)}_{=: L_\Omega(\mathbf{x}) \geq 0} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\|_2 \leq \|\underbrace{-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K} + \mathbf{K}^*)}_2\|_2 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 \end{aligned}$$

Die Lipschitzkonstante ist durch die temperaturabhängigen WÜK in \mathbf{K}^* zustandsabhängig. Um die Lösbarkeit sicherzustellen, sind folglich Beschränkungen des Funktionsbereichs der WÜK

zu wählen, sodass die Ungleichung auf einem Teilgebiet $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ erfüllt ist. Diese Vorgaben können zum Beispiel durch Nebenbedingungen bei der Identifikation der WÜK berücksichtigt werden oder durch Limitierungen des Parameterraumes. Damit ist das vorliegende System aus Zustandsgleichungen im Sinne von Picard-Lindelöf eindeutig lösbar.

4.2.2 Runge-Kutta-Verfahren

Zur zeitlichen Diskretisierung der kontinuierlichen Zustandsgleichungen (2.48) werden Runge-Kutta(RuKu)-Verfahren verwendet. Diese lassen sich unter Verwendung der zeitlichen Schrittweite h in zwei unterschiedliche Klassen einteilen:

Definiton 4.1 Eine Rekursionsvorschrift zur Diskretisierung von $\mathbf{x}_j \approx \mathbf{x}(t_j)$ zu den Zeitpunkten t_j heißt

- (i) **explizites Einschrittverfahren**, wenn $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + h \Phi(t_j, \mathbf{x}_j, h)$,
- (ii) **implizites Einschrittverfahren**, wenn $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + h \Phi(t_{j+1}, \mathbf{x}_{j+1}, h)$.

Weiterhin existieren Mehrschrittverfahren, welche zusätzliche Zeitpunkte t_{j-1}, \dots in der Vergangenheit berücksichtigen. Auf Grund der deutlich höheren Rechenzeiten [KM74] finden diese jedoch im Rahmen dieser Arbeit keine Verwendung. Die hier verwendeten Verfahren weisen die folgende Struktur auf [Bou02; KM74]:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{l=1}^S b_l \mathbf{f}(t_j + hc_l, \eta_l) \quad \text{mit} \quad \sum_{l=1}^S b_l = 1 \quad \text{und der Näherung} \\ \eta_l &= \mathbf{x}_j + h \sum_{\nu=1}^S a_{l\nu} \mathbf{f}(t_j + c_\nu h, \eta_\nu) \quad \text{mit} \quad \sum_{\nu=1}^S a_{l\nu} = c_l \quad \forall l = 1, \dots, S. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Wenn bei der Berechnung keine Näherung zu in der Zukunft liegenden Zeitschritten erforderlich ist, gilt $a_{l\nu} = 0 \quad \forall \nu \geq l$ und das Verfahren wird als explizit bezeichnet. Im Folgenden werden die verwendeten RuKu-Verfahren definiert und der Einfluss der Wahl des Lösungsalgorithmus sowie der Zeitschrittweite h auf die Rechenzeit und Genauigkeit quantifiziert.

Explizite Einschrittverfahren

Das explizite Euler-Verfahren findet als einfachste Variante standardmäßig Anwendung bei einer Vielzahl von Simulationsaufgaben. Der Differentialquotient

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} \tag{4.15}$$

wird dabei durch die Tangentengleichung

$$\mathbf{x}(t+h) \approx \mathbf{x}(t) + h \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4.16)$$

angenähert und ersetzt. Die als

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + h \mathbf{f}(t_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{u}) = \mathbf{x}_j + h [\mathbf{A} \mathbf{x}_j + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{g}_i] \quad (4.17)$$

definierte Rekursionsvorschrift des Euler-Verfahrens ergibt sich aus dem wiederholten aneinander Reihem von Tangentengleichungen. Das Euler-Heun-Verfahren kann zu einer besseren Approximation der Tangentensteigung verwendet werden. Dabei wird die Steigung am Anfang t_j und Ende t_{j+1} des Intervalls betrachtet. Da dafür eine a-priori Näherung der Steigung $\Phi(t_{j+1}, \mathbf{x}_{j+1}, h)$ notwendig ist, wird diese durch einen Euler-Prädiktor angenähert:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(t_j, \mathbf{x}_j) + \underbrace{\mathbf{f}(t_j + h, \mathbf{x}_j + h \mathbf{f}(t_j, \mathbf{x}_j))}_{\text{Euler-Prädiktor}}] = \mathbf{x}_j + h \Phi_{\text{Heun}} \quad (4.18)$$

Wird hingegen die Steigung in der Intervallmitte $\frac{t_{j+1}+t_j}{2} =: t_m$ verwendet, resultiert daraus erneut unter Verwendung des Euler-Prädiktors das Euler-Runge-Verfahren

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + h \mathbf{f}\left(t_j + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_j + \frac{h}{2} \underbrace{\mathbf{f}(t_j, \mathbf{x}_j)}_{\text{Euler-Prädiktor}}\right) = \mathbf{x}_j + h \Phi_{\text{Runge}}. \quad (4.19)$$

Mit Hilfe der Simpsonregel [Bou02] kann die Steigung über eine vierfache Iteration von Euler und Euler-Runge angenähert werden. Das Verfahren wird als klassisches Runge-Kutta-Verfahren (KLRK) bezeichnet, mit der Vorschrift:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{j+1} &= \mathbf{x}_j + \frac{h}{6} [\Phi_1 + 2\Phi_2 + 2\Phi_3 + \Phi_4] =: \mathbf{x}_j + h \Phi_{\text{KLRK}}, \text{ wobei} \\ \Phi_1 &= \mathbf{f}(t_j, \mathbf{x}_j), \quad \Phi_2 = \mathbf{f}\left(t_j + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_j + \frac{h}{2} \Phi_1\right), \\ \Phi_3 &= \mathbf{f}\left(t_j + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_j + \frac{h}{2} \Phi_2\right) \text{ und } \Phi_4 = \mathbf{f}(t_j + h, \mathbf{x}_j + h \Phi_3). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Die linearen Modelle der Aufheizvorgänge von Reifen und Kautschukprüfkörper werden mit einer sehr kleinen Schrittweite von $h = 10^{-4}$ s gelöst. Da nach [KM74] der Zusammenhang

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{x}(t_{j+1}) - \mathbf{x}_{j+1}}{h} \right\|_2 = 0 \quad \forall t \in \mathcal{I} \quad \forall \Phi. \quad (4.21)$$

gilt, wird davon ausgegangen, dass der verbleibende Fehler bei derart kleinen Schrittweiten vernachlässigbar gering ist. Für die nichtlinearen Simulationen dienen iterative ANSYS® Solver [LN18] mit einer Schrittweite von $h = 10^{-1}$ s. Vorgreifend zeigen die Untersuchungen zu expliziten Lösungsverfahren in Abschnitt 4.2.3 keine stabilen Lösungen oberhalb von Schrittweiten $h > 1$ s, weshalb im Folgenden zusätzlich implizite Verfahren eingeführt werden.

Implizite Einschrittverfahren

Ein verbessertes Stabilitätsverhalten bei größeren Schrittweiten zeigen implizite Verfahren. Die in dieser Arbeit verwendeten Methoden sind zum einen das implizite Eulerverfahren mit der Vorschrift

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + h \mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{x}_{j+1}). \quad (4.22)$$

Zum anderen wird die implizite Trapezmethode verwendet, welche die Steigung $\mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{x}_{j+1})$ am Intervallende durch

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + h \frac{\mathbf{f}(t_j, \mathbf{x}_j) + \mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{x}_{j+1})}{2} \quad (4.23)$$

berechnet. Da in der Rekursionsvorschrift die Abhängigkeit von \mathbf{x}_{j+1} besteht, muss diese zur Lösung umgestellt werden. Für lineare Systeme $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$ mit konstantem Eingang \mathbf{u} lässt sich das Problem als LGS

$$(\mathbf{I}_n - h \mathbf{A}) \mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + h \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (4.24a)$$

umformulieren. Die abschnittsweise konstante Korrekturfunktion \mathbf{g}_i des letztmaligen Aktualisierungszeitpunktes τ_i wird hinzuaddiert:

$$(\mathbf{I}_n - h \mathbf{A}) \mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + h(\mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{g}_i). \quad (4.24b)$$

Die Trapezmethode ergibt sich zu

$$\left(\mathbf{I}_n - \frac{h}{2} \mathbf{A}\right) \mathbf{x}_{j+1} = \left(\mathbf{I}_n + \frac{h}{2} \mathbf{A}\right) \mathbf{x}_j + h(\mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{g}_i). \quad (4.24c)$$

Hierbei wurde $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j$ als konstant angenommen, da bei der Prädiktion des Abkühlvorgangs kein Vorausberechnen der Umgebungstemperatur erfolgt und daher der zum Prädiktionszeitpunkt vorliegende Wert verwendet wird. Der numerische Hauptaufwand der so umgesetzten impliziten Verfahren besteht dann im Lösen von LGS.

4.2.3 Analyse der Lösungsalgorithmen

Zunächst sollen die vorgestellten Algorithmen ohne den Einfluss der Korrekturfunktion untersucht werden. Bei der Lösung des rein linearen Zustandsraumes mit der Dimension $q = 28$ werden Berechnungsdauer und Genauigkeit quantifiziert. Der relative Zustandsfehler $\varepsilon_{2,x}(t_{\text{end}})$

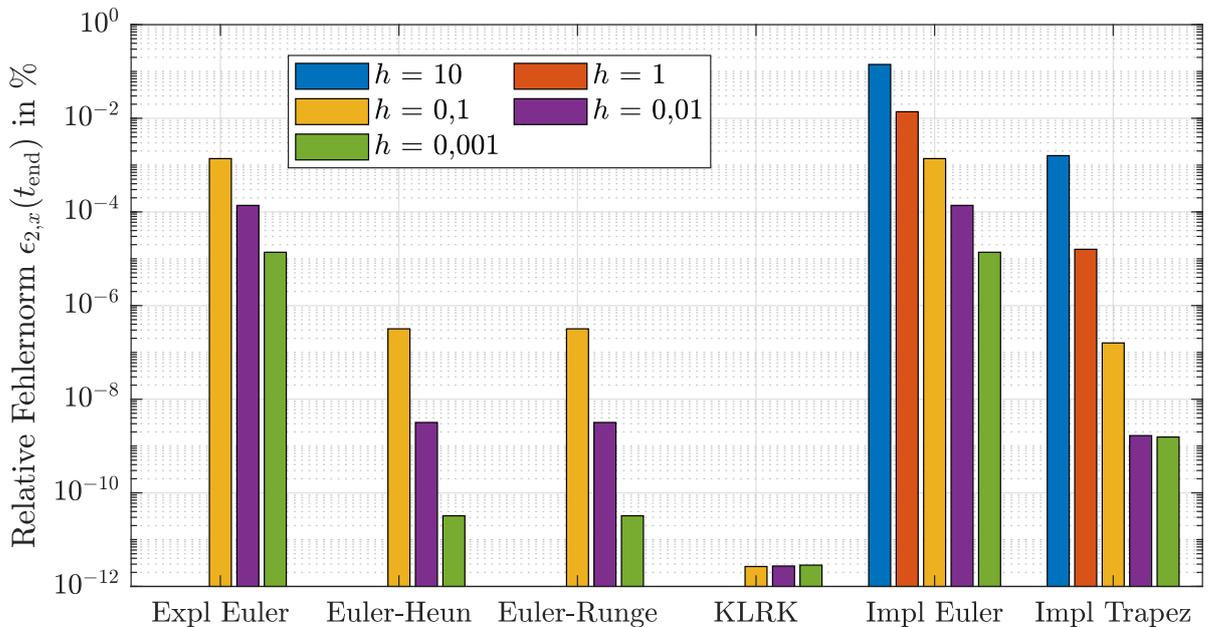


Abbildung 4.18: Relativer Zustandsfehler des Endzustandes $\varepsilon_{2,x}(t_{\text{end}})$ verschiedener Lösungsverfahren und Zeitschrittweiten h für $q = 28$ Zustände des linearen Systemteils bei der Ausführung auf dem IPC

des Endzustandes nach einem Prädiktionszeitraum von $t_{\text{end}} = 600$ s ist in Abbildung 4.18 dargestellt. Bis auf das KLRK Verfahren profitieren alle Algorithmen von einer geringeren Zeitschrittweite. Deutlich zu sehen sind weiterhin die Vorteile mehrstufiger Verfahren gegenüber dem expliziten Euler Algorithmus. Implizite Verfahren erlauben noch wesentlich höhere Zeitschrittweiten und bleiben stabil, erzeugen dabei allerdings auch höhere Abweichungen. Daneben zeigt Abbildung 4.19 für die gleichen Simulationen die Berechnungsdauern. Dafür wurden die Simulationen mehrfach ausgeführt und die Zeitdauer gemittelt. Hierbei zeigt sich die exponentielle Abhängigkeit der Dauer von der Zeitschrittweite h sowie der Mehraufwand mehrstufiger Algorithmen. Das Lösen eines LGS in jedem Iterationsschritt führt bei den impliziten Verfahren zu einem deutlich erhöhten Rechenaufwand, insbesondere im Vergleich zur Wahl eines mehrstufigen Verfahrens bei gleicher Schrittweite.

Nun sollen dieselben Untersuchungen für die Systeme mit Korrekturfunktion verglichen werden. Dafür wird zunächst der Einfluss der reduzierten Ordnung sowie unterschiedliche Zeitschritt-

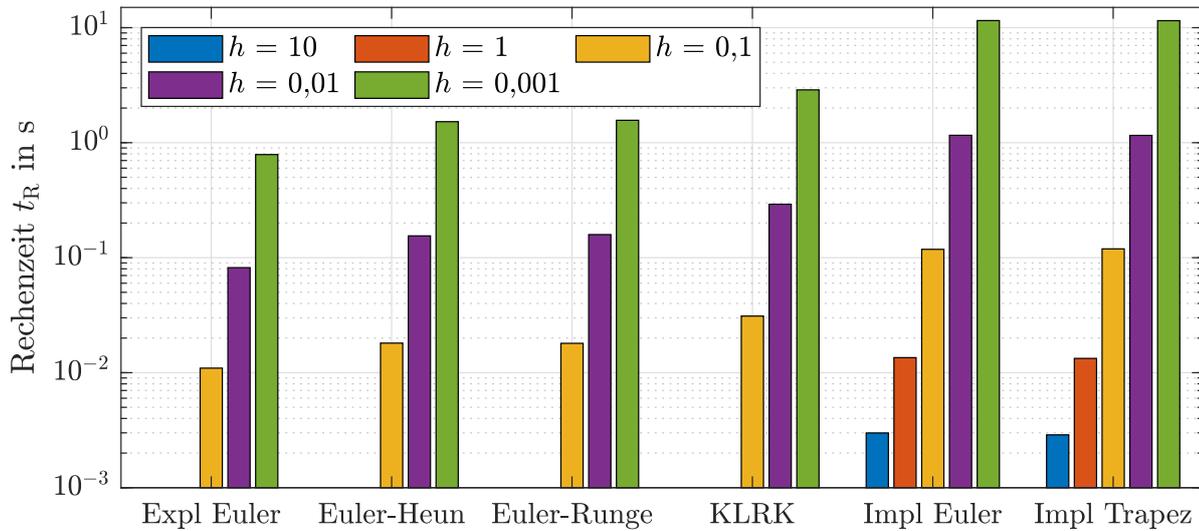


Abbildung 4.19: Rechenzeit t_R verschiedener Lösungsverfahren und Zeitschrittweiten h für $q = 28$ Zustände des linearen Systemteils bei der Ausführung auf dem IPC

weiten auf Rechenzeit und Approximationsfehler in Abbildung 4.20 unter der Verwendung des impliziten Eulerverfahrens gezeigt. Die Wahl der reduzierten Ordnung hat dabei einen größeren

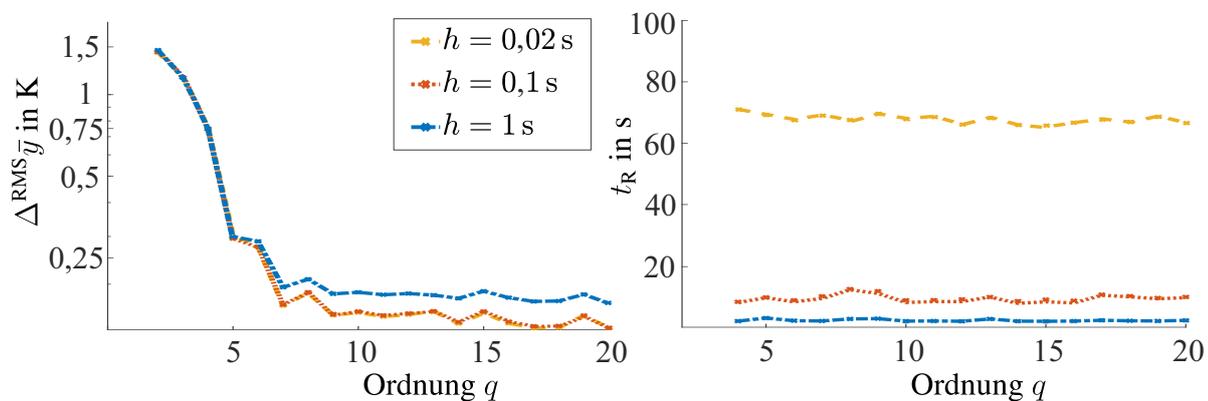


Abbildung 4.20: Abweichung der Ausgänge Δ^{RMS} und Rechenzeit t_R am nichtlinearen Abkühl-system des Reifens für verschiedene Ordnungen q und Schrittweiten h mit $T_G = 2$ K und $\Phi_{\text{impl Euler}}$

Einfluss auf den Approximationsfehler als die Zeitschrittweite. Für die Berechnungsdauer ist jedoch die gewählte Zeitschrittweite ausschlaggebend. Trotz der Mittelung über die Rechenzeit zeigen sich gerade für kleine Schrittweiten große Streuungen in der Berechnungszeit, was durch wechselnde Belastung durch Hintergrundprozesse erklärt werden kann. Eine genauere Analyse der expliziten Verfahren kann Abbildung 4.21 entnommen werden. Hierbei zeigen sich kaum Auswirkungen von der Zeitschritt- oder Verfahrenswahl auf die Genauigkeit oder

Rechenzeit. Implizite Verfahren, dargestellt in Abbildung 4.22, erlauben jedoch deutlich höhere Schrittweiten und können durch Wahl des Zeitschritts die Simulation stark beeinflussen. Erwartungsgemäß zeigt die Trapezmethode durch genauere Approximation eine bessere Genauigkeit für höhere Schrittweiten. Auffällig ist bei allen Verfahren die Konvergenz gegen eine minimale Berechnungszeit sowie einen minimalen Fehlerwert für kleine Zeitschritte.

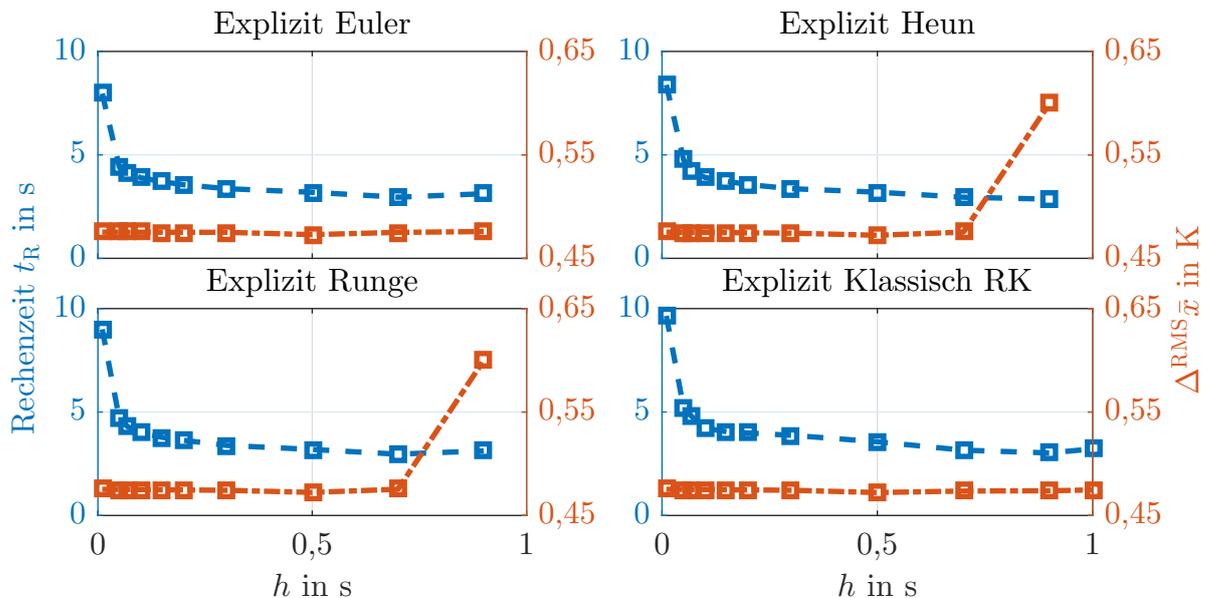


Abbildung 4.21: Rechenzeit und RMS-Fehler der expliziten RuKu-Verfahren in Abhängigkeit der Zeitschrittweite beim reduzierten NL-Abkühlssystem mit $q_0 = 19$ (TI), $q_u = 18$ (RK) und $T_G = 1$ K [Fra+20]

Bei der Wahl von impliziten Lösungsverfahren mit erhöhter Zeitschrittweite ergeben sich Einsparpotenziale bei der Berechnungszeit, welche zur Erhöhung der reduzierten Ordnung auf bis zu $q = 300$ verwendet werden können. Damit lässt sich das Problem unzureichend abbildbarer Einschwingvorgänge bei kleinen reduzierten Ordnungen umgehen, wie es in Abschnitt 4.1.3 und insbesondere Abbildung 4.14 aufgetreten ist. Jedoch kann der gegenteilige Effekt durch zu große Zeitschrittweiten im transienten Bereich auftreten. Die so auftretende zeitlich gemittelte Fehlerverteilung bei der Verwendung der impliziten Trapezmethode ist in Abbildung 4.23 für beispielhafte Grenzwerte und Zeitschrittweiten gezeigt. Bei höher gewählten Werten treten besonders für vereinzelte Zustände höhere Abweichungen auf.

Maßgeblichen Einfluss auf Genauigkeit und Rechenzeit hat jedoch die Häufigkeit der Ausführung der Korrekturfunktion g_i . Bisher wurden die Schwellwerte der Oberflächentemperaturänderung T_G zwischen 1 bis 2 K gewählt. Abbildung 4.24 zeigt den Einfluss auf Genauigkeit und Rechendauer. Für höhere Schwellwerte $T_G > 5$ K konvergiert die Ausführungsdauer gegen die Zeit einer rein linearen Simulation. Die Genauigkeit lässt sich für kleine Schwellwerte

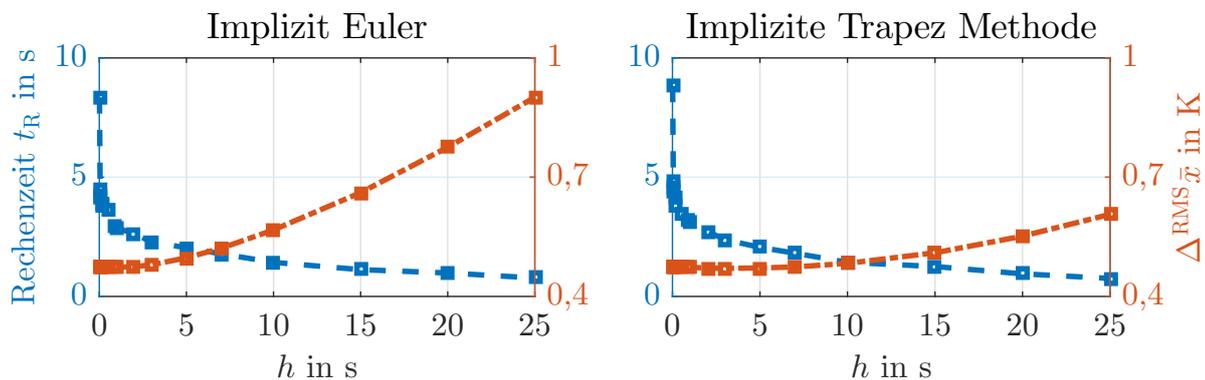


Abbildung 4.22: Rechenzeit und RMS-Fehler der impliziten RuKu-Verfahren in Abhängigkeit der Zeitschrittweite beim reduzierten NL-Abkühlsystem mit $q_0 = 19$ (TI), $q_u = 18$ (RK) und $T_G = 1$ K [Fra+20]

zwar steigern, jedoch führt dies zu einem exponentiellen Anstieg der Berechnungsdauer. Neben Zeitschrittweite, Lösungsverfahren und der gewählten reduzierten Ordnung bietet die Wahl des Temperaturschwellwertes einen separat einstellbaren und prozessabhängigen Parameter zur Gewichtung zwischen notwendiger Genauigkeit und der durch Echtzeitfähigkeit vorgegebenen Berechnungsdauer.

Abschließend kann der Vulkanisationsprozess wie in Abbildung 4.25 dargestellt abgebildet werden. Der lineare Aufheizbereich wird dem Stand der Technik gemäß gut durch die linearen Verfahren abgebildet. Für den nichtlinearen Abkühlvorgang zeigt sich durch die vorgestellte Methode ebenfalls eine gute Übereinstimmung zwischen reduziertem und vollständigem Modell. Die Berechnungsdauer beträgt dabei lediglich 0,8 s und ist deutlich schneller als die FEM-Simulation mit ungefähr 28 min. Je nach Anforderungen aus Leistung des Industrie-PC, Taktzeit des Prozessreglers oder vorgegebenen Fehlerschranken kann ein geeigneter Grenzwert ausgewählt werden.

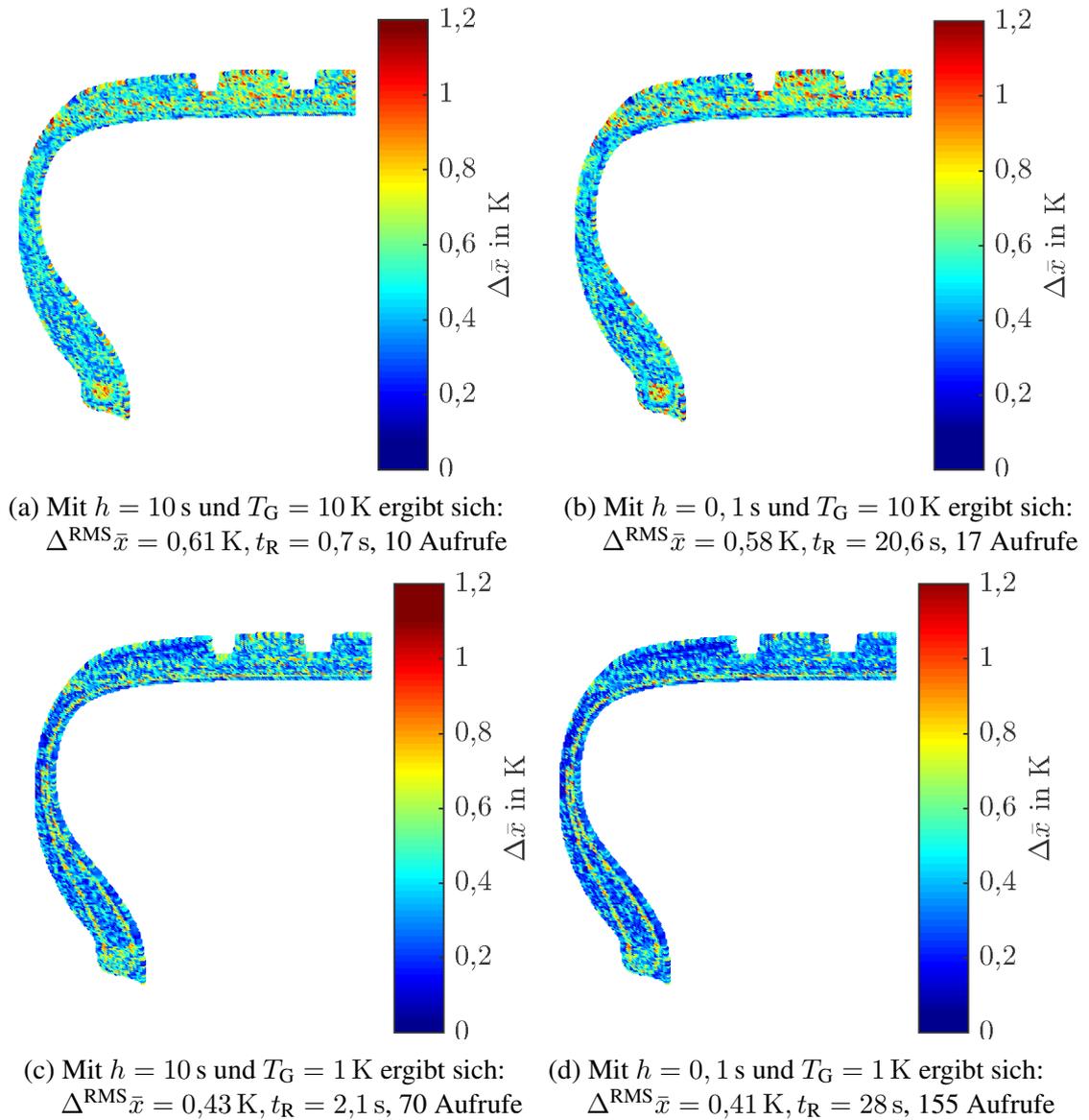


Abbildung 4.23: Beispielhafte zeitlich gemittelte Zustandsfehler $\Delta \bar{x}$ bei der nichtlinearen Abkühlprädiktion für eine Dauer von $t_{\text{end}} = 35$ min, $q_0 = 19$ (TI) und $q_u = 18$ (RK)

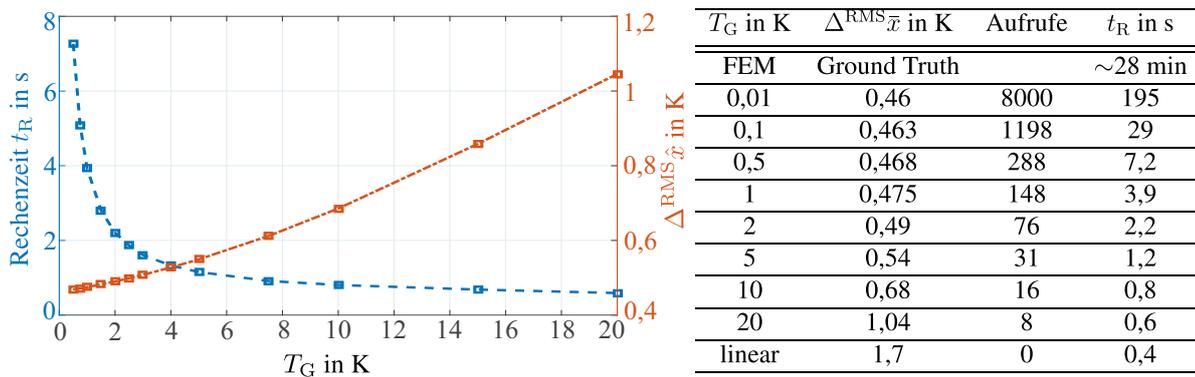


Abbildung 4.24: Rechenzeit und RMS-Fehler in Abhängigkeit des Grenzwertes T_G beim reduzierten NL-Abkühlssystem mit $r_0 = 19$ (TI), $r_u = 18$ (RK) und $T_G = 1$ K [Fra+20]

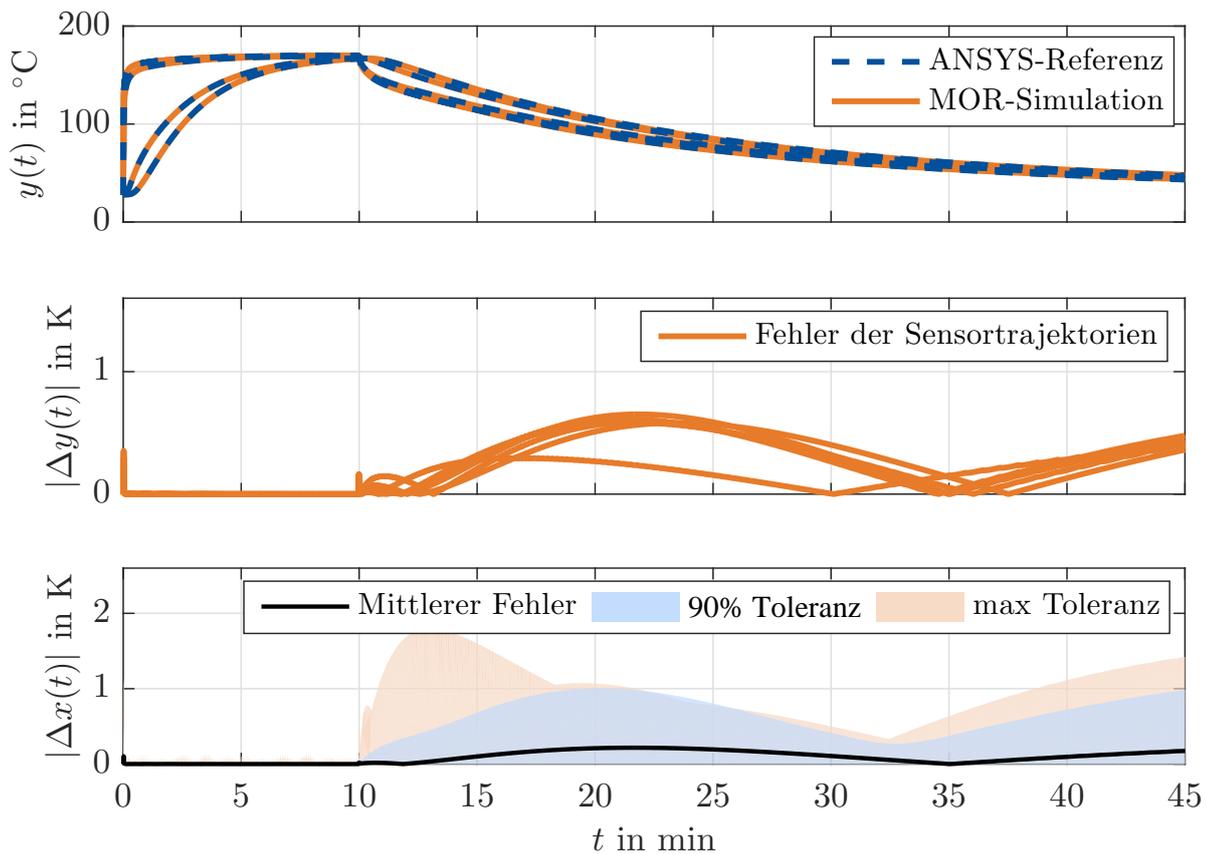


Abbildung 4.25: Zeitlicher Vergleich der Simulation zwischen Gesamtmodell und reduziertem System mit Φ_{Euler} , $T_G = 10$ K, $t_{\text{end}} = 45$ min, $r_0 = 19$ (TI) und $r_u = 18$ (RK) [Fra+20]

5 Beispielhafte Anwendungen der performanten Modellierung

Die Vorteile bei der Verwendung der vorgestellten Systemrealisierung sollen anhand exemplarischer Anwendungsfälle verdeutlicht werden. Dafür werden die Modelle des bestehenden Versuchsstands zur Vulkanisation von Kautschukerzeugnissen mit Hilfe von Messdaten zunächst in Abschnitt 5.1 parametrisiert. Da das dafür notwendige iterative Lösen von Optimierungsproblemen zwar eine hohe Zahl von Simulationsaufrufen erfordert, jedoch in der gesamten Berechnungsdauer nicht fest limitiert ist, kann der Zielkonflikt zwischen Genauigkeit und Berechnungsdauer eher zu Gunsten der Genauigkeit abgestimmt werden. Die gesamte Identifikationsdauer liegt dabei sogar deutlich unter der Dauer einer einzigen Simulation mit vollständigen finite Elemente Modellen. Bei einer späteren Verwendung der bedateten und verifizierten Modelle in der echtzeitfähigen Prozesssimulation ist dagegen eine maximale Berechnungszeit zwingend einzuhalten und der Grenzwert T_G muss entsprechend eingestellt werden. Als Beispiele wird in Abschnitt 5.2 zunächst die Prädiktion des Abkühlvorgangs und anschließend die Schätzung der Oberflächentemperaturverteilung der Heizplatte beschrieben.

5.1 Parametrierung der thermischen Modelle

Die in den vorigen Kapiteln hergeleitete, parameterabhängige Systemrealisierung soll nun im Rahmen von Parameteridentifikationen bedatet und anschließend durch Messungen verifiziert werden. Die geringe Berechnungsdauer einer Simulation erlaubt dabei den Einsatz von Algorithmen mit einer Vielzahl von Iterationen, um die Optimierungsaufgabe numerisch zu lösen. Der Einfluss einzelner Parameter auf den Vulkanisationsprozess unter Laborbedingungen wurde im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse in der Dissertation [Bos21] dargestellt und diskutiert. Zunächst werden die Parameterräume der Modelle sowie die zu minimierende Kostenfunktion definiert. Anschließend werden die eingesetzten Algorithmen und Ergebnisse vorgestellt, welche im Rahmen von [Fra+19] veröffentlicht wurden. Die in Kapitel 4 präsentierte Methode stellt ein neues Verfahren insbesondere zur Bestimmung von temperaturabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten dar. Die genaue Parametrierung von derartigen thermischen Randbedingungen ist oftmals entscheidend für die Simulationsgenauigkeit [Rah+19]. Diese können über Analysen im Bereich der Strömungsmechanik (CFD-Simulationen) numerisch bestimmt werden, was jedoch einen beachtlichen Zeitaufwand darstellt [Mly19]. Daher werden

zur Bestimmung vereinfacht empirische Korrelationen eingesetzt, welche jedoch für komplexe Geometrien oder Umfelder nicht voll umfänglich gültig sind [Mir+13]. Die direkte Bestimmung aus Messdaten zur Modellverifizierung wird lediglich für stark vereinfachte Problemstellungen durchgeführt, da eine vollständige Simulation mit numerischen Modellen pro Simulationsdurchlauf einen hohen Zeitaufwand darstellt [LTT13]. Die performante, modellbasierte Identifikation thermischer Parameter ist daher zentrale Problemstellung bei der Modellierung komplexer thermischer Systeme und Prozesse [ML19].

5.1.1 Formulierung der Parameterräume und des Optimierungsproblems

Die in Kapitel 2 vorgestellte Methode zur Modellierung parametervarianter Systeme ermöglicht die Berücksichtigung von Materialparametern, wie komponentenweise konstante (orthotrope) Wärmeleitfähigkeiten in die entsprechenden Raumrichtungen λ_i , Produkte aus Dichte und spezifischer Wärmekapazität ρc sowie thermische Randbedingungen über die WÜK α_{tot} . Da der Prüfkörper aus einer Mischung mit dem Naturprodukt Kautschuk besteht, treten naturgemäß Schwankungen in den Materialparametern auf. Weiterhin kann durch vorige Prozessschritte, beispielsweise Walz- oder Mischvorgänge, die Dicke oder auch die Materialzusammensetzung variieren. Dabei können die geometrischen Schwankungen in Dickenrichtung mit Hilfe der orthotropen Wärmeleitfähigkeiten berücksichtigt werden. Eine Anpassung der thermischen Randbedingungen im Abkühlvorgang kann je nach Umfeld oder auftretenden Luftströmungen notwendig sein. Zwei Ansatzfunktionen für Ober- und Unterseite werden mit jeweils drei Stützstellen zur Interpolation $\mathbf{p}_\alpha^{\text{PK}} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ verwendet. Der so entstehende Parameterraum des Prüfkörpers \mathcal{P}^{PK} besteht insgesamt aus 9 zu identifizierenden Parametern $(c\rho^{\text{PK}}, \lambda_{\text{quer}}^{\text{PK}}, \lambda_{\text{Dicke}}^{\text{PK}}, \mathbf{p}_\alpha^{\text{PK}}) \in \mathcal{P}^{\text{PK}} \subset \mathbb{R}^9$.

Bei der Heizplatte sind die Leitfähigkeiten der Wärmeübergänge zwischen Heizpatronen und Heizplatte $\lambda_{\text{H-HP}}^{\text{HP}}$ sowie Isolation und Heizplatte $\lambda_{\text{I-HP}}^{\text{HP}}$ unbekannt. Auf Grund des unbekannt inneren Aufbaus der Heizpatronen müssen diese durch Ersatzmaterialparameter $\lambda_{\text{H}}^{\text{HP}}$ und $c\rho_{\text{H}}^{\text{HP}}$ beschrieben werden. Ferner sind die Parameter der WÜK Funktionen $\mathbf{p}_\alpha^{\text{HP}}$ für drei Oberflächenareale (Unterseite, Seitenflächen und Metalloberfläche) zu parametrieren. Daraus ergibt sich je nach WÜK Abbildungsverfahren der Parameterraum $\mathcal{P}^{\text{HP}} \subset \mathbb{R}^{4+n_\alpha}$.

Zur Bestimmung der jeweiligen Parameter $\mathbf{p} \in \mathcal{P}^*$ wird eine Kostenfunktion formuliert, die bezogen auf \mathbf{p} minimiert werden soll. Zielsetzung ist eine möglichst exakte Abbildung der Sensorverläufe $\mathbf{T}_s \in \mathbb{R}^{K \times n_y}$ durch die zugehörige Modellausgänge $\hat{\mathbf{T}}_s \in \mathbb{R}^{K \times n_y}$. Dabei wird über die Anzahl der Zeitschritt K und Anzahl n_y der Sensortemperaturen gemittelt:

$$\min_{\mathbf{p}} J(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{1}{n_y} \sum_{s=1}^{n_y} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K [\hat{T}_{s,k,s}(\mathbf{p}) - T_{s,k,s}]^2}. \quad (5.1)$$

Zusätzlich sind geeignete Nebenbedingungen zu setzen. Für die Materialparameter gelten dabei Ober- und Untergrenzen, welche insbesondere negative Materialparameter ausschließen und allgemein die Zeitdauer zur Lösung des Optimierungsproblems verringern können indem der Suchraum eingeschränkt wird. Für die Parameter zur Beschreibung der WÜK-Funktionen \mathbf{p}_α^* müssen jedoch zusätzliche Einschränkungen getroffen werden. In Abschnitt 4.2.1 wurde die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Zustandsraumes nur unter bestimmten Einschränkungen der WÜK-Funktionen α_{tot} bewiesen. Diese Forderung muss nun über Nebenbedingungen bei der Suche von \mathbf{p}_α^* berücksichtigt werden. Ferner müssen die Verläufe der WÜK-Funktionen physikalisch plausibel sein, was durch einen streng monoton steigenden und ausschließlich positiven Verlauf vorgegeben wird. Zusätzlich muss der Gültigkeitsbereich für die betrachtete Simulation eingeschränkt werden. Dieser gilt von Anfangs- und Umgebungstemperatur T_U bis zu einem Maximaltemperaturwert T_{max} , für den die Forderungen erfüllt sind:

$$\alpha_{\text{tot},i}(T, \mathbf{p}) > 0, \quad \forall T : T_U \leq T \leq T_{\text{max}}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \alpha_{\text{tot},i}(T, \mathbf{p})}{\partial T} > 0, \quad \forall T : T_U \leq T \leq T_{\text{max}}. \quad (5.3)$$

Weiterhin kann aus Gründen der Zeitersparnis ebenfalls der Suchraum über Ober- und Untergrenzen eingeschränkt werden $\text{lb}_i \leq p_i \leq \text{ub}_i$. Hier sind die Grenzen der Polynomkoeffizienten allerdings weniger intuitiv vorzugeben als WÜK-Grenzwerte an Temperaturstützstellen, wodurch sich die Optimierung verlängern kann.

Für die Suche nach einem Minimum eignen sich zur Berücksichtigung der Nebenbedingungen lokale Optimierer wie "Interior-Point" [Wal+06]. Da das Optimierungsproblem nicht konvex ist, besteht die Möglichkeit lediglich ein lokales Minimum zu finden. Auf Grund der schnellen Berechnung und wenn bereits eine gute Beschränkung des Suchraumes vorliegt bspw. bei bekannten Materialschwankungen kann die Verwendung jedoch gerechtfertigt sein. Als Alternative kann die Partikel-Schwarm-Optimierung [KE95] als globales Optimierungsverfahren eingesetzt werden. Beide Verfahren erfordern zur Lösung eine Vielzahl von Simulationsiterationen insbesondere bei den hier vorliegenden Parameterräumen mit Dimensionen von bis zu $n_p = 16$. Auch wenn der lokale Algorithmus in der Regel weniger Iterationen benötigt, ist die Verwendung von numerischen Modell mit hoher Ordnung und Simulationszeiten von mehreren Minuten bis Stunden nicht zweckmäßig. Die in dieser Arbeit vorgestellten performanten und parameterabhängigen Systembeschreibungen eignen sich durch ihre geringe Berechnungsdauer von unter 1 s sehr gut zur Verwendung in diesen Optimierungsaufgaben.

Tabelle 5.1: Identifizierte Materialparameter des Prüfkörpers

Parameter	Wert	Einheit
$\lambda_{\text{Dicke}}^{\text{PK}}$	+6,6%	$\frac{\text{W}}{\text{mK}}$
$\lambda_{\text{quer}}^{\text{PK}}$	+3,3%	$\frac{\text{W}}{\text{mK}}$
$c\rho^{\text{PK}}$	+9,5%	$\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3\text{K}}$

5.1.2 Identifikation am Prüfkörper

Zunächst wird das Modell zur Berechnung der Temperaturverteilung im Prüfkörperquerschnitt parametrisiert. Die Bestimmung der Materialparameter wird während des Heizprozesses vorgenommen, da bei geschlossener Heizpresse keine größeren Übergänge zur Umgebung bestehen, sondern lediglich Kontaktwiderstände zu den Heizplatten. Zur Bestimmung der WÜK Funktionen für das Abkühlmodell werden verschiedene Messungen des Abkühlvorgangs von unterschiedlichen Anfangswerten verwendet. Das Heizmodell wird durch den Block-Krylov-Eingangsraum, gut geeignet für fremderregte Dynamiken, auf eine Ordnung von $q^{\text{PK}} = 21$ reduziert. Die Identifikationsdauer beträgt ca. 5 min bei einem Residuum von $\Delta^{\text{RMS}}\bar{y} = 0,5 \text{ K}$. Für den Abkühlvorgang ergeben sich durch Reduktion die Ordnungen $q_0^{\text{PK}} = 19$ und $q_u^{\text{PK}} = 18$ sowie eine Identifikationsdauer von 11 min bei einem Residuum von $\Delta^{\text{RMS}}\bar{y} = 1,1 \text{ K}$. Die relative Änderung zwischen Datenblattwerten und identifizierten Parametern ist in Tabelle 5.1 dargestellt. Abbildung 5.1 zeigt das Ergebnis der Verifizierung für einen beispielhaften Heizprozess mit anschließender freien Abkühlung an der Umgebungsluft. Für die beiden Sensoren nahe der Mitte des Prüfkörpers zeigen sich gute Übereinstimmungen zwischen Modell und Messung. Ungenauigkeiten sind vor allem auf eine nicht exakte Positionsbestimmung der Sensoren durch Computertomographie zurückzuführen. Die auf Grund der geringeren Wärmeleitfähigkeit des Prüfkörpers vorliegenden steilen Gradienten im Temperaturfeld resultieren bei Positionsungenauigkeiten folglich in größere Fehler. Die hier erzeugten Ergebnisse sind vergleichbar mit den Resultaten aus der vorangegangenen Arbeit [Bos21], bieten jedoch die Übertragungsmöglichkeit auf komplexere Systeme indem andere CAD Daten als Geometrie verwendet werden.

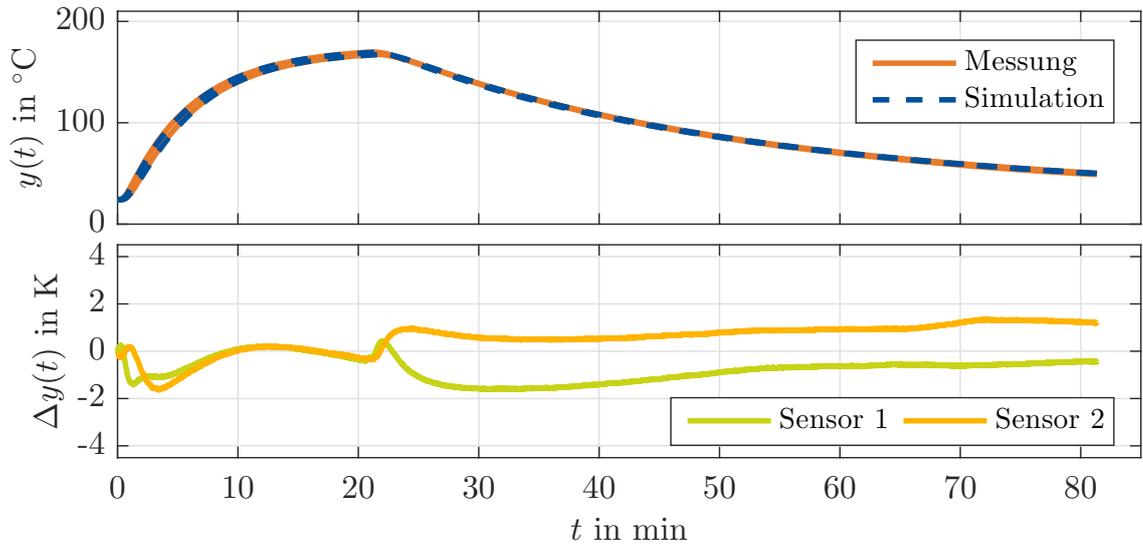


Abbildung 5.1: Verifizierung Prüfkörpermodell für Aufheiz- und Abkühlverhalten [Fra+20]

5.1.3 Bestimmung unbekannter Modellparameter des Heizplattenmodells

Für die Bedatung des Heizplattenmodells sollen zunächst die Leitfähigkeiten der unbekanntenen Wärmeübergänge λ_{H-HP}^{HP} und λ_{I-HP}^{HP} zwischen den Komponenten, wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben, bestimmt werden. Weiterhin sind die Materialparameter der Heizpatronen λ_H^{HP} und $c\rho_H^{HP}$ nicht bekannt und lassen sich durch einen mehrschichtigen Aufbau dieser nur ersatzweise bestimmen. Dafür werden Sprungantworten mit verschiedenen Leistungsvorgaben aufgenommen und besonders der anfängliche transiente Bereich zur Parametrierung verwendet, da in diesem Fall die thermischen Randbedingungen noch eine untergeordnete Rolle spielen und die Wärme sich innerhalb der Heizplatte verteilt. Die aus Datenblättern bereits bekannten Materialparameter gemäß Tabelle 5.2 werden für die restlichen Komponenten verwendet. Für das reduzierte Modell ergibt sich die Dimension $q^{HP} = 138$ mit $n_{nl}^{HP} = 6.404$ Oberflächenzuständen. Für eine 60-minütige Simulationsdauer beträgt bei einem Grenzwert von $T_G = 1$ K und einem Zeitschritt von $h = 5$ s die Berechnungsdauer nur etwa 0,3 s. Die gesamte Identifikationsdauer beträgt für ca. 6.000 Iterationen etwa 30 min bei einem verbleibenden Residuum von $\Delta^{RMS}\bar{y} = 0,7$ K. In Tabelle 5.3 sind die identifizierten Materialparameter dargestellt. Auf Grund der Verknüpfung als Produkt von Dichte und spezifischer Wärmekapazität lassen sich diese nicht getrennt identifizieren. Abbildung 5.2 zeigt die Verifizierungsergebnisse der bestimmten Parameter bei einem vorgegebenen Heizprofil. Es zeigen sich gute Abbildungen im transienten Bereich wobei zu beobachten ist, dass die gemessenen Temperaturen im Übergangsbereich starke Streuungen aufweisen. Dies kann auf unsymmetrische Lage der Heizpatronen oder variierende

Tabelle 5.2: Materialeigenschaften des Heizplattenaufbaus gemäß Datenblatt

Komponente	c in $\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$	ρ in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	λ in $\frac{\text{W}}{\text{mK}}$
Heizplatte	864	2840	130
Heizpatrone	480	7750	15,1
Isolierung	1340	1320	0,25

Tabelle 5.3: Identifizierte Wärmeübergänge und Materialparameter der Heizpatronen

Parameter	Wert	Einheit
$\lambda_{\text{H-HP}}^{\text{HP}}$	260	$\frac{\text{W}}{\text{mK}}$
$\lambda_{\text{I-HP}}^{\text{HP}}$	240	$\frac{\text{W}}{\text{mK}}$
$\lambda_{\text{H}}^{\text{HP}}$	36,2	$\frac{\text{W}}{\text{mK}}$
$c\rho_{\text{H}}^{\text{HP}}$	295,8	$\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3\text{K}}$

Wärmeübergänge zurückgeführt werden, welche in der Simulation nicht berücksichtigt werden können. Die empirisch bestimmten WÜK-Funktionen anhand [Ges06] sind für die drei Oberflächenareale in Abbildung 5.3 dargestellt. Durch den niedrigen Strahlungskoeffizienten der blanken Metalloberfläche ist der Koeffizient an diesen Flächen am geringsten. Durch die bessere vertikale Anströmung der freien Konvektion, zeigt die Seitenwand durchweg den höchsten Wärmeübergangskoeffizienten. Zur Identifikation werden wiederum Sprungantworten verwendet, welche bis in den stationären Bereich aufgenommen werden, sodass sich für verschiedene Temperaturen die dazugehörigen Wärmeübergänge zur Umgebung einstellen. Verschiedene Approximationen der WÜK-Funktionen wurden dabei verwendet. Tabelle 5.4 stellt die Ergebnisse für konstante WÜK $n_{\text{pol}} = 0$, lineare $n_{\text{pol}} = 1$ und kubische $n_{\text{pol}} = 3$ Polynome sowie Spline-Approximierung mit 3 und 5 Stützstellen dar. Mit einer höheren Anzahl von zu bestimmenden Koeffizienten steigt die Anzahl der notwendigen Iterationen und somit auch die Berechnungsdauer deutlich an. Durch die intuitive Vorgabe der Grenzen weisen die Verfahren mit Stützstellen eine verhältnismäßig geringere Optimierungsdauer auf. Sie zeigen weiterhin auch den geringsten Fehler und werden daher im Weiteren verwendet.

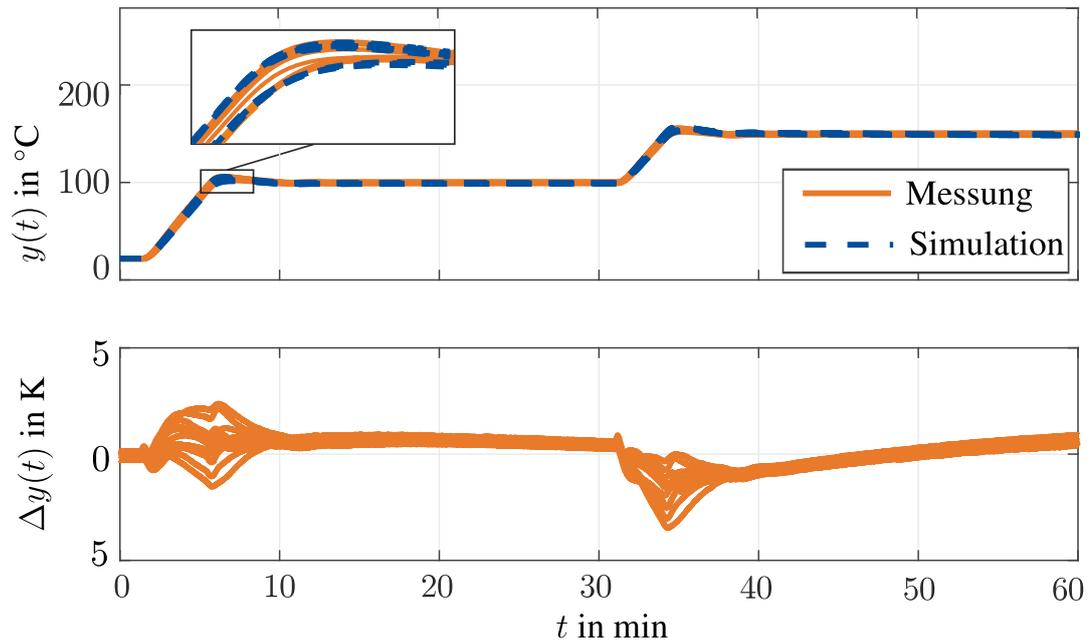


Abbildung 5.2: Beispielhaftes Verifizierungsergebnis bei identifizierten Materialparametern und Wärmeübergängen der Heizplatte [Fra+20]

Tabelle 5.4: Einfluss verschiedener WÜK Abbildungsverfahren auf die Dauer der Identifikation und das Ergebnis der Verifizierung

Abbildung	Fehler in K	Iterationen	Dauer Identifikation in min
Polynom Grad 0	5,3	57	9,7
Polynom Grad 1	2,4	138	17,7
Polynom Grad 3	2,3	396	50,7
3 Stützstellen	1,9	153	20,9
5 Stützstellen	1,7	159	30,7

Abbildung 5.4 zeigt beispielhaft drei vorgegebene Sprungantworten und den gemittelten Sensorfehler sowie das minimale/maximale Toleranzband. Es ergeben sich insbesondere im stationären Zustand sehr gute Identifikationsergebnisse, bei der Verwendung von bereits 3 Stützstellen der Spline-Interpolation. Mit einer Identifikationsdauer von unter 21 min und einem Restfehler von 1,9 K stellt diese Methode eine zufriedenstellende Wahl dar und wird für die beispielhafte Anwendung in Abschnitt 5.2.2 verwendet. Die so identifizierten WÜK Verläufe sind im Vergleich zu den empirisch ermittelten in Abbildung 5.3 dargestellt. Es zeigt sich eine größere

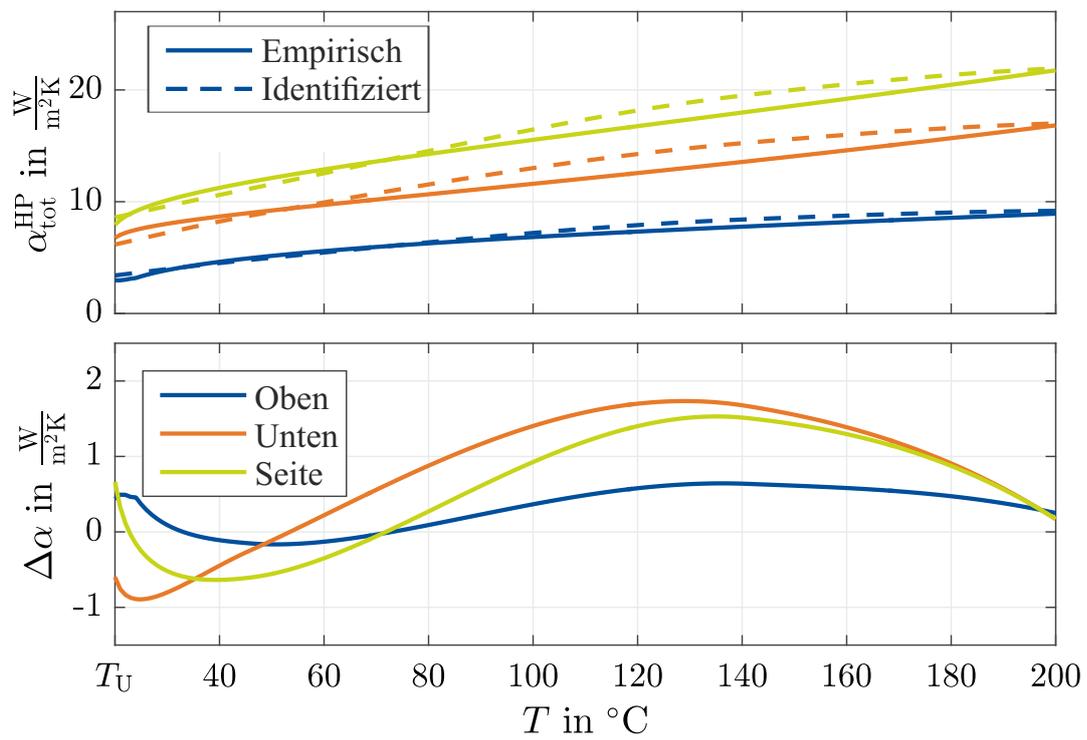


Abbildung 5.3: Empirisch ermittelte WÜK Kennfelder bei freier Konvektion und Strahlung für die drei Oberflächenareale der Heizplatte [Fra+19]

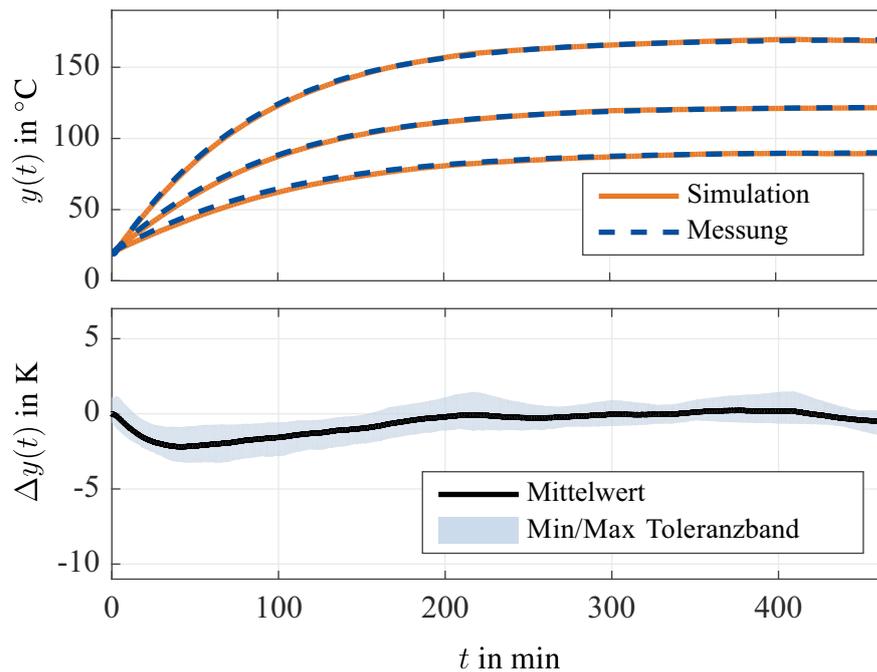


Abbildung 5.4: Sprungantworten zur Identifikation der Randbedingungen [Fra+19]

Abweichung im oberen Temperaturbereich, wobei die identifizierten Parameter einen höheren Wärmeaustausch mit der Umgebung angeben als sich aus den empirischen Abschätzungen nach 2.1.2 ergeben.

Zur Verifizierung aller bestimmten Parameter wird die Heizplatte im zyklischen Betrieb auf verschiedene Temperaturniveaus geheizt und abgekühlt. Gerade für gute Übereinstimmungen während der Abkühlvorgänge ist eine geeignete Parametrierung durch die WÜK entscheidend. In Abbildung 5.5 ist die anfängliche Übereinstimmung mit dem empirisch bestimmten Koeffizienten zu sehen, jedoch ergeben sich mit zunehmender Simulationsdauer höhere Abweichungen. In einem zweiten Szenario wurde die Heizplatte von einer Seite mit einer erzwungenen Luftströmung von etwa $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ beaufschlagt. Diese könnte etwa in einer belüfteten Industriehalle auftreten. Die empirische Ermittlung der WÜK gestaltet sich dadurch aufwendiger, da die Strömungsgeschwindigkeiten gemessen werden müssen. Wie im vorigen Fall werden zunächst Sprungantworten zur Identifikation verwendet. Abbildung 5.6 zeigt die darauffolgenden Verifizierungsergebnisse bei erzwungener Konvektion für das vorige zyklische Temperaturprofil. Die empirische Abschätzung der WÜK fällt in diesem Fall deutlich zu hoch aus, da die Beaufschlagung von erzwungener Strömung direkt von einer Seite zu "Verschattungen" auf der gegenüberliegenden Seite führt. Trotz der Aufteilung in nun fünf verschiedene Oberflächenareale, bei der die verschattete sowie die direkt angeströmte Fläche separat betrachtet werden,

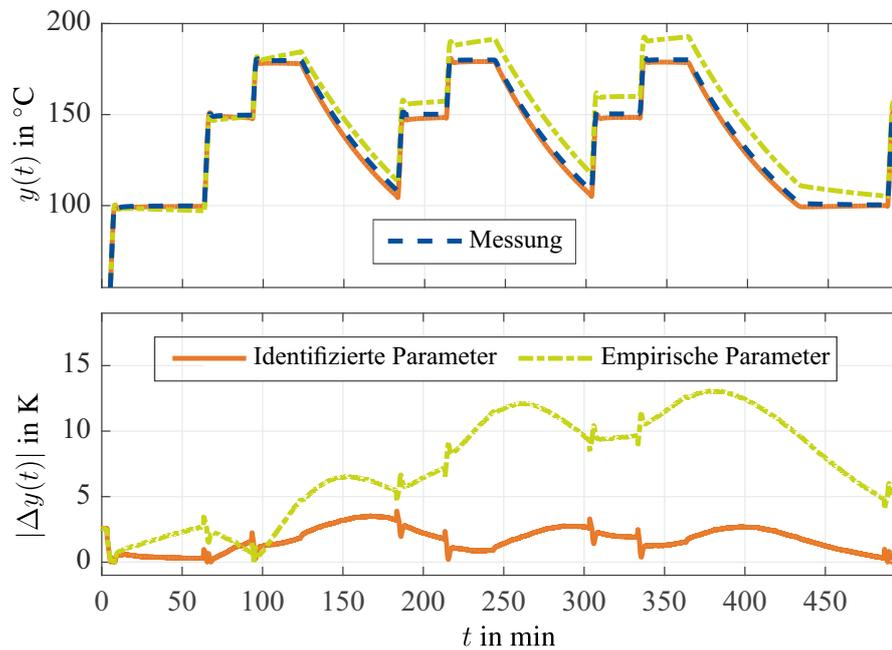


Abbildung 5.5: Verifizierung der freien Konvektion im zyklischen Prozess [Fra+19]

zeigt sich erwartungsgemäß ein großer Vorteil bei der Identifikation der WÜK-Funktionen, da der Parametrierungsaufwand im empirischen Fall vergleichsweise hoch ist. Das so verifizierte Modell der Heizplatte wird im nachfolgenden Abschnitt 5.2 mit freier Konvektion echtzeitfähig im Rahmen einer Schätzung der Oberflächentemperaturverteilung verwendet.

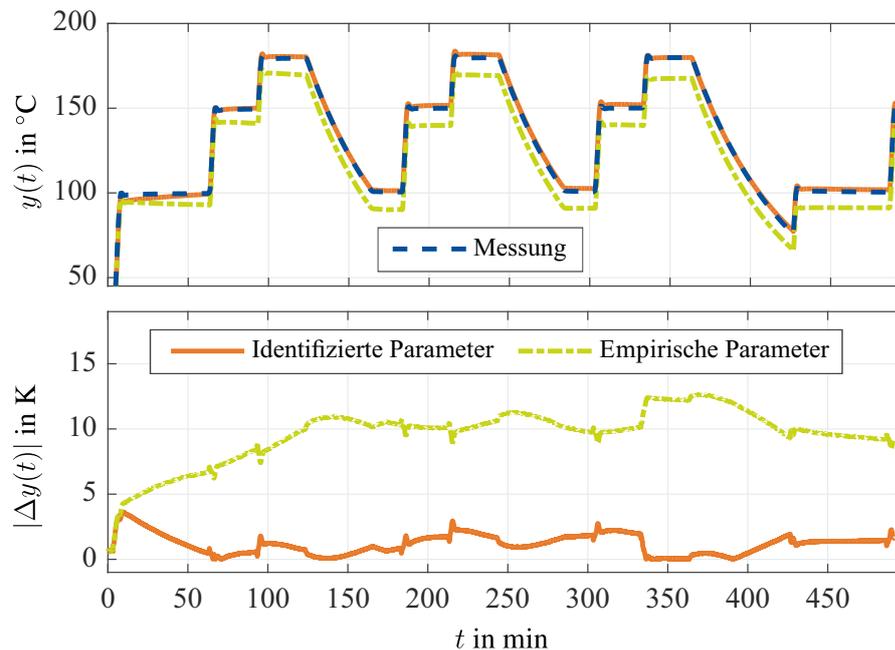


Abbildung 5.6: Verifizierung der erzwungenen Konvektion im zyklischen Prozess [Fra+19]

5.2 Echtzeitfähige Anwendungen

Die erstellten und parametrisierten Modelle weisen durch das vorgestellte Verfahren zur Modellordnungsreduktion deutlich geringere Simulationsdauern als die vollständigen Modelle auf. Dieser Vorteil wird nun im Rahmen der echtzeitfähigen Ausführung exemplarisch verwendet, um mit dem Prüfkörper- bzw. Reifenmodell Prädiktionen über die gesamte Prozessdauer durchzuführen. Diese Anwendung wurde im Rahmen der Konferenzbeiträge [Bos+18; Fra+20] veröffentlicht. Als Alternativansatz wurde die Prädiktion mit künstlichen neuronalen Netzen in [Fra+18] thematisiert, welche jedoch thematisch in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt wird. Als zweite Anwendung wird die Oberflächentemperaturverteilung der Heizplatte mittels Kalman-Filter geschätzt, um eine homogene Temperaturverteilung zu überwachen. Zur Implementierung wurde die echtzeitfähige Software TwinCAT 3 und ein Dell Optiplex 9020, Dual-Core Intel Core i5-4690 3.5 GHz, 32 GB 1600 MHz DDR3 memory, Windows 10, Dell Inc., Round Rock, TX, USA verwendet.

Abbildung 5.7 zeigt die Architektur des Versuchsstandes. Zwei speicherprogrammierbare Steuerungen (SPS) werden mit verschiedenen Taskzykluszeiten betrieben und sind in strukturiertem Text geschrieben. Dabei wird auf der ersten SPS die Prozesssteuerung und Temperaturregelung sowie die Kommunikation mit externen Komponenten wie der grafischen Benutzeroberfläche, der Datenakquise über einen XML-Server und der Datenaustausch mit den in Matlab/SI-

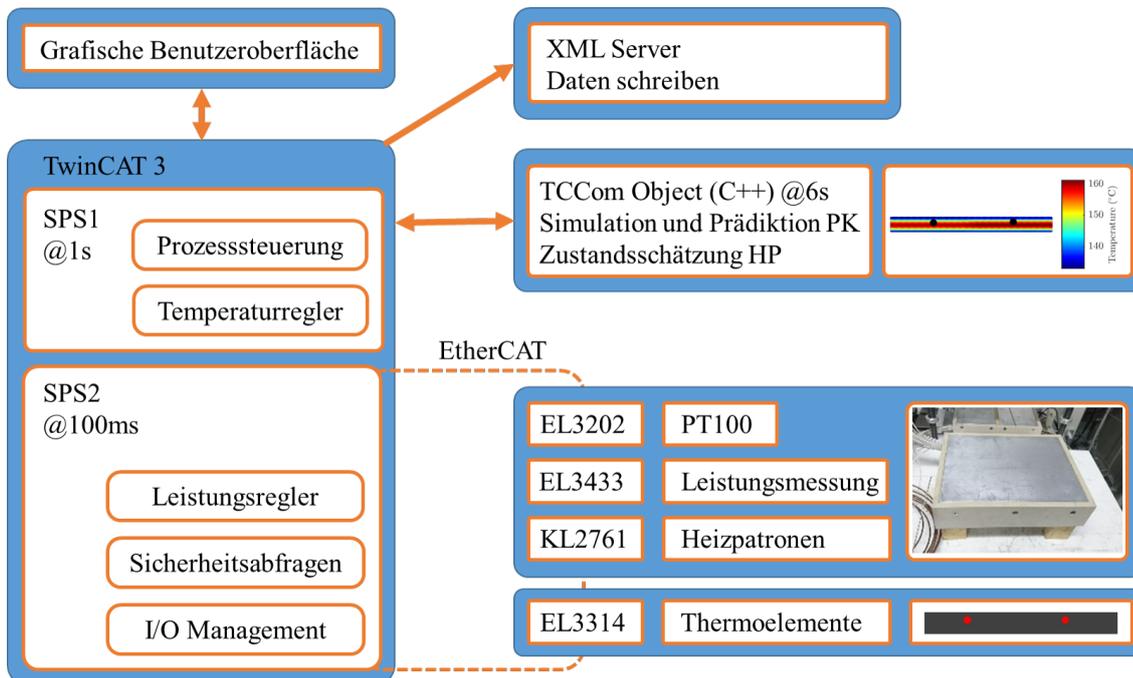


Abbildung 5.7: Architektur des Versuchsstandes

MULINK generierten TCCom Objekten in C++ ausgeführt. Die Objekte werden mit einer Zykluszeit von 6 s ausgeführt, da hier die zeitintensiven Berechnungen stattfinden. Innerhalb der TCCom-Objekte werden die ordnungsreduzierten und verifizierten Modelle der vorherigen Kapitel verwendet. Die zweite SPS ist mit einer schnelleren Zykluszeit umgesetzt und beinhaltet Leistungsregler, Sicherheitsabfragen sowie das Klemmen I/O Management. Die Kommunikation mit den Klemmen erfolgt über einen EtherCAT Bus.

5.2.1 Prädiktion des nichtlinearen Abkühlvorgangs

Der Abkühlvorgang bei der Vulkanisation hat einen entscheidenden Einfluss auf die Vernetzungsreaktionen und somit die abschließende Produktqualität [KV86]. Die aktive Beeinflussung der Vulkanisation findet allerdings während des Heizprozesses über die Vorgabe der Heiztemperaturen sowie der Heizdauer statt. Der nachfolgende Abkühlvorgang an der Umgebungstemperatur erfolgt in der Regel passiv im Umfeld einer belüfteten Industriehalle. Der gesamte Prozessablauf kann im Vorfeld mit Hilfe von Optimierungsverfahren energieeffizient oder qualitätssichernd ausgelegt werden [Bos+18; ACC16; Lab+10]. Um Störungen der Heiztemperaturen durch Prozess- und Materialschwankungen auszugleichen oder wetter- oder saisonbedingte Umgebungstemperaturen zu kompensieren und das vorgegebene Ziel zu erreichen, kann der Prozess mit einer Verlängerung oder Verkürzung der Heizdauer einfach

und schnell adaptiert werden. Direkte Anpassungen der Heiztemperaturen sind auf Grund der langsamen Systemdynamik nur stark eingeschränkt möglich [Bos21]. Zur Festlegung des Heizendes ist die Kenntnis über die Temperaturverteilungen (siehe Abbildung 5.8) bzw. den sich daraus ergebenden Ausheizgrad im aktuellen Zeitschritt notwendig, da bei zu frühem Beenden des Heizprozesses das Produkt noch nicht formstabil entnommen werden kann. Wei-

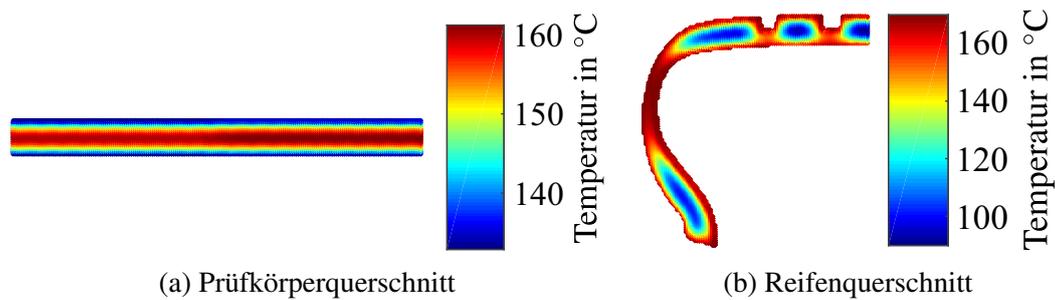


Abbildung 5.8: Beispielhafte Temperaturverteilungen im Heizprozess für den Prüfkörper (a) und den Reifenquerschnitt (b)

terhin muss die Ausheizgradverteilung am Ende des zukünftigen Abkühlens vorliegen, um Minimalanforderungen sicher zu stellen. Da im Endprodukt keine Sensorik vorliegt, kann eine modellbasierte Prädiktion des Abkühlvorgangs in Kombination mit einem Heizmonitoring verwendet werden, um Informationen über die Temperatur- und Ausheizgradverteilungen zu erhalten. Abbildung 5.9 zeigt qualitativ den überwachten und prädizierten Temperaturverlauf an einem Zielpunkt im Produkt.

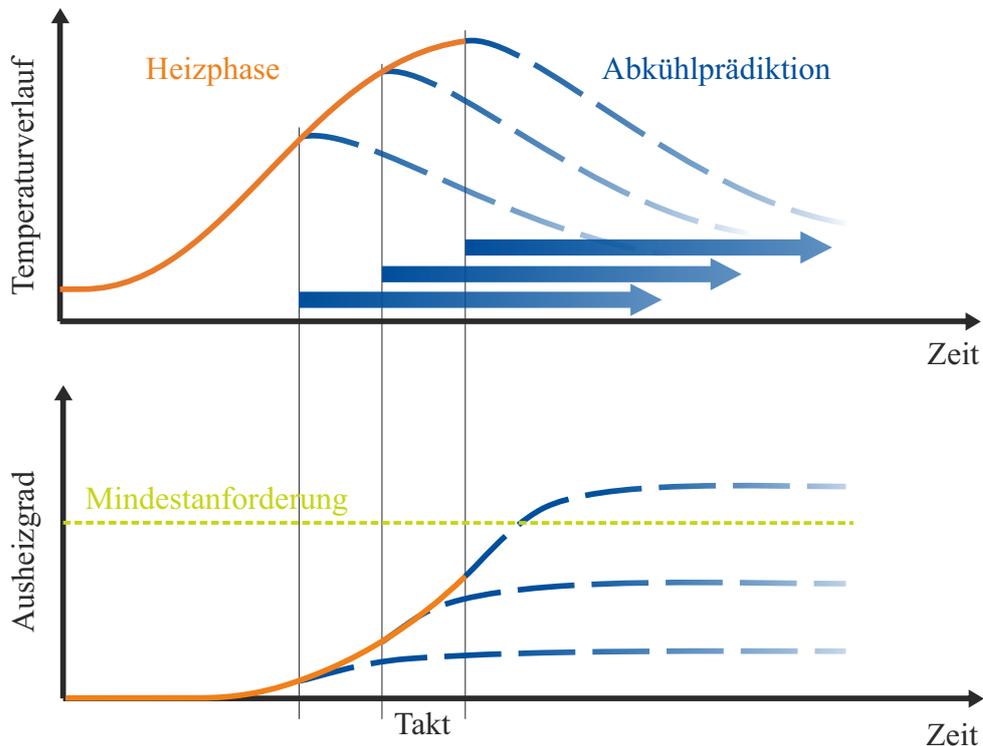


Abbildung 5.9: Schema der Abkühlprädiktion bei Kautschukprodukten

Während jedes Taktes des TCCom Objektes wird das Heizmodell um einen weiteren Zeitschritt gelöst und es findet eine vollständige Simulation des Abkühlvorgangs statt. Die dafür notwendige Berechnungsdauer darf gemäß der Echtzeitbedingung nicht die Länge des Taktes überschreiten. Der in dieser Arbeit vorgestellte Modellierungsansatz bietet nun die Möglichkeit die Simulationsdauer über die Häufigkeit der nichtlinearen Korrektur anzupassen und so diese Anforderung zu erfüllen. Abbildung 5.10 zeigt den Aufbau des TCCom Objektes. Die von der SPS1 übertragenen aktuellen Heiztemperaturen werden als Eingang der linearen Aufheizsimulation verwendet, welche gemäß Taktzeit des Objektes zeitlich diskretisiert wurde. Am Ende des Zeitschrittes werden ausgewählte virtuelle Sensorwerte, welche an den Sensorpositionen von Messreifen liegen, ausgegeben und können zur Verifizierung genutzt werden. Weiterhin wird die bisher erreichte Ausheizgradverteilung ausgegeben. Für die Abkühlsimulation wird die aktuell gemessene Umgebungstemperatur als Eingang verwendet. Ferner ist die aktuelle Temperaturverteilung als inhomogene Anfangsbedingung notwendig. Durch die Transformation

$V_x \in \mathbb{R}^{q_0 \times q_{\text{heiz}}}$ werden im aktuellen Zeitschritt t_{ist} die reduzierten Zustände des Heizmodells $\tilde{x}_{\text{heiz}}(t_{\text{ist}}) \in \mathbb{R}^{q_{\text{heiz}}}$ in die Anfangszustände der Eigenbewegung $\tilde{w}(0) = \tilde{w}_0 \in \mathbb{R}^{q_0}$

$$\tilde{w}_0 = \underbrace{W_0^T V_{\text{heiz}}}_{V_x} \tilde{x}_{\text{heiz}}(t_{\text{ist}}) \quad (5.4)$$

transformiert. V_x weist dabei lediglich die reduzierten Dimensionen auf, sodass die Transformation schnell berechnet werden kann. Gleichung (5.4) gilt allerdings nur wenn beide Modelle denselben unreduzierten Zustandsraum sprich dieselbe örtliche Diskretisierung aufweisen. Andernfalls müssen die Zustandsvektoren noch auf ein gemeinsames Netz aus örtlichen Stützstellen interpoliert werden, sodass eine Übertragung möglich ist. Durch die Abkühlprädiktion innerhalb eines Subsystems kann dann mit eigener Zeitschrittweite unabhängig von der Zykluszeit des Objektes der Ausheizgrad nach dem Abkühlen berechnet werden. In der Überlagerung mit der aktuellen Ausheizgradverteilung ergibt sich somit die Verteilung am Prozessende, welche zur Adaption der Heizdauer verwendet werden kann. Auf diese Weise kann anhand von Regeln, bspw. das Erreichen des Mindestausheizgrades für alle Punkte, das Ende des Heizprozesses angepasst werden. Durch die genaue Festlegung dieses Zeitpunktes ist das Verlängern der Heizdauer aus Sicherheitsgründen nicht mehr notwendig, was zur Reduktion der Prozessdauer sowie zur Energieeinsparung führen kann.

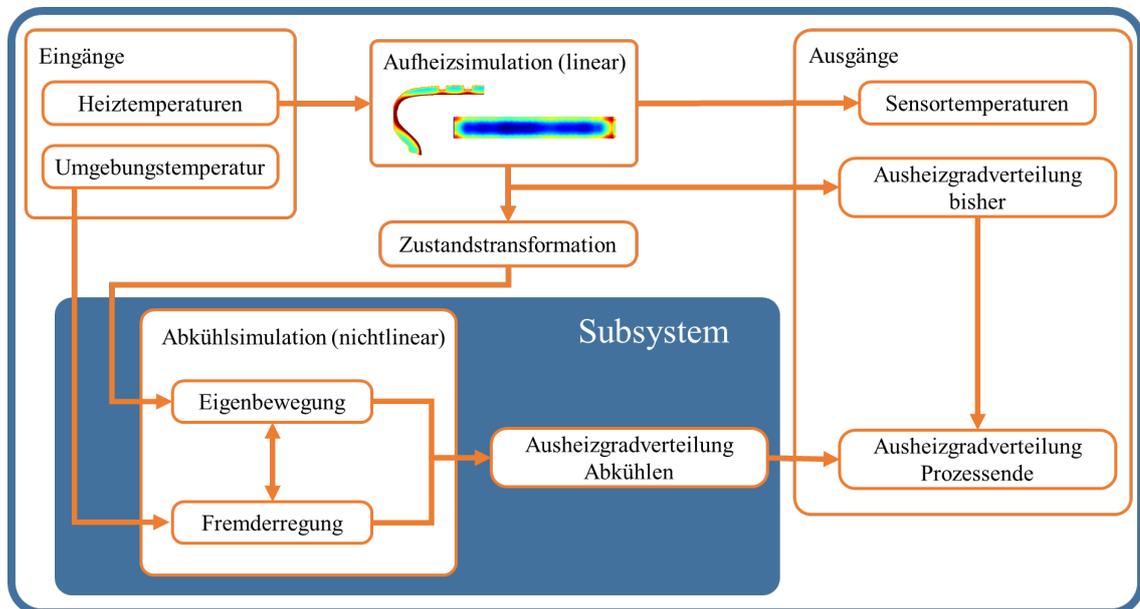


Abbildung 5.10: Aufbau des TCCom Objektes zur Prädiktion

5.2.2 Beobachtergestützte Schätzung der Oberflächentemperaturverteilung

Das in Kapitel 5.1 parametrisierte und durch beispielhafte Prozessverläufe verifizierte Modell der Heizplatte wird im Rahmen einer beobachtergestützten Schätzung der Oberflächentemperaturverteilung verwendet. Dafür wird das Modell zunächst in linearer Form ohne Korrekturterm sowie mit verifizierten Parametern und adaptierter Korrektur in ein TCCom Modul umgewandelt und echtzeitfähig ausgeführt. Die Schrittweite des zeitlichen Diskretisierungsverfahrens implizit Euler wird auf $h = 5\text{ s}$ gesetzt. Im Falle des adaptierten Modells wird ein Grenzwert zur Neuberechnung von $T_G = 1\text{ K}$ verwendet, woraus sich ein mittlerer Approximationsfehler von $0,35\text{ K}$ sowie eine Berechnungsdauer von $1,5\text{ s}$ für einen 140 min langen Prozess ergibt. Abbildung 5.11 zeigt die Sensorverläufe sowie die Abweichung für das linearisierte und das

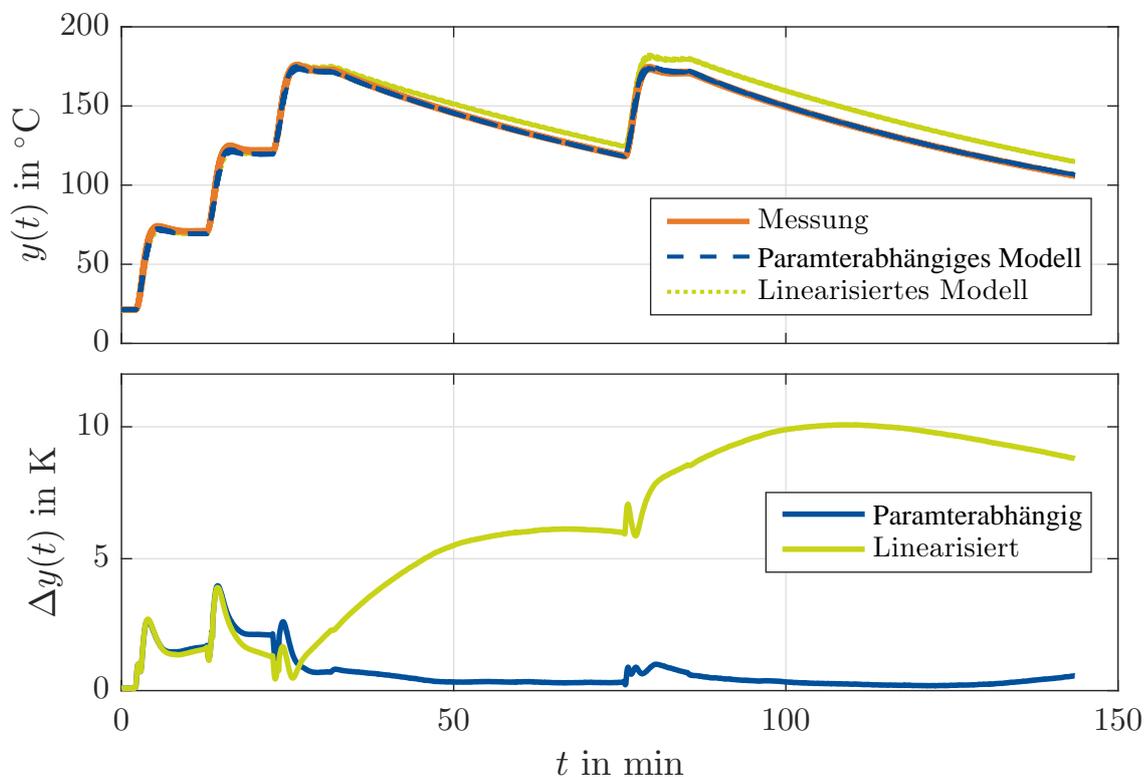


Abbildung 5.11: Temperaturverläufe sowie Abweichungen zwischen aufgenommener Messung und linearisiertem bzw. adaptiertem Modell im echtzeitfähigem Betrieb ohne Rückführung [FWO20]

paramterabhängige Modell. Zwar zeigt sich eine anfänglich relativ gute Übereinstimmung des linearisierten Modells mit dem Messverlauf, diese gilt jedoch nur lokal für den gewählten Arbeitspunkt bei $120\text{ }^{\circ}\text{C}$. Insgesamt bestätigt sich auch im Rahmen der echtzeitfähigen

Ausführung das wesentlich genauere Ergebnis des vorgestellten Modellierungsansatzes. Allerdings zeigen sich besonders in der Anfangsphase der Simulation noch höhere Abweichungen, welche auf Messungenauigkeiten und temporäre Störungen in der Umgebung der Heizplatte zurückgeführt werden kann. Mit Hilfe eines Kalman-Filters wird durch eine Rückführung der Messung und einer Korrektur der Zustände im laufenden Prozess der Einfluss von Prozessungenauigkeiten verringert. Dafür muss die reduzierte Systembeschreibung in der Gleichung zur Berechnung des Prädiktionsschritts im Kalman-Filter verwendet werden. Durch die zeitliche Diskretisierung mit dem impliziten Euler Verfahren ergibt sich die reduzierte, zeitdiskrete Systemmatrix $\tilde{\mathbf{A}}_d \in \mathbb{R}^{q \times q}$

$$\tilde{\mathbf{A}}_d = (\mathbf{I} - h \cdot \tilde{\mathbf{A}}|_{\hat{p}})^{-1} \quad (5.5)$$

und damit die Prädiktionsgleichung

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k^-} = \tilde{\mathbf{A}}_d \tilde{\mathbf{x}}_{k-1} + h \left[\tilde{\mathbf{B}}|_{\hat{p}} \mathbf{u}_{k-1} + \tilde{\mathbf{g}}_i(\mathbf{p}_\alpha^*, \hat{\mathbf{x}}_{\text{nl}}(\tau_i), \mathbf{T}_U(\tau_i)) \right]. \quad (5.6)$$

Die Notation k^- zeigt den Prädiktionsschritt an. Die Beobachtbarkeit muss für das reduzierte System gezeigt werden, da durch die MOR die Systemeigenschaften verloren gehen. Ein zweckmäßiger Ansatz ist die Sicherstellung der Beobachtbarkeit durch den eingeschränkten Wertebereich der Korrekturfunktion. Die zustandsabhängigen Parameterfunktionen können durch obere und untere Schranken begrenzt werden. Auf diese Weise kann die Beobachtbarkeit an verschiedenen Arbeitspunkten, insbesondere an den gewählten Schranken ermittelt werden. Die Beobachtbarkeit nach dem Kalman Kriterium zeigt für das vorliegende System die Beobachtbarkeit und Verwendbarkeit eines Kalman-Filters. Die prädizierte Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{k^-} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ wird berechnet durch

$$\mathbf{P}_{k^-} = \tilde{\mathbf{A}}_d \mathbf{P}_{k-1} \tilde{\mathbf{A}}_d^T + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (5.7)$$

Dabei werden die Anfangswerte \mathbf{P}_0 durch eine empirische Bestimmung auf 0, 1 gesetzt. Die Kovarianz des Prozessrauschens \mathbf{Q} wird als Diagonalmatrix mit den Werten 10 gesetzt. Zur Korrektur wird zunächst ein Temperatursensor $T_{S,k}$ der Heizplatte verwendet. Die restlichen dienen zur Verifizierung der geschätzten Oberflächentemperaturverteilung. Das Residuum der Prädiktion berechnet sich somit über

$$\epsilon_{k^-} = T_{S,k} - \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\mathbf{x}}_{k^-}, \quad (5.8)$$

mit dem Ausgangsvektor $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{1 \times q}$. Die Kalman Verstärkung $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^q$ berechnet sich aus der prädizierten Kovarianz und dem Messrauschen $R = 1$

$$\boldsymbol{\beta}_{k^-} = P_{k^-} \tilde{\mathbf{c}}^T (\tilde{\mathbf{c}} P_{k^-} \tilde{\mathbf{c}}^T + R_k)^{-1}. \quad (5.9)$$

Schließlich erfolgen die Korrekturschritte des Zustandsvektors und der Kovarianzmatrix

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_{k^-} + \boldsymbol{\beta}_{k^-} \epsilon_{k^-}, \quad (5.10)$$

$$P_k = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\beta}_{k^-} \tilde{\mathbf{c}}) P_{k^-}. \quad (5.11)$$

Abbildung 5.12 zeigt die geschätzte Oberflächenverteilung im stationären Zustand mit den

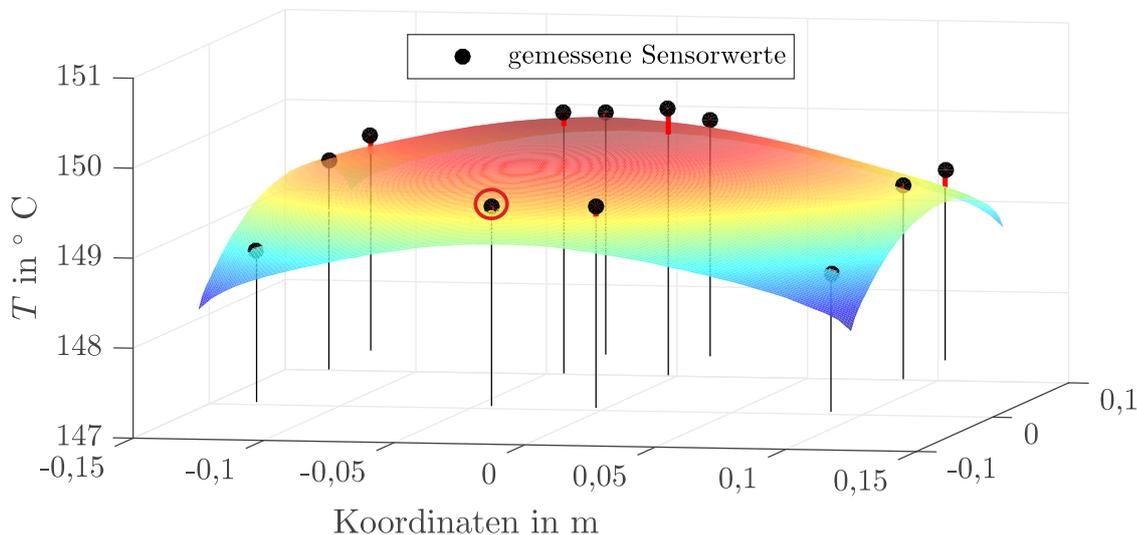


Abbildung 5.12: Geschätzte Oberflächentemperatur $\hat{T}_{\text{Al,surf}}$ im Vergleich zu den Sensorwerten T_{S} [FWO20]

eingezeichneten gemessenen Sensorwerten. Rot umrandet ist der zur Korrektur verwendete Temperatursensor im Randbereich. Die Abbildung 5.13 zeigt die Abweichungen zwischen den geschätzten und gemessenen Sensortemperaturen zum selben Zeitpunkt wie Abbildung 5.12. Insbesondere auf Seite des zur Korrektur verwendeten Sensors zeigt sich eine sehr kleine Abweichung. Etwas höher liegen die Werte auf der anderen Heizplattenseite, was durch einen unsymmetrischen Aufbau bzw. unsymmetrische Luftströmungen um die Heizplatte begründet werden kann und lediglich der gegenüberliegende Sensor zur Rückführung verwendet wird. Beispielhafte Prozessverläufe unter der Verwendung eines Kalman-Filters sind in Abbildung 5.14 gezeigt. Für die beiden dargestellten Verläufe ist der zeitlich gemittelte Fehler zwischen prädizierten und gemessenen Sensorwerten in Abbildung 5.15 dargestellt. Es zeigt

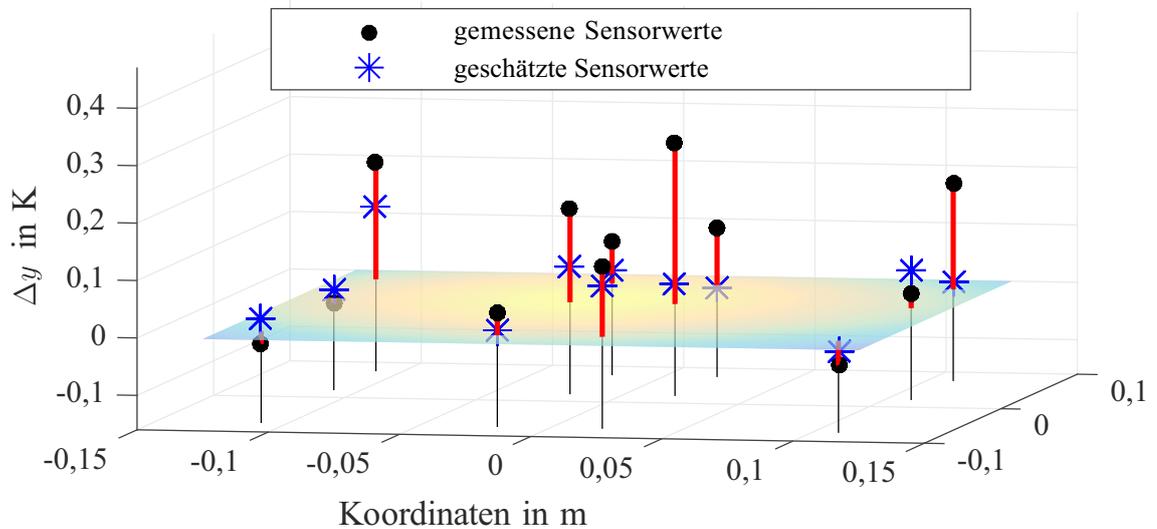


Abbildung 5.13: Abweichung zwischen geschätzten und gemessenen Temperaturen zum in Abbildung 5.12 dargestellten Zeitpunkt

sich die bereits festgestellte unsymmetrische Fehlerverteilung auf Grund unsymmetrischer Luftströmungen und unregelmäßigem Einbau der Heizpatronen. Weiterhin zeigen sich besonders im Übergangsbereich der einzelnen Temperaturniveaus größere Abweichungen. Dies ist zurückzuführen auf eine stark streuende Messung unter den Temperatursensoren. Zusammenfassend ist die echtzeitfähige Schätzung von Temperaturverteilungen mit den ordnungsreduzierten Modellen auf einer industriellen Steuerung umgesetzt und verifiziert worden, was bisher mit derart komplexen Ausgangsmodellen nicht erreicht werden konnte [FWO20].

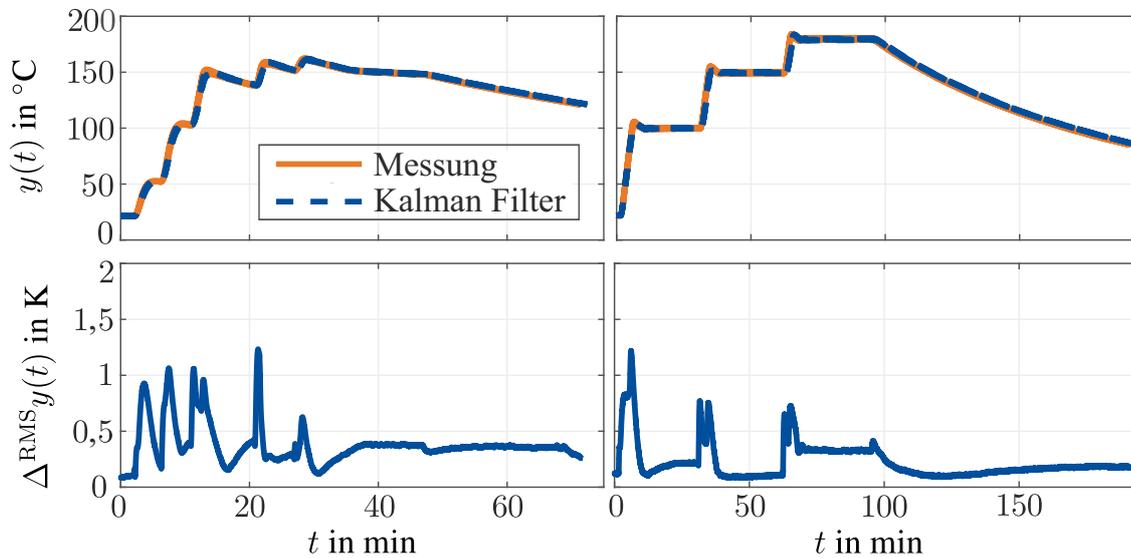


Abbildung 5.14: Beispielhafte Heizverläufe und Abweichungen zwischen gemessenen T_S und geschätzten Temperaturwerten \hat{T}_{sim} an den Sensorpositionen [FWO20]

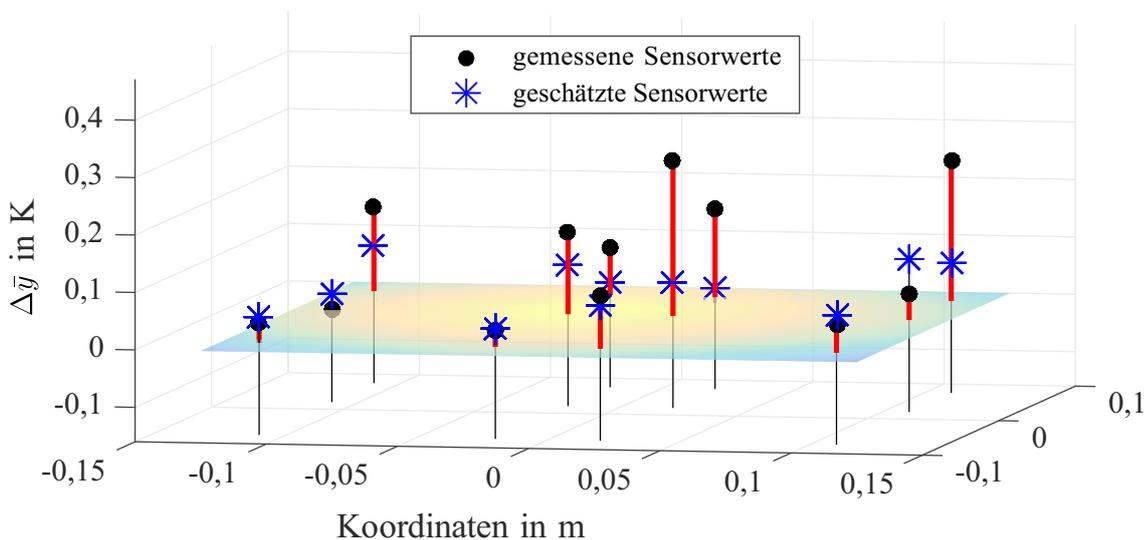


Abbildung 5.15: Gemittelte Abweichungen zwischen gemessenen und geschätzten Temperaturen für die Verläufe aus Abbildung 5.14 [FWO20]

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die recheneffiziente, thermische Modellierung von Systemen oder Prozessen stellt in vielen industriellen Anwendungen eine Herausforderung dar. Vielfach werden vereinfachende Annahmen wie z.B. Linearisierungen oder Symmetrieeffekte verwendet, welche jedoch ein erweitertes Prozessverständnis voraussetzen oder kritische Effekte vernachlässigen können. Sind diese Annahmen auf Grund des Prozesses nicht zulässig oder liegen komplexe Geometrien aus mehreren Komponenten mit schwankenden Parametern vor, ist unter Umständen eine parametervariante Modellierung mit einer Vielzahl von Zustandsgleichungen notwendig. Diese hohe Modellkomplexität erfordert eine hohe Berechnungsdauer, um eine ausreichend hohe Genauigkeit erreichen. Für modellbasierte Regelungsmethoden wie z.B. Zustandsschätzung oder prädiktive Verfahren gelten allerdings harte Echtzeitanforderungen, welche durch die hohen Simulationszeiten nicht eingehalten werden können. Weiterhin erfordern iterative Lösungsverfahren für Optimierungsprobleme und Parameteridentifikationen viele Simulationsdurchläufe in kurzer Zeit, wodurch eine Verwendung von großen Modellen ebenfalls nicht möglich ist. Im Rahmen dieser Dissertation wurde ein Verfahren entwickelt, wodurch der zentrale Zielkonflikt zwischen Berechnungsdauer und Genauigkeit parametrisiert werden kann. Auf diese Weise ist es erstmalig möglich räumliche Temperaturverteilungen in Echtzeit auf industriellen Steuerungen zu berechnen und innerhalb der Prozessregelung und -überwachung zu verwenden. In diesem Kapitel werden die wichtigsten Methoden und Ergebnisse zunächst zusammengefasst und anschließend darauf aufbauend ein Ausblick formuliert.

6.1 Zusammenfassung

Ausgangspunkt für eine performante, thermische Modellierung stellt die Geometrie eines zu betrachteten Systems dar. Für diese Geometrie, welche oftmals im Rahmen von CAD-Daten vorliegt, wird die partielle Wärmeleitungsgleichung mit thermischen Randbedingungen aufgestellt. Diese zunächst unendlich-dimensionale Gleichung wird durch örtliche Diskretisierung mit finiten Elementen in einen endlich-dimensionalen Zustandsraum aus Knotentemperaturen überführt. Dazu werden lineare, numerische Elementmatrizen, welche das thermische Verhalten jedes einzelnen finiten Elements beschreiben, aufgestellt und anschließend zusammengesetzt. Durch dieses numerische Verfahren liegen allerdings keine physikalisch interpretierbaren Parameterabhängigkeiten mehr vor, weshalb diese aus einer affinen Kombination von numeri-

schen Matrizen an verschiedenen Stützstellen interpoliert werden. Anschließend ergibt sich ein linear parametervariantes System aus Zustandsgleichungen, welche neben ausgewählten Materialparametern auch zustandsabhängige thermische Randbedingungen aus Konvektion und Wärmestrahlung enthält. Durch einen Separationsansatz wird das Gleichungssystem in einen linearen und einen parameterabhängigen Teil aufgespalten. Die Abweichung der an einem beliebigen Arbeitspunkt linearisierten Matrizen zum tatsächlichen Arbeitspunkt wird somit durch eine zustandsabhängige additive Korrekturfunktion kompensiert. Grundvoraussetzung hierfür ist die affine Struktur der thermischen Systeme.

Eine nachfolgend durchgeführte Modellordnungsreduktion überführt die hochdimensionale, vollständige Systembeschreibung in eine reduzierte, performante Realisierung. Inhomogene Anfangsbedingungen, wie sie insbesondere bei der Abkühlsimulation nach dem Heizprozess auftreten, werden durch Superposition aus Eigen- und Fremddynamik abgebildet, um sie in den reduzierten Modellen berücksichtigen zu können. Zur Reduktion von linearen Systemrealisierungen existieren eine Vielzahl von mathematischen Verfahren. Auf die vorliegenden LPV-Systeme sind diese jedoch nicht direkt anwendbar. Parametrische Reduktionsverfahren sind für LPV-Systeme zwar geeignet, verwenden allerdings Zustandstrajektorien („snap-shots“) der unreduzierten Systeme für verschiedene Parameterstützstellen oder interpolieren zwischen mehreren gewichteten, reduzierten Realisierungen. Dies erfordert entweder bereits validierte Originalmodelle oder ist für eine hohe Zahl von variierenden Parametern mit viel Rechen- und Speicheraufwand verbunden.

Eine vielversprechende Alternative liefert das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren, bei dem die separierte Systemdarstellung verwendet wird. Die Projektoren zur Modellordnungsreduktion werden dabei für den linearen Systemteil berechnet und auch in der Korrekturfunktion angewendet. Eine Vielzahl von Reduktionsverfahren wurde hinsichtlich aufgestellter Anforderungen und Gütekriterien untersucht und ein passender Ansatz für die jeweilige Dynamik ausgewählt. Dabei ist grundsätzlich zwischen den Zielvorgaben zu unterscheiden, ob eine genaue Abbildung der Systemausgänge oder aller Zustände erfolgen soll. Bei der Rekonstruktion aller Zustände bzw. ausgewählter Temperaturverteilungen eignen sich insbesondere Eingangsblock-Krylovräume für die Fremddynamik sowie rechtsseitige tangentielle Interpolation für die Eigendynamik. Weiterhin muss die reduzierte Ordnung zur besseren Zustandsabbildung etwas höher gewählt werden.

Da zur Berechnung der nichtlinearen Korrekturfunktion die reduzierten Zustände in den Originalraum und wieder zurück transformiert werden müssen, ergibt sich durch die reine Separation und Reduktion zunächst keine Einsparung bei der Berechnungsdauer. Als Lösungsansatz wird die Korrekturfunktion lediglich für die Zustände mit nichtlinearem Einfluss berechnet und von der zeitlichen Diskretisierung entkoppelt. Die Korrekturfunktion wird daher abschnittsweise in einem Zeitintervall konstant gehalten und nur neu berechnet, wenn die absolute Änderung

eines nichtlinear beeinflussten Zustands einen definierten Grenzwert übersteigt. Damit entsteht ein parametrierbarer Kompromiss aus Abbildungsgenauigkeit und Berechnungsdauer, welcher zur Laufzeit der Simulation angepasst werden kann ohne die Modelle zu verändern oder neu zu diskretisieren. Für einzelne Simulationen ohne Grenze der Berechnungsdauer kann folglich eine hohe Genauigkeit erzielt werden, wenn der Grenzwert zur Neuberechnung gering gewählt wird. Einschränkungen durch Echtzeitfähigkeitsbedingungen oder eine Vielzahl von notwendigen Iterationen zur Lösung von Optimierungsproblemen erfordern hingegen eine hohe Performanz und dementsprechend einen höheren Grenzwert.

Die so reduzierten Systemrealisierungen werden anschließend mit verschiedenen Verfahren zeitlich diskretisiert. Bei der gegebenen Problemstellung sind implizite Lösungsverfahren besser geeignet, da diese einen größeren Stabilitätsbereich aufweisen und die Zeitschrittweite somit deutlich höher gewählt werden kann als bei expliziten Verfahren. Der höhere Berechnungsaufwand der implizierten Verfahren kann auf diese Weise ausgeglichen werden. Trotz der höheren Zeitschrittweiten zeigt sich nur ein geringer Anstieg des gemittelten Zustandsfehlers zwischen reduziertem und vollständigem Modell. Weiterhin wurde der Einfluss des Grenzwertes zur Neuberechnung der Korrekturfunktion quantifiziert. Dieser hat die größten Auswirkungen auf Genauigkeit und Rechenaufwand und ermöglicht somit eine Parametrierung des Zielkonfliktes je nach Anforderungen.

Die entwickelte Modellierungs- und Simulationsmethode wird durch die Anwendung auf einen Vulkanisationsprozess von Kautschukerzeugnissen exemplarisch anhand von Messungen überprüft. Zur Herstellung von Kautschukerzeugnissen werden diese in viskoelastischer Form in eine Heizpresse eingelegt und anschließend unter Druck geformt und beheizt. Die so zugeführte Wärme führt zu chemischen Vernetzungsreaktionen, welche das Materialverhalten zu elastischen Charakteristiken überführen. Nach Beendigung des Heizprozesses werden die Produkte aus der Heizpresse entnommen und kühlen in der Regel an der Umgebungsluft ab. Währenddessen finden gerade im Inneren noch weitreichende Vernetzungsreaktionen statt, sodass auch der Abkühlvorgang einen signifikanten Einfluss auf die Produktqualität hat. Zur Quantifizierung dieser kann der Ausheizgrad aus der zeitlichen Temperaturverteilung berechnet werden. Da allerdings im Kautschukerzeugnis keine Sensorik vorliegt, muss diese Verteilung modellbasiert berechnet werden. Ebenfalls von entscheidendem Interesse ist die Oberflächentemperaturverteilung der Heizpresse, da nur durch eine exakte Einhaltung der Prozessvorgaben das gewünschte Endergebnis im Kautschukprodukt erreicht werden kann.

Die reduzierten und zeitlich diskretisierten Modelle von Kautschukprobe und Heizplatte werden im Rahmen einer Identifikation bedatet. Dabei sind insbesondere Materialeigenschaften, Wärmeübergänge und thermische Randbedingungen bei Heizplatte und Kautschukerzeugnissen relevant. Ein Laboraufbau aus Heizplatte und Prüfkörper liefert dabei die notwendigen Messdaten. Zur Identifikation wurden Sprungantworten der Heizplatte sowie Prozesse mit dem

Prüfkörper verwendet. Als zu minimierende Kostenfunktion wurde die Abweichung zwischen gemessenen Sensortemperaturen und den Systemausgängen verwendet. Der transiente Bereich bei der Heizplatte dient zur Ermittlung der Wärmeübergänge zwischen Aluminiumblock und Isolation sowie Heizpatronen und zur Identifikation der Materialparameter der Heizpatronen. Selbiges gilt für Materialparameter des Prüfkörpers. Das stationäre Verhalten sowie der Abkühlvorgang dienen zur Identifikation der temperaturabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten. Diese wurden durch Polynome und kubische Splines approximiert, wodurch identifizierbare Parameter erzeugt wurden. Im Vergleich zu empirisch bestimmten Wärmeübergangskoeffizienten weisen beide Modelle in Validierungsprozessen deutlich höhere Genauigkeiten auf. Dieser Identifikationsansatz zur Bestimmung temperaturabhängiger Randbedingungen und thermischer Übergänge verwendet erstmalig reduzierte Modelle mit mehreren variierenden Parametern(-funktionen) in einem iterativ gelösten Optimierungsproblem und ist abschließend erfolgreich validiert worden.

Die validierten Modelle der Heizplatte und der Kautschukprobe werden anschließend in echtzeitfähigen Methoden auf einer industriellen Steuerung verwendet. Die Kautschukprobe wird während des Heizprozesses modellbasiert überwacht, sodass zu jedem Zeitpunkt die aktuelle Temperaturverteilung sowie der bisher erreichte Ausheizgrad berechnet wird. Weiterhin findet in jedem Takt eine Prädiktion des Abkühlvorgangs statt, um die Ausheizgradverteilung nach dem Ende des Vulkanisationsprozesses bereits beim Aufheizen zu berechnen. Diese Ergebnisse sind besonders wertvoll, da nur während des Heizprozesses aktiv auf den Prozess Einfluss genommen werden kann. Die Heizdauer kann folglich so angepasst werden, dass gegenüber der aktuellen Umgebungstemperatur ein robustes Endprodukt hergestellt werden kann. Bisher konnten im Stand der Forschung während des Vulkanisationsprozesses keine Angaben über den Stand der Ausheizgradverteilung gemacht werden, weshalb zur Erreichung eines robusten Prozessziels die Heizdauer pauschal um eine Sicherheitsmarge erhöht wurde. Eine zweite Einsatzmöglichkeit stellt die beobachtergestützte Schätzung der Oberflächentemperaturverteilung der Heizplatte dar. Die performante Systemrealisierung der Heizplatte wird in einem Kalman-Filter verwendet, bei dem ein Temperatursensor als Korrektur dient und die weiteren elf zur Validierung der geschätzten Temperaturverteilung. Es zeigen sich gute Validierungsergebnisse und eine deutliche höhere Genauigkeit als bei den empirisch parametrisierten Modellen. Beide Anwendungsfälle bestätigen somit die Verwendbarkeit und Vorteile des entwickelten parametrisierbaren Modellierungsansatzes zur Lösung des zentralen Zielkonfliktes zwischen der Modellgenauigkeit/-komplexität und der Berechnungsdauer.

6.2 Ausblick

Der in dieser Arbeit entwickelte Modellierungs- und Simulationsansatz zeigt unter Laborbedingungen bei Vulkansiationsprozessen vielversprechende Ergebnisse. Die modellbasierten Methoden zur Prädiktion und Zustandsschätzung können dabei echtzeitfähig und mit ausreichender Genauigkeit umgesetzt werden. Die im industriellen Umfeld stattfindenden Prozesse weisen allerdings eine höhere Komplexität auf und sind besonders durch mehrere und längere Übergangsphasen zwischen Prozessschritten gekennzeichnet. Hierbei sind insbesondere die vorgestellten Parameterierungsmöglichkeiten im Rahmen der modellbasierten Identifikation hilfreich, um diese Effekte automatisiert zu parametrieren und abzubilden. Erste Versuche zur Identifikation von Abkühlrandbedingungen im industriellen Umfeld und unter Berücksichtigung verschiedener Zwischenschritte in der Prozesskette zeigen gute Übereinstimmungen, müssen allerdings anhand von weiteren Messungen validiert werden.

Weiterhin ist das schnelle Adaptieren der Modelle bei im Vorfeld gemessenen Parameterschwankungen vorteilhaft bei der genauen Prozessüberwachung. Die Methode kann im Rahmen weiterer Untersuchungen mit komplexeren Prozessabläufen und aufwendigeren Prüfkörpern aus verschiedenen Materialien und Geometrien evaluiert werden. Hierbei können insbesondere additive Herstellungsverfahren verwendet werden, um Aktorik und Sensorik direkt in die Prüfkörper einzubringen und eine hohe Probenvielfalt zu realisieren. Eine weitere Verwendung der performanten Modellierung liegt in der Optimierung von Komponenten bezüglich Geometrie- oder Materialparametern, um aufwendige experimentelle Studien zu ersetzen und Zielvorgaben bei der späteren Verwendung mit einzubinden. Durch den Einsatz reduzierter Modelle lässt sich auf diese Weise bereits im Entwicklungsprozess deutlich an Simulationszeit sparen. Denkbar sind hier die Auslegung von Komponenten hinsichtlich gezielter thermischer Vorgaben wie beispielsweise bei der Fertigung von Isolationsmaterial.

Neben einer Anwendung auf Vulkanisationsprozesse lässt sich die entwickelte Methode auch auf weitere Prozesse, die unter dem Einfluss der Temperatur stehen, übertragen. Insbesondere im Kontext der Industrie 4.0 findet eine zunehmende Verwendung von modellbasierten Verfahren zur Auslegung, Optimierung, Überwachung und Regelung von Systemen statt. Dabei besteht jedoch immer die Voraussetzung, dass die verwendeten Modelle bzw. Simulationen auch auf eingeschränkter Hardware wie industriellen Steuerungen ausführbar sind. Die Anpassung der Berechnungsdauer hinsichtlich Echtzeitvorgaben ermöglicht hierbei verschiedene Anwendungsfelder wie zum Beispiel Zustandsschätzer zur Detektion von thermischen Störungen oder zur Rückführung von Temperaturverteilungen beim Einsatz von Prozessregelungen. Die in im Rahmen dieser Dissertation vorgestellte Methode bietet damit das Potenzial innerhalb vielfältiger Industrieprozesse verwendet zu werden und einen Beitrag zur fortschreitenden Digitalisierung der Produktionskette zu leisten.

Anhang

A.1 Ausheizgrad bei der Vulkanisation von Kautschukerzeugnissen

Der Ausheizgrad quantifiziert die während der Vulkanisation abgelaufenen chemischen Vernetzungsreaktionen innerhalb des Kautschukerzeugnisses. Durch Berechnung des Ausheizgrades bzw. der Ausheizgradverteilung können Rückschlüsse auf die erreichte Steifigkeit der jeweiligen Materialkomponente gezogen werden. Er ist somit ein indirektes Maß für den Prozesserfolg sowie die Produktqualität.

Zur Berechnung bei Kautschukerzeugnissen wird in der Regel das Equivalent Cure Concept (ECC) verwendet [DGPM00; Stu97]. Bei dieser Methode wird die im Material auftretende Temperatur T mit einer Referenztemperatur T_r verglichen. Daraus kann ein Zeitäquivalent t_{eq} in ETmin bestimmt werden, welches angibt wie lange die auftretende Temperatur gehalten werden muss, um den gleichen Ausheizgrad wie beim Referenzprozess zu erreichen. Aus der Aktivierungsenergie der chemischen Reaktion E_A sowie der allgemeinen Gaskonstante R ergibt sich für zeitabhängige Temperaturen $T(t)$ im Material

$$t_{\text{eq}} = \int_0^t e^{\frac{E_A}{R} \left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T(t)} \right)} dt. \quad (\text{A.1})$$

Abbildung A.1 stellt eine beispielhafte Messung von zwei Sensortemperaturen und den daraus berechneten Ausheizgrad in ETmin dar. Es zeigt sich, dass erst nach dem Überschreiten von Temperaturen über 120 °C chemische Vernetzungsreaktionen starten und bei höheren Temperaturen immer schneller stattfinden. Weiterhin findet ein Großteil der Reaktionen durch die geringe Wärmeleitfähigkeit des Materials auch während des Abkühlvorgangs statt, sodass Aufheiz- und Abkühlvorgang immer für eine Berechnung des Endausheizgrades berücksichtigt werden müssen.

Ziel des Vulkanisationsprozesses ist es eine vorig definierte Ausheizgradverteilung im gesamten Produkt bestmöglich zu erreichen. Eine Minimalvorgabe muss in jedem Fall eingehalten werden, da das Material sonst im viskoelastischen Zustand verbleibt. Deutliches Überschreiten des Endausheizgrades kann wiederum zu einer Zerstörung der Molekülketten und des Produktes führen.

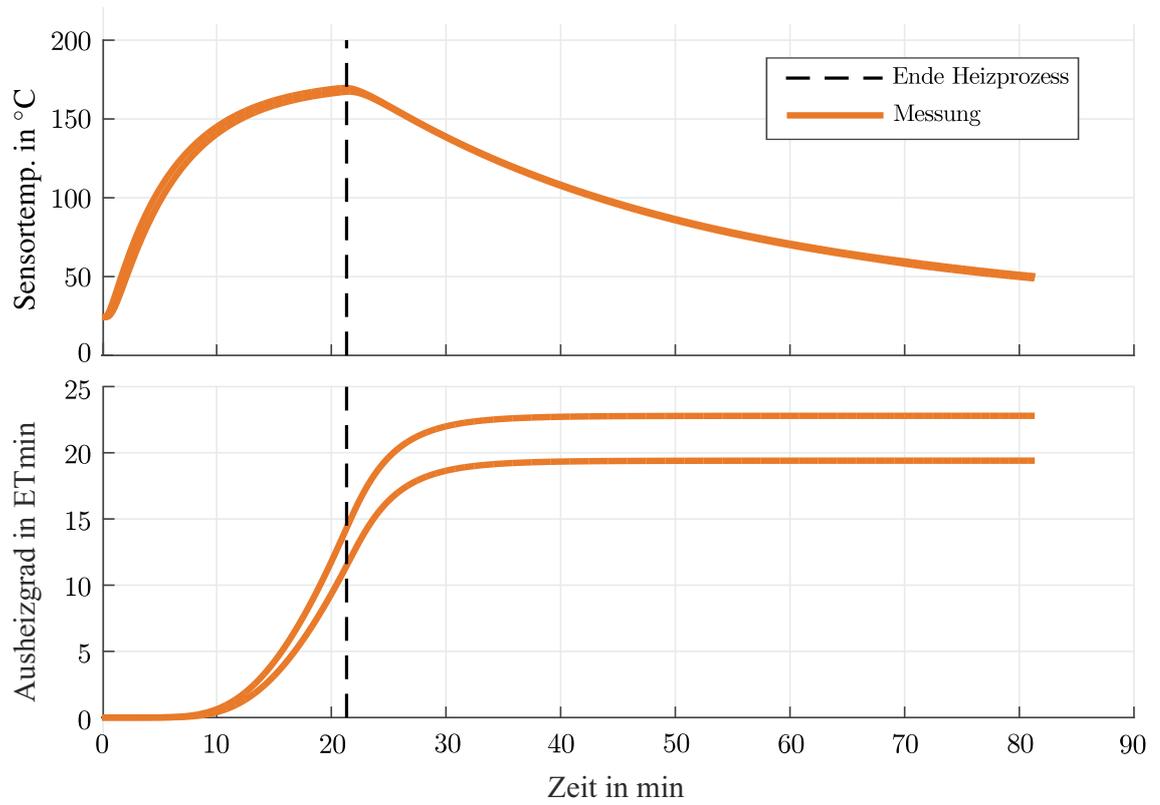


Abbildung A.1: Beispielhafter Temperatur- und Ausheizgradverlauf im Prüfkörper

Literatur

- [AAO19] A. O. Adeodu, O. C. Anyaeche und O. O. Oluwole. „Optimum cure cycles of autoclave process for polymer matrix composites using genetic algorithm“. In: *Procedia Manufacturing* 35 (2019), S. 16–26. ISSN: 23519789. DOI: 10.1016/j.promfg.2019.05.005.
- [ACC16] D. Aleksendrić, P. Carlone und V. Čirović. „Optimization of the Temperature-Time Curve for the Curing Process of Thermoset Matrix Composites“. In: *Applied Composite Materials* 23.5 (2016), S. 1047–1063. ISSN: 1573-4897. DOI: 10.1007/s10443-016-9499-y.
- [Ade15] A. Adeodu. „Modeling of Conventional Autoclave Curing of Unsaturated Polyester Based Composite Materials as Production Process Guide“. In: *International Journal of Materials Science and Applications* 4.3 (2015), S. 203. ISSN: 2327-2635. DOI: 10.11648/j.ijmsa.20150403.18.
- [AHS14] H. Antil, M. Heinkenschloss und D. C. Sorensen. „Application of the Discrete Empirical Interpolation Method to Reduced Order Modeling of Nonlinear and Parametric Systems“. In: *Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction*. Hrsg. von A. Quarteroni und G. Rozza. Cham: Springer International Publishing, 2014, S. 101–136. ISBN: 978-3-319-02090-7. DOI: 10.1007/978-3-319-02090-7_4.
- [Ang+17] A. Angermann, M. Beuschel, M. Rau und U. Wohlfarth. *Matlab-Simulink-Stateflow*. 9. Aufl. Berlin Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2017. ISBN: 978-3-11-048474-8.
- [Ant05] A. C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Advances in Design and Control. University Science Center Philadelphia, USA: Society for Industrial und Applied Mathematics, 2005. ISBN: 978-0898715293.
- [Are+13] T. Arens, R. Busam, F. Hettlich, C. Karpfinger und H. Stachel. *Grundwissen Mathematiktudium*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-8274-2308-5. DOI: 10.1007/978-3-8274-2309-2.

- [Are+18] K. Arendt, M. Jradi, H. Shaker und C. Veje. „Comparative Analysis of White-, Gray- and Black-box Models for Thermal Simulation of Indoor Environment: Teaching Building Case Study“. English. In: *Proceedings of the 2018 Building Performance Modeling Conference and SimBuild co-organized by ASHRAE and IBPSA-USA*. ASHRAE, Sep. 2018, S. 173–180.
- [Ast04] P. Astrid. „Reduction of process simulation models : a proper orthogonal decomposition approach“. English. Diss. Department of Electrical Engineering, 2004. ISBN: 90-386-1653-8. DOI: 10.6100/IR581728.
- [Bau+11] U. Baur, C. A. Beattie, P. Benner und S. Gugercin. „Interpolatory Projection Methods for Parameterized Model Reduction“. In: *SIAM J. Scientific Computing* 33 (2011), S. 2489–2518.
- [BB09] U. Baur und P. Benner. „Modellreduktion für parametrisierte Systeme durch balanciertes Abschneiden und Interpolation Model Reduction for Parametric Systems Using Balanced Truncation and Interpolation“. In: *at-Automatisierungstechnik*. Bd. 57. 2009, S. 411–420.
- [Ben+17a] P. Benner, A. Cohen, M. Ohlberger und K. Willcox, Hrsg. *Model Reduction and Approximation - Theory and Algorithms*. Philadelphia, USA: Society for Industrial und Applied Mathematics, 2017. ISBN: 978-1611974812.
- [Ben+17b] P. Benner, M. Ohlberger, A. Patera, G. Rozza und K. Urban, Hrsg. *Model Reduction of Parametrized Systems*. Bd. 17. MS&A, Modeling, Simulation and Applications. Cham: Springer International Publishing, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-58786-8.
- [BGM17] C. A. Beattie, S. Gugercin und V. Mehrmann. „Model Reduction for Large-scale Dynamical Systems with Inhomogeneous Initial Conditions“. In: *Systems & Control Letters* 99 (Jan. 2017), S. 99–106. DOI: 10.1016/j.sysconle.2016.11.007.
- [BGW15] P. Benner, S. Gugercin und K. Willcox. „A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems“. In: *SIAM Review* 57.4 (2015), S. 483–531. ISSN: 0036-1445. DOI: 10.1137/130932715.
- [BLT09] P. Benner, R.-C. Li und N. Truhar. „On the ADI method for Sylvester equations“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233.4 (2009), S. 1035–1045. DOI: doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.108.

- [BMB18] A. S. Bahman, K. Ma und F. Blaabjerg. „A Lumped Thermal Model Including Thermal Coupling and Thermal Boundary Conditions for High-Power IGBT Modules“. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 33.3 (2018), S. 2518–2530. ISSN: 0885-8993. DOI: 10.1109/TPEL.2017.2694548.
- [BMS05] P. Benner, V. Mehrmann und D. C. Sorensen, Hrsg. *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*. Proceedings of a Workshop held in Oberwolfach, Germany. Berlin Heidelberg New York: Springer Berlin Heidelberg New York, 2005. ISBN: 978-3-540-24545-2.
- [Böh18] T. Böhm. „Temperaturregelung von Kaltumformwerkzeugen in der Automobilindustrie“. Dissertation. Leibniz Universität Hannover und TEWISS - Technik und Wissen GmbH, 2018. ISBN: 3959002297.
- [Bos+18] S. Bosselmann, T. Frank, M. Wielitzka und T. Ortmaier. „Optimization of Process Parameters for Rubber Curing in Relation to Vulcanization Requirements and Energy Consumption“. In: *AIM 2018*. Piscataway, NJ: IEEE, 2018, S. 804–809. ISBN: 978-1-5386-1854-7. DOI: 10.1109/AIM.2018.8452354.
- [Bos21] S. Bosselmann. „Modellbasierte Auslegung und Steuerung des Vulkanisationsprozesses von Kautschuk“. Dissertation. Leibniz Universität Hannover und TEWISS - Technik und Wissen GmbH, 2021. ISBN: 9783959005722, 3959005725.
- [Bou02] M. H. Bourgeois. *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. 1. Aufl. Stuttgart Leipzig Wiesbaden: B. G. Teubner GmbH, 2002, S. 551–628. ISBN: 978-3-519-00356-4. DOI: 10.1007/978-3-322-94877-9.
- [BW17] P. von Böckh und T. Wetzel. *Wärmeübertragung*. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2017. ISBN: 978-3-662-55479-1. DOI: 10.1007/978-3-662-55480-7.
- [BW80] A. L. Browne und L. E. Wickliffe. „Parametric Study of Convective Heat Transfer Coefficients at the Tire Surface“. In: *Tire Science and Technology* 8.3 (1980), S. 37–67. DOI: 10.2346/1.2151020.
- [Cas+17] A. Castagnotto, M. C. Varona, L. Jeschek und B. Lohmann. „sss & sssMOR Analysis and reduction of large-scale dynamic systems in Matlab“. In: *Automatisierungstechnik* 65.2 (2017), S. 134–150. DOI: 10.1515/auto-2016-0137.
- [Cas+19] A. Castagnotto, M. C. Varona, L. Jeschek und B. Lohmann. *sssMOR - Sparse State-Space and Model Order Reduction Toolbox*. 20. Sep. 2019.

- [CKA06] T. W. Capehart, H. G. Kia und T. Abujoudeh. „Cure Simulation of Thermoset Composite Panels“. In: *Journal of Composite Materials* 41.11 (2006), S. 1339–1360. ISSN: 0021-9983. DOI: 10.1177/0021998306068077.
- [CM90] A. J. Chorin und J. E. Marsden. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. 2. Aufl. New York: 1990 Springer-Verlag New York Inc., 1990. ISBN: 978-1-4684-0366-4. DOI: 10.1007/978-1-4684-0364-0.
- [CS10] S. Chaturantabut und D. C. Sorensen. „Nonlinear Model Reduction via Discrete Empirical Interpolation“. In: *Society for Industrial and Applied Mathematics* 32.5 (2010), 2737–2764. DOI: 10.1137/090766498.
- [CYP04] A Cheung, Y Yu und K Pochiraju. „Three-dimensional finite element simulation of curing of polymer composites“. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 40.8 (2004), S. 895–912. ISSN: 0168-874X. DOI: 10.1016/S0168-874X(03)00119-7.
- [Cyr02] M. Cyrzan. „Berechnung instationärer Wärmeleitungsvorgänge mit der Methode der Finiten Elemente“. Studienarbeit. Technische Universität Berlin Arbeitsgruppe Numerische Mathematik und Funktionalanalysis, 2002, S. 21–80.
- [Dan+04] L. Daniel, Ong Chin Siong, L. S. Chay, Kwok Hong Lee und J. White. „A multi-parameter moment-matching model-reduction approach for generating geometrically parameterized interconnect performance models“. In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 23.5 (Mai 2004), S. 678–693. ISSN: 1937-4151. DOI: 10.1109/TCAD.2004.826583.
- [DGPM00] G. Daminelli, E. Goncalves Pinheiro und F. Mancosu. *Method for vulcanizing a tire by determining its degree of vulcanization*. U.S. Patent 6478991B1, 2000.
- [DSP11] I. Dones, S. Skogestad und H. A. Preisig. „Application of Balanced Truncation to Nonlinear Systems“. In: *Industrial & Engineering Chemistry Research* 50.17 (2011), S. 10093–10101. DOI: 10.1021/ie200706d.
- [FBG12] G. Flagg, C. Beattie und S. Gugercin. „Convergence of the Iterative Rational Krylov Algorithm“. In: *Systems and Control Letters* 61 (2012), S. 688–691. DOI: 10.1016/j.sysconle.2012.03.005.
- [FC80] F. N. Fritsch und R. E. Carlson. „Monotone Piecewise Cubic Interpolation“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 17.2 (1980), S. 238–246. ISSN: 0036-1429. DOI: 10.1137/0717021.

- [Fen+16] L. Feng et al. „Parametric modeling and model order reduction for (electro)thermal analysis of nanoelectronic structures“. In: *Journal of Mathematics in Industry* 6.1 (2016), S. 483. DOI: 10.1186/s13362-016-0030-8.
- [Fra+18] T. Frank, S. Bosselmann, M. Wielitzka und T. Ortmaier. „Comparative Study of Data-Driven and Model-Based Real-Time Prediction during Rubber Curing Process“. In: *2018 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*. Piscataway, NJ: IEEE, Juli 2018, S. 164–169. DOI: 10.1109/AIM.2018.8452261.
- [Fra+18] T. Frank, S. Bosselmann, M. Wielitzka und T. Ortmaier. „Computation-Efficient Simulation of Nonlinear Thermal boundary Conditions for Large-Scale Models“. In: *IEEE Control Systems Letters*. 2.3 (2018), S. 351–356. ISSN: 2475-1456. DOI: 10.1109/LCSYS.2018.2840428.
- [Fra+19] T. Frank, S. Wieting, M. Wielitzka, S. Bosselmann und T. Ortmaier. „Identification of temperature-dependent boundary conditions using MOR“. In: *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 30.2 (2019), S. 1009–1022. ISSN: 0961-5539. DOI: 10.1108/HFF-05-2019-0404.
- [Fra+20] T. Frank, H. Zeipel, S. Bosselmann, M. Wielitzka und T. Ortmaier. „Real-Time Prediction of Curing Processes using Model Order Reduction“. In: *21st IFAC World Congress*. Juli 2020.
- [Fra+20] T. Frank., M. Wielitzka., M. Dagen. und T. Ortmaier. „Reduced-order Modeling of Parameter Variations for Parameter Identification in Rubber Curing“. In: *Proceedings of the 17th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics - Volume 1: ICINCO, INSTICC*. SciTePress, 2020, S. 659–666. ISBN: 978-989-758-442-8. DOI: 10.5220/0009865106590666.
- [FWO20] T. Frank, M. Wielitzka und T. Ortmaier. „Reduced-Order Kalman Filter for Surface Temperature Monitoring of parameter-variant thermal Systems“. In: *2020 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*. 2020, S. 570–575. DOI: 10.1109/ICMA49215.2020.9233772.
- [FZL19] Q. Feng, X. Zhou und J. Li. „A hybrid and automated approach to adapt geometry model for CAD/CAE integration“. In: *Engineering with Computers* (Feb. 2019). DOI: 10.1007/s00366-019-00713-4.
- [Ges06] V. Gesellschaft. *VDI-Wärmeatlas*. 11. Aufl. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2006. ISBN: 978-3-642-19980-6. DOI: 10.1007/978-3-642-19981-3.

- [GG96] E. J. Grimme und K. Gallivan. „A rational Lanczos Algorithm for Model Reduction II: Interpolation Point Selection“. In: University of Illinois at Urbana-Champaign, USA. 1996.
- [Gho16] M. H. R. Ghoreishy. „A state-of-the-art review on the mathematical modeling and computer simulation of rubber vulcanization process“. In: *Iranian Polymer Journal* 25.1 (2016), S. 89–109. ISSN: 1026-1265. DOI: 10.1007/s13726-015-0405-5.
- [Gia+16] F. Giacometto, F. CAPELLI, L. Romeral, J.-R. Riba und E. Sala. „Thermal Response Estimation in Substation Connectors Using Data-Driven Models“. In: *Advances in Electrical and Computer Engineering* 16.3 (2016), S. 25–30. ISSN: 1582-7445. DOI: 10.4316/AECE.2016.03004.
- [GN05] M. H. R. Ghoreishy und G. Naderi. „Three dimensional finite element modelling of truck tyre curing process in mould“. In: *Iranian Polymer Journal* 14.8 (2005), S. 735–743. ISSN: 1026-1265.
- [Gri97] E. J. Grimme. „Krylov Projection Methods for Model Reduction“. Dissertation. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1997.
- [GvD17] R. Goldbeck, C. H. van der Broeck und R. W. de Doncker. „Electro-thermal simulation of bond wires in power modules for realistic mission profiles: Hawaii Convention Center, Honolulu, Hawaii, USA, 12-15 December 2017“. In: Piscataway, NJ: IEEE, 2017. DOI: 10.1109/PEDS.2017.8289214.
- [Haa13] B. Haasdonk. „Convergence Rates of the POD–Greedy Method“. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 47.3 (2013), 859–873. DOI: 10.1051/m2an/2012045.
- [Had+18] M. Haddar et al. *Design and Modeling of Mechanical Systems—III*. Cham: Springer International Publishing, 2018. ISBN: 978-3-319-66696-9. DOI: 10.1007/978-3-319-66697-6.
- [Har02] H. Harrer. *Ordnungsreduktion*. Regensburg: Pflaum GmbH & Co. KG, 2002. ISBN: 3-7905-0847-0.
- [HM14] H. Herwig und A. Moschallski. *Wärmeübertragung: Physikalische Grundlagen - Illustrierende Beispiele - Übungsaufgaben mit Musterlösungen*. 3., erw. u. überarb. Aufl. Lehrbuch. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014. ISBN: 978-3-658-06208-8. DOI: 10.1007/978-3-658-06208-8.

- [HO08] B. Haasdonk und M. Ohlberger. „Reduced basis method for finite volume approximations of parametrized linear evolution equations“. In: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 42.2 (2008), 277–302. DOI: 10.1051/m2an:2008001.
- [HO14] C. Himpe und M. Ohlberger. „Cross-Gramian-Based Combined State and Parameter Reduction for Large-Scale Control Systems“. In: *Mathematical Problems in Engineering* 2014 (Juli 2014), S. 843869. DOI: 10.1155/2014/843869.
- [Hu+13] P. Hu, N. Ma, L.-z. Liu und Y.-g. Zhu. *Theories, Methods and Numerical Technology of Sheet Metal Cold and Hot Forming*. London: Springer London, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4471-4099-3.
- [HU94] H. C. Huang und A. S. Usmani. *Finite Element Analysis for Heat Transfer*. London: Springer-Verlag London Limited 1994, 1994. ISBN: 978-1-4471-2093-3. DOI: 10.1007/978-1-4471-2091-9.
- [JSR12] P. E. Jahromi, A. Shojaei und S. M. Reza Pishvaie. „Prediction and optimization of cure cycle of thick fiber-reinforced composite parts using dynamic artificial neural networks“. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 31.18 (2012), S. 1201–1215. ISSN: 0731-6844. DOI: 10.1177/0731684412451937.
- [KE95] J. Kennedy und R. Eberhart. „Particle swarm optimization“. In: *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*. Bd. 4. Nov. 1995, 1942–1948 vol.4. DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968.
- [KID09] B. Karaağaç, M. İnal und V. Deniz. „Artificial neural network approach for predicting optimum cure time of rubber compounds“. In: *Materials & Design* 30.5 (2009), S. 1685–1690. ISSN: 02613069. DOI: 10.1016/j.matdes.2008.07.010.
- [KID12] B. Karaağaç, M. İnal und V. Deniz. „Predicting optimum cure time of rubber compounds by means of ANFIS“. In: *Materials & Design* 35 (2012), S. 833–838. ISSN: 02613069. DOI: 10.1016/j.matdes.2011.03.062.
- [KM74] H. Kiesewetter und G. Maeß. *Elementare Methoden der numerischen Mathematik*. Wien New York Berlin: Springer-Verlag Wien New York und Akademie-Verlag GmbH Berlin, 1974, S. 194–219. ISBN: 978-3-211-81214-3. DOI: 10.1007/978-3-7091-8357-1.
- [KV86] A. Khouider und J. M. Vergnaud. „Effect of temperature of motionless air on the cure of vulcanizates after removal from the mold“. In: *Journal of Applied Polymer Science* 32.6 (1986), S. 5301–5313. DOI: 10.1002/app.1986.070320606.

- [Lab+10] A. E. Labban, P. Mousseau, J. L. Bailleul und R. Deterre. „Optimization of thick rubber part curing cycles“. In: *Inverse Problems in Science and Engineering* 18.3 (2010), S. 313–340. ISSN: 1741-5977. DOI: 10.1080/17415971003589517.
- [Lan+15] T. Lange, F. Qi, J. Dehn und R. W. de Doncker. „Synchronous machine model considering dynamic losses and thermal behavior“. In: *IEEE International Electric Machines and Drives Conference (IEMDC)*. Piscataway, NJ: IEEE, 2015, S. 536–542. ISBN: 978-1-4799-7941-7. DOI: 10.1109/IEMDC.2015.7409110.
- [LN18] U. Langer und M. Neumüller. *Direct and Iterative Solvers*. Hrsg. von M. Kaltenbacher. Cham: Springer International Publishing, 2018, S. 205–251. ISBN: 978-3-319-59038-7. DOI: 10.1007/978-3-319-59038-7_5.
- [LQ03] G. R. Liu und S. S. Quek. *The Finite Element Method*. National University of Singapore. Oxford, Burlington: Butterworth-Heinemann, 2003. ISBN: 0-7506-5866-5. DOI: 10.1016/B978-075065866-9/50013-X.
- [LQ10] H.-X. Li und C. Qi. „Modeling of distributed parameter systems for applications—A synthesized review from time–space separation“. In: *Journal of Process Control* 20.8 (2010), S. 891–901. ISSN: 09591524. DOI: 10.1016/j.jprocont.2010.06.016.
- [LS04] B. Lohmann und B. Salimbahrami. „Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterraummethoden“. In: *Automatisierungstechnik* 52 (2004), S. 30–38.
- [LTT13] P. Ludowski, D. Taler und J. Taler. „Identification of thermal boundary conditions in heat exchangers of fluidized bed boilers“. In: *Applied Thermal Engineering* 58.1-2 (2013), S. 194–204. ISSN: 13594311. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2013.03.064.
- [Lu17] Y. Lu. „Industry 4.0: A survey on technologies, applications and open research issues“. In: *Journal of Industrial Information Integration* 6 (2017), S. 1–10. ISSN: 2452-414X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jii.2017.04.005>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2452414X17300043>.
- [Lun16] J. Lunze. *Regelungstechnik I*. 11. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016. ISBN: 978-3-662-52677-4. DOI: 10.1007/978-3-662-52678-1.
- [MG10] J. Mohammadpour und K. M. Grigoriadis, Hrsg. *Efficient Modeling and Control of Large-Scale Systems*. New York Dordrecht Heidelberg London: Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010. ISBN: 978-1-4419-5756-6. DOI: 10.1007/978-1-4419-5757-3.

- [Mir+13] M. Mirsadeghi, D. Cóstola, B. Blocken und J. Hensen. „Review of external convective heat transfer coefficient models in building energy simulation programs: Implementation and uncertainty“. In: *Applied Thermal Engineering* 56.1-2 (2013), S. 134–151. ISSN: 13594311. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2013.03.003.
- [ML19] M. S. Mahmood und D. Lesnic. „Identification of conductivity in inhomogeneous orthotropic media“. In: *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 29.1 (2019), S. 165–183. ISSN: 0961-5539. DOI: 10.1108/HFF-11-2017-0469.
- [Mly19] P. Mlynarczyk. „Numerical optimization methods comparison based on the CFD conduction-convection heat transfer case“. In: *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 29.6 (2019), S. 2080–2092. ISSN: 0961-5539. DOI: 10.1108/HFF-12-2018-0761.
- [Mou+13] H. Mounir, A. Nizar, L. Borhen, A. Benamara und D. Deneux. „FEM Simulation Based on CAD Model Simplification: A Comparison Study between the Hybrid Method and the Technique Using a Removing Details“. In: *Design and Modeling of Mechanical Systems*. Hrsg. von M. Haddar, L. Romdhane, J. Louati und A. Ben Amara. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 587–596. ISBN: 978-3-642-37143-1.
- [NTO11] S. Nozu, H. Tsuji und K. Onishi. „A Prediction Model for Rubber Curing Process“. In: *Heat transfer*. Hrsg. von V. S. Vikhrenko. Rijeka, Croatia: InTech, 2011. ISBN: 978-953-307-361-3. DOI: 10.5772/26005.
- [Nus15] W. Nusselt. „Das grundgesetz des wärmeüberganges“. In: *Gesundheits-Ingenieur* 38 (1915), S. 477–490.
- [Pá+19] D. Pánek, T. Orosz, P. Kropík, P. Karban und I. Doležel. „Reduced-Order Model Based Temperature Control of Induction Brazing Process“. In: *2019 Electric Power Quality and Supply Reliability Conference (PQ) 2019 Symposium on Electrical Engineering and Mechatronics (SEEM)*. 2019, S. 1–4. DOI: 10.1109/PQ.2019.8818256.
- [Pan+10] H. Panzer, J. Mohring, R. Eid und B. Lohmann. „Parametric Model Order Reduction by Matrix Interpolation“. In: *Automatisierungstechnik* 58 (Aug. 2010), S. 475–484. DOI: 10.1524/auto.2010.0863.

- [Phi03] J. R. Phillips. „Projection-based approaches for model reduction of weakly nonlinear, time-varying systems“. In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 22.2 (Feb. 2003), S. 171–187. ISSN: 0278-0070. DOI: 10.1109/TCAD.2002.806605.
- [Qi+16] F. Qi, D. A. Ly, C. van der Broeck, D. Yan und R. W. de Doncker. „Model order reduction suitable for online linear parameter-varying thermal models of electric motors“. In: *2016 IEEE 2nd Annual Southern Power Electronics Conference (SPEC)*. Piscataway, NJ: IEEE, 2016, S. 1–6. ISBN: 978-1-5090-1546-7. DOI: 10.1109/SPEC.2016.7846147.
- [Qi+17] F. Qi, D. Scharfenstein, M. Schubert und R. W. de Doncker. *Precise field oriented torque control of induction machines using thermal model based resistance adaption: Hawaii Convention Center, Honolulu, Hawaii, USA, 12-15 December 2017*. Piscataway, NJ: IEEE, 2017. DOI: 10.1109/PEDS.2017.8289166.
- [Rah+19] A. Rahimi, A. Dehghan Saei, A. Kasaeipoor und E. Hasani Malekshah. „A comprehensive review on natural convection flow and heat transfer“. In: *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow* 29.3 (2019), S. 834–877. ISSN: 0961-5539. DOI: 10.1108/HFF-06-2018-0272.
- [RJK17] F. Rötzer, L. Jadachowski und A. Kugi. „Modellordnungsreduktion, Beobachterentwurf und Sensorplatzierung für einen Infrarot-Glühofen“. In: *at - Automatisierungstechnik* 65.5 (2017). ISSN: 0178-2312. DOI: 10.1515/aut-2016-0119.
- [Saa03] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2. Aufl. University Science Center Philadelphia, USA: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. ISBN: 0-89871-534-2.
- [SBB97] A. Sheffer, T. Blacker und M. Bercovier. „Clustering: Automated detail suppression using virtual topology“. In: *ASME* 220 (Jan. 1997).
- [SBS02] R. Stout, P. D. Billings und P. Semiconductor. „Accuracy and Time Resolution in Thermal Transient Finite Element Analysis“. In: *Proceedings ANSYS Conference & Exhibition* (2002).
- [SD16] F. Shi und X. Dong. „Three-dimension numerical simulation for vulcanization process based on unstructured tetrahedron mesh“. In: *Journal of Manufacturing Processes* 22 (2016), S. 1–6. ISSN: 15266125. DOI: 10.1016/j.jmapro.2016.01.004.

- [SDM14] G. V. Shankaran, M. B. Dogruoz und R. Magargle. „Using state-space models for accurate computations of transient thermal behavior of electronic packages“. In: *Fourteenth Intersociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems (ITherm)*. Mai 2014, S. 990–997. DOI: 10.1109/ITHERM.2014.6892389.
- [SH06] C. Sun und J. Hahn. „Model reduction in the presence of uncertainty in model parameters“. In: *Journal of Process Control* 16.6 (2006), S. 645–649. ISSN: 0959-1524. DOI: 10.1016/j.jprocont.2005.10.001.
- [She+16] L. Shen, J. He, C. Yang, W. Gui und H. Xu. „Temperature Uniformity Control of Large-Scale Vertical Quench Furnaces for Aluminum Alloy Thermal Treatment“. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 24.1 (Jan. 2016), S. 24–39. ISSN: 2374-0159. DOI: 10.1109/TCST.2015.2417495.
- [Sop11] A. Soppa. „Krylov-Unterraum basierte Modellreduktion zur Simulation von Werkzeugmaschinen“. Dissertation. Technische Universität Braunschweig, 2011.
- [Spe+13] K. Speicher, A. Steinboeck, D. Wild, T. Kiefer und A. Kugi. „Estimation of plate temperatures in hot rolling based on an extended Kalman filter“. In: *IFAC Proceedings Volumes* 46.16 (2013). 16th IFAC Symposium on Control, Optimization and Automation in Mining, Minerals and Metal Processing, S. 409–414. ISSN: 1474-6670. DOI: 10.3182/20130825-4-US-2038.00006.
- [Spe+14] K. Speicher, A. Steinboeck, A. Kugi, D. Wild und T. Kiefer. „Analysis and design of an Extended Kalman Filter for the plate temperature in heavy plate rolling“. In: *Journal of Process Control* 24.9 (2014), S. 1371–1381. ISSN: 0959-1524. DOI: 10.1016/j.jprocont.2014.06.004.
- [Stu97] H. W. Stumpf. *Handbuch der Reifentechnik*. Wien: Springer-Verlag Wien, 1997. DOI: 10.1007/978-3-7091-6519-5.
- [Su+15] B. Su, J. Wu, Z. Cui und Y. Wang. „Modeling of truck tire curing process by an experimental and numerical method“. In: *Iranian Polymer Journal* 24.7 (2015), S. 583–593. ISSN: 1026-1265. DOI: 10.1007/s13726-015-0349-9.
- [Sun+18] T. Sun, J. Wang, A. Griffo und B. Sen. „Active Thermal Management for Interior Permanent Magnet Synchronous Machine (IPMSM) Drives Based on Model Predictive Control“. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 54.5 (2018), S. 4506–4514. ISSN: 0093-9994. DOI: 10.1109/TIA.2018.2843350.

- [Swi+19] R. Swischuk, L. Mainini, B. Peherstorfer und K. Willcox. „Projection-based model reduction: Formulations for physics-based machine learning“. In: *Computers & Fluids* 179 (2019), S. 704–717. ISSN: 0045-7930. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.07.021>.
- [TBG09] A. Thakur, A. Banerjee und S. Gupta. „A survey of CAD model simplification techniques for physics-based simulation applications“. In: *Computer-Aided Design* 41 (Feb. 2009), S. 65–80. DOI: [10.1016/j.cad.2008.11.009](https://doi.org/10.1016/j.cad.2008.11.009).
- [TP87] M. S. TOMBS und I. POSTLETHWAITE. „Truncated balanced realization of a stable non-minimal state-space system“. In: *International Journal of Control* 46.4 (1987), S. 1319–1330. DOI: [10.1080/00207178708933971](https://doi.org/10.1080/00207178708933971).
- [TR13] P. Tiso und D. J. Rixen. „Discrete Empirical Interpolation Method for Finite Element Structural Dynamics“. In: *Topics in Nonlinear Dynamics, Volume 1*. Hrsg. von G. Kerschen, D. Adams und A. Carrella. New York, NY: Springer New York, 2013, S. 203–212. ISBN: 978-1-4614-6570-6.
- [van+18] C. H. van der Broeck, L. A. Ruppert, A. Hinz, M. Conrad und R. W. de Doncker. „Spatial Electro-Thermal Modeling and Simulation of Power Electronic Modules“. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 54.1 (2018), S. 404–415. ISSN: 0093-9994. DOI: [10.1109/TIA.2017.2757898](https://doi.org/10.1109/TIA.2017.2757898).
- [Vol11] S. Volkwein. „Model reduction using proper orthogonal decomposition“. In: *Lecture Notes, Institute of Mathematics and Scientific Computing, University of Graz*. 1025 (2011).
- [Wal+06] R. Waltz, J. Morales, J. Nocedal und D. Orban. „An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps“. English (US). In: *Mathematical Programming* 107.3 (Juli 2006), S. 391–408. ISSN: 0025-5610. DOI: [10.1007/s10107-004-0560-5](https://doi.org/10.1007/s10107-004-0560-5).
- [WCB17] A. Wortmann, B. Combemale und O. Barais. „A Systematic Mapping Study on Modeling for Industry 4.0“. In: *2017 ACM/IEEE 20th International Conference on Model Driven Engineering Languages and Systems (MODELS)*. 2017, S. 281–291. DOI: [10.1109/MODELS.2017.14](https://doi.org/10.1109/MODELS.2017.14).
- [WDJ15] D.-h. Wang, Q. Dong und Y.-x. Jia. „Mathematical modelling and numerical simulation of the non-isothermal in-mold vulcanization of natural rubber“. In: *Chinese Journal of Polymer Science* 33.3 (2015), S. 395–403. ISSN: 0256-7679. DOI: [10.1007/s10118-015-1594-2](https://doi.org/10.1007/s10118-015-1594-2).

- [Wei+99] D. Weile, E. Michielssen, E. Grimme und K. Gallivan. „A method for generating rational interpolant reduced order models of two-parameter linear systems“. In: *Applied Mathematics Letters* 12.5 (1999), S. 93–102. ISSN: 0893-9659. DOI: 10.1016/S0893-9659(99)00063-4.
- [Wit+02] T. Wittig, I. Munteanu, R. Schuhmann und T. Weiland. „Two-step Lanczos algorithm for model order reduction“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 38.2 (März 2002), S. 673–676. ISSN: 1941-0069. DOI: 10.1109/20.996175.
- [Wol14] T. Wolf. „ \mathcal{H}_2 Pseudo-Optimal Model Order Reduction“. Dissertation. Technische Universität München, 2014.
- [WPL13] T. Wolf, H. K. F. Panzer und B. Lohmann. „Model Order Reduction by Approximate Balanced Truncation: A Unifying Framework“. In: *Automatisierungstechnik* 61 (2013), S. 545–556. ISSN: 0178-2312. DOI: 10.1524/auto.2013.1007.
- [Yi+17] Y. Yi, K. Salonitis, P. Tsoutsanis, L. Litos und J. Patsavelas. „Improving the Curing Cycle Time through the Numerical Modeling of air Flow in Industrial Continuous Convection Ovens“. In: *Procedia CIRP* 63 (2017), S. 499–504. ISSN: 22128271. DOI: 10.1016/j.procir.2017.03.167.
- [Yua+17] C. D. Yuan, E. B. Rudnyi, H. Baumgartl und T. Bechtold. *Model order reduction and system simulation of a machine tool for real-time compensation of thermally induced deformations: 3-7 July 2017*. Piscataway, NJ: IEEE, 2017. DOI: 10.1109/AIM.2017.8014161.
- [Zei19] H. Zeipel. „Echtzeitfähige Prädiktion bei nichtlinearen thermischen Systemen durch ordnungsreduzierte Modellierung“. Bachelor Arbeit. Leibniz Universität Hannover und Institute of Mechatronic Systems, 2019.
- [Zei+20] H. Zeipel, T. Frank, M. Wielitzka und T. Ortmaier. „Comparative Study of Model Order Reduction for Linear Parameter-Variant Thermal Systems“. In: *2020 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*. 2020, S. 990–995. DOI: 10.1109/ICMA49215.2020.9233541.
- [Zha+18] Y. Zhang, Y. Jin, W. Cao, Z. Li und Y. Yuan. „A Dynamic Data-driven Model for Predicting Strip Temperature in Continuous Annealing Line Heating Process“. In: *Proceedings of the 37th Chinese Control Conference*. Juli 2018, S. 1887–1891. DOI: 10.23919/ChiCC.2018.8484015.
- [ZWJ16] S. Zareba, A. Wolff und M. Jelali. „Mathematical modelling and parameter identification of a stainless steel annealing furnace“. In: *Simulation Modelling Practice and Theory* 60 (2016), S. 15–39. ISSN: 1569-190X. DOI: 10.1016/j.simpat.2015.09.008.

Lebenslauf

zu meiner Person

Name, Vorname Frank, Tobias
geboren am 19. Januar 1990 in Langenhagen
Familienstand verheiratet, 2 Kinder

beruflicher Werdegang

seit Jul/21 Data Scientist Wagner Group GmbH Langenhagen
seit Sep/18 Dozent Hamburger Fernhochschule Technische Mechanik 2 und
Automatisierungstechnik
Jan/16 - Jun/21 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechatronische
Systeme, LUH
Mar/16 - Dez/17 Freiberufliche Nebentätigkeit Softwareentwicklung, Research
Consultant

Studium

Okt/10 - Dez/15 Studium Elektro- und Informationstechnik (Master) an der LUH,
Vertiefung: Automatisierungstechnik,
Abschluss am 14. Dezember 2015: M. Sc. (Note 1,3),
Zweimaliges Talanxstipendium für hervorragende Studienleistungen

studienbegleitende Tätigkeiten und Praktika

Okt/14 - Feb/15 Fachpraktikum Karl Storz GmbH & Co. KG Tuttlingen
Jan/14 - Dez/15 Hilfwissenschaftler am Institut für Mechatronische Systeme, LUH
Jan/11 - Dez/15 Hilfwissenschaftler verschiedene Lehrtätigkeiten, LUH
Aug/10 - Sep/10 Grundpraktikum Viscom AG, Hannover
Okt/09 - Jun/10 Grundwehrdienst Celle / Berlin

Schulbildung

Aug/02 - Jun/09 Gymnasium Langenhagen,
Abschluss am 18. Juni 2009: Abitur (Note 1,7)
Aug/00 - Jul/02 Orientierungsstufe Hindenburgstrasse, Langenhagen
Aug/96 - Jul/00 Grundschule, Friedrich-Ebert-Schule Langenhagen