



Studienarbeit
Entwicklung einer netzfreien Simulationsmethode auf
Basis der flexiblen Elemente

von
Tobias Bode
Matrikelnummer: 2925670

Betreuer: Dr.-Ing. Christian Weißenfels

1. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. mult. Peter Wriggers
2. Prüfer: Dr.-Ing. Christian Weißenfels

15. Feb 2017

Angefertigt im Studiengang Maschinenbau am Institut für
Kontinuumsmechanik der Leibniz Universität Hannover.



Studienarbeit

Aufgabenstellung für Herrn Tobias Bode, Matr.-Nr. 2925670

Thema

„Entwicklung einer netzfreien Simulationsmethode auf Basis der flexiblen Elemente“

Zielsetzung und Aufgabe

Die Finite Element Methode (FEM) hat sich im Ingenieurwesen aufgrund seiner stabilen und numerisch genauen Approximation der Lösung von partiellen Differenzialgleichungen als Simulationswerkzeug bewährt. Aufgrund der Unterteilung des Lösungsgebiets in feste Elemente sind bei sehr großen Deformationen zusätzliche Algorithmen von Nöten, die meist die Stabilität und Genauigkeit negativ beeinflussen. Netzfreie Simulationsverfahren, wie die „Optimal Transportation Meshfree“ (OTM) Methode, bestechen gerade hierbei durch Flexibilität, da keine feste Konnektivität zwischen einzelnen Knoten benötigt wird. Anstatt fester Elemente wird die Anzahl von Knoten, die den jeweiligen Materialpunkt beeinflusst, in jedem Zeitpunkt durch einen Suchalgorithmus neu bestimmt. Dieser Bereich wird dabei als Einflussgebiet des Materialpunkts bezeichnet. Auf der anderen Seite sind netzfreie Verfahren von Haus aus nicht stabil. Einer der Hauptgründe ist die Unterintegration in den Einflussgebieten der Materialpunkte. Daher soll im Rahmen dieser Studienarbeit die OTM Methode dahingehend erweitert werden, dass zusätzliche Integrationspunkte in das Einflussgebiet des jeweiligen Materialpunkts gelegt wird. Besonderer Fokus soll dabei auf die benötigte Anzahl von Integrationspunkten und die Kopplung zu „Mean Value“ Ansatzfunktionen gelegt werden. Aufgrund der dadurch entstehenden Nähe zum Ablaufschema der FEM, soll dieses Verfahren als flexible Finite Element Methode bezeichnet werden. Nach der Implementation des neuen Algorithmus soll des Weiteren der Vorteil der neuen Methode anhand von Beispielen untersucht werden.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die am 15. Feb 2017 eingereichte Studienarbeit zum Thema „*Entwicklung einer netzfreien Simulationsmethode auf Basis der flexiblen Elemente*“ unter Betreuung von Dr.-Ing. Christian Weißenfels selbstständig erarbeitet, verfasst und Zitate kenntlich gemacht habe, dass ich keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe und dass ich die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt habe.

Hannover, 15. Feb 2017

Tobias Bode

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	OTM-Methode	2
3	Flexible Finite Elemente Methode	5
3.1	Mean-Value-Koordinaten	5
3.2	Problematik der Unterintegration	7
4	Integrationsmethoden	9
4.1	Materialpunkt (Tracer)	9
4.2	Schwerpunkt (Centroid)	9
4.3	Knotenabhängige Verteilung (Nodes)	10
4.4	Subtetraederschwerpunkte (Facet)	10
4.5	Integrationspunktgitter	11
4.5.1	Fester Punkteabstand (Grid 1)	11
4.5.2	Äquivalente Teiltetraedervolumina (Grid 2)	12
5	Validierung	14
5.1	Simulation einer Balkenbiegung	14
5.2	Konvergenzanalyse der Ansatzfunktionen	15
5.3	Eigenwertanalyse	16

1 Einführung

Diese Studienarbeit befasst sich mit einer Kombination der Optimal Transportation Meshfree Method mit den baryzentrischen Mean-Value-Koordinaten, der flexiblen Finite Elemente Methode. Sie setzt sich zum Ziel das Problem der Unterintegration der Mean-Value-Ansatzfunktionen und deren Ableitungen durch eine Erhöhung der Anzahl an Integrationspunkten zu lösen.

In einem ersten Kapitel wird die OTM-Methode als Basis der flexiblen FEM vorgestellt. Sie ist ein im Jahr 2009 veröffentlichtes, netzfreies Simulationsverfahren. Ein zweites Kapitel dient der Einführung der sogenannten Mean-Value-Koordinaten. Diese sind ein Spezialfall der 2006 aufgestellten allgemeinen Koordinaten auf einem Polyeder. Des Weiteren wird im zweiten Kapitel auf die Unterintegration über den Mean-Value-Ansatzfunktionen genauer eingegangen und das aus dieser Unterintegration entstehende Hourglassing aufgezeigt. Es kann hierbei zu Abweichungen im Simulationsverlauf und zum Abbruch der Simulation kommen.

Das Kapitel 'Integrationsmethoden' beschäftigt sich damit, Integrationspunkte nach festgelegten Schemen innerhalb eines Polyeders zu verteilen. Ausgehend von der OTM-Methode wird anfänglich ein Integrationspunkt in den sogenannten Materialpunkt gelegt. Darauf aufbauend werden Methoden vorgestellt, die Integrationspunkte in den Polyederschwerpunkt zu legen, sie auf der Verbindungslinie zwischen dem Materialpunkt und den zugehörigen Knotenpunkten anzuordnen, oder die Integrationspunkte innerhalb der Subtetraeder eines Polyeders zu verteilen. Abschließend wird im letzten Kapitel die Wirksamkeit der zuvor vorgestellten Methoden überprüft. Die Integrationsmethoden sind wirksam und versetzen die Polyederelemente in die Lage Biegemoden darzustellen und damit Hourglassing zu verhindern.

2 OTM-Methode

Die flexible Finite Elemente Methode (flexible FEM), auf der die vorliegende Arbeit aufbaut, basiert auf der von Feras Habbal 2009 eingeführten Optimal Transportation Meshfree Method (OTM-Methode) [HABBAL, 2009]. Daher wird in diesem ersten Kapitel zunächst eine Grundlage geschaffen, in dem die für die flexible FEM wichtigen Grundbausteine der OTM-Methode erklärt und anschließend in einen mathematischen Formelsatz gefasst werden.

Die OTM-Methode ist eine netzfreie Methode, bei der die schwache Form des Gleichgewichts an sogenannten Materialpunkten aufgestellt wird. Diesen Materialpunkten werden als Eigenschaften die Spannung, Verzerrung, Masse, Dichte und das Volumen auferlegt. Die kinematischen Größen Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung werden an einer weiteren Punktgruppe, den sogenannten Knotenpunkten definiert.

Den Schnittpunkt zwischen den Material- und Knotenpunkten bildet eine Support-Domain (Abbildung 1). In jedem Zeitschritt wird um jeden Materialpunkt eine Sphäre gelegt, in der nach Knotenpunkten gesucht, und diese dem jeweiligen Materialpunkt zugeordnet werden. Als Ansatzfunktionen werden bei der OTM-Methode die Local Maximum Entropy (LME)-Ansatzfunktionen genutzt. Aus der diskretisierten schwachen Form des Gleichgewichts werden die Verschiebungen der Knotenpunkte bestimmt. Es folgt eine Aktualisierung der Materialpunktkoordinaten.

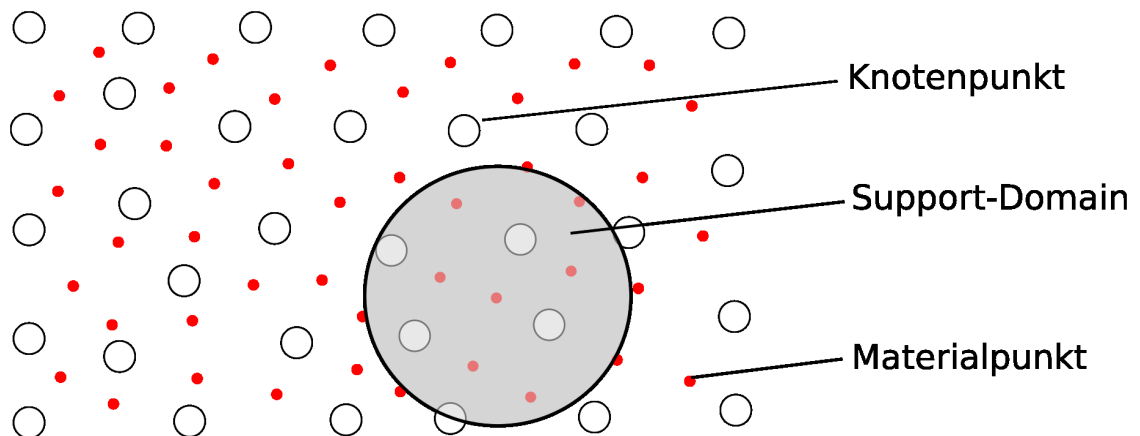


Abbildung 1 – Support-Domain um Materialpunkt

Da es durch den Suchalgorithmus der Support-Domain zu überlappenden Polyederelementen kommen kann, wird das Volumen nicht über die Geometrie des Elementes ausgerechnet. Es wird ein inkrementeller Deformationsgradient bestimmt, mit dessen Determinante der Volumenanteil des Materialpunktes aus dem letzten Zeitschritt aktualisiert wird. So ist lediglich vor Simulationsbeginn eine geometrische Berechnung von Volumenanteilen nötig. Die Aktualisierung der Dichte erfolgt analog.

Es folgt nun der in Formeln gefasste Ablauf: Die OTM-Methode beruht auf der schwachen Form des Gleichgewichts. Sie wird aus der lokalen Form des Impulssatzes herge-

leitet:

$$\rho \underline{\dot{v}} = \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\bar{b}}. \quad (1)$$

Mittels Multiplikation mit einer Testfunktion η und Integration über dem gesamten Gebiet B_t ergibt sich nach weiterer Umformung die schwache Form des Gleichgewichts

$$\int_{B_t} \rho \underline{\eta} \cdot \underline{\dot{v}} \, dv = \int_{B_t} \rho \underline{\eta} \cdot \underline{\bar{b}} \, dv - \int_{B_t} \operatorname{grad} \underline{\eta} : \underline{\underline{\sigma}} \, dv + \int_{\partial B_t} \underline{\eta} \cdot \underline{\bar{t}} \, da. \quad (2)$$

Die Diskretisierung des Trägheitsgliedes ergibt

$$\int_{B_t} \rho \underline{\eta} \cdot \underline{\dot{v}} \, dv = \bigcup_{p=1}^{n_p} \left\{ \sum_{I=1}^{n_p^{sup}} \sum_{J=1}^{n_p^{sup}} N_{I \, p \, n} N_{J \, p \, n} m_{p \, n} \underline{\eta}_{I \, n} \cdot \underline{a}_{J \, n} \right\} \quad (3)$$

bzw.

$$\underline{\underline{M}}_{I \, n} = \sum_{I=1}^{n_p^{sup}} \sum_{J=1}^{n_p^{sup}} N_{I \, p \, n} N_{J \, p \, n} m_{p \, n} \underline{\underline{1}}_g, \quad (4)$$

wobei n_p^{sup} die Anzahl der Knoten in der Support-Domain des p -ten Materialpunktes zum aktuellen Zeitschritt n ist.

Die inneren Kräfte ergeben sich mit der Spannung $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{F}})$ aus dem Materialgesetz, in das schwache Gleichgewicht (2) eingesetzt, zu

$$R_n = \int_{B_t} \left[\rho_n \underline{\eta}_n \cdot \underline{\bar{b}} - \frac{\partial \underline{\eta}_n}{\partial \underline{x}_n} : \underline{\underline{\sigma}}_n \right] dv_n \quad (5)$$

und in diskretisierter Form zu

$$R_n = \bigcup_{p=1}^{n_p} \left\{ \sum_{I=1}^{n_p^{sup}} \left[m_{p \, n} N_{I \, p \, n} \underline{\eta}_{I \, n} \cdot \underline{\bar{b}} - \underline{\eta}_{I \, n} \otimes N_{I, \underline{x} \, p \, n} : \underline{\underline{\sigma}}_{p \, n} v_{p \, n} \right] \right\} \quad (6)$$

bzw.

$$\underline{R}_{I \, n} = \sum_{I=1}^{n_p^{sup}} \left[m_{p \, n} N_{I \, p \, n} \underline{\bar{b}} - \underline{\underline{1}}_g \otimes N_{I, \underline{x} \, p \, n} : \underline{\underline{\sigma}}_{p \, n} v_{p \, n} \right]. \quad (7)$$

Daraus lässt sich die Beschleunigung an den Knotenpunkten ableiten:

$$\underline{a}_{J \, n} = \underline{\underline{M}}_{I \, n}^{-1} \underline{R}_{I \, n}. \quad (8)$$

Indem die Elementmassen auf die Knotenpunkte verteilt werden, ergibt sich durch das Zeilensummenverfahren eine diagonalisierte konzentrierte Massenmatrix, mit der die Knotenbeschleunigung aus Gleichung 8 berechnet werden kann:

$$\underline{a}_{I \, n} = \frac{\underline{R}_{I \, n}}{m_{I \, n}} \quad \text{mit} \quad m_{I \, n} = \sum_{p=1}^{n_p} N_{I \, p \, n} m_{p \, n}. \quad (9)$$

Aus der Beschleunigung werden die Ortsvektoren der Knotenpunkte mittels des zentralen Differenzenquotienten aktualisiert:

$$\underline{x}_{I \ n+1} = 2 \underline{x}_{I \ n} - \underline{x}_{I \ n-1} + (\Delta t)^2 \underline{a}_{I \ n}. \quad (10)$$

Die Ortsvektoren der Materialpunkte können nun mittels der Knotenkoordinaten und den jeweiligen Ansatzfunktionen aktualisiert werden:

$$\underline{x}_{p \ n+1} = \sum_{I=1}^{n_p^{sup} \ n} N_{I \ p \ n} \underline{x}_{I \ n+1} \quad (11)$$

Schließlich berechnet sich das Inkrement des Deformationsgradienten aus

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{F}}_{p \ n+1} &= \frac{\partial \underline{x}_{p \ n+1}}{\partial \underline{x}_{p \ n}} = \frac{\partial (\underline{x}_{p \ n} + \Delta \underline{u}_{p \ n+1})}{\partial \underline{x}_{p \ n}} \\ &= \underline{\underline{1}}_g + \frac{\partial \Delta \underline{u}_{p \ n+1}}{\partial \underline{x}_{p \ n}} = \underline{\underline{1}}_g + \sum_{I=1}^{n_p^{sup} \ n} \Delta \underline{u}_I \otimes N_{I, \underline{x}_{p \ n}} \end{aligned} \quad (12)$$

mit der inkrementellen Knotenpunktverschiebung

$$\Delta \underline{u}_I \ n+1 = \underline{x}_{I \ n+1} - \underline{x}_{I \ n}. \quad (13)$$

Mit diesem lässt sich der Deformationsgradient für den nächsten Zeitschritt errechnen:

$$\underline{\underline{F}}_{p \ n+1} = \Delta \underline{\underline{F}}_{p \ n+1} \cdot \underline{\underline{F}}_{p \ n}. \quad (14)$$

Mittels der Determinante des inkrementellen Deformationsgradienten können das Volumen und die Dichte für den nächsten Zeitschritt angepasst werden:

$$v_{p \ n+1} = v_{p \ n} \det(\Delta \underline{\underline{F}}_{p \ n+1}), \quad (15)$$

$$\rho_{p \ n+1} = \frac{\rho_{p \ n}}{\det(\Delta \underline{\underline{F}}_{p \ n+1})}. \quad (16)$$

3 Flexible Finite Elemente Methode

Die flexible Finite Elemente Methode ist eine Kombination der in Kapitel 2 dargestellten OTM-Methode und der im Folgenden vorgestellten Mean-Value-Koordinaten [WEISSENFELS AND WRIGGERS, 2014]. Die im Suchmechanismus der Support-Domain um einen Materialpunkt gefundenen Knotenpunkte bilden einen Polyeder, auf dem, statt der LME-Ansatzfunktionen, die sogenannten Mean-Value-Ansatzfunktionen aufgestellt werden.

3.1 Mean-Value-Koordinaten

Mean-Value-Koordinaten fallen unter die baryzentrischen Koordinaten. Sie sind ein Spezialfall der 2006 von Tao Lu, Peter Liepa und Joe Warren eingeführten allgemeinen Koordinaten auf einem konvexen Polyeder [JU ET AL., 2006]. Dort findet sich auch eine ausführliche Herleitung der Mean-Value-Koordinaten im dreidimensionalen Raum. Eine erstmalige Anwendung der Mean-Value-Koordinaten innerhalb der Finite Elemente Methode für konvexe Polyeder erfolgte in WICKE ET AL. (2007).

Ähnlich wie bei der herkömmlichen FEM wird der Polyeder auf eine Referenzgeometrie projiziert. Bei der FEM wird beispielsweise ein Tetraederelement auf den Referenztetraeder transformiert. Im Falle der Mean-Value-Koordinaten wird ein Polyeder mit n_p^{sup} Ecken auf die Einheitssphäre um den Material- bzw. Integrationspunkt projiziert. Jedem projizierten Knotenpunkt wird eine Wichtung auferlegt, wobei die Summe aller Wichtungen eins ergibt. Mean-Value-Ansatzfunktionen erfüllen die Partition of Unity und sind im Falle eines Tetraeders identisch mit den linearen Ansatzfunktionen der FEM.

Im Folgenden ist der grundlegende Berechnungsablauf der Mean-Value-Koordinaten innerhalb der flexiblen FEM dargestellt. Die Mean-Value-Koordinaten basieren auf dem Stokes'schen Satz, dass die Summe der Normalenvektoren auf einer Oberfläche gleich null ist. Im Falle eines konvexen Polyeders ist dies gleichbedeutend mit: Die Summe aller Normalenvektoren auf jeder Facette bzw. jedem dreiecksförmigen Oberflächenelement ist null:

$$\sum_{k=1}^{n_{fac}} \underline{n}_k = 0. \quad (17)$$

Genauso ist es möglich, die Differenzvektoren $\underline{x}_i - \underline{x}$, die vom Mittelpunkt der Einheitssphäre zu dem jeweiligen i -ten Knoten zeigen, als Normalenvektoren aufzufassen. Damit die Summe aller Differenzvektoren zu null wird, müssen diese gewichtet werden:

$$\sum_{i=1}^{n_{sup}} w_i (\underline{x}_i - \underline{x}) = 0 \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{n_{sup}} w_i \neq 0. \quad (18)$$

Um die Wichtungen w_i zu bestimmen, wird der Polyeder in n_{fac} Subtetraeder aufgeteilt, anteilig für jeden Subtetraeder berechnet, und schließlich zusammengefasst. Es

wird ein lokales Koordinatensystem am Subtetraeder mit den folgenden Basisvektoren aufgestellt:

$$\underline{g}_i = \underline{x}_i - \underline{x} \quad \text{und} \quad \underline{g}^i = \frac{\bar{n}_i}{(\underline{x}_i - \underline{x}) \cdot \bar{n}_i}, \quad (19)$$

wobei \bar{n}_i die drei Normalenvektoren auf den innenliegenden Seiten des Subtetraeders sind. Sie können aus den Differenzvektoren bestimmt werden:

$$\bar{n}_i = \frac{(\underline{x}_{i-1} - \underline{x})(\underline{x}_{i+1} - \underline{x})}{\|(\underline{x}_{i-1} - \underline{x})(\underline{x}_{i+1} - \underline{x})\|}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ in cyclic order.} \quad (20)$$

Der nach außen gerichtete Normalenvektor eines Subtetraeders kann im Falle der Mean-Value-Koordinaten bestimmt werden durch

$$n_k = \sum_{j=1}^3 d_j \bar{n}_j = \sum_{i=1}^3 u_i \underline{g}^i. \quad (21)$$

Mittels Multiplikation von rechts mit den kovarianten Basisvektoren \underline{g}_i ergibt sich die anteilige Wichtung des Subtetraeders zu

$$u_i = \frac{\sum_{j=1}^3 (d_j \bar{n}_j) \cdot \bar{n}_i}{(\underline{x}_i - \underline{x}) \cdot \bar{n}_i} \quad (22)$$

mit den Faktoren d_i , die sich im Falle der Mean-Value-Koordinaten ebenfalls aus den Differenzvektoren ergeben:

$$d_i = \frac{\alpha_i}{2} = \frac{1}{2} \arccos \frac{\underline{x}_{i-1} - \underline{x}}{\|\underline{x}_{i-1} - \underline{x}\|} \cdot \frac{\underline{x}_{i+1} - \underline{x}}{\|\underline{x}_{i+1} - \underline{x}\|}. \quad (23)$$

Schließlich setzt sich die Knotenwichtung aus den Anteilen der angrenzenden Subtetraeder zusammen

$$w_i = \sum_{j=1}^{n_i} u_j \quad (24)$$

und ergibt normiert mit der Summe aller Knotenwichtungen den Wert der Ansatzfunktion

$$N_i = \frac{w_i}{W} \quad \text{mit} \quad W = \sum_{j=1}^{n_{sup}} w_j. \quad (25)$$

Für die Bestimmung der Ableitungswerte der Ansatzfunktionen wird Gleichung (25) nach \underline{x} abgeleitet:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \underline{x}} = \frac{1}{W} \frac{\partial w_i}{\partial \underline{x}} - \frac{w_i}{W^2} \sum_{j=1}^{n_{sup}} \frac{\partial w_j}{\partial \underline{x}}. \quad (26)$$

Dabei gilt für die partielle Ableitung der Knotenwichtung w_i nach \underline{x}

$$\frac{\partial w_i}{\partial \underline{x}} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial u_j}{\partial \underline{x}}. \quad (27)$$

Die Ableitung der anteiligen Wichtungen ergibt sich durch Anwendung der Produktregel auf Gleichung (25):

$$\frac{\partial u_i}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\bar{\underline{n}}_i}{(\underline{x}_i - \underline{x}) \cdot \bar{\underline{n}}_i} + \left(\frac{\underline{n}}{(\underline{x}_i - \underline{x}) \cdot \bar{\underline{n}}_i} - \frac{\underline{n} \cdot \bar{\underline{n}}_i (\underline{x}_i - \underline{x})}{[(\underline{x}_i - \underline{x}) \cdot \bar{\underline{n}}_i]^2} \right) \frac{\partial \bar{\underline{n}}_i}{\partial \underline{x}} + \frac{\underline{n} \cdot \bar{\underline{n}}_i \bar{\underline{n}}_i}{[(\underline{x}_i - \underline{x}) \cdot \bar{\underline{n}}_i]^2}. \quad (28)$$

Eine weitere Herunterbrechung der Ableitung (28) mit der Produktregel führt auf einen Term, der lediglich noch von den Differenzvektoren $\underline{x}_i - \underline{x}$ abhängt.

3.2 Problematik der Unterintegration

Ein Problem der flexiblen Elemente Methode besteht darin, dass die Integration über den in jedem Zeitschritt in der Support-Domain um einen Materialpunkt festgelegten Polyeder nicht analytisch berechnet werden kann. Es wird daher auf numerische Integration zurückgegriffen und die Ansatzfunktionen sowie deren Ableitungen werden am Materialpunkt ausgewertet. Damit geht eine Ungenauigkeit einher, die zum Beispiel im Falle größerer Deformationen zu Hourglassing und dem verfrühten Abbruch der Simulation führen kann. In Abbildung 2 ist das Biegen eines am linken Ende eingespannten Balkens mit einer am rechten Ende aufbrachten Einzellast dargestellt. Oben ist der Balken in seiner Ausgangsform, mittig das Simulationsergebnis mittels der FEM und unten die abgebrochene Simulation der flexiblen Elemente dargestellt.

Bei einer Eigenwertanalyse der linearen Steifigkeitsmatrix wird offensichtlich, dass die Integration am Materialpunkt zwar die Eigenformen der volumetrischen Ausdehnung, Elongation und des Schubes darstellen kann, nicht jedoch die Biegemoden. Daher ist es naheliegend, die Integration auf mehrere Integrationspunkte innerhalb des Polyederelementes auszuweiten, und die Auswirkungen auf die sich ändernden Simulationsergebnisse zu untersuchen.

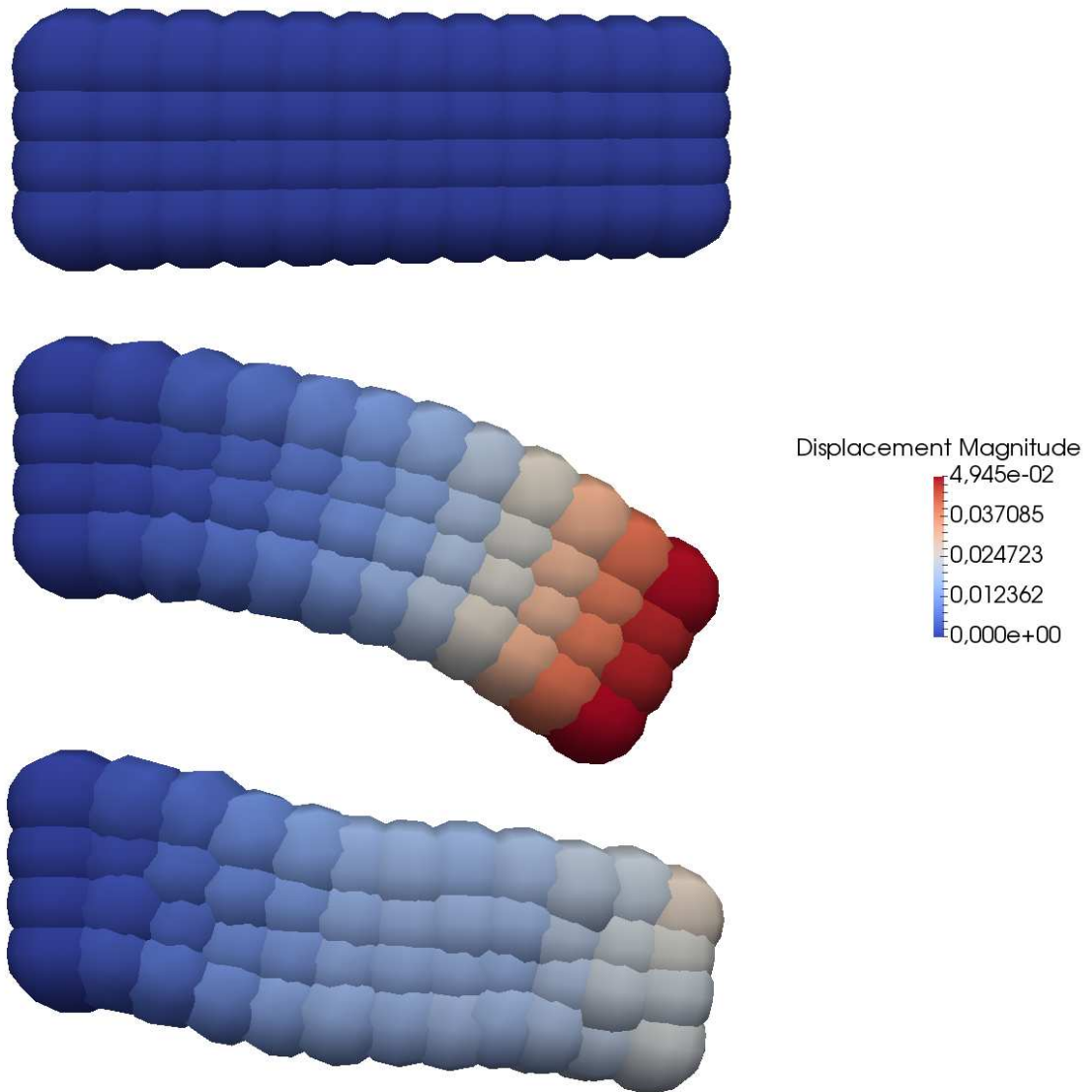


Abbildung 2 – Auswirkung der Unterintegration auf die Simulationsergebnisse

4 Integrationsmethoden

In diesem Kapitel wird auf die in Kapitel 3 vorgestellte Problematik der Unterintegration eingegangen, indem Möglichkeiten aufgezeigt werden, die Anzahl der Integrationspunkte innerhalb eines Polyederelementes sinnvoll zu erhöhen. Die Elemente sollen so in die Lage gebracht werden Biegemoden darzustellen. Zuerst wird das aktuelle Verfahren, nämlich die Integration am Materialpunkt vorgestellt. Es folgen einfach zu implementierende Integrationspunkteverteilungen und schließlich ein komplexeres Verfahren, welches die Einstellung einer gewünschten Genauigkeit und Punkteanzahl ermöglicht.

4.1 Materialpunkt (Tracer)

Die Integration über den Polyederelementen der flexiblen FEM erfolgt an den Materialpunkten. Im Weiteren wird der Materialpunkt auch Tracer genannt, da er in den nachfolgenden Integrationsmethoden nicht mehr als Integrationspunkt dient. Von ihm ausgehend wird über seine Support-Domain das Polyederelement erfasst. Die Anzahl der Integrationspunkte beträgt demnach eins:

$$n_{ip} = 1. \quad (29)$$

Der Integrationspunkt wird an dem Ortsvektor des Materialpunktes lokalisiert:

$$\underline{x}_{ip} = \underline{x}_p. \quad (30)$$

Die Wichtung, die im weiteren Verlauf dieses Kapitels wichtig wird, beträgt hier noch eins:

$$w_{ip} = 1. \quad (31)$$

4.2 Schwerpunkt (Centroid)

Da sich die zum jeweiligen Tracer gehörigen Polyederelemente in jedem Zeitschritt in ihrer Gestalt sowie insbesondere auch ihrer Anzahl an Eckpunkten ändern, liegt der Tracer nur in Sonderfällen im Schwerpunkt des Elementes. Ein vielleicht etwas besser platzierter Integrationspunkt ist möglicherweise der Schwerpunkt. Es gibt also vorerst keine Erhöhung der Anzahl:

$$n_{ip} = 1. \quad (32)$$

Um den Ortsvektor des Polyederschwerpunktes zu bestimmen, wird der Polyeder zunächst, wie bereits in Kapitel 3 beschrieben, in n_p^{sup} Subtetraeder aufgeteilt. Es werden die Subtetraederschwerpunkte \underline{x}_{fac_0} gewichtet mit Ihrem Volumenanteil am Polyeder aufaddiert:

$$\underline{x}_{ip} = \frac{\sum_{fac=1}^{n_{fac}} (\underline{x}_{fac_0} \cdot V_{fac})}{V_{pol}}. \quad (33)$$

Da es nur einen Integrationspunkt gibt, verbleibt die Wichtung nach wie vor bei eins:

$$w_{ip} = 1. \quad (34)$$

4.3 Knotenabhängige Verteilung (Nodes)

Eine recht einfach zu implementierende Möglichkeit die Anzahl der Integrationspunkte zu erhöhen, besteht darin, die Integrationspunkte von den Knotenpunkten des Polyeders abhängig zu machen. Jedem Knotenpunkt wird ein Integrationspunkt zugeordnet. Daher gilt

$$n_{ip} = n_p^{sup}. \quad (35)$$

Die Integrationspunkte sind bei dieser Methode auf der Verbindungslinie zwischen Tracer und Knotenpunkt angeordnet. Dabei befindet sich vom Tracer ausgehend am d -ten Teil des Differenzvektors $\underline{x}_{I_n} - \underline{x}_{p_n}$ der zum Knotenpunkt gehörige Integrationspunkt:

$$\underline{x}_{ip} = \underline{x}_{p_n} + d (\underline{x}_{I_n} - \underline{x}_{p_n}). \quad (36)$$

Gewichtet wird jeder Punkt mit

$$w_{ip} = \frac{1}{n_{ip}}. \quad (37)$$

So wird sichergestellt, dass die Summe aller Wichtungen eins bleibt.

4.4 Subtetraederschwerpunkte (Facet)

Ein Nachteil der knotenabhängigen Verteilung von Abschnitt 4.3 ist, dass bei einer ungünstigen Knotenverteilung Teile des Polyeders durch eine Anhäufung von Integrationspunkten stärker gewichtet werden. Dies kann bei der knotenabhängigen Verteilung schlecht mit einer Wichtung korrigiert werden. Abhilfe verschafft es, die Integrationspunkte in die Subtetraederschwerpunkte aus Abschnitt 4.2 zu legen. Bei dieser Methode ist die Integrationspunktzahl gleich der Anzahl der Subtetraeder des Polyeders:

$$n_{ip} = n_{fac}. \quad (38)$$

Die Ortsvektoren der Integrationspunkte ergeben sich, wie schon erläutert, aus den Subtetraederschwerpunkten:

$$\underline{x}_{ip} = \frac{\sum_{i=1}^4 \underline{x}_{fac_i}}{4}. \quad (39)$$

Es lässt sich eine Wichtung formulieren, indem das jeweilige Subtetraedervolumen V_{fac} auf das Volumen des Polyeders V_{pol} bezogen wird. So werden Punkteanhäufungen dementsprechend schwächer gewichtet und eine volumengerechte Bewertung der Integrationspunkte sichergestellt:

$$w_{ip} = \frac{V_{fac}}{V_{pol}}. \quad (40)$$

Das Volumen des Subtetraeders berechnet sich mit dem innenliegenden Knoten \underline{x}_{fac_1} , der dem Tracer entspricht, und den die Oberfläche des Polyeders bildenden Punkten $\underline{x}_{fac_{2,3,4}}$ zu

$$V_{fac} = \frac{1}{6} [((\underline{x}_{fac_2} - \underline{x}_{fac_1}) \times (\underline{x}_{fac_3} - \underline{x}_{fac_1})) \cdot (\underline{x}_{fac_4} - \underline{x}_{fac_1})]. \quad (41)$$

Die Summe aller Subtetraedervolumina ergibt das Polyedervolumen, sodass die Summe über alle Wichtungen w_{ip} eins ergibt:

$$V_{pol} = \sum_{fac=1}^{n_{fac}} V_{fac}. \quad (42)$$

4.5 Integrationspunktgitter

Um eine noch bessere Genauigkeit der Integration zu bewerkstelligen, ist es sinnvoll, die Integrationspunkte gitterförmig anzuordnen. Da ein Polyeder als Element sehr allgemein gefasst ist, wird er für die Gittererstellung in seine Subtetraeder aufgeteilt (siehe Kapitel 3 bzw. Abschnitt 4.2). Damit nicht auf jedem Subtetraeder ein Integrationspunktgitter erstellt werden muss und so Rechenzeit gespart werden kann, wird das Gitter einmal auf einem Referenztetraeder, dem Einheitstetraeder, aufgestellt. Die Integrationspunktkoordinaten im globalen System \underline{x}_{ip} können dann auf den zu berechnenden Subtetraeder transformiert werden:

$$\underline{x}_{ip} = \underline{x}_{fac1} + \underline{J}_{\underline{R}} \underline{x}_R. \quad (43)$$

\underline{x}_R stellt hierbei den Ortsvektor eines Integrationspunktes auf dem Referenztetraeder dar. Die Transformationsmatrix $\underline{J}_{\underline{R}}$ kann direkt aus den Eckkoordinaten des Subtetraeders berechnet werden:

$$\underline{J}_{\underline{R}} = \begin{pmatrix} x_{fac2} - x_{fac1} & x_{fac3} - x_{fac1} & x_{fac4} - x_{fac1} \\ y_{fac2} - y_{fac1} & y_{fac3} - y_{fac1} & y_{fac4} - y_{fac1} \\ z_{fac2} - z_{fac1} & z_{fac3} - z_{fac1} & z_{fac4} - z_{fac1} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Die Wichtung eines Integrationspunktes setzt sich zusammen aus der Subtetraederwichtung aus Kapitel 4.4 multipliziert mit der Wichtung eines Referenzpunktes, die sich aus der inversen Anzahl der Gitterpunkte des Referenztetraeders ergibt:

$$w_{ip} = \frac{V_{fac}}{V_{pol}} \cdot \frac{1}{n_R}. \quad (45)$$

Die folgenden zwei Unterabschnitte behandeln das Erstellen eines Gitters auf dem Einheitstetraeder.

4.5.1 Fester Punkteabstand (Grid 1)

Eine erste, recht einfach zu realisierende Möglichkeit, ein Punktgitter auf dem Einheitstetraeder zu erstellen, ist es, einen festen Punkteabstand $\frac{1}{n}$ in allen drei Raumrichtungen festzulegen. Damit ergeben sich als Referenzpunkte alle Punkte, dessen Ortsvektor der folgenden Vorschrift genügen:

$$\underline{x}_R = \frac{i}{n} \underline{e}_x + \frac{j}{n} \underline{e}_y + \frac{k}{n} \underline{e}_z \quad \text{mit} \quad i, j, k \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad i + j + k < 1. \quad (46)$$

Die Referenzpunkte werden dann einzeln für jeden Subtetraeder eines Polyeders in das globale Koordinatensystem transformiert. Ein Nachteil dieser Methode besteht darin, dass nur für bestimmte Parameter n die Referenzpunkte gleichmäßig nah an den Rand des Tetraeders reichen. Bei den Parametern n , für die das nicht erfüllt ist, wird der 'diagonale Abschnitt' des Einheitstetraeders entsprechend stärker gewichtet, wodurch es zum vorzeitigen Abbruch der Simulation kommen kann.

4.5.2 Äquivalente Teiltetraedervolumina (Grid 2)

Es ist selbstverständlich wünschenswert, dass die numerische Integration über dem Polyeder mit zunehmender Anzahl an Integrationspunkten an die exakte Lösung konvergiert. Dafür ist, wie schon in Abschnitt 4.4 angedeutet, ein gleichmäßiger Volumenanteil um jeden Integrationspunkt vonnöten. Die in diesem Unterabschnitt vorgestellte Punkteverteilung soll das gewährleisten und ebenso die Möglichkeit bieten, eine gewünschte Genauigkeit der Integration einzustellen.

Der Ansatz bei dieser Methode ist, dass der betrachtete Tetraeder - in diesem Fall der Einheitstetraeder - in 4^{n-1} sogenannte Teiltetraeder äquivalenten Volumens aufgeteilt wird. In den Schwerpunkt jedes Teiltetraeders wird dann ein Referenzpunkt gesetzt. Über den Parameter n kann die gewünschte Genauigkeit eingestellt werden. Der Einheitstetraeder wird dazu in vier Teiltetraeder aufgeteilt, indem der Schwerpunkt mit je drei Eckknoten einen Teiltetraeder bildet. Jeder dieser Teiltetraeder wird wiederum nach dem gleichen Verfahren in vier Teiltetraeder aufgeteilt. Dieses Verfahren wird n mal befolgt und schließlich werden die Schwerpunkte jedes Teiltetraeders als Referenzpunkte angegeben. Im Folgenden ist der in Formeln gefasste Ablauf erläutert.

Ein Container für die Eckkoordinaten jedes Teiltetraeders wird erst einmal mit den Ecken des Einheitstetraeders initialisiert:

$$\underline{x}_{tet_{i_j \ n_R}} = \underline{x}_{tet_{1_j \ 1}} = \begin{pmatrix} \underline{x}_{tet_{1_1 \ 1}} \\ \underline{x}_{tet_{1_2 \ 1}} \\ \underline{x}_{tet_{1_3 \ 1}} \\ \underline{x}_{tet_{1_4 \ 1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Der Index i steht dabei für den i -ten Genauigkeitsschritt des Verfahrens, n_R ist der Zähler für die Anzahl der Teiltetraeder des i -ten Genauigkeitsschrittes und j ist der Zähler über die vier Knoten eines jeden Teiltetraeders. Nach der Initialisierung kann der Container innerhalb einer Schleife mit dem Teil-Verfahren bearbeitet werden.

→ Anfang der Schleife über die Genauigkeit i ←

Um die n_R Teiltetraeder in jeweils vier Teiltetraeder zu zerlegen, werden erst einmal die Schwerpunkte benötigt. Sie berechnen sich wie in Abschnitt 4.2 aus

$$\underline{x}_{cen_{i \ n_R}} = \frac{\sum_{j=1}^4 \underline{x}_{tet_{i_j \ n_R}}}{4}. \quad (48)$$

Es können nun die neuen Koordinaten der Teiltetraeder in den um den Faktor vier vergrößerten Container für die Eckkoordinaten geschrieben werden. Aus jedem der n_R Teiltetraeder ergeben sich vier neue Teiltetraeder:

$$\underline{x}_{tet_{i+1_j \ n_R}} = \begin{pmatrix} \underline{x}_{tet_{i_j \ n_R \ 1}} \\ \underline{x}_{tet_{i_j \ n_R \ 2}} \\ \underline{x}_{tet_{i_j \ n_R \ 3}} \\ \underline{x}_{tet_{i_j \ n_R \ 4}} \end{pmatrix}, \quad (49)$$

wobei

$$\underline{x}_{tet_{i_j} \ n_R \ k} = \begin{pmatrix} \underline{x}_{tet_{i_k \% 4} \ n_R} \\ \underline{x}_{tet_{i_{(k+1)\%4} \ n_R} \\ \underline{x}_{tet_{i_{(k+2)\%4} \ n_R} \\ \underline{x}_{cen_{i \ n_R}} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Nach Aktualisierung der Eckkoordinaten, kann auch die Anzahl der Teiltetraeder angepasst werden:

$$n_R = n_R \cdot 4. \quad (51)$$

→ Ende der Schleife über die Genauigkeit i ←

Nach Abschluss des Teil-Verfahrens erfolgt die Ausgabe der Schwerpunkte als Referenzpunkte:

$$\underline{x}_R = \underline{x}_{cen_{i \ R}}. \quad (52)$$

5 Validierung

Im Folgenden werden die im vorigen Kapitel vorgestellten Integrationsmethoden auf ihre Wirksamkeit hin überprüft. Dazu wird erstens eine Beispielsimulation durchgeführt, zweitens wird eine Konvergenzanalyse der Integration der Ansatzfunktionen über einem Polyederelement durchgeführt und drittens werden die Steifigkeitsmoden eines Polyederelementes mittels einer Steifigkeitsanalyse der linearen Steifigkeitsmatrix untersucht.

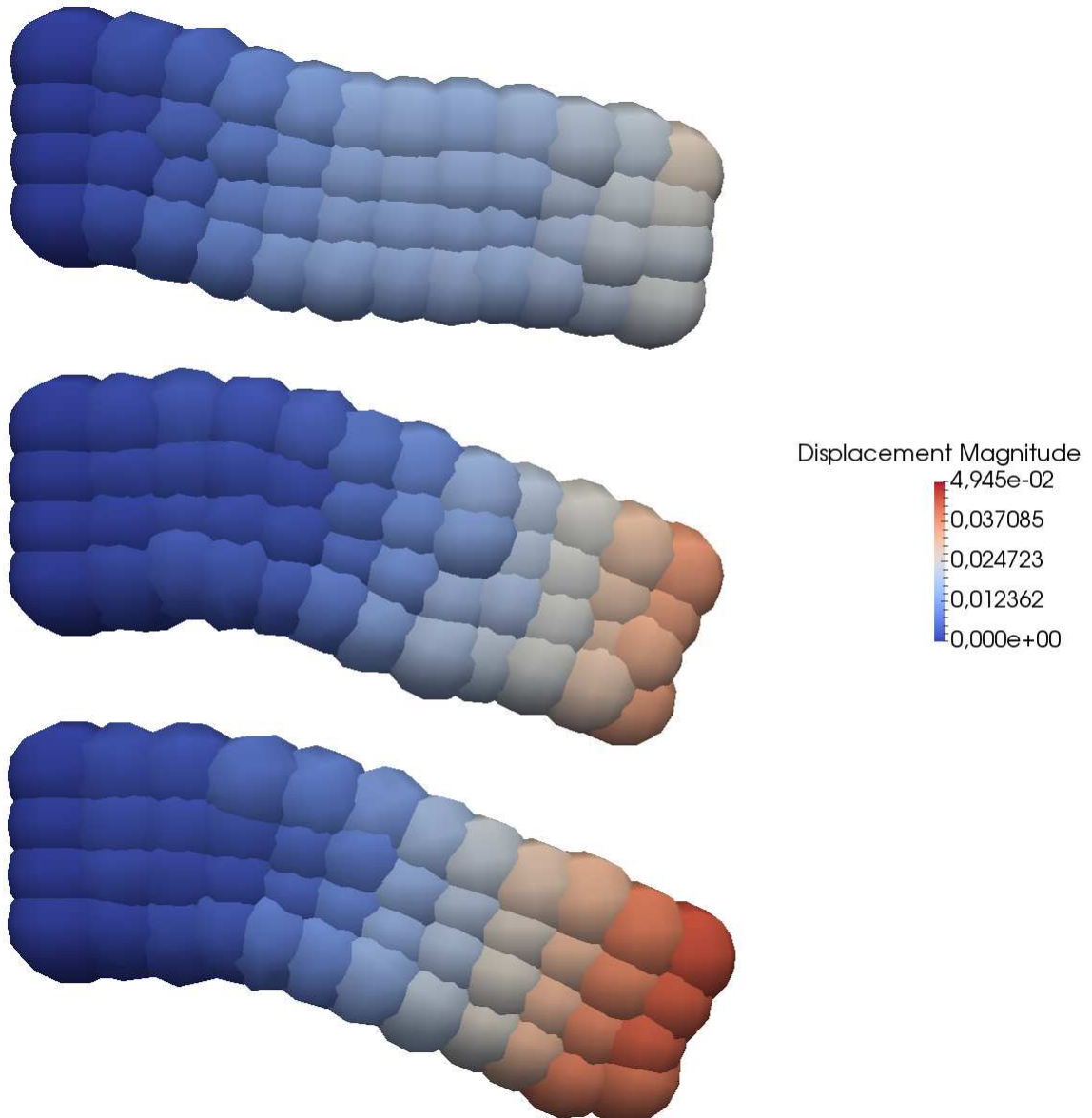


Abbildung 3 – Balkenbiegung mit unterschiedlichen Integrationsmethoden

5.1 Simulation einer Balkenbiegung

Als Beispielsimulation wird die schon aus Kapitel 3 bekannte Biegung eines Balkens genutzt. Der am linken Ende eingespannte Balken in Abbildung 3 wird am rechten En-

de mit einer Einzellast belastet. Das obere Bild zeigt die abgebrochene Simulation der flexiblen FEM mit Integration am Materialpunkt. In der Mitte wurde als Integrationsmethode die knotenabhängige Verteilung aus Abschnitt 4.3 genutzt und unten ist das Simulationsergebnis mit der Methode der Subtetraederschwerpunkte (Abschnitt 4.4), bzw. der Methode der äquivalenten Teiltetraedervolumina für $n = 1$ (Abschnitt 4.5.2), dargestellt.

Die Tracer-Methode bricht nach Zeitschritt 233 von 500 aufgrund von Unterintegration ab. Mit der Nodes- und Facet-Methode lässt sich die komplette Simulation durchführen, das Ergebnis deckt sich aber noch nicht mit der Lösung der FEM. Dem kann auch eine weitere Verfeinerung des Integrationsnetzes nicht abhelfen. Abgesehen von dem Problem der Unterintegration scheint es demnach noch ein weiteres zu untersuchendes Problem bei der flexiblen FEM zu geben. Dies kann mit Simulationen, bei denen die Unterintegration der Biegemoden nicht im Vordergrund steht, offengelegt werden. Ein gutes Simulationsergebnis bei vertretbarem Rechenaufwand stellt die Facet-Integrationsmethode dar.

5.2 Konvergenzanalyse der Ansatzfunktionen

Um ein Maß für die Exaktheit der numerischen Integration zu erhalten, wird die Konvergenz der Integrationsmethoden bei Erhöhung der Knotenanzahl überprüft, indem der Wert des numerisch berechneten Integrals einer Ansatzfunktion über einem Polyeder untersucht wird. Da eine analytische Integration mit den Mean-Value-Koordinaten nicht möglich ist, soll die numerische Integration nach folgender Formel einen Grenzwert aufweisen, der dem tatsächlichen Wert des Integrals entspricht:

$$\int_{V_{pol}} N_1 dV_{pol} \stackrel{!}{=} \lim_{l_{int} \rightarrow \infty} \sum_{g=1}^{l_{int}} N_1(\underline{x}_g) W(\underline{x}_g). \quad (53)$$

Das Ergebnis dieser Konvergenzanalyse ist, unter Nutzung der Integrationsmethode der äquivalenten Teiltetraedervolumina, in Tabelle 1 dargestellt und in Abbildung 4 visualisiert. Der Wert des Integrals ist in blau abgebildet und die Anzahl der Integrationspunkte logarithmisch in rot. Folglich konvergiert der Integralwert bei zunehmender Integrationspunktanzahl gegen einen Wert. Ob dieser Wert exakt ist, darüber kann hier allerdings keine Aussage getroffen werden.

Wahl der Integrationspunkte	Anzahl der Integrationspunkte	Integral der Ansatzfunktion über Pentaederelement
Tracer	1	0.241723522049
Grid2, n=1	6	0.245121216798
Grid2, n=2	24	0.244713667900
Grid2, n=3	96	0.244435116562
Grid2, n=4	384	0.244258542863
Grid2, n=5	1536	0.244150501256
Grid2, n=6	6144	0.244083076580
Grid2, n=7	24576	0.244040258117
Grid2, n=8	98304	0.244012715767
Grid2, n=9	393216	0.243994826032
Grid2, n=10	1572864	0.243983109930

Tabelle 1 – Konvergenzanalyse an einem Pentaederelement

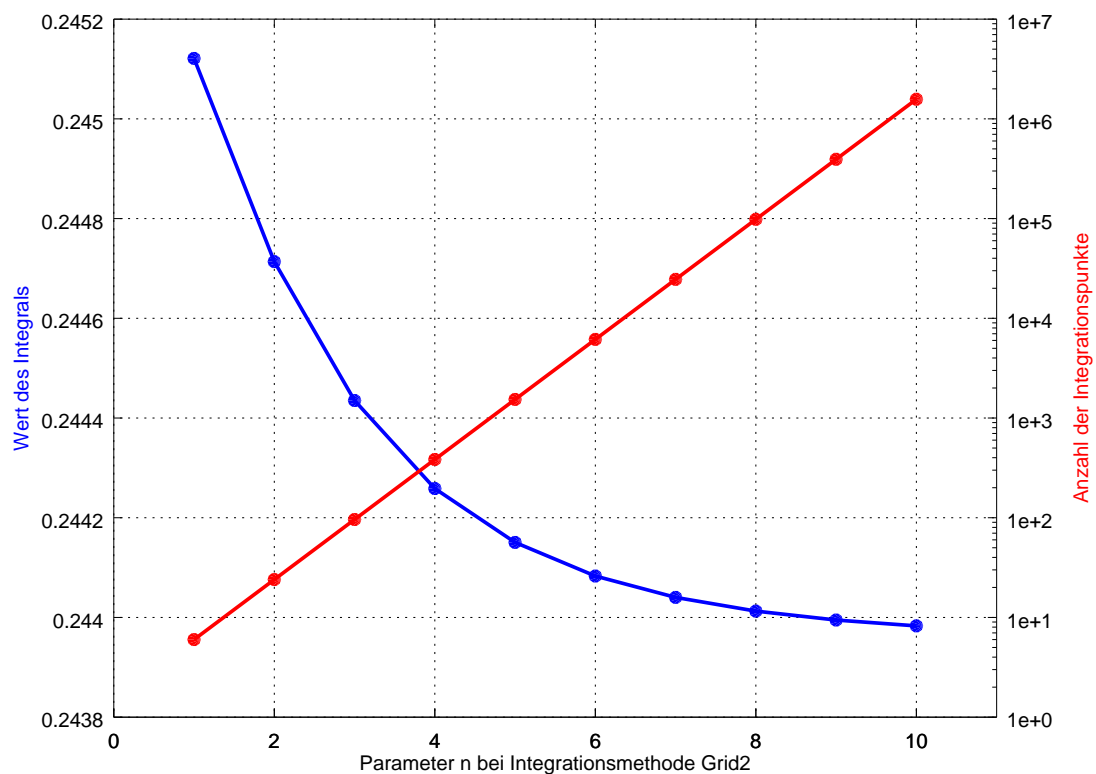


Abbildung 4 – Konvergenzanalyse an einem Pentaederelement

5.3 Eigenwertanalyse

In diesem letzten Abschnitt wird gezeigt, dass mit dem Verhindern der Unterintegration die Möglichkeit der Abbildung von Biegemoden einhergeht. Dazu wird eine Eigenwertanalyse der linearen Steifigkeitsmatrix durchgeführt. Diese berechnet sich zu

$$\underline{k} = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}. \quad (54)$$

Die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix eines Dekaaederelementes sind in der nachfolgenden Tabelle dargestellt. Im Falle der Unterintegration sind die Eigenwerte der Biegemoden null. Sobald die Anzahl der Integrationspunkte erhöht wird, können auch die

Biege-Eigenmoden abgebildet werden. Es lässt sich mit einer Zunahme der Integrationspunktanzahl wiederum eine Konvergenz der Eigenwerte feststellen. Die Methode der Subtetraederschwerpunkte (bzw. Grid 2 mit $n = 1$) stellt hier ebenfalls einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand dar.

Eigenwerte in $1 \cdot 10^6$	Materialpunkt	Schwerpunkt	Knotenabhängige Verteilung $d=0,5$	Gleichmäßiges Gitter $n=1$	Gleichmäßiges Gitter $n=3$	Gleichmäßiges Gitter $n=5$	Gleichmäßiges Gitter $n=7$
0.	0	0	0	0	0	0	0
1.	0	0	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	0	0	0	0
3.	0	0	0	0	0	0	0
4.	0	0	0	0	0	0	0
5.	0	0	0	0	0	0	0
6.	0	0	1721	3883	6052	6667	7039
7.	0	0	1902	5125	6667	7061	7449
8.	0	0	2955	6379	8022	8349	8627
9.	0	0	3329	9184	11440	11746	12003
10.	0	0	4389	9939	13522	14276	14713
11.	0	0	4663	11404	14830	15511	15957
12.	0	0	5679	13238	15979	16601	16996
13.	0	0	7203	16502	18385	18735	19015
14.	0	0	7686	17553	19292	19593	19842
15.	0	0	9232	18995	21018	21359	21603
16.	0	0	10781	21449	21865	21926	22004
17.	0	0	11707	21509	23559	24321	24774
18.	0	0	14110	25817	29748	30443	30952
19.	0	0	14946	28540	32195	32744	33128
20.	0	0	17451	30369	35197	35847	36271
21.	0	0	18670	34448	36056	36303	36592
22.	0	0	20981	34848	38292	38905	39355
23.	0	0	26238	35754	38740	39260	39694
24.	24934	24587	26689	42938	46591	47095	47545
25.	25833	25535	29401	46470	48913	49684	50202
26.	38696	38392	38138	70074	71544	72064	72715
27.	90442	95670	90256	93219	94742	95002	95231
28.	93280	98578	92717	96917	98559	98637	98866
29.	215777	230067	212916	217861	217368	217189	217324

Tabelle 2 – Eigenwerte der linearen Steifigkeitsmatrix eines Dekaederelementes

Abbildungsverzeichnis

1	Support-Domain um Materialpunkt	2
2	Auswirkung der Unterintegration auf die Simulationsergebnisse	8
3	Balkenbiegung mit unterschiedlichen Integrationsmethoden	14
4	Konvergenzanalyse an einem Pentaederelement	16

Tabellenverzeichnis

1	Konvergenzanalyse an einem Pentaederelement	16
2	Eigenwerte der linearen Steifigkeitsmatrix eines Dekaederelementes	17

Literatur

- Habbal, F. (2009). *The Optimal Transportation Meshfree Method for General Fluid Flows and Strongly Coupled Fluid-Structure Interaction Problems*. PhD thesis, California Institute of Technology.
- Ju, T., Liepa, P., and Warren, J. (2006). A general geometric construction of coordinates in a convex simplicial polytope. *Elsevier*.
- Weißenfels, C. and Wriggers, P. (2014). Combination of mean value coordinates and meshfree methods. Ablaufschema der flexiblen Finite Elemente Methode als Kombination der OTM-Methode mit den Mean-Value-Koordinaten.
- Wicke, M., Botsch, M., and Gross, M. (2007). A finite element method on convex polyhedra. *Eurographics*.
- Wriggers, P. (2001). *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer.