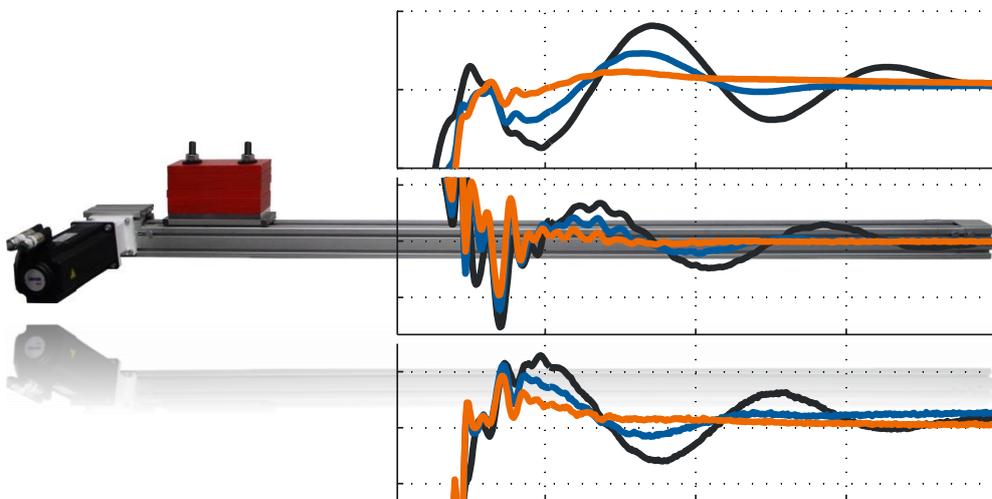


Entwurf einer adaptiven Vorsteuerung für mechatronische Systeme basierend auf differentieller Flachheit



Masterarbeit M-04/14-434

Moritz Schappler

Matrikel-Nr.: 2641920

Hannover, April 2014

Erstprüfer Prof. Dr.-Ing. T. Ortmaier

Zweitprüfer Prof. Dr.-Ing. J. Wallaschek

Betreuer M. Sc. Daniel Beckmann

Masterarbeit

Herr Moritz Schappler, B. Sc., Matr.-Nr. 2641920

Entwurf einer adaptiven Vorsteuerung für mechatronische Systeme basierend auf differentieller Flachheit

Allgemeines:

Am Institut für Mechatronische Systeme wird seit langem an nichtlinearen Beobachterentwürfen für mechatronische Anlagen geforscht. Mit den Beobachterkonzepten (z. B. Kalman-Filter-Strukturen) werden Zustandsgrößen sowie Systemparameter online identifiziert. Basierend auf den Ergebnissen werden beobachtergestützte Regelungen, modellbasierte Reglereinstellung sowie flachheitsbasierte Vorsteuerungsansätze umgesetzt. Die Methoden können an diversen industrienahen Versuchsständen des Instituts verifiziert werden.

Aufgabe:

Im Rahmen dieser Masterarbeit sollen Methoden einer adaptiven Vorsteuerung basierend auf differentieller Flachheit entwickelt werden. Insbesondere liegt ein Schwerpunkt dieser Arbeit in der industrienahen Entwicklung und Implementierung. Besonderes Augenmerk liegt auf der Untersuchung der Verfahren hinsichtlich ihrer Robustheit (z. B. gegenüber falschen Systemparametern). Weiterhin ist zu untersuchen, welche sich ändernden Parameter online erfasst werden können und zur Verwendungen in der Vorsteuerung geeignet sind. Die Implementierung und Validierung erfolgt an einem industrienahen Prüfstand des Instituts für Mechatronische Systeme.

Im Rahmen dieser Arbeit ergeben sich insbesondere die folgenden Aufgabenpunkte:

- Einarbeitung und Literaturrecherche zu flachheitsbasierten Vorsteuerungsansätzen
- Entwicklung einer adaptiven flachheitsbasierten Vorsteuerung
- Rückführung von online-geschätzten Systemparametern zur Verbesserung der Vorsteuerung
- Generierung geeigneter Trajektorien
- Implementierung der Konzepte am Prüfstand
- Vergleich der adaptiven flachheitsbasierten Vorsteuerung mit der bestehenden Vorsteuerung
- Robustheitsanalyse der Verfahren auf falsche Systemparameter

Ausgabe der Aufgabenstellung: 25.10.2013

spätester Abgabetermin: 25.04.2013

Betreuer: M. Sc. Daniel Beckmann
Prof. Dr.-Ing. Tobias Ortmaier

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis.....	III
Tabellenverzeichnis.....	V
Abkürzungsverzeichnis	VI
Formelzeichen.....	VI
1 Einleitung.....	1
2 Stand der Technik.....	2
2.1 Regelungstechnische Beschreibung mechatronischer Systeme	2
2.2 Regelung	5
2.3 Vorsteuerung.....	6
2.4 Trajektorien	6
2.5 Beobachter	8
2.6 Differentielle Flachheit.....	9
3 Beschreibung und Modellbildung des Versuchsprüfstands.....	14
3.1 Beschreibung des Prüfstands.....	14
3.2 Messtechnik	17
3.3 Zahnriemen-Linearachse.....	18
3.4 Modellierung mit konzentrierten Parametern	19
3.5 Vorsteuerungsmodelle mit konzentrierten Parametern.....	21
3.6 Modellierung mit verteilten Parametern	27
4 Berechnung von Trajektorien.....	33
4.1 Polynomtrajektorien mit Bernstein-Basispolynomen.....	33
4.2 Faltungs-Algorithmus für Trapeztrajektorien.....	35
4.3 Vorsteuerungstrajektorien	40
5 Validierung der flachheitsbasierten Vorsteuerung	49
5.1 Zahnriemenachse mit nichtlinearer Steifigkeitskennlinie	49

5.2	Zahnriemenantrieb mit Blattfeder und Zusatzmasse	57
5.3	Einfluss von Vorsteuerungsparametern auf die Regelgüte.....	62
5.4	Einfluss der Haftreibung auf die Regelgüte	69
5.5	Maßnahmen zur Kompensation der Haftreibung	70
5.6	Einfluss der Dämpfung auf die flachheitsbasierte Vorsteuerung	72
6	Adaptive Vorsteuerung	74
6.1	Parameterschätzung für ein Einmassensystem.....	74
6.2	Rückführung der Parameter in eine Zweimassenvorsteuerung	76
6.3	Anregung der Parameter	77
6.4	Validierung der adaptiven Vorsteuerung	77
7	Validierung der Vorsteuerung mit verteilten Parametern	81
7.1	Unterschiede zur Vorsteuerung mit konzentrierten Parametern	81
7.2	Versuchsergebnisse	82
8	Zusammenfassung und Ausblick	85
9	Literaturverzeichnis.....	87
A	Anhang	90
A.1	Versuchsdurchführung und -auswertung am Aktorik-Prüfstand	90
A.2	Bestimmung der Federsteifigkeit einer Blattfeder	95
A.3	Bilder der Versuchsergebnisse.....	97

Abbildungsverzeichnis

Bild 2.1: Blockstruktur der eingangslinaren Zustandsraumdarstellung	2
Bild 2.2: Blockstruktur eines Beobachters in Kalman-Struktur	8
Bild 2.3: Ablaufplan bei der Berechnung von flachen Vorsteuerungen.....	11
Bild 2.4: Regelkreis mit flachheitsbasierter Vorsteuerung, [Hag04].....	12
Bild 3.1: Mechanische Komponenten des Einzelachs-Prüfstands.....	14
Bild 3.2: Signalflussbild des Versuchsprüfstands	15
Bild 3.3: Bildschirmausgabe des xPC-Targets mit xPC-Scopes.....	16
Bild 3.4: Simulink-Oberfläche zur Steuerung des Echtzeitrechners	16
Bild 3.5: Leica LTD700	17
Bild 3.6: Befestigung der Lasertracker-Reflektorkugel am Versuchsprüfstand.....	18
Bild 3.7: Zahnriemen-Linearachse mit Zugkraftverlauf; Vorlage: [Per09].	18
Bild 3.8: Mechanisches Ersatzbild des Zahnriemenantriebs, [Kli13]	19
Bild 3.9: Kennlinie der Riemensteifigkeit und Totzeit der Kraftübertragung.....	20
Bild 3.10: Rotatorisches lineares Einmassenmodell.....	22
Bild 3.11: Rotatorisches lineares Zweimassenmodell, [Kli13].....	23
Bild 3.12: Rotatorisches lineares Dreimassenmodell	25
Bild 3.13: Ein-Trum-Modellierung der Zahnriemen-Linearachse	28
Bild 3.14: Zwei-Trum-Modellierung der Zahnriemen-Linearachse.....	31
Bild 4.1 Zeitverlauf einer \mathcal{C}^2 -stetigen Trapez-Trajektorie.....	35
Bild 4.2: Faltung einer konstanten Geschwindigkeit, [Lee13]	37
Bild 4.3: Prinzip des Faltungs-Algorithmus für \mathcal{C}^n -Trapezprofile	38
Bild 4.4: Vergleich der Trapez-Trajektorien aus Tabelle 4.1.....	42
Bild 4.5: Alle Ableitungen einer \mathcal{C}^4 -Trapeztrajektorie und Antriebsmoment	46
Bild 4.6: Vergleich der Trajektorien im Drehmoment-Drehzahl-Diagramm.....	48
Bild 5.1: Vergleich von Vorsteuerungen mit 10 ms-Trapez-Trajektorie	52
Bild 5.2: Ergebnisvergleich mit Polynomtrajektorie; Antriebsseite	53
Bild 5.3: Ergebnisvergleich mit Polynomtrajektorie; Lastseite	53
Bild 5.4: Ergebnisvergleich mit 170 ms-Trapeztrajektorie; Antriebsseite	54

Bild 5.5: Ergebnisvergleich mit 170 ms-Trapeztrajektorie; Lastseite	54
Bild 5.6: Versuchsaufbau der Linearachse mit Blattfeder und Zusatzmasse.....	57
Bild 5.7: Ergebnisvergleich mit 77 ms-Trapeztrajektorie und Zusatzmasse; Antrieb .	58
Bild 5.8: Ergebnisvergleich mit 77 ms-Trapeztrajektorie und Zusatzmasse; Lastseite	59
Bild 5.9: Ergebnisvergleich mit 50 ms-Trapeztrajektorie und Zusatzmasse	60
Bild 5.10: Ergebnisvergleich mit Polynomtrajektorie und Zusatzmasse	61
Bild 5.11: Blockstruktur des P/PI-Kaskadenreglers des Systemausgangs	63
Bild 5.12: Regelkreis mit Vorsteuerung in z-Koordinaten	63
Bild 5.13: Pol- und Nullstellenortskurve für das vorgesteuerte Einmassenmodell	65
Bild 5.14: Beeinflussung des Vorsteuermoments durch Variation der Masse	66
Bild 5.15: Auswirkung der Veränderung der vorgesteuerten Masse.....	66
Bild 5.16: Auswirkung der Veränderung der vorgesteuerten Riemensteifigkeit.....	67
Bild 5.17: Auswirkung der Veränderung der vorgesteuerten Blattfedersteifigkeit	68
Bild 5.18: Mechanisches Ersatzbild der Linearachse mit Schlitten in Haftreibung.....	69
Bild 5.19: Vergleich der Auswirkung von unterschiedlicher Haftreibung zu Beginn...	69
Bild 5.20: Verhalten bei Kompensation der Losbrechkraft.....	70
Bild 5.21: Verlauf von Vorsteuergrößen bei unterschiedlichen Dämpfungen	72
Bild 5.22: Simulationsergebnisse mit unterschiedlichen Dämpfungen	73
Bild 6.1: Parameterschätzung mit Sensitivitätsüberwachung	75
Bild 6.2: Blockstruktur der adaptiven flachheitsbasierten Vorsteuerung	76
Bild 6.3: Sensitivitätswerte bei unterschiedlichen Trajektorien	77
Bild 6.4: Zeitverlauf von Messgrößen bei einer adaptiven 2MS-Vorsteuerung	79
Bild 6.5: Zeitverlauf der Parameterschätzung bei einer adaptiven 2MS-VS	79
Bild 6.6: M-n-Kennlinie der adaptiven 2MS-Vorsteuerung.....	80
Bild 7.1: Stellgrößenverlauf bei Vorsteuerung mit Berücksichtigung der Totzeit	81
Bild 7.2: Ergebnisvergleich einer 1TS-Vorsteuerung.....	82
Bild A.1: Geometrische Abmessungen der Blattfeder	95
Bild A.2: Ergebnisvergleich mit 50 ms-Trapeztrajektorie und $m_L=38$ kg	97

Tabellenverzeichnis

Tabelle 3.1: Kennwerte der mechanischen Komponenten des Prüfstands	14
Tabelle 3.2: Kennwerte der elektronischen Komponenten des Prüfstands	16
Tabelle 3.3: Gemeinsame Formelzeichen der verwendeten Modelle	21
Tabelle 3.4: Formelzeichen des Einmassenmodells	22
Tabelle 3.5: Formelzeichen des linearen Zweimassenmodells	23
Tabelle 3.6: Formelzeichen des nichtlinearen Zweimassenmodells	24
Tabelle 3.7: Formelzeichen des linearen Dreimassenmodells	26
Tabelle 3.8: Kennwerte zu Kontinuumsschwingungen des Zahnriemens	27
Tabelle 3.9: Formelzeichen zur Berechnung des Ein-Trum-Modells	29
Tabelle 4.1: Kenndaten zu den verwendeten Trajektorien	42
Tabelle 4.2: Daten des linearisierten Zahnriemensystems bei $s=1600$ mm	43
Tabelle 4.3: Berechnung der Grenzwerte aller Ableitungen für das linearisierte Zweimassensystem	44
Tabelle 5.1: Einstellparameter der Vorsteuerung mit $m_L=38$ kg	50
Tabelle 5.2: Versuchsergebnisse mit unterschiedlichen Trajektorien und Vorsteuerungsmodellen mit $m_L=38$ kg	55
Tabelle 5.3: Verbesserung durch die flachheitsbasierte Vorsteuerung mit $m_L=38$ kg	55
Tabelle 5.4: Einstellparameter der Vorsteuerung mit $m_L=5$ kg und Zusatzmasse	57
Tabelle 5.5: Versuchsergebnisse mit unterschiedlichen Trajektorien und Vorsteuerungsmodellen mit $m_L=5$ kg und Zusatzmasse	62
Tabelle 6.1: Anfangswerte des 1MS-Beobachters	78
Tabelle 7.1: Versuchsergebnisse der 1TS-Vorsteuerung in Vergleich	83
Tabelle 7.2: Verbesserung durch die verteiltparametrische Vorsteuerung	83
Tabelle A.1: Einträge der Systemmodell-Struktur	91
Tabelle A.2: Geometrische Größen der verwendeten Blattfeder	96

Abkürzungsverzeichnis

Zeichen	Beschreibung	Englischer Fachbegriff
1MS, 2MS, 3MS	Einmassensystem, Zweimassensystem, Dreimassensystem	-
1TS	Eintrumsystem	-
BNF	Beobachternormalform	observer canonical form
\mathcal{C}^n -Stetigkeit	Eine Funktion ist n mal stetig differenzierbar	\mathcal{C}^n -continuous function
CDKF	Central Difference Kalman Filter	-
DGL	Differentialgleichung	ode, ordinary differential equation
EKF	Extended Kalman Filter	-
FVS	Flachheitsbasierte Vorsteuerung	flatness-based feed-forward control
LT	Lasertracker	-
NRNF	Nichtlineare Regelungsnormalform	nonlinear controllable canonical form
pDGL	Partielle Differentialgleichung	pde, partial differential equation
RNF	Regelungsnormalform	controllable canonical form
UKF	Unscented Kalman Filter	-
ÜTF	Übertragungsfunktion	transfer function
VS	Vorsteuerung	feed-forward control

Formelzeichen

Zeichen	Bedeutung
A	Zustandsraum (linear): Systemmatrix
a	Trajektorie: Beschleunigung (Zeitableitung der Geschwindigkeit v)
B	Zustandsraum (linear): Eingangsmatrix
C	Zustandsraum (linear): Ausgangsmatrix
d_v	Koeffizient der viskosen Dämpfung
f	Zustandsraum (nichtlinear): Systemfunktion
g	Zustandsraum (nichtlinear): Eingangsfunktion

h	Zustandsraum (nichtlinear): Ausgangsfunktion
h	Trajektorie: Positionsdifferenz von Anfang zu Ende
J	Massenträgheitsmoment
j	Trajektorie: Ruck (Zeitableitung der Beschleunigung a)
k	Steifigkeit (rotatorisch)
K_P	Proportionalverstärkung eines P-Reglers
$L_f \varphi$	Lie-Ableitung des Skalars φ entlang des Vektorfeldes f
m	Masse
r	Radius
s	Trajektorie: Weg bzw. Position
t	Zeitpunkt
T	Zeitdauer
T_B	Beruhigungsdauer nach Beendigung des Positioniervorgangs
T_D	Trajektorieendauer, Transitionszeit
T_P	Positionierdauer
T_N	Nachstellzeit eines I-Reglers
T_t	Totzeit
T_V	Verschleißzeit
u	Zustandsraum: Eingang
v	Trajektorie: Geschwindigkeit (Zeitableitung der Position s)
x	Zustandsraum: Zustandsvektor
y	Zustandsraum: Ausgang
y_f	Zustandsraum: Flacher Ausgang
z	Zustandsraum: Transformierter Zustandsvektor
δ	Zeitverschiebungs-Operator
μ_C	Koeffizient der Coulombschen Reibung
$\Psi_w, \Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$	Zustandsraum (nichtlinear): Transformationsfunktionen

1 Einleitung

Im Bereich „Identifikation und Regelung“ des Instituts für mechatronische Systeme (imes) werden Steuerungs-, Regelungs- und Beobachterkonzepte an einem Linearachsprüfstand erforscht. Dazu wurden bereits Beobachter-Modelle entwickelt und getestet, die im laufenden Betrieb die wesentlichen Systemparameter der Linearachse robust schätzen können.

Die geschätzten Parameter können genutzt werden, um im laufenden Betrieb Vorsteuerungen und Regelungen adaptiv anzupassen und somit ein verbessertes Systemverhalten zu erreichen.

Die adaptive Anpassung des eingesetzten P/PI-Kaskadenreglers wurde für den Prüfstand bereits in einer anderen Arbeit am Institut optimiert. Mit dem Einsatz neuer Vorsteuerungskonzepte ist eine Entlastung des Reglers und somit eine weitere Verbesserung des Positionierverhaltens möglich. Im Rahmen dieser Arbeit werden daher modellbasierte Vorsteuerungen vorgestellt, experimentell umgesetzt und mit bestehenden Ansätzen verglichen. Für die modellbasierte Berechnung wird die Methode der differentiellen Flachheit verwendet. Dabei handelt es sich um eine industriell noch nicht weit verbreitete differentialgeometrische Systembetrachtung, die den Entwurf von Vorsteuerungen wesentlich vereinfacht.

Nach der Nennung von Grundlagen in Kapitel 2 erfolgt in Kapitel 3 zunächst eine Beschreibung des Versuchsprüfstandes und eine Herleitung von Vorsteuerungsmodellen. Da die Berechnung von Trajektorien ein wesentliches Element des Vorsteuerungsentwurfs ist, wird in Kapitel 4 eine neue Methode zur Berechnung von Trapez-Trajektorien vorgestellt.

In den Kapiteln 5 und 7 werden experimentelle Versuchsergebnisse für unterschiedliche Vorsteuerungen mit vorher identifizierten Parametern am Prüfstand vorgestellt. Dabei wird deutlich, dass durch den Einsatz der flachheitsbasierten Vorsteuerung eine Verbesserung des Positionierverhaltens möglich ist. Eine Auswertung für eine adaptive Rückführung der Parameter in der Vorsteuerung findet in Kapitel 6 statt.

2 Stand der Technik

An dieser Stelle werden zunächst die wichtigsten steuerungs- und regelungstechnischen Grundlagen vorgestellt, auf die im weiteren Verlauf der Arbeit zurückgegriffen wird.

2.1 Regelungstechnische Beschreibung mechatronischer Systeme

Ein mechatronisches System bildet die Gesamtheit von mechanischen, elektrischen und elektronischen Teilsystemen und beinhaltet Aktorik, Sensorik und Datenverarbeitung. Nach einer theoretischen Modellbildung wird das System durch miteinander gekoppelte Differentialgleichungen (DGL) mathematisch beschrieben (siehe [Hei06]). Regelungstechnische Grundlagen sind [Lun05], [Lun10] und [Ada09] entnommen.

2.1.1 Zustandsraumdarstellung

Zur standardisierten Beschreibung und Behandlung von Systemen hat sich die Zustandsraumdarstellung durchgesetzt. Dabei werden die beschreibenden DGL des Systems in ein System von DGL erster Ordnung überführt. Die Zustände werden zunächst so gewählt, dass sie den physikalischen Systemzuständen entsprechen. Im Rahmen dieser Arbeit werden eingangslinere Systeme Σ gemäß Gl. (2.1) betrachtet (siehe [Ada09]). Dabei ist x der Zustandsvektor, f die Zustands-, g die Eingangs- und h die Ausgangsfunktion. Der Eingang u ist zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit als skalar angenommen (SIMO-System: Single Input, Multiple Output).

$$\Sigma: \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t) \quad (2.1)$$

$$y(t) = h(x(t))$$

$$x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, f \in \mathbb{R}^{n \times 1}, g \in \mathbb{R}^{n \times 1}, h \in \mathbb{R}^{m \times 1}, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

Es ergibt sich ein Blockstruktur gemäß Bild 2.1.

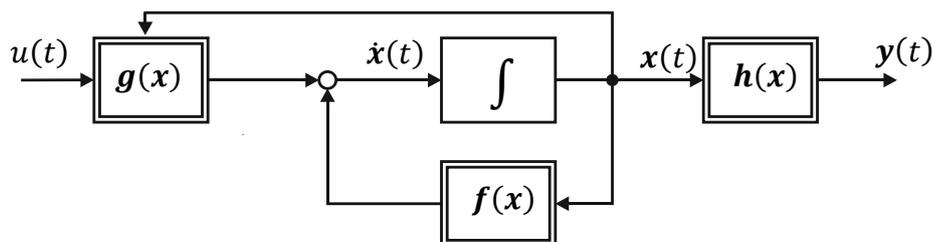


Bild 2.1: Blockstruktur der eingangslinaren Zustandsraumdarstellung

Im Falle eines linearen Systems entsprechen die Größen f , g und h den Matrizen A , B und C mit

$$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = g(x) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad C = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

2.1.2 Steuerbarkeit

Ein System ist steuerbar, wenn es durch Vorgabe einer Eingangsfunktion $u(t)$ von einem beliebigen Anfangszustand $x(t=0)$ in einen beliebigen vorgegebenen Endzustand $x(t=t_E)$ überführt werden kann. Dies ist der Fall, wenn die Steuerbarkeitsmatrix Q_S nach Gl. (2.2) vollen Rang n hat.

$$Q_S = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] \quad (2.2)$$

2.1.3 Lineare Zustandstransformationen

Ein Vorteil des Zustandsraums ist, dass die Umwandlung der Systemdarstellung in unterschiedliche Formen möglich ist, die Regler- und Beobachterentwurf vereinfachen. Für lineare Systeme ist die Umwandlung in Regelungsnormalform (RNF) und Beobachternormalform (BNF) durch Multiplikation der Systemmatrizen mit einer Transformationsmatrix T_R gem. Gl. (2.3) möglich. Der neue, transformierte, Systemzustand z enthält nun nicht unbedingt die physikalischen Systemzustände, das Ein- und Ausgangsverhalten des Systems bleibt allerdings gleich. Die Systembeschreibung ist also äquivalent.

$$z = T_R^{-1} \cdot x, \quad A_R = T_R^{-1} \cdot A \cdot T_R, \quad B_R = T_R^{-1}B, \quad C_R = C \cdot T_R \quad (2.3)$$

Die Transformationsmatrix T_R der Transformation auf RNF wird zeilenweise aus der Systemmatrix A und der letzten Zeile λ^T der inversen Steuerbarkeitsmatrix Q_S^{-1} berechnet, wie in Gl. (2.4) angegeben ist. Voraussetzung für die Existenz der RNF ist damit die Steuerbarkeit des Systems.

$$T_R^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^T \\ \lambda^T A \\ \vdots \\ \lambda^T A^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

Das System in RNF entspricht einer Integrator-kette, an deren Anfang der Eingang wirkt. Die transformierte Zustandsraumdarstellung ist in Gl (2.5) angegeben. Die letzte Zeile der Systemmatrix in Gl. (2.5) enthält die Koeffizienten a_i des charakteristischen Polynoms des Systems.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \Rightarrow \dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{z} + 1 \cdot u \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

2.1.4 Lie-Ableitung

Die Lie-Ableitung bezeichnet die Ableitung einer skalaren Funktion $\varphi(x)$ entlang eines Vektorfeldes $f(x)$. Die Lie-Ableitung ist gem. Gl. (2.6) mit $\varphi(x) \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $f(x) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und $L_f \varphi(x) \in \mathbb{R}^1$ definiert.

$$L_f \varphi(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \cdot f(x) = \text{grad}^T(\varphi(x)) \cdot f(x) \quad (2.6)$$

Mit der Lie-Ableitung ist eine verkürzte Darstellung bei der Berechnung von Zeitableitungen für eingangslinere Systeme in nichtlinearer Zustandsraumdarstellung gem. Gl. (2.1) möglich. Für eine bzw. mehrere Zeitableitungen der Funktion $\varphi(x)$ gelten Gl. (2.7a) bzw. (2.7b) (siehe [Ada09]). Dabei wird die mehrfache Durchführung der Lie-Ableitung mit $L_f^2 \varphi := L_f(L_f \varphi)$ abgekürzt. Zusätzlich werden zur Vereinfachung die abhängigen Größen x und t nicht ausgeschrieben. Also $x := x(t)$, $f := f(x) = f(x(t))$, usw.

$$\frac{d}{dt} \varphi(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \cdot (f + g \cdot u) = L_f \varphi + L_g \varphi \cdot u \quad (2.7a)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} \varphi(x) = L_f^n \varphi + L_g L_f^{n-1} \varphi \cdot u \quad (2.7b)$$

2.1.5 Relativer Grad

Der relative Grad r eines Ausgangs $y(t) = h(x(t))$ eines Systems Σ gem. Gl. (2.1) gibt an, wie oft dieser Ausgang nach der Zeit t differenziert werden muss, bis die entstandene Größe vom Systemeingang u abhängt. Nach obigen Definitionen der Lie-Ableitung und Zeitableitungen von Funktionen gilt

$$\frac{d^i}{dt^i} y = y^{(i)} = L_f^i h + L_g L_f^{i-1} h \cdot u \quad (2.8)$$

mit $L_g L_f^{i-1} h = 0$ für $i < r$ und $L_g L_f^{r-1} h \neq 0$.

Bei einem linearen System gibt der relative Grad die Differenz von Zähler- und Nennergrad der Übertragungsfunktion an (siehe [Ada09]).

2.1.6 Transformation von nichtlinearen Zustandsraumdarstellungen

Ähnlich der Transformation von linearen Zustandsraumsystemen in die Regelungsnormform (RNF) sind auch Transformationen von nichtlinearen Systemdarstellungen möglich. Dabei wird der Zustandsvektor x durch eine Transformation $\Psi_z(x)$ gem. Gl. (2.9) in den Zustandsvektor z überführt. Die Transformation muss umkehrbar sein. Weiterhin müssen Funktion und Umkehrung stetig differenzierbar sein. Ψ_z ist damit ein Diffeomorphismus.

$$z = \Psi_z(x) \quad (2.9)$$

Die Systemdarstellung in nichtlinearer Regelungsnormform (NRNF) wird in Gl. (2.10) gezeigt. Dabei sind $a(z)$ und $b(z)$ skalare Funktionen in Abhängigkeit von z .

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ a(z) + b(z) \cdot u \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

2.2 Regelung

Die Aufgabe einer Regelung ist es, einen Prozess so von außen zu beeinflussen, dass er in vorgegebener Weise abläuft. Dazu werden Informationen über den Prozess wieder zurückgeführt und damit ein Regelkreis geschlossen. Grundlagen zur Regelungstechnik können den Lehrbüchern [Lun05], [Lun10] entnommen werden.

Bei einem mechatronischen System lassen sich Regler anhand der Art der zurückgeführten Größe einteilen: Bei Standard-Reglern wird der durch Sensoren gemessene Systemausgang direkt zurückgeführt. Eine Erweiterung hierzu ist es, mehrere Ausgangsgrößen mit ihren Sollgrößen zu vergleichen und in einem verschachtelten Kaskadenregler zurückzuführen.

Bei einer Zustandsregelung werden die gemessenen bzw. geschätzten Zustandsgrößen einer beliebigen Zustandsraumdarstellung im Regler zurückgeführt und an Führungsgrößen angeglichen. Zur Schätzung der nicht gemessenen Zustandsgrößen werden Beobachter eingesetzt.

Eine klassische Regelung setzt sich aus Proportionalverstärkungs-, Integrations- und Differentiationsgliedern zusammen, deren Parameter K_p , T_I und T_D konstant und an die Regelstrecke angepasst sind. Eine adaptive Regelung passt ihre Regelparameter

an sich ändernde Bedingungen der Strecke an. Eine Möglichkeit dazu ist die Anpassung der Reglerparameter an geschätzte Systemparameter, wie z. B. Masse, Steifigkeit oder Reibung. Des Weiteren ist eine direkte Berechnung der Reglerparameter aus den Systemzuständen verbreitet (siehe [Åst08]).

2.3 Vorsteuerung

Im Gegensatz zu einer Regelung wird mit einer Steuerung versucht, einen Prozess zu beeinflussen, ohne eine Information über die Rückwirkung zu erhalten. Eine Vorsteuerung ist Teil eines Reglerentwurfs und versucht durch Aufschaltung einer zusätzlichen Stellgröße auf den Systemeingang den Regler zu entlasten. Dazu wird ausgehend vom Sollwertverlauf der Systemausgänge und -zustände ein Sollwertverlauf für den Systemeingang berechnet. Die Berechnung des Systemeingangs ist nur bei sehr einfachen Systemen direkt möglich und wird mit der Methode der differentiellen Flachheit stark vereinfacht, wie in Kapitel 3.5 gezeigt wird.

Es handelt sich um eine adaptive Vorsteuerung, wenn der Stellgrößenverlauf des Systemeingangs im laufenden Betrieb angepasst wird. Dies geschieht entweder durch Schätzung der Systemparameter im laufenden Betrieb oder durch Neuberechnung der System-Trajektorie aufgrund von Abweichungen der gemessenen Zustände (siehe auch [Lun05] oder [Zei10]).

2.4 Trajektorien

Ein Weg bezeichnet eine Menge geometrischer Punkte mit einer definierten Reihenfolge. Eine Bahn oder Trajektorie enthält zusätzlich die Information, wie die Punkte im Zeitverlauf durchfahren werden sollen. Damit sind neben der Position auch alle Bewegungsgrößen wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Ruck usw. enthalten. In der Regelungstechnik bezeichnet eine Trajektorie allgemein den Zeitverlauf einer Größe.

Typische Trajektorien sind Punkt-zu-Punkt-Bewegungen zwischen Ruhelagen oder Bahnen, die zwischen mehreren Punkten verlaufen.

Bei der Planung von Trajektorien wird zwischen der Berechnung im Arbeitsraum und der Berechnung im Antriebsraum unterschieden. Sind diese Räume nicht identisch, muss eine Umrechnung der Trajektorie zwischen Antriebsseite und Lastseite vorgenommen werden.

Die Anforderung an eine zu berechnende Trajektorie $s(t)$ ist zum einen die Einhaltung von Randwerten für den Weg (s), die Geschwindigkeit (v), die Beschleunigung (a), den Ruck (j) und weiterer Ableitungen am Anfang (Index „A“) und Ende (Index „E“), um einen stetigen Verlauf des Bewegungsverhaltens des Systems zu erhalten. Dies stellt Gl. (2.11) dar. Bei einer C^n -stetigen Trajektorie ist der Weg n -mal stetig nach der Zeit t differenzierbar und es treten erst Sprünge in der $(n + 1)$ -ten Ableitung auf.

$$\begin{aligned} s(t_A) = s_A, \quad \dot{s}(t_A) = v_A, \quad \ddot{s}(t_A) = a_A, \quad s^{(3)}(t_A) = j_A, \dots \\ s(t_E) = s_E, \quad \dot{s}(t_E) = v_E, \quad \ddot{s}(t_E) = a_E, \quad s^{(3)}(t_E) = j_E, \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Zum anderen dürfen aufgrund physikalischer Beschränkungen die Maximalwerte für den Weg, die Geschwindigkeit und weitere Ableitungen nicht überschritten werden.

$$s(t) \leq s_{\max}, \quad |\dot{s}(t)| \leq v_{\max}, \quad |\ddot{s}(t)| \leq a_{\max}, \quad |s^{(3)}(t)| \leq j_{\max}, \dots \quad (2.12)$$

Die Größenordnung von Maximalwerten der Zeitableitungen wird mit der Verschleißzeit T_{Vi} angegeben. Beispielsweise ist die Verschleißzeit T_{V2} die Zeit, in der sich die Beschleunigung von 0 auf a_{\max} bei konstantem Ruck j_{\max} steigert. Es gilt

$$v_{\max} = \frac{s_E - s_A}{T_{V0}}, \quad a_{\max} = \frac{v_{\max}}{T_{V1}}, \quad j_{\max} = \frac{a_{\max}}{T_{V2}}, \quad s_{\max}^{(i+1)} = \frac{s_{\max}^{(i)}}{T_{Vi}}.$$

Die Berechnung von Trajektorien erfolgt mit verschiedenen mathematischen Ansätzen. Für eine Bewegung zwischen zwei Punkten ist die Polynominterpolation industriell am weitesten verbreitet. Die Interpolation erfolgt entweder über ein komplettes Polynom, das alle Randbedingungen der Position und beliebiger Ableitungen erfüllt (siehe Kapitel 4.1) oder ein stückweises Polynom (siehe Kapitel 4.2). Hier sind besonders Trapezprofile der Beschleunigung und höherer Ableitungen des Weges hervorzuheben. Weitere Ansätze wie Zykloid- oder Sinoid-Trajektorien erfüllen die Anforderungen dieser Arbeit bezüglich Stetigkeit höherer Ableitungen nicht. Die Berechnung der oben genannten Trajektorien wird in [Bia08] ausführlich dargestellt.

Durch die Verwendung von Gevrey-Funktionen ist die Berechnung von beliebig oft stetig differenzierbaren Trajektorien möglich, wie sie beim flachheitsbasierten Vorsteuerungsentwurf benötigt werden (siehe [Rud03]). Aufgrund des im Vergleich zu Trapez-Trajektorien höheren mathematischen und numerischen Aufwands finden Gevrey-Funktionen in dieser Arbeit keine Verwendung.

2.5 Beobachter

Wird eine Zustandsregelung, eine adaptive Regelung oder eine adaptive Vorsteuerung eingesetzt, sind Kenntnisse über Systemzustände oder -parameter notwendig, die nicht direkt aus den gemessenen Ausgangsgrößen abgelesen werden können. Zur Bestimmung dieser unbekanntenen Größen werden Beobachter eingesetzt. Dabei handelt es sich um im laufenden Betrieb („online“) berechnete Modelle des Systems, die mit den bekannten Ein- und Ausgangsgrößen des Systems gespeist werden. Eine einführende Darstellung bietet die Grundlagenliteratur [Lun05].

Ein Beobachter in Kalman-Struktur im zeitdiskreten Zustandsraum ist in Bild 2.2 dargestellt. Das System berechnet eine prädizierte Schätzgröße \hat{x}^* , die mit der mit K gewichteten Abweichung des geschätzten Ausgangs \hat{y} vom gemessenen Ausgang y korrigiert wird, was zur korrigierten Zustandsschätzung \hat{x} führt.

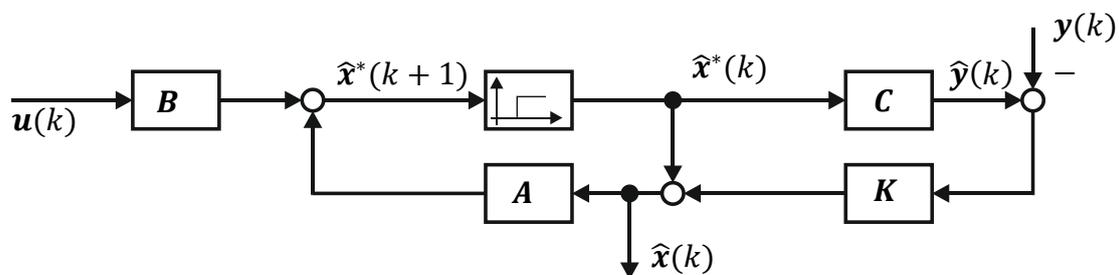


Bild 2.2: Blockstruktur eines Beobachters in Kalman-Struktur

In [vMer04] wird zwischen der reinen Schätzung der Systemzustände x , der getrennten Schätzung von Parametern und Zuständen und der gemeinsamen Schätzung dieser Größen unterschieden.

Für die Schätzung der Zustände eines linearen Systems stellt der Luenberger-Beobachter die einfachste Methode dar. Die Einstellung der Rückführmatrix K des Ausgangsfehlers aus Bild 2.2 erfolgt durch eine Polvorgabe des geschlossenen Regelkreises mit Beobachter. Die Einstellung erfolgt so, dass der Beobachter schneller als die Taktzeit des Reglers konvergiert.

Unter der Annahme rauschbehafteter Messdaten liefert das Kalman-Filter ein Schätzergebnis mit minimaler Varianz. Die Einstellung der Rückführmatrix K erfolgt durch die Wahl der Kovarianzmatrizen des Ausgangsvektors, des Prozessrauschens und des Schätzfehlers. Wird eine Parameterschätzung durchgeführt, werden zu schät-

zende Parameter mit in den Zustandsvektor aufgenommen, was zu einer nichtlinearen Systemdarstellung führt. In diesem Fall wird mit dem Extended Kalman Filter (EKF) eine Schätzung durch Linearisierung der Systemmatrizen in jedem Rechenschritt durchgeführt.

Eine höhere Konvergenzordnung bei nichtlinearen Schätzmodellen wird durch die Verwendung von Sigma-Punkt-Kalman-Filtern erreicht. Dabei wird der Linearisierungsfehler von nicht-normalverteilten Zufallsvariablen beim EKF durch zusätzliche, Sigma-Punkte genannte, Stützstellen verringert. Die Sigma-Punkte entsprechen den Stützpunkten der Gauß-Quadratur bei der numerischen Integration. In [vMer04] werden dazu Unscented Kalman Filter (UKF) und Central Difference Kalman Filter (CDKF) vorgestellt.

2.6 Differentielle Flachheit

Die differentielle Flachheit ist eine Methodik, die in den 1990er-Jahren in die Regelungstechnik eingeführt wurde. Sie behandelt nichtlineare Systeme mit den Methoden der Differentialgeometrie und ermöglicht eine effiziente Planung von Trajektorien, den Entwurf von Vorsteuerungen und exakte Linearisierung von Nichtlinearitäten. Die Methodik wird in [Lév09] ausführlich dargestellt, die differentialgeometrische Betrachtung ist zur Analyse vieler Systeme allerdings nicht notwendig. Die deutschsprachigen Fachaufsätze [Hag04] und [Zei10] sowie das Vorlesungsskript [Lil12] bieten einen verständlichen Überblick und sind Grundlage der folgenden Zusammenfassung.

Die Methodik wird in Kap. 2.6.1 formal dargestellt. Die Anwendung beim Entwurf von Trajektorien und Vorsteuerungen wird in Kap. 2.6.2 dargestellt. Kap. 2.6.3 erweitert die Methodik auf Systeme mit Totzeiten. In Kap. 2.6.4 werden Anwendungen betrachtet, die Gegenstand aktueller Forschung sind. In Kap. 2.6.5 wird ein Vergleich mit einer anderen Methode zur Vorsteuerungsberechnung angestellt.

2.6.1 Definition und Flachheits-Methodik

Ein System ist (differentiell) flach, falls ein gemessener oder fiktiver Systemausgang existiert, dessen relativer Grad r gleich der Systemordnung n ist. Damit ist ein System flach, falls die Transformation auf RNF bzw. NRNF möglich ist. Bei linearen Systemen entspricht die Flachheit der Steuerbarkeit. Ein Beispiel zur Umsetzung der Flachheits-Methodik befindet sich in Kapitel 3.5.

Bestimmung des flachen Ausgangs

Zur Umsetzung der Flachheits-Methodik muss zunächst der flache Ausgang des Systems gefunden werden. Bei linearen Systemen ist der flache Ausgang der erste Zustand der RNF, bei nichtlinearen Systemen der erste Zustand der NRNF. Bei eingangslinaren Systemen wird der flache Ausgang y_f gemäß der Definition des relativen Grades in Gl. (2.8) durch Lösen des partiellen Gleichungssystems (2.13) bestimmt.

$$\begin{aligned} L_g y_f(\mathbf{x}) &= 0 \\ L_g L_f y_f(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ L_g L_f^{n-2} y_f(\mathbf{x}) &= 0 \\ L_g L_f^{n-1} y_f(\mathbf{x}) &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Das System kann vollständig mit dem flachen Ausgang bis zur Ableitung n beschrieben werden:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_f \\ \vdots \\ y_f^{(n-1)} \end{bmatrix} = \Psi_z(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_f \\ \vdots \\ y_f^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Dies entspricht der Bestimmung der Transformation auf NRNF (siehe [Ada09]). In [Ver13] wird die Bestimmung des flachen Ausgangs für allgemeine Systeme unter Verwendung von Polynommatrizen und mit differentialgeometrischem Vorgehen gezeigt.

Invertierung des Systems

Zur Anwendung der Flachheitsmethodik ist eine Darstellung des Systemzustands \mathbf{x} , des Systemeingangs u und des Systemausgangs \mathbf{y} in Abhängigkeit des flachen Ausgangs y_f erforderlich. Dies entspricht einer Invertierung des Systems. Da die Transformation $\mathbf{z} = \Psi_z(\mathbf{x})$ per Definition umkehrbar sein muss, existieren die Funktionen nach Gl. (2.14) bis (2.16) immer.

$$\mathbf{x} = \Psi_z^{-1}(\mathbf{z}) = \Psi_x(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(n-1)}) \quad (2.14)$$

Für die Darstellung des Systemausgangs \mathbf{y} in Abhängigkeit des flachen Ausgangs und seiner Ableitungen \mathbf{z} , wird die Ausgangsfunktion \mathbf{h} auf den Systemzustand nach Gl. (2.14) angewendet.

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\Psi_z^{-1}(\mathbf{z})) = \Psi_y(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(n-1)}) \quad (2.15)$$

Per Definition der Flachheit erscheint der Systemeingang erst in der n -ten Zeitableitung des flachen Ausgangs. Daraus folgt Ψ_u in Gl. (2.16) als Darstellung des Eingangs u in Abhängigkeit von z und \dot{z} .

$$\begin{aligned}\dot{z}_n &= L_f^n y_f + L_g L_f^{n-1} y_f \cdot u = a(z) + b(z) \cdot u \\ u &= \frac{\dot{z}_n - a(z)}{b(z)} = \Psi_u(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(n)})\end{aligned}\quad (2.16)$$

Die Terme $a(z)$ und $b(z)$ sind dabei beliebige skalare Funktionen in Abhängigkeit aller Komponenten des Vektors z und der Systemparameter.

2.6.2 Flachheitsbasierte Vorsteuerung

Das wesentliche Einsatzgebiet der Flachheits-Methodik ist der vereinfachte Entwurf von Vorsteuerungen. Dieses Vorgehen wird z. B. in [Lév09] und [Hag04] beschrieben. Der Ablauf bei der Berechnung von flachheitsbasierten Vorsteuerungen für einen Arbeitspunktwechsel ist in Bild 2.3 dargestellt.

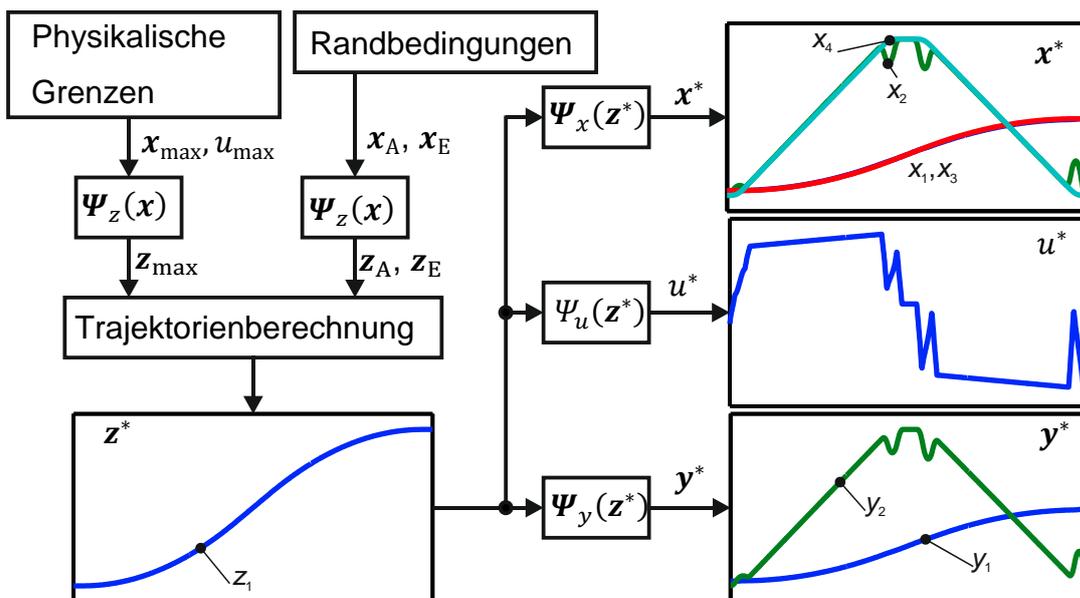


Bild 2.3: Ablaufplan bei der Berechnung von flachen Vorsteuerungen

Zunächst werden die vorgegebenen Anfangs- und Endwerte für den Systemzustand (x_A und x_E) durch die Komponenten des Vektors z ausgedrückt. Mit diesen Anfangs- und Endwerten und weiteren Beschränkungen (z_{\max}) wird eine Trajektorie für den flachen Ausgang berechnet. Damit keine Sprünge oder Impulse in der Eingangsfunktion u^* entstehen, muss die Trajektorie für \dot{z}_n^* stetig sein. Die Trajektorie für z_1^* muss also n -mal stetig differenzierbar sein. In der Literatur werden dazu Polynomprofile

vorgeschlagen, da diese sehr einfach zu berechnen sind. Beliebige andere Profile sind ebenfalls möglich, sofern die Maximal- und Stetigkeitsbedingungen erfüllt werden. Die Soll-Trajektorien für die Systemzustände ($x^*(t)$), die Systemausgänge ($y^*(t)$) und der Stellgrößenverlauf für den Systemeingang ($u^*(t)$) werden mit den Transformationsvorschriften Ψ_x , Ψ_y bzw. Ψ_u berechnet.

Ein vollständiger Regelkreis mit flachheitsbasierter Vorsteuerung ist in Bild 2.4 dargestellt. Gezeigt ist eine Strecke Σ mit Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$, die mit einem Regler Σ_R mit Rückführung der Ausgangsgröße geregelt wird. Zusätzlich wird die flachheitsbasierte Vorsteuerung (Σ^* , Ψ_u , Ψ_y) vorgeschaltet, die die Sollgrößen $z^*(t)$, $y^*(t)$ und die Stellgröße $u^*(t)$ erzeugt. Da der Vorsteuerungsentwurf unabhängig vom Reglerentwurf ist, sind auch beliebige Rückführungen des Zustands x möglich.

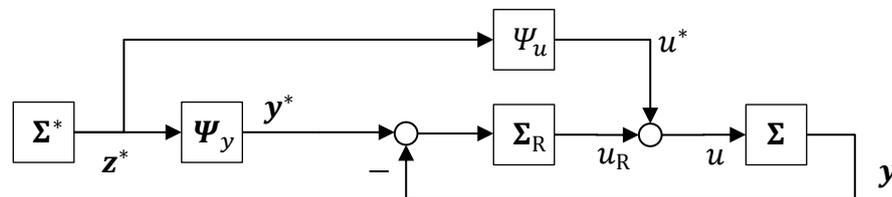


Bild 2.4: Regelkreis mit flachheitsbasierter Vorsteuerung, [Hag04]

2.6.3 Erweiterung der Methodik auf Totzeit-Systeme

In [Rud03] wird die Flachheits-Methodik auf Totzeit-Systeme ausgeweitet. Totzeiten werden z. B. durch elektrische Signallaufzeiten oder mechanische Wellenlaufzeiten im Kontinuum modelliert. Die Zeitverschiebung einer Größe $x(t)$ wird durch den δ -Operator gem. Gl. (2.17) ausgedrückt.

$$\delta x(t) = x(t - T), \quad \delta^2 x(t) = x(t - 2T), \quad \delta^{-1} x(t) = x(t + T) \quad (2.17)$$

Ein totzeitbehaftete System wird mit Differential-Differenzgleichungen mathematisch beschrieben. Erfüllt ein Systemausgang die Kriterien aus Kapitel 2.6.1, so wird das System als δ -flach bezeichnet (vgl. [Rud03]). Damit können Systemgrößen nur mit Zeitableitungen und Zeitverschiebungen des flachen Ausgangs beschrieben werden.

2.6.4 Anwendungen

Die Methode der differentiellen Flachheit findet vor allem in der Vorsteuerung und Trajektorienplanung von nichtlinearen Systemen Anwendung. Verbreitete akademische Beispiele sind die Vorsteuerung von inversen (mehrfach-)Pendeln (siehe [Zei10]), Kränen (siehe [Lév09] und [Pos11]) und das Einparken von Fahrzeugen (siehe [Ver13]).

Ein aktuelles Forschungsfeld ist die Vorsteuerung von Antriebssystem mit elastischer Kopplung zwischen Antriebs- und Lastseite. Rotatorische Antriebsstränge werden u. a. in [Tho11] betrachtet. In [Lév09] werden Simulationsergebnisse für einen Linearrachsprüfstand vorgestellt, der im Gegensatz zu dieser Arbeit mit geringerer Dynamik und ohne lastseitige Messung betrieben wird. In einigen Fällen ist die Modellierung von Systemen mit verteilten Parametern erforderlich, wie z. B. bei den in [Bac11] untersuchten Balkenschwingungen von Regalbediengeräten.

Einige Systeme, wie z. B. Industrieroboter sind bereits so konstruiert, dass die gemessenen Größen einen flachen Ausgang darstellen und somit ein flachheitsbasierter Trajektorienentwurf und eine Invertierung des Systems einfach möglich sind. Für Industrieroboter ist die Berechnung der als inverse Dynamik bezeichneten Vorsteuerung aus den Gelenkwinkeln einfach möglich. Die Berücksichtigung von Elastizitäten in Gelenken (siehe [Thü07]) oder in den Segmenten erfordert jedoch die Anwendung der vorgestellten Flachheits-Methodik.

Neben mechanischen Systemen ist die Methodik auch auf elektrische Systeme, wie die Vorsteuerung des Motorstroms von Asynchronmotoren (siehe [Dan06]) oder das Verhalten von chemischen Rührkessel-Reaktoren (siehe [Rud05]) anwendbar.

2.6.5 Alternativen

Eine der Flachheits-Methodik ähnliche Vorgehensweise bietet das „Input Shaping“. Dabei werden durch Faltung des Eingangssignals des Systems mit einer aus den Eigenfrequenzen berechneten Impulsfolge Schwingungen vermieden (vgl. [Bia08]). In [Pos11] wird gezeigt, dass diese Methode für bestimmte schwingungsfähige Systeme ähnlich gute Resultate wie eine flachheitsbasierte Vorsteuerung (FVS) aufweist und sogar robuster gegen Parameterunsicherheit ist. Die FVS bietet Vorteile, wenn die Eigenfrequenz des Systems variabel ist und wenn das System Einflüssen wie Reibung, Gravitation oder Fliehkraft unterliegt, die keine Eigenschwingung darstellen.

3 Beschreibung und Modellbildung des Versuchsprüfstands

In den folgenden Kapiteln werden zunächst der Versuchsprüfstand und die verwendete Messtechnik beschrieben (Kapitel 3.1 und 3.2). Nach der Darstellung der grundlegenden Funktionsweise der verwendeten Zahnriemen-Linearachse in Kapitel 3.3 erfolgt die mechanische Modellbildung in Kapitel 3.4. In Kapitel 3.5 werden ausgehend davon Modelle angegeben, mit denen eine flachheitsbasierte Vorsteuerung umgesetzt wird. Eine vertiefte Betrachtung der Kontinuumsschwingungen erfolgt in Kapitel 3.6 und führt auf ein erweitertes Vorsteuerungsmodell.

3.1 Beschreibung des Prüfstands

Die in dieser Arbeit untersuchten Vorsteuerungskonzepte werden an einem Einzelachs-Prüfstand im Aktorik-Labor des imes getestet. Hauptbestandteil des Prüfstands ist eine Linearachse, die mit einem Zahnriemen angetrieben wird und in dieser Form vielfach in der Industrie eingesetzt wird.

Der mechanische Teil des Prüfstands ist in Bild 3.1 gezeigt und setzt sich aus einem beweglichen Schlitten mit einer möglichen Zusatzmasse von bis zu 36 kg, dem Zahnriemenantrieb, bestehend aus Zahnriemen, Antriebsrad und Umlenkrollen sowie dem Elektromotor zusammen. Die Kenndaten dieser Bauteile sind in Tabelle 3.1 angegeben.



Bild 3.1: Mechanische Komponenten des Einzelachs-Prüfstands

Tabelle 3.1: Kennwerte der mechanischen Komponenten des Prüfstands

Größe (Motor Lenze MCS12L20)	Formelzeichen	Wert
Bemessungsleistung		2,8 kW
Bemessungsmoment		13,5 Nm
Bemessungsdrehzahl	n_N	1950 min ⁻¹
Massenträgheitsmoment (Antrieb)	J_A	12,6 kgcm ²
Radius der Antriebswelle	r	16 mm

Größe (Linearachse)	Formelzeichen	Wert
Zahnriemenprofil		AT 5 (Zahnteilung 5 mm)
Zahnriemen-Breite		32 mm
Zahnriemen-Trumlänge		ca. 4 m
Verfahrweg des Schlittens		0 ... 1700 mm
Masse des Schlittens	m_L	2 ... 38 kg
Steifigkeit des Antriebsstrangs	k	140 ... 1150 Nm·rad ⁻¹

Zur Massenträgheit des Motors (10,6 kgcm²) werden zusätzlich die Trägheitsmomente von Ausgleichkupplung, Welle und Zahnscheibe gezählt.

Das elektrische bzw. elektronische Teilsystem setzt sich aus Echtzeitrechner, Anwender-PC und einem Schaltschrank mit Regler und Leistungselektronik zusammen, deren Signalfluss in Bild 3.2 dargestellt ist.

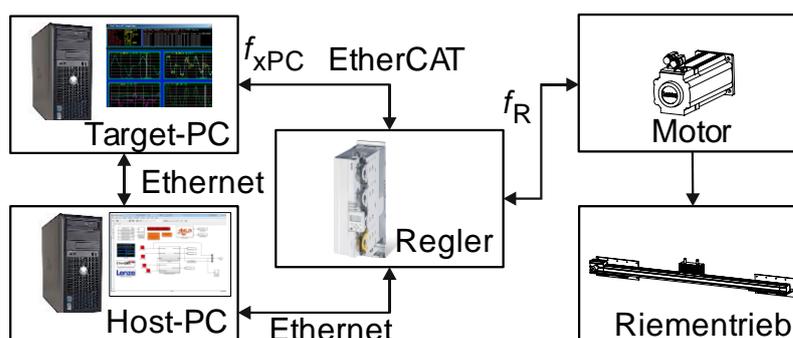


Bild 3.2: Signalflussbild des Versuchsprüfstands

Der Synchronmotor Lenze MCS12L20 wird über den Servoregler Lenze Servo Drives 9400 HighLine betrieben. Dieser empfängt Ist-Positionsdaten aus dem im Motor verbauten Resolver und regelt die Motorposition und -geschwindigkeit über einen integrierten P/PI-Kaskadenregler. Über ein EtherCAT-Kommunikationsmodul werden Steuerbefehle und Sollwerte in Echtzeit an den Regler übertragen.

Diese Sollwerte werden über einen Echtzeitrechner (Target-PC) bereitgestellt, auf dem ein mit xPC-Target kompiliertes Simulink-Modell läuft. Auf dem Target-PC selbst erfolgt nur eine Anzeige der Daten, wie in Bild 3.3 dargestellt. Mit xPC-Scope-Blöcken werden in Bild 3.3 Soll- und Ist-Geschwindigkeit und Drehzahl sowie die Parameterschätzung ausgegeben.



Bild 3.3: Bildschirmausgabe des xPC-Targets mit xPC-Scopes

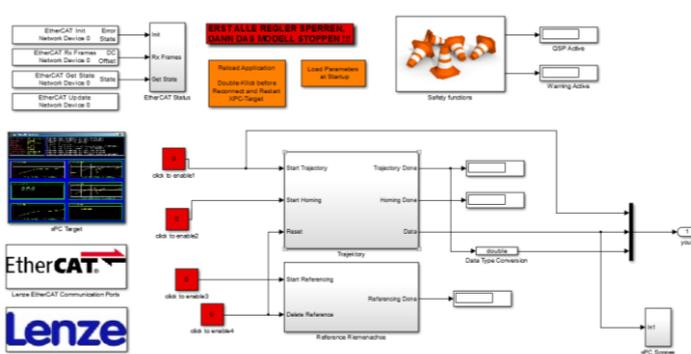


Bild 3.4: Simulink-Oberfläche zur Steuerung des Echtzeitrechners

Die Steuerung des xPC-Target-Rechners erfolgt über Ethernet vom Anwender-Rechner (Host-PC) aus. Als graphische Benutzerschnittstelle dient das Simulink-Modell in Bild 3.4. Der Start einer Trajektorie wird über „Click-to-Enable“-Blöcke im Modell eingestellt. Nach Beendigung des Versuchs werden die Ergebnisse auf den Anwender-Rechner heruntergeladen und weiter verarbeitet. Die Vorgehensweise hierzu wird in Kapitel A.1 gezeigt.

Über Ethernet findet auch eine direkte Kommunikation des Anwender-Rechners mit dem Regler statt. Hierzu dient das Programm „Lenze Engineer High Level“, mit dem Signalbelegungen und Parameter im Regler eingestellt, Diagnoseausgaben gelesen sowie Fehler zurückgesetzt werden. Die wichtigsten Kennzahlen des elektronischen Teilsystems sind in Tabelle 3.2 angegeben

Tabelle 3.2: Kennwerte der elektronischen Komponenten des Prüfstands

Größe	Formelzeichen	Wert
Taktfrequenz xPC-Sollwertvorgabe	f_{xPC}	1 kHz
Taktfrequenz Stromregelkreis	$f_{R,i}$	16 kHz
PI-Geschwindigkeitsregelkreis		
Taktfrequenz	$f_{R,v}$	4 kHz
Proportionalverstärkung	K_{P2}	11,1 Nm·m ⁻¹ s
Nachstellzeit	T_{N2}	12 ms
P-Positionsregelkreis		
Taktfrequenz	$f_{R,s}$	1 kHz
Proportionalverstärkung	K_{P1}	20 s ⁻¹

3.2 Messtechnik

3.2.1 Integrierte Sensorik

Zur Messung der antriebsseitigen Position und Geschwindigkeit wird der im Motor integrierte Resolver verwendet. Dieser wird intern mit 16 kHz abgetastet und hat eine Genauigkeit von 10 Winkelminuten. Bei einem Zahnrad-Wirklkreisdurchmesser von 32 mm entspricht dies einer translatorischen Genauigkeit von ca. 50 μm . Die antriebsseitige Geschwindigkeit wird mittels numerischer Differentiation und Filterung aus den Positionswerten berechnet.

Das Drehmoment des Motors wird aus der Messung des Motorstroms im Stromregler „Servo Drives 9400 HighLine“ berechnet. Die Strommesswerte werden ca. 2 ms zeitversetzt zu den Positionswerten an den Echtzeitrechner übertragen (siehe [Len13b]).

3.2.2 Lasertracker

Die Position des Schlittens wird mit dem in Bild 3.5 dargestellten Lasertracker Leica LTD700 bestimmt. Zur Messung wird eine 0,5-Zoll-Reflektorkugel in einem Magnetsockel wie in Bild 3.6 dargestellt auf der zu messenden Position befestigt. In der Kugel wird während der Messung ein Laserstrahl reflektiert, der im Lasertracker erzeugt und mit der Bewegung nachgeführt wird. Durch die Bestimmung der Laufzeit des Laserstrahls in einem Interferometer ist eine berührungslose Messung möglich, deren Genauigkeit bei Geschwindigkeiten von ca. 3 m/s und einem Abstand zum Messobjekt von ca. 5 m im Bereich 100 μm liegt (siehe [Lei14]).



Bild 3.5: Leica LTD700

Durch die begrenzte Datenaufnahmefähigkeit der Lasertracker-Elektronik („LT Controller Plus“) können nur 10 000 Messwerte am Stück aufgenommen werden. Die Messungen werden daher mit einer Abtastrate von 100 Hz über einen Zeitraum von 100 s durchgeführt. Damit sind Schwingungen mit Frequenzen von bis zu 10 Hz im Zeitbereich gut zu erkennen und Schwingungsfrequenzen bis zu 50 Hz im Frequenzbereich bestimmbar. Nach der Messung werden die Werte über Ethernet mit dem Programm Leica Axyz aufgenommen, gespeichert und anschließend wie in Kapitel A.1.3 beschrieben mit den antriebsseitigen Messwerten fusioniert.

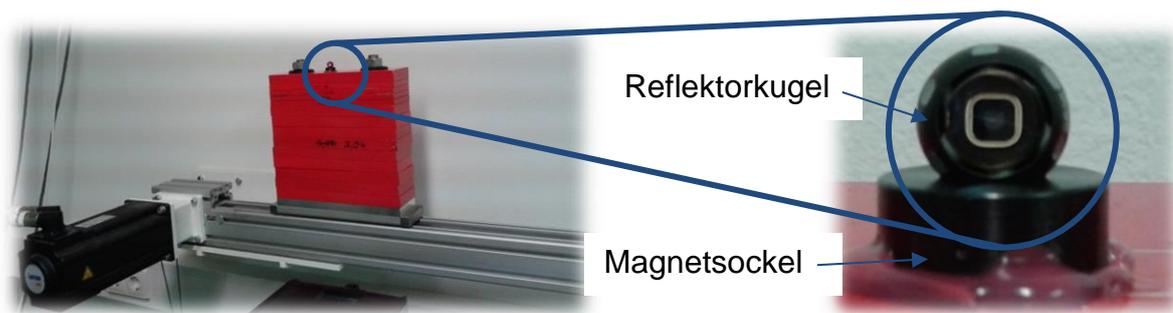


Bild 3.6: Befestigung der Lasertracker-Reflektorkugel am Versuchsprüfstand

3.3 Zahnriemen-Linearachse

Im Folgenden werden der Aufbau und die Funktionsweise der Zahnriemen-Linearachse näher betrachtet um die mechanische Modellierung und die modellbasierte Vorsteuerung in den folgenden Kapiteln zu begründen.

Der Zahnriemenantrieb besteht wie in Bild 3.7 gezeigt aus einer Antriebs-Zahnscheibe auf der linken Seite und einer zahnlosen Umlenkrolle auf der rechten Seite. Zwei weitere Umlenkrollen auf der Unterseite zum Spannen des Riemen werden nicht näher betrachtet.

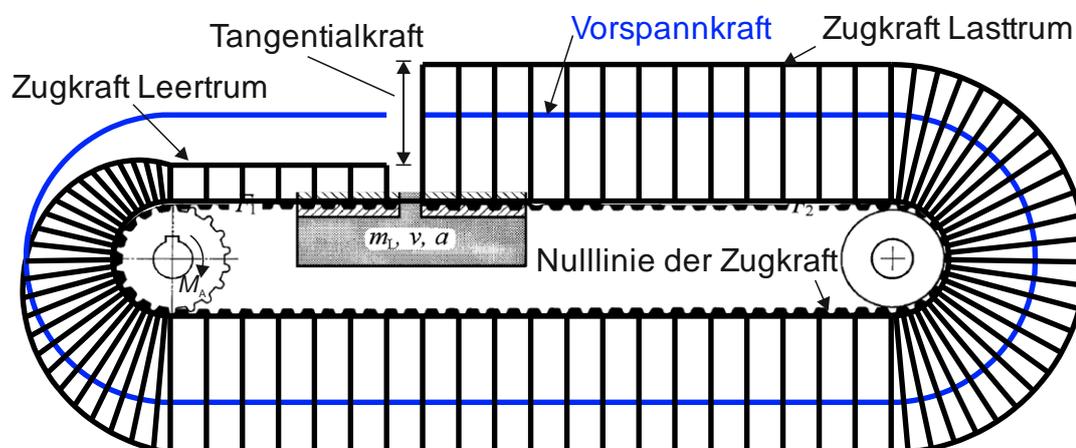


Bild 3.7: Zahnriemen-Linearachse mit Zugkraftverlauf; Vorlage: [Per09].

Der in Bild 3.7 eingezeichnete Verlauf der Zugkraft verdeutlicht, dass in einem Zahnriemengetriebe nur Kraft im gespannten Riemensegment übertragen werden kann. Ein im Uhrzeigersinn positives Antriebsmoment des Motors führt zu einer Belastung des ziehenden unteren Trums und zu einer Entlastung der Vorspannkraft im Leertrum. Auf den Schlitten wird die Tangentialkraft genannte Differenz zwischen den beiden Trumkräften übertragen. Durch elastische Verformung tragen beide Segmente zur Gesamtsteifigkeit des Antriebs bei. Verschwindet die Zugkraft im Leertrum,

hängt dieses durch, was zu Steifigkeitsverlust und Überspringen infolge einer Verschlechterung des Zahneinlaufs führt. Dabei wird der Zahnriemen stärker verschliffen und es treten Positionierfehler auf (siehe [Per09]).

3.4 Modellierung mit konzentrierten Parametern

Die Modellierung der Linearachse erfolgt wie in Bild 3.8 dargestellt über konzentrierte Masse-, Trägheits-, Steifigkeits- und Dämpfungselemente. Der Zahnriemen wird in drei freie Riemensegmente aufgeteilt, die jeweils durch Zahnräder oder den Schlitten getrennt sind. Die Gesamtsteifigkeit des Systems ergibt sich aus der Parallelschaltung der Steifigkeit k_1 mit der Reihenschaltung der Steifigkeiten k_2 und k_3 . Die Massenträgheit J_U der rechten Umlenkrolle ist gegenüber den Massenträgheiten J_A der Antriebswelle und $m_L r^2$ des Schlittens sehr gering. Die Segmente k_2 und k_3 können daher zusammengefasst werden. Die freie Länge des Riemen bei minimaler oder maximaler Schlittenposition wird mit l_0 bezeichnet. l bezeichnet den gesamten Verfahrweg des Schlittens von 1700 mm. Zur Herleitung dieses Modells wird auf [Kli13] verwiesen.

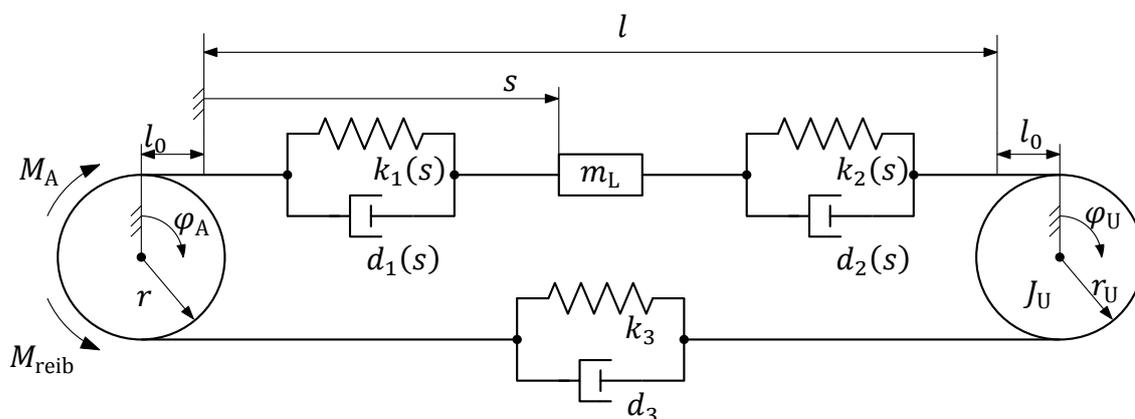


Bild 3.8: Mechanisches Ersatzbild des Zahnriemenantriebs, [Kli13]

Die translatorische Steifigkeit $k_{t,Seg}$ eines Riemensegments ist von der jeweiligen Länge l_{Seg} und der spezifische Steifigkeit k_{spez} des Riemen abhängig und wird mit Gl. (3.1) berechnet.

$$k_{t,Seg} = \frac{k_{spez}}{l_{Seg}} \quad (3.1)$$

Die mit r^2 auf die Antriebswelle bezogene rotatorische Gesamtsteifigkeit des Zahnriemens wird mit Gl. (3.2) bestimmt. Die Länge $l_1 = 2l + 3l_0$ entspricht dabei der Länge der Riemensegmente 2 und 3, wenn der Schlitten bei $s = 0$ steht.

$$k_r(s) = k_{\text{spez}} r^2 \left(\frac{1}{l_0 + s} + \frac{1}{l_1 - s} \right) \quad (3.2)$$

Die hier vorgestellte Modellierung der Gesamtsteifigkeit des Antriebsstrangs ist nur eine Näherung. Nach [Per09] ist neben der Elastizität der Zugstränge des Zahnriemens auch die Elastizität der Zähne im Eingriff am Schlitten und am Antriebsrad zu berücksichtigen. Die Elastizität der Motorwelle und der Ausgleichkupplung tragen ebenfalls zur Nachgiebigkeit des Antriebs bei. Ausgehend von geometrischen Daten des Prüfstands und Tabellenwerten aus [Per09] für den Zahnriemen sind die Einstellparameter k_{spez} , l_0 und l_1 so gewählt, dass die gemessene Steifigkeit und Eigenfrequenz des Systems bei den betrachteten Schlittenpositionen gut übereinstimmen. Damit ergeben sich die Kennwerte in Tabelle 3.6 auf S. 24 und die Kennlinie in Bild 3.9. Die eingezeichnete Totzeit wird in Kapitel 3.6 näher betrachtet.

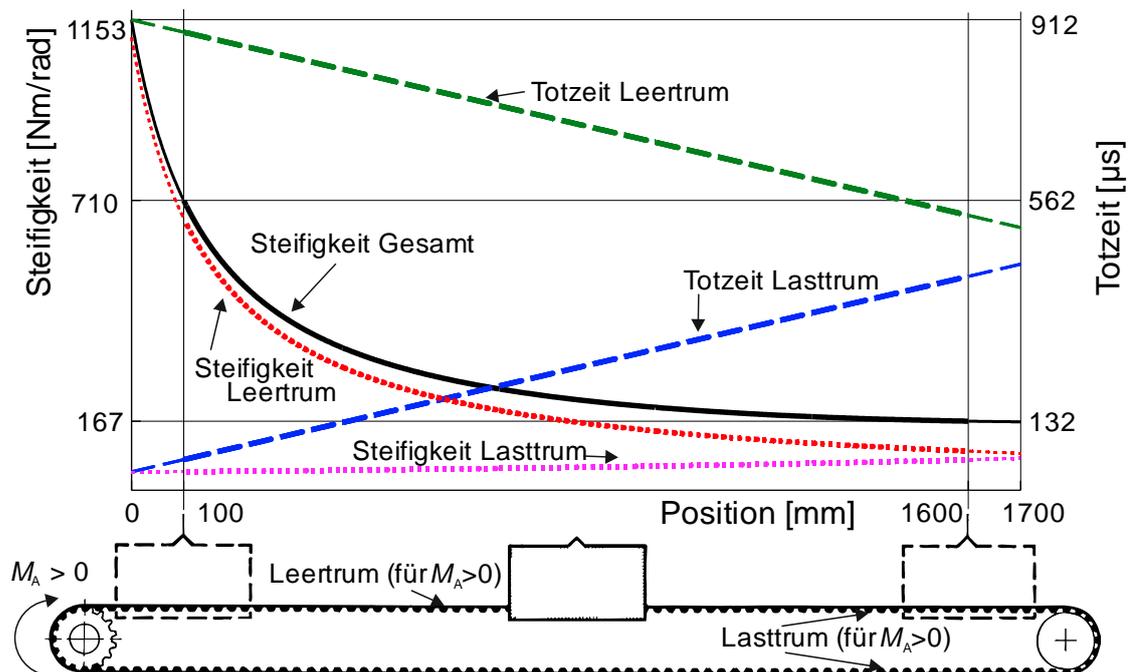


Bild 3.9: Kennlinie der Riemensteifigkeit und Totzeit der Kraftübertragung

3.5 Vorsteuerungsmodelle mit konzentrierten Parametern

Um aus dem oben vorgestellten mechanischen Ersatzmodell des Zahnriemenantriebs umsetzbare modellbasierte Vorsteuerungen zu berechnen, müssen weitere vereinfachende Annahmen getroffen werden. Im Folgenden werden Modelle mit steigender Komplexität zunächst im Zustandsraum dargestellt. Dabei wird die Konvention aus Kapitel 2.1.1 mit dem Antriebsmoment als skalarer Eingangsgröße u , den Positionen und Geschwindigkeiten der Ersatzkörper x und den antriebsseitigen Messgrößen y benutzt. Anschließend wird die in Kapitel 2.6 eingeführte flachheitsbasierte Vorsteuerung für das System angegeben. Dazu werden die Vorsteuergrößen u^* und y^* in Abhängigkeit des flachen Ausgangs z_1^* und seiner Ableitungen z_2^*, z_3^*, \dots angegeben. Der flache Ausgang ist bei den hier betrachteten Mehrkörpersystemen die Position der letzten Masse der Schwingerkette.

Zur konkreten Berechnung der Vorsteuergrößen wird eine ausreichend oft stetig differenzierbare Trajektorie $z_1^*(t)$ für den flachen Ausgang vorgegeben. Dies wird in Kapitel 4 beschrieben. Die Versuchsergebnisse der Umsetzung der Vorsteuerungsmodelle am Prüfstand werden in Kapitel 5 vorgestellt.

Gemeinsam ist allen Modellen die rein antriebsseitige Annahme mechanischer Verluste durch viskose Dämpfung und Coulombsche Reibung, was die Berechnung vereinfacht und die Ergebnisse vergleichbarer macht. Die in allen Vorsteuerungsmodellen gemeinsam genutzten Formelzeichen sind in Tabelle 3.3 angegeben.

Auf die Abhängigkeit der lastseitigen Position und Geschwindigkeit vom flachen Ausgang wird im Folgenden nicht eingegangen, da diese im Auswertungsteil mit y_3 und y_4 bezeichneten Größen nicht als Sollgrößen der Regelung dienen.

Tabelle 3.3: Gemeinsame Formelzeichen der verwendeten Modelle

Größe	Formelzeichen	Wert/Einheit
Position der Antriebsseite	y_1	[m]
Geschwindigkeit der Antriebsseite	y_2	[ms ⁻¹]
Antriebsmoment M_A	u	[Nm]
Viskose Dämpfung der Antriebsseite	d_v	$4 \cdot 10^{-3} \text{Nms} \cdot \text{rad}^{-1}$
Coulombsche Reibung der Antriebsseite	μ_C	0,375 Nm
Radius des Zahnrads der Antriebsseite	r	16 mm

3.5.1 Einmassenmodell

Die einfachste und industriell am weitesten verbreitete Modellierung des Linearachs-Systems besteht in der Formulierung als Einmassenmodell wie in Bild 3.10 dargestellt.

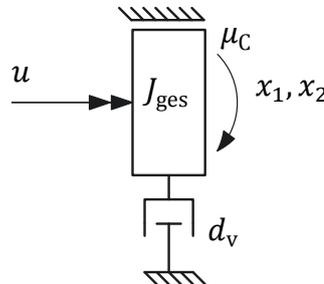


Bild 3.10: Rotatorisches lineares Einmassenmodell

Der Antriebsstrang wird dabei als steif betrachtet. Die Massenträgheit J_A des Antriebs und J_L der Last werden zu J_{ges} zusammengefasst. Gl. (3.3) enthält die Systembeschreibung im Zustandsraum mit rotatorischen Größen. Die verwendeten Größen sind in Tabelle 3.4 zusammengefasst.

$$\Sigma_1: \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ J_{ges}^{-1} \cdot (-\mu_C \cdot \text{sgn}(x_2) - d_v \cdot x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ J_{ges}^{-1} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (3.3)$$

$$[y_1, y_2]^T = r \cdot [x_1, x_2]^T$$

Tabelle 3.4: Formelzeichen des Einmassenmodells

Größe	Formelzeichen	Einheit
Winkelposition des Antriebs	x_1	[rad]
Geschwindigkeit	x_2	[rad s ⁻¹]
Gesamt-Massenträgheit	J_{ges}	[kgm ²]

Die Invertierung des Systemmodells Σ_1 ist ohne weitere Rechnung möglich, da der flache Ausgang z_1 direkt der Systemausgang y_1 ist. Die daraus resultierende Vorsteuerung Σ_1^* ist in den Gln. (3.4) angegeben. Sollgrößen für die Vorsteuerung werden mit einem Stern (*) und Schätzgrößen der Parameter mit einem Dach (^) gekennzeichnet.

$$\Sigma_1^*: \quad u^*(t) = \hat{J}_{ges} \cdot z_3^*(t) + \hat{\mu}_C \cdot \text{sgn}(z_2^*(t)) + \hat{d}_v \cdot z_2^*(t) \quad (3.4)$$

$$[y_1^*, y_2^*]^T = r \cdot [z_1^*, z_2^*]^T$$

In der Vorsteuerung ist $z_3^*(t)$ die höchste Ableitung des flachen Ausgangs. Es ist daher eine mindestens C^2 -stetige Trajektorie für $z_1^*(t)$ für einen sprunghaften Stellgrößenverlauf notwendig.

3.5.2 Lineares Zweimassenmodell

Das lineare Zweimassenmodell nach Bild 3.11 ist die einfachste Möglichkeit, einen elastischen Antriebsstrang zu berücksichtigen. Durch die Elastizität k werden die antriebsseitigen Größen x_1, x_2 und J_1 sowie die abtriebsseitigen Größen x_3, x_4 und J_2 getrennt.

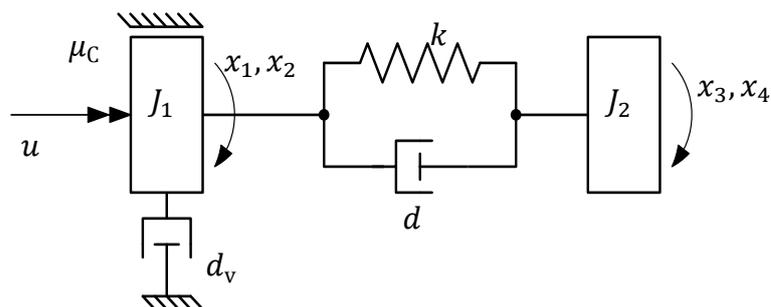


Bild 3.11: Rotatorisches lineares Zweimassenmodell, [Kli13]

Nach dem Aufstellen von Impuls- und Drallsatz für beide Massenträgheiten ergibt sich die Zustandsraumdarstellung des Systems Σ_2 in Gl. (3.5) mit den in Tabelle 3.5 genannten Zeichen.

$$\Sigma_2: \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ J_1^{-1}[-k(x_1 - x_3) - d(x_2 - x_4) - \mu_C \operatorname{sgn}(x_2) - d_v x_2] \\ x_4 \\ J_1^{-1}[k(x_1 - x_3) + d(x_2 - x_4)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ J_1^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3.5)$$

Tabelle 3.5: Formelzeichen des linearen Zweimassenmodells

Größe	Formelzeichen	Einheit
Position von Antrieb (φ_A) und Abtrieb (φ_L)	x_1, x_3	[rad]
Geschwindigkeit von An- ($\dot{\varphi}_L$) und Abtrieb ($\dot{\varphi}_L$)	x_2, x_4	[rad s ⁻¹]
Dämpfung zwischen Antrieb und Abtrieb	d	[Nms·rad ⁻¹]
Massenträgheitsmoment des Antriebs	J_1	[Nms·rad ⁻¹]
Massenträgheitsmoment der Last	J_2	[kgm ²]
Rotatorische Steifigkeit	k	[Nm·rad ⁻¹]

Da es sich um ein lineares System handelt, wird der flache Ausgang z_1 durch Transformation des Systems Σ_2 auf lineare Regelungsnormalform zu dem Ausdruck in Gl. (3.6) bestimmt (siehe Kapitel 2.1.3).

$$z_1(t) = x_3(t) + \frac{d^2}{J_2 k} (x_1(t) - x_3(t)) + \frac{d}{k} x_4(t) \quad (3.6)$$

Für eine Ruhelage des Systems ($x_1 = x_3 \wedge x_4 = 0$) ist der flache Ausgang damit nur noch die lastseitige Position x_3 . Die Vorsteuerungsgrößen u^* und y^* werden mit den Gln. (2.15) und (2.16) bestimmt und sind in den Gln. (3.7) angegeben.

$$\begin{aligned} \Sigma_2^*: \quad u^*(t) &= (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) \cdot z_3^*(t) + \left(\frac{\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2}{\hat{k}} \right) \cdot z_5^*(t) + \hat{\mu}_c \cdot \text{sgn}(y_2^*(t)) + \frac{\hat{d}_v}{r} \cdot y_2^*(t) \quad (3.7) \\ &+ \frac{\hat{d}}{\hat{k}} (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) \cdot z_4^*(t) + \frac{\hat{d} \cdot \hat{d}_v}{\hat{k}} \cdot z_3^*(t) \\ y_1^*(t) &= r \cdot \left[z_1^*(t) + \frac{\hat{d}}{\hat{k}} z_2^*(t) + \frac{\hat{J}_2}{\hat{k}} z_3^*(t) \right] \\ y_2^*(t) &= r \cdot \left[z_2^*(t) + \frac{\hat{d}}{\hat{k}} z_3^*(t) + \frac{\hat{J}_2}{\hat{k}} z_4^*(t) \right] \end{aligned}$$

Das Zweimassensystem hat die Systemordnung 4. Zur Vorsteuerung ist daher eine mindestens C^4 -stetige Trajektorie notwendig, damit $z_5^*(t)$ keine Sprünge aufweist.

3.5.3 Nichtlineares Zweimassenmodell

Wie bereits in Kapitel 3.4 dargestellt, ist die Elastizität des Zahnriemenantriebs positionsabhängig und damit nichtlinear. Um dies in der Vorsteuerung zu berücksichtigen, wird die lineare Elastizität k in Gl. (3.5) durch die nichtlineare Elastizität aus Kapitel 3.4 ersetzt. Damit ergibt sich die Steifigkeit in Gl. (3.8). Die Kennlinie der Steifigkeit wird mit den Parametern in Tabelle 3.6 beeinflusst.

$$k(x_3) = k_{\text{spez}} \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{l_0 + r \cdot x_3} + \frac{1}{l_1 - r \cdot x_3} \right) \quad (3.8)$$

Tabelle 3.6: Formelzeichen des nichtlinearen Zweimassenmodells

Größe	Bedeutung	Schätzgröße
k_{spez}	Spezifische Riemensteifigkeit	650 kN
l_0	Länge des ersten Riemensegments	150 mm
l_1	Länge des zweiten Riemensegments	3850 mm

Der flache Ausgang z_1^* dieses nichtlinearen Zweimassensystems ist für $d = 0$ weiterhin die lastseitige Position x_3^* . Die Vorsteuerung für $d = 0$ wird in den Gln. (3.9) angegeben. Zusätzlich zu den dynamischen Größen in Tabelle 3.5 gelten die zahnriemenspezifischen Größen aus Tabelle 3.6.

$$\begin{aligned} \Sigma_3^*: u^*(t) &= \frac{\hat{J}_1 \hat{J}_2 (l_0 l_1 - l_0 r z_1^* + l_1 r z_1^* - r^2 z_1^{*2})}{(l_0 + l_1)^2 r^2 \hat{k}_{\text{spez}}} z_5^* - \frac{2 z_2^* \hat{J}_1 \hat{J}_2 (l_0 - l_1 + 2 r z_1^*)}{(l_0 + l_1) r \hat{k}_{\text{spez}}} z_4^* \\ &\quad - \frac{\hat{J}_1 \hat{J}_2 (l_0 - l_1 + 2 r z_1^*)}{(l_0 + l_1) \hat{k}_{\text{spez}}} z_3^{*2} - \frac{2 z_2^{*2} \hat{J}_1 \hat{J}_2 - (l_0 + l_1) (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) \hat{k}_{\text{spez}}}{(l_0 + l_1) \hat{k}_{\text{spez}}} z_3^* \\ &\quad + \hat{\mu}_C \cdot \text{sgn}(y_2^*(t)) + \frac{\hat{d}_v}{r} \cdot y_2^*(t) \\ y_1^*(t) &= r z_1^*(t) + \hat{J}_2 \frac{l_0 l_1 + r z_1^* l_1 - l_0 r z_1^* - r^2 z_1^{*2}}{(l_0 + l_1) r \hat{k}_{\text{spez}}} \cdot z_3^*(t) \\ y_2^*(t) &= r z_2^* + \hat{J}_2 \frac{l_0 l_1 - l_0 r z_1^* + r z_1^* l_1 - r^2 z_1^{*2}}{(l_0 + l_1) r \hat{k}_{\text{spez}}} z_4^* + \hat{J}_2 \frac{r z_2^* l_1 - l_0 r z_2^* - r^2 2 z_1^* z_2^*}{(l_0 + l_1) r \hat{k}_{\text{spez}}} z_3^* \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.5.4 Dreimassenmodell

Werden sowohl die Elastizität des Antriebs und die Elastizität einer Zusatzfeder berücksichtigt, ergibt sich das (lineare) Systemmodell in Bild 3.12, dessen Zustandsraumdarstellung Σ_4 in Gl. (3.10) angegeben ist. Die Formelzeichen werden in Tabelle 3.7 erläutert.

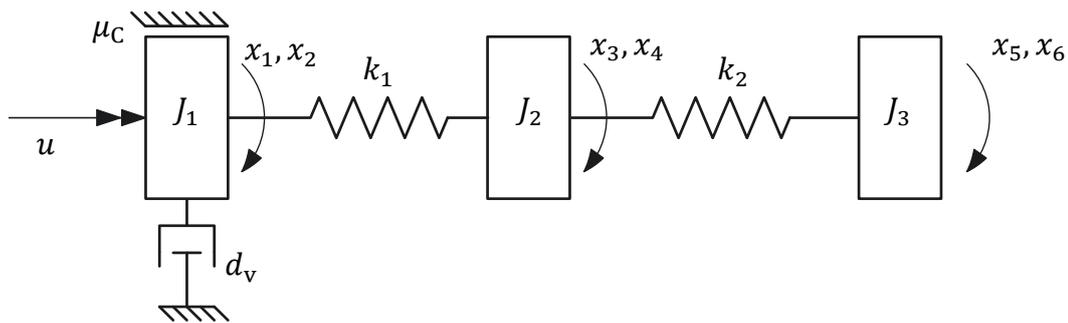


Bild 3.12: Rotatorisches lineares Dreimassenmodell

$$\Sigma_4: \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ J_1^{-1} \cdot (-k_1 \cdot (x_1 - x_3) - \mu_C \cdot \text{sgn}(x_2) - d_v \cdot x_2) \\ x_4 \\ J_2^{-1} \cdot [k_1 \cdot (x_1 - x_3) - k_2 \cdot (x_3 - x_5)] \\ x_6 \\ J_3^{-1} \cdot k_2 \cdot (x_3 - x_5) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ J_1^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.10)$$

Tabelle 3.7: Formelzeichen des linearen Dreimassenmodells

Größe	Formelzeichen	Einheit
Position von Antrieb, Abtrieb und Zusatzmasse	x_1, x_3, x_5	[rad]
Geschwindigkeit von An-, Abtrieb und Zusatzmasse	x_2, x_4, x_6	[rad s ⁻¹]
Massenträgheitsmoment des Antriebs	J_1	[kgm ²]
Massenträgheitsmoment des Schlittens	J_2	[kgm ²]
Massenträgheitsmoment der Zusatzmasse	J_3	[kgm ²]
Rotatorische Steifigkeit des Antriebs	k_1	[Nm rad ⁻¹]
Rotatorische Steifigkeit der Zusatzfeder	k_2	[Nm rad ⁻¹]

Die Vorsteuerung Σ_4^* wird wie zu den vorhergehenden Systemen berechnet und in den Gln. (3.11) angegeben. Flacher Ausgang z_1^* ist die Position x_5^* der letzten Masse in der Schwingerkette. Für die Berechnung eines sprunghaften Systemeingangs u^* muss mindestens eine C^6 -stetige Trajektorie für $z_1^*(t)$ gegeben sein.

$$\begin{aligned} \Sigma_4^*: u^*(t) &= (\hat{J}_1 + \hat{J}_2 + \hat{J}_3) \cdot z_3^*(t) + \left(\frac{\hat{k}_1 \hat{J}_1 \hat{J}_3 + \hat{k}_2 \hat{J}_1 \hat{J}_1 + \hat{k}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_3}{\hat{k}_1 \hat{k}_2} \right) \cdot z_5^*(t) \\ &\quad + \frac{\hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_3}{\hat{k}_1 \hat{k}_2} \cdot z_7^*(t) + \hat{\mu}_c \cdot \text{sgn}(y_2^*(t)) + \frac{\hat{d}_v}{r} \cdot y_2^*(t) \\ y_1^*(t) &= r \cdot z_1^*(t) + \left(\frac{\hat{J}_2}{\hat{k}_1} + \frac{\hat{J}_3}{\hat{k}_1} + \frac{\hat{J}_3}{\hat{k}_2} \right) \cdot r \cdot z_3^*(t) + \frac{\hat{J}_2 \hat{J}_3}{\hat{k}_1 \hat{k}_2} \cdot r \cdot z_5^*(t) \\ y_2^*(t) &= r \cdot z_2^*(t) + \left(\frac{\hat{J}_2}{\hat{k}_1} + \frac{\hat{J}_3}{\hat{k}_1} + \frac{\hat{J}_3}{\hat{k}_2} \right) \cdot r \cdot z_4^*(t) + \frac{\hat{J}_2 \hat{J}_3}{\hat{k}_1 \hat{k}_2} \cdot r \cdot z_6^*(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Berücksichtigung nichtlinearer Steifigkeiten k_1 und k_2 ist mit denselben Methoden wie für das nichtlineare Zweimassenmodell in Kapitel 3.5.3 möglich. Die mathematischen Ausdrücke sind allerdings sehr umfangreich und nur mit Computer-Algebra-Systemen wie Maple oder MATLAB Symbolics Toolbox verarbeitbar, so dass auf eine Darstellung verzichtet wird.

3.6 Modellierung mit verteilten Parametern

Die oben vorgestellte Modellierung des Zahnriemenantriebs zeichnet sich dadurch aus, dass alle Schwingungsvorgänge mit konzentrierten Masse- und Federelementen beschrieben werden. Bei einem Zahnriemenantrieb sind mit zunehmender Riemenlänge jedoch Kontinuumsschwingungen zu beobachten, die ebenfalls in der Vorsteuerung berücksichtigt werden können. Die Größenordnung dieses Effekts wird in Kapitel 3.6.1 beschrieben. In Kapitel 3.6.2 und 3.6.3 werden Modelle vorgestellt, die Kontinuumsschwingungen berücksichtigen. Die Evaluation der Modelle befindet sich in Kapitel 7.

3.6.1 Motivation

In [Per09] wird beschrieben, dass Zahnriemen Kontinuumsschwingungen ausführen, die durch die Modellierung mit konzentrierten Parametern nicht erfasst werden können. In bisherigen Ansätzen wird dabei nur auf Transversalschwingungen eingegangen. Dies sind Saitenschwingungen mit Amplitude senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, die vor allem bei frei schwingenden Riementrummen problematisch sind und Schwingungen im Antriebsstrang anregen können sowie akustische Emissionen verursachen. Bei Linearachsen werden diese Schwingungen durch konstruktive Elemente begrenzt.

Im Gegensatz dazu breiten sich Longitudinalschwingungen im Riemen in Zugstrangrichtung aus und wirken als Torsionsschwingung im Antriebsstrang. Unter der Annahme, dass sich die Schwingung nur im Zugstrang ausbreitet, wird die Wellengeschwindigkeit gem. Gl. (3.12) wie für einen Vollmaterial-Stab berechnet.

$$v_{\text{Longitudinal}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.12)$$

Für Riemen mit Stahl-Zugsträngen werden die Werte aus Tabelle 3.8 gewählt.

Tabelle 3.8: Kennwerte zu Kontinuumsschwingungen des Zahnriemens

Größe	Formelzeichen	Wert
Dichte	$\rho_{\text{Zugstrang}}$	7850 kgm ⁻³
Elastizitätsmodul	$E_{\text{Zugstrang}}$	140 GPa
Wellengeschwindigkeit	$v_{\text{Longitudinal}}$	4,2 m·ms ⁻¹

Der Elastizitätsmodul E ist aufgrund der Verdrehung von Einzeldrähten im Seilverbund geringer als der eines massiven Drahtes (siehe [Per09]). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinalwelle ist ein konstanter Materialparameter. Die Totzeit T_t der Kraftübertragung ist abhängig von der Trumlänge und berechnet sich nach Gl. (3.13). Der Verlauf der Totzeit in jedem Trum in Abhängigkeit der Schlittenposition des Versuchsprüfstands ist in Bild 3.9 auf S. 20 dargestellt.

$$T_t = \frac{l_{\text{Segment}}}{v_{\text{Longitudinal}}} \quad (3.13)$$

Bei der hier verwendeten maximalen Trumlänge von 3,85 m bei Schlittenposition links entsteht eine maximale Totzeit der Kraftübertragung von ca. 1 ms. Dies liegt in der Größenordnung des Regel- und Vorsteuertaktes. Eine Kompensation durch die Vorsteuerung ist durch die folgenden Modelle möglich.

3.6.2 Ein-Trum-Modell

Für eine vereinfachte Modellierung der Longitudinalschwingung wird zunächst nur ein Zugstrang betrachtet, der die antriebsseitige Massenträgheit J_A mit der lastseitigen Masse m_L verbindet wie in Bild 3.13 gezeigt.

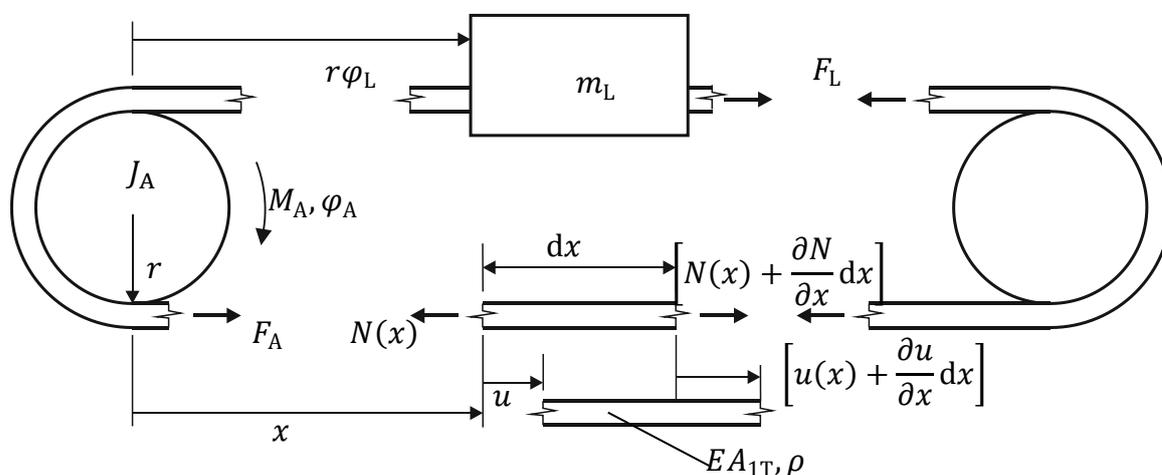


Bild 3.13: Ein-Trum-Modellierung der Zahnriemen-Linearachse

Der Zugstrang wird mit der partiellen DGL (3.14) beschrieben.

$$EA_{1T} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = N(x, t) \quad (3.14)$$

Darin bezeichnet u die Verschiebung eines Riemensegments der Länge dx und N die an diesem Segment angreifende Normalkraft, sowie EA_{1T} die Dehnsteifigkeit.

Das derart modellierte Riemensegment ist in Bild 3.13 im unteren Trum mit seiner ursprünglichen Länge dx und seiner verformten Länge angegeben.

In [Rud03] wird die flachheitsbasierte Vorsteuerung eines Motors mit Torsionswelle hergeleitet, die Kontinuumsschwingungen ausführt. Die Berechnung des Zahnriemens erfolgt analog dazu. Als Ansatz wird die partielle Differentialgleichung für die Verschiebung u in Abhängigkeit der Position x des Kontinuum-Teilsegments in Gl. (3.15a) mit den Krafterandbedingungen (3.15b, c) und den Verschiebungsrandbedingungen (3.15d, e) verwendet.

$$\sigma^2 \frac{d^2 u}{dt^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (3.15a)$$

$$EA_{1T} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = F_A(t) \quad (3.15b)$$

$$EA_{1T} \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = F_L(t) = m_L \cdot r \cdot \ddot{\varphi}_L(t) \quad (3.15c)$$

$$u(0, t) = -r \cdot \varphi_A(t) \quad (3.15d)$$

$$u(l, t) = -r \cdot \varphi_L(t) \quad (3.15e)$$

Die in diesem Abschnitt verwendeten Formelzeichen werden in Tabelle 3.9 zusammengefasst.

Tabelle 3.9: Formelzeichen zur Berechnung des Ein-Trum-Modells

Größe	Formelzeichen	Wert/Einheit
Verschiebung der Kontinuum-Segments	$u(x, t)$	[m]
Kraft am Anfang des unteren Trums	F_A	[N]
Kraft am Ende des unteren Trums	F_L	[N]
Position des Kontinuum-Segments	x	[m]
Länge des unteren Trums	l	2,15 ... 3,85 m
Dehnsteifigkeit	EA_{1T}	[N]
Rotatorische Gesamtsteifigkeit	k	165... 1150 Nm·rad ⁻¹
Totzeit	T_t	500 ... 900 μ s
Verschiebungsoperator	δ	[1]
D'Alembert Wellenfunktionen	ϕ, ψ	[m]
Spezifische Wellenlaufzeit	$\sigma = T_t/l$	238 μ s·m ⁻¹

Nach Einsetzen der d'Alembertschen Lösung der Wellengleichung (3.16) lassen sich die antriebsseitigen Größen F_A und φ_A nur mit der lastseitigen Größe φ_L in Gl. (3.17) und (3.18) beschreiben.

$$u(x, t) = \phi(t + \sigma x) + \psi(t - \sigma x) \quad (3.16)$$

$$F_A(t) = \frac{m_L}{2} r (\ddot{\varphi}_L(t + T_t) + \ddot{\varphi}_L(t - T_t)) + \frac{\sigma EA}{2} r (\dot{\varphi}_L(t + T_t) - \dot{\varphi}_L(t - T_t)) \quad (3.17)$$

$$\varphi_A(t) = \frac{1}{2} (\varphi_L(t + T_t) + \varphi_L(t - T_t)) + \frac{m_L}{2\sigma EA} (\dot{\varphi}_L(t + T_t) - \dot{\varphi}_L(t - T_t)) \quad (3.18)$$

Die Vorsteuerung des Gesamtsystems wird gem. (3.20) mit dem Impulssatz Gl. (3.19) für die Antriebswelle berechnet. Zur verkürzten Darstellung wird der Zeitverschiebungsoperator δ aus Kapitel 2.6.3 verwendet.

$$M_A(t) = J_A \ddot{\varphi}_A + r \cdot F_A(t) \quad (3.19)$$

$$M_A(t) = \frac{J_A J_L}{k} \cdot \frac{\delta^{-1} - \delta}{2T_t} \varphi_L^{(3)} + (J_A + J_L) \frac{\delta^{-1} + \delta}{2T_t} \ddot{\varphi}_L + \frac{1}{2} k T_t (\delta^{-1} - \delta) \dot{\varphi}_L \quad (3.20)$$

$$\varphi_A(t) = \frac{\delta^{-1} + \delta}{2T_t} \varphi_L + \frac{J_L}{k} \frac{\delta^{-1} - \delta}{2T_t} \dot{\varphi}_L$$

Da sowohl Last- als auch Leertrum zur Kraftübertragung beitragen, wird für die Kontinuumsschwingungen im vereinfachten Ein-Trum-Modell der längere, untere Trum betrachtet, der die größere Totzeit aufweist. Die Dehnsteifigkeit EA_{1T} wird für jede lastseitige Position φ_L so gewählt, dass die Gesamtsteifigkeit k mit der nichtlinearen Kennlinie aus Kapitel 3.5.3, Gl. (3.8) übereinstimmt.

$$k(\varphi_L) = \frac{EA_{1T}(\varphi_L)}{l(\varphi_L)} \quad (3.21)$$

Für kleine Totzeiten T_t gehen die zweiseitigen Differenzenquotienten in Gl. (3.20) in Differentialquotienten über. Dies wird in Gl. (3.22a, b) dargestellt. Die Vorsteuerung des Systems geht damit in die des linearen Zweimassenmodells in Kapitel 3.5.2 über. Eine Besonderheit stellt der Term (3.22d) dar. Er entspricht der Kraft, die zur Kompensation der Wegauslenkung aufgrund der Totzeit aufgewendet werden muss.

$$\frac{\delta^{-1} - \delta}{2T_t} \varphi_L^{(3)} = \frac{\varphi_L^{(3)}(t + T_t) - \varphi_L^{(3)}(t - T_t)}{2T_t} \xrightarrow{T_t \rightarrow 0} \varphi_L^{(4)}(t) \quad (3.22a)$$

$$\frac{\delta^{-1} - \delta}{2T_t} \dot{\varphi}_L = \frac{\dot{\varphi}_L(t + T_t) - \dot{\varphi}_L(t - T_t)}{2T_t} \xrightarrow{T_t \rightarrow 0} \ddot{\varphi}_L(t) \quad (3.22b)$$

$$\frac{\delta^{-1} + \delta}{2T_t} \ddot{\varphi}_L = \frac{\ddot{\varphi}_L(t + T_t) + \ddot{\varphi}_L(t - T_t)}{2T_t} \xrightarrow{T_t \rightarrow 0} \ddot{\varphi}_L(t) \quad (3.22c)$$

$$\frac{1}{2} k T_t (\delta^{-1} - \delta) \dot{\varphi}_L = \frac{1}{2} k T_t (\dot{\varphi}_L(t + T_t) - \dot{\varphi}_L(t - T_t)) \xrightarrow{T_t \rightarrow 0} 0 \quad (3.22d)$$

3.6.3 Zwei-Trum-Modell

Bei der Modellierung des Antriebs mit einer einzigen Totzeit wird ignoriert, dass in beiden Riemensegmenten unterschiedliche Totzeiten vorliegen. Je unterschiedlicher die Trumlängen der einzelnen Segmente sind, desto größer wird der begangene Fehler. Ein Ansatz zur getrennten Berücksichtigung von Last- und Leertrum wird im Folgenden vorgestellt:

Die Vorgehensweise zur Berechnung des Ein-Trum-Modells des vorherigen Kapitels wird dabei auf beide Segmente ausgedehnt: Für jedes Trum werden die Krafterandbedingungen F_A und F_L sowie die laufenden Koordinaten x , Verschiebung u und Länge l gemäß Bild 3.14 definiert. Die Dehnsteifigkeit EA entspricht nun der spezifischen Riemensteifigkeit k_{spez} aus Kapitel 3.4.

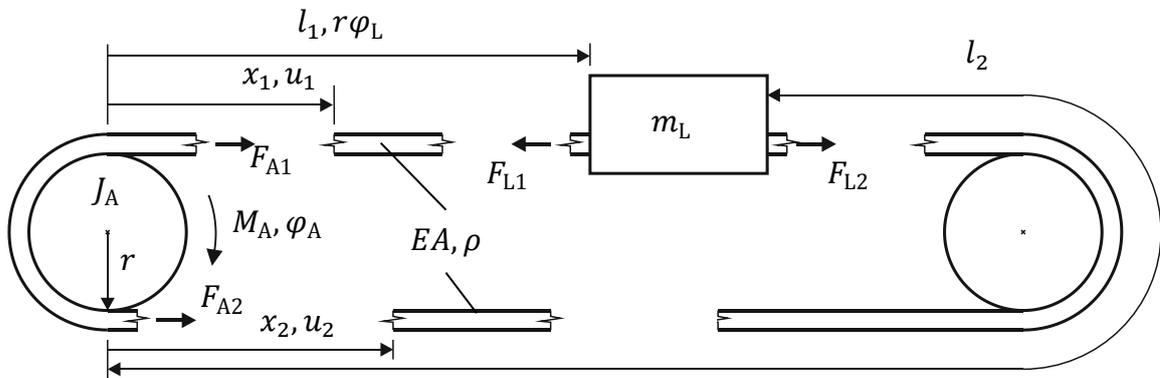


Bild 3.14: Zwei-Trum-Modellierung der Zahnriemen-Linearachse

Die Modellierung der Kontinuums-Riemensegmente erfolgt mit der pDGL (3.23a), den vier Krafterandbedingungen (3.23b) und den vier Verschiebungsrandbedingungen (3.23c, d) für $i \in \{1,2\}$.

$$\sigma^2 \frac{d^2 u_i}{dt^2}(x_i, t) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(x_i, t) \quad (3.23a)$$

$$EA \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(0, t) = F_{Ai}(t), \quad EA \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(l_i, t) = F_{Li}(t) \quad (3.23b)$$

$$u_1(0, t) = r \cdot \varphi_A(t), \quad u_2(0, t) = -r \cdot \varphi_A(t) \quad (3.23c)$$

$$u_1(l, t) = r \cdot \varphi_L(t), \quad u_2(l, t) = -r \cdot \varphi_L(t) \quad (3.23d)$$

Nach der Verkopplung der pDGL mit Impuls- und Drallsatz (3.24a, b) und dem Einsetzen der Wellengleichung (3.25) in (3.23) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem auf dessen linker Seite nur konstante Parameter und Zeitverschiebungsoperatoren δ_i und auf dessen rechter Seite lediglich Ableitungen von $\varphi_L(t)$ stehen.

$$m_L r \ddot{\varphi}_L(t) = F_{L2}(t) - F_{L1}(t) \quad (3.24a)$$

$$J_A \ddot{\varphi}_A(t) = M_A(t) + r \cdot F_{A1}(t) - r \cdot F_{A2}(t) \quad (3.24b)$$

$$u_i(x_i, t) = \phi_i(t + \sigma x_i) + \psi_i(t - \sigma x_i) \quad (3.25)$$

Dabei werden getrennte Zeitverschiebungen δ_1 und δ_2 gem. Gl. (3.26) für die Totzeiten T_{t1} und T_{t2} nach Gl. (3.27) definiert.

$$\delta_i \varphi(t) = \varphi(t - T_{ti}) \quad (3.26)$$

$$T_{ti} = \sigma \cdot l_i \quad (3.27)$$

Die Auflösung des Gleichungssystems führt zu Differential-Differenzgleichungen mit zwei unterschiedlichen Totzeiten für die resultierenden Vorsteuerungen des Drehmoments in Gl. (3.28) bzw. der Antriebsgeschwindigkeit in Gl. (3.29).

$$M_A(t) = -M_A(t + T_{t1} - T_{t2}) + M_A(t - T_{t1} - T_{t2}) + M_A(t - 2T_{t2}) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & -2r^2 \sigma EA [-\dot{\varphi}_L(t + T_{t1}) + 2\dot{\varphi}_L(t - T_{t2}) - \dot{\varphi}_L(t - T_{t1} - T_{t2})] \\ & - (J_A + J_L) [-\ddot{\varphi}_L(t + T_{t1}) + \ddot{\varphi}_L(t - T_{t1} - 2T_{t2})] \\ & - \frac{J_A J_L}{2r^2 \sigma EA} [\varphi_L^{(3)}(t + T_{t1}) + \varphi_L^{(3)}(t - T_{t1}) + \varphi_L^{(3)}(t + T_{t1} - 2T_{t2}) - \varphi_L^{(3)}(t - T_{t1} - 2T_{t2})] \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi}_A(t) = -\dot{\varphi}_A(t + T_{t1} - T_{t2}) + \dot{\varphi}_A(t - T_{t1} - T_{t2}) + \dot{\varphi}_A(t - 2T_{t2}) \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & - [\dot{\varphi}_L(t - T_{t1} - 2T_{t2}) - \dot{\varphi}_L(t + T_{t1})] \\ & - \frac{J_L}{2r^2 \sigma EA} [-\ddot{\varphi}_L(t + T_{t1}) + \ddot{\varphi}_L(t + T_{t1} - 2T_{t2}) - \ddot{\varphi}_L(t - T_{t1}) - \ddot{\varphi}_L(t - T_{t1} - 2T_{t2})] \end{aligned}$$

Befindet sich der Schlitten ganz rechts, so ist die Totzeit von Last- und Leertrum annähernd gleich und die Ausdrücke in Gl. (3.28) und (3.29) gehen in die Vorsteuerungsterme (3.20) und (3.18) des Ein-Trum-Modells über.

Die Berechnung der Zwischenwerte mit beliebiger Zeitverschiebung T_{t1} und T_{t2} für die lastseitige Position φ_L und ihrer Ableitungen ist mit den Methoden aus Kapitel 4 für Zukunfts- und Vergangenheitswerte exakt möglich. Eine stabile numerische Berechnung der Vergangenheitswerte der antriebsseitigen Größe M_A konnte bislang noch nicht gefunden werden, da aufgrund der Grenzstabilität¹ der Differenzgleichung Oszillationen auftreten. In den in Kapitel 7 vorgestellten Versuchen wird daher ausschließlich das Ein-Trum-Modell aus Kap. 3.6.2 verwendet.

¹ Mehrere Polstellen der Differenzgleichung liegen auf dem Einheitskreis.

4 Berechnung von Trajektorien

Voraussetzung für den Entwurf von flachheitsbasierten Vorsteuerungen ist, dass ausreichend oft stetig differenzierbare Trajektorien vorliegen. Die Berechnung dieser Trajektorien wird im Folgenden vorgestellt. Für die Berechnung von Polynomtrajektorien wird in Kapitel 4.1 eine Methode aus [Bia08] angewendet. Die Nachteile der Polynomtrajektorien werden durch die in Kapitel 4.2 vorgestellten Trapeztrajektorien vermieden. Die Anwendung der Trajektorien zur Vorsteuerung ist in Kapitel 4.3 dargestellt.

4.1 Polynomtrajektorien mit Bernstein-Basispolynomen

Die in dieser Arbeit verwendeten Polynomprofile werden aus Bernstein-Basispolynomen berechnet, die sich durch numerisch effiziente Berechnung und einfache Skalierbarkeit auszeichnen. Das Basispolynom $\sigma(\tau)$ wird mit Gl. (4.1) angegeben und ist auf die auf 1 normierte Zeit τ bezogen.

$$\sigma(\tau) = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \tau^i (1-\tau)^{m-i} \cdot p_i = \sum_{i=0}^m a_i \tau^i, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (4.1)$$

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(1) = 1, \quad 0 \leq \sigma(\tau) \leq 1, \quad a_i = \frac{m!}{(m-i)!} \cdot \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^{i+j}}{j! \cdot (i-j)!} p_j$$

Mit Gl. (4.2) wird das Basispolynom an den zurückzulegenden Weg h und die Dauer T_D angepasst. Es ergibt sich die Trajektorie für $s(t)$ mit Anfangszeit t_A und Endzeit t_E :

$$s(t) = s_A + h \cdot \sigma\left(\tau = \frac{t - t_A}{T_D}\right), \quad t_A \leq t \leq t_E \quad (4.2)$$

$$s(t_A) = s_A, \quad s(t_E) = s_E, \quad s_A \leq s(t) \leq s_E, \quad h = s_E - s_A, \quad T_D = t_E - t_A$$

Die Zeitableitungen der Trajektorie berechnen sich gem. Gl. (4.3):

$$s^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} s(t) = \frac{d^k}{d\tau^k} \sigma(\tau) \cdot \frac{h}{T_D^k} \quad (4.3)$$

Für ein System der Ordnung n werden $n + 1$ Randbedingungen am Anfang und am Ende der Trajektorie gesetzt. Um diese zu erfüllen, wird ein Polynom $(m - 1)$ -ten Grades mit $m = 2 \cdot (n + 1)$ Koeffizienten verwendet.

Für den Fall einer symmetrischen Trajektorie zwischen Ruhelagen sind die Randbedingungen nach Gl. (4.4) mit Koeffizienten gem. Gl. (4.5) bestimmt.

$$s^{(k)}(t_A) = s^{(k)}(t_E) = 0, \quad k > 0 \quad (4.4)$$

$$p = [0, \dots, 0, 1, \dots, 1]^T, \quad p \in \mathbb{R}^m \quad (4.5)$$

Liegt am Anfang oder Ende keine Ruhelage vor, wird p durch ein Gleichungssystem aus den Ableitungsrandbedingungen $[v_A, a_A, j_A, s_A^{(4)} \dots]$ und $[v_E, a_E, j_E, s_E^{(4)}, \dots]$ bestimmt. Die genaue Herleitung und Berechnung von Polynomprofilen ist z. B. [Bia08] zu entnehmen.

Zusätzlich zu den Randbedingungen wird als Nebenbedingung gefordert, dass die Grenzwerte für die Ableitungen von $s(t)$ eingehalten werden. Die Trajektoriendauer T_D ist der einzige Freiheitsgrad beim Entwurf des Polynomprofils. Aus Gl. (4.3) kann der Maximalwert der k -ten Ableitung von $s(t)$ in Abhängigkeit der Trajektoriendauer zu Gl. (4.6) berechnet werden.

$$\max_{t \in [t_A, t_E]} \|s^{(k)}(t)\| = \frac{h}{T_D^k} \max_{\tau \in [0,1]} \left\| \frac{d^k}{d\tau^k} \sigma(\tau) \right\|, \quad \forall k \geq 1. \quad (4.6)$$

Für die Einhaltung der Ableitungs-Nebenbedingungen $s_{\max}^{(1)} = v_{\max}$ bis $s_{\max}^{(n)}$ muss die Trajektoriendauer mindestens $T_{D,\min}$ nach Gleichung (4.7) betragen (siehe [Lév09]).

$$T_{D,\min} = \max \left\{ \left(\frac{h}{s_{\max}^{(1)}} \cdot \max_{\tau \in [0,1]} \left\| \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \right\| \right), \dots, \left(\frac{h}{s_{\max}^{(n)}} \cdot \max_{\tau \in [0,1]} \left\| \frac{d^n \sigma(\tau)}{d\tau^n} \right\| \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \quad (4.7)$$

Beispiel: Für die Vorsteuerung eines Zweimassensystems (siehe Kapitel 3.5.2) mit Ordnung $n = 4$ wird mindestens ein Polynom neunten Grades mit $m = 10$ Koeffizienten benötigt. Dieses Polynom ist im Bereich $t_A < t < t_E$ neunmal stetig differenzierbar. Für einen sprunghaften Stellgrößenverlauf müssen die Randbedingungen eingehalten und der Bereich $t_A \leq t \leq t_E$ betrachtet werden. In diesem Bereich ist das Polynom C^4 -stetig.

4.2 Faltungs-Algorithmus für Trapeztrajektorien

Der Nachteil von kompletten Polynomtrajektorien des vorherigen Kapitels 4.1 ist, dass durch den einzigen Freiheitsgrad T_D zwar alle Beschränkungen für die Zeitableitungen eingehalten werden können, die Beschränkungen allerdings nicht voll ausgenutzt werden. Die Grenzwerte werden nur an einer Stelle des Polynoms überhaupt erreicht, was zu langen Trajektorienauern führt. Wird das Polynom durch eine Maximalgeschwindigkeit begrenzt, wird die Maximalbeschleunigung nie erreicht. Diese Nachteile werden durch eine stückweise definierte Polynomtrajektorie überwunden (vgl. [Pos11]). Da in einer Zeitableitung von $s(t)$ immer Trapezfunktionen vorkommen, werden diese Trajektorien auch Trapeztrajektorien genannt.

4.2.1 Eigenschaften von Trapeztrajektorien

Die Trapeztrajektorie wird stückweise in Segmenten definiert. Beispielsweise werden für ein C^2 -stetiges Beschleunigungstrapezprofil sieben Segmente definiert, die in Bild 4.1 eingezeichnet sind: Konstanter positiver Ruck (1), konstante Beschleunigung (2), konstanter negativer Ruck (3), konstante Geschwindigkeit (4), konstanter negativer Ruck (5), konstante Verzögerung (6), konstanter positiver Ruck (7). Zur Verdeutlichung der Trajektorie als stückweises Polynom sind in Bild 4.1 die Polynomgrade farblich hervorgehoben: Grad 0 (konstant, schwarz), Grad 1 (linear, rot), Grad 2 (quadratisch, grün), Grad 3 (kubisch, blau).

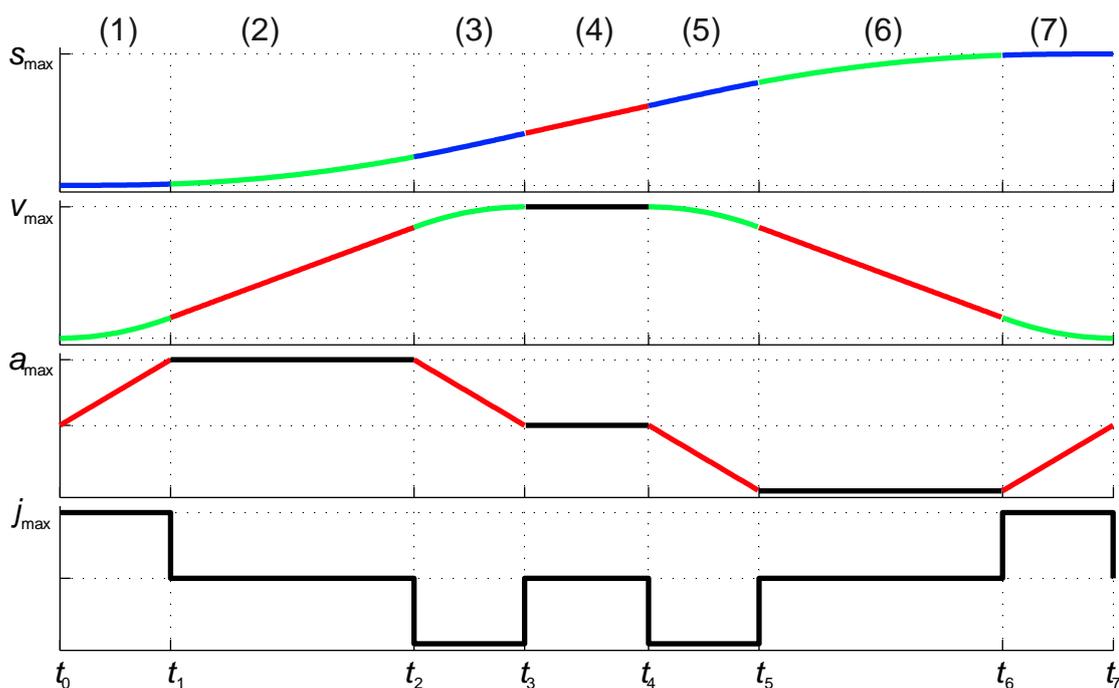


Bild 4.1 Zeitverlauf einer C^2 -stetigen Trapez-Trajektorie

4.2.2 Berechnung von Trapeztrajektorien

Bei der Berechnung der C^2 -Trajektorie muss mit vier Fallunterscheidungen geprüft werden, ob die maximale Geschwindigkeit oder die maximale Beschleunigung erreicht werden können. Die Segmentdauern werden durch Lösung einer quadratischen Gleichung analytisch bestimmt. Die analytische Berechnung von Trapezprofilen ist bis zur C^3 -Stetigkeit möglich (siehe [Lam05]). Bei höheren Stetigkeitsordnungen ist eine numerische Näherungslösung zur Bestimmung der Umschaltzeitpunkte t_1, t_2, t_3, \dots der höchsten Ableitung möglich. Die Anzahl der Fallunterscheidungen und die Anzahl der Segmente nehmen dabei quadratisch mit der Stetigkeitsordnung zu. In [Pos11] wird zur Generierung von Trapeztrajektorien höherer Ordnung vorgeschlagen, die Übergänge eines Beschleunigungstrapezprofils mit kubischen Splines zu ersetzen. Mit dieser Methode ist die Begrenzung von höheren Ableitungen allerdings nur iterativ möglich.

Zur Vermeidung der genannten Nachteile wird im Folgenden ein Algorithmus aus [Lee13] an die Anforderungen der Trajektorien für flache Vorsteuerungen angepasst. Grundlage des Algorithmus ist die Faltung von Funktionen im Zeitbereich, die nach Gleichung (4.8) definiert ist.

$$y(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (4.8)$$

Wird eine Geschwindigkeitsfunktion $v_0(t)$ mit Dauer T_{D0} mit einer Einheits-Rechteckfunktion $g_1(t)$ nach Gl. (4.9) gefaltet, so ist die resultierende Geschwindigkeitsfunktion $v_1(t)$ in Gl. (4.10) um die Zeit T_{V1} verschliffen.

$$g_1(t) = \frac{1}{T_{V1}}, \quad 0 \leq t \leq T_{V1} \quad (4.9)$$

$$v_1(t) = (v_0 * g_1)(t) = \frac{1}{T_{V1}} \int_0^{T_{V1}} v_0(t - \tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq T_{D0} + T_{V1} \quad (4.10)$$

Der zurückgelegte Weg h , also die Fläche unter den Kurven v_0 und v_1 bleibt bei der Faltung gleich und die Gesamtdauer erhöht sich von T_{D0} auf T_{D1} . Dabei bezeichnet s_E wird weiterhin die End- und s_A die Anfangsposition. Die Anfangszeit t_A wird zur Vereinfachung zu Null gesetzt. Der Vorgang wird mit Gl. (4.11) und Bild 4.2 verdeutlicht.

$$h = s_E - s_A = \int_0^{T_{D0}} v_0(t)dt = \int_0^{T_{D1}} v_1(t)dt, \quad T_{D1} = T_{D0} + T_{V1} \quad (4.11)$$

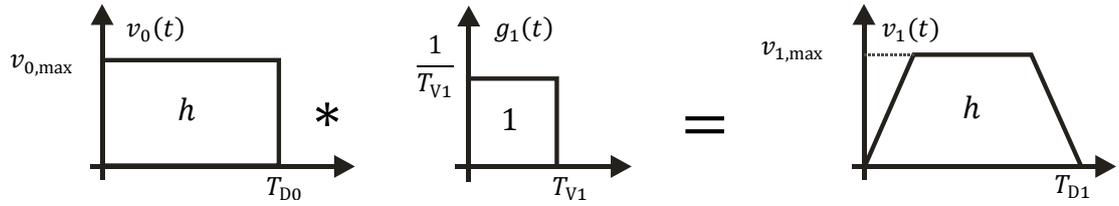


Bild 4.2: Faltung einer konstanten Geschwindigkeit, [Lee13]

Die Trajektorie $s_0(t) = s_A + \int_0^{T_{D0}} v_0(\tau) d\tau$ ist C^0 -stetig. Mit jedem Faltungsschritt wird die stetige Differenzierbarkeit der Trajektorie um eine Ordnung erhöht. Um eine C^n -stetige Trajektorie zu erhalten werden n Faltungsschritte durchgeführt. Die Berechnung der in Bild 4.1 gezeigten C^2 -Trajektorie mit dem Faltungs-Algorithmus wird in Bild 4.3 verdeutlicht.

Im Gegensatz zu [Lee13] wird die Faltung kaskadenartig mit jedem Iterationsschritt in die nächste Ableitung verlegt. Dies hat zur Ursache, dass für eine Vorsteuerung eines Systems n -ter Ordnung alle Ableitungen der Position $s_n(t)$ bestimmt werden müssen. Liegt nur $v_n(t)$ vor, wie in [Lee13] vorgeschlagen, muss $v_n(t)$ noch $(n - 1)$ -mal numerisch differenziert werden, um die für die Vorsteuerung benötigte Größe $s_n^{(n)}(t) = v_n^{(n-1)}(t)$ zu erhalten. Durch diese Modifikation muss nur noch eine lineare Funktion numerisch differenziert werden. Diese Ableitung wird derart gefiltert, dass sie nur einen konstanten Wert oder Null annimmt.

Zusätzlich zur Faltung mit der ursprünglichen Einheits-Rechteckfunktion wird ein Korrekturfaktor benötigt, da der zurückgelegte Weg nicht mehr den Wert h hat, wenn anstelle der Geschwindigkeit eine höhere Ableitung gefaltet wird. Dies wird durch die Verwendung der Faltungs-Funktion $g'_2(t)$ gekennzeichnet.

Die in den Faltungs-Funktionen $g_i(t)$ verwendeten Verschleißzeiten T_{Vi} sind gem. Gl. (4.12) definiert.

$$T_{D0} = T_{V0} = \frac{h}{v_{\max}}, \quad T_{V1} = \frac{v_{\max}}{a_{\max}}, \quad T_{V2} = \frac{a_{\max}}{j_{\max}}, \dots, \quad T_{Vn} = \frac{s_{\max}^{(n)}}{s_{\max}^{(n+1)}} \quad (4.12)$$

Für die Verschleißzeiten gilt Gl. (4.13) als Zusatzbedingung. Wird sie verletzt, wird der entsprechende Grenzwert $s_{\max}^{(i)}$ nicht erreicht. Die Grenzwerte müssen vor Beginn des Algorithmus so nach unten korrigiert werden, dass jede Verschleißzeit größer als die Summe aller folgenden Verschleißzeiten ist.

$$T_{Vi} \geq \sum_{k=i+1}^n T_{Vk}, \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (4.13)$$

Zur Berechnung des zeitdiskreten Faltungsintegrals wird der in [Lee13] vorgeschlagene rekursive Algorithmus verwendet. Durch die Zeitdiskretisierung müssen alle Verschleifzeiten Vielfache der Abtastzeit T_{Abt} der Vorsteuerung sein:

$$T_{Vi} = k \cdot T_{\text{Abt}}, \quad i = 2, \dots, n \wedge k \in \mathbb{N} \quad (4.14)$$

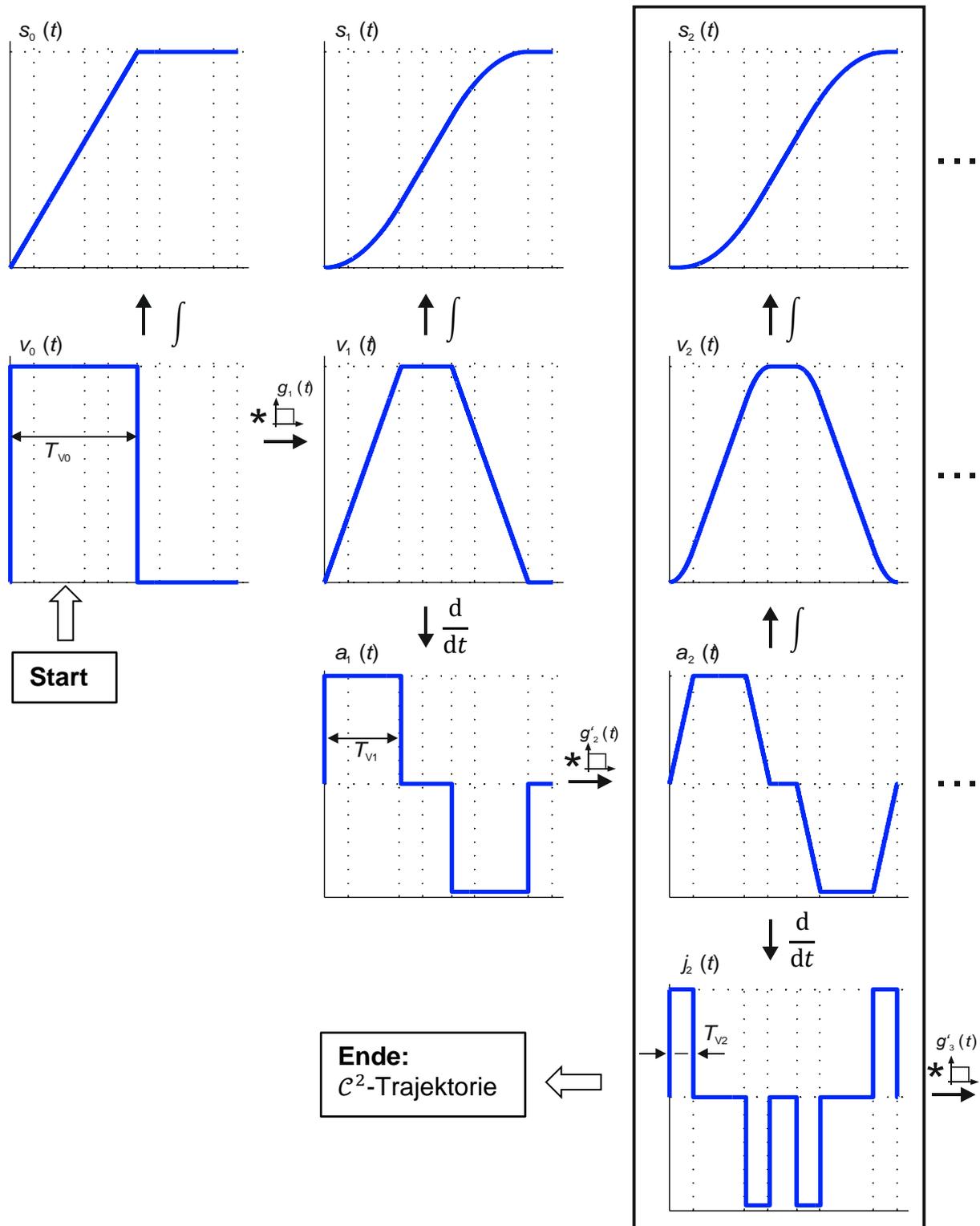


Bild 4.3: Prinzip des Faltungs-Algorithmus für C^n -Trapezprofile

4.2.3 Berechnung von Zwischenwerten

Beim oben vorgestellten Algorithmus zur Berechnung von Trapeztrajektorien liegt die komplette Trajektorie für alle Zeitschritte im Vorsteuertakt T_{Abt} vor. Für die in Kapitel 3.6.2 vorgestellte Vorsteuerung unter Berücksichtigung der Totzeit sind jedoch auch Zwischenwerte für Zeitpunkte außerhalb des Vorsteuertaktes notwendig. Diese werden exakt berechnet, indem die Trajektorie gem. Gl. (4.15) als stückweise definiertes Polynom aufintegriert wird.

$$s^{(k)}(t) = s^{(k)}(t_i) + \int_{t_i}^t s^{(k+1)}(\tau) d\tau \quad (4.15)$$

Zur eindeutigen Bestimmung einer C^n -stetigen Trapez-Trajektorie werden nur die Eckzeiten t_0, t_1, t_2, \dots gem. Bild 4.1 sowie die Eckwerte des rechteckförmigen Verlaufs der letzten Ableitung $s^{(n+1)}(t_i)$ und die Anfangswerte bei t_0 benötigt.

Die Integration erfolgt wie in den Gln. (4.16a) gezeigt von der höchsten zur niedrigsten Ableitung. Die allgemeine Vorschrift wird in Gl. (4.16b) angegeben. Es ist zu erkennen, dass eine C^2 -stetige Trajektorie höchstens Polynom-Segmente vom Grad 3 und eine C^4 -stetige Trajektorie höchstens Polynom-Segmente vom Grad 5 enthält.

$$s^{(n)}(t) = s^{(n)}(t_i) + s^{(n+1)}(t_i) \cdot (t - t_i) \quad (4.16a)$$

$$s^{(n-1)}(t) = s^{(n-1)}(t_i) + s^{(n)}(t_i) \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} s^{(n+1)}(t_i) \cdot (t - t_i)^2$$

$$s^{(n-2)}(t) = s^{(n-2)}(t_i) + s^{(n-1)}(t_i) \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} s^{(n)}(t_i) \cdot (t - t_i)^2 + \frac{1}{6} s^{(n+1)}(t_i) \cdot (t - t_i)^3$$

⋮

$$s^{(n-k)}(t) = s^{(n-k)}(t_i) + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j!} s^{(n-k+j)}(t_i) \cdot (t - t_i)^j \quad (4.16b)$$

Die Berechnung in Gl. (4.16a, b) ist jeweils für die Zeit t zwischen zwei Eckzeiten t_i und t_{i+1} gültig:

$$t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (4.16c)$$

4.3 Vorsteuerungstrajektorien

Die in den Kapitel 4.1 und 4.2 zunächst allgemein vorgestellten Trajektorien werden im Folgenden für die Verwendung als Vorsteuerung des Versuchsprüfstands angepasst. In Kapitel 4.3.1 werden zunächst die geprüften Trajektorien miteinander verglichen. Die zur Trajektorienberechnung notwendige Berücksichtigung der zulässigen Grenzen des Systems wird in Kap. 4.3.2 gezeigt. Kap. 4.3.3 behandelt den Einfluss der gewählten Trajektorie auf das Vorsteuerungsmoment des Systems. In Kap. 4.3.4 wird schließlich eine alternative Bewertungsmöglichkeit für Vorsteuerungstrajektorien vorgestellt.

4.3.1 Vorstellung der Trajektorien

Die Auswahl einer Trajektorie wird durch sich widersprechende Ziele beeinflusst: In industriellen Anwendungen ist im Allgemeinen eine kurze Transitionszeit T_D der Trajektorie erstrebenswert, da somit geringere Zykluszeiten und höhere Produktionsmengen erreicht werden können. Die aus der Trajektorie resultierenden Stellgrößen dürfen festgelegte Grenzwerte allerdings nicht überschreiten, die sich aus der Dimensionierung des Antriebssystems ergeben. Des Weiteren nehmen mechanischer Verschleiß und energetische Verluste mit höheren Geschwindigkeiten zu.

Die folgenden Daten beziehen sich auf Trajektorien für die Position s des Schlittens am Versuchsprüfstand. Die mathematische Beschreibung von Trajektorien bezüglich der Anfangs- und Endwerte, der stetigen Differenzierbarkeit C^i , der Beschränkungen $s_{\max}^{(i)}$ und der Verschleißzeiten T_{Vi} ist in Kapitel 2.4 vorweggenommen worden.

Zunächst erfolgt eine Betrachtung der Beschränkungen von Trajektorien für den Versuchsprüfstand: Die Maximalgeschwindigkeit wird aus der Bemessungsdrehzahl n_N des verwendeten Motors zur translatorischen Größe v_{\max} bestimmt. Die weiteren Kennwerte für Trajektorien werden in einer möglichst gut vergleichbaren Form dargestellt: Zur Bestimmung der maximalen Beschleunigung a_{\max} wird das Drehmoment M_B gem. Gl. (4.17) angegeben, mit der die Gesamtmassenträgheit J_{ges} beschleunigt wird:

$$a_{\max} = \frac{M_B}{J_{\text{ges}}} \cdot r \quad (4.17)$$

Der Ruck und höhere Ableitungen werden mit der jeweiligen Verschleißzeit T_{Vi} gem. Gl. (4.18) angegeben.

$$T_{Vi} = \frac{s_{\max}^{(i)}}{s_{\max}^{(i+1)}} \quad (4.18)$$

Die Summe der Verschleißzeiten der Beschleunigung wird mit Σ_{V2} gem. Gl. (4.19) bezeichnet. Σ_{V2} ist die Dauer der Ruckphase, also der Phase, in der sich die Beschleunigung ändert. Diese Aussage gilt nur für Trapeztrajektorien, da bei Polynomtrajektorien keine Konstanten Verläufe einer Ableitungsgröße auftreten.

$$\Sigma_{V2} = \sum_{i=2}^n T_{Vi} \quad (4.19)$$

Für die Untersuchungen in dieser Arbeit wurde bei der Auswahl der Trajektorie auch darauf geachtet, dass Unterschiede zwischen den zu vergleichenden Vorsteuer-Methoden hervortreten. Der einzige Unterschied der Vorsteuerungsmodelle Σ_1^* bis Σ_4^* aus Kapitel 3.5 liegt in der Ruckphase. In Phasen konstanter Beschleunigung ist in jedem Systemmodell nur die Gesamtmassenträgheit J_{ges} wirksam. Da Reibung und Dämpfung in allen Modellen gleich gewählt sind, besteht auch in Phasen konstanter Geschwindigkeit kein Unterschied in der Vorsteuerung.

Im Folgenden werden drei verschiedene Trapezprofile für einen Arbeitspunktwechsel von $s_A=100$ mm nach $s_E=1600$ mm verglichen, deren Ruckphasen 10 ms, 50 ms bzw. 170 ms dauern. Bei kurzer Ruckphase treten die größten Unterschiede zwischen den Modellen auf, da Ruck und höhere Ableitungen größere Werte annehmen. Nachteilig ist, dass sich die unterschiedlichen verglichenen Vorsteuerungen bei einer Abtastrate von 1 kHz nur in wenigen Zeitschritten unterscheiden. Die Vergleichsmessungen sind somit anfällig für störende Effekte wie Haftreibung.

Bei langer Ruckphase nehmen der Ruck und höhere Ableitungen nur kleine Werte an. Die Unterschiede zwischen den Modellen sind dadurch in der Vorsteuerung gering, dauern dafür aber über einen längeren Zeitraum an.

Bild 4.4 auf S. 42 zeigt die unterschiedlichen Trajektorien, deren Kennwerte zusätzlich in Tabelle 4.1 angegeben sind. Für die Trapez-Profile wurde jeweils eine C^2 -stetige Trajektorie mit durchgezogener Linie und eine C^4 -stetige Trajektorie mit unterbrochener Linie gezeichnet. Zusätzlich werden zwei Polynomtrajektorien verglichen, deren Trajektoriendauer durch die gleiche maximale Beschleunigung begrenzt wird.

Bei Trapeztrajektorien hat die Stetigkeitsordnung keinen Einfluss auf die Trajektoriendauer. Polynomprofile haben dagegen mit höherem Grad eine längere Dauer. Beim Trapezprofil mit $\Sigma_{V2}=170$ ms wird die maximale Geschwindigkeit nicht erreicht, da die Verschleißzeitbedingung für T_{V1} in Gl. (4.13) verletzt wird.

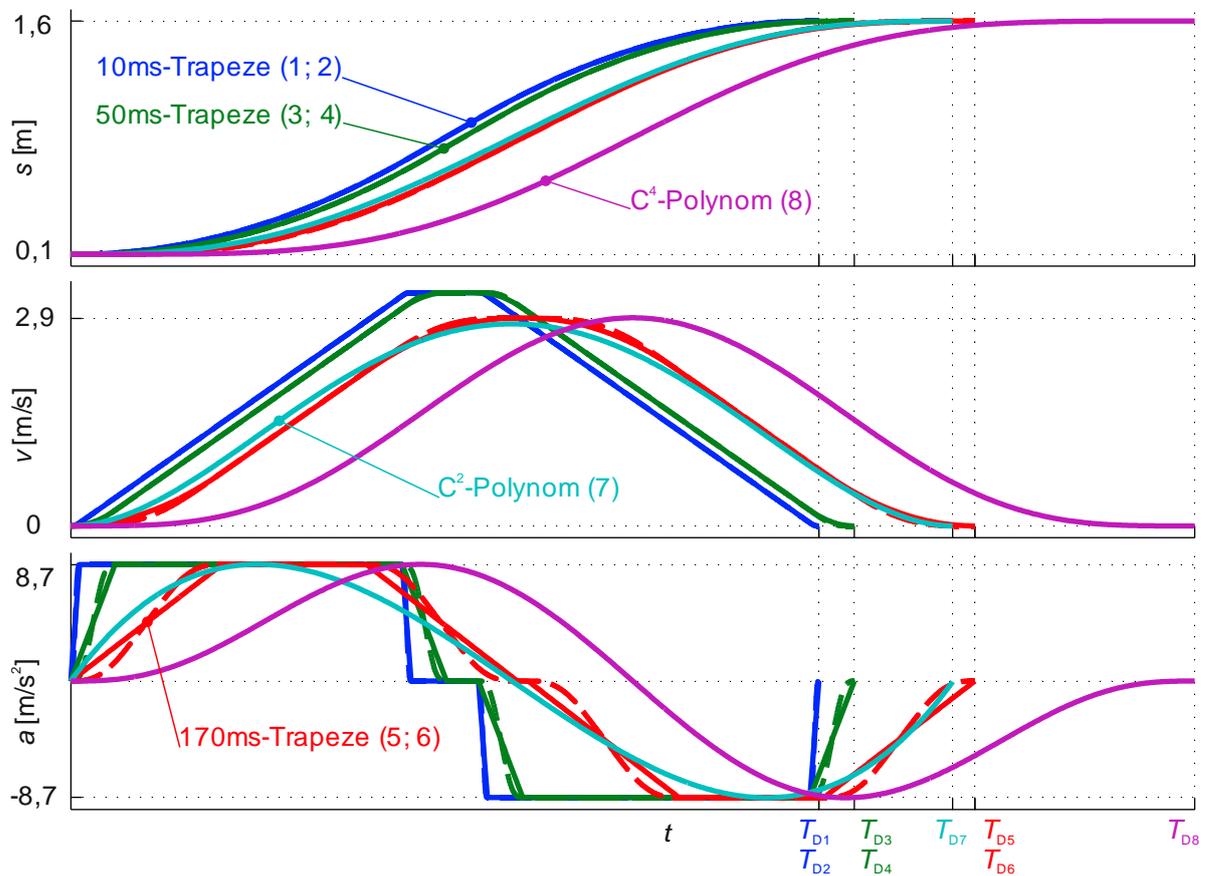


Bild 4.4: Vergleich der Trapez-Trajektorien aus Tabelle 4.1

Tabelle 4.1: Kenndaten zu den verwendeten Trajektorien

i	Trajektorie	Dauer $T_{D,i}$ [ms]	v_{\max} $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	a_{\max} $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$	Σ_{V2} [ms]	T_{V2}, T_{V3}, T_{V4} [ms]
1	C^2 -Trapez	844	3,26	8,7	10	
2	C^4 -Trapez	844	3,26	8,7	10	5; 3; 2
3	C^2 -Trapez	884	3,26	8,7	50	
4	C^4 -Trapez	884	3,26	8,7	50	25; 13; 12
5	C^2 -Trapez	1020	2,90	8,7	170	
6	C^4 -Trapez	1020	2,90	8,7	170	100; 50; 20
7	C^2 -Polynom	995	2,83	8,7	Nicht	Nicht
8	C^4 -Polynom	1268	2,91	8,7	relevant	relevant

4.3.2 Berechnung und Überprüfung der Maximalwerte

Die zulässigen Grenzwerte für die Ableitungsgrößen einer Trajektorie ergeben sich aus den Beschränkungen des Systems in Zustandsraumdarstellung für die die Trajektorie gelten soll. Allgemein wird dabei zwischen der Grenze u_{\max} für die Eingangsgröße und x_{\max} für den Zustandsvektor unterschieden. Die Begrenzung der Trajektorie ist damit immer abhängig vom System für das die Vorsteuerungstrajektorie gelten soll.

Die Grenzwerte für Position $z_{1,\max}$ und Geschwindigkeit $z_{2,\max}$ ergeben sich direkt aus dem zurückzulegenden Weg der Trajektorie und der Motorbemessungsdrehzahl.

Für die Grenzwerte der höheren Ableitungen wird das Motorbemessungsmoment auf die einzelnen Terme in $u^*(\mathbf{z}^*)$ aufgeteilt. Dazu wird Gl. (4.20) aus [Lév09] verwendet:

$$\left\| u^* \begin{pmatrix} z_1^* \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\| + \left\| \frac{\partial u^*(\mathbf{z}^*)}{\partial z_2^*} \right\| z_{2,\max} + \dots + \left\| \frac{\partial u^*(\mathbf{z}^*)}{\partial z_{n+1}^*} \right\| z_{n+1,\max} \leq u_{\max} \quad (4.20)$$

Die Bedingung in Gl. (4.20) stellt nur eine Untergrenze für \mathbf{z}_{\max} dar, da die Trajektorien niemals gleichzeitig maximale Geschwindigkeit, Beschleunigung, Ruck usw. erreichen. Eine Obergrenze für die Grenzwerte ist bei alleiniger Betrachtung der einzelnen Terme in Gl. (4.21) gegeben:

$$\left\| \frac{\partial u^*(\mathbf{z}^*)}{\partial z_i^*} \right\| z_{i,\max} \leq u_{\max} \quad (4.21)$$

Diese Vorgehensweise wird im Folgenden am Beispiel des experimentell untersuchten Zahnriemensystems verdeutlicht. Das System kann bei der Schlittenposition 1600 mm linearisiert als rotatorisches Zweimassensystem aus Kapitel 3.5.2 mit den Werte aus Tabelle 4.2 angenommen werden.

Tabelle 4.2: Daten des linearisierten Zahnriemensystems bei $s=1600$ mm

Größe	Formelzeichen	Wert
Antriebsmassenträgheitsmoment	\hat{J}_1	12,6 kgcm ²
Schlittenmasse	\hat{m}_L	38 kg
Abtriebsmassenträgheitsmoment	$\hat{J}_2 = \hat{m}_L r^2$	97,3 kgcm ²
Antriebssteifigkeit	\hat{k}	170 Nm rad ⁻¹
Coulombsche Reibung (Antriebsseite)	$\hat{\mu}_C$	0,375 Nm
Viskose Dämpfung (Antriebsseite)	\hat{d}_v	0,004 Nms rad ⁻¹

Größe	Formelzeichen	Wert
Maximalgeschwindigkeit	$z_{2,\max} \cdot r$	3,26 ms ⁻¹
Maximales Drehmoment	u_{\max}	8 Nm

Wird Gl. (4.21) auf alle Terme des Drehmoments $u^*(z^*)$ aus Gl. (3.7) angewendet, ergeben sich die in Tabelle 4.3 angegebenen Werte. In der zweiten und dritten Spalte sind dazu die einzelnen Terme der Vorsteuerungsgleichung formal und mit eingesetzten Werten angegeben. Daraus resultieren mit (4.21) die in der vierten Spalte angegebenen Maximalwerte für die auf translatorische Bewegung umgerechneten Elemente des Vektors z .

Die aus dem maximalen Drehmoment und der Reibung resultierende Obergrenze für die Geschwindigkeit ist höher als die Maximaldrehzahl des Motors und hat daher keine Bedeutung.

Tabelle 4.3: Berechnung der Grenzwerte aller Ableitungen für das linearisierte Zweimassensystem

i	$\frac{\partial u^*(z^*)}{\partial z_i^*}$	$\frac{\partial u^*(z^*)}{\partial z_i^*}$	$z_{i,\max} \cdot r$
2	$\hat{d}_v + \hat{\mu}_c \frac{\partial}{\partial z_2^*} \operatorname{sgn} \left(z_2^* + \frac{\hat{J}_2}{\hat{k}} \cdot z_4^* \right)$	$4 \cdot 10^{-3} \text{ Nms rad}^{-1}$	$24 \text{ m}^{\text{s}^{-1}}$
3	$\hat{J}_1 + \hat{J}_2$	110 kgcm^2	$8,74 \text{ ms}^{-2}$
4	$\hat{d}_v \frac{\hat{J}_2}{\hat{k}}$	$2,3 \cdot 10^{-7} \text{ kgm}^2 \text{s}^{-1}$	$417 \cdot 10^3 \text{ ms}^{-3}$
5	$\frac{\hat{J}_1 \cdot \hat{J}_2}{\hat{k}}$	$7,3 \cdot 10^{-8} \text{ kgm}^2 \text{s}^{-2}$	$1,32 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-4}$

Die obige Berechnung der Grenzwerte kann für Polynomtrajektorien übersprungen werden, da üblicherweise entweder die Motordrehzahl oder das Motordrehmoment die Trajektoriendauer T_D des Polynoms begrenzen. Bei Trapeztrajektorien ist eine iterative Vorgehensweise zur Einstellung der Grenzwerte sinnvoller. In dieser Arbeit werden die Verschleißzeiten so eingestellt, dass Gl. (4.13) (Summe der Verschleißzeiten) und Gl. (4.14) (Zeitdiskretisierung) erfüllt sind. Anschließend werden die Maximalwerte $z_{i,\max}$ der Trajektorie berechnet und mit den zulässigen Werten in den Ungleichungen (4.20) und (4.21) verglichen. Falls diese verletzt werden, werden die Verschleißzeiten iterativ angepasst.

4.3.3 Konstruktion einer Vorsteuerungstrajektorie

Im Folgenden wird beispielhaft die Konstruktion einer Vorsteuerungstrajektorie für einen Arbeitspunktwechsel der Linearachse mit nichtlinearer Federkennlinie von 100 mm auf 1600 mm durchgeführt. Vergleichsgegenstand ist ein C^2 -stetiges Beschleunigungstrapezprofil mit der Verschleißzeit $\Sigma_{V2} = T_{V2} = 10$ ms und den Maximalwerten aus der ersten Zeile von Tabelle 4.1.

Zur Vorsteuerung des Zweimassensystems (2MS) ist eine C^4 -stetige Trajektorie notwendig. Bei der Vorgabe von $\Sigma_{V2} = 10$ ms und $T_{Abt} = 1$ ms sind nur die Verschleißzeitkombinationen [5;3;2] ms und [6;2;2] ms für $[T_{V2}; T_{V3}; T_{V4}]$ möglich. Davon wird der erstere Wert gewählt. Die Trajektorie wird mit dem Algorithmus aus Kapitel 4.2.2 berechnet. Bild 4.5 zeigt den Positionsverlauf $z_1^*(t)$ sowie alle stetigen Ableitungen für die C^2 -Trajektorie in rot sowie für die C^4 -Trajektorie in blau. Links in Bild 4.5 ist die gesamte Trajektorie und rechts sind die letzten 10 ms dieser Trajektorie vergrößert dargestellt.

Die Einhaltung der in Tabelle 4.3 berechneten Grenzwerte kann anhand der Achsenbeschriftung in Bild 4.5 überprüft werden.

Die Zusammensetzung der einzelnen Terme des Vorsteuerungsmoments wird im unteren Teil von Bild 4.5 gezeigt. Dabei wird zur Vereinfachung die Gl. (3.7) des linearen Modells und nicht Gl. (3.9) des nichtlinearen Modells zur Berechnung des Antriebsmoments verwendet. Die Antriebssteifigkeit wird zu jedem Zeitpunkt angepasst, wie in Gl. (4.22) angegeben. Der hierdurch entstehende Fehler ist vernachlässigbar klein. Zusätzlich ist der Unterschied von Einmassensystem (1MS) und Zweimassensystem (2MS) hervorgehoben.

$$u^*(t) = \underbrace{\hat{f}_{ges} \cdot z_3^*(t) + \hat{\mu}_C \cdot \text{sgn}(y_2^*(t)) + \frac{\hat{d}_v}{r} \cdot y_2^*(t)}_{1MS} + \underbrace{\left(\frac{\hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2}{\hat{k}(z_1^*)} \right) \cdot z_5^*(t)}_{2MS} \quad (4.22)$$

In Bild 4.5 ist unten das Vorsteuerungsmoment des Einmassensystems mit C^2 -Trapez-Trajektorie („1MS- C^2 “) in blau, mit C^4 -Trapez („1MS- C^4 “) in grün und das Vorsteuerungsmoment für das Zweimassensystem („2MS- C^4 “) in rot gezeichnet.

Im Gesamtverlauf links in Bild 4.5 wird deutlich, dass das Vorsteuerungsmoment bei allen Modellen hauptsächlich durch die Beschleunigung der Gesamt-Massenträgheit (Markierung „1“) und die modellierte Reibung (Markierung „2“) beeinflusst wird.

In der Vergrößerung wird deutlich, dass der Unterschied zwischen 1MS- C^4 - und 2MS- C^4 -Vorsteuerung in der Berücksichtigung der gewichteten vierten Ableitung des flachen Ausgangs besteht (Markierung „3“). Dies ist ebenfalls in Gl. (4.22) erkennbar.

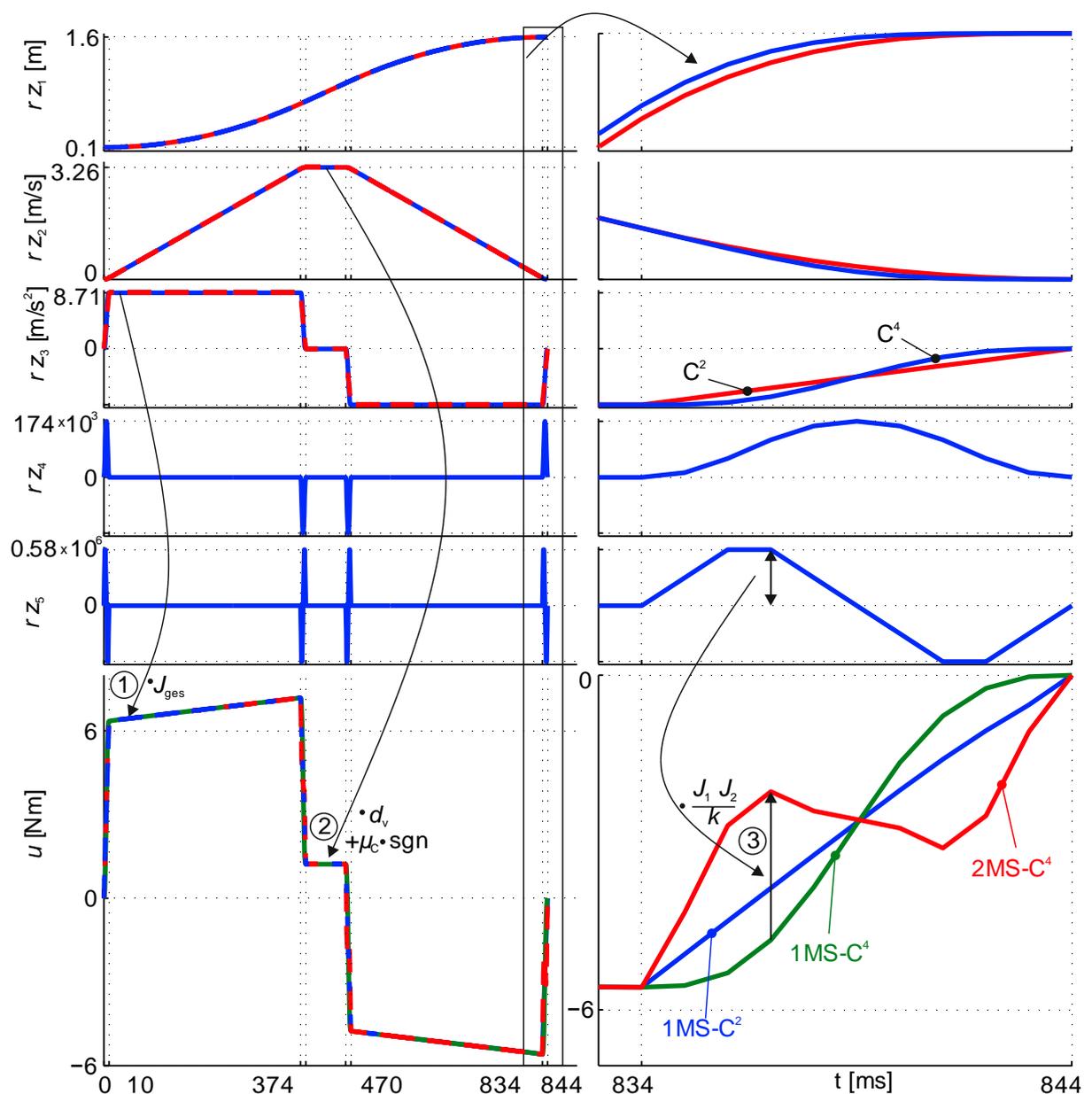


Bild 4.5: Alle Ableitungen einer C^4 -Trapeztrajektorie und Antriebsmoment

4.3.4 Vergleich mit Motor-Kennlinie

Der in [Bia08] vorgeschlagene Vergleich der Trajektorien mit der Drehmoment-Kennlinie des Motors zeigt, ob Grenzwerte des Antriebs eingehalten werden und ob der Antrieb gut ausgenutzt wird. In Bild 4.6 (S. 48) sind die in Kapitel 4.3.1 vorgestellten Trajektorien in das Drehmoment-Drehzahl-Diagramm des Motors eingetragen. Zusätzlich zur Hinfahrt von $s_A=100$ mm nach $s_E=1600$ mm im rechten Bereich des Diagramms (Antriebsdrehzahl $n_A > 0$) ist die im Ursprung punktgespiegelte Trajektorie der Rückfahrt im linken Teil gezeigt ($n_A < 0$). Die antriebsseitigen Größen M_A und n_A der C^4 -Trajektorien werden mit der Vorsteuerung des nichtlinearen rotatorischen Zweimassensystems aus Kapitel 3.5.3 berechnet (gestrichelt gezeichnet). Für C^2 -Trajektorien wird zur Vorsteuerung das Einmassensystem aus Kapitel 3.5.1 benutzt (durchgezogen gezeichnet). Die verwendeten Parameter sind in Tabelle 4.2 auf S. 43 angegeben.

In den Versuchen wurde ein Überspringen des Zahnriemens ab Drehmomenten von ca. 9 Nm festgestellt. Dieser Wert ist als zusätzliche Grenze rot gestrichelt eingezeichnet. Die Betriebsart der Synchronmaschine ist den jeweiligen Quadranten zugeordnet. Während der Abbremsvorgänge wird Energie in den Bremswiderständen umgesetzt. Ein generatorischer Betrieb ist mit der vorhandenen Leistungselektronik nicht möglich.

Im Kurzzeitbetrieb sind auch größere Drehzahlen und Drehmomente des Motors möglich (siehe [Len13b]). Das Überspringmoment des Zahnriemens stellt dagegen auch im Kurzzeitbetrieb eine Grenze dar. Wird der S1-Betrieb des Motors in Teilen einer Trajektorie verlassen, kann die Zulässigkeit durch Bildung eines zeitlichen Mittelwertes bestimmt werden (siehe [Bia08]).

Dem oberen Bereich von Bild 4.6 ist zu entnehmen, dass die Beispieltrajektorien den Drehmoment-Bereich des Motors nur zum Teil ausnutzen und im Dauerbetrieb gefahren werden können (grün gestrichelter Kasten). Im Vergleich der Trajektorien (unten in Bild 4.6) ist zu erkennen, dass die Polynomprofile den Dauerbetriebsbereich des Antriebs nur schlecht ausnutzen. Da der Zahnriemen die Polynomprofile bezüglich des Drehmoments zuerst begrenzt, ist für eine industriell genutzte Anlage ein deutlich schwächer dimensionierter Motor ausreichend. Da sowohl die Bemessungsdrehzahl n_N als auch das Bemessungsmoment M_N des Motors nicht erreicht werden, ist der Einsatz eines Getriebes nicht notwendig.

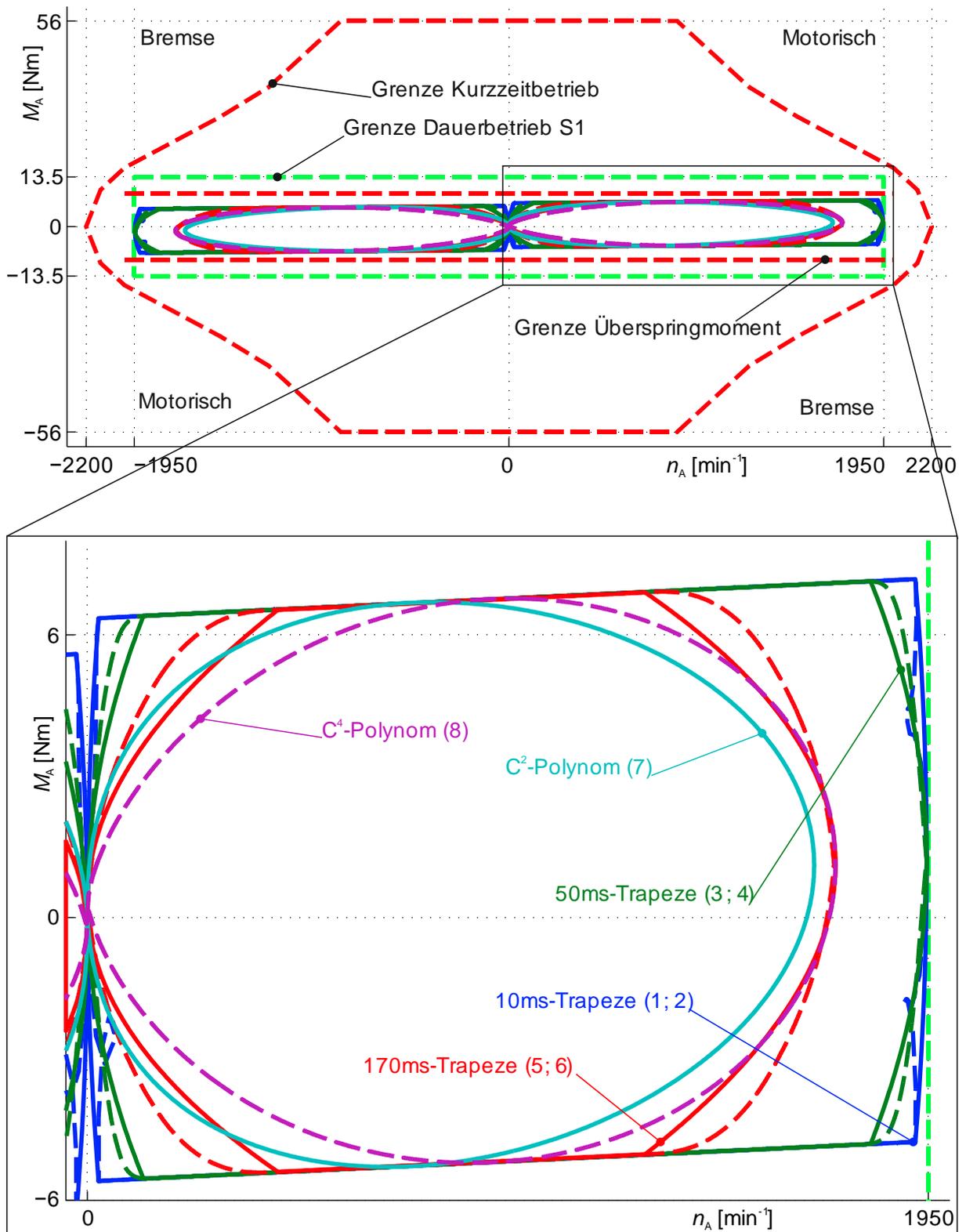


Bild 4.6: Vergleich der Trajektorien im Drehmoment-Drehzahl-Diagramm

5 Validierung der flachheitsbasierten Vorsteuerung

Im Kapitel 2.6 wurde gezeigt, wie eine Vorsteuerung basierend auf differentieller Flachheit aufgebaut wird. Im Folgenden werden die Versuchsergebnisse für die Vorsteuerungsmodelle aus Kapitel 3.5 ausgewertet. Dazu werden beispielhaft die in Kapitel 4.3 vorgestellten Trajektorien verwendet. Um unterschiedliche Systemmodelle zu betrachten, wurde der Schlitten der Linearachse mit verschiedenen Massen beladen. Zum einen wurde die maximale Schlittenmasse von 38 kg verwendet, um die nichtlineare Federkennlinie des Zahnriemens größtmöglich anzuregen. Diese Ergebnisse sind in Kapitel 5.1 dargestellt. Zum anderen wurde der Schlitten mit geringer Masse von 5 kg betrieben. Dabei wird die Positionierung einer zusätzlich am Schlitten befestigte Blattfeder mit sehr geringer Steifigkeit betrachtet. Diese Ergebnisse sind in Kapitel 5.2 dargestellt. Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum Einfluss der eingestellten Parameter befinden sich in Kap. 5.3.

5.1 Zahnriemenachse mit nichtlinearer Steifigkeitskennlinie

Die im untersuchten Versuchsprüfstand verbaute Antriebstechnik der Firma Lenze verfügt neben dem P/PI-Kaskadenregler über eine Vorsteuerung des gesamten Massenträgheitsmoments des Antriebs. Darüber hinausgehend wurde am imes bereits eine Vorsteuerung von viskoser Dämpfung und Coulombscher Reibung implementiert. Es wird im Folgenden versucht, diesen Stand der Technik durch die flachheitsbasierte Vorsteuerung zu verbessern. Die bestehende Systemmodellierung wird im weiteren Verlauf als Einmassensystem (1MS) und die Modellierung mit zwei getrennten Massen als Zweimassensystem (2MS) bezeichnet.

Das Systemmodell der 1MS-Vorsteuerung ist in Gl. (3.4), S. 22 und das Modell der 2MS-Vorsteuerung in Gl. (3.9), S. 25 dargestellt. Es werden die in [Kli13] identifizierten Systemparameter benutzt, die in Tabelle 5.1 angegeben sind. Bei der Berechnung der Coulombschen Reibung wird die Näherung in Gl. (5.1) benutzt, um einen stetigeren Verlauf des Drehmoments zu erhalten.

$$\hat{\mu}_C \cdot \text{sgn}(x_2) \approx \hat{\mu}_C \cdot \frac{2}{\pi} \arctan(10 \cdot x_2) \quad (5.1)$$

Die Daten der Steifigkeitskennlinie werden wie in Kapitel 3.4 dargestellt gewählt. Die Riemendämpfung d wird im weiteren Verlauf vernachlässigt (siehe Kap. 5.6).

Tabelle 5.1: Einstellparameter der Vorsteuerung mit $m_L=38$ kg

Größe	Formelzeichen	Wert
Viskose Dämpfung der Antriebsseite	\hat{d}_v	$4 \cdot 10^{-3} \text{ Nms rad}^{-1}$
Riemendämpfung	d	0 Nms rad^{-1}
Coulombsche Reibung der Antriebsseite	$\hat{\mu}_c$	$0,375 \text{ Nm}$
Massenträgheitsmoment des Antriebs	\hat{J}_1	$12,6 \text{ kgcm}^2$
Massenträgheitsmoment des Schlittens	$\hat{J}_2 = \hat{m}_2 \cdot r^2$	$97,3 \text{ kgcm}^2$
Rotatorische Gesamtsteifigkeit	$\hat{k}(k_{\text{spez}}, l_0, l_1, x_3)$	$165 \dots 1150 \text{ Nm} \cdot \text{rad}^{-1}$
Maximale Geschwindigkeit	v_{max}	$3,26 \text{ ms}^{-1}$
Beschleunigungsmoment	M_B	6 Nm
Maximale Beschleunigung	a_{max}	$8,76 \text{ ms}^{-2}$

In den Versuchen werden Rast-Rast-Trajektorien zwischen den Schlittenpositionen 100 mm und 1600 mm untersucht. Bisher stehen dazu nur Polynomtrajektorien (bis c^3 -stetig) und Beschleunigungs-Trapezprofile (c^2 -stetig) sowie Sinoid-Profile (bis c^1 -stetig) zur Verfügung (siehe [Len13a]). Die in dieser Arbeit eingesetzten c^4 -Trapezprofile erweitern damit ebenfalls den Stand der Technik.

Zur Beurteilung des Vorsteuerungsergebnisses wird die Positionierzeit T_p als Kriterium gewählt. Dabei wird der Positioniervorgang als beendet betrachtet, wenn die lastseitige Geschwindigkeit ein Toleranzband $y_{4,\text{tol}}$ von 5 mms^{-1} nicht mehr verlässt (Gl. (5.2)). Dies entspricht einem Positionierfehler von ca. 200 μm . In der Ausschwingphase treten Reglerschwingungen mit einer Frequenz von ca. 7 Hz auf. Damit stehen Positions- und Geschwindigkeitsamplitude ungefähr im Verhältnis $2\pi \cdot 7$ Hz.

Der Wert für $y_{4,\text{tol}}$ wird so gewählt, dass die Unterschiede zwischen den zu vergleichenden Vorsteuerungen möglichst deutlich hervortreten. Die Grenze entspricht 0,01 % des Sprungs der Sollposition von 1,5 m und 0,15 % der maximalen Geschwindigkeit.

$$|y_4(t)| \leq y_{4,\text{tol}} \quad \forall t > T_p \quad (5.2)$$

Die Positionierzeit T_p setzt sich gem. Gl. (5.3) aus der vorsteuerungsunabhängigen Transitionszeit (Trajektoriendauer) T_D und der Beruhigungsdauer T_B zusammen.

$$T_p = T_D + T_B \quad (5.3)$$

Da die wesentliche Aufgabe der Vorsteuerung die Entlastung des Reglers darstellt, wird zusätzlich die Betragsabweichung des Drehmoments während der Beruhigungsphase gem. Gl. (5.4) betrachtet. Dazu wird zur Vergleichbarkeit unterschiedlicher Versuche ein Auswertungszeitraum von $T_A=300$ ms betrachtet.

$$K_M = \frac{1}{T_A} \int_{T_D}^{T_D+T_A} |M_A(t)| dt \quad (5.4)$$

Die Position des Schlittens wird wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben mit dem Lasertracker gemessen. Bild 3.6 (S. 18) zeigt den Versuchsaufbau. Die Geschwindigkeit des Schlittens wird durch numerische Differentiation berechnet.

5.1.1 Trapezprofil mit minimaler Transitionszeit

Bild 5.1 zeigt drei Vorsteuerungen im Vergleich für ein Trapezprofil mit Verschleißzeit der Beschleunigung Σ_{V_2} von 10 ms. Es wird eine Einmassensystem-Vorsteuerung mit \mathcal{C}^2 -Trapeztrajektorie („1MS- \mathcal{C}^2 “) in blau, mit \mathcal{C}^4 -Trapeztrajektorie („1MS- \mathcal{C}^4 “) in grün und eine Zweimassensystem-Vorsteuerung mit \mathcal{C}^4 -Trapeztrajektorie („2MS- \mathcal{C}^4 “) in rot gezeichnet.

Im oberen Bereich des Bildes sind die Messwerte von Position (y_1), Geschwindigkeit (y_2) und Drehmoment (M_A) der Antriebsseite über der Zeit gezeichnet. Der Anfahrbereich ist links oben vergrößert dargestellt. Unten ist die Beruhigungsphase des Schlittens gezeichnet. Dabei wird der Positionsverlauf (y_3) und der Geschwindigkeitsverlauf (y_4) des Schlittens (Lastseite) angegeben.

Der durchschnittliche Betrag des Drehmoments in der Ruhephase ist bei der flachheitsbasierten 2MS- \mathcal{C}^4 -Vorsteuerung gegenüber der 1MS- \mathcal{C}^2 -Vorsteuerung um 0,07 Nm bzw. 15 % niedriger. Der Toleranzbereich für das Beruhigen der Schlittenmasse wird 30 ms schneller erreicht. Dies entspricht einer Verkürzung der Beruhigungsdauer um 9 % bzw. eine Verkürzung der Positionierdauer um 3 %. Die Positionierdauer der 1MS- \mathcal{C}^2 -Vorsteuerung wird mit T_{P1} und die der 2MS- \mathcal{C}^4 -VS. mit T_{P2} im Bild angegeben. Die Werte der Auswertungskennzahlen sind in Tabelle 5.2, S. 55 angegeben.

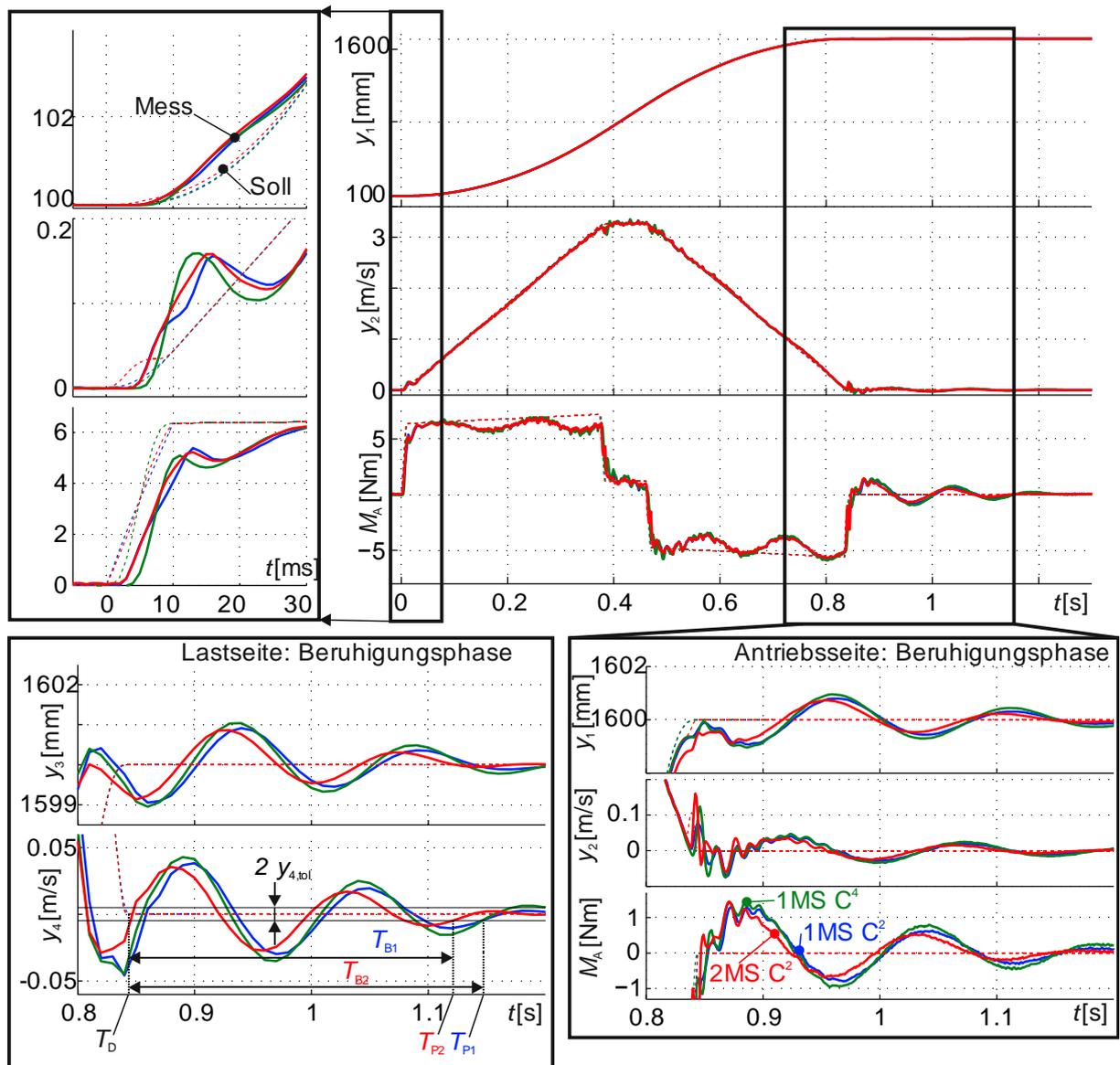


Bild 5.1: Vergleich von Vorsteuerungen mit 10 ms-Trapez-Trajektorie

Die gezeichneten Linien stellen den Mittelwert über mehrere Wiederholungen der Versuchsdurchführung dar. Die Wiederholgenauigkeit der Versuche beträgt im Positionsverlauf mindestens 200 μm und im Drehmomentverlauf mindestens 0,2 Nm. Bei ca. einem Fünftel der Versuchswiederholungen tritt eine deutliche Verschlechterung der Ergebnisse mit stärkeren Schwingungen bis hin zum Überspringen des Zahnriemens auf. Dies ist auf Haftreibungseffekte und den Verschleiß des Prüfstands zurückzuführen. Entsprechende Ausreißer werden bei der Auswertung ignoriert.

5.1.2 Polynomprofil

Bild 5.2 zeigt die antriebsseitigen Vorsteuerungsergebnisse für eine C^2 -stetige Polynomtrajektorie mit 1MS-Vorsteuerung in blau sowie eine C^4 -stetige Polynomtrajektorie mit 2MS-VS in rot und mit 1MS-VS in grün (teilweise verdeckt). Die Dauer der Polynomtrajektorien wird durch das maximale Beschleunigungsmoment von 6 Nm begrenzt. Damit wird die maximal mögliche Geschwindigkeit von 3,26 m/s nicht erreicht.

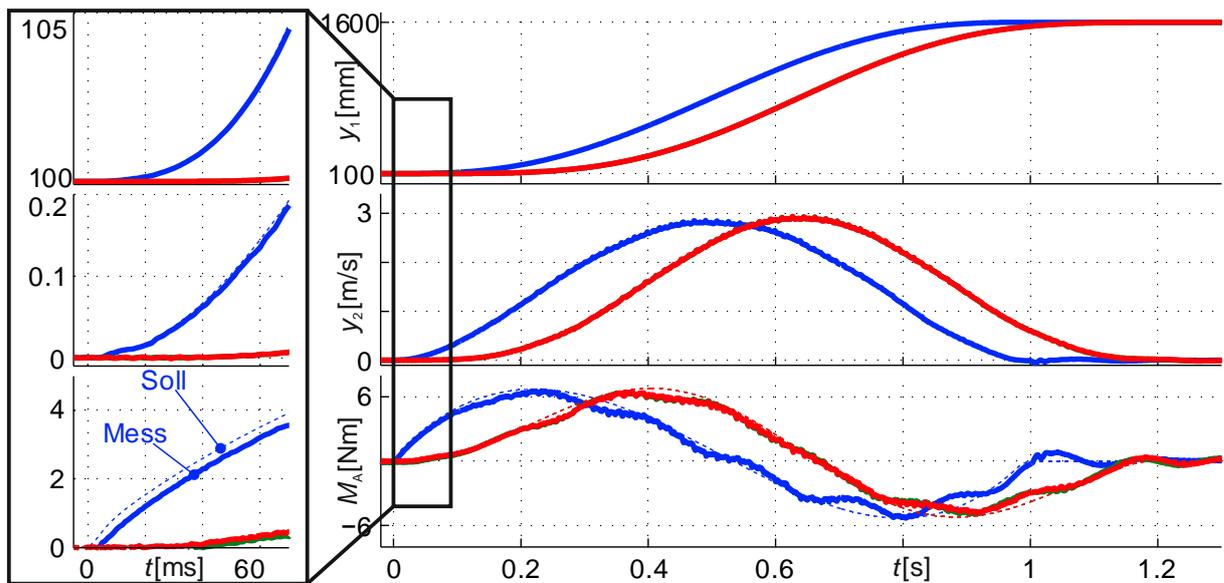


Bild 5.2: Ergebnisvergleich mit Polynomtrajektorie; Antriebsseite

In Bild 5.3 ist zu erkennen, dass die C^4 -VS eine deutlich geringere Beruhigungsdauer T_B als die C^2 -VS aufweisen. Da die Transitionszeit T_D jedoch deutlich länger ist, ist die Positionierung mit C^2 -VS schneller als die der flachheitsbasierten 2MS- C^4 -VS. Der Regler wird durch die flachheitsbasierte Vorsteuerung deutlich entlastet: Der Stelleingriff des Reglers ist im Mittel nach Gl. (5.4) um 55 % geringer.

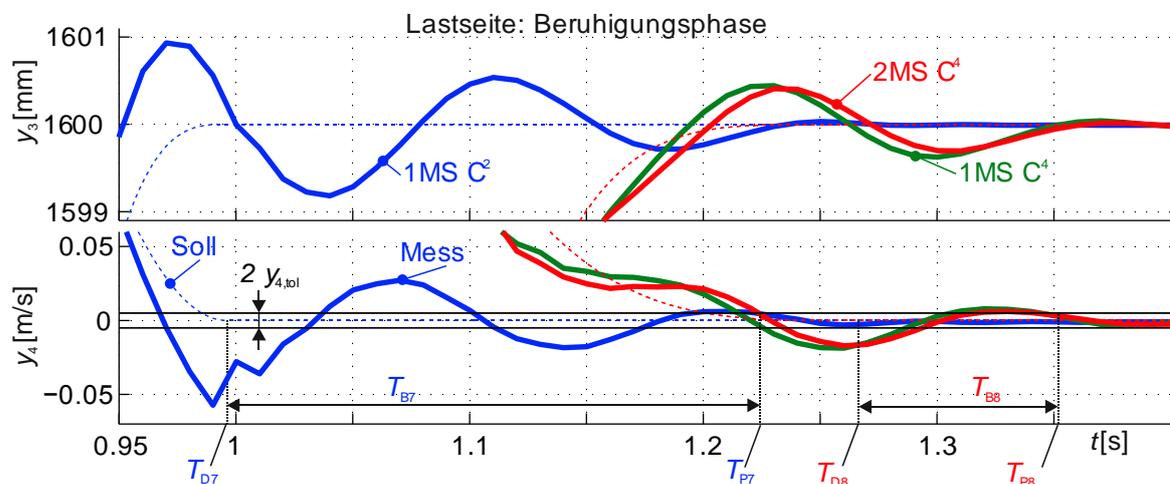


Bild 5.3: Ergebnisvergleich mit Polynomtrajektorie; Lastseite

5.1.3 Trapez-Profil mit langsamer Transitionszeit

In Bild 5.4 sind die Ergebnisse für ein Trapezprofil mit sehr langer Verschleißzeit der Beschleunigung Σ_{v_2} von 170 ms dargestellt. Die Beschleunigung wird damit nur langsam aufgebaut und die maximal mögliche Geschwindigkeit gar nicht erreicht. Im Gesamtverlauf der antriebsseitigen Größen ist zu erkennen, dass die C^4 -Vorsteuerungen beim Erreichen ihrer Endgeschwindigkeit bereits deutlich stärker schwingen als die C^2 -Vorsteuerung. Dies ist damit zu erklären, dass die Geschwindigkeit der C^4 -Vorsteuerungen nur schwach ansteigt und somit am Anfang ein Haft-Gleit-Effekt (engl. „Stick-Slip“) eintritt, der zu Schwingungen des Regelkreises führt.

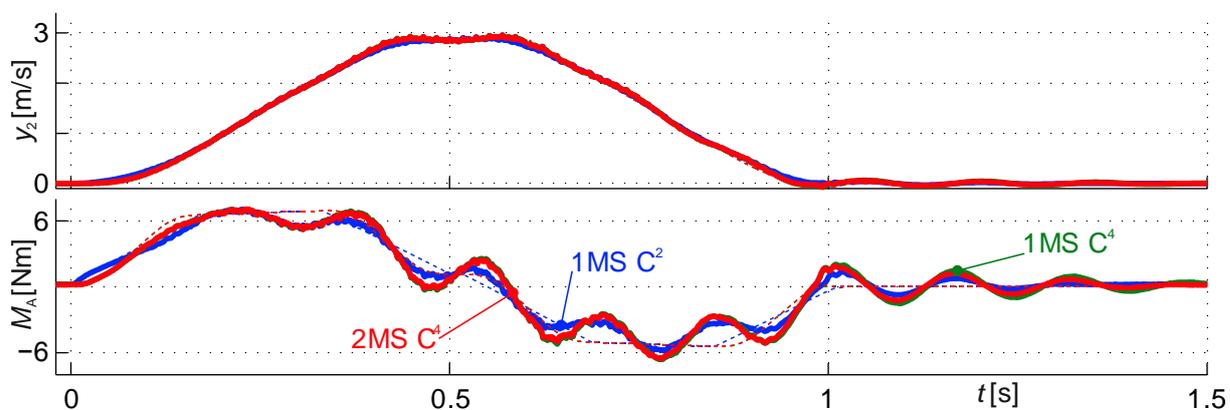


Bild 5.4: Ergebnisvergleich mit 170 ms-Trapeztrajektorie; Antriebsseite

Die flachheitsbasierte Vorsteuerung („2MS- C^4 “) führt damit bei langsamen Trajektorien und Systemen mit großem Haftreibungseinfluss zu keiner Verbesserung. Dies wird im Verlauf der lastseitigen Geschwindigkeit (y_4) in der Beruhigungsphase in Bild 5.5 deutlich.

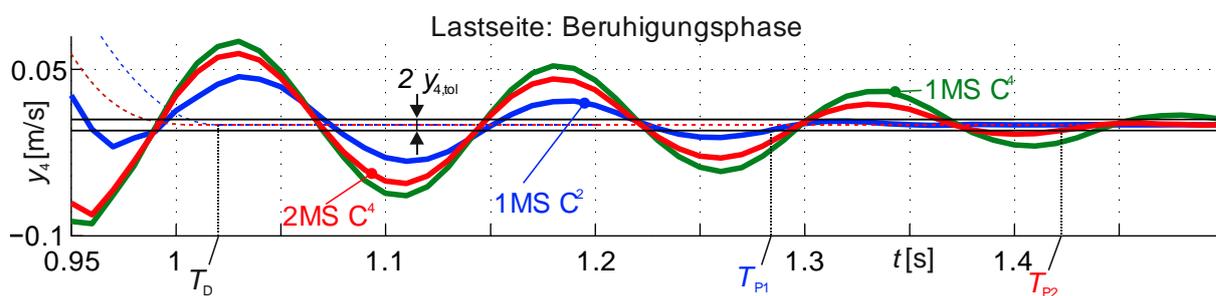


Bild 5.5: Ergebnisvergleich mit 170 ms-Trapeztrajektorie; Lastseite

5.1.4 Ergebnisübersicht

Zusätzlich zu den obigen Ergebnissen befindet sich im Anhang A.3.1 eine Übersicht der Ergebnisse für eine 50 ms-Trapeztrajektorie. Die Ergebnisse entsprechen qualitativ denen der 10 ms-Trapeztrajektorie. Eine Übersicht über die Auswertungswerte aller Versuche befindet sich in Tabelle 5.2.

Tabelle 5.2: Versuchsergebnisse mit unterschiedlichen Trajektorien und Vorsteuerungsmodellen mit $m_L=38$ kg

Nr.	Trajektorie und Vorsteuerung	Transitionszeit T_D [ms]	Beruhigungsdauer T_B [ms]	Positionierzeit T_P [ms]	Drehmoment K_M [Nm]
1	C^2 -Trapez (10 ms) mit 1MS	844	333	1177	0,48
2	C^4 -Trapez (10 ms) mit 2MS	844	303	1143	0,41
3	C^2 -Trapez (50 ms) mit 1MS	884	243	1127	0,29
4	C^4 -Trapez (50 ms) mit 2MS	884	213	1101	0,25
5	C^2 -Trapez (170 ms) mit 1MS	1020	257	1277	0,40
6	C^4 -Trapez (170 ms) mit 2MS	1020	400	1420	0,67
7	C^2 -Polynom mit 1MS	995	220	1215	0,25
8	C^4 -Polynom mit 2MS	1268	90	1358	0,11

Bis auf die 170 ms-Trapeztrajektorie weist die flachheitsbasierte 2MS-Vorsteuerung durchgängig ein besseres Positionierverhalten als die 1MS-Vorsteuerung auf, die den bisherigen Industriestandard darstellt. Die quantitative Verbesserung wird in Tabelle 5.3 zusammengefasst und gem. Gl. (5.5) bezogen auf die 2MS- C^2 -Vorsteuerung berechnet.

$$\Delta_{\text{rel}} T_P = \frac{T_{P,1MS,C^2} - T_{P,2MS,C^4}}{T_{P,1MS,C^2}} \quad (5.5)$$

Tabelle 5.3: Verbesserung durch die flachheitsbasierte Vorsteuerung mit $m_L=38$ kg

Nr.	Trajektorie	Beruhigungsdauer $\Delta_{\text{rel}} T_B$	Positionierzeit $\Delta_{\text{rel}} T_P$	Drehmomentabweichung $\Delta_{\text{rel}} K_M$
1; 2	10 ms Trapez	9 %	3 %	15 %
3; 4	50 ms Trapez	12 %	3 %	15 %
5; 6	170 ms Trapez	-54%	-11 %	-68 %
7; 8	Polynom	77 %	-8 %	55 %

Die Schwingungsamplituden des C^2 -Polynomprofils sind durch den Einsatz der flachheitsbasierten Vorsteuerung mit einem Trapezprofil bei geringerer Positionierzeit erreichbar.

Die bei der flachheitsbasierten Vorsteuerung um 3 % verkürzte Positionierzeit ist angesichts des erhöhten Aufwandes beim Vorsteuerungsentwurf gering. Angesichts der zu erwartenden geringen Kosten der rein softwareseitigen Implementierung der flachheitsbasierten Vorsteuerung (FVS) ist anzunehmen, dass der Einsatz der FVS wirtschaftlich lohnend ist.

Im Vergleich der drei untersuchten Vorsteuerungen ist die Einmassen-Vorsteuerung mit C^4 -stetiger Trajektorie jeweils am schlechtesten. Die alleinige Erhöhung der Stetigkeitsordnung einer Trajektorie verbessert das Verhalten von Systemen mit elastischem Antriebsstrang also nicht automatisch.

Ausgehend von der bisher standardmäßig eingesetzten Einmassen-Vorsteuerung mit C^2 -stetiger Trajektorie wird das vorgesteuerte Drehmoment bei Verwendung einer C^4 -stetigen Trajektorie zu Beginn der Ruckphase zunächst verringert und am Ende der Ruckphase erhöht. Um die Nachgiebigkeit des Systems in der Vorsteuerung korrekt zu kompensieren, muss das Drehmoment in der Ruckphase dagegen zuerst erhöht und dann verringert werden (siehe dazu Bild 4.5 auf S. 46). Durch die stetigere Trajektorie wird das Vorsteuerungsmoment also zunächst in die falsche Richtung beeinflusst, was zu einer geringeren Regelgüte führt. Zusätzlich steigt durch die geringere Geschwindigkeit am Anfang bei C^4 -Trajektorien die Anfälligkeit für Schwingungsanregungen durch Haft-Gleit-Reibung. Erst durch die Berücksichtigung der Nachgiebigkeit in der flachheitsbasierten Vorsteuerung wird eine Verbesserung der Regelgüte erreicht.

In diesem Versuch wurde der Schlitten mit maximaler Masse betrieben. Bei geringeren Massen ist die erreichte Verbesserung geringer, da der Antrieb weniger zu Schwingungen angeregt wird.

Die nur geringe Verbesserung der Ergebnisse hat ihre Ursache in der sehr hohen Zahnriemensteifigkeit des Versuchsprüfstands. Für Systeme mit geringeren Steifigkeiten, etwa längeren Linearachsen, sind stärkere Verbesserungen zu erwarten. Dies wird im folgenden Kapitel beschrieben.

5.2 Zahnriemenantrieb mit Blattfeder und Zusatzmasse

Zur Auswertung der flachheitsbasierten Vorsteuerung für ein Antriebssystem mit sehr großer Elastizität wird eine Blattfeder mit Zusatzmasse am Schlitten des Versuchsprüfstandes befestigt. Die flache Vorsteuerung wird nun für die Positionierung der Zusatzmasse ausgelegt. Der Aufbau ist in Bild 5.6 dargestellt.

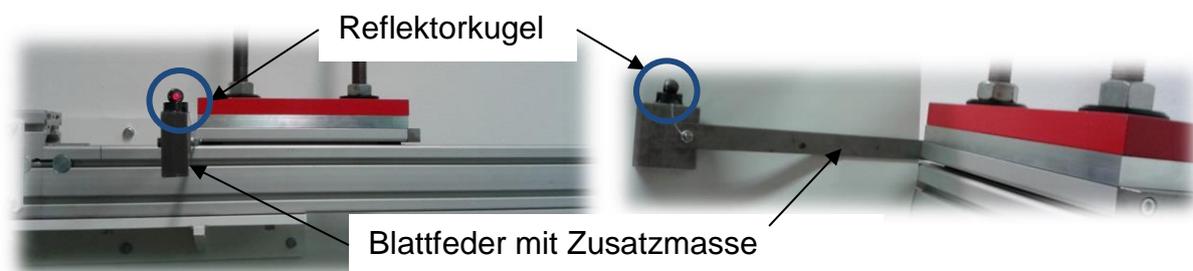


Bild 5.6: Versuchsaufbau der Linearachse mit Blattfeder und Zusatzmasse

Um einen möglichst großen Einfluss der Zusatzmasse auf die Vorsteuerung zu erhalten wird eine geringe Schlittenmasse von 5 kg gewählt. Somit sind bei einem Drehmoment von 5 Nm Beschleunigungen von mehr als 3 g möglich. Die Parameter des Systems sind in Tabelle 5.4 angegeben.

Tabelle 5.4: Einstellparameter der Vorsteuerung mit $m_L=5$ kg und Zusatzmasse

Größe	Formelzeichen	Wert
Viskose Dämpfung der Antriebsseite	\hat{d}_v	$4 \cdot 10^{-3} \text{ Nms} \cdot \text{rad}^{-1}$
Coulombsche Reibung der Antriebsseite	$\hat{\mu}_C$	0,375 Nm
Massenträgheitsmoment des Antriebs	\hat{J}_1	12,6 kgcm ²
Massenträgheitsmoment des Schlittens	$\hat{J}_2 = \hat{m}_2 \cdot r^2$	12,8 kgcm ²
Rotatorische Riemensteifigkeit	$\hat{k}_1(k_{\text{spez}}, l_0, l_1, x_3)$	165... 1150 Nm·rad ⁻¹
Rotatorische Steifigkeit der Blattfeder	$\hat{k}_{2,r} = \hat{k}_{2,t} \cdot r^2$	0,183 Nm·rad ⁻¹
Zusatzmasse an der Blattfeder	\hat{m}_3	0,360 kg
Massenträgheitsmoment der Zusatzmasse bezogen auf Antrieb	$\hat{J}_3 = \hat{m}_3 \cdot r^2$	0,92 kgcm ²
Maximale Geschwindigkeit	v_{max}	3,26 ms ⁻¹
Beschleunigungsmoment	M_B	5 Nm
Maximale Beschleunigung	a_{max}	31,5 ms ⁻²

Die eingesetzte Blattfeder hat eine sehr geringe Steifigkeit $\hat{k}_{2,t}$ von ca. 716 Nm^{-1} , die durch eine Ermittlung der Eigenfrequenz bestimmt wurde (siehe Anhang A.2.2). Eine Modellierung der Blattfeder mit verteilten Parametern wird nicht vorgenommen, da die Zusatzmasse wesentlich größer als die Masse der Feder ist und somit ein Schwingungsmodus dominiert. Da die Feder mit einem Dämpfungsmaß von ca. 0,02 sehr schwach gedämpft ist, wird die Zusatzmasse zwischen wiederholten Messungen händisch festgehalten, damit keine gegenseitige Beeinflussung der Wiederholungen stattfindet.

Als einfachstes Vorsteuerungsmodell wird die Einmassensystem-Vorsteuerung (1MS) nach Gl. (3.4) eingesetzt, bei der alle Massenträgheiten zusammengefasst werden. Für eine Zweimassensystem-Vorsteuerung (2MS) nach Gl. (3.7) wird die Riemenelastizität vernachlässigt, da die Nachgiebigkeit der Zusatzfeder sehr viel größer als die des Zahnriemens ist. Die Motorträgheit J_1 wird dann mit der Schlitten-trägheit J_2 zur Antriebsträgheit J_A zusammengefasst. Es wird nur die lineare Elastizität der Blattfeder verwendet. Als vollständiges Modell wird die Dreimassensystem-Vorsteuerung (3MS) nach Gl. (3.11) mit nichtlinearer Federkennlinie \hat{k}_1 verglichen.

5.2.1 Bewertung der Dreimassen-Vorsteuerung

Bild 5.7 zeigt die antriebsseitigen Messwerte für vier unterschiedliche Vorsteuerungen mit einer 77 ms-Trapeztrajektorie (Σ_{V2}): 1MS- c^2 (blau), 2MS- c^4 (grün), 2MS- c^6 (rot) und 3MS- c^6 (türkis). Die Verschleißzeiten der c^4 -Trajektorie wurden mit [40;20;17] ms bzw. der c^6 -Trajektorie mit [40;20;10;5;2] ms so gewählt, dass möglichst ein trapez- und nicht dreieckförmiger Verlauf aller Ableitungsgrößen entsteht.

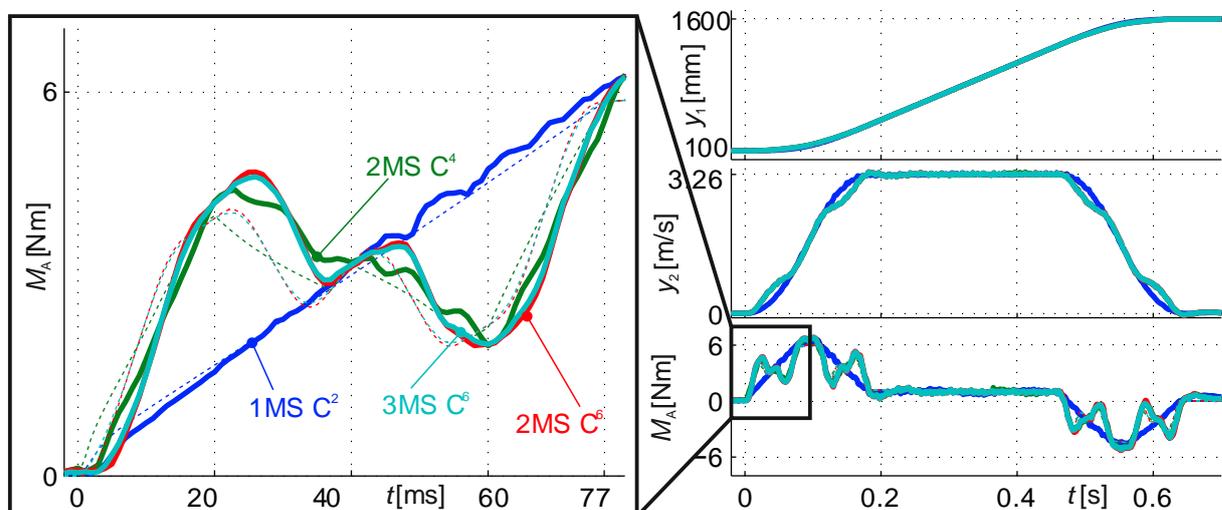


Bild 5.7: Ergebnisvergleich mit 77 ms-Trapeztrajektorie und Zusatzmasse; Antrieb

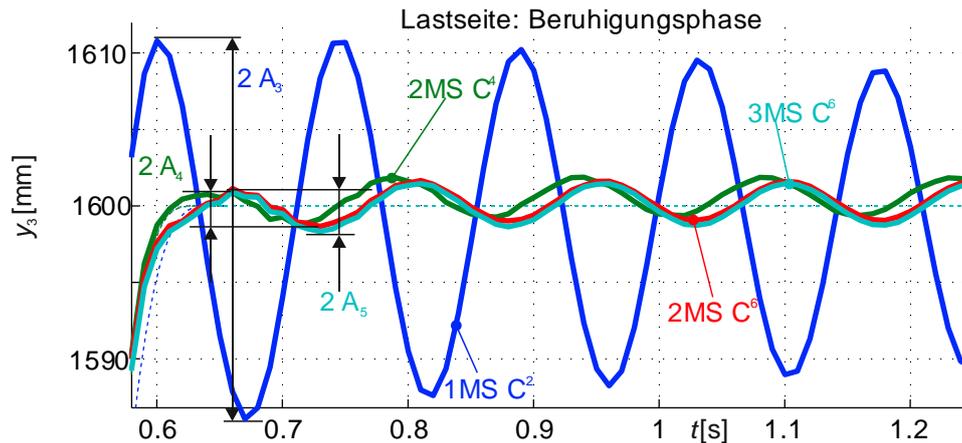


Bild 5.8: Ergebnisvergleich mit 77 ms-Trapeztrajektorie und Zusatzmasse; Lastseite

In Bild 5.8 ist das Ausschwingverhalten der Position der Zusatzmasse dargestellt, das mit dem Lasertracker aufgenommen wurde.

Die Schwingung ist nahezu ungedämpft, da der Schlitten aufgrund der geringen Rückwirkung der Feder auf die Antriebsseite den Bereich der Haftreibung nicht verlässt und kein Eingriff des Reglers stattfindet. Das System verliert in diesem Arbeitspunkt seine Steuerbarkeit und für die Schwingung ist allein die geringe Eigendämpfung der Blattfeder maßgeblich.

Ein Vergleich von Positionierdauern ist daher nicht sinnvoll. Stattdessen werden die in Bild 5.8 mit A_3 , A_4 und A_5 bezeichneten Anfangsamplituden der Schwingungen der Position verglichen. Durch Einsatz einer Mehrmassen-Vorsteuerung wird die Schwingungsamplitude auf ein Zehntel des Wertes mit der 1MS-Vorsteuerung reduziert. Die Zahlenwerte der Amplituden sind in Tabelle 5.5, S. 62 angegeben.

Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Mehrmassen-Vorsteuerungen liegen innerhalb ihres Streubereichs. Die Modellierung mit einem Dreimassensystem ist daher nur sinnvoll, wenn es keine das Systemverhalten stark dominierende Eigenfrequenz gibt. Für den Versuchsprüfstand ist die Steifigkeit der Blattfeder um den Faktor 1000 kleiner als die Riemensteifigkeit. Die Eigenfrequenz der Zusatzmasse ist mit ca. 6,8 Hz deutlich geringer als die Eigenfrequenz von Motor und Schlitten mit mindestens 81 Hz und dominiert das Systemverhalten. Der Einfluss des Riemens ist daher gering und zu vernachlässigen.

5.2.2 Trapezprofil mit minimaler Transitionszeit

Die Ergebnisse für eine Trapeztrajektorie mit minimaler Verschleißzeit Σ_{V_2} von 50 ms sind in Bild 5.9 dargestellt. Bei noch niedrigeren Verschleißzeiten steigen die auftretenden Kräfte weiter an, so dass es zu Überspringen des Zahnriemens kommt. Ähnlich wie in Kapitel 5.1 ist in blau eine $1MS-C^2$ -, in grün eine $1MS-C^4$ - und in rot eine $2MS-C^4$ -Vorsteuerung dargestellt. Der dreieckförmige Verlauf im Drehmoment entsteht durch die Wahl der Verschleißzeiten von [25; 13; 12] ms.

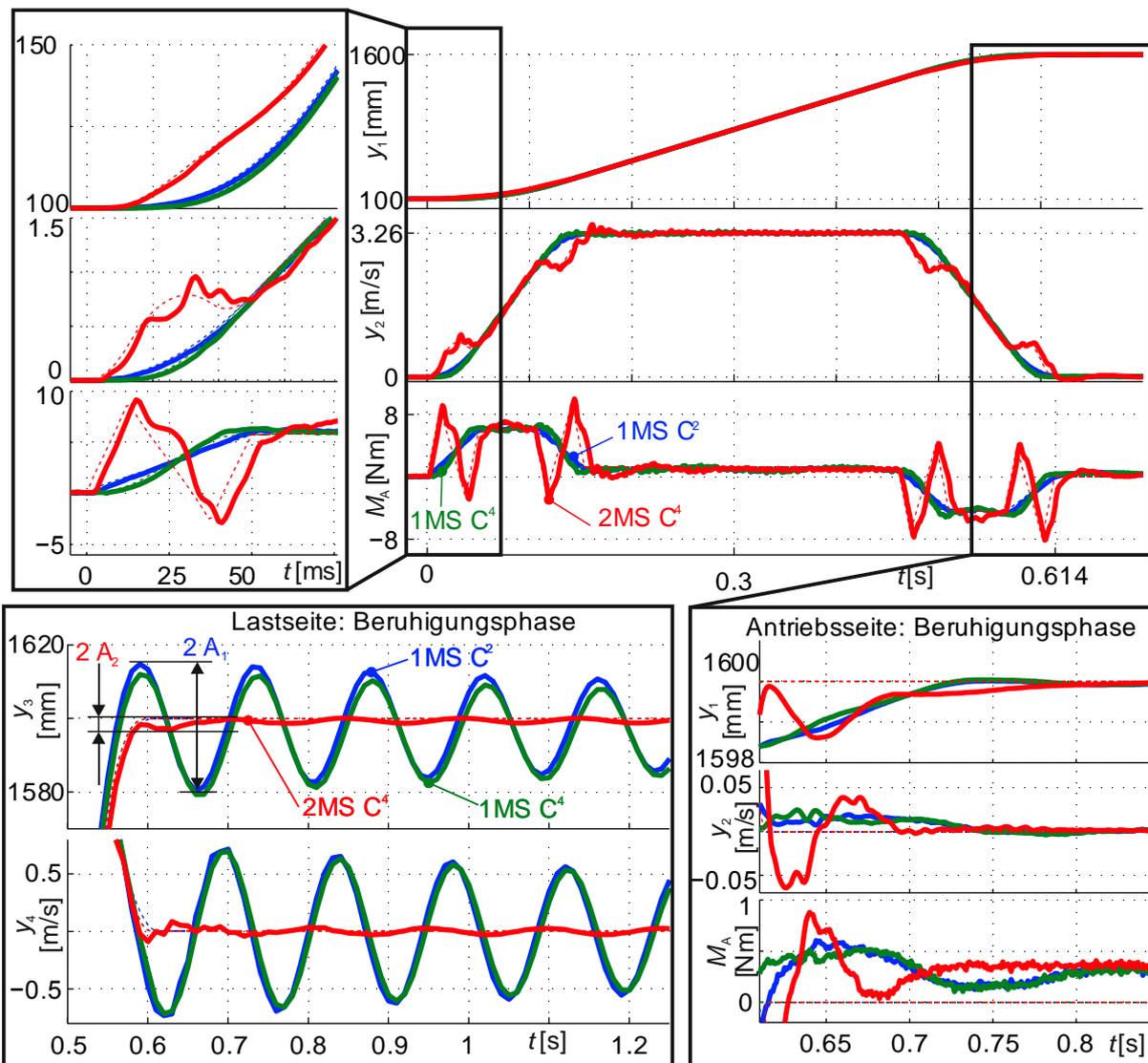


Bild 5.9: Ergebnisvergleich mit 50 ms-Trapeztrajektorie und Zusatzmasse

Die Schwingungsamplitude A_1 des lastseitigen Positionsverlaufs (y_3) der $1MS-C^2$ -VS ist mit 16,0 mm sehr groß. Durch die Erhöhung der Stetigkeitsordnung ($1MS-C^4$ -VS) tritt keine Verbesserung ein. Mit einer Amplitude A_2 der $2MS-C^4$ -VS von 0,8 mm wird eine deutliche Verbesserung mit der flachheitsbasierten Vorsteuerung erreicht.

5.2.3 Polynomprofil

Bild 5.10 zeigt die Vorsteuerungsergebnisse für eine C^2 -stetige Polynomtrajektorie mit 1MS-Vorsteuerung in blau sowie eine C^4 -stetige Polynomtrajektorie mit 1MS-VS in grün und mit 2MS-VS in rot. Im Gegensatz zu den Polynomprofilen aus Kapitel 5.1.2 wird die Transitionsdauer hier durch die Maximalgeschwindigkeit von 3,26 m/s begrenzt. Das Drehmoment ist daher deutlich geringer als bei den Trapezprofilen. Der ungleichmäßige Drehmomentverlauf ist auf einen stärkeren Einfluss von Haft-Gleit-Reibung bei niedrigen Drehmomenten und Geschwindigkeiten zurückzuführen.

Im Bild ist rechts zu erkennen, dass die Zusatzmasse bei der C^4 -Trajektorie mit einer Amplitude A_9 von 0,2 mm deutlich weniger schwingt, als bei der C^2 -Trajektorie mit A_8 von 1,3 mm.

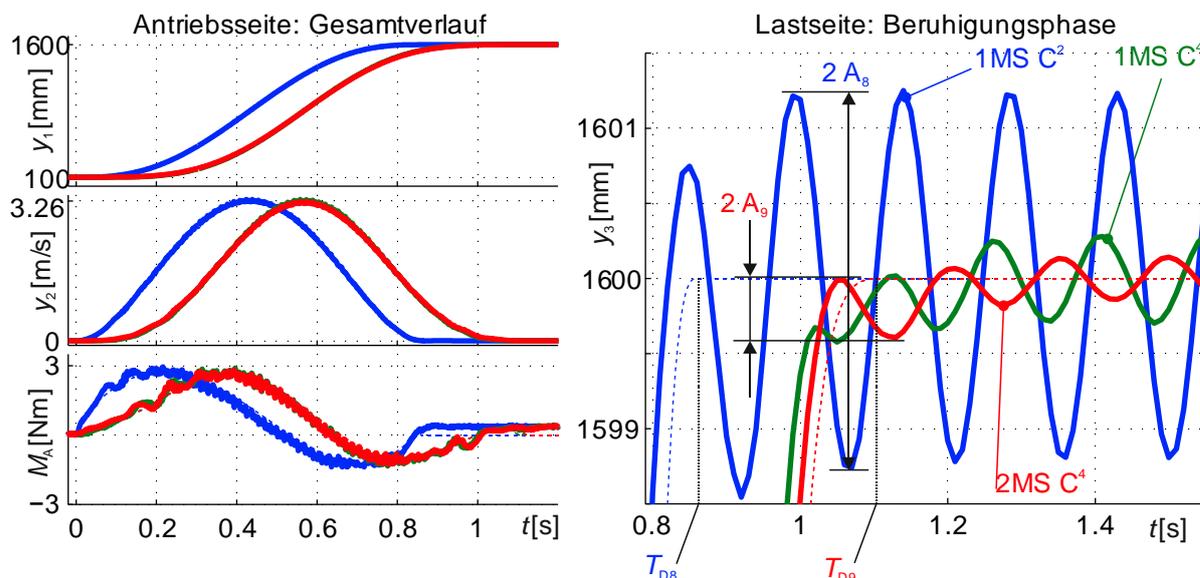


Bild 5.10: Ergebnisvergleich mit Polynomtrajektorie und Zusatzmasse

5.2.4 Ergebnisübersicht

Zusätzlich zu den oben vorgestellten Ergebnissen wurden die Versuche mit Verschleißzeit 190 ms durchgeführt. Die Ergebnisse entsprechen qualitativ denen der 50 ms-Trapeztrajektorie, die Verbesserung durch die flachheitsbasierte Vorsteuerung sinkt jedoch mit steigender Verschleißzeit, da die Zusatzmasse weniger zu Schwingungen angeregt wird und störende Effekte wie Haft-Gleit-Reibung stärker ins Gewicht fallen. Die Ergebnisse werden in Tabelle 5.5 zusammengefasst. Die relative Verkleinerung $\Delta_{\text{rel}} A_i$ der Schwingungsamplitude wird wieder bezogen auf die 1MS- C^2 -VS angegeben (siehe Gl. (5.5)).

Tabelle 5.5: Versuchsergebnisse mit unterschiedlichen Trajektorien und Vorsteuerungsmodellen mit $m_L=5$ kg und Zusatzmasse

Nr.	Trajektorie und Vorsteuerung	Transitionszeit T_D [ms]	Anfangsamplitude A_i [mm]	$\Delta_{rel}A_i$
1	C^2 -Trapez (50 ms) mit 1MS	614	16,0	
2	C^4 -Trapez (50 ms) mit 2MS	614	0,8	95%
3	C^2 -Trapez (77 ms) mit 1MS	642	11,86	
4	C^4 -Trapez (77 ms) mit 2MS	642	1,40	
5	C^6 -Trapez (77 ms) mit 3MS	642	1,39	88 %
6	C^2 -Trapez (190 ms) mit 1MS	877	3,1	
7	C^4 -Trapez (190 ms) mit 2MS	877	1,0	67 %
8	C^2 -Polynom mit 1MS	861	1,3	
9	C^4 -Polynom mit 2MS	1130	0,2	82 %

In allen durchgeführten Versuchen ist eine deutliche Verbesserung der lastseitigen Positionierung durch den Einsatz der flachheitsbasierten Vorsteuerung erkennbar. Mit einem 2MS- C^4 -Polynomprofil ist die geringste lastseitige Schwingungsamplitude möglich, allerdings mit einer sehr langen Transitionszeit. Die Schwingungsamplitude des 1MS- C^2 -Polynomprofils ist bei geringerer Transitionszeit auch durch den Einsatz von schnellen 2MS- C^4 -Trapezprofilen erreichbar.

Auf der Antriebsseite ist dagegen im Drehmoment- und Geschwindigkeitsverlauf sogar eine geringe Verschlechterung des Folgeverhaltens bei der flachheitsbasierten Vorsteuerung festzustellen. Mögliche Ursache ist hier, dass bei steigender Komplexität der Trajektorie die im I-Anteil des Reglers gespeicherte Regelabweichung steigt, was zu stärkeren Schwingungen des Regelkreises führt. Es wird also auf der Antriebsseite bewusst eine Verschlechterung in Kauf genommen, um eine Verbesserung der Lastseite zu erreichen.

5.3 Einfluss von Vorsteuerungsparametern auf die Regelgüte

Gemäß [Zei10] hat die Vorsteuerung keinen Einfluss auf die Stabilität eines Regelkreises. In der linearen Darstellung des Regelkreises wirkt die Vorsteuerung an derselben Stelle wie eine Störgröße. Der Regelfehler bei einer falsch eingestellten Vorsteuerung klingt also mit der Störgrößen-Übertragungsfunktion des Regelkreises ab (siehe Kap. 5.3.1). Das durch die Vorsteuerung veränderte Einschwingverhalten des

Systems wird im Folgenden in Kap. 5.3.2 anhand eines linearen Ein- und Zweimasenmodells gezeigt und dient als Motivation für die in den Kapiteln 5.3.3 bis 5.3.5 dargestellten Versuche zum Verhalten bei falsch eingestellter Vorsteuerung.

5.3.1 Regelkreisdarstellung mit differentieller Flachheit

Der P/PI-Kaskadenregler des Versuchsprüfstands wird als Blockstruktur in Bild 5.11 dargestellt. Zur Darstellung im Frequenzbereich wird dieser Kaskadenregler als Rückführvektor $\mathbf{k}_{R,y}^T$ bezogen auf die Differenz aus Messgröße y und Sollgröße y^* des Systemausgangs in Gl. (5.6) angegeben. Dabei wird die Laplace-Variable s für Ableitungen und Integration von anfangswertfreien Zeitfunktionen in linearen Differentialgleichungen verwendet.

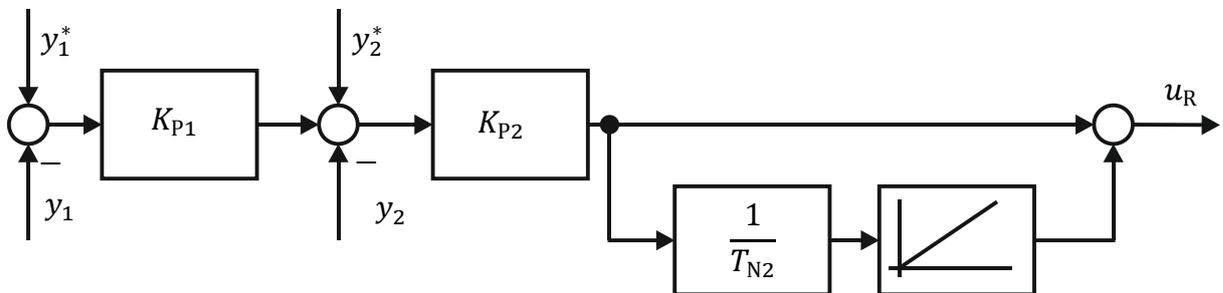


Bild 5.11: Blockstruktur des P/PI-Kaskadenreglers des Systemausgangs

$$\mathbf{k}_{R,y}^T = \left[K_{P1}K_{P2} \left(1 + \frac{1}{T_{N2}s} \right), K_{P2} \left(1 + \frac{1}{T_{N2}s} \right) \right] \quad (5.6)$$

Der gesamte Regelkreis bestehend aus Vorsteuerung, Regler und System ist in Bild 5.12 dargestellt. Das System ist dabei in den Koordinaten des flachen Ausgangs \mathbf{z} , entsprechend Kapitel 2.6.1 angegeben.

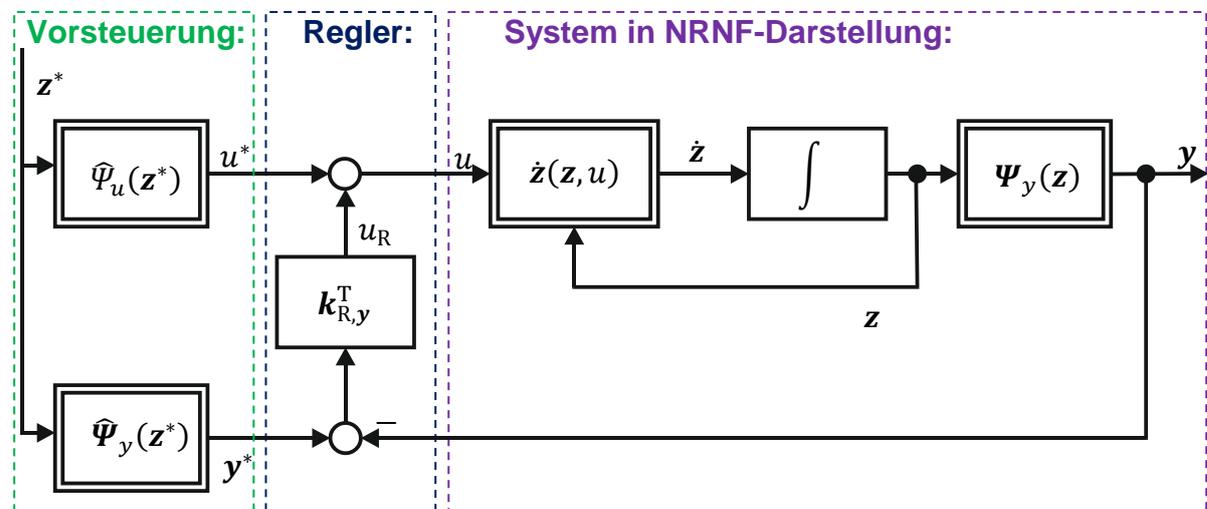


Bild 5.12: Regelkreis mit Vorsteuerung in \mathbf{z} -Koordinaten

Basierend auf dem obigen Blockschaltbild kann die Übertragungsfunktion des flachen Ausgangs $Z_1(s)$ in Abhängigkeit der Solltrajektorie $Z_1^*(s)$ für lineare Systeme im Frequenzbereich angegeben werden. Unter der Annahme eines zu Beginn energiefreien Systems können die z -Zustände gem. Gl. (5.7) in den Frequenzbereich transformiert werden.

$$z_1(t), z_2(t), z_3(t), \dots \quad \circ \text{---} \bullet \quad Z_1(s), s \cdot Z_1(s), s^2 \cdot Z_1(s), \dots \quad (5.7)$$

5.3.2 Systemverhalten bei idealer flachheitsbasierte Vorsteuerung

Die Systemdarstellung des linearen Einmassensystems aus Kapitel 3.5.1 in z -Koordinaten ist in Gl. (5.8) angegeben.

$$\Sigma_1: \quad \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{z}, u) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{\text{ges}}^{-1}(-\mu_C \cdot \text{sgn}(z_2) - d_v z_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ J_{\text{ges}}^{-1} \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (5.8)$$

$$\Psi_y(\mathbf{z}) = r \cdot [z_1, z_2]^T$$

$$\Psi_u(\mathbf{z}) = J_{\text{ges}} \cdot z_3(t) + \mu_C \cdot \text{sgn}(z_2(t)) + d_v \cdot z_2(t)$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke in das Blockschaltbild (Bild 5.12) und Transformation in den Frequenzbereich nach Gl. (5.7) entsteht die Übertragungsfunktion des Systems bezüglich des flachen Ausgangs in Gl. (5.9). Die nichtlineare Coulombsche Reibung fehlt in dieser Darstellung. Weist die Vorsteuerung in diesem Anteil einen Fehler auf, wirkt dieser Teil als Störmoment auf die Strecke.

$$\frac{Z_1(s)}{Z_1^*(s)} = \frac{\hat{J}_{\text{ges}} T_{N2} s^3 + (K_{P2} + \hat{d}_v) T_{N2} s^2 + (K_{P2} + K_{P1} K_{P2} T_{N2}) s + K_{P1} K_{P2}}{J_{\text{ges}} T_{N2} s^3 + (K_{P2} + d_v) T_{N2} s^2 + (K_{P2} + K_{P1} K_{P2} T_{N2}) s + K_{P1} K_{P2}} \quad (5.9)$$

In Gl. (5.9) ist zu erkennen, dass sich bei korrekter Parameterschätzung das Nenner- und Zählerpolynom der Übertragungsfunktion angleichen, sich die Pol- und Nullstellen damit kompensieren und das System exakt der Solltrajektorie folgt. Die mit \hat{J}_1 parametrisierte Ortskurve der Nullstellen ist in Bild 5.13 dargestellt. Die Kreuze zeigen die Polstellen der Übertragungsfunktion. Die für das Einschwingverhalten charakteristische, betragskleinste Polstelle ist im gezeigten Ausschnitt vergrößert dargestellt.

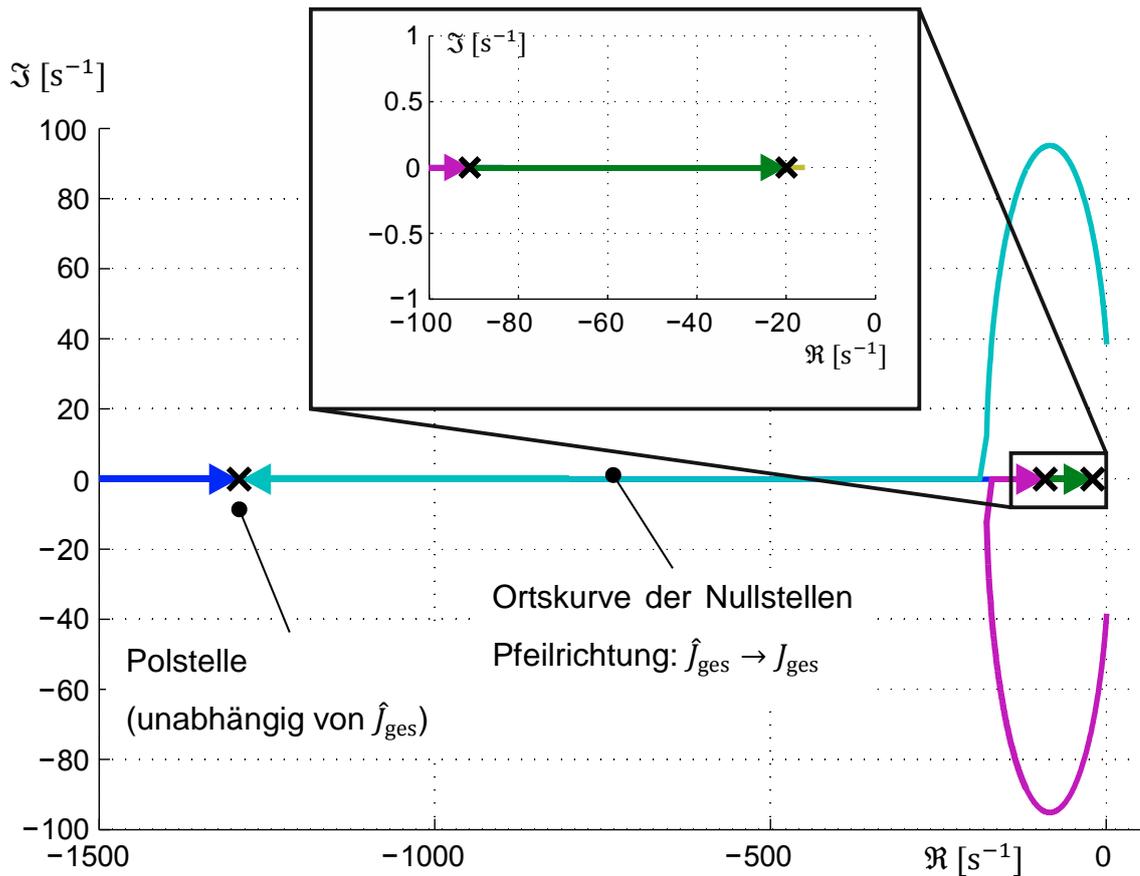


Bild 5.13: Pol- und Nullstellenortskurve für das vorgesteuerte Einmassenmodell

Für das lineare Zweimassensystem aus Abschnitt 3.5.2 mit $d=0$ führt eine analoge Vorgehensweise zur Übertragungsfunktion (ÜTF) Gl. (5.10). Die Berechnung wird durch Bezug der ÜTF auf $Z_1(s)$ anstatt $Y_1(s)$ stark vereinfacht.

$$\frac{Z_1(s)}{Z_1^*(s)} = \frac{\hat{J}_1 \hat{J}_2 s^5 + \hat{J}_{\text{ges}} s^3 + (K_{P2} + \hat{d}_v) s^2 + \left(\frac{K_{P2}}{T_{N2}} + K_{P1} K_{P2} \right) s + \frac{K_{P1} K_{P2}}{T_{N2}}}{\frac{J_1 J_2}{k} s^5 + J_{\text{ges}} s^3 + (K_{P2} + d_v) s^2 + \left(\frac{K_{P2}}{T_{N2}} + K_{P1} K_{P2} \right) s + \frac{K_{P1} K_{P2}}{T_{N2}}} \quad (5.10)$$

5.3.3 Verhalten bei falsch eingestellter Massenträgheit

Im vorherigen Kapitel 5.3.2 wurde mit einer Betrachtung der Übertragungsfunktion (ÜTF) des Regelkreises gezeigt, wie die in der Vorsteuerung eingestellten Systemparameter die Lage der Nullstellen der ÜTF verändern. Ein größerer Abstand von Pol- und Nullstellen führt zu stärkeren Schwingungen des Regelkreises. Dies wird im Folgenden anhand der Veränderung der vorgesteuerten Massenträgheit experimentell gezeigt. Bild 5.14 zeigt zunächst den Verlauf des vorgesteuerten Antriebsmoments für unterschiedliche lastseitige Massen \hat{m}_2 . Das Bild zeigt eine 10 ms- C^4 -Trapez-Trajektorie mit 2MS-Vorsteuerung bei einem Beschleunigungsmoment von 6 Nm für 26 kg Schlittenmasse. Zur Vorsteuerung wird das nichtlineare Modell aus Kap. 3.5.3 verwendet. Ansonsten gelten die Werte aus Tabelle 5.1, S. 50.

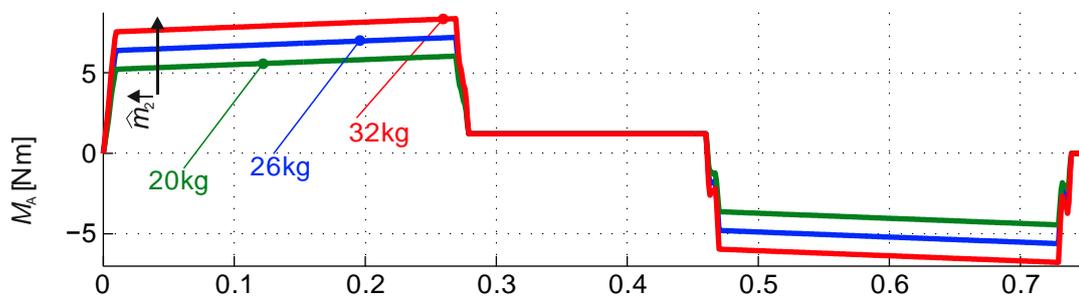


Bild 5.14: Beeinflussung des Vorsteuermoments durch Variation der Masse

In Bild 5.15 werden Messwerte für antriebsseitige Geschwindigkeit (y_2) und Drehmoment (M_A) sowie die lastseitige Geschwindigkeit (y_4) in der Beruhigungsphase dargestellt. Neben der Vorsteuerung aus Bild 5.14 (links in Bild 5.15) werden die Ergebnisse für die entsprechende 1MS- C^2 -Vorsteuerung rechts in Bild 5.15 dargestellt.

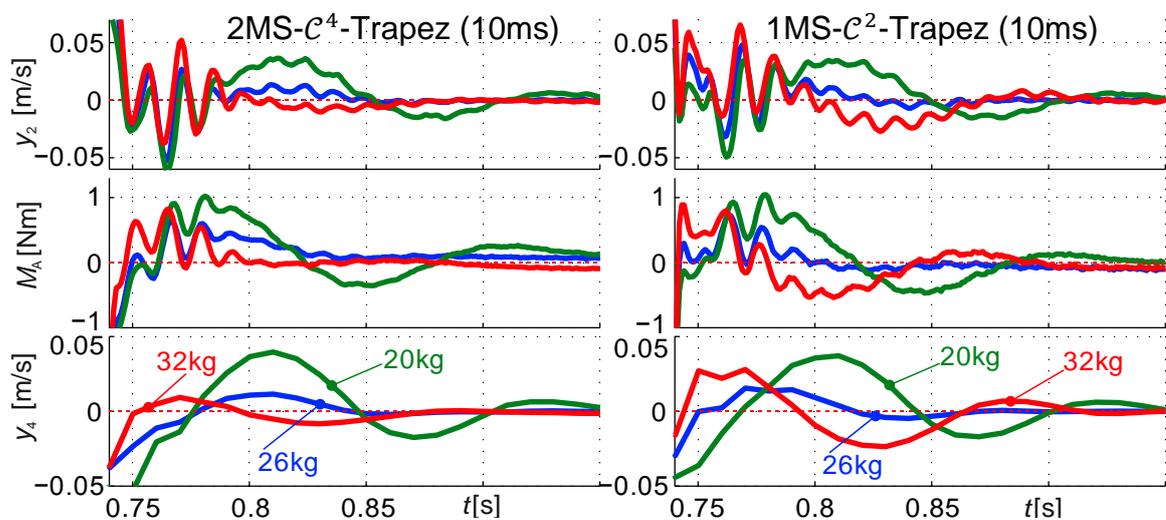


Bild 5.15: Auswirkung der Veränderung der vorgesteuerten Masse

Die Auswirkungen der falsch eingestellten Masse auf die 2MS-Vorsteuerung sind ähnlich wie auf die 1MS-Vorsteuerung: Die um 23 % zu niedrig (20 kg) oder zu hoch (32 kg) eingestellte Masse bewirken dabei jeweils eine größere Amplitude der Reglerschwingungen. Die Phasenlage der Schwingungen ist verschoben. Je nach eingestellter Vorspannkraft führen noch größere Abweichungen der Masse zu Überspringen des Zahnriemens.

5.3.4 Verhalten bei falsch eingestellter Riemensteifigkeit

Bild 5.16 zeigt links den Verlauf des vorgesteuerten Antriebsmoments für falsch eingestellte Riemensteifigkeiten. Dabei wird der Wert $\hat{k}_{\text{spez}}=650 \text{ kN}$ als Referenzwert („100 %“) verwendet und um 50 % zu klein oder zu groß eingestellt. Bei zu groß eingestellter Steifigkeit entspricht die Vorsteuerung stärker der eines Einmassensystems mit der selben Trajektorie („1MS- C^4 “). Zur Abgrenzung wird die 1MS-VS mit C^2 -Trajektorie zusätzlich verglichen.

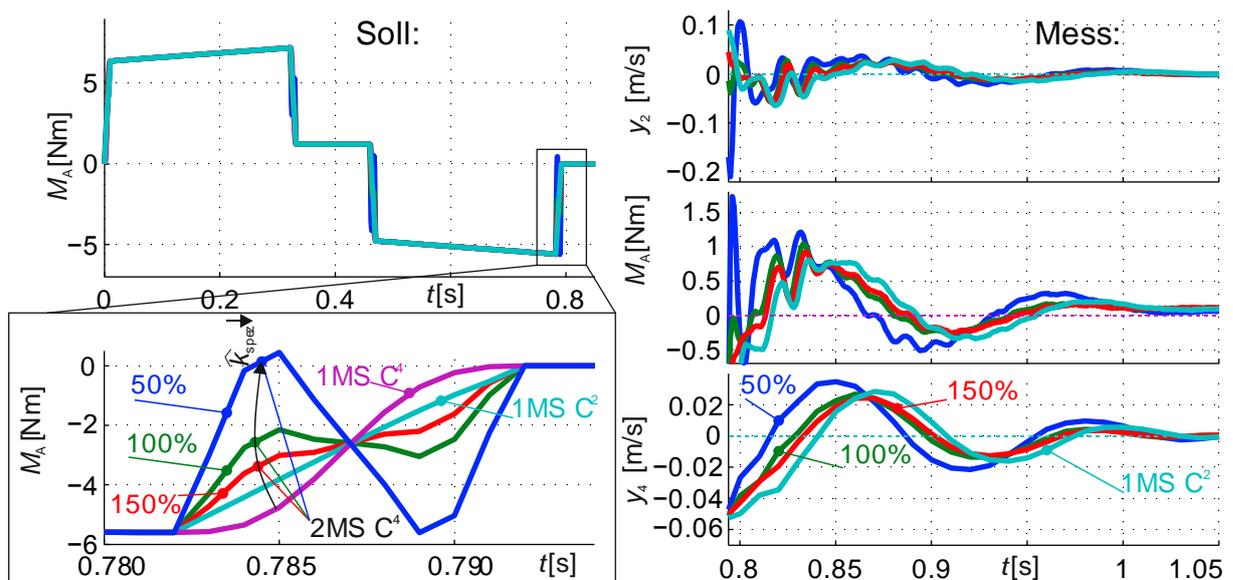


Bild 5.16: Auswirkung der Veränderung der vorgesteuerten Riemensteifigkeit

Im Bild 5.16 ist rechts erkennbar, wie die falsch eingestellte spezifische Riemensteifigkeit das Positionierverhalten verändert. Bei einer zu gering eingestellten Steifigkeit („50 %“) wird diese im Drehmoment stärker vorgesteuert, was den Regelkreis zu stärkeren Schwingungen anregt. Die negativen Auswirkungen einer zu hoch eingestellten Steifigkeit („150 %“) sind dagegen geringer. Für die Einstellung einer Vorsteuerung bei nicht identifizierten Systemparametern sollten also zunächst zu große Steifigkeiten gewählt und diese iterativ verringert werden.

5.3.5 Verhalten bei falsch eingestellter Blattfedersteifigkeit

Die Auswirkungen einer zu groß eingestellten Blattfedersteifigkeit in den Versuchen aus Kap. 5.2 werden in Bild 5.17 anhand einer 50 ms- \mathcal{C}^4 -Trapeztrajektorie gezeigt. Links sind die antriebsseitigen Messungen der gesamten Trajektorie und rechts die lastseitigen Messungen der Beruhigungsphase dargestellt. Eine Abweichung der Blattfedersteifigkeit hat tendenziell größere Auswirkungen als die Abweichung der Riemensteifigkeit, da die Schwingungen der Feder nicht durch den Regler gedämpft werden. Die türkis gezeichneten Schwingungen der 1MS- \mathcal{C}^4 -Vorsteuerung stellen eine Obergrenze für die falsch eingestellte Steifigkeit dar. Mit zunehmender Annäherung der Steifigkeit \hat{k} an den in Kap. A.2.2 identifizierten Wert („100 %“) nimmt die Schwingungsamplitude um bis zu 95 % ab. Die Berücksichtigung der Federsteifigkeit in einer 2MS-Vorsteuerung hat bereits bei einem um den Faktor 2 zu groß eingestellten Wert („200 %“) eine Verringerung der Schwingungsamplitude um 44 % gegenüber der 1MS-Vorsteuerung zur Folge.

Eine zu klein eingestellte Steifigkeit hat noch größere Schwingungsamplituden zur Folge, die allerdings aufgrund der hohen Beschleunigungsamplitude nicht mit dem Lasertracker gemessen werden können.

Auch bei der Einstellung der Vorsteuerung für Systeme mit sehr hoher Nachgiebigkeit ist daher zunächst eine zu große Einstellung der Steifigkeit empfohlen.

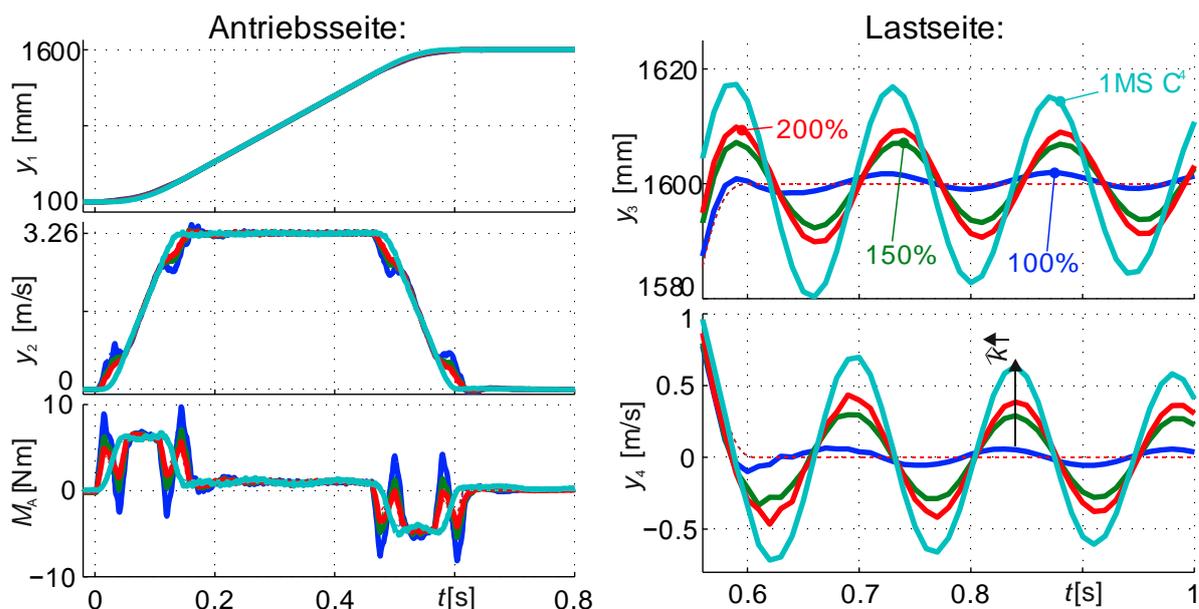


Bild 5.17: Auswirkung der Veränderung der vorgesteuerten Blattfedersteifigkeit

5.4 Einfluss der Haftreibung auf die Regelgüte

In den Versuchsergebnissen der Kapitel 5.1 und 5.2 ist insbesondere bei niedrigen Geschwindigkeiten ein Einfluss von Haft-Gleit-Reibung auf das Positionierverhalten der Linearachse bemerkbar. Das Verhalten der Linearachse mit durch Haftreibung festgehaltenem Schlitten kann als ein in Bild 5.18 dargestellter Einmassenschwinger beschrieben werden.

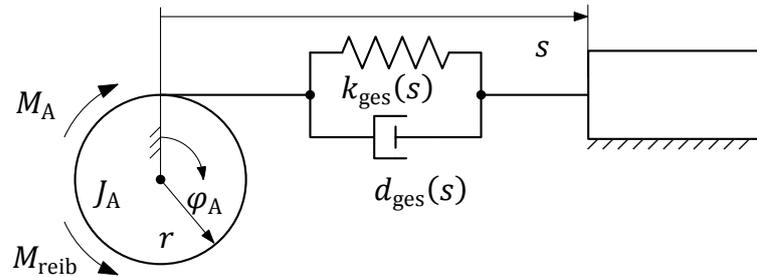


Bild 5.18: Mechanisches Ersatzbild der Linearachse mit Schlitten in Haftreibung

Liegt vor Beginn einer Trajektorie bereits eine Positionsabweichung vor, ist im I-Anteil des Reglers ein aufintegrierter Fehler gespeichert, der zu einem konstanten Reglereingriff führt. Der Einfluss des P-Anteils des Reglers ist dabei gering. Bild 5.19 zeigt den Verlauf von antriebsseitigem Moment (M_A) und Position (y_1) vor Beginn einer 10 ms- C^4 -Trapeztrajektorie mit 2MS-Vorsteuerung (links) sowie die lastseitige Geschwindigkeit (y_4) beim Einschwingvorgang (rechts) für unterschiedliche Positionsabweichungen zu Beginn.

Liegt vor einer Fahrt in positive Richtung bereits ein positives Drehmoment am Antrieb vor, muss die Losbrechkraft des Schlittens nicht mehr überwunden werden. Dies führt zu deutlich geringeren Schwingungen des Regelkreises und somit zu einer kürzeren Positionierdauer. Es werden daher nur Versuchsergebnisse verglichen, die ein gleich großes Drehmoment vor Beginn der Fahrt aufweisen.

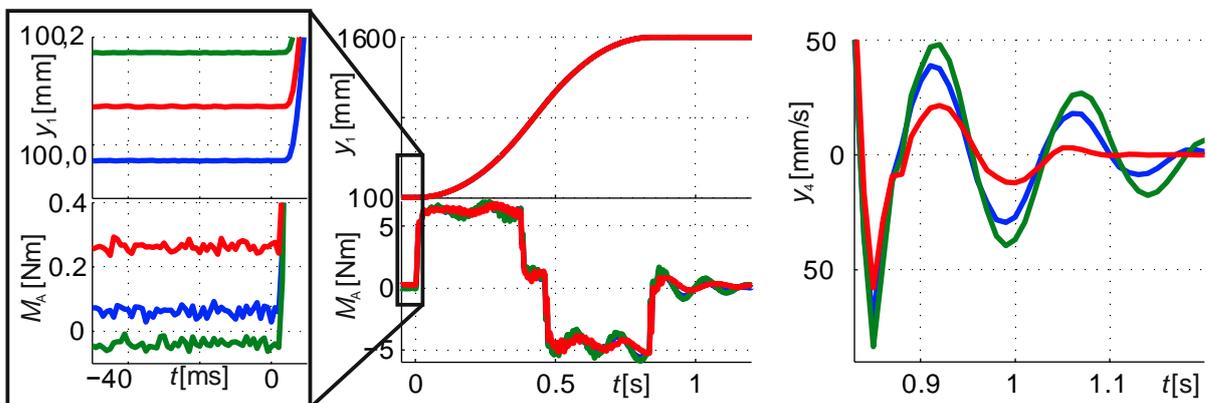


Bild 5.19: Vergleich der Auswirkung von unterschiedlicher Haftreibung zu Beginn

5.5 Maßnahmen zur Kompensation der Haftreibung

Im Folgenden wird erörtert, mit welchen Maßnahmen zur Kompensation der Haftreibung das Positionierverhalten der Linearachse im Sinne der in Bild 5.19 gezeigten Ergebnisse verbessert werden kann.

In Bild 5.20 wird der zeitliche Ablauf einer möglichen Haftreibungskompensation anhand einer 2MS- \mathcal{C}^4 -Polynomtrajektorie dargestellt. Durch die Reglerschwingungen am Ende der vorher gefahrenen Trajektorie liegt ein negatives Drehmoment des I-Anteils von ca. 0,3 Nm vor. Aufgrund der Haftreibung wird der Schlitten ca. 100 μm links von seiner Sollposition festgehalten ($t < -0,5$ s). Als erster Kompensationschritt wird der I-Anteil des Reglers bei $t = -0,5$ s zurückgesetzt und zunächst deaktiviert. Der Betrag des Drehmoments geht damit gegen Null und gleichzeitig setzt eine Bewegung des Schlittens um ca. 300 μm nach rechts ein, bis durch das steigende Drehmoment des P-Anteils nach Gl. (5.11) wieder Haftreibung eintritt.

$$M_p = K_{p1} \cdot K_{p2} \cdot \Delta s = 0,222 \frac{\text{Nm}}{\text{mm}} \cdot \Delta s \quad (5.11)$$

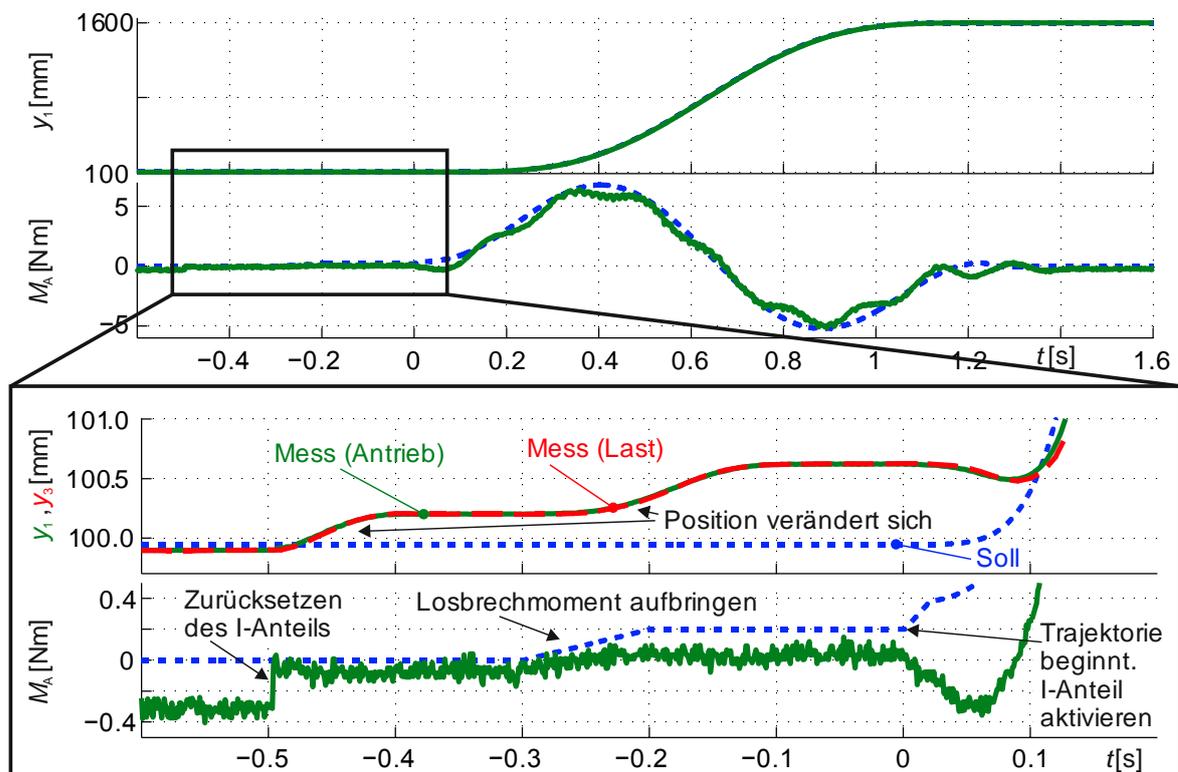


Bild 5.20: Verhalten bei Kompensation der Losbrechkraft

In dem in Bild 5.20 gezeigten Versuch wird 0,3 s vor dem Start der Trajektorie ein konstantes Moment von 0,3 Nm vorgesteuert. Dies hat allerdings einen weiteren Positionswechsel mit damit verbundenem stärkerem Eingriff des P-Regleranteils zur Folge, wodurch das Vorsteuermoment fast vollständig kompensiert wird.

Durch die große positive Positionsabweichung zu Beginn der Trajektorie ($t = 0$) wird das Stellmoment nach dem Aktivieren des I-Anteils zunächst negativ (für $t > 0$). Eine systematische Verbesserung des Ergebnisses ist alleine durch das oben beschriebene Schalten des I-Anteils und das Vorsteuern der Losbrechkraft nicht möglich.

Zusätzlich zu den dargestellten Maßnahmen ist es erforderlich, die Soll-Position zu Beginn der Trajektorie der Ist-Position anzugleichen. Damit entfällt der Regelfehler zu Beginn. Die effektivste Methode der Soll-Positionsanpassung stellt die Online-Berechnung der Trajektorie dar: Ausgehend von der Ist-Position nach dem Zurücksetzen des I-Anteils (in Bild 5.20 z. B. bei $t = -0,35$ s) werden Trajektorie und Vorsteuerung mit der gewünschten Endposition und den Methoden aus Kapitel 3 und 4 berechnet. Damit entfallen die oben beschriebene Positionsabweichung und der Reglereingriff zu Beginn.

Um darüber hinaus die Losbrechkraft vorzusteuern, ist es erforderlich, das Stellmoment so lange Schrittweise zu erhöhen, bis die erste Positionsänderung bemerkbar ist. Eine vorherige Identifikation ist nicht aussichtsreich, da die Haftreibung richtungs-, positions-, temperatur- und stillstandszeitabhängig ist. Nach dem Stellen der Losbrechkraft ist eine erneute Anpassung der Sollposition notwendig.

Eine einfachere Kompensationsmethode der Haftreibung stellt das Zurücksetzen des I-Anteils direkt vor Beginn der Trajektorie dar. Hierbei ist allerdings darauf zu achten, dass ein Zurücksetzen nur sinnvoll ist, wenn das Drehmoment des I-Anteils der geplanten Bewegung entgegengerichtet ist.

5.6 Einfluss der Dämpfung auf die flachheitsbasierte Vorsteuerung

Der Einfluss der Riemendämpfung auf die flachheitsbasierte Vorsteuerung wird formal in Kap. 3.5.2 gezeigt: Durch die Berücksichtigung der Dämpfung wird die Trajektorie des flachen Ausgangs z_1 nicht mehr für die lastseitige Position x_3 , sondern den mathematischen Ausdruck in Gl. (3.6) bestimmt. Bei Identifikationsmessungen am Institut wurde eine wegabhängige Eigendämpfung der Linearachse zwischen $0,01 \text{ Nms rad}^{-1}$ auf der linken und $0,1 \text{ Nms rad}^{-1}$ auf der rechten Seite bestimmt.

Der Einfluss der Eigendämpfung \hat{d} auf das Vorsteuermoment M_A und die Soll-Antriebsgeschwindigkeit y_2^* wird in Bild 5.21 anhand einer C^4 -Trapeztrajektorie mit 10 ms Verschleißzeit dargestellt. Hier wird eine konstante Steifigkeit \hat{k} von 163 Nm rad^{-1} angenommen. Die übrigen Werte werden gem. Tabelle 5.1, S. 50 gewählt. Der größte Einfluss der Dämpfung tritt während der links in Bild 5.21 vergrößert dargestellten Ruckphase auf. Bei positivem Ruck wird proportional zur Dämpfung mehr Drehmoment vorgesteuert. Bei negativem Ruck wird dagegen weniger Drehmoment zum Bremsen benötigt, da im Vorsteuerungsmodell Energie durch die Eigendämpfung dissipiert wird.

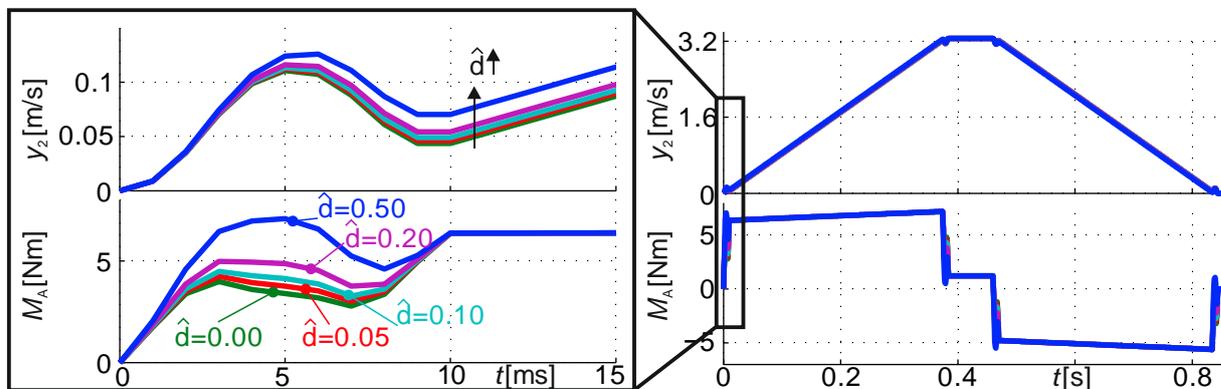


Bild 5.21: Verlauf von Vorsteuergrößen bei unterschiedlichen Dämpfungen

In Bild 5.22 sind Simulationsergebnisse für ein lineares Zweimassensystem aus Kap. 3.5.2 mit den oben angegebenen Parametern angegeben. Die Simulation wurde mit einem P/PI-Kaskadenregler und den am Versuchsprüfstand verwendeten Einstellungen aus Tabelle 3.2, S. 16 für jede der in Bild 5.21 gezeigten Trajektorien durchgeführt. Die Abweichung der eingestellten Dämpfung des Systems d von der in der Vorsteuerung eingestellten Dämpfung \hat{d} wird in Bild 5.22 als $\Delta\hat{d}$ bezeichnet. Es ist zu erkennen, dass mit zunehmendem Fehler $\Delta\hat{d}$ in der Vorsteuerung die Überschwinghöhe und Beruhigungsdauer zunehmen. Die Regelabweichung der antriebsseitigen Größen (M_A, y_1, y_2) und der lastseitigen Größen (y_3, y_4) ist auch bei sehr großer Dämpfung um mehr als den Faktor 10 kleiner als in den Ergebnissen der durchgeführten Versuche.

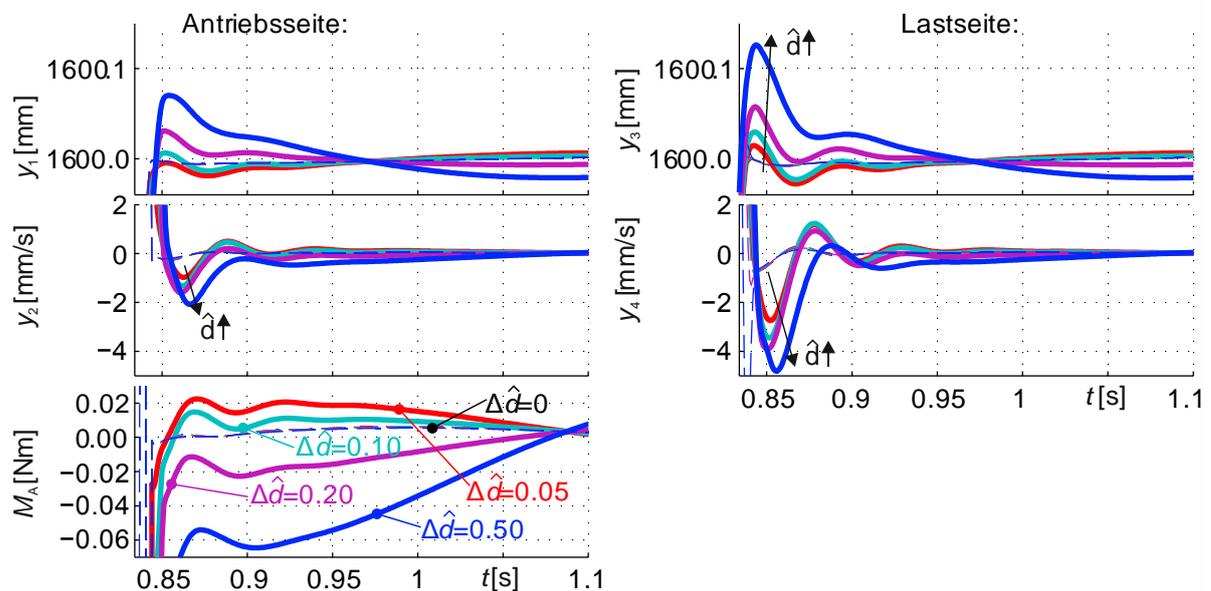


Bild 5.22: Simulationsergebnisse mit unterschiedlichen Dämpfungen

Die Größenordnung der identifizierten Dämpfung am Prüfstand liegt mit Werten von 0,01 bis 0,1 Nms rad⁻¹ am unteren Ende des in der Simulation betrachteten Bereichs. Bei einer Vergleichsmessung am Prüfstand mit Einstellungen gem. Kap. 5.1.1 und linear wegabhängiger Dämpfung konnte kein Unterschied in den Ergebnissen festgestellt werden, der über die Streuung hinausging. Damit ist der Einfluss der Dämpfung auf das Ergebnis der Vorsteuerung vernachlässigbar klein.

6 Adaptive Vorsteuerung

Die Vorsteuerungen des vorangegangenen Kapitels 5 wurden mit vorher identifizierten Parametern durchgeführt. Bei einer adaptiven Vorsteuerung werden die Einstellparameter durch die in Kap. 6.1 beschriebenen Beobachter laufend geschätzt und direkt zurückgeführt. Die Eigenschaften dieser Rückführung werden in Kap. 6.2 und 6.3 dargestellt. Versuchsergebnisse einer adaptiven Vorsteuerung werden schließlich in Kap. 6.4 vorgestellt.

6.1 Parameterschätzung für ein Einmassensystem

Für die Schätzung der Systemparameter wird ein Beobachter eingesetzt, der ein *Einmassen-Systemmodell* verwendet. Dies ist für die adaptive *Zweimassenvorsteuerung* einer Linearachse ausreichend, da die antriebsseitige Massenträgheit \hat{J}_1 und die Steifigkeit des Antriebsstrangs konstruktiv bedingt sind und sich im Betrieb der Anlage nicht mehr ändern. Die Reibung ist dagegen nicht konstant, sondern u. a. temperatur- und betriebszeitabhängig. Auch die lastseitige Masse ist im Betrieb veränderbar.

Die Schätzung wird mit einem Unscented Kalman Filter (UKF) durchgeführt. Grundlage des Filters ist das in Kap. 3.5.1 angegebene Einmassenmodell, das um ein dem Antriebsmoment M_A entgegengerichtetes Störmoment M_S erweitert wird. Für die in Gl. (6.1) angegebene Systemdynamik sind nur die Beschleunigung $\ddot{\varphi}_A$ und die Geschwindigkeit $\dot{\varphi}_A$ entscheidend.

$$\ddot{\varphi}_A(t) = J_{\text{ges}}^{-1} \cdot \left(M_A - d_v \cdot \dot{\varphi}_A(t) - \mu_C \cdot \frac{2}{\pi} \text{atan}(2\dot{\varphi}_A(t)) - M_S \right) \quad (6.1)$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_A$ wird entsprechend Gl. (6.2) zu einem Zeitpunkt $t = kT$ diskretisiert. Dabei bezeichnet T die konstante Taktzeit des Beobachters.

$$\dot{\varphi}_A(k+1) = \dot{\varphi}_A(k) + T \cdot \ddot{\varphi}_A(k) + \frac{1}{2} T^2 \varphi_A^{(3)}(k) + \dots \quad (6.2)$$

Durch Abbruch der Reihe in Gl. (6.2) nach dem ersten Glied folgt mit dem Zustandsvektor x_B in Gl. (6.3) die zeitdiskrete Zustandsraumdarstellung in Gl. (6.4) mit der Abtastzeit T und dem Antriebsmoment M_A als Eingang u_B .

$$x_B = \left[\dot{\varphi}_A, J_{\text{ges}}^{-1} \cdot d_v, J_{\text{ges}}^{-1} \cdot \mu_C, J_{\text{ges}}^{-1}, J_{\text{ges}}^{-1} \cdot M_S \right]^T \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
 x_{B1}(k+1) &= x_{B1} + T \cdot \left[x_{B4} \cdot u - x_{B2} \cdot x_{B1} - x_{B3} \cdot \frac{2}{\pi} \operatorname{atan}(2x_{B1}) - x_{B5} \right] \\
 &= f_1(x_B(k)) + g_1(x_B(k)) \cdot u_B
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

Die Einträge des Zustandsvektors x_B setzen sich aus Kombinationen der Systemparameter μ_C , d_v , J_{ges} und M_S zusammen, die so gewählt sind, dass nur Multiplikationen der Zustände in Gl. (6.4) vorkommen. Die nicht vorhandene Dynamik der Parameter-Zustände wird mit Gl. (6.5) angegeben.

$$x_{B,i}(k+1) = x_{B,i}(k) = f_i(x), \quad i = 2, \dots, 5 \tag{6.5}$$

Das im Beobachter hinterlegte Systemmodell ist aufgrund der Multiplikation von Zuständen und der Näherung der Coulombschen Reibung mit der arctan-Funktion nichtlinear. Die Berücksichtigung der Nichtlinearitäten erfolgt bei der Berechnung der Rückführmatrix K , indem im Gegensatz zum Extended Kalman Filter (EKF) keine Matrixmultiplikation mit den linearisierten Systemmatrizen A, B, C , sondern der in [vMer04] vorgestellte Sigma-Punkt-Algorithmus verwendet wird, der die Systemfunktion $[f(x_B) + g(x_B) \cdot u_B]$ an optimierten Stützstellen auswertet.

Parallel zur Parameterschätzung läuft eine Sensitivitätsüberwachung der Anregung einzelner Parameter in einem Central Difference Kalman Filter (CDKF). Darin wird durch Ableitung der Systemfunktion nach den einzelnen Parametern festgestellt, wie stark diese angeregt werden. Für jede dieser Sensitivitäten s sind Schwellwerte definiert, bei deren Überschreitung eine Änderung der Parameter mit dem Korrekturwert aus $x_{B,\text{Korr}}$ stattfindet. Dies ist Bild 6.1 dargestellt.

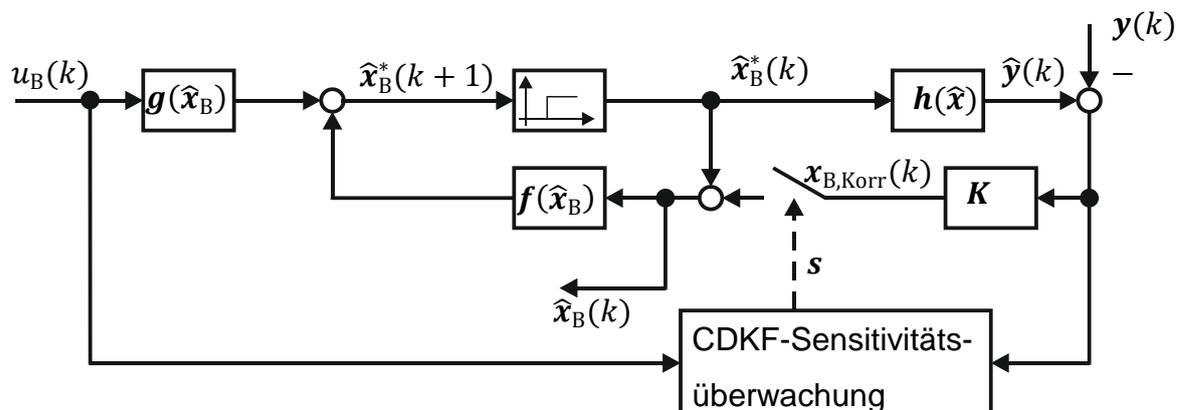


Bild 6.1: Parameterschätzung mit Sensitivitätsüberwachung

6.2 Rückführung der Parameter in eine Zweimassenvorsteuerung

Der vorgestellte 1MS-Beobachter zeichnet sich durch große Robustheit und sehr schnelle Konvergenz aus, die mit einem 2MS-Beobachter und einer Taktrate von 1 kHz noch nicht erreicht werden konnte. Um die Parameter der 2MS-Vorsteuerung aus den Schätzparametern des 1MS-Beobachters zu berechnen, werden das antriebsseitige Massenträgheitsmoment \hat{J}_1 und die spezifische Steifigkeit \hat{k}_{spez} aus Datenblättern oder vorherigen Identifizierungen geschätzt. Die lastseitige Massenträgheit ergibt sich damit gem. Gl. (6.6).

$$\hat{J}_2 = \hat{J}_{\text{ges}} - \hat{J}_1 \quad (6.6)$$

Reibung $\hat{\mu}_C$ und Dämpfung \hat{d}_v können direkt adaptiv in die Vorsteuerung zurückgeführt werden, da sie in beiden Modellen auf der Antriebsseite angreifen. Der um die adaptive Vorsteuerung erweiterte Regelkreis aus Bild 2.4 ist in Bild 6.2 dargestellt.

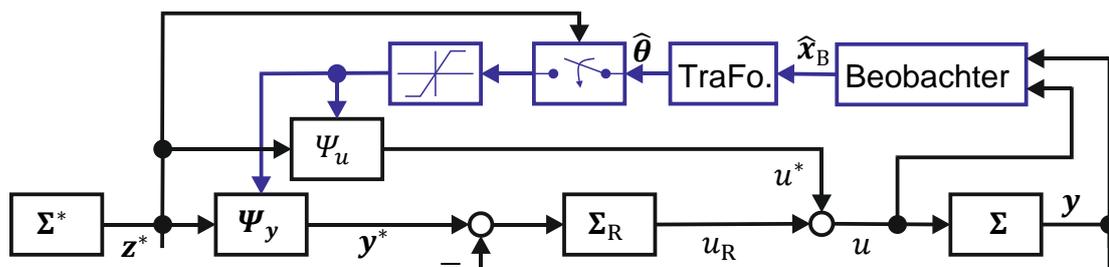


Bild 6.2: Blockstruktur der adaptiven flachheitsbasierten Vorsteuerung

Der Vektor $\hat{\theta}$ enthält dabei die geschätzten Systemparameter $(\hat{J}_2, \hat{d}_v, \hat{\mu}_C)^T$, die in die Transformationsfunktionen $\Psi_u(z^*, \hat{\theta})$ und $\Psi_y(z^*, \hat{\theta})$ eingesetzt werden. Eine Anpassung der Trajektorie für z^* ist bei den untersuchten Systemen nicht notwendig. Das in Bild 6.2 hinter den Beobachter eingezeichnete Abtastglied verdeutlicht, dass die für jeden Zeitschritt aktualisierte Parameterschätzung \hat{x}_B nicht kontinuierlich zurückgeführt wird, sondern dass die Schätzung nur in Ruhelagen des Systems aktualisiert und anschließend gehalten wird. Dies wird auch in Bild 6.4 deutlich. Dieser Schritt ist notwendig, damit Überschwingen in der Schätzung nicht sofort durch die Vorsteuerung in den Regelkreis zurückgeführt werden. Somit kann die adaptive Parameterrückführung bei der Betrachtung des geschlossenen Regelkreises vernachlässigt werden. Zusätzlich werden die Schätzwerte begrenzt, damit z. B. aufgrund von Überschwingern in der Schätzung der Massenträgheit kein zu großes Vorsteuermoment gestellt wird.

6.3 Anregung der Parameter

Für eine konvergierende Parameterschätzung müssen die Parameter durch geeignete Wahl der Trajektorie ausreichend angeregt werden. Bild 6.3 zeigt für alle in Kap. 5 betrachteten Trajektorien den logarithmierten Verlauf der Sensitivitätswerte des 1MS-Beobachters über der Zeit. Da die Sensitivitäten bei allen Trajektorien ihre Schwellwerte überschreiten, ist eine ausreichende Anregung der Parameter gegeben.

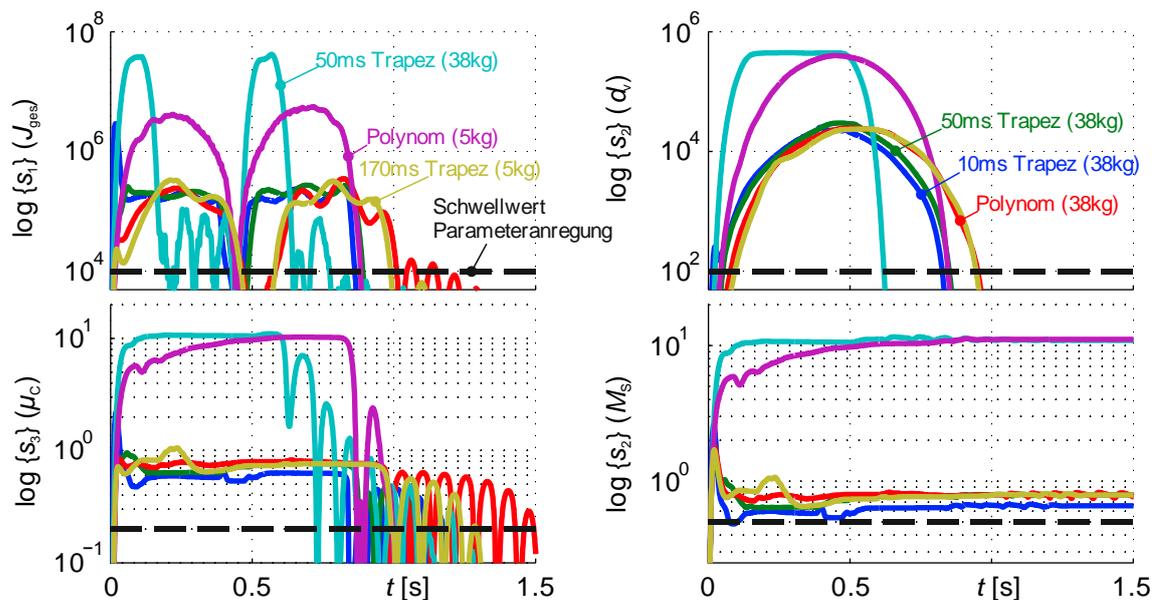


Bild 6.3: Sensitivitätswerte bei unterschiedlichen Trajektorien

6.4 Validierung der adaptiven Vorsteuerung

Zur Implementierung der adaptiven Vorsteuerung wird das Simulink-Modell der Vorsteuerung mit konstanten Parametern um einen Beobachter sowie um Funktionsblöcke zur Berechnung des Drehmoments u^* und der antriebsseitigen Größen y^* erweitert. Die Trajektorie für den flachen Ausgang, z^* wird weiterhin vor der Versuchsdurchführung („offline“) berechnet.

Für die Parameterschätzung wird der 1MS-Beobachter mit den Anfangswerten aus Tabelle 6.1 verwendet. Zum Vergleich sind in Tabelle 6.1 zusätzlich die identifizierten Größen angegeben. Damit sind die Anfangsschätzungen der Massenträgheit und der Coulombschen Reibung zu klein und die Anfangsschätzung der viskosen Dämpfung zu groß.

Tabelle 6.1: Anfangswerte des 1MS-Beobachters

Größe		Einheit	Anfangswert	Ident. Wert
Gesamtmassenträgheitsmoment	\hat{J}_{ges}	[kgcm ²]	50	110
Coulombsche Reibung (Antriebsseite)	$\hat{\mu}_C$	[Nm]	0,01	0,375
Viskose Dämpfung (Antriebsseite)	\hat{d}_v	[Nms rad ⁻¹]	0,01	0,004
Störmoment	\hat{M}_S	[Nm]	0	variabel

Bild 6.4 auf S. 79 zeigt oben den Verlauf von antriebsseitigen Messgrößen bei mehrfacher Wiederholung einer C^4 -Trapeztrajektorie mit 10 ms Summenverschleißzeit und adaptiver 2MS-Vorsteuerung mit nichtlinearer Federkennlinie des Riemens. Die ersten drei Diagramme zeigen den Sollwertverlauf der antriebsseitigen Position (y_1), Geschwindigkeit (y_2) und des Drehmoments (M_A) in blau sowie den jeweiligen Messwertverlauf in grün. Zusätzlich ist im Drehmomentverlauf in rot das Störmoment \hat{M}_S des Beobachters eingezeichnet.

Im unteren Bereich von Bild 6.4 sind Antriebsgeschwindigkeit und Drehmoment der Hinfahrt der ersten drei Wiederholungen der Trajektorie zusammen gezeichnet. Es wird deutlich, dass die Reglerschwingungen mit jeder Wiederholung abnehmen. Der antriebs- und lastseitige Geschwindigkeitsverlauf in der Beruhigungsphase sind zusätzlich unten rechts dargestellt.

Die Abnahme der Schwingungen ist auf die in Bild 6.5 auf S. 79 dargestellte Parameterschätzung zurückzuführen. Die im Beobachter berechneten Schätzwerte der Parameter sind in Bild 6.5 in blau gezeichnet. Die für einzelne Wiederholungen der Trajektorie in der Vorsteuerung benutzten Werte sind jeweils als andersfarbige Linie eingezeichnet.

Mit fortschreitenden Wiederholungen der Trajektorie nähern sich die Schätzwerte immer weiter dem vorab identifizierten Wert an. Damit wird eine fortlaufende Verbesserung der Vorsteuerung mit einem verbesserten Einschwingverhalten erreicht, obwohl stark abweichende Startwerte für die Parameterschätzung verwendet werden.

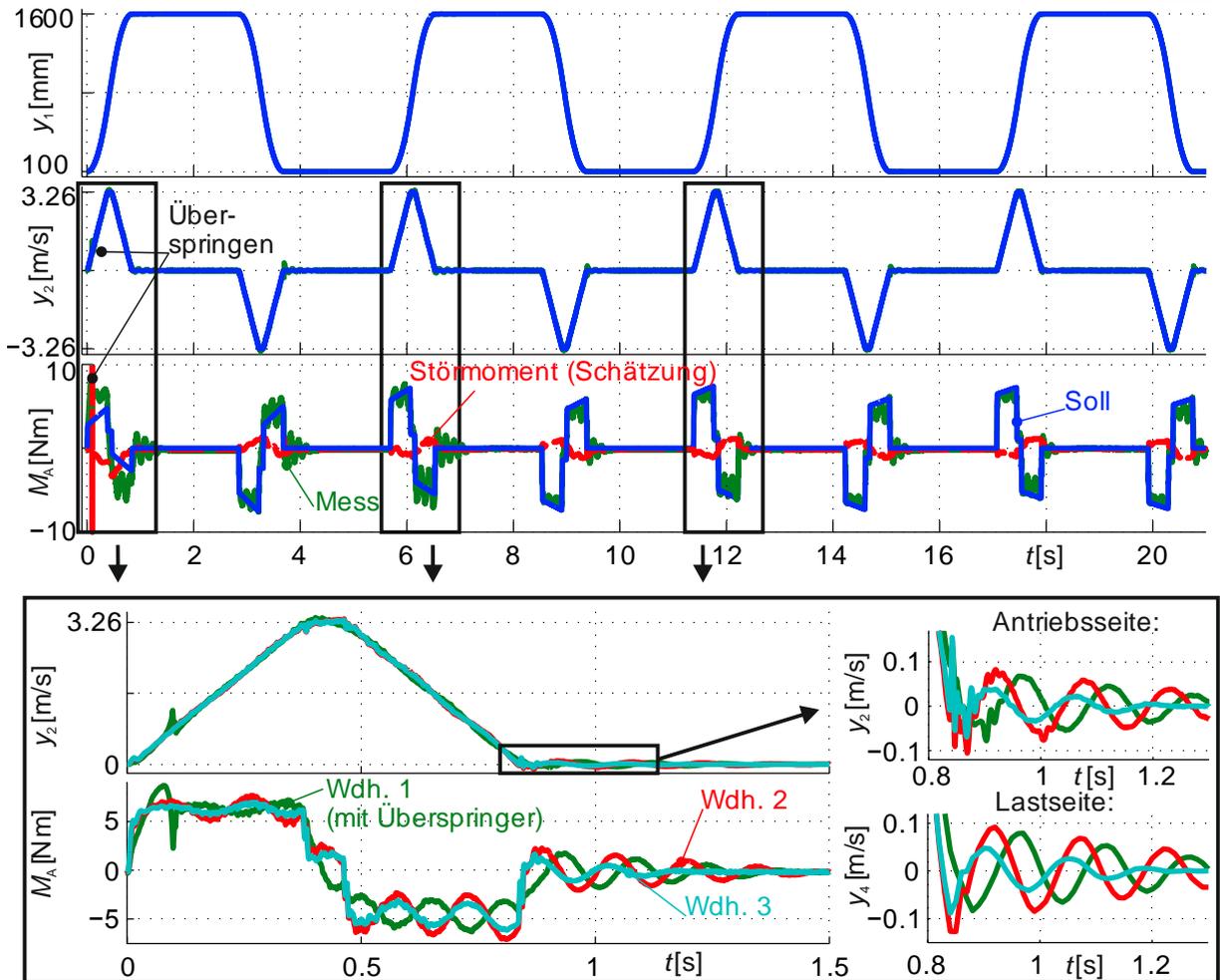


Bild 6.4: Zeitverlauf von Messgrößen bei einer adaptiven 2MS-Vorsteuerung

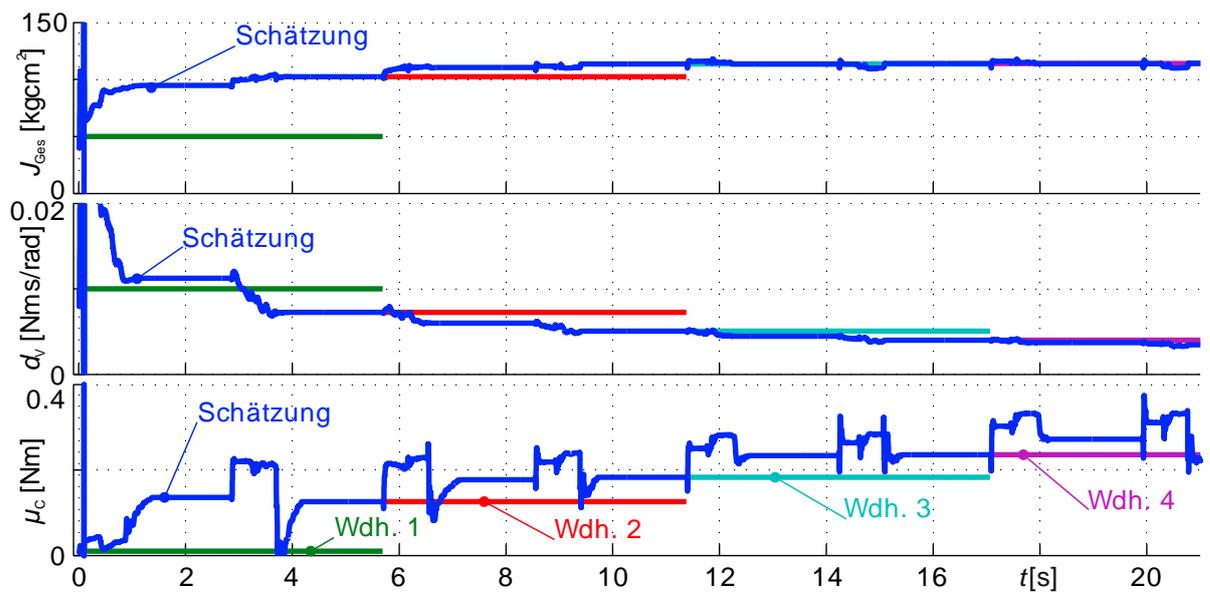


Bild 6.5: Zeitverlauf der Parameterschätzung bei einer adaptiven 2MS-VS

Der direkte Vergleich der Vorsteuerung mit sich ändernden Parametern ist mit der Drehmoment-Drehzahl-Kennlinie in Bild 6.6 möglich. In dem vergrößert dargestellten Anfahrbereich (links) und im Bereich mit maximaler Geschwindigkeit (rechts) werden die Annäherung der Soll-Trajektorie an ihren Endwert und der Einfluss einzelner Parameter deutlich.

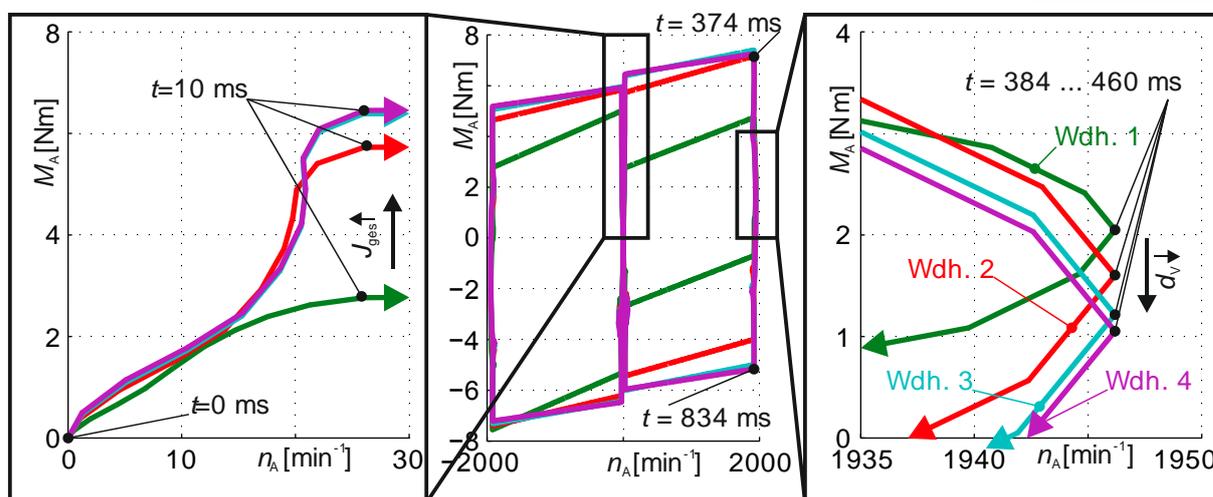


Bild 6.6: M-n-Kennlinie der adaptiven 2MS-Vorsteuerung

In Bild 6.4 wird das Überspringen des Zahnriemens zu Beginn der ersten Wiederholung besonders hervorgehoben. Das Überspringen wird durch die zu gering vorgesteuerte Massenträgheit zu Beginn verursacht: Durch den Eingriff des Reglers entsteht ein Überschwingen im Drehmomentverlauf, das das Überspringmoment des Zahnriemens überschreitet. Dieser Effekt lässt sich durch bessere Schätzwerte am Anfang, eine geringere Schlittenmasse oder eine Trajektorie mit geringerer Dynamik vermeiden.

Das Überspringen verursacht einen kurzzeitigen Einbruch des Drehmoments und eine Überhöhung der antriebsseitigen Geschwindigkeit. Zusätzlich entsteht ein dauerhafter Positionsfehler von einer Zahnteilung (5 mm), der antriebsseitig bei inkrementeller Positionsmessung nicht erkannt wird. Für genaue Positionierung ist also eine erneute Referenzierungsmessung der Position notwendig.

Eine Erkennung des Überspringens ist z. B. durch das Störmoment des Beobachters möglich. Dieses ist so eingestellt, dass ein gemessenes Systemverhalten, das nicht durch das Einmassenmodell erklärbar ist, zu einer schnellen Änderung des Störmoments führt. Das Überspringen des Zahnriemens führt zu einer sprunghaften Änderung des Störmoments (siehe Bild 6.4).

7 Validierung der Vorsteuerung mit verteilten Parametern

Im Folgenden werden Ergebnisse zur in Kapitel 3.6.2 vorgestellte Vorsteuerung der Zahnriemenachse mit einem verteiltparametrischen Modell präsentiert. Die Unterschiede des Sollgrößenverlaufs werden zunächst in Kap. 7.1 behandelt. Versuchsergebnisse befinden sich in Kap. 7.2.

7.1 Unterschiede zur Vorsteuerung mit konzentrierten Parametern

Die Berechnung der Vorsteuerungsgrößen mit dem Eintrumsystem (1TS) erfolgt mit Gl. (3.18), S. 30 für die antriebsseitige Position und Geschwindigkeit sowie Gl. (3.20) für das Drehmoment. Das Vorgehen zur Konstruktion der Vorsteuertrajektorie wird in Kap. 3.6.2 dargestellt. Die verwendete Totzeit des unteren Trums wird gem. Gl. (7.1) aus Gesamtriemenlänge l_1 (Tabelle 3.6, S. 24), Schlittenposition s und Wellenlaufzeit σ (Tabelle 3.9, S. 29) bestimmt. Diese Totzeit wird für jeden Zeitschritt der Vorsteuerung aus der Soll-Schlittenposition berechnet.

$$T_t = \sigma \cdot (l_1 - s) \quad (7.1)$$

Der Ansatz der 1TS-Vorsteuerung unterscheidet sich gegenüber der Zweimassenmodellierung (2MS) dadurch, dass einzelne Terme durch einen gleitenden Mittelwert mit der Länge $2T_t$ ersetzt werden. In anderen Termen werden Ableitungen durch zentrale Differenzenquotienten mit der Länge $2T_t$ ersetzt. Die Unterschiede der 1TS-VS gegenüber der 2MS-VS im Geschwindigkeits- und Drehmomentverlauf werden anhand einer 10 ms- \mathcal{C}^4 -Trapeztrajektorie in Bild 7.1 dargestellt. Dabei werden viskose Dämpfung und Coulombsche Reibung zunächst nicht betrachtet.

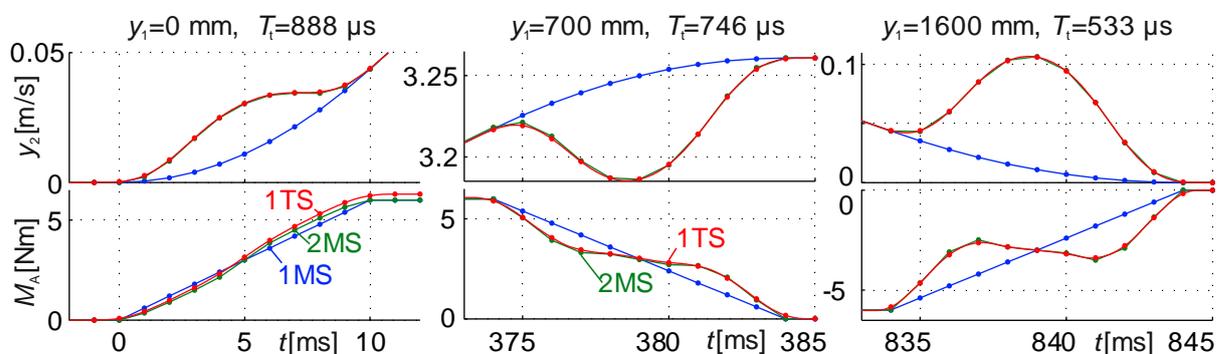


Bild 7.1: Stellgrößenverlauf bei Vorsteuerung mit Berücksichtigung der Totzeit

7.2 Versuchsergebnisse

Bild 7.2 zeigt die Versuchsergebnisse für eine 1TS-Vorsteuerung mit C^4 -Trapez-Trajektorie und 10 ms Verschleißzeit. Zum Vergleich sind die Ergebnisse der 2MS- C^4 - und 1MS- C^2 -Vorsteuerung angegeben. Im Bild ist zu erkennen, dass die auf verteilten Parametern basierende 1TS-Vorsteuerung zu einem wesentlich besseren Positionierverhalten der Linearachse führt, als die auf konzentrierten Parametern basierende 2MS-Vorsteuerung.

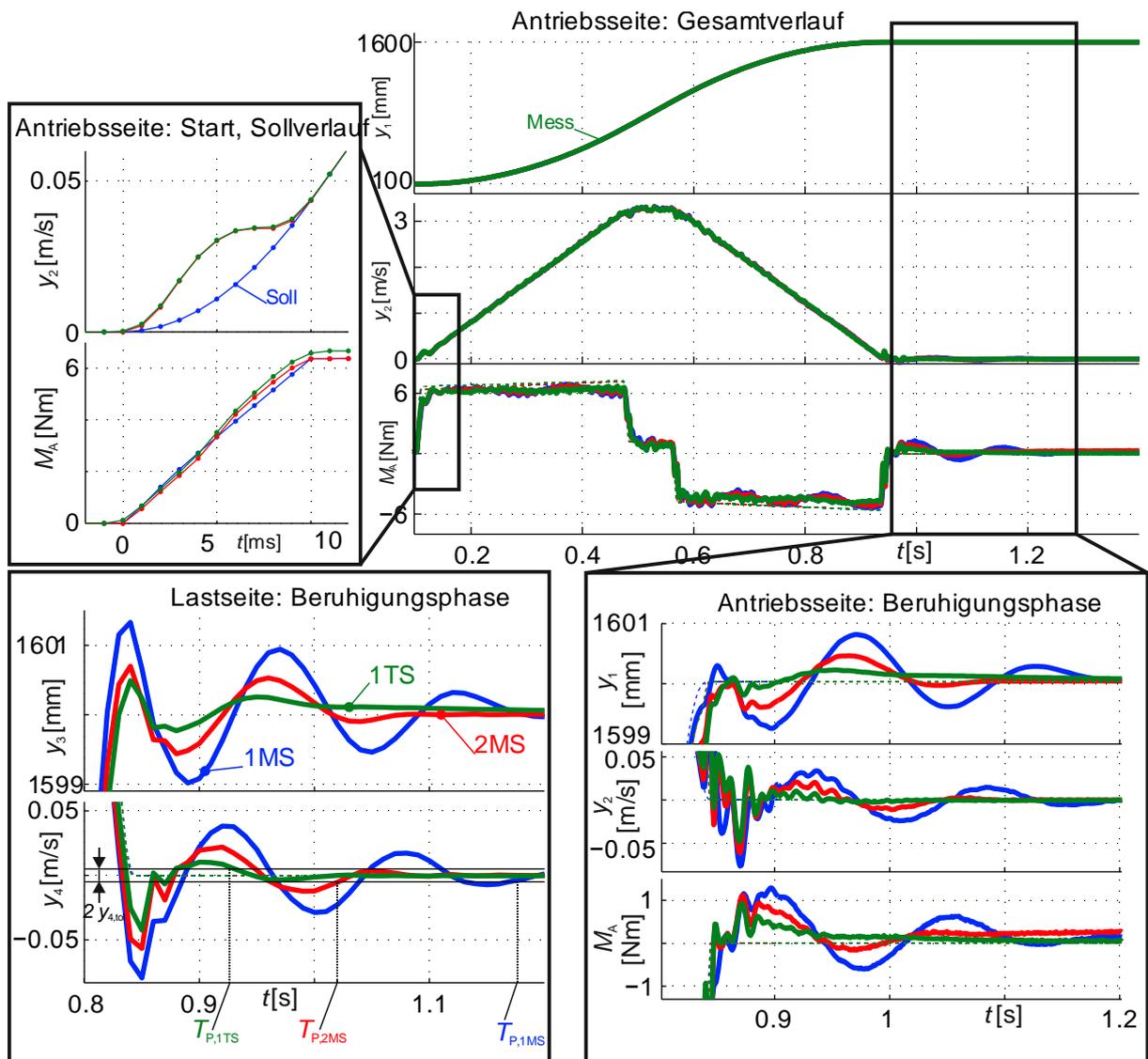


Bild 7.2: Ergebnisvergleich einer 1TS-Vorsteuerung

Die in der Herleitung in Kap. 3.6.2 zunächst vernachlässigte Reibung und Dämpfung werden analog zum Vorgehen in Kap. 3.5 im Vorsteuerungsmoment berücksichtigt.

In Tabelle 7.1 werden die im Bild 7.2 erkennbaren Unterschiede zusammengefasst. Darin bezeichnet T_D die Transitionszeit, T_B die Beruhigungsdauer, T_P die Positionierzeit und K_M die Drehmomentabweichung gem. Gl. (5.4). Die Werte für die bereits in Kap. 5.1 behandelten Vorsteuerungen sind hier leicht unterschiedlich, da zum Zeitpunkt der Versuchsdurchführung ein Anfangsdrehmoment von ca. 0,2 Nm vorlag, das ein frühes Überwinden der Haftreibung begünstigte (siehe Bild 5.19, S. 69).

Tabelle 7.1: Versuchsergebnisse der 1TS-Vorsteuerung in Vergleich

Nr.	Trajektorie und Vorsteuerung	T_D [ms]	T_B [ms]	T_P [ms]	K_M [Nm]
1	C^2 -Trapez (10 ms) mit 1MS	844	335	1179	0,47
2	C^4 -Trapez (10 ms) mit 2MS	844	180	1024	0,30
3	C^4 -Trapez (10 ms) mit 1TS	846	85	931	0,19

Tabelle 7.2 stellt die prozentuale Verbesserung der in Tabelle 7.1 genannten Kennwerte dar. Dabei werden in der ersten Zeile die flachheitsbasierten Vorsteuerungen verglichen: Bei der Berücksichtigung verteilter Parameter ist eine weitere Verringerung der Positionierzeit um 9 % und eine Verringerung der Drehmomentabweichung um 37 % gegenüber der in Kap. 5.1 vorgestellten 2MS-Vorsteuerung erreichbar. In der zweiten Zeile findet der Vergleich mit der 1MS-Vorsteuerung statt: Hier werden die Positionierzeit um 21 % und die Drehmomentabweichung in der Beruhigungsphase um 60 % verringert.

Vom Ansatz verteilter Parameter profitieren allerdings nur Trajektorien mit sehr kurzen Ruckphasen. Bei einer Trapez-Trajektorie mit 50 ms Ruckphase konnte bereits keine über die Ergebnisstreuung hinausgehende Verbesserung mehr festgestellt werden.

Tabelle 7.2: Verbesserung durch die verteiltparametrische Vorsteuerung

Nr.	Vergleich 1TS-Vorsteuerung mit ...	Beruhigungsdauer $\Delta_{rel}T_B$	Positionierzeit $\Delta_{rel}T_P$	Drehmomentabweichung $\Delta_{rel}K_M$
2; 3	2MS	53 %	9 %	37 %
1; 3	1MS	74 %	21 %	60 %

Aufgrund der sich im Wegverlauf stetig ändernden Totzeit ist der Sollwertverlauf der Vorsteuerung ebenfalls zeitkontinuierlich, obwohl die verwendete Trapeztrajektorie in einem diskreten Takt von 1 kHz vorgegeben wird. Durch die Anpassung an den Vorsteuerungstakt von 1 kHz und die damit verbundene Zeitdiskretisierung entsteht ein Fehler, der bei höheren Taktraten der Vorsteuerung wie z. B. 4 kHz verringert werden kann. Die verteiltparametrische Vorsteuerung in Bild 7.1 wurde mit einem Takt von 40 kHz berechnet (durchgezogene Linie) und als 1 kHz-Diskretisierung mit Punkten hervorgehoben. Im Bild ist erkennbar, dass die Größenordnung des Diskretisierungsfehlers bereits gering ist.

Neben der Verwendung zur Kompensierung der Totzeit bei der Kraftübertragung im Riemen ist diese Art der Vorsteuerung ebenfalls geeignet, weitere Totzeiten im System zu kompensieren. Dabei sind im Besonderen Signallaufzeiten und die Aufbauzeit des Motorstroms zu nennen. Das P_{T1} -Verhalten des Motormoments mit einer geschätzten elektrischen Zeitkonstante von ca. 400µs kann dabei ebenfalls als (geringere) Totzeit angenähert werden.

Im geringen Unterschied zwischen der 1TS- und 2MS-Vorsteuerung in Bild 7.1 ist erkennbar, dass der Ansatz einer Vorsteuerung mit verteilten Parametern für Lineachsen mit geringer Länge nur im hier betrachteten Grenzfall einer sehr kurzen Ruckphase einen Vorteil bringt. Bei längeren Riementräumen ist ein größerer Vorteil des 1TS-Ansatzes zu erwarten. Als Einsatzgebiet sind hier insbesondere Regalbediengeräte zu nennen, bei denen jedoch aufgrund der Anbringung des Motors direkt auf dem Schlitten die Modellierung angepasst werden muss.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden modellbasierte Vorsteuerungen für mechatronische Systeme unter besonderer Berücksichtigung von Nachgiebigkeiten entworfen. Im Gegensatz zu bestehenden Ansätzen wird die Methode der differentiellen Flachheit verwendet. Damit wird die Berechnung der inversen Dynamik für die Klasse der differentiell flachen Systeme ermöglicht und der Vorsteuerungsentwurf erheblich vereinfacht. Die Berechnung der Vorsteuerung erfordert die Invertierung des Systems, die mit einer Hilfsgröße, dem flachen Ausgang, durchgeführt wird.

Neben der analytischen Bestimmung von Vorsteuerungsfunktionen ist die Berechnung von geeigneten Trajektorien ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit. Zur Umsetzung einer flachheitsbasierten Vorsteuerung für die untersuchte Zahnriemen-Linearachse werden mindestens vier Mal stetig differenzierbare Trajektorien benötigt. Im Gegensatz zu den bei flachen Vorsteuerungen bisher verwendeten langsamen Polynomprofilen oder den mathematisch sehr aufwändigen Gevrey-Funktionen werden in dieser Arbeit Trapezprofile verwendet. Diese werden durch mehrfache Faltung von Rechteckfunktionen gewonnen und haben in Verbindung mit flachheitsbasierten Vorsteuerungen das Potential, zum neuen Industriestandard zu werden. Der Vorteil gegenüber den bestehenden Lösungen liegt im echtzeitfähigen Berechnungsalgorithmus und der einfachen Parametrierbarkeit durch Verschleißzeiten.

Durch den Einsatz der flachheitsbasierten Vorsteuerung konnte die Dauer des Positioniervorgangs einer Zahnriemen-Linearachse um bis zu 20 % gegenüber den bisherigen Standardverfahren verringert werden. Die Schwingungen im Regelkreis konnten sogar um bis zu 60 % verringert werden. Mit kleinerer lastseitiger Masse oder einer langsameren Trajektorien ist die Dynamik des Bewegungsvorgangs geringer. Die durch die Vorsteuerung erreichbare Verbesserung sinkt damit ebenfalls. Durch die vorliegende große Haftreibung tritt bei langsamen Polynom- und Trapezprofilen sogar einer Verschlechterung der genannten Kennzahlen ein.

Die untersuchte Linearachse zeichnet sich durch eine große Steifigkeit aus. Mit einer nachgiebigeren Zusatzfeder konnte gezeigt werden, dass die Vorteile der flachheitsbasierte Vorsteuerung mit zunehmender Nachgiebigkeit steigen. Damit werden bei

der Auslegung von Antriebssystemen Leichtbaukonstruktionen möglich, deren geringe Steifigkeit durch die Vorsteuerung softwareseitig kompensiert wird.

Die größte Schwierigkeit beim Entwurf der flachheitsbasierten Vorsteuerung ist die notwendige genaue Kenntnis der Systemparameter. Es wird gezeigt, dass die Vorsteuerung robust gegenüber Parameterunsicherheit ist. Durch den Entwurf einer adaptiven Vorsteuerung wird ein Betrieb ohne zusätzliche Identifikationsmessungen ermöglicht. Eine ausreichende Parameterschätzung ist bereits mit vorhandener antriebsseitiger Sensorik möglich. Damit ist die Anschaffung zusätzlicher Hardware nicht notwendig. Die dargestellten Verbesserungen können allein durch den Einsatz neuer Software in bereits bestehenden Datenverarbeitungssystemen erreicht werden. Der Einsatz von zusätzlicher lastseitiger Sensorik wie Beschleunigungssensoren, Lasertrackern oder Kamerasystemen zur adaptiven Parameterschätzung ist angesichts der Ergebnisse dieser Arbeit als unwirtschaftlich anzusehen.

Für den bestehenden Versuchsprüfstand wurden die Vorteile einer adaptiven flachheitsbasierten Vorsteuerung weitestgehend ausgeschöpft. Die größte Begrenzung stellt hierbei die notwendige Losbrechkraft zum Anfahren des Schlittens dar. Durch eine adaptive Vorsteuerung der Haftreibung bis zur Grenze der Losbrechkraft ist eine weitere Verbesserung des Systemverhaltens zu erwarten.

Eine weitere Beschränkung besteht in der Taktrate der EtherCAT-Schnittstelle des Reglers von 1 kHz. Der Einsatz einer höheren Taktrate von 4 kHz ermöglicht den Entwurf von Trapeztrajektorien mit eventuell günstigeren Verschleißzeiten. Auch eine weitere Verbesserung des in dieser Arbeit neu vorgestellten totzeitbasierte Vorsteuerungsentwurfs für Zahnriemenantriebe ist damit zu erwarten. Eine darüber hinausgehende Erhöhung des Vorsteuertaktes ist angesichts der elektrischen Zeitkonstante des eingesetzten Motors nicht sinnvoll. Eine Berücksichtigung dieser Zeitkonstante in der flachen Vorsteuerung bietet zusätzlichen Verbesserungsspielraum. Dafür sind allerdings genauere Kenntnisse über das Verhalten des Stromreglers notwendig.

Der nächste Arbeitsschritt besteht darin, die entwickelten Algorithmen zur Trajektoriengenerierung, Parameterschätzung und Vorsteuerungsberechnung als Baustein in eine Speicherprogrammierbare Steuerung oder in die Software des Projektpartners zu übertragen. In Verbindung mit einer einfachen Benutzerschnittstelle werden die Methoden damit einem breiteren Nutzerkreis zugänglich.

9 Literaturverzeichnis

- [Ada09] Adamy, J.: Nichtlineare Regelungen, Springer-Verlag, 2009
- [Åst08] Åström, K. J.; Wittenmark, B.: Adaptive Control, Dover Publications Inc., Lund, Schweden, 2008
- [Ayz13] Ayzenshtadt, E: Online-Schätzung von Systemparametern mithilfe von sensitivitätsbasiertem Erweiterterem Kalman-Filter, Bachelorarbeit, Universität Hannover, 2013
- [Bac11] Bachmayer, Ulbrich: Flatness-based control of a horizontally moving erected beam with a point mass, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems 17 (Februar 2011) 1, S. 49-69
- [Bia08] Biagiotti, L.; Melchiorri, C.: Trajectory Planning for Automatic Machines and Robots, Springer, 2008
- [Dan06] Dannehl, Fuchs: Flatness-Based Control of an Induction Machine Fed via Voltage Source Inverter - Concept, Control Design and Performance Analysis 32nd Annual Conference on Industrial Electronics (2006), S. 5125-5130
- [Hag04] Hagenmeyer, V.; Zeitz, M.: Flachheitsbasierter Entwurf von linearen und nichtlinearen Vorsteuerungen, at-Automatisierungstechnik 52 (2004) 1, S. 3-12
- [Hei06] Heimann; Gerth; Popp: Mechatronik, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, Hannover, 2006
- [Kli13] Klinkenbuß, D.: Adaptive modellbasierte Einstellung von industriell eingesetzten Reglern mechatronischer Antriebssysteme, Masterarbeit, Universität Hannover, 2013
- [Lam05] Lambrechts, P.; Boerlage, M.; Steinbuch, M.: Trajectory planning and feedforward design for electromechanical motion systems, Control Engineering Practice 13 (2005), S. 145-157
-

- [Lee13] Lee; Kim; Choi: Convolution-Based Trajectory Generation Methods Using Physical System Limits, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 135 (Januar 2013)
- [Lei14] Leica Geosystems AG: Datenblatt Laser-Tracker LTD700, Unterentfelden, Schweiz [http://www.leica-geosystems.com/media/new/product_solution/Ref64_LTD700_800_Data_sheet.pdf] (Zugriff: 26.03.2014).
- [Len13a] Lenze Automation GmbH: Softwarehandbuch Lenze Engineer High Level (2013) [http://download.lenze.com/TD/Engineer__Engineer%20v2.19__v2-12__DE.pdf] (Zugriff: 26.03.2014).
- [Len13b] Lenze Vertrieb GmbH: Katalog L-Force Servo-Motoren (2013) [http://www.lenze.com/fileadmin/lenze/documents/de/Katalog/CAT__13376744__L-force_Servo_motors__de.pdf] (Zugriff: 26.03.2014).
- [Len13c] Lenze SE: Katalog Servo Drives 9400 (2013) HighLine [http://www.lenze.com/fileadmin/lenze/documents/de/Katalog/15593739_Katalog_Servo_Drives_9400_HighLine_de-DE.pdf] (Zugriff: 26.03.2014).
- [Lév09] Lévine, J.: Analysis and Control of Nonlinear Systems, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2009
- [Lil12] Lilge, T.: Regelungstheorie: Nichtlineare Systeme, Vorlesungsskript, IRT, Universität Hannover, Hannover, 2012
- [Lun05] Lunze, J.: Regelungstechnik 1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Bochum, 2005
- [Lun10] Lunze, J.: Regelungstechnik 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Bochum, 2010
- [vMer04] Merwe, R.: Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models, Dissertation, 2004
- [Per09] Perneder, R.: Handbuch der Zahnriemtechnik, Springer Verlag, Heidelberg, 2009
- [Pos11] Post, B.; Mariuzza, A.: Flatness-based control of flexible motion systems, Dynamic Systems and Control Conference, 2011
- [Rud03] Rudolph, J.: Beiträge zur Flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension, Shaker Verlag, Aachen, 2003
-

-
- [Rud05]** Rudolph, J.: Flachheit: Eine nützliche Eigenschaft auch für Systeme mit Totzeiten, *at-Automatisierungstechnik* 53 (2005) 4-5, S. 178-188
- [Th011]** Thomsen, S.; Fuchs, F.W.: Design and analysis of a flatness-based control approach for speed control of drive systems with elastic couplings and uncertain loads, *14th European Conference on Power Electronics and Applications* (2011), S. 1-10
- [Thü07]** Thümmel, M.: Modellbasierte Regelung mit nichtlinearen inversen Systemen und Beobachtern von Robotern mit elastischen Gelenken, TU München, 2007
- [Ver13]** Verhoeven, G.; Anritter, F.: Ein Werkzeug zur automatisierten Flachheitsanalyse nichtlinearer Systeme, *at-Automatisierungstechnik* 61 (2013) 1, S. 60-71
- [Zei10]** Zeitz, M.: Differenzielle Flachheit: Eine nützliche Methodik auch für lineare SISO-Systeme, *at-Automatisierungstechnik* 58 (2010) 1, S. 5-13
-

A Anhang

A.1 Versuchsdurchführung und -auswertung am Aktorik-Prüfstand

Im Folgenden wird die Vorgehensweise zur Durchführung der in Kapitel 5 vorgestellten Versuche erläutert. Die Vorbereitung wird in Kap. A.1.1 dargestellt. Die Auswertung wird in Kap. A.1.2 bis A.1.5 behandelt. In Kap. A.1.6 wird anschließend die Durchführung von Simulationen dargestellt. Dabei wird insbesondere auf die in dieser Arbeit erstellte MATLAB -Toolbox eingegangen. MATLAB-Funktions- oder Dateinamen werden mit einer anderen Schriftart hervorgehoben.

A.1.1 Generierung der Vorsteuerung

Der erste Schritt zur Durchführung eines Versuchs ist die Berechnung der Vorsteuerung. Dazu werden in einem Generierungsskript die wesentlichen Einstellungen wie Schlittenmasse, Trajektorienart, Verschleißzeiten, Beschleunigungsmoment sowie weitere Parameter hinterlegt. Mit diesen Einstellungen wird die Trajektorien-Generierungsfunktion (`trajgen2.m`) für jede der zu untersuchenden Einstellungen ausgeführt.

Innerhalb dieser Funktion wird zunächst die Trajektorie des flachen Ausgangs wie in Kap. 4.3.1 beschrieben erstellt. Dazu werden die Polynom- und Trapezprofilalgorithmen aus Kap. 4 verwendet (`Sys_Traj_nAbl.m`). Anschließend wird das gewählte Systemmodell aus einer Liste von Zustandsraumdarstellungen (`ZRSysteme.m`) geladen. Jedes Modell aus Kap. 3.5 wird darin in einer Struktur gespeichert. Die Einträge der Struktur sind Tabelle A.1 zu entnehmen und enthalten entweder numerische Fließkommazahlen („double“) oder symbolische Ausdrücke (MATLAB Symbolics Toolbox). Die Behandlung der Systemmodelle in dieser standardisierten Struktur erlaubt einen modularen Aufbau der Funktionen und ermöglicht die Nutzung von standardisierten Matlab-Schnittstellen. Dazu zählen insbesondere die Ersetzung von Ausdrücken (`subs`), die Erstellung von Funktionen aus symbolischen Ausdrücken (`matlabFunction`) und die automatische Erstellung von Simulink-Blöcken (`matlabFunctionBlock`).

Tabelle A.1: Einträge der Systemmodell-Struktur

Feld	Typ	Bedeutung
f	Sym.	ZR-Systemfunktion f
g	Sym.	ZR-Eingangsfunktion g
h	Sym.	ZR-Ausgangsfunktion h
x	Sym.	Zustandsvektor $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$
xmax, xmin	Num.	Grenzen für die einzelnen Systemzustände
xz	Sym.	Zustandstransformation $\mathbf{x} = \Psi_x(\mathbf{z})$
zx	Sym.	Zustandstransformation $\mathbf{z} = \Psi_z(\mathbf{x})$
umax	Num.	Maximaler Wert der Eingangsgröße
uz	Sym.	Transformation $u = \Psi_u(\mathbf{z})$
yz	Sym.	Transformation $\mathbf{y} = \Psi_y(\mathbf{z})$
yf	Sym.	Flacher Ausgang $y_f = z_1(\mathbf{x})$
p	Sym.	Systemparameter (symbolisch)
p_num	Num.	Zahlenwerte der Parameter (numerisch)
ps	Sym.	Einstellparameter der Vorsteuerung
z	Sym.	Flacher Ausgang und Ableitungen $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_{n+1}]^T$
zmax	Num.	Maximalwerte des flachen Ausgangs

In der erstellten Toolbox ist die automatische Berechnung des flachen Ausgangs für lineare Systeme mit der in Kap. 2.1.3 genannten Methode implementiert. Ausgehend vom gespeicherten Zustandsraummodell werden die Transformationen Ψ mit der Methode aus Kap. 2.6.1 durchgeführt (`TrafoFlachAusg.m`). Mit diesen Transformationen werden nun die Sollwerte für Systemeingang (Drehmoment) und Systemausgang (Rotorwinkel) berechnet (`fbvs_Werte.m`). Die so erstellten Vorsteuerungstrajektorien werden in einer Struktur mit den Feldern Zeit (`t`), Position (`s`), Geschwindigkeit (`v`), Drehmoment (`tau`) und flacher Ausgang (`z`) als Matlab-Datendatei (`.mat`) gespeichert. Zusätzlich erfolgt die Speicherung der verwendeten Systemmodelle und -parameter in einer Einstellungsdatei.

Um unterschiedliche Trajektorien zu einem Versuch zusammenzufassen, werden die Einzeltrajektorien in der gewünschten Reihenfolge aneinandergelagert und mehrfach wiederholt (`AktPs_trajzusammenstellen_Fcn.m`). Die gesamte Trajektorie wird dann im oben genannten Format unter einer eindeutigen Versuchsnummer gespei-

chert (z. B. „FVS_V123“). Dabei werden auch die Zeitpunkte gespeichert, an denen jeweils eine neue Trajektorie beginnt (Index-Matrix I_Start). Dies erleichtert die spätere Auswertung.

Bei Vergleichsversuchen ist es wichtig, dass die Versuche direkt nacheinander durchgeführt werden, damit die Reibung des Prüfstands und andere zeitveränderliche Einflussgrößen möglichst konstant sind. Zusätzlich werden vor Versuchen Referenzmessungen durchgeführt, bei denen immer dieselbe Trajektorie verwendet wird. Durch den Vergleich der Referenzmessungen ist eine Einschätzung der Ergebnisse leichter möglich.

A.1.2 Durchführung des Versuchs und Speicherung der Messwerte

Zur Durchführung eines Versuchs wird die vorher gespeicherte Trajektorienstruktur als Variable (`traj`) in den MATLAB-Workspace geladen und das in Kap. 3.1 genannte Simulink-Modell kompiliert und auf den Target-PC geladen. Durch Bedienen der entsprechenden Schalter im Simulink-Modell wird zunächst die Antriebsposition referenziert, die Startposition der Trajektorie angefahren und zuletzt die Trajektorie gestartet. Nach Beendigung des Versuchs werden die Messwerte unter dem Versuchsnamen und einer laufenden Nummer gespeichert (z. B. „FVS_V123Nr1“), um mehrfache Versuchsdurchführungen einfacher auszuwerten (`auswert.m`). Zusätzlich zu den Rohdaten wird die Ausführungszeit des Modells gespeichert. Hier ist darauf zu achten, dass die Ausführungszeit stets unterhalb der Abtastzeit des Modells von 1 ms bleibt. Ansonsten wird die Echtzeitbedingung verletzt, was Fehler in der Übertragung der Vorsteuerungsdaten zur Folge hat.

Neben den antriebsseitigen Messdaten wird der Regler mit dem Programm `Lenze Engineer HighLevel` so programmiert, dass auch die Sollwerte über EtherCAT zurückgegeben werden. Aus der Kreuzkorrelation der zurückgegebenen mit der gespeicherten Sollposition werden die Messwerte zeitlich den gespeicherten Schnittmarken zugeordnet (`AktPs_MesswerteLaden.m`).

Parallel zum Starten der Trajektorie wird die Lasertracker (LT)-Messung mit dem Programm `Leica Axyz` gestartet. Dort wird als Abtastzeit 0,01 s gewählt. Die LT-Messdaten beinhalten die Zeit sowie die x-, y- und z-Position in LT-Koordinaten und werden in einer Textdatei gespeichert. Falls eine Trajektorie länger als die maximale LT-Aufnahmedauer von 100 s dauert, wird die LT-Messung mehrfach hinter-

einander gestartet und die Zeiten manuell angepasst (AktPs_LtMessung_Rohdaten.m).

A.1.3 Registrierung der Lasertracker-Messung

Die vorliegenden Lasertracker-Messdaten müssen vor der Versuchsauswertung sowohl räumlich als auch zeitlich in die Koordinaten der antriebsseitigen Messung transformiert werden. Zur zeitlichen Synchronisierung wird zunächst der Anfangszeitpunkt der LT-Messung manuell so verschoben, dass die Bewegung zeitgleich in beiden Koordinatensystemen stattfindet (AktPs_LtMessung_laden.m). Die örtliche Transformation des LT-Koordinatensystems (x_{LT}, y_{LT}, z_{LT}) in die Antriebskoordinaten (x_A, y_A, z_A) erfolgt über eine Registrierung von Referenzpunkten (engl. „Fiducial Markers“) mit einem auf Singulärwertzerlegung basierenden Algorithmus. Dabei handelt es sich um eine in der Medizintechnik angewendete Technik zur Kombination von unterschiedlichen Bildern.

Zur Registrierung werden drei Punkte verwendet: Der Anfangspunkt der Trajektorie (links), der Endpunkt (rechts) und ein Punkt dazwischen, der bei einem Drittel des zurückgelegten Weges liegt. Mit dem Algorithmus wird die Transformationsmatrix ${}^A\mathbf{T}_{LT}$ berechnet, die Punkte \mathbf{r} zwischen den Koordinatensystemen ohne Streckung gem. Gl. (A.1) umrechnet.

$${}_{(A)}\mathbf{r} = {}^A\mathbf{T}_{LT} \cdot {}_{(LT)}\mathbf{r} \quad (\text{A.1})$$

Aufgrund von Ungenauigkeiten können nicht alle drei gemessenen Punkte mit derselben Transformationsmatrix exakt aufeinander abgebildet werden. Der Registrierungsfehler \mathbf{FRE}_i (Fiducial Registration Error) des Referenzpunktes \mathbf{r}_i wird mit Gl. (A.2) angegeben.

$$\mathbf{FRE}_i = {}^A\mathbf{T}_{LT} \cdot {}_{(LT)}\mathbf{r} - {}_{(A)}\mathbf{r} \quad (\text{A.2})$$

Der gesamte Registrierungsfehler $\mathbf{FRE}_{\text{Ges}}$ wird über alle drei Punkte gem. Gl. (A.3) gemittelt und liegt bei den durchgeführten Messungen unter 1 mm.

$$\mathbf{FRE}_{\text{Ges}} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (\|\mathbf{FRE}_i\|)^2} \quad (\text{A.3})$$

Der $\mathbf{FRE}_{\text{Ges}}$ -Wert mittelt den Fehler über alle drei Koordinatenachsen. Für die Messung der Schlittenposition ist allerdings nur der Fehler der Weg-Achse des Prüf-

stands (x_A) entscheidend. Der Fehler in dieser Achse weist ohne weitere Korrekturen einen Wert von ca. 1 mm auf. Aufgrund des Messprinzips ist die Positionsmessung durch den Lasertracker als exakt anzunehmen, während die Messung der antriebsseitigen Position nur inkrementell aus dem Rotorwinkel erfolgt. Im nächsten Schritt wird daher der mit beiden Messungen zurückgelegte Weg h ermittelt und der wirksame Radius der antreibenden Zahnscheibe mit Gl. (A.4) angepasst. Damit wird anstelle des ursprünglich angenommenen Wertes r von genau 16,00 mm der Wert r_{Korr} von ca. 16,02 mm verwendet. Bei einer zurückgelegten Strecke von 1,5 m verursacht diese geringe Abweichung einen Fehler der Positionsmessung von ca. 2 mm. Durch die Korrektur werden die antriebsseitigen Messwerte so gestreckt, dass der Fehler in der x_A -Achse zu Null wird. Eine Aufteilung des Fehlers in Ungenauigkeit der Messmittel und falschen Radius ist aufgrund der nur mit Winkel-Inkrementen durchgeführten antriebsseitigen Messung nicht möglich.

$$r_{\text{Korr}} = r \cdot \frac{h_{\text{LT}}}{h_A} \quad (\text{A.4})$$

A.1.4 Vergleich von Einzelwiederholungen

Zur Auswertung wird der gesamte Zeitverlauf der Messwerte in unterschiedliche Einzeltrajektorien aufgeteilt. Um ein statistisch belastbares Ergebnis zu erhalten, werden mindestens fünf Wiederholungen jeder Trajektorie gefahren. Aufgrund der sehr hohen Wiederholgenauigkeit des Versuchsprüfstands sind z. B. durch Haft-Gleitreibung oder Zahnriemenüberspringen entstehende Ausreißer eindeutig erkennbar. Diese Ausreißer werden manuell bestimmt und in einer Liste hinterlegt (`AktPs_Wdh_ignorieren.m`). Die Schnittmarken für einzelnen Trajektorien und Wiederholungen werden aus den gespeicherten Start-Indizes geladen (`AktPs_Teilversuch_Extrahieren.m`). Zur Auswertung werden alle Einzelwiederholungen übereinander gelegt (siehe Bild 6.4) und ein Mittelwert gebildet (`AktPs_MittelwertTraj.m`) (siehe Auswertungsbilder in Kap. 5).

A.1.5 Bestimmung von Auswertungskennzahlen

Nach der Zerlegung der gesamten Messwerte in Trajektorien und Wiederholungen werden Bilder aller Messgrößen automatisch erstellt (siehe in dieser Arbeit gezeigte Mess- und Sollgrößenverläufe). Anschließend werden u. a. die in Kapitel 5 eingeführten Kennzahlen berechnet (`AktPs_Versuchsauswertung.m`). Schließlich werden

die Kennzahlen automatisch in einer Excel-Tabelle zur einfacheren Ergebnisübersicht gespeichert (`xlswrite`). Dazu werden die Kennzahlen für jede Wiederholung berechnet und daraus der Mittelwert gebildet. Zusätzlich wird für jede Kennzahl das 95 %-Konfidenzintervall der Student-t-Verteilung angegeben, die eine gute Einschätzung der Streuung von normalverteilten Größen mit geringem Stichprobenumfang bietet. Die Benennungskonvention aus Kap. A.1.2 wird dabei um eine Nummer für die Trajektorie ergänzt (z. B. „FVS_V123Nr1T02“).

A.1.6 Simulation von Systemen

Für Simulationen der durchgeführten Versuche wie in Kap. 5.6 wird ein Simulink-Modell des Regelkreises (siehe Bild 2.4) verwendet, das automatisiert an die Struktur aus Kap. A.1.1 angepasst werden kann (`sl_fbtr.m`, `sl_nlzr.m`). Durch die symbolische Berechnung ist eine schnelle Änderung von Modellbestandteilen und Parametern möglich, ohne händisch in das Simulink-Modell eingreifen zu müssen, was potentielle Fehlerquellen erheblich einschränkt.

A.2 Bestimmung der Federsteifigkeit einer Blattfeder

Im Folgenden werden in Kap. A.2.1 und A.2.2 zwei Methoden zur Ermittlung der Steifigkeit der in Kap. 5.2 verwendeten Blattfeder angegeben.

A.2.1 Berechnung anhand geometrischer Daten

Die Berechnung der Steifigkeit der in Bild A.1 dargestellten Blattfeder erfolgt mit Gl. (A.5). Dazu wird die Biegelinie eines Balkens mit in z-Richtung angreifender Kraft verwendet. Für die Steifigkeit sind das Flächenträgheitsmoment in y-Richtung (I_{yy}) und die frei schwingende Länge l maßgeblich. Die verwendeten Formelzeichen sind in Tabelle A.2 angegeben.

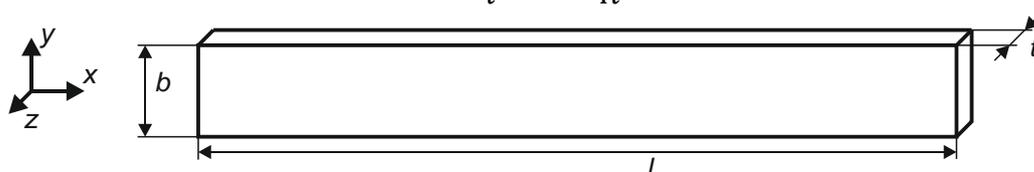
$$k_t = \frac{3EI_{yy}}{l^3} = \frac{Ebt^3}{4l^3} \quad (\text{A.5})$$


Bild A.1: Geometrische Abmessungen der Blattfeder

Tabelle A.2: Geometrische Größen der verwendeten Blattfeder

Größe	Formelzeichen	Gemessener Wert
Breite	b	24 mm
Tiefe	t	2 mm
Freie Länge	l	200 mm
Elastizitätsmodul (Stahl)	E	210 kNmm ⁻²
Steifigkeit	k_t	1,26 Nmm ⁻¹

Aufgrund des kubischen Einflusses der Tiefe der Blattfeder haben Messfehler eine große Auswirkung auf die berechnete Steifigkeit. Bereits ein Messfehler von 0,1 mm hat eine Abweichung der Steifigkeit von 15 % zur Folge. Die mit den geometrischen Daten berechnete Steifigkeit weicht sehr stark von der im nächsten Schritt aus der Eigenfrequenz berechneten Steifigkeit ab. Die Verwendung der obigen Steifigkeit in der Vorsteuerung führt zu starken Schwingungen der Zusatzmasse. Zur Identifizierung der Steifigkeit ist daher die Eigenfrequenz besser geeignet (siehe Kap. A.2.2).

A.2.2 Berechnung aus dem gemessenen Ausschwingverhalten

Unter Vernachlässigung der antriebsseitigen Massenträgheit berechnet sich die Eigenfrequenz der Blattfeder mit Zusatzmasse m gem. Gl. (A.6).

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_t}{m}} \quad (\text{A.6})$$

Die Schwingfrequenz f wird aus der Lasertracker-Positionsmessung zu 7,1 Hz bestimmt. Mit einer gemessenen Zusatzmasse von 0,360 kg ergibt sich eine Steifigkeit von 716 Nm⁻¹ gem. Gl. (A.7). Der Einfluss von Messfehlern ist mit dieser Bestimmungsmethode deutlich geringer als mit der geometrischen Methode aus Kap. A.2.1, da die Frequenz nur quadratisch und die Masse linear in die Gleichung eingeht.

$$k = (2\pi f)^2 m \quad (\text{A.7})$$

A.3 Bilder der Versuchsergebnisse

A.3.1 Trapez-Profil mit mittlerer Transitionszeit

Unter den in Kap. 5.1.4 vorgestellten Ergebnissen für Versuche mit Schlittenmasse 38 kg wird mit einer 50 ms-Trapeztrajektorie die geringste Positionierdauer erreicht. Die antriebs- und Lastseitigen Messwerte dazu sind in Bild A.2 angegeben.

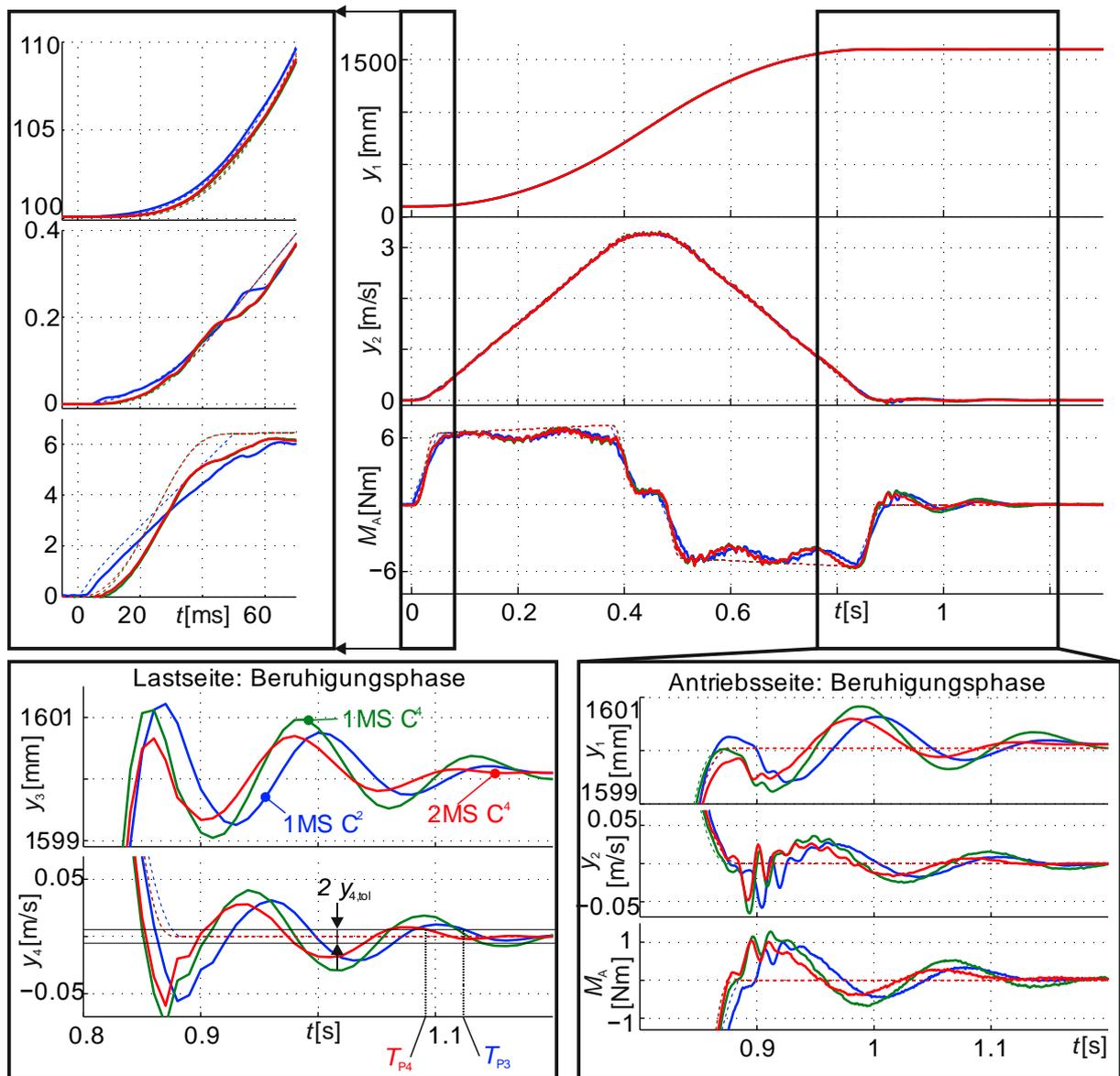


Bild A.2: Ergebnisvergleich mit 50 ms-Trapeztrajektorie und $m_L=38$ kg

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Ort, Datum

Unterschrift