



Universität Hannover
Institut für Energieversorgung und
Hochspannungstechnik

Vorlesung Elektrische Energieversorgung

Vorlesungsskript

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

Inhalt

Elektrische Energieversorgung I

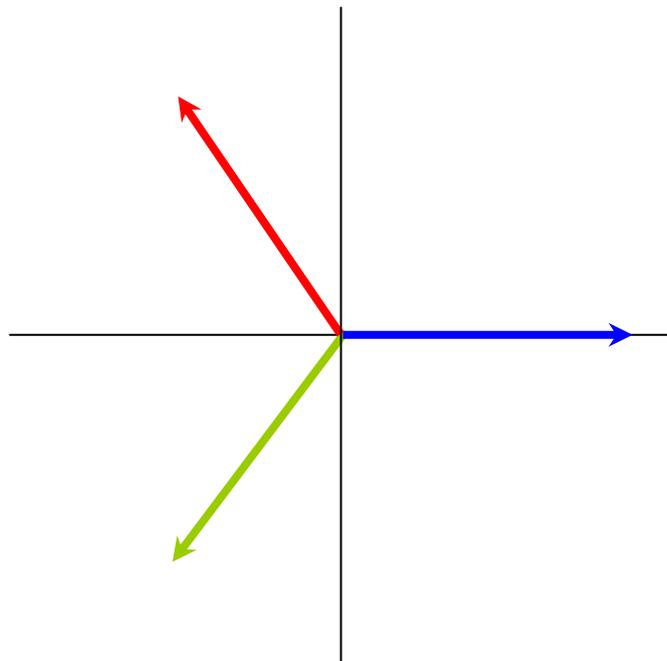
- Grundlagen
- Generatoren
- Transformatoren
- Freileitungen

Elektrische Energieversorgung II

- Fehler
- Stabilität
- Sternpunktterdung
- Netzregelung



Universität Hannover
Institut für Energieversorgung und
Hochspannungstechnik



Vorlesung Elektrische Energieversorgung I

Skript Grundlagen

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

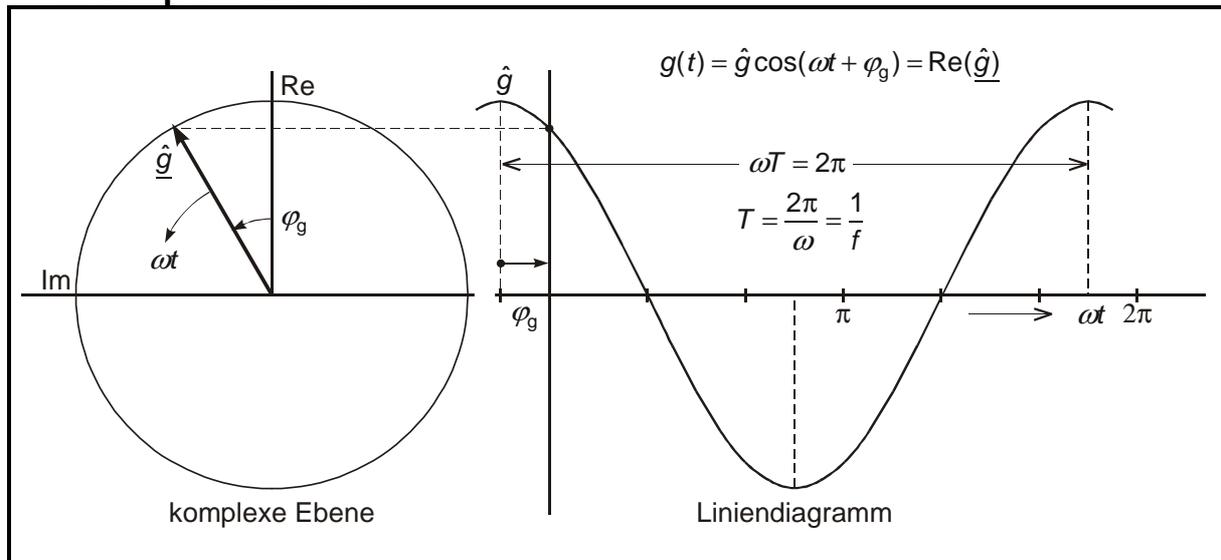
Inhaltsverzeichnis

1	Komplexe Größen	1
1.1	Komplexe Ebene	1
1.2	Zeiger	1
1.3	Spezielle Zeiger, Versoren	2
1.4	Zeigerdrehungen mit a und j	2
1.5	Spezielle Werte der Winkelfunktionen	3
1.6	Umrechnungsformeln von Winkelfunktionen	3
2	Matrizen	4
2.1	Matrizenschreibweise von Gleichungssystemen	4
2.2	Spezielle Matrizen	4
2.3	Rechenregeln für Matrizen	5
2.4	Eigenwerte und Inverse spezieller Matrizen	6
2.5	Eigenschaften der Matrizen	7
3	Verbraucherzählpeilsystem (VZS)	8
3.1	Zählpeile	8
3.2	Impedanz und Admittanz.....	8
3.3	Leistung im Dreileitersystem	8
3.4	Zeigerbild für den allgemeinen Zweipol	9
3.5	Wirk- und Blindstrom	9
3.6	Drehmomente	10
3.7	Verkettete Wicklungen.....	10
4	Symmetrisches Dreileitersystem	11
4.1	Symmetrisches Dreileitersystem	11
4.2	Strang-Ersatzschaltung	12
5	Unsymmetrisches Dreileitersystem	13
5.1	Transformation der Leitergrößen in modale Größen (Modaltransformation)	13
5.2	Symmetrische Komponenten.....	14
5.3	Ersatzschaltungen der Symmetrischen Komponenten.....	15
5.4	Symmetrische Komponenten für spezielle Unsymmetriefälle.....	16
5.5	Transformationsbeziehungen in bezugskomponenteninvarianter Form.....	17
5.6	Transformationsbeziehungen in leistungsinvarianter (normierter) Form	17
5.7	Raumzeiger in ruhenden Koordinaten (α , β -Koordinaten).....	18
5.8	Raumzeiger in umlaufenden Koordinaten (d , q -Koordinaten)	18
5.9	Transformationsbeziehungen in bezugskomponenteninvarianter Form.....	19
5.10	Strom-Spannungsbeziehungen an der Unsymmetriestelle (Fehlerstelle)	20
5.11	Schaltung der Symmetrischen Komponenten für Serien- und Parallelfehler.....	21
5.12	Fehlerströme und -spannungen in Symmetrischen Koordinaten.....	22
5.13	Fehlerbedingungen in Diagonal-Koordinaten ($\alpha\beta$ - Koordinaten).....	24
5.14	Fehlerströme und -spannungen in Diagonal-Koordinaten	25
5.15	Querfehler mit Raumzeigern in Ständer-Koordinaten.....	26
5.16	Unsymmetrische Belastung (Fehler mit Fehlerimpedanz) in SK	27

Hinweis: Das Skript ersetzt nicht die Vorlesung und umgekehrt. Im Skript sind einige Ausführungen, insbesondere mathematische Ableitungen ausführlicher dargestellt, während in der Vorlesung mehr Wert auf das Verständnis gelegt wird. Die mit einem * gekennzeichneten Kapitel sind zur Vertiefung gedacht.

1 Komplexe Größen

1.1 Komplexe Ebene



1.2 Zeiger

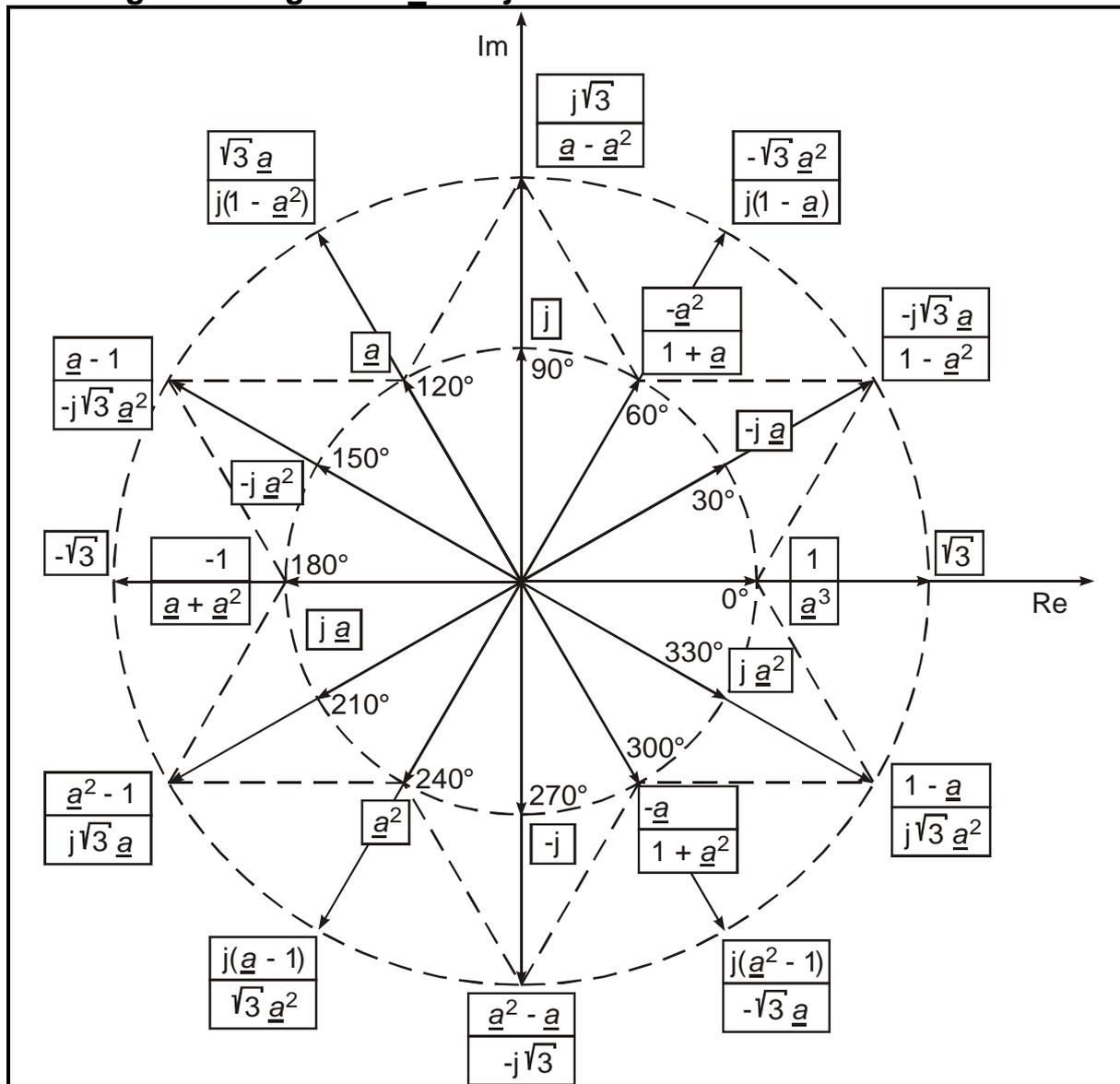
$\underline{\hat{g}} = \hat{g} e^{j(\omega t + \varphi_g)} = \hat{g} \angle (\omega t + \varphi_g)$ $= \text{Re}(\underline{\hat{g}}) + j \text{Im}(\underline{\hat{g}}) = \hat{g} (\cos(\omega t + \varphi_g) + j \sin(\omega t + \varphi_g))$	Rotierender Amplitudenzeiger
$\hat{g} = \sqrt{\text{Re}(\underline{\hat{g}})^2 + \text{Im}(\underline{\hat{g}})^2}$	Betrag = Amplitude
$\varphi_g = \arctan \frac{\text{Im}(\underline{\hat{g}})}{\text{Re}(\underline{\hat{g}})}$	Anfangswinkel
$\underline{\hat{g}}^* = \hat{g} e^{-j(\omega t + \varphi_g)} = \text{Re}(\underline{\hat{g}}) - j \text{Im}(\underline{\hat{g}})$	konjugiert komplexer Zeiger
$\underline{G} = \frac{\underline{\hat{g}}}{\sqrt{2} e^{j\omega t}} = \frac{\hat{g}}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_g} = G e^{j\varphi_g} = G \angle \varphi_g$ $= \text{Re}(\underline{G}) + j \text{Im}(\underline{G}) = G (\cos \varphi_g + j \sin \varphi_g) = G_{\perp} + j G_{\parallel}$	ruhender Effektivwertzeiger = Zeiger
$G = \sqrt{G_{\perp}^2 + G_{\parallel}^2}$	Betrag = Effektivwert
$\varphi_g = \arctan \frac{G_{\parallel}}{G_{\perp}}$	Winkel
$\underline{G}^* = G e^{-j\varphi_g} = G_{\perp} - j G_{\parallel}$	konjugiert komplexer Zeiger
	Zeigerbild

1.3 Spezielle Zeiger, Versoren

$j = e^{j\pi/2} = 1 \angle 90^\circ$	Imaginäre Einheit
$1 = e^{j0} = 1 \angle 0^\circ$	Einheitszeiger
$\underline{a} = e^{j2\pi/3} = 1 \angle 120^\circ$ $\underline{a}^2 = e^{j4\pi/3} = 1 \angle 240^\circ = \underline{a}^* = \frac{1}{\underline{a}} = e^{-j2\pi/3}$	Einheitsdreher (Versor)

$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$

1.4 Zeigerdrehungen mit \underline{a} und j



1.5 Spezielle Werte der Winkelfunktionen

α	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$1 \angle \alpha$	1	$-j\mathbf{a}$	$-\mathbf{a}^2$	j	\mathbf{a}	$-j\mathbf{a}^2$	-1	$j\mathbf{a}$	\mathbf{a}^2	-j	$-\mathbf{a}$	$j\mathbf{a}^2$	1

1.6 Umrechnungsformeln von Winkelfunktionen

$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$	EULERSche Formel
$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$	
$\sin \alpha = -\frac{j}{2}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$	
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	Additionstheoreme
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	
$\cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$	
$\cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$	
$\sin(\alpha - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$	
$\sin(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$	
$\cos \alpha + \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = 0$	
$\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha - \frac{2\pi}{3}) + \cos^2(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2}$	
$\cos \alpha \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) +$ $+ \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \cos \alpha = -\frac{3}{4}$	
$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$	
$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$	
$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$	
$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$	
$\cos \alpha \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$	
$\cos \alpha \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) +$ $+ \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \cos \alpha = -\frac{3}{4}$	
$\cos^2 \alpha \cos^2(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \cos^2(\alpha + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{8} \cos^2(3\alpha)$	
$\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$	Hyperbelfunktionen
$\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$	
$\cosh \alpha + \sinh \alpha = e^\alpha$	
$\cosh \alpha - \sinh \alpha = e^{-\alpha}$	
$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$	
$\tanh \alpha = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \frac{1}{\coth \alpha}$	

2 Matrizen

2.1 Matrixschreibweise von Gleichungssystemen

$ \begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1i} x_i + \dots + a_{1n} x_n &= y_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2i} x_i + \dots + a_{2n} x_n &= y_2 \\ \vdots & \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ii} x_i + \dots + a_{in} x_n &= y_i \\ \vdots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{ni} x_i + \dots + a_{nn} x_n &= y_n \end{aligned} $	allgemeine Schreibweise eines Gleichungssystems n-ter Ordnung
$ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} $	ausführliche Matrixschreibweise
$ \mathbf{A} \mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_i \ \dots \ \mathbf{a}_n] \mathbf{x} = \mathbf{y} $	symbolische Matrixschreibweise

2.2 Spezielle Matrizen

$\mathbf{A} = (a_{ik})^{m \times n}$	allgemeine Matrix mit m Zeilen und n Spalten
$\mathbf{a}_{Si} = [a_{1i} \ a_{2i} \ \dots \ a_{ii} \ \dots \ a_{ni}]^T$	i-ter Spaltenvektor
$\mathbf{a}_{Zi} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ii} \ \dots \ a_{in}]$	i-ter Zeilenvektor
$\mathbf{D} = \text{diag}(a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{ii} \ \dots \ a_{nn})$	Diagonalmatrix
$\mathbf{E} = \text{diag}(1 \ 1 \ \dots \ 1 \ \dots \ 1)$	Einheitsmatrix
$\underline{\mathbf{A}} = (\underline{a}_{ik})^{m \times n}$	komplexe Matrix
$\underline{\mathbf{A}}^* = (\underline{a}_{ik}^*)^{m \times n}$	zu $\underline{\mathbf{A}}$ konjugiert komplexe Matrix
$\mathbf{A}^T = (a_{ki})^{n \times m}$	zu \mathbf{A} transponierte Matrix
$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (a_{ik})^{m \times m}, \ a_{ki} = a_{ik}$	\mathbf{A} ist symmetrische Matrix
$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$	\mathbf{A} ist schiefsymmetrische Matrix
$\underline{\mathbf{A}}^{*T}$	zu $\underline{\mathbf{A}}$ adjungierte Matrix
$\underline{\mathbf{A}}^{*T} = \underline{\mathbf{A}}$	$\underline{\mathbf{A}}$ ist hermitesche Matrix
\mathbf{A}^{-1}	zu \mathbf{A} inverse Matrix
$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$	\mathbf{A} ist orthogonale Matrix
$\underline{\mathbf{A}}^{*T} = \underline{\mathbf{A}}^{-1}$	$\underline{\mathbf{A}}$ ist unitäre Matrix
$\underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{A}}^{*T} = \underline{\mathbf{A}}^{*T} \underline{\mathbf{A}}$	$\underline{\mathbf{A}}$ ist normale Matrix

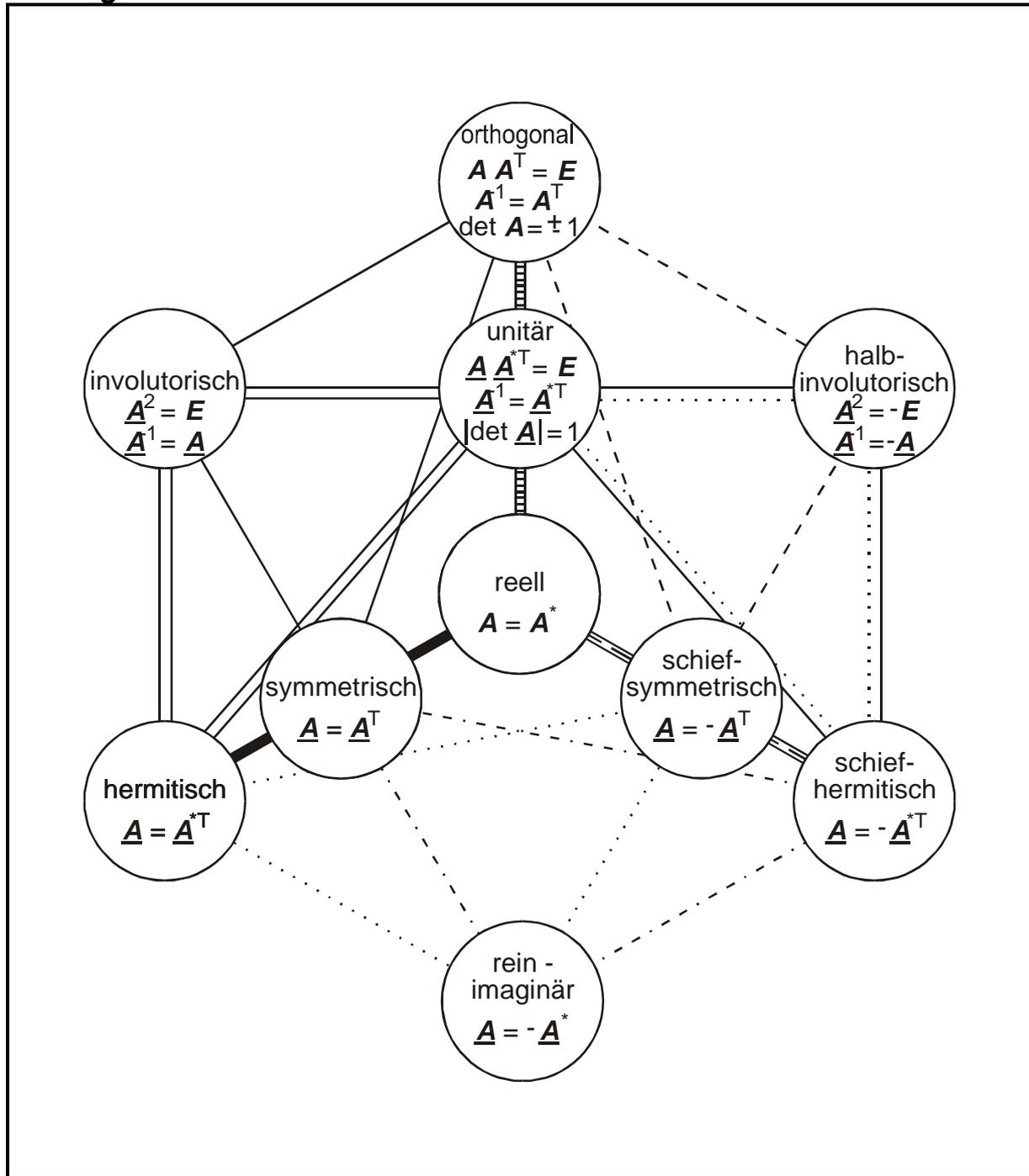
2.3 Rechenregeln für Matrizen

$A + B = B + A = C$	Addition $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$
$AB = C$	Multiplikation $c_{ik} = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_k = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$
$ABC = (AB)C = A(BC)$	Assoziativgesetz
$(A + B)C = AC + BC$	Distributivgesetz
$C(A + B) = CA + CB$	
$AB \neq BA$	Kommutativgesetz gilt <u>nicht</u> , auch nicht für Diagonalmatrix
$AD \neq DA$	
$DA = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \dots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{bmatrix}$	Multiplikation von A mit einer Diagonalmatrix von <i>links</i>
$AD = \begin{bmatrix} a_{11} d_1 & a_{12} d_2 & \dots & a_{1n} d_n \\ a_{21} d_1 & a_{22} d_2 & \dots & a_{2n} d_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} d_1 & a_{n2} d_2 & \dots & a_{nn} d_n \end{bmatrix}$	Multiplikation von A mit einer Diagonalmatrix von <i>rechts</i>
$Ab = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{c}$	Multiplikation mit einem Spaltenvektor $c_i = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$
$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = c$	Zeilen-Spaltenprodukt. Das Ergebnis ist ein <i>Skalar</i>
$\mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & \dots & a_n b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & \dots & a_n b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 b_n & a_2 b_n & \dots & a_n b_n \end{bmatrix} = \mathbf{C}$	Spalten-Zeilenprodukt oder <i>dyadisches</i> Produkt. Das Ergebnis ist eine <i>Matrix</i>
$kA = Ak = (ka_{ik})^{m \times n}$	Multiplikation mit einem Skalar
$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_i \ \dots \ b_n] = A^{-1}$	Inversion
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	
$AA^{-1} = A^{-1}A = E = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_i \ \dots \ e_n]$	e_i <i>i</i> -ter Spaltenvektor von E Berechnung des <i>i</i> -ten Spaltenvektors der Inversen B durch geordnete Elimination
$Ab_i = e_i$	
$(AB)^T = B^T A^T$	Transposition
$(A + B)^T = A^T + B^T$	
$(A^T)^T = A$	

2.4 Eigenwerte und Inverse spezieller Matrizen

$M = \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{bmatrix}$ $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{bmatrix} A^2 - BC & C^2 - AB & B^2 - AC \\ B^2 - AC & A^2 - BC & C^2 - AB \\ C^2 - AB & B^2 - AC & A^2 - BC \end{bmatrix}$ $\det M = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$ $\lambda_1 = A + \underline{a}B + \underline{a}^2C$ $\lambda_2 = A + \underline{a}^2B + \underline{a}C = \lambda_1^*$ $\lambda_3 = A + B + C$	<p>Zyklisch symmetrische Matrix</p> <p>Inverse</p> <p>Eigenwerte</p>
$M = \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix}$ $M^{-1} = \frac{1}{(A-B)(A+2B)} \begin{bmatrix} A+B & -B & -B \\ -B & A+B & -B \\ -B & -B & A+B \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = A - B$ $\lambda_2 = A - B = \lambda_1$ $\lambda_3 = A + 2B$	<p>Diagonal-zyklisch symmetrische Matrix</p> <p>Inverse</p> <p>Eigenwerte</p>
$M = \begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = +\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA}$ $\lambda_2 = -\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA}$ $\lambda_3 = A + B + C$	<p>Eigenwerte weiterer Matrizen.</p>
$M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) & \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) & \cos \alpha & \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ $\lambda_3 = 0$	<p>Die Eigenwerte sind unabhängig von α. Das Ergebnis folgt aus der vorstehenden Matrix mit $A = \cos \alpha$ usw.</p>

2.5 Eigenschaften der Matrizen



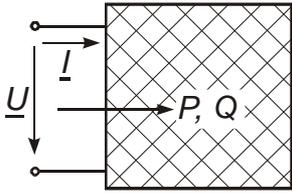
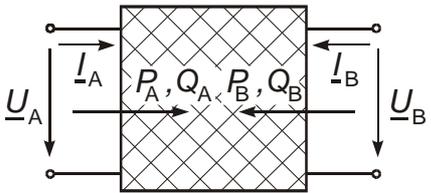
Je 3 mit einer gleichen Linie verbundenen Eigenschaften gehören zusammen.

Beispiele:

- 1) Eine symmetrische, hermitische Matrix ist reell.
- 2) Eine hermitische, unitäre Matrix ist involutorisch.

3 Verbraucherzählfeilsystem (VZS)

3.1 Zählfeile

	Zählfeile am Zweipol
	Zählfeile am Vierpol

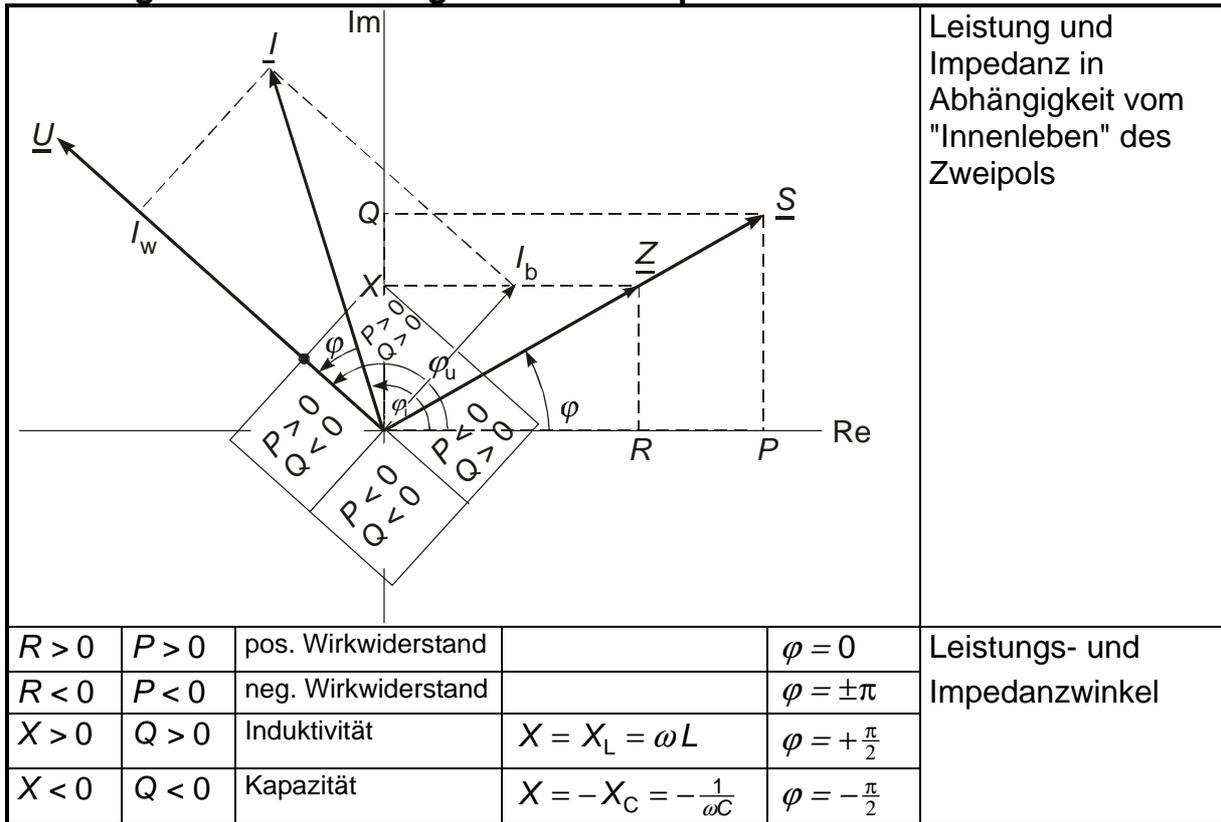
3.2 Impedanz und Admittanz

$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi_Z}$ $= \text{Re}(\underline{Z}) + j \text{Im}(\underline{Z}) = Z(\cos \varphi_Z + j \sin \varphi_Z) = R + jX$ $Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = \arctan \frac{X}{R}$	Impedanz Betrag und Winkel
$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = Y e^{j\varphi_Y}$ $= \text{Re}(\underline{Y}) + j \text{Im}(\underline{Y}) = Y(\cos \varphi_Y + j \sin \varphi_Y) = G + jB$ $Y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad \varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u = \arctan \frac{B}{G}$	Admittanz Betrag und Winkel
$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2} = G + jB$ $G = \frac{R}{Z^2} \quad B = -\frac{X}{Z^2} \quad \varphi_Y = -\varphi_Z$ $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{Y^2} - j \frac{B}{Y^2} = R + jX$ $R = \frac{G}{Y^2} \quad X = -\frac{B}{Y^2} \quad \varphi_Z = -\varphi_Y$	Zusammenhang zwischen Impedanz und Admittanz

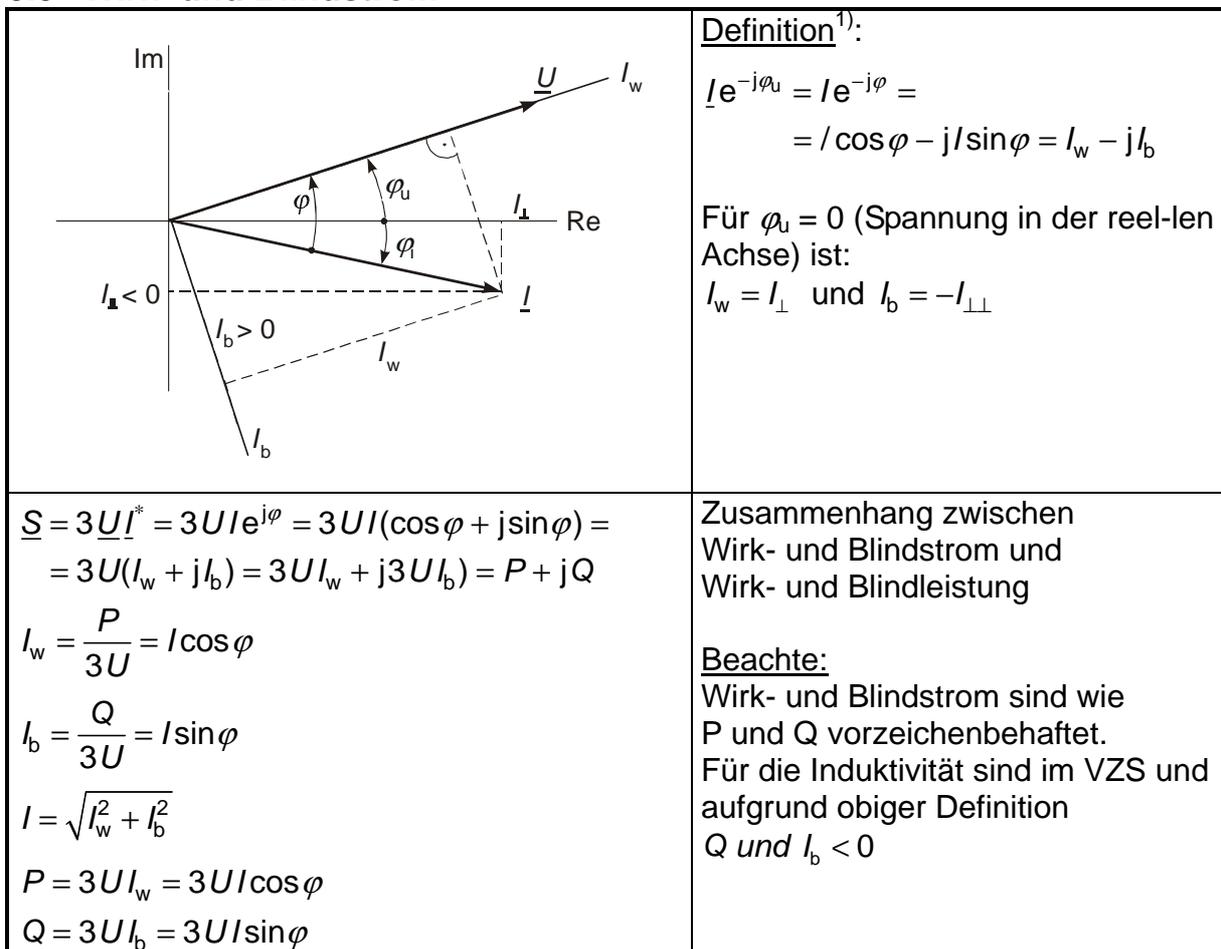
3.3 Leistung im Dreileitersystem

$\underline{S} = 3 \underline{U} \underline{I}^* = 3 U I e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = S e^{j\varphi_S} = P + jQ$ $= 3 \underline{Z} I^2 = 3(R + jX) I^2 = 3 \underline{Y}^* U^2 = 3(G - jB) U^2$ $S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \varphi_S = \arctan \frac{Q}{P}$	Komplexe Leistung im <i>symmetrischen</i> Dreileitersystem Betrag und Winkel
$\varphi_S = \varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = \varphi$	Winkel im VZS
$P = \text{Re}(\underline{S}) = S \cos \varphi = 3 R I^2 = 3 G U^2$ $Q = \text{Im}(\underline{S}) = S \sin \varphi = 3 X I^2 = -3 B U^2$	Wirk- und Blindleistung

3.4 Zeigerbild für den allgemeinen Zweipol

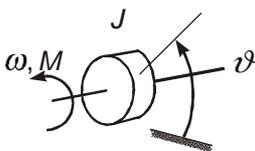


3.5 Wirk- und Blindstrom

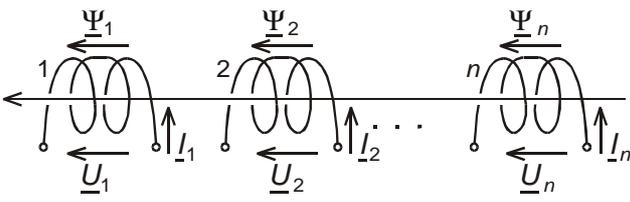


1) Man findet in der Literatur den Blindstrom auch mit umgekehrtem Vorzeichen definiert.

3.6 Drehmomente

	Einheitlicher Zählpfeil für die positiven Drehmomente, Winkel und Winkelgeschwindigkeit
$J\dot{\omega} = \sum M$	Drehmomentengleichung $M > 0$ Beschleunigung $M < 0$ Verzögerung

3.7 Verkettete Wicklungen

	n rechtsgängige Wicklungen positive Zählrichtungen für die Flußverkettungen in Richtung der Wicklungsachse
$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \underline{\Psi}_1 \\ \underline{\Psi}_2 \\ \vdots \\ \underline{\Psi}_n \end{bmatrix}$	Spannungsgleichung
$\begin{bmatrix} \underline{\Psi}_1 \\ \underline{\Psi}_2 \\ \vdots \\ \underline{\Psi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$	Flußverkettungsgleichungen vollständige induktive Verkettung $L_{ik} = L_{ki}$
$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + jX_{11} & jX_{12} & \dots & jX_{1n} \\ jX_{21} & R_2 + jX_{22} & \dots & jX_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ jX_{n1} & jX_{n2} & \dots & R_n + jX_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$	Spannungsgleichung mit Impedanzen $X = \omega L$
$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \dots & \underline{Z}_{1n} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \dots & \underline{Z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}_{n1} & \underline{Z}_{n2} & \dots & \underline{Z}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$ <p>$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$</p>	$\underline{Z}_{ii} = R_{ii} + jX_{ii}$ $\underline{Z}_{ik} = jX_{ik}$ Kurzform

4 Symmetrisches Dreileitersystem

4.1 Symmetrisches Dreileitersystem

	<p>Ersatzschaltung des Dreileitersystems mit vollständig gekoppeltem Leitungselement und nicht gekoppelten Belastungen</p> <p>alle nicht gezeichneten Zählpfeile analog</p>
$\begin{bmatrix} \underline{U}_a^{AB} \\ \underline{U}_b^{AB} \\ \underline{U}_c^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_a^A \\ \underline{U}_b^A \\ \underline{U}_c^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{U}_a^B \\ \underline{U}_b^B \\ \underline{U}_c^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{aa}^{AB} & \underline{Z}_{ab}^{AB} & \underline{Z}_{ac}^{AB} \\ \underline{Z}_{ba}^{AB} & \underline{Z}_{bb}^{AB} & \underline{Z}_{bc}^{AB} \\ \underline{Z}_{ca}^{AB} & \underline{Z}_{cb}^{AB} & \underline{Z}_{cc}^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a^{AB} \\ \underline{I}_b^{AB} \\ \underline{I}_c^{AB} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \underline{U}_a^A \\ \underline{U}_b^A \\ \underline{U}_c^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{qa}^A \\ \underline{U}_{qb}^A \\ \underline{U}_{qc}^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_M \\ \underline{U}_M \\ \underline{U}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{qa}^A \\ \underline{U}_{qb}^A \\ \underline{U}_{qc}^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{Z}_M & \underline{Z}_M & \underline{Z}_M \\ \underline{Z}_M & \underline{Z}_M & \underline{Z}_M \\ \underline{Z}_M & \underline{Z}_M & \underline{Z}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a^A \\ \underline{I}_b^A \\ \underline{I}_c^A \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \underline{U}_a^B \\ \underline{U}_b^B \\ \underline{U}_c^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_a^B & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_b^B & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_c^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a^B \\ \underline{I}_b^B \\ \underline{I}_c^B \end{bmatrix}$	<p>Allgemeine Spannungsgleichungen</p>
$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{aa}^{AB} & \underline{Z}_{ab}^{AB} & \underline{Z}_{ac}^{AB} \\ \underline{Z}_{ba}^{AB} & \underline{Z}_{bb}^{AB} & \underline{Z}_{bc}^{AB} \\ \underline{Z}_{ca}^{AB} & \underline{Z}_{cb}^{AB} & \underline{Z}_{cc}^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s^{AB} & \underline{Z}_g^{AB} & \underline{Z}_g^{AB} \\ \underline{Z}_g^{AB} & \underline{Z}_s^{AB} & \underline{Z}_g^{AB} \\ \underline{Z}_g^{AB} & \underline{Z}_g^{AB} & \underline{Z}_s^{AB} \end{bmatrix}$	<p>Symmetriebedingungen</p> <p>1) symmetrischer Aufbau der Betriebsmittel</p>
$\begin{bmatrix} \underline{U}_{qa} \\ \underline{U}_{qb} \\ \underline{U}_{qc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_q \\ \underline{a}^2 \underline{U}_q \\ \underline{a} \underline{U}_q \end{bmatrix}$ $\underline{U}_{qa} + \underline{U}_{qb} + \underline{U}_{qc} = (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) \underline{U}_q = 0$	<p>2) symmetrische Quellen</p> <p>Die Summe der Quellenspannungen ist Null</p>
$\underline{Z}_a^B = \underline{Z}_b^B = \underline{Z}_c^B = \underline{Z}_B$	<p>3) symmetrische Belastung</p>

4.2 Strang-Ersatzschaltung

$I_a^X + I_b^X + I_c^X = 0$ $U_a^X + U_b^X + U_c^X = 0$	<p>Symmetriebedingungen</p> <p>X beliebige Stelle im Netz</p>
$\begin{bmatrix} U_a^{AB} \\ U_b^{AB} \\ U_c^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a^A \\ U_b^A \\ U_c^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_a^B \\ U_b^B \\ U_c^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s^{AB} & Z_g^{AB} & Z_g^{AB} \\ Z_g^{AB} & Z_s^{AB} & Z_g^{AB} \\ Z_g^{AB} & Z_g^{AB} & Z_s^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^{AB} \\ I_b^{AB} \\ I_c^{AB} \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} Z_s^{AB} - Z_g^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & Z_s^{AB} - Z_g^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & Z_s^{AB} - Z_g^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^{AB} \\ I_b^{AB} \\ I_c^{AB} \end{bmatrix} =$ $= \begin{bmatrix} Z_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{AB} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^{AB} \\ I_b^{AB} \\ I_c^{AB} \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} U_a^A \\ U_b^A \\ U_c^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q^A \\ a^2 U_q^A \\ a U_q^A \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} U_a^B \\ U_b^B \\ U_c^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_B & 0 & 0 \\ 0 & Z_B & 0 \\ 0 & 0 & Z_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^B \\ I_b^B \\ I_c^B \end{bmatrix}$	<p>Entkopplung der Spannungsgleichungen infolge $I_a^{AB} + I_b^{AB} + I_c^{AB} = 0$</p> <p>Einführung der Dreileiterimpedanz $Z_{AB} = Z_s^{AB} - Z_g^{AB}$</p> <p>$U_M$ wird Null</p>
	<p>Vollständiges Zeigerbild</p> $\varphi_a^B = \varphi_b^B = \varphi_c^B = \varphi_B$
$S_B = S_a^B + S_b^B + S_c^B = U_a^B I_a^{B*} + U_b^B I_b^{B*} + U_c^B I_c^{B*}$ $= 3 U_a^B I_a^B e^{j(\varphi_u - \varphi)} = S_B e^{j\varphi_B} = P_B + jQ_B$	<p>Dreileiterleistung am Knoten B. Knoten A analog.</p>
	<p>Strangersatzschaltung.</p> <p>Der Leiterindex wird weggelassen.</p>

5 Unsymmetrisches Dreileitersystem

5.1 Transformation der Leitergrößen in modale Größen (Modaltransformation)

$\begin{bmatrix} \underline{G}_a \\ \underline{G}_b \\ \underline{G}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{bmatrix} = \underline{T}_M \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_3 \end{bmatrix} = \underline{T}_M^{-1} \begin{bmatrix} \underline{G}_a \\ \underline{G}_b \\ \underline{G}_c \end{bmatrix}$ $\underline{g} = \underline{T}_M \underline{g}_M \quad \underline{g}_M = \underline{T}_M^{-1} \underline{g}$	<p>Modaltransformation</p> <p>\underline{T}_M Modalmatrix</p> <p>$\underline{G}_a, \underline{G}_b, \underline{G}_c$ natürliche Größen $\underline{G}_1, \underline{G}_2, \underline{G}_3$ modale Größen</p> <p>symbolische Schreibweise</p>
$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ $\underline{T}_M \underline{u}_M = \underline{Z} \underline{T}_M \underline{i}_M$ $\underline{u}_M = \underline{T}_M^{-1} \underline{Z} \underline{T}_M \underline{i}_M = \underline{Z}_M \underline{i}_M$	<p>Transformation der Spannungsgleichung</p>
$\underline{Z}_M = \underline{T}_M^{-1} \underline{Z} \underline{T}_M = \underline{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ $\underline{Z} \underline{T}_M = \underline{T}_M \underline{\Lambda}$ $(\underline{Z} - \lambda \underline{E}) \underline{t} = \underline{0}$ $\det(\underline{Z} - \lambda \underline{E}) = 0$	<p>Bestimmungsgleichungen für \underline{T}_M</p> <p>$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ Eigenwerte von \underline{Z}</p>
$k_1(t_{11} + t_{21} + t_{31}) = 0$ $k_2(t_{12} + t_{22} + t_{32}) = 0$ $k_3 t_{13} = k_3 t_{23} = k_3 t_{33}$	<p>allgemeine Bedingungen für die Diagonalisierung von diagonal-zyklisch symmetrischen Matrizen</p>
$\underline{S}_M = \underline{U}_1 \underline{i}_1^* + \underline{U}_2 \underline{i}_2^* + \underline{U}_3 \underline{i}_3^* = \underline{u}_M^T \underline{i}_M^* = \underline{u}^T (\underline{T}_M^{-1})^T (\underline{T}_M^{-1})^* \underline{i}^*$ $\underline{S} = \underline{U}_a \underline{i}_a^* + \underline{U}_b \underline{i}_b^* + \underline{U}_c \underline{i}_c^* = \underline{u}^T \underline{i}^* = \underline{u}_M^T \underline{T}_M^T \underline{T}_M^* \underline{i}_M^*$	<p>Leistung mit modalen und natürlichen Größen</p> <p>Zur Erzielung von Leistungsinvarianz muß \underline{T}_M eine unitäre Matrix sein.</p>

5.2 Symmetrische Komponenten

$\underline{I}_a = \underline{I}_{a1} + \underline{I}_{a2} + \underline{I}_{a0}$ $\underline{I}_b = \underline{I}_{b1} + \underline{I}_{b2} + \underline{I}_{b0}$ $\underline{I}_c = \underline{I}_{c1} + \underline{I}_{c2} + \underline{I}_{c0}$	Zerlegung der unsymmetrischen Originalgrößen in Symmetrische Komponenten (SK)
$\underline{I}_{a1} = \underline{I}_1 \quad \underline{I}_{b1} = \underline{a}^2 \underline{I}_1 \quad \underline{I}_{c1} = \underline{a} \underline{I}_1$ $\underline{I}_{a2} = \underline{I}_2 \quad \underline{I}_{b2} = \underline{a} \underline{I}_1 \quad \underline{I}_{c2} = \underline{a}^2 \underline{I}_2$ $\underline{I}_{a0} = \underline{I}_0 \quad \underline{I}_{b0} = \underline{I}_0 \quad \underline{I}_{c0} = \underline{I}_0$	Von den 9 SK sind nur 3 voneinander unabhängig. Hierfür wählt man \underline{I}_{a1} , \underline{I}_{a2} und \underline{I}_{a0} , womit der Leiter a zum <i>Bezugsleiter</i> wird. Der Index a wird dann weggelassen.
$\begin{bmatrix} \underline{G}_a \\ \underline{G}_b \\ \underline{G}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_0 \end{bmatrix};$ $\begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{G}_a \\ \underline{G}_b \\ \underline{G}_c \end{bmatrix}$	allgemeine Transformationsbeziehungen
$\underline{S}_S = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_0 \underline{I}_0^* = \underline{u}_S^T \underline{i}_S^* = \underline{u}^T (\underline{T}_S^{-1})^T (\underline{T}_S^{-1})^* \underline{i}^*$ $= \frac{1}{3} \underline{u}^T \underline{i}^* = \frac{1}{3} (\underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^*) = \frac{1}{3} \underline{S}$	Leistung mit Symmetrischen Komponenten Die Transformation ist wegen $\underline{S}_S \neq \underline{S}$ nicht leistungsvariant.

5.3 Ersatzschaltungen der Symmetrischen Komponenten

	<p>Originalsystem (symmetrisch) s. Symmetrisches Dreileiter- system</p>
	<p>Mitsystem</p> $\underline{Z}_1^{AB} = \underline{Z}_s^{AB} - \underline{Z}_g^{AB} = \underline{Z}_{AB}$ $\underline{Z}_1^B = \underline{Z}_B$ $U_q = U_{qa}^A$
	<p>Gegensystem</p> $\underline{Z}_2^{AB} = \underline{Z}_s^{AB} - \underline{Z}_g^{AB} = \underline{Z}_{AB}$ $\underline{Z}_2^B = \underline{Z}_B$
	<p>Nullsystem</p> $\underline{Z}_0^{AB} = \underline{Z}_s^{AB} + 2\underline{Z}_g^{AB}$ $\underline{Z}_0^B = \underline{Z}_B$
$\begin{bmatrix} \underline{U}_1^{AB} \\ \underline{U}_2^{AB} \\ \underline{U}_0^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^A \\ \underline{U}_2^A \\ \underline{U}_0^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{U}_1^B \\ \underline{U}_2^B \\ \underline{U}_0^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1^{AB} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^{AB} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^{AB} \\ \underline{I}_2^{AB} \\ \underline{I}_0^{AB} \end{bmatrix}$	<p>Spannungsgleichungen (entkoppelt)</p>
$\begin{bmatrix} \underline{U}_1^A \\ \underline{U}_2^A \\ \underline{U}_0^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{qa}^A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{U}_M \end{bmatrix}$ $\underline{U}_M = \underline{Z}_M (\underline{I}_a^A + \underline{I}_b^A + \underline{I}_c^A) = 3\underline{Z}_M \underline{I}_0^A$	<p>Vektor der Quellenspannungen und Mittelpunkt-Erde-Spannungen</p>
$\begin{bmatrix} \underline{U}_1^B \\ \underline{U}_2^B \\ \underline{U}_0^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1^B & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^B & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^B \\ \underline{I}_2^B \\ \underline{I}_0^B \end{bmatrix}$	$\underline{Z}_1^B = \underline{Z}_2^B = \underline{Z}_0^B = \underline{Z}_B$
<p>Die Ersatzschaltung des Mitsystems ist mit der Strangersatzschaltung des Leiters a identisch. Im symmetrischen Betrieb sind die Gegen- und Nullsystemgrößen Null.</p>	

5.4 Symmetrische Komponenten für spezielle Unsymmetriefälle

	\underline{G}_a	\underline{G}_b	\underline{G}_c	\underline{G}_1	\underline{G}_2	\underline{G}_0
	\underline{G}	0	0	$\frac{1}{3}\underline{G}$	$\frac{1}{3}\underline{G}$	$\frac{1}{3}\underline{G}$
	0	\underline{G}	0	$\frac{a}{3}\underline{G}$	$\frac{a^2}{3}\underline{G}$	$\frac{1}{3}\underline{G}$
	0	0	\underline{G}	$\frac{a^2}{3}\underline{G}$	$\frac{a}{3}\underline{G}$	$\frac{1}{3}\underline{G}$
	\underline{G}	$a^2 \underline{G}$	0	$\frac{2}{3}\underline{G}$	$-\frac{a^2}{3}\underline{G}$	$-\frac{a}{3}\underline{G}$
	0	\underline{G}	$a^2 \underline{G}$	$\frac{2a}{3}\underline{G}$	$-\frac{a}{3}\underline{G}$	$-\frac{a}{3}\underline{G}$
	$a^2 \underline{G}$	0	\underline{G}	$\frac{2a^2}{3}\underline{G}$	$-\frac{1}{3}\underline{G}$	$-\frac{a}{3}\underline{G}$
	\underline{G}	$-a \underline{G}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}ja \underline{G}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}ja^2 \underline{G}$
	0	\underline{G}	$-a \underline{G}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}ja^2 \underline{G}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}ja^2 \underline{G}$
	$-a \underline{G}$	0	$-\underline{G}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}j \underline{G}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}ja^2 \underline{G}$
	\underline{G}	$-\underline{G}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}ja^2 \underline{G}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}ja \underline{G}$	0
	0	\underline{G}	$-\underline{G}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}j \underline{G}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}j \underline{G}$	0
	$-\underline{G}$	0	\underline{G}	$\frac{1}{\sqrt{3}}ja \underline{G}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}ja^2 \underline{G}$	0
	\underline{G}	$-\frac{\underline{G}}{2}$	$-\frac{\underline{G}}{2}$	$\frac{\underline{G}}{2}$	$\frac{\underline{G}}{2}$	0
	$-\frac{\underline{G}}{2}$	\underline{G}	$-\frac{\underline{G}}{2}$	$\frac{a \underline{G}}{2}$	$\frac{a^2 \underline{G}}{2}$	0
	$-\frac{\underline{G}}{2}$	$-\frac{\underline{G}}{2}$	\underline{G}	$\frac{a^2 \underline{G}}{2}$	$\frac{a \underline{G}}{2}$	0

5.5 Transformationsbeziehungen in bezugskomponenteninvarianter Form

	$x \begin{bmatrix} \underline{G}_a & \underline{G}_b & \underline{G}_c \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{G}_1 & \underline{G}_2 & \underline{G}_0 \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{G}_\alpha & \underline{G}_\beta & \underline{G}_0 \end{bmatrix}^T$
$\begin{bmatrix} \underline{G}_a \\ \underline{G}_b \\ \underline{G}_c \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{G}_\alpha \\ \underline{G}_\beta \\ \underline{G}_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

5.6 Transformationsbeziehungen in leistungsinvarianter (normierter) Form

	$x \begin{bmatrix} \underline{G}_a & \underline{G}_b & \underline{G}_c \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{G}'_1 & \underline{G}'_2 & \underline{G}'_0 \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{G}'_\alpha & \underline{G}'_\beta & \underline{G}'_0 \end{bmatrix}^T$
$\begin{bmatrix} \underline{G}_a \\ \underline{G}_b \\ \underline{G}_c \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{G}'_1 \\ \underline{G}'_2 \\ \underline{G}'_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{G}'_\alpha \\ \underline{G}'_\beta \\ \underline{G}'_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

In normierter Form ist $\underline{G}'_1 = \sqrt{3}\underline{G}_1 = \underline{G}_p$ (positive Komponente), $\underline{G}'_2 = \sqrt{3}\underline{G}_2 = \underline{G}_n$ (negative Komponente) und $\underline{G}'_0 = \sqrt{3}\underline{G}_0 = \underline{G}_h$ (Homopolarkomponente), und es gilt $\underline{T}'^{-1} = (\underline{T}'^*)^T$ d. h. \underline{T}' ist eine unitäre Matrix.

5.7 Raumzeiger in ruhenden Koordinaten (α, β -Koordinaten)

	<p>Ortskurve des Raumzeigers eines unsymmetrischen Dreileitersystems Im eingeschwungenen Zustand. Das Gegensystem verursacht einen mit ω invers rotierenden Raumzeigeranteil</p>
$\underline{g}_s = g_\alpha + jg_\beta = \frac{2}{3}(g_a + \underline{a}g_b + \underline{a}^2g_c)$ $= \frac{1}{3}(\hat{g}_a + \hat{g}_a^* + \underline{a}(\hat{g}_b + \hat{g}_b^*) + \underline{a}^2(\hat{g}_c + \hat{g}_c^*))$ $= \frac{1}{3}(\hat{g}_a + \underline{a}\hat{g}_b + \underline{a}^2\hat{g}_c) + \frac{1}{3}(\hat{g}_a^* + \underline{a}\hat{g}_b^* + \underline{a}^2\hat{g}_c^*)$ $= \hat{g}_1 + \hat{g}_2^* = \sqrt{2}(\underline{G}_1 e^{j\omega t} + \underline{G}_2^* e^{-j\omega t})$	<p>Zusammensetzung des Raumzeigers aus Mit- und Gegenkomponente</p>

5.8 Raumzeiger in umlaufenden Koordinaten (d, q -Koordinaten)

	<p>Ortskurve des Raumzeigers in <i>umlaufenden</i> Koordinaten für ein unsymmetrischen Dreileitersystem im eingeschwungenen Zustand</p> $\vartheta = \int \omega_L dt + \vartheta_0 = \omega_L t + \vartheta_0$ $\omega_L = \omega = \omega_0$
$\underline{g}_r = g_d + jg_q = \underline{g}_s e^{-j\vartheta} = \frac{2}{3}(g_a e^{-j\vartheta_a} + g_b e^{-j\vartheta_b} + g_c e^{-j\vartheta_c})$ $= (\hat{g}_1 + \hat{g}_2^*) e^{-j\vartheta} = \sqrt{2}(\underline{G}_1 + \underline{G}_2^* e^{-j2\omega t}) e^{-j\vartheta_0}$	<p>Zusammensetzung des Raumzeigers aus Mit- und Gegenkomponente</p> $\vartheta_a = \vartheta$ $\vartheta_b = \vartheta - \frac{2\pi}{3}$ $\vartheta_c = \vartheta + \frac{2\pi}{3}$

5.9 Transformationsbeziehungen in bezugskomponenten/invarianter Form

	$x \begin{bmatrix} g_a & g_b & g_c \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} g_\alpha & g_\beta & g_0 \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} g_d & g_q & g_0 \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{g}_s & \underline{g}_s^* & 2g_0 \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{g}_r & \underline{g}_r^* & 2g_0 \end{bmatrix}^T$
$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_a & -s_a & 1 \\ c_b & -s_b & 1 \\ c_c & -s_c & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j\vartheta_a} & e^{-j\vartheta_a} & 1 \\ e^{j\vartheta_b} & e^{-j\vartheta_b} & 1 \\ e^{j\vartheta_c} & e^{-j\vartheta_c} & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} g_\alpha \\ g_\beta \\ g_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_a & -s_a & 0 \\ s_a & c_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j\vartheta_a} & e^{-j\vartheta_a} & 0 \\ -je^{j\vartheta_a} & je^{-j\vartheta_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} c_a & c_b & c_c \\ -s_a & -s_b & -s_c \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_a & s_a & 0 \\ -s_a & c_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-j\vartheta_a} & e^{j\vartheta_a} & 0 \\ -je^{-j\vartheta_a} & je^{j\vartheta_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{g}_s \\ \underline{g}_s^* \\ 2g_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{j\vartheta_a} & je^{j\vartheta_a} & 0 \\ e^{-j\vartheta_a} & -je^{-j\vartheta_a} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{j\vartheta_a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\vartheta_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{g}_r \\ \underline{g}_r^* \\ 2g_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{2}{3} \begin{bmatrix} e^{-j\vartheta_a} & e^{-j\vartheta_b} & e^{-j\vartheta_c} \\ e^{j\vartheta_a} & e^{j\vartheta_b} & e^{j\vartheta_c} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{-j\vartheta_a} & je^{-j\vartheta_a} & 0 \\ e^{j\vartheta_a} & -je^{j\vartheta_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} e^{-j\vartheta_a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\vartheta_a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

$$c_a = \cos \vartheta_a; c_b = \cos \vartheta_b; c_c = \cos \vartheta_c; s_a = \sin \vartheta_a; s_b = \sin \vartheta_b; s_c = \sin \vartheta_c; \vartheta_a = \int \omega_1 dt + \vartheta_0; \vartheta_b = \vartheta_a - 2\pi/3; \vartheta_c = \vartheta_a + 2\pi/3$$

5.10 Strom-Spannungsbeziehungen an der Unsymmetriestelle (Fehlerstelle)

Fehlerart	Fehlerbedingungen				Schaltung der SK
	Originalsystem		Symmetr. Koordinaten		
<p>3 - pol. KS</p>	$\underline{U}_a - \underline{U}_b = 0$ $\underline{U}_b - \underline{U}_c = 0$	<p>—</p> <p>—</p> $\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$	$\underline{U}_1 = 0$ $\underline{U}_2 = 0$	<p>—</p> $\underline{I}_0 = 0$	<p>1</p> <p>2</p> <p>0</p>
<p>3 - pol. EKS</p>	$\underline{U}_a = 0$ $\underline{U}_b = 0$ $\underline{U}_c = 0$	<p>—</p> <p>—</p> <p>—</p>	$\underline{U}_1 = 0$ $\underline{U}_2 = 0$ $\underline{U}_0 = 0$	<p>—</p> <p>—</p> <p>—</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>0</p>
<p>1 - pol. KS</p>	$\underline{U}_a = 0$	<p>—</p> $\underline{I}_b = 0$ $\underline{I}_c = 0$	$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0$	<p>—</p> $\underline{I}_2 = \underline{I}_1$ $\underline{I}_0 = \underline{I}_2$	<p>1</p> <p>2</p> <p>0</p>
<p>2 - pol. KS</p>	<p>—</p> <p>—</p> $\underline{U}_b - \underline{U}_c = 0$	$\underline{I}_a = 0$ $\underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$	<p>—</p> <p>—</p> $\underline{U}_2 = \underline{U}_1$	$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0$ $\underline{I}_0 = 0$	<p>1</p> <p>2</p> <p>0</p>
<p>2 - pol. EKS</p>	<p>—</p> $\underline{U}_b = 0$ $\underline{U}_c = 0$	$\underline{I}_a = 0$	<p>—</p> $\underline{U}_2 = \underline{U}_1$ $\underline{U}_0 = \underline{U}_2$	$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0$	<p>1</p> <p>2</p> <p>0</p>
<p>3 - pol. UB</p>	<p>—</p> <p>—</p> <p>—</p>	$\underline{I}_a = 0$ $\underline{I}_b = 0$ $\underline{I}_c = 0$	<p>—</p> <p>—</p> <p>—</p>	$\underline{I}_1 = 0$ $\underline{I}_2 = 0$ $\underline{I}_0 = 0$	<p>1</p> <p>2</p> <p>0</p>
<p>2 - pol. UB</p>	$\underline{U}_a = 0$	<p>—</p> $\underline{I}_b = 0$ $\underline{I}_c = 0$	$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0$	<p>—</p> $\underline{I}_2 = \underline{I}_1$ $\underline{I}_0 = \underline{I}_2$	<p>1</p> <p>2</p> <p>0</p>
<p>1 - pol. UB</p>	<p>—</p> $\underline{U}_b = 0$ $\underline{U}_c = 0$	$\underline{I}_a = 0$	<p>—</p> $\underline{U}_2 = \underline{U}_1$ $\underline{U}_0 = \underline{U}_2$	$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0$	<p>1</p> <p>2</p> <p>0</p>

5.11 Schaltung der Symmetrischen Komponenten für Serien- und Parallelfehler

Serienfehler	
1-pol. Erd(kurz)schluß	2-pol. Unterbrechung
Parallelfehler	
2-pol. Erdkurzschluß	1-pol. Unterbrechung

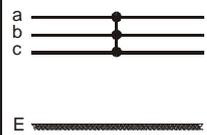
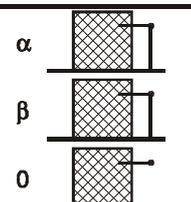
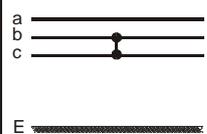
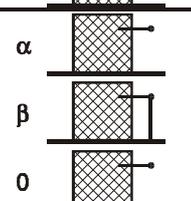
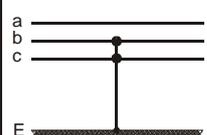
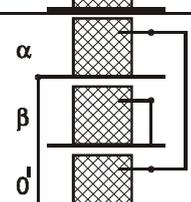
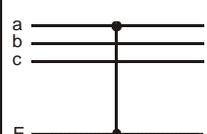
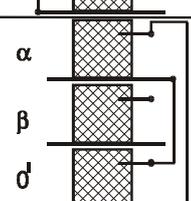
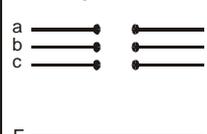
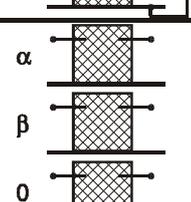
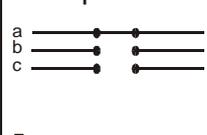
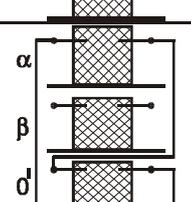
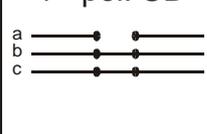
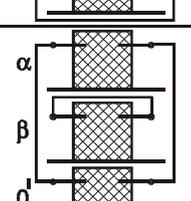
5.12 Fehlerströme und -spannungen in Symmetrischen Koordinaten

Serienfehler		Parallelfehler	
1-pol. Erd(kurz)schluß ($\underline{U}_{1l} = \underline{Z}_1 \underline{I}_{k3}''$) 2-pol. Unterbrechung ($\underline{U}_{1l} = \underline{Z}_1 \underline{I}_a(0)$)		2-pol. Erdkurzschluß ($\underline{I}_{1k} = \underline{I}_{k3}''$) 1-pol. Unterbrechung ($\underline{I}_{1k} = \underline{I}_a(0)$)	
$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{1l}$	$\underline{U}_a = 0$	$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$	$\underline{I}_a = 0$
$\underline{U}_2 = \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{1l}$	$\underline{U}_b = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a}) \underline{Z}_2 + (\underline{a}^2 - 1) \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{1l}$	$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$	$\underline{I}_b = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a}) \underline{Y}_2 + (\underline{a}^2 - 1) \underline{Y}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$
$\underline{U}_0 = -\underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \frac{-\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{1l}$	$\underline{U}_c = \frac{(\underline{a} - \underline{a}^2) \underline{Z}_2 + (\underline{a} - 1) \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{1l}$	$\underline{I}_0 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \frac{-\underline{Y}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$	$\underline{I}_c = \frac{(\underline{a} - \underline{a}^2) \underline{Y}_2 + (\underline{a} - 1) \underline{Y}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$
$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{1l}$	$\underline{I}_a = \frac{3 \underline{U}_{1l}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}$	$\underline{U}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$	$\underline{U}_a = \frac{3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$
$\underline{I}_2 = \underline{I}_1$	$\underline{I}_b = 0$	$\underline{U}_2 = \underline{U}_1$	$\underline{U}_b = 0$
$\underline{I}_0 = \underline{I}_1$	$\underline{I}_c = 0$	$\underline{U}_0 = \underline{U}_1$	$\underline{U}_c = 0$

Fehlerströme und -spannungen in Symmetrischen Koordinaten (Fortsetzung)

2-pol. Erdkurzschluß ($I_{1k} = I_{k3}'' = U_{1l} / Z_1$) 1-pol. Unterbrechung ($I_{1k} = I_a(0) = U_{1l} / Z_1$)	2-pol. Kurzschluß ($I_{1k} = I_{k3}'' = U_{1l} / Z_1$)
$I_1 = \frac{(Z_2 + Z_0) Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$ $I_2 = \frac{-Z_0 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$ $I_0 = -I_1 - I_2 = \frac{-Z_2 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$ $I_a = 0$ $I_b = \frac{(a^2 - 1) Z_1 Z_2 + (a^2 - a) Z_1 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$ $I_c = \frac{(a - 1) Z_1 Z_2 + (a - a^2) Z_1 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$	$I_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_{1k}$ $I_2 = -I_1$ $I_0 = 0$ $I_a = 0$ $I_b = (a^2 - a) I_{1k} = -j\sqrt{3} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_{1k}$ $I_c = -I_b$
$U_1 = \frac{Z_2 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{1l}$ $U_a = \frac{3 Z_2 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{1l}$ $U_2 = U_1$ $U_0 = U_1$ $U_b = 0$ $U_c = 0$	$U_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_{1l}$ $U_2 = U_1$ $U_0 = 0 \quad (Z_0 \text{ endlich})$ $U_a = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} U_{1l}$ $U_b - U_c = 0$

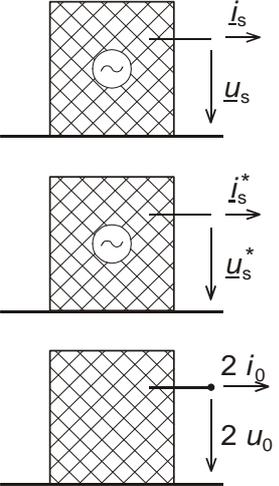
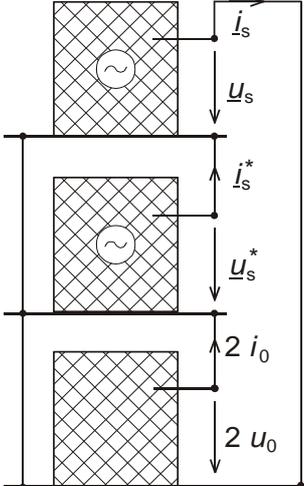
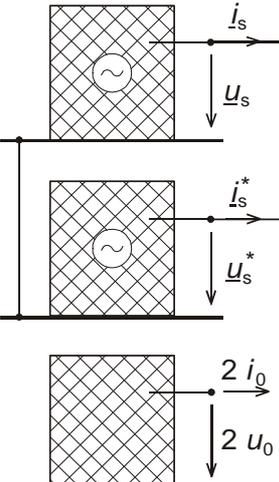
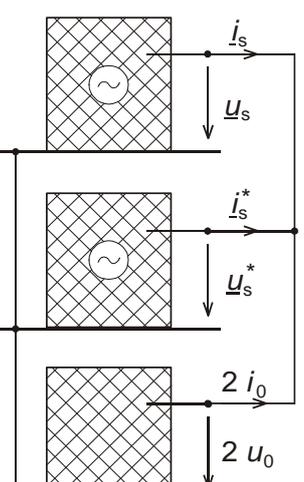
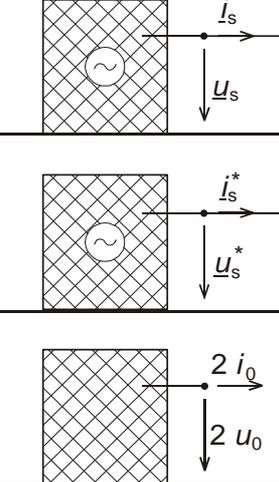
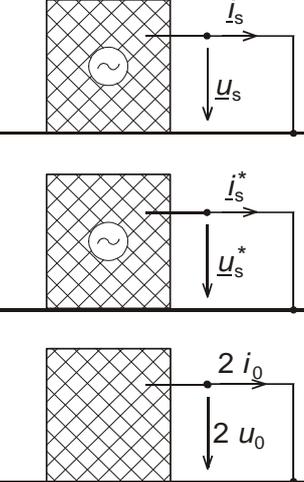
5.13 Fehlerbedingungen in Diagonal-Koordinaten ($\alpha\beta$ -Koordinaten)

Fehlerart	Fehlerbedingungen				Schaltung der $\alpha\beta$ -Kompon.
	Originalsystem		Diagonal-Koordinaten		
3 - pol. KS 	$u_a - u_b = 0$ $u_b - u_c = 0$ —	— — $i_a + i_b + i_c = 0$	$u_\alpha = 0$ $u_\beta = 0$ —	— — $i_0 = 0$	
2 - pol. KS 	— — $u_b - u_c = 0$	$i_a = 0$ $i_b + i_c = 0$ —	— — $u_\beta = 0$	$i_\alpha = 0$ $i_0 = 0$ —	
2 - pol. EKS 	— $u_b = 0$ $u_c = 0$	$i_a = 0$ — —	— $u_\beta = 0$ $u'_0 = u_\alpha$	$i_\alpha + i'_0 = 0$ — —	
1 - pol. KS 	$u_a = 0$ — —	— $i_b = 0$ $i_c = 0$	$u_\alpha + u'_0 = 0$ — —	— $i_\beta = 0$ $i'_0 = i_\alpha$	
3 - pol. UB 	— — —	$i_a = 0$ $i_b = 0$ $i_c = 0$	— — —	$i_\alpha = 0$ $i_\beta = 0$ $i_0 = 0$	
2 - pol. UB 	$u_a = 0$ — —	— $i_b = 0$ $i_c = 0$	$u_\alpha + u'_0 = 0$ — —	— $i_\beta = 0$ $i'_0 = i_\alpha$	
1 - pol. UB 	— $u_b = 0$ $u_c = 0$	$i_a = 0$ — —	— $u_\beta = 0$ $u'_0 = u_\alpha$	$i_\alpha + i'_0 = 0$ — —	
Umgerechnete Nullsystemgrößen (Strichgrößen)	1-pol. KS und 2-pol. UB		2-pol. EKS und 1-pol. UB		
u'_0 i'_0 R'_0 und L'_0 G'_0 und C'_0	u_0 $2 i_0$ $\frac{1}{2} R_0$ und $\frac{1}{2} L_0$ $2 G_0$ und $2 C_0$		$2 u_0$ i_0 $2 R_0$ und $2 L_0$ $\frac{1}{2} G_0$ und $\frac{1}{2} C_0$		

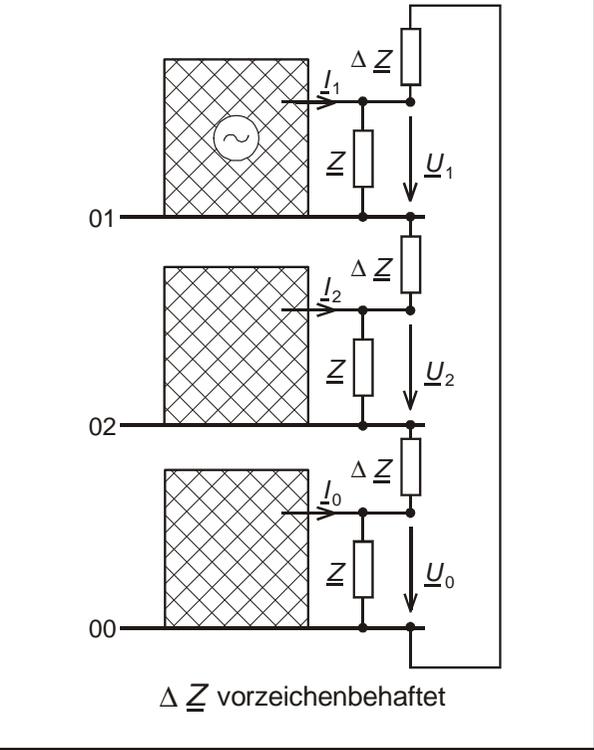
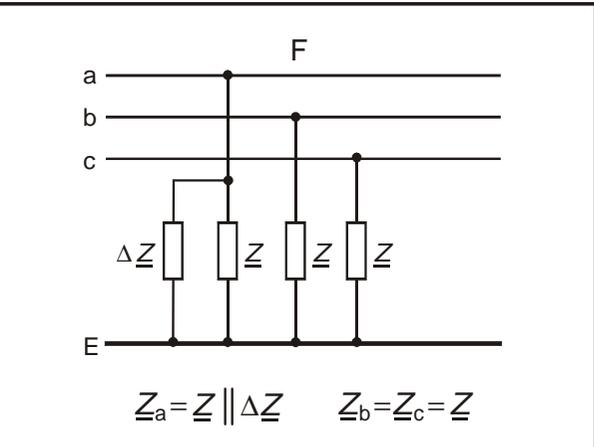
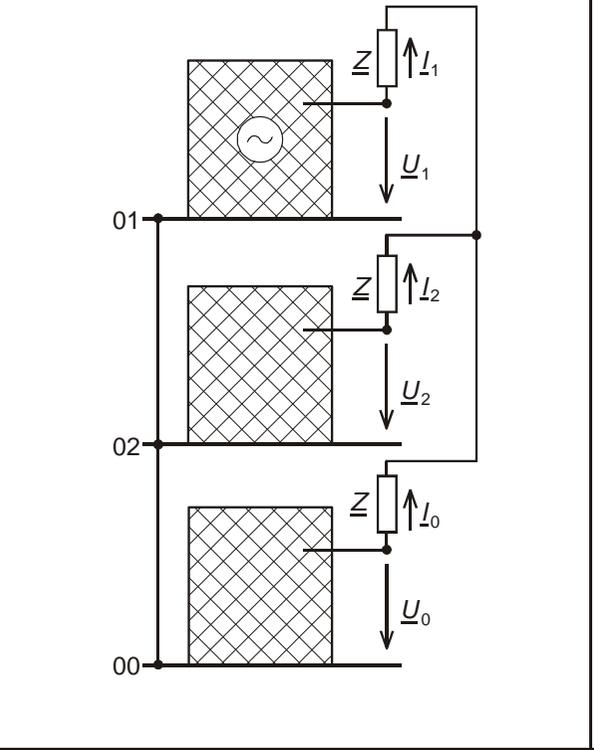
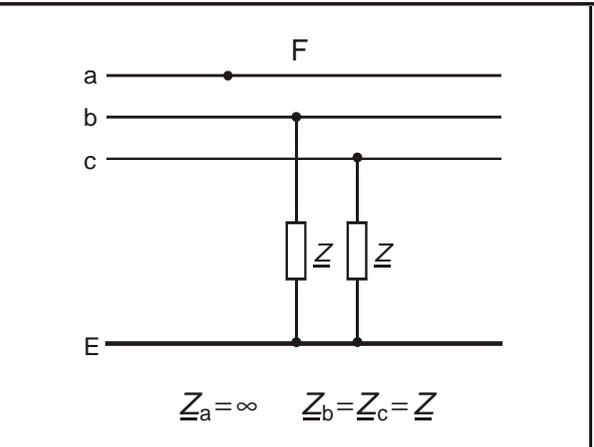
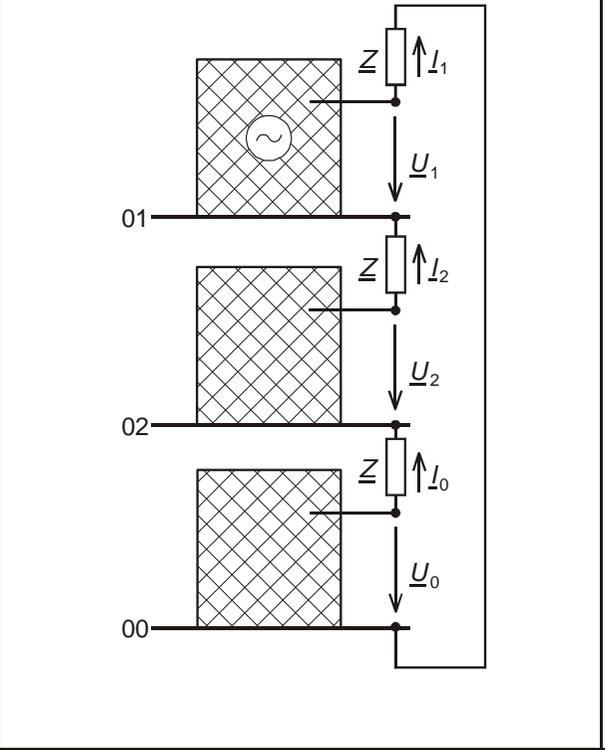
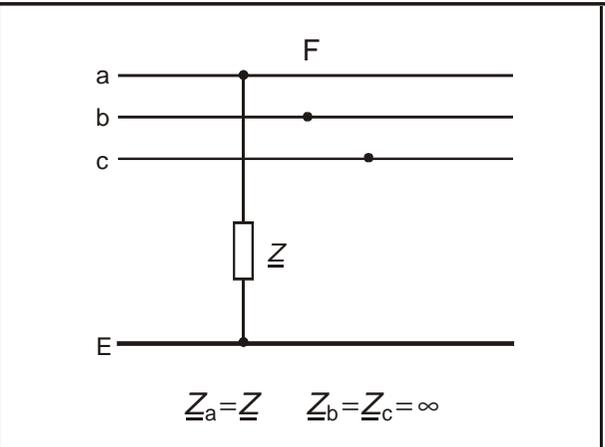
5.14 Fehlerströme und -spannungen in Diagonal-Koordinaten

1-pol. Kurzschluß		2-pol. Erdkurzschluß	
$\underline{U}_\alpha = \frac{\underline{Z}_0}{2\underline{Z}_\alpha + \underline{Z}_0} \underline{U}_{\alpha 1}$ $\underline{U}_\beta = \underline{U}_\beta^1 = -j \underline{U}_{\alpha 1}$ $\underline{U}_0 = -\underline{U}_\alpha$	$\underline{U}_a = 0$ $\underline{U}_b = \frac{(a^2 - a) \underline{Z}_\alpha + (a^2 - 1) \underline{Z}_0}{2 \underline{Z}_\alpha + \underline{Z}_0} \underline{U}_{\alpha 1}$ $\underline{U}_c = \frac{(a - a^2) \underline{Z}_\alpha + (a - 1) \underline{Z}_0}{2 \underline{Z}_\alpha + \underline{Z}_0} \underline{U}_{\alpha 1}$	$\underline{I}_\alpha = \frac{\underline{Y}_0}{2 \underline{Y}_\alpha + \underline{Y}_0} \underline{I}_{\alpha k}$ $\underline{I}_\beta = \underline{I}_\beta^k = -j \underline{I}_{\alpha k}$ $\underline{I}_0 = -\underline{I}_\alpha$	$\underline{I}_a = 0$ $\underline{I}_b = \frac{(a^2 - a) \underline{Y}_\alpha + (a^2 - 1) \underline{Y}_0}{2 \underline{Y}_\alpha + \underline{Y}_0} \underline{I}_{\alpha k}$ $\underline{I}_c = \frac{(a - a^2) \underline{Y}_\alpha + (a - 1) \underline{Y}_0}{2 \underline{Y}_\alpha + \underline{Y}_0} \underline{I}_{\alpha k}$
$\underline{I}_\alpha = \frac{1}{\underline{Z}_\alpha + \frac{1}{2} \underline{Z}_0} \underline{U}_{\alpha 1}$ $\underline{I}_\beta = 0$ $\underline{I}_0 = \frac{1}{2} \underline{I}_\alpha$	$\underline{I}_a = \frac{3 \underline{U}_{\alpha 1}}{2 \underline{Z}_\alpha + \underline{Z}_0}$ $\underline{I}_b = 0$ $\underline{I}_c = 0$	$\underline{U}_\alpha = \frac{1}{\underline{Y}_\alpha + \frac{1}{2} \underline{Y}_0} \underline{I}_{\alpha k}$ $\underline{U}_\beta = 0$ $\underline{U}_0 = \frac{1}{2} \underline{U}_\alpha$	$\underline{U}_a = \frac{3 \underline{I}_{\alpha k}}{2 \underline{Y}_\alpha + \underline{Y}_0}$ $\underline{U}_b = 0$ $\underline{U}_c = 0$
$\underline{U}_{\alpha 1} = \underline{U}_{11} \quad \underline{Z}_\alpha = \underline{Z}_1 \quad \text{für Netze mit } \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$		$\underline{I}_{\alpha k} = \underline{Y}_\alpha \underline{U}_{\alpha 1} = \underline{I}_{k3}'' \quad (\text{Leiter a})$	

5.15 Querfehler mit Raumzeigern in Ständer-Koordinaten

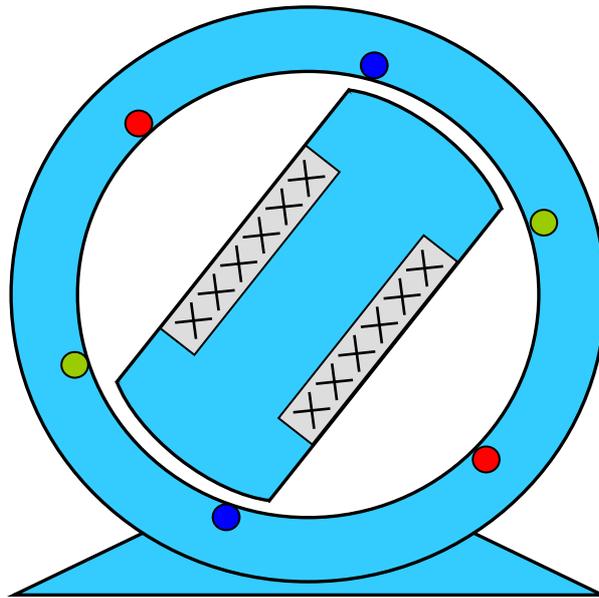
Fehlerfrei	1-pol. Erd(kurz)schluß
 $i_s = 0$ $i_s^* = 0$ $2i_0 = 0$	 $\underline{u}_s + \underline{u}_s^* + 2\underline{u}_0 = 0$ $\underline{i}_s^* = \underline{i}_s$ $2\underline{i}_0 = \underline{i}_s$
2-pol. Kurzschluß	2-pol. Erdkurzschluß
 $\underline{i}_s + \underline{i}_s^* = 0$ $\underline{u}_s^* = \underline{u}_s$ $2\underline{i}_0 = 0$	 $\underline{i}_s + \underline{i}_s^* + 2\underline{i}_0 = 0$ $\underline{u}_s^* = \underline{u}_s$ $2\underline{u}_0 = \underline{u}_s$
3-pol. Kurzschluß	3-pol. Erdkurzschluß
 $\underline{u}_s = 0$ $\underline{u}_s^* = 0$ $2\underline{i}_0 = 0$	 $\underline{u}_s = 0$ $\underline{u}_s^* = 0$ $2\underline{u}_0 = 0$

5.16 Unsymmetrische Belastung (Fehler mit Fehlerimpedanz) in SK





Universität Hannover
Institut für Energieversorgung und
Hochspannungstechnik



Vorlesung Elektrische Energieversorgung I

Skript Generatoren

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

Inhaltsverzeichnis

1	Aufbau, Entwicklungstendenzen	1
2	Funktion	10
3	Allgemeines Gleichungssystem.....	12
4	Gleichungssystem mit dq0-Ankergrößen*	14
5	Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten	20
5.1	Mitsystem-Ersatzschaltungen für den stationären Zustand	20
5.2	Gegensystem-Ersatzschaltung	28
5.3	Nullsystem-Ersatzschaltung	34
5.4	Mitsystem-Ersatzschaltungen für den subtransienten Zustand	35
5.5	Mitsystem-Ersatzschaltungen für den transienten Zustand	44
5.6	Zusammenfassung	47
6	Reaktanzen	49
7	Stationäres Betriebsverhalten.....	52
7.1	Zeigerbilder für verschiedene Belastungsfälle.....	53
7.2	Leistungsdiagramm	54
7.3	Leistungs-Winkel-Kennlinien	56
8	Nichtstationäres Betriebsverhalten	59
8.1	Kurzschluß	59
8.2	Lastabwurf.....	68
9	Anhang	71
9.1	Elemente der Matrix in Gl. (5.30)	71
9.2	Koppelfaktoren und subtransiente Induktivitäten.....	72
9.3	Herleitung des Stromverlaufes für generatorfernen Kurzschluß.....	72

Hinweis: Das Skript ersetzt nicht die Vorlesung und umgekehrt. Im Skript sind einige Ausführungen, insbesondere mathematische Ableitungen ausführlicher dargestellt, während in der Vorlesung mehr Wert auf das Verständnis gelegt wird. Die mit einem * gekennzeichneten Kapitel sind zur Vertiefung gedacht.

1 Aufbau, Entwicklungstendenzen

Die Generatoren der elektrischen Energieversorgung sind bis auf wenige Ausnahmen *Synchrongeneratoren*. Die Synchrongeneratoren in den Kraftwerken der öffentlichen und industriellen Energieversorgung sind als Drehstrom- oder Dreiphasensynchrongeneratoren ausgeführt, während für die Bahnstromversorgung Einphasensynchrongeneratoren eingesetzt werden.

Die Ausnahmen bilden Windkraftwerke und Kleinwasserkraftwerke, für die neben Synchrongeneratoren auch *Asynchrongeneratoren* mit Leistungen von einigen 100 kW bis in den MW-Bereich angewendet werden. Den prinzipiellen Aufbau einer Drehstromsynchronmaschine zeigt Bild 1.1.

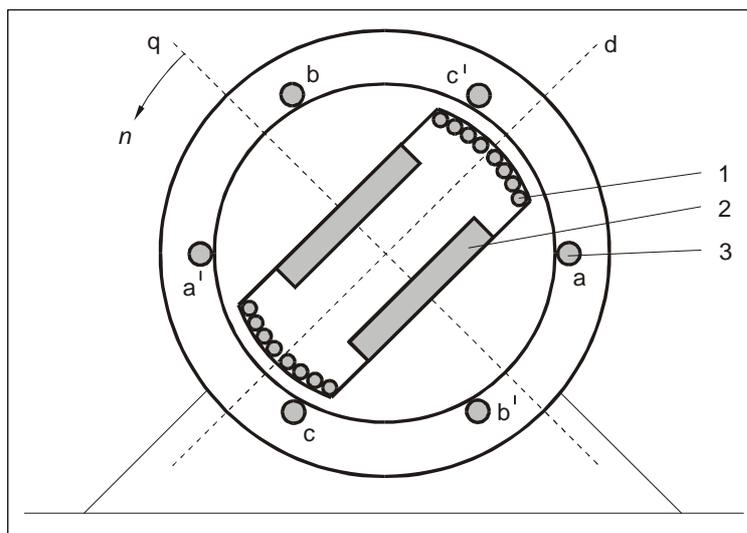


Bild 1.1: Schematischer Aufbau einer Dreiphasensynchronmaschine

- 1 Dämpferwicklung
- 2 Erreger- oder Feldwicklung
- 3 Ankerwicklung Strang a

Nach der Wicklungsanordnung unterscheidet man zwischen *Außenpol-* und *Innenpolmaschinen*. Bei Außenpolmaschinen ist die *Ankerwicklung* im Läufer, bei Innenpolmaschinen im Ständer untergebracht.

Außenpolmaschinen werden nur für kleine Leistungen ausgeführt, da bei ihnen die Nutzleistung über Schleifringe abgenommen werden muß.

Bei Innenpolmaschinen - wie im Bild 1.1 - braucht nur die wesentlich kleinere Erregerleistung auf den Läufer übertragen zu werden. Neuerdings gibt es auch schleifringlose Innenpolmaschinen, bei denen die Erregerleistung magnetisch auf den Läufer übertragen wird.

Die *Erreger-* oder *Feldwicklung* ist eine Gleichstromwicklung. Die *Ankerwicklung* ist drei- oder (bei Bahnstromgeneratoren) einphasig ausgeführt. Die *Dämpferwicklungen* sind Kurzschlußwicklungen. Sie sollen die Ausgleichsvorgänge im nichtstationären Betrieb beruhigen. Nach der Ausführung des Läufers oder Rotors unterscheidet man weiter zwischen *Vollpol-* (VP) oder *Turbo-* und *Schenkelpolmaschinen* (SP).

Der Läufer von Vollpolmaschinen wird auch als Induktor bezeichnet. Er ist walzenförmig ausgeführt. Die Erregerwicklung wird in Nuten, die fast über den gesamten Umfang verteilt sind, eingebracht und durch Keile, die gleichzeitig Bestandteile der Dämpferwicklung sind, verschlossen.

Der Läufer von Schenkelpolmaschinen besteht aus einzelnen Polen und wird deshalb auch *Polrad* genannt. In Bild 1.1 besteht er aus zwei Polen, die ein Polpaar bilden.

Die Symmetrieachsen des Läufers werden mit d- (von direct axis) oder *Längs*- und mit q- (von quadrature axis) oder *Querachse* bezeichnet (s. Bild 1.1). Sie spielen später in der Maschinentheorie eine wichtige Rolle. Die *synchrone* Drehzahl, die bei Synchronmaschinen gleich der Bemessungsdrehzahl ist, richtet sich nach der Antriebsmaschine. Zwischen der Frequenz f und der synchronen Drehzahl besteht der Zusammenhang

$$\boxed{n_0 = \frac{f}{p} = \frac{\omega_0}{p2\pi} = \frac{\Omega_0}{2\pi}} \quad (1.1)$$

wobei ω_0 die elektrische und Ω_0 die räumliche Winkelgeschwindigkeit und p die Polpaarzahl ist. Für 50 Hz gilt:

$$\boxed{n_0 / \text{min}^{-1} = \frac{3000}{p}} \quad (1.2)$$

Damit ist bei der in Europa üblichen Frequenz von 50 Hz die höchste zu erreichende synchrone Drehzahl einer zweipoligen Maschine ($p = 1$) 3000 Umdrehungen pro Minute. In Dampfkraftwerken kommen nur zwei- und vierpolige Synchronmaschinen zum Einsatz. Vierpolige oder - wie man auch sagt - halbtourige Generatoren passen sich besser den Turbinenparametern in Kernkraftwerken mit Siedewasserreaktoren, die Sattdampf erzeugen, an, und sind, wie wir später sehen werden, mit größeren *Einheitenleistungen* ausführbar.

In Wasserkraftwerken hängt die synchrone Drehzahl stark vom Wasserdargebot ab und liegt zwischen 60...1000 Umdrehungen pro Minute ($p = 50...3$).

Die Wasserkraftgeneratoren unterteilt man nach der Drehzahl in *Langsam*- (bis 125 min^{-1}) und *Schnellläufer* (ab 250 min^{-1}). Langsamläufer sind für Laufwasserkraftwerke günstig, während für Speicherkraftwerke Schnellläufer optimal sind.

Die von der Antriebsmaschine diktierte Drehzahl n bestimmt nach der allgemeinen Entwurfgleichung

$$\boxed{S_{rG} = c V n} \quad (1.3)$$

neben dem Läuferaktivvolumen $V = l d^2$ (l aktive Läuferlänge, d Läuferdurchmesser) und der *Ausnutzungsziffer* c die *Bemessungsscheinleistung* S_{rG} des Generators. Die Ausnutzungsziffer oder ESSON'sche Zahl c ist ein Ausdruck für die elektromagnetische Belastung (Ausnutzung) der Maschine. Sie ist dem spezifischen *Ständerstrombelag* A' (bezogen auf d) und der spezifischen *Luftspaltinduktion* B' proportional

$$c = \frac{S_{rG}}{V n} = k A' B'$$

Durch den unterschiedlichen Drehzahlbereich von Turbo- und Schenkelpolgeneratoren ergeben sich auch unterschiedliche Randbedingungen für den Bau größter Einheitenleistungen (Grenzleistungen). Der größte, das Läuferaktivvolumen dominierend bestimmende Läuferdurchmesser richtet sich bei den Turbogeneratoren aufgrund der höheren Drehzahlen nach der zulässigen Umfangsgeschwindigkeit. Bei Wasserkraft- oder Schenkelpolgeneratoren sind dem Durchmesser eher Grenzen durch die Beherrschung der Materialdehnung (bei Läuferdurchmessern von mehreren Metern!) gesetzt.

Aus der heute beherrschbaren maximalen Umfangsgeschwindigkeit $v_{\max} = 240 \text{ m/s}$ bei der *Schleuder-* oder *Durchbrenndrehzahl* n_D , die für Turbogeneratoren 20% über der synchronen Drehzahl liegt, ergibt sich für einen zweipoligen Turbogenerator mit $n_D = 1,2 n_0 = 1,2 \cdot 3000 \text{ min}^{-1}$ aus $v_{\max} = \pi d_{\max} n_D$ ein maximaler Durchmesser von

$$d_{\max} = \frac{240 \text{ m/s}}{\pi \cdot 1,2 \cdot 3000 \text{ min}^{-1}} = 1,27 \text{ m} \approx 1,3 \text{ m}$$

Da durch die Beherrschung von Biege- und Torsionsschwingungen auch das als *Schlankheitsgrad* bezeichnete Verhältnis

$$\lambda = \frac{l}{d}$$

mit $\lambda_{\max} = 7$ nach oben begrenzt ist, erreicht man mit $c = 40 \text{ kVA min/m}^3$ Grenzleistungen für zweipolige Turbogeneratoren von

$$S_{rG\max} = c_{\max} \lambda_{\max} d_{\max}^3 n_0 = 40 \text{ kVA min/m}^3 \cdot 7 \cdot (1,3 \text{ m})^3 \cdot 3000 \text{ min}^{-1} \approx 1,8 \text{ GVA}$$

also höchstens etwa 2 GVA. Der Läufer eines solchen Generators würde eine aktive Länge von 9 m aufweisen.

Demgegenüber lassen sich für vierpolige Turbogeneratoren mit $n_0 = 1500 \text{ min}^{-1}$ Grenzleistungen von 2,5 GVA und mehr voraussagen. Der Läufer eines solchen Generators hätte ein Gewicht von 250 t. Seine Herstellung aus einem Schmiedeblock dürfte allerdings erhebliche technologische Probleme aufwerfen.

In Tabelle 1.1 sind die Daten des derzeit größten Turbogenerators in einem deutschen Kernkraftwerk (Brokdorf) aufgeführt.

Tabelle 1.1: Daten eines 1650-MVA-Turbogenerators

Generator -Typ	THFF180/76-15	Stoßkurzschlußstrom	301 kA
Leistung	1650 MVA	Dauerkurzschlußstrom 3-pol.	60,3 kA
Bemessungsspannung	27 kV	Dauerkurzschlußstrom 2-pol.	88,7 kA
Spannungsregelbereich	+/-5%	Synchronreaktanz x_d	218%
Leistungsfaktor	0,8	Transientreaktanz x'_d	44,5%
Bemessungsstrom	35 100 A	Subtransiente Reaktanz x''_d	31,3%
Frequenz	50	Leerlauf-Kurzschluß-Verhältnis	0,53
Drehzahl	1500	Bemessungserregerstrom	11 300 A
Kühlmedium	H ₂ /H ₂ O	Bemessungserregerspannung	540V
Gasdruck	5 bar	Wirkungsgrade bei:	
Kühlung d. Ständerwicklung	H ₂ O direkt	4/4 Last	98,69%
Kühlung d. Läuferwicklung	H ₂ O direkt	3/4 Last	98,84%
Kühlmedium Eintrittstemp.	40 °C	2/4 Last	98,85%
Art der Erregung	bürstenlos	1/4 Last	98,42%

Da die Luftspaltinduktion B durch die Eisensättigung im Zahnbereich auf $1,2 \text{ Vs/m}^2$ nach oben begrenzt ist, lassen sich Ausnutzungsziffern von 40 kVA min/m^3 und mehr nur durch hohe spezifische Strombeläge (Größenordnung 250 kA/m) erreichen.

Hohe Strombeläge erfordern eine intensive *Kühlung* der Wicklungen. So ist die Entwicklung zu größeren Einheitenleistungen auch deutlich durch die Intensivierung der Kühlung gekennzeichnet. Während die ersten Turbogeneratoren Luftkühlung für die Läufer- und Ständerwicklungen hatten, haben moderne Grenzleistungsgeneratoren wassergekühlte Ständer- und Läuferwicklungen (Bild 1.2).

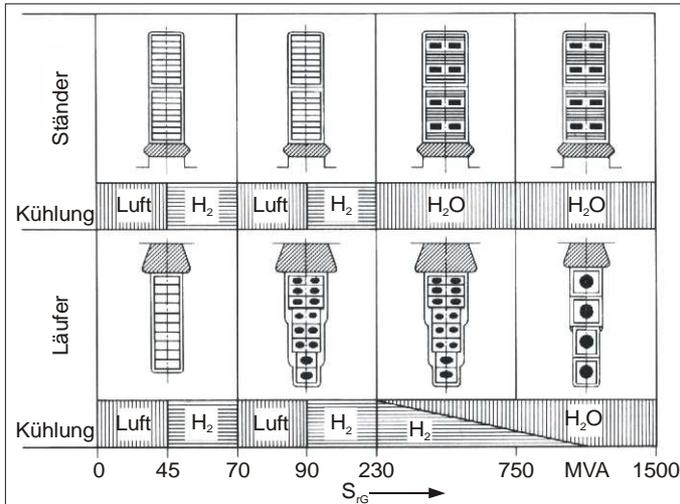


Bild 1.2: Grenzeleistungen in Abhängigkeit von der Kühlungsart

Die mit der Erhöhung des spezifischen Ankerstrombelages einhergehende Entwicklung der Ausnutzungsziffer und der Grenzeleistungen zeigen die Bilder 1.3 und 1.4. Die bessere Ausnutzung wirkt sich in einer Verringerung des spezifischen Gewichtes, des sogenannten *Leistungsgewichtes*, aus (Bild 1.5).

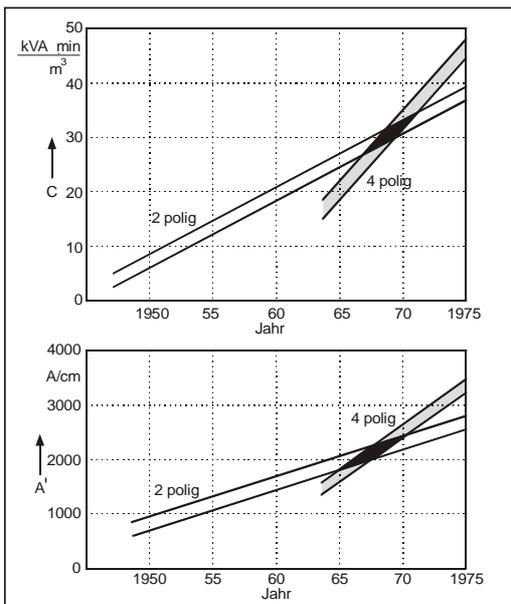


Bild 1.3: Entwicklung der Ausnutzungsziffer und des spezifischen Strombelages von 50-Hz-Turbogeneratoren

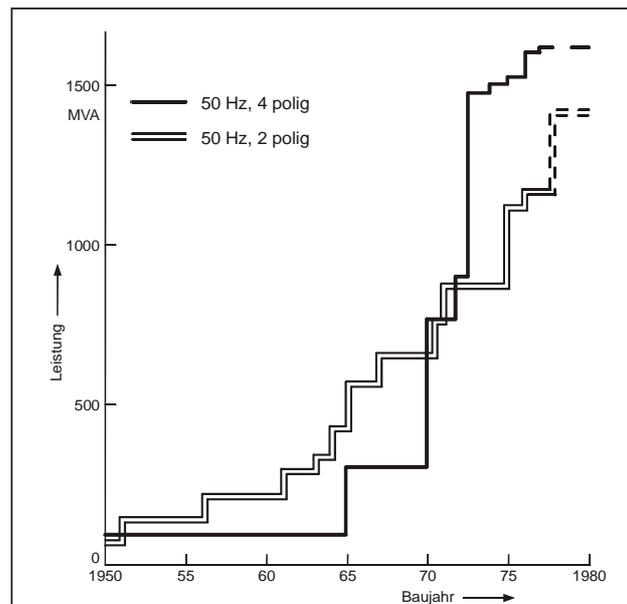


Bild 1.4: Entwicklung der Grenzeistung von Turbogeneratoren

Von den tatsächlichen Gewichten, die beim Transport von Turbogeneratoren zu bewältigen sind, vermittelt Bild 1.6 einen Eindruck. Das schwerste Bauteil, das besondere Anforderungen an die Transporttechnologie stellt, ist der Ständer. Man sieht, daß der vierpolige Turbogenerator dem zweipoligen - auch hinsichtlich der *Transportfähigkeit* - überlegen ist.

Der Übergang zu noch größeren Grenzeleistungen setzt eine weitere Steigerung der spezifischen Luftspaltinduktion und des spezifischen Ankerstrombelages voraus. Diese lassen sich nur durch *supraleitende* Generatoren, bei denen die Ankerwicklung als sog. Luftspaltwicklung nicht mehr in Nuten untergebracht ist, weiter erhöhen.

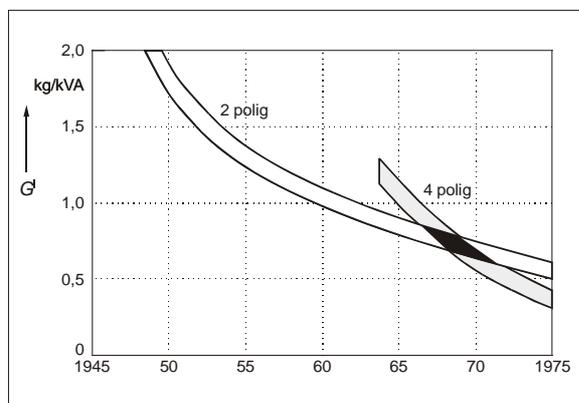


Bild 1.5: Entwicklung des Leistungsge-
wichtes von 50-Hz-Turbogeneratoren

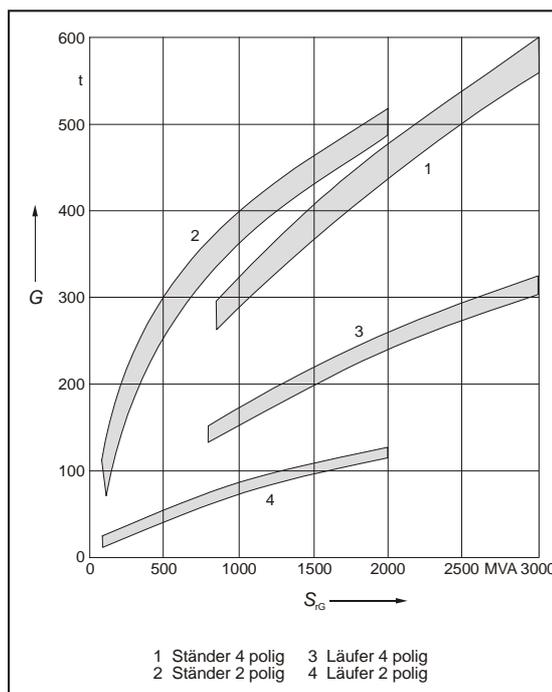


Bild 1.6: Transportgewicht von 50-Hz-
Turbogeneratoren

Die größten Wasserkraftgeneratoren sind Langsamläufer. Durch die niedrige Drehzahl lassen sich Läuferdurchmesser von 20 m und mehr realisieren. Damit sind diese Generatoren die größten elektrischen Maschinen überhaupt und müssen auf der Baustelle montiert werden. Mit Generatordurchmessern dieser Größenordnung kann für ein bestimmtes Aktivvolumen die Läuferlänge relativ klein gehalten werden. Man strebt ein ausgewogenes Verhältnis von Ankerlänge l zu Polteilung $\tau_p = \pi p d / 2$ an, das für große Polleistungen zwischen 3 und 4,5 liegt. Der Läuferdurchmesser von Wasserkraftgeneratoren richtet sich auch nach einem Mindestwert für die *Trägheitskonstante*

$$H = \frac{W_{kin}}{S_{rG}} = \frac{1}{2} \frac{J \Omega_0^2}{S_{rG}} \tag{1.4}$$

die für Langsamläufer zwischen 1,5 und 3 Ws/VA liegen sollte. Im Gegensatz zu Turboläufern bestimmt die Trägheitskonstante des Wasserkraftgenerators weitgehend das für die Begrenzung der Durchbrenndrehzahl (bei Wasserkraftgeneratoren $n_D = 1,6 \dots 3,5 n_0$) erforderliche Trägheitsverhalten.

Die geringere Einschränkung im Läufer volumen beim Entwurf von Schenkelpolgeneratoren ermöglicht den Bau der derzeit größten Einheitenleistungen von etwa 800 MVA mit Ausnutzungsziffern von der Größenordnung 15 kVA min/m^3 . Man vermeidet so die mit höchsten Ausnutzungsziffern verbundenen Nachteile. Mit wachsendem c vergrößert sich nämlich das Verhältnis A/B' und damit die Reaktanzen der Maschine. Größere Reaktanzen wirken sich ungünstig auf das Stabilitätsverhalten und die gerade bei Wasserkraftgeneratoren erwünschte Möglichkeit, Blindleistung aufzunehmen (kapazitiv zu fahren), aus. Außerdem steigen mit c auch die Verluste, so daß der Wirkungsgrad sinkt. Der derzeit größte Generator in einem Wasserkraft hat eine Leistung von 825 MVA bei 85,7 U/min und steht im Wasserkraftwerk Grand Coulee III am Colorado River.

Die Bilder 1.7 und 1.8 zeigen die historische Steigerung und die Grenzen der Einheitenleistung von Wasserkraftgeneratoren.

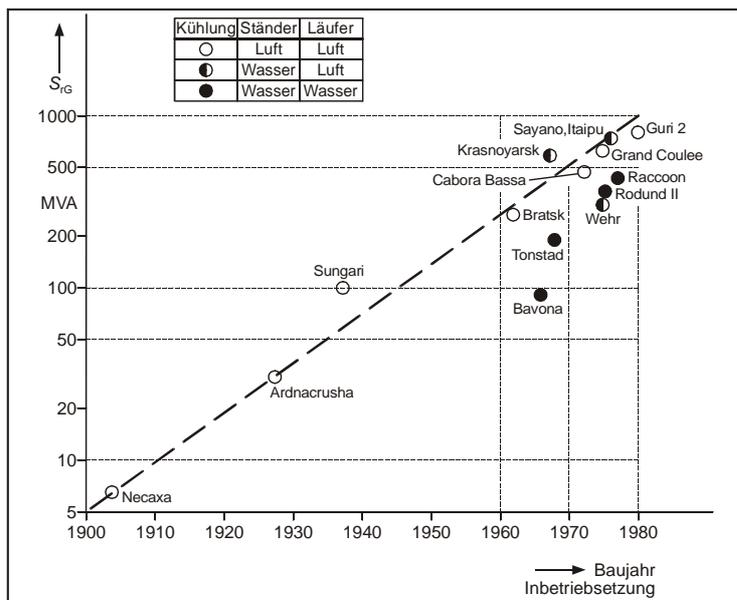


Bild 1.7: Leistungssteigerung von Wasserkraftgeneratoren

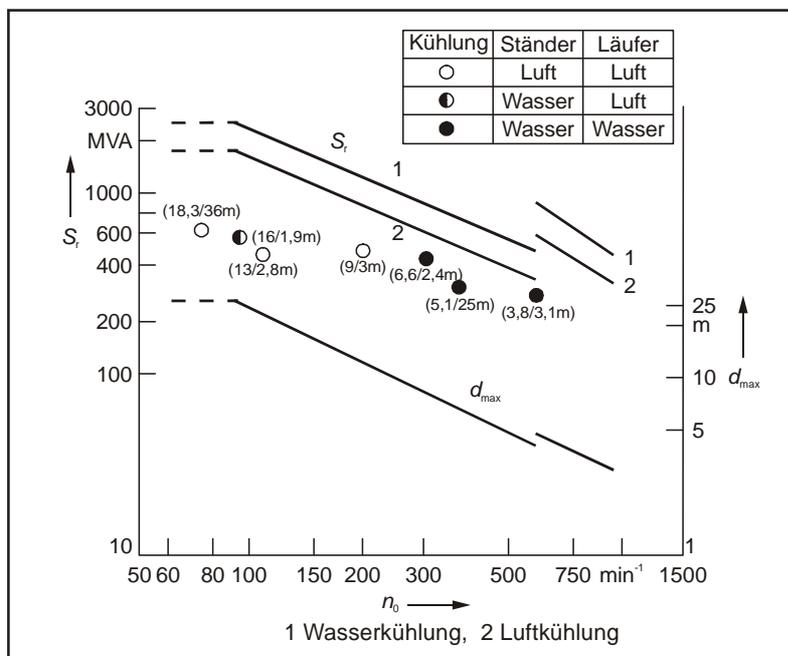


Bild 1.8: Grenzen der Einheitenleistung S_G und der Läuferdurchmesser von ausgeführten Maschinen großer Leistung. In Klammern: Läuferdurchmesser und Ankerlänge

Tabelle 1.2: Hauptdaten der Itaipu-Generatoren

Leistung	823,6 MVA	766,0 MVA
Frequenz	50 Hz	60 Hz
Leistungsfaktor	0,85	0,95
Bemessungsdrehzahl	90,9 min ⁻¹	92,3 min ⁻¹
Bemessungsspannung	18 kV	18 kV
Bohrungsdurchmesser	16 m	16 m
Ständerblechpaket-Höhe	3,5 m	3,26 m
Traglagerbelastung	4 240 t	4 200 t
Läufergewicht	1 961 t	1 945 t
Gesamtgewicht	3 343 t	3 242 t

Das größte Wasserkraftwerk der Welt ist mit einer Gesamtleistung von 12.600 MW z. Z. Itaipu mit je 9 Maschinensätzen von $S_{rG} = 767$ MVA bei einer Drehzahl von $92,3 \text{ min}^{-1}$ (60 Hz) und $S_{rG} = 824$ MVA bei $90,9 \text{ min}^{-1}$ (50 Hz).

Die Ständerwicklung der Generatoren ist direkt wassergekühlt. Das Ständerblechpaket und der Läufer haben eine konventionelle Luft- und Wasserkühlung. Der Luftspalt der 60-Hz-Generatoren mißt 29 mm. Die Maschinen-Parameter sind aus Tabelle 1.2 ersichtlich. Dagegen nehmen sich die Parameter des Lauffener Wasserkraftgenerators äußerst bescheiden aus (Tabelle 1.3).

Tabelle 1.3: Daten des Lauffener Wasserkraftwerkes

Leistung	Generator	210	kW	
Leistung	Turbine	304	"pferdig"	(1 PS = 0,7355 kW)
Frequenz		40	Hz	
Drehzahl		150	min ⁻¹	($p = 16$)
Spannung		55	V	("Phasenspannung")
Wirkungsgrad	Generator	96	%	
Erregerspannung		60	V	
Ausnutzungsziffer		1,13	kVA min/m ³	

Der bisherige Drang nach immer größeren Einheitenleistungen war durch die damit verbundene Verkleinerung des Leistungsgewichtes motiviert (Bild 1.5). Des weiteren sprechen geringerer spezifischer Raum- und Anlagenbedarf, geringere spezifische Baukosten und höherer Gesamtwirkungsgrad für größere Einheitenleistungen.

Aus Sicht des Netzbetriebes sind zu große Einheitenleistungen weniger vorteilhaft. Der Ausfall eines solchen Blockes bedeutet einen relativ hohen Verlust an Erzeugerleistung, verbunden mit stärkeren Frequenzeinbrüchen als bei Ausfall kleinerer Einheiten. Die ungünstigeren elektrischen Parameter wirken sich nachteilig auf die Netzynamik aus.

Durch den verstärkten Einsatz von wirtschaftlichen GUD-Kraftwerken (kombinierter Gasturbine-Dampfprozeß) erfährt die Weiterentwicklung von luftgekühlten Turbogeneratoren bis in den Leistungsbereich von 300 MVA neue Impulse. Sie lassen sich billiger herstellen und problemlos überall einsetzen. Den gegenüber wasserstoffgekühlten Turbogeneratoren in diesem Leistungsbereich schlechteren Wirkungsgrad, infolge der bei Luftkühlung höheren Reibungsverluste, nimmt man dabei in Kauf.

Nicht unwesentlich zur Steigerung der Einheitenleistung der Generatoren hat auch der Übergang auf immer größere *Bemessungsspannungen*, ermöglicht durch den Einsatz von Kunststoffisolierungen, beigetragen (Bild 1.9). Die Werte der Generatorbemessungsspannungen liegen gewöhnlich 5 % höher als die Nennspannungen der Netze, in die sie einspeisen.

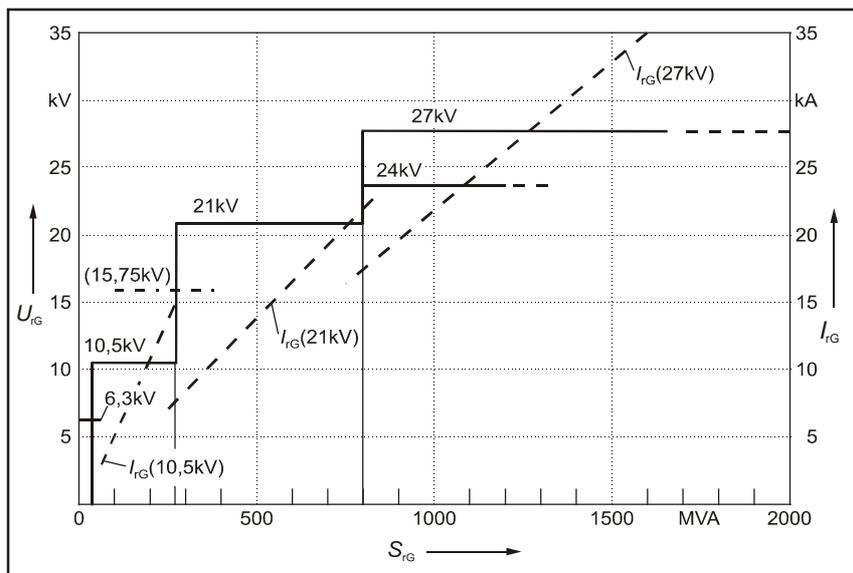


Bild 1.9: Generatorbemessungsspannungen und Generatorbemessungsströme in Abhängigkeit von der Bemessungscheinleistung

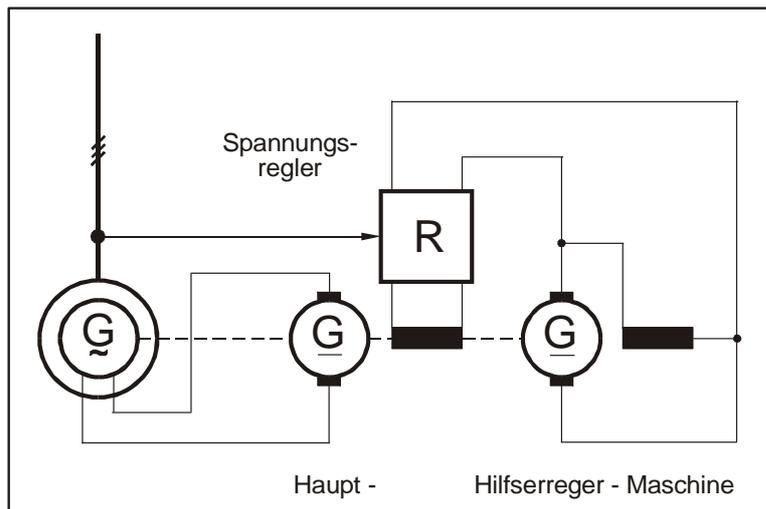


Bild 1.10: Erregersystem mit Gleichstrom-Haupt- und –Hilfs-erregermaschine

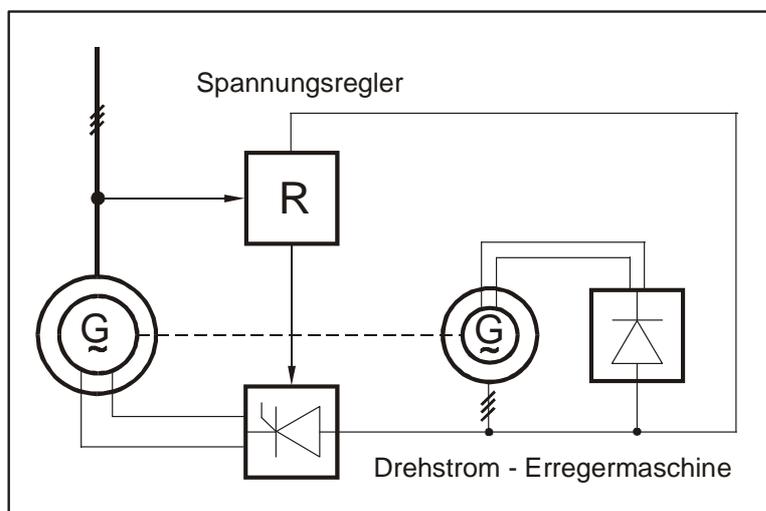


Bild 1.11: Erregersystem mit Drehstrom-erregermaschine und Stromrichter

Der Gleichstrom für die *Erregung* der Synchronmaschinen wird durch die Erregereinrichtung bereitgestellt. Die Erregereinrichtungen haben sich im Laufe der Zeit von der Gleichstrommaschine (Bild 1.10) über die Drehstrommaschine mit Stromrichter (Bild 1.11) zur schleifringlosen (bürstenlosen) Anordnung mit außenpoler-regter Synchronerregemaschine entwickelt (Bild 1.12).

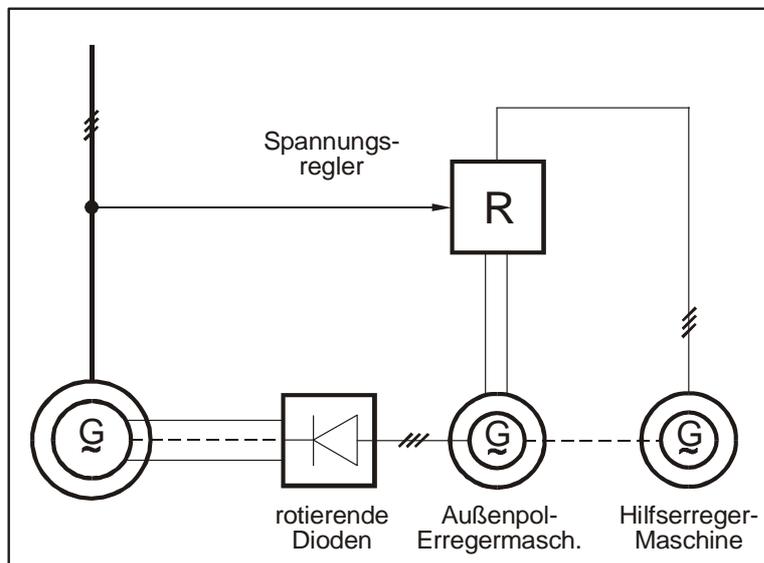


Bild 1.12: Bürstenloses Erregersystem

Mit *Gleichstrommaschinen* erreicht man Erregerleistungen von 300 kW, wie sie etwa für 100-MVA-Maschinen benötigt werden. Die Bereitstellung größerer Erregerleistungen bis etwa 3 MW für Maschinen mit Bemessungsleistungen bis etwa 1000 MVA hat zur Entwicklung von *Stromrichter-Erregereinrichtungen* geführt. Anstelle der Gleichstrommaschine ist eine Drehstrommaschine (Innenpolmaschine) getreten, die ihre Erregung über einen ungesteuerten Gleichrichter von den eigenen Ankerklemmen bezieht. Die Ankerspannung der Erregermaschine wird über eine Thyristorbrücke, die vom Spannungsregler R gesteuert wird, gleichgerichtet und auf die Erregerwicklung gegeben. Größte Erregerleistungen erfordern *schleifringlose* Erregereinrichtungen. Sie benutzen als Haupterregemaschine eine Synchronaußenpolmaschine. Zwischen der Ankerwicklung der Haupterregemaschine und der Erregerwicklung des Generators befinden sich rotierende Dioden. Die Erregerregelung erfolgt über die Verstellung der Erregung der Haupterregemaschine, die von einer permanentenregten Hilfserregemaschine (meist als Hochfrequenzmaschine ausgeführt) bezogen wird. Der Umweg der Erregerregelung über die Regelung der Erregung des Haupterregers verschlechtert die Regeldynamik gegenüber der Stromrichtererregung. Die Entwicklung führt deshalb zu Erregereinrichtungen mit rotierenden Thyristoren anstelle der rotierenden Dioden, wobei das Problem der Übertragung der Zündimpulse auf den Läufer zu lösen ist.

2 Funktion

Die Funktion der Synchronmaschine soll am Beispiel der 2-poligen Innenpolmaschine nach Bild 1.1 erläutert werden.

Die Erregerwicklung baut ein Gleichfeld auf, das mit dem Läufer umläuft. Es induziert in den drei räumlich um 120° versetzten Ankerwicklungen drei um jeweils 120° zeitlich verschobene Wechselspannungen mit der Frequenz $f = p n_0$, die sog. *Polradspannungen*. Sie lassen sich als Funktion des Erregerstromes als *Leerlaufkennlinie* (Bild 2.1) messen¹⁾. Aufgrund der Eisensättigung ist die Leerlaufkennlinie nichtlinear.

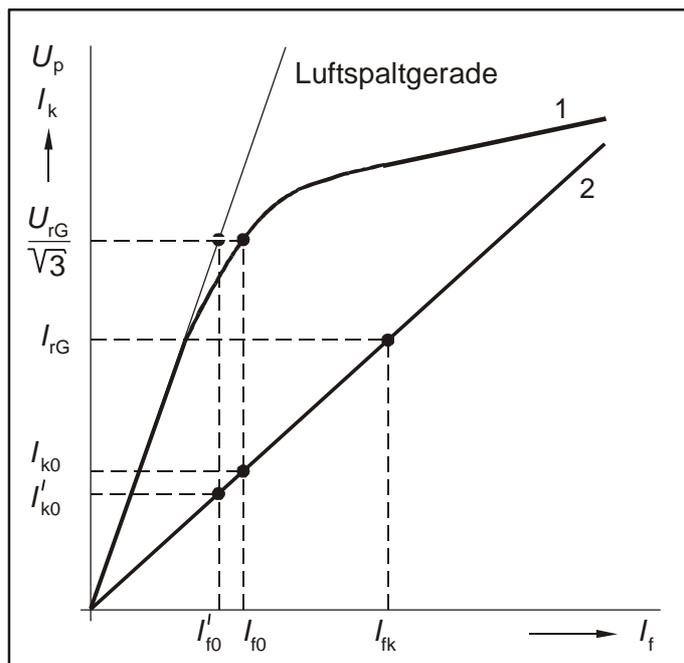


Bild 2.1: Leerlauf(1)- und Kurzschlußkennlinie (2) der Synchronmaschine

Das Erregerfeld liegt in der d-Achse des Läufers, so daß für die Sättigung der Leerlaufkennlinie der magnetische Widerstand in d-Richtung maßgebend ist. Mit der *Gegeninduktivität* L_{df} zwischen Anker- und Erregerwicklung in der d-Achse wird für $\omega_L = \omega_0$:

$$\boxed{U_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0 L_{df} I_f = \frac{1}{\sqrt{2}} X_{df} I_f} \quad (2.1)$$

Der Erregerstrom I_{f0} , bei dem die Bemessungsspannung induziert wird, heißt *Leerlauf-Erregerstrom*. Bei symmetrischer Belastung (Normalbetrieb) der Synchronmaschine fließen in den Ankerwicklungen drei gleich große um 120° phasenverschobene Ströme, deren Phasenlage zu der sie antreibenden Polradspannungen von der Art der Belastung sowie dem Blindleistungsbedarf und den Verlusten der Ankerwicklung abhängt. Bei rein induktiver Belastung eilen bei Vernachlässigung des Ankerwiderstandes die Ankerströme den Polradspannungen im VZS um $\pi/2$ nach, bei kapazitiver Belastung um $\pi/2$ vor. Bei reiner Wirkbelastung stellt sich aufgrund des Blindleistungsbedarfes der Ankerwicklung ein Phasenwinkel zwischen 0 und 90° (ohmsch-induktiv) ein (s. die Zeigerbilder in Bild 7.3).

¹⁾ Beachte: Die Polradspannung ist hier eine Strangspannung. Die Bemessungsspannung ist stets eine Leiter-Leiter-Spannung.

Durch die zeitliche Phasenverschiebung und die um 120° versetzte Anordnung der Ankerstränge bilden die drei Ankerströme ihrerseits ein Drehfeld (die sog. *Anker-rückwirkung*), das mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit wie der Läufer umläuft, also relativ zum Läufer ruht und sich mit dem Erregerdrehfeld zum resultierenden *Hauptfeld* überlagert. Von dem synchronen Umlauf von Erreger- und Ankerdrehfeld hat die Synchronmaschine ihren Namen. Durch die Phasenverschiebung der Polradspannung (der rotierende Zeiger für die Polradspannung fällt mit der q-Achse zusammen) von $\pi/2$ gegenüber einem gedachten rotierenden Zeiger für den Erregerstrom liegt das Ankerrückwirkungsfeld bei rein induktiver Belastung genau in Gegenrichtung zum Erregerfeld, schwächt dieses also. Umgekehrt verstärkt eine kapazitive Belastung das Erregerfeld. Im Extremfall kann sich eine Synchronmaschine bei kapazitiver Belastung auch selbst erregen (*Selbsterregung*). In beiden Fällen können Erregerdrehfeld und Ankerdrehfeld ohne weiteres überlagert werden. Für alle anderen Belastungsfälle liegt das Ankerrückwirkungsfeld außerhalb der d-Achse und muß geometrisch dem Erregerfeld überlagert werden.

Bei der Schenkelpolmaschine tritt dabei aufgrund des unterschiedlichen Luftspaltes in d- und q-Achse eine Phasenverschiebung zwischen resultierender Ankerdurchflutung und Ankerdrehfeld auf, die eine gesonderte mathematische Behandlung, die sogenannte *Zwei-Achsentheorie*, erfordert.

Der dreipolige Kurzschluß stellt die größtmögliche Ankerrückwirkung dar. In jedem Strang fließt der Kurzschlußstrom (s. Abschnitt 5.1)

$$\boxed{I_k = \frac{U_p}{X_d} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{X_{df}}{X_d} I_f} \quad (2.2)$$

wobei X_d die Ankerreaktanz oder *synchrone Reaktanz* der d-Achse ist. Die Abhängigkeit des Kurzschlußstromes vom Erregerstrom ist als *Kurzschlußkennlinie* in Bild 2.1 eingetragen. Aufgrund der starken Ankerrückwirkung im Kurzschlußfall ist das resultierende Hauptfeld relativ klein, so daß keine Sättigungserscheinungen auftreten und die Kurzschlußkennlinie linear verläuft. Sie ist im Gegensatz zur Leerlaufkennlinie auch nahezu unabhängig von der Drehzahl. Der Quotient

$$\frac{I_{f0}}{I_{fk}} = \frac{I_{k0}}{I_{rG}}$$

heißt *Leerlauf-Kurzschluß-Verhältnis*. Setzt man in Gl. (2.2) $U_p = U_{rG} / \sqrt{3}$, so wird:

$$I_k = I_{k0} = \frac{U_{rG}}{\sqrt{3}} \frac{1}{X_d} \quad (2.3)$$

und nach Division mit I_{rG} auf beiden Seiten

$$\boxed{\frac{I_{k0}}{I_{rG}} = \frac{I_{f0}}{I_{fk}} = \frac{U_{rG}}{\sqrt{3} I_{rG}} \frac{1}{X_d} = \frac{1}{x_d}} \quad (2.4)$$

Die bezogene synchrone Reaktanz ist somit der Kehrwert des Leerlauf-Kurzschluß-Verhältnisses. Nach Bild 2.1 unterscheidet man zwischen gesättigten und ungesättigten Werten (Strich-Größen in Bild 2.1).

3 Allgemeines Gleichungssystem

Das Gleichungssystem der Synchronmaschine beruht auf dem *Wicklungsmodell* in Bild 3.1a, in dem die drei Stränge der *Ankerwicklung* mit a,b,c und die *Erregerwicklung* mit f bezeichnet sind. Für die tatsächliche Dämpferwicklung wurden zwei senkrecht aufeinanderstehende *Ersatzwicklungen*, die Längsachsen-Dämpferwicklung (D) und die Querachsen-Dämpferwicklung (Q) eingeführt. Die beiden mit d und q bezeichneten Läuferwicklungen sollen zunächst außer acht gelassen werden.

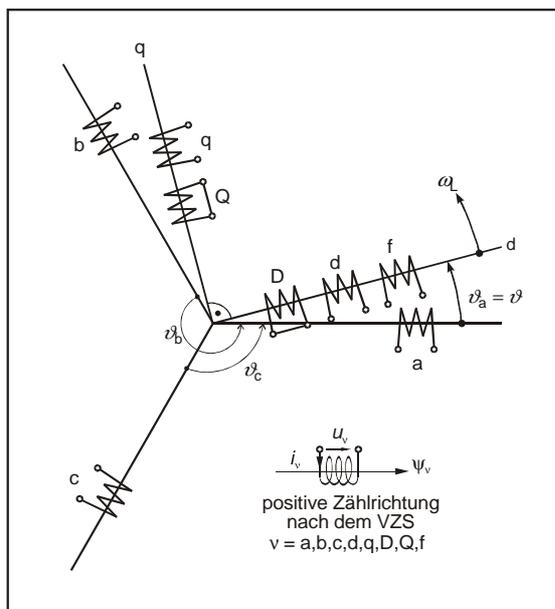


Bild 3.1a: Wicklungsmodell der Synchronmaschine

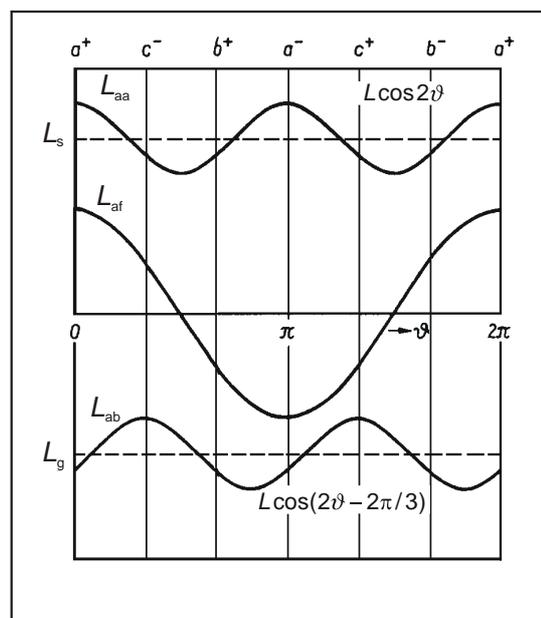


Bild 3.1b: Abhängigkeit der Induktivitäten vom Drehwinkel

Das Gleichungssystem für dieses Wicklungsmodell lautet:

Spannungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 u_a &= R_a i_a + \dot{\psi}_a & u_f &= R_f i_f + \dot{\psi}_f \\
 u_b &= R_a i_b + \dot{\psi}_b & 0 &= R_D i_D + \dot{\psi}_D \\
 u_c &= R_a i_c + \dot{\psi}_c & 0 &= R_Q i_Q + \dot{\psi}_Q
 \end{aligned}
 \tag{3.1} \tag{3.2}$$

Flußverkettungsgleichungen¹⁾:

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{Df} & L_{DD} & 0 \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}
 \tag{3.3}$$

¹⁾ Wir bezeichnen i.f. den Erregerstrom im Gegensatz zu Kapitel 2 wie alle Ströme mit einem kleinen Buchstaben.

mit $L_{ki} = L_{ik}$. Die Induktivitäten in Gl. (3.3) sind bis auf die Läuferinduktivitäten L_{ff} , L_{fD} , L_{DD} und L_{qQ} drehwinkelabhängig. Bild 3.1b zeigt beispielhaft die Drehwinkelabhängigkeit von L_{aa} , L_{ab} und L_{af} .

Mit den Drehwinkeln (s. Bild 3.1a):

$$\vartheta_a = \vartheta$$

$$\vartheta_b = \vartheta - \frac{2\pi}{3}$$

$$\vartheta_c = \vartheta + \frac{2\pi}{3}$$

gilt für die *Ankerselbstinduktivitäten*:

$$L_{aa} = L_s + \Delta L \cos 2\vartheta_a$$

$$L_{bb} = L_s + \Delta L \cos 2\vartheta_b$$

$$L_{cc} = L_s + \Delta L \cos 2\vartheta_c$$

und für die *Ankergegeninduktivitäten*:

$$L_{ab} = L_{ba} = L_g + \Delta L \cos 2\vartheta_c$$

$$L_{bc} = L_{cb} = L_g + \Delta L \cos 2\vartheta_a$$

$$L_{ca} = L_{ac} = L_g + \Delta L \cos 2\vartheta_b$$

Die *Gegeninduktivitäten* zwischen *Anker-* und *Läuferwicklungen* hängen wie folgt von den Drehwinkeln ab:

$$L_{af} = L_{fa} = L_{df} \cos \vartheta_a$$

$$L_{bf} = L_{fb} = L_{df} \cos \vartheta_b$$

$$L_{cf} = L_{fc} = L_{df} \cos \vartheta_c$$

$$L_{aD} = L_{Da} = L_{dD} \cos \vartheta_a$$

$$L_{bD} = L_{Db} = L_{dD} \cos \vartheta_b$$

$$L_{cD} = L_{Dc} = L_{dD} \cos \vartheta_c$$

$$L_{aQ} = L_{Qa} = L_{qQ} \cos(\vartheta_a + \frac{\pi}{2}) = -L_{qQ} \sin \vartheta_a$$

$$L_{bQ} = L_{Qb} = L_{qQ} \cos(\vartheta_b + \frac{\pi}{2}) = -L_{qQ} \sin \vartheta_b$$

$$L_{cQ} = L_{Qc} = L_{qQ} \cos(\vartheta_c + \frac{\pi}{2}) = -L_{qQ} \sin \vartheta_c$$

Durch die Drehwinkelabhängigkeit der Induktivitäten ist das mathematische Modell der Synchronmaschine kompliziert. Nur für eine ideale Vollpolmaschine mit gleichem magnetischen Widerstand in der d- und q-Achse wird $\Delta L = 0$, womit die Ankerselbst- und Ankergegeninduktivitäten *winkelunabhängig* werden. Die Winkelabhängigkeit der Gegeninduktivitäten zwischen den Anker- und Läuferwicklungen bleibt jedoch bestehen.

4 Gleichungssystem mit dq0-Ankergrößen*

Ersetzt man die ruhende Ankerwicklung durch zwei auf dem Läufer angeordnete *Ersatzwicklungen* (die Wicklungen d und q in Bild 3.1a) und eine Wicklung für das *Nullsystem*, so erhält man ein äquivalentes Wicklungsmodell, das sogenannte *Zweiachsen- oder PARKsche¹⁾ Modell*, in dem keine winkelabhängigen Induktivitäten mehr vorkommen, da alle Wicklungen zueinander ruhen. Die dq-Ersatz-Ankerwicklungen stehen senkrecht aufeinander, so daß im Zweiachsenmodell nur noch induktive Kopplungen zwischen den Wicklungen der gleichen Achse auftreten. Die Nullsystemwicklung ist völlig separat.

Zwischen den abc- und dq0-Ankergrößen²⁾ bestehen folgende Transformationsbeziehungen³⁾ (allgemein für $g = i, \psi$ und u):

$$\begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_a & -\sin \vartheta_a & 1 \\ \cos \vartheta_b & -\sin \vartheta_b & 1 \\ \cos \vartheta_c & -\sin \vartheta_c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_P \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

und:

$$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_a & \cos \vartheta_b & \cos \vartheta_c \\ -\sin \vartheta_a & -\sin \vartheta_b & -\sin \vartheta_c \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} = \mathbf{T}_P^{-1} \begin{bmatrix} g_a \\ g_b \\ g_c \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ersetzt man in den Flußverkettungsgleichungen, Gl. (3.3), die Ankergrößen durch ihre dq0-Komponenten, so erhält man:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{df} & L_{dD} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & L_{qQ} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}L_{df} & 0 & 0 & L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ \frac{3}{2}L_{dD} & 0 & 0 & L_{Df} & L_{DD} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}L_{qQ} & 0 & 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

mit:

$$L_d = L_s - L_g + \frac{3}{2} \Delta L = \frac{3}{2} (L_h + \Delta L) + (L_{os} - L_{og}) = L_{hd} + L_\sigma$$

$$L_q = L_s - L_g - \frac{3}{2} \Delta L = \frac{3}{2} (L_h - \Delta L) + (L_{os} - L_{og}) = L_{hq} + L_\sigma$$

$$L_0 = L_s + 2L_g = L_{os} + 2L_{og}$$

Die Induktivitäten L_d , L_q und L_0 sind die *Selbstinduktivitäten* der dq0-Ankerwicklungen. Sie werden als *synchrone Längs- und Querinduktivität* und als *Nullinduktivität* bezeichnet und sind wichtige Maschinenparameter. Mit L_d wird die synchrone Längs-

1) nach R. H. PARK

2) man spricht auch von den dq0-Komponenten der Ankergrößen

3) Die durch die Gln. (4.1) und (4.2) ausgedrückten Transformationen heißen auch PARK-Transformation.

reaktanz $X_d = \omega_0 L_d$ gebildet, die wir in Kapitel 2 bereits im Zusammenhang mit der Kurzschlußkennlinie kennengelernt haben.

Die Transformation der Spannungsgleichungen für die Ankerwicklungen ergibt mit $\dot{\vartheta}_a = \dot{\vartheta}_b = \dot{\vartheta}_c = \omega_L$ für die inneren Ableitungen der Winkelfunktionen in \mathbf{T}_p :

$$\begin{aligned} u_d &= R_a i_d + \dot{\psi}_d - \omega_L \psi_q \\ u_q &= R_a i_q + \dot{\psi}_q + \omega_L \psi_d \\ u_0 &= R_a i_0 + \dot{\psi}_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Glieder $-\omega_L \psi_q$ und $\omega_L \psi_d$ bedeuten eine rotatorische Spannungsinduktion zwischen den beiden Ersatz-Ankerwicklungen, wie wir sie von der Gleichstrommaschine kennen und heißen deshalb auch *rotatorische* Spannungsglieder im Gegensatz zu den *transformatorischen* Spannungsgliedern $\dot{\psi}_d$ und $\dot{\psi}_q$.

Gewöhnlich rechnet man die Läufergrößen auf die dq-Ersatzankerwicklungen um (ähnlich wie die Umrechnung einer Wicklung auf die andere beim Transformator). Durch die Wahl unterschiedlicher Umrechnungsbeziehungen für die Läuferflußverketungen und -spannungen einerseits und die Läuferströme andererseits läßt sich dabei die in Gl. (4.3) entstandene Unsymmetrie der Induktivitätsmatrix wieder beseitigen.

Die entsprechenden Umrechnungsbeziehungen lauten (die umgerechneten Größen sind mit einem Strich versehen):

$$i'_f = \frac{1}{\ddot{u}_f} i_f, \quad i'_D = \frac{1}{\ddot{u}_D} i_D, \quad i'_Q = \frac{1}{\ddot{u}_Q} i_Q$$

und:

$$\psi'_f = \frac{2}{3} \ddot{u}_f \psi_f, \quad \psi'_D = \frac{2}{3} \ddot{u}_D \psi_D, \quad \psi'_Q = \frac{2}{3} \ddot{u}_Q \psi_Q$$

wobei die *Übersetzungsverhältnisse*:

$$\ddot{u}_f = \frac{L_{hd}}{L_{df}}, \quad \ddot{u}_D = \frac{L_{hd}}{L_{dD}}, \quad \ddot{u}_Q = \frac{L_{hq}}{L_{qQ}}$$

eingeführt wurden.

Mit den umgerechneten Läufergrößen geht die Flußverkettungsgleichung Gl. (4.3) über in:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \\ \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{hd} & L_{hd} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & L_{hq} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline L_{hd} & 0 & 0 & L'_{ff} & L_{hd} & 0 \\ L_{hd} & 0 & 0 & L_{hd} & L'_{DD} & 0 \\ 0 & L_{hq} & 0 & 0 & 0 & L'_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i'_f \\ i'_D \\ i'_Q \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Die umgerechneten Läufer*selbst*induktivitäten setzen sich aus *Haupt-* und *Streuanteil* wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
L'_{ff} &= L_{hd} + \frac{2}{3} \dot{u}_f^2 L_{\sigma f} = L_{hd} + L'_{\sigma f} \\
L'_{DD} &= L_{hd} + \frac{2}{3} \dot{u}_D^2 L_{\sigma D} = L_{hd} + L'_{\sigma D} \\
L'_{QQ} &= L_{hq} + \frac{2}{3} \dot{u}_Q^2 L_{\sigma Q} = L_{hq} + L'_{\sigma Q}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Man sieht deutlich den wesentlichen Vorteil des Zweiachsenmodells. Die Induktivitäten in der Flußverkettungsgleichung Gl. (4.5) sind nicht mehr drehwinkelabhängige. Als Nicht-Diagonalelemente kommen nur noch die beiden *Hauptinduktivitäten* L_{hd} und L_{hq} vor, was bei der eventuellen Berücksichtigung der Eisensättigung von Bedeutung wäre.

Die Erregerspannung u_f wird wie ψ_f mit $2/3 \dot{u}_f$ umgerechnet. Die Läuferwiderstände werden wie die Läuferstreuinduktivitäten (s. Gl. (4.6)) mit $2/3 \dot{u}_i^2$ umgerechnet ($i = f, D, Q$). Damit behalten die umgerechneten Spannungsgleichungen für die Läuferwicklungen die Form von Gl. (3.2) bei:

$$\begin{aligned}
u'_f &= R'_f i'_f + \dot{\psi}'_f \\
0 &= R'_D i'_D + \dot{\psi}'_D \\
0 &= R'_Q i'_Q + \dot{\psi}'_Q
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Ein weiterer Vorteil des Zweiachsenmodells besteht darin, daß die dq-Ankergrößen im stationären Betrieb an einem symmetrischen Drehstromsystem wie die Erregergrößen und die Drehzahl *konstant* sind. Die Dämpferströme und die Nullsystemgrößen sind im stationären Betrieb mit symmetrischer Belastung Null. Das Gleichungssystem vereinfacht sich damit für *stationäre Betriebszustände* zu:

$$\begin{aligned}
u_d &= R_a i_d - \omega_0 \psi_q & u'_f &= R'_f i'_f \\
u_q &= R_a i_q + \omega_0 \psi_d & i'_D &= 0 \\
u_0 &= i_0 = 0 & i'_Q &= 0
\end{aligned} \tag{4.8} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
\psi_d &= L_d i_d + L_{hd} i'_f & \psi'_f &= L'_{ff} i'_f + L_{hd} i_d \\
\psi_q &= L_q i_q & \psi'_D &= L_{hd} i'_f + L_{hd} i_d \\
\psi_0 &= L_0 i_0 = 0 & \psi'_Q &= L_{hq} i_q
\end{aligned} \tag{4.10} \tag{4.11}$$

Doch kehren wir zurück zum allgemeinen Gleichungssystem für beliebige Betriebszustände. Die Gln. (4.4) (4.5) und (4.7) beschreiben das Betriebsverhalten der Synchronmaschine bei gegebener Drehzahl. In der Nähe des Synchronismus kann zwar die Drehzahl bei den meisten Untersuchungen als konstant angesehen werden, nicht aber die Lageänderung des Läuferkoordinatensystems gegenüber einem synchron umlaufenden Bezugssystem. Das Gleichungssystem muß dann noch durch die sog. *Bewegungsgleichungen* ergänzt werden¹⁾.

Für numerische Auswertungen und die Interpretation der Betriebsvorgänge ist die Umformung der Gln. (4.4) (4.5) und (4.7) in ein Zustandsdifferentialgleichungssystem, das nur aus Differentialgleichungssystem 1.Ordnung besteht, angebracht. Algebraische Beziehungen zwischen einzelnen Größen (wie sie die Flußverkettungsgleichung darstellt) kommen im Zustandsdifferentialgleichungssystem ZDGL nicht mehr vor. Sie werden bei der Herleitung des ZDGL dazu benutzt einen Teil der Größen zu

¹⁾ s. Skript Stabilität

eliminieren. Die verbleibenden Größen sind die sog. Zustandsvariablen. Wir entscheiden uns dafür, die Läuferströme und Ständerflußverkettungen zu eliminieren. Zunächst werden die Flußverkettungsgleichungen des Läufers aus Gl. (4.5) nach den Läuferströmen aufgelöst. Man erhält:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}'_f \\ \dot{i}'_D \\ \dot{i}'_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ff} & D_{fD} & 0 \\ D_{Df} & D_{DD} & 0 \\ 0 & 0 & D_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_f i_d \\ k_D i_d \\ k_Q i_q \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

mit den folgenden Ausdrücken für die Matrixelemente und die dabei eingeführten *Koppelfaktoren*:

$$D_{ff} = \frac{L'_{DD}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2}; \quad D_{fD} = D_{Df} = -\frac{L_{hd}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2}$$

$$D_{DD} = \frac{L'_{ff}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2}; \quad D_{QQ} = \frac{1}{L'_{QQ}}$$

$$k_f = \frac{L_{hd}(L'_{DD} - L_{hd})}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2} = L_{hd}(D_{ff} + D_{fD}); \quad k_D = \frac{L_{hd}(L'_{ff} - L_{hd})}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2} = L_{hd}(D_{DD} + D_{Df});$$

$$k_Q = \frac{L_{hq}}{L_{QQ}} = L_{hq} D_{QQ}$$

Mit Gl. (4.12) werden die Läuferströme in den Flußverkettungsgleichungen des Ankers und in den Spannungsgleichungen des Läufers eliminiert. Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L''_d & & \\ & L''_q & \\ & & L_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_f & k_D & 0 \\ 0 & 0 & k_Q \\ 0 & 0 & L_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

und

$$\begin{bmatrix} \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{ff} R'_f & D_{fD} R'_f & 0 \\ D_{Df} R'_D & D_{DD} R'_D & 0 \\ 0 & 0 & D_{QQ} R'_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_f R_f & k_D R_D & 0 \\ 0 & 0 & k_Q R_Q \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Die in Gl. (4.13) mit zwei Strichen versehenen Induktivitäten sind die sog. *subtransienten* Induktivitäten:

$$L''_d = L_d - (k_D + k_f) L_{hd} = L_\sigma + \frac{L_{hd} L'_{\sigma f} L'_{\sigma D}}{L_{hd} L'_{\sigma f} + L_{hd} L'_{\sigma D} + L'_{\sigma f} L'_{\sigma D}} \quad (4.15)$$

$$L''_q = L_q - k_Q L_{hq} = L_\sigma + \frac{L_{hq} L'_{\sigma Q}}{L_{hq} + L'_{\sigma Q}}$$

Eine Interpretation der subtransienten Induktivitäten erfolgt in Kapitel 6.

Schließlich nehmen die Spannungsgleichungen des Ankers mit Gl. (4.13) und deren Ableitung folgende Form an.

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & -\omega_L L_q'' & 0 \\ \omega_L L_d'' & R_a & 0 \\ 0 & 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d'' & 0 & 0 \\ 0 & L_q'' & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_L k_Q \\ \omega_L k_f & \omega_L k_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_f' \\ \psi_D' \\ \psi_Q' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_f & k_D & 0 \\ 0 & 0 & k_Q \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_f' \\ \psi_D' \\ \psi_Q' \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Die Gln. (4.14) und (4.16) bilden das gesuchte *Zustandsdifferentialgleichungs-system* mit $i_d, i_q, i_0, \psi_f', \psi_D'$ und ψ_Q' als *Zustandsvariablen*. Beide Gleichungen werden noch zu *einer* Matrixgleichung zusammengefaßt:

$$\begin{bmatrix} L_d'' & 0 & 0 & k_f & k_D & 0 \\ 0 & L_q'' & 0 & 0 & 0 & k_Q \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_0 \\ \dot{\psi}_f' \\ \dot{\psi}_D' \\ \dot{\psi}_Q' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_a & -\omega_L L_q'' & 0 & 0 & 0 & -\omega_L k_Q \\ \omega_L L_d'' & R_a & 0 & \omega_L k_f & \omega_L k_D & 0 \\ 0 & 0 & R_a & 0 & 0 & 0 \\ \hline -k_f R_f' & 0 & 0 & D_{ff} R_f' & D_{fD} R_f' & 0 \\ -k_D R_D' & 0 & 0 & D_{Df} R_D' & D_{DD} R_D' & 0 \\ 0 & -k_Q R_Q' & 0 & 0 & 0 & D_{QQ} R_Q' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ \psi_f' \\ \psi_D' \\ \psi_Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \\ u_f' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

oder, wenn man die konstanten Koppelfaktoren noch an die Flußverkettungen heran-zieht:

$$\begin{bmatrix} L_d'' & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & L_q'' & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{i}_0 \\ k_f \dot{\psi}_f' \\ k_D \dot{\psi}_D' \\ k_Q \dot{\psi}_Q' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_a & -\omega_L L_q'' & 0 & 0 & 0 & -\omega_L \\ \omega_L L_d'' & R_a & 0 & \omega_L & \omega_L & 0 \\ 0 & 0 & R_a & 0 & 0 & 0 \\ \hline -k_f^2 R_f' & 0 & 0 & D_{ff} R_f' & D_{fD} R_f' & 0 \\ -k_D^2 R_D' & 0 & 0 & D_{Df} R_D' & D_{DD} R_D' & 0 \\ 0 & -k_Q^2 R_Q' & 0 & 0 & 0 & D_{QQ} R_Q' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ k_f \psi_f' \\ k_D \psi_D' \\ k_Q \psi_Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \\ k_f u_f' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Das Zweiachsenmodell kann man auch als Ergebnis einer *Modaltransformation* ansehen. Das Ziel einer Modaltransformation ist es, die natürlichen Ankergrößen g_a , g_b und g_c durch drei neue, zunächst noch unbekannte Größen, so zu ersetzen, daß die Induktivitätsmatrix des Ankers

$$\mathbf{L}_{SS} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix}$$

in der Flußverkettungsmatrix von Gl. (3.3) zur Diagonalmatrix wird. Die neuen Größen, die diese Forderung erfüllen, heißen *modale Größen*. Die Elemente der Diagonalmatrix sind dann die *Eigenwerte* L_1 , L_2 und L_3 von \mathbf{L}_{SS} . Aus dem Ansatz:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_M \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix}$$

und der Umkehrung:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_M^{-1} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

sowie der Forderung:

$$\mathbf{L}_{SS} = \text{diag}(L_1 \ L_2 \ L_3)$$

lassen sich die 9 Elemente der Transformationsmatrix \mathbf{T}_M bis auf einen beliebigen Faktor berechnen¹⁾.

Offensichtlich ist die Matrix \mathbf{T}_P der PARK-Transformation in Gl. (4.1) eine mögliche Transformationsmatrix, denn sie transformiert zusammen mit ihrer Inversen die Matrix \mathbf{L}_{SS} auf eine Diagonalmatrix mit den Elementen L_d , L_q und L_0 . Die als Selbstinduktivitäten der dq0-Ankerwicklungen eingeführten Induktivitäten L_d , L_q und L_0 sind demnach die Eigenwerte λ der Matrix \mathbf{L}_{SS} . Wir haben sie bei der Transformation aus der Beziehung

$$\mathbf{T}_P^{-1} \mathbf{L}_{SS} \mathbf{T}_P = \text{diag}(L_d \ L_q \ L_0)$$

erhalten. Ihre Berechnung aus der allgemeinen Beziehung

$$\det(\mathbf{L}_{SS} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

führt auf ein charakteristisches Polynom 3. Ordnung für L , dessen Nullstellen wegen der darin enthaltenen Winkelfunktionen nicht ganz so einfach auszurechnen sind.

¹⁾ s. Skript Modale Komponenten zur Vorlesung Elektrische Netze

5 Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten

Die Ersatzschaltungen für *das Mit-, Gegen- und Nullsystem* gelten unter stationären und näherungsweise auch unter quasistationären Bedingungen. Somit sind ein- und sinusförmige Ankergrößen und konstante Drehzahl des Generators vorauszusetzen. Die Herleitung der Ersatzschaltungen aus den Gleichungen in natürlichen Koordinaten ist wegen der Läuferunsymmetrie ziemlich umständlich. Wir werden deshalb soweit wie möglich von Näherungen Gebrauch machen, um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten. Eleganter ist die Herleitung auf dem Umweg über die dq0-Koordinaten, die wir deshalb ebenfalls angeben wollen.

Neben den Mitsystem-Ersatzschaltungen für den stationären Zustand werden wir auch Mitsystem-Ersatzschaltungen für die Berechnung der 50-Hz-Wechselanteile unmittelbar nach dem Eintritt einer Störung und in einem kurzen Zeitbereich danach kennenlernen.

5.1 Mitsystem-Ersatzschaltungen für den stationären Zustand

Wir beschränken uns auf eine ideale Vollpolmaschine mit $L_{\text{hq}} = L_{\text{hd}}$ und setzen ein Mitsystem der Ankerströme voraus:

$$\begin{aligned} i_{a1} &= \hat{i}_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{11}) \\ i_{b1} &= \hat{i}_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{11} - \frac{2\pi}{3}) \\ i_{c1} &= \hat{i}_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_{11} + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Der Erregerstrom ist im stationären Betrieb mit symmetrischer Belastung konstant, die Dämpferströme sind Null. Damit ergibt sich für die Ankerflußverkettungen nach Gl. (3.3) unter Verwendung der umgerechneten Läufergrößen und unter Berücksichtigung von $\Delta L = 0$ für $L_{\text{hq}} = L_{\text{hd}}$:

$$\begin{bmatrix} \psi_{a1} \\ \psi_{b1} \\ \psi_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_g & L_g \\ L_g & L_s & L_g \\ L_g & L_g & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{b1} \\ i_{c1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{\text{df}} i_f \cos \vartheta_a \\ L_{\text{df}} i_f \cos \vartheta_b \\ L_{\text{df}} i_f \cos \vartheta_c \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

und mit der Bedingung $i_{a1} + i_{b1} + i_{c1} = 0$

$$\begin{bmatrix} \psi_{a1} \\ \psi_{b1} \\ \psi_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s - L_g & 0 & 0 \\ 0 & L_s - L_g & 0 \\ 0 & 0 & L_s - L_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{b1} \\ i_{c1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{\text{df}} i_f \cos \vartheta_a \\ L_{\text{df}} i_f \cos \vartheta_b \\ L_{\text{df}} i_f \cos \vartheta_c \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Nach Einsetzen der differenzierten Gl. (5.3) in die Spannungsgleichung des Ankers (Gl. (3.1)) ergibt sich mit $L_s - L_g = L_d$:

$$\begin{aligned} u_{a1} &= R_a i_{a1} + L_d \dot{i}_{a1} + \omega_0 L_{\text{df}} i_f \cos(\vartheta_a + \frac{\pi}{2}) \\ u_{b1} &= R_a i_{b1} + L_d \dot{i}_{b1} + \omega_0 L_{\text{df}} i_f \cos(\vartheta_b + \frac{\pi}{2}) \\ u_{c1} &= R_a i_{c1} + L_d \dot{i}_{c1} + \omega_0 L_{\text{df}} i_f \cos(\vartheta_c + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die Spannungsgleichungen des Mitsystems sind erwartungsgemäß entkoppelt. Der jeweils letzte Term repräsentiert den Momentanwert der vom konstanten Erregerstrom hervorgerufenen *Polradspannung*. Anstelle der sinusförmigen Momentanwerte in Gl. (5.4) können auch Zeiger treten. Außerdem genügt die Betrachtung einer der drei redundanten Gleichungen in Gl. (5.4), wofür üblicherweise der Strang a ausgewählt wird. Man läßt dann den Index a gewöhnlich weg. Die Überführung der Spannungsgleichung für den Strang a in eine Zeigergleichung mit umlaufenden Amplitudenzeigern ergibt mit $\vartheta_a = \omega_0 t + \vartheta_0$:

$$\hat{u}_1 = R_a \hat{i}_1 + j\omega_0 L_d \hat{i}_1 + j\omega_0 L_{df} \frac{1}{\sqrt{2}} i_f e^{j(\omega_0 t + \vartheta_0)} \tag{5.5}$$

Nach Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\omega_0 t}$ wird aus Gl. (5.5) eine Zeigergleichung für die üblichen ruhenden Effektivwertzeiger:

$$\underline{U}_1 = R_a \underline{i}_1 + j\omega_0 L_d \underline{i}_1 + j\omega_0 L_{df} \frac{1}{\sqrt{2}} i_f e^{j\vartheta_0} \tag{5.6}$$

Mit:

$$\omega_0 L_d = X_d$$

und

$$\underline{U}_p = j\omega_0 L_{df} \frac{1}{\sqrt{2}} i_f e^{j\vartheta_0} = j\omega_0 L_{hd} \frac{1}{\sqrt{2}} i_f' e^{j\vartheta_0} = jX_{hd} \frac{1}{\sqrt{2}} i_f' e^{j\vartheta_0} \tag{5.7}$$

folgt schließlich

$$\underline{U}_1 = (R_a + jX_d) \underline{i}_1 + \underline{U}_p = \underline{Z}_1 \underline{i}_1 + \underline{U}_p \tag{5.8}$$

Die *Mitimpedanz* \underline{Z}_1 setzt sich aus dem Ankerwiderstand R_a und der schon bekannten synchronen Längsreaktanz X_d zusammen. Der Ankerwiderstand ist bei Generatoren größerer Leistung gegenüber der synchronen Längsreaktanz vernachlässigbar klein (s. Kapitel 6).

Zu der Spannungsgleichung Gl. (5.8) gehört die *Spannungsquellen-Ersatzschaltung* in Bild 5.1a mit der Polradspannung als Quellenspannung.

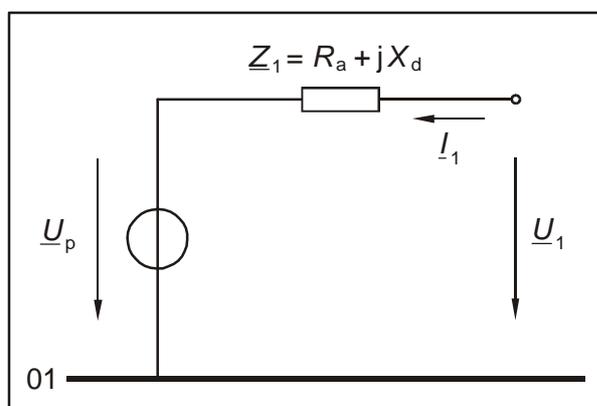


Bild 5.1a: Spannungsquellen-Ersatzschaltung für das Mitsystem im stationären Betrieb

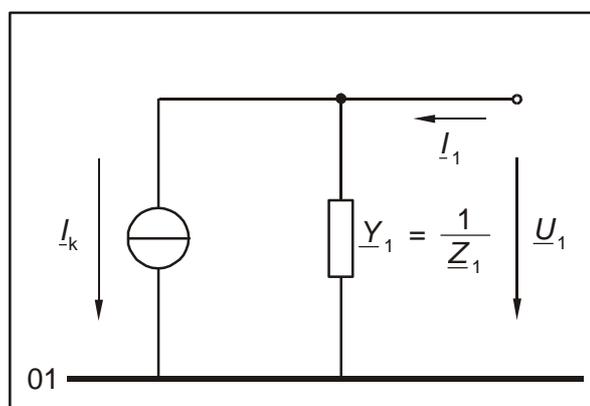


Bild 5.1b: Stromquellen-Ersatzschaltung für das Mitsystem im stationären Betrieb

In manchen Fällen ist es zweckmäßiger, eine Stromquellen-Ersatzschaltung zu verwenden. Die zu Bild 5.1a äquivalente *Stromquellen-Ersatzschaltung* in Bild 5.1b erhält man aus der Umstellung von Gl. (5.8) nach dem Ankerstrom:

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} \underline{U}_1 - \frac{1}{\underline{Z}_1} \underline{U}_p \quad (5.9a)$$

bzw.:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{I}_k \quad (5.9b)$$

In Gl. (5.9b) ist

$$\underline{I}_k = -\frac{\underline{U}_p}{\underline{Z}_1} = -\underline{Y}_1 \underline{U}_p \quad (5.10)$$

der dreipolige *Dauerkurzschlußstrom*. Er erscheint in Bild 5.1b als Quellenstrom. Aus den Gln. (5.7) und (5.10) mit Vernachlässigung von R_a stammen die Gln. (2.1) und (2.2) für die Beträge der Polradspannung und des dreipoligen Kurzschlußstromes. Man kann sich nun noch davon überzeugen, daß ein Mitsystem der Ankerströme konstante Läuferflußverkettungen hervorruft. Aus Gl. (3.3) folgt nämlich:

$$\begin{bmatrix} \psi_{f1} \\ \psi_{D1} \\ \psi_{Q1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{df} \cos \vartheta_a & L_{df} \cos \vartheta_b & L_{df} \cos \vartheta_c \\ L_{dD} \cos \vartheta_a & L_{dD} \cos \vartheta_b & L_{dD} \cos \vartheta_c \\ -L_{qQ} \sin \vartheta_a & -L_{qQ} \sin \vartheta_b & -L_{qQ} \sin \vartheta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{b1} \\ i_{c1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ff} & L_{fD} & 0 \\ L_{Df} & L_{DD} & 0 \\ 0 & 0 & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} \psi_{f1} &= \frac{3}{2} L_{df} \hat{i}_1 \cos(\varphi_{11} - \vartheta_0) + L_{ff} i_f \\ \psi_{D1} &= \frac{3}{2} L_{dD} \hat{i}_1 \cos(\varphi_{11} - \vartheta_0) + L_{Df} i_f \\ \psi_{Q1} &= \frac{3}{2} L_{qQ} \hat{i}_1 \sin(\varphi_{11} - \vartheta_0) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Eine weitere, in Bild 5.2 dargestellte Ersatzschaltung, in der der *Magnetisierungsstrom* und die *Hauptfeldspannung* vorkommen, gewinnt man ausgehend von der Spannungsgleichung (Gl.(5.8)) durch Zerlegung von X_d in die Haupt- und Streureaktanz X_{hd} und X_σ :

$$\underline{U}_1 = (R_a + jX_\sigma) \underline{I}_1 + jX_{hd} (\underline{I}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i}'_f e^{j\vartheta_0})$$

Mit:

$$\underline{I}'_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i}'_f e^{j\vartheta_0}$$

und dem *Magnetisierungsstrom*:

$$\underline{I}_m = \underline{I}_1 + \underline{I}'_f$$

sowie der *Hauptfeldspannung*:

$$\underline{U}_h = jX_{hd} I_m$$

ergibt sich so:

$$\underline{U}_1 = (R_a + jX_\sigma) I_1 + jX_{hd} I_m = (R_a + jX_\sigma) I_1 + \underline{U}_h \tag{5.12}$$

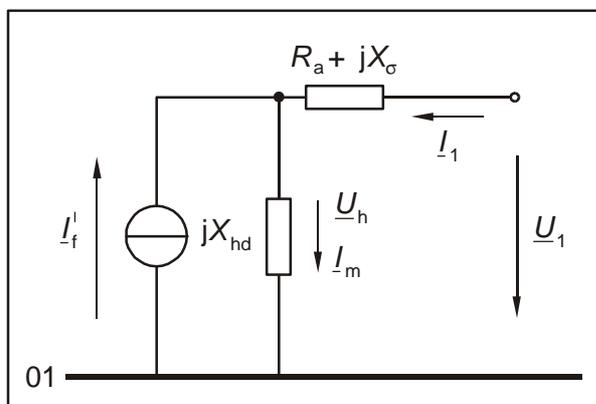


Bild 5.2: Stromquellen-Ersatzschaltung für das Mitsystem mit I_f' als Quellenstrom

Anhand der Ersatzschaltung in Bild 5.2 wird die Funktionsweise der Synchronmaschine noch einmal deutlich. Die belastungsabhängige Ankerdurchflutung (ausgedrückt durch I_1) und die Erregerdurchflutung (ausgedrückt durch I_f') überlagern sich geometrisch zur resultierenden Durchflutung (ausgedrückt durch I_m). Diese ruft die Hauptfeldspannung hervor. Die Klemmenspannung unterscheidet sich von der Hauptfeldspannung durch die Spannungsabfälle über dem Ankerwiderstand und der Ankerstreureaktanz.

Die Polradspannung und somit auch der Dauerkurzschlußstrom I_k lassen sich anschaulich mit Hilfe des Zeigerbildes in Bild 5.3 ermitteln.

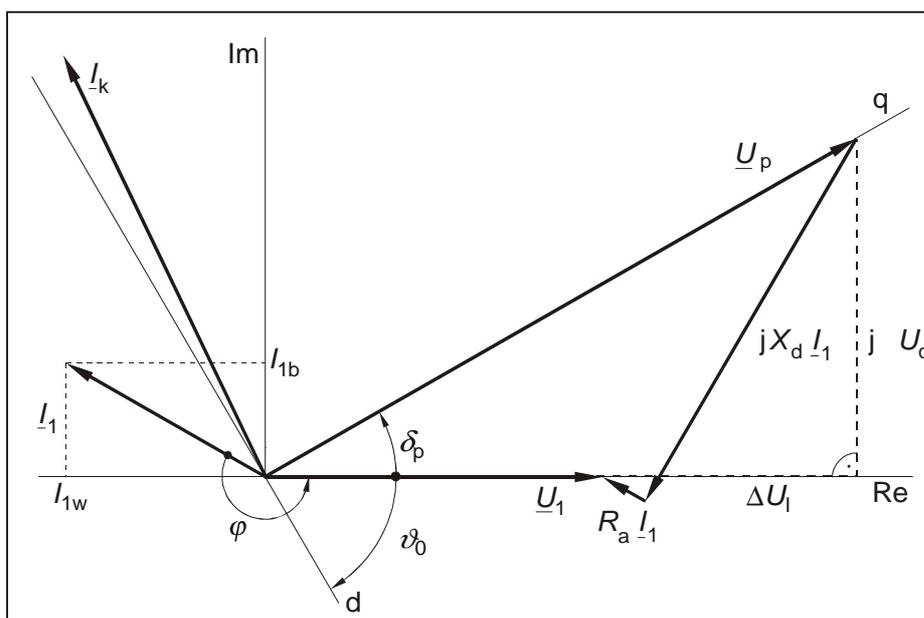


Bild 5.3: Zeigerbild für die Vollpolmaschine

Zur Konstruktion des Zeigerbildes wird von der Klemmenspannung ausgegangen. Sie wird in die reelle Achse gelegt. Aus den Angaben zur Belastung ergibt sich die Lage des Stromzeigers \underline{I}_1 entsprechend dem verwendeten Verbraucherzählpfeilsystem. In Bild 5.3 wurde vom Normalfall, daß der Generator Wirk- und Blindleistung abgibt, ausgegangen.

Bei bekanntem Ankerstrom können die Spannungsabfälle über R_a und jX_d gezeichnet und von der Klemmenspannung abgezogen werden, womit die Polradspannung erhalten wird. Die Polradspannung liegt, da sie rotatorisch vom Erregerfeld induziert wird, stets in der q-Achse, so daß mit ihr auch die Lage der d- und q-Achse bekannt sind.

Der Winkel δ_p zwischen Klemmen- und Polradspannung (nicht zwischen reeller Achse und Polradspannung wie zufällig in Bild 5.3) heißt *Polradwinkel*. Er ist für die Beurteilung des Parallelbetriebes mit dem Netz eine wichtige Größe. Im Generatorbetrieb ist der Polradwinkel stets positiv. Der Dauerkurzschlußstrom \underline{I}_k eilt der Polradspannung wegen $R_a \ll X_d$ nahezu um $\pi/2$ voraus und ist damit ein fast reiner Blindstrom. Zur Berechnung der Polradspannung und des Polradwinkels ausgehend von den Klemmengrößen werden der *Längs-* und *Querspannungsabfall*¹⁾ als Hilfsgrößen in Bild 5.3 eingeführt. Mit ihnen ergibt sich unter Berücksichtigung von $\underline{U}_1 = U_1 \angle 0^\circ$:

$$\underline{U}_p = U_1 + \Delta U_l + j\Delta U_q$$

Andererseits gilt nach Gl. (5.8) bei Zerlegung des Stromes in seine *Wirk-* und *Blindkomponente*²⁾:

$$\underline{U}_p = U_1 - \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = U_1 - (R_a + jX_d)(I_{1w} - jI_{1b}) = U_1 - R_a I_{1w} - X_d I_{1b} + j(-X_d I_{1w} + R_a I_{1b})$$

Also ist:

$$\Delta U_l = -(R_a I_{1w} + X_d I_{1b}) = -(R_a I_1 \cos \varphi + X_d I_1 \sin \varphi) \quad (5.13a)$$

$$\Delta U_q = -(X_d I_{1w} - R_a I_{1b}) = -(X_d I_1 \cos \varphi - R_a I_1 \sin \varphi) \quad (5.13b)$$

Für den Betrag der Polradspannung erhält man:

$$\boxed{U_p = \sqrt{(U_1 + \Delta U_l)^2 + \Delta U_q^2}} \quad (5.14)$$

und für den Polradwinkel:

$$\boxed{\delta_p = \arctan \frac{\Delta U_q}{U_1 + \Delta U_l}} \quad (5.15)$$

Wegen $R_a \ll X_d$ berechnen sich die Polradspannung und der Polradwinkel genügend genau aus den folgenden Näherungsbeziehungen:

1) Die Bezeichnungen Längs- und Quer- beziehen sich hier auf die reelle und imaginäre Achse und nicht auf die dq-Koordinaten.

2) Beachte: Die Wirk- und Blindkomponente des Stromes sind vorzeichenbehaftet. In Bild 5.3 sind Wirk- und Blindstrom negativ (s. die Definition in Skript Grundlagen).

$$U_p = \sqrt{(U_1 - X_d I_{1b})^2 + (-X_d I_{1w})^2} \quad (5.16)$$

$$\delta_p = \arctan \frac{-X_d I_{1w}}{U_1 - X_d I_{1b}} \quad (5.17)$$

Herleitung der Mitsystem-Ersatzschaltungen in dq-Koordinaten*

Die Transformation der drei Leiterströme eines Mitsystems nach Gl. (5.1) entsprechend Gl. (4.1) in die dq0-Koordinaten liefert mit $\vartheta = \omega_0 t + \vartheta_0$:

$$\begin{aligned} i_{d1} &= \hat{i}_1 \cos(\varphi_{i1} - \vartheta_0) \\ i_{q1} &= \hat{i}_1 \sin(\varphi_{i1} - \vartheta_0) \\ i_{01} &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Damit ist zunächst bestätigt, daß die dq-Komponenten eines Mitsystems konstant sind. Faßt man nun die dq-Komponenten noch zu einer resultierenden komplexen Größe, einem sog. *Raumzeiger*¹⁾ \underline{i}_{r1} in Läuferkoordinaten wie folgt zusammen, so läßt sich ein einfacher Zusammenhang zu dem Zeitzeiger für den Leiter a des Mitsystems herstellen:

$$\underline{i}_{r1} = i_{d1} + j i_{q1} = \hat{i}_1 [\cos(\varphi_{i1} - \vartheta_0) + j \sin(\varphi_{i1} - \vartheta_0)] = \hat{i}_1 e^{j\varphi_{i1}} e^{-j\vartheta_0} = \sqrt{2} \underline{I}_1 e^{-j\vartheta_0} \quad (5.19)$$

Der Raumzeiger in umlaufenden Koordinaten \underline{i}_{r1} und der ruhende Amplituden-Zeitzeiger eines Mitsystems $\hat{i}_1 = \sqrt{2} \underline{I}_1$ haben demzufolge den gleichen Betrag und sind lediglich um den Winkel ϑ_0 gegeneinander verdreht (Bild 5.4).

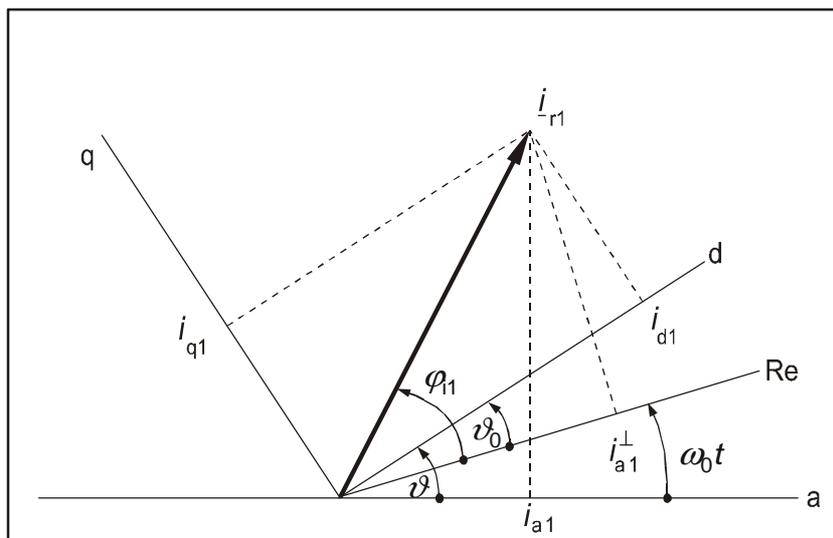


Bild 5.4: Zusammenhang zwischen Raum- und Zeitzeiger eines Mitsystems

Mit den Gln. (5.18) ergibt sich nach Gl. (4.10) für die dq-Komponenten der Ankerflußverkettungen:

¹⁾ Die Raumzeiger sind komplexe Momentanwerte. Sie werden ausführlich im Skript Modale Komponenten der Vorlesung Elektrische Netze behandelt.

$$\begin{aligned}\psi_{d1} &= L_d i_{d1} + L_{hd} i'_f \\ \psi_{q1} &= L_q i_{q1}\end{aligned}\quad (5.20)$$

und nach Gl. (4.8) für die dq-Komponenten der Ankerspannungen:

$$u_{d1} = R_a i_{d1} - \omega_0 \psi_{q1} = R_a i_{d1} - \omega_0 L_q i_{q1} = R_a i_{d1} - X_q i_{q1} \quad (5.21a)$$

$$u_{q1} = R_a i_{q1} + \omega_0 \psi_{d1} = R_a i_{q1} + \omega_0 L_d i_{d1} + \omega_0 L_{hd} i'_f = R_a i_{q1} + X_d i_{d1} + X_{hd} i'_f \quad (5.21b)$$

Die dq-Spannungskomponenten werden ebenfalls zu einem Raumzeiger zusammengefaßt:

$$\underline{u}_{r1} = u_{d1} + j u_{q1} = R_a (i_{d1} + j i_{q1}) + j (X_d i_{d1} + j X_q i_{q1}) + j X_{hd} i'_f \quad (5.22)$$

Wir sehen, daß die Einführung eines Raumzeigers für den Ankerstrom auf der rechten Seite an der Ungleichheit von X_q und X_d scheitert. Nur für den Sonderfall der idealen Vollpolmaschine mit $X_q = X_d$ wird:

$$\underline{u}_{r1} = (R_a + j X_d)(i_{d1} + j i_{q1}) + j X_{hd} i'_f = \underline{Z}_1 \underline{i}_{r1} + j X_{hd} i'_f = \underline{Z}_1 \underline{i}_{r1} + \underline{u}_{pr}$$

Nach Multiplikation mit $e^{j\vartheta_0}$ und Division durch $\sqrt{2}$ ergibt sich in Übereinstimmung mit Gl. (5.8):

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + j X_{hd} \frac{1}{\sqrt{2}} i'_f e^{j\vartheta_0} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_p$$

Bei der *Schenkelpolmaschine* bleiben bei der Zusammenfassung der Gl. (5.21) zu einem Raumzeiger stets Anteile mit i_{d1} und/oder i_{q1} , die die elektromagnetische Unsymmetrie, die sog. *Schenkeligkeit*, berücksichtigen, übrig. Nach Erweitern von Gl. (5.22) mit $\pm j X_1 \underline{i}_{r1}$ (X_1 sei zunächst noch beliebig) folgt:

$$\underline{u}_{r1} = (R_a + j X_1) \underline{i}_{r1} + j (X_d - X_1) i_{d1} + j (X_q - X_1) j i_{q1} + \underline{u}_{pr}$$

und nach Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\vartheta_0}$:

$$\underline{U}_1 = (R_a + j X_1) \underline{I}_1 + j (X_d - X_1) \frac{1}{\sqrt{2}} i_{d1} e^{j\vartheta_0} + j (X_q - X_1) j \frac{1}{\sqrt{2}} i_{q1} e^{j\vartheta_0} + \underline{U}_p$$

Für $\frac{1}{\sqrt{2}} i_{d1} e^{j\vartheta_0}$ und $j \frac{1}{\sqrt{2}} i_{q1} e^{j\vartheta_0}$ führen wir die Zeiger \underline{I}_{d1} und \underline{I}_{q1} ein und erhalten so:

$$\underline{U}_1 = (R_a + j X_1) \underline{I}_1 + j (X_d - X_1) \underline{I}_{d1} + j (X_q - X_1) \underline{I}_{q1} + \underline{U}_p \quad (5.23)$$

Die beiden mittleren Terme in Gl. (5.23) können als eine zusätzliche Quellenspannung \underline{U}_Δ , die allerdings von den dq-Komponenten des Stromes abhängig ist, aufgefaßt werden. Damit schreibt sich Gl. (5.23) kürzer:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_\Delta + \underline{U}_p \quad (5.23a)$$

Zu der Gl. (5.23) läßt sich die Spannungsquellen-Ersatzschaltung in Bild 5.5 angeben.

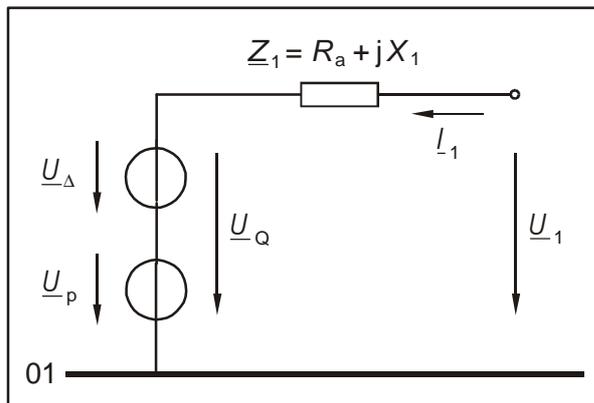


Bild 5.5: Spannungsquellen-Ersatzschaltung der Schenkelpolmaschine für das Mitsystem im stationären Betrieb

Der Einfluß der stromabhängigen Quellenspannung \underline{U}_Δ kann iterativ erfolgen. Die Konvergenz hängt von der Wahl des Wertes für X_1 ab. Für $X_1 = X_d$ geht Gl. (5.23) über in:

$$\underline{U}_1 = (R_a + jX_d)I_{11} + j(X_q - X_d)I_{q1} + \underline{U}_p$$

Diese Gleichung ist besonders für die Berechnung des Dauerkurzschlußstromes geeignet, da der Dauerkurzschlußstrom nahezu nur aus einer d-Komponente besteht (s. Bild 5.3) und somit der korrigierende Einfluß der q-Komponente vernachlässigt werden darf. Man kann also mit guter Näherung die Ersatzschaltung der Vollpolmaschine nach Bild 5.1 auch für die Berechnung des Dauerkurzschlußstromes der Schenkelpolmaschine verwenden.

Wählt man dagegen $X_1 = X_q$, so nimmt die Gl. (5.23) die Form

$$\underline{U}_1 = (R_a + jX_q)I_{11} + j(X_d - X_q)I_{d1} + \underline{U}_p$$

an. Diese Gleichung bildet die Grundlage für die Konstruktion des Zeigerbildes der Schenkelpolmaschine (Bild 5.6).

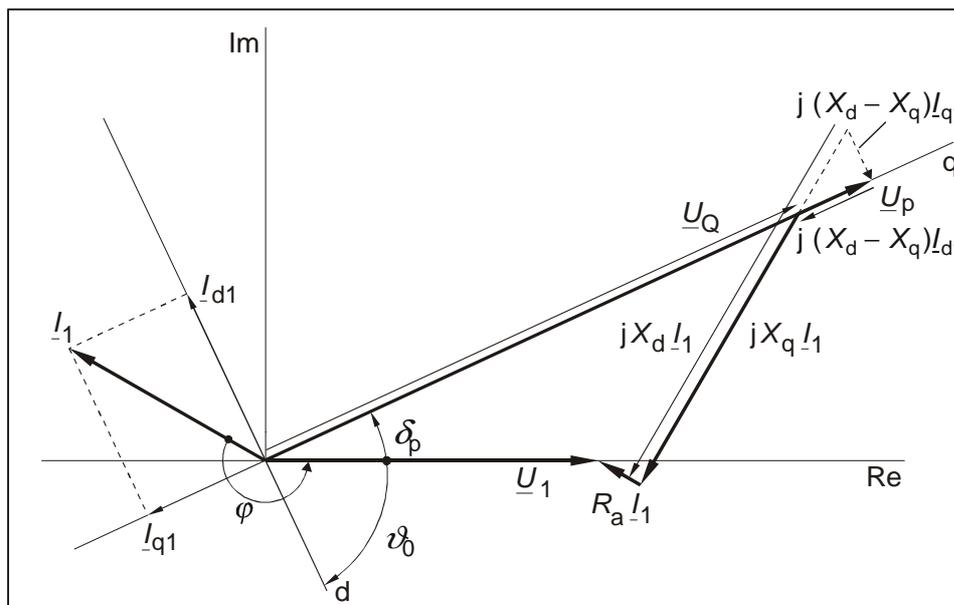


Bild 5.6: Zeigerbild der Schenkelpolmaschine

Man geht wieder von der Klemmenspannung und dem Ankerstrom aus und konstruiert zunächst die in der *Querachse* liegende Hilfsspannung:

$$\underline{U}_Q = \underline{U}_1 - (R_a + jX_q)I_1 = \underline{U}_p + \underline{U}_\Delta$$

Damit ist die Lage des dq-Koordinatensystems bekannt und der Ankerstrom kann in seine dq-Komponenten zerlegt werden. Zuletzt ergibt sich die Polradspannung aus:

$$\underline{U}_p = \underline{U}_Q - \underline{U}_\Delta = \underline{U}_Q - j(X_d - X_q)I_{d1}$$

Für die Vollpolmaschine mit $X_q = X_d$ wird die Quellenspannung $\underline{U}_\Delta = 0$ und \underline{U}_Q geht in \underline{U}_p über.

5.2 Gegensystem-Ersatzschaltung

Ein *Gegensystem* der Ankerströme wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned} i_{a2} &= \hat{i}_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{i2}) \\ i_{b2} &= \hat{i}_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{i2} + \frac{2\pi}{3}) \\ i_{c2} &= \hat{i}_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{i2} - \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Für die Ankerflußverkettungen gilt unter der Annahme $L_{hq} = L_{hd}$ mit $i_{a2} + i_{b2} + i_{c2} = 0$ und $L_s - L_g = L_d$:

$$\begin{bmatrix} \psi_{a2} \\ \psi_{b2} \\ \psi_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 \\ 0 & 0 & L_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a2} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \end{bmatrix} + L_{hd} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_a (i'_{f2} + i'_{D2}) - \sin \vartheta_a i'_{Q2} \\ \cos \vartheta_b (i'_{f2} + i'_{D2}) - \sin \vartheta_b i'_{Q2} \\ \cos \vartheta_c (i'_{f2} + i'_{D2}) - \sin \vartheta_c i'_{Q2} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Um eine Ankerersatzschaltung für das Gegensystem zu erhalten, müssen in Gl. (5.25) die Läuferströme eliminiert werden. Der im folgenden beschriebene Rechengang wird übersichtlicher, wenn wie bereits in Gl. (5.25) die auf den Anker umgerechneten Läufergrößen verwendet werden (s. Kapitel 4).

Zunächst werden die Ströme nach Gl. (5.24) in die Flußverkettungsgleichungen des Läufers (Gl. (3.3)) eingesetzt. Mit Hilfe der Formel

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3}) \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) = \frac{3}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

erhält man:

$$\begin{bmatrix} \psi'_{f2} \\ \psi'_{D2} \\ \psi'_{Q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_{ff} & L'_{fD} & 0 \\ L'_{Df} & L'_{DD} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_{f2} \\ i'_{D2} \\ i'_{Q2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{hd} \hat{i}_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_{f2} + \vartheta_0) \\ L_{hd} \hat{i}_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_{D2} + \vartheta_0) \\ -L_{hq} \hat{i}_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_{f2} + \vartheta_0) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Das Gegensystem der Ankerströme verursacht ein gegenläufiges Drehfeld. Da sich die Maschine mit der synchronen Drehzahl in der anderen Richtung dreht, bewirken die Ankerströme sinusförmige Änderungen der Läuferflußverkettungen mit der Frequenz $2\omega_0$. Es soll nun zunächst angenommen werden, daß sich als Folge alle Läufergrößen sinusförmig mit der Frequenz $2\omega_0$ ändern. Damit kann die weitere Rechnung vereinfacht werden, indem die Läufergleichungen als Zeigergleichungen formuliert werden. Für Gl. (5.26) lautet die Zeigergleichung:

$$\begin{bmatrix} \underline{\psi}'_{f2} \\ \underline{\psi}'_{D2} \\ \underline{\psi}'_{Q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_{ff} & L'_{fD} & 0 \\ L'_{Df} & L'_{DD} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}'_{f2} \\ \hat{i}'_{D2} \\ \hat{i}'_{Q2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{hd} \hat{i}_2 \\ L_{hd} \hat{i}_2 \\ jL_{hq} \hat{i}_2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Aus den Spannungsgleichungen der Läuferwicklungen, die für die vom Gegensystem hervorgerufenen Änderungen einen Kurzschluß bilden, folgt die Zeigergleichung:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'_f & & \\ & R'_D & \\ & & R'_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}'_{f2} \\ \hat{i}'_{D2} \\ \hat{i}'_{Q2} \end{bmatrix} + j2\omega_0 \begin{bmatrix} \underline{\psi}'_{f2} \\ \underline{\psi}'_{D2} \\ \underline{\psi}'_{Q2} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Gln. (5.27) in Gl. (5.28) eingesetzt ergibt:

$$\begin{bmatrix} L'_{ff} - j\frac{1}{2\omega_0} R'_f & L'_{fD} & 0 \\ L'_{Df} & L'_{DD} - j\frac{1}{2\omega_0} R'_D & 0 \\ 0 & 0 & L'_{QQ} - j\frac{1}{2\omega_0} R'_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}'_{f2} \\ \hat{i}'_{D2} \\ \hat{i}'_{Q2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{hd} \hat{i}_2 \\ L_{hd} \hat{i}_2 \\ jL_{hq} \hat{i}_2 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Aus Gl. (5.29) gewinnt man eine Beziehung für die Läuferströme als Funktion der Ankerströme. Sie lautet mit den Abkürzungen $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ und \underline{D} für die Elemente der inversen Matrix:

$$\begin{bmatrix} \hat{i}'_{f2} \\ \hat{i}'_{D2} \\ \hat{i}'_{Q2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} & 0 \\ \underline{B} & \underline{C} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{hd} \hat{i}_2 \\ L_{hd} \hat{i}_2 \\ jL_{hq} \hat{i}_2 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

und:

$$\hat{i}'_{f2} + \hat{i}'_{D2} = -L_{hd} (\underline{A} + 2\underline{B} + \underline{C}) \hat{i}_2 = \underline{K}_d \hat{i}_2 \quad (5.31)$$

$$\hat{i}'_{Q2} = -jL_{hq} \underline{D} \hat{i}_2 = j\underline{K}_q \hat{i}_2 \quad (5.32)$$

Die ausführlichen Ausdrücke für $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}, \underline{K}_d$ und \underline{K}_q sind im Anhang gegeben. Die für die Gl. (5.25) benötigten Momentanwerte ergeben sich aus den Gln. (5.31) und (5.32) durch Realteilbildung:

$$i'_{f2} + i'_{D2} = \operatorname{Re}\{\underline{K}_d \hat{i}_2\} = \operatorname{Re}\{\underline{K}_d\} \hat{i}_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0) - \operatorname{Im}\{\underline{K}_d\} \hat{i}_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0)$$

$$i'_{Q2} = \operatorname{Re}\{j\underline{K}_q \hat{i}_2\} = -\operatorname{Re}\{\underline{K}_q\} \hat{i}_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0) - \operatorname{Im}\{\underline{K}_q\} \hat{i}_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0)$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (5.25) ein, so erhält man für den 2. Term in der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} L_{hd} \hat{i}_2 [\cos \vartheta_a (i'_{f2} + i'_{D2}) - \sin \vartheta_a (i'_{Q2})] &= \\ &= L_{hd} \hat{i}_2 \cos \vartheta_a [\operatorname{Re}\{\underline{K}_d\} \cos(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0) - \operatorname{Im}\{\underline{K}_d\} \sin(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0)] + \\ &+ L_{hd} \hat{i}_2 \sin \vartheta_a [\operatorname{Re}\{\underline{K}_q\} \sin(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0) - \operatorname{Im}\{\underline{K}_q\} \cos(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0)] \end{aligned} \quad (5.33)$$

Unter den Bedingungen:

$$\operatorname{Re}\{\underline{K}_q\} = \operatorname{Re}\{\underline{K}_d\} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\{\underline{K}_q\} = \operatorname{Im}\{\underline{K}_d\} \quad (5.34)$$

läßt sich die rechte Seite der Gl. (5.33) mit Hilfe der Winkelfunktionen

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\beta - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\beta - \alpha)$$

so zusammenfassen, daß nur Anteile mit der Grundschiebungsfrequenz ω_0 übrig bleiben:

$$\begin{aligned}
L_{\text{hd}} \hat{i}_2 [\cos \vartheta_a (i'_{f2} + i'_{D2}) - \sin \vartheta_a (i'_{Q2})] &= \\
= L_{\text{hd}} \hat{i}_2 \operatorname{Re}\{\underline{K}_d\} [\cos \vartheta_a \cos(2\omega_0 t + \varphi_{12} + \vartheta_0) + \sin \vartheta_a \sin(2\omega_0 t + \varphi_{12} + \vartheta_0)] &+ \\
- L_{\text{hd}} \hat{i}_2 \operatorname{Im}\{\underline{K}_d\} [\cos \vartheta_a \sin(2\omega_0 t + \varphi_{12} + \vartheta_0) - \sin \vartheta_a \cos(2\omega_0 t + \varphi_{12} + \vartheta_0)] &= \\
= L_{\text{hd}} \operatorname{Re}\{\underline{K}_d\} \hat{i}_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_{12} + \vartheta_0) - L_{\text{hd}} \operatorname{Im}\{\underline{K}_d\} \hat{i}_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{12} + \vartheta_0) &
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Sind die Bedingungen der Gl. (5.34) nicht erfüllt, so entstehen im Anker Stromanteile höherer Frequenz, die wiederum auf den Läufer zurückwirken und so weitere höhere Harmonische in den Anker- und Läuferwicklungen verursachen. Die Annahme, daß nur Läuferströme mit der Frequenz $2\omega_0$ auftreten, wäre nicht zutreffend. Da wir uns aber nur für die Grundschiwingung interessieren, können wir mit Gl. (5.35) weiter rechnen und erhalten somit für die Ankerflußverkettungen:

$$\begin{bmatrix} \psi_{a2} \\ \psi_{b2} \\ \psi_{c2} \end{bmatrix} = (L_d + L_{\text{hd}} \operatorname{Re}\{K_d\}) \begin{bmatrix} i_{a2} \\ i_{b2} \\ i_{c2} \end{bmatrix} - L_{\text{hd}} \operatorname{Im}\{K_d\} \begin{bmatrix} \hat{i}_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{12}) \\ \hat{i}_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{12} + \frac{2\pi}{3}) \\ \hat{i}_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{12} - \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \tag{5.36}$$

Der Induktivitätsausdruck im ersten Term der Gl. (5.36) ist identisch mit der bereits in Kapitel 4 eingeführten subtransienten Längsinduktivität:

$$L_d'' = L_d + L_{\text{hd}} \operatorname{Re}\{K_d\} = L_d - (k_f + k_D) L_{\text{hd}}$$

Im zweiten Term führen wir folgende Abkürzung ein:

$$\Delta R = -L_{\text{hd}} \operatorname{Im}\{K_d\} = \frac{1}{2} (k_f^2 R_f' + k_D^2 R_D')$$

Schließlich wird Gl. (5.36) differenziert und in die Spannungsgleichungen des Ankers eingesetzt. Wir erhalten folgendes Gegensystem für die Spannungen:

$$\begin{aligned}
u_{a2} &= (R_a + \Delta R) i_{a2} + L_d'' \dot{i}_{a2} = R_2 i_{a2} + L_2 \dot{i}_{a2} \\
u_{b2} &= (R_a + \Delta R) i_{b2} + L_d'' \dot{i}_{b2} = R_2 i_{b2} + L_2 \dot{i}_{b2} \\
u_{c2} &= (R_a + \Delta R) i_{c2} + L_d'' \dot{i}_{c2} = R_2 i_{c2} + L_2 \dot{i}_{c2}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Anstelle der sinusförmigen Momentanwerte in Gl. (5.37) können nun wieder Zeiger treten. Außerdem genügt die Betrachtung des Bezugsstranges a, für den sich so ergibt (ohne Index a):

$$\boxed{\underline{U}_2 = (R_2 + jX_2) \underline{I}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2} \tag{5.38}$$

Die *Gegenimpedanz* \underline{Z}_2 setzt sich aus dem Ankerwiderstand R_a und einem zusätzlichen Widerstandsanteil ΔR sowie aus der subtransienten Längsreaktanz $X_d'' = \omega_0 L_d''$ zusammen. Der Widerstand ΔR rührt von den Verlusten in den Läuferwicklungen her.

Das Verhalten des Generators gegenüber einem Gegensystem läßt sich mit dem eines auf der Sekundärseite (Läufer) kurzgeschlossenen Transformators vergleichen. Die Eingangsimpedanzen der Ankerwicklung sind die subtransienten Impedanzen, auf die wir in Kapitel 6 noch einmal zurückkommen. Für Vollpolmaschinen mit voll-

ständigem Dämpferkäfig ist $X_q'' \approx X_d''$, so daß die mit Gl. (5.34) vorgenommene Näherung recht gut erfüllt ist. Für *Schenkelpolmaschinen* ist der Mittelwert aus der subtransienten Längs- und Querreaktanz ein besserer Näherungswert für die Gegenreaktanz:

$$X_2 \approx \frac{1}{2}(X_d'' + X_q'')$$

Auf der Gl. (5.38) beruht die Ersatzschaltung für das Gegensystem in Bild 5.7.

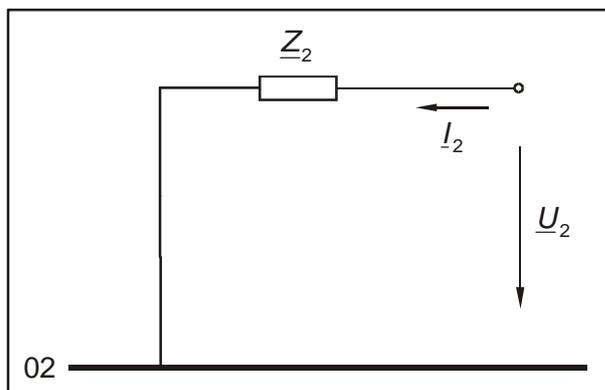


Bild 5.7: Gegensystem-Ersatzschaltung der Synchronmaschine

Mit Rücksicht auf die Erwärmung, die ein Gegensystem in den Läuferwicklungen verursacht, dürfen Generatoren nur bis zu einem bestimmten Prozentsatz ihres Bemessungsstromes mit einem Gegensystem belastet werden. Man bezeichnet das Verhältnis:

$$s = \frac{I_2}{I_{rG}}$$

als *Schiefast*. Dauernd zulässige Schiefasten sind nach DIN VDE 0530 Teil 1:

$s = 10\%$ für Vollpolgeneratoren

$s = 8\%$ für Schenkelpolgeneratoren

Herleitung der Gegensystem-Ersatzschaltung in dq-Koordinaten*

Die Transformation der Gln. (5.24) in die dq0-Koordinaten liefert mit $\vartheta = \omega_0 t + \vartheta_0$:

$$\begin{aligned} i_{d2} &= \hat{i}_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0) \\ i_{q2} &= -\hat{i}_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0) \\ i_{02} &= 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Durch Zusammenfassen der dq-Komponenten entsteht der Raumzeiger:

$$\underline{i}_{r2} = i_{d2} + j i_{q2} = \hat{i}_2 [\cos(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0) - j \sin(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0)] = \hat{i}_2 e^{-j(2\omega_0 t + \varphi_{i2} + \vartheta_0)} \quad (5.40)$$

Der Raumzeiger des Gegensystems bewegt sich in den mit ω_0 umlaufenden dq-Koordinaten mit doppelter synchroner Winkelgeschwindigkeit im Uhrzeigersinn. Unter

der Annahme, daß die Ankerströme keine weiteren Anteile durch die Rückwirkung des Läufers enthalten, können anstelle der Momentanwerte für i_d und i_q wieder Zeiger treten:

$$\hat{i}_{d2} = \hat{i}_2 e^{j(2\omega_0 t + \varphi_{12} + \vartheta_0)}$$

$$\hat{i}_{q2} = \hat{i}_2 e^{j(2\omega_0 t + \varphi_{12} + \vartheta_0 + \pi/2)} = j \hat{i}_{d2}$$

Der Vergleich mit Gl. (5.40) zeigt, daß der Zeiger \hat{i}_{d2} mit dem konjugiert komplexen Raumzeiger identisch ist:

$$\hat{i}_{d2} = \hat{i}_{r2}^* \quad (5.41)$$

Für die weitere Rechnung wird ein etwas anderer Weg als bei der Herleitung mit den natürlichen Größen eingeschlagen. Es sollen die in Kapitel 4 hergeleiteten Gleichungen für die dq0-Ankergrößen genutzt werden. Die Gln. (4.14) und (4.16) (ohne Nullsystem) gehen für Zeigergrößen bei $u'_f = 0$ sowie $\omega_L = \omega_0$ über in:

$$\begin{bmatrix} R'_f D_{ff} + j2\omega_0 & R'_f D_{fD} & 0 \\ R'_D D_{Df} & R'_D D_{DD} + j2\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & R'_Q D_{QQ} + j2\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}'_{f2} \\ \hat{\psi}'_{D2} \\ \hat{\psi}'_{Q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_f R'_f \hat{i}_{d2} \\ k_D R'_D \hat{i}_{d2} \\ k_Q R'_Q \hat{i}_{q2} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{d2} \\ \hat{u}_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + j2X''_d & -X''_q \\ X''_d & R_a + j2X''_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{d2} \\ \hat{i}_{q2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j2\omega_0 k_f & j2\omega_0 k_D & -\omega_0 k_Q \\ \omega_0 k_f & \omega_0 k_D & j2\omega_0 k_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\psi}'_{f2} \\ \hat{\psi}'_{D2} \\ \hat{\psi}'_{Q2} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

In der Matrix der Gl. (5.42) dominieren in der Hauptdiagonale die Imaginärteile. Bei Vernachlässigung der Läuferwiderstände erhält man die folgenden Näherungen für die Läuferflußverkettungen:

$$\hat{\psi}'_{f2} = -j \frac{k_f R'_f}{2\omega_0} \hat{i}_{d2}; \quad \hat{\psi}'_{D2} = -j \frac{k_D R'_D}{2\omega_0} \hat{i}_{d2}; \quad \hat{\psi}'_{Q2} = -j \frac{k_Q R'_Q}{2\omega_0} \hat{i}_{q2} \quad (5.44)$$

Mit diesen Ausdrücken erhält man aus Gl. (5.43):

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{d2} \\ \hat{u}_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a + k_D^2 R'_D + k_F^2 R'_f + j2X''_d & j(\frac{1}{2} k_Q^2 R'_Q + jX''_q) \\ -j(\frac{1}{2} (k_D^2 R'_D + k_F^2 R'_f) + jX''_d) & R_a + k_Q^2 R'_Q + j2X''_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_{d2} \\ \hat{i}_{q2} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Die Bildung des Spannungsraumzeigers nach der Vorschrift:

$$\underline{u}_r = u_{d2} + j u_{q2} = \text{Re}\{\hat{u}_{d2}\} + j \text{Re}\{\hat{u}_{q2}\} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{d2} + \hat{u}_{d2}^*) + j \frac{1}{2}(\hat{u}_{q2} + \hat{u}_{q2}^*)$$

führt nach einigen Umformungen unter Beachtung von $\hat{i}_{q2} = j \hat{i}_{d2}$ zu:

$$\underline{u}_r = \left[R_a + \frac{1}{4}(k_D^2 R'_D + k_f^2 R'_f + k_Q^2 R'_Q) - j\frac{1}{2}(X''_d + X''_q) \right] \hat{i}_{d2}^* + \left[\frac{3}{4}(k_D^2 R'_D + k_f^2 R'_f - k_Q^2 R'_Q) + j\frac{3}{2}(X''_d - X''_q) \right] \hat{i}_{d2} \quad (5.46)$$

Der erste Term der Gl. (5.46):

$$\underline{u}_{r2} = (R_2 - jX_2) \hat{i}_{d2}^* = \underline{Z}_2 \hat{i}_{r2}$$

ergibt einen Spannungsraumzeiger, der sich wie der Stromraumzeiger des Gegen-systems bewegt. Nach konjugiert komplexer Konjugation erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (5.41):

$$\underline{u}_{r2}^* = \underline{u}_{d2} = (R_2 + jX_2) \hat{i}_{r2} = (R_2 + jX_2) \hat{i}_{d2}$$

und nach Division von $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{j(2\omega_0 t + \vartheta_0)}$ auf beiden Seiten schließlich:

$$\underline{U}_2 = (R_2 + jX_2) \underline{I}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \quad (5.47)$$

mit

$$R_2 = R_a + \frac{1}{4}(k_D^2 R'_D + k_f^2 R'_f + k_Q^2 R'_Q) \quad (5.48)$$

und

$$X_2 = \frac{1}{2}(X''_d + X''_q) \quad (5.49)$$

Der zweite Teil der Gl. (5.46) wird offensichtlich durch die Läuferunsymmetrie verursacht, und ruft in den Ankerspannungen Oberschwingungsanteile mit der Frequenz $3\omega_0$, die ein Mitsystem bilden, hervor. Der Unsymmetrieanteil verschwindet für $X''_q = X''_d$ und $k_Q^2 R'_Q = k_f^2 R'_f + k_D^2 R'_D$. Diese Symmetriebedingung haben wir bei der Herleitung der Gegen-system-Ersatzschaltung in natürlichen Koordinaten von vornherein vorausgesetzt (s. Gl. (5.34)) und damit die Näherung $X_2 = X''_d$ erhalten.

Da wir uns auf die Grundschwingungsanteile beschränken wollen, bleibt der Unsymmetrieanteil in Gl. (5.46) außer acht. Der mit Gl. (5.47) erhaltene Ausdruck für die Gegenimpedanz Gl (5.49) wird davon nicht berührt und ist für die subtransient unsymmetrische Maschine der genauere Ausdruck.

5.3 Nullsystem-Ersatzschaltung

Die dq0-Transformation eines *Nullsystems* der Ströme:

$$i_{a0} = \hat{i}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_{i0})$$

$$i_{b0} = \hat{i}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_{i0})$$

$$i_{c0} = \hat{i}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_{i0})$$

ergibt erwartungsgemäß:

$$i_{d0} = 0$$

$$i_{q0} = 0$$

$$i_{00} = \hat{i}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_{i0})$$

Ein Nullsystem im Anker baut ein reines Streufeld auf. Die Läuferwicklungen bleiben stromlos. Aus der Transformation der Ankerflußverkettungs-Gleichungen Gl. (3.3) folgt:

$$\psi_{a0} = \psi_{b0} = \psi_{c0} = \psi_0 = (L_s + 2L_g) i_{a0} = L_0 i_{a0}$$

Als Zeigergleichung ergibt sich somit aus Gl.(3.1):

$$\underline{U}_0 = (R_a + jX_0) \underline{I}_0 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 \quad (5.50)$$

Die entsprechende Ersatzschaltung für das Nullsystem zeigt Bild 5.8.

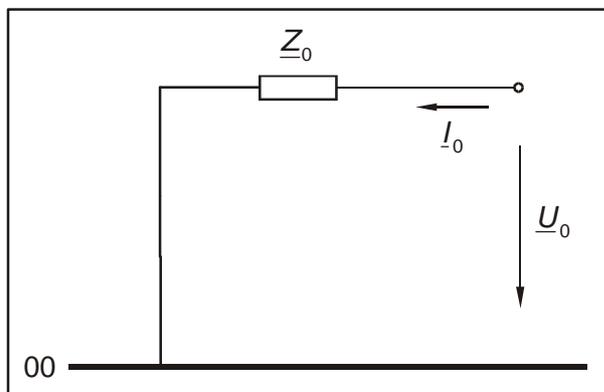


Bild 5.8: Nullsystem-Ersatzschaltung der Synchronmaschine

Der Ausdruck für die Nullinduktivität wurde in Kapitel 4 schon angegeben. Danach erhält man für die Nullreaktanz:

$$X_0 = X_{\sigma s} + 2X_{\sigma g}$$

Da die Generatorsternpunkte in der Regel nicht geerdet sind und/oder die Generatoren mit Blocktransformatoren der Schaltgruppe Yd5, die kein Nullsystem übertragen können, an das Netz geschaltet sind, wird die Nullimpedanz der Generatoren meist nicht benötigt.

5.4 Mitsystem-Ersatzschaltungen für den subtransienten Zustand

Als *subtransienter* Zustand wird der Zeitpunkt unmittelbar nach Eintritt einer Störung bezeichnet. Im nichtstationären Betrieb sind die Dämpferwicklungen wie auch im unsymmetrischen Betrieb nicht mehr stromlos.

Als typisches Beispiel für einen *Ausgleichsvorgang* soll hier der in Abschnitt 8.1 noch näher behandelte 3-polige Klemmenkurzschluß betrachtet werden.

Das Bild 5.9 zeigt die simulierten Verläufe des Ankerstromes, des Erregerstromes und der Läuferflußverkettungen während des Kurzschlusses. Im Ankerstromverlauf tritt mit Kurzschlußeintritt ein Sprung in der Hüllkurve des Wechselanteils und ein Gleichglied auf.

Die Hüllkurve des Wechselanteils springt auf den sog. *Anfangs-Kurzschlußwechselstrom* und klingt im Laufe der Zeit auf den *Dauerkurzschlußstrom*, den wir bereits in Abschnitt 5.1 kennen gelernt haben, ab. Das Gleichglied klingt ebenfalls ab und ist im stationären Kurzschlußzustand wieder verschwunden. Es sorgt dafür, daß die vor dem Kurzschluß vorhandene Ankerflußverkettung nach dem *Prinzip der Flußkonstanz* im Kurzschluß zunächst aufrecht erhalten bleibt¹⁾. Es ist damit abhängig vom Augenblick des Kurzschlußeintrittes.

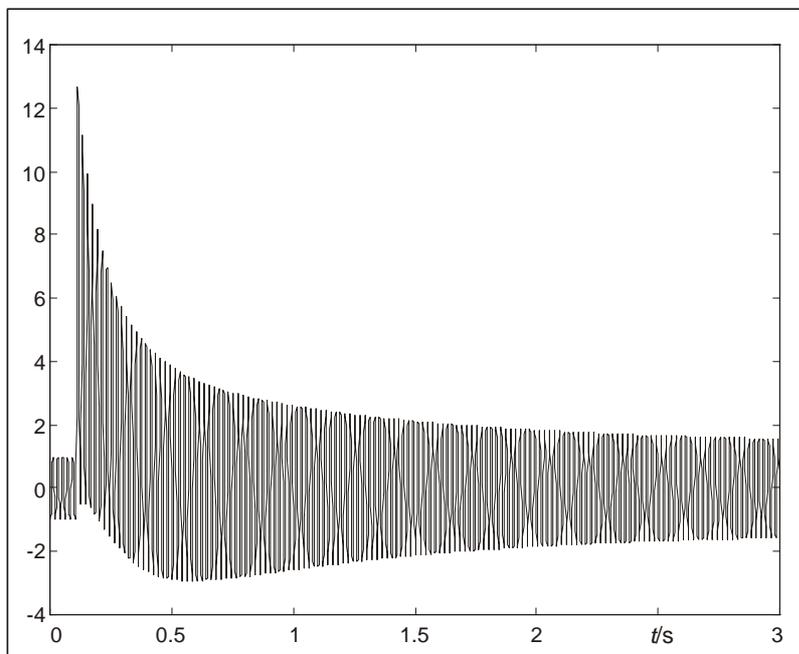
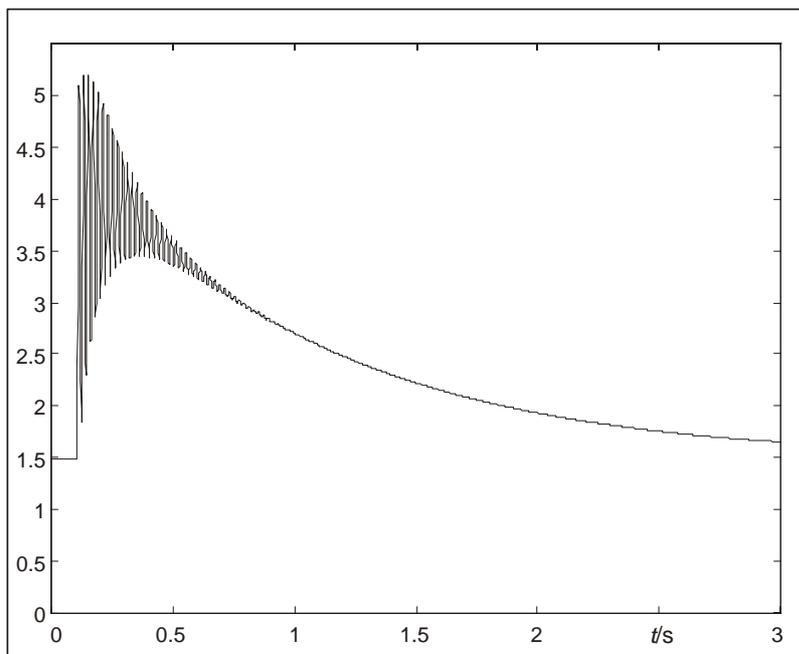
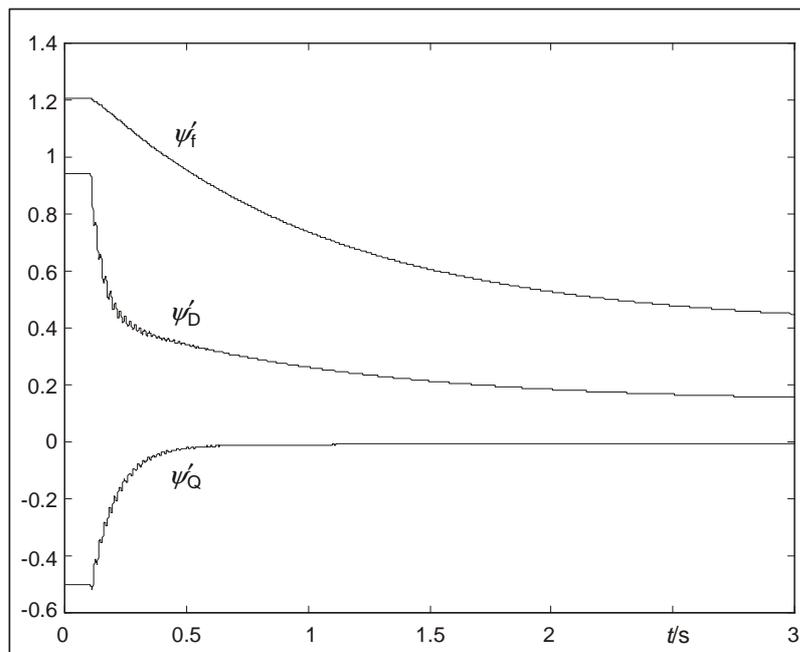


Bild 5.9: Strom- und Flußverkettungsverläufe (auf Bemessungsgrößen bezogene Größen) bei 3-poligem Klemmenkurzschluß
 a) Strom im Strang a bei Kurzschluß im Spannungsnulldurchgang



b) Erregerstrom

¹⁾ Das Prinzip der Flußkonstanz entspricht dem Impulserhaltungssatz der Mechanik und gilt für kurzgeschlossene Wicklungen.



c) Läuferflußverkettungen

Bei Kurzschluß im Nulldurchgang der Spannung, wie in Bild 5.9a, ist die Ankerflußverkettung gerade maximal, so daß für diesen Fall auch das maximale Gleichglied auftritt. Andererseits tritt bei Kurzschluß im Spannungsmaximum kein Gleichglied in Erscheinung.

Da die Läuferwicklungen stets kurzgeschlossen sind (die Erregerwicklung ist über die Spannungsquelle kurzgeschlossen), gilt für sie bei Eintritt einer *beliebigen* Störung im Ankerkreis (also nicht nur bei Kurzschluß) zunächst immer das Prinzip der Flußkonstanz. Im Erregerstromverlauf (Bild 5.9b) sind ein abklingendes Gleichglied und ein überlagertes abklingendes Wechselglied zu erkennen. Die hier nicht dargestellten Ausgleichsströme in den Dämpferwicklungen setzen sich ebenfalls aus abklingenden Gleich- und Wechselgliedern zusammen.

Die Gleichglieder der Ankerströme können kein Drehfeld bilden. Sie verursachen über die Drehbewegung die Wechselglieder in den Läuferwicklungen. Ebenso bedingen sich die Wechselanteile in den Ankerströmen und die Gleichanteile in den Läuferwicklungen gegenseitig. Aus den Verläufen der Läuferflußverkettungen in Bild 5.9c ist zu erkennen, daß sich die Wechselanteile in den Läuferwicklungen und die Gleichanteile in den Ankerwicklungen unter Berücksichtigung der Drehbewegung fast vollständig kompensieren, denn die Läuferflußverkettungen weisen nahezu keine Wechselanteile auf. Dieses Verhalten erklärt sich aus der Eigenschaft der Flußverkettungen als elektrische "Impulsgröße". Die Anker- und Läuferströme ändern sich bei einer Störung im Ankerkreis so, daß die Flußverkettungen zunächst konstant bleiben. Die sich anschließende relativ langsame Änderung der Läuferflußverkettungen entspricht der Änderung der magnetischen Energie der Läuferwicklungen. Diese wiederum hängt von der Größenordnung der Läuferwiderstände ab. Wären die Läuferwiderstände Null, so würde die vor dem Kurzschluß in den Läuferwicklungen gespeicherte magnetische Energie erhalten bleiben und damit auch keine Änderung der Läuferflußverkettungen auftreten. In den Kurzschlußströmen des Ankers würden damit die Wechselanteile nicht abklingen. Die tatsächlichen Läuferwiderstände sind relativ klein, wodurch die im Vergleich zu den Strömen langsame Änderung der Läuferflußverkettungen begründet ist.

Die monotonen Änderungen der Läuferflußverkettungen bestimmen das Abklingen der Wechselanteile in den Ankerströmen. Zur Berechnung der Wechselanteile während eines Ausgleichsvorganges ist es deshalb sinnvoll, Ersatzschaltungen zu ver-

wenden, in denen die *Läuferflußverkettungen* zur Bildung von Quellen (Spannungs- oder Stromquellen) herangezogen werden. Beim Übergang vom stationären zum nichtstationären Zustand bleiben die entsprechenden Quellengrößen wegen des Prinzips der Flußkonstanz konstant.

Am Beispiel des 3-poligen Kurzschlusses wird deutlich, daß die Ersatzschaltung mit der Polradspannung hinter der synchronen Impedanz (oder die entsprechende Stromquellen-Ersatzschaltung) aus Abschnitt 5.1 für die Berechnung der Wechselanteile bei Ausgleichsvorgängen nicht geeignet ist, da die Polradspannung eine Funktion des *Gleichanteils* des Erregerstromes, der sich bei Eintritt einer Störung sprunghaft ändert, ist. Außerdem würde mit ihr der Einfluß der Dämpferwicklungen auf den Ausgleichsvorgang nicht erfaßt werden. Lediglich der Dauerkurzschlußstrom kann mit der Ersatzschaltung nach Bild 5.1 berechnet werden.

Zur Herleitung der Ersatzschaltungen mit Quellen, die den Läuferflußverkettungen proportional sind, müssen im allgemeinen Gleichungssystem wieder die Läuferströme eliminiert werden.

Die Gleichungen für die Ankerflußverkettungen übernehmen wir aus Abschnitt 5.1, ohne jedoch zunächst irgendeine Einschränkung in den Größenverläufen vorzunehmen. Es sei zunächst lediglich wieder $L_{\text{hq}} = L_{\text{hd}}$ vorausgesetzt.

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_g & L_g \\ L_g & L_s & L_g \\ L_g & L_g & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{\text{hd}} \cos \vartheta_a & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_a & -L_{\text{hq}} \sin \vartheta_a \\ L_{\text{hd}} \cos \vartheta_b & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_b & -L_{\text{hq}} \sin \vartheta_b \\ L_{\text{hd}} \cos \vartheta_c & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_c & -L_{\text{hq}} \sin \vartheta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_f \\ i'_D \\ i'_Q \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Für die Läuferflußverkettungen gilt:

$$\begin{bmatrix} \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} L_{\text{hd}} \cos \vartheta_a & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_b & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_c \\ L_{\text{hd}} \cos \vartheta_a & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_b & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_c \\ -L_{\text{hq}} \sin \vartheta_a & -L_{\text{hq}} \sin \vartheta_b & -L_{\text{hq}} \sin \vartheta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L'_{ff} & L'_{fD} & 0 \\ L'_{Df} & L'_{DD} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_f \\ i'_D \\ i'_Q \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Damit erhält man für die Läuferströme:

$$\begin{bmatrix} i'_f \\ i'_D \\ i'_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{ff} & D_{fD} & 0 \\ D_{Df} & D_{DD} & 0 \\ 0 & 0 & D_{QQ} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} L_{\text{hd}} \cos \vartheta_a & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_b & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_c \\ L_{\text{hd}} \cos \vartheta_a & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_b & L_{\text{hd}} \cos \vartheta_c \\ -L_{\text{hq}} \sin \vartheta_a & -L_{\text{hq}} \sin \vartheta_b & -L_{\text{hq}} \sin \vartheta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \right\} \quad (5.53)$$

Gl. (5.53) wird in Gl. (5.51) eingesetzt, wobei wir i.f. für die Winkelfunktionen stellenweise folgende Abkürzungen verwenden wollen:

$$\begin{aligned} c_a &= \cos \vartheta_a & s_a &= \sin \vartheta_a \\ c_b &= \cos \vartheta_b & s_b &= \sin \vartheta_b \\ c_c &= \cos \vartheta_c & s_c &= \sin \vartheta_c \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} L_s & L_g & L_g \\ L_g & L_s & L_g \\ L_g & L_g & L_s \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} L_{hd}c_a & L_{hd}c_a & -L_{hq}s_a \\ L_{hd}c_b & L_{hd}c_b & -L_{hq}s_b \\ L_{hd}c_c & L_{hd}c_c & -L_{hq}s_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ff} & D_{fD} & 0 \\ D_{Df} & D_{DD} & 0 \\ 0 & 0 & D_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{hd}c_a & L_{hd}c_b & L_{hd}c_c \\ L_{hd}c_a & L_{hd}c_b & L_{hd}c_c \\ -L_{hq}s_a & -L_{hq}s_b & -L_{hq}s_c \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{hd}c_a & L_{hd}c_a & -L_{hq}s_a \\ L_{hd}c_b & L_{hd}c_b & -L_{hq}s_b \\ L_{hd}c_c & L_{hd}c_c & -L_{hq}s_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ff} & D_{fD} & 0 \\ D_{Df} & D_{DD} & 0 \\ 0 & 0 & D_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix}$$

Die Ausmultiplikation der Matrizen liefert mit (s. Anhang):

$$D_{ff} + 2D_{fD} + D_{DD} = \frac{1}{L_{hd}}(k_f + k_D); \quad D_{QQ} = \frac{k_Q}{L_{hq}}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} L_s & L_g & L_g \\ L_g & L_s & L_g \\ L_g & L_g & L_s \end{bmatrix} - \frac{2}{3}(k_f + k_D)L_{hd} \begin{bmatrix} c_a c_a & c_a c_b & c_a c_c \\ c_b c_a & c_b c_b & c_b c_c \\ c_c c_a & c_c c_b & c_c c_c \end{bmatrix} - \frac{2}{3}k_Q L_{hq} \begin{bmatrix} s_a s_a & s_a s_b & s_a s_c \\ s_b s_a & s_b s_b & s_b s_c \\ s_c s_a & s_c s_b & s_c s_c \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} (k_f \psi'_f + k_D \psi'_D) \cos \vartheta_a - k_Q \psi'_Q \sin \vartheta_a \\ (k_f \psi'_f + k_D \psi'_D) \cos \vartheta_b - k_Q \psi'_Q \sin \vartheta_b \\ (k_f \psi'_f + k_D \psi'_D) \cos \vartheta_c - k_Q \psi'_Q \sin \vartheta_c \end{bmatrix}$$

Für eine *subtransient symmetrische* Maschine mit $L_{hq} k_Q = L_{hd}(k_f + k_D)$ vereinfacht sich die vorstehende Gleichung noch zu:

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} L_s & L_g & L_g \\ L_g & L_s & L_g \\ L_g & L_g & L_s \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(k_f + k_D)L_{hd} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (5.54) \\ + \begin{bmatrix} (k_f \psi'_f + k_D \psi'_D) \cos \vartheta_a - k_Q \psi'_Q \sin \vartheta_a \\ (k_f \psi'_f + k_D \psi'_D) \cos \vartheta_b - k_Q \psi'_Q \sin \vartheta_b \\ (k_f \psi'_f + k_D \psi'_D) \cos \vartheta_c - k_Q \psi'_Q \sin \vartheta_c \end{bmatrix}$$

Die Gl. (5.54) ist bis auf die Annahme subtransienter Symmetrie noch allgemeingültig und liefert unter den entsprechenden Bedingungen auch die bereits in den Abschnitten 5.2 und 5.3 hergeleiteten Ersatzschaltungen für das Gegen- und Nullsystem¹⁾.

¹⁾ Für das Gegensystem kann man in erster Näherung die trägen Läuferflußverkettungen Null setzen und vernachlässigt dabei lediglich den Anteil der Läuferwiderstände im Wirkwiderstand der Gegenimpedanz.

Für ein *Mitsystem* der Ströme gilt bekanntlich $i_{a1} + i_{b1} + i_{c1} = 0$, womit die Gln. (5.54) in drei *entkoppelte* Gleichungen für die Ankerstränge zerfallen:

$$\begin{bmatrix} \psi_{a1} \\ \psi_{b1} \\ \psi_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d'' & 0 & 0 \\ 0 & L_d'' & 0 \\ 0 & 0 & L_d'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a1} \\ i_{b1} \\ i_{c1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_f \psi_f' + k_D \psi_D') \cos \vartheta_a - k_Q \psi_Q' \sin \vartheta_a \\ (k_f \psi_f' + k_D \psi_D') \cos \vartheta_b - k_Q \psi_Q' \sin \vartheta_b \\ (k_f \psi_f' + k_D \psi_D') \cos \vartheta_c - k_Q \psi_Q' \sin \vartheta_c \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Die Induktivität $L_d'' = L_s - L_g - (k_f + k_D)L_{hd} = L_d - (k_f + k_D)L_{hd}$ ist die bereits in Kapitel 4 eingeführte subtransiente Längsinduktivität.

Beim Übergang vom stationären zum subtransienten Zustand behalten die Flußverkettungen ihre Werte zunächst bei. Für einen kurzen Zeitbereich (Millisekundenbereich) ist es noch zulässig, die Änderungen der Läuferflußverkettungen zu vernachlässigen und mit *den* Läuferflußverkettungen zu rechnen, die durch den stationären Zustand unmittelbar vor dem Ausgleichsvorgang gegeben sind. Die Annahme konstanter Läuferflußverkettungen über den subtransienten Zustand hinaus ist mit der Vernachlässigung der Läuferwiderstände gleichbedeutend, womit unendlich große Läuferzeitkonstanten entstehen. Aus den Läufergleichungen (4.7) folgt für $R_f' = R_D' = R_Q' = 0$:

$$\Delta \dot{\psi}_f' = \Delta \dot{\psi}_D' = \Delta \dot{\psi}_Q' = 0$$

und somit:

$$\psi_f' = \psi_{f0}'$$

$$\psi_D' = \psi_{D0}'$$

$$\psi_Q' = \psi_{Q0}'$$

Der Index 0 weist auf den stationären Zustand vor einem Ausgleichsvorgang hin. Außerdem kann man im Kurzzeitbereich auch noch mit konstanter Drehzahl rechnen und somit $\omega_L = \omega_0$ setzen. Wir führen die Anfangswerte der Läuferflußverkettungen in Gl. (5.55) ein, bilden die zeitliche Ableitung und erhalten damit für die *Mitkomponenten* der Ankerspannungen:

$$\begin{aligned} u_{a1} &= R_a i_{a1} + L_d'' \dot{i}_{a1} + u_a'' \\ u_{b1} &= R_a i_{b1} + L_d'' \dot{i}_{b1} + u_b'' \\ u_{c1} &= R_a i_{c1} + L_d'' \dot{i}_{c1} + u_c'' \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die Spannungen:

$$u_a'' = -\omega_0 [(k_f \psi_{f0}' + k_D \psi_{D0}') \sin \vartheta_a + k_Q \psi_{Q0}' \cos \vartheta_a]$$

$$u_b'' = -\omega_0 [(k_f \psi_{f0}' + k_D \psi_{D0}') \sin \vartheta_b + k_Q \psi_{Q0}' \cos \vartheta_b]$$

$$u_c'' = -\omega_0 [(k_f \psi_{f0}' + k_D \psi_{D0}') \sin \vartheta_c + k_Q \psi_{Q0}' \cos \vartheta_c]$$

sind die sog. *subtransienten Spannungen*. Sie werden von den Anfangswerten der Läuferflußverkettungen bestimmt und haben die Funktion von *Spannungsquellen*. Stellvertretend für das durch Gln. (5.57) beschriebene Mitsystem können wir wieder die Zeigergleichung für den *Bezugsstrang* a verwenden:

$$\underline{U}_1 = (R_a + jX_d'') \underline{I}_1 + \underline{U}'' = \underline{Z}_1'' \underline{I}_1 + \underline{U}'' \tag{5.58}$$

mit dem Zeiger der subtransienten Spannung:

$$\underline{U}'' = j\omega_0 \frac{1}{\sqrt{2}} [(k_f \psi'_{f0} + k_D \psi'_{D0}) + jk_Q \psi'_{Q0}] e^{j\vartheta_0} \tag{5.59}$$

Wir haben damit eine Spannungsgleichung für das Mitsystem mit subtransienten Größen erhalten, die sich von der Gl. (5.8) durch eine andere Quellenspannung *und* eine andere Impedanz unterscheidet. Die subtransiente Spannung drückt die Wirkung der Läuferwicklungen auf den Anker durch die Läuferflußverkettungen aus, während die Polradspannung nur die Wirkung der Erregerwicklung in Form des Erregerstromes auf den Anker repräsentiert. Die Gl. (5.58) bildet die Ersatzschaltung in Bild 5.10a.

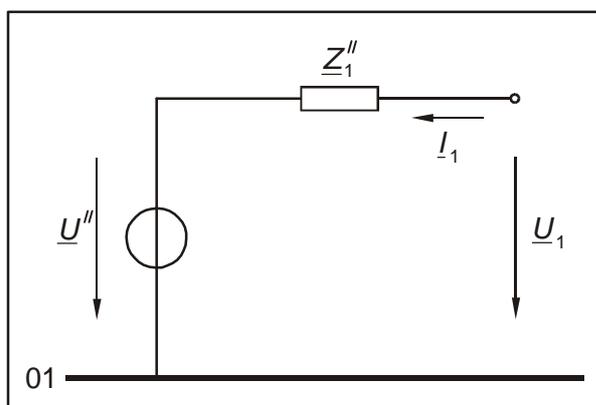


Bild 5.10a: Mitsystem-Spannungsquellen-Ersatzschaltung für den subtransienten Zustand

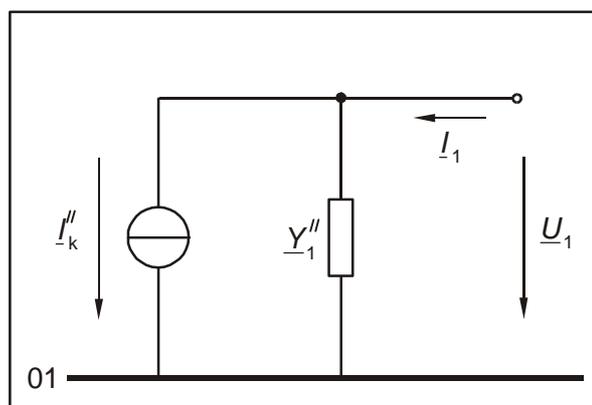


Bild 5.10b: Mitsystem-Stromquellen-Ersatzschaltung für den subtransienten Zustand

Die zu Bild 5.10a äquivalente *Stromquellen*-Ersatzschaltung in Bild 5.10b erhält man durch Umstellung von Gl. (5.58) in:

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1''} \underline{U}_1 - \frac{1}{\underline{Z}_1''} \underline{U}'' \tag{5.60a}$$

bzw. mit $\underline{Y}_1'' = 1/\underline{Z}_1''$:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1'' \underline{U}_1 + \underline{I}_k'' \tag{5.60b}$$

Der Quellenstrom in Bild 5.10b ist identisch mit dem Kurzschlußstrom im subtransienten Zustand, dem sog. *Anfangs-Kurzschlußwechselstrom*:

$$\underline{I}_k'' = -\underline{Y}_1'' \underline{U}'' = -\frac{\underline{U}''}{R_a + jX_d''} \tag{5.60c}$$

Der Betrag des Anfangs-Kurzschlußwechselstromes kann dem zeitlichen Verlauf des Kurzschlußstromes in Bild 5.9a entnommen werden, indem man die Hüllkurve des Wechselanteils bis zum Zeitpunkt des Kurzschlußeintritts zurückverlängert und den Abstand zwischen oberer und unterer Hüllkurve durch $2\sqrt{2}$ dividiert (beachte: I_k'' ist ein Effektivwert).

Die Bestimmung der subtransienten Spannung erfolgt ausgehend von den stationären Klemmengrößen \underline{U}_1 und \underline{I}_1 *unmittelbar vor* der Störung entsprechend Gl. (5.58) und nicht aus Gl. (5.59!):

$$\underline{U}'' = \underline{U}_1 - \underline{Z}_1'' \underline{I}_1$$

Das Zeigerbild in Bild 5.11 verifiziert die Ermittlung von \underline{U}'' . Der Winkel zwischen der Klemmenspannung und der subtransienten Spannung ist der subtransiente Polradwinkel δ'' .

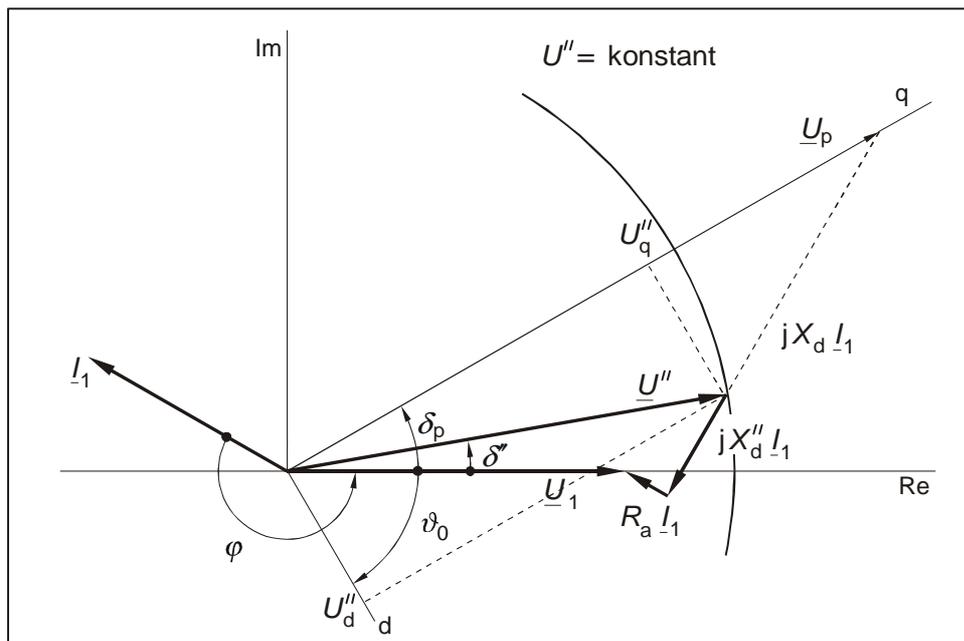


Bild 5.11: Zeigerbild zur Bestimmung von \underline{U}'' bei einer subtransient symmetrischen Maschine

Aufgrund der Unveränderlichkeit sowohl von

$$U_d'' = -\omega_0 k_Q \frac{1}{\sqrt{2}} \psi'_{Q0}$$

als auch von

$$U_q'' = \omega_0 (k_f \frac{1}{\sqrt{2}} \psi'_{f0} + k_D \frac{1}{\sqrt{2}} \psi'_{D0})$$

bei Eintritt einer Störung, bleibt im Ankerkreis nicht nur der Betrag der subtransienten Spannung unverändert, sondern auch der Zeiger \underline{U}'' fest in den d,q-Koordinaten liegen. Die anfängliche Lage des dq-Koordinatensystems wird mit Hilfe der Polradspannung, die für den Ausgleichvorgang aber nicht mehr als Quellenspannung zu gebrauchen ist, gefunden.

Treten in einem kurzen Zeitraum nach der Störung, in dem die subtransiente Spannung noch als unveränderlich angesehen werden kann, Polradbewegungen auf, so bewegt sich der läuferfeste Zeiger \underline{U}'' in Bild 5.11 auf dem eingezeichneten Ortskreis und beschreibt dabei eindeutig die Bewegung des Läufers in einem synchron umlaufenden Koordinatensystem.

Herleitung der Ersatzschaltung mit subtransienten Größen in dq0-Koordinaten*

Zur Herleitung der Ersatzschaltungen mit subtransienten Größen haben wir die Läuferströme eliminiert. Da dieser Schritt bei der Herleitung der Zustandsgleichung in Kapitel 4 bereits vollzogen wurde, brauchen wir in Gl. (4.16) nur noch die Konstanz der Läuferflußverkettungen durch den Index 0 zu vermerken, womit diese übergeht in:

$$\begin{aligned} u_d &= R_a i_d - \omega_L L_q'' i_q - \omega_L k_Q \psi'_{Q0} + L_d'' \dot{i}_d \\ u_q &= R_a i_q + \omega_L L_d'' i_d + \omega_L k_D \psi'_{D0} + \omega_L k_f \psi'_{f0} + L_q'' \dot{i}_q \\ u_0 &= R_a i_0 + L_0 \dot{i}_0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

Da in Hinblick auf die Mitsystem-Ersatzschaltung nur die 50-Hz-Wechselanteile interessieren, können die transformatorischen Glieder $L_d'' \dot{i}_d$ und $L_q'' \dot{i}_q$, die die Gleichglieder in den Ankerströmen hervorrufen, weggelassen werden. Mit dem Index 1 für das Mitsystem und $\omega_L = \omega_0$ erhalten wir durch Zusammenfassen der beiden ersten Gleichungen der Gln. (5.61) zu einem Raumzeiger in umlaufenden Koordinaten:

$$\underline{u}_{r1} = u_{d1} + j u_{q1} = R_a (i_{d1} + j i_{q1}) + j (X_d'' i_{d1} + j X_q'' i_{q1}) + j \omega_0 (k_D \psi'_{D0} + k_f \psi'_{f0} + j k_Q \psi'_{Q0}) \quad (5.62)$$

Die Analogie zur Gl. (5.22) ist offensichtlich.

Für eine *subtransient symmetrische* Maschine gilt $L_q'' = L_d''$, so daß in Übereinstimmung mit Gl. (5.58) wieder erhalten wird:

$$\underline{U}_1 = (R_a + j X_d'') \underline{I}_1 + j \omega_0 \frac{1}{\sqrt{2}} [(k_f \psi'_{f0} + k_D \psi'_{D0}) + j k_Q \psi'_{Q0}] e^{j\omega_0 t}$$

Für eine subtransient *unsymmetrische* Maschine müssen wir zu Gl. (5.62) zurückkehren und verfahren analog zum Vertiefungsabschnitt in Abschnitt 5.1. Die Erweiterung mit $\pm j X_d'' i_{r1}$ führt auf folgende Zeigergleichung:

$$\underline{U}_1 = (R_a + j X_d'') \underline{I}_1 + j (X_q'' - X_d'') \underline{I}_{q1} + \underline{U}'' \quad (5.63a)$$

oder wenn für den Unsymmetrieterm eine zusätzliche Quellenspannung eingeführt wird:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1'' \underline{I}_1 + \underline{U}_\Delta'' + \underline{U}'' \quad (5.63b)$$

Die zu Gl. (5.63b) gehörende Ersatzschaltung zeigt Bild 5.12.

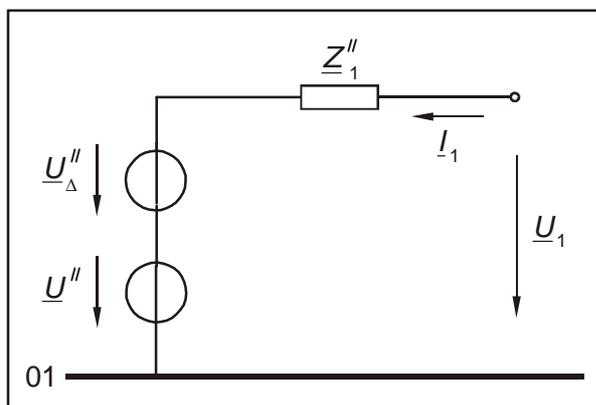


Bild 5.12: Mitsystem-Spannungsquellen-Ersatzschaltung für den subtransienten Zustand einer subtransient unsymmetrischen Maschine

5.5 Mitsystem-Ersatzschaltungen für den transienten Zustand

Der *transiente Zustand* wird erreicht, wenn die Ausgleichsvorgänge in der "schnellsten" Läuferwicklung, der Längsachsen-Dämpferwicklung weitgehend abgeklungen sind. Der Zeitbereich vom Eintritt einer Störung bis zu diesem Zeitpunkt wird auch als transienter Bereich bezeichnet. Mit dem Abklingen der Ausgleichsvorgänge in der Dämpferlängswicklung sind auch entsprechende Änderungen der subtransienten Spannung verbunden. Um eine Ersatzschaltung zu erhalten, in der die Quellenspannung über einem längeren Zeitraum als die subtransiente Spannung annähernd konstant ist, betrachtet man die schnellen Ausgleichsvorgänge in der Längsachsen-Dämpferwicklung von vornherein als abgeklungen. Man nimmt dabei einen Fehler beim Übergang vom stationären zum subtransienten Zustand in Kauf, weshalb die so gewonnene Ersatzschaltung auch nicht für die Berechnung von Größenänderungen im subtransienten Bereich herangezogen werden darf.

Ausgehend von $i_D = 0$ erhält man auf dem gleichen Weg wie bei der Herleitung der Ersatzschaltung mit den subtransienten Größen in Abschnitt 5.4 unter der Annahme einer *transient-symmetrischen* Maschine mit $L_{\text{hq}} k_Q = L_{\text{hd}} (k_f - k_D D_{fD} / D_{DD})$ ¹⁾:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}'_1 I_1 + \underline{U}' \quad (5.64)$$

mit der *transienten* Spannung:

$$\underline{U}' = j\omega_0 \frac{1}{\sqrt{2}} [k'_f \psi'_{f0} + jk'_D \psi'_{Q0}] e^{j\omega_0 t} \quad (5.65)$$

und der *transienten* Impedanz:

$$\underline{Z}'_1 = R_a + jX'_d \quad (5.66)$$

In dem Ausdruck für die transiente Spannung ist der Anfangswert für die Flußverketzung der Längsachsen-Dämpferwicklung nicht mehr enthalten. Die der Gl. (5.64) entsprechende Ersatzschaltung ist in Bild 5.13a dargestellt.

¹⁾ Für die ausführliche Herleitung wird auf den folgenden Abschnitt verwiesen.

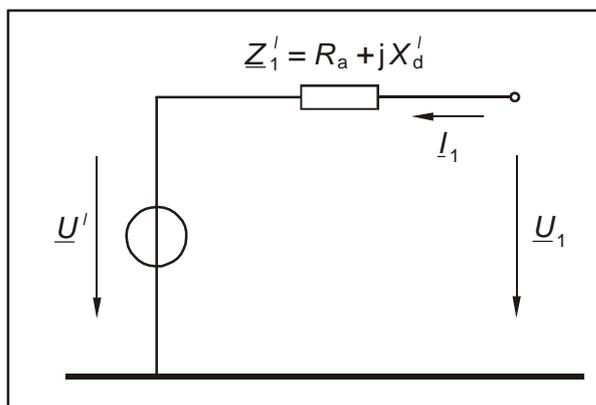


Bild 5.13a: Mitsystem-Spannungsquellen-Ersatzschaltung für den transienten Zustand

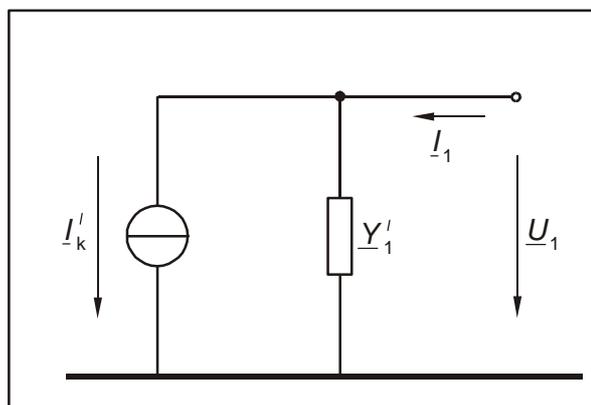


Bild 5.13b: Mitsystem-Stromquellen-Ersatzschaltung für den transienten Zustand

Die äquivalente Stromquellen-Ersatzschaltung ergibt sich wieder durch Auflösung der Spannungsgleichung nach dem Strom:

$$I_1 = Y'_1 U_1 + I'_k \tag{5.67}$$

wobei der Quellenstrom

$$I'_k = -Y'_1 U' = -\frac{U'}{R_a + jX'_d} \tag{5.68}$$

als *transienter* Kurzschlußstrom bezeichnet wird. Er ist wegen der Vernachlässigung der Ausgleichsvorgänge in der Längsachsen-Dämpferwicklung kleiner als der Anfangs-Kurzschlußwechselstrom. Die die transiente Reaktanz bildende *transiente* Induktivität enthält nicht mehr die Streuinduktivität der Längsachsen-Dämpferwicklung:

$$L'_d = L_\sigma + \frac{L_{hd} L'_{\sigma f}}{L_{hd} + L'_{\sigma f}} \tag{5.69}$$

Die transiente Spannung kann über mehrere Perioden der Grundschwingung als konstant angenommen werden. Ihren Betrag und ihren Anfangswinkel bestimmt man ausgehend von den stationären Werten für U_1 und I_1 , indem man wie bei der Bestimmung der subtransienten Spannung in die Ersatzschaltung "hinein" rechnet. Das Zeigerbild in Bild 5.14 zeigt die Zusammenhänge für den Zeitpunkt unmittelbar vor einer Störung.

Wegen $U'_d = -\omega_0 k_Q \frac{1}{\sqrt{2}} \psi'_{Q0}$ einerseits und $U'_q = \omega_0 k_f \frac{1}{\sqrt{2}} \psi'_{f0}$ andererseits, ist auch U' fest an das Läufer-Koordinatensystem gekettet. Bei einem Ausgleichsvorgang bewegt sich der betragskonstante Zeiger U' auf einem Ortskreis und beschreibt dabei die Läuferbewegung in einem synchron umlaufenden Koordinatensystem.

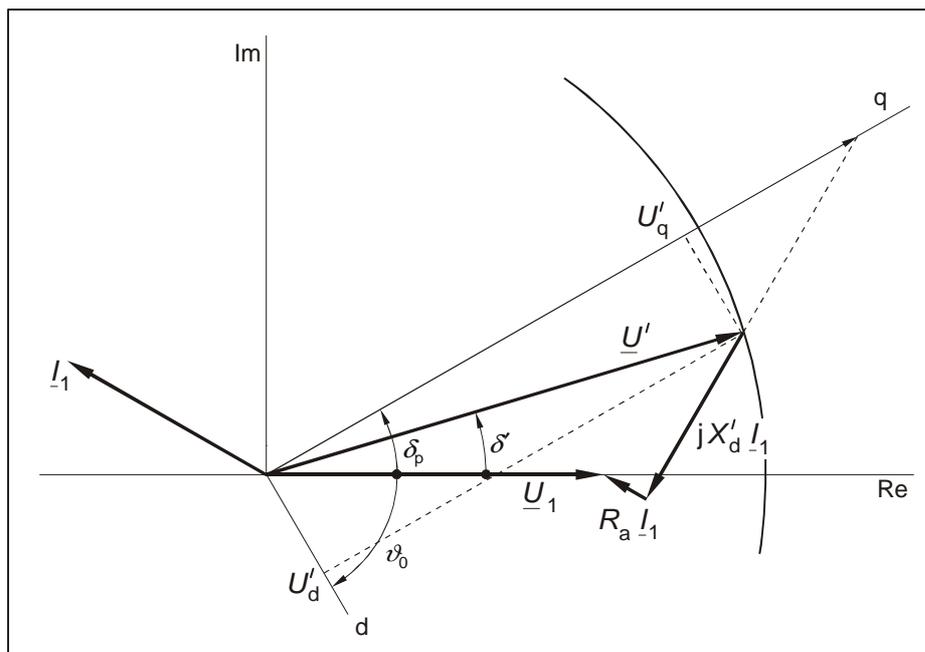


Bild 5.14: Zeigerbild zur Bestimmung von \underline{U}' bei einer transient symmetrischen Maschine

Herleitung der Ersatzschaltung mit transienten Größen in dq0-Koordinaten*

Der Strom i_D wird vereinbarungsgemäß Null gesetzt und die Flußverkettung der Längsachsen-Dämpferwicklung wird jetzt nicht mehr konstant angenommen. Für sie folgt aus Gl. (4.12):

$$\psi'_D = \frac{k_D}{D_{DD}} i_{d1} - \frac{D_{Df}}{D_{DD}} \psi'_{f0}$$

Wir setzen diesen Ausdruck in die Flußverkettungsgleichung des Ankers Gl. (4.10) ein und erhalten:

$$\psi_{d1} = L_d i_{d1} - L_{hd} \left(k_f - k_D \frac{D_{fD}}{D_{DD}} \right) i_{d1} + L_{hd} \left(D_{ff} - \frac{D_{fD} D_{Df}}{D_{DD}} \right) \psi'_{f0} \tag{5.70a}$$

Mit dem *neuen* Koppelfaktor und der bereits erwähnten *transienten* Längsinduktivität:

$$k'_f = k_f - k_D \frac{D_{fD}}{D_{DD}} = \frac{L_{hd}}{L'_{ff}} = \frac{k_f}{1 - k_D}$$

$$L'_d = L_d - k'_f L_{hd} = L''_d + k_D k'_f L'_{\sigma f} = L_{\sigma} + k'_f L'_{\sigma f} = L_{\sigma} + \frac{L_{hd} L'_{\sigma f}}{L_{hd} + L'_{\sigma f}}$$

lautet die Gl. (5.70a) kürzer:

$$\psi_{d1} = L'_d i_{d1} + k'_f \psi'_{f0} \tag{5.70b}$$

Die Gleichungen für die Querachsengrößen gelten unverändert. Es wird lediglich $L''_q = L'_q$ gesetzt. Somit wird schließlich in Analogie zu Gl. (5.61)

$$u_{d1} = R_a i_{d1} - \omega_L L'_q i_{q1} - \omega_L k_Q \psi'_{Q0} + L'_d \dot{i}_{d1}$$

$$u_{q1} = R_a i_{q1} + \omega_L L'_d i_{d1} + \omega_L k_f \psi'_{f0} + L'_q \dot{i}_{q1}$$

und nach Bildung des Raumzeigers in Läuferkoordinaten und Übergang zu Zeitzeigern für $\omega_L = \omega_0$:

$$\underline{U}_1 = (R_a + jX'_d) \underline{I}_1 + j(X'_q - X'_d) I_{q1} e^{j\vartheta_0} + j\omega_0 \frac{1}{\sqrt{2}} [k'_f \psi'_{f0} + jk_D \psi'_{Q0}] e^{j\vartheta_0} \quad (5.71a)$$

und kürzer:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}'_1 \underline{I}_1 + \underline{U}'_\Delta + \underline{U}' \quad (5.71b)$$

Für die transient symmetrische Maschine ($X''_q = X'_d$) oder bei Vernachlässigung der transienten Schenkigkeit vereinfacht sich die Gl. (5.71) zur Gl. (5.64).

5.6 Zusammenfassung

Die Ersatzschaltungen der Synchronmaschine für das Gegen- und Nullsystem der symmetrischen Komponenten sind passiv und bestehen nur aus der Gegen- und Nullimpedanz. Die Gegenreaktanz setzt sich aus dem Mittelwert der subtransienten Reaktanzen der dq-Ersatz-Ankerwicklungen X''_d und X''_q zusammen. Näherungsweise kann man auch mit $X_2 = X''_d$ rechnen. Die subtransienten Reaktanzen setzen sich im wesentlichen aus den Streureaktanzen der Anker- und Läuferwicklungen zusammen.

Die Nullreaktanz wird nur aus den Ständerstreureaktanzen gebildet und ist deshalb kleiner als X''_d . Da der Generatorsternpunkt meist nicht geerdet ist, oder der Generator über einen Blocktransformator der Schaltgruppe Yd5, der kein Nullsystem übertragen kann, an das Netz angeschlossen ist, interessiert die Nullimpedanz meist nicht.

Die Ersatzschaltungen für das Mitsystem enthalten auf jeden Fall eine Quelle in Form einer Spannungs- oder Stromquelle, wobei die Spannungsquellen-Ersatzschaltung meist bevorzugt wird. Man unterscheidet bei den Mitsystem-Ersatzschaltungen für drei charakteristische Zustände, in denen stationäre bzw. quasi-stationäre Bedingungen für die Mitsystemgrößen herrschen. Diese Zustände sind der *stationäre*, *subtransiente* und *transiente* Zustand. Für jeden dieser Zustände wurden Ersatzschaltungen mit unterschiedlichen, für den Zustand typischen Spannungsquellen und Impedanzen hergeleitet.

In Bild 5.15 sind diese Ersatzschaltungen formal vereinigt dargestellt. Die Darstellung soll deutlich machen, wie die Spannungen im stationären Zustand verknüpft sind und daß bei Eintritt einer Störung im Ankerkreis bei konstanter subtransienter Spannung oder konstant angenommener transienter Spannung eine sprunghafte Änderung in den jeweils beiden anderen Spannungsquellen auftritt, womit sie dem Anspruch an die Konstanz einer Quelle bei einer Zustandsänderung nicht gerecht werden und somit für die Berechnung nicht geeignet sind.

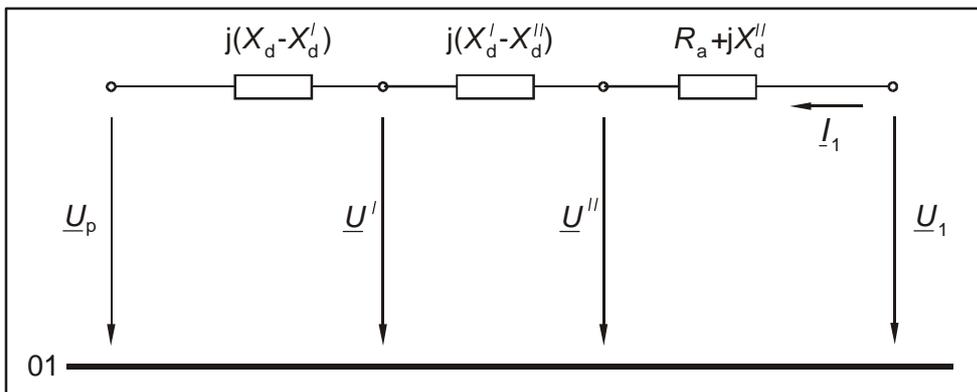


Bild 5.15: Mitsystem-Ersatzschaltungen der Synchronmaschine

Die Bestimmung der Quellenspannungen, ausgehend von \underline{U}_1 und \underline{I}_1 zeigt Bild 5.16.

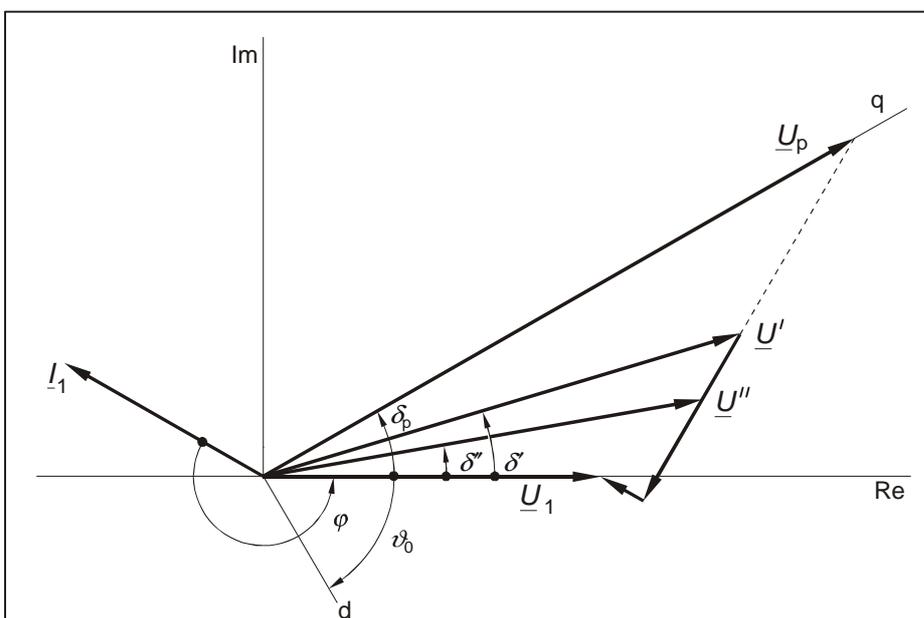


Bild 5.16: Bestimmung der Quellenspannungen, ausgehend von einem stationären Zustand

6 Reaktanzen

Die in den Ersatzschaltungen vorkommenden Reaktanzen lassen sich anschaulich anhand der Ersatzschaltungen für die Wicklungen in der d- und q-Achse erklären. Eine Kopplung zwischen den Wicklungen der d- und q-Achse wird im idealisierten Zweiachsenmodell der Synchronmaschine nicht angenommen. Die synchronen Reaktanzen X_d und X_q sind die *Selbstreaktanzen* der dq-Ersatz-Ankerwicklungen bei stromloser (offener) Erreger- und Dämpferwicklung (s. Bild 6.1).

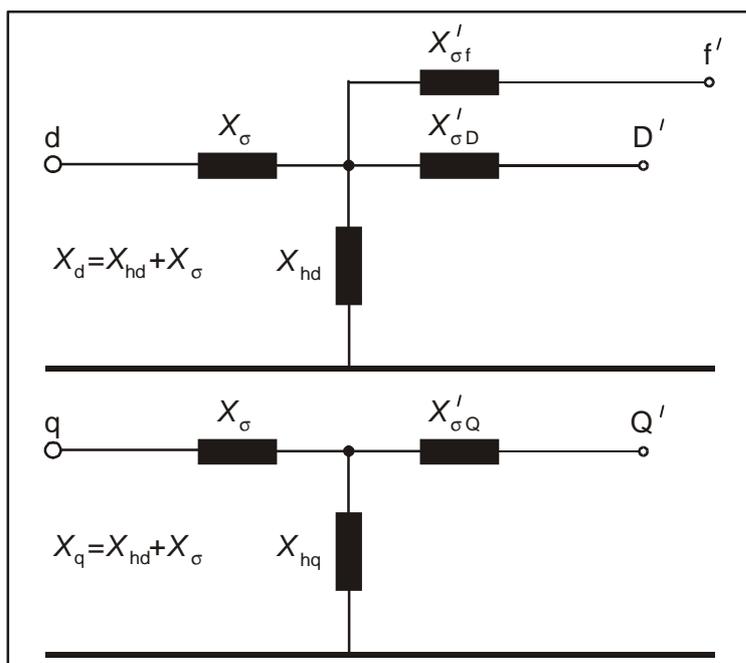


Bild 6.1: Interpretation der synchronen Reaktanzen

Die subtransienten Reaktanzen X''_d und X''_q sind die Ankerreaktanzen bei *kurzgeschlossenen* Läuferwicklungen (s. Bild 6.2).

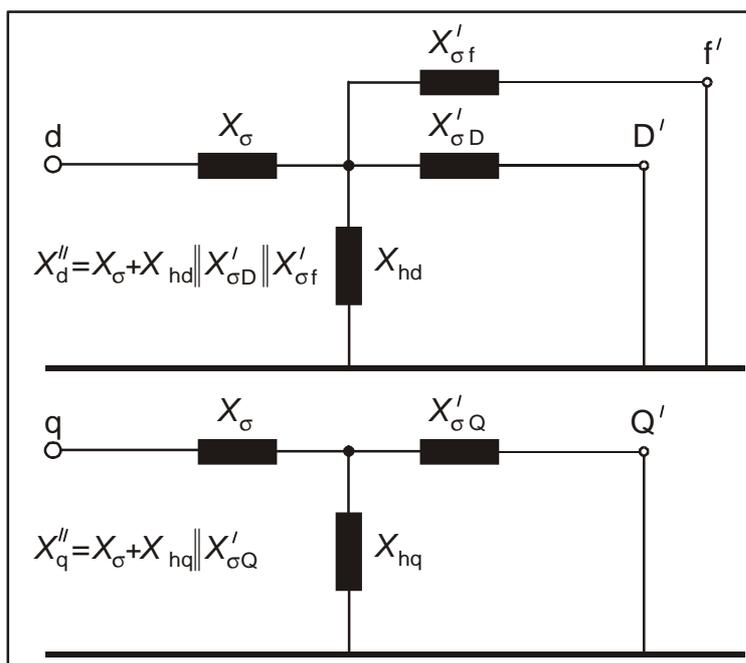


Bild 6.2: Interpretation der subtransienten Reaktanzen

Aus Bild 6.2 ergibt sich:

$$X_d'' = X_\sigma + \frac{X_{hd} X'_{\sigma D} X'_{\sigma f}}{X_{hd} X'_{\sigma D} + X_{hd} X'_{\sigma f} + X'_{\sigma D} X'_{\sigma f}} \approx X_\sigma + \frac{X'_{\sigma D} X'_{\sigma f}}{X'_{\sigma D} + X'_{\sigma f}}$$

$$X_q'' = X_\sigma + \frac{X_{hq} X'_{\sigma Q}}{X_{hq} + X'_{\sigma Q}} \approx X_\sigma + X'_{\sigma Q}$$

Durch die Parallelschaltung der relativ kleinen Läuferstreureaktanzen zu den Hauptreaktanzen sind die subtransienten Reaktanzen wesentlich kleiner als die synchronen Reaktanzen. Die Näherungen beruhen auf den Relationen: $X'_{\sigma D}, X'_{\sigma f} \ll X_{hd}$ sowie $X'_{\sigma Q} \ll X_{hq}$.

Für die transiente Längsreaktanz muß man sich die Längsachsen-Dämpferwicklung geöffnet oder als nicht vorhanden vorstellen:

$$X_d' = X_\sigma + \frac{X_{hd} X'_{\sigma f}}{X_{hd} + X'_{\sigma f}} \approx X_\sigma + X'_{\sigma f}$$

Durch den Wegfall der kurzgeschlossenen Längsachsen-Dämpferwicklung ist X_d' stets größer als X_d'' .

Für die bezogenen Größen mit dem Bezugswert:

$$Z_B = \frac{U_{rG}}{\sqrt{3} I_{rG}} = \frac{U_{rG}^2}{S_{rG}} \quad (6.1)$$

gelten die in Tabelle 6.1 angegebenen Richtwerte.

Tabelle 6.1: Größenordnungen für die Generatorreaktanzen und den Ankerwiderstand

Reaktanzen	Vollpolgeneratoren	Schenkelpolgeneratoren
x_d	1,5...2,5	0,8...1,6
x_q / x_d	0,9...1	0,55...0,7
x_d'	0,25...0,4	0,3...0,5
x_d''	0,15...0,25	0,2...0,3
x_q'' / x_d''	1...1,5	1...3
x_0	0,01...0,1	0,03...0,15
r_a	0,004...0,001	0,004...0,001

Die größeren Werte für die Reaktanzen und die kleineren Werte für den Ankerwiderstand gelten für die Maschinen größerer Leistung. Man merke sich als grobe Richtwerte für Vollpolgeneratoren:

$$X_d'' \approx \frac{1}{10} X_d, \quad X_d' \approx \frac{1}{5} X_d$$

Aus den bezogenen Werten erhält man die Reaktanzen und analog den Ankerwiderstand nach folgender Beziehung in Ω , wenn man die Generatorbemessungsspannung U_{rG} in kV und die Generatorbemessungsleistung S_{rG} in MVA einsetzt:

$$X = x \frac{U_{rG}^2}{S_{rG}} \quad (6.2)$$

Das Verhältnis R zu X ist auch bei den subtransienten Reaktanzen noch so klein, daß in den Ersatzschaltungen der Ankerwiderstand meist vernachlässigt werden kann.

7 Stationäres Betriebsverhalten

Die Behandlung des stationären synchronen Betriebes der Vollpolmaschinen erfolgt mit der Ersatzschaltung nach Bild 5.1a, in der die Polradspannung hinter der synchronen Längsreaktanz als Quellenspannung wirkt. Auf Schenkelpolmaschinen soll hier nicht näher eingegangen werden. Sie können näherungsweise als Vollpolmaschine behandelt werden. Für eine bestimmte Erregung ist der Betrag der Polradspannung konstant. Die Phasenlage der Polradspannung in Bezug auf die Klemmenspannung, ausgedrückt durch den Polradwinkel, hängt von der Art der Belastung ab. In Elektroenergieversorgungsnetzen arbeiten stets mehrere Synchrongeneratoren parallel oder wie man auch sagt, im Verbund. Die Untersuchung des Betriebsverhalten eines solchen Verbundnetzes ist praktisch nur mit Hilfe von Computerprogrammen möglich. Entsprechende Rechenprogramme stehen heute allen Energieversorgungsunternehmen und Forschungseinrichtungen zur Verfügung.

Einen wichtigen Sonderfall bei der Untersuchung des Netzbetriebes stellt das sog. *Ein-Maschinenproblem* dar. Beim Einmaschinenproblem interessiert man sich nur für den Einfluß eines Generators oder eines Kraftwerks (Generatorgruppe) auf das übrige Netz. Das Netz kann näherungsweise auf die in Bild 7.1 angegebene Struktur reduziert werden. Solange die Leistung des betrachteten Generators klein im Vergleich zur installierten Kraftwerksleistung des Netzes ist, kann das restliche Netz als frequenzstarr vorausgesetzt werden. Die Ersatzschaltung des frequenzstarreren Netzes besteht aus einer nach Betrag und Winkel konstanten Spannungsquelle \underline{U}_N hinter der Netzimpedanz \underline{Z}_Q , die durch die Kurzschlußleistung des Netzes und das R-zu-X-Verhältnis am Anschlußpunkt Q bestimmt wird:

$$Z_Q = \frac{1,1U_{nN}^2}{S_k} \tag{7.1}$$

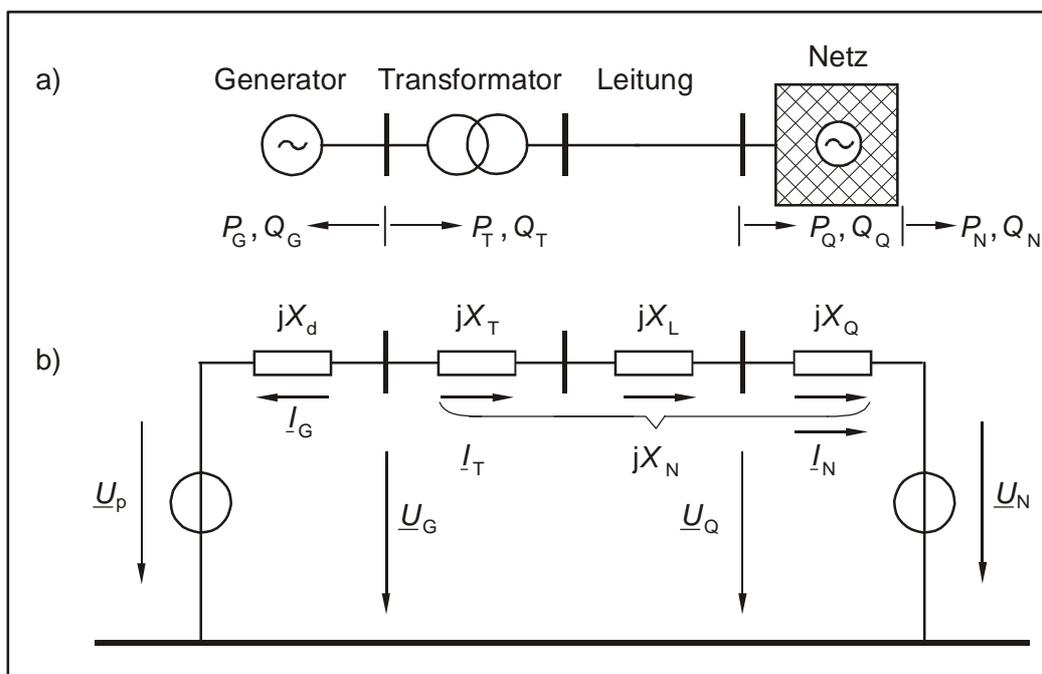


Bild 7.1: Struktur (a) und Strangersatzschaltung (b) für das Ein-Maschinenproblem

Wir wollen die folgenden prinzipiellen Überlegungen auch auf diesen einfachen Fall beschränken und dabei noch alle Wirkwiderstände vernachlässigen und die Reak-

tanzen von Transformator, Leitung und Netz in einer Reaktanz X_N zusammenfassen, wobei wir wie in Bild 7.1b voraussetzen, daß alle Reaktanzen, Ströme und Spannungen auf eine Spannungsebene umgerechnet sind.

7.1 Zeigerbilder für verschiedene Belastungsfälle

Im normalen Netzbetrieb gibt der Generator Wirk- und Blindleistung ab. Nach dem VZS sind dann P_G und Q_G negativ. Um die negativen Vorzeichen für diesen häufigsten Fall zu vermeiden, kann man anstelle der Generatorleistungen die Leistungen $P_T = -P_G$ und $Q_T = -Q_G$, die an den Generatorklemmen abgenommen werden, verwenden. In der Ersatzschaltung wird dann der Strom $I_T = I_L = I_N = -I_G$ für alle Berechnungen herangezogen.

Das Zeigerbild für den üblichen Belastungsfall ($P_T, Q_T > 0$) zeigt Bild 7.2. Es wurde ausgehend von \underline{U}_G in der reellen Achse und Vorgabe von I_T gezeichnet, wobei der Phasenverschiebungswinkel zwischen Strom und Spannung durch P_T und Q_T gemäß

$$\varphi_T = \arctan \frac{Q_T}{P_T}$$

festgelegt wird.

Die anderen Spannungen ergeben sich aus den Maschenumläufen in der Ersatzschaltung (Bild 7.1b). Bei Veränderung der Erregung oder der Turbinenleistung bleibt die innere Spannung des Netzes \underline{U}_N nach Betrag und Winkel konstant, weshalb man für solche Betrachtungen oft noch das Zeigerbild so dreht, daß die Netzspannung in die reelle Achse zu liegen kommt.

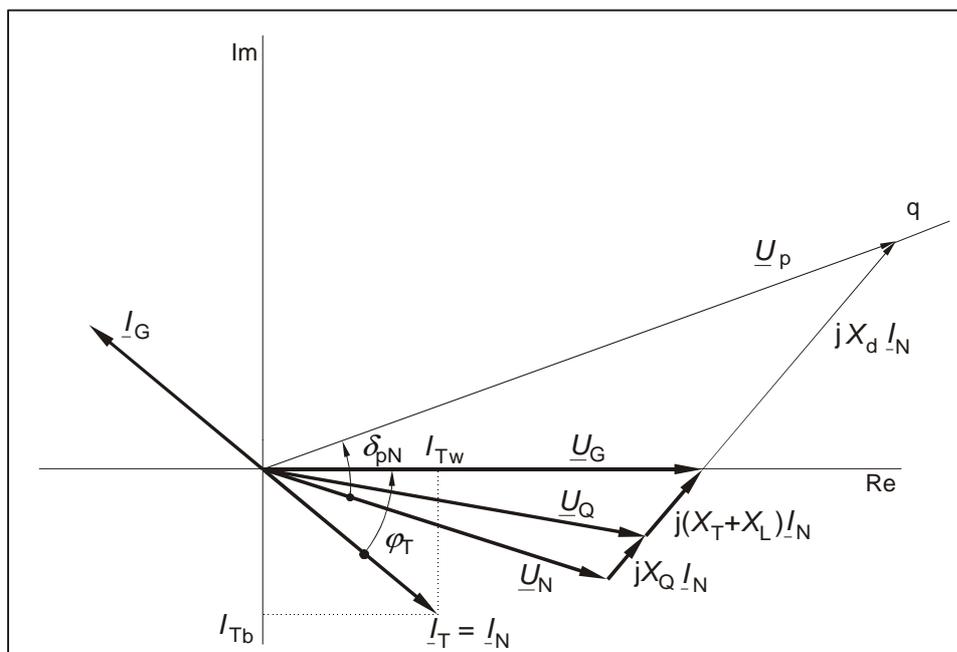


Bild 7.2: Zeigerbild für den üblichen Belastungsfall ($R_a = 0$)

In Bild 7.3 sind Zeigerbilder für spezielle Belastungsfälle dargestellt. Im *Leerlauf* sind die Polradspannung, Generatorklemmenspannung und innere Netzspannung gleich. Der resultierende Polradwinkel ist Null. Bei (reiner) *Wirkleistungsabgabe* des Genera-

tors stellt sich ein positiver Polradwinkel ein. Die Spannungsabfälle zwischen Polrad- und Netzspannung sind im Vergleich zum induktiven Belastungsfall gering. Bei *kapazitiver* Blindlast bezieht der Generator ein Teil seiner Magnetisierungsblindleistung vom Netz, so daß die Polradspannung kleiner als die Klemmenspannung ist. *Blindleistungsabgabe* an das Netz ist nur möglich, wenn die Polradspannung und Generatorklemmenspannung größer als die Netzspannung sind.

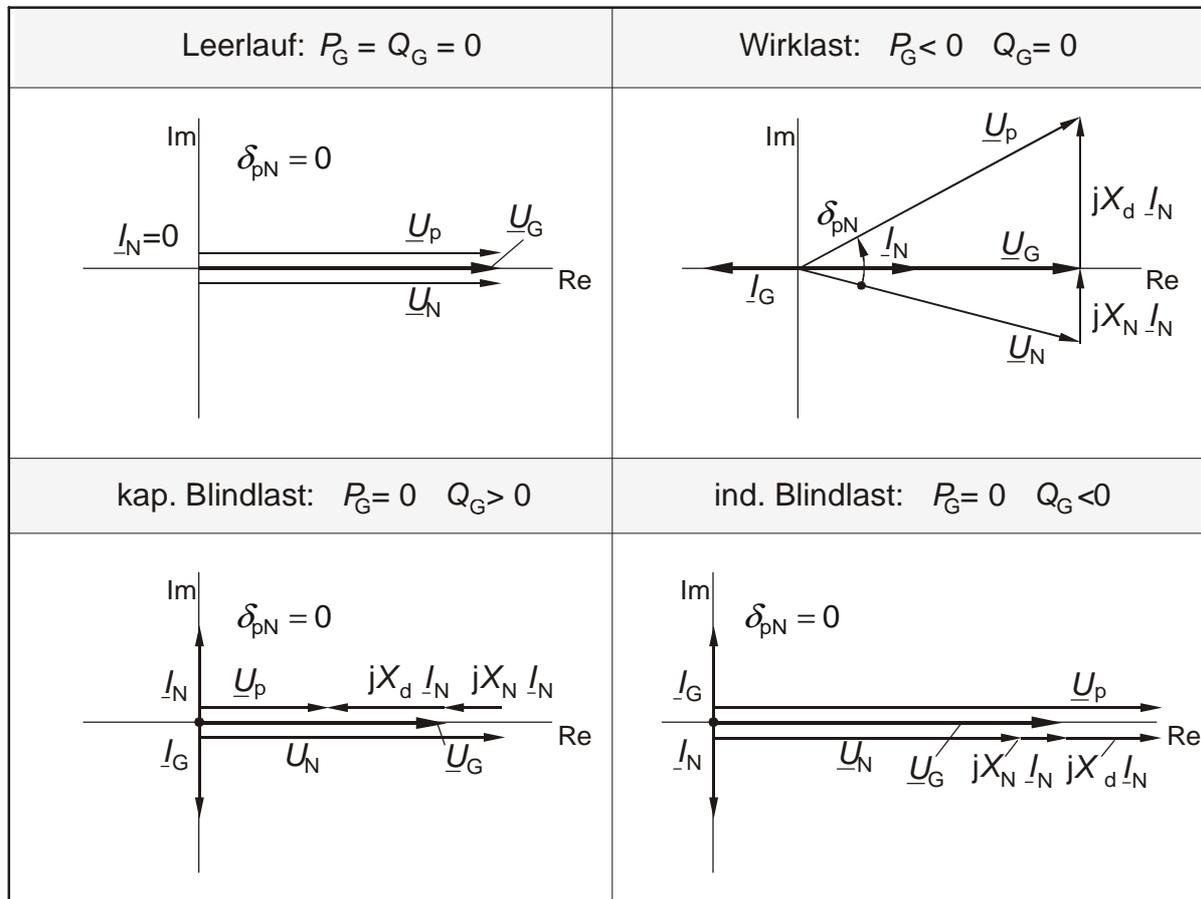


Bild 7.3: Zeigerbilder für verschiedene Belastungsfälle ($R_a = 0$)

7.2 Leistungsdiagramm

Das Leistungsdiagramm (Bild 7.4) bildet die vom Netz aufgenommene Scheinleistung \underline{S}_N des Systems Generator, Transformator und Leitung in der komplexen Ebene ab¹⁾. Es gilt natürlich auch in gleicher Form für einen Generator, der direkt an einem starren Netz oder mit einem Spannungsregler arbeitet. Es ist dann lediglich überall $X_N = 0$ zu setzen, womit die Klemmenspannung des Generators gleich \underline{U}_N wird und konstant bleibt. Um den Ausdruck für die komplexe Leistung \underline{S}_N zu erhalten, ersetzen wir in der allgemeinen Leistungsgleichung

$$\underline{S}_N = 3 \underline{U}_N \underline{I}_N^*$$

den konjugiert komplexen Stromzeiger mit Hilfe der Ersatzschaltung in Bild 7.1b:

¹⁾ Genau genommen die von dem inneren Netzpunkt (hinter \underline{Z}_Q) aufgenommene Leistung. Da \underline{Z}_Q aber meist vernachlässigbar ist, spricht man schlechthin von der Netzleistung.

$$I_N^* = \frac{\underline{U}_p^* - \underline{U}_N^*}{-j(X_d + X_N)}$$

Für die Polradspannung schreiben wir:

$$\underline{U}_p = \frac{U_p}{U_N} \underline{U}_N = \frac{U_p}{U_N} \underline{U}_N e^{j(\varphi_{up} - \varphi_{uN})} = \varepsilon \underline{U}_N e^{j\delta_{pN}}$$

und führen damit den *Erregergrad* $\varepsilon = U_p / U_N$ und den *resultierenden* Polradwinkel $\delta_{pN} = \varphi_{up} - \varphi_{uN}$ als Kenngrößen zwischen den Spannungen \underline{U}_p und \underline{U}_N ein. Damit wird:

$$I_N^* = j \frac{U_N}{(X_d + X_N)} (\varepsilon e^{-j\delta_{pN}} - 1)$$

und:

$$\underline{S}_N = j \frac{3U_N^2}{X_d + X_N} (\varepsilon e^{-j\delta_{pN}} - 1) = jQ_C (\varepsilon e^{-j\delta_{pN}} - 1) = P_N + jQ_N \tag{7.2}$$

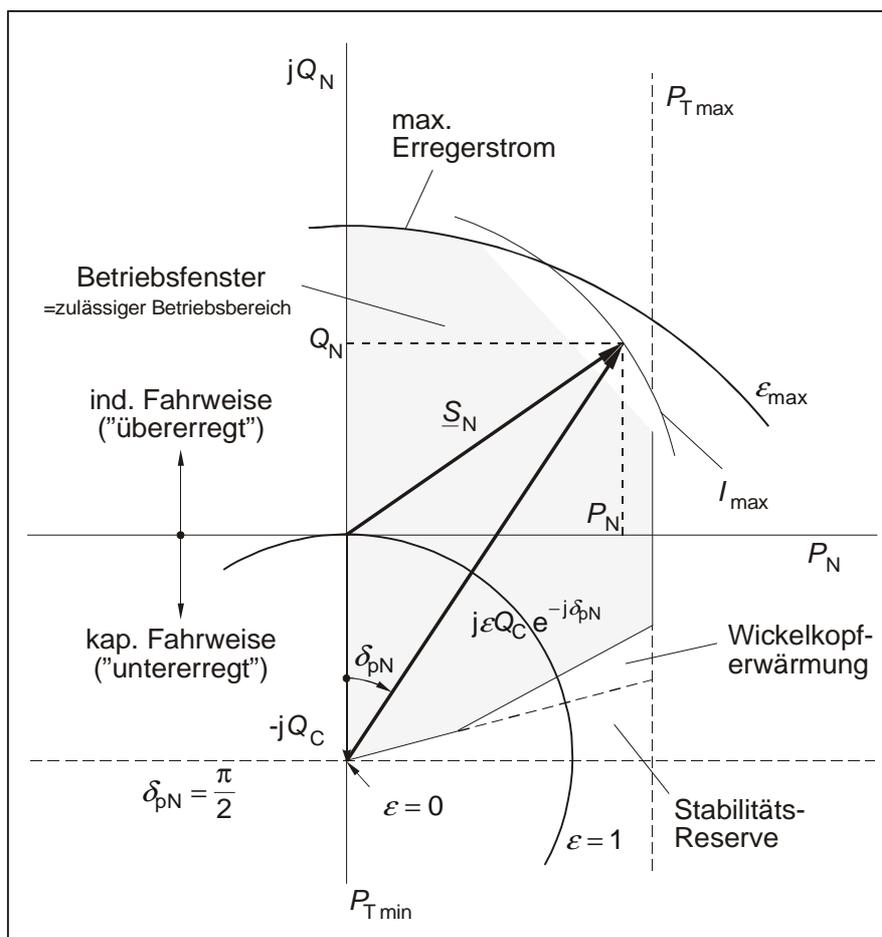


Bild 7.4: Leistungsdiagramm für $U_N = \text{konstant}$

Die Blindleistung:

$$Q_C = \frac{3U_N^2}{X_d + X_N} \quad (7.3)$$

ist die Blindleistung, die das System Generator, Transformator und Leitung bei unerregtem Generator ($\varepsilon = 0$) aus dem Netz aufnimmt. Aus der Sicht des Netzes handelt es sich um eine kapazitive Blindleistung; deshalb der Index C.

Ist der Generator direkt mit dem Netz verbunden ($X_N = 0$), so kann er im unerregten Zustand bei Bemessungsspannung die Blindleistung:

$$Q_{GC} = \frac{U_{rG}^2}{X_d} = \frac{S_{rG}}{x_d} \quad (7.4)$$

aufnehmen. Man spricht auch von der maximalen kapazitiven Belastbarkeit des Generators Q_{GC} .

Die Konstruktion des Leistungsdiagrammes in Bild 7.4 beginnt mit dem Zeiger $-jQ_C$. Damit ist bereits der Leistungszeiger für $\varepsilon = 0$ gefunden. An diesen wird nun der erregungsabhängige Zeiger $jQ_C \varepsilon e^{-j\delta_{pN}}$ angetragen. Er bewegt sich für konstante Erregung ($\varepsilon = \text{konstant}$) auf Kreisen, die alle ihren Ursprung im Punkt $\varepsilon = 0$ haben. Die Summe beider Zeiger ergibt die gesuchte Leistung \underline{S}_N in Abhängigkeit von ε und δ_{pN} . In das Leistungsdiagramm sind folgende Begrenzungen eingetragen:

- die maximalen und minimalen Turbinenleistungen P_{Tmax} und P_{Tmin}
- der maximal zulässige Ankerstrom I_{max} als Kreis um den Koordinatenursprung (bei U_N konstant ist $I \sim \underline{S}_N$)
- der maximal zulässige Erregerstrom, ausgedrückt durch ε_{max} als Kreis um den Punkt $\varepsilon = 0$
- der zulässige Winkel zwischen Netz- und Polradspannung. Aus Sicht der statischen Stabilität muß $\delta_{pN} < \pi/2$ sein¹⁾. Der maximal zulässige Winkel ergibt sich aus einem Sicherheitsabstand von diesem theoretischen Höchstwert.

Innerhalb dieser Begrenzungen liegt das *Betriebsfenster*, in dem sich der Zeiger \underline{S}_N bewegen darf. In der Praxis findet man das Leistungsdiagramm oft auch mit P_N nach oben und Q_N nach rechts gezeichnet.

7.3 Leistungs-Winkel-Kennlinien

Die Leistungs-Winkel-Kennlinien beschreiben die Abhängigkeit von Wirk- und Blindleistung vom resultierenden Polradwinkel mit U_p bzw. ε als Parameter bei \underline{U}_N konstant, also im Parallelbetrieb mit einem starren Netz. Man gewinnt die Verläufe anschaulich, wenn man \underline{S}_N im Leistungsdiagramm (Bild 7.4) auf einem Kreis mit ε konstant bewegt und dabei die Änderungen des Real- (P_N) und Imaginärteils (Q_N) verfolgt. Die mathematischen Ausdrücke folgen aus Gl. (7.1) durch Real- und Imaginärteildbildung. Man erhält als Wirkleistungs-Winkelkennlinie:

¹⁾ s. Skript Stabilität

$$P_N = 3 \frac{U_p U_N}{X_d + X_N} \sin \delta_{pN} = 3 \frac{\varepsilon U_N^2}{X_d + X_N} \sin \delta_{pN} = \varepsilon Q_C \sin \delta_{pN} \quad (7.5)$$

und als Blindleistungs-Winkelkennlinie:

$$Q_N = 3 \frac{U_p U_N}{X_d + X_N} \cos \delta_{pN} - 3 \frac{U_N^2}{X_d + X_N} = 3 \frac{U_N^2}{X_d + X_N} (\varepsilon \cos \delta_{pN} - 1) = Q_C (\varepsilon \cos \delta_{pN} - 1) \quad (7.6)$$

Die Kennlinien sind in den Bildern 7.5 und 7.6 dargestellt. In Bild 7.5 ist auch die Turbinenkennlinie P_T eingetragen. Sie ist unabhängig vom Polradwinkel und schneidet die Leistungs-Winkelkennlinie zweimal. Wir werden später beweisen, daß nur der linke Schnittpunkt ein stabiler Arbeitspunkt sein kann (s. Skript Stabilität).

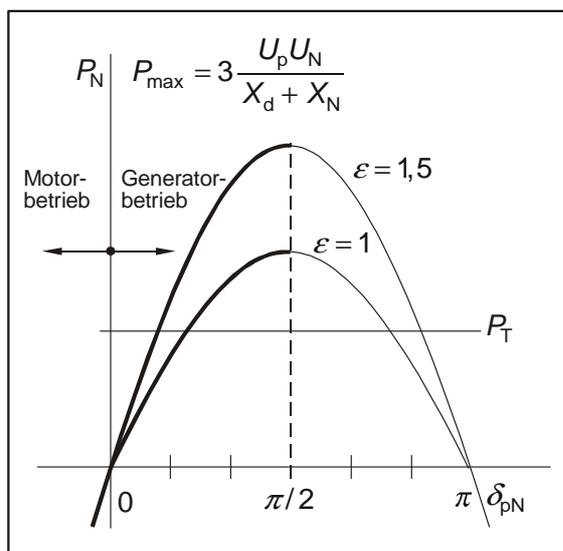


Bild 7.5: Wirkleistungs-Winkelkennlinie

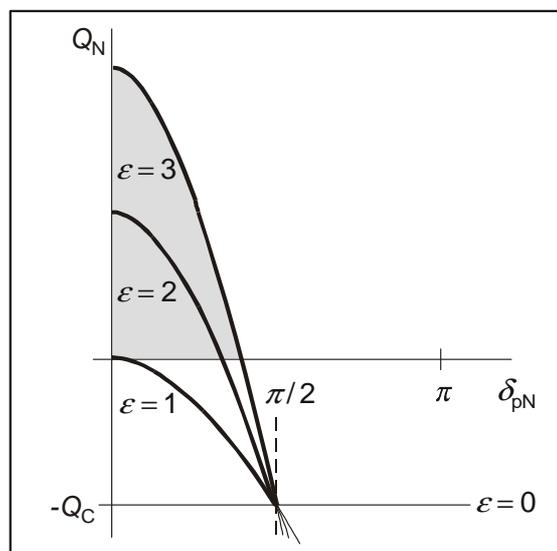


Bild 7.6: Blindleistungs-Winkelkennlinie

Die Leistungs-Winkelkennlinien liefern folgende wichtige Aussagen:

- Bei konstanter Erregung wächst mit wachsender Turbinenleistung der Polradwinkel (die Turbinenkennlinie wird parallel nach oben verschoben). Der Polradwinkel ist im Generatorbetrieb stets positiv.
- Die maximale, an das Netz lieferbare Wirkleistung wird bei $\delta_{pN} = \pi/2$ erreicht und beträgt:

$$P_{\max} = 3 \frac{U_p U_N}{X_d + X_N} = \varepsilon Q_C \quad (7.7)$$

Weil der Generator bei weiterer Leistungssteigerung außer Tritt fällt - oder wie man auch sagt abkippt - wird P_{\max} auch als *Kippleistung* bezeichnet.

- Bei Vergrößerung/Verkleinerung der Erregung (ε) sinkt / steigt der Polradwinkel.
- Bei Vergrößerung/Verkleinerung der Reaktanzen zwischen Generator und Netz sinkt / steigt die Kippleistung.
- Blindleistungsabgabe an das Netz ($Q_N > 0$) ist generell nur für $\varepsilon > 1$ (Übererregung) möglich. Wird jedoch bei fester Erregung mehr Wirkleistung geliefert, wobei der Polradwinkel δ_{pN} und der Ankerstrom steigen, so wächst aufgrund des steigenden Ankerstromes auch der eigene Blindleistungsbedarf des Generators und der Übertragungselemente, so daß weniger Blindleistung an das Netz abgegeben

wird. Der in der Praxis gebrauchte Terminus "übererregt" bedeutet somit nicht notwendigerweise Blindleistungsabgabe. Der Bereich möglicher Blindleistungsabgabe ist in Bild 7.6 schraffiert dargestellt.

Unter Benutzung des Ausdruckes für P_{\max} lassen sich die Leistungs-Winkel-Kennlinien auch wie folgt schreiben:

$$P_N = P_{\max} \sin \delta_{pN}$$

und:

$$Q_N = P_{\max} \cos \delta_{pN} - Q_C$$

Der Betrieb bei $P_N = 0$ heißt *Phasenschieberbetrieb*. Der Generator läuft leer am Netz. Genaugenommen arbeitet die Maschine im Motorbetrieb, da sie ihre Verluste, die wir hier mit R_a vernachlässigt haben, aus dem Netz decken muß. Bei Verstellung der Erregung bewegt sich Q_N auf der Ordinate in Bild 7.6 zwischen negativen und positiven Werten, je nach Erregungsgrad. Es ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen Q_N und ε , wie er in Bild 7.7 dargestellt ist.

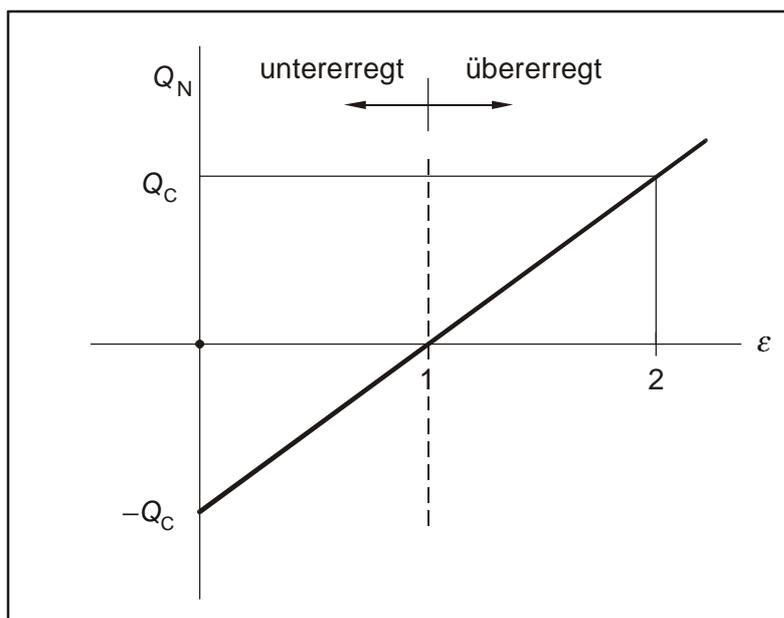


Bild 7.7: Blindleistungsänderung im Phasenschieberbetrieb

8 Nichtstationäres Betriebsverhalten

8.1 Kurzschluß

Es soll nur der 3-polige Kurzschluß bei gleichzeitigem Eintritt in allen drei Leitern (Strängen) betrachtet werden. Der zeitliche Verlauf der Ströme in den drei Leitern hängt, wie wir bereits in Kapitel 5 gesehen haben, vom Moment des Kurzschlußeintrittes ab. Die typischen Verläufe eines Leiterstromes bei Kurzschlußeintritt im Spannungsnulldurchgang und bei Kurzschlußeintritt im Spannungsmaximum zeigen die Bilder 8.1 und 8.2.

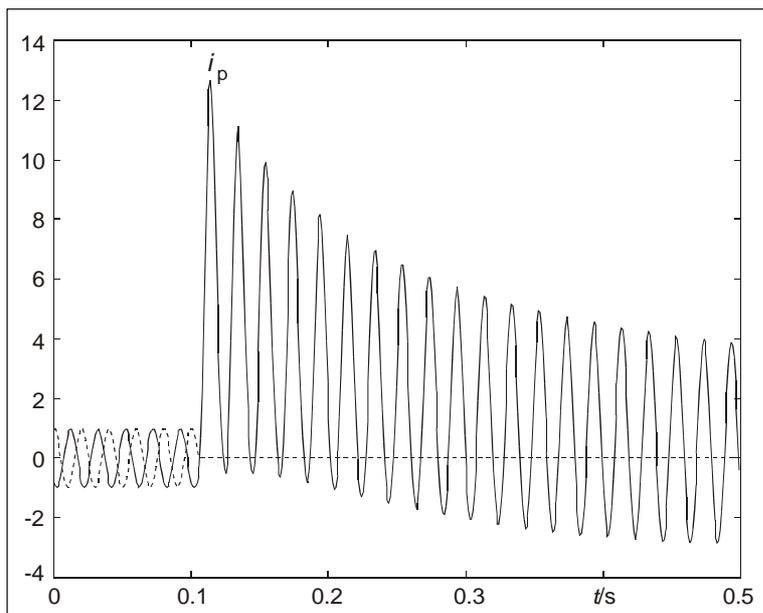


Bild 8.1: Spannungs- und Kurzschlußstromverlauf (auf Bemessungsgrößen bezogene Werte) in einem Leiter bei Kurzschlußeintritt im Spannungsnulldurchgang (s. auch Bild 5.9)

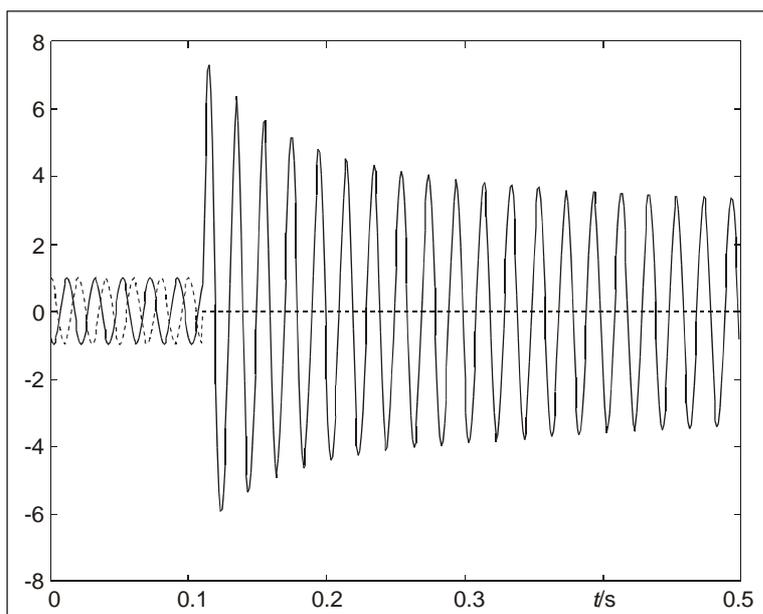


Bild 8.2: Spannungs- und Kurzschlußstromverlauf (auf Bemessungsgrößen bezogene Werte) in einem Leiter bei Kurzschlußeintritt im Spannungsmaximum

Bei Kurzschlußeintritt im Spannungsnulldurchgang weist der Kurzschlußstrom des betreffenden Leiters ein maximales Gleichglied auf, während bei Kurzschluß im Spannungsmaximum kein Gleichglied in Erscheinung tritt. Das Gleichglied hält die vor dem Kurzschluß vorhandene Ankerflußverkettung, die sich bei kurzgeschlossener Ankerwicklung nach dem Prinzip der Flußkonstanz nicht plötzlich ändern kann, aufrecht. Da die momentane Flußverkettung im Spannungsnulldurchgang maximal ist, entsteht das maximale Gleichglied bei Kurzschluß im Spannungsnulldurchgang.

Der höchstmögliche, d.h. bei maximaler Verlagerung auftretende Momentanwert des Ankerstromes heißt *Stoßkurzschlußstrom* und wird mit i_p (p von peak) - früher mit I_s - bezeichnet. Er tritt nach etwas weniger als 10 ms auf (s. Bild 8.1).

Zwischen dem Stoßkurzschlußstrom und dem theoretischen Höchstwert des Wechselanteils, dem *Anfangs-Kurzschlußwechselstrom*, besteht der Zusammenhang:

$$i_p = \kappa \sqrt{2} I_k'' \quad (8.1)$$

in dem κ der sog. *Stoßfaktor* ist. Für Kurzschlüsse an den Generatorklemmen liegt κ zwischen 1,8 und 1,9. Der genaue Wert hängt von der Höhe und Art der Vorbelastung (induktiv oder kapazitiv) und vom Abklingen des Gleich- und Wechselanteils innerhalb der Zeit, die bis zum Erreichen des Stoßkurzschlußstromes vergeht, ab. Die Kurzschlußströme klingen auf den Dauerkurzschlußstrom I_k ab.

Mit der Gl. (8.1) ist die Ermittlung des Stoßkurzschlußstromes auf die Berechnung des Anfangs-Kurzschlußstromes zurückgeführt. Diese ist leicht mit Hilfe der komplexen Rechnung unter Verwendung der Generatorersatzschaltungen mit den subtransienten Größen durchzuführen. Somit erlangt die theoretische Kurzschlußstromgröße Anfangs-Kurzschlußwechselstrom als Ausgangspunkt der Kurzschlußberechnung eine große praktische Bedeutung, zumal auch noch weitere charakteristische Kurzschlußstromgrößen, wie der *Ausschaltstrom* und der *thermisch wirksame Mittelwert* des Kurzschlußstroms aus ihr abgeleitet werden.

Die genaue Berechnung des Kurzschlußstromverlaufes setzt die Lösung der Zustandsgleichungen des Generators (s. Gl. (4.18)) voraus, was für praktische Belange aber viel zu aufwendig wäre. Unter bestimmten Voraussetzungen ist eine geschlossene Lösung für den Stromverlauf bei 3-poligem Kurzschluß möglich. Man erhält für den Generatorstrom den Ausdruck (s. auch Anhang 9.3):

$$i_k(t) = \underbrace{-\sqrt{2}[(I_k'' - I_k')e^{-\frac{t}{T_d''}} + (I_k' - I_k)e^{-\frac{t}{T_d'}} + I_k]}_{\text{Wechselanteil}} \cos(\omega_0 t + \beta) - \underbrace{I_g \cos \alpha e^{-\frac{t}{T_g}}}_{\text{Gleichanteil}} \quad (8.2)$$

$$\alpha = \varphi_{u0} - \varphi_Z; \quad \beta = \varphi_{u'} - \varphi_Z$$

φ_{u0} Phasenwinkel der Spannung vor dem Kurzschluß $u_0 = \hat{u}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_{u0})$ ¹⁾

φ_Z Impedanz-Winkel der Kurzschlußstrombahn

$\varphi_{u'}$ Phasenwinkel der subtransienten Spannung zum Zeitpunkt $t = -0$

$I_k'' = \frac{U''}{X_d''}$ Anfangs-Kurzschlußwechselstrom bei Vernachlässigung von R_a

$I_k' = \frac{U'}{X_d'}$ transienter Kurzschlußstrom bei Vernachlässigung von R_a

¹⁾ Der Index 0 verweist auf die Anfangswerte zum Zeitpunkt $t = -0$ unmittelbar vor dem Kurzschluß.

$$I_k = \frac{U_p}{X_d} \text{ Dauerkurzschlußstrom bei Vernachlässigung von } R_a$$

$$I_g = \frac{U_0}{X_d''} \text{ Anfangswert des Gleichanteils bei Vernachlässigung von } R_a$$

$$T_d' \approx \frac{X_d'}{X_d} T_{d0}' \text{ transiente Kurzschluß-Zeitkonstante der Längsachse}$$

$$T_d'' \approx \frac{X_d''}{X_d'} T_{d0}'' \text{ subtransiente Kurzschluß-Zeitkonstante der Längsachse}^1)$$

$$T_g = \frac{X_d''}{\omega_0 R_a} \text{ Gleichstrom-Zeitkonstante}^2)$$

In den Bildern 8.3a und b sind die Hüllkurve des Wechselanteils und der Gleichanteil (für maximale Verlagerung) nach Gl. (8.2) separat dargestellt.

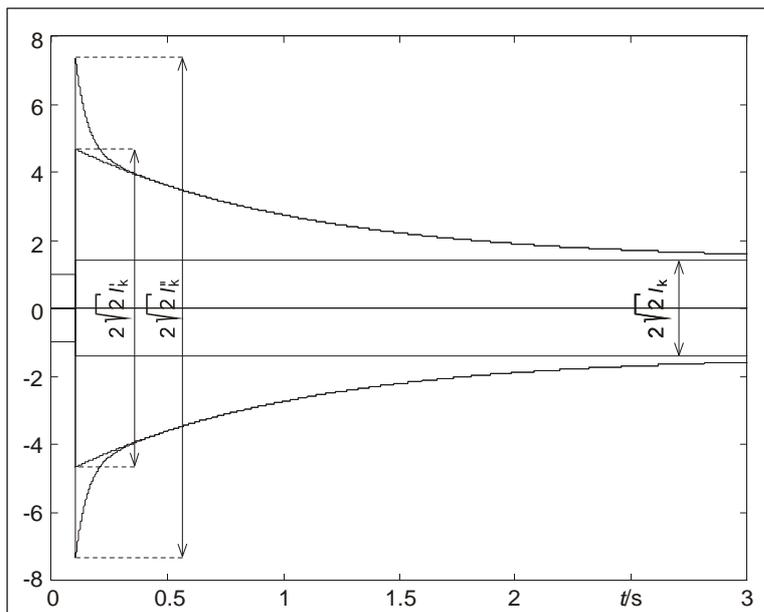
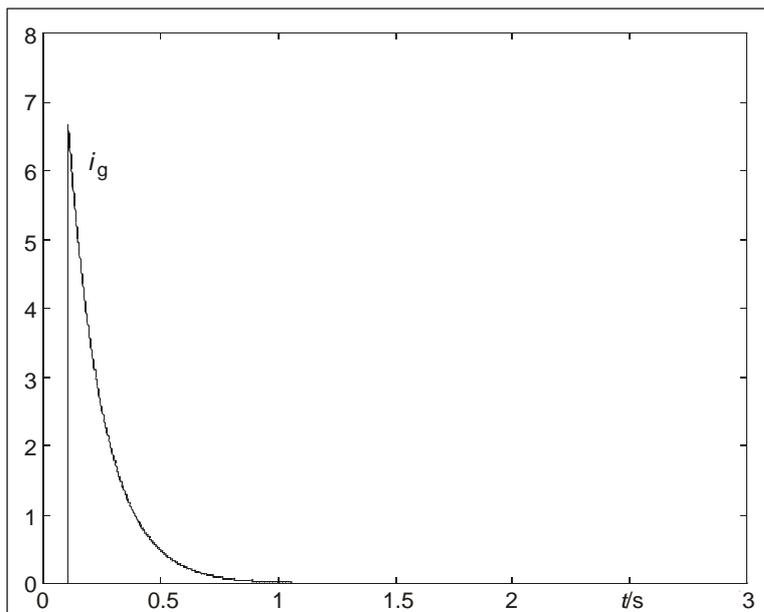


Bild 8.3: Anteile des Kurzschlußstromverlaufes
a) Wechselanteile (Hüllkurven)

1) T_{d0}' und T_{d0}'' sind die sog. Leerlauf-Zeitkonstanten der d-Achse.

2) In der Gleichstrom-Zeitkonstanten dürfen die Wirkwiderstände nicht vernachlässigt werden.



b) Gleichanteil bei maximaler Verlagerung

Die Größenordnung der Zeitkonstanten geht aus Tabelle 8.1 hervor.

Tabelle 8.1: Richtwerte für die Zeitkonstanten von Synchronmaschinen

Zeitkonstanten	Vollpolgeneratoren	Schenkelpolgeneratoren
T'_{d0}	4...8 s	5...10 s
T''_{d0}	$\approx \frac{X'_d}{X''_d} T'_d$	$\approx \frac{X'_d}{X''_d} T''_d$
T'_d	0,8...1,2 s	1...2 s
T''_d	0,03...0,05 s	0,03...0,05 s
T_g	0,1...0,8 s	0,15...0,4 s

Die Gleichstromzeitkonstante kann bei großen Turbogeneratoren aufgrund der grösseren subtransienten Reaktanzen und der kleineren Ankerwiderstände bis zu 800 ms erreichen. Unter ungünstigen Voraussetzungen (Klemmenkurzschluß, kapazitive Vorbelastung, Kurzschlußeintritt im Spannungsnulldurchgang und ggf. noch ungleichzeitiger Kurzschlußeintritt in den drei Leitern) kann es dann zu einer Einschnürung des Kurzschlußstromverlaufes mit ausbleibenden Nulldurchgängen und damit zu erschwerten Abschaltbedingungen kommen. Das Bild 8.4 zeigt einen solchen entarteten Kurzschlußstromverlauf.

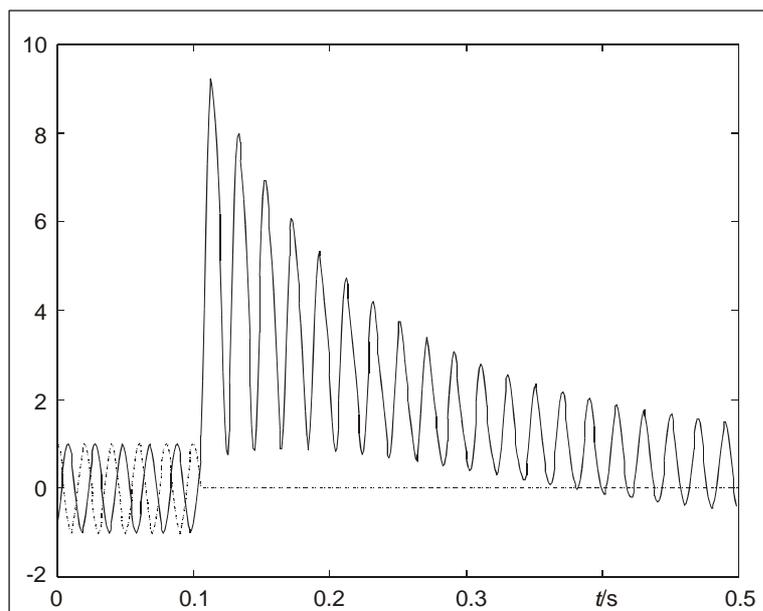


Bild 8.4: Kurzschlußstromverlauf mit ausbleibenden Nulldurchgängen

Kurzschlüsse an den Generatorklemmen sind durch die technische Ausführung der Generatorausleitung praktisch kaum möglich. Sie werden aber im Prüffeld mit verminderter Spannung zur Bestimmung der Reaktanzen und Zeitkonstanten vorgenommen.

Auf der Oberspannungsseite der Blocktransformatoren sind dagegen in der Schaltanlage oder im Netz Kurzschlüsse nicht auszuschließen. Es handelt sich dann aber in den seltensten Fällen um einen in allen drei Leitern gleichzeitig eintretenden 3-poligen Kurzschluß. Ein 3-poliger Kurzschluß entsteht in den meisten Fällen durch Lichtbogeneinwirkung aus einem 1-poligen Kurzschluß. Da der 3-polige Kurzschluß aber - abgesehen von wenigen Punkten im Netz - die höchsten Kurzschlußströme verursacht, wird er gewöhnlich bei Netzuntersuchungen als worst case zugrunde gelegt. Der Blocktransformator und zwischen der Kurzschlußstelle und dem Blocktransformator liegende Übertragungsleitungen können oft - wie in Abschnitt 7 - durch eine resultierende Reaktanz X_N und einen resultierenden Widerstand R_N berücksichtigt werden. Es ändern sich dann die Ausdrücke für die Kurzschlußströme und Zeitkonstanten wie folgt:

$$I_k'' = \frac{U''}{X_d'' + X_N}; \quad I_k' = \frac{U'}{X_d' + X_N}; \quad I_k = \frac{U_p}{X_d + X_N}; \quad I_g = \frac{U_0}{X_d'' + X_N}$$

$$T_d' = \frac{X_d' + X_N}{X_d + X_N} T_{d0}'; \quad T_d'' = \frac{X_d'' + X_N}{X_d' + X_N} T_{d0}''; \quad T_g = \frac{X_d'' + X_N}{\omega_0 (R_a + R_N)}$$

Aufgrund der äußerst kleinen R zu X Verhältnisse beim Generator und Blocktransformator kann der Einfluß von R_N auf die Kurzschlußströme und Wechselstromzeitkonstanten vernachlässigt werden. Das gilt aber nicht für die Gleichstromzeitkonstante, die ja sonst unendlich groß werden würde. Gl. (8.2) bleibt mit den so modifizierten Größen zwar weiterhin gültig, es ändert sich aber der prinzipielle Verlauf des Kurzschlußstroms. Mit wachsendem X_N verschwindet der Unterschied zwischen I_k'' , I_k' und I_k immer mehr, die Wechselstromzeitkonstanten werden größer und die Gleichstromzeitkonstante kleiner. Die Gleichstromzeitkonstante wird kleiner, weil mit wachsender Kurzschlußentfernung vom Generator das Verhältnis R_N zu X_N größer

wird, denn der Generator hat von allen Betriebsmitteln das kleinste R - zu - X - Verhältnis. Eine typische Größenordnung der Gleichstromzeitkonstante für Kurzschlüsse im Netz ist 50...100 ms. Bei sehr großen Kurzschlußentfernungen vom Generator (fern bezieht sich hier auf die Größenordnung von X_N und kann schon hinter dem Blocktransformator sein) ist das Abklingen der Wechselanteile nicht mehr deutlich ausgeprägt. Man spricht von einem *generatorfernen* (im Gegensatz zum *generatornahen*) Kurzschluß, wenn das Verhältnis $I_k'' / I_{rG} \leq 2$ wird und setzt dann $I_k = I_k' = I_k''$. Das Bild 8.5 zeigt den maximal verlagerten Stromverlauf für einen generatorfernen Kurzschluß.

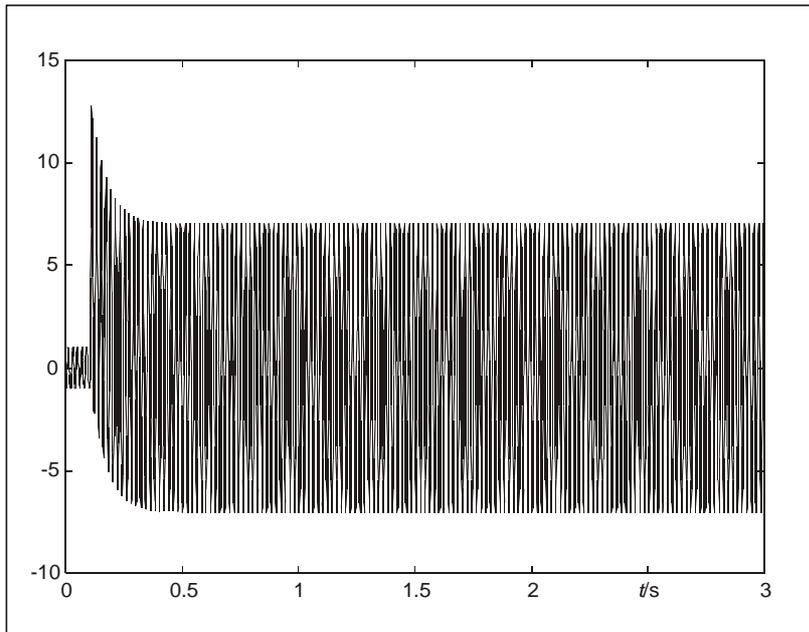


Bild 8.5: Stromverlauf bei generatorfernem Kurzschluß

Wir wollen nun noch einmal auf das Verhältnis von maximalem Gleichanteil zum Anfangs-Kurzschlußwechselstrom zurückkommen. Dazu betrachten wir die Ersatzschaltungen in Bild 8.6 und das Zeigerbild in Bild 8.7, das wir ausnahmsweise mit Amplitudenzeigern zeichnen, um den Bezug zu den Momentanwerten herzustellen.

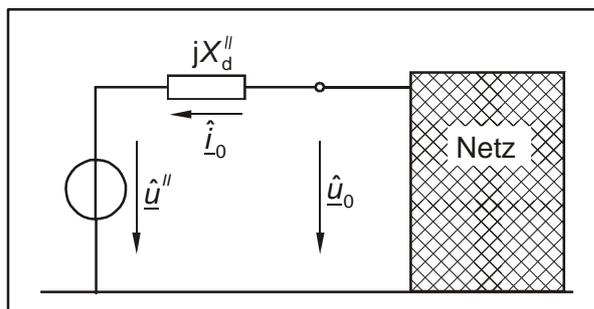


Bild 8.6a: Ersatzschaltung zur Berechnung von I_k'' :
a) stationärer Zustand vor Kurzschlußeintritt

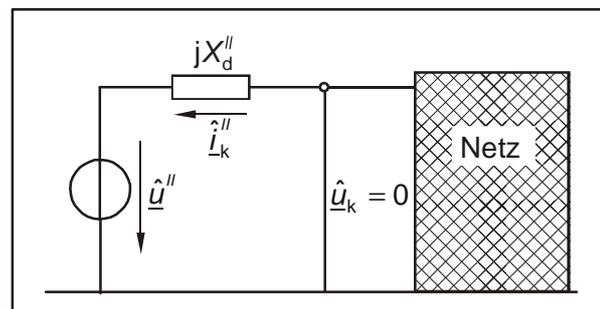


Bild 8.6b: Ersatzschaltung zur Berechnung von I_k'' :
b) Zustand unmittelbar nach Kurzschlußeintritt

Die Spannung \hat{u}_0 und der Strom \hat{i}_0 bestimmen die subtransiente Spannung vor dem Kurzschluß (R_a vernachlässigt):

$$\underline{\hat{u}}'' = \underline{\hat{u}}_0 - jX_d'' \underline{\hat{i}}_0 \quad (8.3)$$

Für den Amplitudenzeiger des Anfangs-Kurzschlußwechselstromes ergibt sich:

$$\underline{\hat{i}}_k'' = -\frac{\underline{\hat{u}}''}{jX_d''} = j\frac{\underline{\hat{u}}''}{X_d''} \quad (8.4)$$

Er eilt der subtransienten Spannung - wie in Bild 8.7 zu sehen - um $\pi/2$ voraus. Der Effektivwert des Anfangs-Kurzschlußwechselstromes ergibt sich aus Gl. (8.4) zu:

$$I_k'' = \frac{U''}{X_d''} \quad (8.5)$$

und als bezogene Größe bei vorangegangenem Bemessungsbetrieb:

$$\frac{I_k''}{I_{rG}} = \frac{U''}{U_{rG}/\sqrt{3}} \cdot \frac{U_{rG}/\sqrt{3}}{X_d'' I_{rG}} = \frac{u''}{x_d''} \approx \frac{1,1}{x_d''}$$

Aus dieser Beziehung kann man mit den Richtwerten von x_d'' aus Tabelle 6.1 leicht den Anfangs-Kurzschlußwechselstrom in Bezug auf den Bemessungsstrom abschätzen. So erreicht beispielsweise bei $x_d'' = 0,2$ der Anfangs-Kurzschlußwechselstrom den 5,5-fachen Wert des Bemessungsstromes.

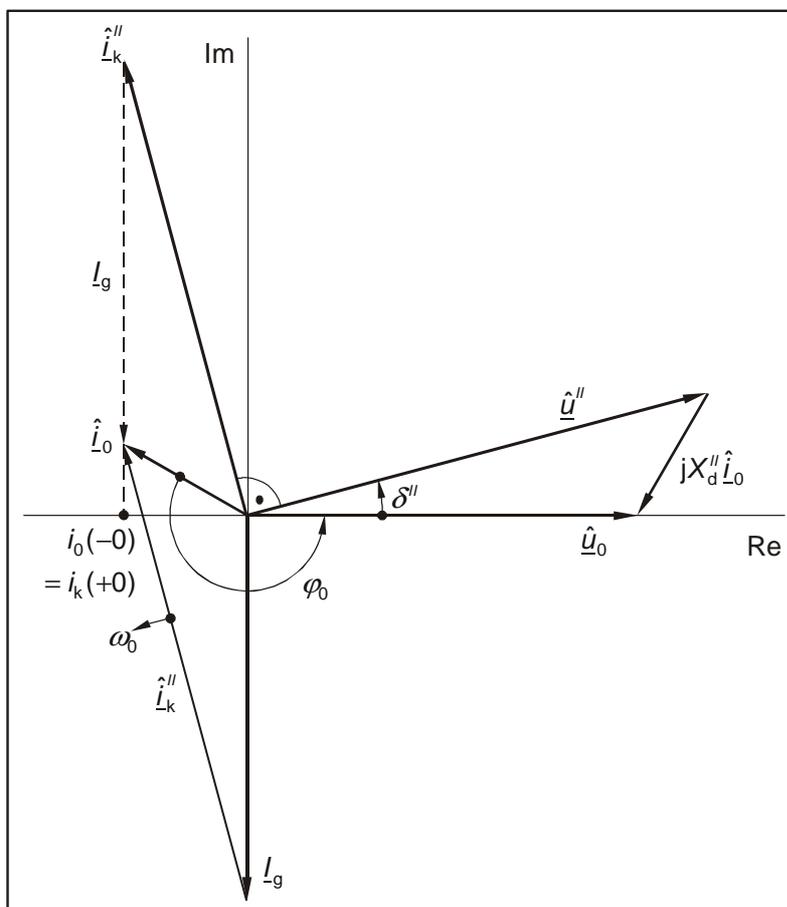


Bild 8.7: Zeigerbild zur Bestimmung von I_k'' und I_g

Um den möglichen Maximalwert des Gleichgliedes I_g zu berechnen, setzen wir Gl. (8.3) in Gl. (8.4) ein und erhalten:

$$\hat{i}_k'' = j \frac{\hat{u}_0 - jX_d'' \hat{i}_0}{X_d''} = j \frac{\hat{u}_0}{X_d''} + \hat{i}_0 \quad (8.6)$$

oder:

$$\hat{i}_0 = \hat{i}_k'' - j \frac{\hat{u}_0}{X_d''} = \hat{i}_k'' + I_g \quad (8.7)$$

Der in Gl. (8.7) eingeführte Zeiger:

$$I_g = -j \frac{\hat{u}_0}{X_d''} \quad (8.8)$$

beschreibt mit seinem Realteil das Gleichglied. Er eilt der Spannung \hat{u}_0 um $\pi/2$ nach und sorgt dafür, daß sich der Momentanwert des Stromes im Moment des Kurzschlußeintritts nicht ändert, denn es muß gelten:

$$i_0(-0) = \text{Re}\{\hat{i}_0\} = i_k(+0) = \text{Re}\{\hat{i}_k''\} + \text{Re}\{I_g\}$$

In Bild 8.7 liegt \hat{u}_0 in der reellen Achse. Das entspricht dem Fall: Kurzschlußeintritt im Spannungsmaximum ($\varphi_{u0} = 0$). Der Zeiger für das Gleichstromglied liegt dann in der imaginären Achse. Seine Projektion auf die reelle Achse (Zeitachse) ist Null, d.h. es tritt in diesem Fall kein Gleichglied auf. Dreht man die Zeiger in Bild 8.7 so, daß \hat{u}_0 in die imaginäre Achse kommt ($\varphi_{u0} = \pi/2$), so hat man den Fall: Kurzschlußeintritt im Spannungsnulldurchgang mit maximalem Gleichglied.

Wir können aus Bild 8.7 den Kurzschlußstromverlauf ohne Berücksichtigung des Abklingens von Gleich- und Wechselanteil ablesen, wenn wir den Zeiger \hat{i}_k'' an die Spitze des Zeigers für den Gleichanteil setzen und im Linkssinn rotieren lassen.

Aus den Gln. (8.5) und (8.8) folgt für das Verhältnis der Stromanteile:

$$\frac{I_g}{\sqrt{2}I_k''} = \frac{U_0}{U''} \approx \frac{U_0}{U_0 - X_d'' I_0 \sin \varphi_0} = \frac{1}{1 - \frac{X_d'' I_0}{U_0} \sin \varphi_0} \quad (8.9)$$

Also ist für Kurzschluß aus dem Leerlauf ($I_0 = 0$) $I_g = \sqrt{2} I_k''$, d.h. die Amplitude des Wechselanteils und der maximale Gleichanteil sind gleich groß.

Bei induktiver Vorbelastung (Blindleistungsabgabe), wie in Bild 8.7, wird $I_g < \sqrt{2} I_k''$ (beachte: $\sin \varphi_0 < 0$!) und entsprechend für kapazitive Vorbelastung $I_g > \sqrt{2} I_k''$.

Der absolut größte Stoßstrom (Index i für ideell), der sich ohne Berücksichtigung der Abklingvorgänge ergeben würde, wäre:

$$i_{pi} = \sqrt{2} I_k'' + I_g = \left(1 + \frac{I_g}{\sqrt{2} I_k''}\right) \sqrt{2} I_k'' = \kappa_i \sqrt{2} I_k''$$

Mit κ_i ist hierbei der ideale (weil unter Vernachlässigung des Abklingens) Stoßfaktor bezeichnet. Wir sehen, daß κ_i für Kurzschluß aus dem Leerlauf genau 2 wird, für Kurzschluß mit induktiver Vorbelastung stets kleiner 2 ist und für Kurzschluß mit kapazitiver Vorbelastung sogar größer als 2 sein kann.

Zur Bestimmung des tatsächlichen Stoßfaktors in Gl. (8.1) berücksichtigt man praktisch nur das Abklingen des Gleichanteils innerhalb der Zeit t_p bis zum Erreichen des Stoßkurzschlußstromes. Aus einer Extremwertbetrachtung der Gl. (8.2) mit nicht abklingendem Wechselanteil findet man für das Auftreten des Stoßstromes die Anfangsbedingung $\varphi_u = \pm \pi/2$, also Kurzschluß im Spannungsnulldurchgang und damit:

$$\omega_0 t_p = \frac{\pi}{2} + \varphi_Z - \delta''$$

so daß für κ schließlich folgt:

$$\kappa = \frac{i_p}{\sqrt{2} I_k''} = 1 + \frac{I_g}{\sqrt{2} I_k''} \sin \varphi_Z e^{-\frac{t_p}{T_g}} \quad (8.10)$$

Der Kehrwert der Gleichstromzeitkonstante in Gl. (8.10) hängt wie folgt vom R-zu-X-Verhältnis ab:

$$\frac{R}{X} = \frac{1}{\omega_0 T_g}$$

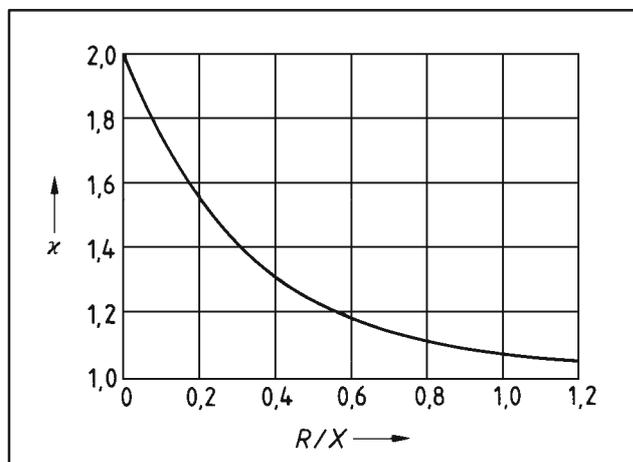


Bild 8.8: Stoßfaktor κ_0 als Funktion von R/X

Für Kurzschluß aus dem Leerlauf wird $\delta'' = 0$ und $I_g = \sqrt{2} I_k''$. Die Gl. (8.10) vereinfacht sich zu:

$$\kappa_0 = 1 + \sin \varphi_Z e^{-\frac{t_{p0}}{T_g}} \quad (8.11)$$

In Bild 8.8 ist der Verlauf von κ_0 als Funktion vom R-zu-X-Verhältnis der Kurzschlußstrombahn dargestellt. Diese Kurve wird allgemein für die Kurzschlußberechnung verwendet, weshalb der Index 0 weggelassen wurde.

8.2 Lastabwurf

Unter Lastabwurf verstehen wir die plötzliche 3-polige Abschaltung des Generators vom Netz. Man unterscheidet zwischen (totalem) Lastabwurf und Lastabwurf auf Eigenbedarf. Der Fall: Abschalten des 3-poligen Kurzschlusses kann als Sonderfall der Abschaltung einer induktiven Belastung (die Kurzschlußstrombahn hat einen Impedanzwinkel $\varphi_z \approx \pi/2$) angesehen werden. Erfolgt der Lastabwurf nicht am Generator oder Blocktransformator, sondern durch Öffnen eines Schalters am Ende einer Übertragungsleitung, so kann ab einer bestimmten Leitungslänge eine Reihenresonanz bei 50 Hz zwischen der Generatorhauptinduktivität und den Leitungskapazitäten entstehen, die zur *Selbsterregung* des Generators mit hohen Spannungen und Strömen führt.

Der Spannungsverlauf bei Lastabwurf kann mit Hilfe der Ersatzschaltung mit der subtransienten Spannung aus Abschnitt 5.4 erklärt werden.

Der Belastungszustand vor dem Lastabwurf bestimmt die Lage und den Betrag der subtransienten Spannung \hat{u}'' (Bild 8.9a). Im Moment des Lastabwurfes (Bild 8.9b und 8.10) springt der Zeiger \hat{i} auf Null und der der Klemmenspannung auf den Zeiger \hat{u}'' , der sich weder im Betrag noch in der Lage, die mit dem Polrad fest verknüpft ist, plötzlich ändern kann.

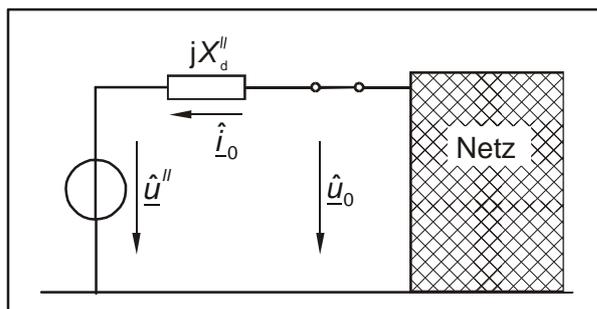


Bild 8.9a: Stationärer Zustand vor Lastabwurf

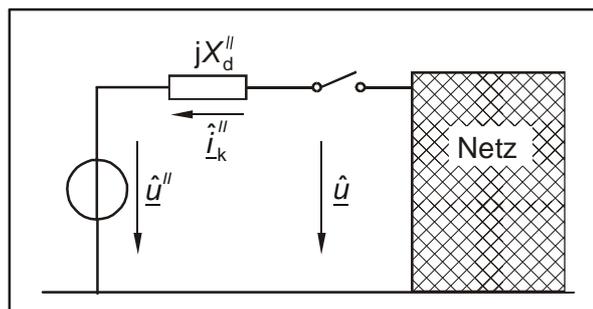


Bild 8.9b: Zustand unmittelbar nach Lastabwurf

Im zeitlichen Verlauf der Spannung (Bild 8.11) tritt deshalb bei $t=0$ ein Spannungssprung, der sog. *subtransiente Spannungssprung*, auf. Dieser berechnet sich unter Beachtung des Vorzeichens des Blindstromes näherungsweise aus:

$$\Delta \hat{u} = \hat{u}'' - \hat{u}_0 = (\hat{u}_0 - X_d'' \hat{i}_{b0}) - \hat{u}_0 = -X_d'' \hat{i}_{b0}$$

Mit der folgenden Beziehung läßt sich der subtransiente Spannungssprung in Bezug auf die Bemessungsspannung abschätzen:

$$\frac{\Delta \hat{u}}{\sqrt{2} U_{rG} / \sqrt{3}} = x_d'' \frac{|\hat{i}_{b0}|}{\sqrt{2} I_{rG}}$$

und für Lastabwurf aus dem Bemessungsbetrieb:

$$\frac{\Delta \hat{u}}{\sqrt{2} U_{rG} / \sqrt{3}} = x_d'' |\sin \varphi_{rG}|$$

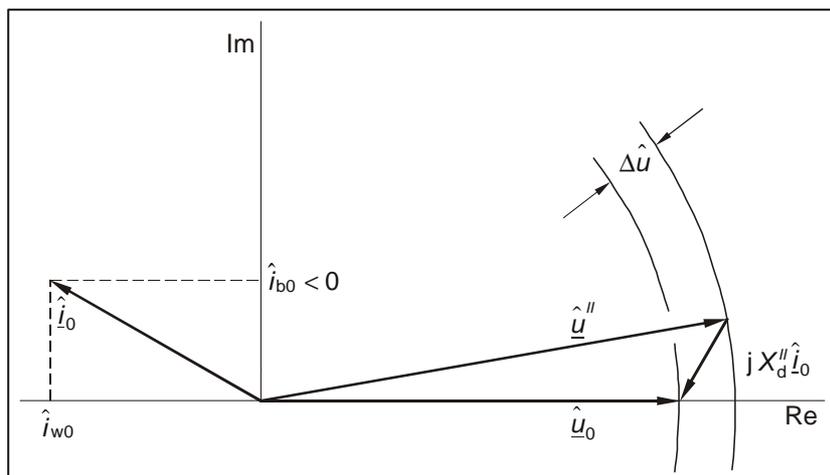


Bild 8.10: Zeigerbild für Lastabwurf

Der subtransiente Spannungssprung kann nicht - auch nicht durch einen noch so schnellen Regler - verhindert werden. Seine Größe beeinflusst aber die zeitweilige Spannungsüberhöhung unter dem Einfluß der Regelung, da er je nach Belastungszustand vor dem Lastabwurf eine mehr oder weniger günstige Ausgangssituation für die Ausregelung der Spannungsüberhöhung schafft. Ungünstige Bedingungen liegen bei hohem Blindlastanteil vor dem Lastabwurf vor. Ohne Einfluß einer Spannungsregelung würde sich, ausgehend vom subtransienten Spannungssprung, die Klemmenspannung, verzögert nach Maßgabe der Leerlaufzeitkonstanten T'_{d0} und T''_{d0} , auf den Wert der durch die Vorbelastung bestimmten Polradspannung ändern. Da eine solche Spannungsüberhöhung - hinzu kommt eine weitere Spannungssteigerung durch die Drehzahlerhöhung der Maschine nach dem Lastabwurf - nicht zulässig ist, müssen die Generatoren stets mit einem schnellen Regler oder einer Entregungseinrichtung ausgerüstet sein. Moderne Erregersysteme mit gesteuerten Gleichrichtern arbeiten dazu mit Spannungs- oder sogar Stromumkehr im Erregerkreis. Die Verhältnisse bei der Abschaltung eines 3-poligen Kurzschlusses zeigt Bild 8.12. Folgt nun dem Kurzschluß unmittelbar der Lastabwurf, so springt die Generatorspannung wieder auf \hat{u}'' , wobei zwar ein wesentlich größerer subtransienter Spannungssprung, aber keine höhere Spannungsüberhöhung auftritt.

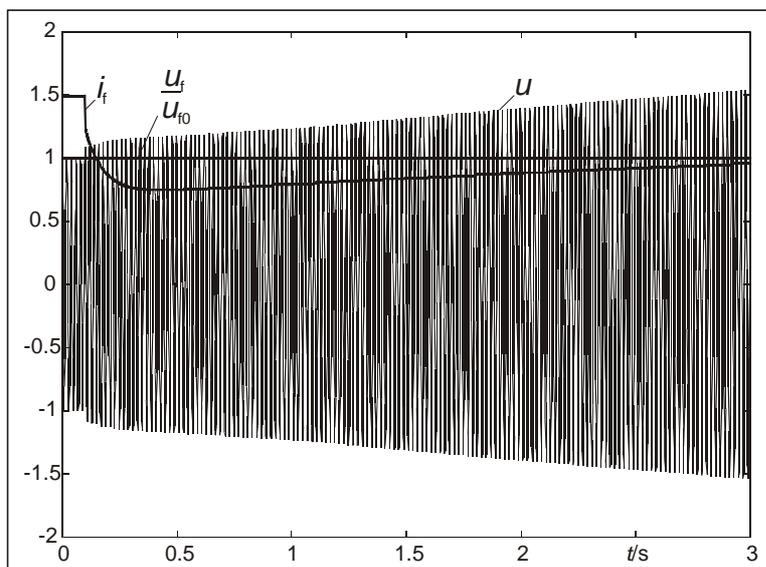
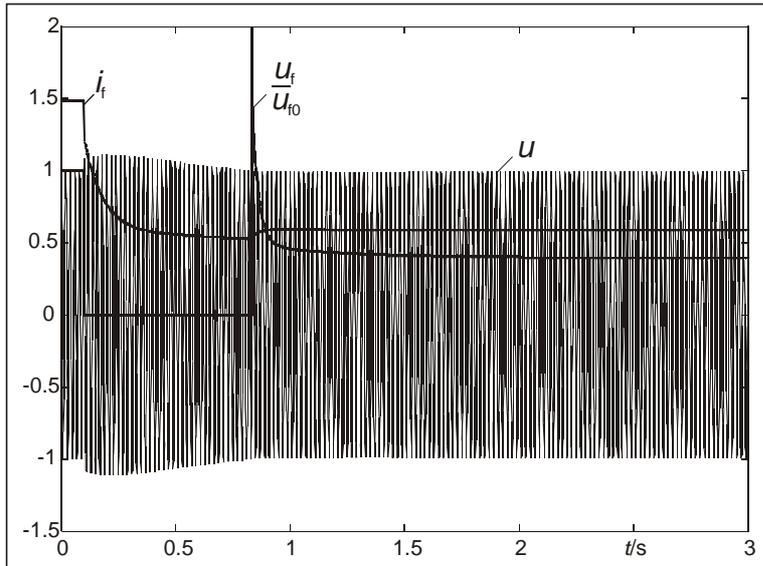


Bild 8.11: Spannungsverläufe (auf Bemessungsgrößen bezogene Werte) bei Lastabwurf
a) ohne Spannungsregelung



b) mit unverzögertem Spannungsregler ($u_{f \max} / u_{f0} = 2$)

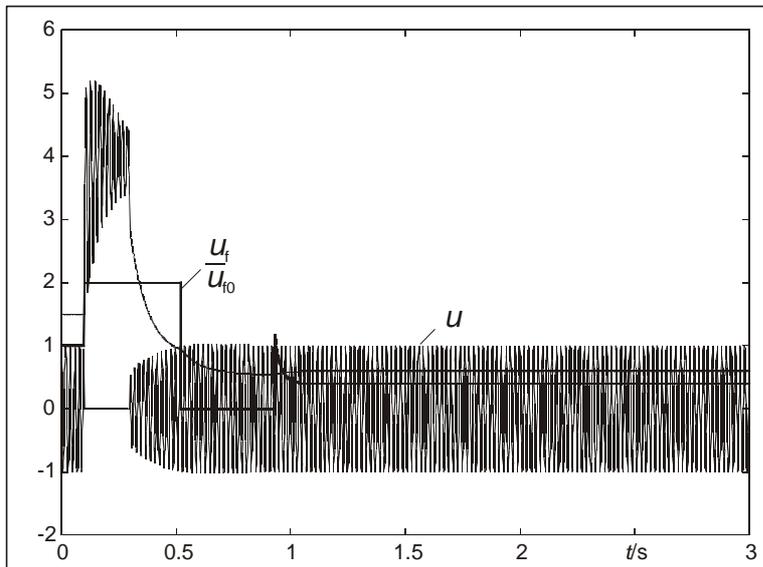


Bild 8.12: Erregerstrom- und Spannungsverläufe (auf Bemessungsgrößen bezogene Werte) für Lastabwurf nach 3-poligem Kurzschluß

9 Anhang

9.1 Elemente der Matrix in Gl. (5.30)

$$\underline{A} = \frac{L'_{DD}}{\text{Det}} \left(1 + \frac{R'_D}{j2\omega_0 L'_{DD}}\right) = \frac{L'_{DD}}{\text{Det}} (1 + \underline{\varepsilon}_D)$$

$$\underline{B} = -\frac{L_{hd}}{\text{Det}}$$

$$\underline{C} = \frac{L'_{ff}}{\text{Det}} \left(1 + \frac{R'_f}{j2\omega_0 L'_{ff}}\right) = \frac{L'_{ff}}{\text{Det}} (1 + \underline{\varepsilon}_f)$$

$$\text{Det} = L'_{DD} \left(1 + \frac{R'_D}{j2\omega_0 L'_{DD}}\right) L'_{ff} \left(1 + \frac{R'_f}{j2\omega_0 L'_{ff}}\right) - L_{hd}^2 \approx L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2 + L'_{ff} L'_{DD} (\underline{\varepsilon}_f + \underline{\varepsilon}_D)$$

$$\underline{D} = \frac{1}{L'_{QQ} \left(1 + \frac{R'_Q}{j2\omega_0 L'_{QQ}}\right)} = \frac{1}{L'_{QQ} (1 + \underline{\varepsilon}_Q)} \approx \frac{1 - \underline{\varepsilon}_Q}{L'_{QQ}} = \frac{k_Q}{L_{hq}} - \frac{k_Q^2 R'_Q}{j2\omega_0 L_{hq}^2}$$

$$\underline{A} + 2\underline{B} + \underline{C} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{L'_{DD} (1 + \underline{\varepsilon}_D) - 2L_{hd} + L'_{ff} (1 + \underline{\varepsilon}_f)}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2 + L'_{ff} L'_{DD} (\underline{\varepsilon}_f + \underline{\varepsilon}_D)} = \frac{L'_{ff} + L'_{DD} - 2L_{hd}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2} \cdot \frac{1 + \frac{\underline{\varepsilon}_f L'_{ff} + \underline{\varepsilon}_D L'_{DD}}{L'_{ff} + L'_{DD} - 2L_{hd}}}{1 + \frac{(\underline{\varepsilon}_f + \underline{\varepsilon}_D) L'_{ff} L'_{DD}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2}} \approx \\ &\approx \frac{L'_{ff} + L'_{DD} - 2L_{hd}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2} \left(1 + \frac{\underline{\varepsilon}_f L'_{ff} + \underline{\varepsilon}_D L'_{DD}}{L'_{ff} + L'_{DD} - 2L_{hd}}\right) \left(1 - \frac{(\underline{\varepsilon}_f + \underline{\varepsilon}_D) L'_{ff} L'_{DD}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2}\right) \approx \\ &\approx \frac{L'_{ff} + L'_{DD} - 2L_{hd}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2} \left(1 + \frac{(\underline{\varepsilon}_f L'_{ff} + \underline{\varepsilon}_D L'_{DD})(L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2) - (L'_{ff} + L'_{DD} - 2L_{hd})(\underline{\varepsilon}_f + \underline{\varepsilon}_D) L'_{ff} L'_{DD}}{(L'_{ff} + L'_{DD} - 2L_{hd})(L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2)}\right) = \\ &= \frac{L'_{ff} + L'_{DD} - 2L_{hd}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2} - \frac{\underline{\varepsilon}_f L'_{ff} (L'_{DD} - L_{hd})^2 + \underline{\varepsilon}_D L'_{DD} (L'_{ff} - L_{hd})^2}{(L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2)^2} = \\ &= \frac{L'_{ff} + L'_{DD} - 2L_{hd}}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2} - \frac{R'_f (L'_{DD} - L_{hd})^2 + R'_D (L'_{ff} - L_{hd})^2}{j2\omega_0 (L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2)^2} = \\ &= \frac{1}{L_{hd}} (k_f + k_D) - \frac{1}{j2\omega_0 L_{hd}^2} (k_f^2 R'_f + k_D^2 R'_D) \end{aligned}$$

$$\underline{K}_d = -L_{hd} (\underline{A} + 2\underline{B} + \underline{C}) = -(k_f + k_D) - j \frac{k_f^2 R'_f + k_D^2 R'_D}{2\omega_0 L_{hd}}$$

$$\underline{K}_q = -L_{hq} \underline{D} = -k_Q - j \frac{k_Q^2 R'_Q}{2\omega_0 L_{hq}}$$

9.2 Koppelfaktoren und subtransiente Induktivitäten

$$k_f = L_{hd} (D_{ff} + D_{fd}) = \frac{L_{hd} (L'_{DD} - L_{hd})}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2} = \frac{L_{hd} L'_{\sigma D}}{L_{hd} (L'_{\sigma f} + L'_{\sigma D}) + L'_{\sigma f} L'_{\sigma D}}$$

$$k_D = L_{hd} (D_{DD} + D_{Df}) = \frac{L_{hd} (L'_{ff} - L_{hd})}{L'_{ff} L'_{DD} - L_{hd}^2} = \frac{L_{hd} L'_{\sigma f}}{L_{hd} (L'_{\sigma f} + L'_{\sigma D}) + L'_{\sigma f} L'_{\sigma D}}$$

$$k_f + k_D = \frac{L_{hd} (L'_{\sigma f} + L'_{\sigma D})}{L_{hd} (L'_{\sigma f} + L'_{\sigma D}) + L'_{\sigma f} L'_{\sigma D}} = \frac{L_{hd}}{L_{hd} + \frac{L'_{\sigma f} L'_{\sigma D}}{L'_{\sigma f} + L'_{\sigma D}}}$$

$$k_Q = L_{hq} D_{QQ} = \frac{L_{hq}}{L'_{QQ}} = \frac{L_{hq}}{L_{hq} + L'_{\sigma Q}}$$

$$L''_d = L_d - (k_D + k_f) L_{hd} = L_{hd} + L_\sigma - \frac{L_{hd}^2}{L_{hd} + \frac{L'_{\sigma f} L'_{\sigma D}}{L'_{\sigma f} + L'_{\sigma D}}} = L_\sigma + \frac{L_{hd} L'_{\sigma f} L'_{\sigma D}}{L_{hd} L'_{\sigma f} + L_{hd} L'_{\sigma D} + L'_{\sigma f} L'_{\sigma D}}$$

$$L''_q = L_q - k_Q L_{hq} = L_{hq} + L_\sigma - \frac{L_{hq}^2}{L_{hq} + L'_{\sigma Q}} = L_\sigma + \frac{L_{hq} L'_{\sigma Q}}{L_{hq} + L'_{\sigma Q}}$$

9.3 Herleitung des Stromverlaufes für generatorfernen Kurzschluß

Homogene Lösung

$$L \dot{i}_{kh} + R i_{kh} = 0$$

Ansatz: $i_{kh} = k e^{\lambda t}$

$$(\lambda L + R) i_{kh} = 0 \quad \text{damit:} \quad \lambda = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{T_g}$$

Partikuläre Lösung (komplex)

$$L \dot{\hat{i}}_{kp} + R \hat{i}_{kp} = -\hat{u}'' \quad \text{mit:} \quad \hat{i}_{kp} = \hat{i}_{kp} e^{j(\omega_0 t + \varphi_{kp})}$$

$$(R + j\omega_0 L) \hat{i}_{kp} = -\hat{u}''$$

$$\hat{i}_{\text{kp}} = -\frac{\hat{u}''}{R + j\omega_0 L} = -\frac{\hat{u}''}{Z}$$

$$i_{\text{kp}} = \text{Re}\{\hat{i}_{\text{kp}}\} = -\text{Re}\left\{\frac{\hat{u}''}{Z} e^{j(\omega_0 t + \varphi_{u''} - \varphi_Z)}\right\} = -\frac{\hat{u}''}{Z} \cos(\omega_0 t + \varphi_{u''} - \varphi_Z)$$

Überlagerung homogene und partikuläre Lösung

$$i_k = k e^{-\frac{t}{T_g}} - \frac{\hat{u}''}{Z} \cos(\omega_0 t + \varphi_{u''} - \varphi_Z)$$

Anfangsbedingung bei $t = 0$:

$$i_k(0) = i(0) = \text{Re}\left\{\frac{\hat{u}(0) - \hat{u}''(0)}{Z}\right\} = \frac{\hat{u}}{Z} \cos(\varphi_u - \varphi_Z) - \frac{\hat{u}''}{Z} \cos(\varphi_{u''} - \varphi_Z) = k - \frac{\hat{u}''}{Z} \cos(\varphi_{u''} - \varphi_Z)$$

damit:

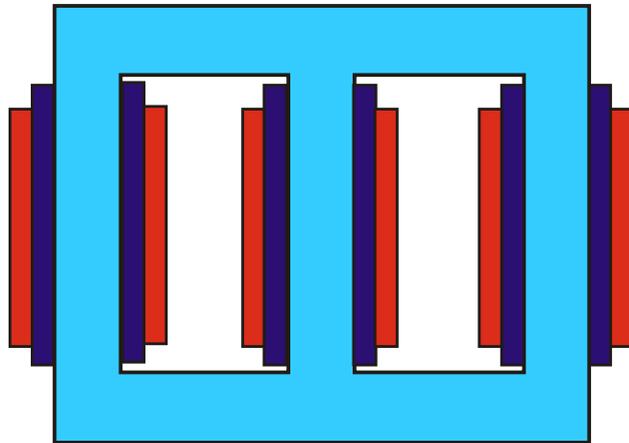
$$k = \frac{\hat{u}}{Z} \cos(\varphi_u - \varphi_Z)$$

und:

$$i_k = \frac{\hat{u}}{Z} \cos(\varphi_u - \varphi_Z) e^{-\frac{t}{T_g}} - \frac{\hat{u}''}{Z} \cos(\omega_0 t + \varphi_{u''} - \varphi_Z)$$



Universität Hannover
Institut für Energieversorgung und
Hochspannungstechnik



Vorlesung Elektrische Energieversorgung I

Skript Transformatoren

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

Inhaltsverzeichnis

1	Bauarten und Einsatz im Netz	1
2	Gleichungen und Ersatzschaltbild des Einphasentransformators	6
2.1	Einphasen-Zweiwicklungstransformatoren.....	6
2.1.1	T-Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators.....	9
2.1.2	II-Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators.....	12
2.1.3	Ermittlung der II-Ersatzschaltung nach dem Knotenpunktverfahren*...	13
2.1.4	Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators ohne Übertrager*	14
3	Schaltgruppen der Drehstromtransformatoren	16
3.1	Sternschaltung der Wicklungen.....	19
3.2	Dreieckschaltung der Wicklungen	20
3.3	Zickzackschaltung der Wicklungen*	22
4	Ersatzschaltungen des Drehstromtransformators in Symmetrischen Koordinaten	25
4.1	Gleichungen und Ersatzschaltungen für die Wicklungsgrößen	25
4.1.1	Zweiwicklungstransformatoren	25
4.1.2	Dreiwicklungstransformatoren	27
4.2	Ersatzschaltungen der Schaltgruppe Yy0	28
4.3	Ersatzschaltungen der Schaltgruppe Yd5	31
4.4	Ersatzschaltungen der Schaltgruppe Yy0 mit Ausgleichswicklung.....	34
4.5	Ersatzschaltungen der Schaltgruppe Yz5*	36
4.6	Einsatz der Schaltgruppen	40
4.7	Zusammenfassung - Allgemeine Ersatzschaltbilder der Zweiwicklungstransformatoren	41
5	Spartransformatoren	44
6	Regeltransformatoren	46
7	Transformatorparameter	50
7.1	Mit- und Gegensystemparameter der Zweiwicklungstransformatoren.....	50
7.2	Mit- und Gegensystemparameter der Dreiwicklungstransformatoren.....	54
7.3	Nullsystemparameter	55
8	Betriebsverhalten	57
8.1	Leerlauf	57
8.1.1	Leerlauf des Einphasentransformators.....	57
8.1.2	Leerlauf des Dreiphasentransformators	57
8.2	Kurzschluß	58
8.3	Spannungsabfall, Belastungskennlinien	59
8.4	Verluste, Wirkungsgrad, Blindleistungsbedarf	62
8.5	Parallelbetrieb	66

Hinweis: Das Skript ersetzt nicht die Vorlesung und umgekehrt. Im Skript sind einige Ausführungen, insbesondere mathematische Ableitungen ausführlicher dargestellt, während in der Vorlesung mehr Wert auf das Verständnis gelegt wird. Die mit einem * gekennzeichneten Kapitel sind zur Vertiefung gedacht.

1 Bauarten und Einsatz im Netz

Erst mit der Erfindung des Transformators war es möglich geworden, Elektroenergie über weite Entfernungen zu übertragen. 1885 erhielten die ungarischen Ingenieure Zipernowsky, Déri und Bláthy ein Patent auf ein Stromverteilungssystem mit einem Ringkerntransformator, der den Urtyp unserer heutigen Transformatoren darstellt. Er befindet sich in den Sammlungen des Deutschen Museums in München. Im gleichen Jahr nimmt die Firma Ganz in Budapest die Produktion von Transformatoren auf. Bereits bei der ersten Drehstromübertragung von Lauffen nach Frankfurt im Jahr 1891 wird ein 100-kVA-Drehstromtransformator mit einem Dreischenkelnkern mit der heute üblichen Anordnung der drei Schenkel in einer Ebene eingesetzt.

Mit der Erfindung des Öltransformators 1912 beginnt die Ära der Transformatoren großer und größter Leistung. Das Öl dient gleichzeitig als Isolier- und Kühlmittel. Um die Auswirkung der Brände von Öltransformatoren einzudämmen, hatte man zwischenzeitlich dem Transformatorenöl polychlorierte Biphenyle zugesetzt (sog. PCB-Transformatoren), bis man auf die Gefahr der Freisetzung von Schadstoffen bei Bränden von PCB-Transformatoren aufmerksam wurde.

Seit 1965 werden Gießharztransformatoren (Trockentransformatoren), bei denen die aus Aluminium bestehenden Wicklungen unter Vakuum in den Isolierstoff Gießharz eingegossen werden, gefertigt. Die Leistungsgrenze von Gießharztransformatoren scheint bei 15 MVA erreicht zu sein, während Öltransformatoren für den Bahntransport bis 1600 MVA und für den Schifffahrttransport bei 2000 MVA gebaut werden können. Die Einteilung der Transformatoren in der Elektroenergieversorgung erfolgt nach der Bauart und dem Einsatz im Netzbetrieb. Wir unterscheiden nach der Bauart zunächst zwischen *Einphasen-* und *Dreiphasen-* oder *Drehstromtransformatoren*. Einphasentransformatoren kommen bei der Bahnstromversorgung und als Sondertransformatoren für die Industrie z. B. als Gleichrichtertransformatoren, Ofentransformatoren oder Anlaßtransformatoren zur Anwendung. Die konventionellen Strom- und Spannungswandler sind ebenfalls Einphasentransformatoren in Sonderausführung für den Kurzschluß- und Leerlaufbetrieb.

Dreiphasentransformatoren können entweder aus drei Einphasentransformatoren zusammengeschaltet werden (sog. *Drehstrombänke*) oder als eine Einheit mit speziell konstruierten Kernen aufgebaut sein. Die Drehstrombank hat den Vorteil, daß zur Reservehaltung nur ein Einphasentransformator (ein Pol) bereitgehalten werden muß und bei größten Einheiten keine Transportprobleme auftreten. Nach der Anzahl der Drehstromsysteme, die durch den Transformator gekoppelt werden, sprechen wir von *Zweiwicklungs-* und *Dreiwicklungstransformatoren*. Sind die Wicklungen galvanisch getrennt, handelt es sich um *Volltransformatoren*. *Spartransformatoren* oder *Autotransformatoren* haben einen Teil der Wicklung, die sog. Parallelwicklung, gemeinsam und deshalb eine geringere Baugröße als ein Volltransformator gleicher Leistung. Nach den Spannungsebenen werden die Wicklungen von Zweiwicklungs- und Dreiwicklungstransformatoren als *Oberspannungs(OS)-* und *Unterspannungs(US)wicklung* und bei Dreiwicklungstransformatoren als *Oberspannungs-, Mittelspannungs-(MS)wicklung* und *Unterspannungswicklung* bezeichnet. Daneben sind auch die Bezeichnungen *Primär-, Sekundär- und Tertiärwicklung* üblich. Die Zuordnung dieser Bezeichnungen zu den Spannungsebenen ist nicht eindeutig. Oft wird die energieaufnehmende Wicklung als Primär- und die energieabgebende Wicklung als Sekundärwicklung bezeichnet. Da diese Festlegung aber bei wechselnder Energieflußrichtung nicht sinnvoll ist, wollen wir vereinbaren, daß Primär- und Oberspannungswicklung und Sekundär- und Unterspannungswicklung i.f. stets identisch sein sollen. Die Tertiärwicklung von Dreiwicklungstransformatoren kann als Ausgleichwicklung eine separate Spannungs-

ebene haben oder als Leistungswicklung der gleichen Spannungsebene wie die Primär- oder Sekundärwicklung angehören.

Die Symbolik der Zwei- und Dreiwicklungs-Drehstromtransformatoren zeigt Bild 1.1.

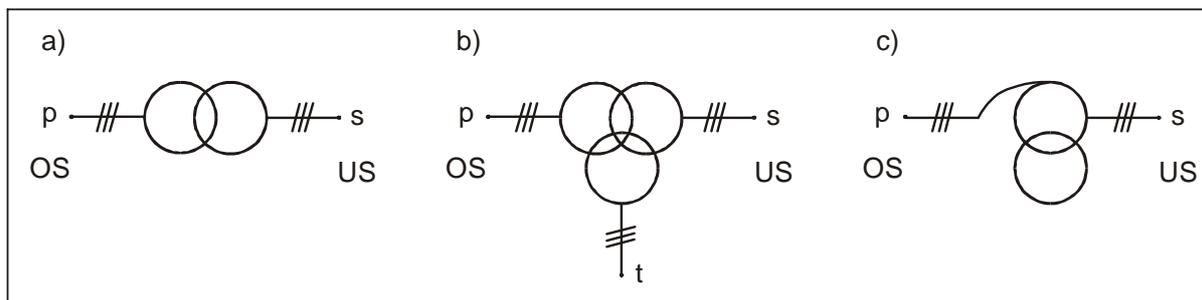


Bild 1.1: Transformatorsymbole

a) Zweiwicklungs-Volltransformator

b) Dreiwicklungs-Volltransformator

c) Zweiwicklungs-Spartransformator mit Ausgleichswicklung

Im Aufbau der Wicklungen unterscheidet man zwischen *Röhren-* oder *Zylinderwicklungen* und *Scheibenwicklungen*. Röhrenwicklungen sind radial um die Schenkelachse des Eisenkerns angeordnet, während Scheibenwicklungen aus axial nebeneinander liegenden Spulen bestehen (Bild 1.2).

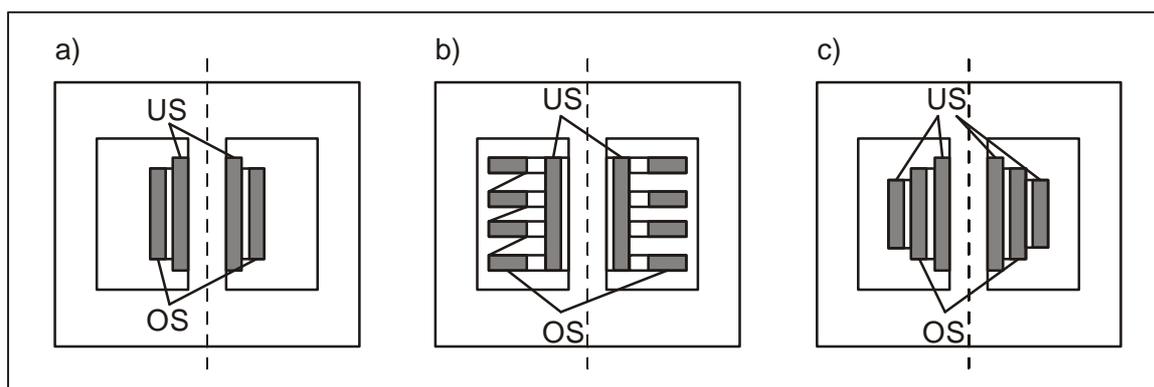


Bild 1.2: Schnitt durch einen Einphasen-Zweiwicklungstransformator

a) mit Röhrenwicklungen

b) mit Röhrenwicklung für die US-Seite und Scheibenwicklung für die OS-Seite

c) doppelkonzentrische Röhrenwicklung

Die Unterspannungswicklung besteht bis 30 kV aus Röhrenwicklungen und wird aus isolationstechnischen Gründen unmittelbar am Schenkel angeordnet. Zur Verringerung der Streuung zwischen den Wicklungen wird die Unterspannungswicklung auch auf einen inneren und äußeren Zylinder verteilt, wodurch die *doppelkonzentrische* Röhrenwicklung nach Bild 1.2 c) entsteht. Der tatsächliche Wicklungsaufbau von Großtransformatoren ist wesentlich komplizierter als die Grundformen in Bild 1.2. Die Wicklungen setzen sich aus verschiedenen zusammenschalteten und geschickt verschachtelten Spulen zusammen, womit man Stromverdrängungseffekten und Resonanzerscheinungen bei Überspannungen begegnet und die erforderliche mechanische Festigkeit bei Kurzschlüssen erreicht.

Die Wicklungen der Drehstromtransformatoren können prinzipiell als *Stern*(λ)-, *Dreieck*(Δ)- oder *Zickzack*(\sim)schaltung zum Drehstromsystem zusammenschaltet werden. Durch Kombination dieser Schaltungsmöglichkeiten entstehen die sog. *Schaltgruppen*. Von den theoretisch möglichen 42 Schaltgruppen haben aber nur 4 die sog. *Vorzugsschaltgruppen* praktische Bedeutung (DIN VDE 0532). Die Auswahl

der Schaltgruppen erfolgt nach wirtschaftlichen und isolationstechnischen Gesichtspunkten im Normalbetrieb und nach dem Verhalten gegenüber Oberschwingungen und Unsymmetriezuständen sowie der Sternpunktbelastbarkeit, worauf wir in Kapitel 6 eingehen werden.

Vom Aufbau des Transformators interessiert uns besonders die *Kernbauart*, weil von ihr - wie wir noch sehen werden - das Verhalten des Transformators bei unsymmetrischer Belastung und bei unsymmetrischen Fehlern abhängt. Einphasentransformatoren werden als *Kern-* oder *Manteltransformator* ausgeführt (Bild 1.3).

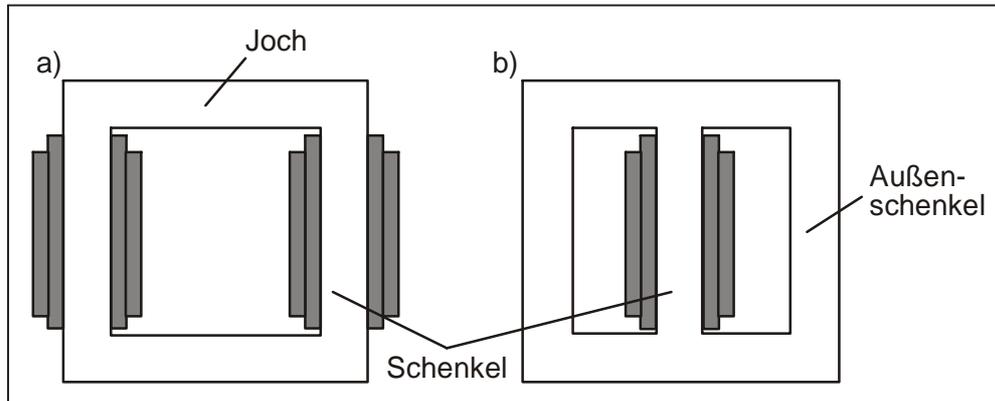


Bild 1.3: Aufbau des Eisenkreises für den Einphasentransformator

- a) Kerntransformator
- b) Manteltransformator

Die OS- und US-Wicklung müssen beim Kerntransformator ineinandergeschachtelt bleiben und werden je zur Hälfte auf die beiden Schenkel verteilt. Eine getrennte Anordnung von OS- und US-Wicklung je auf einen Schenkel hätte eine viel zu große Streuung zur Folge. Der bewickelte Teil des Eisenkreises heißt *Schenkel*, die anderen Teile *Joch* bzw. *Außenschenkel* oder *Rückschluß*. Die wichtigsten Kernbauformen des Drehstromtransformators sind der *Dreischenkelkern* (Bild 1.4 a)) und der *Fünfschenkelkern*.

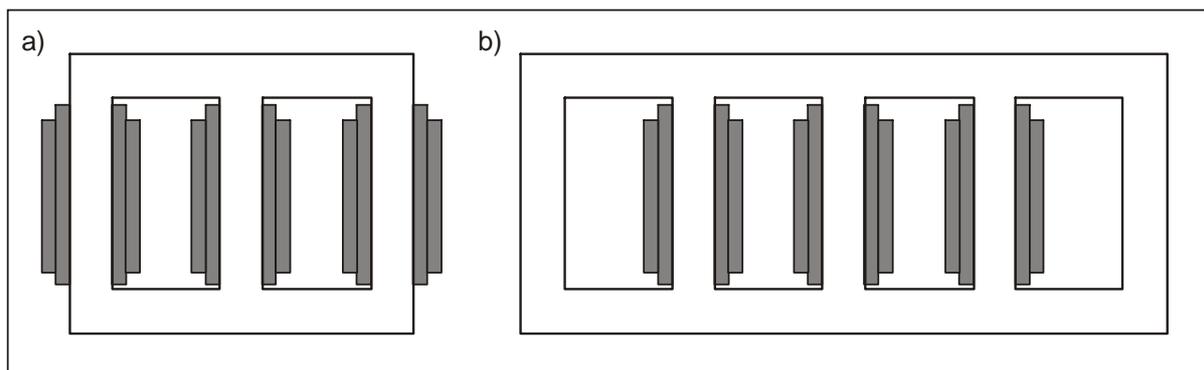


Bild 1.4: Kernbauformen des Drehstromtransformators

- a) Dreischenkelkern
- b) Fünfschenkelkern

Zur Verringerung der Wirbelstromverluste sind die Kerne aus 0,23, 0,3 oder 0,35 mm dicken, gegeneinander isolierten Blechen geschichtet. Um die Ummagnetisierungsverluste klein zu halten, wurden früher hochsilizierte Bleche eingesetzt. Heute werden kaltgewalzte Texturbleche, sog. Hi-B-Bleche, die in Walzrichtung niedrigere magnetische Feldstärken benötigen, eingesetzt, wobei man bei der Schichtung und Verzahnung der Bleche darauf achten muß, daß kein Feldverlauf quer zur Walzrich-

tung entsteht. Die Verzapfung der Joch- mit den Schenkelblechen erfolgt überlappend, wobei man je nach Zuschnitt von 90°, 45° oder 60°/30°-Verzapfungen spricht. Bei diesen Formen der Verzapfungen liegen die Stöße in jeder zweiten Blechlage immer an der gleichen Stelle. Versetzt man die Stöße in den einzelnen Blechlagen noch geringfügig zueinander, so entsteht die komplizierte, aber für die Flußführung bessere *Step-lap*-Schichtung.

Der Dreischenkeltransformator ist durch die Anordnung der Schenkel in einer Ebene magnetisch unsymmetrisch. Der Magnetisierungsstrom der Wicklungen auf dem Mittelschenkel ist kleiner als der der Wicklungen auf den beiden Außenschenkeln mit dem längerem Eisenweg. Auch besitzt der Dreischenkeltransformator keinen freien magnetischen Rückschluß, wie ihn die beiden Außenschenkel beim Fünfschenkeltransformator bilden. Auf diese Besonderheit werden wir bei der Behandlung unsymmetrischer Betriebs- und Fehlerzustände zurückkommen. Durch die beiden Außenschenkel wird das Joch beim Fünfschenkeltransformator magnetisch entlastet, so daß Fünfschenkeltransformatoren bei gleicher Leistung eine geringere Bauhöhe als Dreischenkeltransformatoren aufweisen, was beim Bahntransport größter Einheiten, der durch das Tunnelprofil mit 4,65 m Höhe beschränkt ist, von Bedeutung ist. Vorzugswerte für die *Bemessungsleistungen* von Drehstrom-Transformatoren ergeben sich nach der sog. Reihe R 10 (s. DIN 323 und DIN VDE 0532) durch Multiplikation von Basiswerten der Leistung mit Zehnerpotenzen wie folgt:

$$S_r = (6,3 \ 10 \ 16 \ 25 \ 40 \ 63) \text{ kVA} \times (1 \ 10 \ 100 \ 1000 \ 10000)$$

Die *Bemessungsspannungen* sind den Netzennennspannungen (6, 10, 20, 30, 110, 220, 380 kV) angepaßt, wobei die Aufnahmeseite von Maschinen- oder Blocktransformatoren in Kraftwerken und die Abgabeseite von Ortsnetztransformatoren eine um 5% höhere Bemessungsspannung haben.

Nach dem Einsatz im Netzbetrieb unterscheiden wir *Maschinen- oder Blocktransformatoren* (BT), *Blockeigenbedarfstransformatoren* (BET), *Netzkuppeltransformatoren*, *Verteilungstransformatoren* (VT) und *Ortsnetztransformatoren* (OT), denen jeweils auch typische Schaltgruppen eigen sind.

Das Bild 1.5 zeigt schematisch die Einsatzgebiete dieser Transformatoren. *Blocktransformatoren* heben die Spannung der Kraftwerksgeneratoren auf die Übertragungsspannung an und werden gewöhnlich als Zweiwicklungstransformatoren ausgeführt. Die Leistung ist der der Generatoren angepaßt. Es ist aber insbesondere aus Gründen der Zuverlässigkeit auch üblich, bei größten Kraftwerkseinheiten zwei Blocktransformatoren kleinerer Leistung parallel zu schalten.

Bild 1.5 zeigt auch die Möglichkeit, Kraftwerksleistung über einen Dreiwicklungs-Blocktransformator in zwei Netze (hier das 380-kV- und 220-kV-Netz) einzuspeisen, wodurch eine sichere Leistungsabführung gewährleistet wird. Die *Blockeigenbedarfstransformatoren* versorgen den Kraftwerkseigenbedarf und können als Dreiwicklungstransformatoren oder Zweiwicklungstransformatoren ausgeführt sein. *Netzkuppeltransformatoren* sind gewöhnlich Dreiwicklungstransformatoren, jedoch fungiert hier die dritte in Dreieck geschaltete Wicklung (MS-Wicklung) nur als *Ausgleichswicklung* für unsymmetrische Betriebszustände, worauf wir bei der Behandlung von unsymmetrischen Betriebszuständen eingehen werden. Sie sind als Voll- oder Spartransformatoren ausgeführt, wobei Spartransformatoren nur unter ganz bestimmten Bedingungen, wie sie bei der Kupplung des 380-kV- und 220-kV-Netzes erfüllt sind, in Frage kommen (s. Kapitel 6). Aus der Leistungsangabe 3 x 200 MVA in Bild 1.5 ist ersichtlich, daß es sich um die Zusammenschaltung von 3 Einphasentransformatoren von je 200 MVA zu einer Drehstrombank handelt. *Verteilungstransformatoren* spannen von der HS-Ebene auf die MS-Ebene und *Ortsnetztransformatoren* von der MS-

auf die Niederspannungsebene ab. Wegen der Aufteilung der Leistung auf einphasige Abnehmer müssen diese Transformatoren auf der US-Seite einen zugänglichen Sternpunkt haben. Block- und Netzkuppeltransformatoren sind als sog. *Regeltransformatoren* ausgeführt. Sie sind mit *Zusatzwicklungen* ausgerüstet, die unter Last zu- oder abgeschaltet werden können. Je nach Phasenlage der Zusatzspannung zur Spannung der *Haupt-* oder *Stammwicklung*, die meist die OS-Wicklung ist, kann der Blind- oder/und Wirkleistungsfluß im Netz beeinflusst werden (s. Kapitel 7).

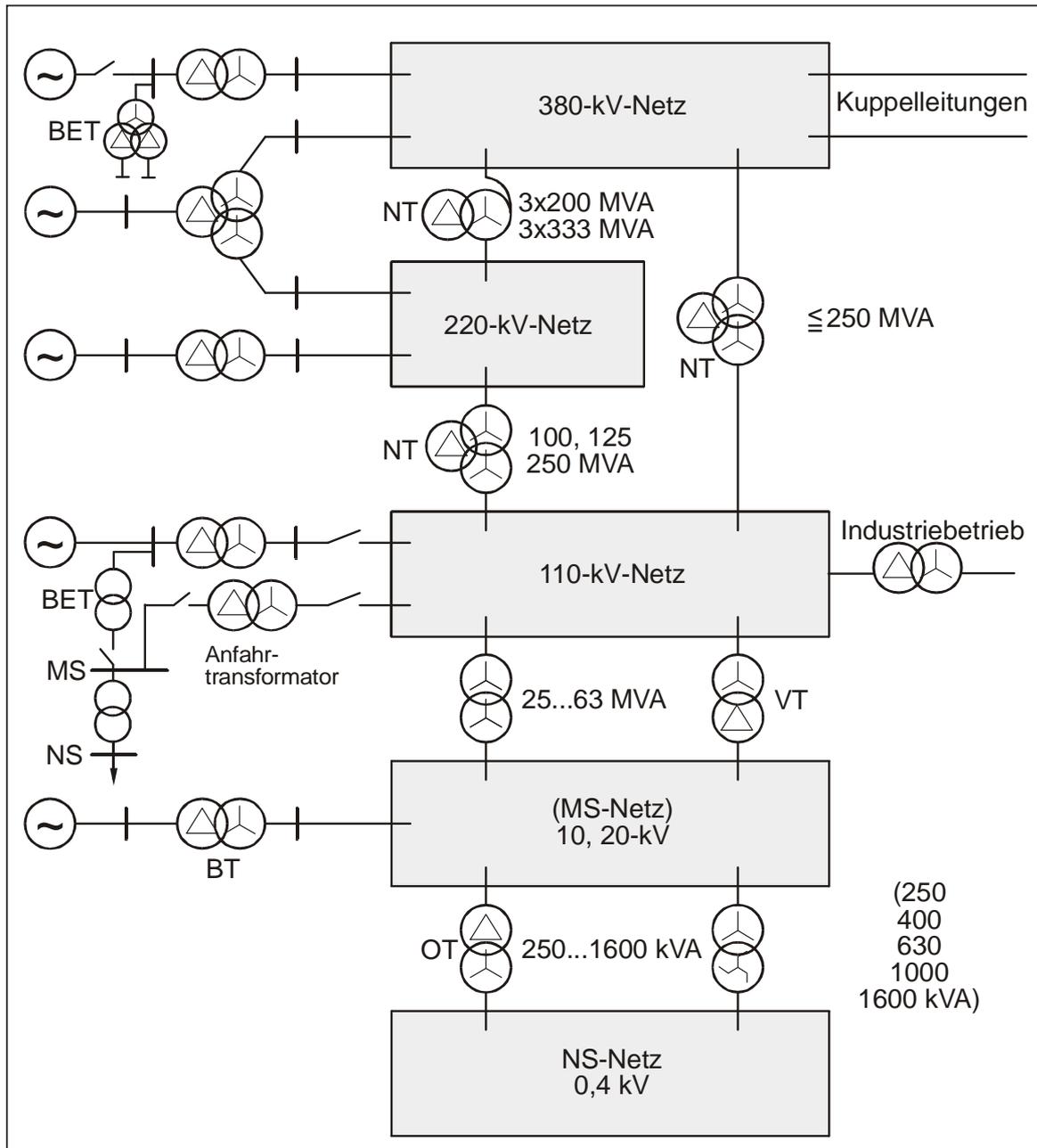


Bild 1.5: Einsatz der Transformatoren in den Netzen der Elektroenergieversorgung

2 Gleichungen und Ersatzschaltbild des Einphasentransformators

Die Gleichungen des Einphasentransformators spielen insofern eine wichtige Rolle als die Dreiphasentransformatoren durch eine Modaltransformation (z.B. in Symmetrischen Koordinaten) in ein System entkoppelter Einphasentransformatoren überführt werden können. Wir unterscheiden zunächst zwischen *Einphasen-Zweiwicklungs*transformatoren und *Einphasen-Dreiwicklungs*transformatoren.

2.1 Einphasen-Zweiwicklungstransformatoren

Das prinzipielle Wicklungsmodell zeigt Bild 2.1. Es werden rechtsgängige Wicklungen vorausgesetzt und die Zählpfeile nach dem *Verbraucherzählpfeilsystem* festgelegt.

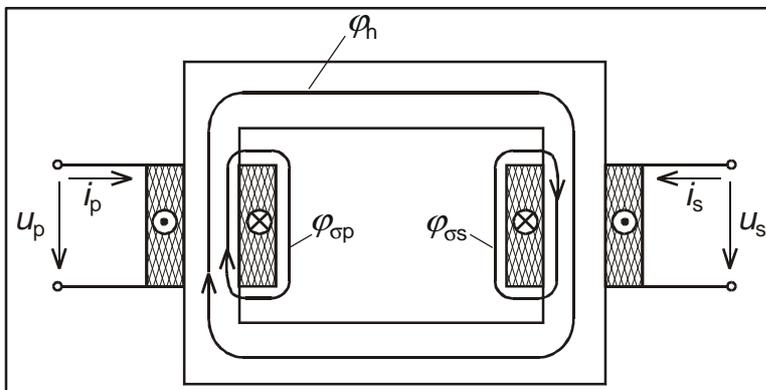


Bild 2.1: Wicklungsmodell des Zweiwicklungstransformators

Der magnetische *Hauptfluß* ϕ_h umfaßt die Primär(p)- und Sekundär(s)-Wicklung, während die *Streuflüsse* $\phi_{\sigma p}$ und $\phi_{\sigma s}$ jeweils nur mit der Primär- und der Sekundärwicklung verkettet sind. Die Wicklungen haben die Wirkwiderstände R_p und R_s . Es gelten folgende Grundgleichungen:

$$u_p = u_{hp} + u_{\sigma p} + R_p i_p = w_p \dot{\phi}_h + w_p \dot{\phi}_{\sigma p} + R_p i_p \quad (2.1)$$

$$u_s = u_{hs} + u_{\sigma s} + R_s i_s = w_s \dot{\phi}_h + w_s \dot{\phi}_{\sigma s} + R_s i_s \quad (2.2)$$

$$w_p i_p + w_s i_s = w_p i_{mp} = w_s i_{ms} \quad (2.3)$$

Die Ströme:

$$i_{mp} = i_p + \frac{w_s}{w_p} i_s \quad \text{und} \quad i_{ms} = i_s + \frac{w_p}{w_s} i_p$$

sind der primärseitige und der sekundärseitige *Magnetisierungsstrom*.

Für den Hauptfluß in den Gln. (2.1) und (2.2) folgt aus dem magnetischen Grundgesetz:

$$\varphi_h = \mu_{Fe} \frac{A_{Fe}}{l_{Fe}} (w_p i_p + w_s i_s) \quad (2.4)$$

und für die Streuflüsse:

$$\varphi_{\sigma p} = \mu_0 \frac{A_{\sigma p}}{l_{\sigma p}} w_p i_p \quad (2.5)$$

$$\varphi_{\sigma s} = \mu_0 \frac{A_{\sigma s}}{l_{\sigma s}} w_s i_s \quad (2.6)$$

wobei $A_{\sigma p}$, $A_{\sigma s}$, $l_{\sigma p}$ und $l_{\sigma s}$ fiktive geometrische Größen für den inhomogenen Streufluß sind. Die Gln. (2.1) und (2.2) gehen so über in:

$$u_p = w_p^2 \frac{\mu_{Fe} A_{Fe}}{l_{Fe}} i_p + w_p w_s \frac{\mu_{Fe} A_{Fe}}{l_{Fe}} i_s + w_p^2 \frac{\mu_0 A_{\sigma p}}{l_{\sigma p}} i_p + R_p i_p \quad (2.7)$$

$$u_s = w_s^2 \frac{\mu_{Fe} A_{Fe}}{l_{Fe}} i_s + w_s w_p \frac{\mu_{Fe} A_{Fe}}{l_{Fe}} i_p + w_s^2 \frac{\mu_0 A_{\sigma s}}{l_{\sigma s}} i_s + R_s i_s \quad (2.8)$$

Nun führen wir noch *Haupt-* und *Streuinduktivitäten* wie folgt ein:

$$L_{hp} = w_p^2 \frac{\mu_{Fe} A_{Fe}}{l_{Fe}} = \frac{w_p^2}{R_{Fe}} \quad (2.9)$$

$$L_{hs} = w_s^2 \frac{\mu_{Fe} A_{Fe}}{l_{Fe}} = \frac{w_s^2}{R_{Fe}} \quad (2.10)$$

$$L_{\sigma p} = w_p^2 \frac{\mu_0 A_{\sigma p}}{l_{\sigma p}} \quad (2.11)$$

$$L_{\sigma s} = w_s^2 \frac{\mu_0 A_{\sigma s}}{l_{\sigma s}} \quad (2.12)$$

und erhalten schließlich die drei *Grundgleichungen* des Zweiwicklungstransformators in der Form:

$$u_p = L_{hp} i_p + L_{hp} \frac{w_s}{w_p} i_s + L_{\sigma p} i_p + R_p i_p \quad (2.13)$$

$$u_s = L_{hs} i_s + L_{hs} \frac{w_p}{w_s} i_p + L_{\sigma s} i_s + R_s i_s \quad (2.14)$$

$$i_{mp} = i_p + \frac{w_s}{w_p} i_s \quad (2.15)$$

oder

$$\boxed{i_{ms} = i_s + \frac{w_p}{w_s} i_p} \quad (2.16)$$

Die Verhältnisse der Windungszahlen $n_{ps} = w_p / w_s$ oder $n_{sp} = w_s / w_p$ sind beim Einphasentransformator mit den *Übersetzungsverhältnissen* identisch. Also:

$$\ddot{u}_{ps} = n_{ps} = \frac{w_p}{w_s} = \frac{U_{rT}^p}{U_{rT}^s} \quad (2.17)$$

$$\ddot{u}_{sp} = n_{sp} = \frac{w_s}{w_p} = \frac{U_{rT}^s}{U_{rT}^p} \quad (2.18)$$

Die Grundgleichungen Gl. (2.13) bis Gl. (2.16) können weiter umgeformt werden zu:

$$u_p = L_{hp}(\dot{i}_p + \ddot{u}_{sp} \dot{i}_s) + L_{\sigma p} \dot{i}_p + R_p \dot{i}_p = L_{hp} \dot{i}_{mp} + L_{\sigma p} \dot{i}_p + R_p \dot{i}_p = u_{hp} + L_{\sigma p} \dot{i}_p + R_p \dot{i}_p \quad (2.19)$$

$$u_s = L_{hs}(\dot{i}_s + \ddot{u}_{ps} \dot{i}_p) + L_{\sigma s} \dot{i}_s + R_s \dot{i}_s = L_{hs} \dot{i}_{ms} + L_{\sigma s} \dot{i}_s + R_s \dot{i}_s = u_{hs} + L_{\sigma s} \dot{i}_s + R_s \dot{i}_s \quad (2.20)$$

Gewöhnlich rechnet man noch die Größen einer Wicklung mit dem entsprechenden Übersetzungsverhältnis auf die andere Wicklung um und kennzeichnet die umgerechneten Größen mit einem Strich im oberen Index. Rechnet man z.B. die Größen der Sekundärwicklung auf die Primärwicklung um, so wird aus Gl. (2.20):

$$\boxed{u'_s = \ddot{u}_{ps} u_s = \ddot{u}_{ps} u_{hs} + \ddot{u}_{ps}^2 L_{\sigma s} \ddot{u}_{sp} \dot{i}_s + \ddot{u}_{ps}^2 R_s \ddot{u}_{sp} \dot{i}_s = u_{hp} + L'_{\sigma s} \dot{i}'_s + R'_s \dot{i}'_s} \quad (2.21)$$

Wir sehen, daß die Spannungen mit \ddot{u}_{ps} , die Ströme mit $1/\ddot{u}_{ps} = \ddot{u}_{sp}$ und Induktivitäten und Widerstände mit \ddot{u}_{ps}^2 auf die Primärseite umgerechnet werden. Analog gilt bei Umrechnung der Primärgrößen auf die Sekundärseite:

$$\boxed{u'_p = \ddot{u}_{sp} u_p = \ddot{u}_{sp} u_{hp} + \ddot{u}_{sp}^2 L_{\sigma p} \ddot{u}_{ps} \dot{i}_p + \ddot{u}_{sp}^2 R_p \ddot{u}_{ps} \dot{i}_p = u_{hs} + L'_{\sigma p} \dot{i}'_p + R'_p \dot{i}'_p} \quad (2.22)$$

und

$$\boxed{i'_{mp} = i_p + \ddot{u}_{sp} i_s = i_p + i'_s} \quad (2.23)$$

$$\boxed{i'_{ms} = i_s + \ddot{u}_{ps} i_p = i_s + i'_p} \quad (2.24)$$

2.1.1 T-Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators

Aus den Gln. (2.21) bis (2.24) ergeben sich die Ersatzschaltungen in Bild 2.2.

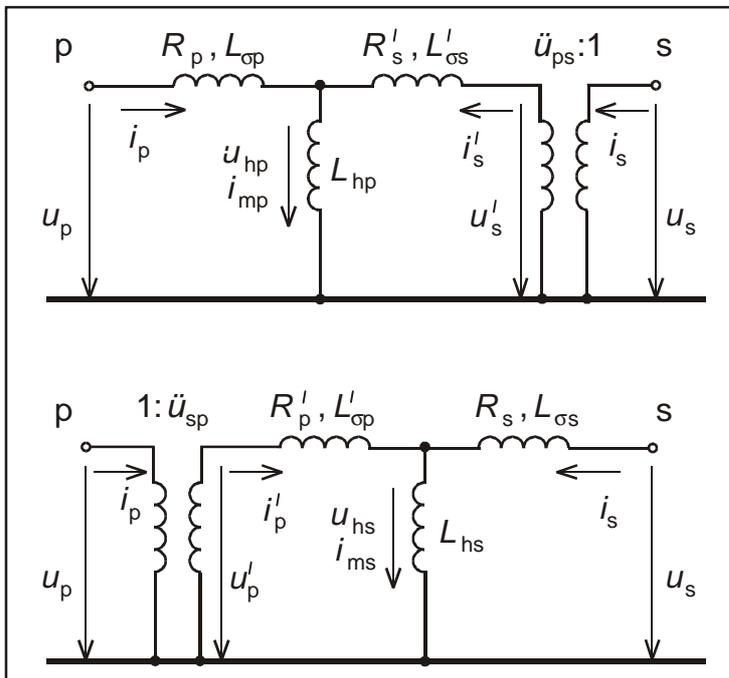


Bild 2.2: Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators mit umgerechneten Wicklungsgrößen

Einen wichtigen Sonderfall stellt die *Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes* dar. Von dieser Näherung kann bei den Leistungstransformatoren in der Elektroenergieversorgung im Normalbetrieb gewöhnlich Gebrauch gemacht werden. Aus den Gln. (2.23) und (2.24) wird dann:

$$i_p + i'_s = i_s + i'_p = 0 \tag{2.25}$$

und die Ersatzschaltungen aus Bild 2.2 vereinfachen sich zu denen in Bild 2.3.

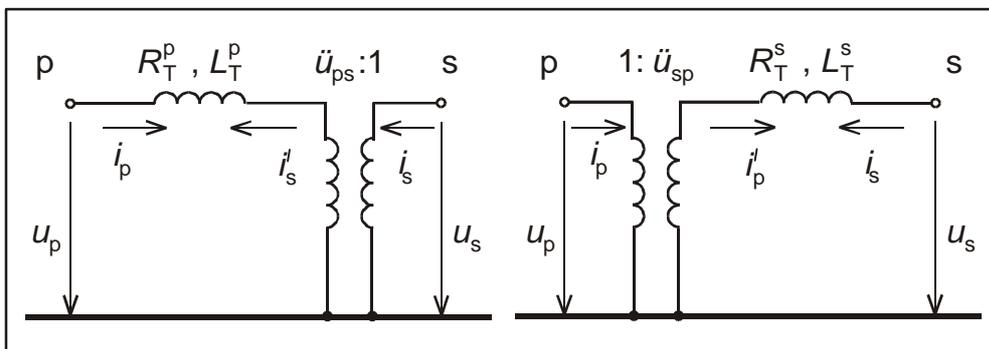


Bild 2.3: Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators mit umgerechneten Wicklungsgrößen bei Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes

In Bild 2.3 sind die Wirkwiderstände und Streuinduktivitäten zusammengezogen zu:

$$R_p + R'_s = R_{ps}^p = R_T^p$$

$$L_{\sigma p} + L'_{\sigma s} = L_{ps}^p = L_T^p$$

bzw.:

$$R_{ps}^s = R'_p + R_s = R_{ps}^s = R_T^s = \ddot{u}_{sp}^2 R_T^p$$

$$L_{ps}^s = L'_{\sigma p} + L_{\sigma s} = L_{ps}^s = L_T^s = \ddot{u}_{sp}^2 L_T^p$$

Der Verweis auf die Wicklung, auf die die Größen umgerechnet sind (oberer Index p oder s) wird, da die Umrechnung aus der Schaltung ersichtlich ist, meist weggelassen. Die Längselemente R_T und L_T der Ersatzschaltungen in Bild 2.3 werden im Kurzschlußversuch ermittelt. Soll oder kann der Magnetisierungsstrom nicht vernachlässigt werden, wie in den Ersatzschaltungen des Bildes 2.2, so teilt man R_T und L_T gewöhnlich je zur Hälfte auf die beiden Wicklungen auf:

$$R_p = R'_s = \frac{1}{2} R_T^p \quad \text{bzw.} \quad R'_p = R_s = \frac{1}{2} R_T^s$$

$$L_{\sigma p} = L'_{\sigma s} = \frac{1}{2} L_T^p \quad \text{bzw.} \quad L'_{\sigma p} = L_{\sigma s} = \frac{1}{2} L_T^s$$

Auf den Kurzschlußversuch kommen wir später noch einmal zurück. Zunächst wollen wir aber für den *eingeschwungenen Zustand* die Differentialgleichungen des Transformators in *Zeigergleichungen* überführen. Dazu setzen wir für die Momentanwerte der eingeschwungenen Ströme und Spannungen i und u Zeiger \underline{i} und \underline{u} , und für die Ableitungen der Ströme i schreiben wir $j\omega_0 \underline{i}$, wobei ω_0 die Kreisfrequenz der Grundschwingung ist. Die Gln. (2.19), (2.20) und (2.24) gehen damit über in:

$$\underline{U}_p = \underline{U}_{hp} + (R_p + jX_{\sigma p}) \underline{i}_p = jX_{hp} \underline{i}_{mp} + \underline{Z}_{\sigma p} \underline{i}_p \quad (2.26)$$

$$\underline{U}_s = \underline{U}_{hs} + (R_s + jX_{\sigma s}) \underline{i}_s = jX_{hs} \underline{i}_{ms} + \underline{Z}_{\sigma s} \underline{i}_s \quad (2.27)$$

$$\underline{i}_{mp} = \underline{i}_p + w_{sp} \underline{i}_s \quad (2.28)$$

$$\underline{i}_{ms} = \underline{i}_s + w_{ps} \underline{i}_p \quad (2.29)$$

Aus den Gln. (2.21) und (2.22) für die umgerechneten Wicklungsgrößen wird:

$$\underline{U}'_p = \underline{U}_{hs} + (R'_p + jX'_{\sigma p}) \underline{i}'_p = jX_{hs} \underline{i}_{ms} + \underline{Z}'_{\sigma p} \underline{i}'_p \quad (2.30)$$

$$\underline{i}_{mp} = \underline{i}_p + \underline{i}'_s \quad (2.31)$$

$$\underline{U}'_s = \underline{U}_{hp} + (R'_s + jX'_{\sigma s}) \underline{i}'_s = jX_{hp} \underline{i}_{mp} + \underline{Z}'_{\sigma s} \underline{i}'_s \quad (2.32)$$

$$\underline{i}_{ms} = \underline{i}_s + \underline{i}'_p \quad (2.33)$$

Die *Reaktanzen* und *Impedanzen* werden wie die Wirkwiderstände und Induktivitäten umgerechnet. Die *Umrechnungsbeziehungen* werden im folgenden nochmals zusammengestellt. Für die Umrechnung der Zeigergrößen gelten die gleichen Regeln wie für die Momentanwerte:

$$\underline{U}'_p = \ddot{u}_{sp} \underline{U}_p; \quad \underline{I}'_p = \ddot{u}_{ps} \underline{I}_p = \frac{1}{\ddot{u}_{sp}} \underline{I}_p$$

$$\underline{U}'_s = \ddot{u}_{ps} \underline{U}_s; \quad \underline{I}'_s = \ddot{u}_{sp} \underline{I}_s = \frac{1}{\ddot{u}_{ps}} \underline{I}_s$$

$$\underline{R}'_p, \underline{X}'_{\sigma p}, \underline{Z}'_{\sigma p} = \ddot{u}_{sp}^2 (\underline{R}_p, \underline{X}_{\sigma p}, \underline{Z}_{\sigma p}); \quad \underline{R}'_s, \underline{X}'_{\sigma s}, \underline{Z}'_{\sigma s} = \ddot{u}_{ps}^2 (\underline{R}_s, \underline{X}_{\sigma s}, \underline{Z}_{\sigma s})$$

Auf der Grundlage der Gln. (2.30) bis (2.33) ergeben sich die *Impedanz-Ersatzschaltungen* in Bild 2.4.

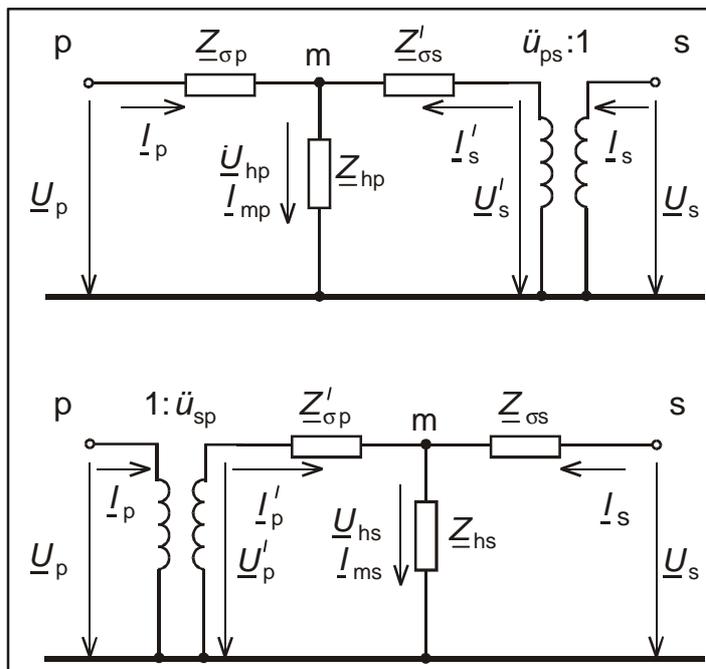


Bild 2.4: Impedanz-Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators mit umgerechneten Wicklungsgrößen (T-Ersatzschaltbild)

Bei Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes vereinfachen sich die Ersatzschaltungen wieder durch Wegfall des Quergliedes, wie in Bild 2.5 dargestellt.

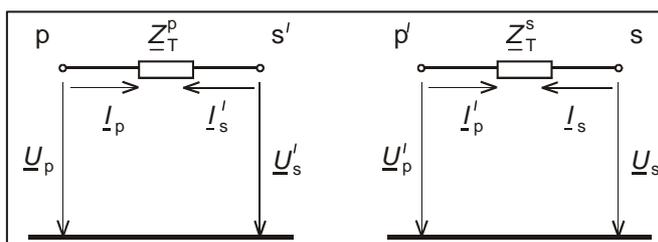


Bild 2.5: Impedanz-Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators bei Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes

In Bild 2.5 sind noch - wie allgemein üblich - die Übertrager weggelassen. In den Impedanzen:

$$\underline{Z}_{\sigma p} + \underline{Z}'_{\sigma s} = \underline{Z}_{ps}^p = \underline{Z}_T^p$$

$$\underline{Z}'_{\sigma p} + \underline{Z}_{\sigma s} = \underline{Z}_{ps}^s = \underline{Z}_T^s$$

sind die primär- und sekundärseitigen *Widerstände* und *Streureaktanzen* zusammengefaßt, wobei jeweils die Größen einer Wicklung auf die jeweils andere umgerechnet sind.

2.1.2 Π -Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators

Die Berechnung stationärer und quasistationärer Betriebszustände in großen Elektroenergiesystemen erfolgt zweckmäßigerweise mit dem Knotenpunktverfahren, das aus den Grundlagen der Elektrotechnik auch als Knotenspannungsanalyse bekannt ist. Dazu benötigt man Stromgleichungen, zu denen sich gewöhnlich Π -Ersatzschaltungen mit Admittanzen angeben lassen¹⁾. Die Stromgleichungen erhalten wir durch Auflösen der Spannungsgleichungen aus Abschnitt 2.1.1 oder bei Kenntnis des Knotenpunktverfahrens direkt aus den dort angegebenen T-Ersatzschaltungen nach Einführung von Knotenströmen. Wir wollen die Gleichungen i.f. als Matrixgleichungen schreiben, weil sich dann die angestrebten Umformungen übersichtlicher gestalten. Aus den beiden Fenstermaschen in Bild 2.4 erhalten wir zunächst:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{hp} + \underline{Z}_{\sigma p} & \underline{Z}_{hp} \\ \underline{Z}_{hp} & \underline{Z}_{hp} + \underline{Z}'_{\sigma s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}'_s \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Die Auflösung nach den Strömen ergibt:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}'_s \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{hp}(\underline{Z}_{\sigma p} + \underline{Z}'_{\sigma s}) + \underline{Z}_{\sigma p}\underline{Z}'_{\sigma s}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{hp} + \underline{Z}'_{\sigma s} & -\underline{Z}_{hp} \\ -\underline{Z}_{hp} & \underline{Z}_{hp} + \underline{Z}_{\sigma p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}'_s \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Um die unübersichtlichen Matrixelemente noch zu vereinfachen, soll zunächst wieder der Magnetisierungsstrom vernachlässigt werden. Wir müssen dann den Grenzübergang $\underline{Z}_{hp} \rightarrow \infty$ an Gl. (2.35) durchführen, denn für $\underline{Z}_{hp} \rightarrow \infty$ wird die Impedanzmatrix in Gl. (2.34) singulär. Der Grenzübergang liefert:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}'_s \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{\sigma p} + \underline{Z}'_{\sigma s}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{ps}^p & -\underline{Y}_{ps}^p \\ -\underline{Y}_{ps}^p & \underline{Y}_{ps}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}'_s \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Die Ströme \underline{I}_p und \underline{I}'_s werden wie erwartet entgegengesetzt gleich. Die Gl. (2.36) kann man bei Kenntnis des Knotenpunktverfahrens mit $\underline{Y}_{ps}^p = 1/\underline{Z}_{ps}^p$ natürlich auch sofort aus der vereinfachten Ersatzschaltung in Bild 2.5 ablesen.

Wir werden später sehen, daß man im Nullsystem den Magnetisierungsstrom nicht immer vernachlässigen kann. Da sich das Nullsystem auch durch einen (speziellen)

¹⁾ Wir haben in Abschnitt 2.1.1 gesehen, daß zur Spannungsgleichung T-Ersatzschaltungen mit Impedanzen gehören.

Einphasentransformator nachbilden läßt, wollen wir bereits hier überlegen, wie wir den Magnetisierungsstrom in der Stromgleichung bzw. in der dazu gehörenden Π -Ersatzschaltung wenigstens genähert berücksichtigen können.

Dazu bietet es sich an, in den ausführlichen Impedanzersatzschaltungen des Bildes 2.4 die Magnetisierungsimpedanzen auf die Klemmen p und s' zu verlagern. Es entstehen so die Π - oder Admittanzersatzschaltungen in Bild 2.6 mit $\underline{Y}_{ps}^p = 1/\underline{Z}_{ps}^p$ bzw. $\underline{Y}_{ps}^s = 1/\underline{Z}_{ps}^s$ und $\underline{Y}_{hp} = 1/\underline{Z}_{hp}$ bzw. $\underline{Y}_{hs} = 1/\underline{Z}_{hs}$.

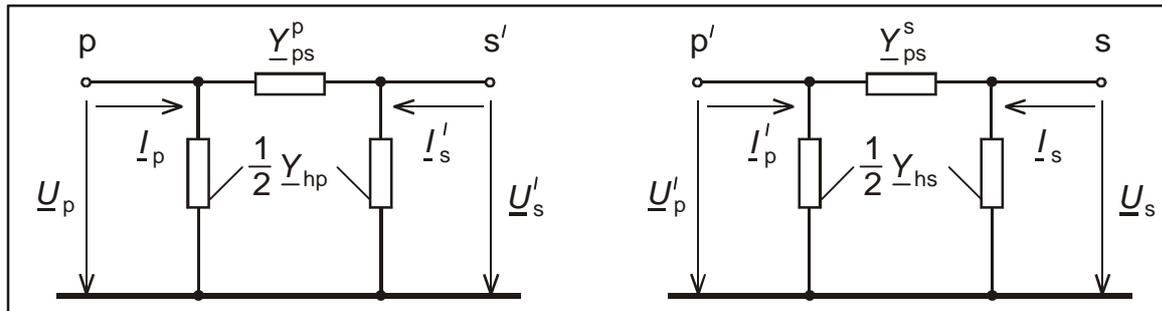


Bild 2.6: Π -Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators mit genäherter Berücksichtigung des Magnetisierungsstromes

Zur linken Ersatzschaltungen in Bild 2.6 gehört nach den Regeln der Knotenspannungsanalyse folgende Stromgleichung²⁾, die für $\underline{Y}_{hp} = 0$ in die Gl. (2.36) übergeht.

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \underline{Y}_{hp} + \underline{Y}_{ps}^p & -\underline{Y}_{ps}^p \\ -\underline{Y}_{ps}^p & \frac{1}{2} \underline{Y}_{hp} + \underline{Y}_{ps}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}'_s \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

2.1.3 Ermittlung der Π -Ersatzschaltung nach dem Knotenpunktverfahren*

Die direkte Aufstellung der Stromgleichung Gl. (2.35) nach dem Knotenpunktverfahren erfolgt so, daß man zunächst an jeden der drei Knoten p, m und s' in Bild 2.4 einen Knotenstrom - mit der Zählrichtung auf den Knoten hin - einführt. \underline{I}_p und \underline{I}'_s sind bereits solche Knotenströme, während der Strom am Knoten m Null ist. Die Knotenspannungen sind \underline{U}_p , \underline{U}_{hp} und \underline{U}'_s . Für sie ergibt sich nach den Regeln des Knotenpunktverfahrens folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ 0 \\ \underline{I}'_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{op} & -\underline{Y}_{op} & 0 \\ -\underline{Y}_{op} & \underline{Y} & -\underline{Y}'_{os} \\ 0 & -\underline{Y}'_{os} & \underline{Y}'_{os} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}_{hp} \\ \underline{U}'_s \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

mit:

$$\underline{Y}_{op} = \frac{1}{\underline{Z}_{op}} \quad , \quad \underline{Y}'_{os} = \frac{1}{\underline{Z}'_{os}} \quad , \quad \underline{Y}_{hp} = \frac{1}{\underline{Z}_{hp}} \quad , \quad \underline{Y} = \underline{Y}_{op} + \underline{Y}'_{os} + \underline{Y}_{hp}$$

²⁾ für die rechte Ersatzschaltung in Bild 2.6 erhält man die Stromgleichung durch Vertauschen der Indizes p und s in Gl. (2.35)

In Gl. (2.38) kann der Knoten m eliminiert werden. Man erhält aus der 2. Zeile:

$$\underline{U}_{hp} = \frac{1}{\underline{Y}} \left(\underline{Y}_{\sigma p} \underline{U}_p + \underline{Y}'_{\sigma s} \underline{U}'_s \right)$$

und nach Einsetzen von \underline{U}_{hp} in Gl. (2.38):

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}'_s \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Y}} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{\sigma p} (\underline{Y}_{hp} + \underline{Y}'_{\sigma s}) & -\underline{Y}_{\sigma p} \underline{Y}'_{\sigma s} \\ -\underline{Y}'_{\sigma s} \underline{Y}_{\sigma p} & \underline{Y}'_{\sigma s} (\underline{Y}_{hp} + \underline{Y}_{\sigma p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}'_s \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Die Elemente der so gewonnenen Admittanzmatrix müssen natürlich mit denen der Gl. (2.35) übereinstimmen. Sie sollen jetzt noch so vereinfacht werden, daß Gl. (2.39) in Gl. (2.37), die wir durch Überlegungen an der Ersatzschaltung gefunden haben, übergeht.

Unter der Bedingung $\underline{Y}_{hp} \ll \underline{Y}_{\sigma p}$, $\underline{Y}'_{\sigma s}$ können folgende Näherungen gemacht werden:

$$\frac{\underline{Y}_{\sigma p} \underline{Y}'_{\sigma s}}{\underline{Y}} \approx \frac{\underline{Y}_{\sigma p} \underline{Y}'_{\sigma s}}{\underline{Y}_{\sigma p} + \underline{Y}'_{\sigma s}} = \underline{Y}_{ps}^p$$

$$\frac{\underline{Y}_{\sigma p} \underline{Y}_{hp}}{\underline{Y}} = \frac{\underline{Y}_{\sigma p} \underline{Y}_{hp}}{(\underline{Y}_{\sigma p} + \underline{Y}'_{\sigma s}) \left(1 + \frac{\underline{Y}_{hp}}{\underline{Y}_p + \underline{Y}'_s}\right)} \approx \frac{\underline{Y}_{\sigma p}}{\underline{Y}_{\sigma p} + \underline{Y}'_{\sigma s}} \underline{Y}_{hp} = \frac{1}{2} \underline{Y}_{hp}$$

und ebenso:

$$\frac{\underline{Y}'_{\sigma s} \underline{Y}_{hp}}{\underline{Y}} = \frac{1}{2} \underline{Y}_{hp}$$

Mit diesen Näherungsausdrücken vereinfacht sich die Gl. (2.39) zu Gl. (2.37). Wir sehen andererseits aber auch, daß die zur Herleitung der Gl. (2.37) angenommene Aufteilung der Magnetisierungsadmittanz je zur Hälfte auf die primär- und sekundärseitige Klemme nur bei genügend großer Magnetisierungsimpedanz im Vergleich zu den Streuimpedanzen zulässig ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so muß auf die ausführlichen Gln. (2.35) oder (2.39) zurückgegriffen werden.

2.1.4 Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators ohne Übertrager*

Die bisher beschriebenen Ersatzschaltungen mit der Umrechnung der Größen einer Wicklung auf die andere sind besonders für Handrechnungen in kleinen Netzen geeignet. Dabei ist zu beachten, daß das gesamte an der umgerechneten Wicklung angeschlossene Netz nach den gleichen Regeln wie die Wicklungsgrößen umzurechnen ist. Bei größeren Netzen und Netzen mit mehreren Spannungsebenen ist die Umrechnung auf eine Spannungsebene, die sogenannte Rechenspannungsebene, nicht mehr sinnvoll. Solange nur Netzmodelle und Analogrechner für die Netzberechnung zur Verfügung standen, und die Computer noch nicht über einen ausreichenden

Zahlenbereich verfügten, war man aber auf die Umrechnung auf eine Rechenspannungsebene oder das unübersichtliche Rechnen mit bezogenen (als p.u., von per unit, bezeichneten) Größen angewiesen. Die Ergebnisse mußten dann schließlich in die Originalspannungsebene zurückgerechnet werden.

Für die heute bevorzugte Rechnung mit Originalspannungen und -strömen braucht man Transformator-Ersatzschaltungen ohne Übertrager, die aufgrund der Bevorzugung des Knotenpunktverfahrens bei der Netzberechnung, Π - oder Admittanzersatzschaltungen sein sollten. Um sie herzuleiten und die Herleitung einfach zu gestalten, gehen wir von der Gl. (2.36), in der die Magnetisierungsströme vernachlässigt sind, aus und berücksichtigen die Magnetisierungsströme wieder nachträglich.

Die in $\underline{I}'_s = \ddot{u}_{sp} \underline{I}_s$ und $\underline{U}'_s = \ddot{u}_{ps} \underline{U}_s$ stehenden Übersetzungsverhältnisse ziehen wir jetzt in die Admittanzmatrix hinein und erhalten so:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{ps}^p & -\ddot{u}_{ps} \underline{Y}_{ps}^p \\ -\ddot{u}_{ps} \underline{Y}_{ps}^p & \ddot{u}_{ps}^2 \underline{Y}_{ps}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}_s \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

oder

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_{sp}^2 \underline{Y}_{ps}^s & -\ddot{u}_{sp} \underline{Y}_{ps}^s \\ -\ddot{u}_{sp} \underline{Y}_{ps}^s & \underline{Y}_{ps}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ \underline{U}_s \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Die zu Gl. (2.40) und (2.41) gehörenden Π -Ersatzschaltungen mit Originalgrößen zeigt Bild 2.7. Die Querglieder dürfen jetzt auf keinen Fall vernachlässigt werden.

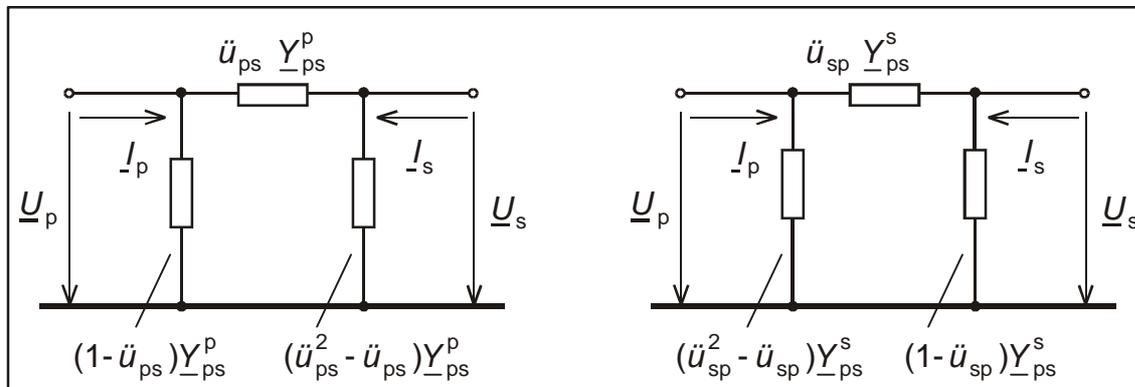


Bild 2.7: Π -Ersatzschaltungen ohne Übertrager bei Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes

3 Schaltgruppen der Drehstromtransformatoren

Für die Zusammenschaltung der drei Wicklungen einer Seite der Drehstromtransformatoren kommen die *Stern*(\star)-, die *Dreieck*(Δ)-, oder die *Zickzack-Schaltung* (\curvearrowright) in Frage. Die Sternschaltung oder Zickzackschaltung muß immer dann verwendet werden, wenn der Sternpunkt für die direkte oder indirekte Erdung oder den Anschluß von Erdschlußkompensationsspulen und einphasigen Verbrauchern benötigt wird. Die Sternwicklung ist für hohe Spannungen wirtschaftlicher als die Dreieckwicklung, die bevorzugt auf der Unterspannungsseite, wo hohe Ströme fließen, eingesetzt wird. Die Dreieckwicklung kann einen Kreisstrom (Nullstrom) führen, der bei unsymmetrischer Belastung für eine hohe Belastbarkeit des Sternpunktes (bei Sternschaltung der anderen Wicklungsseite) sorgt. Bei der Zickzackschaltung ist die Wicklung eines Stranges je zur Hälfte auf zwei Schenkel verteilt, wodurch volle Sternpunktbelastung auf der Zickzackseite gewährleistet ist. Auf das unterschiedliche Verhalten der Schaltungsmöglichkeiten gegenüber unsymmetrischen Belastungen und Oberschwingungen wird in Kapitel 4 und Abschnitt 8.1 eingegangen.

Die Dreieck- und die Zickzack-Schaltung verursachen eine Phasendrehung zwischen den Wicklungs- und Klemmengrößen. Je nach Ausführung der Schaltung ergeben sich so Phasendrehungen von 0° bis 360° in Stufen von 30° . Die verschiedenen Kombinationen der Schaltungen der Wicklungen ergeben die *Schaltgruppen*. Jede Schaltgruppe ist durch zwei *Kennbuchstaben* für die Art der Wicklungsschaltung (Stern, Dreieck oder Zickzack) auf der Ober(OS)- und Unterspannungsseite(US) und durch die *Kennzahl* wie folgt bestimmt:

$$\text{Schaltgruppe} = \{\text{Kennbuchstabe OS}\} \{\text{Kennbuchstabe US}\} \{\text{Kennzahl } k\}$$

Die *Kennzahl* k gibt an, um das Wievielfache von 30° die Spannungszeiger des Mitsystems der OS-Seite denen der US-Seite *voreilen*. Für Dreieck- und Zickzackwicklungen sind dabei die Zeiger äquivalenter Sternschaltungen heranzuziehen. Die Kennbuchstaben gehen aus der Tabelle 3.1 hervor.

Tabelle 3.1: Kennbuchstaben der Schaltgruppen

Schaltung	Δ	\star	\curvearrowright	offen
OS-Wicklung	D	Y	Z	III
US-Wicklung	d	y	z	iii

Ist der Sternpunkt herausgeführt, so wird hinter dem Kennbuchstaben noch ein N bzw. n angefügt. So bedeutet die Schaltgruppe YNd5:

- Schaltung der Oberspannungswicklung im Stern mit herausgeführtem Sternpunkt
- Schaltung der Unterspannungswicklung im Dreieck
- Die Oberspannung eilt der Unterspannung um $5 \times 30^\circ = 150^\circ$ vor.

Das entsprechende Zeigerbild enthält Bild 3.1.

Dreiwicklungstransformatoren haben mehrere Schaltgruppenbezeichnungen. Die Angabe erfolgt in der Reihenfolge abnehmender Bemessungsspannung. Bei gleicher Bemessungsspannung zweier Wicklungen ist die Schaltgruppenbezeichnung für die Wicklung mit der höheren Bemessungsleistung S_r voranzustellen. Bei gleichem U_r und S_r ist die Dreieckschaltung vor der Sternschaltung anzugeben. So lautet z.B. die Schaltgruppenbezeichnung für einen 630-MVA-Netzkuppltransformator mit einer im

Dreieck geschalteten, für 210 MVA ausgelegten 30-kV-Ausgleichswicklung und einem Übersetzungsverhältnis von 400/231/31,5 kV:

Yy0 (400/231 kV - 630 MVA)
 Yd5 (400/31,5 kV - 210 MVA)
 Yd5 (231/31,5 kV - 210 MVA)

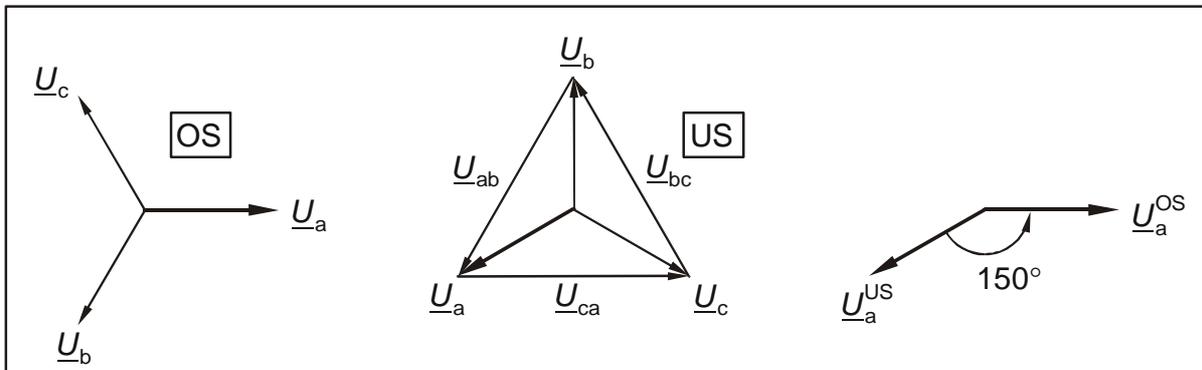


Bild 3.1: Zeigerbilder (Mitsystem) für die Schaltgruppe Yd5

Von der Gesamtzahl der 42 möglichen Schaltgruppen mit 10 verschiedenen Kennzahlen enthält die Tabelle 3.2 die 12 Wichtigsten. Die Klemmen der OS- und US-Wicklung sind dort mit U, V und W bezeichnet.

Von den in Tab. 3.2 angegebenen 12 Schaltgruppen sind wiederum nur die 4 Eingerahmten sog. *Vorzugsschaltgruppen*. Sie haben die Kennzahl 0 oder 5. Im Ausland ist auch noch die Schaltgruppe Yd11 gebräuchlich. Auf die Verwendung der Schaltgruppen werden wir in Abschnitt 4.3 eingehen, wenn wir die Ersatzschaltungen in symmetrischen Koordinaten und damit ihr Verhalten gegenüber Unsymmetriezuständen, insbesondere gegenüber einem Nullsystem, behandelt haben werden.

Tabelle 3.2: Auswahl von Schaltgruppen nach DIN VDE 0532

Kennzahl	Schaltgruppe	Zeigerbild		Schaltungsbild	
		OS	US	OS	US
0	D d 0				
	Y y 0				
	D z 0				
5	D y 5				
	Y d 5				
	Y z 5				
6	D d 6				
	Y y 6				
	D z 6				
11	D y 11				
	Y d 11				
	Y z 11				

3.1 Sternschaltung der Wicklungen

In der Sternschaltung nach Bild 3.2 sind die Wicklungsgrößen zur Unterscheidung von den Klemmengrößen mit W im oberen Index gekennzeichnet. Die Sternpunkt-Erde-Impedanz \underline{Z}_M soll zunächst einen endlichen Wert haben. Für den Fall des freien Sternpunktes lassen wir später \underline{Z}_M gegen Unendlich gehen.

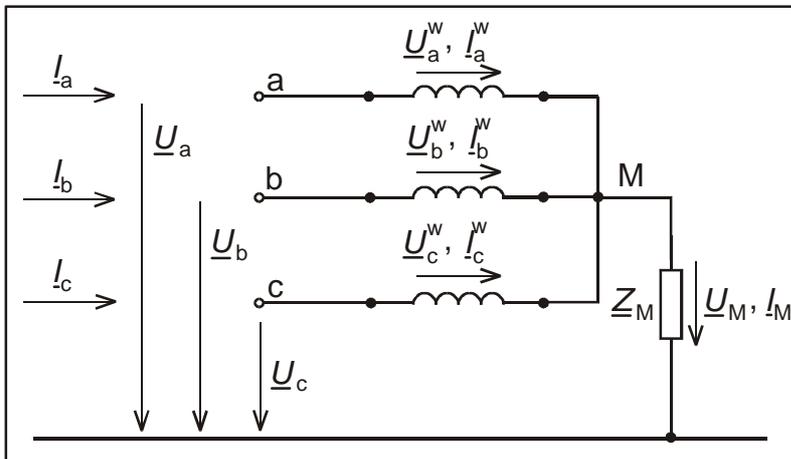


Bild 3.2: Sternschaltung der Wicklungen

Wicklungs- und Klemmengrößen sind nach den Maschen- und Knotensätzen folgendermaßen verknüpft:

$$\begin{aligned}\underline{U}_a^W &= \underline{U}_a - \underline{U}_M \\ \underline{U}_b^W &= \underline{U}_b - \underline{U}_M \\ \underline{U}_c^W &= \underline{U}_c - \underline{U}_M\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_a^W &= \underline{I}_a \\ \underline{I}_b^W &= \underline{I}_b \\ \underline{I}_c^W &= \underline{I}_c\end{aligned}\quad (3.2)$$

Ist \underline{Z}_M endlich, so gilt wegen $\underline{I}_M = \underline{I}_a^W + \underline{I}_b^W + \underline{I}_c^W = \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c$:

$$\underline{U}_M = \underline{Z}_M \underline{I}_M = \underline{Z}_M (\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c) = \underline{Z}_M 3\underline{I}_0 \quad (3.3)$$

Für das *Mit-* und *Gegensystem* der Symmetrischen Komponenten ergibt sich wegen $\underline{U}_M = 0$:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1^W &= \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2^W &= \underline{U}_2\end{aligned}\quad (3.4)$$

und ebenso für die Ströme:

$$\begin{cases} I_1^W = I_1 \\ I_2^W = I_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Für das Nullsystem wird mit Gl. (3.3):

$$\begin{cases} U_0^W = U_0 - U_M = U_0 - 3Z_M I_0 \\ I_0^W = I_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Mit Hilfe der Gl. (3.4) bis (3.6) lassen sich so die Symmetrischen Komponenten der Wicklungsgrößen durch die Symmetrischen Komponenten der Klemmengrößen ersetzen. Bild 3.3 veranschaulicht die Zusammenhänge. Es tritt keinerlei Phasendrehung zwischen Wicklungs- und Klemmengrößen auf. Eine Sternpunkt-Erde-Impedanz geht mit ihrem dreifachen Wert in das Nullsystem und nur in das Nullsystem ein.

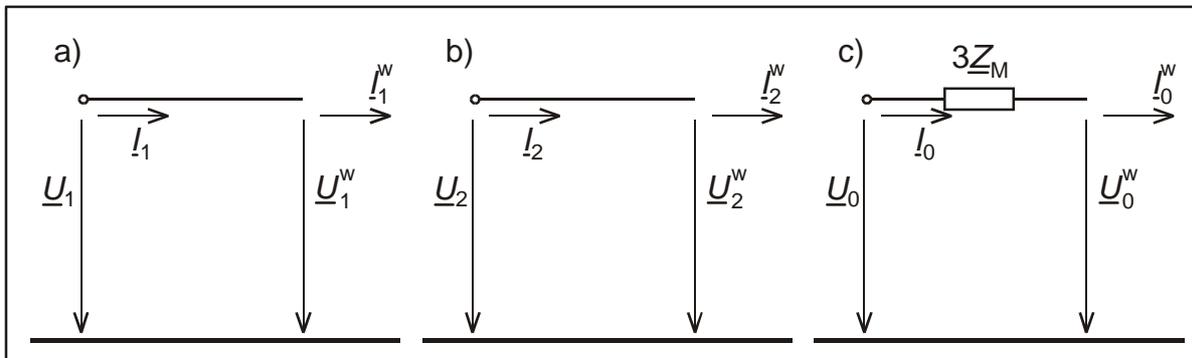


Bild 3.3: Zusammenhänge der Wicklungs- und Klemmengrößen der Symmetrischen Komponenten bei der Sternschaltung a) Mitsystem b) Gegensystem c) Nullsystem

3.2 Dreieckschaltung der Wicklungen

Für die Dreieckschaltung gibt es die zwei Möglichkeiten nach Bild 3.4:

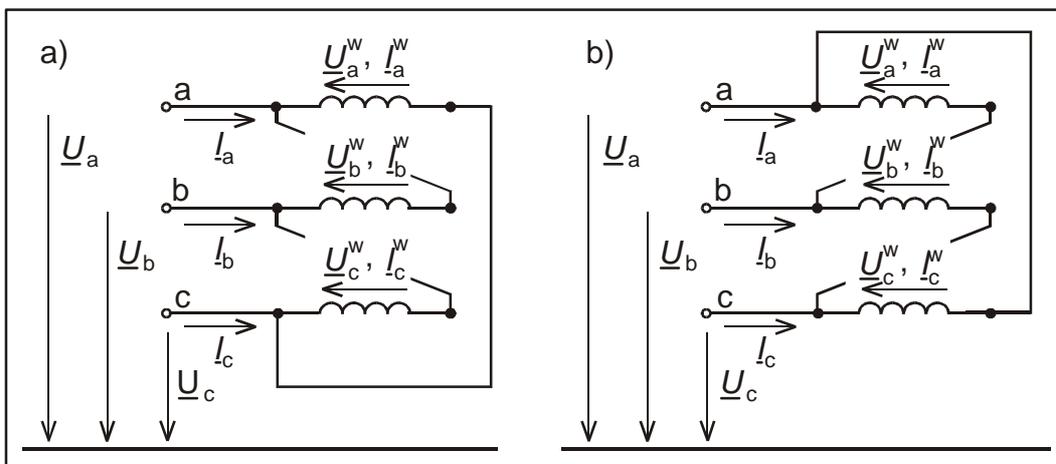


Bild 3.4: Dreieckschaltungen der Wicklungen

Bei der Schaltung nach Bild 3.4a bestehen folgende Zusammenhänge zwischen Wicklungs- und Klemmengrößen:

$$\begin{aligned}\underline{U}_a^W &= -\underline{U}_a + \underline{U}_c \\ \underline{U}_b^W &= -\underline{U}_b + \underline{U}_a \\ \underline{U}_c^W &= -\underline{U}_c + \underline{U}_b\end{aligned}\quad (3.7)$$

und

$$\begin{aligned}I_a &= -I_a^W + I_b^W \\ I_b &= -I_b^W + I_c^W \\ I_c &= -I_c^W + I_a^W\end{aligned}\quad (3.8)$$

Die Gl. (3.8) kann nicht wie bei der Sternschaltung nach den Wicklungsströmen aufgelöst werden. Um den Zusammenhang zwischen den Wicklungs- und Klemmengrößen der Symmetrischen Komponenten zu erhalten, setzen wir der Reihe nach die Bedingungen für ein Mit- Gegen- und Nullsystem in die Gl. (3.7) und (3.8) ein. Für ein Mitsystem folgt so aus Gl. (3.7) mit $\underline{U}_a = \underline{U}_1$ und $\underline{U}_c = \underline{a}\underline{U}_1$:

$$\underline{U}_1^W = -\underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_1 = (\underline{a} - 1)\underline{U}_1 = \sqrt{3}e^{j150^\circ} \underline{U}_1 = \underline{m}_5 \underline{U}_1 \quad (3.9)$$

und aus Gl. (3.8) mit $I_a^W = I_1^W$ und $I_b^W = \underline{a}^2 I_1^W$:

$$I_1 = (\underline{a}^2 - 1)I_1^W \quad (3.10)$$

Die Gl. (3.10) läßt sich nun nach dem Wicklungsstrom auflösen:

$$I_1^W = \frac{1}{(\underline{a}^2 - 1)} I_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j150^\circ} I_1 = \frac{1}{\underline{m}_5^*} I_1 \quad (3.11)$$

Die Klemmengrößen des Mitsystems \underline{U}_1 und I_1 werden gegenüber den Wicklungsgrößen \underline{U}_1^W und I_1^W jeweils um $5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$ zurückgedreht. Oder: Im Mitsystem eilen die Wicklungsgrößen den Klemmengrößen um 150° vor. Analog erhält man für die Gegensystemgrößen mit $\underline{U}_a = \underline{U}_1$ und $\underline{U}_c = \underline{a}^2 \underline{U}_1$:

$$\underline{U}_2^W = -\underline{U}_2 + \underline{a}^2 \underline{U}_2 = (\underline{a}^2 - 1)\underline{U}_2 = \sqrt{3}e^{-j150^\circ} \underline{U}_2 = \underline{m}_5^* \underline{U}_2 \quad (3.12)$$

und:

$$I_2 = (\underline{a} - 1)I_2^W \quad (3.13)$$

oder:

$$I_2^W = \frac{1}{(\underline{a} - 1)} I_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j150^\circ} I_2 = \frac{1}{\underline{m}_5} I_2 \quad (3.14)$$

Im Gegensystem eilen demzufolge die Klemmengrößen den Wicklungsgrößen um 150° vor.

Für das Nullsystem liefern die Gl. (3.7) und (3.8) die Bedingungen:

$$\boxed{U_0^W = 0} \tag{3.15}$$

und:

$$\boxed{I_0 = 0} \tag{3.16}$$

Diese beiden Bedingungen sind typisch für die Dreieckschaltung. In Bild 3.5 sind die Zusammenhänge zwischen den Wicklungs- und Klemmengrößen für das Mit- und Gegensystem durch Übertrager mit den komplexen Übersetzungsverhältnissen \underline{m}_5 und \underline{m}_5^* ausgedrückt. Im Nullsystem bedeutet die Gl. (3.16) eine Unterbrechung zwischen Klemme und Wicklung, während Gl. (3.15) einen Kurzschluß der Wicklung ausdrückt.

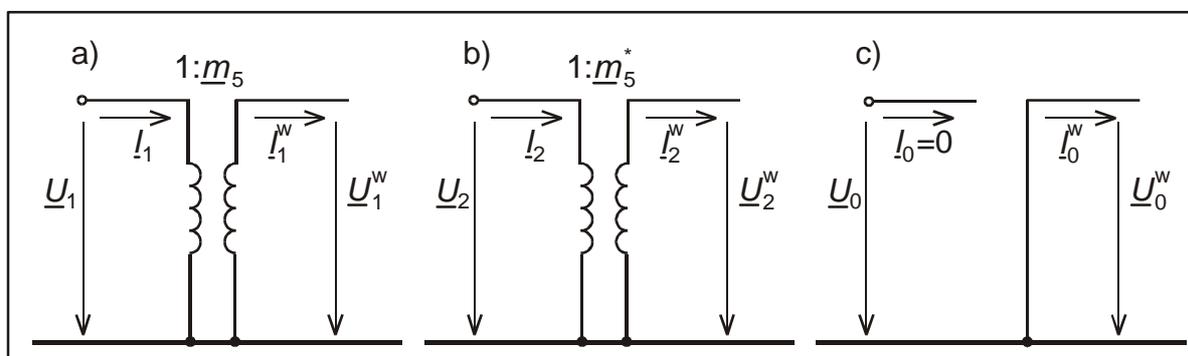


Bild 3.5: Zusammenhänge der Wicklungs- und Klemmengrößen der Symmetrischen Komponenten bei der Dreieckschaltung nach Bild 3.4a a) Mitsystem b) Gegensystem c) Nullsystem

Untersucht man die Dreieckschaltung in Bild 3.4b in gleicher Weise, so stellt man fest, daß sie ein Mit- und Gegensystem gerade anders herum dreht, wie die Schaltung nach Bild 3.4a. Für das Nullsystem gelten die Gln. (3.15) und (3.16) gleichermaßen.

3.3 Zickzackschaltung der Wicklungen*

Bei der Zickzackschaltung wird jeder Wicklungsstrang in zwei Hälften aufgeteilt und auf zwei Schenkel verteilt.

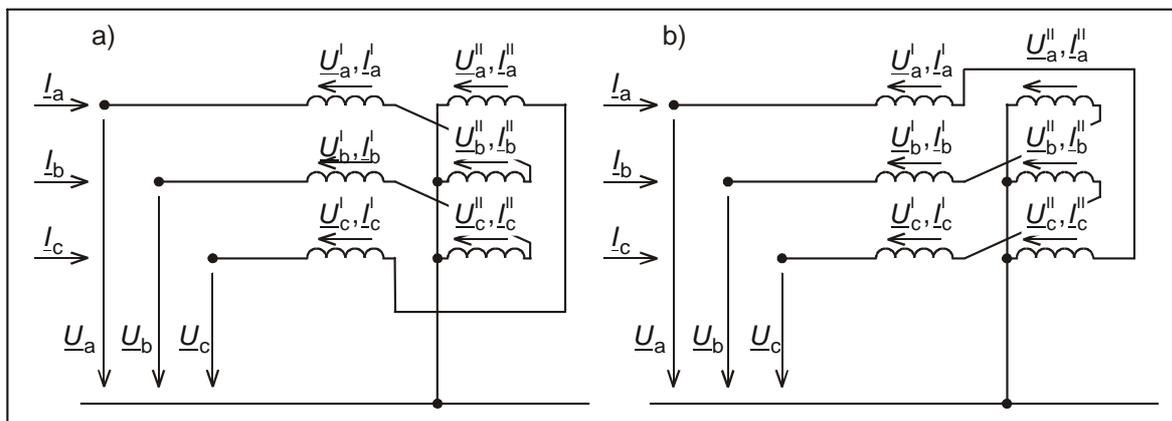


Bild 3.6: Zickzackschaltungen der Wicklungen

Auf einem Schenkel sind so jeweils zwei Hälften unterschiedlicher Wicklungsstränge gegeneinander geschaltet. Dafür gibt es die beiden Schaltungsmöglichkeiten nach Bild 3.6. Aus Bild 3.6a folgt nach dem Maschensatz:

$$\begin{aligned}\underline{U}_a &= -\underline{U}_a^I + \underline{U}_b^II \\ \underline{U}_b &= -\underline{U}_b^I + \underline{U}_c^II \\ \underline{U}_c &= -\underline{U}_c^I + \underline{U}_a^II\end{aligned}\quad (3.17)$$

und nach dem Knotenpunktsatz:

$$\begin{aligned}\underline{I}_a^I &= -\underline{I}_a & \underline{I}_a^II &= \underline{I}_c \\ \underline{I}_b^I &= -\underline{I}_b & \underline{I}_b^II &= \underline{I}_a \\ \underline{I}_c^I &= -\underline{I}_c & \underline{I}_c^II &= \underline{I}_b\end{aligned}\quad (3.18) \quad (3.19)$$

Für ein *Mitsystem* gilt $\underline{U}_a^I = \underline{U}_1^I$ und $\underline{U}_b^II = \underline{a}^2 \underline{U}_1^II$, womit Gl. (3.17) übergeht in:

$$\boxed{\underline{U}_1 = -\underline{U}_1^I + \underline{a}^2 \underline{U}_1^II}\quad (3.20)$$

Für die Ströme ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{I}_1^I &= -\underline{I}_1 \\ \underline{I}_1^II &= \underline{a} \underline{I}_1\end{aligned}}\quad (3.21)$$

und somit:

$$\boxed{\underline{I}_1^I + \underline{I}_1^II = (\underline{a} - 1) \underline{I}_1 = \underline{m}_5 \underline{I}_1}\quad (3.22)$$

Für die *Gegensystemgrößen* erhält man:

$$\boxed{\underline{U}_2 = -\underline{U}_2^I + \underline{a} \underline{U}_2^II}\quad (3.23)$$

und:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{I}_2^I &= -\underline{I}_2 \\ \underline{I}_2^II &= \underline{a}^2 \underline{I}_2\end{aligned}}\quad (3.24)$$

also:

$$\boxed{\underline{I}_2^I + \underline{I}_2^II = (\underline{a}^2 - 1) \underline{I}_2 = \underline{m}_5^* \underline{I}_2}\quad (3.25)$$

Für die *Nullsystemgrößen* wird:

$$\boxed{\underline{U}_0 = -\underline{U}_0^I + \underline{U}_0^II}\quad (3.26)$$

sowie:

$$\begin{cases} I_0^I = -I_0^II \\ I_0^I = I_0^II \end{cases} \quad (3.27)$$

und damit:

$$I_2^I + I_2^II = 0 \quad (3.28)$$

Das Bild 3.7 interpretiert die durch die Gln. (3.20) bis (3.28) gegebenen Schaltungsbedingungen mit Hilfe von idealen Übertragern.

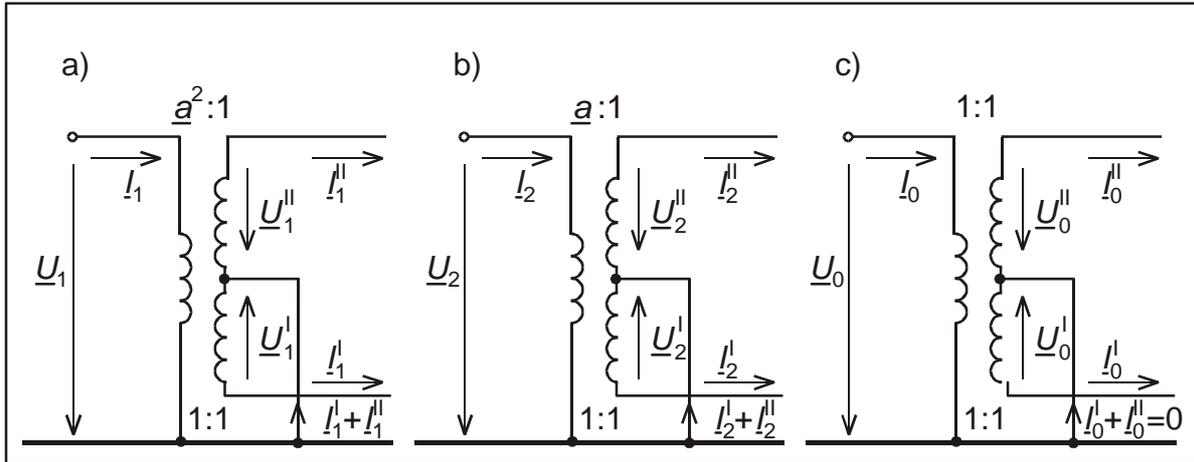


Bild 3.7: Zusammenhänge der Wicklungs- und Klemmengrößen der Symmetrischen Komponenten bei der Zickzackschaltung nach Bild 3.6a a) Mitsystem b) Gegensystem c) Nullsystem

4 Ersatzschaltungen des Drehstromtransformators in Symmetrischen Koordinaten

4.1 Gleichungen und Ersatzschaltungen für die Wicklungsgrößen

4.1.1 Zweiwicklungstransformatoren

Wir denken uns zunächst den Drehstromtransformator aus drei Einphasentransformatoren zu einer Drehstrombank zusammengeschaltet. Dann gelten die Gln. (2.30) bis (2.33) des Einphasentransformators auch für jeden dieser drei Einphasentransformatoren. Die Primär- und Sekundärwicklungen der Einphasentransformatoren bezeichnen wir jeweils mit a, b und c und kennzeichnen die Wicklungsgrößen wieder durch W im oberen Index. Die Sekundärgrößen sollen mit dem *Wicklungs-Übersetzungsverhältnis* n_{ps} auf die Primärseite umgerechnet sein (Index '). Die drei Spannungsgleichungen einer Wicklungsseite fassen wir zu je einer Matrixgleichung zusammen und erhalten so:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{pa}^W \\ \underline{U}_{pb}^W \\ \underline{U}_{pc}^W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{\sigma p} & & \\ & \underline{Z}_{\sigma p} & \\ & & \underline{Z}_{\sigma p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{pa}^W \\ \underline{I}_{pb}^W \\ \underline{I}_{pc}^W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_{hpa} \\ \underline{U}_{hpb} \\ \underline{U}_{hpc} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{sa}^{W'} \\ \underline{U}_{sb}^{W'} \\ \underline{U}_{sc}^{W'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{\sigma s} & & \\ & \underline{Z}_{\sigma s} & \\ & & \underline{Z}_{\sigma s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{sa}^{W'} \\ \underline{I}_{sb}^{W'} \\ \underline{I}_{sc}^{W'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_{hpa} \\ \underline{U}_{hpb} \\ \underline{U}_{hpc} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ebenso verfahren wir mit den Hauptfeldspannungen und Magnetisierungsströmen:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{hpa} \\ \underline{U}_{hpb} \\ \underline{U}_{hpc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jX_{hp} & & \\ & jX_{hp} & \\ & & jX_{hp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{mpa} \\ \underline{I}_{mpb} \\ \underline{I}_{mpc} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_{mpa} \\ \underline{I}_{mpb} \\ \underline{I}_{mpc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{pa}^W \\ \underline{I}_{pb}^W \\ \underline{I}_{pc}^W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_{sa}^{W'} \\ \underline{I}_{sb}^{W'} \\ \underline{I}_{sc}^{W'} \end{bmatrix} \quad (4.3) \quad (4.4)$$

Die vorstehenden Gleichungen behalten aufgrund der Diagonalform der Matrizen ihre Form auch nach Transformation in die Symmetrischen Koordinaten (Indizes 1,2,0) bei:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{p1}^W \\ \underline{U}_{p2}^W \\ \underline{U}_{p0}^W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{\sigma p} & & \\ & \underline{Z}_{\sigma p} & \\ & & \underline{Z}_{\sigma p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{p1}^W \\ \underline{I}_{p2}^W \\ \underline{I}_{p0}^W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_{hp1} \\ \underline{U}_{hp2} \\ \underline{U}_{hp0} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{s1}^{W'} \\ \underline{U}_{s2}^{W'} \\ \underline{U}_{s0}^{W'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}'_{\sigma s} & & \\ & \underline{Z}'_{\sigma s} & \\ & & \underline{Z}'_{\sigma s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{s1}^{W'} \\ \underline{I}_{s2}^{W'} \\ \underline{I}_{s0}^{W'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_{hp1} \\ \underline{U}_{hp2} \\ \underline{U}_{hp0} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{hp1} \\ \underline{U}_{hp2} \\ \underline{U}_{hp0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jX_{hp} & & \\ & jX_{hp} & \\ & & jX_{hp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{mp1} \\ \underline{I}_{mp2} \\ \underline{I}_{mp0} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \underline{I}_{mp1} \\ \underline{I}_{mp2} \\ \underline{I}_{mp0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{p1}^W \\ \underline{I}_{p2}^W \\ \underline{I}_{p0}^W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_{s1}^{W'} \\ \underline{I}_{s2}^{W'} \\ \underline{I}_{s0}^{W'} \end{bmatrix} \quad (4.7) \text{ und } (4.8)$$

Auf der Grundlage der Gln. (4.5) bis (4.8) erhalten wir die Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten der *Wicklungsgrößen* in Bild 4.1. Sie entsprechen der Ersatzschaltung des Einphasentransformators aus Bild 2.4.

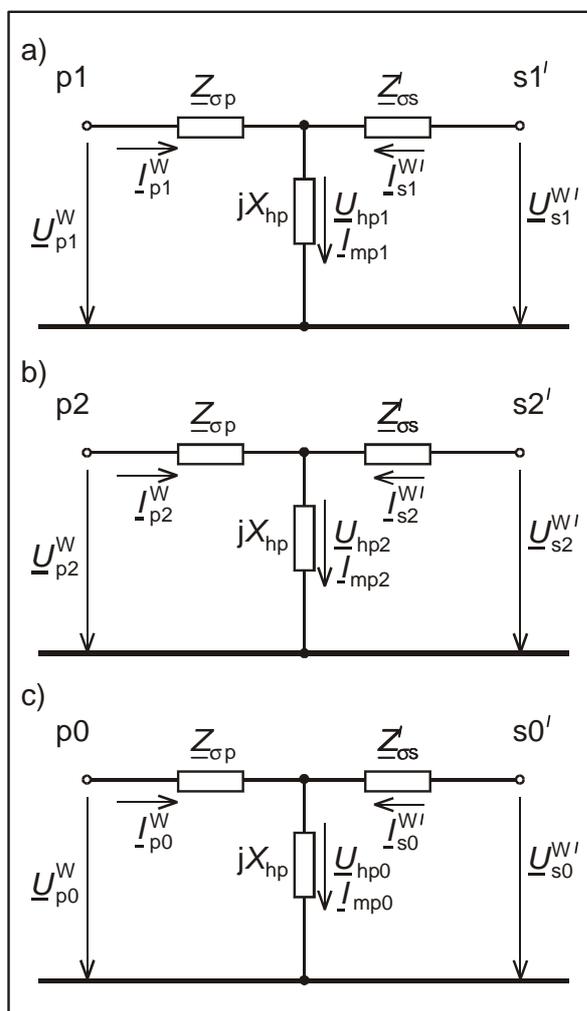


Bild 4.1: Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten der Wicklungsgrößen des Dreiphasen-Zweiwicklungstransformators
 a) Mitsystem b) Gegensystem c) Nullsystem

Die Drehstrombank stellt einen ideal symmetrischen Drehstromtransformator dar. Dadurch, daß jeder der drei Einphasentransformatoren einen eigenen magnetischen Kreis hat, kann sich auch ein Nullfluß auf dem magnetischen Hauptweg ausbilden, so daß kein Unterschied zwischen der Hauptfeldreaktanz im Mit-, Gegen- und Nullsystem besteht. Für den als Fünfschenkel- oder Dreischenkelkern ausgeführten Dreh-

stromtransformator gelten die Ersatzschaltungen in Bild 4.1 mit gewissen Einschränkungen. Sie berücksichtigen nicht die durch den Kernaufbau bedingte magnetische Unsymmetrie und nicht den Einfluß des unterschiedlichen magnetischen Rückschlusses auf die Hauptfeldreaktanz des Nullsystems.

Da die Magnetisierungsströme ohnehin in den meisten Betriebszuständen vernachlässigbar sind, kann auf eine Berücksichtigung der magnetischen Unsymmetrie verzichtet werden.

Nicht mehr generell zu vernachlässigen ist dagegen der Einfluß der *Kernbauart* auf die Hauptfeldreaktanz des Nullsystems. Während sich beim Fünfschenkelkern ein Nullfluß über die beiden unbewickelten Außenschenkel auf dem Eisenweg schließen kann und dort etwa den gleichen kleinen magnetischen Widerstand wie ein Mit- oder Gegenfluß vorfindet, muß er sich beim Dreischenkelkern teilweise über Luft und den Kessel schließen, wo ihm ein wesentlich größerer magnetischer Widerstand als im Eisen entgegengebracht wird. Die Hauptfeldreaktanz des Nullsystems ist deshalb beim Fünfschenkelkern wie bei der Drehstrombank etwa gleich der des Mit- und Gegensystems und beim Dreischenkeltransformator wesentlich kleiner als die des Mit- und Gegensystems. Beim Dreischenkelkern hat die Hauptfeldreaktanz des Nullsystems nur noch die Größenordnung von $(4 \dots 8)X_{ps}$ und darf deshalb nicht mehr von vornherein vernachlässigt werden. Um keine unterschiedlichen Bezeichnungen für die Hauptfeldreaktanzen in den Ersatzschaltungen einführen zu müssen, berücksichtigen wir i. f. den Einfluß der Kernbauart auf die Hauptreaktanz des Nullsystems durch einen Faktor k_0 an X_{hp} im Nullsystem. Für die Transformatoren mit freiem magnetischen Rückschluß (Drehstrombank und Fünfschenkeltransformator) ist $k_0 = 1$ und für den Dreischenkeltransformator $k_0 < 1$.

4.1.2 Dreiwicklungstransformatoren

Die Gleichungen aus Abschnitt 4.1.1 werden um die Spannungsgleichung der dritten Wicklung, der *Tertiärwicklung*, ergänzt, wobei die Größen der Tertiärwicklung mit dem Verhältnis der Windungszahlen n_{pt} auf die Primärwicklung umgerechnet sein sollen.

Wir geben gleich die Gleichungen in Symmetrischen Koordinaten an. Die Spannungsgleichung lautet in Analogie zu Gl. (4.6):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{t1}^{W'} \\ \underline{U}_{t2}^{W'} \\ \underline{U}_{t0}^{W'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}'_{ot} & & \\ & \underline{Z}'_{ot} & \\ & & \underline{Z}'_{ot} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{t1}^{W'} \\ \underline{I}_{t2}^{W'} \\ \underline{I}_{t0}^{W'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}_{hp1} \\ \underline{U}_{hp2} \\ \underline{U}_{hp0} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Die Magnetisierungsströme setzen sich jetzt aus den Strömen aller drei Wicklungen wie folgt zusammen:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{mp1} \\ \underline{I}_{mp2} \\ \underline{I}_{mp0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_{p1}^W \\ \underline{I}_{p2}^W \\ \underline{I}_{p0}^W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_{s1}^{W'} \\ \underline{I}_{s2}^{W'} \\ \underline{I}_{s0}^{W'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{I}_{t1}^{W'} \\ \underline{I}_{t2}^{W'} \\ \underline{I}_{t0}^{W'} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Die Erweiterung der Ersatzschaltungen um die Tertiärwicklung zeigt Bild 4.2. Die Ersatzschaltungen für die Wicklungsgrößen in den Bildern 4.1 und 4.2 sind unveränder-

licher Bestandteil aller Ersatzschaltungen für die einzelnen Schaltgruppen. Um die Ersatzschaltung für eine spezielle Schaltgruppe zu entwickeln, sollte man deshalb stets von diesem inneren Zusammenhang ausgehen und anschließend die Verknüpfung zwischen Wicklungs- und Klemmengrößen nach den in Kapitel 3 angegebenen allgemeinen Beziehungen ergänzen. Im folgenden sollen auf diesem Weg exemplarisch die Ersatzschaltungen der Schaltgruppen Yy0, Yd5 und Yz5 hergeleitet werden.

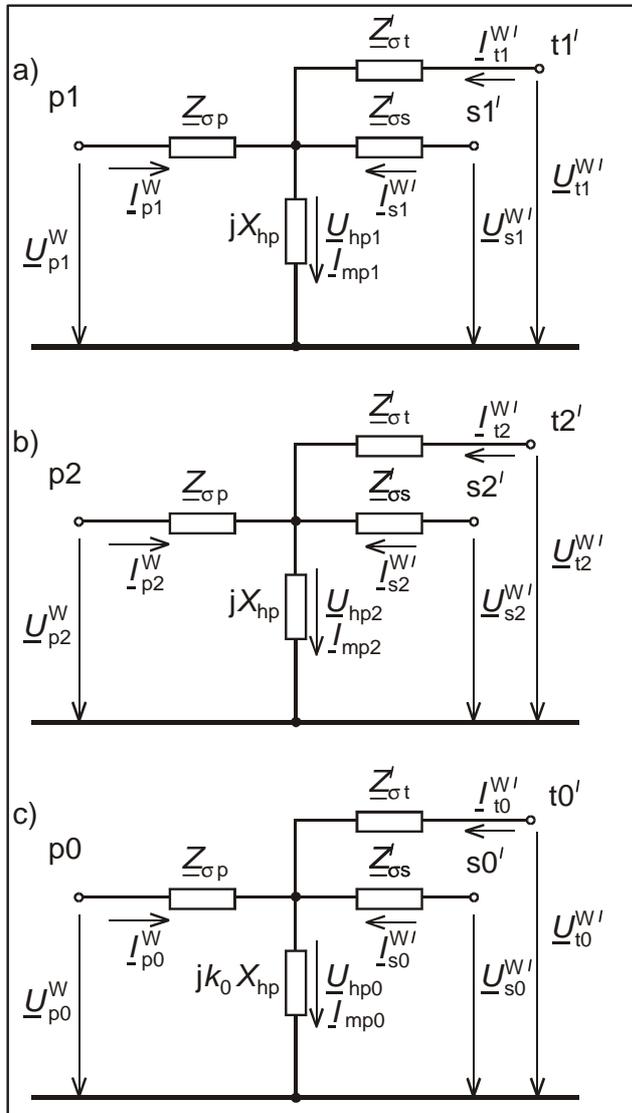


Bild 4.2: Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten der Wicklungsgrößen des Dreiphasen-Dreiwicklungstransformators
 a) Mitsystem b) Gegensystem c) Nullsystem

4.2 Ersatzschaltungen der Schaltgruppe Yy0

Wir wollen zunächst den einfachsten Fall, die *Schaltgruppe* Yy0 mit beidseitig widerstandslos geerdeten Sternpunkten betrachten. Die entsprechende Schaltung der Wicklungsgrößen und die Zählpfeile für die Wicklungs- und Klemmengrößen zeigt Bild 4.3.

Es ist sofort ersichtlich, daß wegen $U_{Mp} = U'_{Ms} = 0$ Klemmen- und Wicklungsspannungen gleich werden. Die Klemmen- und Wicklungsströme sind bei der Sternschaltung unabhängig von der Art der Sternpunkterdung stets identisch (s. Gln. (3.1) und

(3.2)). Also gelten für den Sonderfall der starren Erdung beider Sternpunkte alle Gleichungen für die Wicklungsgrößen aus Abschnitt 4.1.1 auch für die Klemmengrößen und die Ersatzschaltungen für die Klemmengrößen entsprechen denen für die Wicklungsgrößen. Sie sind in Bild 4.4 angegeben, wobei die gestrichelt umrahmten Kästen die unveränderlichen Zusammenhänge zwischen den Wicklungsgrößen beinhalten.

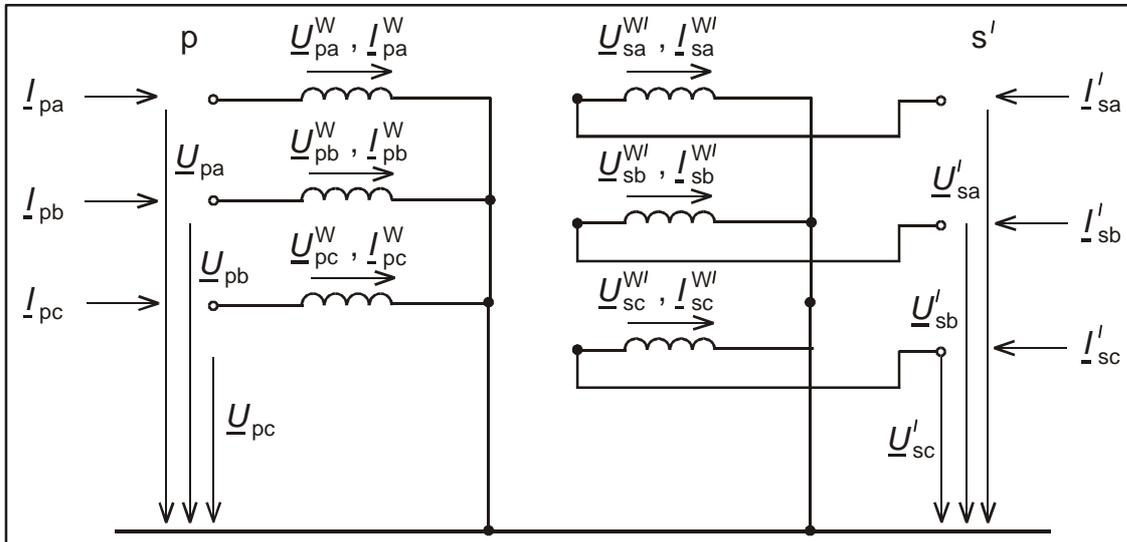


Bild 4.3: Schaltung des Zweiwicklungstransformators mit der Schaltgruppe Yy0.

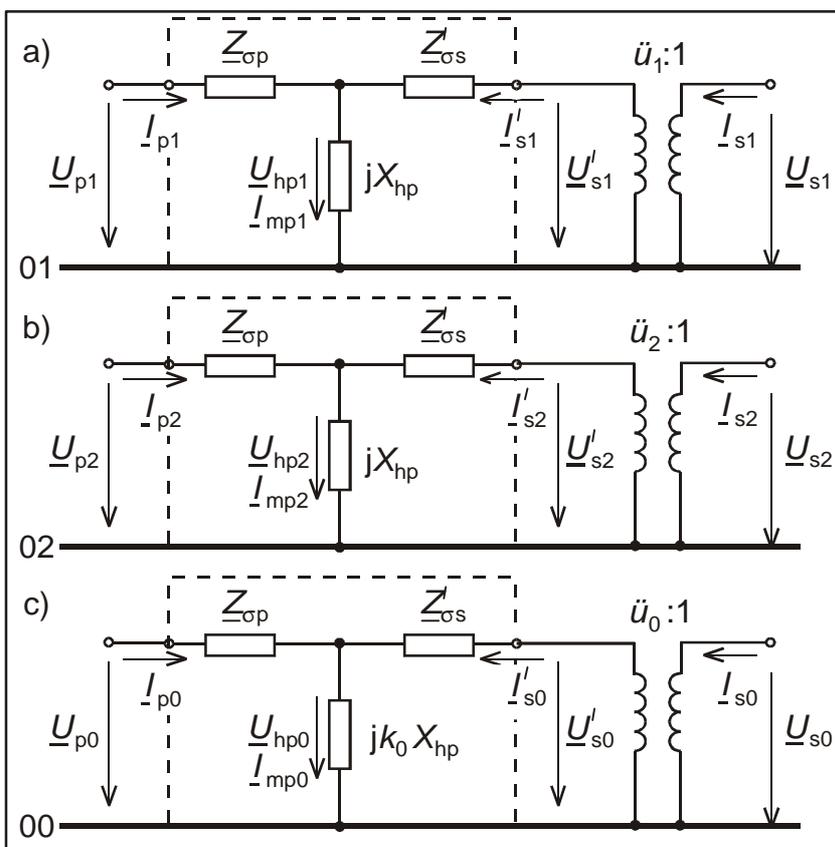


Bild 4.4: Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten des Zweiwicklungstransformators mit der Schaltgruppe Yy0 bei beidseitig widerstandslos geerdeten Sternpunkten
 a) Mitsystem b) Gegensystem c) Nullsystem

Die als Verhältnis der Bemessungswerte der Klemmenspannungen definierten Übersetzungsverhältnisse \ddot{u}_1 , \ddot{u}_2 und \ddot{u}_0 für das Mit-, Gegen- und Nullsystem stimmen bei der Schaltgruppe Yy0 mit dem Wicklungs-Übersetzungsverhältnis n_{ps} überein:

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = \ddot{u}_0 = n_{ps} = \frac{w_p}{w_s} = \frac{U_{rT}^p}{U_{rT}^s} \tag{4.11}$$

In den Ersatzschaltungen werden die Übersetzungsverhältnisse durch ideale Übertrager nachgebildet. Jede der Ersatzschaltungen in Bild 4.4 entspricht der des Einphasen-Zweiwicklungstransformators in Bild 2.2.

Ist auf einer Seite der Sternpunkt nicht widerstandslos geerdet, sondern entweder frei oder über eine Impedanz Z_M niederohmig oder auf Erdschlußkompensation abgestimmt geerdet, so ist davon nur das Nullsystem betroffen. Nach Gl. (3.4) besteht dann im Nullsystem folgender Zusammenhang zwischen den Wicklungs- und Klemmengrößen dieser Seite:

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_0^W + \underline{U}_M = \underline{U}_0^W + 3Z_M I_0$$

$$I_0 = I_0^W \tag{4.12}$$

In der Ersatzschaltung des Nullsystems ist auf der betreffenden Seite die entsprechende dreifache Sternpunkt-Erde-Impedanz hinzuzufügen. In Bild 4.5a ist der Fall dargestellt, daß beide Sternpunkte über eine Impedanz geerdet sind.

Für den Fall des freien Sternpunktes wird die entsprechende Impedanz Z_M unendlich groß. Damit entsteht im Nullsystem eine Unterbrechung zwischen der Primär- und der Sekundärseite, und die Eingangsimpedanz der betreffenden Seite wird ebenfalls unendlich groß.

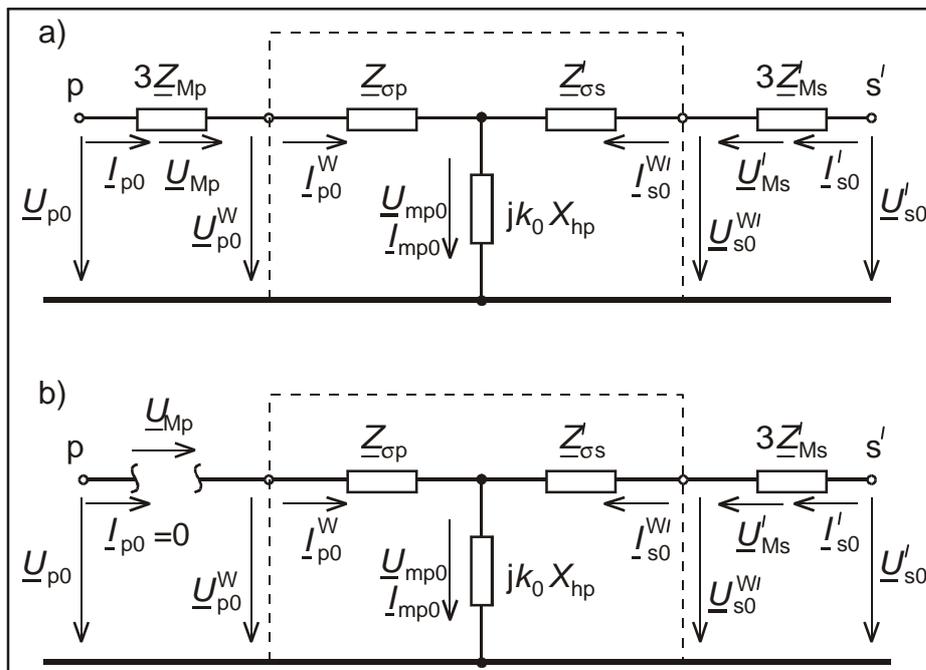


Bild 4.5: Nullsystemersatzschaltbilder des Zweiwicklungstransformators mit der Schaltgruppe Yy0

a) Sternpunkte über Z_{Mp} und Z_{Ms} geerdet

b) Sternpunkt auf Primärseite frei, auf Sekundärseite über Z_{Ms} geerdet

In Bild 4.5b ist der Sternpunkt auf der Primärseite nicht geerdet. Ein Nullsystem auf der Sekundärseite würde den Transformator ohne Gegendurchflutung magnetisieren. Es hängt dann wieder von der Kernbauart ab, ob sich dieser Magnetisierungs-nullfluß kräftig oder schwach ausbildet und eine entsprechend große oder kleine Nullspannung, die sich als Verlagerungsspannung \underline{U}_{Ms} am freien Sternpunkt äußert, verursacht. Bei *Fünfschenkeltransformatoren* und *Drehstrombänken* ($k_0 = 1$) bildet sich über den freien magnetischen Rückschluß ein kräftiger Nullfluß und damit eine so starke Spannungsverlagerung aus, daß diese Transformatoren praktisch überhaupt nicht sternpunktbelastbar sind. Bei *Dreischenkeltransformatoren* ($k_0 < 1$) wird der Nullfluß durch seine Verdrängung aus dem Eisenkreis begrenzt, so daß auch die Verlagerungsspannung nicht so groß wird. Mit Rücksicht auf eine nicht zu große magnetische Belastung des Kessels, der im wesentlichen den magnetischen Rückschluß bildet, dürfen die Sternpunkte dieser Transformatoren mit 10 % des Bemessungsstromes belastet werden.

4.3 Ersatzschaltungen der Schaltgruppe Yd5

Alle Schaltgruppen außer der Schaltgruppe Yy0 bewirken im Mit- und Gegensystem eine Phasendrehung zwischen den Klemmengrößen *desselben* Stranges (s. Kapitel 3). Sie heißen deshalb auch *phasendrehende* Schaltgruppen. Das Bild 4.6 zeigt die Schaltung der Wicklungen von Primär- und Sekundärseite zur Schaltgruppe Yd5 mit geerdetem Sternpunkt auf der Primärseite.

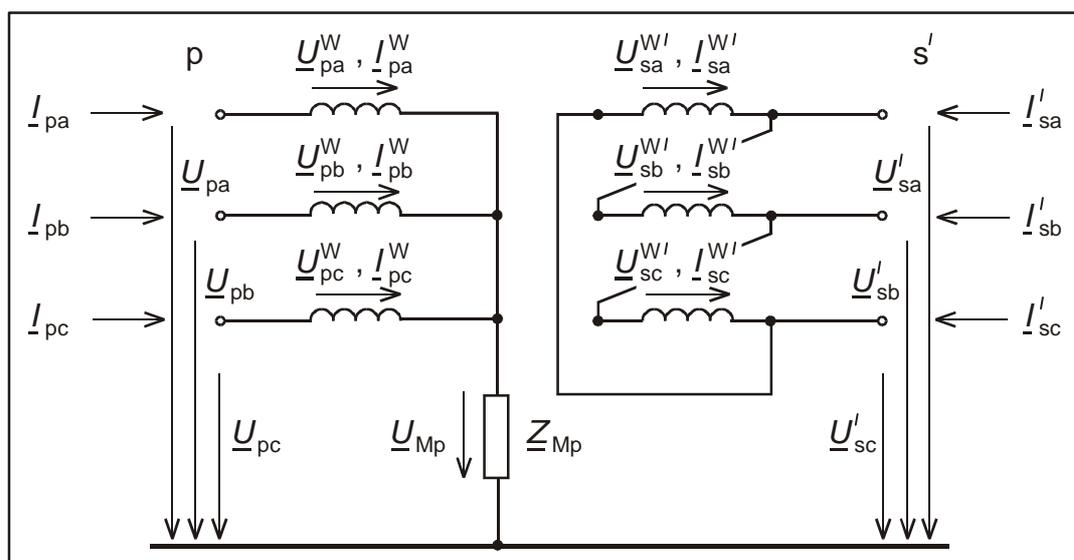


Bild 4.6: Schaltung und Zählpfeile des Zweiwicklungstransformators mit der Schaltgruppe Yd5

Wir entwickeln die in Bild 4.7 angegebenen Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten wieder ausgehend von den Wicklungsgrößen. Die Primärseite ist im Stern geschaltet und somit wie in Bild 4.4 für das Mit- und Gegensystem und wie in Bild 4.5 für das Nullsystem bis zu den Klemmen zu ergänzen.

Die Verknüpfungsbeziehungen zwischen den Klemmen- und Wicklungsgrößen für die Dreieckschaltung der Sekundärseite lauten nach Abschnitt 3.2 im *Mitsystem*:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{s1}^W &= m_5 \underline{U}'_{s1} \\ \underline{I}_{s1}^W &= \frac{1}{m_5^*} \underline{I}'_{s1} \end{aligned} \tag{4.13}$$

im *Gegensystem*:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{s2}^{W'} &= \underline{m}_5^* \underline{U}'_{s2} \\ \underline{I}_{s2}^{W'} &= \frac{1}{\underline{m}_5} \underline{I}'_{s2} \end{aligned} \tag{4.14}$$

und im *Nullsystem*:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{s0}^{W'} &= 0 \\ \underline{I}'_{s0} &= 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die Gln. (4.13) und (4.14) werden durch ideale Übertrager mit komplexen Übersetzungsverhältnissen im Mit- und Gegensystem berücksichtigt. Das Übersetzungsverhältnis für das *Mitsystem* ist:

$$\underline{m}_1 = \underline{m}_5 = \sqrt{3} \angle 150^\circ = \sqrt{3} \angle 5 \cdot 30^\circ$$

und das für das *Gegensystem*:

$$\underline{m}_2 = \underline{m}_5^* = \sqrt{3} \angle -150^\circ = \sqrt{3} \angle -5 \cdot 30^\circ = \underline{m}_1^*$$

Die Übertrager sorgen für die Phasendrehung der Schaltgruppe. Bei der Schaltgruppe Yd5 eilt die primärseitige Klemmenspannung des Mitsystems entsprechend der Kennzahl 5 gegenüber der sekundärseitigen Klemmenspannung um 150° vor.

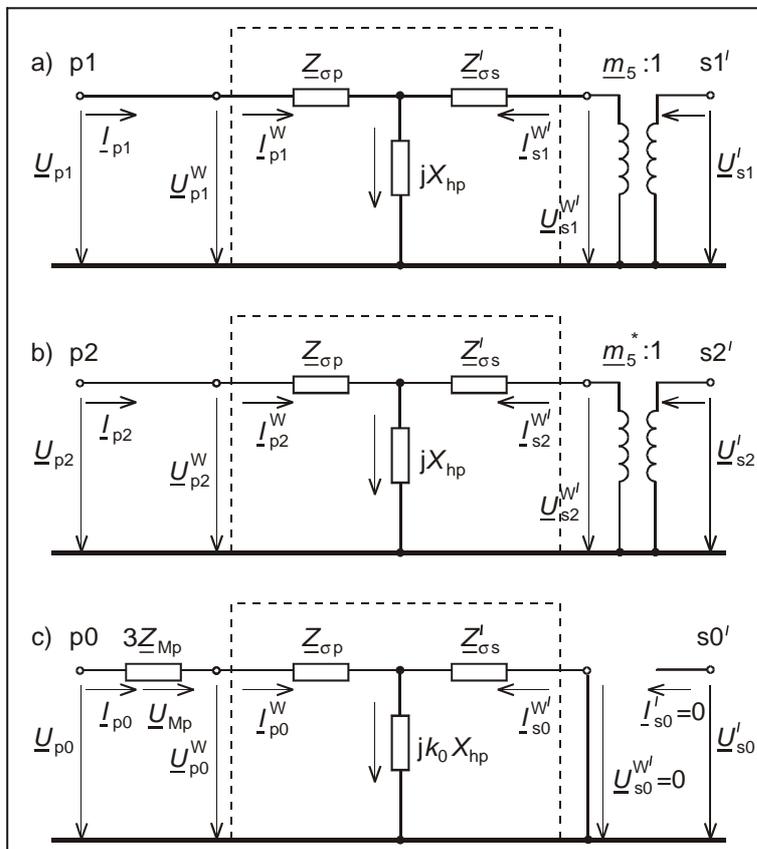


Bild 4.7: Ersatzschaltungen der Symmetrischen Komponenten für die Schaltgruppe Yd5 nach Bild 4.6
 a) Mitsystem b) Gegensystem c) Nullsystem

Die Gegensystemgrößen werden bekanntlich im entgegengesetzten Sinn wie die Mitsystemgrößen gedreht, was im konjugiert komplexen Übersetzungsverhältnis der beiden Übertrager in Bild 4.7a und b zum Ausdruck kommt.

Im Nullsystem besteht auf der Sekundärseite wegen der Bedingung $I'_{s0} = 0$ (s. Gl. (4.15)) keine Verbindung zwischen der Wicklung und der Klemme. Die Bedingung $U_{s0}^W = 0$ ist durch einen Kurzschluß der Sekundärwicklung erfüllt. Somit kann die Schaltgruppe Yd5 kein Nullsystem zwischen Primär- und Sekundärseite übertragen. Die primärseitige Eingangsimpedanz des Nullsystems ist bei geerdetem Sternpunkt endlich, die der Sekundärwicklung dagegen unendlich.

Fügt man in Bild 4.7 auf der Sekundärseite noch reelle Übertrager mit dem Wicklungs-Übersetzungsverhältnis $n_{ps} = w_p / w_s$ hinzu, so entstehen die Ersatzschaltungen in Bild 4.8 mit den Original-Klemmengrößen auch auf der Sekundärseite.

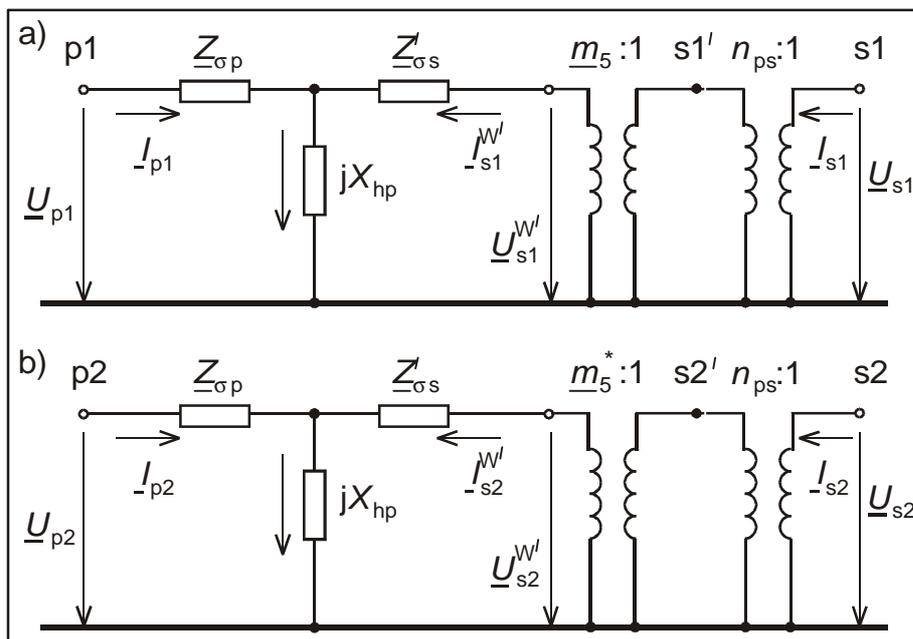


Bild 4.8: Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators der Schaltgruppe Yd5 mit Original-Klemmengrößen

a) Mitsystem b) Gegensystem

Die Übertrager in Bild 4.8 können zusammengefaßt werden zu Übertragern mit den Übersetzungsverhältnissen:

$$\underline{\dot{u}}_1 = \underline{m}_5 n_{ps} = \sqrt{3} \frac{w_p}{w_s} \angle 150^\circ = \underline{\dot{u}} \angle 150^\circ \tag{4.16}$$

und:

$$\underline{\dot{u}}_2 = \underline{m}_5^* n_{ps} = \underline{\dot{u}}_1^* = \underline{\dot{u}} \angle -150^\circ \tag{4.17}$$

Der Betrag des Übersetzungsverhältnisses ergibt sich aus dem Verhältnis der primär- und sekundärseitigen Bemessungsspannungen:

$$\underline{\dot{u}} = \sqrt{3} \frac{w_p}{w_s} = \frac{U_{rT}^p}{U_{rT}^s}$$

Für die Umrechnung der sekundärseitigen Klemmengrößen auf die Primärseite gilt in Analogie zum Einphasentransformator unter Beachtung der komplexen Übersetzungsverhältnisse:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{s1}^{W'} &= \underline{\ddot{u}}_1 \underline{U}_{s1} & \text{und} & & \underline{I}_{s1}^{W'} &= \frac{1}{\underline{\ddot{u}}_1^*} \underline{I}_{s1} \\
 \underline{U}_{s2}^{W'} &= \underline{\ddot{u}}_2 \underline{U}_{s2} & \text{und} & & \underline{I}_{s2}^{W'} &= \frac{1}{\underline{\ddot{u}}_2^*} \underline{I}_{s2} \\
 \underline{Z}'_{\sigma s} &= \underline{\ddot{u}}_1 \underline{\ddot{u}}_1^* = \underline{\ddot{u}}^2 \underline{Z}_{\sigma s} = 3 \left(\frac{W_p}{W_s} \right)^2 \underline{Z}_{\sigma s}
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

wobei $\underline{Z}_{\sigma s}$ die Impedanz einer äquivalenten Sternwicklung auf der Sekundärseite ist. Mit den Übertragern $\underline{\ddot{u}}_1$ und $\underline{\ddot{u}}_2 = \underline{\ddot{u}}_1^*$ ergeben sich schließlich die *allgemeinen* Ersatzschaltungen des Mit- und Gegensystems in Bild 4.9. Sie entsprechen der Ersatzschaltung des Einphasentransformators in Bild 2.2 mit *komplexen* Übertragern.

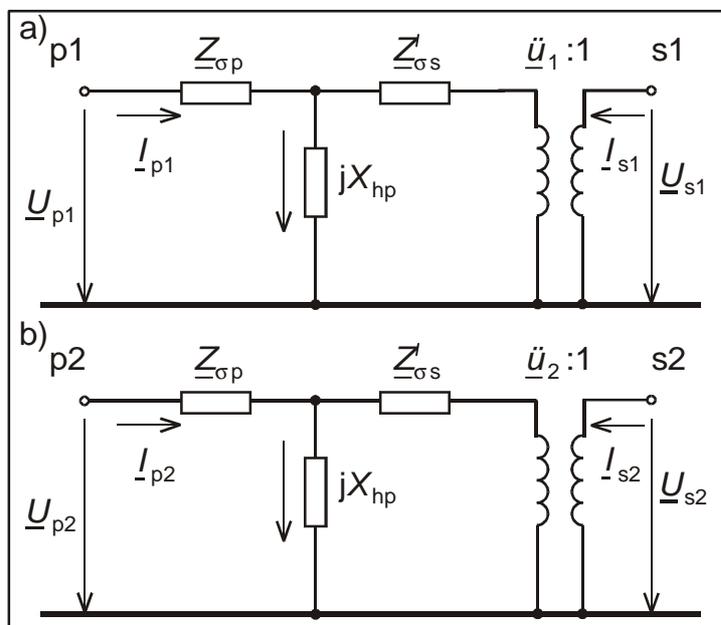


Bild 4.9: Allgemeine Ersatzschaltungen des Zweiwicklungstransformators mit der Schaltgruppe Yd5
 a) Mitsystem b) Gegensystem

4.4 Ersatzschaltungen der Schaltgruppe Yy0 mit Ausgleichwicklung

Diese Schaltung soll als Beispiel für die Ersatzschaltungen der Dreiwicklungstransformatoren dienen. Die Ausgleichwicklung oder Tertiärwicklung ist eine kurzgeschlossene Dreieckswicklung. Mit der Kenntnis der Schaltungsbedingungen für die Stern- und Dreieckswicklung aus den Abschnitten 4.2 und 4.3 können wir ausgehend von der Ersatzschaltung der Wicklungsgrößen entsprechend Bild 4.2 sofort die im Bild 4.10 gezeichneten Ersatzschaltungen angeben. Die Ausgleichwicklung ist im Mit- und Gegensystem stromlos, und der Zweig mit $\underline{Z}'_{\sigma t}$ kann in diesen Ersatzschaltungen auch weggelassen werden. Im Nullsystem ist die Ausgleichwicklung intern kurzgeschlossen und kann bei einer Sternpunktbelastung eine Gegendurchflutung aufbringen, so daß die Sternpunktbelastung zulässig ist. Die tertiärseitige Eingangs-

impedanz des Nullsystems ist wegen der Unterbrechung zwischen Wicklung und Klemme unendlich groß.

Die der Primär- und Sekundärseite, so wie die Durchgangsimpedanz von Primär- und Sekundärseite im Nullsystem hängen von der Sternpunkterdung ab. In Bild 4.10 ist der primärseitige Sternpunkt über Z_{Mp} und der sekundärseitige starr geerdet.

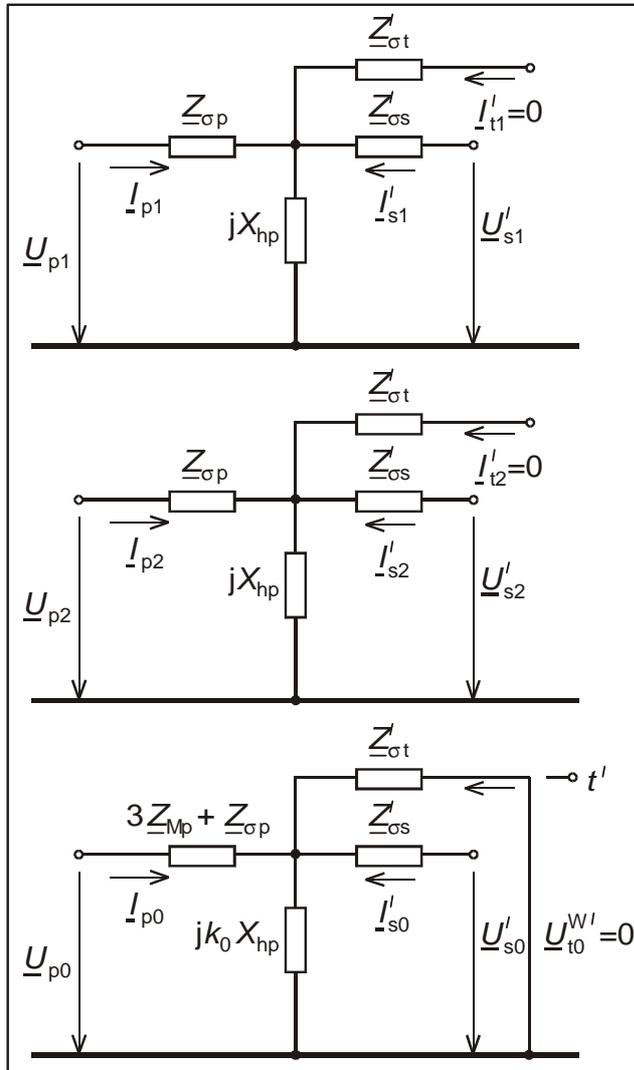


Bild 4.10: Ersatzschaltungen der Symmetrischen Komponenten des Zweiwicklungstransformators mit der Schaltgruppe Yy0 und Ausgleichwicklung

Ist ein Sternpunkt nicht geerdet, so ist die Nullimpedanz unendlich groß. Die Eingangsimpedanz der Primärseite bei Sternpunkterdung nur auf der Primärseite wird:

$$Z_{p0} = Z_{\sigma p} + 3Z_{Mp} + jk_0 X_{hp} \parallel Z'_{\sigma t} = Z_{\sigma p} + 3Z_{Mp} + \frac{jk_0 X_{hp} Z'_{\sigma t}}{Z'_{\sigma t} + jk_0 X_{hp}}$$

Entsprechend gilt für die Eingangsimpedanz der Sekundärseite bei Erdung nur auf der Sekundärseite:

$$Z'_{s0} = Z'_{\sigma s} + 3Z'_{Ms} + jk_0 X_{hs} \parallel Z_{\sigma t} = Z'_{\sigma s} + 3Z'_{Ms} + \frac{jk_0 X_{hs} Z_{\sigma t}}{Z_{\sigma t} + jk_0 X_{hs}}$$

Für $k_0 = 1$ (Fünfschenkeltransformator und Drehstrombank) wird daraus näherungsweise:

$$\underline{Z}_{p0} = \underline{Z}_{op} + \underline{Z}'_{ot} + 3\underline{Z}_{Mp} = \underline{Z}_{pt} + 3\underline{Z}_{Mp}$$

$$\underline{Z}'_{s0} = \underline{Z}'_{os} + \underline{Z}'_{ot} + 3\underline{Z}'_{Ms} = \underline{Z}'_{st} + 3\underline{Z}'_{Ms}$$

Beim Dreischenkeltransformator ergibt die Parallelschaltung von $jk_0 X_{hp}$ mit \underline{Z}'_{ot} bei Vernachlässigung von R'_t unter der Annahme $X'_{ot} = X_{pt} / 2$:

$$\frac{k_0 X_{hp} \frac{1}{2} X_{pt}}{k_0 X_{hp} + \frac{1}{2} X_{pt}} = \frac{k_0 X_{hp} X_{pt}}{2k_0 X_{hp} + X_{pt}} \approx \frac{1}{2} X_{pt}$$

4.5 Ersatzschaltungen der Schaltgruppe Yz5*

Die Schaltgruppe Yz5 ist wegen der Aufteilung der Wicklungsstränge der Zickzack-schaltung auf der Sekundärseite auf je zwei Wicklungsstränge zunächst wie ein Dreiwicklungstransformator zu behandeln.

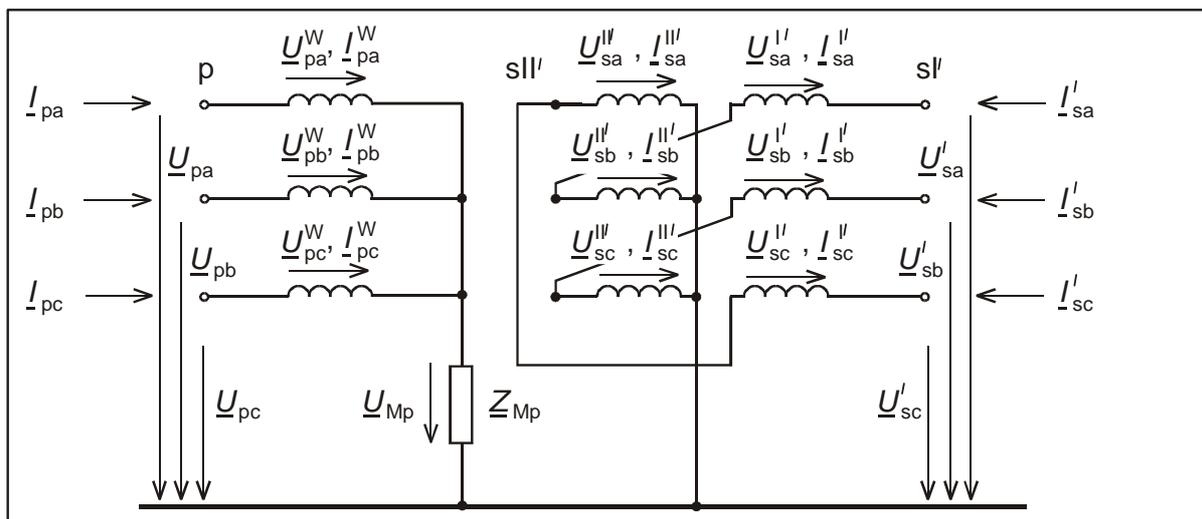


Bild 4.11: Schaltung der Schaltgruppe Yz5 mit Zählpfeilen

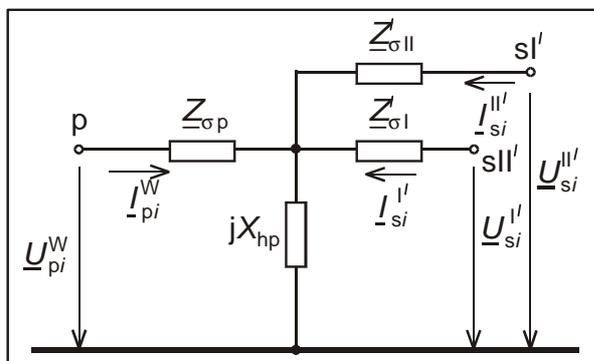


Bild 4.12: Wicklungsersatzschaltung für die Symmetrischen Komponenten ($i = 1, 2, 0$) der Schaltgruppe Yz5

Für die Wicklungsgrößen ergibt sich mit den Bezeichnungen aus Bild 4.11 in Analogie zu Bild 4.2 die in Bild 4.12 dargestellte Ersatzschaltung für die Symmetrischen Komponenten. Ihre Vervollständigung bis zu den Klemmengrößen auf der Primärsei-

te ist nach der Behandlung der Schaltgruppen Yy0 und Yd5 klar. Auf der Sekundärseite gilt nach Abschnitt 3.3:

$$\underline{U}'_{s1} = -\underline{U}'_{s1} + \underline{a}^2 \underline{U}''_{s1} \quad \underline{I}'_{s1} = -\underline{I}'_{s1} \quad \underline{I}''_{s1} = \underline{a}' \underline{I}'_{s1} \quad (4.20)$$

$$\underline{U}'_{s2} = -\underline{U}'_{s2} + \underline{a} \underline{U}''_{s2} \quad \underline{I}'_{s2} = -\underline{I}'_{s2} \quad \underline{I}''_{s2} = \underline{a} \underline{I}'_{s2} \quad (4.21)$$

$$\underline{U}'_{s0} = -\underline{U}'_{s0} + \underline{U}''_{s0} \quad \underline{I}'_{s0} = -\underline{I}'_{s0} \quad \underline{I}''_{s0} = \underline{I}'_{s0} \quad (4.22)$$

Wir führen wieder komplexe Übertrager ein und erhalten so die Ersatzschaltungen in Bild 4.13:

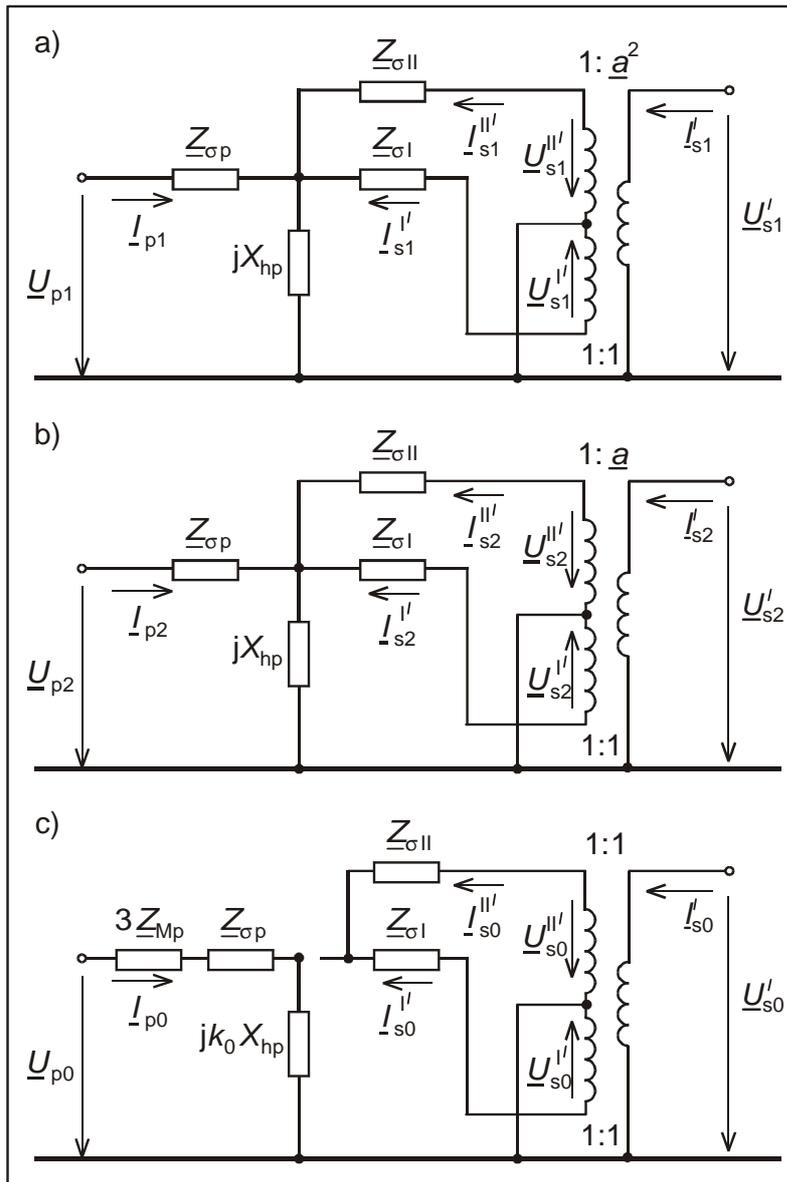


Bild 4.13: Ersatzschaltung der Symmetrischen Komponenten der Schaltgruppe Yz5
 a) Mitsystem b) Gegensystem c) Nullsystem mit Unterbrechung

Unter Benutzung der für jede Komponente gültigen Beziehung (s. Bild 4.12):

$$\underline{U}'_{si} = \underline{U}_{hpi} + \underline{Z}'_{\sigma 1} \underline{I}'_{-si}$$

$$\underline{U}''_{si} = \underline{U}_{hpi} + \underline{Z}'_{\sigma 11} \underline{I}'_{-si}$$

formen wir die Gln. (4.20) bis (4.22) noch wie folgt um:

$$\underline{U}'_{s1} = -\underline{U}'_{s1} + \underline{a}^2 \underline{U}''_{s1} = -\underline{U}_{hp1} + \underline{a}^2 \underline{U}_{hp1} - \underline{Z}'_{\sigma1} \underline{I}'_{s1} + \underline{a}^2 \underline{Z}'_{\sigma1} \underline{I}''_{s1} = \underline{m}_5^* \underline{U}_{hp1} + (\underline{Z}'_{\sigma1} + \underline{Z}'_{\sigma1}) \underline{I}'_{s1}$$

Mit der der Gl. (3.22) entsprechenden Beziehung:

$$\underline{I}'_{s1} = \frac{1}{\underline{a}-1} (\underline{I}'_{s1} + \underline{I}''_{s1}) = \frac{1}{\underline{m}_5} \underline{I}^{W'}_{s1} \quad (4.23)$$

folgt weiter:

$$\underline{U}'_{s1} = \underline{m}_5^* \underline{U}_{hp1} + \frac{\underline{Z}'_{\sigma1} + \underline{Z}'_{\sigma1}}{\underline{m}_5} \underline{I}^{W'}_{s1} = \underline{m}_5^* (\underline{U}_{hp1} + \frac{\underline{Z}'_{\sigma1} + \underline{Z}'_{\sigma1}}{\underline{m}_5^* \underline{m}_5} \underline{I}^{W'}_{s1})$$

und mit $\underline{m}_5^* \underline{m}_5 = 3$ sowie:

$$\frac{1}{3} (\underline{Z}'_{\sigma1} + \underline{Z}'_{\sigma1}) = \underline{Z}'_{\sigma s}$$

$$\underline{U}'_{s1} = \underline{m}_5^* (\underline{U}_{hp1} + \underline{Z}'_{\sigma s} \underline{I}^{W'}_{s1}) = \underline{m}_5^* \underline{U}^{W'}_{s1} \quad (4.24)$$

Ebenso erhalten wir für das Gegensystem:

$$\underline{I}''_{s2} = \frac{1}{\underline{a}^2 - 1} (\underline{I}'_{s2} + \underline{I}''_{s2}) = \frac{1}{\underline{m}_5^*} \underline{I}^{W'}_{s2} \quad (4.25)$$

$$\underline{U}'_{s2} = \underline{m}_5 (\underline{U}_{hp2} + \underline{Z}'_{\sigma s} \underline{I}^{W'}_{s2}) = \underline{m}_5 \underline{U}^{W'}_{s2} \quad (4.26)$$

und für das Nullsystem:

$$\underline{U}'_{s0} = 3 \underline{Z}'_{\sigma s} \underline{I}'_{s0} \quad (4.27)$$

Mit $\underline{U}^{W'}_{s1}, \underline{U}^{W'}_{s2}, \underline{I}^{W'}_{s1}, \underline{I}^{W'}_{s2}$ und $\underline{Z}'_{\sigma s}$ wurden fiktive Wicklungsgrößen für die Sekundärseite eingeführt, mit denen sich die Zweiwicklungs-Ersatzschaltungen in Bild 4.14 angeben lassen. Auf der rechten Seite der Ersatzschaltungen sind noch zusätzliche Übertrager für das Wicklungs-Übersetzungsverhältnis $n_{ps} = 2w_p / w_s$ hinzugefügt worden. Der Faktor 2 rührt daher, daß die Zickzackwicklung auf zwei Stränge, die jeweils die Windungszahl $w_s / 2$ haben, aufgeteilt ist. Im Mit- und Gegensystem können die Übertrager wieder zusammengefaßt werden, wodurch die Ersatzschaltungen schließlich die für den Zweiwickler allgemeine Form aus Bild 4.9 erhält. Das Übersetzungsverhältnis für das Mitsystem wird:

$$\underline{\dot{u}}_1 = \frac{1}{\underline{m}_5^*} \cdot 2 \frac{w_p}{w_s} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{w_p}{w_s} \angle 150^\circ = \underline{\dot{u}} \angle 150^\circ \quad (4.28)$$

Das Übersetzungsverhältnis des Gegensystems ist wieder konjugiert komplex zu dem des Mitsystems, also $\underline{\ddot{u}}_2 = \underline{\ddot{u}}_1^*$.

Im Mit- und Gegensystem ist auf der Sekundärseite die Summe $\underline{Z}_{\sigma I} + \underline{Z}_{\sigma II}$ wirksam, was sich durch Transformation von $\underline{Z}'_{\sigma s}$ auf die Originalspannungsebene der Sekundärseite bestätigen muß:

$$\underline{Z}_{\sigma s} = \frac{\underline{Z}'_{\sigma s}}{\underline{\ddot{u}}_1 \underline{\ddot{u}}_1^*} = \frac{1}{\underline{\ddot{u}}^2} \frac{\underline{Z}'_{\sigma I} + \underline{Z}'_{\sigma II}}{3} = 3 \left(\frac{w_s}{2w_p} \right)^2 \left(\frac{2w_p}{w_s} \right)^2 \frac{\underline{Z}_{\sigma I} + \underline{Z}_{\sigma II}}{3} = \underline{Z}_{\sigma I} + \underline{Z}_{\sigma II}$$

Im Nullsystem ist auf der Sekundärseite die Eingangs-Impedanz

$$\underline{Z}_{\sigma s0} = \frac{1}{\underline{\ddot{u}}_0^2} 3 \underline{Z}'_{\sigma s} = \left(\frac{w_s}{2w_p} \right)^2 3 \underline{Z}'_{\sigma s} = \left(\frac{w_s}{2w_p} \right)^2 3 \left(\frac{2w_p}{w_s} \right)^2 \frac{\underline{Z}_{\sigma I} + \underline{Z}_{\sigma II}}{3} = \underline{Z}_{\sigma I} + \underline{Z}_{\sigma II}$$

wirksam.

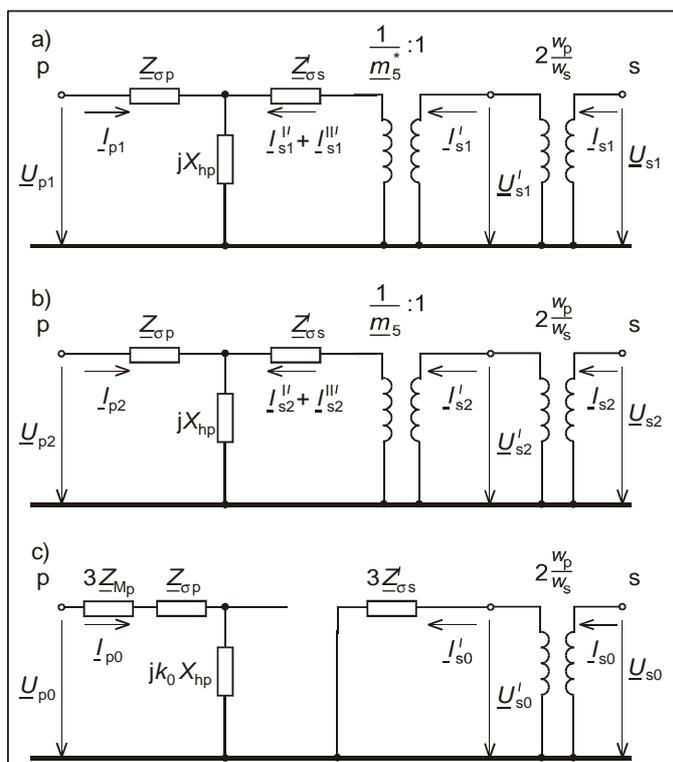


Bild 4.14: Ersatzschaltung der Symmetrischen Komponenten des Zweiwicklungs-
transformators mit der Schaltgruppe Yz5

a) Mitsystem b) Gegensystem c) Nullsystem

Ein Nullsystem auf der Sekundärseite trägt nicht zur Magnetisierung bei. Der Transformator ist damit auf der Zickzackseite voll sternpunktbelastbar. Die Durchgangsimpedanz von der Primär- zur Sekundärseite im Nullsystem ist unendlich groß.

Auf der Primärseite hängt die Eingangsimpedanz von der Sternpunkterdung ab, wobei eine Sternpunktbelastung je nach Kernbauart nicht zulässig ist oder nur gering sein darf.

4.6 Einsatz der Schaltgruppen

Für die in Kapitel 1 (s. Bild 1.5) genannten Haupt-Einsatzgebiete der Transformatoren haben sich folgende Schaltgruppen als zweckmäßig erwiesen:

Netzkuppeltransformatoren:	Yy0 mit Δ -Ausgleichswicklung
Blocktransformatoren:	Yd5, (Yd11)
Blockeigenbedarfstransformatoren	Yy0, Yd5, (Dd0)
Verteilungstransformatoren:	Yy0, Yd5
Ortsnetztransformatoren:	Dy5 und Yz5

380/220- oder 380/110-kV-*Netzkuppeltransformatoren* haben auf jeder Seite eine relativ hohe Bemessungsspannung, für die die Sternschaltung der Wicklungen wirtschaftlicher ist als die Dreieckswicklung. Außerdem muß auf beiden Seiten der Sternpunkt zugänglich sein, da die Hochspannungsnetze i.a. niederohmig geerdet werden. Um die Sternpunkte auch voll belasten zu können, wird eine zusätzliche Ausgleichswicklung in Dreieckschaltung vorgesehen. *Blocktransformatoren* haben auf der Generatorseite eine relativ geringe Bemessungsspannung, so daß für die Unterspannungsseite mit hohen Strömen die Dreieckschaltung günstiger ist. Ein Sternpunkt wird auf der Unterspannungsseite nicht benötigt, da die Generatoren generell nicht im Sternpunkt geerdet werden. Dagegen ist auf der Oberspannungsseite wieder ein Sternpunkt zur Erdung des Hochspannungsnetzes erwünscht. Dem kommt wie beim Netzkuppeltransformator entgegen, daß die Sternschaltung auf der Oberseite wirtschaftlicher ist. *Blockeigenbedarfstransformatoren* spannen lediglich in der Mittelspannungsebene um und haben somit sowohl auf der Oberspannungs- als auch auf der Unterspannungsseite relativ kleine Bemessungsspannungen. Es kommen sowohl die Schaltgruppen Yy0, Yd5 und bisweilen auch Dd0 in Frage, wobei die Dreieckswicklung bei großer Eigenbedarfsleistung bevorzugt wird. Die relativ kleinen Eigenbedarfsnetze werden gewöhnlich ohne Sternpunkterdung betrieben, so daß ein Sternpunkt nicht benötigt wird.

Verteilungstransformatoren (HS-MS) werden normalerweise mit der Schaltgruppe Yy0 ausgeführt, um den wirtschaftlichen Vorteil der Sternschaltung zu nutzen. Eine Ausgleichswicklung lohnt sich meist nicht, da zum einen kaum Unsymmetriezustände im Normalbetrieb auftreten und zum anderen die Sternpunkte dieser Transformatoren gewöhnlich nicht oder wenn überhaupt, dann nur auf der Unterspannungsseite über Erdschluß-Kompensationsspulen geerdet werden. Der Anschluß der Erdschluß-Kompensationsspulen für das 110-kV-Netz erfolgt an den unterspannungsseitigen Sternpunkten der Netztransformatoren (s. Skript Sternpunkterdung). Ist dennoch eine Erdung der oberspannungsseitigen Sternpunkte vorgesehen, so ist anstelle der Schaltgruppe Yy0 die Schaltgruppe Yd5 einzusetzen, bei der die Dreieckswicklung auf der Unterspannungsseite für eine volle Sternpunktbelastbarkeit auf der Oberspannungsseite sorgt.

An *Ortsnetztransformatoren* (MS-NS) werden auf der Niederspannungsseite Abnehmer einphasig angeschlossen. Sie müssen also einen zugängigen Sternpunkt haben, und es ist mit unsymmetrischer Belastung im Normalbetrieb zu rechnen. Somit bieten sich die Schaltgruppen Dy5 und Yz5 an.

4.7 Zusammenfassung - Allgemeine Ersatzschaltbilder der Zweiwicklungstransformatoren

Wir haben Ersatzschaltungen der Transformatoren mit und ohne Übertrager kennengelernt. Die Mitsystem-Ersatzschaltungen mit Übertrager bestehen gewöhnlich aus einer T-Ersatzschaltung der auf eine Spannungsebene umgerechneten Schaltelemente und einem Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $\underline{\dot{u}}_1$ (Bild 4.15).

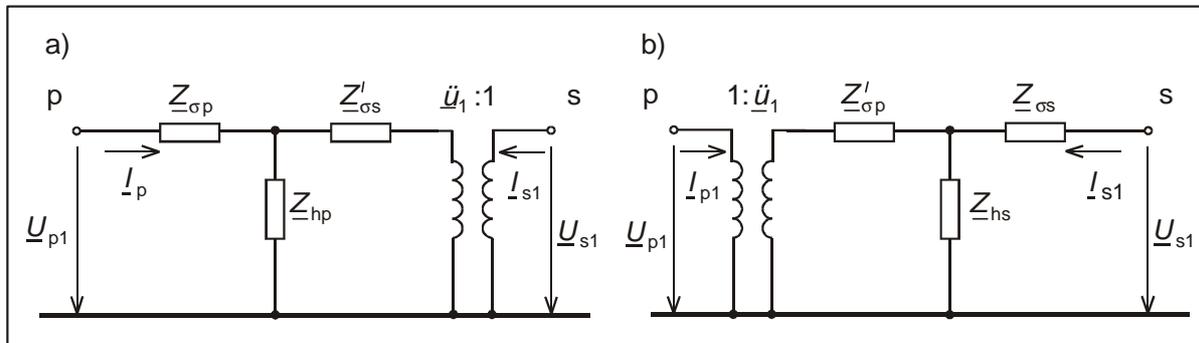


Bild 4.15: Mitsystem-Ersatzschaltungen des Zweiwicklungs-Transformators mit Übertrager
 a) mit auf die Primärseite umgerechneten Parametern
 b) mit auf die Sekundärseite umgerechneten Parametern

Für die 4 Vorzugsschaltgruppen ist das Übersetzungsverhältnis $\underline{\dot{u}}_1$ in Tabelle 4 zusammengestellt.

Tabelle 4.1: Kennzeichen der Vorzugsschaltgruppen

SG	Anwendung	$\underline{\dot{u}}_1$	OS	US
Yy0	Netzkupplentransformatoren Verteilungstransformatoren	$\frac{w_p}{w_s}$		
Yd5	Blocktransformatoren Verteilungstransformatoren	$\sqrt{3} \frac{w_p}{w_s} e^{j150^\circ}$		
Dy5	Ortsnetztransformatoren	$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{w_p}{w_s} e^{j150^\circ}$		
Yz5	Ortsnetztransformatoren	$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{w_p}{w_s} e^{j150^\circ}$		

Die Ersatzschaltungen für das Gegensystem unterscheiden sich von denen des Mitsystems nur durch den konjugiert komplexen Wert des Übersetzungsverhältnisses $\underline{\dot{u}}_2 = \underline{\dot{u}}_1^*$.

Die Ersatzschaltungen für das Mitsystem ohne Übertrager werden zweckmäßigerweise in Π -Form angegeben, wobei die Querglieder im Gegensatz zur T-Schaltung mit Übertrager auf keinen Fall vernachlässigt werden können (Bild 4.16).

Die entsprechenden Gegensystem-Ersatzschaltungen enthalten wieder $\underline{\dot{u}}_2 = \underline{\dot{u}}_1^*$ anstelle von $\underline{\dot{u}}_1$ an den Ausdrücken der Schaltungselemente.

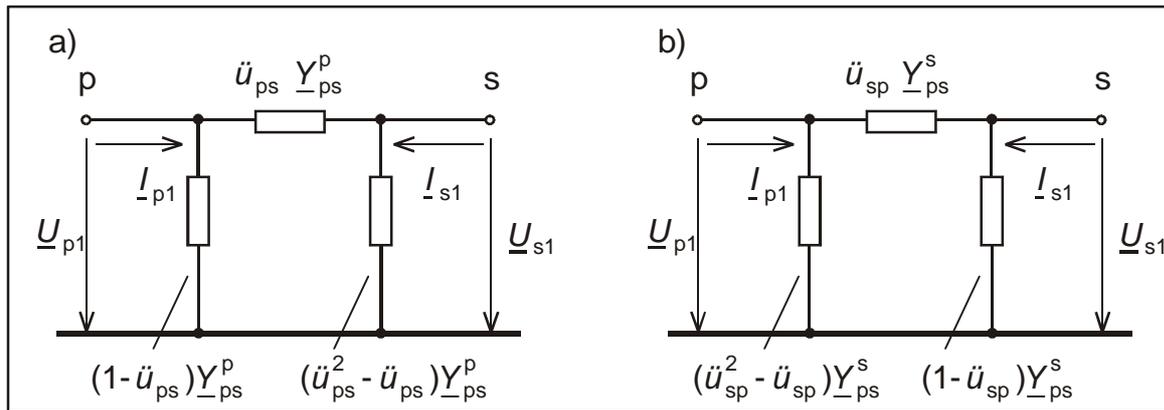


Bild 4.16: Mitsystem-Ersatzschaltungen des Zweiwicklungs-Transformators ohne Übertrager (Magnetisierungsstrom vernachlässigt)

- a) mit für die Primärseite bereitgestellten Parametern
- b) mit für die Sekundärseite bereitgestellten Parametern

Die Nullsystem-Ersatzschaltungen hängen ab von:

- der Art der Schaltgruppe
- der Art der Sternpunktterdung
- der Kernbauart (freier oder erzwungener magnetischer Rückschluß).

In Tabelle 4.2 sind die Nullsystem-Ersatzschaltungen der Vorzugsschaltgruppen mit auf die Primärseite umgerechneten Sekundärgrößen in Abhängigkeit von der Art der Sternpunktterdung und der Kernbauart zusammengestellt. Mit Z_{p00} und Z'_{s00} sind dabei auch die primär- und sekundärseitigen Eingangsimpedanzen und mit Z_{ps0} die Durchgangsimpedanz angegeben.

Tabelle 4.2: Kennzeichen der Vorzugsschaltgruppen

SG	OS	US		Z_{p00}	Z'_{s00}	Z_{ps0}
Yy0				∞	∞	∞
				$3Z_{Mp} + Z_{cp} + jk_0 X_{hp}$	∞	∞
				∞	∞	$3Z'_{Ms} + Z'_{cs} + jk_0 X_{hp}$
Yd5				∞	∞	∞
				$3Z_{Mp} + Z_{cp} + Z'_{cs} \parallel jk_0 X_{hp}$	∞	∞

Tabelle 4.2 Fortsetzung

Dy5			∞	∞	∞
			∞	∞	$3Z'_{Ms} + Z'_{\sigma s} + Z_{cp} \parallel jk_0 X_{hp}$
Yz5			∞	$3Z'_{\sigma s}$	∞
			$3Z_{Mp} + Z_{cp} + jk_0 X_{hp}$	∞	∞

5 Spartransformatoren

Das Prinzip des Spar- oder im Ausland auch als *Autotransformator* bezeichneten Transformators ist aus Bild 5.1 ersichtlich.

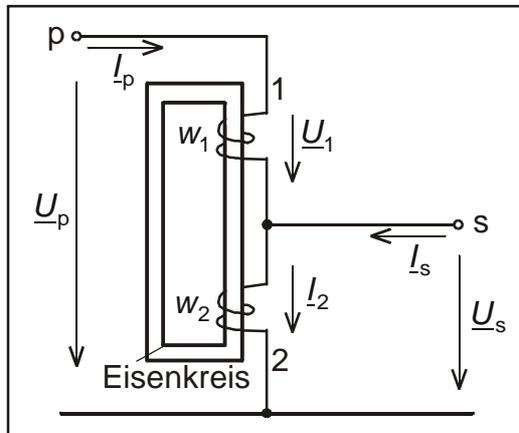


Bild 5.1: Prinzipschaltung des Einphasen-Spartransformators

Der Primär- und Sekundärseite ist ein Teil der Wicklung, die sog. *Stammwicklung* mit der Windungszahl w_2 , gemeinsam. Während beim Volltransformator die gesamte Leistung von Wicklung zu Wicklung auf dem Eisenweg übertragen wird, wird beim Spartransformator ein Teil der Leistung zwischen den Wicklungen 1 und 2 auf dem Eisenweg und der andere Teil auf direktem Weg übertragen.

Die Baugröße eines Transformators wird durch die auf dem Eisenweg übertragene Scheinleistung, die sog. *Typenleistung*, bestimmt. Beim Zweiwicklungs-Volltransformator ist somit die Typenleistung stets gleich der Durchgangsleistung, die wiederum der *Bemessungsleistung* gleich ist. Für Mehrwicklungstransformatoren berechnet man die Typenleistung als Summe der halben Bemessungsleistungen der Wicklungen. So hat beispielsweise ein 100/100/33-MVA-Transformator eine Typenleistung von 116,5 MVA und Durchgangsleistungen von 100 bzw. 33 MVA.

Die Durchgangsleistung des Spartransformators ergibt sich wie beim Volltransformator aus:

$$S_D = S_{rT} = \sqrt{3} U_{rT}^p I_{rT}^p = \sqrt{3} U_{rT}^s I_{rT}^s \quad (5.1)$$

Die Typenleistung, also der *magnetisch* übertragene Leistungsanteil, beträgt demgegenüber:

$$S_T = \sqrt{3} U_{1r} I_{rT}^p = \sqrt{3} U_{rT}^s I_{2r} \quad (5.2)$$

Mit $U_{1r} = U_{rT}^p - U_{rT}^s$ folgt für das Verhältnis der Leistungen:

$$\boxed{\frac{S_T}{S_D} = \frac{\sqrt{3} (U_{rT}^p - U_{rT}^s) I_{rT}^p}{\sqrt{3} U_{rT}^p I_{rT}^p} = 1 - \frac{U_{rT}^s}{U_{rT}^p}} \quad (5.3)$$

Um ein kleines, d.h. günstiges Verhältnis von S_T zu S_D zu erhalten, darf sich demnach U_{rT}^s nicht zu stark von U_{rT}^p unterscheiden. Es lohnen sich Spartransformatoren also nur für Spannungsverhältnisse:

$$\frac{U_{rT}^p}{U_{rT}^s} \leq 2$$

Man setzt im Netzbetrieb Spartransformatoren in Form von Drehstrombänken mit Dreiecksausgleichswicklung zur Kupplung der 220- und 380-kV-Netze ein, wo die Bedingung für das wirtschaftliche Spannungsverhältnis erfüllt ist, und außerdem die galvanische Kopplung der Netze nicht stört, da beide Netze niederohmig sternpunktgeerdet werden. Die *Schaltgruppe* der Spartransformatoren ist stets Yy0.

Zusammengefaßt bestehen die *Vorteile* des Spartransformators in der bei gleicher Durchgangsleistung kleineren Baugröße (es sind größere Einheitsleistungen bahntransportfähig) und in einem besseren Wirkungsgrad (mit S_T sinken auch die Verluste, bezogen auf die Durchgangsleistung), während die für Spartransformatoren typischen, kleineren Kurzschlußspannungen ($u_k = 7 \dots 10 \%$) u. U. nachteilig sein können (höhere Kurzschlußströme) und die galvanische Kopplung der Netze in Kauf genommen werden muß. Bei Unterbrechung der Wicklung 2 liegt die volle Primärspannung an der Sekundärseite an, weshalb man auch mit Rücksicht auf diesen Fall $U_{rT}^p / U_{rT}^s \leq 2$ einhalten sollte.

6 Regeltransformatoren

Zur Beeinflussung der Spannungsverhältnisse und des Leistungsflusses im Netz werden die Block- und Netzkuppeltransformatoren als Regeltransformatoren ausgeführt. An Regeltransformatoren kann die Spannung nach Betrag und Phasenlage unter Last mit Hilfe des sog. *Stufenschalters* eingestellt werden. In der Ersatzschaltung ändert sich bei Regeltransformatoren das (komplexe) Übersetzungsverhältnis. Praktisch wird die Regelung so realisiert, daß - meist auf der Oberspannungsseite - eine *Zusatzspannung* aufgebracht wird, die zur Spannung der Haupt- oder Stammwicklung addiert oder von ihr abgezogen wird. Je nach der Phasenlage der Zusatzspannung teilt man die Regeltransformatoren in *Längs-* (gleiche Phasenlage), *Quer-* (90°-Phasenunterschied) und *Schrägregler* (60° oder 30°-Phasenlage) ein (Bild 6.1).

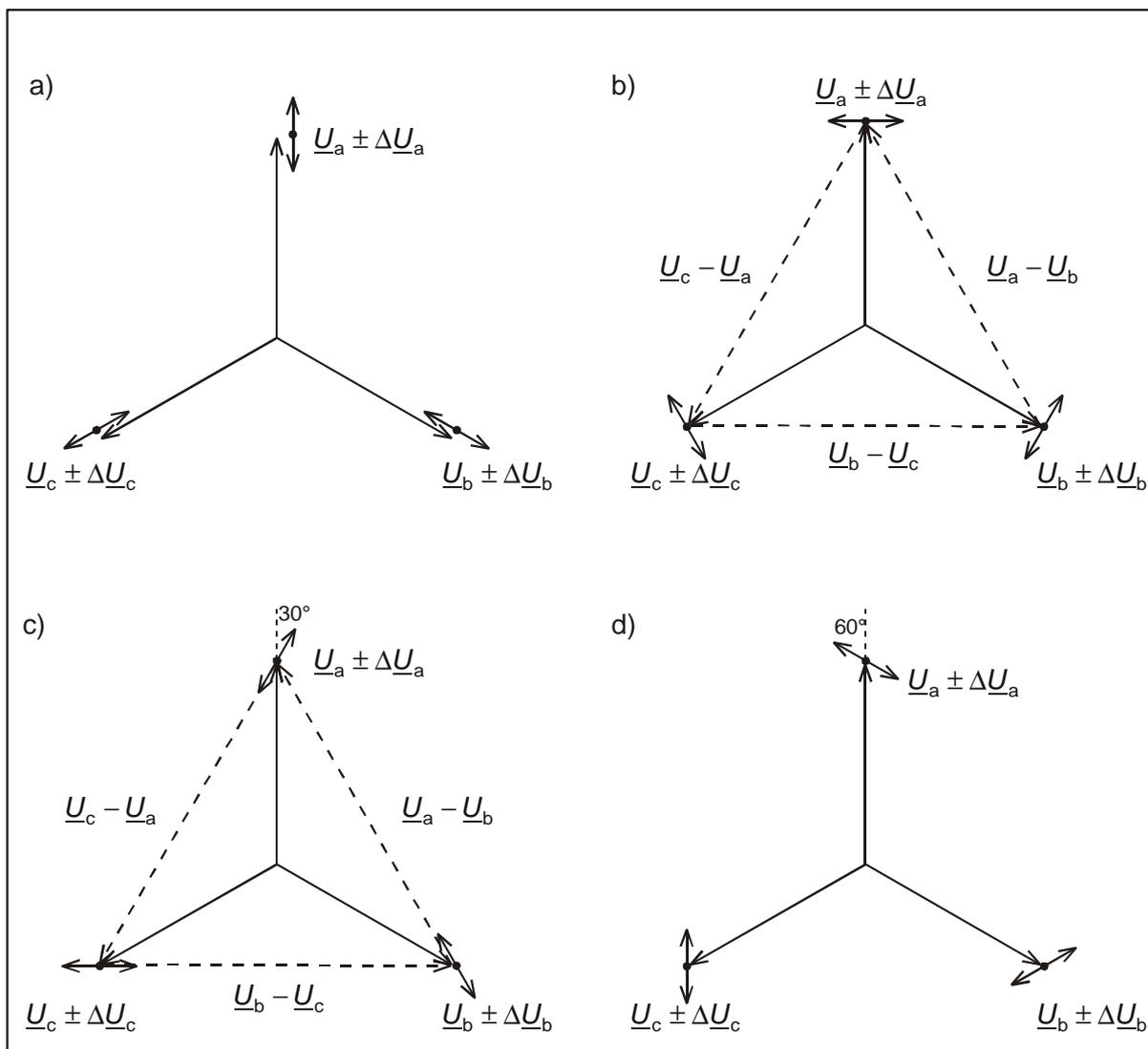


Bild 6.1: Phasenlagen der Zusatzspannungen bei den verschiedenen Regelprinzipien

- a) Längsregelung
- b) Querregelung
- c) 30°-Schrägregelung
- d) 60°-Schrägregelung

Das Prinzip der Leistungsbeeinflussung durch die Transformatorregelung erklärt das Bild 6.2.

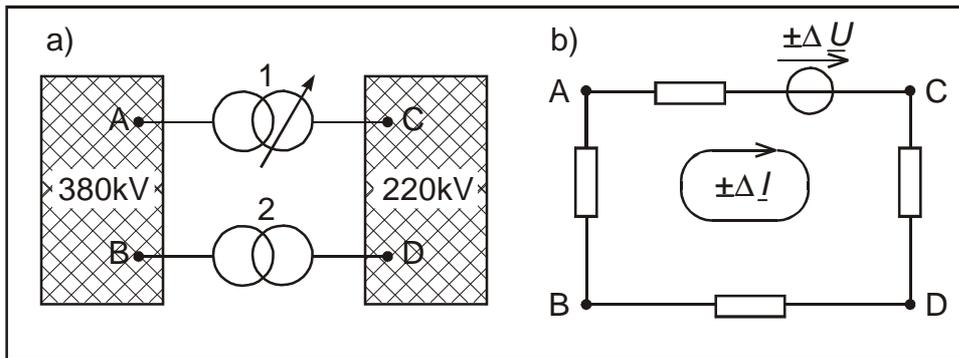


Bild 6.2: Prinzip der Leistungsregelung mit Transformatoren

- a) Anordnung
- b) Ersatzkreis

Die von Regeltransformator 1 aufgebrachte Zusatzspannung $\pm\Delta U$ bewirkt einen Ringstrom $\pm\Delta I$, der sich den ursprünglichen Strömen überlagert und damit die Leistungsflüsse sowohl in den beiden Netzen als auch zwischen den beiden Netzen beeinflusst.

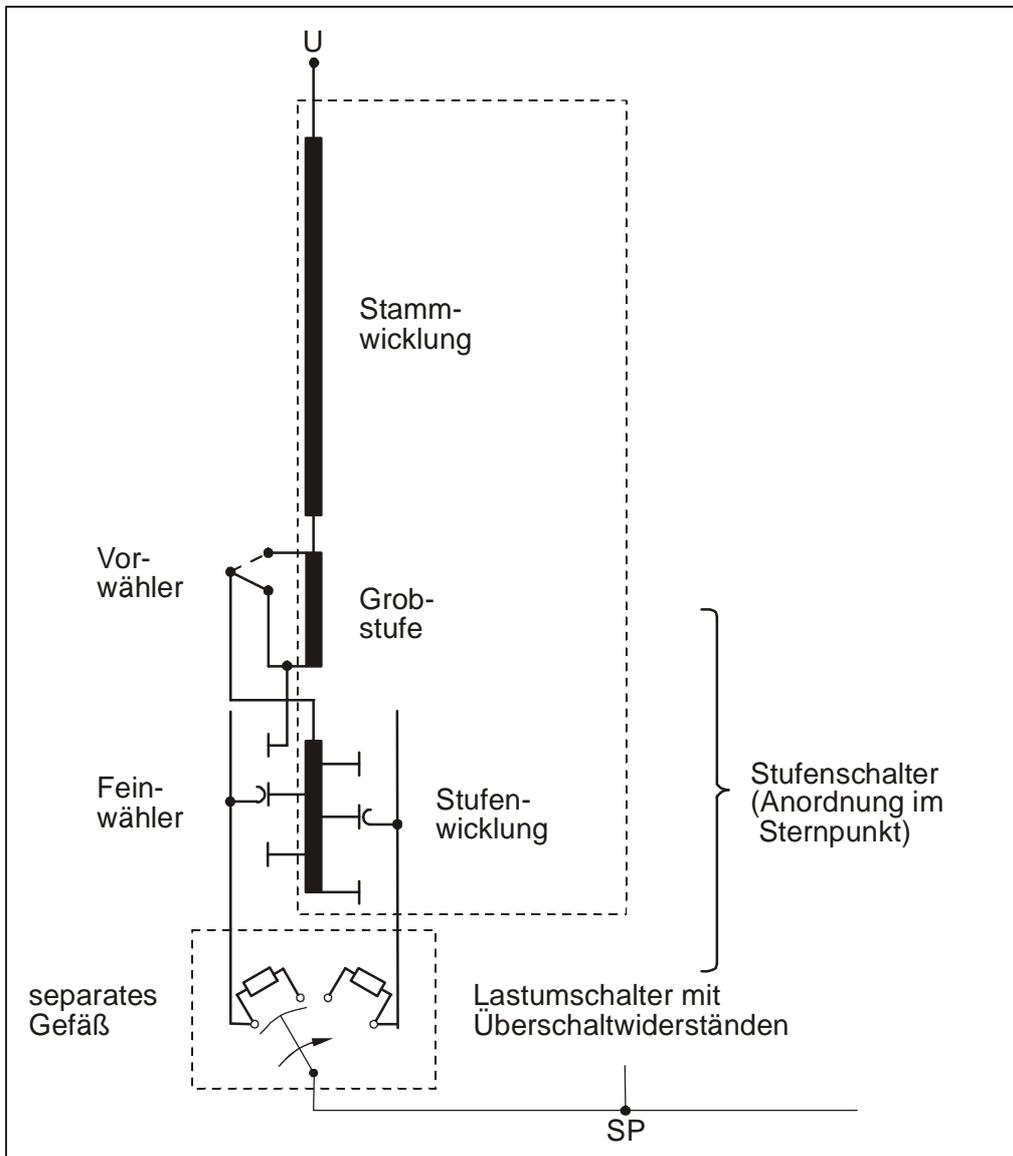


Bild 6.3: Längsregelung nach dem Grob-/Feinprinzip

Die Maschinen- oder Blocktransformatoren der großen Kraftwerkseinheiten sind gewöhnlich mit einer *Längsregelung* ausgerüstet. Die Schaltung geht aus Bild 6.3, in dem ein Strang der geregelten Oberspannungswicklung dargestellt ist, hervor. Die Zusatzspannung wird von der Zusatzwicklung aufgebracht, die aus einer *Grobstufe* und einer *Stufenwicklung* besteht und auf dem gleichen Schenkel wie die Stammwicklung (wegen der gewünschten gleichen bzw. entgegengesetzten Phasenlage) angeordnet ist. Die Grobstufe kann durch einen *Vorwähler* umgepolt werden, wodurch der Regelbereich in beide Richtungen geht. Über dem *Feinwähler* und *Lastumschalter* ist die Spannung im Bereich von $\pm 10 \dots 16 \%$ in $18 (\pm 9)$ bis $26 (\pm 13)$ Stufen und in Sonderfällen bis $\pm 22 \%$ verstellbar. Der Spannungsunterschied ΔU zwischen den einzelnen Stufen beträgt mit Rücksicht auf die Spannungsschwankungen bei der Umschaltung $1 \dots 1,5 \%$ von U_r . Für den unterbrechungsfreien Übergang auf eine nächste Stufe wird diese zunächst mit dem Feinwähler stromlos angewählt und danach der Lastumschalter, der mit einem Motor-Federantrieb arbeitet, betätigt. Während des Umschaltens wird die Wicklungsstufe zwischen dem alten und neuen Abgriff kurzzeitig kurzgeschlossen (Mittelstellung des Schalterkontaktes in Bild 6.3). Die *Überschaltwiderstände* begrenzen dabei den Kurzschlußstrom und die Schalterbeanspruchung.

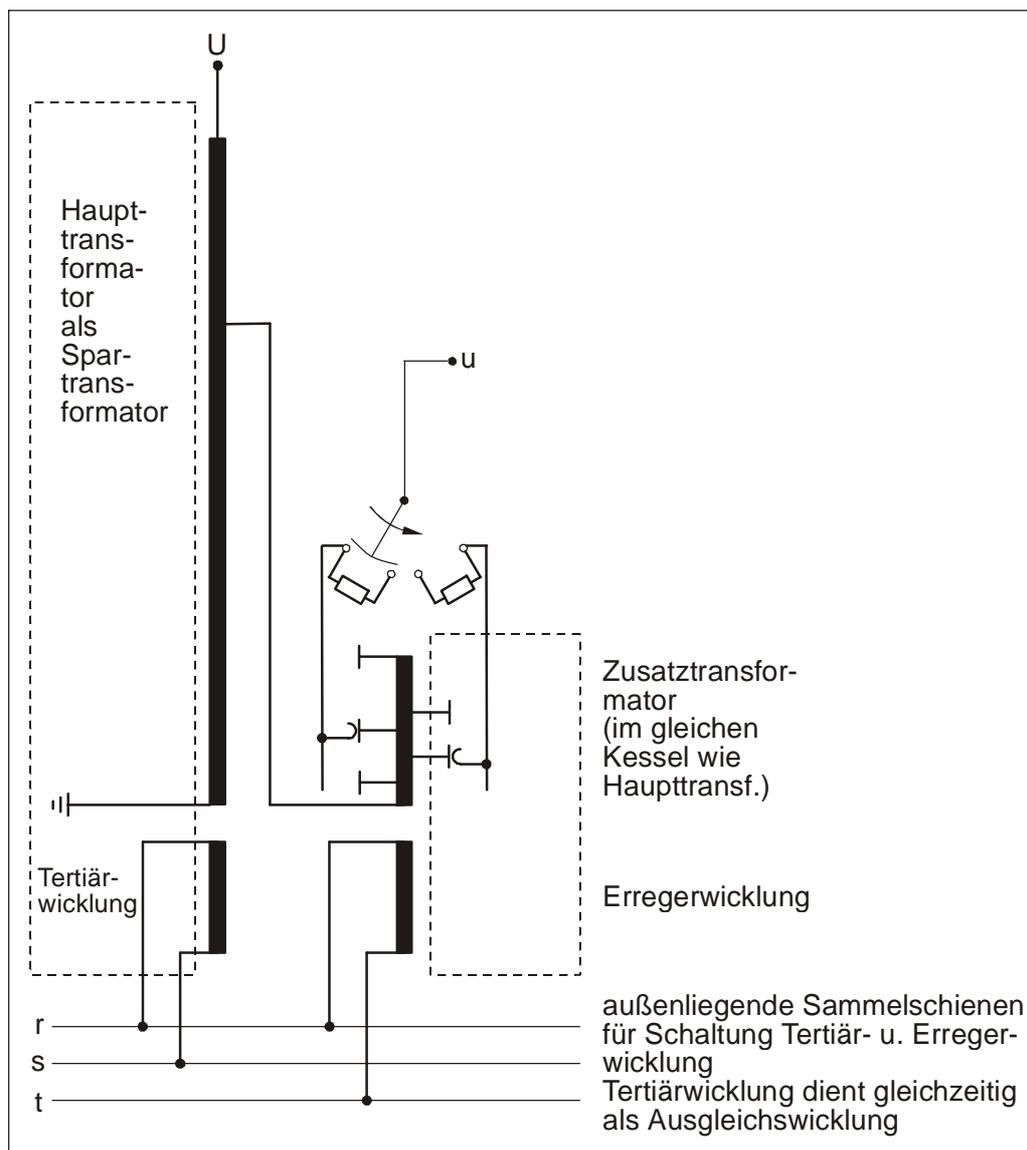


Bild 6.4: Spartransformator mit 30°-Schrägregelung

Der Lastumschalter ist mit den Überschaltwiderständen in einem separaten Gefäß im Kessel des Transformators untergebracht, während die stromlos betätigten Vorwähler im Transformator in die Nähe der Wicklungsanzapfungen gelegt werden können. Nach dem Erfinder bezeichnet man Stufenschalter, die nach dem hier beschriebenen Prinzip der Widerstandsschnellumschaltung funktionieren, auch als JANSEN-Stufenschalter.

Netzkuppeltransformatoren werden als Schrägregler ausgeführt. Das Bild 6.4 zeigt die Schaltung eines Stranges eines in Sparschaltung ausgeführten Schrägreglers mit Dreiecks-Ausgleichswicklung.

Die Anschlüsse der im Dreieck geschalteten Ausgleichswicklung (Tertiärwicklung) sind auf außenliegende Sammelschienen herausgeführt. Die Spannung für die Erregerwicklung des Zusatztransformators wird zwischen r und t abgegriffen, wodurch die gewünschte 30° -Phasenverschiebung der Zusatzspannung gegenüber der Spannung der Hauptwicklung wie in Bild 6.1c entsteht.

7 Transformatorparameter

7.1 Mit- und Gegensystemparameter der Zweiwicklungstransformatoren

In der Ersatzschaltung (Bild 4.15) kommen in den Längszweigen die Wirkwiderstände R_p , R'_s oder R'_p und R_s , die Streureaktanzen $X_{\sigma p}$, $X'_{\sigma s}$ oder $X'_{\sigma p}$ und $X_{\sigma s}$ sowie in den Querzweigen die Magnetisierungs- oder Hauptfeldreaktanz X_h und ein noch einzuführender Ersatzwiderstand R_{Fe} für die Eisenverluste vor.

Wie bei jedem anderen Betriebsmittel werden die Parameter der Längszweige im *Kurzschlußversuch* und die der Querzweige im *Leerlaufversuch* bestimmt. Je nachdem, ob die Mit- und Gegen- oder Nullsystemgrößen bestimmt werden sollen, wird dabei eine Einspeisung eines Mit-, Gegen-, oder Nullsystems vorgenommen. Das Bild 7.1 zeigt diese Schaltungen für den Kurzschlußversuch mit der Anordnung der Meßinstrumente in einem Strang. Zusätzlich zur Strom- und Spannungsmessung ist noch eine Wirkleistungsmessung oder Phasenwinkelbestimmung zwischen Strom- und Spannung erforderlich, um die gemessene Impedanz nach R und X zu erhalten. Die gemessene Wirkleistung entspricht den *Wicklungsverlusten*, die deshalb auch *Kurzschlußverluste* heißen (s. Abschnitt 8.2). Die Speisespannung wird von Null aus so weit erhöht, bis der *Bemessungsstrom* I_{rT} fließt.

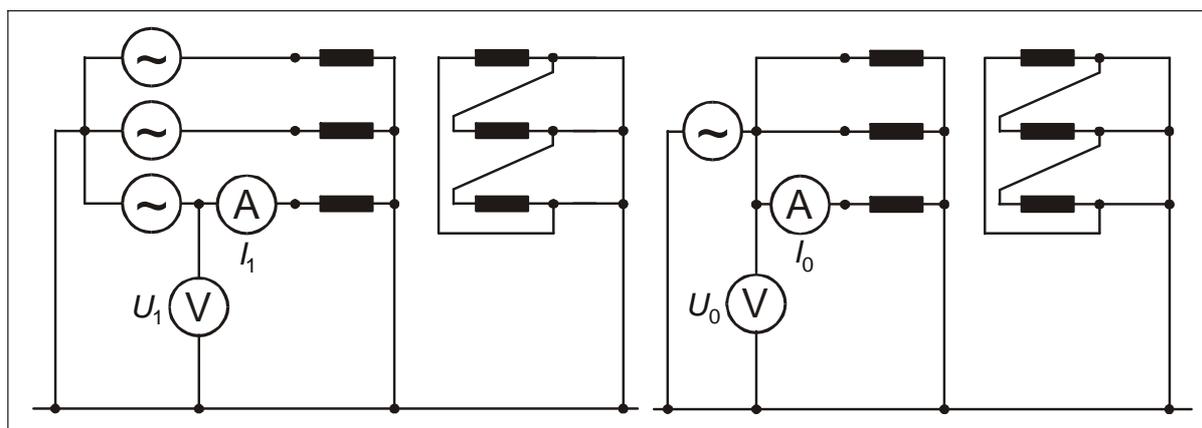


Bild 7.1: Kurzschlußversuch für die Schaltgruppe Yd5

- a) Bestimmung der Mitsystemgrößen
b) Bestimmung der Nullsystemgrößen

Die Spannung, bei dem sich der Bemessungsstrom einstellt, ist die sog. *Kurzschlußspannung* U_k . Für Kurzschluß z.B. auf der Sekundärseite gilt nach Bild 2.4 mit $U'_s = 0$ und unter Vernachlässigung des Querzweiges (die Spannung bleibt im Kurzschlußversuch genügend klein) und $I_{-pk} = I_{pk} \angle 0^\circ$:

$$\underline{U}_{-pk} = (\underline{Z}_{\sigma p} + \underline{Z}'_{\sigma s}) I_{pk} = (\underline{Z}_{\sigma p} + \underline{Z}_{\sigma s}) I_{rT}^p = \underline{Z}_{ps}^p I_{rT}^p = \underline{Z}_T^p I_{rT}^p \quad (7.1)$$

Bezieht man nun die Kurzschlußspannung auf den Wert der primärseitigen Bemessungsspannungswert geteilt durch $\sqrt{3}$, so erhält man:

$$\frac{U_{pk}}{U_{rT}^p / \sqrt{3}} = u_k = z_T^p \frac{I_{rT}^p}{U_{rT}^p / \sqrt{3}} = z_T^p \frac{S_{rT}}{(U_{rT}^p)^2} = z_T \quad (7.2)$$

wobei S_{rT} die Bemessungsleistung ist.

Also ist die bezogene Kurzschlußspannung oder kurz die Kurzschlußspannung u_k gleich der bezogenen Impedanz z_T , wobei es gleichgültig ist, von welcher Seite (primär oder sekundär) man ausgegangen ist:

$$\underline{u}_k = \underline{z}_T = r_T + jx_T \quad (7.3)$$

Für die Beträge gilt:

$$u_k = z_T = \sqrt{r_T^2 + x_T^2}$$

Die (bezogene) Kurzschlußspannung u_k ist eine Leistungsschildangabe. Sie wird gewöhnlich in Prozent angegeben und liegt in der Größenordnung:

$$u_k = 4..20\%$$

wobei die kleinen Werte für kleine und die großen Werte für große Transformatoren gelten (hierzu Bild 7.2).

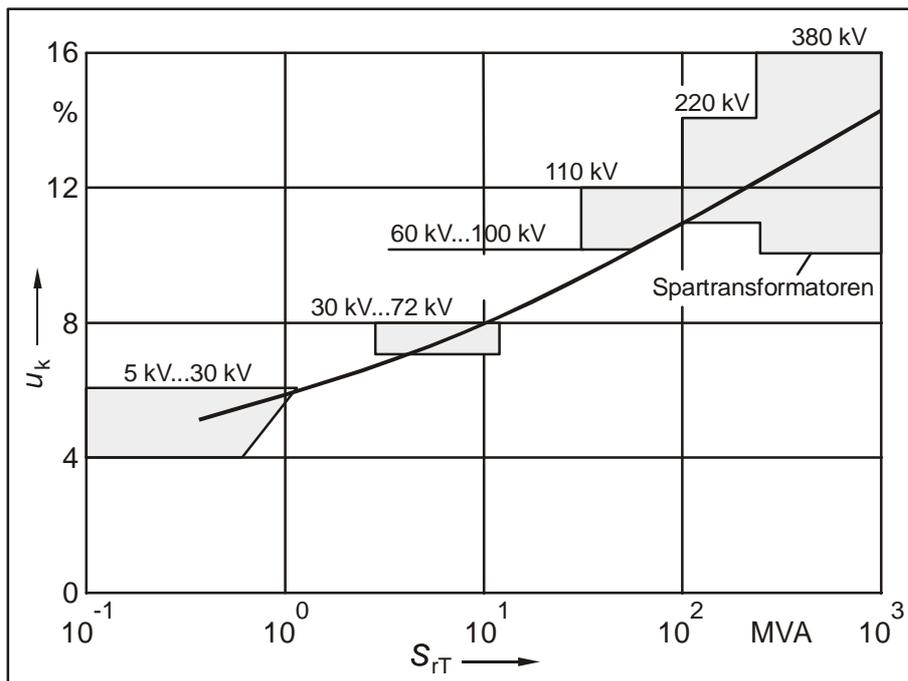


Bild 7.2: Kurzschlußspannung von Voll- und Spartransformatoren in Abhängigkeit von der Bemessungsleistung und Bemessungsspannung

Der Anstieg von u_k mit der Bemessungsleistung und damit mit der Baugröße des Transformators beruht auf der mit der Bemessungsleistung einhergehenden Steigerung der Bemessungsspannung, mit der die Isolationsabstände und damit die Streukanäle größer werden. Die Kurzschlußspannung von Spartransformatoren ist deutlich kleiner als die von Volltransformatoren gleicher Leistung.

Aus der beim Kurzschlußversuch umgesetzten Wirkleistung, den *Kurzschlußverlusten* (s. auch Kapitel 8):

$$P_{kr} = 3R_T I_{rT}^2 \quad (7.4)$$

erhält man den *Wirkwiderstand* wie folgt:

$$R_T = \frac{P_{kr}}{3I_{rT}^2} \quad (7.5)$$

Der *bezogene* Wirkwiderstand ist mit den auf die Bemessungsleistung bezogenen Kurzschlußverlusten identisch, denn es gilt:

$$r_T = R_T \frac{I_{rT}}{U_{rT} / \sqrt{3}} = R_T \frac{S_{rT}}{U_{rT}^2} = \frac{P_{kr}}{S_{rT}} \quad (7.6)$$

Er hat die Größenordnung:

$$r_T = 2..0,2\%$$

wobei die kleineren Werte für die größeren Transformatoren gelten (s. Bild 7.4). Transformatoren haben demnach ein Verhältnis R zu X von etwa (kleine Werte für große Transformatoren):

$$0,5 \leq R / X \leq 0,01$$

Aus der Kurzschlußspannung berechnen sich die Impedanzen für die Primär- und die Sekundärseite wie folgt:

$$\begin{aligned} Z_T^p &= \frac{z_T / \%}{100} \cdot \frac{U_{rT}^p}{\sqrt{3} I_{rT}^p} = \frac{z_T / \%}{100} \cdot \frac{(U_{rT}^p)^2}{S_{rT}} \\ Z_T^s &= \frac{z_T / \%}{100} \cdot \frac{U_{rT}^s}{\sqrt{3} I_{rT}^s} = \frac{z_T / \%}{100} \cdot \frac{(U_{rT}^s)^2}{S_{rT}} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Mit R_T aus P_{kr} ergibt sich dann:

$$X_T = \sqrt{Z_T^2 - R_T^2} \quad (7.8)$$

oder wenn nur das Verhältnis R zu X bekannt ist:

$$X_T = \frac{Z_T}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_T}{X_T}\right)^2}} \quad (7.9)$$

wobei bei großen Transformatoren mit guter Näherung $X_T = Z_T$ gilt.

Der *Leerlaufversuch* wird bei Bemessungsspannung durchgeführt. Der dabei gemessene Leerlaufstrom I_l ist so klein, daß die Spannungsabfälle über den Längszweig in der Ersatzschaltung vernachlässigt und die Bemessungsspannung unmittelbar am Querzweig anliegend angenommen werden kann. Die aufgenommene Wirkleistung entspricht fast ausnahmslos den *Eisenverlusten*, die deshalb auch *Leerlaufverluste* heißen. Zur Berücksichtigung der Leerlaufverluste ist die Ersatzschaltung um einen *Ersatzwiderstand* R_{Fe} parallel zur Hauptfeldreaktanz wie in Bild 7.3 zu ergänzen.

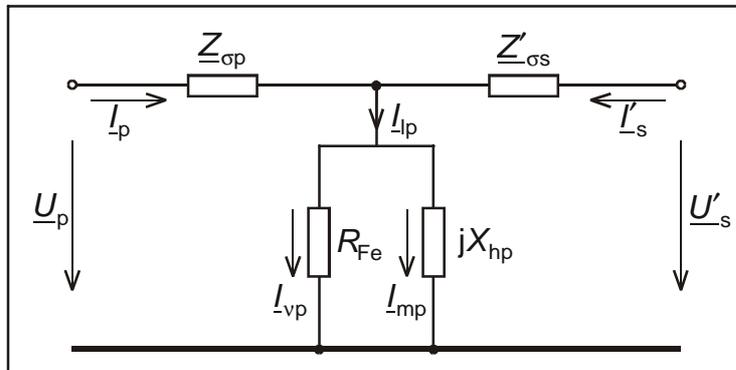


Bild 7.3: Ergänzung der Transformatorersatzschaltung um den Eisenverlustwiderstand R_{Fe}

Aus den *Leerlaufverlusten*:

$$P_{lr} = \sqrt{3} U_{rT} I_{rT} = \frac{U_{rT}^2}{R_{Fe}} \quad (7.10)$$

ergibt sich der *Eisenverlustwiderstand* wie folgt:

$$R_{Fe} = \frac{U_{rT}^2}{P_{lr}} \quad (7.11)$$

Die auf die Bemessungsleistung bezogenen Leerlaufverluste liegen in der Größenordnung:

$$\frac{P_{lr}}{S_{rT}} = \frac{1}{r_{Fe}} = 0,3 \dots 0,05 \%$$

wobei die kleinen Werte für große Transformatoren gelten (s. Bild 7.4).

Der *Magnetisierungsstrom* I_m und der von den Eisenverlusten verursachte Wirkstrom I_v stehen senkrecht aufeinander, und es gilt normalerweise $I_m \gg I_v$ und damit $I_l \cong I_m$. Im *Bemessungsbetrieb* berechnet sich der Magnetisierungsstrom aus:

$$I_{mr} = \frac{U_{rT}}{\sqrt{3} X_h} \quad (7.12)$$

Der auf den Bemessungsstrom bezogene Magnetisierungsstrom ist gleich dem Reziprokwert der bezogenen Hauptfeldreaktanz:

$$\frac{I_{mr}}{I_{rT}} = i_m = \frac{U_{rT}^2}{X_h} = \frac{1}{x_h} \quad (7.13)$$

Für den bezogenen Magnetisierungsstrom und den bezogenen Leerlaufstrom gelten folgende Richtwerte:

$$i_i \approx i_m = 3 \dots 0,3\%$$

wobei die kleinen Werte für große Transformatoren gelten (s. Bild 7.4). Die Größenordnung von i_i rechtfertigt die Vernachlässigung der Querglieder in der Ersatzschaltung in der Nähe des Bemessungsbetriebes, insbesondere bei großen Transformatoren.

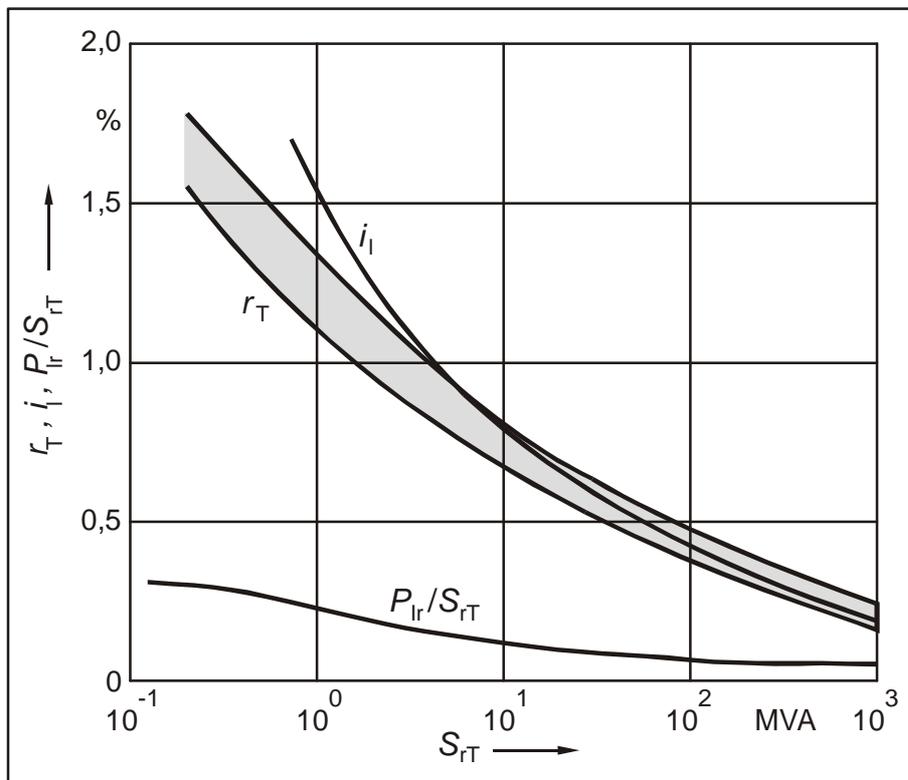


Bild 7.4: Richtwerte für den bezogenen Leerlaufstrom, die bezogenen Leerlaufverluste und den bezogenen Widerstand von Transformatoren

7.2 Mit- und Gegensystemparameter der Dreiwicklungstransformatoren

Der Kurzschlußversuch besteht beim Dreiwicklungstransformator aus drei Messungen, die die drei Impedanzen zwischen je zwei Wicklungen bei leerlaufender dritter Wicklung bestimmen. Damit sind \underline{Z}_{ps} , \underline{Z}_{st} und \underline{Z}_{tp} bekannt. Aus den Leistungsschildangaben oder aus Datenblättern sind gewöhnlich nur die *bezogenen* Impedanzen z_{ps} , z_{st} und z_{pt} zu entnehmen. Die Berechnung der dimensionsbehafteten Impedanzen für eine Spannungsseite erfolgt analog zum Zweiwicklungstransformator (s. Gl. (7.7)), wobei beim Dreiwicklungstransformator aber immer die *Durchgangsleistung* zwischen den beiden entsprechenden Wicklungen im Nenner verwendet

werden muß. Diese ist gleich der kleinsten Bemessungsleistung der beiden entsprechenden Wicklungen. So hat beispielsweise ein Dreiwicklungstransformator mit:

$$S_{rT}^p = 630\text{MVA}, S_{rT}^s = 630\text{MVA} \text{ und } S_{rT}^t = 210\text{MVA}$$

die Durchgangsleistungen:

$$S_{ps} = 630\text{MVA}, S_{pt} = 210\text{MVA}, S_{st} = 210\text{MVA}.$$

Damit lauten die Gleichungen für die Berechnung der dimensionsbehafteten Impedanzen, z.B. für die Primärseite:

$$\boxed{\begin{aligned} Z_{ps} &= \frac{z_{ps} / \% (U_{rT}^p)^2}{100 S_{ps}} \\ Z_{st} &= \frac{z_{st} / \% (U_{rT}^p)^2}{100 S_{st}} \\ Z_{pt} &= \frac{z_{pt} / \% (U_{rT}^p)^2}{100 S_{pt}} \end{aligned}} \quad (7.14)$$

Aus der Ersatzschaltung in Bild 4.14 folgen die Zusammenhänge:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{ps} \\ \underline{Z}'_{st} \\ \underline{Z}'_{pt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_p \\ \underline{Z}'_s \\ \underline{Z}'_t \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

wobei die Impedanzen \underline{Z}_p , \underline{Z}'_s , und \underline{Z}'_t auf die Primärseite umgerechnet sind. Die formale Auflösung der Gl. (7.15) nach den Wicklungsimpedanzen liefert:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_p \\ \underline{Z}'_s \\ \underline{Z}'_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{ps} \\ \underline{Z}'_{st} \\ \underline{Z}'_{pt} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Die Umrechnung auf eine andere Spannungsseite erfolgt mit dem Quadrat des entsprechenden Übersetzungsverhältnisses. Bei der Berechnung der Beträge Z_p , Z'_s und Z'_t nach Gl. (7.16) kann es vorkommen, daß eine dieser Impedanzen negativ wird (meist Z'_s), was jedoch ohne Belang ist, da die Wicklungsimpedanzen nie allein wirksam sind.

7.3 Nullsystemparameter

Im Nullsystem rechnet man bis auf die *Hauptfeldreaktanz* bei *Dreischenkeltransformatoren* mit den gleichen Parametern wie für das Mitsystem. Dreischenkeltransformatoren haben im Gegensatz zur Drehstrombank und zum Fünfschenkeltransformator keinen freien magnetischen Rückschluß, so daß sich ein Nullfluß außerhalb des Eisenkreises schließen muß. Der ihm dort entgegengebrachte magnetische Wider-

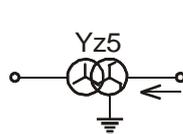
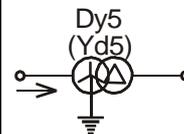
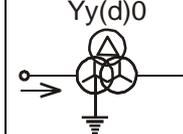
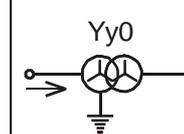
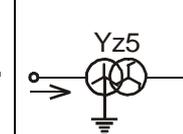
stand ist wesentlich größer als der des Eisenkreises. Folglich wird die Hauptreaktanz X_{h0} merklich kleiner als X_{h1} , was wir durch den Faktor k_0 an der Hauptfeldreaktanz im Nullsystem berücksichtigt haben (s. Abschnitt 4.1.1). Man rechnet mit:

$$X_{h0} = k_0 X_{h1} = (4...8) X_{ps} \tag{7.17}$$

wobei X_{ps} die Summe aus primär- und sekundärseitiger Streureaktanz ist. Während im Mit- und Gegensystem stets $X_h \gg X_{ps}$ gilt und deshalb meist vernachlässigt werden kann, ist beim Dreischenkeltransformator im Nullsystem die Vernachlässigung der Hauptreaktanz nicht von vornherein gerechtfertigt.

Eine Übersicht über die Größenordnungen der Eingangsimpedanzen (s. Pfeil) im Nullsystem gibt die Tabelle 7.1. Nur die Schaltgruppen mit $X_0 / X_1 \leq 1$ sind im Sternpunkt voll belastbar.

Tabelle 7.1: Nullimpedanzen von Transformatoren

$\frac{X_0}{X_1}$					
3SK	0,1...0,15	0,7...1	1...2,4	3...10	
5SK u. DB		1		10...100	

8 Betriebsverhalten

8.1 Leerlauf

8.1.1 Leerlauf des Einphasentransformators

Im *Leerlauf* an einer starren sinusförmigen Spannung wird dem Transformator ein sinusförmiger Magnetfluß eingeprägt. Aufgrund der nichtlinearen Magnetisierungskennlinie wird der Magnetisierungsstrom verzerrt. Er enthält neben der Grundschwingung auch *Oberschwingungen*, wobei aufgrund der Symmetrie der Magnetisierungskennlinie alle ungeradzahigen Harmonischen auftreten. Mit wachsender Ordnungszahl nehmen allerdings die Amplituden der einzelnen Harmonischen ab. Besonders stark ist gewöhnlich die dritte Harmonische im Strom- oder in der Strangspannung ausgeprägt. Der *Leerlaufstrom* des Transformators setzt sich aus dem *Magnetisierungsstrom* und dem *Wirbelstrom*, der eine Hysterese der Magnetisierungskennlinie verursacht, zusammen. Der Wirbelstrom ist sinusförmig und beeinflusst so nur die Grundschwingung des Leerlaufstromes. Er hat eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ gegenüber der Grundschwingung des Magnetisierungsstromes. In den Ersatzschaltungen des Transformators wird nur der Grundschwingungsanteil des Leerlaufstromes bzw. des Magnetisierungsstromes berücksichtigt.

8.1.2 Leerlauf des Dreiphasentransformators

Die Verzerrung des Magnetisierungsstromes von Dreiphasentransformatoren hängt von der Art der Wicklungsschaltung (Sternschaltung mit oder ohne Sternpunktterdung, Dreiecksschaltung oder Zickzack-Schaltung) und von der Kernbauart ab. Diese Einflüsse sind sehr vielfältig und kompliziert, so daß sie hier nicht erschöpfend behandelt werden können.

Sternschaltung mit geerdetem Sternpunkt

Bei Leerlauf an einem symmetrischen, sinusförmigen Spannungssystem (Mitsystem) bildet sich auch ein Mitsystem für die Schenkelflüsse aus. Die Schenkelflüsse addieren sich in jedem Zeitpunkt zu Null, so daß die Kernbauart keine Rolle spielt. Aufgrund der nichtlinearen Magnetisierungskennlinie bilden sich in jedem Wicklungsstrang verzerrte Magnetisierungsströme aus, die wie beim Einphasentransformator alle ungeradzahigen Harmonischen enthalten. Wegen der Phasenverschiebung der Flüsse von jeweils $2\pi/3$ weisen auch die drei Magnetisierungsströme eine Phasenverschiebung von jeweils $2\pi/3$ auf. Bei Vernachlässigung der magnetischen Unsymmetrie gilt somit:

$$\begin{aligned} i_{ma} &= \hat{i}_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + \hat{i}_3 \cos 3(\omega_0 t + \varphi_3) + \hat{i}_5 \cos 5(\omega_0 t + \varphi_5) + \dots \\ i_{mb} &= \hat{i}_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1 - \frac{2\pi}{3}) + \hat{i}_3 \cos 3(\omega_0 t + \varphi_3 - \frac{2\pi}{3}) + \hat{i}_5 \cos 5(\omega_0 t + \varphi_5 - \frac{2\pi}{3}) + \dots \\ i_{mc} &= \hat{i}_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1 + \frac{2\pi}{3}) + \hat{i}_3 \cos 3(\omega_0 t + \varphi_3 + \frac{2\pi}{3}) + \hat{i}_5 \cos 5(\omega_0 t + \varphi_5 + \frac{2\pi}{3}) + \dots \end{aligned}$$

Die Grundschwingungen der Magnetisierungsströme bilden ebenfalls ein Mitsystem. Die dritten Harmonischen und allgemein alle durch 3 teilbaren Harmonischen bilden ein Nullsystem, während die 7., 13., 19. usw. Harmonischen wieder ein Mitsystem und die 5., 11., 17. usw. ein Gegensystem bilden, deren Ströme sich jeweils zu Null

addieren. Die Summe der gleichphasigen Harmonischen der Magnetisierungsströme fließt über die Sternpunkt-Erde-Verbindung ins Netz.

Sternschaltung mit nicht geerdetem Sternpunkt

Das Netz prägt jetzt nicht mehr die Strangspannungen, sondern die verketteten Spannungen und die damit verbundenen Differenzen von zwei Schenkelfläßen ein. Harmonische im Magnetisierungsstrom, die ein Nullsystem bilden, können sich aufgrund der fehlenden Sternpunkt-Erde-Verbindung nicht ausbilden. Geht man von den gleichen Magnetisierungskennlinien der Schenkel wie für den Fall des geerdeten Sternpunktes aus, so können bei „fehlenden“ Harmonischen in den Magnetisierungsströmen, die Magnetflüsse nicht mehr sinusförmig sein. Die im Magnetisierungsstrom fehlenden, durch 3 teilbaren Harmonischen treten dann in den Schenkelfläßen auf. In der Differenz zweier Schenkelfläße, die von der anliegenden sinusförmigen verketteten Netzspannung eingepägt wird, fallen sie heraus. Die durch 3 teilbaren Harmonischen der Schenkelfläße müssen sich auf dem magnetischen Rückschluß schließen. Dieser hängt von der Kernbauart ab. Bei freiem magnetischen Rückschluß könne sich die durch 3 teilbaren Harmonischen der Schenkelfläße stärker ausprägen, als bei erzwungenem magnetischen Rückschluß.

Dreiecksschaltung

Ist die leerlaufende Wicklung im Dreieck geschaltet, so liegt wie beim Fall der Sternschaltung mit geerdetem Sternpunkt jeder Wicklungsstrang an der sinusförmigen Netzspannung, wodurch sinusförmige Schenkelfläße eingepägt werden, die sich in jedem Zeitpunkt zu Null addieren. Die Kernbauart ist damit wie bei der Sternschaltung mit geerdetem Sternpunkt belanglos. Die Magnetisierungsströme enthalten demnach alle ungeradzahigen Harmonischen. Die durch 3 teilbaren Harmonischen des Magnetisierungsstromes, die jeweils ein Nullsystem bilden, fließen ausschließlich im Inneren der Dreieckswicklung.

8.2 Kurzschluß

Bei *dreipoligem* Kurzschluß sind die Magnetisierungserscheinungen von untergeordneter Bedeutung. Der Kurzschlußstrom wird durch die Wicklungswiderstände und Wicklungsstreureaktanzen, die das Längsglied der Ersatzschaltung bilden, bestimmt. Bild 8.1 zeigt das Zeigerbild für dreipoligen Kurzschluß auf der Sekundärseite eines Zweiwicklungstransformators.

Das Verhältnis des Kurzschlußstromes, bezogen auf den Bemessungsstrom, entspricht dem Reziprokwert der Kurzschlußspannung. Aus:

$$\underline{U}_{pk} = (R_T + jX_T) I_{pk}$$

folgt für $U_{pk} = U_{rT} / \sqrt{3}$:

$$\frac{I_{pk}}{I_{rT}} = \frac{1}{\sqrt{R_T^2 + X_T^2}} \frac{U_{rT}}{\sqrt{3} I_{rT}} = \frac{1}{z_T} = \frac{1}{u_k} \quad (8.1)$$

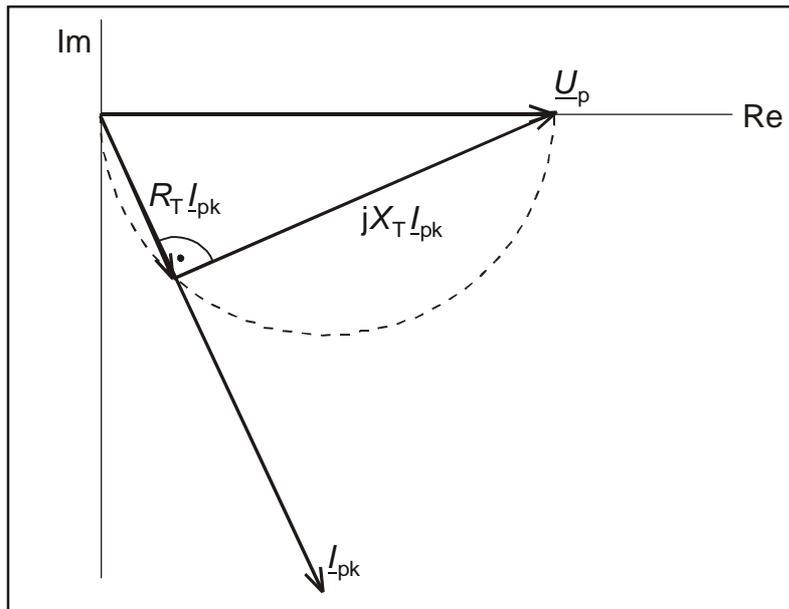


Bild 8.1: Zeigerbild für dreipoligen Kurzschluß eines Zweiwicklungstransformators

Die Berechnung unsymmetrischer Kurzschlüsse erfolgt mit Hilfe der Symmetrischen Komponenten.

8.3 Spannungsabfall, Belastungskennlinien

Im folgenden ist stets symmetrischer Betrieb vorausgesetzt. Außerdem soll der Leerlaufstrom vernachlässigt werden. Wir können dann von der vereinfachten Ersatzschaltung ohne Querglied ausgehen und erhalten für die Spannungen, wenn wir jetzt die Primärgrößen auf die betrachtete Sekundärseite umrechnen und anstelle I_s den Belastungsstrom einführen, also $I_s = -I$ setzen:

$$\underline{U}'_p = \underline{U}_s + (R_T + jX_T)I \tag{8.2}$$

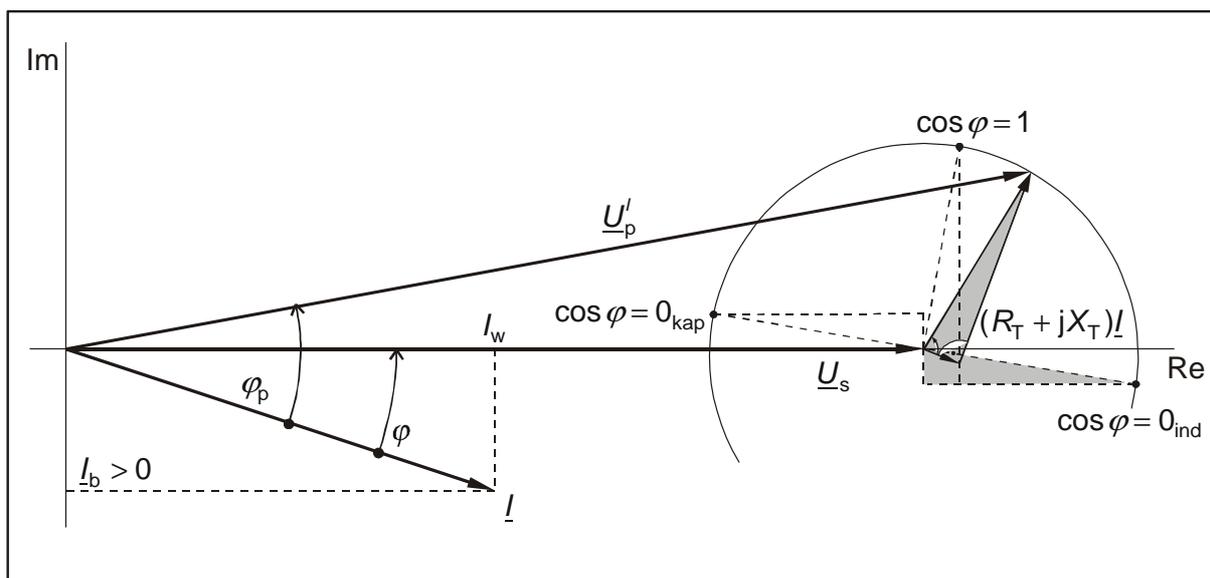


Bild 8.2: Zeigerbild des Zweiwicklungstransformators auf der Grundlage der Gl. (8.2)

Beginnend mit der Spannung \underline{U}_s , die wir in die reelle Achse legen, und dem Belastungsstrom \underline{I} ergibt sich das Zeigerbild in Bild 8.2, in dem auch die Sonderfälle der rein resistiven, rein induktiven und rein kapazitiven Belastung eingetragen sind. Das zwischen den Zeigern \underline{U}'_p und \underline{U}_s liegende Dreieck für die Spannungsabfälle wird KAPP'sches Dreieck genannt. Seine Lage und Größe sind belastungsabhängig. Bei festem Strombetrag I und fester Spannung U'_p (Transformator am starren Netz) läßt sich die Spannungsdifferenz $\Delta U = U'_p - U_s$ in Abhängigkeit vom Leistungsfaktor der Belastung $\cos \varphi$ anschaulich anhand des KAPP'schen Diagramms ermitteln (Bild 8.3).

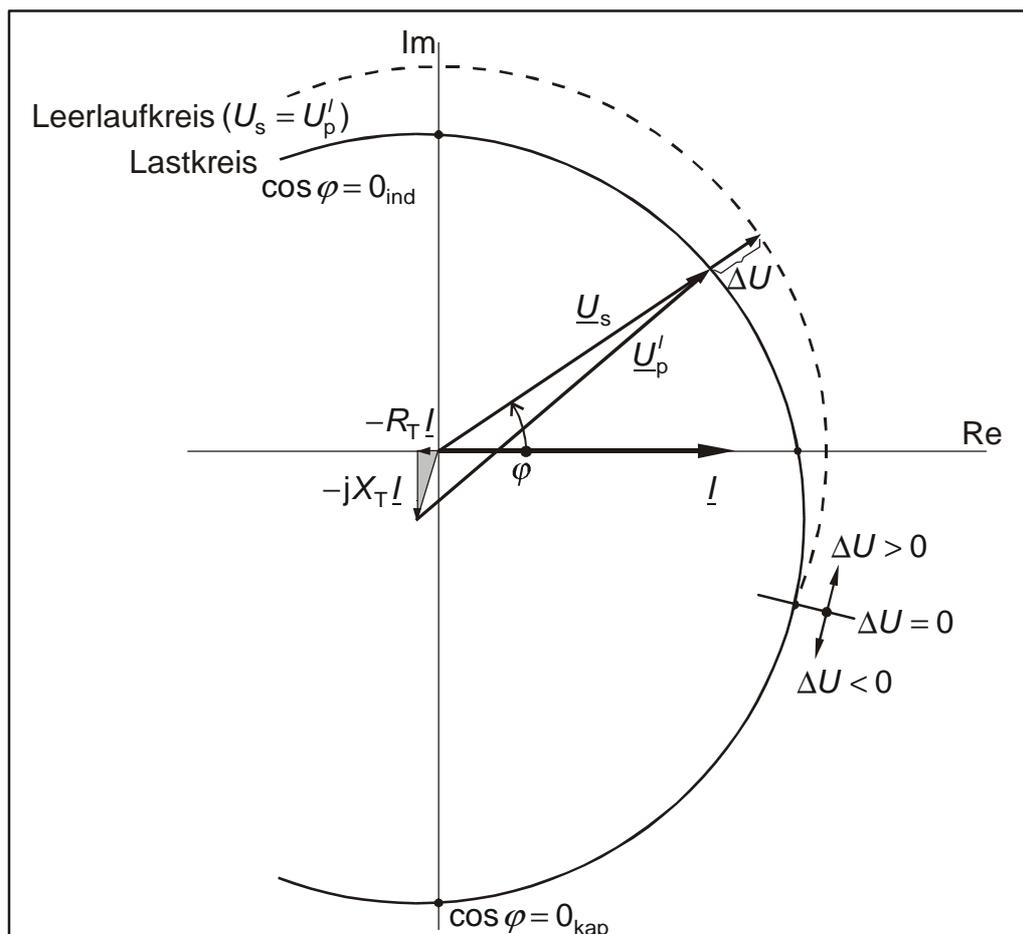


Bild 8.3: KAPP'sches Diagramm

Im KAPP'schen Diagramm wird der Stromzeiger \underline{I} mit konstantem Betrag in der reellen Achse festgehalten, so daß auch das KAPP'sche Dreieck in der eingezeichneten Lage liegen bleibt. Der Spannungseigenzeiger \underline{U}'_p mit konstantem Betrag und der Spannungseigenzeiger \underline{U}_s mit veränderlichem Betrag bewegen sich bei veränderlichem Leistungsfaktor der Belastung auf dem *Lastkreis*, dessen Ursprung in der Spitze des KAPP'schen Dreiecks liegt. Bei Leerlauf würde der Ursprung des Lastkreises in den Koordinatenursprung rücken und so zum *Leerlaufkreis* werden. Die Spannungsdifferenz $\Delta U = U'_p - U_s$ greift man in Richtung von U_s zwischen den beiden Kreisen ab. Im Schnittpunkt der beiden Kreise ist $\Delta U = 0$. Dieser Sonderfall tritt bei ohmsch, kapazitiver Belastung auf. Bei weiterer Erhöhung des kapazitiven Belastungsanteils kehrt sich das Vorzeichen von ΔU um, es kommt zu einer Spannungserhöhung auf der Sekundärseite.

Rechnerisch ermitteln wir die Spannungsdifferenz am einfachsten ausgehend von Gl. (8.2), indem wir \underline{U}_s in die reelle Achse legen. Es gilt dann:

$$\underline{U}'_p = U_s + (R_T + jX_T)(I_w - jI_b) \quad (8.3)$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt unter Beachtung von $I_w = I \cos \varphi$ und $I_b = I \sin \varphi$

$$\operatorname{Re}\{\underline{U}'_p\} = U_s + R_T I_w + X_T I_b = U_s + R_T I \cos \varphi + X_T I \sin \varphi = U_s + \Delta U_l$$

$$\operatorname{Im}\{\underline{U}'_p\} = X_T I_w - R_T I_b = X_T I \cos \varphi - R_T I \sin \varphi = \Delta U_q$$

Beide Gleichungen werden quadriert und addiert:

$$U_p^2 = (U_s^2 + \Delta U_l^2) + \Delta U_q^2$$

Mit ΔU_l und ΔU_q wurden der *Längs-* und *Querspannungsabfall* eingeführt. Schließlich ergibt sich:

$$\Delta U = U'_p - U_s = \sqrt{(U_s + \Delta U_l)^2 + \Delta U_q^2} - U_s \quad (8.4)$$

Gewöhnlich sind die Spannungsabfälle ΔU_l und ΔU_q klein gegenüber U_s , so daß Gl. (8.4) in guter Näherung durch:

$$\Delta U = U_s \sqrt{1 + \frac{2\Delta U_l}{U_s}} - U_s \approx U_s \left(1 + \frac{\Delta U_l}{U_s}\right) - U_s = \Delta U_l = (R_T \cos \varphi + X_T \sin \varphi) I \quad (8.5)$$

ersetzt werden kann. Die Spannungsdifferenz wird demzufolge hauptsächlich durch den Längsspannungsabfall verursacht. Dieser wird wiederum hauptsächlich durch den Blindstrom bestimmt, denn es gilt bekanntlich $R_T \ll X_T$. Bezieht man Gl. (8.5) noch auf die sekundärseitige Bemessungsspannung U_{rT}^s , so wird:

$$\frac{\Delta U}{U_{rT} / \sqrt{3}} = \Delta u = (r_T \cos \varphi + x_T \sin \varphi) \frac{I}{I_{rT}^s} = (r_T \cos \varphi + x_T \sin \varphi) b \quad (8.6)$$

wobei r_T und x_T die bezogenen Transformatorparameter in p.u. sind, und I_{rT}^s der sekundärseitige Bemessungsstrom ist. Das Stromverhältnis $b = I / I_{rT}^s$ ist der *Belastungsgrad*. Im *Bemessungsbetrieb* wird $b = 1$ und damit:

$$\Delta u_r = r_T |\cos \varphi| + x_T |\sin \varphi| \approx x_T |\sin \varphi|$$

In Bild 8.4 ist für $r_T = 0,02$ und $x_T = 0,2$ die bezogene Sekundärspannung bei Anlegen der Bemessungsspannung auf der Primärseite in Abhängigkeit von b mit $\cos \varphi$ als Parameter maßstäblich dargestellt.

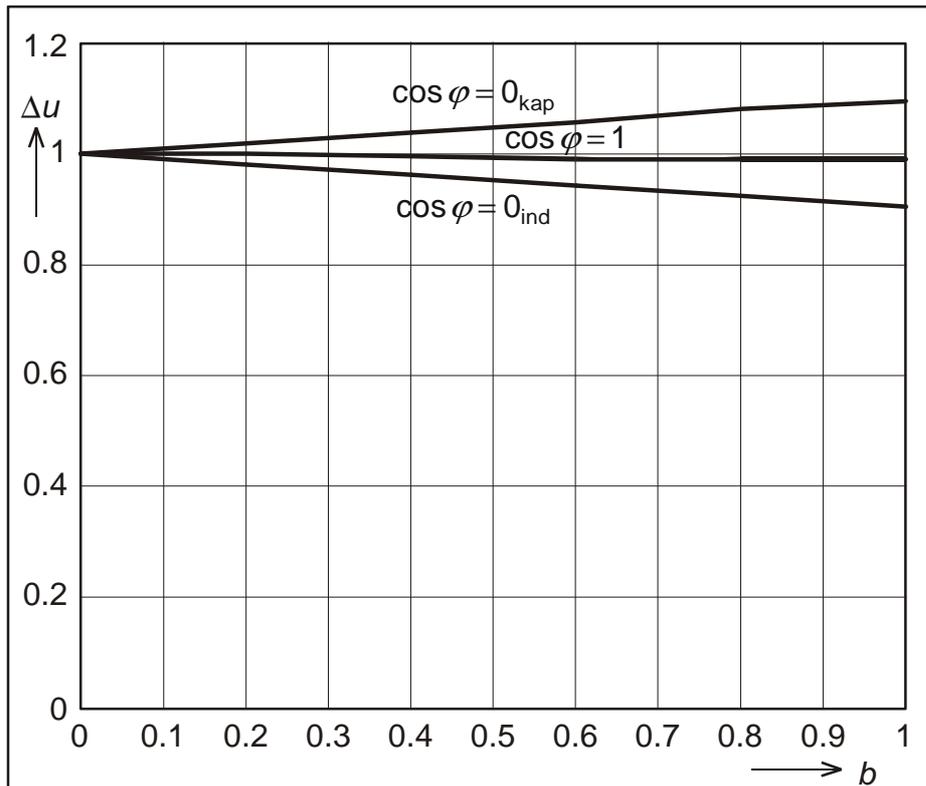


Bild 8.4: Belastungskennlinien des Transformators

8.4 Verluste, Wirkungsgrad, Blindleistungsbedarf

Die Gesamtverluste P_V setzen sich aus den *Eisen-* oder *Leerlaufverlusten* P_l und den *Wicklungs-* oder *Kurzschlußverlusten* P_k zusammen. Die Bezeichnungen Leerlauf und Kurzschluß verweisen auf den Versuch, in dem die jeweiligen Verlustanteile bestimmt werden. Wir haben in Kapitel 7 gesehen, daß die Leerlaufverluste spannungsabhängig und annähernd dem Quadrat der Spannung proportional sind (der maßgebende Ersatzwiderstand R_{Fe} bildet ein Querglied in der Ersatzschaltung parallel zu X_h), während die Kurzschlußverluste dem Quadrat des Stromes proportional sind (die maßgebenden Wicklungswiderstände liegen im Längszweig der Ersatzschaltung). Für die Berechnung der Kurzschlußverluste in einem bestimmten Betriebspunkt können die Widerstände der Primär- und Sekundärwicklung zu $R_T^p = R_p + R'_s$ oder $R_T^s = R'_p + R_s$ zusammengefaßt werden. Der obere Index p oder s wird aber meist weggelassen. Für die Gesamtverluste gilt folgende Beziehung:

$$P_V = P_l + P_k = 3 \frac{U^2}{R_{Fe}} + 3R_T I^2 \quad (8.7)$$

Im *Bemessungsbetrieb* wird:

$$P_{lr} = \frac{U_{rT}^2}{R_{Fe}} = \frac{S_{rT}}{r_{Fe}} \quad (8.8)$$

$$P_{kr} = 3R_T I_{rT}^2 = r_T S_{rT} \quad (8.9)$$

und:

$$P_{Vr} = P_{lr} + P_{kr} = \left(\frac{1}{r_{Fe}} + r_T \right) S_{rT} \quad (8.10)$$

Unter Benutzung dieser Beziehungen formen wir Gl. (8.7) um zu:

$$P_V = P_{lr} \left(\frac{\sqrt{3}U}{U_{rT}} \right)^2 + P_{kr} \left(\frac{I}{I_{rT}} \right)^2 \quad (8.11)$$

und für den üblichen Betrieb mit *Bemessungsspannung*:

$$P_V = P_{kr} \left(\frac{P_{lr}}{P_{kr}} + \left(\frac{I}{I_{rT}} \right) \right)^2 = P_{kr} (a + b^2) \quad (8.12)$$

wobei mit $a = P_{lr} / P_{kr}$ das *Verlustverhältnis* eingeführt wurde. b ist der bereits in Gl. (8.6) benutzte *Belastungsgrad*. Mit $b = 1$ ergibt sich für den *Bemessungsbetrieb*:

$$P_{Vr} = (a + 1) P_{kr}$$

Damit erhalten wir für die auf P_{Vr} bezogenen Verluste folgenden Ausdruck:

$$\frac{P_V}{P_{Vr}} = \frac{a + b^2}{a + 1} \quad (8.13)$$

In Bild 8.5 ist die Gl. (8.13) für zwei verschiedene Verlustverhältnisse a in Abhängigkeit vom Belastungsgrad $b = I / I_{rT}$ ausgewertet, wobei deutlich wird, daß durch die Wahl eines kleineren Verlustverhältnisses kleinere Teillastverluste entstehen.

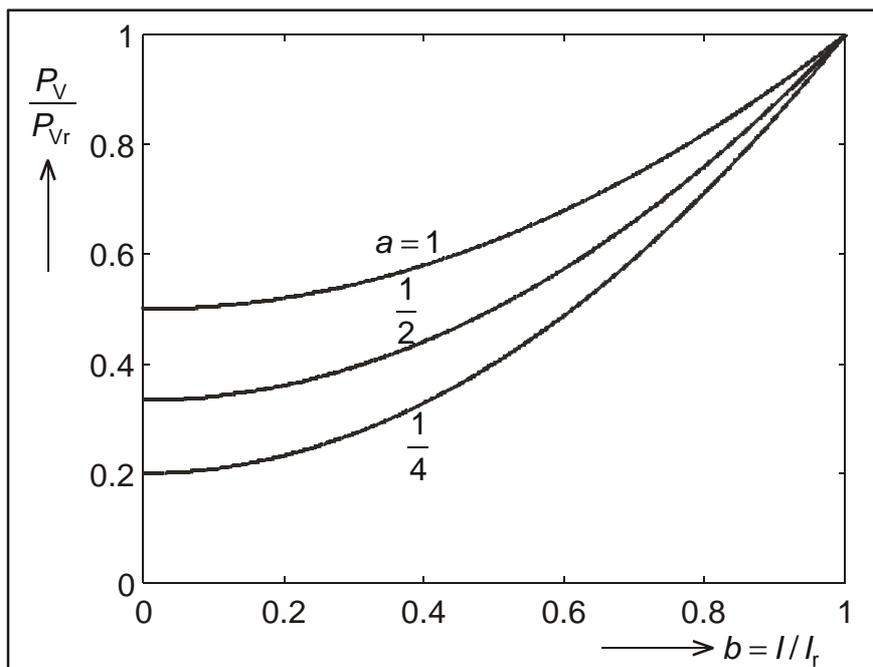


Bild 8.5: Verlustkurven in Abhängigkeit von der Belastung mit dem Verlustverhältnis als Parameter

Der *Wirkungsgrad* berechnet sich aus:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{auf}} = \frac{P}{P + P_V} = \frac{1}{1 + \frac{P_V}{P}} = \frac{1}{1 + \frac{P_V}{S \cos \varphi}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_V}{\cos \varphi}} \quad (8.14)$$

wobei S die Scheinleistung und $\cos \varphi$ der Leistungsfaktor auf der Abnahmeseite und $\rho_V = P_V / S$ die *relativen*, auf den jeweiligen Belastungszustand bezogenen Verluste sind. Für die relativen Verluste erhält man aus Gl. (8.12) durch Erweitern mit S_{rT} im Zähler und Nenner und unter Beachtung von $S \sim I$ bei konstant angenommener Spannung auf der Abnehmerseite:

$$\rho_V = \frac{P_V}{S} = \frac{P_{kr}}{S_{rT}} \cdot \frac{S_{rT}}{S} (a + b^2) = \frac{P_{kr}}{S_{rT}} \left(\frac{a}{b} + b \right) = r_T \left(\frac{a}{b} + b \right) \quad (8.15)$$

und damit für den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{r_T}{\cos \varphi} \left(\frac{a}{b} + b \right)} \quad (8.16)$$

Der Wirkungsgrad ist bei festem Abnahme- $\cos \varphi$ bei *der* Belastung maximal, bei der die relativen Verluste minimal werden. Aus:

$$\frac{d\rho_V}{db} = r_T \left(-\frac{a}{b^2} + 1 \right) = 0$$

folgt somit für den maximalen Wirkungsgrad ein optimaler Belastungsgrad von

$$b = b_{opt} = \sqrt{a} \quad (8.17)$$

und damit:

$$\eta_{max} = \frac{1}{1 + \frac{r_T}{\cos \varphi} 2\sqrt{a}} \approx 1 - \frac{r_T}{\cos \varphi} 2\sqrt{a} \quad (8.18)$$

Aus Gl. (8.17) folgt weiter:

$$b_{opt}^2 = \left(\frac{I_{opt}}{I_{rT}} \right)^2 = a = \frac{P_{lr}}{P_{kr}} \quad (8.19)$$

oder

$$P_k = P_{kr} \left(\frac{I_{opt}}{I_{rT}} \right)^2 = P_{lr} \quad (8.20)$$

Gl. (8.19) besagt, daß der Wirkungsgrad bei festem $\cos \varphi$ und festem Verlustverhältnis bei *der* Belastung maximal wird, bei der die stromabhängigen Kupferverluste den

Eisenverlusten gleich werden. Ein Transformator mit $a = 1$ hat demzufolge den maximalen Wirkungsgrad im Bemessungsbetrieb. Transformatoren, die während ihres Betriebes nicht ständig ausgelastet oder stark schwankender Belastung ausgesetzt sind, verursachen geringere Verlustkosten, wenn sie mit $a < 1$ ausgeführt sind.

Aus den Gln. (8.18) und (8.19) ergeben sich bei festem $\cos \varphi$ zwei wichtige, aus Bild 8.6 ersichtliche Schlußfolgerungen:

1. Transformatoren mit kleinerem Verlustverhältnis haben einen größeren maximalen Wirkungsgrad
2. Der Maximalwert des Wirkungsgrades stellt sich bei der Belastung ein, bei der die Kupferverluste den Eisenverlusten gleich werden

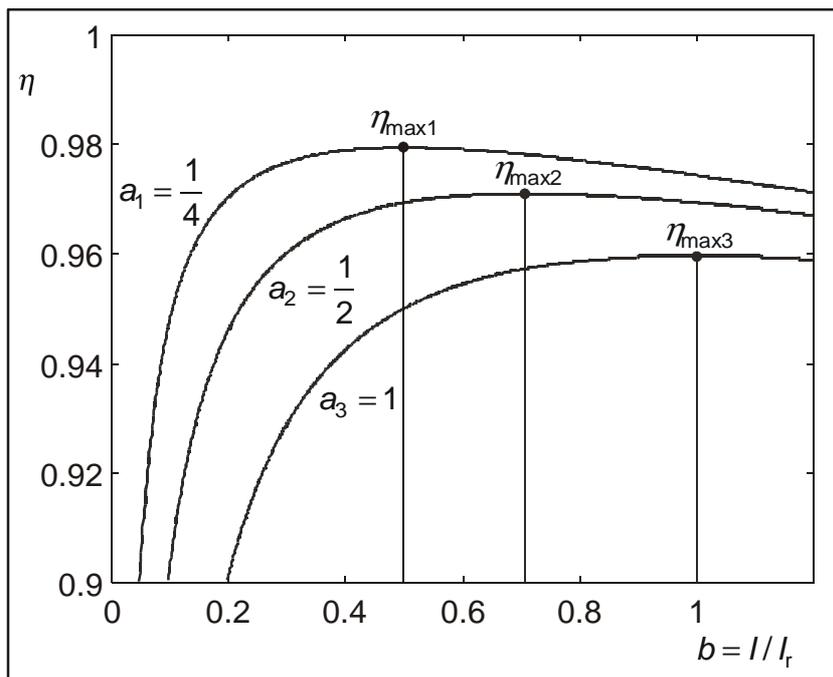


Bild 8.6: Verlauf des Wirkungsgrades in Abhängigkeit vom Belastungsverhältnis bei $a = 1, 1/2$ und $1/4$, $\cos \varphi = 0,95$ und $r_T = 1\%$

Der Blindleistungsbedarf des Transformators setzt sich aus der *Magnetisierungsblindleistung* Q_m und der *Wicklungsblindleistung* Q_x zusammen:

$$Q = Q_m + Q_x$$

Die Magnetisierungsblindleistung ist spannungsabhängig:

$$Q_m = 3X_h I_m^2 = 3 \frac{U^2}{X_h} \quad (8.21)$$

während die Wicklungsblindleistung stromabhängig ist:

$$Q_x = 3X_T I^2 \quad (8.22)$$

Im *Bemessungsbetrieb* wird:

$$Q_{mr} = \frac{U_{rT}^2}{X_h} = \frac{S_{rT}}{x_h} = i_m S_{rT} \quad (8.23)$$

und

$$Q_{xr} = 3X_T I_{rT}^2 = x_T \sqrt{3} U_{rT} I_{rT} = x_T S_{rT} \quad (8.24)$$

sowie:

$$Q_r = (i_m + x_T) S_{rT} \quad (8.25)$$

Aus der folgenden Gleichung kann man bei Kenntnis von i_m (auf I_{rT} bezogener Magnetisierungsstrom) oder x_h und x_T sofort auf den Blindleistungsbedarf im Bemessungsbetrieb schließen:

$$q_r = \frac{Q}{S_{rT}} = q_{mr} + q_{xr} = i_m + x_T = \frac{1}{x_h} + x_T \quad (8.26)$$

8.5 Parallelbetrieb

Für den in Bild 8.7 dargestellten Parallelbetrieb von 2 Transformatoren müssen folgende 4 Bedingungen erfüllt sein:

1. Gleiche Schaltgruppen
2. Gleiche Übersetzungsverhältnisse
3. Annähernd gleiche Kurzschlußspannungen
4. Verhältnis der Bemessungsleistungen nicht größer als 3:1

Die erste und zweite Bedingung sorgen für gleiche Spannungen im Leerlauf, wodurch Ausgleichsströme vermieden werden, während die dritte und vierte Bedingung für eine vernünftige Stromaufteilung bei Belastung sorgen. Die Teilströme I_1 und I_2 stehen bei gleicher Bemessungsspannung und annähernd gleichen Kurzschlußspannungen im Verhältnis:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_{T1}}{Z_{T2}} = \frac{u_{k1}}{u_{k2}} \cdot \frac{S_{rT1}}{S_{rT2}} \approx \frac{S_{rT1}}{S_{rT2}}$$

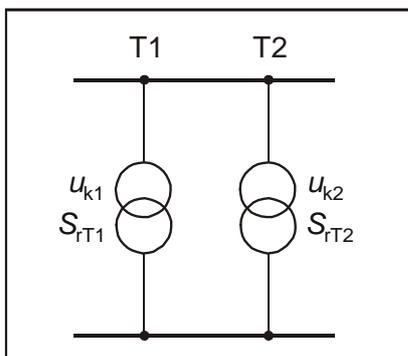


Bild 8.7: Parallelschaltung von zwei Transformatoren

Bei wechselnder Belastung stellt sich die Frage nach dem *wirtschaftlichen* Parallelbetrieb. In Bild 8.8 sind die relativen Verluste nach Gl. (8.13) von zwei gleichen, parallelbetriebenen Transformatoren mit $a = 1/4$ über dem bezogenen Gesamtstrom I aufgetragen. Die Verlustkurve *eines* Transformators und die resultierende Verlustkurve für den Parallelbetrieb schneiden sich bei dem Umschaltstrom I_u . Liegt die Belastung längere Zeit unter I_u , so ist es aus der Sicht der Verlusteinsparung sinnvoll, den zweiten Transformator außer Betrieb zu nehmen. Für Belastungen oberhalb I_u ist der Parallelbetrieb wirtschaftlicher. Der Umschaltpunkt berechnet sich aus dem Schnittpunkt der Verlustkurven:

$$P_V^{(1)} = P_{lr} + P_{kr} \left(\frac{I_u}{I_{rT}} \right)^2 = P_V^{(2)} = 2 \left(P_{lr} + P_{kr} \left(\frac{I_u}{2I_{rT}} \right)^2 \right)$$

wobei P_{lr} und P_{kr} die Verluste *eines* Transformators sind. Man erhält für den (bezogenen) Umschaltstrom:

$$\frac{I_u}{I_{rT}} = \sqrt{2 \frac{P_{lr}}{P_{kr}}} = \sqrt{2a}$$

Im Bild 8.8 mit $a = 1/4$ liegt der Umschaltpunkt bei $\frac{I_u}{I_{rT}} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,71$

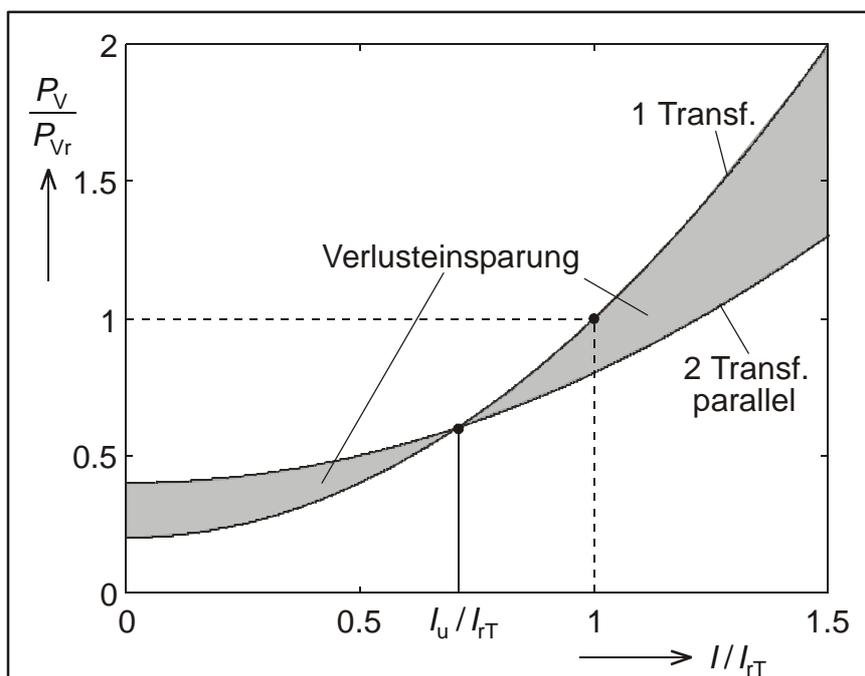
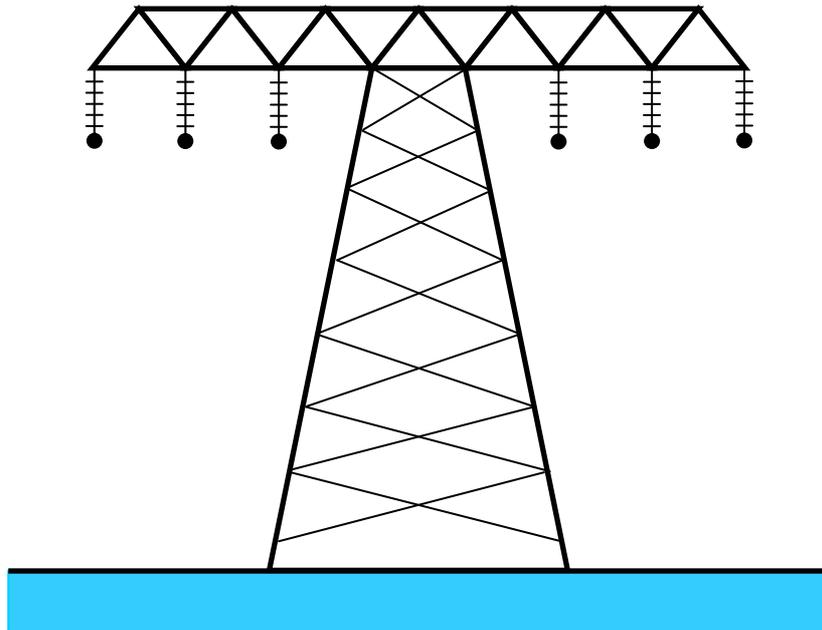


Bild 8.8: Verlustkurven bei Transformator-Parallelbetrieb



Vorlesung Elektrische Energieversorgung I

Skript Freileitungen

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

Inhaltsverzeichnis

1	Ausführungsformen	1
2	Einphasenleitung	10
2.1	Ersatzschaltung mit verteilten Parametern*	10
2.2	Ersatzschaltung mit konzentrierten Parametern	13
3	Drehstrom-Einfachleitung	16
3.1	Induktive Verkettung	16
3.2	Kapazitive Verkettung	18
3.3	Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten	22
4	Drehstrom-Doppelleitung	26
4.1	Induktive Verkettung	26
4.2	Kapazitive Verkettung	27
4.3	Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten	28
5	Berechnung der Leitungsparameter	33
5.1	Schleifenimpedanzen	33
5.2	Potentialkoeffizienten	37
5.3	Impedanzen der Symmetrischen Komponenten	39
5.3.1	Einfachleitung	39
5.3.2	Doppelleitung*	40
5.4	Admittanzen der Symmetrischen Komponenten	42
5.4.1	Einfachleitung	42
5.4.2	Doppelleitung*	44
6	Betriebsverhalten	46
6.1	Spannungsabfall	46
6.2	Verluste, Blindstrombedarf, natürliche Leistung	49
6.3	Leerlauf und Kurzschluß	51
6.4	Kapazitiver Erdschlußstrom	52
7	Anhang	55
7.1	Verdrillungsschemata	55
7.1.1	Verdrillung α_1	55
7.1.2	Verdrillung α_2	55
7.1.3	Verdrillung β	56
7.1.4	Verdrillung γ	57
7.2	Modifizierung der Parameter der verdrillten Doppelleitung*	58
7.3	CARSONsche Reihen*	60
7.4	Daten von Freileitungsseilen	61
7.5	Elektrische Daten von Freileitungen (Richtwerte)	63

Hinweis: Das Skript ersetzt nicht die Vorlesung und umgekehrt. Im Skript sind einige Ausführungen, insbesondere mathematische Ableitungen ausführlicher dargestellt, während in der Vorlesung mehr Wert auf das Verständnis gelegt wird. Die mit einem * gekennzeichneten Kapitel sind zur Vertiefung gedacht.

1 Ausführungsformen

Das Bild der Freileitung wird durch ihre Nennspannung geprägt. Die Wahl der Übertragungsspannung ist eine Frage der Kostenoptimierung der Übertragung. In Deutschland sind bis auf einige Ausnahmen die in Tabelle 1.1 angegebenen Nennspannungen für Netze üblich. Dabei unterscheidet man zunächst zwischen der *Niederspannungsebene* ($U_n < 1000 \text{ V}$) und der *Hochspannungsebene* ($U_n > 1 \text{ kV}$). Im Sprachgebrauch ist es üblich, die Hochspannungsebene noch in *Mittelspannungsebene* ($U_n < 110 \text{ kV}$), *Hochspannungsebene* ($110 \text{ kV} \leq U_n \leq 400 \text{ kV}$) und *Höchstspannungsebene* ($U_n > 400 \text{ kV}$) zu unterteilen.

Tabelle 1.1: Übliche Netzennennspannungen in Deutschland

Niederspannung	Mittelspannung	Hochspannung
<u>230 / 400 V</u> 500 V 660 V	6 kV <u>10 kV</u> <u>20 kV</u> 30 kV	<u>110 kV</u> (220 kV) <u>380 kV</u>

Die Nennspannungen sind historisch gewachsen. Dabei sind relativ viele Spannungsebenen entstanden, die teilweise auch noch in Betrieb sind. Aus wirtschaftlichen Gründen (minimale Anzahl von Transformatoren) sollte jedoch die Spannungsstufung der Netze so sein, daß der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Spannungsebenen nicht kleiner als zwei ist. Die in Tabelle 1.1 unterstrichenen Werte sind im Einklang mit der internationalen IEC-Norm IEC 38, die unverändert in die Deutsche Norm übernommen wurde (DIN IEC 38). Nach dieser Norm wurde bzw. wird die Niederspannungsebene weltweit von 220/380 V bzw. 240/415 V auf 230/400 V umgestellt. Die 220-kV-Spannungsebene wird aus den erwähnten wirtschaftlichen Gründen mehr und mehr zurückgebaut.

Spannungen über 200 kV sind international nicht genormt. Höhere Spannungen als 400 kV sind für die Übertragungsaufgaben im europäischen Verbundnetz (UCPTE-Netz) auch perspektivisch nicht erforderlich. Im Ausland sind für größere Übertragungsstrecken auch 500-kV- und 750-kV-Freileitungen in Betrieb. In Rußland befindet sich eine 1500-kV-Leitung in der Erprobung.

Mit der Erhöhung der Übertragungsspannung wächst bei gleichem Strom und damit gleichen Stromwärmeverlusten und gleichem Spannungsabfall die übertragbare Leistung. Die relativen auf die Übertragungsleistung bezogenen Verluste und der relative auf die Übertragungsspannung bezogene Spannungsabfall werden somit kleiner. Die noch wirtschaftliche und technisch sinnvolle Leitungslänge wird größer.

Diesen Vorteilen der Erhöhung der Übertragungsspannung stehen die mit ihr steigenden Kosten der Freileitung gegenüber. Höhere Spannungen erfordern größere Isolationsabstände und besondere Maßnahmen (Bündelleiter¹⁾) gegen die Koronaerscheinungen. Die Freileitungsgeometrie und damit der Trassenbedarf wachsen. Technisch setzen die Koronaentladungen der Steigerung der Übertragungsspannung eine Grenze. Damit wird auch die wirtschaftlich übertragbare Leistung über große Entfernungen (die sogenannte natürliche Leistung), die nur vom Quadrat der Spannung und dem Wellenwiderstand (also von der Leitungsgeometrie und nicht von der Leitungslänge) abhängt, begrenzt. Zusammen mit dem Strom bestimmt die Leistungslänge den Spannungsabfall und den Phasenwinkel zwischen den Spannungen am Ende und Anfang der Leitung, den sogenannten Stabilitätswinkel. Da der Spannungsabfall, insbesondere bei Lastabwurf am Ende der Leitung (der Spannungsabfall wird dann negativ), und der Stabilitätswinkel bestimmte Werte nicht

¹⁾ Die hier vorweggenommenen Begriffe werden im Skript erläutert.

überschreiten dürfen, beschränken sie die Reichweite der Drehstromfreileitung auf etwa 1000 km. Für größere Übertragungsentfernungen kommen dann nur Gleichspannungsübertragungen (HGÜ) in Frage.

Die Geschichte der Drehstromfreileitung beginnt 1891 mit der ersten Fernübertragung von Lauffen am Neckar über 175 km nach Frankfurt am Main anlässlich einer internationalen elektrotechnischen Ausstellung, auf der die Überlegenheit der Drehstromübertragung demonstriert werden sollte. Mit einer Spannung von 15 kV wurde eine Leistung von 300 PS (200 kW) auf einer an 3282 Holzmasten mit Kappenisolatoren befestigten $12,5 \text{ mm}^2$ Kupferleitung mit einem Wirkungsgrad von 75% übertragen. Mit der Erfindung des Hängeisolators im Jahre 1907 in den USA war der Weg zu höheren Übertragungsspannungen frei. 1912 wird mit der Leitung Lauchhammer-Riesa (56 km) in Sachsen die erste 110-kV-Leitung Europas in Betrieb genommen. Die erste 220-kV-Leitung in der Bundesrepublik Deutschland, die Rheinleitung Brauweiler-Hoheneck (Nord-Süd-Verbindung) geht 1929 in Betrieb. Die Leitung wurde weit vorausschauend bereits für eine spätere Umstellung auf 380 kV bemessen und zunächst mit 6 Kupferhohlseilen von je 42 mm Durchmesser belegt. 1952 wird die erste 380-kV-Leitung in Schweden und 1958 mit der Leitung Rommerskirchen-Hoheneck die erste 380-kV-Leitung in der BRD unter Spannung gesetzt. Das jetzige gesamtdeutsche Leitungsnetz umfaßt etwa 16000 km 380 kV- und 22500 km 220-kV-Leitungen. Einen Überblick über die historische Steigerung der Übertragungsspannung gibt Bild 1.1.

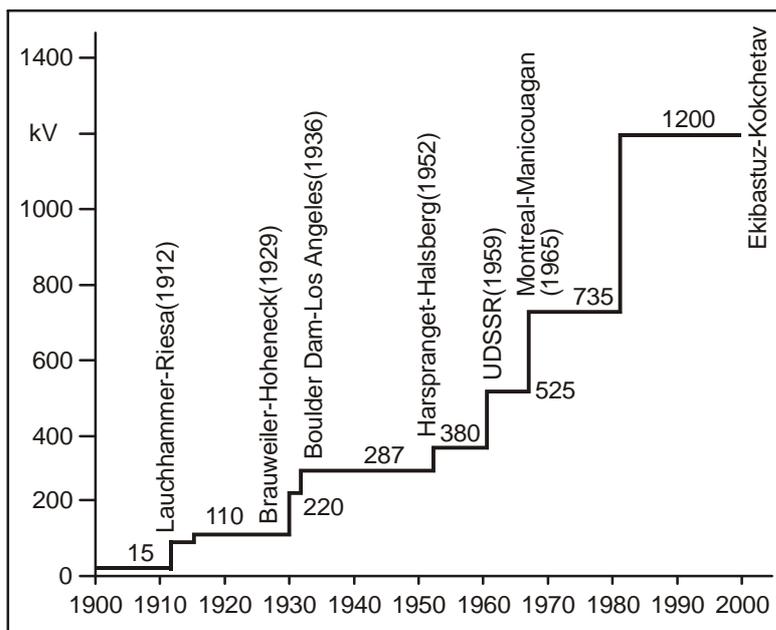


Bild 1.1: Entwicklung der Übertragungsspannung von Drehstromleitungen

Typische Mastbilder von Drehstromfreileitungen zeigt das Bild 1.2. In der Mittelspannungsebene werden heute vorwiegend Stahlbetonmasten verwendet, während in den höheren Spannungsebenen ausschließlich Stahlgittermasten eingesetzt werden. Beim Do-naumast ist die Leitung in zwei Ebenen angeordnet, wodurch eine geringere Trassenbreite als beim Einebenenmast erforderlich ist.

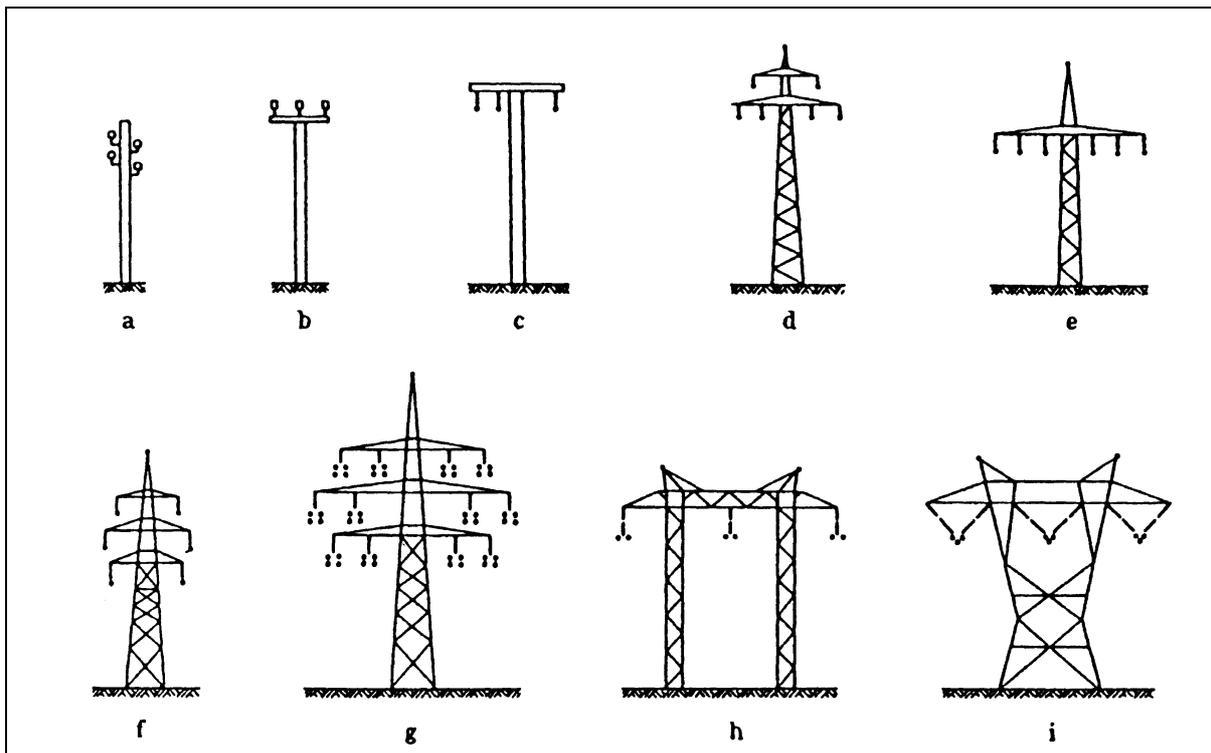


Bild 1.2: Mastbilder von Drehstrom-Freileitungen

a) Niederspannungsleitung (Holzmast) mit Nulleiter; b) Mittelspannungsleitung mit Stützenisolatoren; c) Betonmastleitung (Mittelspannung bis 110 kV); d) Donaumastbild (110 bis 380 kV und bis 1150 kV möglich); e) Einebenenmastbild (110 kV bis 220 kV); f) Tonnenmastbild (110 kV bis 1150 kV); g) Mehrfachleitung hier für vier Stromkreise 380 kV; h) Portalast, u.U. abgespannte Konstruktion (110 kV bis 750 kV); i) Y-Mastbild (110 kV bis 1500 kV)

Eine Vorstellung von der normalen Mastgeometrie vermittelt das Bild 1.3.

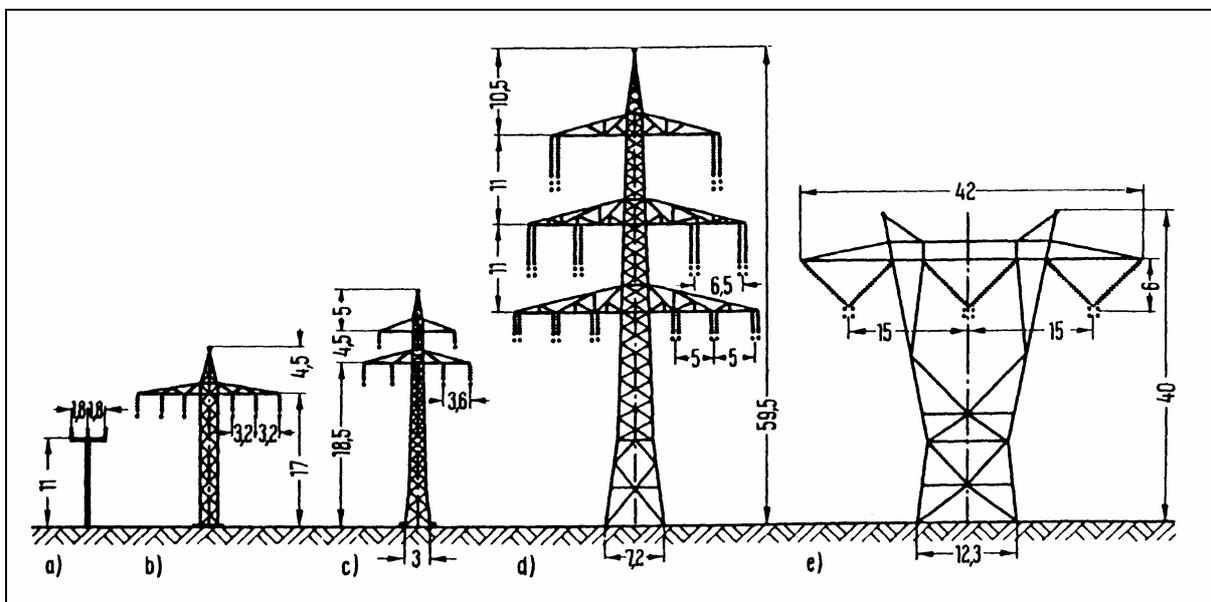


Bild 1.3: Größenvergleich von Freileitungsmasten; a) 20-kV-Tragmast mit Stützenisolatoren; b) 110-kV-Einebenen-Tragmast; c) 110-kV-Tragmast (Donautyp); d) Tragmast mit 2x220-kV-Zweierbündelleitung und 2x380-kV-Viererbündelleitung; e) 735-kV-Tragmast (Kanada) mit V-Ketten und Viererbündelleitung

Wesentlich größere Masthöhen und Spannweiten sind beim Kreuzen von Flüssen, Fjorden und Meerengen erforderlich. Die längste Spannweite weist mit 4888 m die

275-kV-Leitung über den Sognefjord in Norwegen auf, während die Freileitungsmasten zur Überquerung der Straße von Messina 205 m und 224 m messen und 3627 m auseinanderstehen.

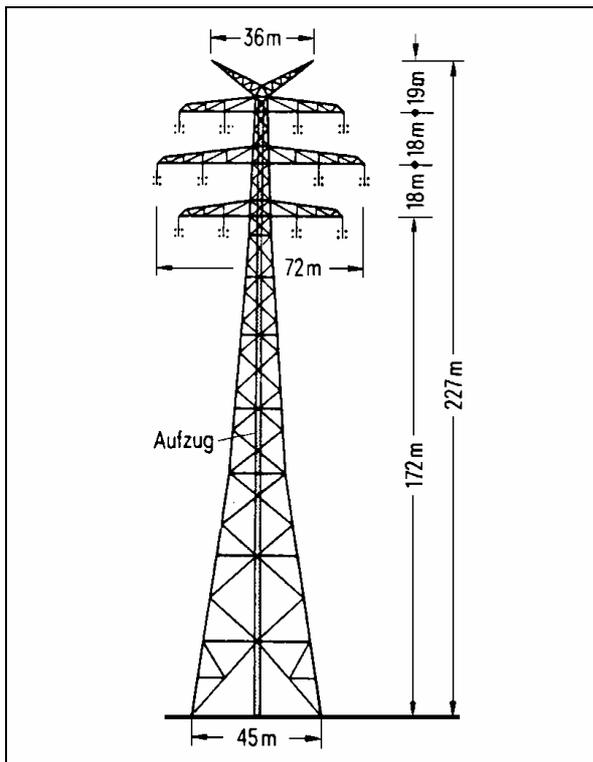


Bild 1.4: Hauptabmessungen des Tragmastes der Elbekreuzung bei Stade

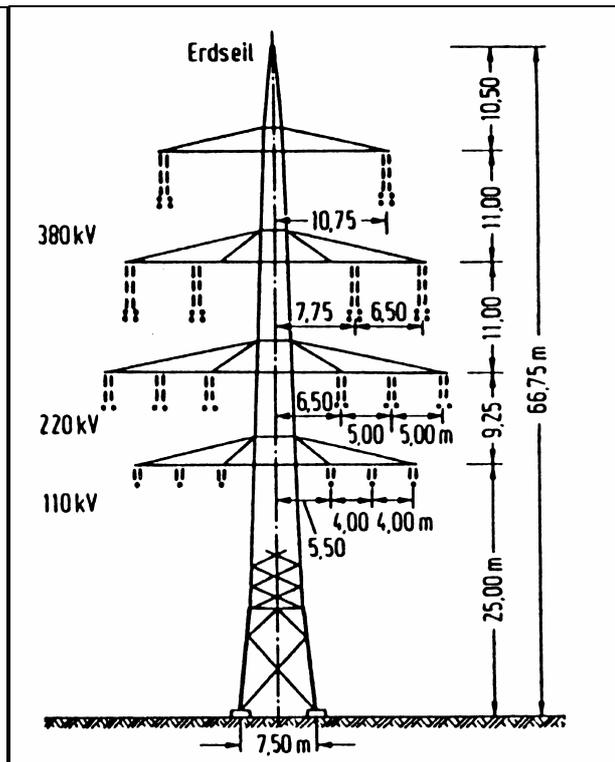


Bild 1.5: Freileitung mit 6 Stromkreisen bestehend aus 380-kV-Doppelleitung (oben) 220-kV-Doppelleitung (mitte) 110-kV-Doppelleitung (unten)

Die Tragmaste der 380-kV-Elbekreuzung bei Stade haben eine Höhe von 227 m (Bild 1.4) und garantieren eine Durchfahrtshöhe von 80 m bei 1200 m Spannweite. Mittelspannungsleitungen werden generell als *Einfachleitung* (man spricht auch von einem Stromkreis) aufgebaut. In der 110-, 220- und 380-kV-Ebene sind aus Gründen der Versorgungszuverlässigkeit und zur besseren Trassenausnutzung *Doppelleitungen* üblich. In Ballungsgebieten und in der Nähe von Umspannwerken werden Mehrfachleitungen mit bis zu 6 Stromkreisen auf einem Gestänge (Mast) geführt (Bild 1.5).

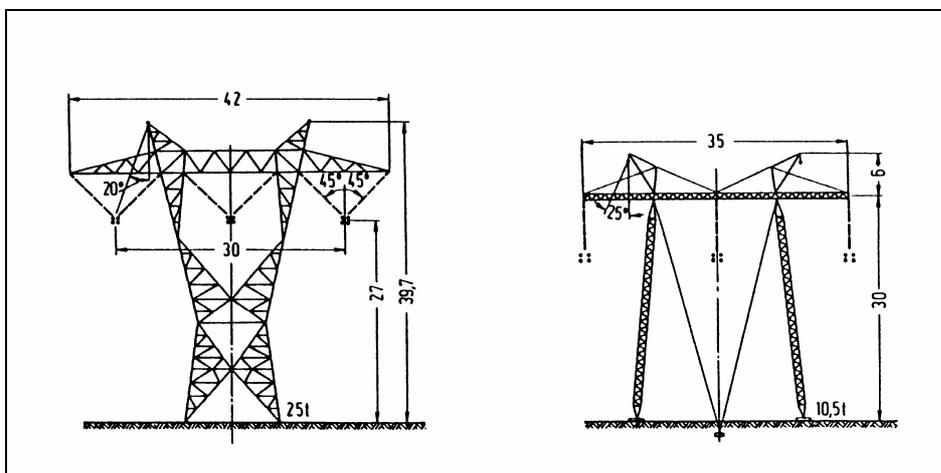


Bild 1.6: Mastformen von 735- bzw. 750-kV-Leitungen in Kanada (links) und Rußland (rechts)

In den Spannungsebenen oberhalb 380 kV geht man aus Platzgründen wieder zu Einfachleitungen über (Bild 1.6). Eine Ausnahme macht hier Japan, wo man grundsätzlich auch in den höheren Spannungsebenen Doppelleitungen baut.

Bei den Masten unterscheidet man zwischen reinen *Tragmasten*, *Abspannmasten*, *Winkelabspannmasten*, an denen die Freileitung ihre Richtung ändert, *Verdrillungsmasten*, an denen die Leiterseile zur Symmetrisierung der Parameter ihre Plätze tauschen, und *Endmasten*, an denen die Freileitung in ein Umspannwerk geführt wird oder in ein Kabel übergeht (Bild 1.7).

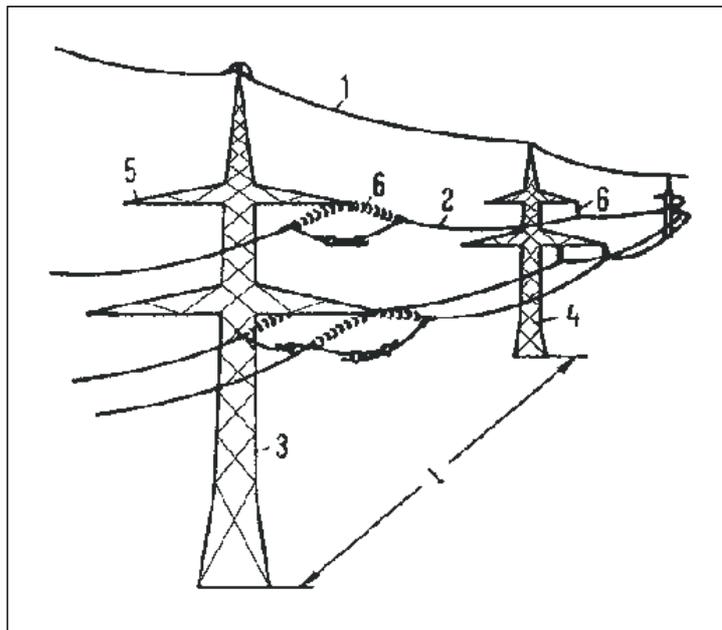


Bild 1.7: Mastformen der Hochspannungsfreileitung

- 1 Erd- oder Blitzschutzseil
- 2 Leiterseil
- 3 Abspannmast
- 4 Tragmast
- 5 Traverse
- 6 Isolator
- 7 Spannfeldlänge

Die Abspannmasten nehmen die Zugkräfte der Leiterseile auf. Je nach Leitungsführung und Geländebeschaffenheit ist jeder 5. bis 15. Mast ein Abspannmast.

Die Bereiche der wirtschaftlichen *Spannweiten* (Mastabstände) bei normalen Geländebeziehungen und Stahlmasten sowie die minimale *Leiterseilhöhe* vom Erdboden enthält Tabelle 1.2

Tabelle 1.2: Spannweiten und Leiterseilhöhen von Freileitungen

Nennspannung	Spannweite	minimale Höhe
110 kV	220...350 m	6 m
220 kV	300...400 m	6,73 m
380 kV	350...450 m	7,8 m

Als *Isolatoren* werden bis 20 kV (selten bis 30 kV) gewöhnlich *Stützisolatoren* eingesetzt. Von 110 kV aufwärts kommen *Langstabisolatoren* aus Porzellan oder *Ketten* aus Glas- oder Porzellankappen zur Anwendung. 110-kV-Freileitungen erkennt man daran, daß sie mit einem Langstabilisolator isoliert sind, während eine 220-kV-Leitung durch zwei und eine 380-kV-Leitung durch drei Langstäbe auffällt. Die Isolatoren müssen neben der Span-

nungsbeanspruchung auch den mechanischen Beanspruchungen insbesondere unter zusätzlicher Wind- und Eislast standhalten. Sogenannte V-Isolatorenketten, Isoliertraversen und Leiterabstandshalter werden zur Verringerung der Trassenbreite eingesetzt.

Als *Leiterseile* werden heute anstelle von Vollseilen aus Kupfer (früher) oder Aluminium ab 110 kV aufwärts Aluminium-Stahl-(Al/St-) *Verbundseile* verwendet (Bild 1.8).

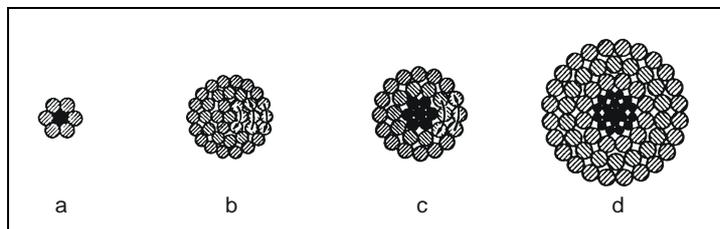


Bild 1.8: Aufbau von Freileitungsseilen

a) Al/St-Seil (eine Lage Al); b) Al- oder Cu-Seil (3Lagen, 37 Drähte);

c) Al/St-Seil (2 Lagen Al); d) Al/St-Seil (3 Lagen Al)

Das Stahlseil im Innern der Verbundseile erhöht die mechanische Festigkeit und den äußeren Radius des Leiterseils, was sich günstig auf die Parameter der Freileitung auswirkt und den Koronaeintritt verzögert. Die Stromführung übernimmt der besser leitfähige Aluminiummantel. Die Querschnitte von Stahl und Aluminium werden in der Reihenfolge Aluminium, Stahl angegeben. So bedeutet Al/St 240/40 einen Aluminiumquerschnitt von 240 mm² und einen Stahlquerschnitt von 40 mm². Das Verhältnis der Querschnitte Aluminium zu Stahl liegt bei den Leitungen in Deutschland zwischen 6 und 7,7. Die Stahlseele besteht gewöhnlich aus 7 oder bei Seilen größeren Querschnitts aus 19 Drähten um die 2 oder 3 Lagen aus Aluminiumdrähten unterschiedlicher Schlagrichtung angeordnet sind. Zur Überwindung großer Spannweiten werden Seile mit größerem Stahlquerschnitt verwendet.

Ab 220 kV werden sogenannte *Bündelleiter* eingesetzt. Ein Bündelleiter besteht aus 2 bis 4 (bei der Höchstspannungsleitung in Rußland aus 8) Leiterseilen, den sogenannten *Teilleitern*, die durch Abstandshalter parallel geführt werden. Der Strom und die Ladung verteilen sich gleichmäßig auf die Teilleiter. Neben der Querschnittserhöhung haben die Bündelleiter den Vorteil, daß sie sich elektrisch wie ein runder Einzelleiter mit einem relativ großen Radius r_B verhalten und als schwingungssicher gelten. Dieser sogenannte *Bündelleiter-Ersatzradius* liegt zwischen 6,2 und 22 cm je nach Bündelzahl und Teilleiterabstand a (Bild 1.9).

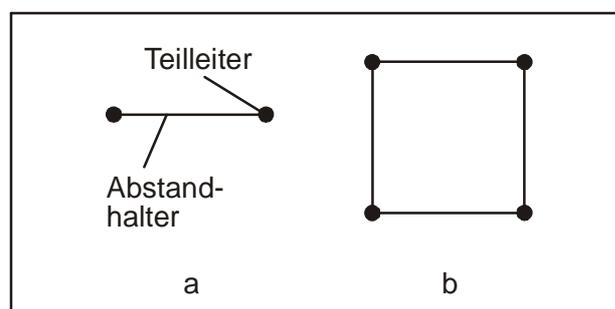


Bild 1.9: Bündelleiteranordnungen

a) 2-er Bündel b) 4-er Bündel

Durch den größeren Ersatzradius wird zum einen die Oberflächenrandfeldstärke mit Rücksicht auf die durch die Koronaentladungen verursachten HF-Störungen auf 17,5 kV/cm begrenzt und zum anderen werden die Induktivitäten der Freileitung kleiner und die Kapazitäten größer und damit der Wellenwiderstand kleiner. Kleinerer Wellenwiderstand erhöht bei gleicher Spannung die natürliche Leistung, und kleinere Induktivität verringert bei glei-

chem Strom den Spannungsabfall. Diese Zusammenhänge werden in Kapitel 6 erläutert. Bild 1.10 zeigt die Feldbilder von Bündelleitern.

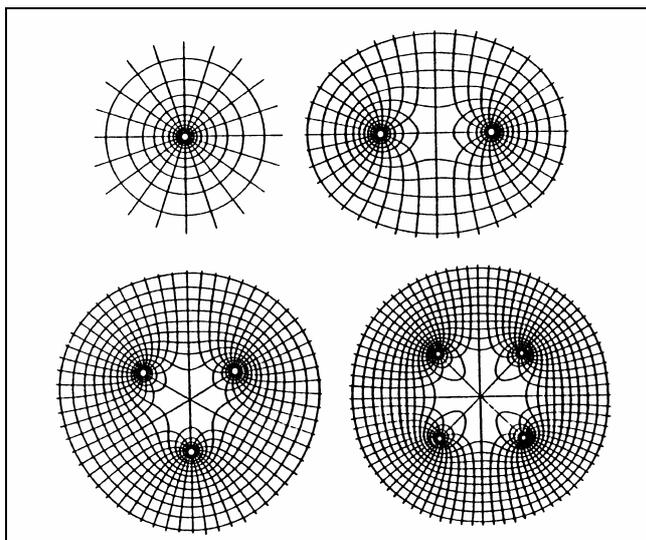


Bild 1.10: Feldbilder von Bündelleitern im Vergleich zum Einzelleiter

Tabelle 1.3: Daten von Freileitungsseilen

Land	Nennspannung	Leiterseil und Querschnitt	r/cm	a/cm	r_B/cm
Ostdeutschland ²⁾	10 kV	50 Al	0,45	-	-
Ostdeutschland	20 kV	70 Al	0,575	-	-
		95 Al	0,625	-	-
Ostdeutschland	30 kV	120 Al	0,7	-	-
		95/15 Al/St	0,68	-	-
Ostdeutschland	110 kV	150/25 Al/St	0,855	-	-
		210/36 Al/St	1,015	-	-
Ostdeutschland	220 kV	2×185/32 Al/St	0,96	40	6,2
West- und Ost-deutschland	380 kV	4×240/40 Al/St	1,085	40	17,7
Ostdeutschland	380 kV	3×380/50 Al/St	1,35	50	15
Schweden	380 kV	2×525/68 Al/St	1,585	45	8,45
Rußland	500 kV	3×480/60 Al/St	1,51	40	13,4
Kanada	735 kV	4×655/34 Al/St	1,75	45,7	22

Die Tabelle 1.3 enthält für häufig eingesetzte Leiterseile den (Teil-)Leiterradius r , den Teil-leiterabstand a und den Bündelleitersersatzradius r_B . Beim weiteren Ausbau des 380-kV-Netzes in der Bundesrepublik Deutschland Ende der 50er Jahre hat sich die Deutsche Verbundgesellschaft (DVG) für einen einheitlichen Mast (Donaumast) mit einheitlicher Be-seilung mit einem Stahlaluminiumseil 240/40 mm² als 2-er Bündel bei 220 kV und 4-er Bündel bei 380 kV entschieden, so daß dieses Mastbild heute in Westdeutschland vor-herrscht. In der ehemaligen DDR waren die Seilbelegungen ebenfalls genormt. Die Lei-tungen in Ostdeutschland weisen deshalb einheitlich die Werte in Tabelle 1.3 auf. Die ma-ximale *Leitungsseil-Temperatur* darf nach DIN 48204 im Dauerbetrieb 80°C nicht übe-r-

²⁾ Gebiet der ehemaligen DDR

schreiten. Im Kurzschluß sind kurzfristig Leitertemperaturen bis 200°C zulässig (DIN VDE 0103).

Während früher die Freileitungen durch Aufmodulation von hochfrequenten Trägersignalen (TFH) auch zur Signalübertragung genutzt wurden, werden heute zunehmend Lichtwellenleiter im Erdseil und bei 110-kV-Leitungen auch schon im Leiterseil (ein Stahldraht wird durch ein Röhrchen, in dem der Lichtwellenleiter untergebracht wird, ersetzt) verlegt. Mit dem Lichtwellenleiter können außerdem die Temperaturen gemessen und Fehlerstellen geortet werden. Die auf den Mastspitzen oder auf den Masttraversen angebrachten *Erdseile* (Bild 1.7) haben die Aufgabe, die Leiterseile vor Blitzeinschlägen, die zu sogenannten Erdfehlern führen würden, zu schützen und im Fall unsymmetrischer Kurzschlüsse, bei denen Teilkurzschlußströme über die Erde fließen, einen Teil des Erdstromes aufzunehmen. Die Erdseile müssen dazu ausreichend bemessen sein und dürfen in Netzen mit niederohmiger Sternpunktterdung keine zu große Selbstinduktivität haben. Stahlseile sind deshalb nur für Netze mit freiem Sternpunkt oder Resonanzsternpunktterdung geeignet. Man geht heute dazu über, für die Erdseile ebenfalls Al/St-Seile zu verwenden. Erdseile, die auf Stützisolatoren geführt sind, dienen ebenfalls der TFH-Signalübertragung. Bei Blitzeinschlägen und Erdkurzschlüssen schlägt die relativ kleine Isolationstrecke zum geerdeten Mast über.

Um bei größeren Leitungslängen größere Unsymmetrien der Leitungsparameter bezüglich der einzelnen Leiter der Leitungen und die Beeinflussung untereinander und von benachbarten Leitungen zu vermeiden bzw. zu verringern, werden die Leitungen ab 110 kV bei Längen über 20 km *verdrillt*.

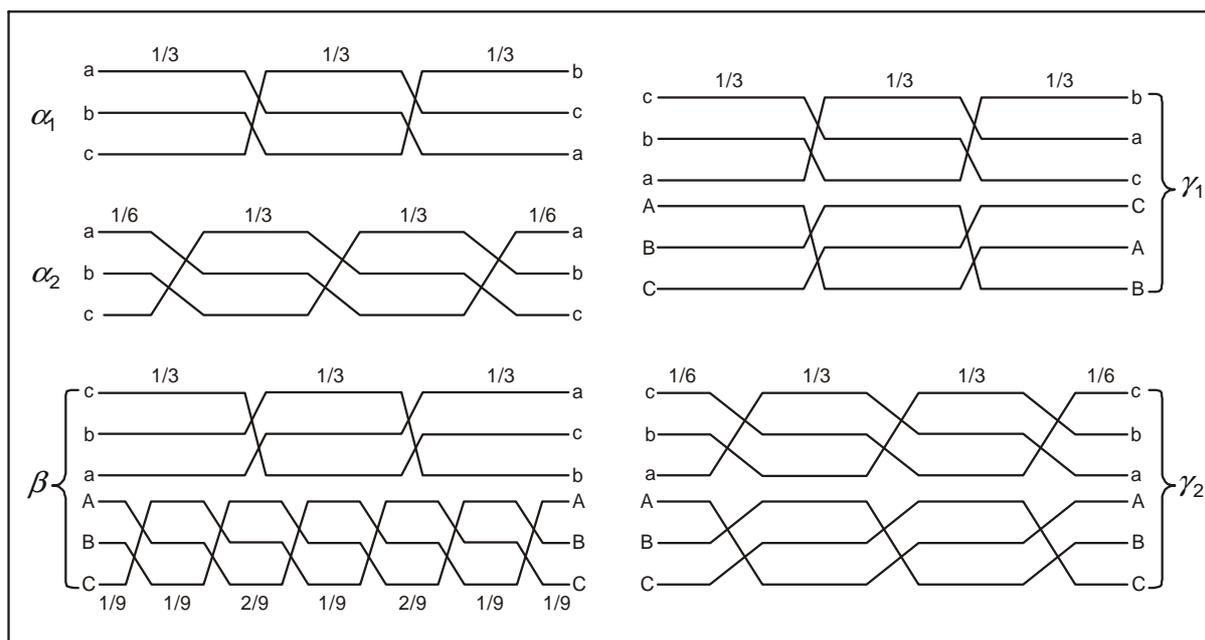


Bild 1.11: Verdrillungsarten von Freileitungen

Die Leiterseile werden dann an Abspannmasten (die dann Verdrillungsmast heißen) in ihren Plätzen getauscht. Damit jeder Leiter über die gesamte Leitungslänge gesehen einmal jeden möglichen Platz am Mast eingenommen hat, sind mindestens 2 Verdrillungsstellen (Maste) notwendig. In der Regel genügt für Leitungslängen bis 200 km ein solcher Umlauf. In Bild 1.11 sind die üblichen Verdrillungsarten für Einfach- und Doppelleitungen dargestellt. Die Verdrillungsarten α für Einfachleitungen unterscheiden sich dadurch, daß bei α_2 nach einem Umlauf wieder die gleiche Phasenfolge am Mast vorliegt. Dazu ist allerdings ein weiterer Verdrillungsmast erforderlich. Derselbe Unterschied besteht zwischen den Verdrillungsarten γ_1 und γ_2 für Doppelleitungen. Die aufwendige Verdrillungsart β für

Doppelleitungen hat eine vollständige Entkopplung der beiden Stromkreise im stationären Betrieb zur Folge. Sie wird heute nicht mehr angewendet.

2 Einphasenleitung

2.1 Ersatzschaltung mit verteilten Parametern*

Die Strom-Spannungsbeziehungen für eine Einphasenfreileitung stellen ein partielles Differentialgleichungssystem für die Variablen Zeit (t) und Ort (x) dar. Für die positiven Zählrichtungen in Bild 2.1 lauten die auch *Telegraphengleichungen* genannten *Leitungsgleichungen* bekanntlich:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -R' i_x - L' \frac{\partial i_x}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} = -G' u_x - C' \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad (2.2)$$

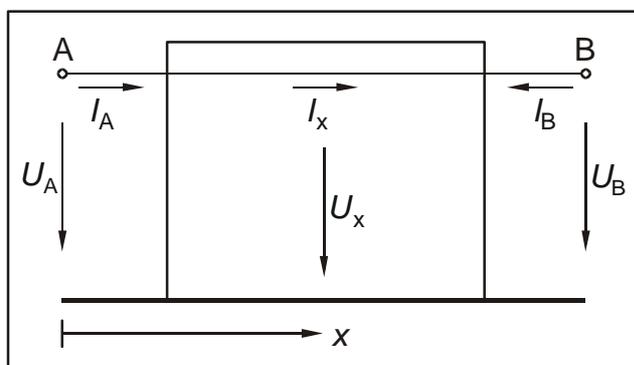


Bild 2.1: Einphasenleitung mit Erdrückleitung

Die Parameter R' , L' , G' und C' in den Gln. (2.1) und (2.2) sind der Widerstandsbelag, Induktivitätsbelag, Ableitungsbelag und Kapazitätsbelag. Diese *Leitungsbeläge* sind auf die Längeneinheit 1 km bezogen.

Zur Lösung der Leitungsgleichungen werden diese zunächst in den Frequenzbereich transformiert. Im Frequenzbereich läßt sich die *Frequenzabhängigkeit* der Leitungsparameter, die von der endlichen Leitfähigkeit der Erde herrührt, einfacher berücksichtigen. Die Gln. (2.1) und (2.2) gehen über in ein Zustandsdifferentialgleichungssystem für die ortsabhängigen *Bildgrößen*, die durch Großbuchstaben gekennzeichnet sind:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Z' \\ -Y' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

wobei

$$Z' = R' + j\omega L' \quad (2.4)$$

und

$$Y' = G' + j\omega C' \quad (2.5)$$

der *Impedanz* - und *Admittanzbelag* sind.
Mit dem Lösungsansatz:

$$\begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} = \mathbf{c} e^{\lambda x} \quad (2.6)$$

folgt aus Gl. (2.3)

$$\begin{bmatrix} \lambda & Z' \\ Y' & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

Gl. (2.7) hat nichttriviale Lösungen ($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) nur für

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & Z' \\ Y' & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - Z'Y' = 0 \quad (2.8)$$

d.h.

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{Z'Y'} = \pm \gamma \quad (2.9)$$

Durch Einsetzen der *Eigenwerte* $\lambda_1 = \gamma$ und $\lambda_2 = -\gamma$ in die Gl. (2.7) erhält man die beiden Vektoren $\mathbf{c}_1 = k_1 \mathbf{v}_1$ und $\mathbf{c}_2 = k_2 \mathbf{v}_2$, die bis auf die beliebigen Faktoren k_1 und k_2 mit den *Eigenvektoren* \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 identisch sind.

$$\begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -Y_w \end{bmatrix} e^{\gamma x} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ Y_w \end{bmatrix} e^{-\gamma x} \quad (2.10)$$

Mit Y_w wurde in Gl. (2.10) der Kehrwert des *Wellenwiderstandes*

$$Z_w = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \frac{1}{Y_w} \quad (2.11)$$

eingeführt. Der Betrag der Eigenwerte

$$\gamma = \sqrt{Z'Y'} = \alpha + j\beta \quad (2.12)$$

heißt *Fortpflanzungsmaß*, dessen Realteil α das *Dämpfungsmaß* und dessen Imaginärteil β das *Phasenmaß* ist.

Die beiden Konstanten k_1 und k_2 können aus den Strom- und Spannungsbedingungen an den Leitungsenden bestimmt werden.

Am *Leitungsanfang* gilt $x = 0$ und damit

$$\begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -Y_w & Y_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -Z_w \\ 1 & Z_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix}$$

Eingesetzt in die wie folgt umgeordnete Gl. (2.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -Y_w & Y_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\gamma x} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{\gamma x} + e^{-\gamma x} & -Z_w(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \\ -Y_w(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) & e^{\gamma x} + e^{-\gamma x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \gamma x & -Z_w \sinh \gamma x \\ -Y_w \sinh \gamma x & \cosh \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Analog erhält man aus den Bedingungen am Leitungsende bei $x = l$ unter Beachtung von $I(l) = -I_B$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & Z_w e^{-\gamma l} \\ e^{\gamma l} & -Z_w e^{\gamma l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_B \\ I_B \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma(l-x) & -Z_w \sinh \gamma(l-x) \\ Y_w \sinh \gamma(l-x) & -\cosh \gamma(l-x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_B \\ I_B \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Für $x = l$ in Gl. (2.13) und $x = 0$ in Gl. (2.14) folgen die beiden ineinander überführbaren Gleichungssysteme für den Zusammenhang der Ströme und Spannungen an den Leitungsenden³⁾:

$$\begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -Z_w \sinh \gamma l \\ Y_w \sinh \gamma l & -\cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_B \\ I_B \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} U_B \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -Z_w \sinh \gamma l \\ Y_w \sinh \gamma l & -\cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Führt man in den Gln. (2.15) und (2.16) noch einen Variablentausch, der die Spannungen und Ströme in je einem Vektor anordnet aus, so erhält man schließlich

$$\begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w \coth \gamma l & Z_w (\sinh \gamma l)^{-1} \\ Z_w (\sinh \gamma l)^{-1} & Z_w \coth \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_w \coth \gamma l & -Y_w (\sinh \gamma l)^{-1} \\ -Y_w (\sinh \gamma l)^{-1} & Y_w \coth \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Für den hier ausschließlich interessierenden *eingeschwungenen* Zustand mit Betriebsfrequenz gelten die vorstehenden Gleichungen im Frequenzbereich für die Zeigergrößen \underline{U}_A , \underline{U}_B , \underline{I}_A , \underline{I}_B , \underline{U}_x und \underline{I}_x . Die sonst aufwendige Rücktransformation (z.B. bei der Berechnung von Ausgleichsvorgängen auf Leitungen) vereinfacht sich zur gewohnten Realteilbildung. Wir wollen mit Hinweis auf die Beschränkung auf den eingeschwungenen Zustand i. f. auch die Zeigerschreibweise benutzen (unterstrichene Größen).

³⁾ Beachte: Die Inversen der Matrizen in Gl.(2.15) bzw. (2.16) sind gleich den Matrizen selbst.

Zu der Spannungsgleichung Gl. (2.17) lässt sich die *T-Ersatzschaltung* in Bild 2.2 angeben. Die Impedanzen der Ersatzschaltung ergeben sich aus dem bekannten Bildungsgesetz der Maschenimpedanzmatrix mit \underline{I}_A und \underline{I}_B als Maschenströme.

Zu der Stromgleichung Gl. (2.18) lässt sich sofort die *II-Ersatzschaltung* in Bild 2.3 angeben. Die Admittanzen ergeben sich aus dem bekannten Bildungsgesetz der Knotenadmittanzmatrix mit \underline{U}_A und \underline{U}_B als Knotenspannungen.

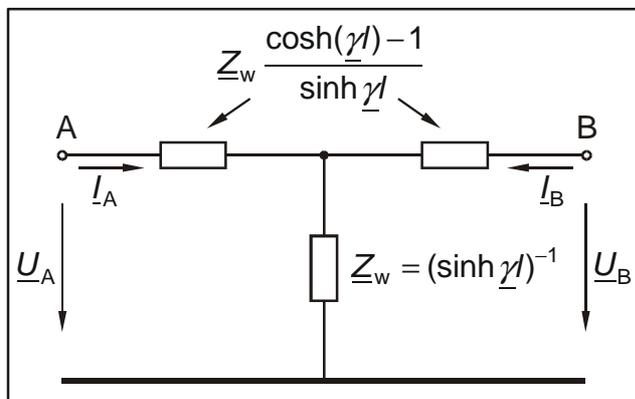


Bild 2.2: T-Ersatzschaltung (Impedanzersatzschaltung) der Einphasenleitung

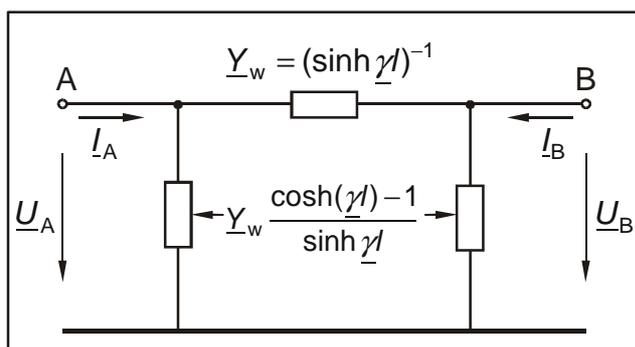


Bild 2.3: II-Ersatzschaltung (Admittanzersatzschaltung) der Einphasenleitung

Der Wellenwiderstand \underline{Z}_w , der Wellenleitwert \underline{Y}_w und das Ausbreitungsmaß $\underline{\gamma}$ in den Ersatzschaltungen gelten ebenfalls für Betriebsfrequenz.

2.2 Ersatzschaltung mit konzentrierten Parametern

Für elektrisch kurze Leitungen, d.h. $\underline{\gamma}l \ll 1$, lassen sich die hyperbolischen Funktionen wie folgt annähern

$$\sinh \underline{\gamma}l \approx \underline{\gamma}l$$

$$\cosh \underline{\gamma}l \approx 1 + \frac{1}{2}(\underline{\gamma}l)^2$$

Damit wird

$$\underline{Y}_w = (\sinh \underline{\gamma} l)^{-1} = \frac{\underline{Y}_w}{\underline{\gamma} l} = \frac{\underline{Y}_w}{\sqrt{\underline{Z}' \underline{Y}' l}} = \frac{1}{\underline{Z}' l} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX}$$

$$\underline{Y}_w \frac{\cosh \underline{\gamma} l - 1}{\sinh \underline{\gamma} l} = \underline{Y}_w \frac{1}{2} \frac{(\underline{\gamma} l)^2}{\underline{\gamma} l} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\underline{Y}'}{\underline{Z}'}} \sqrt{\underline{Z}' \underline{Y}' l} = \frac{1}{2} \underline{Y}' l = \frac{1}{2} \underline{Y} = \frac{1}{2} (G + jB)$$

und analog

$$\underline{Z}_w = (\sinh \underline{\gamma} l)^{-1} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jB}$$

$$\underline{Z}_w \frac{\cosh \underline{\gamma} l - 1}{\sinh \underline{\gamma} l} = \frac{1}{2} \underline{Z} = \frac{1}{2} (R + jX)$$

Die Ersatzschaltungen mit den so vereinfachten Impedanz- und Admittanzausdrücken sind in den Bildern 2.4 und 2.5 dargestellt, wobei jetzt den üblichen Gepflogenheiten folgend, an die Längsglieder Impedanzen und an die Querglieder Admittanzen geschrieben sind.

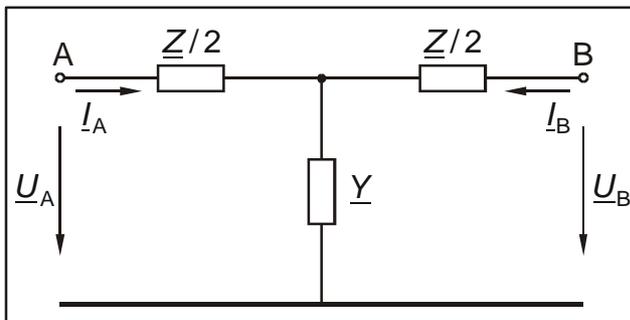


Bild 2.4: T-Ersatzschaltung der kurzen Leitung

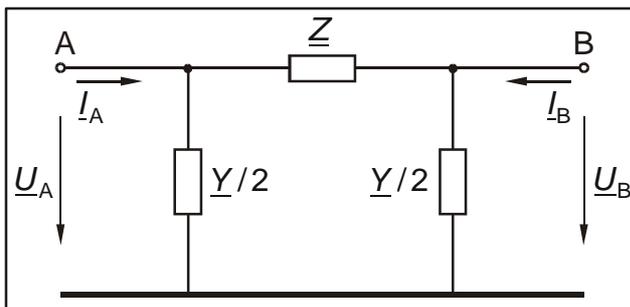


Bild 2.5: II-Ersatzschaltung der kurzen Leitung

Die Ersatzschaltungen in den Bildern 2.4 und 2.5 heißen auch Ersatzschaltungen mit *konzentrierten* Parametern. Anstelle der beiden Parameter \underline{Z}_w bzw. \underline{Y}_w und $\underline{\gamma}$ sind die Impedanzen \underline{Z} und \underline{Y} bzw. deren halber Wert getreten. Abschließend sei bemerkt, daß man den Gültigkeitsbereich der Ersatzschaltungen der kurzen Leitungen durch sogenannte *Vierpolkettenschaltungen*, d.h. eine Hintereinanderschaltung von T- oder II-Vierpolen mit entsprechend unterteilten Impedanzen $\Delta \underline{Z}$ und $\Delta \underline{Y}$ wieder ausdehnen kann (Bild 2.6).

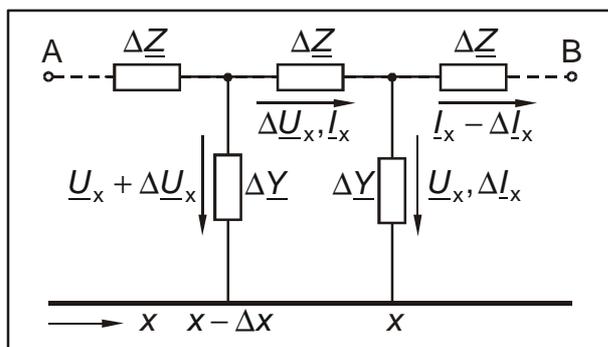


Bild 2.6: Vierpolkettenschaltung der Einphasenleitung

Bei infinitesimal feiner Unterteilung gehen die ΔZ und ΔY in die Leitungsbeläge Z' und Y' über und man gelangt - wie die folgende Rechnung zeigt - durch die Grenzübergänge für die Längsspannungen und die Querströme wieder zu dem ursprünglichen Gleichungssystem (2.3).

Aus

$$\Delta U_x = \Delta Z I_x = Z' \Delta x I_x \tag{2.19}$$

und

$$\Delta I_x = \Delta Y U_x = Y' \Delta x U_x \tag{2.20}$$

wird mit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(U_x + \Delta U_x) - U_x}{x - (x - \Delta x)} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x) - U(x - \Delta x)}{x - (x - \Delta x)} = - \frac{\partial U_x}{\partial x}$$

und dem analogen Ergebnis für die Stromänderung

$$- \frac{\partial U_x}{\partial x} = Z' I_x \text{ und } - \frac{\partial I_x}{\partial x} = Y' U_x \quad (\text{q.e.d.})$$

3 Drehstrom-Einfachleitung

Die Leiter und die Erde der Mehrphasen- oder Mehrleiteranordnungen sind vollständig induktiv und kapazitiv gekoppelt. Das Π -Ersatzschaltbild für die elektrisch kurze Leitung bei Betriebsfrequenz zeigt Bild 3.1.

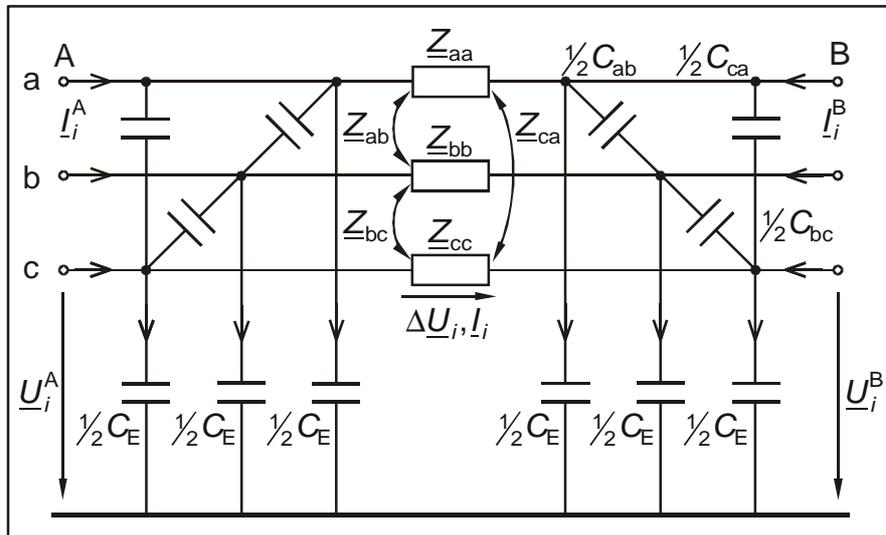


Bild 3.1: Π -Ersatzschaltung mit Zählpfeilen für die Drehstrom-Einfachleitung ($i = a, b, c$)

Die Erde ist in dieser Ersatzschaltung ein widerstands- und induktivitätsloser idealer Leiter. Der Erdbodenwiderstand und die zwischen den Leitern und der Erde gebildeten Induktivitäten sind in den Impedanzen \underline{Z}_{ik} , die deshalb auch *Schleifenimpedanzen* heißen, enthalten.

Man kann die Impedanzen meßtechnisch bestimmen, indem man ein Leitungsende kurzschließt und am anderen Ende einspeist und eine Strom- und Spannungsmessung nach Betrag und Phase vornimmt. Bei Messung der Größen ein- und desselben Leiters erhält man dessen *Leiter-Erde-Selbstimpedanz* \underline{Z}_{ii} und bei Messung zwischen zwei Leitern die entsprechende *Leiter-Erde-Gegenimpedanz* $\underline{Z}_{ki} = \underline{Z}_{ik}$. Auf die Berechnung der Schleifenimpedanzen wird in Abschnitt 5.1 eingegangen.

3.1 Induktive Verkettung

Für die *Spannungsabfälle* über den Längsgliedern liest man in Bild 3.1 ab

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a^A \\ \underline{U}_b^A \\ \underline{U}_c^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{U}_a^B \\ \underline{U}_b^B \\ \underline{U}_c^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{aa} & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} \\ \underline{Z}_{ba} & \underline{Z}_{bb} & \underline{Z}_{bc} \\ \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cb} & \underline{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

oder kürzer

$$\underline{u}_A - \underline{u}_B = \Delta \underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$$

Aufgrund der i. a. unterschiedlichen Leiterhöhen über dem Erdboden und der ungleichen Leiterabstände untereinander sind die Selbst-(Diagonalelemente) und Gegenimpedanzen (Nichtdiagonalelemente) in der *Impedanzmatrix* \underline{Z} untereinander nicht gleich. \underline{Z} ist somit

lediglich diagonal symmetrisch ($Z_{ki} = Z_{ik}$ für $k \neq i$).

Hat die Leitung Erdseile, so erweitert sich die Gl. (3.1) entsprechend. Bei 2 Erdseilen p und q erhält man dann beispielsweise:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \\ \Delta \underline{U}_p \\ \Delta \underline{U}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{ap} & Z_{aq} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bp} & Z_{bq} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} & Z_{cp} & Z_{cq} \\ Z_{pa} & Z_{pb} & Z_{pc} & Z_{pp} & Z_{pq} \\ Z_{qa} & Z_{qb} & Z_{qc} & Z_{qp} & Z_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_p \\ I_q \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

oder in Kurzschreibweise

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_L \\ \Delta \underline{u}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{LL} & Z_{LE} \\ Z_{EL} & Z_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_L \\ \underline{i}_E \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

Bei Erdung der Erdseile an jedem Mast ist $\Delta \underline{U}_p = \Delta \underline{U}_q$ und somit $\Delta \underline{u}_E = \mathbf{0}$, und man kann die Erdseilströme \underline{i}_E eliminieren. Aus der 2. Zeile von Gl. (3.2a) folgt

$$\underline{i}_E = -Z_{EE}^{-1} Z_{EL} \underline{i}_L$$

und nach Einsetzen dieses Ausdruckes in die 1. Zeile von Gl. (3.2a)

$$\Delta \underline{u}_L = (Z_{LL} - Z_{LE} Z_{EE}^{-1} Z_{EL}) \underline{i}_L = Z_{LL}^E \underline{i}_L$$

und ausführlich

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa}^{pq} & Z_{ab}^{pq} & Z_{ac}^{pq} \\ Z_{ba}^{pq} & Z_{bb}^{pq} & Z_{bc}^{pq} \\ Z_{ca}^{pq} & Z_{cb}^{pq} & Z_{cc}^{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Man nennt die Elimination der Erdseilströme auch die *Modifikation* der Leitungsparameter. Die Gl. (3.3) hat die gleiche Form wie die Gl. (3.1) für die Leitung ohne Erdseile, enthält aber im Gegensatz zu Gl. (3.1) die sogenannten *modifizierten* Leitungsimpedanzen. Diese sind durch die oberen Indizes p und q bzw. E gekennzeichnet.

Sind die Leiterseile vollständig verdrillt (s. Anhang 7.1), so nimmt Gl. (3.2) folgende Form an

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \\ \Delta \underline{U}_p \\ \Delta \underline{U}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{nn} & Z_{nm} & Z_{nm} & Z_{np} & Z_{nq} \\ Z_{nm} & Z_{nn} & Z_{nm} & Z_{np} & Z_{nq} \\ Z_{nm} & Z_{nm} & Z_{nn} & Z_{np} & Z_{nq} \\ Z_{pn} & Z_{pn} & Z_{pn} & Z_{pp} & Z_{pq} \\ Z_{qn} & Z_{qn} & Z_{qn} & Z_{qp} & Z_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_p \\ I_q \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

und nach der Modifizierung

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} \\ \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} \\ \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nn}^{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Die Impedanzmatrix in Gl. (3.5) ist diagonal-zyklisch symmetrisch, und die modifizierten Impedanzen der verdrehten Einfachleitung berechnet man aus

$$\underline{Z}_{nn}^{pq} = \underline{Z}_{nn} - \frac{\underline{Z}_{np}^2 \underline{Z}_{qq} + \underline{Z}_{nq}^2 \underline{Z}_{pp} - 2 \underline{Z}_{pq} \underline{Z}_{np} \underline{Z}_{nq}}{\underline{Z}_{pp} \underline{Z}_{qq} - 2 \underline{Z}_{pq}^2} \quad (3.6)$$

$$\underline{Z}_{nm}^{pq} = \underline{Z}_{nm} - \frac{\underline{Z}_{np} \underline{Z}_{qq} + \underline{Z}_{nq} \underline{Z}_{pp} - 2 \underline{Z}_{pq} \underline{Z}_{np} \underline{Z}_{nq}}{\underline{Z}_{pp} \underline{Z}_{qq} - 2 \underline{Z}_{pq}^2} \quad (3.7)$$

Der Einfluß der Erdseile ist somit auf alle Impedanzen der verdrehten Leitung gleich, worauf wir bei der Bildung der Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten zurückkommen werden. Sind die Erdseile noch gleich und symmetrisch zu den Leiterseilen angeordnet, so vereinfachen sich wegen $\underline{Z}_{np} = \underline{Z}_{nq}$ und $\underline{Z}_{qq} = \underline{Z}_{pp}$ die Ausdrücke für die modifizierten Impedanzen weiter zu

$$\underline{Z}_{nn}^{pq} = \underline{Z}_{nn} - \frac{2 \underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad (3.8)$$

$$\underline{Z}_{nm}^{pq} = \underline{Z}_{nm} - \frac{2 \underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad (3.9)$$

Wir fassen zusammen: Die Impedanzmatrix der modifizierten Impedanzen der symmetrischen Dreiphasenleitung mit Erdseilen ist diagonal-zyklisch symmetrisch und hat die Form (vereinfachte Schreibweise der Gl. (3.5)) :

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (3.5a)$$

3.2 Kapazitive Verkettung

Mit Hilfe der MAXWELLSchen *Potentialkoeffizienten* läßt sich der Zusammenhang zwischen den Leiter-Erde-Spannungen und Ladungen der Leiter eines Mehrleitersystems ganz analog zur induktiven Verkettung angeben. Man erhält für eine Drehstrom-Einfachleitung mit 2 Erdseilen für den eingeschwungenen Zustand bei Betriebsfrequenz:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \\ \underline{U}_p \\ \underline{U}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} & P_{ap} & P_{aq} \\ P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} & P_{bp} & P_{bq} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} & P_{cp} & P_{cq} \\ P_{pa} & P_{pb} & P_{pc} & P_{pp} & P_{pq} \\ P_{qa} & P_{qb} & P_{qc} & P_{qp} & P_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q}_a \\ \underline{Q}_b \\ \underline{Q}_c \\ \underline{Q}_p \\ \underline{Q}_q \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

In Gl. (3.10) sind die P_{ii} die *Selbst-Potentialkoeffizienten* und die $P_{ik} (k \neq i)$ die *Gegen-Potentialkoeffizienten*.

Bei geerdeten Erdseilen können wegen $\underline{U}_p = \underline{U}_q = 0$ deren Ladungen eliminiert werden, wobei die Vorgehensweise völlig analog zur induktiven Verkettung ist. Die modifizierten Potentialkoeffizienten berechnen sich somit ähnlich wie die modifizierten Impedanzen, und das modifizierte Gleichungssystem (3.10) lautet in Analogie zu Gl. (3.3)

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa}^{ppq} & P_{ab}^{ppq} & P_{ac}^{ppq} \\ P_{ba}^{ppq} & P_{bb}^{ppq} & P_{bc}^{ppq} \\ P_{ca}^{ppq} & P_{cb}^{ppq} & P_{cc}^{ppq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q}_a \\ \underline{Q}_b \\ \underline{Q}_c \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Die Inversion der diagonal symmetrischen Matrix der Potentialkoeffizienten in Gl. (3.11) ergibt wieder eine diagonal symmetrische Matrix, deren Elemente die *Kapazitätskoeffizienten* sind

$$\begin{bmatrix} \underline{Q}_a \\ \underline{Q}_b \\ \underline{Q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & K_{ac} \\ K_{ba} & K_{bb} & K_{bc} \\ K_{ca} & K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Zwischen den Ladungen \underline{Q}_i und den *Querströmen* ΔI_i besteht im eingeschwungenen Zustand der Zusammenhang

$$\Delta I_i = j\omega \underline{Q}_i \quad i = a, b, c \quad (3.13)$$

Folglich wird

$$\begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & K_{ac} \\ K_{ba} & K_{bb} & K_{bc} \\ K_{ca} & K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

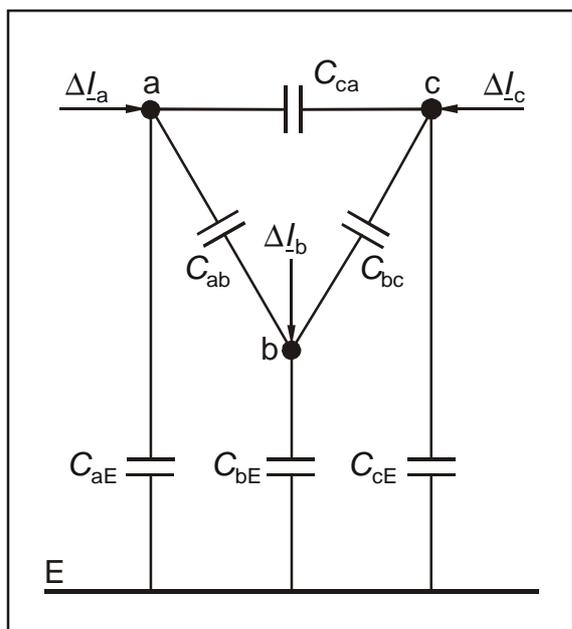


Bild 3.2: Leiter-Erde- und Leiter-Leiter-Kapazitäten der Drehstrom-Einfachleitung

Nach Bild 3.2 lässt sich der Zusammenhang zwischen den Querströmen und den Leiter-Erde-Spannungen auch über eine Kapazitäts-Matrix (Admittanzmatrix) ausdrücken, deren Bildungsgesetz dem der Knotenadmittanzmatrix entspricht.

$$\begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} C_{aa} & -C_{ab} & -C_{ac} \\ -C_{ba} & C_{bb} & -C_{bc} \\ -C_{ca} & -C_{cb} & C_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

mit

$$\begin{aligned} C_{aa} &= C_{aE} + C_{ab} + C_{ac} \\ C_{bb} &= C_{bE} + C_{bc} + C_{ba} \\ C_{cc} &= C_{cE} + C_{ca} + C_{cb} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ein Vergleich der Gln. (3.14) und (3.15) ergibt die später für die Berechnung der Kapazitäten benötigten Zusammenhänge

$$C_{ik} = -K_{ik} \quad k \neq i \tag{3.17}$$

und

$$\begin{aligned} C_{aE} &= K_{aa} + K_{ab} + K_{ac} \\ C_{bE} &= K_{bb} + K_{bc} + K_{ba} \\ C_{cE} &= K_{cc} + K_{ca} + K_{cb} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Insbesondere in Hochspannungsnetzen müssen noch die *Isolations-* und *Koronaverluste* berücksichtigt werden. Dies kann näherungsweise durch Leitwerte parallel zu den Kapazitäten in Bild 3.2 erfolgen. Damit erweitert sich die Gl. (3.15) zu

$$\begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{aa} & -G_{ab} & -G_{ac} \\ -G_{ba} & G_{bb} & -G_{bc} \\ -G_{ca} & -G_{cb} & G_{cc} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} C_{aa} & -C_{ab} & -C_{ac} \\ -C_{ba} & C_{bb} & -C_{bc} \\ -C_{ca} & -C_{cb} & C_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

oder

$$\Delta \underline{i} = (\underline{G} + j\omega \underline{C}) \underline{u} = \underline{Y} \underline{u}$$

Ist die Leitung vollständig verdrillt, so nehmen die Matrizen der Potentialkoeffizienten in den Gln. (3.10) und (3.11) die gleiche Form wie die Impedanzmatrizen in den Gln. (3.4) und (3.5) an. Die Inverse der in diesem Fall diagonal-zyklisch symmetrischen Matrix der Potentialkoeffizienten der Gl. (3.11) ist ebenfalls diagonal-zyklisch symmetrisch.

$$\begin{bmatrix} P_{nn}^{pq} & P_{nm}^{pq} & P_{nm}^{pq} \\ P_{nm}^{pq} & P_{nn}^{pq} & P_{nm}^{pq} \\ P_{nm}^{pq} & P_{nm}^{pq} & P_{nn}^{pq} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{nm} & K_{nm} \\ K_{nm} & K_{nn} & K_{nm} \\ K_{nm} & K_{nm} & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Ihre Kapazitätskoeffizienten werden

$$K_{nn} = \frac{P_{nn}^{pq} + P_{nm}^{pq}}{(P_{nn}^{pq} - P_{nm}^{pq})(P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq})} \quad (3.21)$$

$$K_{nm} = -\frac{P_{nm}^{pq}}{(P_{nn}^{pq} - P_{nm}^{pq})(P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq})} \quad n \neq m \quad (3.22)$$

Aus den Gln. (3.17) und (3.18) ist ersichtlich, daß jetzt alle Leiter-Erde-Kapazitäten und alle Leiter-Leiter-Kapazitäten untereinander gleich werden

$$C_{ik} = C = -K_{nm} = \frac{P_{nm}^{pq}}{(P_{nn}^{pq} - P_{nm}^{pq})(P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq})} \quad (3.23)$$

$$C_{iE} = C_E = K_{nn} + 2K_{nm} = \frac{1}{P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq}} \quad (3.24)$$

Ebenso werden auch die Diagonalelemente und alle Nichtdiagonalelemente der Leitwertmatrix in Gl. (3.19) untereinander gleich

$$G_{aa} = G_{bb} = G_{cc} = G_E$$

$$G_{ab} = G_{ba} = G_{ca} = G$$

Eine solche symmetrische kapazitive Verkettung hätte auch eine Leitung, deren Leiterseile im gleichseitigen Dreieck so hoch über der Erde angeordnet sind, daß die unterschiedliche Leiterhöhe vernachlässigt werden kann (Bild 3.3).

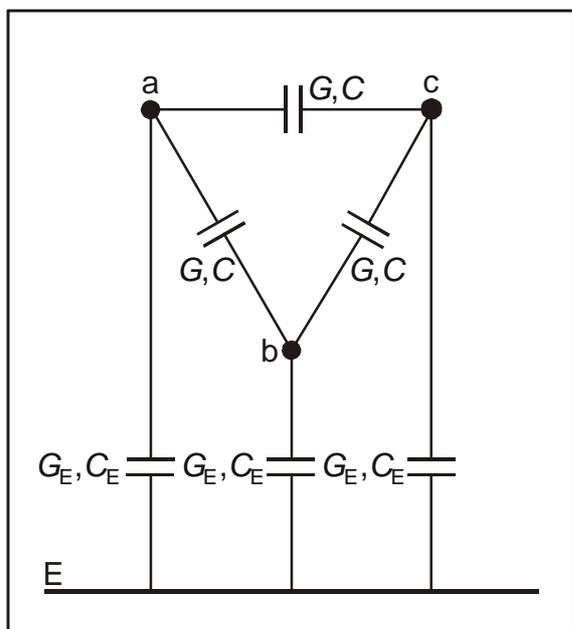


Bild 3.3: Kapazitive Verkettung der symmetrischen Dreiphasen-Einfachleitung

Die Gl. (3.19) nimmt für die symmetrische Dreiphasenleitung folgende Form an:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (G_E + 2G) + j\omega(C_E + 2C) & -(G + j\omega C) & -(G + j\omega C) \\ -(G + j\omega C) & (G_E + 2G) + j\omega(C_E + 2C) & -(G + j\omega C) \\ -(G + j\omega C) & -(G + j\omega C) & (G_E + 2G) + j\omega(C_E + 2C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Y_{nn}^{pq} & Y_{nm}^{pq} & Y_{nm}^{pq} \\ Y_{nm}^{pq} & Y_{nn}^{pq} & Y_{nm}^{pq} \\ Y_{nm}^{pq} & Y_{nm}^{pq} & Y_{nn}^{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_s & Y_g & Y_g \\ Y_g & Y_s & Y_g \\ Y_g & Y_g & Y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

wobei die Ströme ΔI_i die Summe aller von einem Leiter i abfließenden Querströme sind.

3.3 Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten

Unter Annahme einer idealsymmetrischen Leitung (näherungsweise durch Verdrillen erreicht) wurden in den Abschnitten 3.1 und 3.2 folgende Gleichungen⁴⁾ für die Längsspannungsabfälle und Querströme in natürlichen Koordinaten hergeleitet (Gl. (3.5a) und Gl. (3.25)):

$$\begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \\ \Delta U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s & Z_g & Z_g \\ Z_g & Z_s & Z_g \\ Z_g & Z_g & Z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad \text{bzw. } \Delta \underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \tag{3.5a}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_s & Y_g & Y_g \\ Y_g & Y_s & Y_g \\ Y_g & Y_g & Y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \quad \text{bzw. } \Delta \underline{i} = \underline{Y} \underline{u} \tag{3.25}$$

⁴⁾ bei Leitungen mit Erdseilen mit modifizierten Parametern

Die Transformation der Gln. (3.5a) und (3.25) in Symmetrische Koordinaten 1 2 0 mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$\underline{T}_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix}$$

liefert

$$\Delta \underline{u}_S = \underline{T}_S^{-1} \underline{Z} \underline{T}_S \underline{i}_S = \underline{Z}_S \underline{i}_S \quad (3.26)$$

$$\Delta \underline{i}_S = \underline{T}_S^{-1} \underline{Y} \underline{T}_S \underline{u}_S = \underline{Y}_S \underline{u}_S \quad (3.27)$$

Die Impedanzmatrix \underline{Z}_S und die Admittanzmatrix \underline{Y}_S in Symmetrischen Koordinaten sind aufgrund der diagonal-zyklisch symmetrischen Struktur von \underline{Z} und \underline{Y} Diagonalmatrizen mit den Elementen

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_S - \underline{Z}_g = R_1 + jX_1 & \underline{Y}_1 &= \underline{Y}_S - \underline{Y}_g = G_1 + jB_1 \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_1 & \underline{Y}_2 &= \underline{Y}_1 \\ \underline{Z}_0 &= \underline{Z}_S + 2\underline{Z}_g = R_0 + jX_0 & \underline{Y}_0 &= \underline{Y}_S + 2\underline{Y}_g = G_0 + jB_0 \end{aligned}$$

so daß die Gln. (3.26) und (3.27) in Symmetrischen Koordinaten entkoppelt sind. Sie lauten ausführlich:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1 \\ \Delta \underline{U}_2 \\ \Delta \underline{U}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{I}_1 \\ \Delta \underline{I}_2 \\ \Delta \underline{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix}$$

Für jede Komponente läßt sich eine separate Ersatzschaltung, deren Struktur mit der Ersatzschaltung einer Einphasenleitung übereinstimmt, angeben. Wegen der Gleichheit der Parameter sind die Ersatzschaltungen des Mit- und Gegensystems identisch.

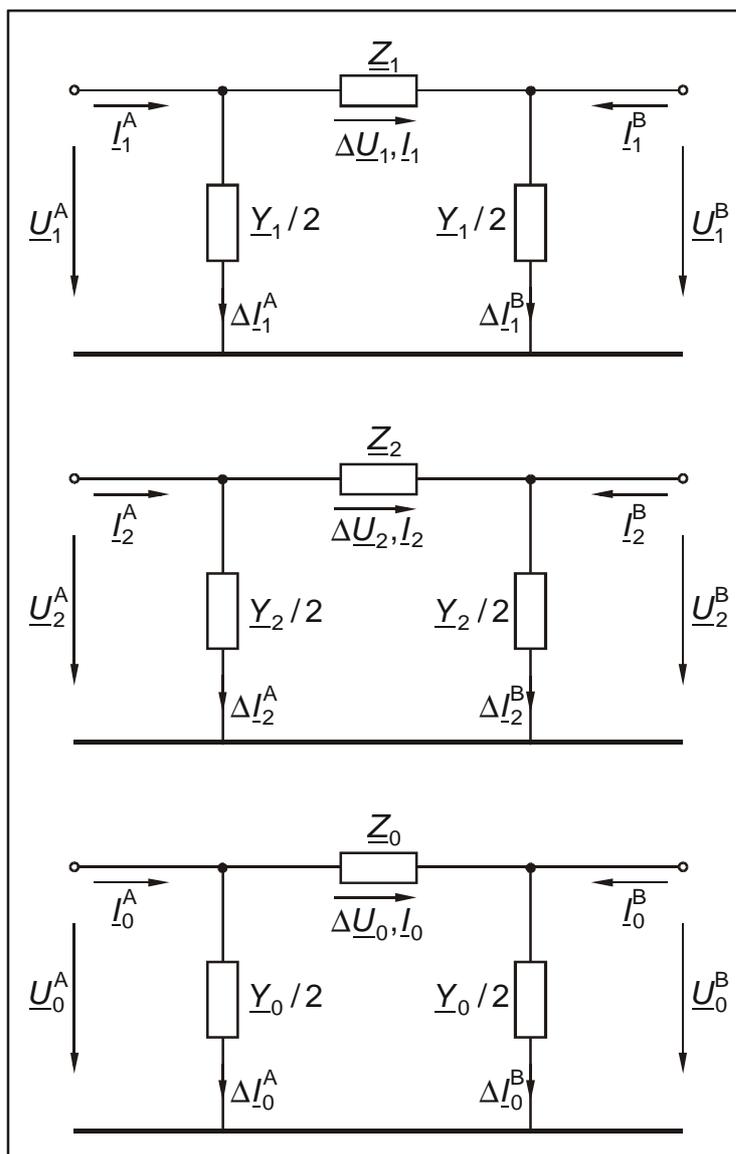


Bild 3.4: Π -Ersatzschaltung (Admittanzersatzschaltung) der Einphasenleitung

Bei Aufteilung der Ströme $\Delta I_i (i = 1, 2, 0)$ auf Anfang und Ende der Leitung ergibt sich die Π -Ersatzschaltung in Bild 3.4. Eine andere häufig gebräuchliche Darstellungsform der Ersatzschaltungen zeigt Bild 3.5. Sie folgt durch die Auflösung der Admittanzen in $1/2 \underline{Y}_i = 1/2 (G_i + j\omega C_i)$.

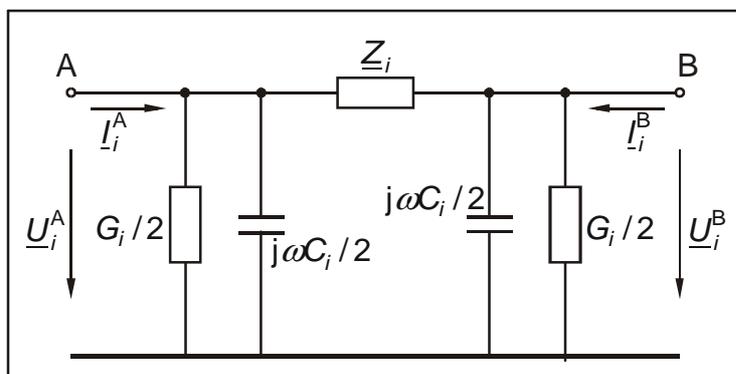


Bild 3.5: Ersatzschaltung der Symmetrischen Komponenten der ideal symmetrischen Einfachleitung mit Kapazitäten und Ableitwiderständen ($i = 1, 2, 0$)

Abschließend sei bemerkt, daß für die symmetrische Dreiphasen-Einfachleitung mit diagonal-zyklischer Struktur von \underline{Z} und \underline{Y} die anstelle der Gl. (2.3) tretende Matrixengleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{I}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\underline{Z}' \\ -\underline{Y}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_x \\ \underline{I}_x \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_x = \begin{bmatrix} \underline{U}_a^x & \underline{U}_b^x & \underline{U}_c^x \end{bmatrix}^T \quad (3.28)$$

$$\underline{I}_x = \begin{bmatrix} \underline{I}_a^x & \underline{I}_b^x & \underline{I}_c^x \end{bmatrix}^T$$

nach Transformation in die symmetrischen Komponenten übergeht in

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \underline{U}_s^x \\ \underline{I}_s^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\underline{Z}'_s \\ -\underline{Y}'_s & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_s^x \\ \underline{I}_s^x \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}_s^x = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^x & \underline{U}_2^x & \underline{U}_0^x \end{bmatrix}^T \quad (3.29)$$

$$\underline{I}_s^x = \begin{bmatrix} \underline{I}_1^x & \underline{I}_2^x & \underline{I}_0^x \end{bmatrix}^T$$

mit

$$\underline{Z}'_s = \text{diag}(\underline{Z}'_1 \quad \underline{Z}'_2 \quad \underline{Z}'_0) \quad \underline{Z}'_2 = \underline{Z}'_1$$

$$\underline{Y}'_s = \text{diag}(\underline{Y}'_1 \quad \underline{Y}'_2 \quad \underline{Y}'_0) \quad \underline{Y}'_2 = \underline{Y}'_1$$

Gl. (3.29) zerfällt durch die Diagonalisierung der Impedanz- und Admittanzmatrix in drei Gleichungssysteme, die die Form von Gl. (2.3) haben. Somit wird die symmetrische Dreiphasenleitung im Bildbereich der Symmetrischen Komponenten durch drei entkoppelte Einphasenleitungen mit den Parametern ($i = 1, 2, 0$)

$$\underline{Z}'_i, \underline{Y}'_i, \underline{\gamma}_i = \sqrt{\underline{Z}'_i \underline{Y}'_i}, \underline{Z}_{wi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}'_i}{\underline{Y}'_i}}$$

nachgebildet.

Folglich gelten auch alle in Kapitel 2 hergeleiteten Gleichungen und Ersatzschaltbilder für die Symmetrischen Komponenten der symmetrischen Dreiphasen-Einfachleitung. Damit stehen neben dem Π -Ersatzschaltbild mit konzentrierten Parametern, dessen Gültigkeit auf elektrisch kurze Leitungen beschränkt ist, auch die Ersatzschaltungen aus den Bildern 2.2, 2.3 und 2.6 für die Symmetrischen Komponenten der langen Leitung zur Verfügung.

4 Drehstrom-Doppelleitung

4.1 Induktive Verkettung

Für eine Drehstrom-Doppelleitung mit zwei Erdseilen und der Leiterbezeichnung nach Bild 4.1 ergibt sich für die Längsspannungsabfälle

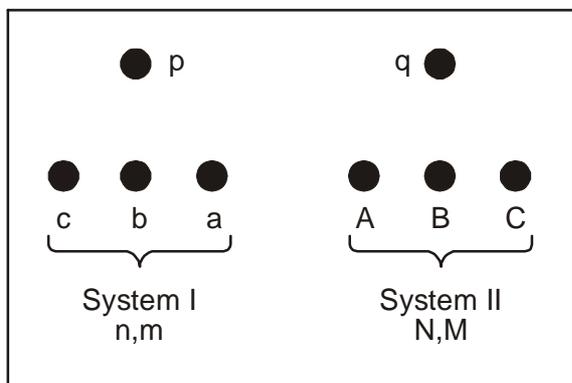


Bild 4.1: Spiegelsymmetrische Leiteranordnung bei der Doppelleitung mit 2 Erdseilen

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \\ \Delta \underline{U}_A \\ \Delta \underline{U}_B \\ \Delta \underline{U}_C \\ \Delta \underline{U}_p \\ \Delta \underline{U}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{aa} & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} & \underline{Z}_{aA} & \underline{Z}_{aB} & \underline{Z}_{aC} & \underline{Z}_{ap} & \underline{Z}_{aq} \\ \underline{Z}_{ba} & \underline{Z}_{bb} & \underline{Z}_{bc} & \underline{Z}_{bA} & \underline{Z}_{bB} & \underline{Z}_{bC} & \underline{Z}_{bp} & \underline{Z}_{bq} \\ \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cb} & \underline{Z}_{cc} & \underline{Z}_{cA} & \underline{Z}_{cB} & \underline{Z}_{cC} & \underline{Z}_{cp} & \underline{Z}_{cq} \\ \underline{Z}_{Aa} & \underline{Z}_{Ab} & \underline{Z}_{Ac} & \underline{Z}_{AA} & \underline{Z}_{AB} & \underline{Z}_{AC} & \underline{Z}_{Ap} & \underline{Z}_{Aq} \\ \underline{Z}_{Ba} & \underline{Z}_{Bb} & \underline{Z}_{Bc} & \underline{Z}_{BA} & \underline{Z}_{BB} & \underline{Z}_{BC} & \underline{Z}_{Bp} & \underline{Z}_{Bq} \\ \underline{Z}_{Ca} & \underline{Z}_{Cb} & \underline{Z}_{Cc} & \underline{Z}_{CA} & \underline{Z}_{CB} & \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{Cp} & \underline{Z}_{Cq} \\ \underline{Z}_{pa} & \underline{Z}_{pb} & \underline{Z}_{pc} & \underline{Z}_{pA} & \underline{Z}_{pB} & \underline{Z}_{pC} & \underline{Z}_{pp} & \underline{Z}_{pq} \\ \underline{Z}_{qa} & \underline{Z}_{qb} & \underline{Z}_{qc} & \underline{Z}_{qA} & \underline{Z}_{qB} & \underline{Z}_{qC} & \underline{Z}_{qp} & \underline{Z}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \\ \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \\ \underline{I}_p \\ \underline{I}_q \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \\ \Delta \underline{u}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{IE} \\ \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_E \end{bmatrix}$$

Bei Verdrillung nach dem Schema γ (siehe Anhang 7.1) nimmt die Impedanzmatrix für die hier angenommene spiegelsymmetrische Leiteranordnung und symmetrische Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen (s. Bild 4.1) folgende Symmetrieeigenschaften an:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{nn} & \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{nq} \\ \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nn} & \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{nq} \\ \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nn} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{nq} \\ \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{NN} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{Np} & \underline{Z}_{Nq} \\ \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{NN} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{Np} & \underline{Z}_{Nq} \\ \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{NN} & \underline{Z}_{Np} & \underline{Z}_{Nq} \\ \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{pp} & \underline{Z}_{pq} \\ \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{qp} & \underline{Z}_{qq} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Haben die beiden Systeme gleiche Seilbelegung, so wird noch $\underline{Z}_{NN} = \underline{Z}_{nn}$ und $\underline{Z}_{NM} = \underline{Z}_{nm}$, d.h. $\underline{Z}_{II} = \underline{Z}_{I}$, sowie $\underline{Z}_{qq} = \underline{Z}_{pp}$.

Bei geerdeten Erdseilen können wegen $\Delta \underline{u}_E = \mathbf{0}$ die Erdseilströme \underline{i}_E wieder - wie in Abschnitt 3.1 gezeigt - eliminiert werden, wodurch die Impedanzen der verbleibenden 6x6-Impedanzmatrix modifiziert werden:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \\ \Delta \underline{U}_A \\ \Delta \underline{U}_B \\ \Delta \underline{U}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} \\ \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} \\ \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} \\ \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{NN}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} \\ \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} & \underline{Z}_{NN}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} \\ \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} & \underline{Z}_{NN}^{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_a \\ \underline{i}_b \\ \underline{i}_c \\ \underline{i}_A \\ \underline{i}_B \\ \underline{i}_C \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II}^E & \underline{Z}_{II}^E \\ \underline{Z}_{II}^E & \underline{Z}_{II}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \end{bmatrix}$$

Bei Verdrillung nach dem aufwendigen Schema β (vollständige Verdrillung) werden auch noch die Gegenimpedanzen \underline{Z}_{nM}^{pq} und \underline{Z}_{nN}^{pq} gleich. Von einer *ideal symmetrischen* Doppelleitung spricht man, wenn ihre Impedanzmatrix diagonal-zyklisch symmetrisch, also wie folgt aufgebaut ist:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

4.2 Kapazitive Verkettung

Aufgrund der Analogie zwischen den Gleichungen der Längsspannungsabfälle in Abhängigkeit von den Längsströmen und den Leiter-Erde-Spannungen als Funktion der Leiterladungen bzw. zwischen dem Aufbau der Impedanz- und Potentialkoeffizienten-Matrizen

können die Gleichungen für die kapazitive Verkettung der Doppelleitung sofort aufgeschrieben werden. Sie lauten für eine Doppelleitung mit zwei Erdseilen

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{I I}^E & \underline{P}_{I II}^E \\ \underline{P}_{II I}^E & \underline{P}_{II II}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_I \\ \underline{q}_{II} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{i}_I \\ \Delta \underline{i}_{II} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \underline{K}_{I I} & \underline{K}_{I II} \\ \underline{K}_{II I} & \underline{K}_{II II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \underline{C}_{I I} & \underline{C}_{I II} \\ \underline{C}_{II I} & \underline{C}_{II II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

bzw. nach Erweiterung um die Ableitungsströme

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{i}_I \\ \Delta \underline{i}_{II} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \underline{G}_{I I} & \underline{G}_{I II} \\ \underline{G}_{II I} & \underline{G}_{II II} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \underline{C}_{I I} & \underline{C}_{I II} \\ \underline{C}_{II I} & \underline{C}_{II II} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{I I}^E & \underline{Y}_{I II}^E \\ \underline{Y}_{II I}^E & \underline{Y}_{II II}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Die Kapazitätsmatrix in Gl. (4.6) hat folgenden allgemeinen Aufbau ($C_{ki} = C_{ik}$):

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{aa} & -C_{ab} & -C_{ac} & -C_{aA} & -C_{aB} & -C_{aC} \\ -C_{ba} & C_{bb} & -C_{bc} & -C_{bA} & -C_{bB} & -C_{bC} \\ -C_{ca} & -C_{cb} & C_{cc} & -C_{cA} & -C_{cB} & -C_{cC} \\ \hline -C_{Aa} & -C_{Ab} & -C_{Ac} & C_{AA} & -C_{AB} & -C_{AC} \\ -C_{Ba} & -C_{Bb} & -C_{Bc} & -C_{BA} & C_{BB} & -C_{BC} \\ -C_{Ca} & -C_{Cb} & -C_{Cc} & -C_{CA} & -C_{CB} & C_{CC} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Ihre Elemente werden wie bei der Einfachleitung aus einem Vergleich mit der Matrix der Kapazitätskoeffizienten \underline{K} nach Gl. (4.6) berechnet. Die Matrix \underline{K} wird durch Inversion der Matrix der Potentialkoeffizienten \underline{P} in Gl. (4.5) erhalten. Da diese Berechnungen heute ausnahmslos mit dem Computer vorgenommen werden, lohnt es sich nicht die allgemeinen Beziehungen zwischen den Elementen dieser Matrizen hier anzuschreiben.

4.3 Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten

Die Transformation der modifizierten Spannungsgleichung der Doppelleitung mit der Impedanzmatrix nach Gl. (4.3) - i.f. jedoch ohne die besondere Kennzeichnung durch den Index E für die Modifizierung der Impedanzen - ergibt:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_s^I \\ \Delta \underline{u}_s^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_s^{-1} \underline{Z}_{I I} \underline{T}_s & \underline{T}_s^{-1} \underline{Z}_{I II} \underline{T}_s \\ \underline{T}_s^{-1} \underline{Z}_{II I} \underline{T}_s & \underline{T}_s^{-1} \underline{Z}_{II II} \underline{T}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_s^I \\ \underline{i}_s^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s^{I I} & \underline{Z}_s^{I II} \\ \underline{Z}_s^{II I} & \underline{Z}_s^{II II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_s^I \\ \underline{i}_s^{II} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Es sollen im weiteren nur die verdrillte oder ideal symmetrische Doppelleitung betrachtet werden, bei der die Symmetrischen Komponenten vollständig oder wenigstens teilweise entkoppelt werden. Anderenfalls ist die Anwendung der Symmetrischen Komponenten auch nicht sinnvoll.

Bei Verdrillung nach dem γ -Schema (γ_1 oder γ_2) werden die Untermatrizen $\underline{Z}_{I I}$, $\underline{Z}_{I II}$, $\underline{Z}_{II I}$ und $\underline{Z}_{II II}$ jede für sich diagonal-zyklisch symmetrisch (s. Gl. (4.3)), weshalb die Gleichung (4.9) folgende ausführliche Form annimmt:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1^I \\ \Delta \underline{U}_2^I \\ \Delta \underline{U}_0^I \\ \Delta \underline{U}_1^{II} \\ \Delta \underline{U}_2^{II} \\ \Delta \underline{U}_0^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1^{II} & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{III} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^{II} & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{III} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^{II} & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{III} \\ \underline{Z}_1^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{II} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{II} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^I \\ \underline{I}_2^I \\ \underline{I}_0^I \\ \underline{I}_1^{II} \\ \underline{I}_2^{II} \\ \underline{I}_0^{II} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Die beiden Systeme bleiben nur noch jeweils innerhalb des Mit-, Gegen- und Nullsystems gekoppelt. Die Kopplungen zwischen den Symmetrischen Komponenten innerhalb eines Systems verschwinden. Die Symmetrischen Impedanzen der Untermatrizen berechnen sich analog zur Einfachleitung:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1^I &= \underline{Z}_{nn}^{pq} - \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_1^{III} &= \underline{Z}_{NN}^{pq} - \underline{Z}_{NM}^{pq} \\ \underline{Z}_0^I &= \underline{Z}_{nn}^{pq} + 2\underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_0^{III} &= \underline{Z}_{NN}^{pq} + 2\underline{Z}_{NM}^{pq} \\ \underline{Z}_1^{II} &= \underline{Z}_{nN}^{pq} - \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_1^{II} &= \underline{Z}_1^{II} \\ \underline{Z}_0^{II} &= \underline{Z}_{nN}^{pq} + 2\underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_0^{II} &= \underline{Z}_0^{II} \end{aligned} \quad (4.11)$$

wobei die Gegenimpedanzen wieder stets den Mitimpedanzen gleich sind. Normalerweise haben die beiden Systeme der Doppelleitung die *gleiche Belegung* und sind an den Enden *parallelgeschaltet*. Es gilt dann ($i = 1, 2, 0$)

$$\underline{Z}_i^I = \underline{Z}_i^{III} = \underline{Z}_i^s$$

und

$$\begin{aligned} \Delta \underline{U}_i^I &= \Delta \underline{U}_i^{II} = \Delta \underline{U}_i^{DL} \\ \underline{I}_i^I &= \underline{I}_i^{II} = \frac{1}{2} \underline{I}_i^{DL} \end{aligned}$$

Für die Kopplungsimpedanzen schreiben wir der Einfachheit halber

$$\underline{Z}_i^{II} = \underline{Z}_i^{II} = \underline{Z}_i^g$$

und erhalten

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1^{DL} = \frac{1}{2} (\underline{Z}_1^s + \underline{Z}_1^g) \underline{I}_1^{DL} = \underline{Z}_1^{DL} \underline{I}_1^{DL} \\ \Delta \underline{U}_2^{DL} = \frac{1}{2} (\underline{Z}_2^s + \underline{Z}_2^g) \underline{I}_2^{DL} = \underline{Z}_2^{DL} \underline{I}_2^{DL} \\ \Delta \underline{U}_0^{DL} = \frac{1}{2} (\underline{Z}_0^s + \underline{Z}_0^g) \underline{I}_0^{DL} = \underline{Z}_0^{DL} \underline{I}_0^{DL} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Bei Verdrillung nach dem β -Schema werden die Koppelimpedanzen des Mit- und Gegen-systems $\underline{Z}_1^g = \underline{Z}_2^g$ wegen $\underline{Z}_{nN}^{pq} = \underline{Z}_{nM}^{pq}$ Null und die Koppelimpedanz des Nullsystems wird

$$\underline{Z}_0^g = 3\underline{Z}_{nM}^{pq} \quad (4.13)$$

Die *ideal symmetrische* Doppelleitung mit der Impedanzmatrix nach Gl. (4.4) weist in der Parallelschaltung folgende Symmetrische Impedanzen auf:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1^{DL} &= \frac{1}{2} \underline{Z}_1^s = \frac{1}{2} (\underline{Z}_s - \underline{Z}_g) \\ \underline{Z}_2^{DL} &= \underline{Z}_1^{DL} \\ \underline{Z}_0^{DL} &= \frac{1}{2} (\underline{Z}_0^s + \underline{Z}_0^g) = \frac{1}{2} (\underline{Z}_s + 5\underline{Z}_g) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Zur Berechnung der Kapazitäten ist es zweckmäßig, bereits die Gln. (4.5) und (4.6) in Symmetrische Koordinaten zu transformieren. Die transformierte Matrix der Potentialkoeffizienten \underline{P}_s hat für die verdrehte Doppelleitung mit spiegelsymmetrischer Leiteranordnung den gleichen Aufbau wie die Impedanzmatrix in Gl. (4.10), und ihre Elemente berechnen sich auch völlig analog zu den Beziehungen für die Symmetrischen Impedanzen in Gl. (4.11). Für die weiteren Umformungen fassen wir die Mit-, Gegen- und Nullgrößen der beiden Leitungssysteme jeweils wie folgt zusammen ($i = 1, 2, 0$):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_i^I \\ \underline{U}_i^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_i^{II} & \underline{P}_i^{II} \\ \underline{P}_i^{II} & \underline{P}_i^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q}_i^I \\ \underline{Q}_i^{II} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Die Auflösung nach den Ladungen ergibt

$$\begin{bmatrix} \underline{Q}_i^I \\ \underline{Q}_i^{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{P}_i^{II} \underline{P}_i^{II} - \underline{P}_i^{II} \underline{P}_i^{II}} \begin{bmatrix} \underline{P}_i^{II} & -\underline{P}_i^{II} \\ -\underline{P}_i^{II} & \underline{P}_i^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_i^I \\ \underline{U}_i^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_i^{II} & \underline{K}_i^{II} \\ \underline{K}_i^{II} & \underline{K}_i^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_i^I \\ \underline{U}_i^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_i^{II} & -\underline{C}_i^{II} \\ -\underline{C}_i^{II} & \underline{C}_i^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_i^I \\ \underline{U}_i^{II} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Nach Bild 4.2 können wir wieder Teilkapazitäten für die Symmetrischen Komponenten einführen.

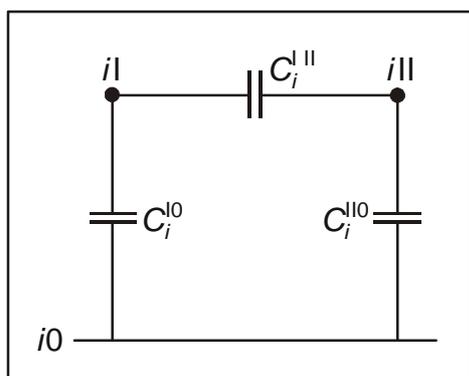


Bild 4.2: Teilkapazitäten für die Symmetrischen Komponenten der Doppelleitung ($i = 1, 2, 0$)

Aus dem Vergleich mit Gl. (4.16) folgt

$$\begin{aligned} \underline{C}_i^{II} &= \underline{C}_i^{I0} + \underline{C}_i^{II} = \underline{K}_i^{II} \\ \underline{C}_i^{II} &= \underline{C}_i^{II0} + \underline{C}_i^{II} = \underline{K}_i^{II} \end{aligned} \tag{4.17}$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{C}_i^{I0} &= \underline{K}_i^{II} + \underline{K}_i^{II} & \underline{C}_i^{II} &= -\underline{K}_i^{II} \\ \underline{C}_i^{II0} &= \underline{K}_i^{II} + \underline{K}_i^{II} & \underline{C}_i^{II} &= -\underline{K}_i^{II} = \underline{C}_i^{II} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Bei Verdrillung nach dem β -Schema werden die Koppelkondensatoren $C_1^{II} = C_2^{II}$ zwischen den Leitungen wegen $P_1^{II} = P_2^{II} = P_1^{III} = P_2^{III} = 0$ ebenfalls Null.

Für *gleiche, parallelgeschaltete* Stromkreise addieren sich die Querströme in jeder Komponente, und wir erhalten unter Hinzufügen der Verlustströme durch die Leitwerte

$$\begin{aligned}\Delta I_i^I + \Delta I_i^{II} &= \left[(G_i^I - G_i^{II}) + j\omega(C_i^I - C_i^{II}) \right] \underline{U}_i^I + \left[(G_i^{III} - G_i^{II}) + j\omega(C_i^{III} - C_i^{II}) \right] \underline{U}_i^{II} \\ &= (\underline{Y}_i^I + \underline{Y}_i^{II}) \underline{U}_i^I + (\underline{Y}_i^{III} + \underline{Y}_i^{II}) \underline{U}_i^{II}\end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}\Delta I_i^I + \Delta I_i^{II} &= \Delta I_i^{DL} & \underline{U}_i^I &= \underline{U}_i^{II} = \underline{U}_i^{DL} \\ \underline{Y}_i^{III} &= \underline{Y}_i^I = \underline{Y}_i^S & \underline{Y}_i^{II} &= \underline{Y}_i^{III} = \underline{Y}_i^g\end{aligned}$$

schließlich

$$\begin{aligned}\Delta I_1^{DL} &= 2(\underline{Y}_1^S + \underline{Y}_1^g) \underline{U}_1^{DL} = \underline{Y}_1^{DL} \underline{U}_1^{DL} \\ \Delta I_2^{DL} &= 2(\underline{Y}_2^S + \underline{Y}_2^g) \underline{U}_2^{DL} = \underline{Y}_2^{DL} \underline{U}_2^{DL} \\ \Delta I_0^{DL} &= 2(\underline{Y}_0^S + \underline{Y}_0^g) \underline{U}_0^{DL} = \underline{Y}_0^{DL} \underline{U}_0^{DL}\end{aligned} \tag{4.19}$$

Diese Gleichungen sind dual zu den Gleichungen (4.12) für die Längsspannungen der parallelgeschalteten Stromkreise mit gleicher Belegung und spiegelsymmetrischer Leiteranordnung am Mast.

Wegen $\underline{Y}_i^S = \underline{Y}_i^{I0} - \underline{Y}_i^{II} = \underline{Y}_i^{I0} - \underline{Y}_i^{III}$ fallen aus den Admittanzen $\underline{Y}_1^{DL} = \underline{Y}_2^{DL}$ und \underline{Y}_0^{DL} für die parallelgeschalteten Leitungen die Koppellemente zwischen den Leitungen heraus und es wird

$$\begin{aligned}\underline{Y}_1^{DL} &= 2(\underline{G}_1 + j\omega \underline{C}_1) = \underline{Y}_2^{DL} \\ \underline{Y}_0^{DL} &= 2(\underline{G}_0 + j\omega \underline{C}_0)\end{aligned} \tag{4.20}$$

wenn mit $G_i = G_i^{I0}$ und $C_i = C_i^{I0}$ die Leitwerte bzw. Kapazitäten einer der beiden Leitungen gegen den Bezugsknoten bezeichnet werden. Diese Abhängigkeit der Admittanzen der Doppelleitung ist auch sofort aus Bild 4.2 ersichtlich, denn bei gleicher Spannung auf den Leitungen sind die Koppelkapazitäten unwirksam, und die Kapazitäten zwischen Leitung und Bezugsknoten können zusammengefaßt werden (ad-diert) werden. Die Leitwerte liegen parallel zu den Kapazitäten, so daß für sie das Gleiche gilt.

Auf der Grundlage der Gln. (4.12) und (4.19) ergeben sich nach Aufteilung der Querströme ΔI_i^{DL} auf die beiden Leitungsenden wieder drei entkoppelte II-Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten wie sie in den Bildern 3.4 und 3.5 für die Einfachleitung dargestellt sind. Es ist lediglich zu beachten, daß die Ströme I_j^x an jeder Stelle x die Gesamtströme der parallelgeschalteten verdrillten Systeme, für die gleiche Belegung und spiegelsymmetrische Leiteranordnung vorausgesetzt werden, sind, und daß die Impedanzen und Admittanzen von der Art der Verdrillung abhängen. Nur im Fall der *ideal symmetrischen Doppelleitung* - der praktisch allerdings nicht vorkommt - werden im Mit- und Ge-

gensystem bei *Parallelschaltung* der beiden Leitungen (DL Doppelleitung, EL Betrieb der DL als Einfachleitung)

$$\underline{Z}_1^{\text{DL}} = \underline{Z}_2^{\text{DL}} = 2\underline{Z}_1^{\text{EL}} = \frac{1}{2}\underline{Z}_2^{\text{EL}} = \frac{1}{2}(\underline{Z}_s^{\text{EL}} - \underline{Z}_g^{\text{EL}})$$

$$\underline{Y}_1^{\text{DL}} = \underline{Y}_2^{\text{DL}} = 2\underline{Y}_1^{\text{EL}} = 2\underline{Y}_2^{\text{EL}} = 2(\underline{Y}_s^{\text{EL}} - \underline{Y}_g^{\text{EL}})$$

während im Nullsystem wegen der nicht verschwindenden Kopplung zwischen den Leitungen

$$\underline{Z}_0^{\text{DL}} = \frac{1}{2}(\underline{Z}_s^{\text{EL}} + 5\underline{Z}_g^{\text{EL}}) \neq \frac{1}{2}\underline{Z}_0^{\text{EL}} = \frac{1}{2}(\underline{Z}_s^{\text{EL}} + 2\underline{Z}_g^{\text{EL}})$$

$$\underline{Y}_0^{\text{DL}} = 2(\underline{Y}_s^{\text{EL}} + 5\underline{Y}_g^{\text{EL}}) \neq 2\underline{Y}_0^{\text{EL}} = 2(\underline{Y}_s^{\text{EL}} + 2\underline{Y}_g^{\text{EL}})$$

gilt.

5 Berechnung der Leitungsparameter

5.1 Schleifenimpedanzen

Nach CARSON enthalten die *Selbstimpedanz* einer Leiter-Erde-Schleife (die die Diagonalelemente der Impedanzmatrix bilden) und die *Gegenimpedanzen* zwischen zwei Leiter-Erde-Schleifen (die die Nichtdiagonalelemente der Impedanzmatrix bilden) je einen rein *geometrischen* Anteil Z_G , der für ideal leitfähige Leiter und ideal leitfähige Erde gelten würde, und einen zusätzlichen frequenzabhängigen *Erdkorrekturanteil* ΔZ , der die endliche Leitfähigkeit der Erde und die damit verbundenen Stromverdrängungs- und Naheffekte im Erdboden berücksichtigt. Die Selbstimpedanzen enthalten noch einen weiteren Term, die sogenannte *innere Impedanz* Z_L , die den Anteil des Magnetfelds im realen Leiter erfaßt.

Der dielektrische Verschiebungsstrom in der Erde kann im Frequenzbereich bis 500 kHz vernachlässigt werden, so daß $\epsilon_E = \epsilon_0$ gesetzt werden darf.

Die allgemeinen Ausdrücke für die längenbezogenen Impedanzen setzen sich somit wie folgt zusammen:

$$Z_{ii} = R_{ii}(\omega) + j\omega L_{ii}(\omega) = Z_{Gii} + \Delta Z_{ii} + Z_{Li} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} (N_{ii} + F_{ii}(\omega) + M_i(\omega)) \tag{5.1}$$

$$Z_{ik} = R_{ik}(\omega) + j\omega L_{ik}(\omega) = Z_{Gik} + \Delta Z_{ik} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} (N_{ik} + F_{ik}(\omega)) \tag{5.2}$$

Zur Berechnung der *Geometriekoeffizienten* N_{ii} und N_{ik} der geometrischen Anteile bei ideal leitfähig angenommener Erde und ideal leitfähig angenommenem Leiter dient das Spiegelmodell in Bild 5.1, in dem die Erdströme in widerstandslosen Spiegelleitern konzentriert sind.

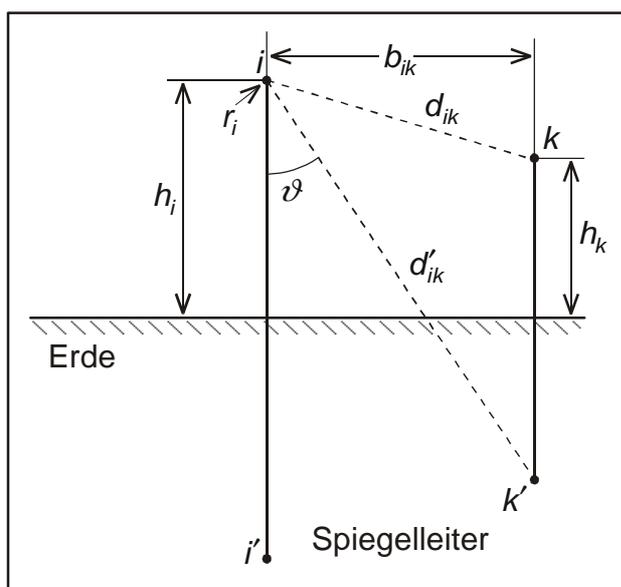


Bild 5.1: An der Erdoberfläche gespiegelte 2-Leiteranordnung

Man erhält:

$$N_{ij} = \ln \frac{2h_i}{r_i}; \quad N_{ik} = \ln \frac{d_{ik}^i}{d_{ik}}. \quad (5.3)$$

Die innere Impedanz kann für runde Massivleiter mit dem Radius r_i näherungsweise berechnet werden aus :

$$Z_{Li} = R_{Li}^i + j\omega L_{Li}^i = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} M_i = 0,74 R_{gi}^i \left(\sqrt{m_i + 1} + j \sqrt{m_i - 1} \right), \quad (5.4)$$

wobei:

$$R_{gi}^i = \frac{1}{\kappa_i \pi r_i^2}$$

der längenbezogene *Gleichstromwiderstand*, R_{Li}^i der längenbezogene *Wechselstromwiderstand* und L_{Li}^i die längenbezogene innere Induktivität sind. Für m_i steht:

$$m_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\psi_i}{2} \right)^4} \quad \text{mit} \quad \psi_i = r_i \sqrt{\omega \mu_i \kappa_i} = r_i \alpha_i.$$

Die Erdkorrekturanteile sind Ausdrücke der Form:

$$\Delta Z = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} F = \omega \frac{\mu_0}{\pi} J = \omega \frac{\mu_0}{\pi} (P + jQ),$$

in der J die CARSONSchen *Integrale* sind. In der neueren Literatur werden meist die Integrale F angegeben. Sie lauten mit den Bezeichnungen des Bildes 5.1:

$$F_{ii} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h_i \lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + j\alpha^2} + \lambda} d\lambda$$

$$F_{ik} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2(h_i + h_k) \lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + j\alpha^2} + \lambda} \cos(\lambda b_{ik}) d\lambda$$

und gehen durch die Substitution $\lambda = \alpha \nu$ und die Beziehungen $\sin \vartheta = b_{ik} / d_{ik}^i$, $\cos \vartheta = (h_i + h_k) / d_{ik}^i$ sowie die Abkürzung $x = 2h_i \alpha$ bzw. $x = d_{ik}^i \alpha$ mit $\alpha = \sqrt{\omega \mu_0 \kappa_i}$ über in (wenn für die Integrationsvariable ν wieder λ geschrieben wird) die CARSONSchen Integrale:

$$J_{ii} = \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\lambda^2 + j} - \lambda \right) e^{-\lambda x} d\lambda = P_{ii} + jQ_{ii}$$

$$J_{ik} = \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\lambda^2 + j} - \lambda \right) e^{-\lambda x \cos \vartheta} (\cos \lambda x \sin \vartheta) d\lambda = P_{ik} + jQ_{ik}$$

Für die frequenzabhängigen Real- und Imaginärteile P und Q der CARSON-Integrale sind in der Literatur Reihenentwicklungen angegeben, die im Anhang (Abschnitt 7.3) wiedergegeben sind.

Bei *Betriebsfrequenz* ω_0 und normal ausgeführten Leitungen sind $x(x \leq 0,2)$ und ϑ so klein, daß P und Q jeweils durch das erste Glied ihrer Reihe approximiert werden können:

$$P = \frac{\pi}{8} \quad (5.5)$$

$$Q = \frac{1}{2} (k - \ln x) = \frac{1}{2} \ln \frac{e^k}{x}, \quad (5.6)$$

mit $x = 2h_i \sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}$ 0 für Q_{ii} und $x = d'_{ik} \sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}$ 0 für Q_{ik}

sowie $k = 1/2 + \ln 2 - C = 0,61593\dots$, wobei $C = 0,577215$ die EULERSche Konstante ist. Nach Einsetzen der Gln. (5.4) bis Gl. (5.6) in Gl. (5.1) bzw. Gl. (5.2) erhält man für die Impedanzen bei Betriebsfrequenz (die Impedanzen bei Betriebsfrequenz werden i. f. unterstrichen):

$$\underline{Z}_{ii} = R_{Li} + \frac{\omega_0 \mu_0}{8} + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{2h_i}{r_i} + \ln \frac{e^k}{2h_i \sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}} \right) + jX_{Li} \quad (5.7)$$

$$\underline{Z}_{ik} = \frac{\omega_0 \mu_0}{8} + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{d'_{ik}}{d_{ik}} + \ln \frac{e^k}{d'_{ik} \sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}} \right) \quad (5.8)$$

und nach Einführung des längenbezogenen *Erdbodenwiderstands*:

$$R_E = \frac{\omega_0 \mu_0}{8} \quad (5.9)$$

und der Eindringtiefe:

$$\delta = \frac{e^k}{\sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}} = \frac{1,8514}{\sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}} = \frac{0,7386}{\sqrt{f_0 \mu_0 \kappa_E}} \quad (5.10)$$

$$\underline{Z}_{ii} = R_{Li} + R_E + j \left(\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{r_i} + X_{Li} \right) = R_{ii} + jX_{ii} \quad (5.11)$$

$$\underline{Z}_{ik} = R_E + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{ik}} = R_{ik} + jX_{ik} \quad (5.12)$$

Man bezeichnet die von der Eindringtiefe δ abhängigen Anteile auch gelegentlich als *äußere* Reaktanzen. Sie fassen die geometrischen Anteile und die CARSONSchen Korrekturglieder Q zusammen.

Im Bereich der Betriebsfrequenz gilt für die innere Impedanz nichtmagnetischer Leiter die Näherung:

$$\underline{Z}_{Li}^i = R_{gi}^i \left(1 + j \frac{1}{2} \left(\frac{\Psi_i}{2} \right)^2 \right) = R_{gi}^i + j \omega_0 \frac{1}{4} \frac{\mu_0}{2\pi} \quad (5.13)$$

Der Widerstand R_{Li}^i in Gl. (5.11) nimmt dann den Wert des Gleichstromwiderstands an.

Leitungen ab 220 kV werden meist mit *Bündelleitern* ausgerüstet. Diese gehen mit einem Ersatzradius r_B anstelle r_i in Gl. (5.11) ein. Der Ersatzradius berechnet sich bei n Teilleitern, die auf einem Kreis mit dem Teilleiterradius r_T (siehe Bild 5.2) angeordnet sind und den Leiterradius r haben, nach:

$$r_B = \sqrt[n]{n r r_T^{n-1}} \quad (5.14)$$

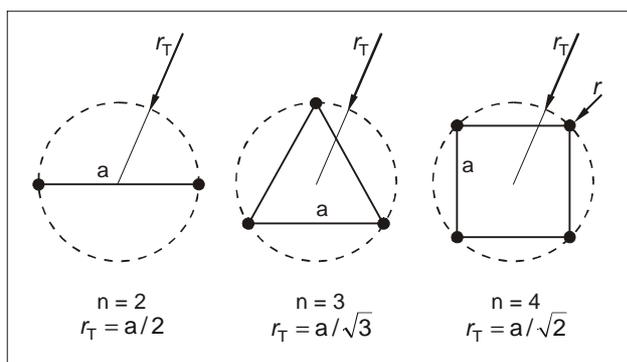


Bild 5.2: Bündelleiteranordnungen

Da die n Bündelleiter elektrisch parallel geschaltet sind, ist Gl. (5.11) für Bündelleiter bei R_{Li}^i und X_{Li}^i auch noch mit dem Faktor $1/n$ zu versehen und lautet dann:

$$\underline{Z}_{ii} = \frac{1}{n} R_{Li}^i + R_E^i + j \left(\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{r_B} + \frac{1}{n} X_{Li}^i \right) \quad (5.11a)$$

Ist die Leitung verdreht, so durchlaufen alle Leiter pro Umlauf alle möglichen Plätze am Mast. Die gesamte Impedanz ergibt sich aus der Summe der Impedanzen über die Verdrehungsabschnitte. So gilt z. B. für die mittleren Gegenimpedanzen einer α_1 -verdrehten Einfachleitung pro Längeneinheit:

$$\begin{aligned} X_{ik}^i &= X_{nm}^i = \omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{3} \left(\ln \frac{\delta}{d_{ab}} + \ln \frac{\delta}{d_{bc}} + \ln \frac{\delta}{d_{ca}} \right) \\ &= \omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{\sqrt[3]{d_{ab} d_{bc} d_{ca}}} = \omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nm}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Das Bild 5.3 zeigt, wie in diesem Fall der wirksame Leiterabstand d_{nm} als geometrisches Mittel der Einzelabstände zu ermitteln ist.

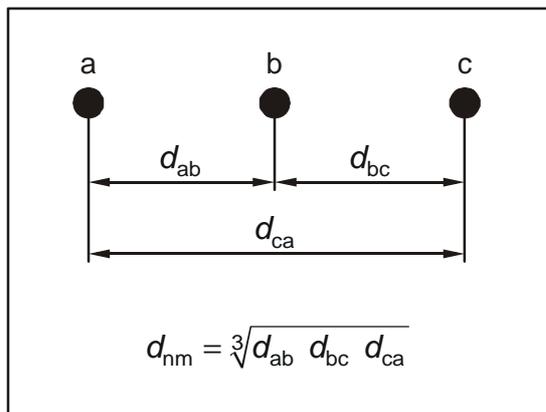


Bild 5.3: Ermittlung des wirksamen Leiterabstands der verdrehten Einfachleitung

Die geometrische Mittelwertbildung ist analog für alle Gegenimpedanzen, z. B. d_{np} für \underline{Z}_{np} und d_{nn} für \underline{Z}_{nn} und ebenso für die Potentialkoeffizienten heranzuziehen.

Zur praktischen Rechnung sind noch folgende zugeschnittenen Größengleichungen für die Anteile der Schleifenimpedanzen bei 50 Hz nützlich ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-4} \text{ H/km}$):

$$\begin{aligned}
 X_{ii}^l &= 0,02\pi \ln \frac{\delta}{r_i} \frac{\Omega}{\text{km}} + X_{Li}^l \\
 X_{ik}^l &= 0,02\pi \ln \frac{\delta}{d_{ik}} \frac{\Omega}{\text{km}} \\
 X_{Li}^l &= 5\pi \cdot 10^{-3} \frac{\Omega}{\text{km}} \quad \text{bzw.} \quad L_{Li}^l = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \frac{\text{H}}{\text{km}} \\
 R_E^l &= 5\pi^2 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega}{\text{km}} \approx 50 \frac{\text{m}\Omega}{\text{km}} \\
 \delta &= \frac{931,8}{\sqrt{\kappa_E / (\text{S/cm})}} \text{ cm}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Leitfähigkeit der Erde beträgt in Mitteleuropa durchschnittlich etwa $\kappa_E = 10^{-4} \text{ S/cm}$, so daß die Eindringtiefe in der Größenordnung von 932 m liegt.

5.2 Potentialkoeffizienten

Die Berechnung der längenbezogenen Potential-Selbst- und -Gegenkoeffizienten erfolgt wieder mit den Geometrie-Koeffizienten N_{ii} und N_{ik} aus Gl. (5.3):

$$P_{ii}^l = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} N_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_i}{r_i} \tag{5.17}$$

$$P_{ik}^l = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} N_{ik} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d_{ik}^l}{d_{ik}} \tag{5.18}$$

Der fiktive Leiterabstand d_{ik}^l kann nach Bild 5.1 ausgedrückt werden durch:

$$d'_{ik} = \sqrt{(h_i + h_k)^2 + b_{ik}^2} = \sqrt{(h_i + h_k)^2 - (h_i - h_k)^2 + d_{ik}^2} = \sqrt{d_{ik}^2 + 4h_i h_k}$$

Damit wird:

$$P'_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + 4 \frac{h_i h_k}{d_{ik}^2} \right). \quad (5.19)$$

Bündelleiter gehen wieder mit r_B anstelle r_i in Gl.(5.17) und verdrehte Leitungen mit dem entsprechenden geometrischen Mittel der Leiterabstände in Gl. (5.19) ein. Für h_i und h_k werden mittlere Leiterhöhen eingesetzt, die auch den Durchhang Δh_i bei einer mittleren Jahrestemperatur berücksichtigen:

$$h_i = h_{i\max} - 0,7\Delta h_i. \quad (5.20)$$

Mit $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-9} \text{ F/km}$ erhält man die zugeschnittenen Größengleichungen (mit der Näherung $17,975 \approx 18$):

$$\boxed{\begin{aligned} P'_{ii} &= 18 \ln \frac{2h_i}{r_i} \frac{\text{km}}{\mu\text{F}} \\ P'_{ik} &= 9 \ln \left(1 + 4 \frac{h_i h_k}{d_{ik}^2} \right) \frac{\text{km}}{\mu\text{F}}. \end{aligned}} \quad (5.21)$$

Im Gegensatz zu den Impedanzen sind die Potentialkoeffizienten nicht frequenzabhängig, solange die Verschiebungsströme in der Erde vernachlässigt werden können.

Die Inverse der Potentialmatrix, deren Elemente die Potentialkoeffizienten sind, ist die Kapazitätsmatrix $\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}$ mit den Kapazitätskoeffizienten K_{ii} und K_{ik} ($k \neq i$) als Elemente. Unter Hinzufügung von Leitwerten für die Berücksichtigung der Ableitungsverluste (bzw. der dielektrischen Verluste bei Kabeln) und der Koronaverluste erhält man für die längenbezogenen *Selbst-* und *Gegenadmittanzen*:

$$Y'_{ii} = G'_{ii} + j\omega K'_{ii} = G'_{ii} + j\omega C'_{ii}$$

$$Y'_{ik} = -G'_{ik} + j\omega K'_{ik} = -G'_{ik} - j\omega C'_{ik}$$

Zwischen den Kapazitätskoeffizienten und den *Teilkapazitäten* besteht folgender Zusammenhang:

$$C'_{ii} = K'_{ii}$$

$$C'_{ik} = -K'_{ik} \quad \text{Leiter-Leiter-Kapazitäten}$$

$$C'_{iE} = K'_{ii} + \sum K'_{ik} \quad \text{Leiter-Erde-Kapazitäten.}$$

5.3 Impedanzen der Symmetrischen Komponenten

5.3.1 Einfachleitung

Die Leitung sei verdreht. Eventuell vorhandene Erdseile sollen symmetrisch zu den Leitern angeordnet sein. Die Zahl der Teilleiter bei Bündelleitern sei n . Für die mittleren Selbst- und Gegenimpedanzen gilt dann zunächst ohne Erdseile:

$$\underline{Z}_{nn} = \frac{1}{n} R_L' + R_E' + j \left(\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{r_B} + \frac{1}{n} X_L' \right) \quad (5.22)$$

$$\underline{Z}_{nm} = R_E' + j \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nm}} \quad (5.23)$$

mit

$$d_{nm} = \sqrt[3]{d_{ab} d_{bc} d_{ca}} \quad (5.24)$$

Die Impedanzen der Erdseile und Gegenimpedanzen zwischen den Erdseilen und den Leiterseilen berechnen sich analog. So ist z.B. für die Gegenimpedanzen \underline{Z}_{np} der mittlere Abstand

$$d_{np} = \sqrt[3]{d_{ap} d_{bp} d_{cp}} \quad (5.25)$$

maßgebend.

Unter dem Einfluß *eines* Erdseiles p wird

$$\underline{Z}_{nn}^p = \underline{Z}_{nn} - \frac{\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp}} \quad \underline{Z}_{nm}^p = \underline{Z}_{nm} - \frac{\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp}} \quad (5.26)$$

und bei *zwei* symmetrisch angeordneten Erdseilen p und q

$$\underline{Z}_{nn}^{pq} = \underline{Z}_{nn} - \frac{2\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad \underline{Z}_{nm}^{pq} = \underline{Z}_{nm} - \frac{2\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad (5.27)$$

Mit- und Gegenimpedanzen

Aus $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{nn} - \underline{Z}_{nm}$ folgt mit $R_L' / n = R_1'$ für die kilometrischen Werte

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{1}{n} R_L' + j \left(\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{nm}}{r_B} + \frac{1}{n} X_L' \right) = R_1' + j X_1' \quad (5.28)$$

Wie zu erwarten, gehen der Erdbodenwiderstand und der Einfluß der Erdseile nicht in die Mit- und Gegenimpedanzen ein, denn bei Betrieb der Leitung mit einem reinen Mit- oder Gegensystem sind die Erde und auch die Erdseile stromlos.

Nullimpedanz

Ohne Erdseile gilt $\underline{Z}'_0 = \underline{Z}'_{nn} + 2\underline{Z}'_{nm}$ und somit

$$\underline{Z}'_0 = \frac{1}{n} R'_L + 3R'_E + j \left(\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta^3}{r_B d_{nm}^2} + \frac{1}{n} X'_L \right) = R'_0 + jX'_0 \quad (5.29)$$

Mit *einem* Erdseil wird

$$\underline{Z}'_0^p = \underline{Z}'_{nn} + 2\underline{Z}'_{nm} = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp}} \quad (5.30)$$

und mit *zwei* Erdseilen

$$\underline{Z}'_0^{pq} = \underline{Z}'_{nn} + 2\underline{Z}'_{nm} = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{2\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad (5.31)$$

wobei \underline{Z}'_0 jeweils die Nullimpedanz *ohne* Erdseile nach Gl. (5.29) ist.

Der Erdwiderstand geht in \underline{Z}'_0 dreifach ein, denn der Erdstrom beträgt das Dreifache des Nullstromes. Erdseile entlasten die Erde als Rückleiter, so daß die Nullimpedanz unter ihrem Einfluß kleiner wird.

5.3.2 Doppelleitung*

Wir nehmen die Doppelleitung wieder verdreht an und setzen spiegelsymmetrische Leiteranordnung, gleiche Belegung der Leitungen (Systeme) und bei Erdseilen deren symmetrische Anordnung zu den Leiterseilen voraus. Die *mittleren* Impedanzen berechnen sich dann aus

$$\underline{Z}'_{nn} = \underline{Z}'_{NN} = \frac{1}{n} R'_L + R'_E + j \left(\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{r_B} + \frac{1}{n} X'_L \right) \quad \text{s. (5.22)}$$

$$\underline{Z}'_{nm} = \underline{Z}'_{NM} = R'_E + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nm}} \quad \text{s. (5.23)}$$

$$\underline{Z}'_{nN} = R'_E + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nN}} \quad (5.32)$$

$$\underline{Z}'_{nM} = R'_E + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nM}} \quad (5.33)$$

$$\underline{Z}'_{np} = R'_E + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{np}} \quad (5.34)$$

Die Formeln für $\underline{Z}'_{pp} = \underline{Z}'_{qq}$ und \underline{Z}'_{pq} entsprechen denen für \underline{Z}'_{nn} und \underline{Z}'_{nm} . Die Berechnung der mittleren Abstände d_{nN} und d_{nM} verdeutlicht Bild 5.4

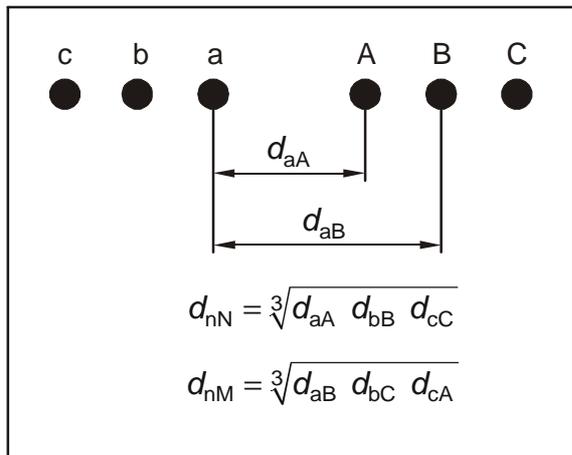


Bild 5.4: Mittlere Leiterabstände bei der Doppelleitung

Mit- und Gegenimpedanz

Falls die beiden gleich angenommenen Leitungen an den Leitungsenden *parallelgeschaltet* sind, erhält man für die Mitimpedanz *pro Leitung*:

$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_1^{II} = \underline{Z}'_1^{III} + \underline{Z}'_1^{II} = \underline{Z}_{nn} - \underline{Z}_{nm} + \underline{Z}_{nN} - \underline{Z}_{nM}$$

und nach Einsetzen der Gleichungen für die Impedanzen und Zusammenfassen der logarithmischen Terme:

$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}'_2 = \frac{1}{n} R'_L + j \left(\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{nm}}{r_B} \frac{d_{nM}}{d_{nN}} + \frac{1}{n} X'_L \right) = R'_1 + jX'_L \tag{5.35}$$

Der Ausdruck Gl. (5.35) ist bis auf den Quotient d_{nM}/d_{nN} mit der Gl. (5.29) für die Mitimpedanz der Einfachleitung identisch. Da $d_{nM} > d_{nN}$ (s. Bild 5.4) ist, ist die Mitimpedanz für *eine* Leitung einer Doppelleitung geringfügig größer als die einer gleichen Einfachleitung (oder einer Doppelleitung bei abgeschalteter zweiter Leitung).

Lediglich bei der aufwendigen Verdrillung β wird $d_{nM} = d_{nN}$, so daß die Mitimpedanz *einer* Leitung der Doppelleitung exakt den Wert der Einfachleitung annimmt.

In Übereinstimmung mit Gl. (4.12) wird die gesamte Mitimpedanz der Doppelleitung

$$\underline{Z}'_1^{DL} = \frac{1}{2} \underline{Z}'_1$$

Nullimpedanzen

Pro Leitung der parallelgeschalteten γ -verdrillten Doppelleitung ergibt sich

$$\underline{Z}'_0 = \underline{Z}'_0 + \underline{Z}'_0^{II} = \underline{Z}'_0^{III} + \underline{Z}'_0^{II} = \underline{Z}_{nn} + 2\underline{Z}_{nm} + \underline{Z}_{nN} + 2\underline{Z}_{nM}$$

Ohne Erdseile wird

$$\underline{Z}'_0 = \frac{1}{n} R'_L + 3R'_E + j \left(\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta^3}{r_B d_{nm}^2} + \frac{1}{n} X'_L \right) + 3 \left(R'_E + j \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nNM}} \right) \quad (5.36)$$

Die ersten drei Terme der Gl. (5.36) entsprechen der Nullimpedanz der Einfachleitung, während der letzte Term die im Nullsystem nicht verschwindende Kopplung mit der zweiten Leitung ausdrückt. Der mittlere Abstand d_{nNM} berechnet sich aus

$$d_{nNM} = \sqrt[3]{d_{nN} d_{nM}^2}$$

Im Fall der β -Verdrillung wird $d_{nNM} = d_{nN} = d_{nM}$.

Erdseile verringern die Nullimpedanz. Wenn \underline{Z}'_0 die Nullimpedanz *eines* Leitungssystems *ohne* Erdseile ist, so reduziert *ein* Erdseil diese auf

$$\underline{Z}'_0^p = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{\underline{Z}'_{np}}{\underline{Z}'_{pp}} \quad (5.37)$$

während *zwei* Erdseile eine Reduzierung auf (s. Anhang 7.2):

$$\underline{Z}'_0^{pq} = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{(\underline{Z}'_{np} + \underline{Z}'_{nq})^2}{\underline{Z}'_{pp} + \underline{Z}'_{pq}} = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{2\underline{Z}'_{npq}}{\underline{Z}'_{pp} + \underline{Z}'_{pq}} \quad (5.38)$$

bewirken. Die maßgebenden mittleren Abstände zwischen den Leitern und dem Erdseil bzw. den Erdseilen sind

$$d_{np} = d_{Np} = \sqrt[3]{d_{ap} d_{bp} d_{cp}} = \sqrt[3]{d_{Ap} d_{Bp} d_{Cp}}$$

$$d_{npq} = \sqrt[6]{d_{ap} d_{bp} d_{cp} d_{aq} d_{bq} d_{cq}}$$

5.4 Admittanzen der Symmetrischen Komponenten

5.4.1 Einfachleitung

Die *mittleren* Potentialkoeffizienten der verdrillten Bündelleiter-Leitung *ohne* Erdseile werden mit den geometrischen Mittelwerten der Leiterhöhen und -abständen:

$$P'_{nn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_n}{r_B} \quad (5.39)$$

$$P'_{nm} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d'_{nm}}{d_{nm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + 4 \frac{h_n h_m}{d_{nm}^2} \right) \quad (5.40)$$

Falls ein oder zwei Erdseile vorhanden sind, erfolgt die Modifizierung der Potentialkoeffizienten analog zu den Impedanzen (Gl. (5.26)) unter Verwendung der dabei bereits berechneten mittleren Leiterabstände.

rechneten mittleren Leiterabstände.

Mit- und Gegenadmittanz

Analog zu den Impedanzen gilt

$$\underline{Y}'_1 = \underline{Y}'_{nn} - \underline{Y}'_{nm}$$

und mit den Selbst- und Gegenadmittanzen aus Gl. (3.25)

$$\underline{Y}'_1 = (G'_E + 3G') + j\omega(C'_E + 3C') = G'_1 + jB'_1$$

Aus den Gln. (3.23) und (3.24) oder besser aus Gl. (3.14) mit den Symmetriebedingungen der Verdrillung folgt für die Kapazitäten des Mit- und Gegensystems⁵⁾

$$C_1 = C_2 = C'_E + 3C' = K'_{nn} - K'_{nm} = \frac{1}{P'_{nn} - P'_{nm}} = K'_1 = \frac{1}{P'_1}$$

und

$$C_1 = C_2 = 2\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{2h_n d_{nm}}{r_B d'_{nm}}} \approx 2\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{d_{nm}}{r_B}} \quad (5.41)$$

Wegen der Differenzbildung der Potentialkoeffizienten fällt der Anteil der Erdseile folgerichtig wieder heraus. Die Näherung gilt für $2h \approx d'_{nm}$.

Nulladmittanz

Aus

$$\underline{Y}'_0 = \underline{Y}'_{nn} + 2\underline{Y}'_{nm} = G'_0 + j\omega C'_0 = G'_0 + jB'_0 \quad (5.42)$$

folgt mit (s. auch Gl. (3.24))

$$C'_0 = C'_E = K'_0 = K'_{nn} + 2K'_{nm} = \frac{1}{P'_0} = \frac{1}{P'_{nn} + 2P'_{nm}} \quad (5.43)$$

zunächst ohne Erdseile

$$C'_0 = 2\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{2h_n d_{nm}^2}{r_B d_{nm}^2}} \approx 2\pi\varepsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{8h_n^3}{r_B d_{nm}^2}} \quad (5.44)$$

⁵⁾ Zur Berechnung der Symmetrischen Kapazitäten transformiert man zweckmäßigerweise bereits die Gln.(3.11), (3.14) und (3.15) in Symmetrische Koordinaten und erhält so sofort $C'_1 = K'_1 = 1/P'_1$ und $P'_1 = P'_{nn} - P'_{nm}$.

Erdseile vergrößern die Nullkapazität. Anstelle P_{nn} und P_{nm} sind dann die modifizierten Potentialkoeffizienten P_{nn}^p bzw. P_{nn}^{pq} und P_{nm}^p bzw. P_{nm}^{pq} , deren Berechnung analog zu den Gln. (5.26) und (5.27) erfolgt, zu verwenden. Die Formel für die Nullkapazität ändert sich bei *einem* Erdseil in

$$C_0^p = \frac{1}{P_0 - 3 \frac{P_{np}^2}{P_{pp}}} \quad (5.45)$$

und bei *zwei* Erdseilen in

$$C_0^{pq} = \frac{1}{P_0 - 3 \frac{2P_{np}^2}{P_{pp} + P_{pq}}} \quad (5.46)$$

wenn P_0 jeweils der Nullpotentialkoeffizient ohne Erdseile ist.

5.4.2 Doppelleitung*

Einfache Beziehungen für die Kapazitäten der Doppelleitung in Symmetrischen Koordinaten lassen sich nur für

- verdrehte Doppelleitungen gleicher Belegung
- spiegelsymmetrische Leiteranordnung
- symmetrische Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen und
- Parallelschaltung der beiden Systeme

angeben. In allen anderen Fällen wird man die Kapazitäten ausgehend von der Matrix der Potentialkoeffizienten mit dem Computer berechnen (s. Abschnitt 4.3).

Mit- und Gegenkapazität

Nach Gl. (4.19) ergibt sich der gesamte Querstrom im Mitsystem der Doppelleitung unter den oben genannten Einschränkungen aus

$$\Delta I_1^{DL} = 2 \left[(G_1^s - G_1^g) + j\omega (C_1^s - C_1^g) \right] U_1^{DL} = 2(G_1 + j\omega C_1) U_1^{DL}$$

Mit (s. Gl. (4.16))

$$C_1^s = K_1^s = \frac{P_1^s}{P_1^s P_1^s - P_1^g P_1^g}$$

$$C_1^g = -K_1^g = \frac{P_1^g}{P_1^s P_1^s - P_1^g P_1^g}$$

und analogen Beziehungen für die Wirkleitwerte. Damit wird für *ein* System der *parallelgeschalteten* Doppelleitung

$$C_1 = C_1^s - C_1^g = \frac{P_1^s - P_1^g}{P_1^s P_1^s - P_1^g P_1^g} = \frac{1}{P_1^s + P_1^g} = \frac{1}{P_{nn} - P_{nm} + P_{nN} - P_{nM}}$$

und mit Gl.(5.17) und (5.18) für die kilometrischen Werte

$$C_1 = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{2h_n d_{nm} d'_{nN} d_{nM}}{r_B d'_{nm} d_{nN} d'_{nM}}} \approx 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{d_{nm} d_{nM}}{r_B d_{nN}}} \quad (5.47)$$

Die Näherung gilt für $d'_{nm} = d'_{nN} = d'_{nM} \approx 2h_n$.

Für die gesamte Doppelleitung gilt dann $C_1^{DL} = C_2^{DL} = 2C_1$.

Erdseile haben auf die Kapazitäten des Mit- und Gegensystems keinen Einfluß, so daß man diese gleich mit den nicht modifizierten Potentialkoeffizienten berechnen kann. Aus Gl. (5.47) ist ersichtlich, daß Bündelleiter (großes r_B) die Betriebskapazität erhöhen, was sich günstig auf die Übertragungsverhältnisse bei großer Belastung auswirkt. Allerdings nehmen bei Höchstspannungsleitungen die erforderlichen Leiterabstände so zu, daß ihre Betriebskapazität wieder abnimmt (s. Tabelle 7.2).

Nullkapazität

Analog zum Mit- und Gegensystem gilt

$$C_0^s = K_0^s = \frac{P_0^s}{P_0^s P_0^s - P_0^g P_0^g}$$

$$C_0^g = -K_0^g = \frac{P_0^g}{P_0^s P_0^s - P_0^g P_0^g}$$

Die Potentialkoeffizienten des Nullsystems setzen sich aber jetzt aus den modifizierten Potentialkoeffizienten des Originalsystems wie folgt zusammen

$$P_0^s = P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq}$$

$$P_0^g = P_{nN}^{pq} + 2P_{nM}^{pq}$$

Für ein System der parallelgeschalteten Doppelleitung wird deshalb:

$$C_0 = C_0^s - C_0^g = \frac{1}{P_0^s + P_0^g} = \frac{1}{P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq} + P_{nN}^{pq} + 2P_{nM}^{pq}} \quad (5.48)$$

und für die gesamte Doppelleitung gilt wieder $C_0^{DL} = 2C_0$.

Ohne die Ausdrücke für die modifizierten Potentialkoeffizienten hier anzugeben (sie sind analog zu den Ausdrücken für die modifizierten Impedanzen), ist ersichtlich, daß zum einen die Kapazität des Nullsystems *kleiner* als die des Mitsystems wird, und daß zum anderen die *Erdseile* die Kapazität des Nullsystems *vergrößern*. Zu den aus Gl. (5.48) berechneten Werten muß man in Abhängigkeit von der Nennspannung noch einen Zuschlag von 16...6 % (große Werte gelten für kleine Spannungen) für zusätzliche Erdkapazitäten machen.

6 Betriebsverhalten

Wir wollen i. f. das Betriebsverhalten der Freileitung anhand der in Kapitel 2 hergeleiteten Π -Ersatzschaltung mit konzentrierten Parametern beurteilen. Die Ableitungswiderstände sollen vernachlässigt werden. Für lange Leitungen ist es besser, eine der Ersatzschaltungen mit verteilten Parametern nach Bild 2.2 oder 2.3 heranzuziehen. Weiterhin soll zunächst nur der stationäre symmetrische Betrieb untersucht werden, wofür die Ersatzschaltung für das Mitsystem der Symmetrischen Komponenten maßgebend ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird der Index 1 an den Mitsystemgrößen weggelassen.

6.1 Spannungsabfall

Aus der Π -Ersatzschaltung, die in Bild 6.1 nochmals angegeben ist,

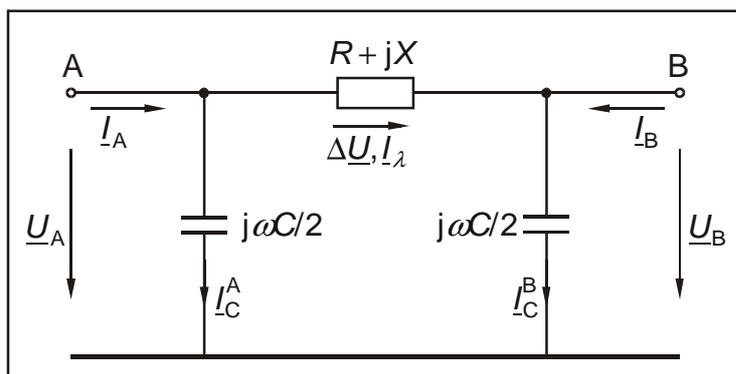


Bild 6.1: Π -Ersatzschaltung der Leitung mit konzentrierten Parametern

erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\Delta \underline{U} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = (R + jX) \underline{I}_\lambda = \underline{Z} \underline{I}_\lambda \quad (6.1)$$

$$\underline{I}_C^A = j\omega \frac{C}{2} \underline{U}_A \quad \underline{I}_C^B = j\omega \frac{C}{2} \underline{U}_B \quad (6.2) \quad (6.3)$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_C^A + \underline{I}_\lambda \quad \underline{I}_B = \underline{I}_C^B - \underline{I}_\lambda \quad (6.4) \quad (6.5)$$

Mit diesen Gleichungen ergibt sich das Zeigerbild in Bild 6.2, beginnend mit der als gegeben angenommenen Spannung \underline{U}_B , deren Zeiger dann zweckmäßigerweise in die reelle Achse gelegt wird. Die weitere Konstruktionsreihenfolge geben die mit einem Kreis eingerahmten Schritte an.

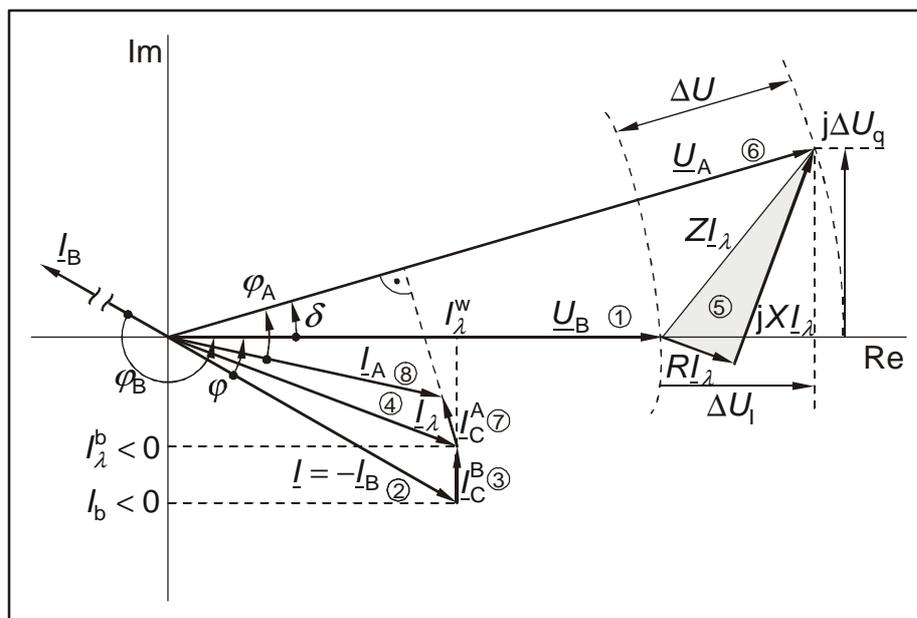


Bild 6.2: Zeigerbild der Leitung
O Konstruktionsschritte

Um die Spannung am Anfang der Leitung zu berechnen, führen wir den *Längs- und Querspannungsabfall* ΔU_l und ΔU_q ein und zerlegen den Strom I_λ durch die Leitungsimpedanz in seinen Wirk- und Blindanteil. Aus Gl. (6.1) folgt dann mit $\underline{U}_B = U_B \angle 0^\circ$ und $\underline{I}_B = -I$

$$\underline{U}_A = \underline{U}_B + (R + jX)(I_\lambda^w + jI_\lambda^b) = \underline{U}_B + (R + jX)(I_\lambda^w + j(I_b + I_C^B)) = U_B + \Delta U_l + j\Delta U_q \quad (6.6)$$

mit ΔU_l und ΔU_q als Längs- und Querspannungsabfall

$$\Delta U_l = R I_\lambda^w - X I_\lambda^b = R I_w - X(I_b + I_C^B) \quad (6.7)$$

$$\Delta U_q = X I_\lambda^w + R I_\lambda^b = X I_w + R(I_b + I_C^B) \quad (6.8)$$

Dabei ist das Vorzeichen von I_λ^b bzw. I_b zu beachten. Der kapazitive Strom I_C^B am Ende der Leitung kompensiert einen induktiven Blindstrom des Abnehmers teilweise, wodurch bei $X > R$ insbesondere der Längsspannungsabfall kleiner wird. Für den Betrag U_A ergibt sich aus Gl. (6.6)

$$U_A = \sqrt{(U_B + \Delta U_l)^2 + \Delta U_q^2} \quad (6.9)$$

und für die Spannungsdifferenz bzw. den *Spannungsabfall*

$$\Delta U = U_A - U_B = \sqrt{(U_B + \Delta U_l)^2 + \Delta U_q^2} - U_B \approx \Delta U_l \quad (6.10)$$

Die Näherung gilt für kleine *Übertragungswinkel* δ . Dieser berechnet sich aus

$$\sin \delta = \frac{\Delta U_q}{U_A} \quad (6.11)$$

Im Hochspannungsnetz gilt wegen $X > R$ außerdem näherungsweise

$$\Delta U_l = U_A - U_B = -X(I_b + I_C^B) = X(I \sin \varphi - I_C^B) \quad (6.12)$$

$$\Delta U_q = U_A \sin \delta = X I_w = X I \cos \varphi \quad (6.13)$$

d.h., der Spannungsabfall wird hauptsächlich vom Blindstrom verursacht, während der Wirkstrom den Übertragungswinkel bestimmt. Kleines X und großes C (I_C^B) wirken sich günstig auf das Übertragungsverhalten aus. Durch Reihenkompensation läßt sich die wirksame Reaktanz verringern, wodurch im Mittelspannungsnetz die Spannungsverhältnisse (Verringerung von ΔU) und im Hochspannungsnetz die Stabilitätsverhältnisse (Verringerung von δ) verbessert werden sollen (Bild 6.3a und 6.3b).

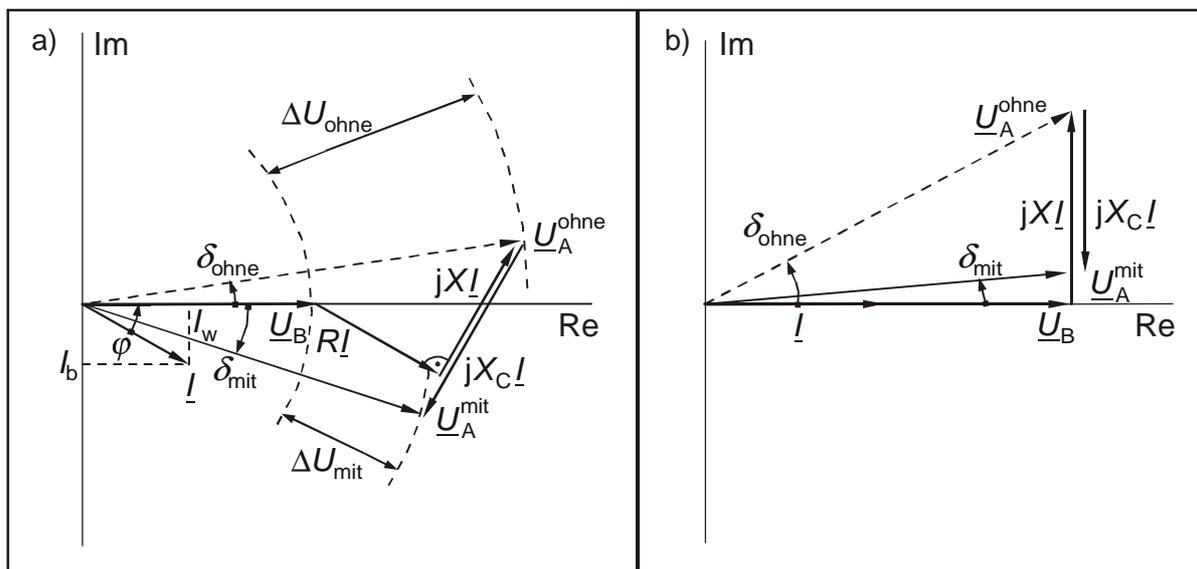


Bild 6.3: Wirkung der Reihenkompensation

a) im Mittelspannungsnetz: ΔU groß, φ groß, $R \approx X$, b) im Hochspannungsnetz: δ groß, φ klein, $X \gg R$

Der erforderliche Kompensationsgrad

$$k = \frac{X_C}{X} \quad (6.14)$$

(X_C kapazitive Reaktanz der Reihenkapazitoren, X Leitungsreaktanz) liegt aufgrund der unterschiedlichen $\cos \varphi$ der Belastung und der R zu X Verhältnisse im Mittelspannungsnetz bei 2...4 (Überkompensation) und im Hochspannungsnetz maximal bei 1. Die vorstehenden Gleichungen gelten bei Reihenkompensation weiterhin mit

$$X(1 - k) \text{ anstelle } X$$

Zur Abschätzung des Einflusses des $\cos \varphi$, der Leitungsparameter und Leitungslänge auf den Spannungsabfall und die übertragbare Leistung kann folgende einfache Beziehung dienen. Aus Gl. (6.10) folgt mit Gl. (6.7) für den Strom am Ende B der Leitung

$$I = \frac{\Delta U + \frac{1}{2} \omega C' X' l^2 U_B}{(R' \cos \varphi + X' \sin \varphi) l} \quad (6.15)$$

und für die abgenommene Leistung $S = 3U_B I$ bei $U_B = U_n / \sqrt{3}$

$$S = \frac{U_n^2 \Delta u}{(R' \cos \varphi + X' \sin \varphi) l} + \frac{1}{2} \frac{\omega C' X' U_n^2}{R' \cos \varphi + X' \sin \varphi} l \tag{6.16}$$

Im Bereich kurzer Leitungslängen ist der 1. Term der Gl. (6.16) dominierend. Bei gegebenen Spannungsabfall (Δu ist auf $U_n / \sqrt{3}$ bezogen) nimmt die übertragbare Leistung hyperbolisch mit der Länge ab. Eine Verschlechterung des $\cos \varphi$ wirkt sich ebenfalls leistungsmindernd aus. Der 2. Term der Gl. (6.16) drückt den *Selbstkompensationseffekt* durch die halbe Leitungskapazität der Π -Ersatzschaltung am Abnahmeende B aus. Er erhöht mit wachsender Länge die übertragbare Leistung bei gleichem Spannungsabfall. Für $S=0$ (Leerlauf an B) bestimmt er den dann negativen Spannungsabfall (FERRANTI-Effekt) (s. Abschnitt 6.3). Für genaue Berechnungen ist Gl. (6.16) jedoch aufgrund der Näherung $\Delta u = \Delta u_l$ zu ungenau. In Bild 6.4 sind die für eine 380-kV-Leitung mit Hilfe der ausführlichen Leitungsgleichungen (Gln. (2.15) und (2.16)) berechneten Übertragungsverhältnisse dargestellt. Die prinzipiellen an Gl. (6.16) diskutierten Abhängigkeiten $S \sim 1/l$ bei konstantem Δu und $S \sim l$ bei $\Delta u = 0$ werden aber deutlich.

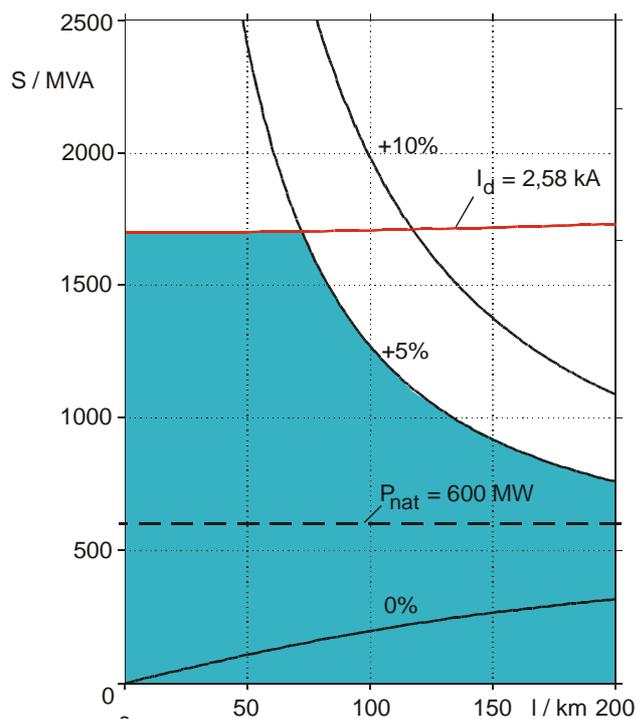


Bild 6.4: Übertragungsverhältnisse einer 400-kV-Einfachleitung mit $R'_l = 0,036 \Omega/\text{km}$, $L'_l = 0,806 \text{ mH}/\text{km}$ und $C'_l = 13,9 \mu\text{F}/\text{km}$

6.2 Verluste, Blindstrombedarf, natürliche Leistung

Die Verluste und der Blindleistungsbedarf der Freileitung setzen sich aus je einem spannungsabhängigen und einem stromabhängigen Anteil zusammen.

$$P_V = 3G \frac{1}{2} (U_A^2 + U_B^2) + 3R_l I_\lambda^2 \tag{6.17}$$

$$Q_V = -3\omega C \frac{1}{2} (U_A^2 + U_B^2) + 3XI_\lambda^2 \quad (6.18)$$

Die spannungsabhängigen Anteile lassen sich bei Betrieb der Leitung mit Nennspannung ($U_A \approx U_B \approx U_n / \sqrt{3}$) näherungsweise ausdrücken durch GU_n^2 bzw. $-\omega CU_n^2$, womit die Gln. (6.17) und (6.18) übergehen in

$$P_V = GU_n^2 + 3RI_\lambda^2 \quad (6.19)$$

$$Q_V = -\omega CU_n^2 + 3XI_\lambda^2 \quad (6.20)$$

Aus Gl. (6.20) ist ersichtlich, daß der Blindleistungsbedarf der Leitung bei Nennspannung bei einem bestimmten Strom I_λ verschwindet. Dieser Strom heißt *natürlicher Strom*. Er berechnet sich aus Gl. (6.20) bei $Q_V = 0$ zu

$$I_{\text{nat}} = \frac{U_n}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U_n}{\sqrt{3}} \frac{1}{Z_w} \quad (6.21)$$

Z_w ist der *Wellenwiderstand* der verlustlosen Leitung. Er ist reell.

$$Z_w = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (6.22)$$

Z_w hängt bei Vernachlässigung der inneren Reaktanz nur von der Geometrie der Leitung ab. Für die Einfachleitung gilt z. B.

$$Z_w = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ln \frac{d_{\text{nm}}}{r_B} \quad (6.23)$$

Durch Multiplizieren von I_{nat} mit $\sqrt{3}U_n$ entsteht die *natürliche Leistung*

$$P_{\text{nat}} = \sqrt{3}U_n I_{\text{nat}} = \frac{U_n^2}{Z_w} \quad (6.24)$$

Die Größenordnung der natürlichen Leistung in Abhängigkeit von der Nennspannung ist in Tabelle 7.2 im Anhang angegeben. Für Fernübertragungen wird der sogenannte natürliche Betrieb, d.h. die Übertragung der natürlichen Leistung angestrebt. P_{nat} wird groß, wenn U_n groß und Z_w klein werden. Bündelleiter verringern den Wellenwiderstand, wirken sich also günstig auf das Übertragungsverhalten aus. Die natürliche Leistung der 110-, 220- und 380-kV-Leitungen verhalten sich wie 1:5:20. Das Bild 6.5 zeigt die Übertragungsverhältnisse einer Hochspannungsleitung bei Betrieb mit der natürlichen Leistung unter Vernachlässigung der Wirkwiderstände.

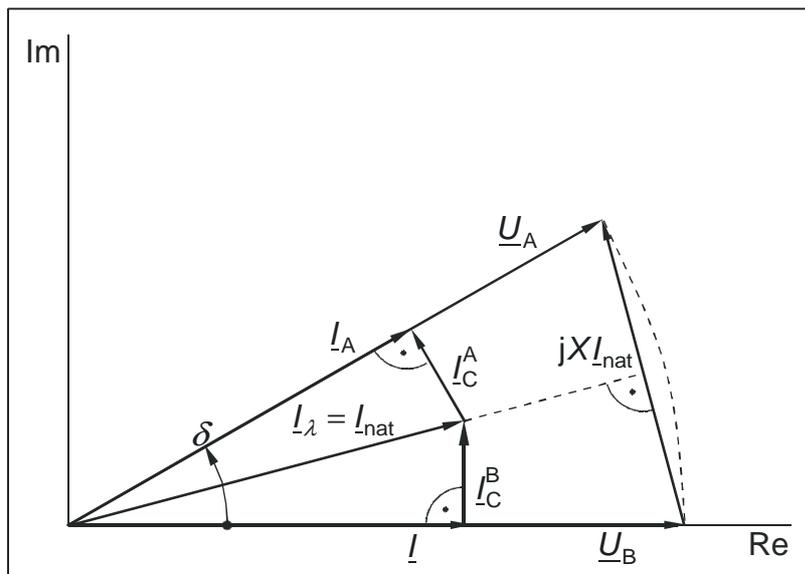


Bild 6.5: Zeigerbild für den natürlichen Betrieb ($R = 0$)

Die Ströme und Spannungen an den Leitungsenden A und B liegen jeweils in Phase. Der Spannungsfall $\Delta U = U_A - U_B$ wird Null. Für $U_A = U_B = U_n / \sqrt{3}$ wird die natürliche Leistung verlustlos übertragen. Aus Gl. (6.24) folgt, daß sich der natürliche Betrieb einstellt, wenn die Leitung mit dem reellen Wellenwiderstand $Z_w = \sqrt{L/C}$ abgeschlossen wird.

6.3 Leerlauf und Kurzschluß

Im *Leerlauf* ist $I = I_B = 0$ und es wird $I_\lambda = I_C^B$. Aus dem Zeigerbild in Bild 6.6 ist ersichtlich, daß die Spannung am Ende der Leitung größer als am Anfang wird. Diese Erscheinung heißt *FERRANTI-Effekt*⁶⁾.

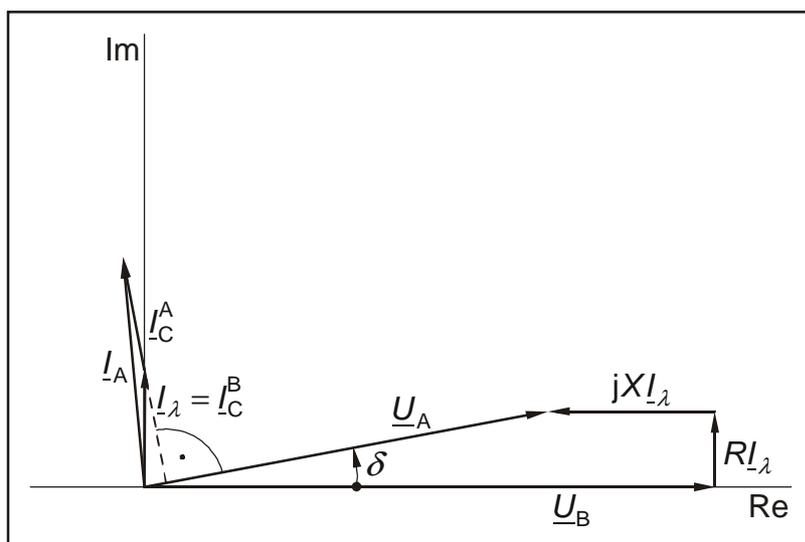


Bild 6.6: Zeigerbild der an B leerlaufenden Leitung

Der *Leerlauf-* oder *Ladestrom* am Anfang ergibt sich aus

$$I_A = I_C = I_C^A + I_C^B = j\omega \frac{C}{2} (U_A + U_B)$$

⁶⁾ nach dem Engländer Ferranti (1864 - 1930)

und für $U_A \approx U_B \approx U_n / \sqrt{3}$

$$I_C = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega C U_n \quad (6.25)$$

Nach Multiplikation mit $\sqrt{3}U_n$ ergibt sich die *Ladeleistung*

$$Q_C = \sqrt{3}U_n I_C = \omega C U_n^2 \quad (6.26)$$

Ladestrom und Ladeleistung sind in der Praxis übliche Angaben, aus denen man die Leitungskapazität erhält. Richtwerte gibt die Tabelle 7.2 im Anhang.

Bei *Kurzschluß* am Leitungsende B wird $\underline{U}_B = 0$. Das entsprechende Zeigerbild, bei dem die Zeiger $R\underline{I}_{-\lambda}$ und $jX\underline{I}_{-\lambda}$ auf einem THALES-Kreis liegen, zeigt Bild 6.7

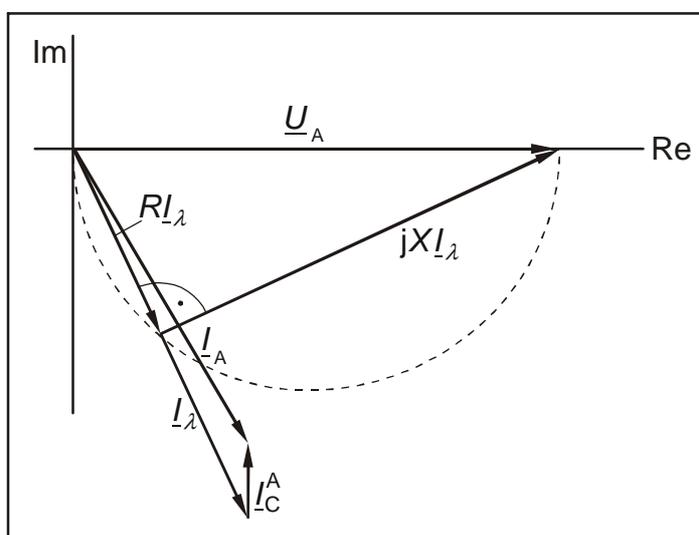


Bild 6.7: Zeigerbild der an B kurzgeschlossenen Leitung

6.4 Kapazitiver Erdschlußstrom

Eine weitere wichtige Kenngröße von Leitungen ist der *kapazitive Erdschlußstrom* I_{CE} . Er gibt dem Praktiker Auskunft über die Leiter-Erde- oder Nullkapazität der Leitung. Zur Berechnung von I_{CE} denken wir uns die Leitung von einem starren Netz mit der Nennspannung U_n gespeist, wobei der Sternpunkt des speisenden Netzes nicht geerdet ist und verbinden den Leiter a mit Erde. Die Längsglieder und die Kapazitäten zwischen den Leitern können wir dabei vernachlässigen, so daß die einfache Schaltung in Bild 6.8 entsteht.

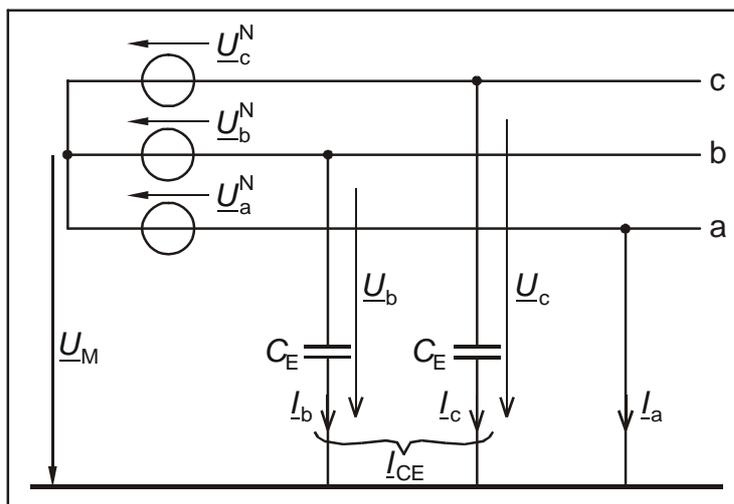


Bild 6.8: Ersatzanordnung zur Berechnung des kapazitiven Erdschlußstromes der Freileitung

Wir lesen ab :

$$\underline{U}_M = -\underline{U}_a^N \quad I_a = -I_b - I_c = -I_{CE}$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_b^N + \underline{U}_M \quad I_b = j\omega C_E \underline{U}_b$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_c^N + \underline{U}_M \quad I_c = j\omega C_E \underline{U}_c$$

Also wird

$$I_{CE} = j\omega C_E (\underline{U}_b + \underline{U}_c) = j\omega C_E (\underline{a}^2 + \underline{a} - 2) \underline{U}_a^N = -j3\omega C_E \underline{U}_a^N$$

und mit $\underline{U}_a^N = \frac{1}{\sqrt{3}} U_n$

$$I_{CE} = \sqrt{3}\omega C_E U_n$$

(6.27)

Das Zeigerbild in Bild 6.9 illustriert die Verhältnisse.

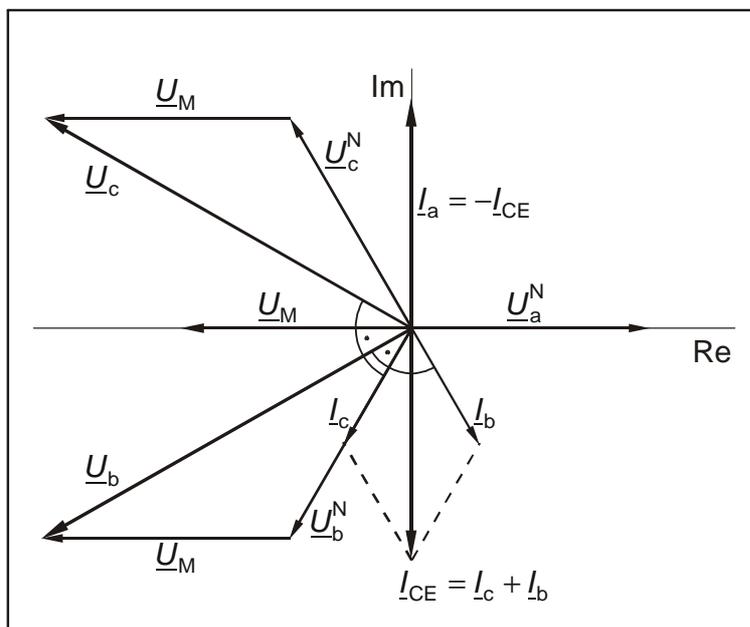


Bild 6.9: Zeigerbild für Erdschluß im Leiter a

Zum gleichen Ergebnis kommt man natürlich auch über die Symmetrischen Komponenten. Aus der für den einpoligen Kurzschluß typischen Hintereinanderschaltung der Komponentennetze (Bild 6.10) folgt unter Vernachlässigung der Längsimpedanzen:

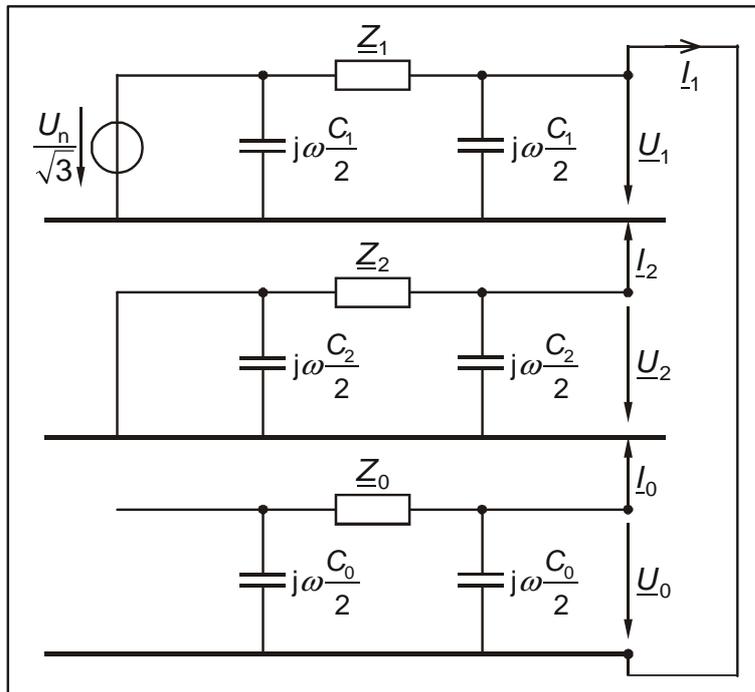


Bild 6.10: Komponentenersatzschaltbilder bei Erdschluß der Leitung im Leiter a

$$I_1 = I_2 = I_0 = j\omega C_0 \frac{U_n}{\sqrt{3}}$$

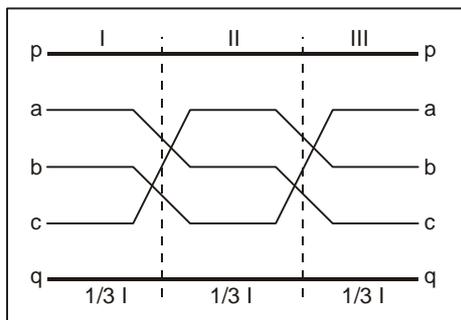
und nach der Rücktransformation mit $I_1 = I_2 = I_0$:

$$I_a = I_1 + I_2 + I_0 = 3I_1 = j\sqrt{3}\omega C_E U_n = -I_{CE}$$

7 Anhang

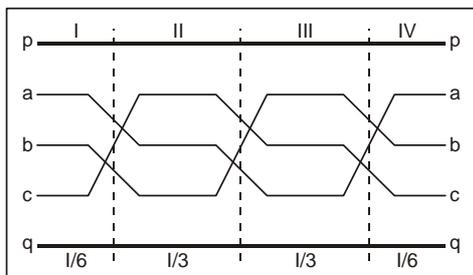
7.1 Verdrillungsschemata

7.1.1 Verdrillung α_1



	I	II	III	mittlere Impedanz
\underline{Z}_{aa} \underline{Z}_{bb} \underline{Z}_{cc}	a-a b-b c-c	b-b c-c a-a	c-c a-a b-b	$\underline{Z}_{nn} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{bb} + \underline{Z}_{cc})$
\underline{Z}_{ab} \underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ca}	a-b b-c c-a	b-c c-a a-b	c-a a-b b-c	$\underline{Z}_{nm} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca})$
\underline{Z}_{ap} \underline{Z}_{bp} \underline{Z}_{cp}	a-p b-p c-p	b-p c-p a-p	c-p a-p b-p	$\underline{Z}_{np} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ap} + \underline{Z}_{bp} + \underline{Z}_{cp})$
\underline{Z}_{aq} \underline{Z}_{bq} \underline{Z}_{cq}	a-q b-q c-q	b-q c-q a-q	c-q a-q b-q	$\underline{Z}_{nq} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aq} + \underline{Z}_{bq} + \underline{Z}_{cq})$ 7)

7.1.2 Verdrillung α_2

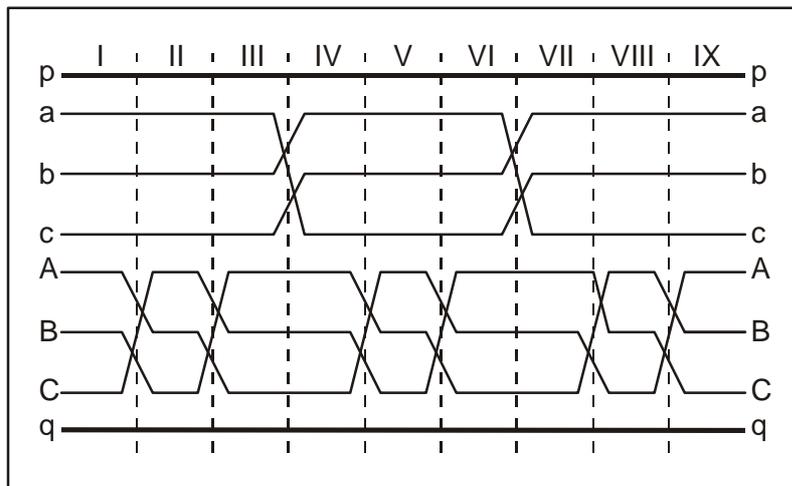


	I	II	III	IV	mittlere Impedanz
\underline{Z}_{aa} \underline{Z}_{bb} \underline{Z}_{cc}	a-a b-b c-c	b-b c-c a-a	c-c a-a b-b	a-a b-b c-c	$\underline{Z}_{nn} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{bb} + \underline{Z}_{cc})$
\underline{Z}_{ab} \underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ca}	a-b b-c c-a	b-c c-a a-b	c-a a-b b-c	a-b b-c c-a	$\underline{Z}_{nm} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca})$
\underline{Z}_{ap} \underline{Z}_{bp} \underline{Z}_{cp}	a-p b-p c-p	b-p c-p a-p	c-p a-p b-p	a-p b-p c-p	$\underline{Z}_{np} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ap} + \underline{Z}_{bp} + \underline{Z}_{cp})$
\underline{Z}_{aq} \underline{Z}_{bq} \underline{Z}_{cq}	a-q b-q c-q	b-q c-q a-q	c-q a-q b-q	a-q b-q c-q	$\underline{Z}_{nq} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aq} + \underline{Z}_{bq} + \underline{Z}_{cq})$ 8)

7) Bei symmetrischer Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen ist $\underline{Z}_{nq} = \underline{Z}_{np}$.

8) Bei symmetrischer Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen wird $\underline{Z}_{nq} = \underline{Z}_{np}$ und $\underline{Z}_{qq} = \underline{Z}_{pp}$.

7.1.3 Verdrillung β



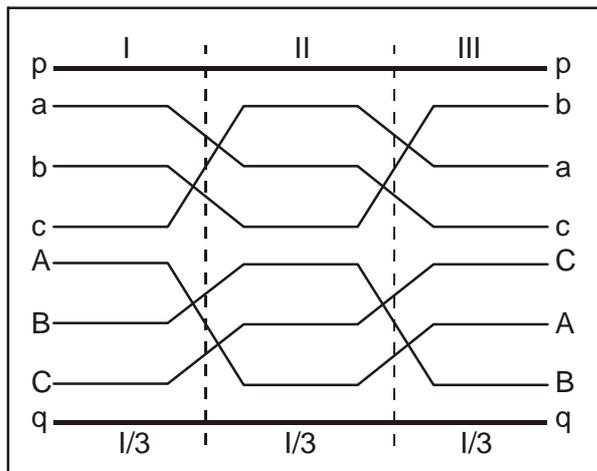
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	mittlere Impedanz
\underline{Z}_{nn}	\underline{Z}_{aa} \underline{Z}_{bb} \underline{Z}_{cc}	a-a b-b c-c	a-a b-b c-c	a-a b-b c-c	b-b c-c a-a	b-b c-c a-a	b-b c-c a-a	c-c a-a b-b	c-c a-a b-b	c-c a-a b-b	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac})$
\underline{Z}_{nm}	\underline{Z}_{ab} \underline{Z}_{bc} \underline{Z}_{ca}	a-b b-c c-a	a-b b-c c-a	a-b b-c c-a	b-c c-a a-b	b-c c-a a-b	b-c c-a a-b	c-a a-b b-c	c-a a-b b-c	c-a a-b b-c	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca})$
\underline{Z}_{nN}	\underline{Z}_{aA} \underline{Z}_{bB} \underline{Z}_{cC}	a-A b-B c-C	a-B b-C c-A	a-C b-A c-B	b-C c-A a-B	b-A c-B a-C	b-B c-C a-A	c-B a-C b-A	c-C a-A b-B	c-A a-B b-C	$\frac{1}{9}(\underline{Z}_{aA} + \underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{aC} + \underline{Z}_{bB} + \underline{Z}_{bC} + \underline{Z}_{bA} + \underline{Z}_{cC} + \underline{Z}_{cA} + \underline{Z}_{cB})$
\underline{Z}_{mM}	\underline{Z}_{aB} \underline{Z}_{bC} \underline{Z}_{cA}	a-B b-C c-A	a-C b-A c-B	a-A b-B c-C	b-A c-B a-C	b-B c-C a-A	b-C c-A a-B	c-C a-A b-B	c-A a-B b-C	c-B a-C b-A	$\frac{1}{9}(\underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{aC} + \underline{Z}_{aA} + \underline{Z}_{bC} + \underline{Z}_{bA} + \underline{Z}_{bB} + \underline{Z}_{cA} + \underline{Z}_{cB} + \underline{Z}_{cC})$
\underline{Z}_{mN}	\underline{Z}_{bA} \underline{Z}_{cB} \underline{Z}_{aC}	b-A c-B a-C	b-B c-C a-A	b-C c-A a-B	c-C a-A b-B	c-A a-B b-C	c-B a-C b-A	a-B b-C c-A	a-C b-A c-B	a-A b-B c-C	$\frac{1}{9}(\underline{Z}_{bA} + \underline{Z}_{cA} + \underline{Z}_{aA} + \underline{Z}_{cB} + \underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{bB} + \underline{Z}_{cA} + \underline{Z}_{bC} + \underline{Z}_{cC})$
\underline{Z}_{NN}	\underline{Z}_{Ab} \underline{Z}_{Bc} \underline{Z}_{Ca}	A-A B-B C-C	B-B C-C A-A	C-C A-A B-B	C-C A-A B-B	A-A B-B C-C	B-B C-C A-A	B-B C-C A-A	C-C A-A B-B	A-A B-B C-C	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{AA} + \underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{CC})$
\underline{Z}_{NM}	\underline{Z}_{AB} \underline{Z}_{BC} \underline{Z}_{CA}	A-B B-C C-A	B-C C-A A-B	C-A A-B B-C	C-A A-B B-C	A-B B-C C-A	B-C C-A A-B	B-C C-A A-B	C-A A-B B-C	A-B B-C C-A	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA})$

Weiter gilt :

$$\underline{Z}_{np} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ap} + \underline{Z}_{bp} + \underline{Z}_{cp}) \quad \underline{Z}_{Np} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{Ap} + \underline{Z}_{Bp} + \underline{Z}_{Cp})$$

$$\underline{Z}_{nq} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aq} + \underline{Z}_{bq} + \underline{Z}_{cq}) \quad \underline{Z}_{Nq} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{Aq} + \underline{Z}_{Bq} + \underline{Z}_{Cq})$$

7.1.4 Verdrillung γ



		I	II	III	mittlere Impedanz	Bem.
\underline{Z}_{nN}	\underline{Z}_{aA}	a-A	c-C	b-B	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{aA} + \underline{Z}_{bB} + \underline{Z}_{cC})$	
	\underline{Z}_{bB}	b-B	a-A	c-C		
	\underline{Z}_{cC}	c-C	b-B	a-A		
\underline{Z}_{nM}	\underline{Z}_{aB}	a-B	c-A	b-C	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{bC} + \underline{Z}_{cA})$	werden gleich bei spiegelsymmetrischer Leiteranordnung
	\underline{Z}_{bC}	b-C	a-B	c-A		
	\underline{Z}_{cA}	c-A	b-C	a-B		
\underline{Z}_{mN}	\underline{Z}_{bA}	b-A	a-C	c-B	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{bA} + \underline{Z}_{cB} + \underline{Z}_{aC})$	
	\underline{Z}_{cB}	c-B	b-A	a-C		
	\underline{Z}_{aC}	a-C	c-B	b-A		
\underline{Z}_{np}	\underline{Z}_{ap}	a-p	c-p	b-p	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{ap} + \underline{Z}_{bp} + \underline{Z}_{cp})$ ⁹⁾	\underline{Z}_{nq} analog
	\underline{Z}_{bp}	b-p	a-p	c-p		
	\underline{Z}_{cp}	c-p	b-p	a-p		

Bemerkungen :

$\underline{Z}_{nM} \neq \underline{Z}_{nN}$ (im Gegensatz zur Verdrillung β)

$\underline{Z}_{nM} = \underline{Z}_{mN}$ bei spiegelsymmetrischer Leiteranordnung

Verdrillung γ_2 liefert die gleichen mittleren Impedanzen

⁹⁾ Bei symmetrischer Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen ist $\underline{Z}_{nq} = \underline{Z}_{np}$.

7.2 Modifizierung der Parameter der verdrehten Doppelleitung*

Ausgehend von der nach Leitergrößen und Erdseilgrößen partitionierten Impedanzmatrix wird

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \\ \Delta \underline{u}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{IE} & \underline{Z}_{IE} \\ \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{II} \\ \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \\ \underline{i}_E \end{bmatrix}$$

$$\underline{i}_E = -\underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} \underline{i}_I - \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} \underline{i}_{II}$$

eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II} - \underline{Z}_{IE} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{II} - \underline{Z}_{IE} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} \\ \underline{Z}_{II} - \underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{II} - \underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II} - \Delta \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{II} - \Delta \underline{Z}_{II} \\ \underline{Z}_{II} - \Delta \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{II} - \Delta \underline{Z}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II}^E & \underline{Z}_{II}^E \\ \underline{Z}_{II}^E & \underline{Z}_{II}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \end{bmatrix}$$

Die einzelnen Untermatrizen werden für die verdrehte Doppelleitung mit spiegelsymmetrischer Leiteranordnung und zwei gleichen symmetrisch zu den Leiterseilen angeordneten Erdseilen p und q (Impedanzmatrix nach Gl. (4.2) mit $\underline{Z}_{NN} = \underline{Z}_{nn}$, $\underline{Z}_{NM} = \underline{Z}_{nM}$ und $\underline{Z}_{qq} = \underline{Z}_{pp}$)

$$\underline{Z}_{IE} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} = \underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} = \Delta \underline{Z}_{II} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$\Delta \underline{Z}_{II} = \frac{(\underline{Z}_{np}^2 + \underline{Z}_{nq}^2) \underline{Z}_{pp} - 2 \underline{Z}_{pq} \underline{Z}_{np} \underline{Z}_{nq}}{\underline{Z}_{pp}^2 - \underline{Z}_{pq}^2} = \Delta \underline{Z}_{II}$$

$$\underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} = \underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} = \Delta \underline{Z}_{II} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$\Delta \underline{Z}_{II} = \frac{2 \underline{Z}_{np} \underline{Z}_{nq} \underline{Z}_{pp} - (\underline{Z}_{np}^2 + \underline{Z}_{nq}^2) \underline{Z}_{pq}}{\underline{Z}_{pp}^2 - \underline{Z}_{pq}^2} = \Delta \underline{Z}_{II}$$

Die Transformation in Symmetrische Koordinaten (1,2,0) ergibt:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1^I \\ \Delta \underline{U}_2^I \\ \Delta \underline{U}_0^I \\ \Delta \underline{U}_1^{II} \\ \Delta \underline{U}_2^{II} \\ \Delta \underline{U}_0^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1^I & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{II} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^I & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{II} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^I & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{II} \\ \underline{Z}_1^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{III} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{III} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^I \\ \underline{I}_2^I \\ \underline{I}_0^I \\ \underline{I}_1^{II} \\ \underline{I}_2^{II} \\ \underline{I}_0^{II} \end{bmatrix}$$

mit

$$\underline{Z}_1^I = \underline{Z}_1^{III} = \underline{Z}_{nn} - \Delta \underline{Z}_{I1} - (\underline{Z}_{nm} - \Delta \underline{Z}_{I1}) = \underline{Z}_{nn} - \underline{Z}_{nm}$$

$$\underline{Z}_1^{II} = \underline{Z}_1^{III} = \underline{Z}_{nN} - \Delta \underline{Z}_{II1} - (\underline{Z}_{nM} - \Delta \underline{Z}_{II1}) = \underline{Z}_{nN} - \underline{Z}_{nM}$$

$$\underline{Z}_0^I = \underline{Z}_0^{III} = \underline{Z}_{nn} - \Delta \underline{Z}_{I1} + 2(\underline{Z}_{nm} - \Delta \underline{Z}_{I1}) = \underline{Z}_{nn} + 2\underline{Z}_{nm} - 3\Delta \underline{Z}_{I1}$$

$$\underline{Z}_0^{II} = \underline{Z}_0^{III} = \underline{Z}_{nN} - \Delta \underline{Z}_{II1} + 2(\underline{Z}_{nM} - \Delta \underline{Z}_{II1}) = \underline{Z}_{nN} + 2\underline{Z}_{nM} - 3\Delta \underline{Z}_{II1}$$

$$\underline{Z}_1^I + \underline{Z}_1^{II} = \underline{Z}_1^{III} + \underline{Z}_1^{III} = \underline{Z}_{nn} - \underline{Z}_{nm} + \underline{Z}_{nN} - \underline{Z}_{nM}$$

$$\underline{Z}_0^I + \underline{Z}_0^{II} = \underline{Z}_0^{III} + \underline{Z}_0^{III} = \underline{Z}_{nn} + 2\underline{Z}_{nm} + \underline{Z}_{nN} + 2\underline{Z}_{nM} - 3(\Delta \underline{Z}_{I1} + \Delta \underline{Z}_{II1})$$

dabei ist

$$\begin{aligned} 3(\Delta \underline{Z}_{I1} + \Delta \underline{Z}_{II1}) &= \frac{(\underline{Z}_{np}^2 + 2\underline{Z}_{np}\underline{Z}_{nq} + \underline{Z}_{nq}^2)\underline{Z}_{pp} - (\underline{Z}_{np}^2 + 2\underline{Z}_{np}\underline{Z}_{nq} + \underline{Z}_{nq}^2)\underline{Z}_{pq}}{\underline{Z}_{pp} - \underline{Z}_{pq}} \\ &= \frac{(\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_{nq})^2(\underline{Z}_{pp} - \underline{Z}_{pq})}{(\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq})(\underline{Z}_{pp} - \underline{Z}_{pq})} = \frac{(\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_{nq})^2}{(\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq})} \end{aligned}$$

und

$$\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_{nq} = 2R_E' + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{\delta}{d_{np}} + \ln \frac{\delta}{d_{nq}} \right) = 2 \left(R_E' + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{\sqrt{d_{np}d_{nq}}} \right) = 2\underline{Z}_{npq}$$

7.3 CARSONSche Reihen*

$$P = \frac{\pi}{8} - b_1 x \cos \vartheta + b_2 [(c_2 - \ln x)x^2 \cos 2\vartheta + x^2 \vartheta \sin 2\vartheta] + b_3 x^3 \cos 3\vartheta - d_4 x^4 \cos 4\vartheta \\ - b_5 x^5 \cos 5\vartheta + b_6 [(c_6 - \ln x)x^6 \cos 6\vartheta + x^6 \vartheta \sin 6\vartheta] + b_7 x^7 \cos 7\vartheta - d_8 x^8 \cos 8\vartheta \\ - \dots$$

$$Q = \frac{1}{2}(k - \ln x) + b_1 x \cos \vartheta - d_2 x^2 \cos 2\vartheta + b_3 x^3 \cos 3\vartheta - b_4 [(c_4 - \ln x)x^4 \cos 4\vartheta + x^4 \vartheta \sin 4\vartheta] \\ + b_5 x^5 \cos 5\vartheta - d_6 x^6 \cos 6\vartheta + b_7 x^7 \cos 7\vartheta - b_8 [(c_8 - \ln x)x^8 \cos 8\vartheta + x^8 \vartheta \sin 8\vartheta] \text{ mit} \\ + \dots$$

$$x = 2h_i \sqrt{\mu \kappa \omega} \quad \text{und } \vartheta = 0$$

für die Selbstimpedanz und

$$x = d_{ik}^i \sqrt{\mu \kappa \omega}$$

für die Gegenimpedanz.

Die Koeffizienten berechnen sich wie folgt

$$b_i = b_{i-2} \frac{\text{sign}}{i(i+2)} \quad \text{mit sign} = \begin{matrix} +1 & i = 1, 2, 3, 4 \dots \\ -1 & i = 5, 6, 7, 8 \dots \end{matrix} \quad \text{wechselnd nach jeweils 4 Gliedern}$$

$$c_i = c_{i-2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+2}$$

$$d_i = \frac{\pi}{4} b_i$$

$$k = \frac{1}{2} + \ln 2 - C \quad C = 0,57722 \quad \text{EULERSche Konstante}$$

mit den Startwerten

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} \quad b_2 = \frac{1}{16} \quad c_2 = \frac{5}{4} - C + \ln 2 = 1,3659315$$

7.4 Daten von Freileitungsseilen

Nennquerschnitt mm ²	Sollquerschnitt mm ²	Querschnitts- verhältniszahl Al/St	Seildurch- messer mm	Gewicht kg / km	Gleichstrom- Wider- stands-belag Ω / km	Dauerstrom- belastbarkeit A
16/ 2,5	17,8	6	5,4	62	1,8793	105
25/ 4	27,8	6	6,8	97	1,2028	140
35/ 6	40,1	6	8,1	140	0,8353	170
44/32	75,7	1,4	11,2	373	0,6573	-
50/8	56,3	6	9,6	196	0,5946	210
50/30	81,0	1,7	11,7	378	0,5644	-
70/12	81,3	6	11,7	284	0,4130	290
95/15	109,7	6	13,6	383	0,3058	350
95/55	152,8	1,7	16,0	714	0,2992	-
105/75	181,2	1,4	17,5	899	0,2736	-
120/20	141,4	6	15,5	494	0,2374	410
120/70	193,4	1,7	18,0	904	0,2364	-
125/30	157,8	4,3	16,3	590	0,2259	425
150/25	173,1	6	17,1	604	0,1939	470
170/40	211,9	4,3	18,9	794	0,1682	520
185/30	213,6	6	19,0	744	0,1571	535
210/35	243,2	6	20,3	848	0,1380	590
210/50	261,5	4,3	21,0	979	0,1363	610
230/30	260,8	7,7	21,0	874	0,1249	630
240/40	282,5	6	21,8	985	0,1188	645
265/35	297,8	7,7	22,4	998	0,1094	680
300/50	353,7	6	24,5	1233	0,0949	740
305/40	344,1	7,7	24,1	1155	0,0949	740
340/30	369,1	11,3	25,0	1174	0,0851	790
380/50	431,2	7,7	27,0	1448	0,0757	840
385/35	420,1	11,3	26,7	1336	0,0748	850
435/55	490,6	7,7	28,8	1647	0,0666	900
450/40	488,2	11,3	28,7	1553	0,0644	920
490/65	553,8	7,7	30,6	1860	0,0590	960
495/35	528,4	14,5	29,9	1636	0,0584	985
510/45	555,8	11,3	30,7	1770	0,0566	995
550/70	620,9	7,7	32,4	2085	0,0526	1020
560/50	611,2	11,3	32,2	1943	0,0514	1040
570/40	610,7	14,5	32,2	1889	0,0506	1050
650/45	698,8	14,5	34,4	2163	0,0442	1120
680/85	764,5	7,7	36,0	2564	0,0426	1150
1045/45	1090,9	23,1	43,0	3249	0,0277	1580

Tabelle 7.1: Daten von Freileitungen nach DIN 48 204

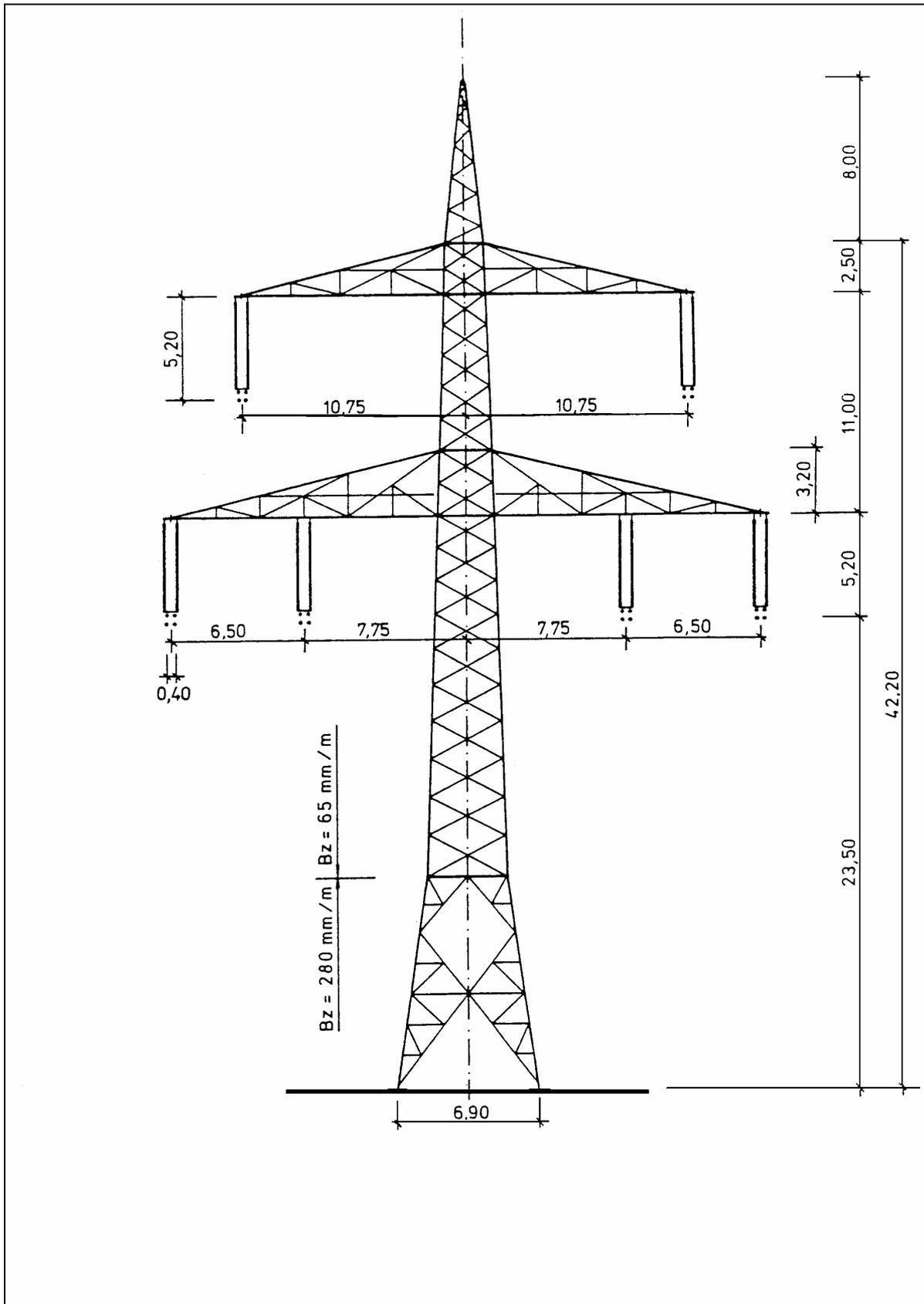


Bild 7.1: Tragmast 380-kV-Leitung mit Bemaßung (Mastgestänge D6)

7.5 Elektrische Daten von Freileitungen (Richtwerte)

U_n / kV	n	Z_w / Ω	P_{nat} / MW	I'_C / A/km	Q'_C / kVar/km	I'_{CE} / A/km
10	1			0,02	0,35	0,03
20	1			0,04	1,4	0,06
30	1			0,06	3,1	0,1
110	1	400	30	0,18	34	0,3
220	2	280	170	0,5	190	-
380	4	230	620	1	650	-
750		260	2100	1,7	2100	-

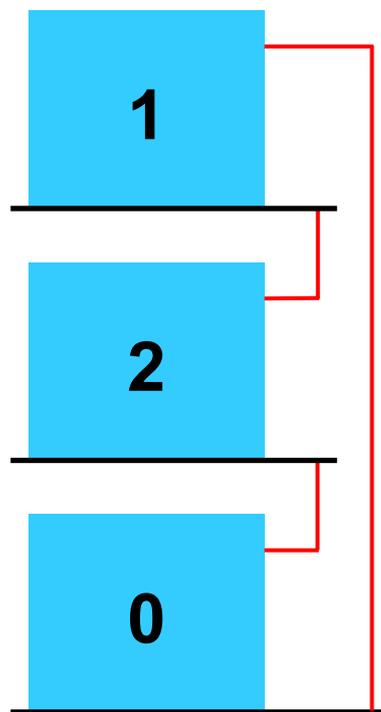
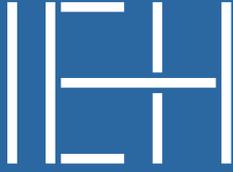
U_n / kV	n	R'_1 / Ω /km	X'_1 / Ω /km	C'_1 / nF/km	C'_0 / nF/km
1...30	1	0,6...0,5	0,3...0,35	12...10	4,5
110	1	0,2...0,15	0,4	9	4
220	2	0,08	0,32	11,5	6,5
380	3/4	0,03	0,25	13	7
750	4	0,01	0,29	12,5	?

Spannungsebene	R_0 / R_1	X_0 / X_1	C_0 / C_1
NS mit SPE	2	3	0,45
HS EL	2...8	3...2 ¹⁾	
DL	4...9	6...4	0,4...0,5 ²⁾

Tabelle 7.2: Richtwerte von Freileitungsparametern (bei Doppelleitungen für ein System); n Anzahl der Bündelleiter; ¹⁾ große Werte für Leitungen ohne Erdseile, kleine Werte für Leitungen mit 2 Al/St Erdseilen; ²⁾ größere Werte für höheres U_n

Mastbild	Leiterseile Al/St	Erdseil Al/St		1 System Ω / km	2 Systeme Ω / km
Einebenenmast 110 kV	1 x 240/40	1 x 120/21	Z'_1	0,121+j0,380	0,121+j0,380
			Z'_0	0,278+j1,097	0,435+j1,606
Donaumast 110 kV	1 x 240/40	1 x 120/21	Z'_1	0,121+j0,383	0,121+j0,383
			Z'_0	0,276+j1,105	0,430+j1,644
Donaumast 220 kV	2 x 240/40	1 x 150/25	Z'_1	0,060+j0,303	0,060+j0,303
			Z'_0	0,191+j0,989	0,321+j1,503
Donaumast 380 kV	4 x 240/40	1 x 240/40	Z'_1	0,030+j0,266	0,030+j0,266
			Z'_0	0,136+j0,918	0,241+j1,400

Tabelle 7.3: Impedanzen von Freileitungen



Vorlesung Elektrische Energieversorgung II

Skript Fehler

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

Inhaltsverzeichnis

1 Fehlerarten, Fehlerhäufigkeit, Fehlerwirkungen	1
2 Fehlerberechnung mit Hilfe der symmetrischen Komponenten	4
2.1 Allgemeine Vorgehensweise	4
2.2 Einfach-Querfehler	8
2.2.1 Dreipoliger Erdkurzschluß	8
2.2.2 Dreipoliger Kurzschluß	10
2.2.3 Erdkurzschluß	11
2.2.4 Zweipoliger Erdkurzschluß	15
2.2.5 Zweipoliger Kurzschluß ohne Erdberührung	17
2.2.6 Vergleich der Kurzschlußströme	19
2.2.7 Berücksichtigung von Fehlerimpedanzen	20
2.2.8 Überlagerungsverfahren	22
2.2.9 Verfahren der Ersatzspannung an der Kurzschlußstelle	25
2.3 Einfach-Längsfehler	27
2.3.1 Dreipolige Unterbrechung	27
2.3.2 Einpolige Unterbrechung	28
2.3.3 Zweipolige Unterbrechung	30
2.3.4 Berücksichtigung von Fehleradmittanzen	32
2.3.5 Überlagerungsverfahren	33
2.4 Mehrfach-Querfehler*	35
2.4.1 Verallgemeinerung der Fehlerbedingungen	35
2.4.2 Doppelerdkurzschluß	37
3 Fehlerberechnung mit Hilfe der Diagonal($\alpha\beta 0$)-Komponenten*	41
4 Fehlerberechnung mit Hilfe von Raumzeigern*	43
5 Anhang: Transformationsbeziehungen und Fehlerbedingungen	45
5.1 Transformationsbeziehungen in bezugskomponenteninvarianter Form	46
5.2 Transformationsbeziehungen in leistungsinvarianter Form	46
5.3 Fehlerbedingungen für die symmetrischen Komponenten	47
5.4 Fehlerströme und -spannungen in symmetrischen Komponenten	48
5.5 Fehlerbedingungen für die Diagonal($\alpha\beta 0$)-Komponenten	50
5.6 Fehlerströme und -spannungen in Diagonal-Komponenten	51
5.7 Querfehler mit Raumzeigern in ruhenden Koordinaten	52

Hinweis: Das Skript ersetzt nicht die Vorlesung und umgekehrt. Im Skript sind einige Ausführungen, insbesondere mathematische Ableitungen ausführlicher dargestellt, während in der Vorlesung mehr Wert auf das Verständnis gelegt wird.

1 Fehlerarten, Fehlerhäufigkeit, Fehlerwirkungen

Fehler in Netzen der elektrischen Energieversorgung sind nicht völlig vermeidbar. Sie müssen bei der Netzplanung und im Netzbetrieb einkalkuliert werden. Wir unterscheiden nach der Lage des Fehlers im Netz zwischen Quer- und Längsfehlern (Bild 1.1).

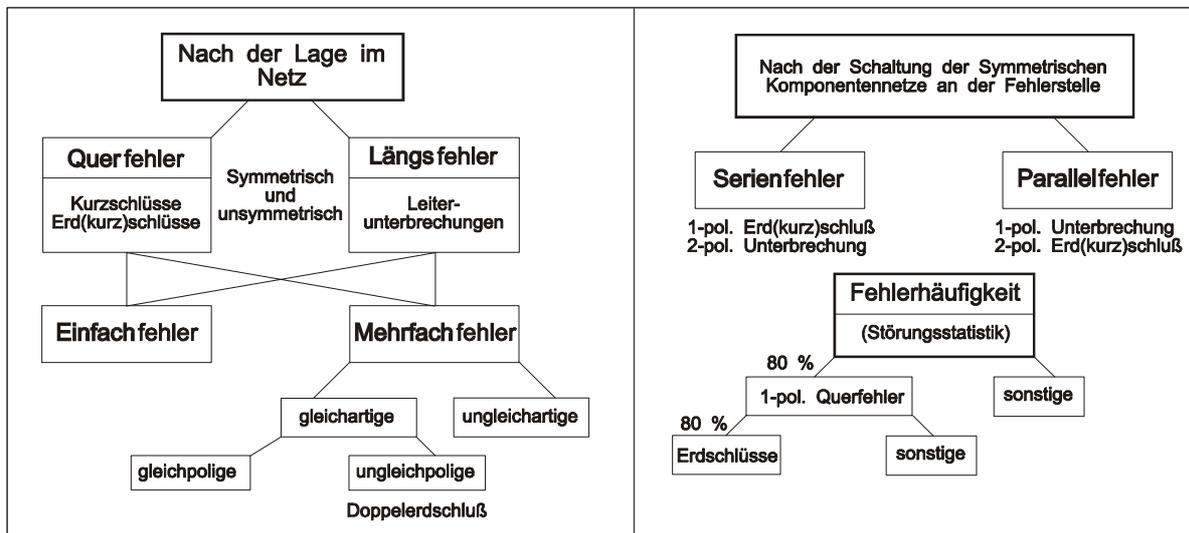


Bild 1.1: Klassifizierung und Häufigkeit der Fehlerarten

Querfehler sind ungewollte Verbindungen eines oder mehrerer Leiter gegen Erde oder/und mehrerer Leiter untereinander. Ist die Verbindung widerstandslos, spricht man vom satten *Kurzschluß* (KS). Bei der Verbindung eines Leiters gegen Erde unterscheidet man je nach Größe des auftretenden Stromes an der Fehlerstelle zwischen (1-poligem) *Erdkurzschluß* (EK) oder *Erdschluß* (ES). Die Ursachen der Querfehler sind: Durch- oder Überschlag der Isolation infolge Alterung, Verschmutzung oder falscher Bemessung, Fremdeinwirkung (Vogelflug, Bäume, Äste, mechanische Beschädigung von Kabeln, versehentliches Schalten auf geerdete Anlagenteile, Blitzeinschlag u.a.).

Längsfehler bestehen in einer ungewollten merklichen Erhöhung des Widerstandes in einem oder mehreren Leitern. Im Extremfall liegt eine *Unterbrechung* (UB) vor. Schalthandlungen können gewollte oder ungewollte Unterbrechungen (nichtselektives Abschalten, Abschmelzen von Sicherungen nicht in allen drei Leitern, Versagen einzelner Schalterpole) darstellen.

Sowohl Längs- als auch Querfehler können *symmetrisch* als auch *unsymmetrisch* vorkommen. Symmetrische Fehler betreffen immer alle drei Leiter gleichermaßen und simultan. Bei mehrpoligen Kurzschlüssen (Bild 1.2) muß man noch zwischen drei- und zweipoligen Kurzschlüssen mit und ohne Erdberührung unterscheiden. Unsymmetrische Kurzschlüsse mit Erdberührung haben stets Teilkurzschlußströme über Erde zur Folge, die *Beeinflussungs-* und *Berührungsspannungen* verursachen. Für die Beanspruchung der Anlagenteile und Betriebsmittel - einschließlich der Schalter, die auch Kurzschlußströme unterbrechen können müssen - sind die *Kurzschlußströme* an der Kurzschlußstelle bzw. die *Teilkurzschlußströme* in den Leitern ausschlaggebend.

Weiterhin können Quer- und Längsfehler als *Einfach-* oder *Mehrfachfehler* auftreten. Mehrfachfehler treten an verschiedenen Netzpunkten auf und werden nach Bild 1.1 weiter in *gleichartige* und *ungleichartige* Mehrfachfehler unterteilt. Gleichartige Mehrfachfehler lassen sich noch in *gleichpolige* und *ungleichpolige* Mehrfachfehler unterteilen. Der nicht seltene Doppelerdschluß (s. Bild 1.2) ist ein Beispiel für einen

ungleichpoligen, gleichartigen Mehrfach-Querfehler. Er entsteht als Folge der Spannungsüberhöhung in den beiden gesunden Leitern eines erdschlußbehafteten Netzes, meist in erheblicher Entfernung von der ersten Erdschlußstelle (s. Skript Sternpunktbehandlung). Symmetrische Mehrfachfehler (dreipolige Kurzschlüsse und dreipolige Unterbrechungen) sind stets gleichpolige Mehrfachfehler.

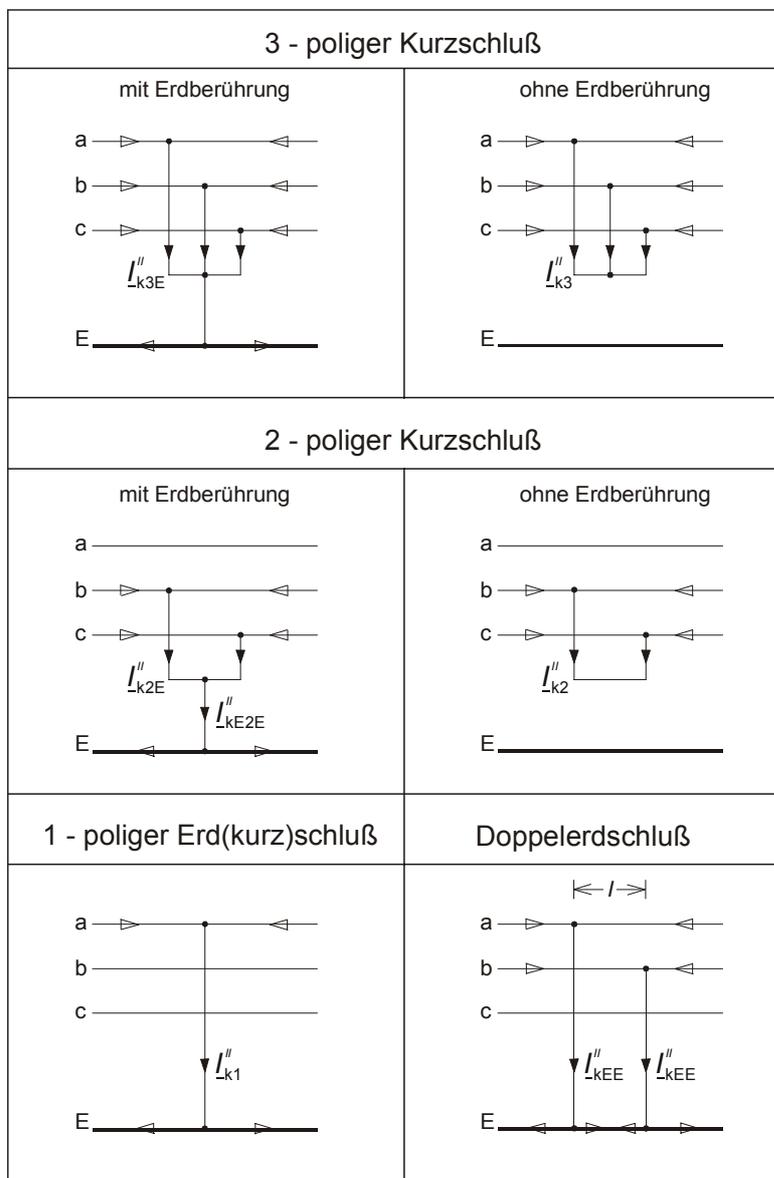


Bild 1.2: Kurzschluß- (→) und Teilkurzschlußströme (→) für die einzelnen Kurzschlußarten

Wie wir bei der Behandlung der unsymmetrischen Fehler mit symmetrischen Komponenten sehen werden, führen die Fehlerbedingungen für alle Fehlerfälle entweder auf eine Serien- oder Parallelschaltung der Komponentennetze (Mit-, Gegen- und Nullsystem) an der Fehlerstelle. Danach unterscheidet man zwischen *Serien-* und *Parallelfehlern*.

Fehler in Elektroenergieversorgungsnetzen werden in der *Störungsstatistik* der VDEW erfaßt. Danach ist der häufigste Fehler der 1-polige Erd(kurz)schluß, der wiederum in etwa 80% aller Fälle als *Lichtbogenfehler*, insbesondere in Freileitungsnetzen vorkommt. Lichtbogenfehler an Luftisolierungen können, wenn sie nicht von selbst wieder verlöschen, durch eine sog. Kurzunterbrechung (KU) oder Erdschlußkompensation zum Verlöschen gebracht werden. In Mittelspannungsnetzen geringer Ausdehnung sind Durchbrüche oder Überschläge an Luftisolierungen meist selbstheilend (leitende Fremdschichten verbrennen oder trocknen unter dem Einfluß des

Lichtbogens, Fremdkörper verbrennen), so daß nach Verlöschen des Lichtbogens wieder ein fehlerfreies Netz vorliegt.

Einen Überblick über den Einfluß der symmetrischen und unsymmetrischen Kurzschlüsse auf die Netzvorgänge und netztechnischen Maßnahmen gibt das Bild 1.3. Aus ihm lassen sich die Zielstellungen der Kurzschlußstromberechnung - die Einhaltung zulässiger Werte für bestimmte Beanspruchungsgrößen - ersehen. Es ist auch ersichtlich, daß alle Beanspruchungsgrößen auf die entsprechenden *Anfangs-Kurzschlußwechselströme*, gekennzeichnet durch zwei Striche im oberen Index, mit Faktoren oder Beiwerte zurückgeführt sind. Der mit I_{CE} bezeichnete *kapazitive Erdschlußstrom* und der mit I_R bezeichnete *Reststrom* sind Sonderfälle des einpoligen Anfangs-Kurzschlußwechselstromes I''_{k1} , (siehe Skript Sternpunktbehandlung).

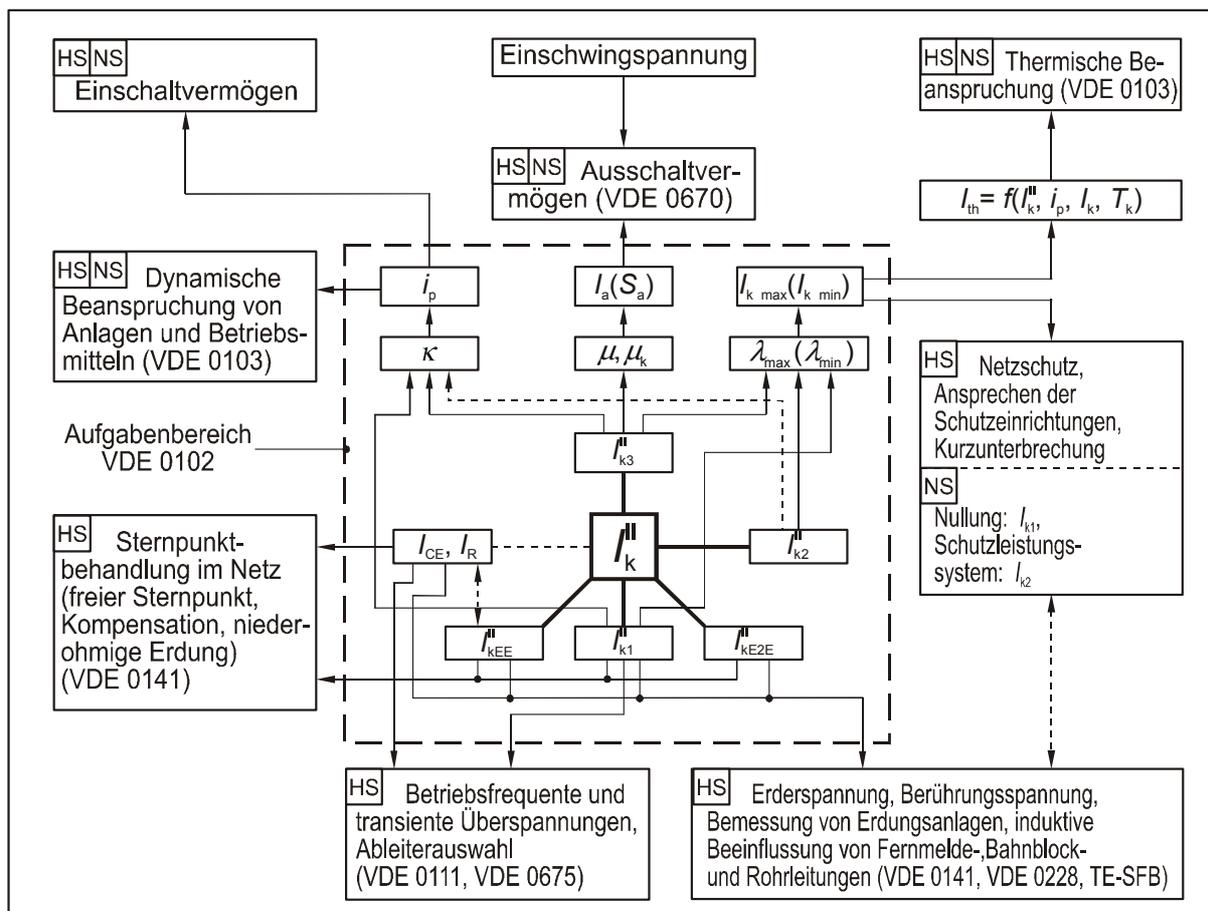


Bild 1.3: Bedeutung der Kurzschlussströme. HS: Hochspannungsnetze, NS: Niederspannungsnetze

Die Zusammenhänge zwischen I''_k und den charakteristischen Kurzschlußgrößen werden in den in Bild 1.3 zitierten Vorschriften genauer beschrieben. Die Zurückführung der charakteristischen Kurzschlußgrößen mittels Faktoren auf I''_k hat sich in der Praxis der Netzberechnung bestens bewährt, weil die Anfangs-Kurzschlußwechselströme relativ einfach mit Hilfe der komplexen Rechnung ermittelt werden können. Die 50-Hz-Anteile (Wechselgrößen) der Ströme und Spannungen bei unsymmetrischen Fehlern werden zweckmäßigerweise mit Hilfe der symmetrischen Komponenten berechnet.

2 Fehlerberechnung mit Hilfe der symmetrischen Komponenten

2.1 Allgemeine Vorgehensweise

Die Methode zur Fehlerberechnung mit symmetrischen Komponenten ist für alle Fehlerarten gleich. Sie besteht aus folgenden Schritten:

1. Aufstellen der Ersatzschaltungen für die Komponentennetze: Mit-, Gegen- und Nullsystem für den *fehlerfreien* Zustand. Dabei werden symmetrisch aufgebaute Betriebsmittel (exakt verdrehte Leitungen) und symmetrische Belastung vorausgesetzt, so daß die Komponentennetze im fehlerfreien Zustand nicht gekoppelt sind. Das Mitsystem ist mit dem Leiterersatzschaltbild (Strangersatzschaltbild) identisch. Für die symmetrischen Fehler (dreipoliger Kurzschluß und dreipolige Unterbrechung) genügt die Betrachtung des Mitsystems.
2. Formulierung der Strom-Spannungsbeziehungen (Fehlerbedingungen) an der Fehlerstelle (F) zunächst für die Leitergrößen (Originalgrößen) und anschließende Transformation in symmetrische Komponenten. Die Fehlerbedingungen in symmetrischen Komponenten kann man Tabellen entnehmen (s. Abschnitt 5.3).
3. Schaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle entsprechend den Bedingungen unter 2.
4. Berechnung der Spannungen \underline{U}_1^F , \underline{U}_2^F , \underline{U}_0^F und der Ströme \underline{I}_1^F , \underline{I}_2^F , \underline{I}_0^F an der Fehlerstelle und Rücktransformation in Originalgrößen, wobei die Fehlerbedingungen zur Kontrolle dienen können und sollten.
5. Berechnung weiterer Spannungen und Ströme zunächst im Bereich der symmetrischen Komponenten (einpolige Rechnung !) und dann als Leitergrößen.

Für Einfach-Fehler sind an der Fehlerstelle 6 Größen (3 Spannungen und 3 Ströme) unbekannt. Drei der erforderlichen 6 Gleichungen ergeben sich unabhängig von der Fehlerart aus den allgemeinen Strom-Spannungsbeziehungen an den Zweipolen der Komponentennetze von der Fehlerstelle aus gesehen. Man nennt sie deshalb auch *Fehlertorgleichungen*.

Fehlertorgleichungen

Die Fehlertorgleichungen können nach den Regeln der Zweipoltheorie als *Spannungsgleichungen*:

$$\begin{cases} \underline{U}_1^F = -\underline{Z}_1 \underline{I}_1^F + \underline{U}_{11}^F \\ \underline{U}_2^F = -\underline{Z}_2 \underline{I}_2^F \\ \underline{U}_0^F = -\underline{Z}_0 \underline{I}_0^F \end{cases} \quad (2.1)$$

oder als äquivalente *Stromgleichungen*

$$\begin{cases} \underline{I}_1^F = -\underline{Y}_1 \underline{U}_1^F + \underline{I}_{1k}^F \\ \underline{I}_2^F = -\underline{Y}_2 \underline{U}_2^F \\ \underline{I}_0^F = -\underline{Y}_0 \underline{U}_0^F \end{cases} \quad (2.2)$$

formuliert werden. Die zugehörigen Ersatzschaltungen zeigt Bild 2.1. Das Gegen- und Nullsystem sind stets passiv. Im Mitsystem tritt entweder die *Leerlaufspannung*

\underline{U}_{11}^F oder der *Kurzschlussstrom* \underline{I}_{1k}^F an der Fehlerstelle als Quellengröße auf. Beide Quellengrößen lassen sich bekanntlich ineinander umrechnen:

$$\underline{U}_{11}^F = \underline{Z}_1 \underline{I}_{1k}^F \tag{2.3}$$

$$\underline{I}_{1k}^F = \underline{Y}_1 \underline{U}_{11}^F \tag{2.4}$$

Die Impedanzen $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_0$ sind die *Innen- oder Torimpedanzen* des Mit- Gegen- und Nullsystems von der Fehlerstelle aus gesehen. Die *Toradmittanzen* $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2$ und \underline{Y}_0 sind die entsprechenden Kehrwerte der Torimpedanzen. Die Wahl der Ersatzschaltung für die symmetrischen Komponenten ist zwar prinzipiell beliebig, wir werden aber später sehen, daß sich *Serienfehler* einfacher mit den Impedanz-Ersatzschaltungen (Bilder 2.1a und 2.2a) und *Parallelfehler* einfacher mit den Admittanz-Ersatzschaltungen (Bilder 2.1b und 2.2b) behandeln lassen.

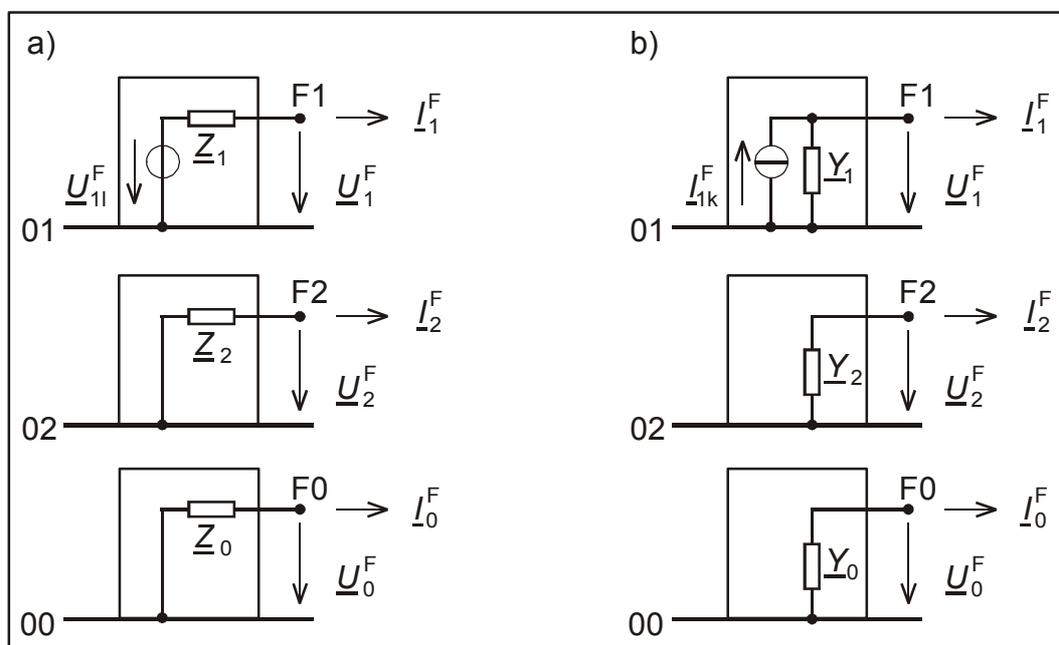


Bild 2.1: Zweipol-Ersatzschaltungen der Komponentennetze an der Fehlerstelle

a) Impedanz-Ersatzschaltungen mit Spannungsquelle im Mitsystem

b) Admittanz-Ersatzschaltungen mit Stromquelle im Mitsystem

Die Gleichungen Gl. (2.1) bis Gl. (2.4) gelten allgemein sowohl für Quer- als auch für Längsfehler¹⁾. Es ist aber zu beachten, daß die Fehlertore bei den Querfehlern jeweils zwischen dem Fehlerknoten und dem Bezugsknoten (s. Bild 2.1) und bei den Längsfehlern jeweils zwischen dem Fehlerknoten und einem durch die Unterbrechung entstehenden weiteren Knoten F' liegen (s. Bild 2.2). Dementsprechend ergeben sich auch jeweils andere Werte für die Torimpedanzen oder Toradmittanzen und die Quellengrößen.

¹⁾ In der Literatur werden die Spannungen an der Fehlerstelle gelegentlich mit $\Delta \underline{U}_{11}^F, \Delta \underline{U}_{22}^F$ und $\Delta \underline{U}_{00}^F$ bezeichnet. Für eine systematische Behandlung beider Fehlerarten wollen wir aber die Fehlergrößen gleich bezeichnen. Das Symbol Δ wird zudem später für die Abweichungen vom stationären Zustand benötigt.

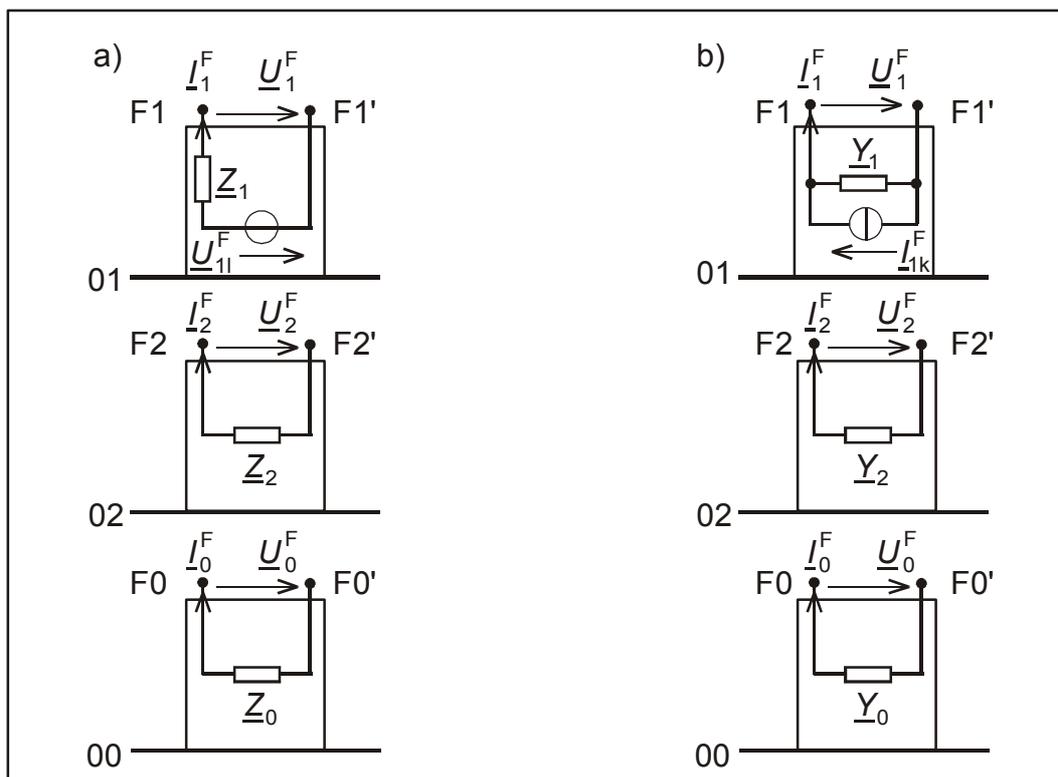


Bild 2.2: Zweipol-Ersatzschaltungen der Komponentennetze an der Fehlerstelle für Längsfehler
 a) Impedanz-Ersatzschaltungen mit Spannungsquelle im Mitsystem
 b) Admittanz-Ersatzschaltungen mit Stromquelle im Mitsystem

Die Quellengrößen des Mitsystems werden nach den Regeln der Zweipoltheorie ermittelt. Das Bild 2.3 zeigt die Schaltzustände des Mitsystems für die Bestimmung der Quellengrößen \underline{U}_{11}^F und \underline{I}_{1k}^F für die Quer- und Längsfehler.

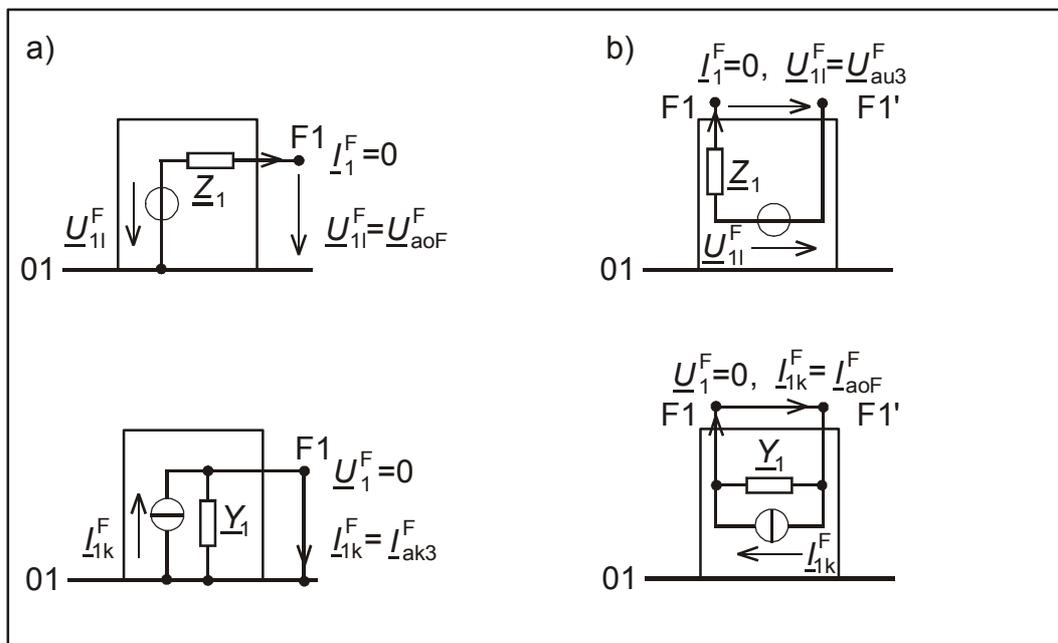


Bild 2.3: Schaltzustände des Mitsystems zur Bestimmung der Quellengrößen
 a) Querfehler
 b) Längsfehler

Bei den Querfehlern ist die Leerlaufspannung \underline{U}_{11}^F identisch mit der Spannung \underline{U}_{aoF}^F des Leiters a gegen Erde im fehlerfreien Zustand (Index oF) und \underline{I}_{1k}^F identisch mit

dem Kurzschlußstrom I_{ak3}^F im Leiter a für *dreipoligen* Kurzschluß an der Fehlerstelle (zur Erinnerung: der Leiter a ist der Bezugsleiter für die symmetrischen Komponenten).

Bei Längsfehlern ist U_{1l}^F identisch mit der Spannung U_{au3}^F des Leiters a bei dreipoliger Unterbrechung an der Fehlerstelle und I_{1k}^F identisch mit dem Strom I_{aof}^F im Leiter a im fehlerfreien Zustand (geschlossene Unterbrechungsstellen).

Fehlerbedingungen

Jeder Fehler ist durch bestimmte Strom-Spannungsbedingungen, die *Fehlerbedingungen*, an der Fehlerstelle gekennzeichnet. Die Fehlerbedingungen liefern die restlichen 3 Gleichungen zur Bestimmung der 6 Unbekannten an der Fehlerstelle. Es sind also stets *drei* Fehlerbedingungen zunächst für die Originalgrößen zu formulieren und in symmetrische Komponenten zu transformieren. Bei dreipoligen Erdkurzschlüssen beziehen sich die Fehlerbedingungen nur auf die Spannungen und bei dreipoligen Unterbrechungen nur auf die Ströme. Dagegen betreffen die Fehlerbedingungen bei unsymmetrischen Fehlern immer Spannungen *und* Ströme.

Aus den Fehlerbedingungen lassen sich Bedingungen für die Schaltung der symmetrischen Komponenten an der Fehlerstelle ableiten. Bei symmetrischen Fehlern bleiben dabei die Komponentennetze entkoppelt, während sie bei allen unsymmetrischen Fehlern in Reihe (in Serie) oder parallel geschaltet werden. Nach der Schaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle spricht man auch von *Serien-* und *Parallelfehlern*.

Bei Einfachfehlern kann man die unsymmetrischen Fehler zwar prinzipiell beliebig in die Leiter legen. Für den einfachsten Rechenweg empfiehlt es sich aber, die Fehler symmetrisch zum Leiter a zu legen, da dieser der Bezugsleiter für die symmetrischen Komponenten ist (zur Erinnerung: \underline{G}_1 steht für \underline{G}_{a1}). Demzufolge sollte der 1-polige Erd(kurz)schluß in den Leiter a, der zweipolige Kurzschluß aber zwischen die Leiter b und c gelegt werden. Für die Unterbrechungen gilt dies sinngemäß. Die Kurzschlüsse in Bild 1.2 sind bereits nach dieser Maßgabe eingezeichnet. Man nennt Fehler, die symmetrisch zum Bezugsleiter a liegen auch *symmetrische*, unsymmetrische Fehler oder *Hauptfehler*. Nur für die Hauptfehler ist die Zusammenschaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle ohne phasendrehende Übertrager möglich (siehe Abschnitt 2.4).

Bei ungleichpoligen Mehrfachfehlern kann nur noch an *einer* Fehlerstelle die Fehlerlage symmetrisch zum Bezugsleiter angenommen werden, so daß man an der oder den anderen Fehlerstellen stets phasendrehende Übertrager in die Zusammenschaltung der Komponentennetze bekommt. Die Verhältnisse werden dadurch bereits bei Doppelfehlern, wie dem Doppelerdkurzschluß, sehr unübersichtlich. Für Handrechnungen sind dann die $\alpha\beta 0$ -Komponenten (s. Kapitel 3) mit bestimmten Vereinfachungen besser geeignet.

2.2 Einfach-Querfehler

Einfach-Querfehler sind der (einpolige) Erdschluß, Erdkurzschluß, der zweipolige Kurzschluß mit und ohne Erdberührung und der dreipolige Kurzschluß mit und ohne Erdberührung. Der Unterschied zwischen Erdschluß und Erdkurzschluß bezieht sich auf die Größenordnung des Stromes an der Kurzschlußstelle und nicht auf die Bedingungen an der Kurzschlußstelle, denn in beiden Fällen liegt gleichermaßen eine Verbindung zwischen einem Leiter und der Erde vor. Die Größenordnung des Stromes an der Fehlerstelle wird durch die Art der Sternpunktterdung der Transformatoren bestimmt, die die resultierende Impedanz des Nullsystems maßgebend beeinflusst (s. Skript Sternpunktbehandlung). In Netzen mit freien Sternpunkten bezeichnet man den einpoligen Fehlerstrom als kapazitiven Erdschlußstrom I_{CE} und in Netzen mit Erdschlußkompensation als Reststrom I_R , um deutlich zu machen, daß es sich nicht um kurzschlußartige Fehlerströme handelt. Kurzschlußströme, d.h. Ströme, die deutlich höher als der Betriebsstrom sind, treten bei einpoligem Fehler nur in niederohmig geerdeten Netzen auf. Man spricht deshalb auch vom Erdkurzschluß (im Gegensatz zum Erdschluß bei den beiden anderen Arten der Sternpunktterdung) und bezeichnet den Fehlerstrom als Erdkurzschlußstrom I''_{k1} . In der folgenden Berechnung wollen wir uns auf den Erdkurzschluß beschränken. Der Erdschluß kann als Sonderfall des Erdkurzschlusses mit entsprechender Nullimpedanz angesehen werden. Der dreipolige Kurzschluß bezieht sich nur auf das Mitsystem, das mit der Ersatzschaltung des Leiters a identisch ist.

2.2.1 Dreipoliger Erdkurzschluß

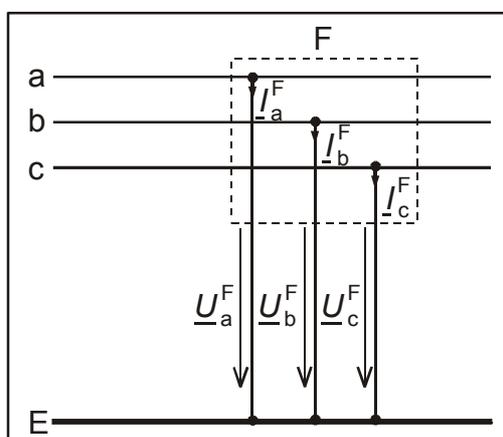


Bild 2.4: Fehlerbedingungen für dreipoligen Erdkurzschluß

Die Fehlerbedingungen sind trivial und lauten nach Bild 2.4:

$$\begin{cases} \underline{U}_a^F = 0 \\ \underline{U}_b^F = 0 \\ \underline{U}_c^F = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Damit gilt auch für die Spannungen der symmetrischen Komponentennetze an der Fehlerstelle:

$$\begin{cases} \underline{U}_1^F = 0 \\ \underline{U}_2^F = 0 \\ \underline{U}_0^F = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Gl. (2.6) besagt, daß die Komponentennetze, jedes für sich an der Fehlerstelle kurz-zuschließen sind (Bild 2.5). Eine Kopplung der Komponentennetze entsteht nicht. Damit bleiben das passive Gegen- und Nullsystem stromlos und spielen somit beim dreipoligen Erdkurzschluß keine Rolle.

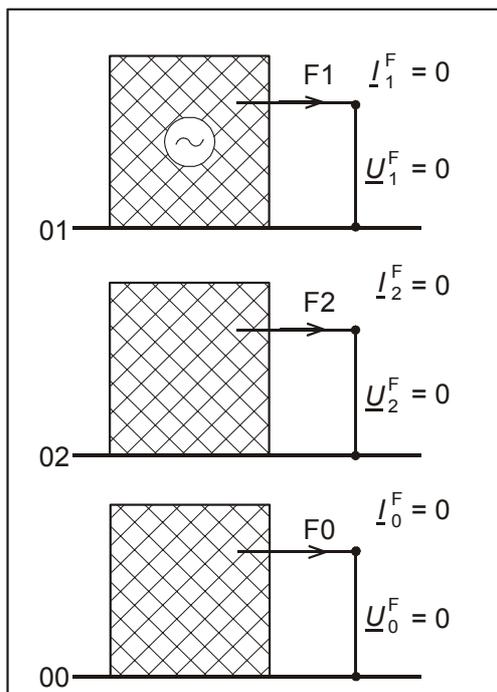


Bild 2.5: Schaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle für 3-poligen Erdkurzschluß

Für den Kurzschlußstrom des Mitsystems erhält man aus Bild 2.5 bei Verwendung der Spannungsquellen-Ersatzschaltung (Bild 2.1a):

$$\underline{I}_1^F = \frac{\underline{U}_{11}^F}{\underline{Z}_1} \tag{2.7}$$

Die Rücktransformation ergibt mit $\underline{I}_2^F = \underline{I}_0^F = 0$:

$$\begin{cases} \underline{I}_a^F = \underline{I}_1^F = \underline{I}_{k3}'' \\ \underline{I}_b^F = \underline{a}^2 \underline{I}_{k3}'' \\ \underline{I}_c^F = \underline{a} \underline{I}_{k3}'' \end{cases} \tag{2.8}$$

Zum gleichen Ergebnis wären wir auch sofort mit dem Leitersatzschaltbild gekommen.

Die Verwendung der Stromquellen-Ersatzschaltung für das Mitsystem (Bild 2.1b) macht nochmals deutlich, daß der Quellenstrom des Mitsystems \underline{I}_{1k}^F mit dem dreipoligen Erdkurzschlußstrom im Leiter a identisch ist.

2.2.2 Dreipoliger Kurzschluß

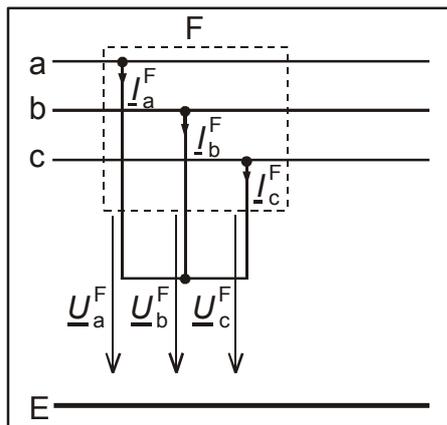


Bild 2.6: Fehlerbedingungen für dreipoligen Kurzschluß ohne Erdberührung

Als Fehlerbedingungen erhält man aus den beiden Maschen und dem Knotenpunkt-satz in Bild 2.6:

$$\begin{cases} \underline{U}_a^F - \underline{U}_b^F = 0 \\ \underline{U}_b^F - \underline{U}_c^F = 0 \\ \underline{I}_a^F + \underline{I}_b^F + \underline{I}_c^F = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Um die Fehlerbedingungen für die symmetrischen Komponenten zu erhalten, werden die natürlichen Größen in Gl. (2.9) mit Hilfe der Transformationsbeziehung:

$$\begin{bmatrix} \underline{G}_a^F \\ \underline{G}_b^F \\ \underline{G}_c^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{G}_1^F \\ \underline{G}_2^F \\ \underline{G}_0^F \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

durch ihre symmetrischen Komponenten ersetzt. Man erhält:

$$\begin{cases} \underline{U}_1^F = 0 \\ \underline{U}_2^F = 0 \\ \underline{I}_0^F = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Die den Gln. (2.11) entsprechende Schaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle zeigt Bild 2.7. Im Gegensatz zu Bild 2.5 bleibt das Nullsystem im Leerlauf. Der Kurzschlußstrom des Mitsystems ergibt sich wie beim dreipoligen Kurzschluß mit Erdberührung aus:

$$\underline{I}_1^F = \frac{\underline{U}_{11}^F}{\underline{Z}_1} \quad (2.12)$$

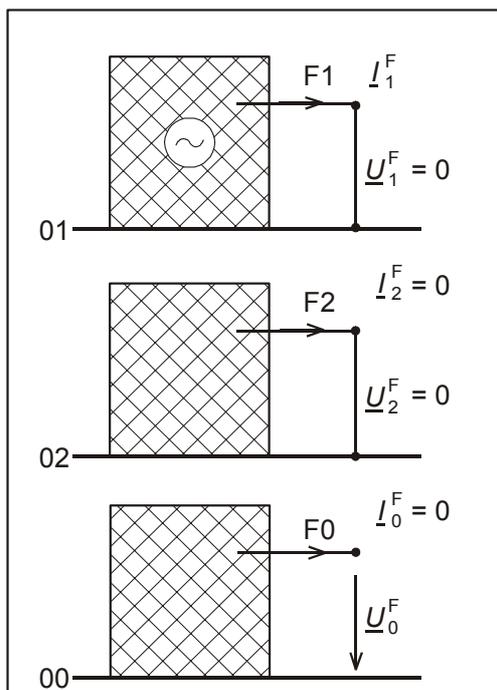


Bild 2.7: Schaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle für 3-poligen Kurzschluß ohne Erdberührung

Für die Leitergrößen erhält man wegen $I_2^F = I_0^F = 0$ wie beim dreipoligen Erdkurzschluß:

$$\begin{aligned}
 I_a^F &= I_1^F = I_{k3}'' \\
 I_b^F &= a^2 I_{k3}'' \\
 I_c^F &= a I_{k3}''
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Wie wir an den Ergebnissen gesehen haben, gibt es bei Einfachfehlern keinen Unterschied zwischen dem dreipoligen Kurzschluß mit und ohne Erdberührung. Das gilt jedoch nicht mehr generell bei Mehrfachfehlern.

2.2.3 Erdkurzschluß

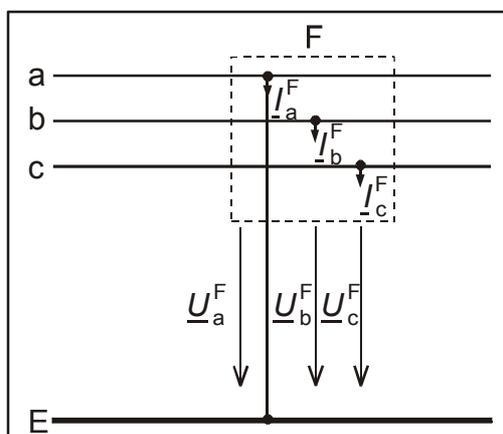


Bild 2.8: Fehlerbedingungen für 1-poligen Erdkurzschluß

Die drei Fehlerbedingungen lauten nach Bild 2.8:

$$\begin{cases} \underline{U}_a^F = 0 \\ \underline{I}_b^F = 0 \\ \underline{I}_c^F = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Nach Einführen der symmetrischen Komponenten entsprechend Gl. (2.10) ergibt sich zunächst:

$$\underline{U}_a^F = \underline{U}_1^F + \underline{U}_2^F + \underline{U}_0^F = 0 \quad (2.15a)$$

$$\underline{I}_b^F = \underline{a}^2 \underline{I}_1^F + \underline{a} \underline{I}_2^F + \underline{I}_0^F = 0 \quad (2.15b)$$

$$\underline{I}_c^F = \underline{a} \underline{I}_1^F + \underline{a}^2 \underline{I}_2^F + \underline{I}_0^F = 0 \quad (2.15c)$$

Nach Addition und Subtraktion von Gl. (2.15b) und Gl. (2.15c) erhalten wir die Fehlerbedingungen für die symmetrischen Komponenten in der Form:

$$\begin{cases} \underline{U}_1^F + \underline{U}_2^F + \underline{U}_0^F = 0 \\ \underline{I}_2^F = \underline{I}_1^F \\ \underline{I}_0^F = \underline{I}_2^F \end{cases} \quad (2.16)$$

Die beiden letzten Bedingungen findet man oft auch wie folgt zusammengefaßt vor:

$$\underline{I}_1^F = \underline{I}_2^F = \underline{I}_0^F \quad (2.17)$$

Die Fehlerbedingungen bedeuten eine *Reihenschaltung* (Serienschaltung) der Komponentennetze an der Fehlerstelle, wie sie Bild 2.9 zeigt. Der Erdkurzschluß ist demzufolge nach der Schaltung der Komponentennetze ein Serienfehler.

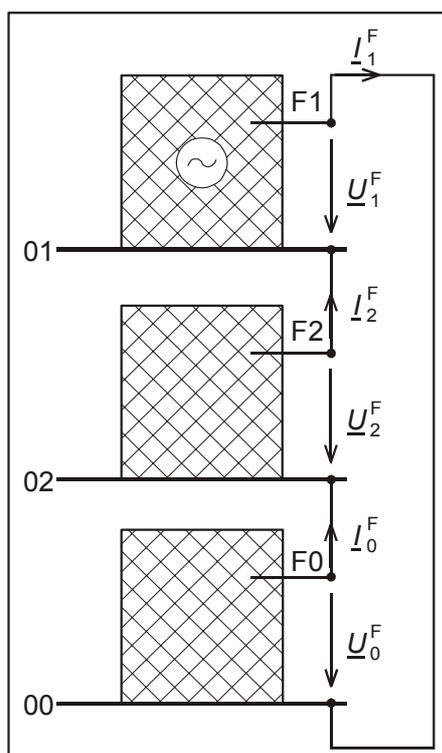


Bild 2.9: Reihenschaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle für Erdkurzschluß im Leiter a

Die erste Gleichung der Gl. (2.16) erfüllt den Maschenumlauf über die Klemmen der Komponentennetze an der Fehlerstelle und die beiden anderen Gleichungen den Knotensatz an den Knoten F2 und F0 (der dritte Knoten F1 der Schaltverbindung ist dann der abhängige Knoten).

Bei Verwendung der Impedanz-Ersatzschaltung für die symmetrischen Komponenten erhält man aus dem Maschenumlauf über die Fehlerstelle und die Komponentennetze unter Beachtung von $I_1^F = I_2^F = I_0^F$:

$$\boxed{I_1^F = \frac{U_{11}^F}{Z_1 + Z_2 + Z_0} = I_2^F = I_0^F} \quad (2.18)$$

Die Rücktransformation entsprechend der Gl. (2.10) ergibt:

$$I_a^F = I_1^F + I_2^F + I_0^F = 3I_1^F$$

und, wie es die Fehlerbedingungen fordern:

$$I_b^F = \underline{a}^2 I_1^F + \underline{a} I_2^F + I_0^F = (\underline{a}^2 + \underline{a} + 1) I_1^F = 0$$

$$I_c^F = \underline{a} I_1^F + \underline{a}^2 I_2^F + I_0^F = (\underline{a} + \underline{a}^2 + 1) I_1^F = 0$$

Mit Gl. (2.18) folgt für den Erdkurzschlußstrom $I_{k1}'' = I_a^F$:

$$\boxed{I_{k1}'' = \frac{3U_{11}^F}{Z_1 + Z_2 + Z_0}} \quad (2.19)$$

Aus Gl. (2.19) ist ersichtlich, daß bei gleichen Impedanzen Z_1 , Z_2 und Z_0 der einpolige Kurzschlußstrom dem dreipoligen Kurzschlußstrom $I_{k3}'' = U_{11}^F / Z_1$ gleich wird. Da bis auf wenige Ausnahmen $Z_2 = Z_1$ gilt, und die resultierende Nullimpedanz Z_0 größer als Z_1 ist, ist der einpolige Kurzschlußstrom in der Regel kleiner als der dreipolige Kurzschlußstrom. Durch gezielte Beeinflussung der Nullimpedanz über die Wahl der Transformator-Schaltgruppe und die Art der Sternpunktterdung kann der Kurzschlußstrom nach wirtschaftlichen und netztechnischen Gesichtspunkten in seiner Höhe begrenzt werden (s. Skript Sternpunktbehandlung).

Zum besseren Vergleich mit dem dreipoligen Kurzschlußstrom wird Gl. (2.19) mit $Z_2 = Z_1$ umgeformt in:

$$\boxed{I_{k1}'' = \frac{3}{2 + Z_0 / Z_1} \frac{U_{11}^F}{Z_1} = \frac{3}{2 + Z_0 / Z_1} I_{k3}''} \quad (2.20)$$

Das Verhältnis der Beträge wird:

$$\boxed{\frac{I_{k1}''}{I_{k3}''} = \frac{3}{|2 + Z_0 / Z_1|}} \quad (2.21)$$

Für die Spannungen U_b^F und U_c^F der gesunden Leiter ergeben sich allgemein für $Z_2 \neq Z_1$ die Beziehungen:

$$\underline{U}_1^F = \underline{U}_{11}^F - \underline{Z}_1 I_1^F = \left(1 - \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}\right) \underline{U}_{11}^F = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}^F \quad (2.22a)$$

$$\underline{U}_2^F = -\underline{Z}_2 I_2^F = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}^F \quad (2.22b)$$

$$\underline{U}_0^F = -\underline{Z}_0 I_0^F = -\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}^F \quad (2.22c)$$

Das Ergebnis kann man auch sofort aus der Spannungsteilerregel für die in Reihe geschalteten Komponentennetze ablesen.

Durch Rücktransformation folgt $\underline{U}_a^F = 0$ (Fehlerbedingung!) und:

$$\underline{U}_b^F = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a})\underline{Z}_2 + (\underline{a}^2 - 1)\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}^F = -j\sqrt{3} \frac{\underline{Z}_2 - \underline{a} \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}^F \quad (2.23)$$

$$\underline{U}_c^F = \frac{(\underline{a} - \underline{a}^2)\underline{Z}_2 + (\underline{a} - 1)\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}^F = j\sqrt{3} \frac{\underline{Z}_2 - \underline{a}^2 \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}^F \quad (2.24)$$

Da diese Ausdrücke ziemlich unübersichtlich sind, sollen unter der Annahme $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$ noch die beiden Sonderfälle $\underline{Z}_0 \rightarrow \infty$ (Erdschluß) und $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$ betrachtet werden.

Für $\underline{Z}_0 \rightarrow \infty$ wird:

$$\underline{U}_b^F = (\underline{a}^2 - 1)\underline{U}_{11}^F = \sqrt{3}\underline{U}_{11}^F \angle 210^\circ \quad \text{und} \quad \underline{U}_c^F = (\underline{a} - 1)\underline{U}_{11}^F = \sqrt{3}\underline{U}_{11}^F \angle 150^\circ$$

Für $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$ wird:

$$\underline{U}_b^F = \underline{a}^2 \underline{U}_{11}^F \quad \text{und} \quad \underline{U}_c^F = \underline{a} \underline{U}_{11}^F.$$

Im ersten Fall (Erdschluß) tritt in den beiden vom Fehler nicht betroffenen Leitern eine Spannungserhöhung um $\sqrt{3}$ auf, während im zweiten Fall keine Spannungserhöhung erfolgt. Der reale Wert für \underline{Z}_0 liegt zwischen diesen beiden Extremfällen, so daß es in Abhängigkeit vom Verhältnis $\underline{Z}_0 / \underline{Z}_1$ zu einer zeitweiligen Spannungserhöhung zwischen 1 und $\sqrt{3}$ kommt.

Das Verhältnis der Spannungsbeträge der gesunden Leiter (hier b und c) im Fehlerfall und im Normalbetrieb (oF) wird als *Erdfehlerfaktor* δ bezeichnet. Er berechnet sich für $\underline{U}_{b\text{oF}}^F = \underline{U}_{c\text{oF}}^F = \underline{U}_{11}^F$ (Beträge) und $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$ aus der Gl. (2.23) oder (2.24) zu:

$$\delta = \frac{1}{2} \left| \frac{3\underline{Z}_0 / \underline{Z}_1}{2 + \underline{Z}_0 / \underline{Z}_1} \pm j\sqrt{3} \right|$$

und bei Vernachlässigung der Wirkwiderstände:

$$\delta = \sqrt{3} \sqrt{\frac{1 + X_0 / X_1 + (X_0 / X_1)^2}{2 + X_0 / X_1}} \quad (2.25)$$

Der Grenzübergang $X_0 \rightarrow \infty$ liefert $\delta = \sqrt{3}$, also $\sqrt{3}$ -fache Spannungsüberhöhung in den gesunden Leitern.

2.2.4 Zweipoliger Erdkurzschluß

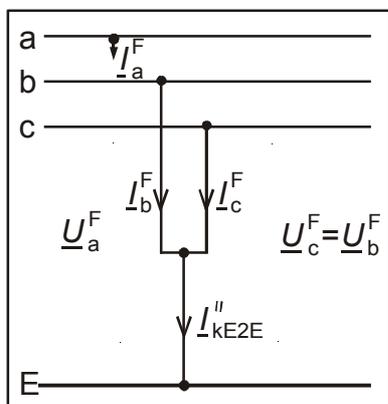


Bild 2.10: Fehlerbedingungen für zweipoligen Erdkurzschluß

Für den zweipoligen Erdkurzschluß in den Leitern b und c folgt aus Bild 2.10:

$$\begin{cases} I_a^F = 0 \\ U_b^F = 0 \\ U_c^F = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

Die Transformation der Fehlerbedingungen in symmetrische Komponenten ergibt:

$$\begin{cases} I_1^F + I_2^F + I_0^F = 0 \\ U_2^F = U_1^F \\ U_0^F = U_2^F \end{cases} \tag{2.27}$$

Gleichung (2.27) drückt eine *Parallelschaltung* der Komponentennetze an der Fehlerstelle, wie sie in Bild 2.7 dargestellt ist, aus. Demzufolge ist der 2-polige Erdkurzschluß ein Parallelfehler.

Nach Einsetzen der Ströme aus Gl. (2.2) in die erste Beziehung der Gl. (2.27) erhält man:

$$U_1^F = U_2^F = U_0^F = \frac{I_{1k}^F}{Y_1 + Y_2 + Y_0} = \frac{Z_2 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{11}^F \tag{2.28}$$

und durch Rücktransformation:

$$U_a^F = \frac{3 Z_2 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{11}^F \tag{2.29}$$

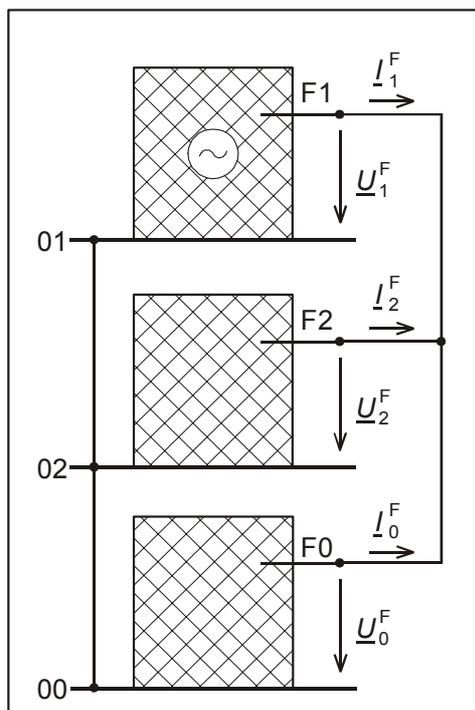


Bild 2.11: Schaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle für 2-poligen Erdkurzschluß in den Leitern b und c

Die symmetrischen Komponenten der Ströme an der Fehlerstelle ergeben sich aus der Stromteilerregel für die parallelgeschalteten Komponentennetze:

$$I_{-1}^F = \frac{Y_2 + Y_0}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F = \frac{Z_2 + Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{11}^F \tag{2.30a}$$

$$I_{-2}^F = -Y_2 U_{-2}^F = -\frac{Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F = -\frac{Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{11}^F \tag{2.30b}$$

$$I_{-0}^F = -Y_0 U_{-0}^F = -\frac{Y_0}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F = -\frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{11}^F \tag{2.30c}$$

Die Rücktransformation liefert:

$$I_{-a}^F = 0 \quad (\text{Fehlerbedingung!}) \tag{2.31a}$$

$$I_{-b}^F = \frac{(a^2 - a)Y_2 + (a^2 - 1)Y_0}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F = \frac{(a^2 - 1)Z_2 + (a^2 - a)Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{11}^F \tag{2.31b}$$

$$I_{-c}^F = \frac{(a - a^2)Y_2 + (a - 1)Y_0}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F = \frac{(a - 1)Z_2 + (a - a^2)Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{11}^F \tag{2.31c}$$

wobei noch einmal daran erinnert werden soll, daß der Quellenstrom I_{-1k}^F mit dem dreipoligen Kurzschlußstrom I_{-k3}'' im Leiter a an der Fehlerstelle identisch ist.

Der über die Erde fließende Strom I_{-kE2E}'' wird:

$$I_{-kE2E}'' = I_{-b}^F + I_{-c}^F = -\frac{3Y_0}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F$$

und bei $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_1$:

$$\underline{I}_{kE2E}'' = -\frac{3}{1+2\underline{Y}_1/\underline{Y}_0} \underline{I}_{k3}'' = -\frac{3}{1+2\underline{Z}_0/\underline{Z}_1} \underline{I}_{k3}'' \quad (2.32)$$

Von praktischer Bedeutung ist der Vergleich der Beträge:

$$\frac{\underline{I}_{kE2E}''}{\underline{I}_{k3}''} = \frac{3}{|1+2\underline{Z}_0/\underline{Z}_1|} \quad (2.33)$$

Für $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ würde demnach $\underline{I}_{kE2E}'' = \underline{I}_{k3}''$ werden.

Vergleicht man die Fehlerbedingungen für den 1-poligen Erdkurzschluß mit denen des zweipoligen Erdkurzschlusses, so stellt man fest, daß diese dual zueinander sind (die Parallelschaltung ist die zur Reihenschaltung duale Schaltung). Folglich kann man nach dem Dualitätsprinzip auch sofort auf die Gl. (2.28) und die folgenden Gleichungen schließen, wenn man im Ergebnis für den Erdkurzschluß die Spannungen durch Ströme, die Ströme durch Spannungen, die Leerlaufspannung \underline{U}_{11}^F durch den Kurzschlußstrom \underline{I}_{1k}^F und die Impedanzen durch Admittanzen ersetzt.

2.2.5 Zweipoliger Kurzschluß ohne Erdberührung

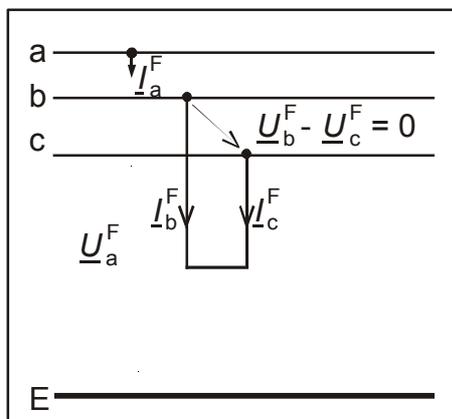


Bild 2.12: Fehlerbedingungen für zweipoligen Kurzschluß ohne Erdberührung

Als Fehlerbedingungen folgen aus Bild 2.12:

$$\begin{cases} \underline{I}_a^F = 0 \\ \underline{I}_b^F + \underline{I}_c^F = 0 \\ \underline{U}_b^F - \underline{U}_c^F = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

und damit für die symmetrischen Komponenten:

$$\begin{cases} \underline{I}_1^F + \underline{I}_2^F = 0 \\ \underline{U}_2^F = \underline{U}_1^F \\ \underline{I}_0^F = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Die Schaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle zeigt Bild 2.13.

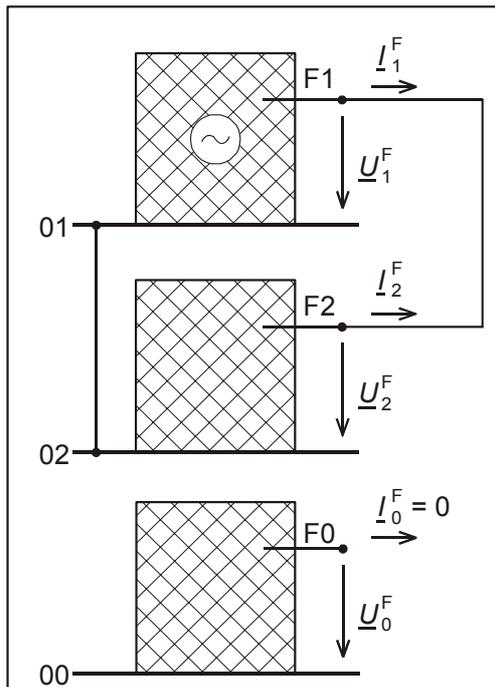


Bild 2.13: Schaltung der Komponentennetze für 2-poligen Kurzschluß der Leiter b und c ohne Erdberührung

Das Nullsystem bleibt separat und führt an der Fehlerstelle keinen Strom. Damit ist bei endlichem \underline{Z}_0 auch $\underline{U}_0^F = 0$. Für $\underline{Z}_0 \rightarrow \infty$ wird \underline{U}_0^F unbestimmt.

Ausgehend von Bild 2.13 folgt bei Verwendung der Impedanz-Ersatzschaltungen für die symmetrischen Komponentennetze:

$$\underline{I}_1^F = -\underline{I}_2^F = \frac{\underline{U}_{11}^F}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{U}_1^F = \underline{U}_2^F = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_{11}^F$$

und $\underline{U}_0^F = 0$ wenn \underline{Z}_0 endlich ist.

Die Rücktransformation ergibt:

$$\underline{U}_a^F = \frac{2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_{11}^F$$

$$\underline{U}_b^F = \underline{U}_c^F = (\underline{a}^2 + \underline{a}) \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_{11}^F = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_{11}^F$$

$$\underline{I}_a^F = 0 \text{ (Fehlerbedingung)}$$

$$\underline{I}_b^F = -\underline{I}_c^F = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a})\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I}_{1k}^F = -j\sqrt{3} \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I}_{1k}^F = \underline{I}_{k2}''$$

und für $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_1$:

$$\boxed{I_{\underline{b}}^F = -I_{\underline{c}}^F = -j \frac{\sqrt{3}}{2} I_{1k}^F = -j \frac{\sqrt{3}}{2} I_{k3}'' = I_{k2}''} \tag{2.36}$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch ausgehend vom zweipoligen Erdkurzschluß mit $\underline{Z}_0 \rightarrow \infty$, d.h. $\underline{Y}_0 \rightarrow 0$ unter Beachtung von $I_{1k}^F = \underline{Y}_1 \underline{U}_{11}^F$.
 Für die Beträge gilt unter der Voraussetzung $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_1$:

$$\boxed{\frac{I_{k2}''}{I_{k3}''} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{2.37}$$

2.2.6 Vergleich der Kurzschlußströme

Nach den Gln. (2.8), (2.20), (2.32) und (2.36) verhalten sich die Beträge der Anfangs-Kurzschluß-Wechselströme der einzelnen Kurzschlußarten für $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$ wie folgt zueinander:

$$\boxed{I_{k1}'' : I_{kE2E}'' : I_{k2}'' : I_{k3}'' = \frac{3}{|2 + \underline{Z}_0 / \underline{Z}_1|} : \frac{3}{|1 + 2 \underline{Z}_0 / \underline{Z}_1|} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1}$$

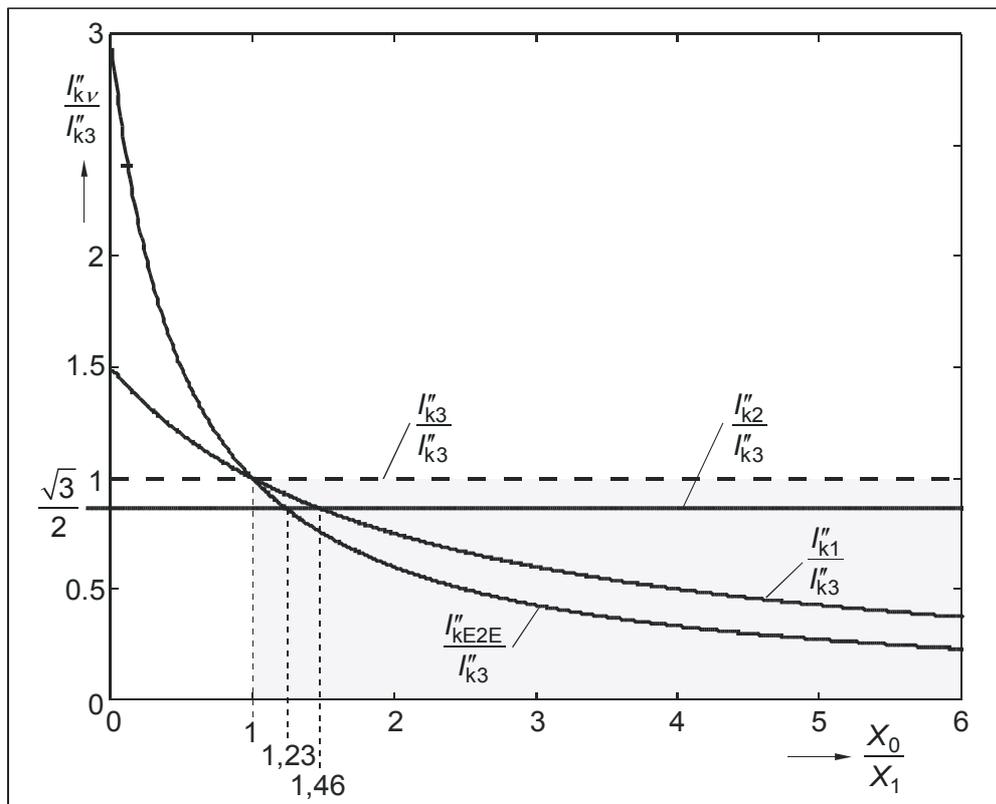


Bild 2.14: Vergleich der unsymmetrischen Kurzschlußströme mit dem dreipoligen Kurzschlußstrom

In Bild 2.14 sind die auf I_{k3}'' bezogenen, unsymmetrischen Kurzschlußströme unter Vernachlässigung der Wirkwiderstände in Abhängigkeit vom Verhältnis X_0 / X_1 dargestellt. Danach ergeben sich im Bereich $X_0 > 1,46 X_1$, der auf reale Netze zutrifft, die Relationen:

$$I_{k3}'' > I_{k2}'' > I_{k1}'' > I_{kE2E}''$$

2.2.7 Berücksichtigung von Fehlerimpedanzen

In den Bildern 2.15 und 2.16 ist angenommen, daß sich der 1-polige und 2-polige Querfehler über endliche Fehlerimpedanzen ausbilden. Das ist z.B. bei Lichtbogenfehlern der Fall. Jedoch ist der Lichtbogenwiderstand keine konstante Größe, er hängt von der Lichtbogenspannung ab. Diese Abhängigkeit kann in unserem linearen Fehlermodell allerdings nicht berücksichtigt werden.

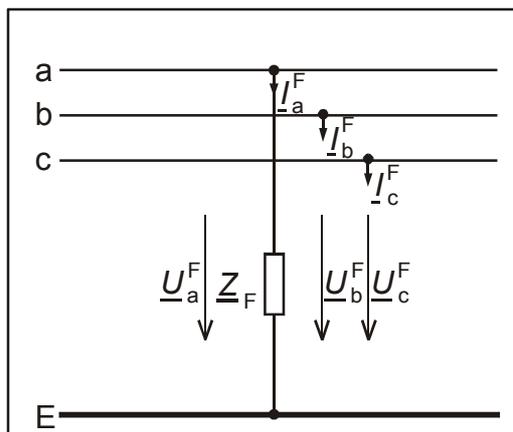


Bild 2.15: Fehlerbedingungen bei 1-poligem Querfehler

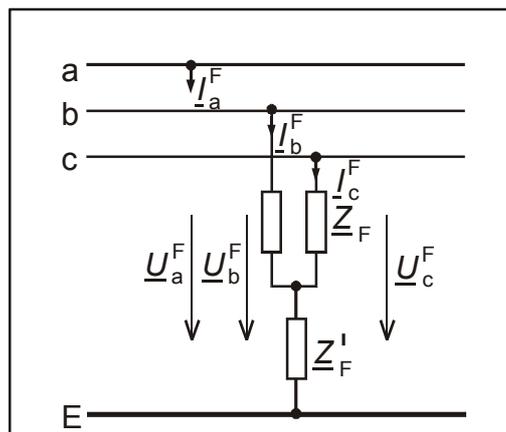


Bild 2.16: Fehlerbedingungen bei 2-poligem Querfehler

Für konstante Fehlerimpedanz Z_F gehen die Fehlerbedingungen für den 1-poligen Erd(kurz)schluß (Gln. (2.14) und (2.16)) über in:

$$\begin{cases} \underline{U}_a^F - Z_F \underline{I}_a^F = 0 \\ \underline{I}_b^F = 0 \\ \underline{I}_c^F = 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

und

$$\begin{cases} \underline{U}_1^F - Z_F \underline{I}_1^F + \underline{U}_2^F - Z_F \underline{I}_2^F + \underline{U}_0^F - Z_F \underline{I}_0^F = 0 \\ \underline{I}_2^F = \underline{I}_1^F \\ \underline{I}_0^F = \underline{I}_2^F \end{cases} \tag{2.39}$$

Die Komponentennetze werden demzufolge jetzt über jeweils Z_F in Reihe geschaltet (Bild 2.17).

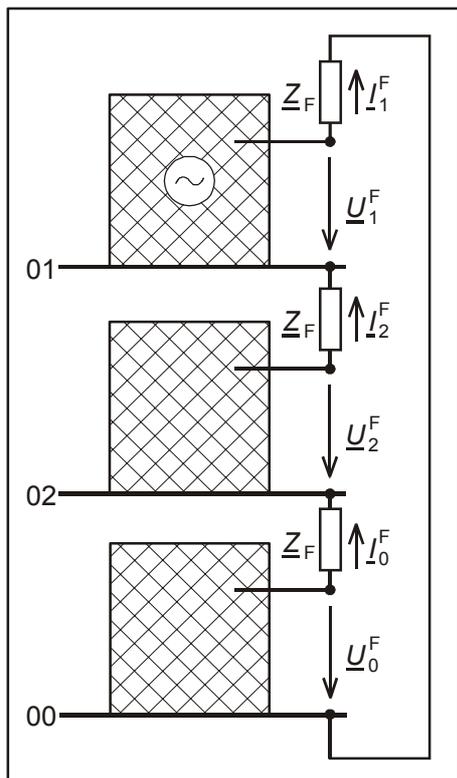


Bild 2.17: Schaltung der Komponentennetze bei 1-poligem Querfehler

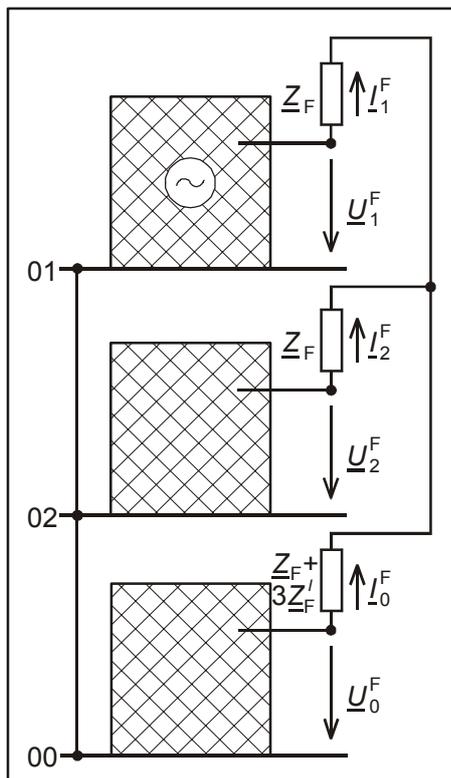


Bild 2.18: Schaltung der Komponentennetze bei 2-poligem Querfehler

Für den 2-poligen Querfehler erhält man mit konstanten Fehlerimpedanzen \underline{Z}_F und \underline{Z}'_F anstelle der Gln. (2.26) und (2.27):

$$\begin{aligned} I_a^F &= 0 \\ \underline{U}_b^F - \underline{Z}_F I_b^F - \underline{Z}'_F (I_b^F + I_c^F) &= 0 \\ \underline{U}_c^F - \underline{Z}_F I_c^F - \underline{Z}'_F (I_b^F + I_c^F) &= 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} I_1^F + I_2^F + I_0^F &= 0 \\ \underline{U}_2^F - \underline{Z}_F I_2^F &= \underline{U}_1^F - \underline{Z}_F I_1^F \\ \underline{U}_0^F - (\underline{Z}_F + 3\underline{Z}'_F) I_0^F &= \underline{U}_2^F - \underline{Z}_F I_2^F \end{aligned}$$

und demnach eine Parallelschaltung der Komponentennetze entsprechend Bild 2.18. Aus der Ersatzschaltung in Bild 2.17 berechnet man für den 1-poligen Querfehler:

$$I_{-1}^F = I_{-2}^F = I_{-0}^F = \frac{\underline{U}_{11}^F}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_F}$$

und

$$I_a^F = 3I_{-1}^F = \frac{3\underline{U}_{11}^F}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_F}$$

Für den 2-poligen Querfehler folgt aus Bild 2.18:

$$I_{-1}^F = \frac{U_{11}^F}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_F + \frac{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_F)(\underline{Z}_0 + \underline{Z}_F + 3\underline{Z}'_F)}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_F + 3\underline{Z}'_F}}$$

$$I_{-2}^F = -\frac{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_F + 3\underline{Z}'_F}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_F + 3\underline{Z}'_F} I_{-1}^F$$

$$I_{-0}^F = -\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_F}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_F + 3\underline{Z}'_F} I_{-1}^F$$

Mit dem Grenzübergang $\underline{Z}'_F \rightarrow \infty$ gehen die obigen Gleichungen in die Beziehungen für den zweipoligen Kurzschluß mit Fehlerimpedanzen über:

$$I_{-1}^F = \frac{U_{11}^F}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_F}$$

$$I_{-2}^F = -I_{-1}^F$$

$$I_{-0}^F = 0$$

Auf die Rücktransformation der Ströme soll hier verzichtet werden. Es sei nur noch erwähnt, daß man auch sofort auf die Gleichungen für die Ströme aus Abschnitt 2.2.3 und 2.2.4 zurückgreifen kann, wenn man die Innenimpedanzen der Komponentenetze wie folgt erweitert:

$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_F$$

$$\underline{Z}'_2 = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_F$$

$$\underline{Z}'_0 = \underline{Z}_0 + \underline{Z}_F + 3\underline{Z}'_F$$

Die vorstehenden Gleichungen des 1-poligen und 2-poligen Querfehlers mit Fehlerimpedanzen kann man auch zur Berechnung von symmetrisch aufgebauten und gespeisten Netzen mit unsymmetrischer Belastung an einem Netzknoten benutzen, sofern sich die unsymmetrische Last in einen symmetrischen Anteil und einen Rest, der sich wie in den Bildern 2.17 und 2.18 auf den Leiter a oder die Leiter b und c verteilen läßt, zerlegt werden kann.

2.2.8 Überlagerungsverfahren

Das Überlagerungsverfahren für lineare Netze geht auf HELMHOLTZ (1821 - 1894) zurück und wurde durch den französischen Physiker THEVENIN (1857 - 1930) für die Kurzschlußstrom-Berechnung aufbereitet. Es geht von folgender Modellvorstellung aus:

In eine Kurzschlußverbindung kann man zwei gleich große, entgegengerichtete Quellenspannungen \underline{U}_q einbringen, ohne daß sich dabei eine Änderung gegenüber dem Kurzschlußzustand ergibt. Bild 2.19 illustriert dieses Gedankenexperiment am Beispiel des dreipoligen Kurzschlusses, für den nur das Mitsystem der symmetrischen Komponenten betrachtet zu werden braucht.

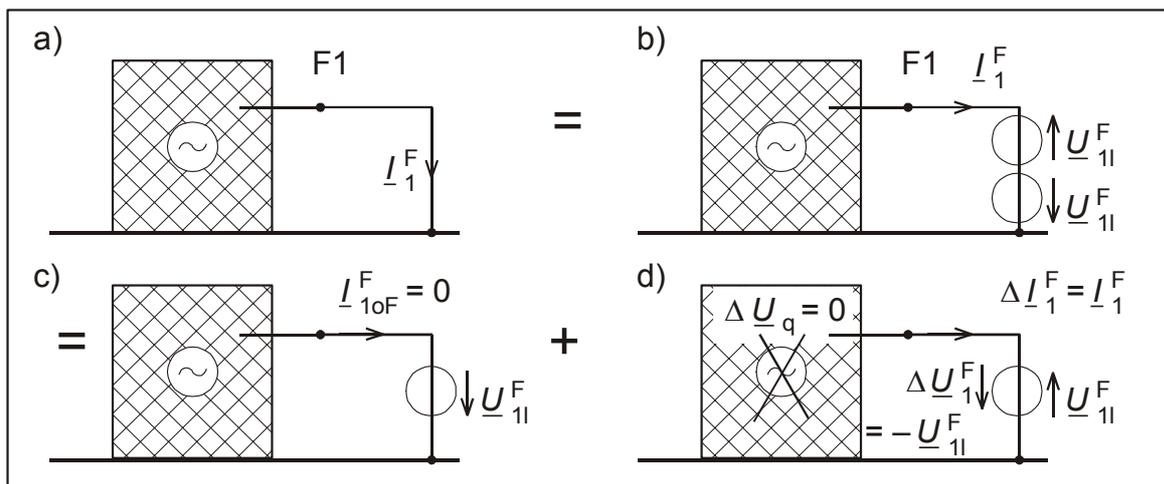


Bild 2.19: Überlagerung der beiden Zustände „Zustand vor Kurzschlußeintritt“ und „Rückwärtseinspeisung“ zum Kurzschlußzustand.

a) und b) Kurzschlußzustand c) Zustand vor Kurzschlußeintritt (oF) d) Änderungszustand mit Rückwärtseinspeisung (8)

Nach dem Überlagerungssatz läßt man nun die beiden Spannungsquellen einzeln, wie in den Bildern 2.19c und d, auf das aktive Netz und auf das passiv gemachte Netz (alle Spannungsquellen werden kurzgeschlossen und alle Stromquellen geöffnet) wirken und überlagert die von ihnen angetriebenen Ströme und die damit verbundenen Spannungsabfälle.

Durch die Wahl von $\underline{U}_q = \underline{U}_{11}^F = \underline{U}_{10F}^F$ entspricht der Zustand in Bild 2.19 c gerade dem stationären Zustand vor Kurzschlußeintritt, bei dem kein Strom über die Kurzschlußstelle fließt.

Der Zustand in Bild 2.19 d beschreibt die durch den Kurzschluß bewirkten Änderungen gegenüber dem stationären Zustand. Er wird deshalb Änderungszustand, oder wegen der umgekehrten Zählrichtung der Spannung \underline{U}_{11}^F an der Fehlerstelle, auch Zustand der Rückwärtseinspeisung genannt. Der Änderungszustand wird durch das Symbol Δ gekennzeichnet. An der Fehlerstelle gilt im Fehlerfall stets $\underline{I}_v^F = \Delta \underline{I}_v^F$ ($v = 1, 2, 0$ oder a, b, c), da die Fehlerstelle vor dem Kurzschluß stromlos ist ($\underline{I}_{10F}^F = 0$). Für alle Quellen gilt dagegen wegen der Konstanz der Quellengrößen $\Delta \underline{U}_q = 0$ bzw. $\Delta \underline{I}_q = 0$. Das Netz ist also im Zustand der Rückwärtseinspeisung passiv.

Die Spannungsänderungen an den Knoten werden gelegentlich auch als THEVENIN-Spannungen bezeichnet.

Im Fall des dreipoligen Kurzschlusses gilt an der Kurzschlußstelle:

$$\underline{U}_1^F = \underline{U}_{11}^F + \Delta \underline{U}_1^F = 0 \tag{2.40}$$

also (s. Bild 2.19d):

$$\Delta \underline{U}_1^F = -\underline{U}_{11}^F \tag{2.41}$$

und wegen $\underline{I}_{10F}^F = 0$ vor dem Kurzschluß:

$$\underline{I}_1^F = \Delta \underline{I}_1^F = \frac{\underline{U}_{11}^F}{\underline{Z}_1} \tag{2.42}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (2.7).

Die Tatsache, daß an der Fehlerstelle die Stromänderungen exakt den Fehlerströmen entsprechen, macht man sich bei der praktischen Kurzschlußstromberechnung zu nutze, indem man lediglich den Zustand Rückwärtseinspeisung betrachtet.

Zur Berechnung der Fehlerströme *nur* mit dem Zustand Rückwärtseinspeisung müssen die Fehlerbedingungen für den Änderungszustand formuliert werden. Für den dreipoligen Erdkurzschluß ist das bereits durch die Gl. (2.41) erfolgt. Für die unsymmetrischen Fehler soll dies am Beispiel des 1-poligen Erdkurzschlusses gezeigt werden. Aus Gl. (2.14) folgt mit $\underline{U}_a^F = \underline{U}_{11}^F + \Delta\underline{U}_a^F = 0$ und $\underline{I}_{boF}^F = \underline{I}_{coF}^F = 0$ vor dem Fehler:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\underline{U}_a^F &= -\underline{U}_{11}^F \\ \Delta\underline{I}_b^F &= \underline{I}_b^F = 0 \\ \Delta\underline{I}_c^F &= \underline{I}_c^F = 0\end{aligned}} \quad (2.43)$$

und damit für die Änderung der symmetrischen Komponenten:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\underline{U}_1^F + \Delta\underline{U}_2^F + \Delta\underline{U}_0^F &= -\underline{U}_{11}^F \\ \Delta\underline{I}_2^F &= \Delta\underline{I}_1^F \\ \Delta\underline{I}_0^F &= \Delta\underline{I}_2^F\end{aligned}} \quad (2.44)$$

Nach Gl. (2.44) sind für den Zustand Rückwärtseinspeisung bei 1-poligem Erdkurzschluß in Leiter a die passiven Komponentennetze zusammen mit der Leerlaufspannung \underline{U}_{11}^F an der Kurzschlußstelle in Reihe zu schalten (Bild 2.20). Man kann sich die Schaltung in Bild 2.20 auch aus der in Bild 2.9 entstanden denken, indem man dort die Quellenspannung des Mitsystems (die Leerlaufspannung) aus dem Mitsystem *herauszieht*.

Die Komponenten des Kurzschlußstromes berechnen sich nach Bild 2.20 in Übereinstimmung mit der Gl. (2.18):

$$\Delta\underline{I}_1^F = \underline{I}_1^F = \frac{\underline{U}_{11}^F}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} = \Delta\underline{I}_2^F = \Delta\underline{I}_0^F$$

Weil das Gegen- und Nullsystem im fehlerfreien Zustand stromlos sind, gilt bei unsymmetrischen Fehlern stets:

$$\underline{I}_2^F = \Delta\underline{I}_2^F \quad \text{und} \quad \underline{I}_0^F = \Delta\underline{I}_0^F$$

Bei 2-poligem Erdkurzschluß sind für den Zustand Rückwärtseinspeisung die passiven Komponentennetze über \underline{U}_{11}^F an der Kurzschlußstelle parallel zu schalten (Bild 2.21). Sollen Fehlerwiderstände berücksichtigt werden, so müssen diese beim Zustand Rückwärtseinspeisung ähnlich wie in den Bildern 2.17 und 2.18 in die Verbindungen der Komponentennetze gelegt werden.

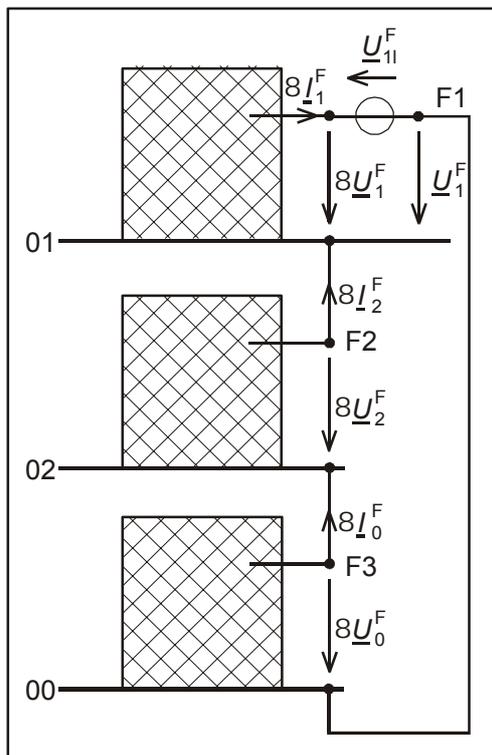


Bild 2.20: Zustand Rückwärtseinspeisung für den 1-poligen Erdkurzschluß

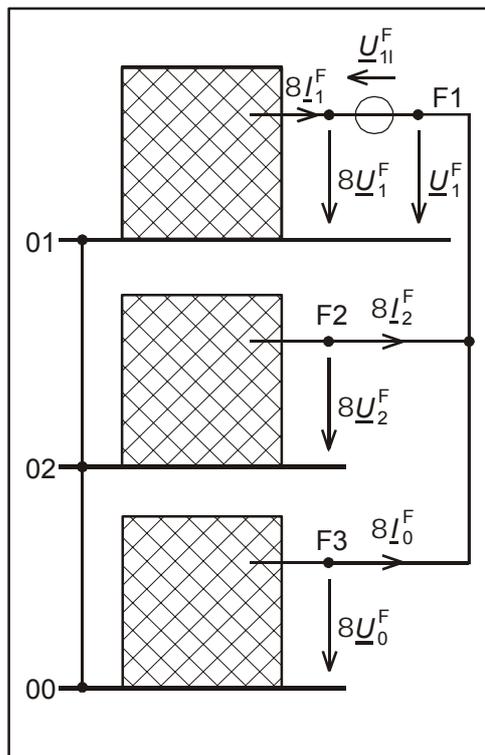


Bild 2.21: Zustand Rückwärtseinspeisung für den 2-poligen Kurzschluß mit Erdberührung

2.2.9 Verfahren der Ersatzspannung an der Kurzschlußstelle

Wir haben gesehen, daß der Zustand Rückwärtseinspeisung beim Überlagerungsverfahren den Kurzschlußstrom (Summenstrom an der Kurzschlußstelle) bei allen Kurzschlußarten exakt liefert, weil vor dem Kurzschluß kein Strom (stationärer Anteil) über die Kurzschlußstelle fließt. Für alle anderen Netzzweige ist das Ergebnis aus der Rückwärtseinspeisung jedoch unvollständig, da in diesen normalerweise im stationären Zustand bereits Ströme fließen, die den Strömen aus dem Zustand Rückwärtseinspeisung zu überlagern sind. Da die stationären Stromanteile - zumindest in der Umgebung der Kurzschlußstelle - i.a. klein gegenüber den von der Rückwärtseinspeisung herrührenden Stromanteilen sind und zwischen beiden Anteilen eine größere Phasenverschiebung besteht, liegt es nahe, die stationären Stromanteile zu vernachlässigen und überhaupt nur mit dem Zustand Rückwärtseinspeisung zu rechnen. Man kann dann auf die Leistungsflußberechnung, die die stationären Stromanteile liefert, verzichten. Der Vorteil besteht nicht nur in einer beträchtlichen Verringerung des Rechenaufwandes, sondern auch in einer Befreiung von unsicheren Betriebsdaten. So müßte man beispielsweise für die Berechnung des größten oder kleinsten Kurzschlußstromes mit Hilfe des Überlagerungsverfahrens zuerst den sogenannten *pessimistischen* Leistungsfluß ermitteln, der auch wirklich zum größten oder kleinsten Kurzschlußstrom führt.

Aber auch bei Rechnung nur mit dem Zustand Rückwärtseinspeisung an der Kurzschlußstelle ist der Einfluß des stationären Zustandes vor dem Kurzschluß noch nicht vollständig eliminiert, da dieser den Wert der Einspeisespannung \underline{U}_{11}^F an der Kurzschlußstelle bestimmt. Zum anderen enthalten die Komponentennetze noch Impedanzen oder Admittanzen für die nichtmotorischen Abnehmer, deren Werte sich ebenfalls aus dem Leistungsfluß vor dem Fehler ergeben. Um den Einfluß des Leistungsflusses vor dem Kurzschluß vollständig zu eliminieren, vernachlässigt man die Lastimpedanzen und trifft eine sinnvolle Wahl für \underline{U}_{11}^F . Ein sehr wahrscheinlicher Wert

für den Betrag von $\underline{U}_{||}^F$ ist der Leiter-Erde-Wert $U_n / \sqrt{3}$ der Netznennspannung, da anzunehmen ist, daß im stationären Zustand vor dem Kurzschluß die Knotenspannungen in der Nähe der Netznennspannung liegen. Die Erfahrung hat aber gezeigt, daß bei Vernachlässigung der Lastadmittanzen und gleichzeitig der Leitungskapazitäten im Mit- und Gegensystem die Kurzschlußströme zu klein berechnet werden (die Lastimpedanzen bewirken eine kleinere Torimpedanz an der Kurzschlußstelle). Um diese Abweichung zu kompensieren, hat man zusammen mit der Netznennspannung einen Spannungsfaktor c eingeführt und rechnet mit der reellen Ersatzspannung

$$U_{\text{ers}} = \frac{c U_n}{\sqrt{3}}$$

an der Fehlerstelle.

Das Verfahren heißt nach DIN VDE 0102¹⁾ "Verfahren der Ersatzspannung an der Fehlerstelle" und kommt ganz ohne Leistungsflußberechnung aus. Der Spannungsfaktor c hängt von der Netznennspannung und von dem Berechnungsziel (kleinste oder größte Kurzschlußströme) ab. Im Hochspannungsnetz gilt für die Berechnung der *kleinsten* Kurzschlusströme $c_{\min} = 1,0$ und für die Berechnung der *größten* Kurzschlusströme $c_{\max} = 1,1$.

Die Kurzschlußströme an der Fehlerstelle werden mit der Ersatzspannung U_{ers} an der Fehlerstelle genügend genau berechnet. Die Teilkurzschlußströme können dagegen Fehler aufweisen. Insbesondere bei dreipoligem Kurzschluß werden die Teilkurzschlußströme von großen Generatoren zu klein und die von Motoren zu groß berechnet. Man begegnet diesen Abweichungen durch die sogenannten Impedanzkorrektur, bei der die entsprechende Zweigimpedanz durch einen Faktor k verkleinert oder vergrößert wird.

¹⁾ DIN VDE 0102 "Berechnung von Kurzschlußströmen in Drehstromnetzen", Jan. 1990

2.3 Einfach-Längsfehler

Die Behandlung der Einfach-Längsfehler erfolgt analog zu den Einfach-Querfehlern. Zunächst werden wieder die drei Fehlerbedingungen an der Unterbrechungsstelle aufgestellt. Durch Transformation erhält man die Fehlerbedingungen für die symmetrischen Komponenten der Ströme und Spannungen an der Unterbrechungsstelle, die wieder durch Schaltverbindungen der Komponentennetze an der Unterbrechungsstelle interpretiert werden können.

Wenn wir uns die 1-polige Unterbrechung als einen 2-poligen Kurzschluß des an der Unterbrechungsstelle *vorher dreipolig geöffneten* Systems vorstellen, so wird klar, daß bei 1-poliger Unterbrechung die Komponentennetze an der Fehlerstelle wie beim 2-poligen Erdkurzschluß parallel zu schalten sind. Ebenso kommen wir zu dem Schluß, daß die 2-polige Unterbrechung eine Serienschaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle wie für den 1-poligen Erdkurzschluß bedeutet. Oder allgemein: Die Fehlerbedingungen für die Erdkurzschlüsse und Unterbrechungen verhalten sich *dual* zueinander (Tab.2.1).

Serienfehler	Parallelfehler
1-poliger Erdkurzschluß	2-poliger Erdkurzschluß
2-polige Unterbrechung	1-polige Unterbrechung

Tabelle 2.1: Einteilung der unsymmetrischen Fehler in Serien- und Parallelfehler

Somit können wir die für die unsymmetrischen Erdkurzschlüsse hergeleiteten Beziehungen formal auf die unsymmetrischen Unterbrechungen übertragen. Wir müssen dabei nur beachten, daß sich die Zweipolgrößen (Torimpedanzen bzw. -admittanzen und Leerlaufspannungen bzw. Kurzschlußströme) der Komponentennetze jetzt auf die Knoten F und F' (Unterbrechungsstelle) beziehen, während sie bei Kurzschluß für das Knotenpaar F und 0 (Bezugsknoten) gelten.

2.3.1 Dreipolige Unterbrechung

Die Strom- und Spannungszählpfeile für die Größen an der Unterbrechungsstelle sind aus Bild 2.22 ersichtlich.

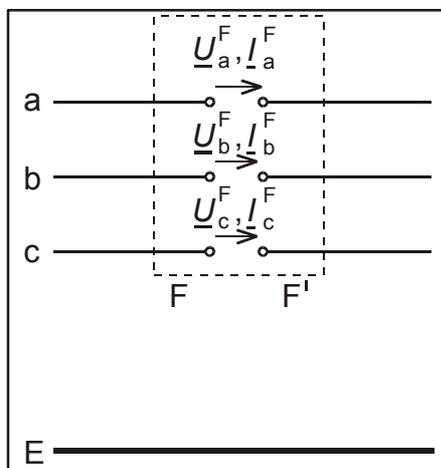


Bild 2.22: Fehlerbedingungen für die 3-polige Unterbrechung

Die Fehlerbedingungen sind dual zu denen des 3-poligen Erdkurzschlusses:

$$\begin{array}{|l} I_a^F = 0 \\ I_b^F = 0 \\ I_c^F = 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|l} I_{L1}^F = 0 \\ I_{L2}^F = 0 \\ I_{L0}^F = 0 \end{array} \quad (2.45a) \quad (2.45b)$$

Die drei Komponentennetze sind an der Unterbrechungsstelle geöffnet. Die Spannungen an der Unterbrechungsstelle im passiven Gegen- und Nullsystem sind Null. Im Mitsystem liegt über der Unterbrechungsstelle die Leerlaufspannung \underline{U}_{11}^F an (Bild 2.3b). Für die Leiterspannungen ergibt sich mit $\underline{U}_{1F}^F = \underline{U}_{11}^F$:

$$\begin{array}{|l} \underline{U}_a^F = \underline{U}_{11}^F \\ \underline{U}_b^F = \underline{a}^2 \underline{U}_a^F \\ \underline{U}_c^F = \underline{a} \underline{U}_a^F \end{array} \quad (2.46)$$

Die Leerlaufspannung des Mitsystems \underline{U}_{11}^F an der Unterbrechungsstelle berechnet man aus:

$$\underline{U}_{11}^F = \underline{Z}_1 I_{1k}^F \quad (2.47)$$

wobei \underline{Z}_1 die von der Unterbrechungsstelle aus gesehene Innenimpedanz und I_{1k}^F der Quellenstrom des Mitsystems ist. Aus der Admittanz-Ersatzschaltung in Bild 2.3b ist ersichtlich, daß I_{1k}^F identisch mit dem Mitsystemstrom I_{10F}^F ist, der im fehlerfreien Fall über die „kurzgeschlossene“ Unterbrechungsstelle fließt (daher die Bezeichnung Kurzschlußstrom). Wegen der Symmetrie im fehlerfreien Zustand gilt $I_{10F}^F = I_{a0F}^F$.

Fließt vor der Unterbrechung kein Strom über die Unterbrechungsstelle, so stellt sich bei Unterbrechung auch keine Spannung an der Unterbrechungsstelle ein.

2.3.2 Einpolige Unterbrechung

Die Strom- und Spannungspfeile für die Größen an der Unterbrechungsstelle im Leiter a sind aus Bild 2.23 ersichtlich.

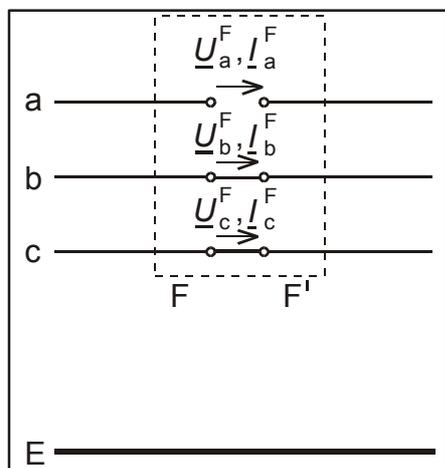


Bild 2.23: Fehlerbedingungen für die 1-polige Unterbrechung

Die Fehlerbedingungen lauten analog zu denen des zweipoligen Erdkurzschlusses in den Leitern b und c:

$$\begin{cases} \underline{I}_a^F = 0 \\ \underline{U}_b^F = 0 \\ \underline{U}_c^F = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

und für die symmetrischen Komponenten:

$$\begin{cases} \underline{I}_1^F + \underline{I}_2^F + \underline{I}_0^F = 0 \\ \underline{U}_2^F = \underline{U}_1^F \\ \underline{U}_0^F = \underline{U}_2^F \end{cases} \quad (2.49)$$

Mit Gl. (2.49) wird die schon vorausgesagte Parallelschaltung der Komponentennetze an der Unterbrechungsstelle in Bild 2.24 bestätigt.

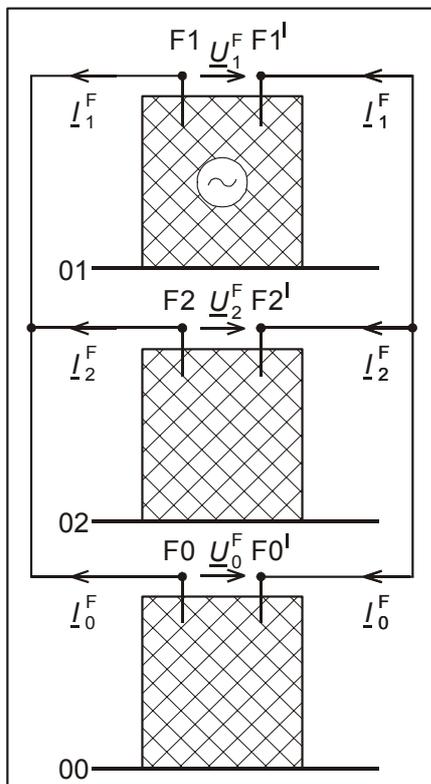


Bild 2.24: Schaltung der Komponentennetze für Unterbrechung im Leiter a

In Analogie zu Gl. (2.28) (jedoch mit anderen Admittanzen/Impedanzen und Quellengrößen) erhält man für die Spannungskomponenten:

$$\underline{U}_1^F = \underline{U}_2^F = \underline{U}_0^F = \frac{\underline{I}_{1k}^F}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_0 \underline{Z}_1} \underline{U}_{1l}^F \quad (2.50)$$

und für die Stromkomponenten:

$$\begin{aligned}
 I_{-1}^F &= \frac{Y_2 + Y_0}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F \\
 I_{-2}^F &= -\frac{Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F \\
 I_{-0}^F &= -\frac{Y_0}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

sowie für \underline{U}_a^F , \underline{I}_b^F und \underline{I}_c^F durch Rücktransformation:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_a^F &= \frac{3}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F = \frac{3Z_2 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} \underline{U}_{1l}^F \\
 \underline{I}_b^F &= \frac{(a^2 - a)Y_2 + (a^2 - 1)Y_0}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F = \frac{(a^2 - 1)Z_2 + (a^2 - a)Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} \underline{U}_{1l}^F \\
 \underline{I}_c^F &= \frac{(a - a^2)Y_2 + (a - 1)Y_0}{Y_1 + Y_2 + Y_0} I_{-1k}^F = \frac{(a - 1)Z_2 + (a - a^2)Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} \underline{U}_{1l}^F
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

Für $Y_0 = 0$ ($Z_0 \rightarrow \infty$) (Netz mit freien Sternpunkten) gehen die Gln. (2.52) über in:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_a^F &= \frac{3Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{U}_{1l}^F \\
 \underline{I}_b^F &= -\underline{I}_c^F = \frac{(a^2 - 1)}{Z_1 + Z_2} \underline{U}_{1l}^F = -j\sqrt{3} \frac{\underline{U}_{1l}^F}{Z_1 + Z_2}
 \end{aligned}$$

2.3.3 Zweipolige Unterbrechung

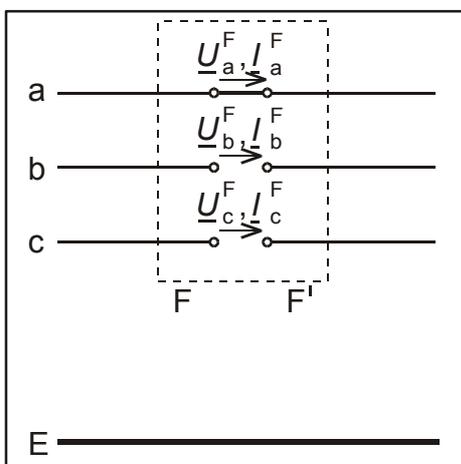


Bild 2.25: Fehlerbedingungen für 2-polige Unterbrechung

Ausgehend von Bild 2.25 ergeben sich folgende Fehlerbedingungen:

$$\begin{array}{|l} \underline{U}_a^F = 0 \\ \underline{I}_b^F = 0 \\ \underline{I}_c^F = 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|l} \underline{U}_1^F + \underline{U}_2^F + \underline{U}_0^F = 0 \\ \underline{I}_2^F = \underline{I}_1^F \\ \underline{I}_0^F = \underline{I}_2^F \end{array} \quad (2.53) \quad (2.54)$$

Die Fehlerbedingungen sind dual zu denen der 1-poligen Unterbrechung und analog zu denen des 1-poligen Erdkurzschlusses im Leiter a. Nach Gl. (2.54) werden die Komponentennetze an der Unterbrechungsstelle in Reihe geschaltet (Bild 2.26).

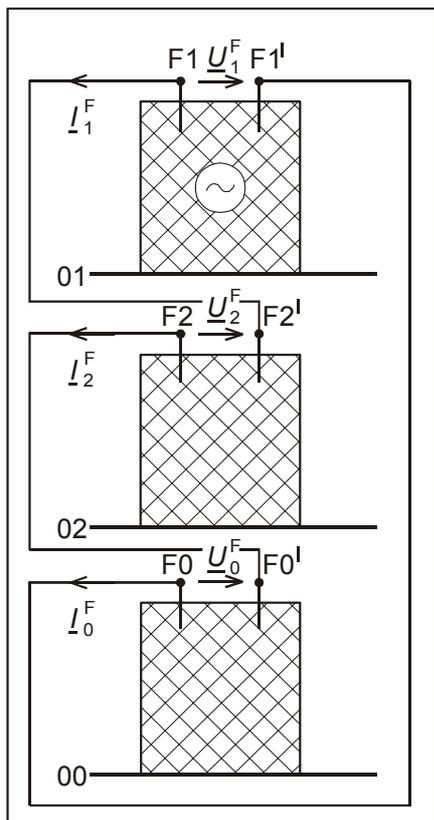


Bild 2.26: Schaltung der Komponentennetze für Unterbrechung in den Leitern b und c

Für die nicht durch die Fehlerbedingungen bestimmten Größen an der Unterbrechungsstelle folgt aus der Rechnung oder sofort aus der Analogie zu den Gln. (2.19) (2.23) und (2.24) für den 1-poligen Erdkurzschluß:

$$\begin{array}{|l} \underline{I}_a^F = \frac{3\underline{U}_{11}^F}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \\ \underline{U}_b^F = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a})\underline{Z}_2 + (\underline{a}^2 - 1)\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}^F, \\ \underline{U}_c^F = \frac{(\underline{a} - \underline{a}^2)\underline{Z}_2 + (\underline{a} - 1)\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}^F \end{array} \quad (2.55)$$

wobei \underline{U}_{11}^F wieder die Leerlaufspannung des Mitsystems an der Unterbrechungsstelle ist.

Der Fall $\underline{Y}_0 = 0$ ($\underline{Z}_0 \rightarrow \infty$) (Netz mit freiem Sternpunkten) führt dazu, daß auch

$\underline{I}_a^F = 0$ wird und die Ausdrücke für die Spannungen übergehen in:

$$\underline{U}_b^F = (\underline{a}^2 - 1)\underline{U}_{11}^F \quad \text{und} \quad \underline{U}_c^F = (\underline{a} - 1)\underline{U}_{11}^F.$$

2.3.4 Berücksichtigung von Fehleradmittanzen

Bestehen die Querfehler nicht in einer vollständige Unterbrechung, sondern lediglich in wesentlichen Widerstandserhöhungen, so können die erhöhten Widerstände durch endliche Admittanzen \underline{Y}_F an der Fehlerstelle nachgebildet werden.

Aus der Fehlerbedingung $I_a^F = 0$ bei der 1-poligen Unterbrechung wird dann:

$$I_a^F - \underline{Y}_F U_a^F = 0 \tag{2.56}$$

Die beiden anderen Bedingungen: $\underline{U}_b^F = \underline{U}_c^F = 0$ bleiben bestehen. Nach Einführung der symmetrischen Komponenten in Gl. (2.56) geht diese über in:

$$(I_1^F - \underline{Y}_F U_1^F) + (I_2^F - \underline{Y}_F U_2^F) + (I_0^F - \underline{Y}_F U_0^F) = 0 \tag{2.57}$$

Zusammen mit den unveränderten Bedingungen $\underline{U}_2^F = \underline{U}_1^F = \underline{U}_0^F$ bedeutet die Gl. (2.57) eine Parallelschaltung der Komponentennetze und Fehleradmittanzen entsprechend Bild 2.27.

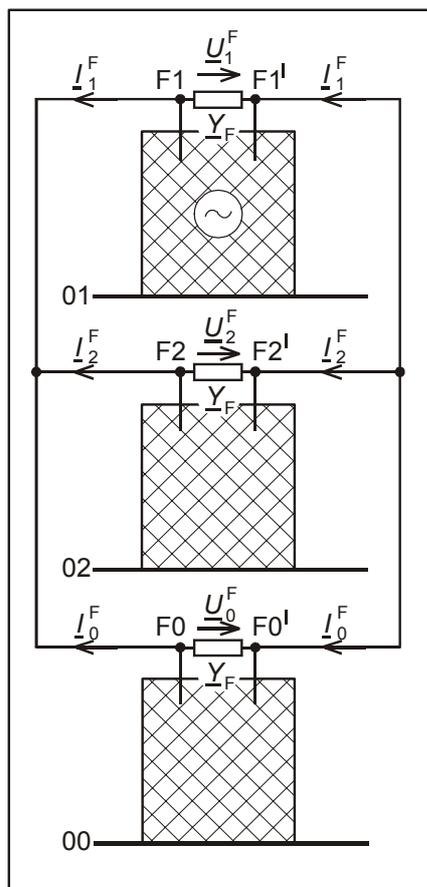


Bild 2.27: Parallelschaltung der Komponentennetze bei 1-poligem Längsfehler mit \underline{Y}_F im Leiter a

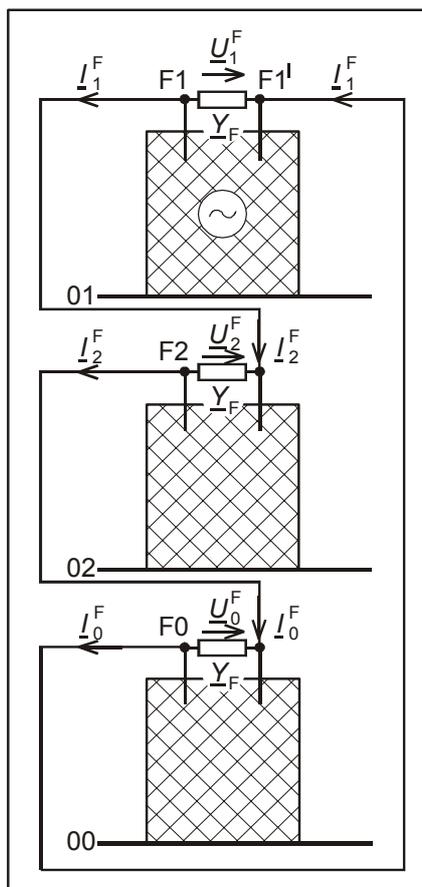


Bild 2.28: Reihenschaltung der Komponentennetze bei 2-poligem Längsfehler mit \underline{Y}_F in den Leitern b und c

Zur Berechnung 2-poliger Längsfehler mit je \underline{Y}_F in den Leitern b und c werden die Komponentennetze wie in Bild 2.28 unter Berücksichtigung von \underline{Y}_F in Reihe geschaltet.

Unter Zugrundelegung der Admittanzersatzschaltungen für die Komponentennetze (im Mitsystem mit Stromquelle) kann man die Fehleradmittanzen \underline{Y}_F mit den Toradmittanzen \underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 und \underline{Y}_0 zusammenfassen zu:

$$\underline{Y}'_1 = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_F$$

$$\underline{Y}'_2 = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_F$$

$$\underline{Y}'_0 = \underline{Y}_0 + \underline{Y}_F$$

und mit diesen modifizierten Admittanzen die Spannungen an den Unterbrechungsstellen und die Ströme \underline{I}'_1 , \underline{I}'_2 und \underline{I}'_0 wie für die Unterbrechungen ohne Fehleradmittanz berechnen. Die Ströme sind dann noch entsprechend der Stromteilerregel aufzuteilen.

2.3.5 Überlagerungsverfahren

Beim Überlagerungsverfahren werden für die Berechnung von Unterbrechungen in die Unterbrechungsstelle zunächst zwei gleich große Stromquellen \underline{I}_q antiparallel eingebracht. Ihre Wirkung auf das aktive und passiv gemachte Netz wird einzeln berechnet und anschließend werden die Ergebnisse überlagert. Das Bild 2.28 demonstriert diese Schritte am Beispiel der dreipoligen Unterbrechung, für die nur das Mitsystem betrachtet zu werden braucht.

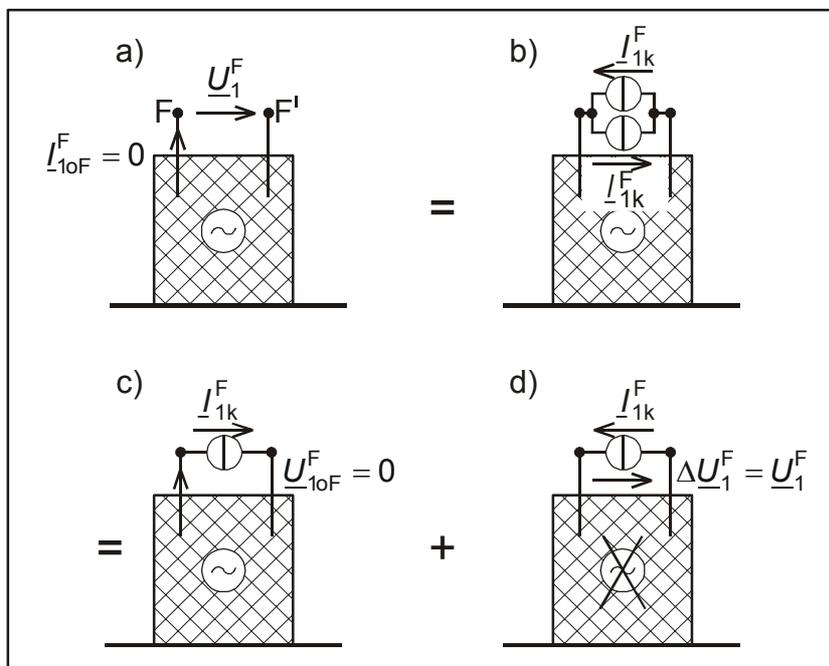


Bild 2.29: Überlagerung der beiden Zustände „Zustand vor Unterbrechung“ und „Rückwärtseinspeisung“ zum Unterbrechungszustand
 a) und b) Unterbrechungszustand c) Zustand vor Unterbrechung (oF)
 d) Änderungszustand mit Rückwärtseinspeisung (8)

Für $\underline{I}_q = \underline{I}'_{1k} = \underline{I}'_{aoF}$ (Strom im Leiter a zwischen F und F' vor der Unterbrechung) beschreibt Bild 2.29c genau den stationären Zustand vor der Unterbrechung mit

$\underline{U}_{10F}^F = 0$. Der als Änderungs- oder Rückwärtseinspeisung bezeichnete Zustand in Bild 2.29d mit $\Delta I_{-1}^F = -I_{-1k}^F = -I_{-a0F}^F$ ergibt wegen $\underline{U}_{10F}^F = 0$ vor der Unterbrechung genau die an der Unterbrechungsstelle entstehende Spannung $\underline{U}_1^F = \Delta \underline{U}_1^F$.

Da man sich in den meisten Fällen nur für die Spannung an der Unterbrechungsstelle interessiert (z. B. für die Ermittlung der betriebsfrequenten Wiederkehrspannung über den Schalterpolen bei Schaltvorgängen), genügt somit die Berechnung des Zustandes Rückwärtseinspeisung¹⁾.

Die Zustände Rückwärtseinspeisung für die 1-polige und die 2-polige Unterbrechung sind in den Bildern 2.30 und 2.31 dargestellt.

Nach Bild 2.30 berechnen sich die Spannung an den Unterbrechungsstellen in Übereinstimmung mit Gl. (2.50) zu:

$$\underline{U}_1^F = \Delta \underline{U}_1^F = \Delta \underline{U}_2^F = \Delta \underline{U}_0^F = \frac{I_{-1k}^F}{Y_1 + Y_2 + Y_0} = \frac{Z_2 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} \underline{U}_{11}^F.$$

Die Rücktransformation ergibt:

$$\underline{U}_a^F = \Delta \underline{U}_a^F = 3 \underline{U}_1^F = \frac{3 Z_2 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} \underline{U}_{11}^F.$$

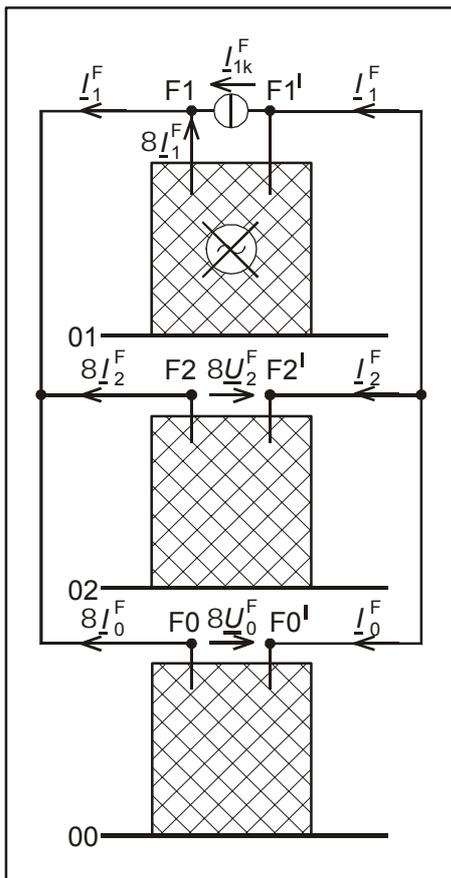


Bild 2.30: Zustand Rückwärtseinspeisung bei 1-poliger Unterbrechung

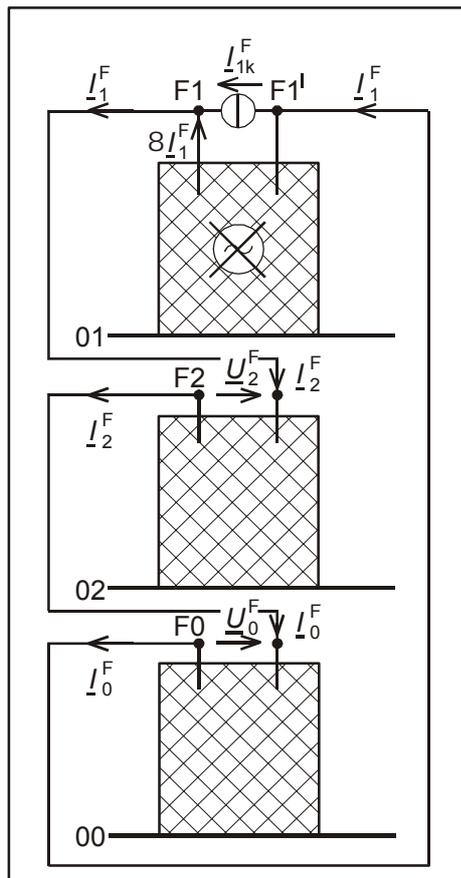


Bild 2.31: Zustand Rückwärtseinspeisung bei 2-poliger Unterbrechung

¹⁾ Die Vorgehensweise ist analog zur Berechnung des Kurzschlußstromes an der Kurzschlußstelle.

2.4 Mehrfach-Querfehler*

2.4.1 Verallgemeinerung der Fehlerbedingungen

Bei unsymmetrischen Mehrfachfehlern kann nur noch *ein* (beliebiger) Fehler symmetrisch zum Bezugsleiter a gelegt werden, also wie ein Hauptfehler behandelt werden. Liegen die Fehler nicht symmetrisch zum Bezugsleiter, so enthalten die Fehlerbedingungen die Versoren \underline{a} und \underline{a}^2 . In allgemeiner Form (für beliebige Lage des Fehlers) lassen sich die Fehlerbedingungen mit einem komplexen Faktor $\underline{\alpha}$ nach Tabelle 2.2 wie folgt angeben.

Für *Serienfehler* (1-poliger Erdkurzschluß und 2-polige Unterbrechung):

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} \underline{U}_1^F + \underline{\alpha}^* \underline{U}_2^F + \underline{U}_0 &= 0 \\ \underline{\alpha}^* \underline{I}_2^F &= \underline{\alpha} \underline{I}_1^F \\ \underline{I}_0^F &= \underline{\alpha}^* \underline{I}_2^F \end{aligned} \quad (2.58)$$

und für die *Parallelfehler* (2-poliger Kurzschluß und 1-polige Unterbrechung):

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} \underline{I}_1^F + \underline{\alpha}^* \underline{I}_2^F + \underline{I}_0 &= 0 \\ \underline{\alpha}^* \underline{U}_2^F &= \underline{\alpha} \underline{U}_1^F \\ \underline{U}_0^F &= \underline{\alpha}^* \underline{U}_2^F \end{aligned} \quad (2.59)$$

Tabelle 2.2: Komplexer Faktor in den Fehlerbedingungen der unsymmetrischen Fehler. Die Hauptfehler sind hervorgehoben (1. Zeile).

Querfehler/Längsfehler	1-polig	2-polig	$\underline{\alpha}$
Leiter	a	b - c	1
	b	c - a	\underline{a}^2
	c	a - b	\underline{a}

Die Gln. (2.58) und (2.59) können wieder als Reihen- und Parallelschaltung der Komponentennetze an der Fehlerstelle interpretiert werden, wobei jedoch komplexe Übertrager mit vorzusehen sind (Bild 2.32).

Ein komplexer Übertrager überträgt die Spannungen mit \underline{u} und die Ströme mit $1/\underline{u}^*$. Da $1/\underline{\alpha}^* = \underline{\alpha}$ und $1/\underline{\alpha}^{2*} = \underline{\alpha}^2$ ist, erscheint an den Spannungen und Strömen eines Komponentennetzes stets der gleiche komplexe Faktor. Die Nullsystemgrößen bleiben unverändert. Das Auftreten komplexer Übertrager bei Mehrfachfehlern ist ein wesentlicher Nachteil der klassischen Fehlerberechnung mit symmetrischen Komponenten. Man wendet deshalb in der Netzberechnung geeignetere Verfahren an (s. Skript Netzberechnung).

Als Beispiel für die klassische Berechnung von ungleichpoligen Doppelfehlern mit symmetrischen Komponenten soll i. f. der nicht seltene Doppelerdkurzschluß betrachtet werden.

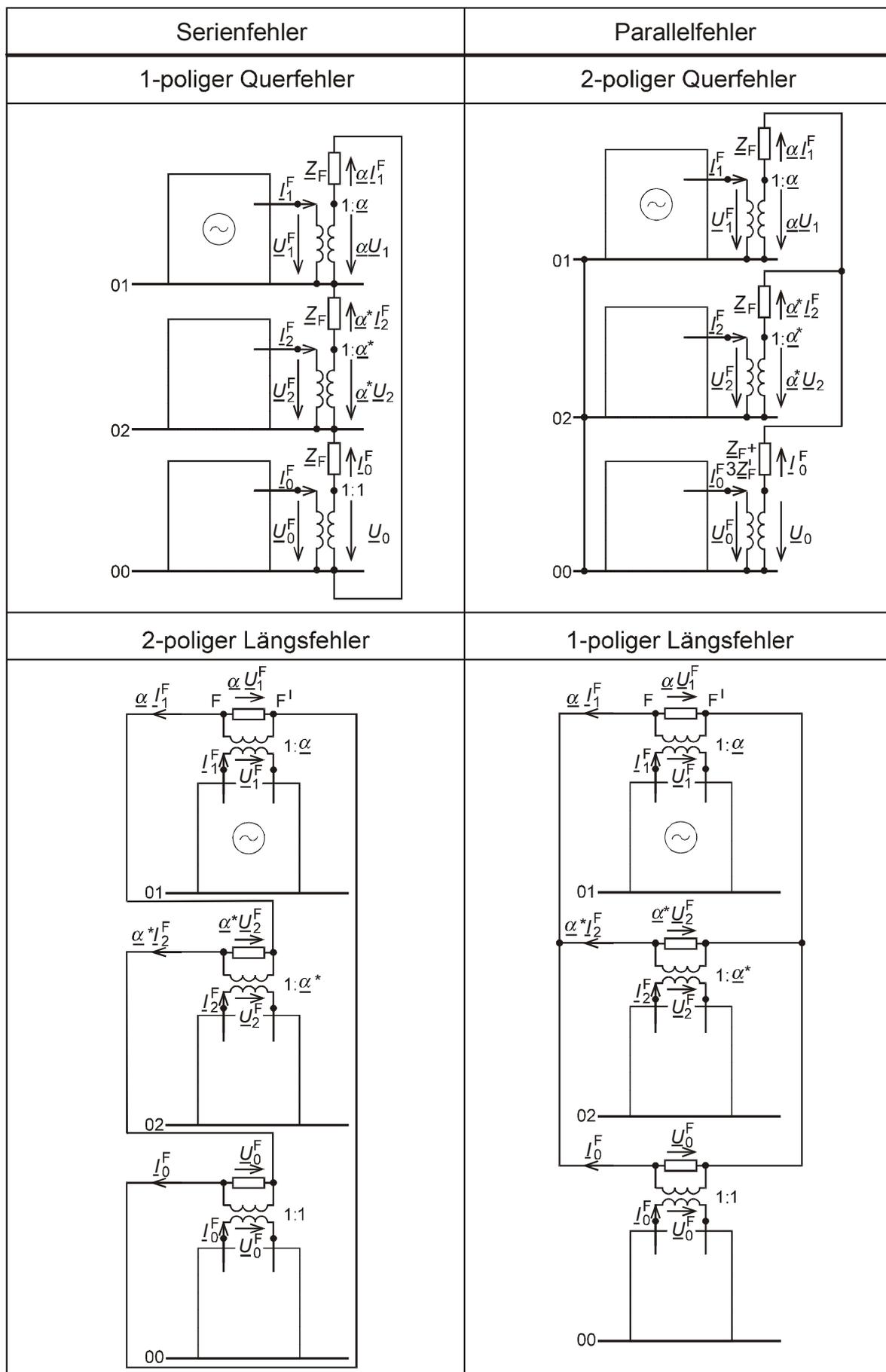


Bild 2.32: Allgemeine Komponenten-Ersatzschaltungen für die unsymmetrischen Quer- u. Längsfehler

2.4.2 Doppelerdkurzschluß

In Netzen mit freien Sternpunkten oder Erdschlußkompensation tritt der Doppelerdkurzschluß häufig als Folge der transienten Überspannungen beim Eintritt des ersten Erdschlusses oder als Folge der länger anstehenden betriebsfrequenten Spannungsüberhöhungen in den gesunden Leitern auf.

Wenn die Erschlußfußpunkte dicht beieinander liegen (Abstand l klein in Bild 2.33), kann der Doppelerdkurzschlußstrom I''_{kEE} die Größenordnung des Kurzschlußstromes I''_{kE2E} beim 2-poligen Erdkurzschluß erreichen.

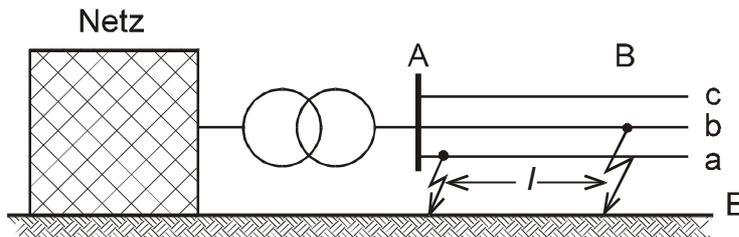


Bild 2.33: Beispiel zur Berechnung des Doppelerdschlusses

Die Fehlerbedingungen an den Fehlerstellen A und B in Bild 2.33 lauten nach Gl. (2.58) und $\underline{\alpha}$ nach Tabelle 2.2:

$$\text{A: } \underline{U}_1^A + \underline{U}_2^A + \underline{U}_0^A = 0; \quad \underline{I}_1^A = \underline{I}_2^A = \underline{I}_0^A \quad (2.60a) \quad (2.60b)$$

$$\text{B: } \underline{a}^2 \underline{U}_1^B + \underline{a} \underline{U}_2^B + \underline{U}_0^B = 0; \quad \underline{a}^2 \underline{I}_1^B = \underline{a} \underline{I}_2^B = \underline{I}_0^B \quad (2.61a) \quad (2.61b)$$

Die entsprechenden Schaltungen der Komponentennetze an den Fehlerstellen zeigt Bild 2.34. Die Netz- und Transformatorimpedanzen sind in \underline{Z}_1^A , \underline{Z}_2^A und \underline{Z}_0^A zusammengefaßt, und die Leitung ist vereinfacht nur durch ihre Längsimpedanzen \underline{Z}_1^L , \underline{Z}_2^L und \underline{Z}_0^L nachgebildet. Die Spannungsquelle des Netzes ist mit \underline{U}_{q1} bezeichnet.

Insgesamt sind 12 Unbekannte (6 Spannungen und 6 Ströme) an den beiden Fehlerstellen A und B zu berechnen. 6 Gleichungen dazu liefern die Fehlerbedingungen (Gl. (2.60) und (2.61)). Die restlichen 6 Gleichungen werden mit Hilfe der Maschen- und Knotensätze an den Komponentennetzen formuliert (in größeren Netzen allgemein als Vierpolgleichungen für jedes Komponentennetz):

$$\underline{U}_1^A = -\underline{Z}_1^A (\underline{I}_1^A + \underline{I}_1^B) + \underline{U}_{q1} \quad (2.62a)$$

$$\underline{U}_2^A = -\underline{Z}_2^A (\underline{I}_2^A + \underline{I}_2^B) \quad (2.62b)$$

$$\underline{U}_0^A = -\underline{Z}_0^A (\underline{I}_0^A + \underline{I}_0^B) \quad (2.62c)$$

$$\underline{U}_1^B = -\underline{Z}_1^A (\underline{I}_1^A + \underline{I}_1^B) - \underline{Z}_1^L \underline{I}_1^B + \underline{U}_{q1} \quad (2.63a)$$

$$\underline{U}_2^B = -\underline{Z}_2^A (\underline{I}_2^A + \underline{I}_2^B) - \underline{Z}_2^L \underline{I}_2^B \quad (2.63b)$$

$$\underline{U}_0^B = -\underline{Z}_0^A (\underline{I}_0^A + \underline{I}_0^B) - \underline{Z}_0^L \underline{I}_0^B \quad (2.63c)$$

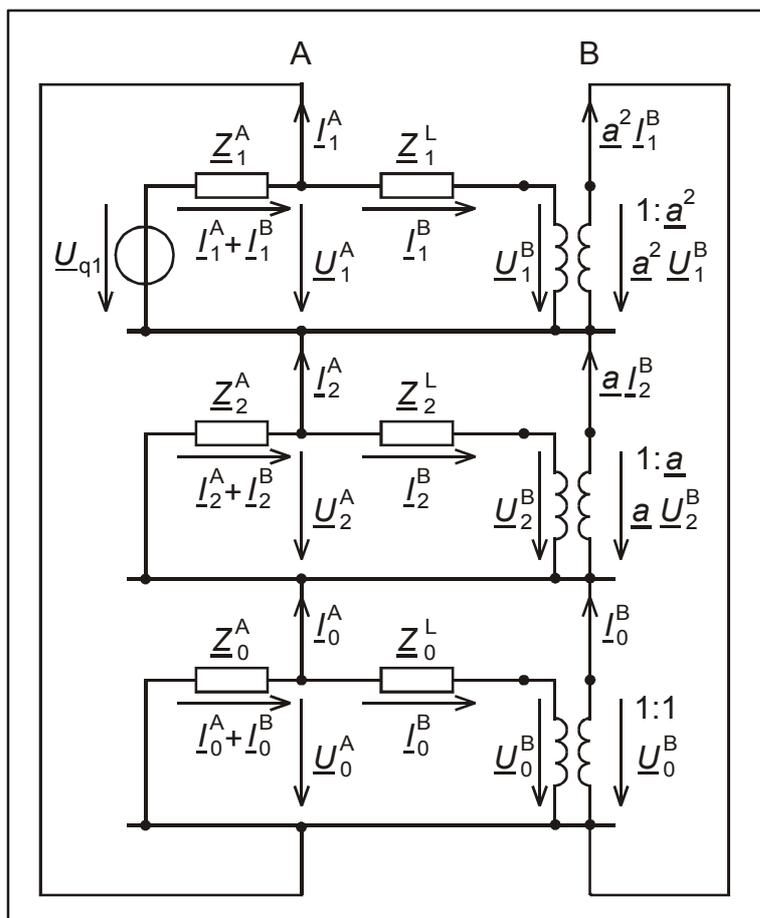


Bild 2.34: Schaltung der Komponentennetze für den Doppelerdkurzschluß in Bild 2.33

Die Addition der Gln. (2.62) ergibt unter Berücksichtigung von $I_{-1}^A = I_{-2}^A = I_{-0}^A$:

$$0 = \underline{U}_{q1} - (\underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A + \underline{Z}_0^A) I_{-1}^A - (\underline{Z}_1^A + \underline{a} \underline{Z}_2^A + \underline{a}^2 \underline{Z}_0^A) I_{-1}^B \tag{2.64}$$

Die Gl. (2.63a) wird mit \underline{a}^2 und die Gl. (2.63b) mit \underline{a} multipliziert. Ihre Addition mit der Gl. (2.63c) liefert unter Berücksichtigung von $\underline{a}^2 I_{-1}^B = \underline{a} I_{-2}^B = I_{-0}^B$:

$$0 = \underline{a}^2 \underline{U}_{q1} - (\underline{a}^2 \underline{Z}_1^A + \underline{a} \underline{Z}_2^A + \underline{Z}_0^A) I_{-1}^A - (\underline{Z}_1^A + \underline{Z}_1^L + \underline{Z}_2^A + \underline{Z}_2^L + \underline{Z}_0^A + \underline{Z}_0^L) \underline{a}^2 I_{-1}^B \tag{2.65}$$

Die Gln. (2.64) und (2.65) werden nach den beiden Unbekannten I_{-1}^A und I_{-1}^B geordnet:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A + \underline{Z}_0^A & \underline{Z}_1^A + \underline{a} \underline{Z}_2^A + \underline{a}^2 \underline{Z}_0^A \\ \underline{Z}_1^A + \underline{a}^2 \underline{Z}_2^A + \underline{a} \underline{Z}_0^A & \underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A + \underline{Z}_0^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{-1}^A \\ I_{-1}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{1q} \\ \underline{U}_{1q} \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

wobei zur Abkürzung

$$\underline{Z}_1^B = \underline{Z}_1^A + \underline{Z}_1^L, \quad \underline{Z}_2^B = \underline{Z}_2^A + \underline{Z}_2^L \quad \text{und} \quad \underline{Z}_0^B = \underline{Z}_0^A + \underline{Z}_0^L$$

eingeführt wurden. Schließlich ergibt die Auflösung nach den beiden Strömen an den Erdschlußstellen:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1^A \\ \underline{I}_1^B \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}^2} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1^B + \underline{Z}_2^B + \underline{Z}_0^B & | & -\underline{Z}_1^A - \underline{a}\underline{Z}_2^A - \underline{a}^2\underline{Z}_0^A \\ -\underline{Z}_1^A - \underline{a}^2\underline{Z}_2^A - \underline{a}\underline{Z}_0^A & | & \underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A + \underline{Z}_0^A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{q1} \\ \underline{U}_{q1} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

mit:

$$\underline{Z}^2 = (\underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A + \underline{Z}_0^A)(\underline{Z}_1^B + \underline{Z}_2^B + \underline{Z}_0^B) - (\underline{Z}_1^A + \underline{a}\underline{Z}_2^A + \underline{a}^2\underline{Z}_0^A)(\underline{Z}_1^B + \underline{a}^2\underline{Z}_2^B + \underline{a}\underline{Z}_0^B).$$

Abschließend sollen noch drei Sonderfälle diskutiert werden:

$$1) \underline{Z}_1^A = \underline{Z}_2^A = \underline{Z}_0^A \quad \text{und} \quad \underline{Z}_1^L = \underline{Z}_2^L = \underline{Z}_0^L \quad \text{d.h. auch} \quad \underline{Z}_1^B = \underline{Z}_2^B = \underline{Z}_0^B$$

Die Gleichungen für \underline{I}_1^A und \underline{I}_1^B werden entkoppelt, und es gilt:

$$\underline{I}_1^A = \underline{I}_2^A = \underline{I}_0^A = \frac{\underline{U}_{q1}}{3\underline{Z}_1^A} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I}_a^A = \frac{\underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1^A}$$

sowie:

$$\underline{I}_1^B = \underline{a}^2 \underline{I}_2^B = \underline{a} \underline{I}_0^B = \frac{\underline{U}_{q1}}{3\underline{Z}_1^B} \quad \text{bzw.} \quad \underline{I}_b^B = \frac{\underline{a}^2 \underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1^B}$$

Die Ströme an der Fehlerstelle nehmen Werte an, die denen des dreipoligen Kurzschlußstromes entsprechen.

$$2) \underline{Z}_0^A \rightarrow \infty \quad \text{d.h. Netz mit freiem Sternpunkt}$$

Das ist der eigentliche Fall des Doppelerdkurzschlusses. Der Grenzübergang an Gl. (2.67) ergibt:

$$\underline{I}_1^A = \frac{(1 - \underline{a}^2) \underline{U}_{q1}}{3(\underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A) + \underline{Z}_1^L + \underline{Z}_2^L + \underline{Z}_0^L} = \underline{I}_2^A = \underline{I}_0^A$$

$$\underline{I}_1^B = \frac{(1 - \underline{a}) \underline{U}_{q1}}{3(\underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A) + \underline{Z}_1^L + \underline{Z}_2^L + \underline{Z}_0^L} = \underline{a}^2 \underline{I}_2^B = \underline{a} \underline{I}_0^B$$

Es wird, wie man auch an Bild 2.34 sieht, $\underline{I}_0^A = -\underline{I}_0^B$. Die Rücktransformation liefert:

$$\underline{I}_a^A = 3 \underline{I}_1^A = \frac{3(1 - \underline{a}^2) \underline{U}_{q1}}{3(\underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A) + \underline{Z}_1^L + \underline{Z}_2^L + \underline{Z}_0^L}$$

$$\underline{I}_b^B = 3 \underline{I}_0^B = -\frac{3(1 - \underline{a}^2) \underline{U}_{q1}}{3(\underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A) + \underline{Z}_1^L + \underline{Z}_2^L + \underline{Z}_0^L} = -\underline{I}_a^A$$

3) $\underline{Z}_1^L = \underline{Z}_2^L = \underline{Z}_0^L = 0$ und $Z_0^A \rightarrow \infty$:

Der Doppelerdkurzschluß entartet zum 2-pol. Erdkurzschluß der Leiter a und b im Netz mit freiem Sternpunkt und man erhält wie erwartet:

$$\underline{I}_a^A = \frac{(1-\underline{a}^2)\underline{U}_{q1}}{\underline{Z}_1^A + \underline{Z}_2^A} = -\underline{I}_b^B$$

und für $\underline{Z}_2^A = \underline{Z}_1^A$ mit $1-\underline{a}^2 = \sqrt{3}\angle 30^\circ$:

$$\underline{I}_a^A = -\underline{I}_b^B = \frac{\sqrt{3}\underline{U}_{q1}\angle 30^\circ}{2\underline{Z}_1^A}$$

3 Fehlerberechnung mit Hilfe der Diagonal($\alpha\beta 0$)-Komponenten*

Die Vorgehensweise ist analog zu der mit symmetrischen Komponenten (s. Abschnitt 2.1). Die Transformationsmatrix und ihre Inverse lauten in bezugskomponenteninvarianter Form (s. Skript Modale Komponenten):

$$\mathbf{T}_D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_D^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1) \quad (3.2)$$

im Gegensatz zur Transformationsmatrix der symmetrischen Komponenten sind \mathbf{T}_D und \mathbf{T}_D^{-1} reell.

Ausgehend von den Fehlertorgleichungen der symmetrischen Komponentennetze (Gl. (2.1) oder (2.2)) erhält man die Fehlertorgleichungen für die $\alpha\beta 0$ -Komponenten in zwei Schritten. Im ersten Schritt erfolgt die Rücktransformation in Originalgrößen mit Gl. (2.10). Gl. (2.1) geht damit über in:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a^F \\ \underline{U}_b^F \\ \underline{U}_c^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{11}^F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a^F \\ \underline{I}_b^F \\ \underline{I}_c^F \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

und für $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a^F \\ \underline{U}_b^F \\ \underline{U}_c^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{11}^F \\ \underline{a}^2 \underline{U}_{11}^F \\ \underline{a} \underline{U}_{11}^F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a^F \\ \underline{I}_b^F \\ \underline{I}_c^F \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

mit: $\underline{Z}_s = \frac{1}{3}(\underline{Z}_0 + 2\underline{Z}_1)$ und $\underline{Z}_g = \frac{1}{3}(\underline{Z}_0 - \underline{Z}_1)$

Im zweiten Schritt erfolgt die Transformation der Gl. (3.4) in $\alpha\beta 0$ -Komponenten¹⁾:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_\alpha^F \\ \underline{U}_\beta^F \\ \underline{U}_0^F \end{bmatrix} = \mathbf{T}_D^{-1} \begin{bmatrix} \underline{U}_a^F \\ \underline{U}_b^F \\ \underline{U}_c^F \end{bmatrix} = \mathbf{T}_D^{-1} \begin{bmatrix} \underline{U}_{a1}^F \\ \underline{U}_{b1}^F \\ \underline{U}_{c1}^F \end{bmatrix} - \mathbf{T}_D^{-1} \begin{bmatrix} \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s \end{bmatrix} \mathbf{T}_D \begin{bmatrix} \underline{I}_\alpha^F \\ \underline{I}_\beta^F \\ \underline{I}_0^F \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Nach Ausmultiplikation der Matrizen erhält man:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_\alpha^F \\ \underline{U}_\beta^F \\ \underline{U}_0^F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{\alpha 1}^F \\ \underline{U}_{\beta 1}^F \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Z}_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_\alpha^F \\ \underline{I}_\beta^F \\ \underline{I}_0^F \end{bmatrix} \quad (3.5a)$$

mit:

¹⁾ Man hätte natürlich auch sofort von den Torbeziehungen der Originalgrößen (Gln. (3.4)) ausgehen können, doch sind diese weniger geläufig.

$$\underline{Z}_\alpha = \underline{Z}_\beta = \underline{Z}_s - \underline{Z}_g = \underline{Z}_1 \quad \text{und} \quad \underline{Z}_0 = \underline{Z}_s + 2\underline{Z}_g$$

sowie:

$$\underline{U}_{\alpha l}^F = \underline{U}_{1l}^F = \underline{U}_{al}^F \quad \text{und} \quad \underline{U}_{\beta l}^F = -j\underline{U}_{\alpha l}^F.$$

Der Gleichung (3.5) können in Analogie zu Bild 2.1 die Ersatzschaltungen in Bild 3.1 zugeordnet werden. Es ist zu beachten, daß jetzt auch im β -System eine Quellenspannung auftritt.

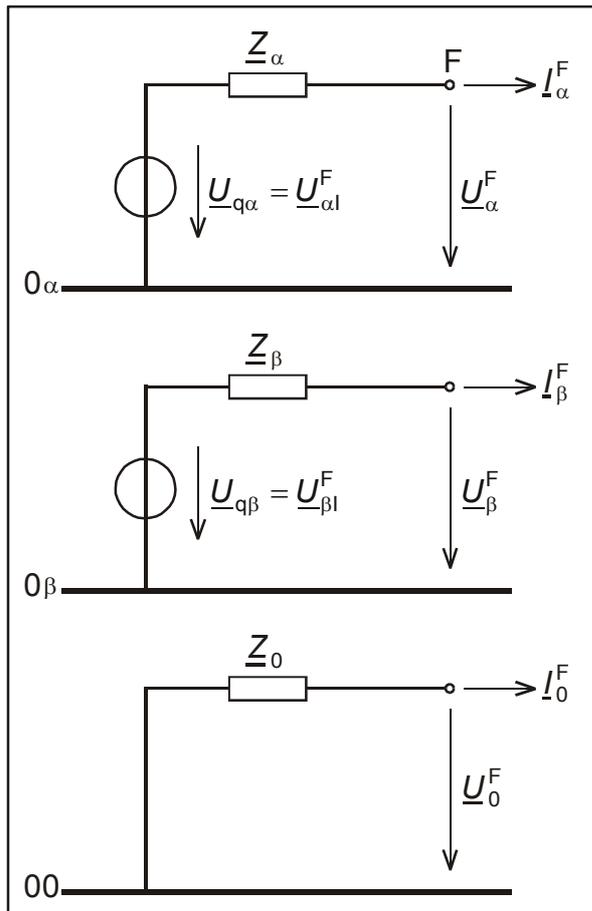


Bild 3.1: Ersatzschaltung der $\alpha\beta 0$ -Komponenten für den fehlerfreien Zustand

Der Vorgehensweise bei der Berechnung mit symmetrischen Komponenten entsprechend sind die Fehlerbedingungen für die $\alpha\beta 0$ -Komponenten zu formulieren. Im Anhang 5.5 sind die Fehlerbedingungen und die entsprechenden Schaltungen der Komponentennetze für die Hauptfehler zusammengestellt. Da die $\alpha\beta 0$ -Komponenten auch für Momentanwertrechnungen verwendet werden, sind die Beziehungen allgemein für die Momentanwerte angegeben. Sie gelten sinngemäß auch für Zeiger.

4 Fehlerberechnung mit Hilfe von Raumzeigern*

Raumzeiger sind *komplexe* modale Komponenten, die im Gegensatz zu den symmetrischen Komponenten, neben den UV0-Komponenten, zur Transformation der Momentanwerte der Ströme und Spannungen verwendet werden (s. Skript Modale Komponenten). Man bezeichnet die Raumzeiger deshalb auch als komplexe Momentanwerte. Die Transformationsmatrix und ihre Inverse lauten (Index klein s von space phasor):

$$\underline{T}_s = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{T}_s^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1) \quad (4.2)$$

Mit \underline{T}_s werden die natürlichen Größen, z.B. die Ströme, durch einen Raumzeiger in *ruhenden* Koordinaten \underline{i}_s , den dazu konjugiert komplexen Raumzeiger \underline{i}_s^* und ein *doppeltes* Nullsystem $2i_0$ ersetzt¹⁾. Also:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_s \\ \underline{i}_s^* \\ 2i_0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Umgekehrt gilt:

$$\begin{bmatrix} \underline{i}_s \\ \underline{i}_s^* \\ 2i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Aus Gl. (4.4) ist ersichtlich, daß die zweite modale Komponente immer der konjugiert komplexe Raumzeiger sein muß, da die zweite Zeile von \underline{T}_s^{-1} konjugiert komplex zur ersten Zeile ist, und der Vektor der Momentanwerte der natürlichen Größen reell ist.

Setzt man in Gl. (4.4) für $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ und für $\underline{a}^2 = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ein, so wird:

$$\underline{i}_s = \frac{2}{3}i_a - \frac{1}{3}(i_b + i_c) + j\frac{\sqrt{3}}{3}(i_b - i_c) = i_\alpha + j i_\beta \quad (4.5)$$

Der Realteil des Raumzeigers in ruhenden Koordinaten ist also mit der α -Komponente und der Imaginärteil mit der β -Komponente identisch. Ein Nullsystem trägt nicht zum Raumzeiger bei. Die Ähnlichkeit der Transformationsmatrix \underline{T}_s mit der der symmetrischen Komponenten (\underline{T}_s) führt dazu, daß die Fehlerbedingungen für die Raumzeigerkomponenten denen der symmetrischen Komponenten analog

¹⁾ Durch die Einführung doppelter Nullsystemgrößen nimmt die Matrix \underline{T}_s bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ die gleiche Form wie die der symmetrischen Komponenten an.

sind. Für den 1-pol. *Erdkurzschluß* folgt beispielsweise aus den Fehlerbedingungen (s. Gl. (2.7)):

$$\begin{aligned} u_a^F &= 0 \\ i_b^F &= 0 \\ i_c^F &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

für die Raumzeiger:

$$u_a^F = \frac{1}{2}(\underline{u}_s^F + \underline{u}_s^{F*} + 2u_0^F) = 0 \tag{4.7}$$

$$i_b^F = \frac{1}{2}(\underline{a}^2 i_s^F + \underline{a} i_s^{F*} + 2i_0^F) = 0 \tag{4.8}$$

$$i_c^F = \frac{1}{2}(\underline{a} i_s^F + \underline{a}^2 i_s^{F*} + 2i_0^F) = 0 \tag{4.9}$$

Die beiden letzten Gleichungen sind nur erfüllt für:

$$\underline{i}_s^F = i_s^{F*} = 2i_0^F \tag{4.10}$$

Die Gln. (4.7) und (4.10) bedeuten wie für die symmetrischen Komponentennetze eine *Reihenschaltung* der Raumzeigernetze an der Fehlerstelle. Für alle anderen Fehlerarten ergeben sich ebenfalls die gleichen Schaltungen der Komponentennetze an der Fehlerstelle wie für die symmetrischen Komponentennetze. Sie sind im Anhang 5.7 zusammengestellt.

5 Anhang: Transformationsbeziehungen und Fehlerbedingungen

- 5.1 Transformationsbeziehungen in bezugskomponenteninvarianter Form
- 5.2 Transformationsbeziehungen in leistungsinvarianter Form
- 5.3 Fehlerbedingungen für die symmetrischen Komponenten
- 5.4 Fehlerströme und -spannungen in symmetrischen Komponenten
- 5.5 Fehlerbedingungen für die Diagonal($\alpha\beta 0$)-Komponenten
- 5.6 Fehlerströme und -spannungen in Diagonal-Komponenten
- 5.7 Querfehler mit Raumzeigern in ruhenden Koordinaten

In den folgenden Tabellen ist der obere Index F (für Fehlerstelle) zur Vereinfachung überall weggelassen.

5.1 Transformationsbeziehungen in bezugskomponenteninvarianter Form

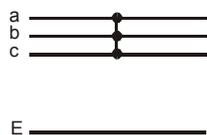
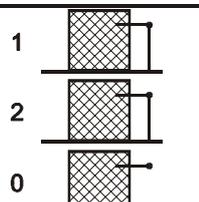
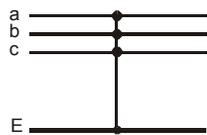
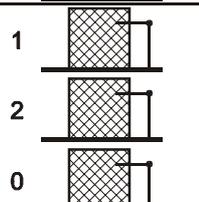
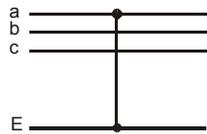
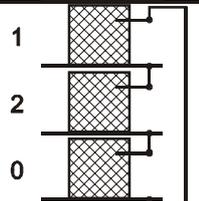
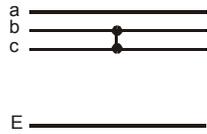
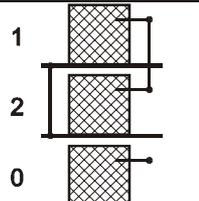
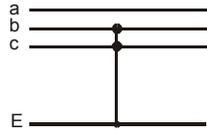
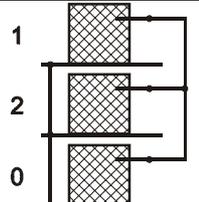
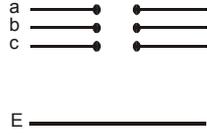
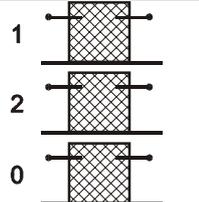
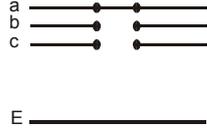
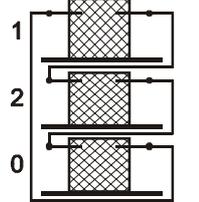
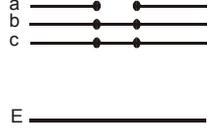
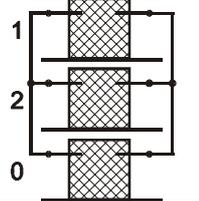
	$x \begin{bmatrix} \underline{G}_a & \underline{G}_b & \underline{G}_c \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{G}_1 & \underline{G}_2 & \underline{G}_0 \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{G}_U & \underline{G}_V & \underline{G}_0 \end{bmatrix}^T$
$\begin{bmatrix} \underline{G}_a \\ \underline{G}_b \\ \underline{G}_c \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{G}_1 \\ \underline{G}_2 \\ \underline{G}_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{G}_U \\ \underline{G}_V \\ \underline{G}_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

5.2 Transformationsbeziehungen in leistungsinvarianter Form

	$x \begin{bmatrix} \underline{G}_a & \underline{G}_b & \underline{G}_c \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{G}'_1 & \underline{G}'_2 & \underline{G}'_0 \end{bmatrix}^T$	$x \begin{bmatrix} \underline{G}'_U & \underline{G}'_V & \underline{G}'_0 \end{bmatrix}^T$
$\begin{bmatrix} \underline{G}_a \\ \underline{G}_b \\ \underline{G}_c \end{bmatrix} =$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{G}'_1 \\ \underline{G}'_2 \\ \underline{G}'_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \underline{G}'_U \\ \underline{G}'_V \\ \underline{G}'_0 \end{bmatrix} =$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$

In normierter Form ist $\underline{G}'_1 = \sqrt{3} \underline{G}_1 = \underline{G}_p$ (positive Komponente), $\underline{G}'_2 = \sqrt{3} \underline{G}_2 = \underline{G}_n$ (negative Komponente) und $\underline{G}'_0 = \sqrt{3} \underline{G}_0 = \underline{G}_h$ (Homopolarkomponente), und es gilt $\underline{T}'^{-1} = (\underline{T}'^*)^T$ d. h. \underline{T}' ist eine unitäre Matrix.

5.3 Fehlerbedingungen für die symmetrischen Komponenten

Fehlerart	Fehlerbedingungen				Schaltung der SK
	Originalsystem		Symmetr. Komponenten		
3 - pol. KS 	$\underline{U}_a - \underline{U}_b = 0$ $\underline{U}_b - \underline{U}_c = 0$ —	— — $\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$	$\underline{U}_1 = 0$ $\underline{U}_2 = 0$ —	— — $\underline{I}_0 = 0$	
3 - pol. EKS 	$\underline{U}_a = 0$ $\underline{U}_b = 0$ $\underline{U}_c = 0$	— — —	$\underline{U}_1 = 0$ $\underline{U}_2 = 0$ $\underline{U}_0 = 0$	— — —	
1 - pol. KS 	$\underline{U}_a = 0$ — —	— $\underline{I}_b = 0$ $\underline{I}_c = 0$	$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0$ — —	— $\underline{I}_2 = \underline{I}_1$ $\underline{I}_0 = \underline{I}_2$	
2 - pol. KS 	— — $\underline{U}_b - \underline{U}_c = 0$	$\underline{I}_a = 0$ $\underline{I}_b + \underline{I}_c = 0$ —	— — $\underline{U}_2 = \underline{U}_1$	$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0$ $\underline{I}_0 = 0$ —	
2 - pol. EKS 	— $\underline{U}_b = 0$ $\underline{U}_c = 0$	$\underline{I}_a = 0$ — —	— $\underline{U}_2 = \underline{U}_1$ $\underline{U}_0 = \underline{U}_2$	$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0$ — —	
3 - pol. UB 	— — —	$\underline{I}_a = 0$ $\underline{I}_b = 0$ $\underline{I}_c = 0$	— — —	$\underline{I}_1 = 0$ $\underline{I}_2 = 0$ $\underline{I}_0 = 0$	
2 - pol. UB 	$\underline{U}_a = 0$ — —	— $\underline{I}_b = 0$ $\underline{I}_c = 0$	$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_0 = 0$ — —	— $\underline{I}_2 = \underline{I}_1$ $\underline{I}_0 = \underline{I}_2$	
1 - pol. UB 	— $\underline{U}_b = 0$ $\underline{U}_c = 0$	$\underline{I}_a = 0$ — —	— $\underline{U}_2 = \underline{U}_1$ $\underline{U}_0 = \underline{U}_2$	$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_0 = 0$ — —	

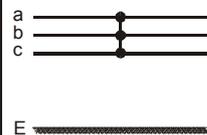
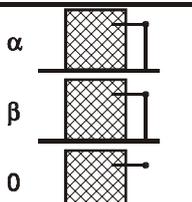
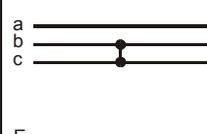
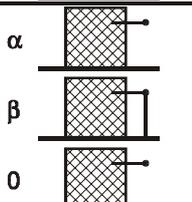
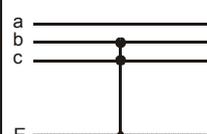
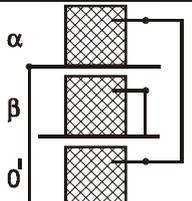
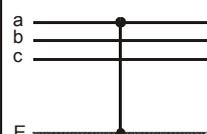
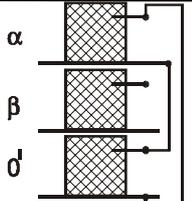
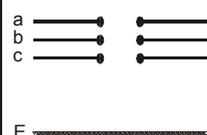
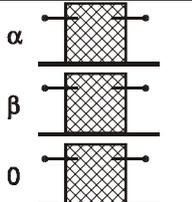
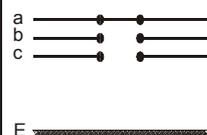
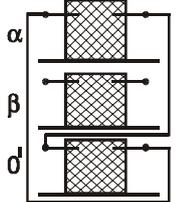
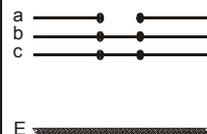
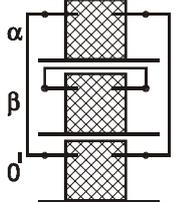
5.4 Fehlerströme und -spannungen in symmetrischen Komponenten

Serienfehler	Parallelfehler
1-pol. Erd(kurz)schluß ($\underline{U}_{11} = \underline{Z}_1 \underline{I}_{k3}$) 2-pol. Unterbrechung ($\underline{U}_{11} = \underline{Z}_1 \underline{I}_{\text{aoF}}$)	2-pol. Erdkurzschluß ($\underline{I}_{1k} = \underline{I}_{k3}$) 1-pol. Unterbrechung ($\underline{I}_{1k} = \underline{I}_{\text{aoF}}$)
$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}$	$\underline{I}_a = 0$
$\underline{U}_2 = \frac{-\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}$	$\underline{I}_b = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a}) \underline{Y}_2 + (\underline{a}^2 - 1) \underline{Y}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$
$\underline{U}_0 = -\underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \frac{-\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}$	$\underline{I}_c = \frac{(\underline{a} - \underline{a}^2) \underline{Y}_2 + (\underline{a} - 1) \underline{Y}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$
$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \underline{U}_{11}$	$\underline{U}_a = \frac{3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_0} \underline{I}_{1k}$
$\underline{I}_2 = 0$	$\underline{U}_b = 0$
$\underline{I}_0 = 0$	$\underline{U}_c = 0$

Fehlerströme und -spannungen in symmetrischen Komponenten (Fortsetzung)

<p>2-pol. Erdkurzschluß ($I_{1k} = I_{k3}'' = U_{11} / Z_1$) 1-pol. Unterbrechung ($I_{1k} = I_{aoF} = U_{11} / Z_1$)</p>	<p>$I_1 = \frac{(Z_2 + Z_0) Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$ $I_2 = \frac{-Z_0 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$ $I_0 = \frac{-Z_2 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$</p>	<p>$I_a = 0$ $I_b = \frac{(\underline{a}^2 - 1) Z_1 Z_2 + (\underline{a}^2 - \underline{a}) Z_1 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$ $I_c = \frac{(\underline{a} - 1) Z_1 Z_2 + (\underline{a} - \underline{a}^2) Z_1 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} I_{1k}$ $U_a = \frac{3 Z_2 Z_0}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_0 + Z_0 Z_1} U_{11}$ $U_b = 0$ $U_c = 0$</p>
<p>2-pol. Kurzschluß ($I_{1k} = I_{k3}'' = U_{11} / Z_1$)</p>	<p>$I_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_{1k}$ $I_2 = -I_1$ $I_0 = 0$</p>	<p>$U_a = \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} U_{11}$ $U_b = U_1$ $U_c = 0$ $U_0 = 0$ (Z_0 endlich)</p>
	<p>$I_a = 0$ $I_b = (\underline{a}^2 - \underline{a}) I_{1k} = -j\sqrt{3} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I_{1k}$ $I_c = -I_b$</p>	

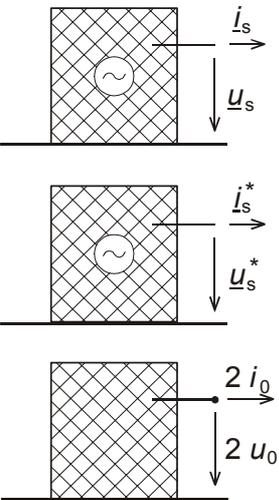
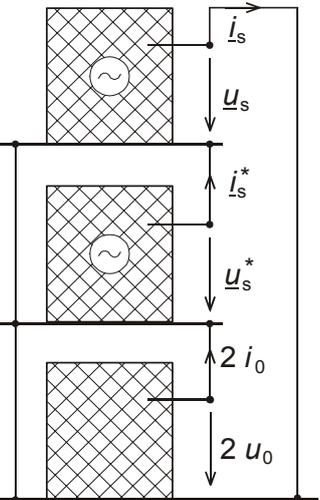
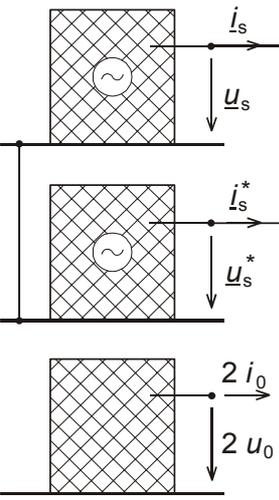
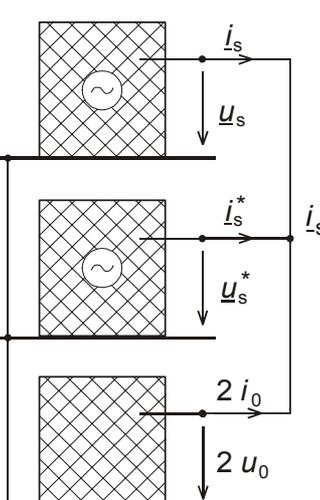
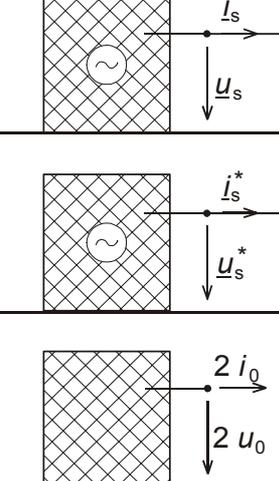
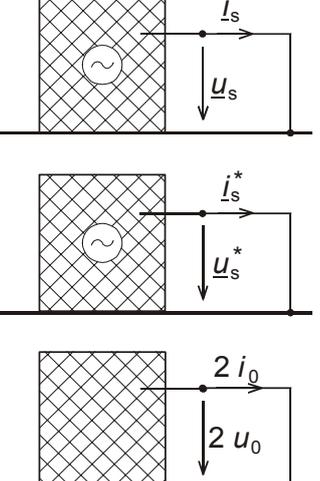
5.5 Fehlerbedingungen für die Diagonal($\alpha\beta 0$)-Komponenten

Fehlerart	Fehlerbedingungen				Schaltung der UV0-Kompon.
	Originalsystem		Diagonal-Komponenten		
3 - pol. KS 	$u_a - u_b = 0$ $u_b - u_c = 0$	$i_a + i_b + i_c = 0$	$u_U = 0$ $u_V = 0$	$i_0 = 0$	
2 - pol. KS 	$u_b - u_c = 0$	$i_a = 0$ $i_b + i_c = 0$	$u_V = 0$	$i_U = 0$ $i_0 = 0$	
2 - pol. EKS 	$u_b = 0$ $u_c = 0$	$i_a = 0$	$u_V = 0$ $u'_0 = u_U$	$i_U + i'_0 = 0$	
1 - pol. KS 	$u_a = 0$	$i_b = 0$ $i_c = 0$	$u_\alpha + u'_0 = 0$	$i_V = 0$ $i'_0 = i_U$	
3 - pol. UB 		$i_a = 0$ $i_b = 0$ $i_c = 0$		$i_U = 0$ $i_V = 0$ $i_0 = 0$	
2 - pol. UB 	$u_a = 0$	$i_b = 0$ $i_c = 0$	$u_\alpha + u'_0 = 0$	$i_V = 0$ $i'_0 = i_U$	
1 - pol. UB 	$u_b = 0$ $u_c = 0$	$i_a = 0$	$u_V = 0$ $u'_0 = u_U$	$i_U + i'_0 = 0$	
Umgerechnete Nullsystemgrößen (Strichgrößen)	1-pol. KS und 2-pol. UB		2-pol. EKS und 1-pol. UB		
u'_0 i'_0	u_0 $2i_0$		$2u_0$ i_0		

5.6 Fehlerströme und -spannungen in Diagonal-Komponenten

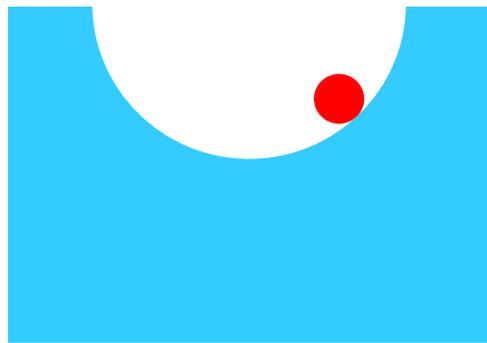
1-pol. Kurzschluß		2-pol. Erdkurzschluß	
$U_U = \frac{Z_0}{2Z_U + Z_0} U_{U1}$ $U_V = U_V^1 = -j U_{U1}$ $U_0 = -U_U$	$U_a = 0$ $U_b = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a}) Z_U + (\underline{a}^2 - 1) Z_0}{2 Z_U + Z_0} U_{U1}$ $U_c = \frac{(\underline{a} - \underline{a}^2) Z_U + (\underline{a} - 1) Z_0}{2 Z_U + Z_0} U_{U1}$	$I_U = \frac{Y_0}{2 Y_U + Y_0} I_{UK}$ $I_V = I_V^k = -j I_{UK}$ $I_0 = -I_U$	$I_a = 0$ $I_b = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a}) Y_U + (\underline{a}^2 - 1) Y_0}{2 Y_U + Y_0} I_{UK}$ $I_c = \frac{(\underline{a} - \underline{a}^2) Y_U + (\underline{a} - 1) Y_0}{2 Y_U + Y_0} I_{UK}$
$I_U = \frac{1}{Z_U + \frac{1}{2} Z_0} U_{U1}$ $I_V = 0$ $I_0 = \frac{1}{2} I_U$	$I_a = \frac{3 U_{U1}}{2 Z_U + Z_0}$ $I_b = 0$ $I_c = 0$	$U_a = \frac{3 I_{UK}}{2 Y_U + Y_0}$ $U_b = 0$ $U_c = 0$	$U_a = 0$ $U_b = 0$ $U_c = 0$
$U_{U1} = U_{11} \quad Z_U = Z_1$	$\text{für Netze mit } Z_2 = Z_1$	$I_{UK} = Y_U U_{U1} = I_{K3}''$	(Leiter a)

5.7 Querfehler mit Raumzeigern in ruhenden Koordinaten

Fehlerfrei	1-pol. Erd(kurz)schluß
 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $i_s = 0$ $i_s^* = 0$ $2i_0 = 0$ </div> </div>	 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $u_s + u_s^* + 2u_0 = 0$ $i_s = i_s$ $2i_0 = i_s$ </div> </div>
2-pol. Kurzschluß	2-pol. Erdkurzschluß
 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $i_s + i_s^* = 0$ $u_s^* = u_s$ $2i_0 = 0$ </div> </div>	 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $i_s + i_s^* + 2i_0 = 0$ $u_s^* = u_s$ $2u_0 = u_s$ </div> </div>
3-pol. Kurzschluß	3-pol. Erdkurzschluß
 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $u_s = 0$ $u_s^* = 0$ $2i_0 = 0$ </div> </div>	 <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;"> $u_s = 0$ $u_s^* = 0$ $2u_0 = 0$ </div> </div>



Universität Hannover
Institut für Energieversorgung und
Hochspannungstechnik



Vorlesung Elektrische Energieversorgung II

Skript Stabilität

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

Inhaltsverzeichnis

1	Übersicht, Einteilung in statische und transiente Stabilität.....	1
2	Modelle der Generatoren und des Netzes für die Stabilitätsuntersuchung..	4
2.1	Bewegungsgleichung der Generatoren	4
2.2	Ersatzschaltungen der Generatoren.....	6
2.3	Ersatzschaltungen des passiven Netzes	8
3	Statische Stabilität.....	9
3.1	Statische Stabilität des Ein-Maschinenproblems.....	9
3.2	Statische Stabilität als Eigenwertproblem	13
3.3	Künstliche Stabilität des Ein-Maschinenproblems	15
3.5	Maßnahmen zur Verbesserung der statischen Stabilität	20
4	Transiente Stabilität.....	21
4.1	Transiente Stabilität des Ein-Maschinenproblems.....	21
4.2	Transiente Stabilität des Mehrmaschinenproblems.....	29
4.3	Maßnahmen zur Verbesserung der transienten Stabilität	30
5	Anhang.....	32
5.1	Vollständige Lösung der Gl. (3.11).....	32
5.2	Zustandsbahnen (Trajektorien) für transiente Stabilität.....	34
5.3	Berechnungsbeispiel	36

Hinweis: Das Skript ersetzt nicht die Vorlesung und umgekehrt. Im Skript sind einige Ausführungen, insbesondere mathematische Ableitungen ausführlicher dargestellt, während in der Vorlesung mehr Wert auf das Verständnis gelegt wird.

1 Übersicht, Einteilung in statische und transiente Stabilität

Unter der Stabilität eines Elektroenergiesystems versteht man die Eigenschaft der Generatoren sowohl bei Laständerungen als auch bei Kurzschlüssen mit anschließender selektiver Abschaltung durch den Netzschutz im Synchronismus zu bleiben. Bei den Laständerungen muß man zwischen den *normalen*, durch die Tagesbelastungskurve anfallenden stetigen Laständerungen und größeren *plötzlichen* Laständerungen, die durch den Ausfall oder die Zuschaltung einzelner Betriebsmittel entstehen, unterscheiden. Kurzschlüsse verursachen gleichermaßen plötzliche Leistungsänderungen, sowohl bei ihrer Entstehung als auch bei ihrer Abschaltung. Die normalen Laständerungen verlaufen so langsam, daß sie praktisch keine Ausgleichsvorgänge in den Generatoren und im Netz hervorrufen. Wir können deshalb bei der Untersuchung der Lastübernahme durch die Generatoren stationäre Verhältnisse zugrunde legen. Eine zunehmende Belastung der Generatoren führt bei zunächst noch synchroner Drehzahl zur Vergrößerung der gegenseitigen Polradwinkel. Bei Überlastung verlieren die Generatoren den Synchronismus und werden instabil. Wir sagen auch, die Generatoren fallen außer Tritt, sie *kippen*. Dieser *Stabilitätsverlust* kann durch einen überlasteten Generator oder eine überlastete Kraftwerksgruppe ausgelöst werden und lawinenartig das ganze Netz erfassen. Fällt ein Generator (oder eine Kraftwerksgruppe) gegenüber dem restlichen Netz außer Tritt, so speist er zunächst die von der Turbine zugeführte Leistung asynchron weiter in das Netz ein. Im *Asynchronbetrieb* fließen in den Läuferwicklungen (Erregerwicklung und Dämpferwicklungen) schlupffrequente Ströme, die auf Dauer nicht zulässig sind, da sie den Läufer übermäßig erwärmen würden. Die Turbinenleistung muß deshalb bei Übergang in den Asynchronbetrieb (veranlaßt durch einen Asynchronlaufschutz) drastisch verringert werden, wenn man den Generator zunächst bis zur Beseitigung der Ursache für den Stabilitätsverlust am Netz halten will. Andernfalls muß der asynchron gewordene Generator vom Netz getrennt werden, wobei gleichzeitig die Turbinenleistung durch den Schnellschluß zurückgenommen und die Entregung eingeleitet wird. Das Vermögen der Generatoren (oder des Elektroenergiesystems) unter stationären Bedingungen im Synchronlauf zu beharren, heißt *statische Stabilität*. Die statische Stabilitätsuntersuchung beantwortet demnach die Frage nach der *Existenz* stationärer Arbeitspunkte in Abhängigkeit vom Belastungszustand des Netzes unter Berücksichtigung weiterer Einflußgrößen, wie z.B. der Spannung und des Spannungsreglers.

Größere sprungförmige Leistungsänderungen werden zunächst entsprechend den Impedanzverhältnissen (im Hochspannungsnetz dominieren die Reaktanzen) auf die einzelnen Generatoren verteilt. Diese werden ihrem Anteil an der Leistungsänderung entsprechend beschleunigt oder verzögert. Durch die Beschleunigung oder Verzögerung wird Schwungenergie ausgekoppelt oder gespeichert und so das ursprüngliche, durch den Sprung verursachte Leistungsdefizit zunächst ausgeglichen.

Solange sich der Leistungssprung einigermaßen gleichmäßig auf die Generatoren aufteilt, wie das in vermaschten Netzen der Fall ist, besteht keine Gefahr, daß die Generatoren auseinanderlaufen. Sie werden gemeinsam je nach Vorzeichen des Leistungssprunges beschleunigt oder verzögert, was sich in einer Frequenzänderung des Netzes bemerkbar macht. Ein Stabilitätsproblem im Sinne der Wahrung des Synchronlaufes tritt nicht auf. Es interessiert aber die maximale dynamische Frequenzabweichung im Vergleich zu den zulässigen Werten. Das Vermögen des Netzes (der Generatoren), bei Laststößen im zulässigen Frequenzbereich zu bleiben, wird als *Frequenz-* oder *Langzeitstabilität* bezeichnet.

Kurzschlüsse und *Leitungsabschaltungen* verursachen nicht nur Leistungssprünge, sondern beeinträchtigen auch die Kopplung der Generatoren untereinander. Im Ex-

tremfall wird ein einzelner Generator (oder ein Kraftwerk) durch einen nahen Kurzschluß oder die Abschaltung einer nahen Leitung für die Dauer des Kurzschlusses oder für die Dauer der Abschaltung der Leitung vom übrigen Netz (Restnetz) getrennt, wobei die vorher an das Netz abgegebene Leistung als Beschleunigungsleistung wirksam wird. Für das restliche Netz stellt das dadurch aufgetretene Leistungsdefizit keine besondere Störung dar. Es wird - wie oben beschrieben - auf alle Generatoren aufgeteilt, ohne daß es dabei zu Störungen des Synchronlaufes oder zu einer nennenswerten Frequenzänderung kommt. Für den abgetrennten Generator besteht nach Abschaltung des Kurzschlusses oder Wiedereinschaltung der Leitung die Chance der Resynchronisation mit dem Restnetz nur, wenn die während der Beschleunigungsphase aufgenommene kinetische Energie ein bestimmtes Maß nicht überschreitet. Wird dieses Maß überschritten, so geht der Generator trotz Wiederherstellung der guten Kopplung zum Restnetz in den Asynchronbetrieb über und wird somit instabil.

Die Generatoren dürfen sich also bei Netzstörungen nicht zu weit auseinanderlaufen, wofür die gegenseitigen Polradwinkel das Maß sind. Das Vermögen der Generatoren, bei plötzlichen Leistungsänderungen im *Anziehungsbereich* des Synchronismus zu bleiben und nach Beendigung des Ausgleichsvorganges in diesen zurückzukehren, wird als *transiente Stabilität* bezeichnet.

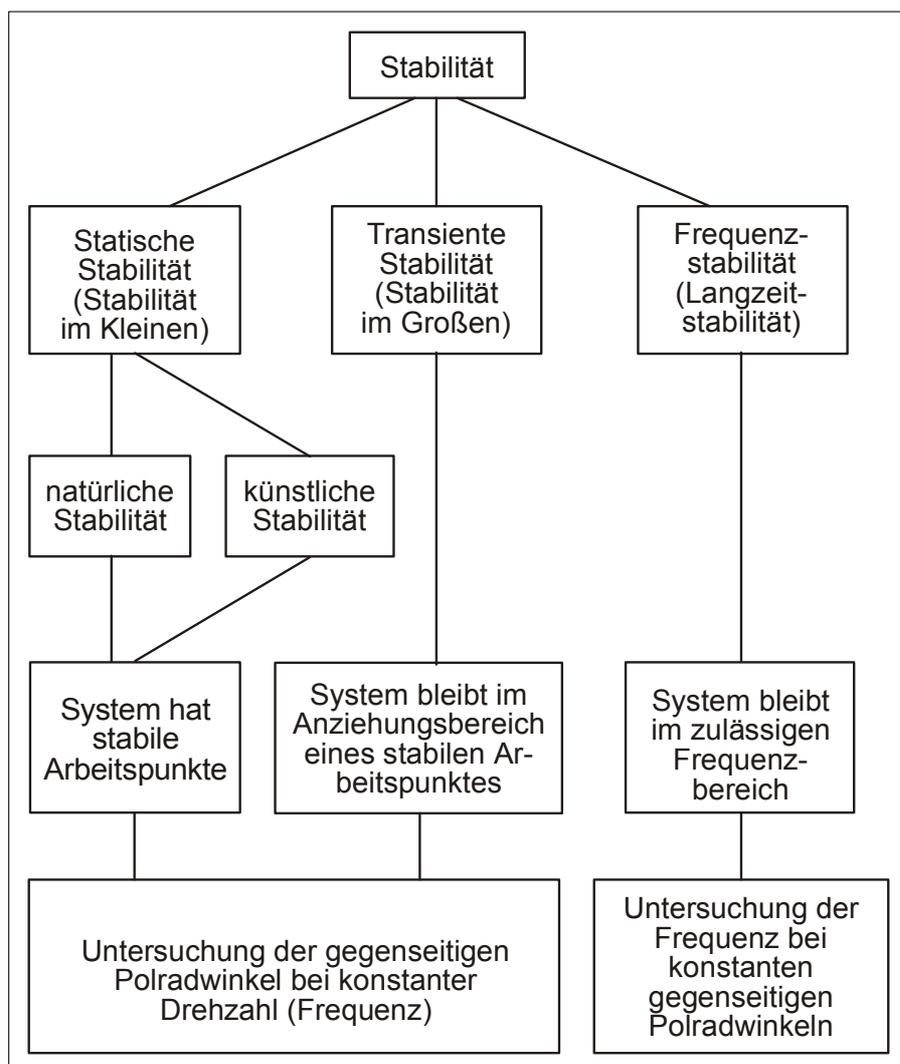


Bild 1.1: Übersicht zur Stabilität von Elektroenergiesystemen

In Bild 1.1 ist die hier geschilderte übliche Unterteilung der Stabilität in statische und transiente Stabilität sowie in Frequenzstabilität zusammen mit den unterschiedlichen Untersuchungszielen dargestellt.

Die weitere Unterteilung der statischen Stabilität in *natürliche* und *künstliche* Stabilität bezieht sich auf den Einfluß der Spannungsregelung. Ohne Berücksichtigung der Spannungsregelung ist das System *natürlich* stabil, unter dem Einfluß der Spannungsregelung *künstlich* stabil. Die Unterteilung der Stabilität nach Bild 1.1 hat auch praktische Hintergründe für die Modellbildung zur rechnerischen Stabilitätsuntersuchung. So kann man bei der Berechnung der statischen Stabilität von kleinen Winkelauslenkungen aus einem Arbeitspunkt ausgehen und die Reaktion auf die Auslenkung untersuchen. Diese Aufgabenstellung läuft auf eine *Eigenwertuntersuchung* des linearisierten Differentialgleichungssystems hinaus. Bei der Berechnung der transienten Stabilität darf zwar noch konstante Drehzahl angenommen werden, jedoch ist die Beschränkung auf kleine Winkelauslenkungen nicht mehr zulässig. Man erhält ein nichtlineares Differentialgleichungssystem für die Winkeländerungen. Aus mathematischer Sicht spricht man deshalb auch von Stabilität im Kleinen bei der statischen Stabilität und Stabilität im Großen bei der transienten Stabilität. Die Untersuchung der Frequenzstabilität kann mit einem sogenannten *aggregierten* Modell, bei dem alle Generatoren zu einem Ersatzgenerator und alle Lasten des Netzes zu einer Ersatzlast zusammengefaßt sind, erfolgen. Auf die Frequenzstabilität wollen wir aber im folgenden nicht weiter eingehen, sie wird im Zusammenhang mit der Frequenz-Wirkleistungsregelung des Netzes behandelt (s. Skript Netzregelung).

2 Modelle der Generatoren und des Netzes für die Stabilitätsuntersuchung

2.1 Bewegungsgleichung der Generatoren

Die Bewegung der Generatorläufer wird durch die allgemeine Drehmomentengleichung beschrieben:

$$J\dot{\Omega} = M_m + M_e \quad (2.1)$$

Darin ist J das Massenträgheitsmoment, Ω die räumliche Winkelgeschwindigkeit, M_m das mechanische und M_e das elektrische Drehmoment. Wir ersetzen auf der linken Seite der Gl. (2.1) die räumliche Winkelgeschwindigkeit durch die elektrische Winkelgeschwindigkeit ω und die Polpaarzahl p :

$$\Omega = \frac{\omega}{p}$$

und auf der rechten Seite die Drehmomente durch Leistungen:

$$M_m = \frac{P_m}{\Omega} = \frac{p P_m}{\omega}$$

$$M_e = \frac{P_e}{\Omega_0} = \frac{p P_e}{\omega_0}$$

Da die Stabilität in der Nähe des Synchronismus entschieden wird, ist es zulässig, in der Gleichung für das mechanische Drehmoment $\Omega = \Omega_0$ bzw. $\omega = \omega_0$ zu setzen. Schließlich beziehen wir die Leistungen noch auf die Generatorbemessungsleistung S_{rG} und erhalten so die für die Stabilitätsuntersuchung zweckmäßige Form der *Bewegungsgleichung*:

$$\boxed{\frac{\dot{\omega}}{\omega_0} = \frac{1}{T_m} \frac{P_m + P_e}{S_{rG}}} \quad (2.2)$$

Mit:

$$T_m = \frac{J\Omega_0^2}{S_{rG}} = 2H \quad (2.3)$$

wurde in Gl. (2.2) die *elektromechanische Zeitkonstante* als doppelter Wert der *Trägheitskonstante*:

$$H = \frac{1}{2} \frac{J\Omega_0^2}{S_{rG}} = \frac{W_0}{S_{rG}} \quad (2.4)$$

eingeführt. Wir werden später sehen, daß T_m (bzw. H) ein wichtiger Parameter bei der Stabilitätsanalyse ist. Die Trägheitskonstante ist das Verhältnis aus kinetischer Energie des Generatorläufers bei synchroner Winkelgeschwindigkeit Ω_0 und Generatorbemessungsleistung.

Die mechanische Leistung P_m ist im Generatorbetrieb die Turbinenleistung P_T . Die elektrische Leistung P_e ist nach dem hier verwendeten Verbraucherzählpeilsystem

im Generatorbetrieb negativ. Um nicht mit negativen Leistungen operieren zu müssen, wird i.f. anstelle P_e die an das Netz abgegebene Leistung $P_N = -P_e$ verwendet. P_N ist im Generatorbetrieb positiv. Führt man noch die Konstante

$$k_m = \frac{\omega_0}{T_m S_{rG}} \quad (2.5)$$

ein, so erhält die Gl. (2.2) schließlich die Form:

$$\dot{\omega} = k_m(P_T - P_N) \quad (2.6)$$

Zur vollständigen Beschreibung der Drehbewegung ist neben der Winkelgeschwindigkeit noch eine Winkelkoordinate (Lagekoordinate) erforderlich. Die momentane Lage des Läufers gegenüber einem festen Bezugspunkt wird bei der Synchronmaschine mit dem Winkel ϑ , der in Drehrichtung von der Strangachse a zur d-Achse des Läufers zählt, ausgedrückt (Bild 2.1).

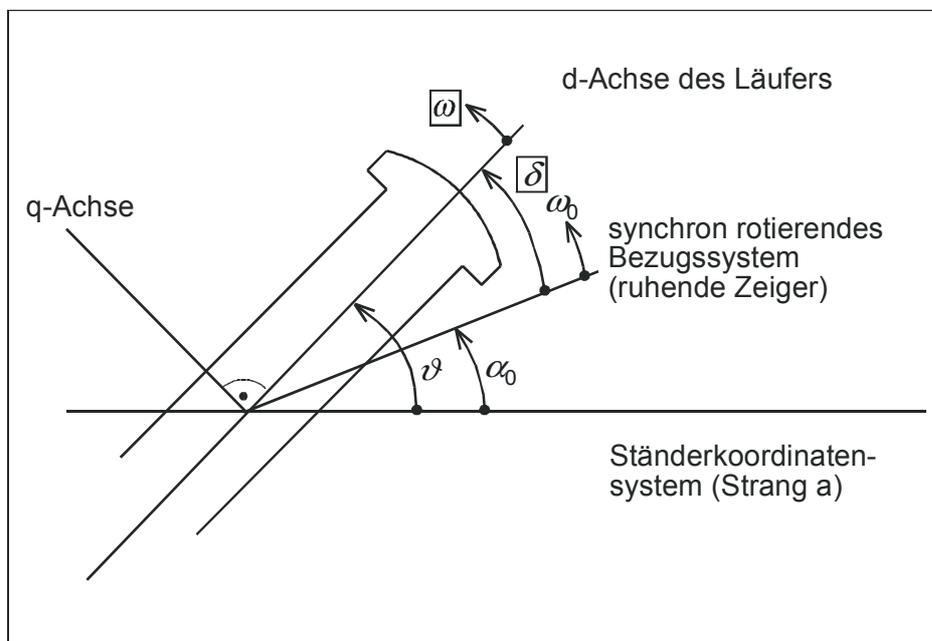


Bild 2.1: Koordinaten für die Drehbewegung

Nach Bild 2.1 gilt:

$$\dot{\vartheta} = \omega \quad (2.7)$$

Zur Beurteilung der Stabilität interessiert die Abweichung der Drehbewegung vom Synchronlauf ω_0 . Dazu ist die Winkelkoordinate δ zwischen einem mit ω_0 rotierendem Bezugssystem und dem Generatorläufer besser geeignet. Zwischen den Winkeln besteht folgender Zusammenhang (Bild 2.1):

$$\vartheta = \alpha_0 t + \omega_0 t + \delta \quad (2.8)$$

Aus der Differentiation der Gl. (2.8) folgt mit Gl. (2.7):

$$\dot{\delta} = \dot{\vartheta} - \omega_0 = \omega - \omega_0 = \Delta\omega \quad (2.9)$$

Die Gln. (2.6) und (2.9) bilden ein Zustands-Differentialgleichungssystem 2. Ordnung mit ω und δ als Zustandsgrößen. Es bildet die Grundlage aller Stabilitätsbetrachtungen und sei deshalb noch einmal zusammengestellt.

$$\begin{cases} \dot{\omega} = k_m(P_T - P_N) \\ \dot{\delta} = \omega - \omega_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Gelegentlich wird anstelle von Gl. (2.10) auch das folgende Differentialgleichungssystem 2. Ordnung, das man durch Differentiation von δ erhält, benutzt.

$$\ddot{\delta} = \dot{\omega} = k_m(P_T - P_N) \quad (2.11)$$

Zur Berechnung der elektromechanischen Zeitkonstante aus dem Massenträgheitsmoment J oder aus der veralteten Angabe des Schwungmomentes GD^2 sind folgende zugeschnittenen Größengleichungen nützlich:

$$T_m / s = \left(\frac{2\pi}{60}\right)^2 \frac{J / \text{kgm}^2 \cdot n_0^2 / \text{min}^{-2}}{S_{rG} / \text{MVA}} \cdot 10^{-6} \quad (2.12a)$$

$$T_m / s = 2,74 \cdot \frac{GD^2 / \text{tm}^2 \cdot n_0^2 / \text{min}^{-2}}{S_{rG} / \text{MVA}} \cdot 10^{-6} \quad (2.12b)$$

2.2 Ersatzschaltungen der Generatoren

Für die Untersuchung der statischen und transienten Stabilität muß man unterschiedliche Generatorersatzschaltungen heranziehen. Den stationären Verhältnissen entsprechend, wird bei der statischen Stabilitätsuntersuchung die Ersatzschaltung mit der Polradspannung \underline{U}_p hinter der synchronen Impedanz, die sich aus dem Ankerwiderstand R_a und der synchronen Längsreaktanz X_d zusammensetzt, zugrunde gelegt (Bild 2.2).

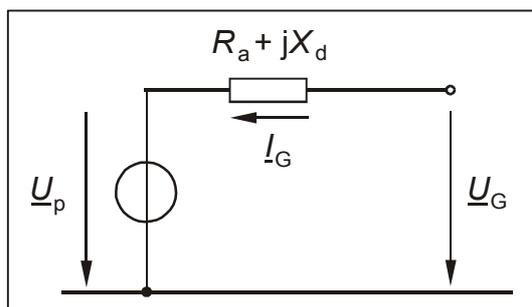


Bild 2.2: Ersatzschaltung der Generatoren für die statische Stabilitätsuntersuchung

Der Ankerwiderstand kann für prinzipielle Betrachtungen, wie wir sie hier anstellen wollen, vernachlässigt werden. Für Schenkelpolmaschinen, bei denen $X_q < X_d$ gilt, stellt die Ersatzschaltung in Bild 2.2 eine Näherung dar.

Die Polradspannung ist dem Erregerstrom I_f (und der konstant angenommenen Drehzahl) proportional. Im stationären Zustand ist I_f und damit auch der Betrag von \underline{U}_p konstant. Bei der Untersuchung der künstlichen Stabilität muß die Abhängigkeit

ist in dieser Näherung schon insofern enthalten, als sie zunächst immer der Änderung der transienten Spannung entgegenwirkt. Zumindest für Routineuntersuchungen der transienten Stabilität ist deshalb die Ersatzschaltung mit der betragskonstanten transienten Spannung \underline{U}' hinter der transienten Impedanz zweckmäßig (Bild 2.4).

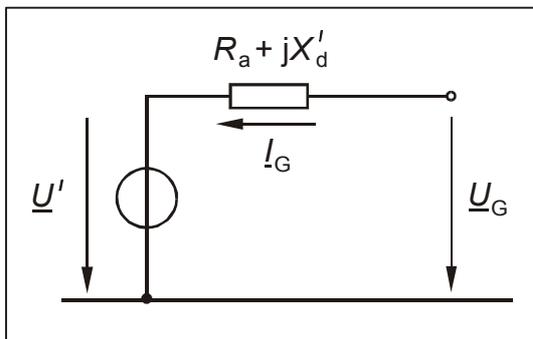


Bild 2.4: Generator-Ersatzschaltung für die Untersuchung der transienten Stabilität

Die transiente Impedanz setzt sich aus dem Ankerwiderstand R_a und der transienten Längsreaktanz X'_d zusammen, wobei R_a in erster Näherung auch hier vernachlässigbar ist.

Transiente Stabilitätsrechnungen auf der Grundlage der Ersatzschaltung in Bild 2.4 mit $U' = \text{konst.}$ kommen mit nur zwei Parametern, nämlich X'_d und T_m (bei Vernachlässigung von R_a) aus, wobei die Spannungsregelung in der Konstanz von U' schon berücksichtigt ist. Ausführlichere Rechenroutinen benötigen dagegen eine Vielzahl oft nicht genau bekannter Parameter für den Generator und Regler.

2.3 Ersatzschaltungen des passiven Netzes

Da es sich bei der statischen Stabilitätsuntersuchung um stationäre Zustände und bei der transienten Stabilitätsuntersuchung wegen der Vernachlässigbarkeit der abklingenden schnellen Anteile und Gleichanteile in den elektrischen Größen um quasistationäre Ausgleichsvorgänge handelt, ist es in beiden Fällen zulässig, das passive Netz einschließlich der Lasten durch die bekannten komplexen Ersatzschaltungen zu beschreiben. Bei der statischen Stabilitätsuntersuchung wird immer von einem symmetrischen Zustand und bei der transienten Stabilitätsuntersuchung in der Regel von symmetrischen Zuständen (Annahme dreipoliger Kurzschlüsse als worst case) ausgegangen, so daß die Betrachtung des Mitsystems der symmetrischen Komponenten, dessen Ersatzschaltung mit der Strangersatzschaltung identisch ist, ausreicht. Nur in Ausnahmefällen werden bei der transienten Stabilitätsuntersuchung auch zweipolige Kurzschlüsse als Störung angenommen. In diesen Fällen sind auch das Gegen- und Nullsystem der symmetrischen Komponenten zu berücksichtigen. Stabilitätsprobleme treten, wenn überhaupt, vorwiegend im Hochspannungsnetz auf. Wir können deshalb im Hinblick auf eine möglichst einfache Beschreibung der wesentlichen Vorgänge sämtliche Wirkwiderstände vernachlässigen.

3 Statische Stabilität

3.1 Statische Stabilität des Ein-Maschinenproblems

Die prinzipielle Vorgehensweise zur Untersuchung der statischen Stabilität soll am Beispiel des sog. *Ein-Maschinenproblems* in Bild 3.1 erfolgen.

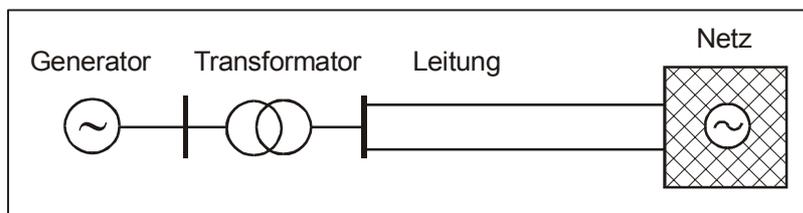


Bild 3.1: Anordnung für das Ein-Maschinenproblem

Eine Zurückführung des Stabilitätsproblems auf das Ein-Maschinenproblem ist zumindest immer näherungsweise dann möglich, wenn ein Generator (G) oder ein Kraftwerk (Generatorgruppe) über eine längere Leitung (L) in ein leistungsstarkes Netz (N) speist. Andererseits bestehen in einem Netz, das keine langgestreckte Struktur wie in Bild 3.1 aufweist, auch kaum ernsthafte Stabilitätsprobleme. Durch die lange Leitung ist die Kopplung des Generators oder Kraftwerkes mit dem Netz wesentlich schwächer als die Kopplung der Generatoren im Netz untereinander. Die Generatoren des Netzes können deshalb zu einem Ersatzgenerator mit der Impedanz X_Q und der konstanten Quellenspannung \underline{U}_N zusammengefaßt werden. Somit ergibt sich für die Anordnung in Bild 3.1 folgende Ersatzschaltung (Bild 3.2).

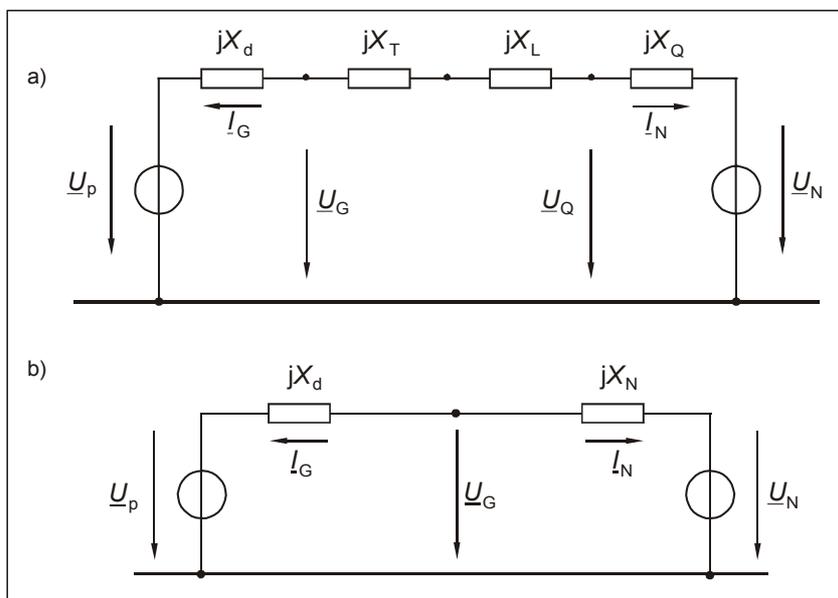


Bild 3.2: Strangersatzschaltung (Mitsystem der Symmetrischen Komponenten) für das Ein-Maschinenproblem nach Bild 3.1: a) ausführlich b) zusammengefaßt mit $X_N = X_T + X_L + X_Q$

Zur Beurteilung der Stabilität des verbleibenden Generators oder Kraftwerkes gegenüber dem Ersatzgenerator des Netzes kann dieser mit konstanter synchroner Winkelgeschwindigkeit ω_0 umlaufend, angenommen werden. Das bedeutet, daß die Quellenspannung des Netzes fest mit dem synchron umlaufenden Koordinatensys-

tem verbunden ist (der Winkel φ_{uN} im Bild 3.3 ist konstant). Diese Annahme ist um so besser, je größer die Summenleistung des Ersatzgenerators im Vergleich zu der des auf Stabilität zu untersuchenden Generators ist.

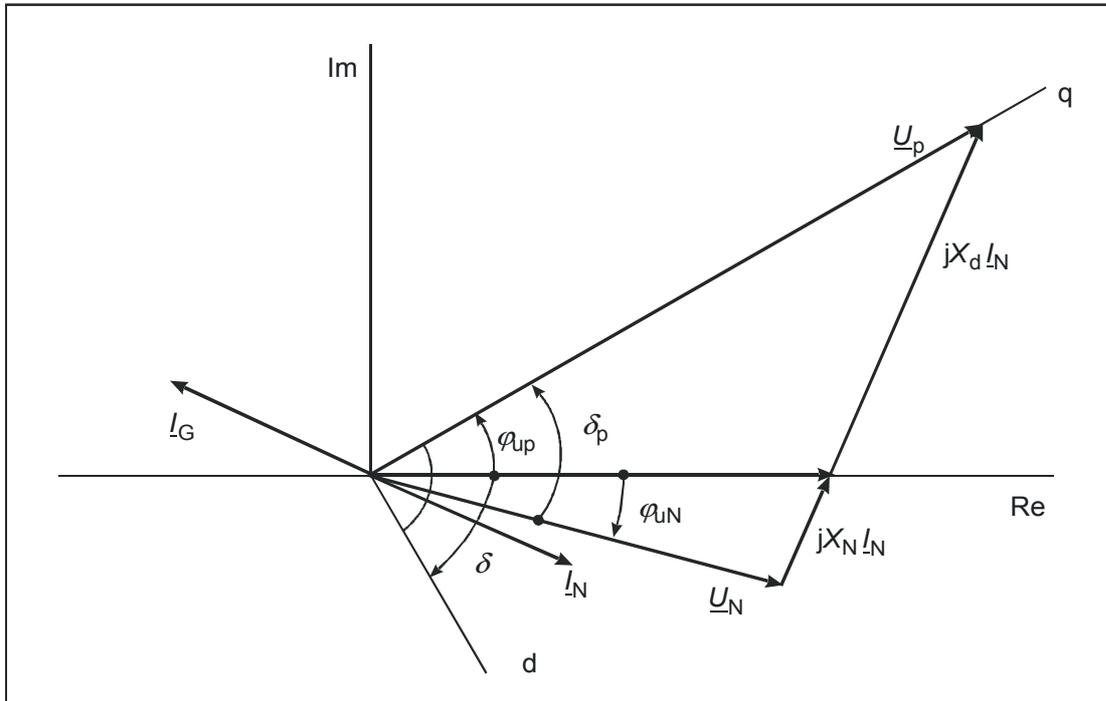


Bild 3.3: Zeigerbild für einen stationären Arbeitspunkt der Anordnung nach Bild 3.2

Die Generator(wirk)leistung ergibt sich unter Vernachlässigung der Wirkwiderstände aus:

$$P_G = \operatorname{Re}\{\underline{S}_G\} = 3\operatorname{Re}\{\underline{U}_G \underline{I}_G^*\} = 3\operatorname{Re}\{\underline{U}_p \underline{I}_G^*\}$$

Nach Einsetzen des konjugiert komplexen Ausdrucks für den Generatorstrom:

$$\underline{I}_G^* = \frac{\underline{U}_N^* - \underline{U}_p^*}{-j(X_d + X_N)} \quad (3.1)$$

folgt weiter:

$$P_G = \frac{3}{X_d + X_N} \operatorname{Re}\{j \underline{U}_p \underline{U}_N^*\} = 3 \frac{U_p U_N}{X_d + X_N} \operatorname{Re}\left\{e^{j(\varphi_{up} - \varphi_{uN} + \pi/2)}\right\}$$

und mit $\varphi_{up} - \varphi_{uN} = \delta_p$ und dem Erregergrad $\varepsilon = U_p / U_N$:

$$P_G = -3 \frac{U_p U_N}{X_d + X_N} \sin \delta_p = -\varepsilon \frac{3U_N^2}{X_d + X_N} \sin \delta_p = -P_N \quad (3.2)$$

In Bild 3.4 ist die Abhängigkeit der an das Netz abgegebenen Leistung $P_N = -P_G$ mit dem Erregergrad als Parameter dargestellt. Für konstante Erregung hängt P_N sinusförmig vom Polradwinkel δ_p ab.

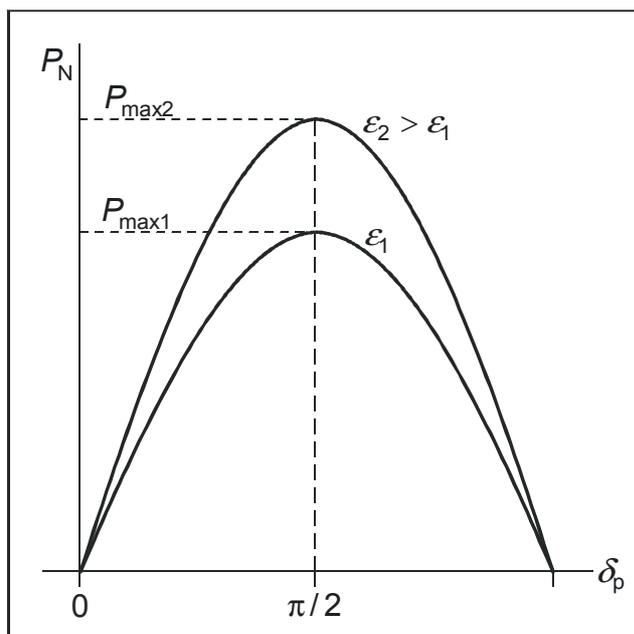


Bild 3.4: Leistungs-Winkel-Kennlinie für konstante Erregung

Da einerseits die Polradspannung fest an das Läuferkoordinatensystem gebunden (\underline{U}_p liegt in der q-Achse) und andererseits der Zeiger der inneren Netzspannung \underline{U}_N fest mit dem mit ω_0 umlaufenden Koordinatensystem für die ruhenden Zeiger verbunden ist, beschreibt der Winkel δ_p zwischen \underline{U}_p und \underline{U}_N in Bild 3.3 eindeutig die Lage des Polrades des Generators (Kraftwerkes) gegenüber dem synchron umlaufenden Ersatzgenerator des Restnetzes. Aus (s. Bild 3.3) folgt

$$\delta_p = \varphi_{up} - \varphi_{uN} = \delta + \pi/2 - \varphi_{uN} \quad (3.3)$$

und wegen $\varphi_{uN} = \text{konst.}$:

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_p \quad (3.4)$$

Damit läßt sich die Bewegungsgleichung (Gln. (2.10) und (2.11)) für die Untersuchung der statischen Stabilität auch so schreiben, daß nur noch der Winkel δ_p mit seinen Ableitungen vorkommt:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = k_m (P_T - P_N(\delta_p)) \\ \dot{\delta}_p = \omega - \omega_0 \end{cases} \quad (3.5a)$$

bzw.:

$$\ddot{\delta}_p = k_m (P_T - P_N(\delta_p)) \quad (3.5b)$$

Die Turbinenleistung P_T ist unabhängig vom Polradwinkel. Ihre Kennlinie verläuft deshalb im Leistungs-Winkel-Diagramm parallel zur Abszisse und schneidet für $P_T < P_{\max}$ die Wirkleistungs-Kennlinie in den beiden Punkten 1 und 2 (Bild 3.5).

Um festzustellen, welcher der beiden Schnittpunkte 1 und 2 ein stabiler Arbeitspunkt ist, nehmen wir jeweils eine kleine Auslenkung aus dem betreffenden Punkt an und

überlegen uns die Reaktion des so gestörten Systems anhand der Bewegungsgleichung (Gl. (3.5b)).

Eine Auslenkung um $+\Delta|\delta_p|$ aus dem Punkt 1 führt zu $P_N > P_T$. Die rechte Seite der Gl. (3.5b) wird negativ und damit $\ddot{\delta}_p < 0$. Eine negative zweite Ableitung der Winkelkoordinate bedeutet eine Verzögerung des Polrades (es bleibt gegenüber dem synchron rotierenden Koordinatensystem zurück), wodurch das System in den ursprünglichen Punkt 1 zurückstrebt. Die Auslenkung nach der anderen Richtung und die analoge Überlegung am Schnittpunkt 2 liefert das Ergebnis, daß nur Schnittpunkte auf dem ansteigenden Ast der Leistungs-Winkel-Kennlinie stabil sind. So würde beispielsweise eine Auslenkung aus dem Punkt 2 in Richtung positiver Winkel $+\Delta|\delta_p|$ zu $P_N < P_T$ führen; die Maschine würde beschleunigt werden und sich damit immer weiter vom Ausgangspunkt entfernen und asynchron werden.

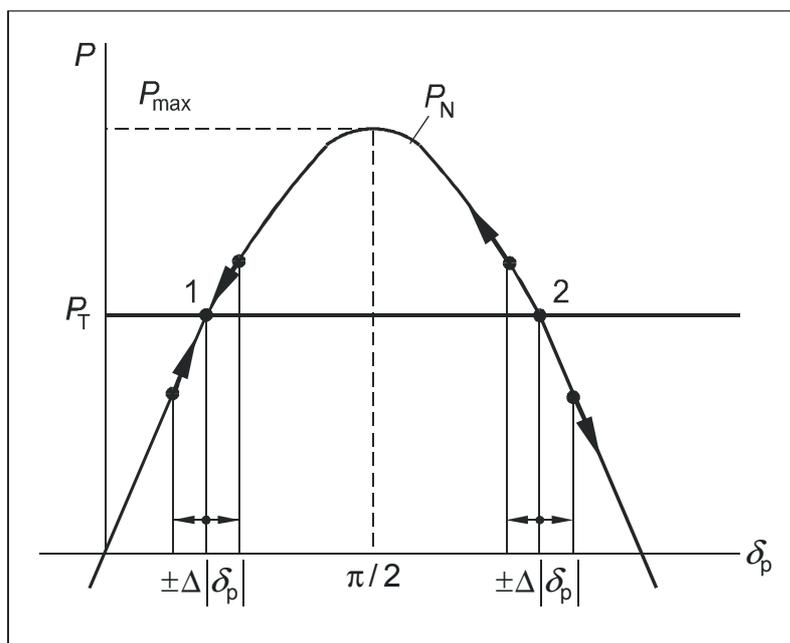


Bild 3.5: Untersuchung der Arbeitspunkte auf statische Stabilität

Die Bedingung für die *statische Stabilität* des Ein-Maschinenproblems lautet demnach:

$$\boxed{\frac{dP_N}{d\delta_p} > 0} \quad (3.6)$$

Der *Grenzfall* der statischen Stabilität wird bei $\delta_p = \pi/2$ erreicht. Bezieht man den Motorbetrieb in die Stabilitätsbetrachtung mit ein, so ergibt sich als statisch stabiler Betriebsbereich:

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} < \delta_p < \frac{\pi}{2}} \quad (3.7)$$

Die vom Generator maximal abgebbare Wirkleistung bei $\delta_p = \pi/2$ beträgt

$$P_{\max} = P_{\text{kipp}} = 3 \frac{U_p U_N}{X_d + X_N} = \varepsilon \frac{3U_N^2}{X_d + X_N} \quad (3.8)$$

Da bei weiterer Steigerung der Turbinenleistung die Maschine in den Asynchronbetrieb „kippt“, spricht man auch von der *Kippleistung*. Im praktischen Betrieb muß ein genügend großer Abstand von der Grenze der Stabilität eingehalten werden $\delta_p < 60^\circ$ (d.h. $P_T \leq 0,87 P_{\max}$), da die Maschine bereits vor Erreichen der Stabilitätsgrenze anfängt unruhig zu laufen. Die Ableitung der Leistung nach dem Winkel ist die *synchronisierende Leistung*. Sie ergibt sich aus Gl. (3.2) zu

$$P_s = \frac{dP_N}{d\delta_p} = 3 \frac{U_p U_N}{X_d + X_N} \cos \delta_p = \varepsilon \frac{3U_N^2}{X_d + X_N} \cos \delta_p \quad (3.9)$$

Wie man sieht, nimmt die synchronisierende Leistung mit wachsendem Winkel ab und wird bei $\delta_p = \pi/2$ Null und für $\delta_p > \pi/2$ negativ.

Das Bild 3.6 veranschaulicht das statische Stabilitätsproblem an einem mechanischen Analogon.

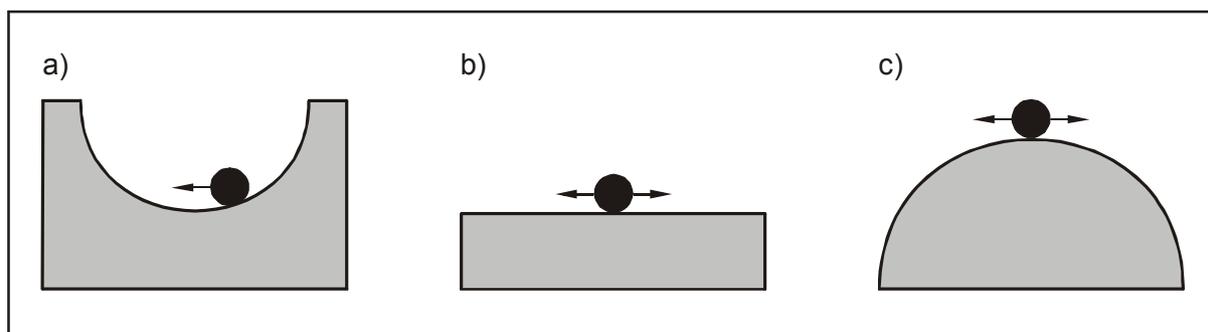


Bild 3.6: Modellvorstellung zur Statischen Stabilität: a) stabil b) indifferent (Grenze der Stabilität) c) instabil

3.2 Statische Stabilität als Eigenwertproblem

Aus mathematischer Sicht ist die statische Stabilität ein Eigenwertproblem der *linearisierten* Zustands-Differentialgleichung Gl. (2.10). Die Linearisierung ist einerseits zulässig, da es nur um die Untersuchung kleiner Auslenkungen aus einem stationären Arbeitspunkt geht und andererseits zweckmäßig, da mit ihr die statische Stabilitätsuntersuchung überhaupt erst auf das Stabilitätsproblem linearer Systeme zurückgeführt werden kann.

Die Nichtlinearität der Gl. (2.10) besteht in der Winkelabhängigkeit der Generatorleistung vom Polradwinkel. Wir linearisieren die Gl. (3.2), indem wir die TAYLOR-Reihe nach dem 2. Glied abbrechen. Es gilt dann in der Umgebung eines Arbeitspunktes (0):

$$P_N = P_{N0} + \Delta P_N = P_{N0} + \left(\frac{dP_N}{d\delta_p} \right)_0 \Delta \delta_p = P_{N0} + P_{s0} \Delta \delta_p \quad (3.10)$$

Dabei ist P_{s0} die bereits mit Gl. (3.9) eingeführte synchronisierende Leistung im Arbeitspunkt.

Gl. (3.10) in Gl. (3.5a) eingesetzt, ergibt unter Beachtung von $P_T = P_{NO}$ sowie $\dot{\delta}_p = \Delta \dot{\delta}_p$ und $\dot{\omega} = \Delta \dot{\omega}$ in Matrizenform geordnet:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\omega} \\ \Delta \dot{\delta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_m P_{s0} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \omega \\ \Delta \delta_p \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Gl. (3.11) stellt ein lineares, homogenes Zustands-Differentialgleichungssystem der allgemeinen Form $\Delta \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{z}$ dar. Seine Lösung hat die Form:

$$\begin{bmatrix} \Delta \omega \\ \Delta \delta_p \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + k_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad (3.12)$$

wobei die λ_i die *Eigenwerte* und die Vektoren mit den Elementen v_{ik} die Eigenvektoren sind. Die beiden Konstanten k_i sind von den Anfangswerten abhängig. Wir sehen, daß unabhängig von den Anfangswerten für $\Delta \omega$ und $\Delta \delta_p$ ein Abklingen von $\Delta \omega$ und $\Delta \delta_p$ nur für negative Realteile der Eigenwerte gewährleistet ist. Die Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} in Gl. (3.11) berechnen sich aus:

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & k_m P_{s0} \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k_m P_{s0} = 0$$

zu:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-k_m P_{s0}}$$

Für $P_{s0} < 0$ wird $\lambda_1 = +\sqrt{k_m |P_{s0}|} = \sigma$ und $\lambda_2 = -\sqrt{k_m |P_{s0}|} = -\sigma$.

Damit hätte ein Eigenwert einen positiven Realteil und die Lösung der Zustandsgleichung eine aufklingende *Eigenbewegung*. Das System würde sich weiter vom Anfangszustand entfernen, wäre also instabil. Genau diese Verhältnisse liegen für den Schnittpunkt 2 in Bild 3.5 vor.

Ist dagegen $P_{s0} > 0$, wie im Punkt 1 im Bild 3.5, so wird ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar erhalten:

$$\lambda_{1,2} = \pm j \sqrt{k_m |P_{s0}|} = \pm j \omega_e$$

Die Lösung der Zustandsgleichung besteht in diesem Fall in einer nichtabklingenden Dauerschwingung mit der *Eigenfrequenz* ω_e . Würde man die im realen System stets vorhandene Dämpfung in Gl. (3.5) berücksichtigen, so würde die Schwingung in den Punkt 1 abklingen. Damit ist bestätigt, daß der statische stabile Arbeitsbereich durch das positive Vorzeichen der synchronisierenden Leistung, d.h. den positiven Anstieg der Leistungs-Winkel-Kennlinie $P_N(\delta_p)$ bestimmt wird. Die vollständige Lösung der Gl. (3.11) ist im Anhang (Abschnitt 5.1) angegeben.

Für den Betrag von \underline{U}_G bezogen auf U_N folgt aus Gl. (3.13):

$$\frac{U_G}{U_N} = \frac{1}{1+a} \sqrt{1 + \varepsilon^2 a^2 + 2\varepsilon a \cos \delta_p} \quad (3.14)$$

Die Generatorspannung ist maximal bei $\delta_p = 0$ und minimal bei $\delta_p = \pi$, wobei aus Stabilitätsgründen aber nur die Kurvenabschnitte bis $\delta_p = \pi/2$ im Generatorbetrieb in Frage kommen.

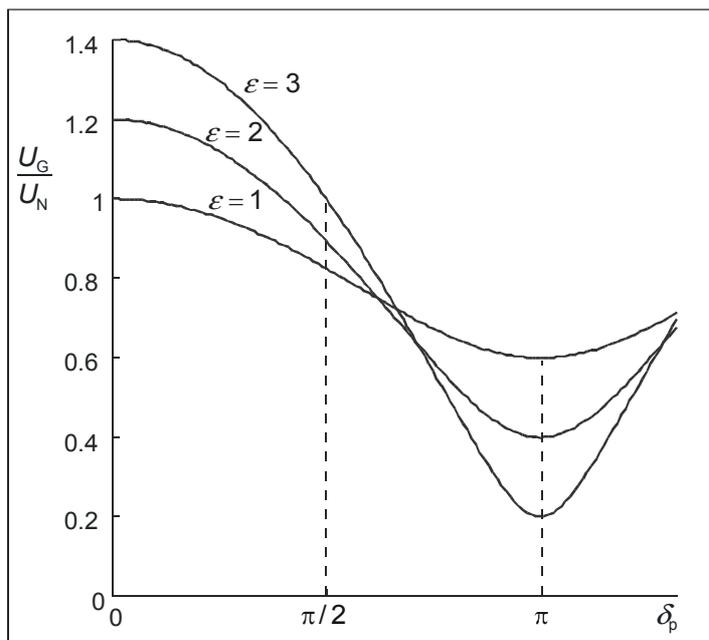


Bild 3.8: Verlauf der unregulierten Generatorspannung in Abhängigkeit von Polradwinkeln für verschiedene Erregungszustände

Aus Bild 3.8 ist ersichtlich, daß im Bereich kleiner Polradwinkel nur eine geringe Abhängigkeit der Spannung vom Polradwinkel (von der Wirkleistung) besteht. In der Nähe der Stabilitätsgrenze reagiert die Spannung wesentlich stärker auf Polradwinkeländerungen, so daß sich Stabilitätsprobleme auch durch starke Spannungsänderungen ankündigen.

Die Spannungsregelung reagiert auf eine Änderung der Klemmenspannung mit einer entsprechenden Veränderung der Erregerspannung, zu der sich ein entsprechender Erregerstrom und eine entsprechende Polradspannung einstellt. Im Bild 3.9 ist ausgehend von einem Arbeitspunkt mit δ_p^0 noch einmal der Ortskreis der Generatorklemmenspannung \underline{U}_G und der Polradspannung \underline{U}_p für den unregulierten Fall (gestrichelt) neben den Ortskurven für den geregelten Fall mit $U_G = \text{konst.}$ eingezeichnet und die zur Vermeidung von ΔU_G erforderliche Nachstellung der Polradspannung U_p konstruiert. Dabei ist angenommen, daß der Spannungsregler die Abweichung ΔU_G vollständig ausregelt.

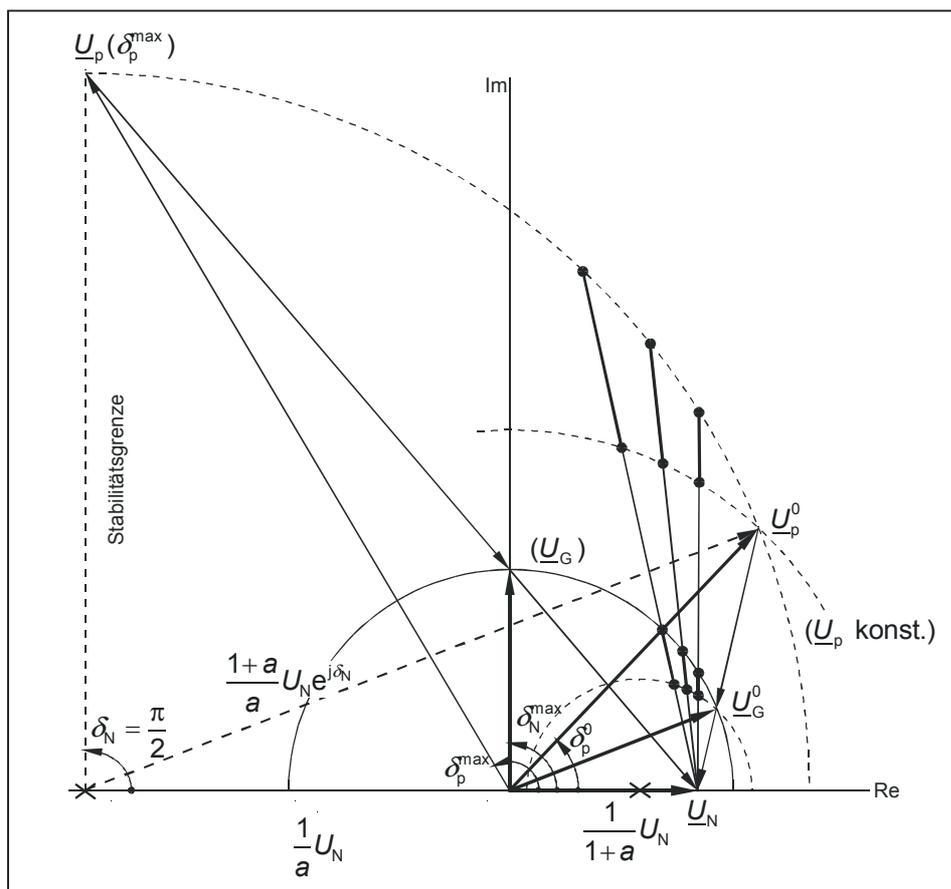


Bild 3.9: Ortskurve von \underline{U}_G und \underline{U}_p für den spannungsgeregelten Fall

Die Ortskurve für \underline{U}_p in Bild 3.9 erhält man aus:

$$\underline{U}_p = \underline{U}_G - jX_d I_G$$

$$I_G = \frac{U_N - \underline{U}_G}{jX_N}$$

mit der Festlegung $\underline{U}_N = U_N \angle 0^\circ$ und $a = X_N / X_d$ sowie $\delta_N = \varphi_{UG}$:

$$\underline{U}_p = U_p e^{j\delta_p} = -\frac{1}{a} U_N + \frac{1+a}{a} U_G e^{j\delta_N} \tag{3.15}$$

Sie ist ein Kreis mit dem Durchmesser $(1+a)/a U_G$, dessen Koordinatenursprung bei $-U_N/a$ liegt.

Aus Gl. 3.15 ergibt sich nach einer Zerlegung in Real- und Imaginärteil für den Betrag von \underline{U}_p bezogen auf U_N eine ziemlich komplizierte Abhängigkeit vom Polradwinkel:

$$\varepsilon(\delta_p) = \frac{U_p}{U_N} = \frac{1}{a} \left(\sqrt{(a+1)^2 \left(\frac{U_G}{U_N}\right)^2 - \sin^2 \delta_p} - \cos \delta_p \right) \tag{3.16}$$

Das Verhältnis U_G / U_N ist dabei konstant, es wird durch den Sollwert der Spannungsregelung eingestellt. Im Bild 3.10 ist der Verlauf von U_p / U_N für verschiedene Ver-

hältnisse U_G/U_N die sich aufgrund der noch zulässigen Spannungsabfälle nicht wesentlich von 1 unterscheiden dürfen, dargestellt.

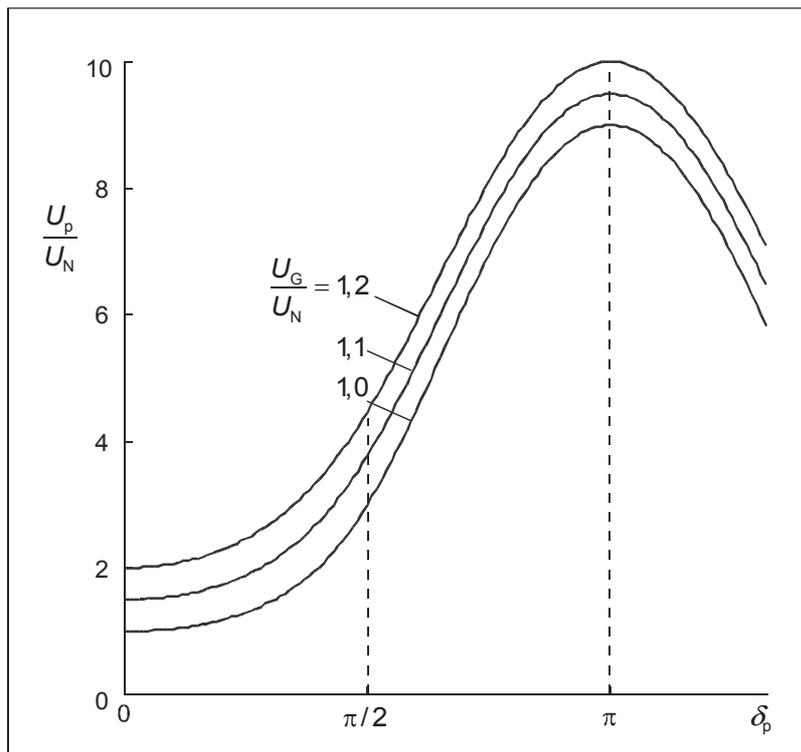


Bild 3.10: Erforderliche Nachstellung der Erregerspannung durch den Spannungsregler bei U_G konst.

Die an das Netz abgegebene Wirkleistung berechnet sich im geregelten Fall aus:

$$P_N = \frac{3U_N^2}{X_d + X_N} \varepsilon(\delta_p) \sin \delta_p \quad (3.17)$$

mit $\varepsilon(\delta_p)$ nach Gl. (3.16). Die im Bild 3.11 über δ_p aufgetragenen Leistungs-Winkel-Kennlinien $P_N(\delta_p)$ nach Gl. (3.17) heißen *äußere* Leistungs-Winkel-Kennlinien im Gegensatz zu den Leistungs-Winkel-Kennlinien im ungeregelten Fall, die dann als *innere* Leistungs-Winkel-Kennlinien zu bezeichnen sind.

Da das in Abschnitt 3.1 hergeleitete Stabilitätskriterium

$$\frac{dP_N}{d\delta_p} > 0$$

auch für die äußere Kennlinie gelten muß, ergibt sich durch die Spannungsregelung im Generatorbetrieb eine Verschiebung der statischen Stabilitätsgrenze über $\delta_p = \pi/2$ hinaus. Der Zugewinn am stabilen Winkelbereich wird als *künstlicher* Stabilitätsbereich, die durch die äußere Kennlinie bedingte Stabilität schlechthin als *künstliche* Stabilität bezeichnet. Praktisch wird man das System jedoch nicht im künstlichen Stabilitätsbereich betreiben, sondern den künstlichen Stabilitätsbereich nur als zusätzliche Stabilitätsreserve nutzen. Sollte nämlich bei Betrieb im künstlichen Stabilitätsbereich der Regler ausfallen, so rutscht der Generator sofort auf dem Rücken der durch den Arbeitspunkt gehenden inneren Kennlinie in den Asynchronbetrieb. Außerdem sind die idealen Regelbedingungen, die wir für die Ableitung der äußeren Kenn-

linie angenommen haben (vollständige Ausregelung der Spannungsabweichung, keine Reglerdynamik) in der Praxis nicht erfüllt oder erfüllbar.

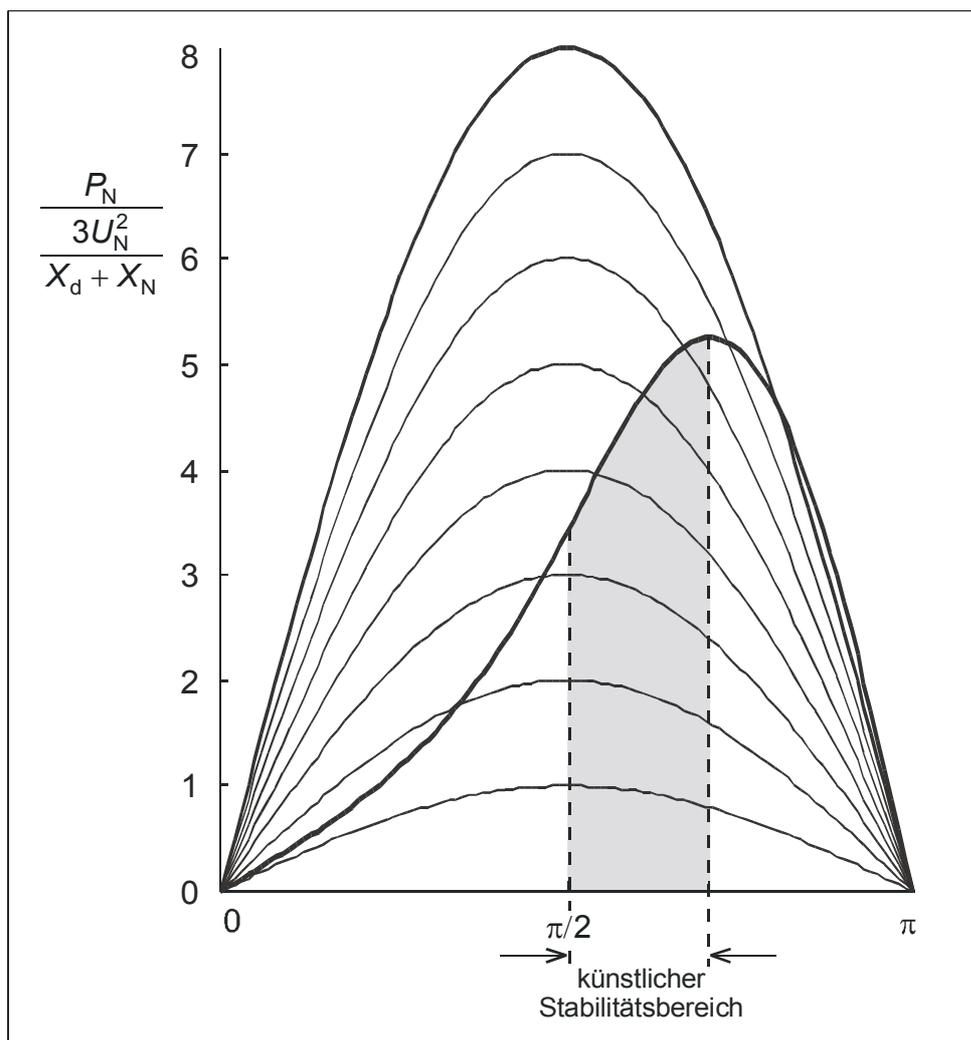


Bild 3.11: Innere und äußere Leitungs-Winkel-Kennlinien für das Ein-Maschinenproblem

3.4 Statische Stabilität des Mehrmaschinenmodells

Die am Beispiel des Ein-Maschinenproblems dargestellte Stabilitätsuntersuchung anhand der Eigenwerte der linearisierten Systemgleichungen läßt sich selbstverständlich auch auf das Mehrmaschinenproblem anwenden. Nur kommt man hier zu keiner generellen Aussage mehr über die zulässigen Betriebsbereiche. Man muß praktisch von einer Leistungsflußberechnung ausgehend die einzelnen synchronisierenden Leistungen berechnen und linearisieren. Sind die Realteile aller Eigenwerte für diesen Arbeitspunkt sämtlich negativ, wird die Rechnung mit einem höheren Belastungszustand wiederholt und das Verfahren so lange fortgesetzt, bis sich mindestens ein positiver reeller Eigenwert ergibt. Für ein System mit m Generatoren sind $2m$ Eigenwerte zu berechnen.

3.5 Maßnahmen zur Verbesserung der statischen Stabilität

Die statische Stabilität kann durch Maßnahmen in Kraftwerk und/oder Netz verbessert werden, die alle darauf gerichtet sind, die synchronisierende Leistung im Arbeitspunkt zu erhöhen. Für einen bestimmten Arbeitspunkt ist die synchronisierende Leistung groß, wenn man eine große Kippleistung vorhält. Hinweise auf stabilitätsverbessernde Maßnahmen gibt uns bereits die einfache Gleichung für die Kippleistung des Ein-Maschinenproblems Gl. (3.7). Um P_{kippl} groß zu machen, muß man in Gl. (3.7) den Nenner klein und den Zähler groß machen. Da man die Generatorparameter als gegeben ansehen muß, bleibt zur Verkleinerung des Nenners nur die Verringerung bzw. Kleinhaltung von X_N .

Netztechnische Maßnahmen, die zu einem kleinen X_N führen, sind:

- Doppelleitungen
- Netzvermaschung
- verteilte Kraftwerksstandorte
- Reihenkompensation langer Leitungen

Der Zähler von Gl. (3.7) wird groß, wenn U_N und U_p groß sind. U_N ist durch die Netznennspannung gegeben, wobei sich der Übergang auf eine höhere Netznennspannung durch den damit verbundenen Rückgang der Impedanzen günstig auf das Stabilitätsverhalten eines Netzes auswirkt. Die Polradspannung wird größer bzw. günstig beeinflusst bei:

- übererregter Fahrweise
- Spannungsregelung

Dabei sind jedoch durch den Blindleistungstransport vom Kraftwerk zum Netz und den damit verbundenen Spannungsabfällen Grenzen gesetzt.

4 Transiente Stabilität

4.1 Transiente Stabilität des Ein-Maschinenproblems

Wie bei der Untersuchung der statischen Stabilität soll das Ein-Maschinenproblem nach Bild 4.1 zur Erläuterung des grundlegenden Systemverhaltens bei großen vorübergehenden Störungen herangezogen werden.

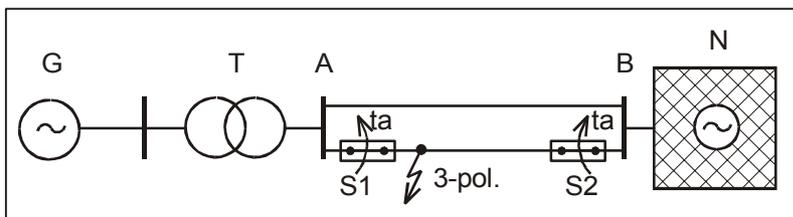


Bild 4.1: Ein-Maschinenproblem zur Untersuchung der transienten Stabilität

Die Ersatzschaltung für Bild 4.1 ist in Bild 4.2 angegeben. Der Generator ist darin - wie im Abschnitt 2.2 begründet - mit transienten Größen nachgebildet. Die Wirkwiderstände sind der Einfachheit halber wieder vernachlässigt.

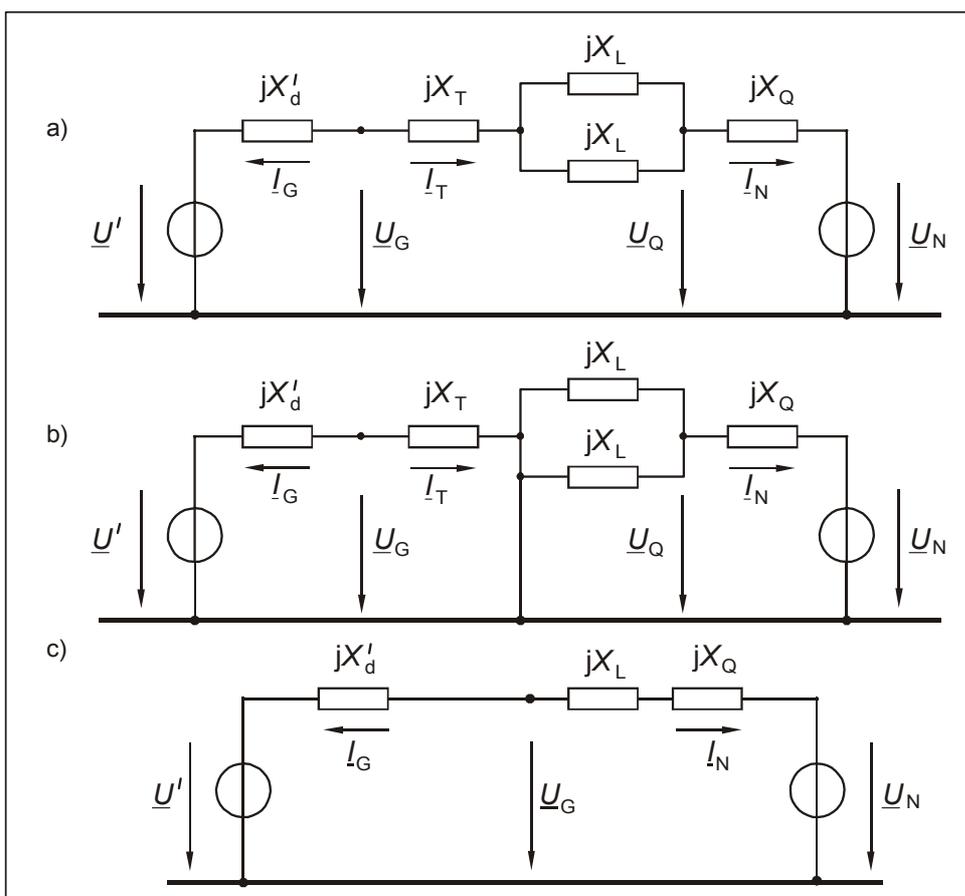


Bild 4.2: Ersatzschaltung für die Anordnung in Bild 4.1: a) Zustand vor KS b) Kurzschlußzustand c) Zustand kurzschlussbehaftete Leitung abgeschaltet

Als Stabilitätsstörung wird gewöhnlich ein dreipoliger Kurzschluß angenommen, da dieser einerseits die schwerwiegendste Störung darstellt und andererseits der Re-

chenaufwand bei Beschränkung auf den dreipoligen Kurzschluß am kleinsten ist. Der Kurzschluß in Bild 4.1 soll unmittelbar hinter dem Schalter S1 liegen. Wir werden später sehen, daß dies aus Sicht der transienten Stabilität der ungünstigste Kurzschlußort auf der Leitung ist. Die kurzschlussbehaftete Leitung werde durch den Leitungsschutz beidseitig zur Zeit t_a selektiv abgeschaltet. Die Frage ist, wie groß darf t_a höchstens sein, damit der Generator (bzw. das Kraftwerk) G in einen stabilen synchronen Betriebszustand mit dem Netz zurückschwingt und somit transient stabil ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß ein solcher stationärer Betriebszustand auch mit *einem* Stromkreis der Doppelleitung existiert, d.h. das System nach Abschaltung eines Stromkreises der Doppelleitung auch statisch stabil ist.

Wir sehen schon an diesem einfachen Beispiel, daß die transiente Stabilität im Gegensatz zur statischen Stabilität von der Art und dem Ort der Störung und auch vom stationären Zustand vor und nach der Störung abhängt.

Da bei Annahme einer konstanten transienten Spannung auch deren Komponenten U'_d und U'_q konstant sind, bewegt sich der läuferfeste Zeiger \underline{U}' gegenüber dem frequenzstarreren Netz genau so wie das Polrad, so daß auf der linken Seite der Bewegungsgleichung $\dot{\delta} = \dot{\delta}'$ eingeführt werden kann (s. Bild 4.3 mit β und φ_{uN} konstant):

$$\begin{cases} \dot{\omega} = k_m (P_T - P_N) \\ \dot{\delta}' = \omega - \omega_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Mit Hilfe der Ersatzschaltung wird nun die vom Netz aufgenommene Leistung P_N berechnet, um die rechte Seite der Bewegungsgleichung (Gl. (4.1)) zu vervollständigen, wobei zwischen den fehlerfreien Zuständen vor und nach dem Kurzschluß und dem Kurzschlußzustand unterschieden werden muß.

Fehlerfreier Zustand vor dem Kurzschluß (Bild 4.2a)

Die Doppelleitung ist in Betrieb. Ausgehend von der Leistung und der Spannung am Generator können wir den Generatorstrom bestimmen und die transiente Spannung \underline{U}' und die innere Netzspannung \underline{U}_N , deren Beträge – wie vereinbart – für die weiteren Untersuchungen konstant angenommen werden, berechnen (Bild 4.3).

Mit U' und U_N ergibt sich für die vom Generator an das Netz abgegebene Leistung ein zu Gl. (3.4) analoger Ausdruck:

$$P_N^0 = 3 \frac{U' U_N}{X'_d + X_N^0} \sin \delta_0' \quad (4.2)$$

wobei:

$$X_N^0 = X_T + \frac{1}{2} X_L + X_Q$$

und:

$$\delta_0' = \varphi'_u - \varphi_{uN} = \delta_0 + \frac{\pi}{2} + \beta - \varphi_{uN}$$

ist. Da sich der Generator im stationären synchronen Zustand befindet, ist $\dot{\omega} = 0$ und damit nach Gl. (4.1)

$$P_T = P_N^0$$

$$P_N^a = 3 \frac{U' U_N}{X'_d + X_N^a} \sin \delta' \tag{4.5}$$

mit:

$$X_N^a = X_T + X_L + X_Q$$

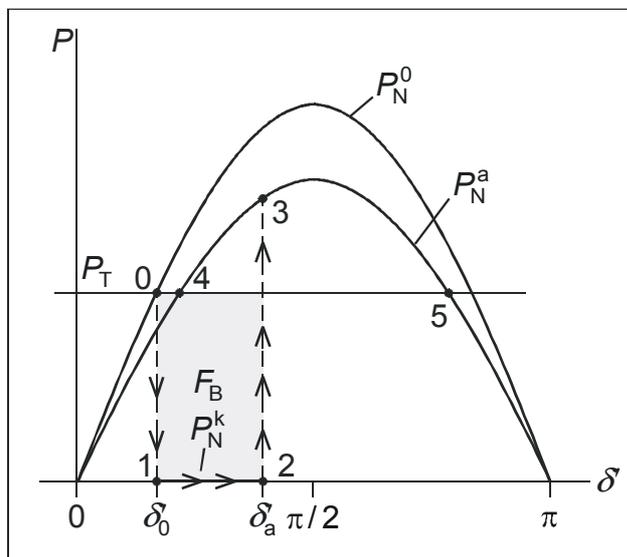


Bild 4.4: Leistungs-Winkel-Kennlinien für das Netz nach Bild 4.2

Während der Beschleunigungsphase im Kurzschluß erfährt die Generatorwelle gegenüber dem rotierenden Bezugssystem den Zuwachs an kinetischer Energie ΔT . Zur Berechnung von ΔT als Funktion vom Winkelzuwachs, eliminieren wir im Zustands-Differentialgleichungssystem Gl. (4.1) die Zeit, indem wir beide Gleichungen dividieren, $\omega - \omega_0 = \Delta \omega$, $\Delta \dot{\omega} = \dot{\omega}$ setzen und die Variablen ordnen:

$$\Delta \omega d\Delta \omega = k_m (P_T - P_N) d\delta' \tag{4.6}$$

Im Kurzschlusszustand mit $P_N = P_N^k = 0$ ist eine beidseitige Integration ausführbar und liefert:

$$\frac{1}{2} \Delta \omega_a^2 = k_m P_T (\delta'_a - \delta'_0) \tag{4.7}$$

Wir multiplizieren die Gl. (4.7) noch mit J/p^2 und erhalten so für den Energiezuwachs ΔT_a bis zur Abschaltung:

$$\Delta T_a = \frac{1}{2} \frac{J}{p^2} \Delta \omega_a^2 = \frac{1}{2} J \Delta \Omega_a^2 = \frac{1}{\omega_0} P_T (\delta'_a - \delta'_0) = \frac{1}{\omega_0} F_B \tag{4.8}$$

Der Energiezuwachs ist somit der in Bild 4.4 markierten *Beschleunigungsfläche* F_B proportional.

Zustand nach Kurzschlußabschaltung (Bild 4.2c)

Der Punkt 3, in dem das System unmittelbar nach Kurzschlußabschaltung gelangt, ist wegen $P_N^a(\delta'_a) > P_T$ kein stationärer Arbeitspunkt. Von den beiden Schnittpunkten 4 und 5 mit der Turbinenkennlinie ist nur der Punkt 4 ein stabiler stationärer Arbeitspunkt, in den das System strebt, wenn es transient stabil ist. Durch den während des Kurzschlusses erfahrenen Zuwachs an kinetischer Energie ΔT_a bewegt sich das System zunächst in Richtung größerer Winkel weiter, wird aber durch P_N^a gebremst, denn es gilt jetzt:

$$\Delta \dot{\omega} = \ddot{\delta}' = k_m (P_T - P_N^a) \tag{4.9}$$

Mit der Kurzschlußabschaltung findet ein Vorzeichenwechsel auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung statt. Man erkennt in Winkelaufzeichnungen den Zeitpunkt der Abschaltung am Wendepunkt im Polradwinkelverlauf. Gl. (4.6) ist jetzt nicht mehr geschlossen lösbar. Wir können aber über den Energiesatz den zulässigen Abschaltwinkel δ'_a und damit über Gl. (4.7) die zulässige Abschaltzeit t_a , für die das System noch transient stabil ist, bestimmen. Ausgehend von $\Delta \omega_a$ und δ'_a ergibt die weitere Integration der mit J/p^2 erweiterten Gl. (4.6):

$$\frac{J}{p^2} \int_{\Delta \omega_a}^{\Delta \omega} \Delta \omega \, d\Delta \bar{\omega} = \frac{1}{2} \frac{J}{p^2} (\Delta \omega^2 - \Delta \omega_a^2) = \frac{1}{\omega_0} \int_{\delta'_a}^{\delta'} (P_T - P_N^a(\delta')) \, d\bar{\delta}' \tag{4.10}$$

Die gesamte Energieänderung bis zum Winkel δ' beträgt damit:

$$\Delta T = \Delta T_a + \frac{1}{\omega_0} \int_{\delta'_a}^{\delta'} (P_T - P_N^a(\delta')) \, d\bar{\delta}' = \frac{1}{\omega_0} (F_B - F_V) \tag{4.11}$$

Solange $P'_N > P_T$ ($\delta' < \delta'_{\text{grenz}}$) ist, liefert das Integral in Gl. (4.11) einen Beitrag zum Abbau der während des Kurzschlusses aufgenommenen Bewegungsenergie. Sein Betrag entspricht der *Verzögerungsfläche* F_V im Bild 4.5.

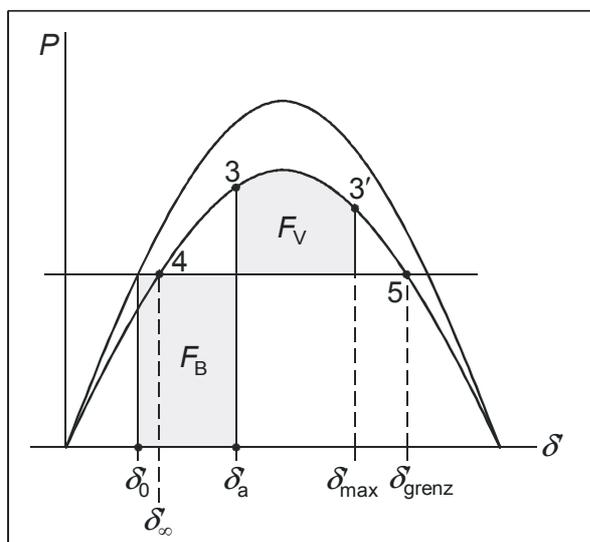


Bild 4.5: Flächensatz der transienten Stabilitätsuntersuchung

Die gesamte Änderung der Bewegungsenergie wird Null, wenn die Verzögerungsfläche der Beschleunigungsfläche gleich wird (Punkt 3' im Bild 3.5), bevor der Winkel δ'_{grenz} erreicht wird. Im Punkt 3' im Bild 3.5 läuft der Generator mit maximaler Winkelauslenkung kurzzeitig synchron ($\dot{\delta}' = 0, \delta' = \delta'_{\text{max}}$). Wegen $P'_N > P_T$ wird das Polrad aber weiter verzögert und schwingt unter Wirkung der Dämpfung in den stabilen Arbeitspunkt 4 zurück. Im ungedämpften Fall (wie hier betrachtet) würde es ständig zwischen δ'_{max} und δ'_{min} hin und her schwingen.

Das Kriterium für transiente Stabilität ist somit der *Flächensatz*:

$$\boxed{F_V = F_B} \quad (4.12)$$

Wird der Kurzschluß zu spät abgeschaltet, so verschieben sich die Punkte 3 und 3' in Bild 4.5 weiter nach rechts. Spätestens im Punkt 5 muß das Flächengleichgewicht jedoch wieder hergestellt sein, da bei Überschreiten des Punktes 5 erneut Beschleunigung (Vorzeichenwechsel auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung) einsetzt und der Generator in Richtung größer werdender Winkel in den Asynchronlauf übergehen würde. Unter Ausschöpfung der maximal möglichen Verzögerungsfläche im Punkt δ'_{grenz} können wir für einen gegebenen Anfangszustand (gegebene Kennlinie) die zulässige Abschaltzeit in folgenden Schritten bestimmen:

$$1. \quad F_{V\text{max}} = F_B:$$

$$\begin{aligned} F_{V\text{max}} &= - \int_{\delta'_{a\text{max}}}^{\delta'_{\text{grenz}}} (P_T - P_{\text{max}}^a \sin \delta') d\delta' \\ &= -P_{\text{max}}^a (\cos \delta'_{\text{grenz}} - \cos \delta'_{a\text{max}}) - P_T (\delta'_{\text{grenz}} - \delta'_{a\text{max}}) = P_T (\delta'_{a\text{max}} - \delta'_0) \end{aligned}$$

also:

$$-P_{\text{max}}^a (\cos \delta'_{\text{grenz}} - \cos \delta'_{a\text{max}}) = P_T (\delta'_{\text{grenz}} - \delta'_0)$$

und damit:

$$\boxed{\delta'_{a\text{max}} = \arccos \left\{ \frac{P_T}{P_{\text{max}}^a} (\delta'_{\text{grenz}} - \delta'_0) + \cos \delta'_{\text{grenz}} \right\}}$$

für δ'_{grenz} gilt nach Bild 4.5: $\delta'_{\text{grenz}} = \pi - \delta'_\infty = \pi - \arcsin(P_T / P_{\text{max}}^a)$

$$2. \quad \text{Aus} \quad \delta'_a = \frac{1}{2} k_m P_T t_a^2 + \delta'_0 \quad \text{folgt:}$$

$$\boxed{t_{a\text{max}} = \sqrt{\frac{2}{k_m P_T} (\delta'_{a\text{max}} - \delta'_0)} = \sqrt{2 \frac{T_m S_{rG}}{\omega_0 P_T} (\delta'_{a\text{max}} - \delta'_0)}}$$

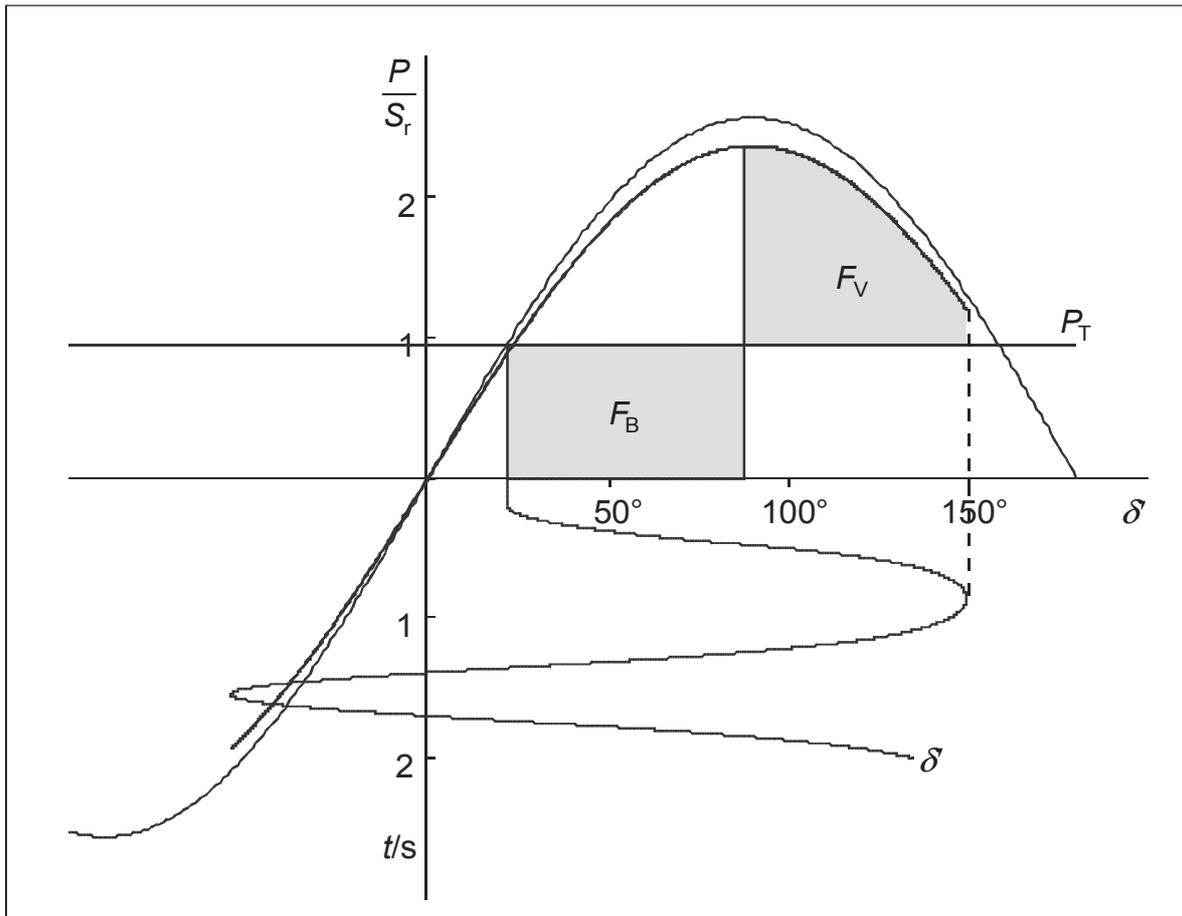


Bild 4.6: Flächensatz und stabiler Winkelverlauf nach dreipoligem Kurzschluß (Grenze der Stabilität)

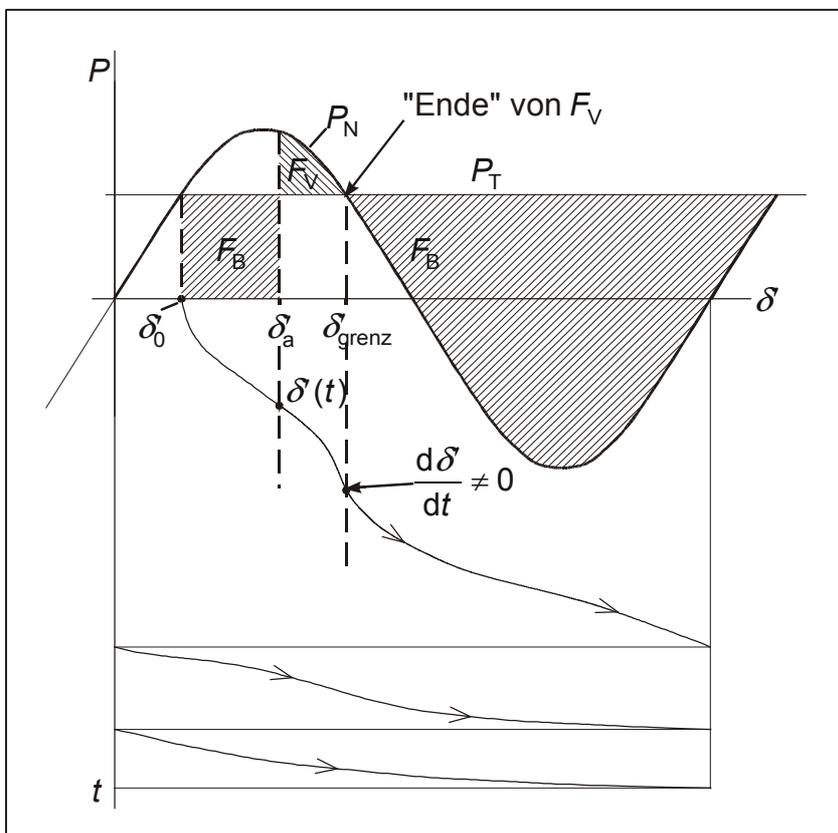


Bild 4.7: Flächensatz und instabiler Winkelverlauf nach dreipoligem Kurzschluß

In den Bildern 4.6 und 4.7 sind die Beschleunigungs- und Verzögerungsflächen und der Polradwinkelverlauf für stabiles und instabiles Verhalten dargestellt. Ein weiteres Berechnungsbeispiel enthält der Anhang.

Aus dem Zeigerbild (Bild 4.8) läßt sich bei bekanntem Winkelverlauf auch der prinzipielle, in Bild 4.9 dargestellte Verlauf des Generatorstromes und der Generatorspannung ermitteln.

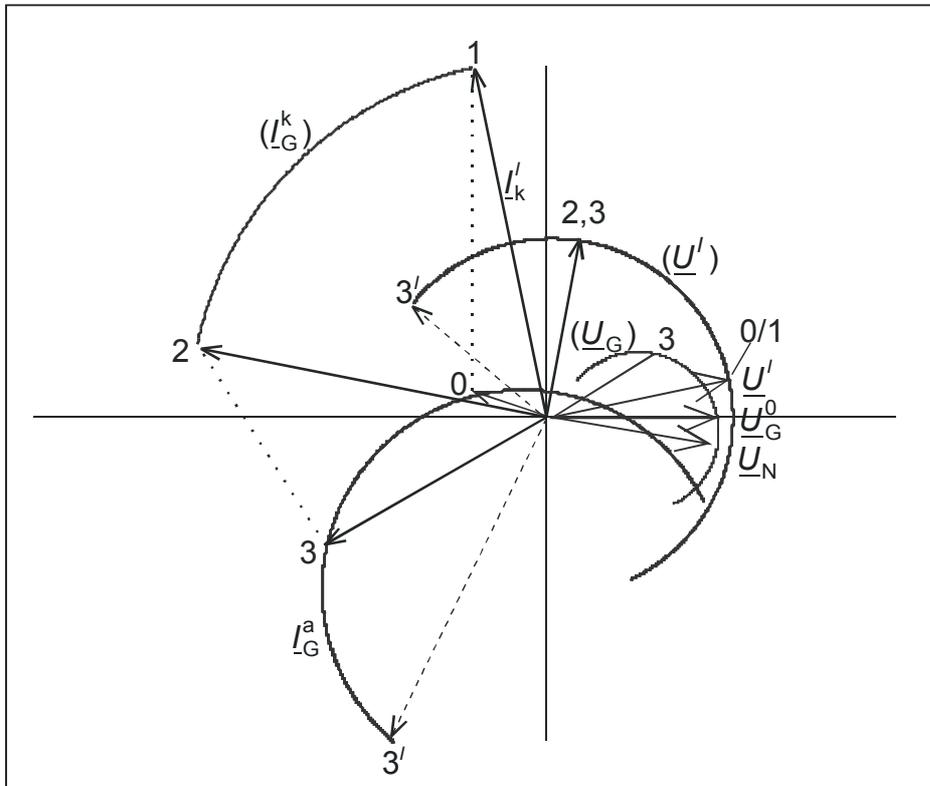


Bild 4.8: Dynamisches Zeigerbild zum Ausgleichvorgang in Bild 4.6 (Strom mit halbem Maßstab)

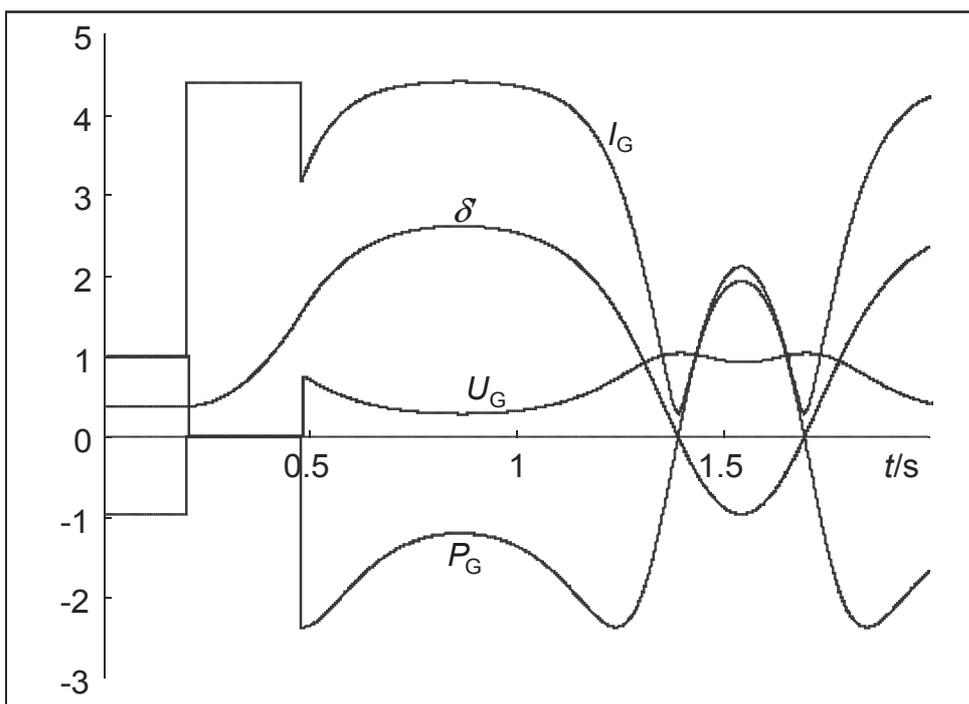


Bild 4.9: Verläufe des Polradwinkels, des Generatorstromes, der Generatorspannung und Generatorleistung zum Vorgang in Bild 4.6 und Bild 4.8 (bezogene Werte)

Bei $t = +0$ springt der Generatorstrom auf I'_{k_1} (Punkt 1) und bleibt während des Kurzschlusses wegen $U' = \text{konst.}$ auf diesem Wert. Die transiente Spannung wandert vom Punkt 1 zu Punkt 2 und nimmt den Zeiger U'_k mit. Der Polradwinkel steigt entsprechend der konstanten Beschleunigung quadratisch über der Zeit. Bei $t = +t_a$ springt der Strom auf einen Wert, der sich aus der momentanen Spannungsdifferenz $U' - U_N$ und der Gesamtreaktanz $X'_d + X_N$ ergibt (Übergang von Punkt 2 auf Punkt 3 in Bild 4.8). Der Stromsprung ist abhängig von der Abschaltzeit. Bei größerer Abschaltzeit kann er durchaus auch nach oben führen. Der Polradwinkel hat bei t_a den bereits erwähnten typischen Wendepunkt. Im weiteren Verlauf wandern U' und I_G trotz Verzögerung noch bis zum Punkt 3', bei dem δ'_{\max} erreicht wird. Da die Differenz $U' - U_N$ dabei mitwächst, zeigt der Strom einen ähnlichen Verlauf wie der Polradwinkel und wird ebenfalls im Punkt 3' am größten. Der weitere Verlauf ist klar. Der stationäre Wert δ'_∞ , in den der Winkel einschwingt, ist wegen der Abschaltung des einen Leitungssystems größer als δ'_0 . Die Generatorspannung bricht bei Kurzschluß auf einen Wert, der sich aus der Spannungsteilung über X'_d und X_T ergibt, ein und behält diesen Wert während des Kurzschlusses bei. Mit der Kurzschlußaufhebung springt U_G auf den mit 3 in Bild 4.8 gekennzeichneten Zeiger und schwingt dann ebenfalls mit dem Polradwinkel. Der Betrag von U_G ist klein, wenn der Strom groß ist, und umgekehrt. Aus den Verläufen in Bild 4.9 ist auch der quasistationäre Charakter der mit der Polradschwingung verbundenen Ausgleichsvorgänge zu erkennen, die die vorgenommene Darstellung mit Zeigern rechtfertigt.

4.2 Transiente Stabilität des Mehrmaschinenproblems

Das Mehrmaschinenproblem führt bei m Generatoren auf die Lösung eines *nichtlinearen* Zustands-Differentialgleichungssystem der Ordnung $2m$, das sich aus je zwei Zustandsgleichungen in Form von Gl. (2.10) für jeden Generator zusammensetzt. Das Netz wird zweckmäßigerweise durch die Knotenadmittanzdarstellung beschrieben und auf die Generatorknoten reduziert (transfiguriert). Aus den Generatorströmen und transienten Spannungen können in jedem Zeitpunkt die Generatorleistungen berechnet werden, und so das Differentialgleichungssystem durch numerische Integration gelöst werden. Dabei sind oft sehr viele Varianten mit unterschiedlichen Ausgangssituationen (Lastflüssen), Fehlerorten und Abschaltzeiten zu untersuchen, so daß der Aufwand beträchtlich sein kann.

Im Ergebnis werden die Polradwinkelverläufe über der Zeit, die sog. *Schwingkurven*, erhalten. Am Verlauf der Schwingkurven ist zu entscheiden, ob transiente Stabilität vorliegt oder nicht. Dabei kommt es nicht darauf an, ob sich die Polradwinkel δ'_i gegenüber dem synchronen Bezugssystem ändern, sondern darauf, wie sich die gegenseitigen Polradwinkel $\delta'_{ik} = \delta'_i - \delta'_k$ der Maschinen verhalten.

In Bild 4.10, das die Schwingkurven für ein Berechnungsbeispiel zeigt, haben alle Generatoren außer zum Generator j kleine gegenseitige Polradwinkel. Sie bilden eine kohärente Maschinengruppe, die lediglich gemeinsam beschleunigt wird. Der Generator j ist gegenüber dieser Gruppe transient instabil geworden. Da die gemeinsame Beschleunigung der stabilen Gruppe für das Stabilitätsverhalten ohne Bedeutung ist, ist es sinnvoll, die gegenseitigen Winkel auszuwerten, wobei man einen Bezugs-

generator, gegenüber dem dann die Polradwinkeldifferenzen gebildet werden, ausgewählt. Als Bezugsgenerator kann auch das sog. *Winkelzentrum* dienen, das sich wie folgt berechnet:

$$\delta'_C = \frac{\sum_{i=1, \neq j}^m (S_{rGi} T_{mi} \delta'_i)}{\sum_{i=1, \neq j}^m (S_{rGi} T_{mi})}$$

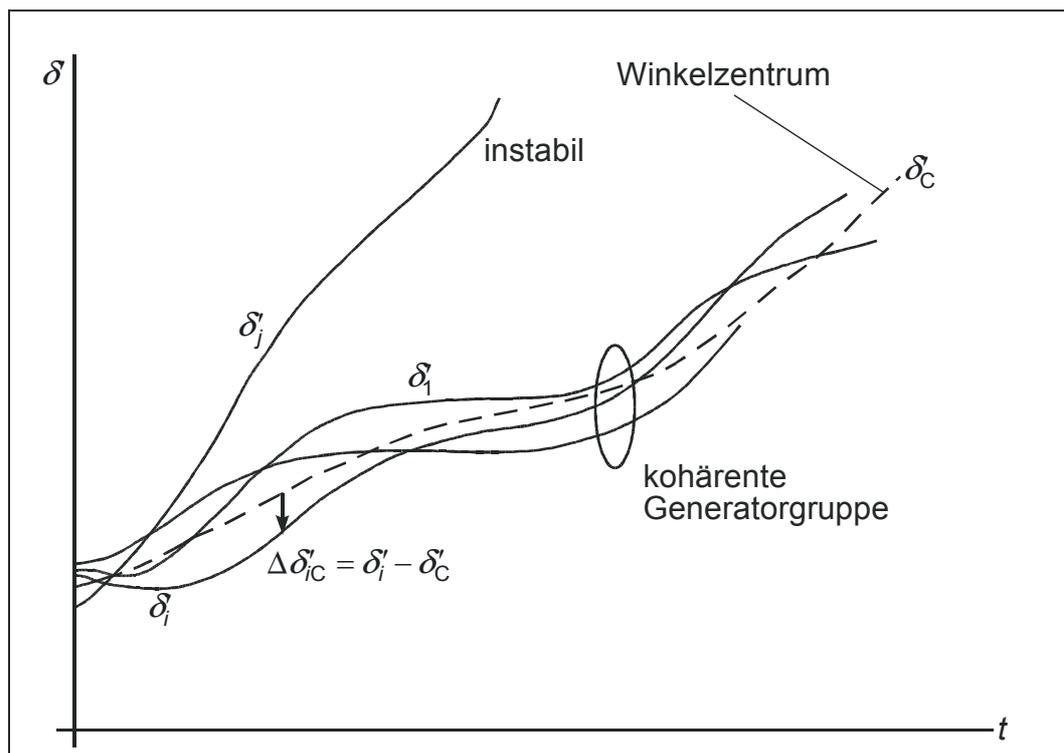


Bild 4.10: Beispiel für die Schwingkurvenverläufe als Ergebnis einer transienten Stabilitätsberechnung

4.3 Maßnahmen zur Verbesserung der transienten Stabilität

Die wesentlichen Einflußgrößen auf das transiente Stabilitätsverhalten, die man schon am Einmaschinenproblem erkennen kann, gelten in gleicher Weise auch beim Mehrmaschinenproblem.

Gutes Stabilitätsverhalten wird dadurch erreicht, daß eine möglichst große Verzögerungsfläche zur Verfügung steht. Es müssen also die Maxima¹⁾ der transienten Leistungs-Winkel-Kennlinien im Vergleich zur Turbinenleistung möglichst groß sein. Daraus resultieren folgende stabilitätsbegünstigenden Maßnahmen:

- Möglichst großer Betrag von U' , d.h. übererregte Fahrweise und eine gute Spannungsregelung zur Stützung von U' . Der übererregten Fahrweise sind durch den damit verbundenen Blindleistungstransport und der Spannungserhöhung am Generator Grenzen gesetzt. Transiente Stabilitätsprobleme treten deshalb nicht - wie vielleicht erwartet - bei Starklast, sondern bei Schwachlast, bei der die Generatoren untererregt gefahren werden müssen, auf.

¹⁾ Beachte: Die Maxima der Leistungs-Winkel-Kennlinien spielen aber sonst keine besondere Rolle im Gegensatz zu denen der Leistungs-Winkel-Kennlinien der statischen Stabilität.

- Möglichst hohes U_N und kleines X_N (s. statische Stabilität) bei genügender Redundanz (im Beispiel ist die Doppelleitung erforderlich).
- Selektive Kurzschlußabschaltung in kurzer Zeit (t_a klein).
- Schnelle Verringerung von P_T im kraftwerksnahen Kurzschlußfall, sog. *fast valving*.
- Zusätzliche Dämpfung der Polradbewegung durch Zusatzsignale am Spannungsregler in Abhängigkeit von $\dot{\delta}'$ und δ' (sog. Power-System Stabilizer PSS) oder durch gezielte Schaltmaßnahmen an statischen Kompensatoren (Querdrosselspulen).

Selbstverständlich wären auch ein kleines X'_d und ein großes T_m als dominierende Generatorparameter erwünscht, jedoch können diese Parameter nicht aus Sicht der Stabilität optimiert werden. Mit wachsender Generatorbemessungsleistung wird aufgrund der im Vordergrund stehenden höheren Materialausnutzung X'_d größer und T_m kleiner und damit das Stabilitätsverhalten schlechter. Zudem sollen bei großen Generatorblöcken die Kurzschlüsse wegen der damit verbundenen Gefahr der Torsionsschwingungen nicht zu schnell abgeschaltet werden (Vermeidung von zwei kurz aufeinanderfolgenden anregenden Drehmomentenstößen).

5 Anhang

5.1 Vollständige Lösung der Gl. (3.11)

Der Lösungsansatz ist bekanntlich:

$$\mathbf{z} = \mathbf{c} e^{\lambda t}$$

Durch Differentiation und Einsetzen in die Ausgangsgleichung erhält man:

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Diese Gleichung hat nur Lösungen $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, wenn die Bedingung:

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$$

erfüllt ist. Aus dieser Bedingung haben wir die Eigenwerte bestimmt. Mit jedem Eigenwert bestimmen wir nun einen Vektor \mathbf{c} . Für \mathbf{c}_1 folgt mit $\lambda = \lambda_1$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & k_m P_{s0} \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wegen $k_m P_{s0} = -\lambda_1^2 = -\lambda_2^2$ sind die beiden Gleichungen linear abhängig. Man erhält aus der 1. oder 2. Zeile

$$c_{11} - \lambda_1 c_{21} = 0$$

In dieser Beziehung kann ein Koeffizient vorgegeben werden. Wir setzen $c_{11} = k_1$ und erhalten $c_{21} = k_1 / \lambda_1$. Ebenso erhält man mit λ_2 bei Festlegung von $c_{12} = k_2$ dann $c_{22} = k_2 / \lambda_2$. Also ist:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/\lambda_1 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/\lambda_2 \end{bmatrix}$$

Die beiden Konstanten k_1 und k_2 werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Wir nehmen an, daß das System bei einer Auslenkung von $\Delta \delta_{p0}$ (vorzeichenbehaftet) mit synchroner Winkelgeschwindigkeit, d.h. $\Delta \omega(0) = \Delta \omega_0 = 0$ arbeitet. Diese Annahme entspricht der Ausgangssituation in Bild 5.1. Für $t = 0$ muß dann gelten:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \delta_{p0} \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/\lambda_1 & 1/\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

und somit:

$$k_1 = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \Delta \delta_{p0} \quad \text{und} \quad k_2 = -k_1$$

Setzen wir nun den *stabilen* Fall mit $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_e$ voraus, so wird $k_1 = j\omega_e \Delta \delta_{p0} / 2$ und somit:

$$\Delta \omega = \frac{1}{2} \omega_e \Delta \delta_{p0} (j e^{\lambda_1 t} - j e^{\lambda_2 t}) = -\omega_e \Delta \delta_{p0} \sin \omega_e t$$

und:

$$\Delta \delta_p = \frac{1}{2} \Delta \delta_{p0} (e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}) = \Delta \delta_{p0} \cos \omega_e t$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann die Zeit noch eliminiert werden, indem man die beiden Gleichungen quadriert und addiert. Das Ergebnis ist ein Kreis im Zustandsraum, der hier auch *Phasenebene* heißt (Bild 5.1):

$$\left(\frac{\Delta \omega}{\omega_e} \right)^2 + \Delta \delta_p^2 = \Delta \delta_{p0}^2$$

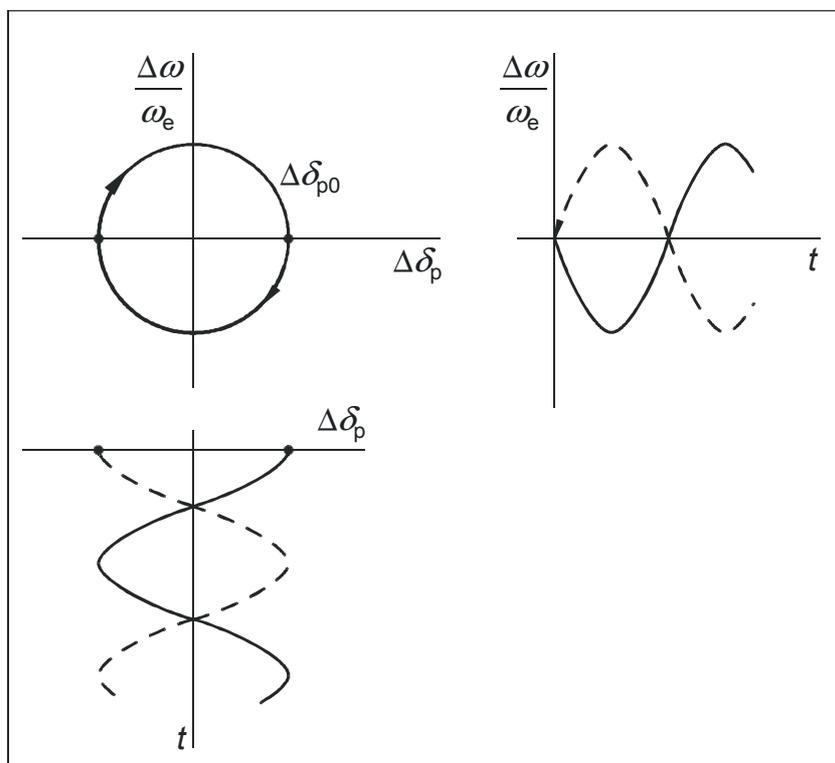


Bild 5.1: Stabile Grenzschwungung für $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_e$

Im *instabilen* Fall wird dagegen mit $\lambda_1 = \sigma$ und $\lambda_2 = -\sigma$:

$$k_1 = \frac{1}{2} \sigma \Delta \delta_{p0} \quad \text{und} \quad k_2 = -\frac{1}{2} \sigma \Delta \delta_{p0}$$

und damit:

$$\frac{\Delta \omega}{\sigma} = \frac{1}{2} \Delta \delta_{p0} (e^{j\sigma t} - e^{-j\sigma t}) = \Delta \delta_{p0} \sinh(\sigma t)$$

$$\Delta \delta_p = \frac{1}{2} \Delta \delta_{p0} (e^{j\sigma t} + e^{-j\sigma t}) = \Delta \delta_{p0} \cosh(\sigma t)$$

Diese Lösungen führen mit wachsender Zeit zu immer größeren Abweichungen vom Arbeitspunkt.

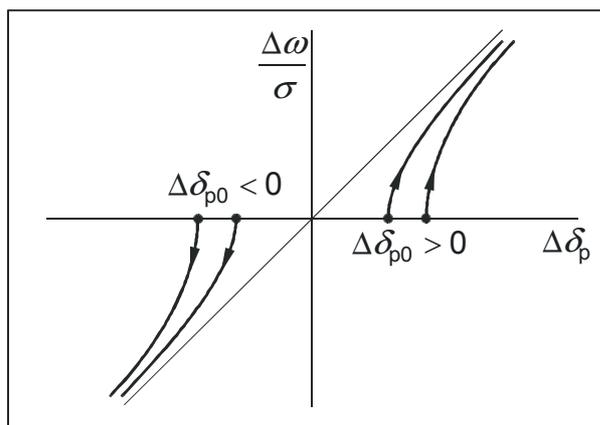


Bild 5.2: Darstellung des statisch instabilen Falles in der Phasenebene.

In der Phasenebene (Bild 5.2) erhält man durch Quadrieren und Subtrahieren der beiden Gleichungen:

$$\frac{\Delta \omega}{\sigma} = \pm \sqrt{\Delta \delta_p^2 - \Delta \delta_{p0}^2}$$

5.2 Zustandsbahnen (Trajektorien) für transiente Stabilität

Die beiden Zustandsgleichungen:

$$\Delta \dot{\omega} = k_m (P_T - P_N)$$

$$\dot{\delta}' = \Delta \omega$$

werden dividiert und wie folgt geordnet:

$$\Delta \omega d\Delta \omega = k_m (P_T - P_N) d\delta'$$

Während des dreipoligen Kurzschlusses mit $P_N = 0$ gilt:

$$\int_0^{\Delta \omega} \Delta \omega d\Delta \omega = k_m P_T \int_{\delta'_0}^{\delta'} d\delta'$$

und somit:

$$\Delta\omega = \sqrt{2k_m P_T (\delta' - \delta'_0)}$$

Im Zustandsraum wächst die Drehzahl über den Polradwinkel ausgehend von δ' nach einer Wurzelfunktion (Bild 5.3).

Nach der *Kurzschlußabschaltung* gilt:

$$\int_{\Delta\omega_a}^{\Delta\omega} \Delta\omega d\Delta\omega = k_m P_T \int_{\delta'_a}^{\delta'} d\delta' - k_m P_T \int_{\delta'_a}^{\delta'} \frac{P_{\max}}{P_T} \sin \delta' d\delta'$$

und mit $\frac{1}{2} \Delta\omega_a^2 = k_m P_T (\delta'_a - \delta'_0)$:

$$\Delta\omega = \sqrt{2k_m P_T \left[(\delta' - \delta'_0) + \frac{P_{\max}}{P_T} (\cos \delta' - \cos \delta'_a) \right]}$$

Bei kleinen Winkeln δ'_a (kleinen Abschaltzeiten t_a) bildet diese Gleichung noch nahezu kreisförmige Zustandsbahnen um δ'_0 (das System schwingt in der Nähe des Arbeitspunktes, in dessen Umgebung die Nichtlinearität der Leistungs-Winkel-Kennlinie noch nicht in Erscheinung tritt), die mit wachsendem δ'_a (späterer Kurzschlußabschaltung) immer mehr „ausgebeult“ werden. Bei Instabilität schwenkt die Zustandsbahn nicht mehr in einen Umlauf um δ'_0 ein. Die Stabilitätsgrenze wird durch die sogenannte *Separatrix* festgelegt.

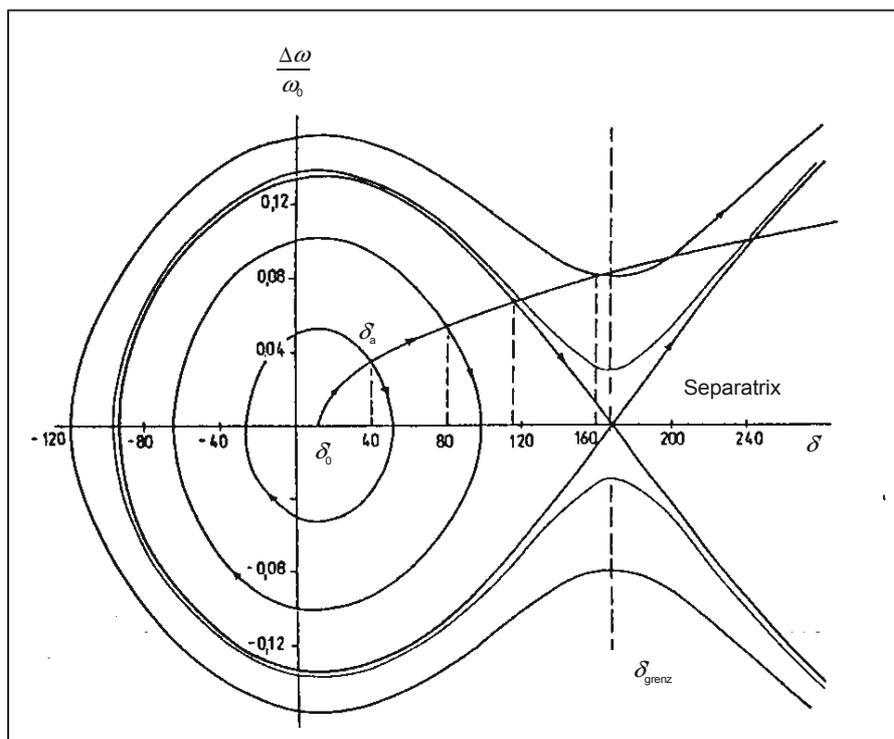


Bild 5.3: Trajektorien für transiente Stabilität für verschiedene Abschaltzeitpunkte δ'_a bei gleichem Anfangswinkel δ'_0

5.3 Berechnungsbeispiel

Im folgenden sind die Ergebnisse einer ausführlicheren Berechnung der Ausgleichsvorgänge für das Ein-Maschinenproblem aus Bild 4.1 dargestellt. Es wurde mit der maximal zulässigen Kurzschlußdauer von 278 ms gerechnet. Der Generator wurde dabei durch ein Modell 5. Ordnung nachgebildet, das neben den 2 Zustandsgrößen für die Drehbewegung noch 3 Zustandsgrößen für die zeitliche Änderung der Läuferflußverkettungen enthält. Eine Spannungsregelung wurde nicht berücksichtigt.

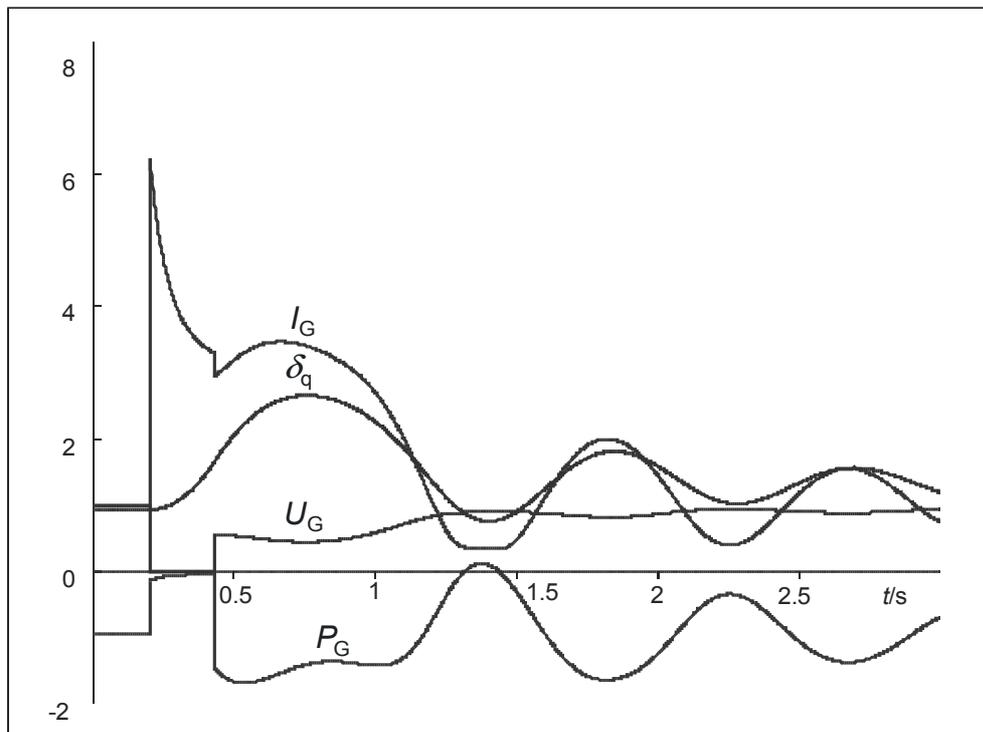


Bild 5.4: Verläufe der Generatorspannung, des Generatorstromes, der Generatorleistung und des Polradwinkels an der Grenze der Stabilität

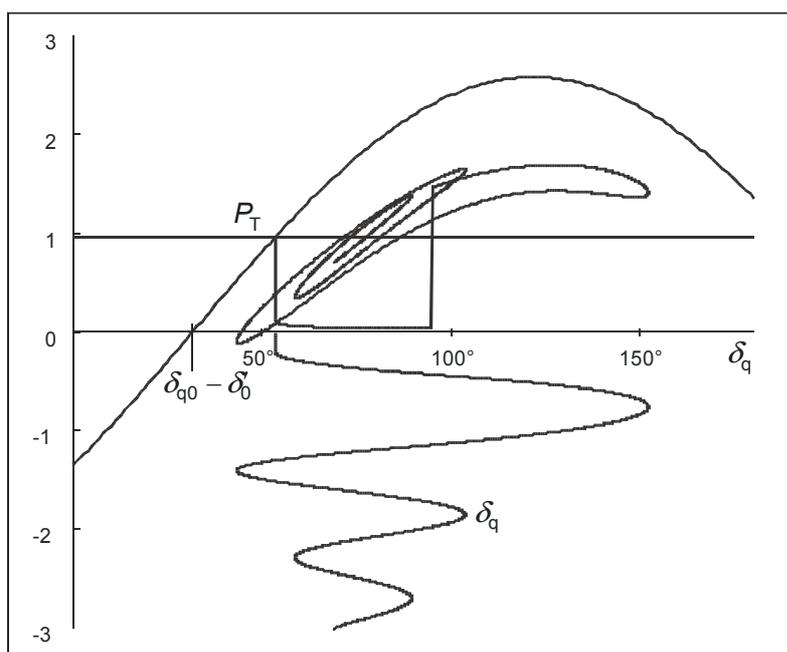


Bild 5.5: Leistungs-Winkel-Kennlinien und Polradwinkelverlauf an der Grenze der Stabilität

Die zeitlichen Verläufe von U_G , I_G , P_G und δ_q (Winkel zwischen \underline{U}_N und der q-Achse des Läufers) in Bild 5.4 zeigen jetzt eine deutliche Dämpfung, die von der zeitlichen Änderung der Läuferflußverkettungen (dem Abklingen der subtransienten Spannung) herrührt, auf. Die Leistungs-Winkel-Kennlinie sackt infolgedessen während des Ausgleichsvorganges zusammen (Bild 5.5).

Die Trajektorie in Bild 5.6 läßt das Einschwingen in einen neuen stabilen Arbeitspunkt erkennen. Der Vergleich der maximal zulässigen Kurzschlußdauer von 230 ms mit der aus der Rechnung mit konst. U' ($t_k = 278$ ms) zeigt jedoch die gute Aussagefähigkeit der vereinfachten Rechnung mit $U' = \text{konst.}$ Hätte man den Spannungsregler berücksichtigt, würde die zulässige Abschaltzeit größer als 230 ms werden und damit die Übereinstimmung beider Rechnungen noch besser werden. Andererseits bestätigt das Beispiel, daß das einfache Modell mit $U' = \text{konst.}$ besser auf den Fall mit Spannungsregelung zutrifft.

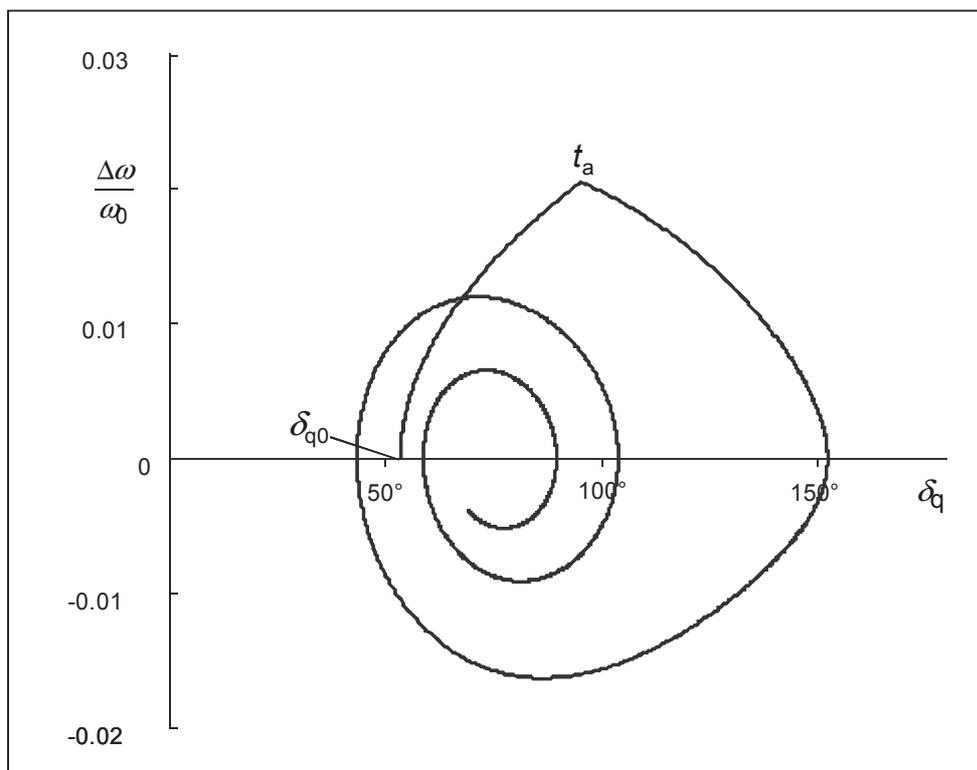
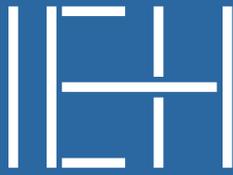
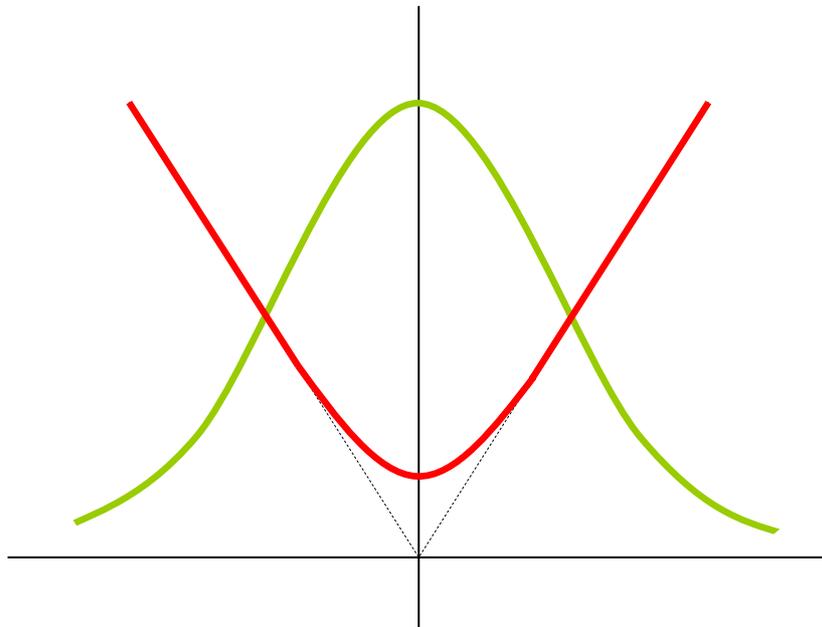


Bild 5.6: Trajektorie an der Grenze der Stabilität (zu Bild 5.5)



Universität Hannover
Institut für Energieversorgung und
Hochspannungstechnik



Vorlesung Elektrische Energieversorgung II

Skript Sternpunktterdung

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

Inhaltsverzeichnis

1	Zweck und Arten der Sternpunktterdung	1
2	Netze mit freiem Sternpunkt	3
2.1	Strom-Spannungsbeziehungen bei Dauererdschluß.....	3
2.2	Transiente Überspannungen bei Erdschlußeintritt und Verlauf der Wiederkehrspannung bei Erdschlußlöschung.....	8
2.3	Zusammenfassende Beurteilung des Erdschlußgeschehens in Netzen mit freiem Sternpunkt.....	11
3	Netze mit Erdschlußkompensation	13
3.1	Strom-Spannungsbeziehungen bei Dauererdschluß.....	13
3.2	Verlagerungsspannung im Normalbetrieb.....	19
3.3	Transiente Überspannungen bei Erdschlußeintritt und Verlauf der Wiederkehrspannung bei Erdschlußlöschung.....	22
3.4	Anschluß und Aufstellung der Erdschlußlöschspulen	28
3.5	Zusammenfassende Beurteilung des Erdschlußgeschehens in erdschlußkompensierten Netzen im Vergleich zu Netzen mit freiem Sternpunkt.....	30
4	Netze mit niederohmiger Sternpunktterdung	31
4.1	Stationärer Erdkurzschlußstrom.....	32
4.2	Erdfehlerfaktor.....	32
4.3	Kurzunterbrechung.....	34
4.4	Zusammenfassende Beurteilung des Erdkurzschlußgeschehens in niederohmig geerdeten Netzen im Vergleich zu Netzen mit freiem Sternpunkt und Netzen mit Erdschlußkompensation	35
5	Abschließende Übersicht	36
6	Anhang	37
6.1	Bestimmung der Eigenfrequenzen der Aufladeschwingung bei Netzen mit freiem Sternpunkt und Netzen mit Erdschlußkompensation	37
6.2	Berechnung des Erdschlußstromes erdschlußkompensierter Netze mit kapazitiver Unsymmetrie.....	39

Hinweis: Das Skript ersetzt nicht die Vorlesung und umgekehrt. Im Skript sind einige Ausführungen, insbesondere mathematische Ableitungen ausführlicher dargestellt, während in der Vorlesung mehr Wert auf das Verständnis gelegt wird.

1 Zweck und Arten der Sternpunktterdung

Unter dem Begriff Sternpunktterdung oder Sternpunktbehandlung faßt man alle Maßnahmen zur Begrenzung des einpoligen Kurzschlußstromes und der Teilkurzschlußströme in der Erde oder zur Begrenzung der mit dem einpoligen Kurzschluß verbundenen Spannungsunsymmetrie (Verlagerungsspannung) zusammen. Da ein kleiner Kurzschlußstrom nur auf Kosten einer höheren Verlagerungsspannung erreicht werden kann (und umgekehrt), muß man sich dabei für einen Kompromiß entscheiden.

Es gibt drei prinzipielle *Arten* der Sternpunktterdung:

1. Netze mit *freiem* (oder isoliertem) *Sternpunkt*, bei denen kein Transformatorsternpunkt und kein Maschinensternpunkt (die Sternpunkte der Generatoren und Motoren werden gewöhnlich nicht geerdet) geerdet ist.

2. Netze mit *Erdschlußkompensation* (oder resonanz-sternpunktgeerdete Netze oder gelöschte Netze), bei denen einzelne Sternpunkte der Transformatoren über eine genau abgestimmte Spule, die nach ihrem Erfinder benannte PETERSEN-Spule, mit der Erde verbunden sind.

3. Netze mit *niederohmiger Sternpunktterdung*, bei denen mehrere Sternpunkte über (im Gegensatz zu 2.) niederohmige Induktivitäten oder Widerstände geerdet sind. Über die Größenordnung der Induktivität oder des Widerstandes wird der zulässige einpolige Kurzschlußstrom eingestellt. Man spricht auch von strombegrenzender, niederohmiger Sternpunktterdung. Sind ausnahmsweise alle Sternpunkte widerstandslos geerdet, so liegt der Sonderfall der *starrten* Sternpunktterdung, bei der die größten Kurzschlußströme und kleinsten Verlagerungsspannungen auftreten, vor. Die starre Sternpunktterdung ist der entgegengesetzte Extremfall zum Netz mit freiem Sternpunkt, bei dem nur geringe Kurzschlußströme fließen, dafür aber die höchste Verlagerungsspannung auftritt.

Je nach Art der Sternpunktterdung ist es üblich, von *Erdschlüssen* oder *Erdkurzschlüssen* zu sprechen, womit auf die Größenordnung des einpoligen Kurzschlußstromes hingewiesen wird. Um von Anfang an die richtigen Begriffe gebrauchen zu können, müssen wir hier vorwegnehmen, daß bei Netzen mit freiem Sternpunkt und bei erdschlußkompensierten Netzen nur kleine einpolige Kurzschlußströme auftreten (Größenordnung einige A), so daß man dort sinnvollerweise von Erdschlüssen und Erdschlußströmen spricht. Wegen der relativ geringen Erdschlußströme interessieren vorrangig die Spannungsverlagerungen im stationären Zustand, die transienten Überspannungen bei Erdschlußeintritt und die Wiederkehrspannung an der Erdschlußstelle. Demgegenüber nehmen bei der niederohmigen Sternpunktterdung die einpoligen Kurzschlußströme Werte zwischen einigen kA und einigen 10 kA an und werden deshalb dann auch zu Recht als Kurzschlußströme bezeichnet und es rücken die mit den hohen Strömen verbundenen Erscheinungen in den Vordergrund.

Aus dieser generellen Charakterisierung wird schon deutlich, daß die Sternpunktterdungsarten mit geringem Kurzschlußstrom und großen Überspannungen in MS-Netzen und in 110-kV-Netzen (einfache Struktur und einfacher Schutz sowie größere Isolationsreserve) sinnvoll sind, und die niederohmige Sternpunktterdung für das Hochspannungsnetz (vermascht, Selektivschutz, hohe Bewertung der Isolationskosten) prädestiniert ist.

Die Beurteilung der einzelnen Arten der Sternpunktterdung erfolgt immer nach:

- der Höhe des einpoligen Kurzschlußstromes,
- der Höhe der Verlagerungsspannung,
- den transienten Überspannungen in den nicht betroffenen Leitern und
- der Art der Spannungswiederkehr des kurzschlußbehafteten Leiters nach der Kurzschlußaufhebung.

Die Höhe der *transienten Erdschlußüberspannungen* ist eng mit der Höhe der 50-Hz-Verlagerungsspannungen verbunden, da sie den Übergang vom ungestörten symmetrischen Spannungszustand zum verlagerten Zustand ausgleichen. Bei zu hohen transienten Erdschlußüberspannungen besteht die Gefahr eines Isolationsdurchschlages zwischen einem weiteren Leiter und Erde; es kommt zum *Doppelerdkurzschluß*. Von der Art der Spannungswiederkehr hängt es ab, ob eine Wiedierzündung an der Erdschlußstelle erfolgt, wodurch es zu *intermittierenden Erdschlüssen* kommen kann, wenn sich Erdschlußlöschung und Wiedierzündung ständig ablösen. Intermittierende Erdschlüsse sind mit besonders hohen transienten Überspannungen verbunden.

Die Folge von zu hohen Teilkurzschlußströmen über Erde sind *Schritt- und Berührungsspannungen* an der Fehlerstelle, die Mensch und Tier gefährden können, sowie die *Beeinflussung* von anderen im Erdreich verlegten Leitungen.

Zur Berechnung des stationären Zustandes bei einpoligem Kurzschluß ziehen wir die symmetrischen Komponenten heran. Mit ihnen lassen sich leicht der Wechselanteil des Kurzschlußstromes und die 50-Hz-Spannungsverlagerung der gesunden Leiter berechnen. Für die Berechnung der überlagerten transienten Vorgänge, muß man eine Momentanwertdarstellung heranziehen und auf Rechenprogramme zurückgreifen. Aus der Kenntnis der stationären Zustände vor und nach dem Erdkurzschluß kann man aber schon gewisse Rückschlüsse auf die theoretisch maximalen Überspannungen ziehen, da Spannungsänderungen an den Netzkapazitäten höchsten zu einem Überspringen auf den doppelten Wert der Änderung erfolgen kann.

Die prinzipiellen Strom-Spannungsverhältnisse bei einpoligem Kurzschluß lassen sich anhand eines sehr einfachen Modells des Dreileitersystems erklären, wovon wir im folgenden für die einzelnen Arten der Sternpunktterdung gebrauch machen wollen, bevor wir die elegantere Darstellung mit symmetrischen Komponenten, behandeln.

Die Symbolik für die drei Arten der Sternpunktterdung zeigt Bild 1.1:

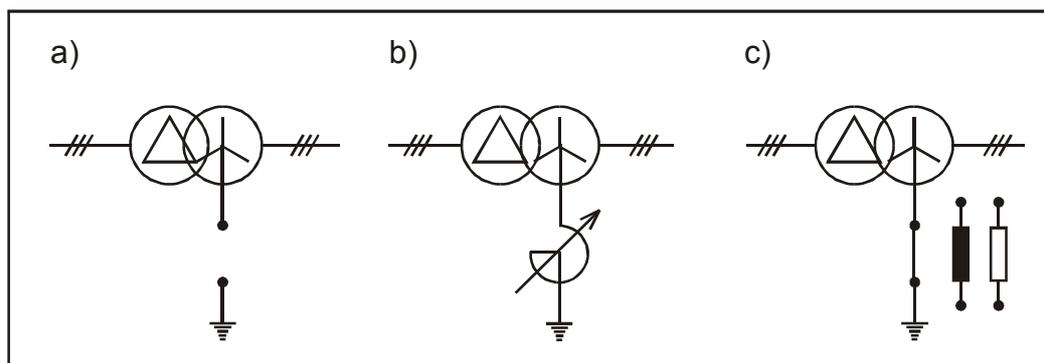


Bild 1.1: Arten der Sternpunktterdung

a) freier SP

b) Resonanz-SPE

c) niederohmige SPE

2 Netze mit freiem Sternpunkt

2.1 Strom-Spannungsbeziehungen bei Dauererdschluß

Diese Art der Sternpunktterdung kommt, wie wir noch begründen werden, nur für Mittelspannungsnetze in Betracht. Bild 2.1 zeigt eine einfache Anordnung, bei der ein Mittelspannungsnetz über einen Dreiwicklungstransformator aus einem 110-kV-Netz gespeist wird. Die Sternpunkte der Transformatoren sind voraussetzungsgemäß nicht geerdet. Im MS-Netz tritt ein einpoliger Kurzschluß, der dann als Erdschluß bezeichnet wird, auf.

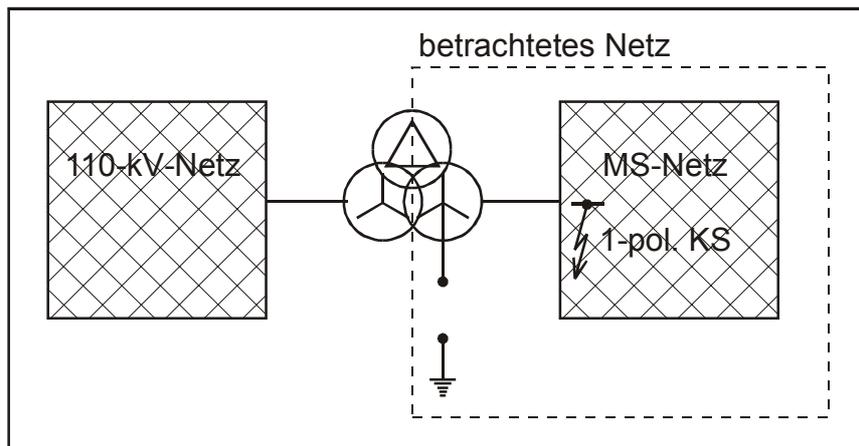


Bild 2.1: Beispiel für ein MS-Netz mit freiem Sternpunkt

Die einfachste Ersatzschaltung (das sog. Minimalmodell), mit dem der Dauererdschluß noch ausreichend erklärt werden kann, besteht aus einer starren Einspeisung für das speisende Netz (drei symmetrische Spannungsquellen) und den drei gleich groß angenommenen Leiter-Erde-Kapazitäten C_E des Mittelspannungsnetzes, in denen alle Leiter-Erde-Kapazitäten konzentriert sind, wenn man sämtliche Längsimpedanzen vernachlässigt (Bild 2.2). Außerdem sind auch die Leiter-Leiter-Kapazitäten vernachlässigt, was wir natürlich noch rechtfertigen müssen.

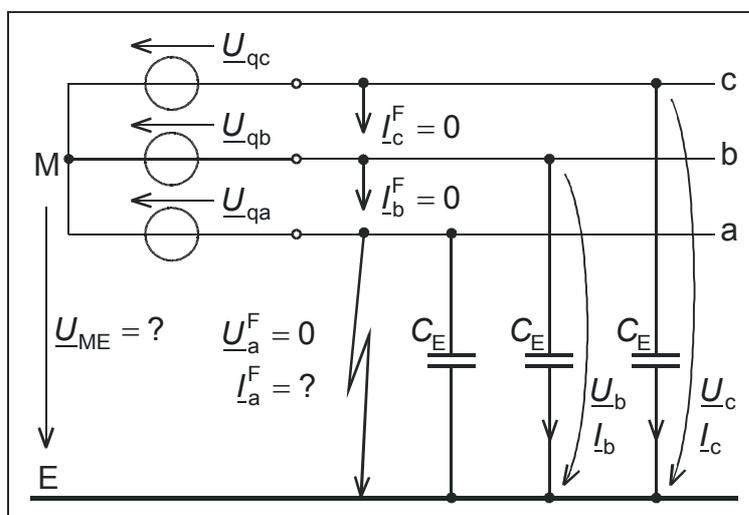


Bild 2.2: Minimalmodell für die Anordnung aus Bild 2.1 mit Zählpfeilen

Gesucht sind die Sternpunkt-Erde-Spannung (Verlagerungsspannung) \underline{U}_{ME} , die Spannungen $\underline{U}_b^F = \underline{U}_b$ und $\underline{U}_c^F = \underline{U}_c$ sowie der Strom \underline{I}_a^F an der Fehlerstelle. Bekannt

sind die drei symmetrischen Quellenspannungen $\underline{U}_{qa} = \underline{U}_q$, $\underline{U}_{qb} = \underline{a}^2 \underline{U}_q$ und $\underline{U}_{qc} = \underline{a} \underline{U}_q$ und die Strom-Spannungsbeziehungen an der Fehlerstelle (s. Skript Fehler): $\underline{U}_a^F = 0$ und $\underline{I}_b^F = \underline{I}_c^F = 0$.

Aus den drei Maschenumläufen über die Quellenspannungen, die Sternpunkt-Erde-Spannungen und die Erde erhält man:

$$\underline{U}_a^F = \underline{U}_{qa} + \underline{U}_{ME} = 0 \tag{2.1}$$

$$\underline{U}_b^F = \underline{U}_{qb} + \underline{U}_{ME} \tag{2.2}$$

$$\underline{U}_c^F = \underline{U}_{qc} + \underline{U}_{ME} \tag{2.3}$$

Aus Gleichung (2.1) folgt:

$$\underline{U}_{ME} = -\underline{U}_{qa} = -\underline{U}_q$$

und damit aus den Gl. (2.2) und (2.3) mit $\underline{U}_{qb} = \underline{a}^2 \underline{U}_q$ und $\underline{U}_{qc} = \underline{a} \underline{U}_q$:

$$\underline{U}_b^F = (\underline{a}^2 - 1) \underline{U}_q = \sqrt{3} \underline{U}_q \angle 210^\circ \tag{2.4}$$

$$\underline{U}_c^F = (\underline{a} - 1) \underline{U}_q = \sqrt{3} \underline{U}_q \angle 150^\circ \tag{2.5}$$

Das entsprechende Zeigerbild ist in Bild 2.3 ausgehend von den Quellenspannungen konstruiert. Vor dem Erdschluß sind die Leiter-Erde-Spannungen an der Kurzschlußstelle gleich den Quellenspannungen. Bei Erdschluß wird zu allen drei Spannungen \underline{U}_{ME} addiert, wodurch die Spannung im kurzgeschlossenen Leiter Null wird und die Leiter-Erde-Spannungen an den gesunden Leitern auf den $\sqrt{3}$ -fachen Wert gegenüber dem fehlerfreien Fall angehoben werden.

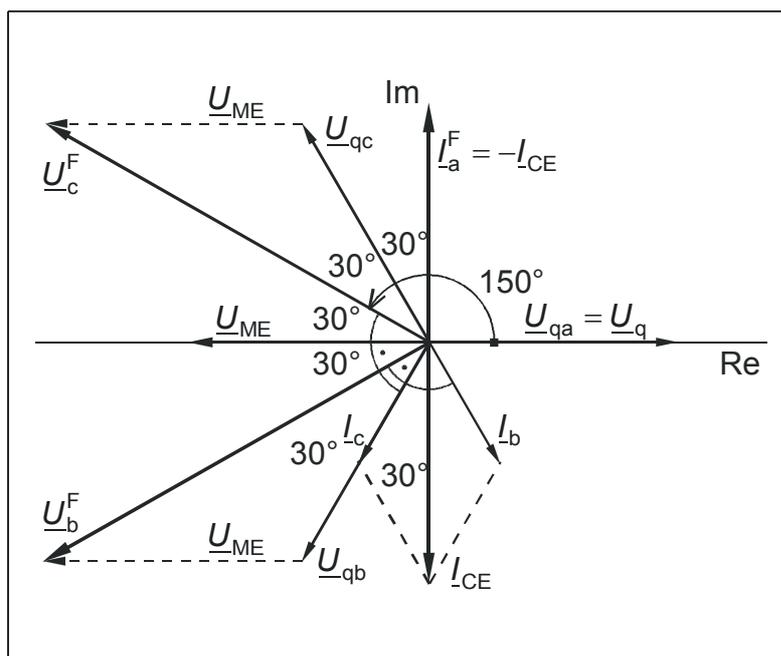


Bild 2.3: Zeigerbild der Spannungen und Ströme für Erdschluß im Netz mit freiem Sternpunkt

Wenn unsere einfache Ersatzschaltung in Bild 2.2 zutreffend ist, bildet sich die Spannungsanhebung oder wie wir auch sagen, *zeitweilige betriebsfrequente Spannungserhöhung* in den gesunden Leiter im ganzen Netz gleichermaßen aus, bleibt also nicht nur auf die Erdschlußstelle beschränkt.

Zur Kennzeichnung der betriebsfrequenten Spannungserhöhung dient der *Erdfehlerfaktor* δ , der als das Verhältnis aus Leiter-Erde-Spannung im Erdschluß und Leiter-Erde-Spannung vor dem Erdschluß für *den* gesunden Leiter, der das größte Verhältnis aufweist, definiert ist.

In unserem einfachen Modell ist der Erdfehlerfaktor für die Leiter b und c gleich und beträgt:

$$\delta = \frac{U_b^F}{U_q} = \frac{U_c^F}{U_q} = \sqrt{3} \quad (2.6)$$

Der Wert von $\delta = \sqrt{3}$ ist charakteristisch für Netze mit freiem Sternpunkt. Da die Leiter-Erde-Spannungen im gesamten Netz auf das $\sqrt{3}$ -fache gegenüber dem Normalbetrieb angehoben wird, besteht die Gefahr, daß irgendwo im Netz, wo die Leiter-Erde-Isolation eine Schwachstelle aufweist, ein zweiter Kurzschluß gegen Erde, ein sog. *Doppelerdkurzschluß* entsteht.

Die Ströme I_b und I_c durch die Leiter-Erde-Kapazitäten der gesunden Leiter eilen den Spannungen jeweils um 90° voraus (s. Zeigerbild) und ergeben sich damit zu:

$$I_b = j\omega C_E \underline{U}_b \quad \text{und} \quad I_c = j\omega C_E \underline{U}_c.$$

Der gesamte Strom durch die Erdkapazitäten wird mit $\underline{U}_b = \underline{U}_b^F$ und $\underline{U}_c = \underline{U}_c^F$:

$$I_{CE} = I_b + I_c = j\omega C_E (\underline{a}^2 - 1 + \underline{a} - 1) \underline{U}_q = -j3\omega C_E \underline{U}_q$$

Für den Erdschlußstrom gilt mit der Zählpfeilvereinbarung aus Bild 2.2:

$$I_a^F = -I_{CE} = j3\omega C_E \underline{U}_q \quad (2.7)$$

und für den Betrag unter der Annahme $U_q = U_n / \sqrt{3}$ (U_n = Netznennspannung):

$$I_a^F = I_{CE} = \sqrt{3}\omega C_E U_n \quad (2.8)$$

Wegen der Proportionalität des Erdschlußstromes zu C_E heißt der Fehlerstrom bei Erdschluß *kapazitiver Erdschlußstrom*. Aufgrund der Größenordnung von C_E nimmt der kapazitive Erdschlußstrom in Netzen mit freiem Sternpunkt keinen für einen Kurzschluß typischen, großen Wert an, was wir schon durch die Bezeichnung zum Ausdruck gebracht haben. Die Gleichung (2.8) kann zur Bestimmung der resultierenden Leiter-Erde-Kapazität (Nullkapazität) eines Netzes herangezogen werden, wenn der kapazitive Erdschlußstrom bekannt ist.

Der kapazitive Erdschlußstrom wird gewöhnlich pro km Leitungslänge angegeben und dann mit I'_{CE} bezeichnet. Aus der folgenden Schreibweise der Gl. (2.8) ist ersichtlich, daß der kapazitive Erdschlußstrom der gesamten Leitungslänge l , also der Ausdehnung des Netzes proportional ist.

$$I_{CE} = (\sqrt{3}\omega C'_E U_n) l = I'_{CE} l \quad (2.9)$$

Für Freileitungs-Mittelspannungsnetze gilt $C_E^l = 6 \text{ nF / km}$ als Richtwert, womit I_{CE}^l für $U_n = 10$ und 20 kV in der Größenordnung von $0,03 \dots 0,07 \text{ A / km}$ liegt.

Mit wachsendem Kabelanteil (der Zubau der Mittelspannungsnetze erfolgt im wesentlichen durch Verkabelung) erhöht sich I_{CE}^l durch die wesentlich größeren Werte von C_E^l bei Kabeln (Größenordnung μF) beträchtlich.

Die Wahrscheinlichkeit für den Erdschlußeintritt im Spannungsmaximum ist am größten. Für den Leiter a entspricht diesem Zeitpunkt die Lage der Zeiger in Bild 2.3, wenn man sich Bild 2.3 als Momentaufnahme rotierender Amplituden-Zeiger vorstellt. Der kapazitive Erdschlußstrom erreicht dann nach 10 ms einen Nulldurchgang und verlöscht, sofern es sich um einen Lichtbogenfehler (die meisten Erdschlüsse in Mittelspannungs-Freileitungsnetzen sind Lichtbögenfehler) handelt und der Strom nicht zu hoch ist, von selbst. Es handelt sich dann um einen sog. *Erdschlußwischer*. Die Löschgrenze ist abhängig von der Netznennspannung und liegt in 10- und 20-kV-Netzen bei 35 A und in 60-kV-Netzen bei 60 A . Im Bereich kleiner Erdschlußströme ($I_{CE} < 10 \text{ A}$) brennt der Lichtbogen nicht stabil, und es besteht die Gefahr von kurzzeitig aussetzenden oder intermittierenden Erdschlüssen, bei denen sich die transienten Überspannungen zu immer höheren Werten aufschaukeln können. Verlischt der Erdschluß nicht, so spricht man vom *Dauererdschluß*. Aufgrund der kleinen Werte für I_{CE} kann ein Netz mit freiem Sternpunkt durchaus über einen längeren Zeitraum (Stunden) weiterbetrieben werden, wobei allerdings wegen der Spannungserhöhung in den gesunden Leitern der Doppelerdkurzschluß riskiert wird. Obwohl der Dauererdschluß anhand der Verlagerungsspannung an einem Transformatorsternpunkt oder durch Spannungsmessung an einer offenen Dreieckswicklung eindeutig festgestellt werden kann, ist seine Lokalisierung wegen der geringen Größe von I_{CE} im Vergleich zu den Betriebsströmen nicht so einfach möglich.

Darstellung des Dauererdschlusses mit symmetrischen Komponenten

Um auch die zu Beginn des Kapitels 2 eingeführten Vereinfachungen (Vernachlässigung der Längsimpedanzen und der Leiter-Leiter-Kapazitäten) begründen zu können, gehen wir von der vervollständigten Ersatzschaltung der symmetrischen Komponentennetze aus und schalten diese entsprechend den Fehlerbedingungen an der Erdschlußstelle in Reihe (Bild 2.4).

Ein Blick auf die Schaltung der Komponentennetze rechtfertigt sofort die Vernachlässigung der Kapazitäten und der Impedanzen im Mit- und Gegensystem, denn es gilt

$$\text{einerseits } Z_1 = Z_2 \ll \frac{1}{\omega C_1} \quad \text{und andererseits } Z_0 = \frac{1}{\omega C_0} \gg Z_1.$$

In der Hintereinanderschaltung der Komponentennetze ist \underline{Z}_0 die dominierende Impedanz, und man erhält mit guter Näherung:

$$\underline{I}_{-1}^F = \underline{I}_{-2}^F = \underline{I}_{-0}^F = \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_0} = j\omega C_E \underline{U}_q$$

und durch Rücktransformation in Übereinstimmung mit Gl. (2.7):

$$\underline{I}_{-a}^F = \underline{I}_{-1}^F + \underline{I}_{-2}^F + \underline{I}_{-0}^F = j3\omega C_E \underline{U}_q = -\underline{I}_{CE}$$

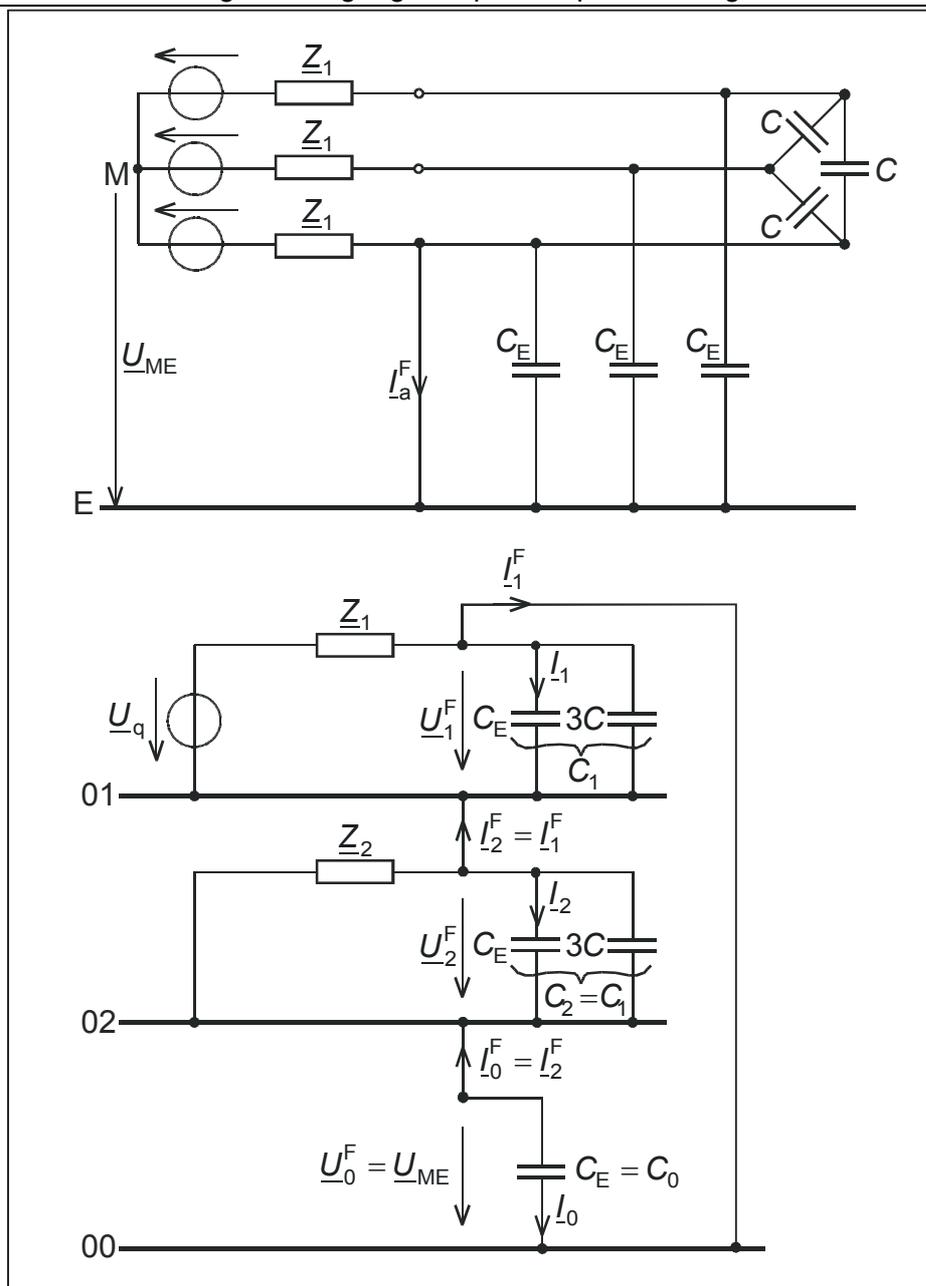


Bild 2.4: Ersatzschaltung der Symmetrischen Komponenten für Erdschluß im Netz mit freiem Sternpunkt

Bei der Berechnung der Ströme durch die Leiter-Erde-Kapazitäten mit Hilfe der symmetrischen Komponenten darf man im Mit- und Gegensystem $3C$, nicht aber C_E vernachlässigen. Es wird dann bei gleichzeitiger Vernachlässigung von Z_1 und Z_2 :

$$I_1 = j\omega C_E U_q$$

$$I_2 = 0$$

$$I_0 = -I_0^F = -j\omega C_E U_q$$

und $I_a = I_1 + I_2 + I_0 = 0$ entsprechend der Fehlerbedingung, sowie

$$I_b = j(\underline{a}^2 - 1)\omega C_E U_q \quad \text{sowie} \quad I_c = j(\underline{a} - 1)\omega C_E U_q \quad \text{und damit Gl. (2.7) entsprechend}$$

$$I_{CE} = I_b + I_c = -j3\omega C_E U_q = -I_a^F$$

2.2 Transiente Überspannungen bei Erdschlußeintritt und Verlauf der Wiederkehrspannung bei Erdschlußlöschung

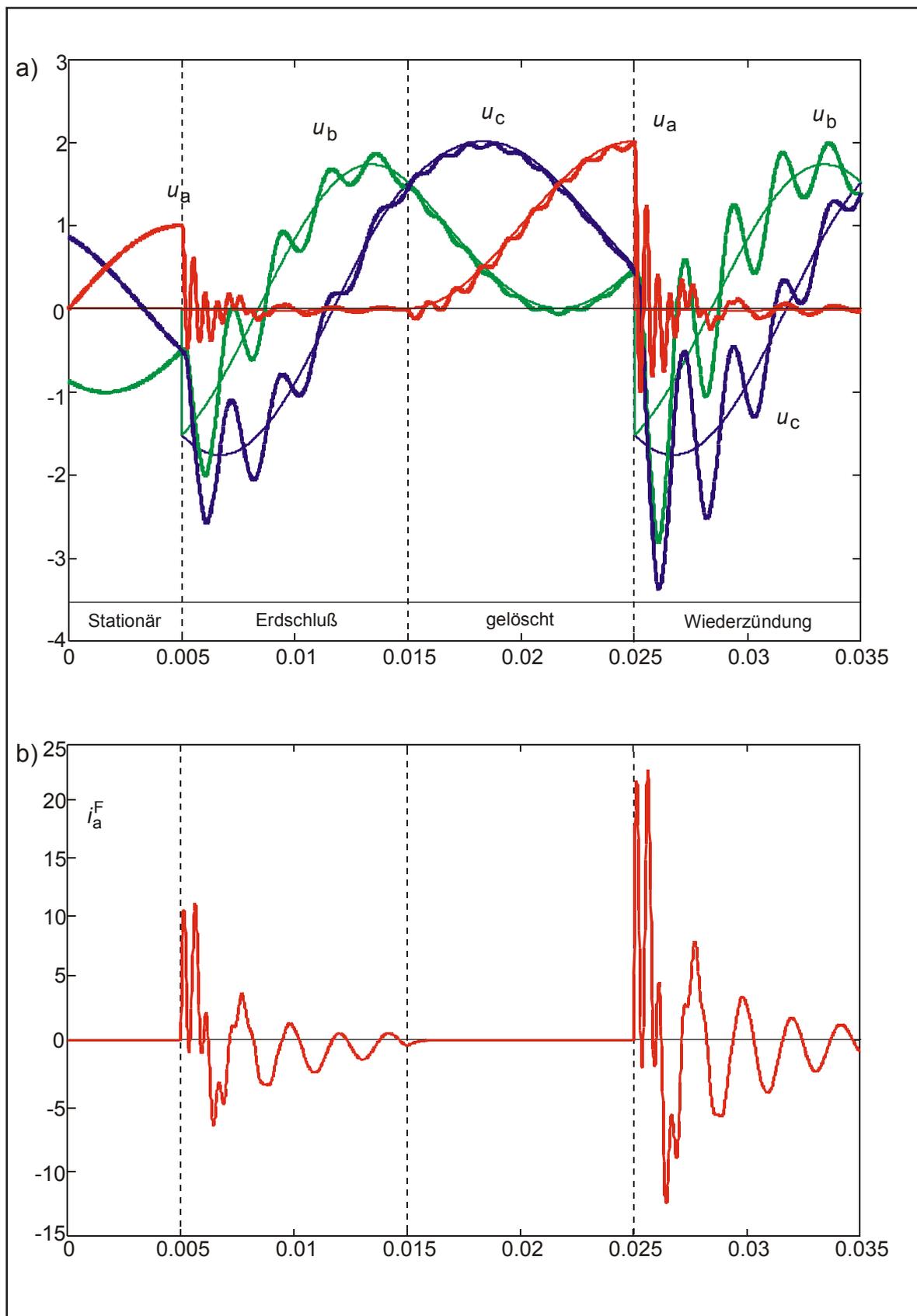


Bild 2.5: Ausgleichsvorgänge bei Erdschluß, Erdschlußlöschung und Wiedertzündung
 a) Leiter-Erde Spannungen bezogen auf \hat{u}_q b) Erdschlußstrom bezogen auf $\sqrt{2}I_{CE}$

In Bild 2.5 sind die simulierten zeitlichen Verläufe der Leiter-Erde-Spannungen und des Erdschlußstromes für einen Erdschluß des Leiters a im Spannungsmaximum dargestellt.

Der Erdschluß verlöscht nach 10 ms im Nulldurchgang. Die Spannung im Leiter a kehrt wieder und erreicht 10 ms nach der Erdschlußlöschung ihren doppelten Amplitudenwert, da die drei Leiter-Erde-Spannungen um die immer noch vorhandene Nullspannung verlagert bleiben (die Leiter-Erde-Kapazitäten bleiben nach der Erdschlußlöschung zunächst noch geladen). In diesem Zeitpunkt ist eine Wiederezündung des Erdschlusses sehr wahrscheinlich.

In Bild 2.5a sind dünn auch die 50-Hz-Anteile, in die die transienten Anteile einschwingen, eingezeichnet. Die Sprünge in den 50-Hz-Anteilen bei Erdschlußeintritt und der Wiederezündung müssen, da sich die Spannungen über den Kapazitäten nicht sprunghaft ändern können, durch die transienten Anteile ausgeglichen werden, wobei ohne Dämpfung der transiente Anteil höchstens doppelt so groß wie die ihn verursachte Differenz zwischen den 50-Hz-Anteilen werden kann. Somit läßt sich aus den Sprüngen der 50-Hz-Anteile bereits auf die theoretischen Maximalwerte (ohne Dämpfung) der transienten Überspannungen schließen. Die Sprünge der 50-Hz-Anteile können wir andererseits sofort aus dem Zeigerbild ablesen. In Bild 2.6 sind die transienten Anteile bei Erdschlußeintritt durch rotierende Zeiger (sog. Raumzeiger, s. Skript Modale Komponenten), deren Ortskurven Schnecken um den neuen stationären Wert bilden, dargestellt.

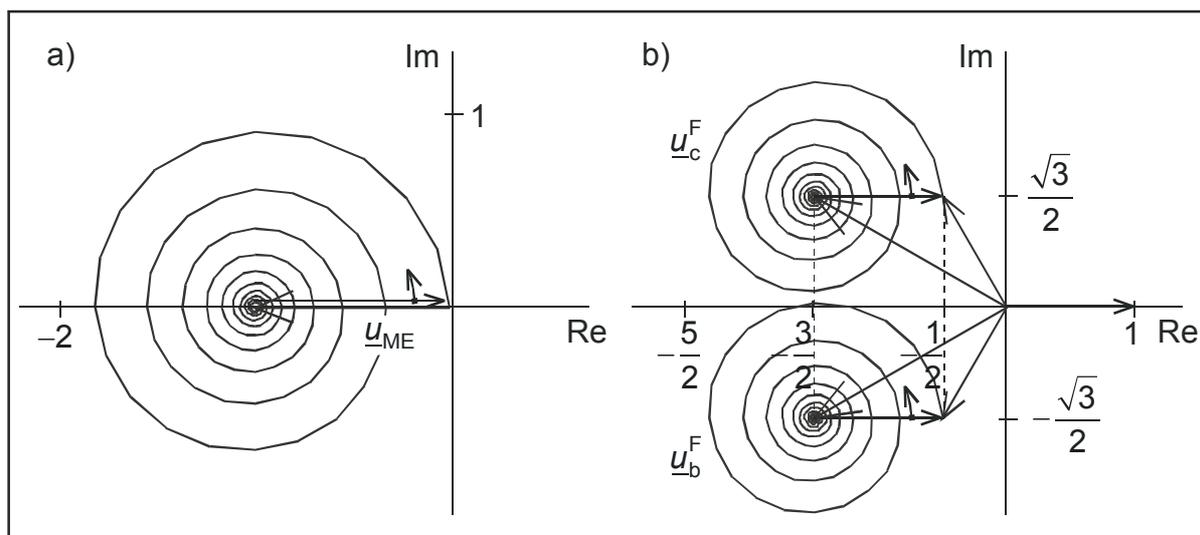


Bild 2.6: Interpretation der Ausgleichsvorgänge bei Erdschluß des Leiters a im Spannungsmaximum. Die Momentanwerte ergeben sich durch Projektion der Zeiger auf die reelle Achse.

Bei $t = 0$ sorgen die Raumzeiger dafür, daß keine Spannungssprünge an den Kapazitäten auftreten, also noch $u_{ME} = 0$ und $u_a^F = u_{qa}$, $u_b^F = u_{qb}$ sowie $u_c^F = u_{qc}$ gilt. Für $t \rightarrow \infty$ stellt sich unter Berücksichtigung der Dämpfung der aus Bild bekannte Zustand für den Dauererdschluß 2.3 ein.

Aus Bild 2.6b ist ersichtlich, daß die transiente Überspannung bei Erdschlußeintritt in den gesunden Leitern b und c ohne Dämpfung maximal $2,5 \cdot \hat{u}_q = 2,5 \cdot \sqrt{2} U_n / \sqrt{3}$ werden kann¹⁾. Anhand der Ersatzschaltung für die symmetrischen Komponenten (die für die Raumzeiger sinngemäß im Zeitbereich gelten) kann man sich vorstellen, daß mit dem Erdschlußeintritt (bei dem die Hintereinanderschaltung der Komponentennetze wirksam wird) das Nullsystem plötzlich an Spannung gelegt wird und zunächst aufge-

¹⁾ Bei dieser einfachen Betrachtung ist vorausgesetzt, daß die transienten Anteile eine gegenüber der Grundschiwingung sehr viel größere Frequenz haben, so daß sich bis zum Erreichen des Spannungsmaximums die Zeiger für die Grundschiwingung im Bild 2.6b) praktisch nicht bewegt haben.

laden werden muß. Dabei darf man aber nicht, wie bei der Berechnung von I_{CE} die Induktivitäten und Kapazitäten im „Mit“- und „Gegensystem“ für die Raumzeiger außer acht lassen. Sie bestimmen nämlich zusammen mit den Kapazitäten die Eigenfrequenz des transienten Anteils. In unserem einfachen Ersatzschaltbild ergibt sich nur eine *Eigenfrequenz*, die sich wie folgt berechnet (s. Anhang 6.1):

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{3L_1(C_0 + C)}} \tag{2.10}$$

In realen Netzen treten stets mehrere Eigenfrequenzen auf, wobei jedoch die kleinste Eigenfrequenz, für die Gl. (2.10) näherungsweise gilt, dominiert. Die Größenordnung der dominanten Eigenfrequenz der *Aufladeschwingung*, wie man die hier beschriebenen transienten Spannungsanteile auch nennt, beträgt einige Hundert Hz bis maximal einige kHz.

Im Moment der Erdschlußlöschung müssen wir uns die Hintereinanderschaltung der symmetrischen Komponentennetze wieder aufgehoben denken. Erfolgt die Erdschlußlöschung im Nulldurchgang von i_{CE} , so ist in diesem Moment die Kapazität des Nullsystems voll aufgeladen geladen (u_{ME} ist gerade maximal, die Zeiger in Bild 2.3 haben sich um π weitergedreht). Solange im Nullsystem keine Dämpfungswiderstände berücksichtigt werden, bleibt diese momentane Spannung an C_0 bestehen und die wiederkehrenden Spannungen werden um u_{ME} verlagert.

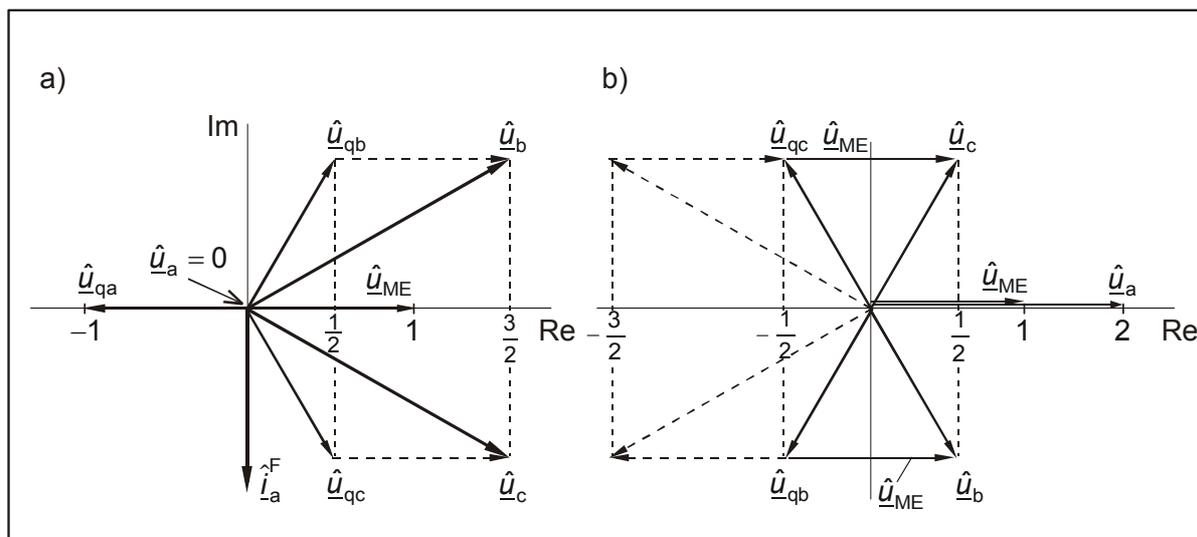


Bild 2.7: Amplitudenzeiger der 50-Hz-Spannungsanteile
 a) im Moment der Erdschlußlöschung b) 10 ms nach Erdschlußlöschung

In Bild 2.7 sind die Amplitudenzeiger für den Zustand unmittelbar nach Erdschlußlöschung und nach weiteren 10 ms dargestellt. Erfolgt nun ausgehend vom Zustand in Bild 2.7b die Wiedereinschaltung des Erdschlusses (wie in Bild 2.5), so muß C_0 von $+\hat{u}_{ME}$ auf $-\hat{u}_{ME}$ umgeladen werden und die Beträge der Leiter-Erde-Spannungen ändern sich von jeweils $+\frac{1}{2}\hat{u}_q$ auf $-\frac{3}{2}\hat{u}_q$ (gestrichelte Zeiger in Bild 2.7b), womit eine maximale Überschwingweite von $2\hat{u}_q$ verbunden ist. Der Überspannungsfaktor würde dann ohne Dämpfung maximal 3,5 betragen.

In Bild 2.5b ist der Verlauf des Erdschlußstromes aufgetragen. Er enthält neben der geringen 50-Hz-Schwingung auch einen Aufladeanteil, dem anfangs ein noch schnellerer Anteil, die sogenannte *Entlade- oder Zündschwingung* überlagert ist. Die Entladeschwingung wird durch die Entladung der Leiter-Erde-Kapazität des erdschlußbehafteten Leiters im Zusammenspiel mit den Leiterinduktivitäten verursacht und verläuft wesentlich hochfrequenter (die niedrigste Eigenfrequenz liegt in

der Größenordnung kHz) als die Aufladeschwingung und ist auch wesentlich schneller abgeklungen als jene. Streng genommen muß man den Entladevorgang als Wanderwellenvorgang behandeln, der sich von der Erdschlußstelle aus ausbreitet. In unserem einfachen Simulationsbeispiel wurde das Netz aber mit konzentrierten Schaltelementen nachgebildet, wobei zwischen Erdschlußstelle und der Leiter-Erde-Kapazität noch eine Teilinduktivität berücksichtigt wurde, so daß die in Bild 2.5a dargestellte Spannung u_a über C_E im Leiter a nicht schlagartig mit Erdschluß eintritt Null ist.

Anhand des Bildes 2.5b wird auch deutlich, wieso es bei zu kleinem I_{CE} (50-Hz-Wechselanteil des Erdschlußstromes) zu intermittierenden Erdschlüssen kommt. Durch die überlagerten transienten Anteile hat der Erdschlußstrom in kurzen Abständen bereits Nulldurchgänge, die zum kurzzeitigen Aussetzen des Lichtbogens führen. Hinzu kommt, daß der Lichtbogen bei kleinen Strömen ($I_{CE} < 10$ A) ohnehin instabil brennt. Durch den steilen Spannungsanstieg an der Erdschlußstelle (u_a kehrt noch nahezu auf seinen Maximalwert zurück, da bis zum ersten Nulldurchgang von i_a^F sehr wenig Zeit vergangen ist) erfolgt sofort eine Wiederezündung.

2.3 Zusammenfassende Beurteilung des Erdschlußgeschehens in Netzen mit freiem Sternpunkt

- Lichtbogenfehler verlöschen bis zu einem bestimmten Wert (Löschgrenze) für I_{CE} von selbst. Diese sogenannten Erdschlußwischer haben kaum Auswirkungen auf den Netzbetrieb. Die Löschgrenze beträgt etwa 35 A für 10-kV- und 20-kV-Netze und etwa 60 A für 60-kV-Netze.
- Durch das Anwachsen des Erdschlußstromes mit der Netzgröße (Gesamtleitungslänge l) und der Netzennspannung (s. Gl. (2.9)) können nur Mittelspannungsnetze kleiner Ausdehnung mit freiem Sternpunkt betrieben werden (z.B. Kraftwerkseigenbedarfsnetze). Durch den Zubau von Kabeln wird schnell die Löschgrenze erreicht.
- Bei Dauererdschluß nimmt die zeitweilige betriebsfrequente Spannungserhöhung in den beiden gesunden Leitern das $\sqrt{3}$ -fache der normalen Leiter-Erde-Spannung an. Der Erdfehlerfaktor δ beträgt $\sqrt{3}$. Das Netz kann aber über einen längeren Zeitraum, bis der Erdschluß geortet ist und Umschaltungen vorgenommen wurden, weiterbetrieben werden.
- Die hohe Spannungsverlagerung hat auch relativ hohe transiente Erdschlußüberspannungen mit Überspannungsfaktoren $k_{LE} < 2,5$ zur Folge. Sowohl die transienten Erdschlußüberspannungen bei Erdschluß eintritt als auch die betriebsfrequenten Spannungserhöhungen im Dauerzustand können zum Doppelerdkurzschluß mit hohen Strömen führen. Da der Doppelerdkurzschluß durch den Netzschutz meist nur einseitig abgeschaltet wird, bleibt ein Erdschluß mit der erneuten Gefahr eines Doppelerdkurzschlusses bestehen.
- Nach der Erdschlußlöschung kehrt die Spannung am vorher erdschlußbehafteten Leiter bereits nach 10 ms auf ihren doppelten 50-Hz-Amplitudenwert wieder, wodurch die Gefahr eines erneuten Erdschlusses (Wiederezündung) mit Überspannungsfaktoren $k_{LE} < 3,5$ besteht. Bei besonderen Netzkonstellationen kann das Netz nach der Erdschlußabschaltung in einen Resonanzzustand, der mit *subharmonischen Schwingungen* und hohen Überspannungen verbunden ist, geraten. Auf dieses, auch mit *Ferroresonanz* oder *Kippschwingungen* bezeichnete Phänomen, soll hier nicht näher eingegangen werden, es sei aber betont, daß es vorwiegend nur in Netzen mit freiem Sternpunkt auftreten kann.
- Durch den relativ geringen Wert von I_{CE} treten auch im Dauererdschluß keine wesentlichen Schritt- und Berührungsspannungen und keine Zerstörungen durch den

Lichtbogen an der Erdschlußstelle auf. Die induktive Beeinflussung von Fernmeldeleitungen in der Erde bleibt gering. Allerdings ist durch die geringe Größe von I_{CE} die selektive Erdschlußerfassung schwierig. Bei Werten von I_{CE} unter 10 A neigt das Netz zu intermittierenden Erdschlüssen mit sich aufschaukelnden transienten Überspannungen. Die hohen transienten Überspannungen bei intermittierenden Erdschlüssen gaben in der Vergangenheit den Anlaß dazu, daß man nach neuen Wegen zur Beherrschung des Erdschlußgeschehens in den zunächst mit freiem Sternpunkt betriebenen Netzen, insbesondere auch beim Übergang zu höheren Spannungsebenen gesucht hat.

3 Netze mit Erdschlußkompensation

Der Erdschlußkompensation liegt - wie es der Name sagt - die Idee zugrunde, in Netzen, in denen der kapazitive Erdschlußstrom zu groß wird (entweder durch die Netzausdehnung und/oder die höhere Netzennspannung), den kapazitiven Erdschlußstrom durch einen induktiven Strom an der Erdschlußstelle zu kompensieren, so daß der verbleibende *Reststrom* wieder unter der Löschgrenze liegt und Erdschlußlichtbögen von selbst verlöschen. Es mangelte in der Vergangenheit nicht an Vorschlägen, die induktive Stromkomponente bereitzustellen. Die geniale Idee hatte jedoch 1919 Waldemar PETERSEN (1880 – 1946), als er vorschlug, eine Spule, die später nach ihm benannte PETERSEN-Spule in den Sternpunkt der Transformatoren zu schalten (Bild 3.1c).

Von den anderen Lösungsvorschlägen seien die in Bild 3.1 skizzierte Polerdung und der BAUCHSche Löschtransformator erwähnt.

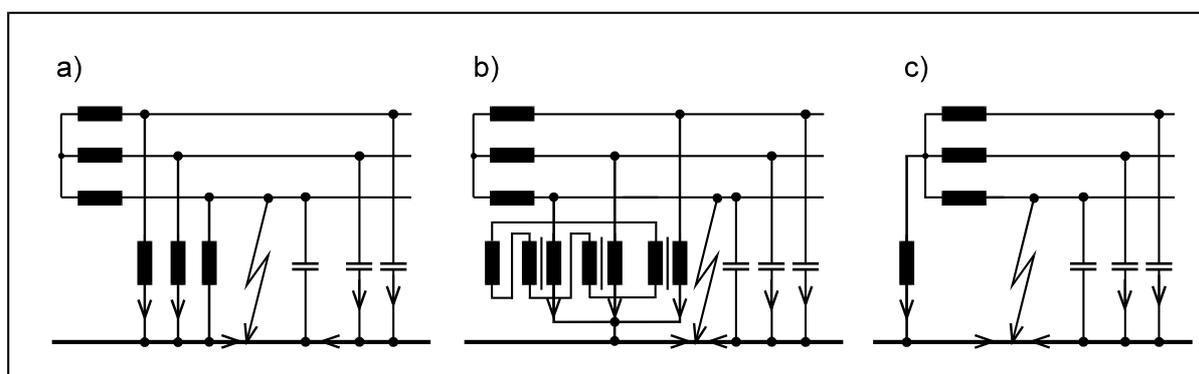


Bild 3.1: Möglichkeiten zur Kompensation des kapazitiven Erdschlußstromes

a) Polerdung b) BAUCHScher Löschtransformator c) Erdschlußlöscher- oder PETERSEN-Spule

Die Kompensationseinrichtungen wie die Polerdung und der BAUCHSche Löschtransformator haben neben dem Mehraufwand für die dreipolige Ausführung gegenüber der PETERSEN-Spule auch den Nachteil, daß sie bereits im Normalbetrieb Verluste verursachen. Die Induktivitäten der Polerdung sind auf C_E abzustimmen, womit im Normalbetrieb auch der Anteil von C_E an $C_1 = C_E + 3C$ bzw. am Ladestrom kompensiert wird. Beim BAUCHSchen Löschtransformator ist der Kompensationseffekt im Normalbetrieb unbedeutend, da er sich dann im Leerlauf befindet.

3.1 Strom-Spannungsbeziehungen bei Dauererdschluß

Wir betrachten wieder die einfache Anordnung aus Bild 2.1 und erden den Transformatorsternpunkt des Mittelspannungsnetzes über eine PETERSEN- oder Erdschlußlöscher-Spule mit der Reaktanz X_M (Bild 3.2). Durch den Anschluß der Erdschlußlöscher-Spulen in den Sternpunkten der Transformatoren ändern sich die Spannungsverhältnisse im stationären Erdschlußzustand gegenüber denen bei freiem Sternpunkt nicht. Es gelten nach wie vor die Gln. (2.1) bis (2.5). Ebenso bleibt der kapazitive Strom I_{CE} durch die Leiter-Erde-Kapazitäten der gesunden Leiter unverändert.

Wir können somit das Zeigerbild aus Bild 2.3 bis auf I_a^F komplett übernehmen.

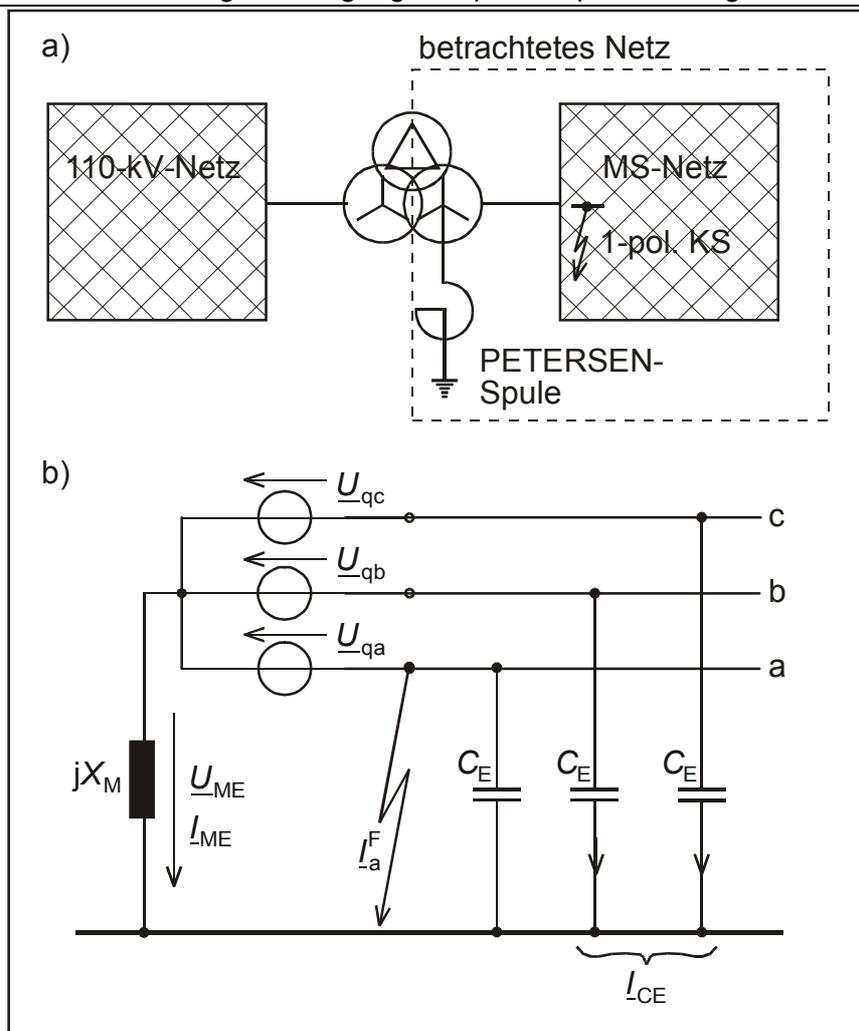


Bild 3.2: Beispiel für ein MS-Netz mit Erdschlußkompensation
 a) prinzipielle Anordnung b) Minimalmodell

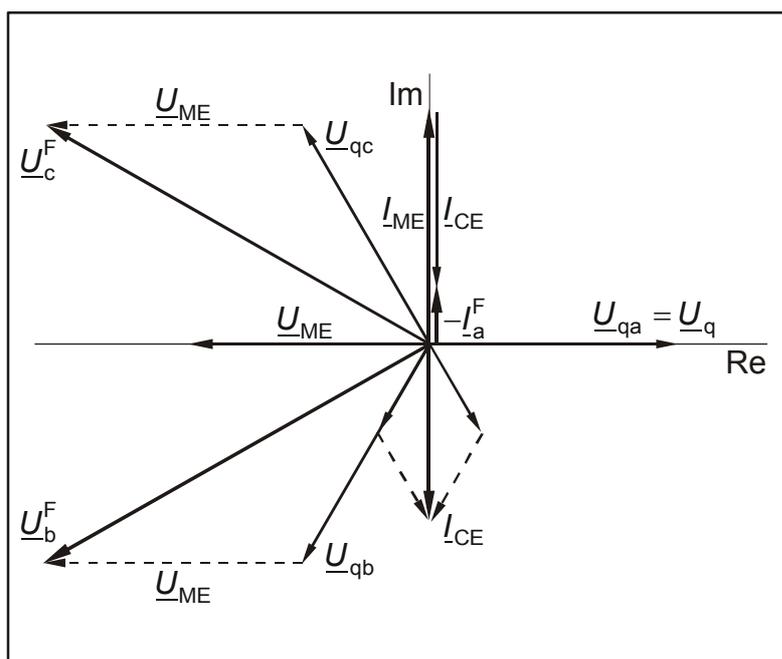


Bild 3.3: Zeigerbild der Spannungen und Ströme für Erdschluß im kompensierten Netz

Der Strom an der Erdschlußstelle setzt sich jetzt aus dem kapazitiven Strom I_{CE} und dem induktiven Strom I_{ME} zum Reststrom I_R zusammen:

$$I_a^F = I_R = -I_{CE} - I_{ME} = -I_{CE} \left(1 + \frac{I_{ME}}{I_{CE}} \right) \quad (3.1)$$

Mit $I_{CE} = -j3\omega C_E U_q$ nach Gl. (2.7) und

$$I_{ME} = -j \frac{U_{ME}}{X_M} = j \frac{U_q}{\omega L_M} \quad (3.2)$$

folgt weiter (beachte: in der Klammer stehen Beträge):

$$I_R = -I_{CE} \left(1 - \frac{I_{ME}}{I_{CE}} \right) = -I_{CE} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 C_E 3L_M} \right) = -v I_{CE} \quad (3.3)$$

und für den Betrag:

$$I_R = |v| I_{CE}$$

Mit v wurde in Gl. (3.3) die *Verstimmung* eingeführt ²⁾:

$$v = 1 - \frac{I_{ME}}{I_{CE}} = 1 - \frac{1}{\omega^2 C_E 3L_M} \quad (3.4)$$

Für $v = 0$ liegt Kompensation oder *Abstimmung* oder *Resonanz* vor und es gilt:

$$I_{ME} = I_{CE}, \quad X_M = \frac{1}{3\omega C_E}, \quad I_R = 0$$

Für $v < 0$ ist das Netz *überkompensiert* (I_{ME} ist zu groß) und es gilt:

$$I_{ME} > I_{CE}, \quad X_M < \frac{1}{3\omega C_E}, \quad I_R > 0 \text{ induktiv}$$

Für $v > 0$ ist das Netz *unterkompensiert* (I_{ME} ist zu klein) und es gilt:

$$I_{ME} < I_{CE}, \quad X_M > \frac{1}{3\omega C_E}, \quad I_R > 0 \text{ kapazitiv}$$

Das Zeigerbild in Bild 3.3 ist demzufolge für Unterkompensation gezeichnet. Der Betrieb mit freiem Sternpunkt ist der Grenzfall des unterkompensierten Netzes. Für ihn ist $I_{ME} = 0$ und damit $v = 1$, sowie $I_R = I_{CE}$.

In der einfachsten Ersatzschaltung in Bild 3.2 haben wir die Leitwerte G_E der Leitungen, die für die Korona- und Ableitungsverluste bei den Freileitungen und für die dielektrischen Verluste bei Kabeln stehen, und den Wirkwiderstand der Erdschluß-

²⁾ Beachte: In manchen Literaturstellen wird v mit umgekehrtem Vorzeichen definiert. Das hier verwendete Vorzeichen geht auf das klassische Buch von R. WILHEIM: „Das Erdschlußproblem und seine Bekämpfung in Hochspannungsnetzen“, Springer Verlag 1936, zurück.

löschspule vernachlässigt. In Netzen ab 110-kV-Nennspannung ist die Vernachlässigung von G_E jedoch nicht mehr gerechtfertigt.

Wir ergänzen die Ersatzschaltung um G_E und zur Berücksichtigung der Spulenverluste zweckmäßigerweise um einen entsprechenden Leitwert G_M parallel zu jX_M in Bild 3.4. Der Leitwert ergibt sich aus:

$$\underline{Y}_M = G_M + jB_M = \frac{1}{\underline{Z}_M} = \frac{1}{R_M + jX_M} = \frac{R_M - jX_M}{R_M^2 + X_M^2} \approx \frac{R_M}{X_M^2} - j\frac{1}{X_M}$$

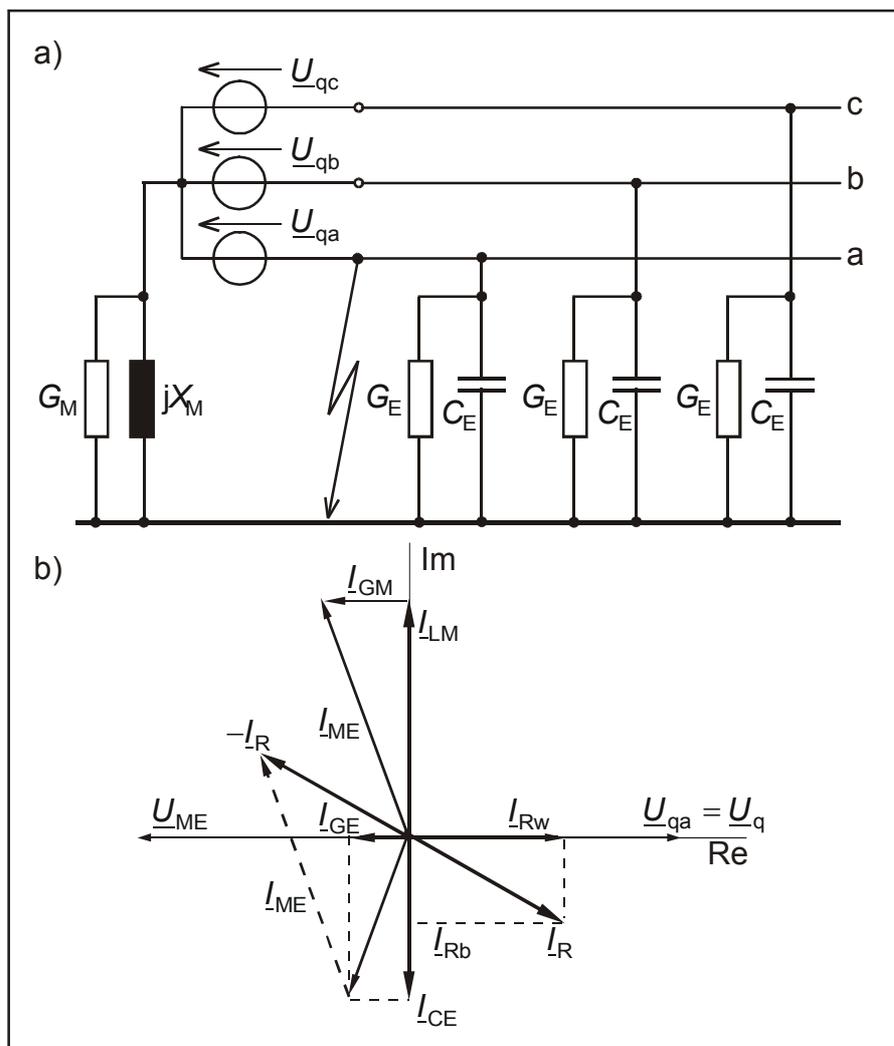


Bild 3.4: Erweiterung der Ersatzschaltung (a) um die Verlustleitwerte G_E und G_M und des Zeigerbildes (b) um die Ströme \underline{I}_{GM} und \underline{I}_{GE} .

Die hinzugekommenen Leitwerte verursachen die Ströme:

$$\underline{I}_{GE} = -3G_E \underline{U}_q \tag{3.5}$$

und

$$\underline{I}_{GM} = G_M \underline{U}_{ME} = -G_M \underline{U}_q \tag{3.6}$$

Der Reststrom setzt sich damit wie folgt zusammen (Bild 3.4b):

$$\underline{I}_R = -(\underline{I}_{CE} + \underline{I}_{LM} + \underline{I}_{GE} + \underline{I}_{GM}) = -\underline{I}_{CE} \left(1 - \frac{\underline{I}_{LM}}{\underline{I}_{CE}} - j \frac{\underline{I}_{GE} + \underline{I}_{GM}}{\underline{I}_{CE}} \right) = j \underline{I}_{CE} (d + jv) = \omega 3 C_E \underline{U}_q (d + jv) \quad (3.7)$$

oder, wenn man die Wirk und Blindkomponente des Reststromes bezüglich der Quellenspannung $\underline{U}_q = \underline{U}_{EM}$ einführt³⁾:

$$\underline{I}_R = \underline{I}_{CE} (d + jv) = \underline{I}_{RW} - j \underline{I}_{Rb}$$

mit

$$\underline{I}_{RW} = d \underline{I}_{CE} \quad \text{und} \quad \underline{I}_{Rb} = -v \underline{I}_{CE}.$$

Gegenüber der Gl. (3.3) ist die wie folgt definierte *Dämpfung* d hinzu gekommen. Die Gl. (3.4) für die Verstimmung gilt unter der Voraussetzung $\underline{I}_{ME} \approx \underline{I}_{LM}$ weiterhin.

$$d = \frac{\underline{I}_{RW}}{\underline{I}_{CE}} = \frac{G_E}{\omega C_E} + \frac{G_M}{3\omega C_E} \quad (3.8)$$

Da G_E bei Freileitungen stark witterungsabhängig ist, läßt sich die Dämpfung nur näherungsweise angeben. Bei schönem Wetter kann man mit $d = 0,04$ bzw. $d = 4 \%$ rechnen. Für den Betrag des Reststromes folgt aus Gl. (3.7) :

$$I_R = \sqrt{I_{RW}^2 + I_{Rb}^2} = I_{CE} \sqrt{d^2 + v^2} \quad (3.9)$$

In Abhängigkeit von der Verstimmung ergibt sich die in Bild 3.5 dargestellte *V-Kurve* des Reststromes.

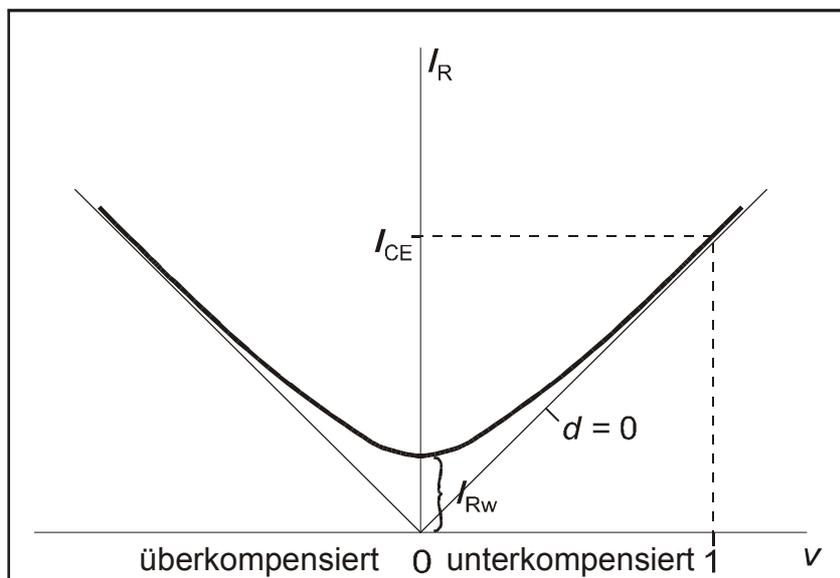


Bild 3.5: V-Kurve des Reststromes

Die V-Kurve macht deutlich, daß selbst bei exakter Kompensation ($v = 0$) der Wirkreststrom bestehen bleibt. Da der Wirkreststrom (wie der kapazitive Erdschlußstrom) mit der Ausdehnung des Netzes und der Erhöhung der Netznennspannung an-

³⁾ Beachte die Definition des Blindstromes mit negativem Vorzeichen: $\underline{I} = \underline{I}_w - j \underline{I}_b$ (s. Skript Grundlagen)

wächst, beschränkt er die Anwendung der Resonanzsternpunktterdung auf nicht zu große Netze mit Nennspannungen bis 110 kV.

In Deutschland mußte man in den 50er-Jahren die 220-kV-Netze, die man aufgrund der guten Erfahrung mit der Resonanzsternpunktterdung der 110-kV-Netze zunächst ebenfalls mit Erdschlußspulen ausgerüstet hatte, auf niederohmige Sternpunktterdung umrüsten.

Beschreibung des Dauererdschlusses mit symmetrischen Komponenten

Da auch hier - wie bei Netzen mit freiem Sternpunkt - die Nullimpedanz in der Nähe von $v = 0$ in ihrer Reihenschaltung mit \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 deutlich überwiegt, können wir mit guter Näherung annehmen, daß die gesamte Quellenspannung über dem Nullsystem abfällt und kommen so zu der einfachen Ersatzschaltung in Bild 3.6.

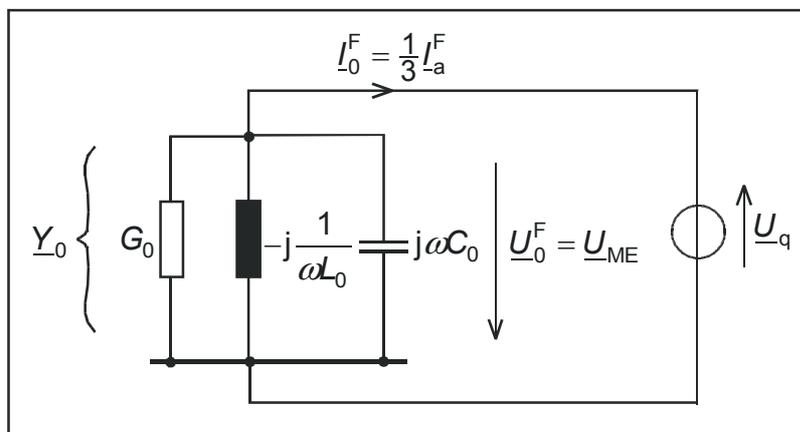


Bild 3.6: Nullsystem-Admittanz-Ersatzschaltung des erdschlußkompensierten Netzes

Aus Bild 3.6 ergibt sich in Übereinstimmung mit Gl. (3.7):

$$I_{\text{R}} = 3I_{\text{0}}^{\text{F}} = 3Y_{\text{0}}U_{\text{q}} = 3\left(G_{\text{0}} + j\omega C_{\text{0}} - j\frac{1}{\omega L_{\text{0}}}\right)U_{\text{q}} = 3\omega C_{\text{0}}U_{\text{q}}\left(\frac{G_{\text{0}}}{\omega C_{\text{0}}} + j\left(1 - \frac{1}{\omega^2 C_{\text{0}}L_{\text{0}}}\right)\right) = jI_{\text{CE}}(d + jv)$$

wobei $C_{\text{0}} = C_{\text{E}}$, $L_{\text{0}} = 3L_{\text{M}}$ und $G_{\text{0}} = \frac{G_{\text{M}}}{3} + G_{\text{E}}$ ist.

Mit den allgemeinen Nullsystemgrößen gilt demzufolge:

$$v = 1 - \frac{1}{\omega^2 C_{\text{0}}L_{\text{0}}} \quad (3.10)$$

$$d = \frac{G_{\text{0}}}{\omega C_{\text{0}}} \quad (3.11)$$

Bei exakter Abstimmung $v = 0$ wird $Y_{\text{0}} = G_{\text{0}}$, und der Betrag Y_{0} wird minimal. Das Nullsystem bildet einen 50-Hz-Parallelschwingkreis (Sperrkreis), woher diese Art der Sternpunktterdung ihre Bezeichnung Resonanzsternpunktterdung hat.

3.2 Verlagerungsspannung im Normalbetrieb

In erdschlußkompensierten Netzen stellt sich bei nicht genau gleichen Leiter-Erde-Kapazitäten bereits im ungestörten (erdschlußfreien) Betrieb eine Sternpunkt-Erde-Spannung \underline{U}_{ME} ein. Mit einer größeren kapazitiven Unsymmetrie muß in den Freileitungsnetzen der Mittelspannungsebene und 110-kV-Nennspannung, also gerade den Netzen, für die die Erdschlußkompensation in Betracht kommt, gerechnet werden, weil in diesen Spannungsebenen die Freileitungen gewöhnlich nicht verdreht werden. Zur Berechnung der Verlagerungsspannung betrachten wir die Ersatzschaltung in Bild 3.7 mit drei jetzt *ungleichen* Leiter-Erde-Kapazitäten C_{aE} , C_{bE} und C_{cE} und drei ungleichen Leitwerten G_{aE} , G_{bE} und G_{cE} . Die Leiter-Leiter-Kapazitäten haben auf das Nullsystem keinen Einfluß, da sie im Dreieck geschaltet sind.

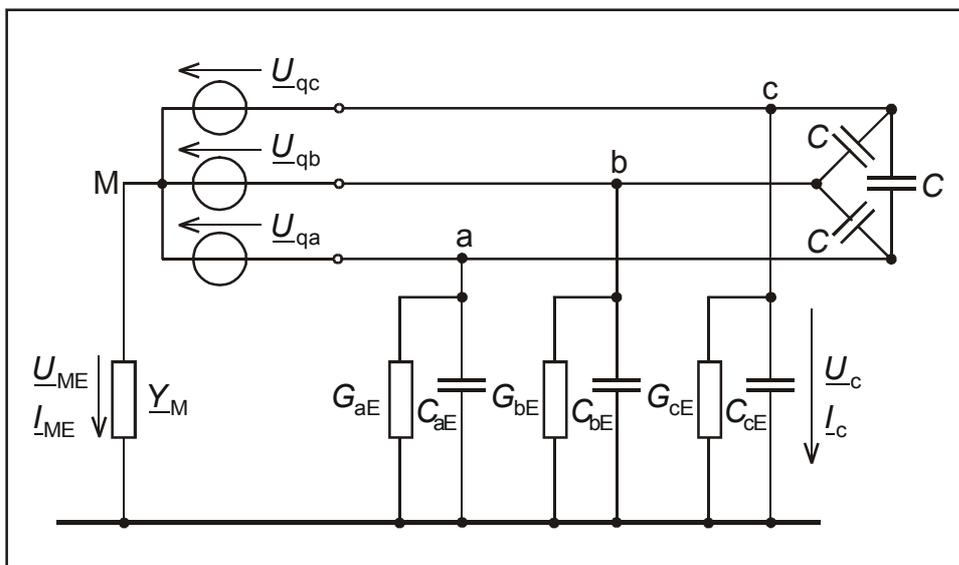


Bild 3.7: Ersatzschaltung zur Berechnung der Verlagerungsspannung im Normalbetrieb

Wir fassen die Leitwerte und Kapazitäten für jeden Leiter i ($i = a, b, c$) zu einer Admittanz

$$\underline{Y}_{iE} = G_{iE} + j\omega C_{iE}$$

zusammen und erhalten für die drei Leiter-Erde-Zweige:

$$\underline{I}_i = \underline{Y}_{iE} \underline{U}_i$$

und unter Zuhilfenahme der drei Maschenumläufe über \underline{Y}_M und die \underline{Y}_{iE} :

$$\underline{I}_i = \underline{Y}_{iE} \underline{U}_i = \underline{Y}_{iE} (\underline{U}_{qi} + \underline{U}_{ME})$$

Außerdem gilt am Knoten M:

$$\underline{I}_{ME} = \underline{Y}_M \underline{U}_{ME} = -(\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c)$$

Nach Einsetzen der Ströme \underline{I}_i erhalten wir unter Berücksichtigung von $\underline{U}_{qa} = \underline{U}_q$,

$$\underline{U}_{qb} = \underline{a}^2 \underline{U}_q \text{ und } \underline{U}_{qc} = \underline{a} \underline{U}_q \text{ schließlich:}$$

$$\underline{U}_{ME} = -\frac{\underline{Y}_{aE} + \underline{a}^2 \underline{Y}_{bE} + \underline{a} \underline{Y}_{cE}}{\underline{Y}_M + \underline{Y}_{aE} + \underline{Y}_{bE} + \underline{Y}_{cE}} \underline{U}_q = -\underline{U}_{EM} \quad (3.12)$$

Im Nenner führen wir noch die Abkürzungen

$$3G_E = G_{aE} + G_{bE} + G_{cE} \quad \text{und} \quad 3C_E = C_{aE} + C_{bE} + C_{cE}$$

ein und zerlegen \underline{Y}_M in $\underline{Y}_M = G_M - j \frac{1}{\omega L_M}$:

$$\underline{U}_{ME} = -\frac{\underline{Y}_{aE} + \underline{a}^2 \underline{Y}_{bE} + \underline{a} \underline{Y}_{cE}}{G_M - j \frac{1}{\omega L_M} + 3(G_E + j\omega C_E)} \underline{U}_q = -\frac{(\underline{Y}_{aE} + \underline{a}^2 \underline{Y}_{bE} + \underline{a} \underline{Y}_{cE}) \underline{U}_q}{3\omega C_E \left(\frac{G_M + 3G_E}{3\omega C_E} + j \left(1 - \frac{1}{\omega^2 C_E 3L_M} \right) \right)} \quad (3.13)$$

Im Nenner kommen wieder die Verstimmung v und die Dämpfung d vor. Nach Einführung des *Unsymmetriefaktors*

$$\underline{k} = \frac{\underline{Y}_{aE} + \underline{a}^2 \underline{Y}_{bE} + \underline{a} \underline{Y}_{cE}}{3\omega C_E}$$

nimmt Gl. (3.13) die folgende übersichtliche Form an:

$$\underline{U}_{ME} = -\frac{\underline{k}}{d + jv} \underline{U}_q = -\underline{U}_{EM} \quad (3.14)$$

Um das Minuszeichen zu vermeiden, verwendet man meist die Spannung $\underline{U}_{EM} = -\underline{U}_{ME}$. Für ein symmetrisches Netz mit $\underline{Y}_{aE} = \underline{Y}_{bE} = \underline{Y}_{cE}$ wird $\underline{k} = 0$ und damit auch \underline{U}_{EM} bzw. $\underline{U}_{ME} = 0$.

Die Ortskurve für \underline{U}_{EM} ist ein Kreis durch den Koordinatenursprung, dessen Lage durch die Richtung von \underline{k} bestimmt wird. Das Bild 3.8 zeigt die Konstruktionsschritte. Man nimmt zunächst $\underline{k} = 1$ an und beginnt mit der Ortskurve $\underline{N} = d + jv$ des Nenners von Gl. (3.14), die eine Gerade parallel zur imaginären Achse ist. Die inverse Ortskurve $1/\underline{N}$ ist ein Kreis durch den Koordinatenursprung (Bild 3.8b). Als Parameter-Verteilungsgerade dient die an der reellen Achse gespiegelte Ortskurve \underline{N} . Abschließend wird die Ortskurve durch Multiplikation mit \underline{k} gedreht und gestreckt (Bild 3.8c).

Der Betrag von \underline{U}_{EM} bzw. \underline{U}_{ME} in Abhängigkeit von v ergibt die in Bild 3.9 dargestellte Glockenkurve:

$$\frac{U_{ME}}{U_q} = \frac{k}{\sqrt{d^2 + v^2}} \quad (3.15)$$

Für $v = 0$ wird die Verlagerungsspannung maximal: $U_{ME\max} = k U_q / d$. In Netzen mit freiem Sternpunkt ($v = 1$) macht sich die kapazitive Unsymmetrie nicht bemerkbar, weil der Nenner von Gl. (3.15) die Größenordnung Eins hat.

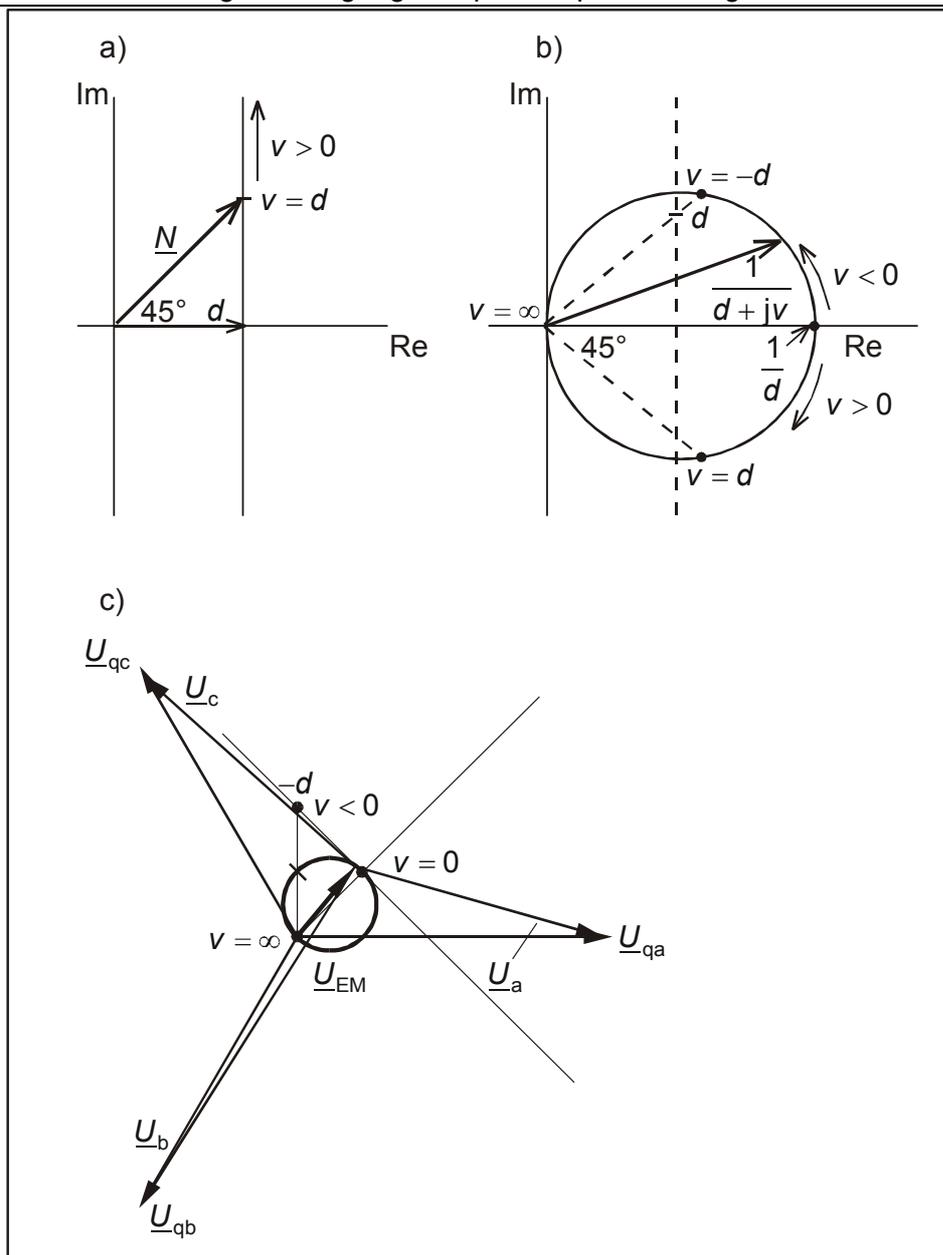


Bild 3.8: Konstruktion der Ortskurve für \underline{U}_{EM} und Zeigerbild für kapazitive Unsymmetrie

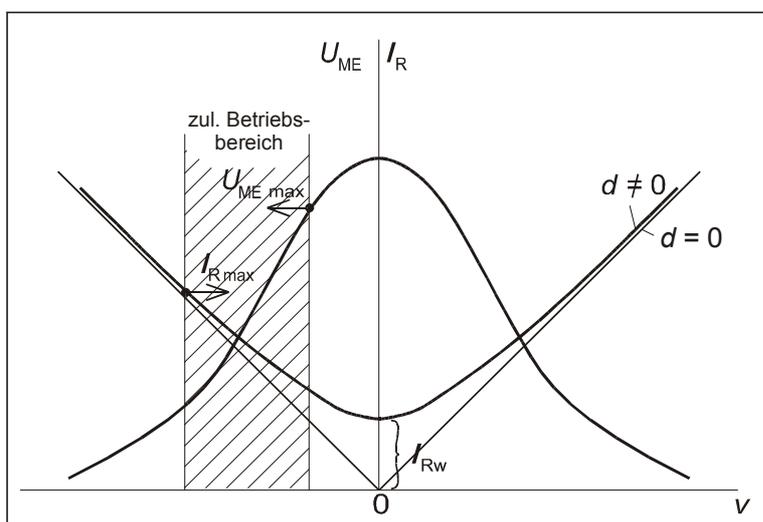


Bild 3.9: Verlagerungsspannung im Normalbetrieb und Reststrom bei Erdschluß in Abhängigkeit von der Verstimmung

In das Bild 3.9 ist die V -Kurve des Reststromes von Bild 3.4 nochmals übernommen worden, und der übliche Betriebsbereich eingetragen. Um die Verlagerungsspannung im Normalbetrieb herabzusetzen, verstimmt man das Netz geringfügig ($v = -(5...10) \%$ im 110-kV-Netz und $v = -(10...20) \%$ im MS-Netz), wobei man noch im zulässigen Bereich für den Reststrom bleibt. Der überkompensierte Bereich wird gewählt, weil dann bei Leitungsausfall oder Frequenzabsenkung das Netz nicht in den Resonanzpunkt fällt.

Der maximal zulässige Reststrom beträgt 60 A in MS-Netzen und 130 A in 110-kV-Netzen (Bild 3.10). Zum Vergleich ist in Bild 3.10 auch die Löschungsgrenze für I_{CE} eingetragen. Auf die unterschiedlichen Löschungsgrenzen für I_R und I_{CE} werden wir noch einmal bei der Wiederkehrspannung nach Erdschlußlöschung zurückkommen.

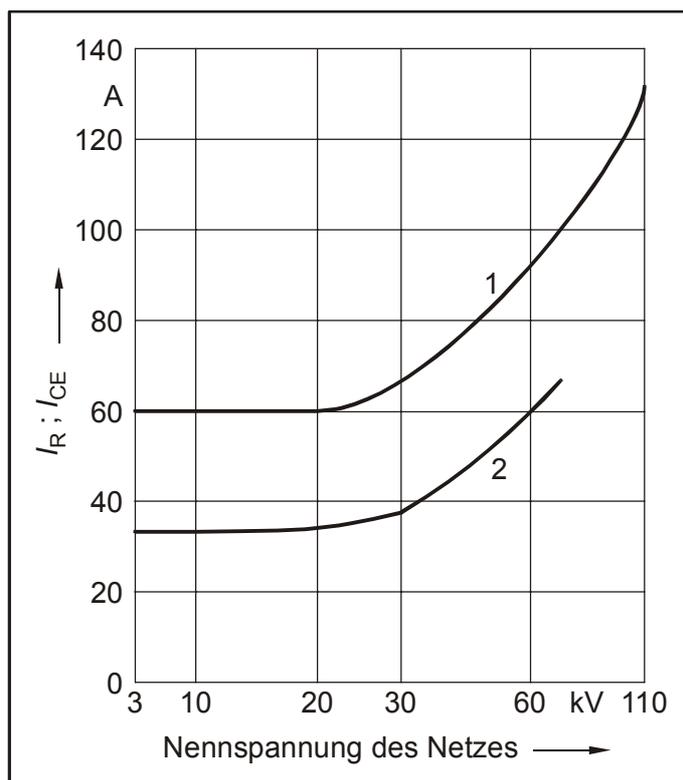


Bild 3.10: Löschungsgrenzen für den Reststrom in Netzen mit Erdschlußkompensation (1) und den kapazitiven Erdschlußstrom in Netzen mit freiem Sternpunkt (2)

Die Abhängigkeit der Verlagerungsspannung im Normalbetrieb von der Verstimmung v wird ausgenutzt, um mit Hilfe von sog. *Verstimmungsgradreglern* bei Änderungen des Netzschaltzustandes die Erdschlußspulen nachzuregeln, um im Fall eines Erdschlusses die Einhaltung der Löschungsgrenze für I_R zu gewährleisten. Zu diesem Zweck sind die PETERSENspulen mit Wicklungsanzapfungen oder als Tauchkernspulen ausgeführt (s. Abschnitt 3.4).

3.3 Transiente Überspannungen bei Erdschlußeintritt und Verlauf der Wiederkehrspannung bei Erdschlußlöschung

Wir haben festgestellt, daß sich bei Dauererdschluß in erdschlußkompensierten Netzen wie in Netzen mit freiem Sternpunkt an den gesunden Leitern eine $\sqrt{3}$ -fache Spannungserhöhung einstellt (Erdfehlerfaktor $\delta = \sqrt{3}$). Folglich ergeben sich bei Erdschlußeintritt auch ähnliche Einschwingvorgänge wie in Netzen mit freiem Sternpunkt. Die Eigenfrequenz der Aufladeschwingung wird auch hier annähernd durch die Gl. (2.10) bestimmt, da die hinzugekommene gegenüber L_1 sehr viel größere Nullinduktivität kaum einen Einfluß auf ω_e hat (s. Anhang 6.1). Es ist also ebenfalls mit ma-

ximalen Überspannungsfaktoren für die Aufladeschwingung von 2,5 zu rechnen. In diesem Punkt stellt die Erdschlußkompensation also keine Verbesserung gegenüber den Netzen mit freiem Sternpunkt dar. Der wesentliche Unterschied im Spannungsverhalten besteht aber in der *Wiederkehrspannung* nach der Erdschlußlöschung. Wir stellen uns wieder die Reihenschaltung der Raumzeigerkomponenten vor, die im Moment der Erdschlußlöschung aufgehoben wird. Das Nullsystem bildet nun einen separaten Schwingkreis mit der Eigenkreisfrequenz (die Dämpfung sei vernachlässigt):

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \omega \sqrt{1-v} \quad (3.16)$$

wobei ω die zur Grundschiwingung gehörende Kreisfrequenz ist. Bei genauer Abstimmung ist $v = 0$ und damit $\omega_e = \omega$. Das Nullsystem schwingt dann auch nach der Erdschlußlöschung mit der Frequenz der Grundschiwingung weiter, so daß sich die Erdschlußlöschung in den Spannungen zunächst nicht bemerkbar macht. Im Bereich kleiner Verstimmungen gilt für Gl. (3.16) die Näherung

$$\omega_e = \omega(1-v/2)$$

Im Fall der Überkompensation ($v < 0$) wird $\omega_e > \omega$, d. h. das Nullsystem schwingt mit einer (geringfügig) größeren Frequenz, als die Grundschiwingung des Netzes aus. Die Spannung am vorher erdschlußbehafteten Leiter kehrt schwebend mit der Frequenz

$$\Delta f = f_{50} \cdot |v| / 4 \quad (3.17)$$

in ihrer Hüllkurve wieder.

Die Bilder 3.11 bis 3.14 zeigen die simulierten Spannungsverläufe bei Aufhebung des Erdschlusses in Leiter a im Nulldurchgang des Erdschlußstromes unter Berücksichtigung der Dämpfung bei verschiedenen Werten von v . Durch die Dämpfung ist bei $v = 0$ die Eigenfrequenz ω_e bereits geringfügig von ω verschieden, so daß auch für diesen Fall bereits die Spannung, allerdings sehr langsam schwebend, wiederkehrt (Bild 3.11). Mit $v = 1$ (Bild 3.14) ist zum Vergleich auch der Sonderfall der freien Sternpunkte gerechnet, bei dem die Nullspannung langsam monoton (reeller Eigenwert) abklingt, was zu der für diese Netze typischen schnellen Spannungswiederkehr im vorher erdschlußbehafteten Leiter führt.

Durch die langsame Spannungswiederkehr im erdschlußkompensierten Netzen besteht nicht die Gefahr der Wiederezündung wie in Netzen mit freiem Sternpunkt. Das ist auch der Grund dafür, daß die Löschgrenze für den Reststrom höher als die für I_{CE} in Netzen mit freiem Sternpunkt (s. Bild 3.10) liegt. Auch die Gefahr von intermittierenden Erdschlüssen mit hohen Überspannungen ist in erdschlußkompensierten Netzen nicht gegeben. Die Gefahr des Doppelerdkurzschlusses durch die transienten Überspannungen bei Erdschlußeintritt oder die zeitweiligen Spannungsüberhöhungen im Dauerzustand besteht aber genauso wie in Netzen mit freiem Sternpunkt.

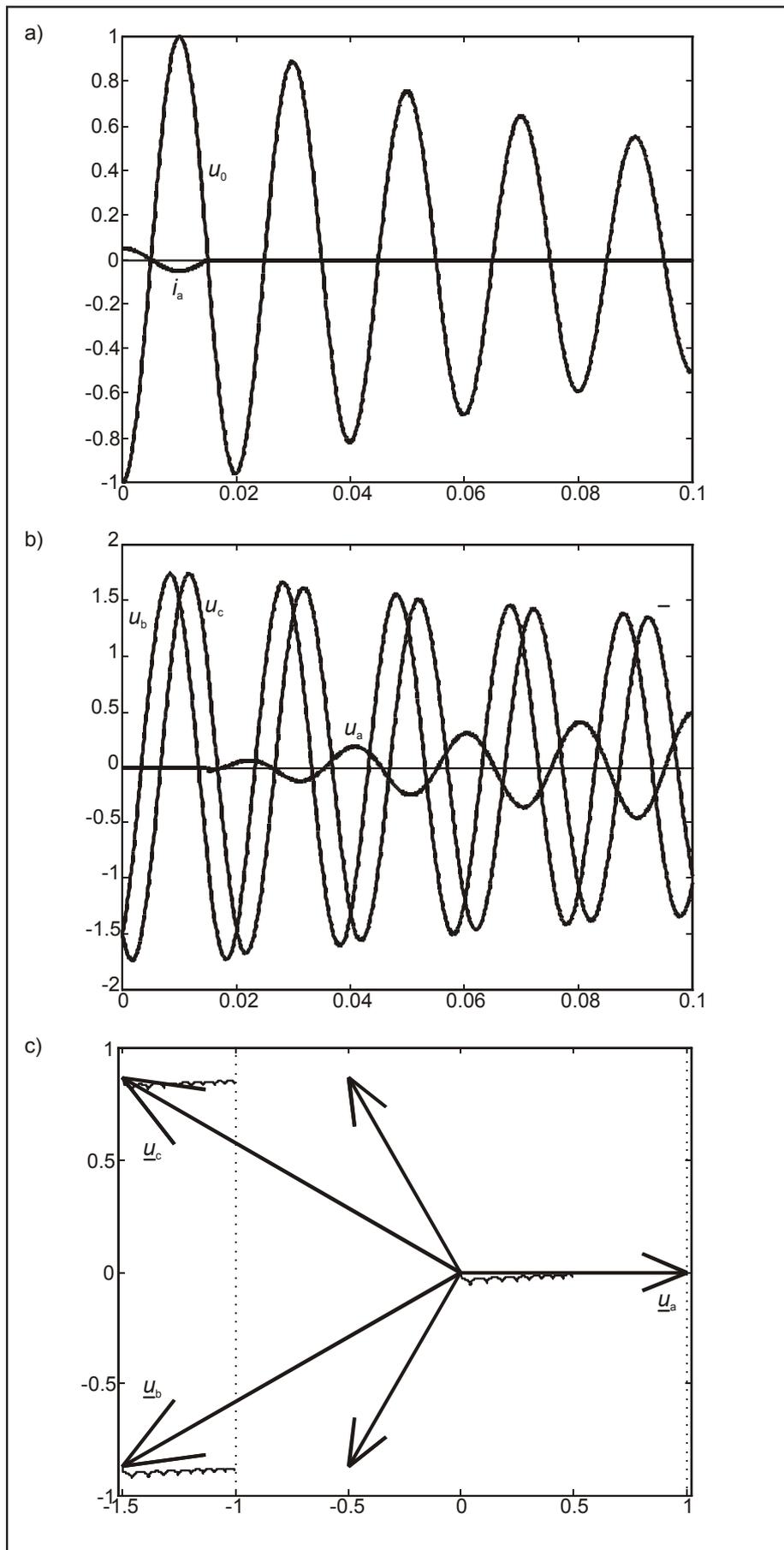


Bild 3.11: Erdschlußlöschung im kompensierten Netz ($\nu = 0$) a) Fehlerstrom- und Nullspannungsverlauf b) Spannungsverläufe c) Bewegung der Spannungszeiger

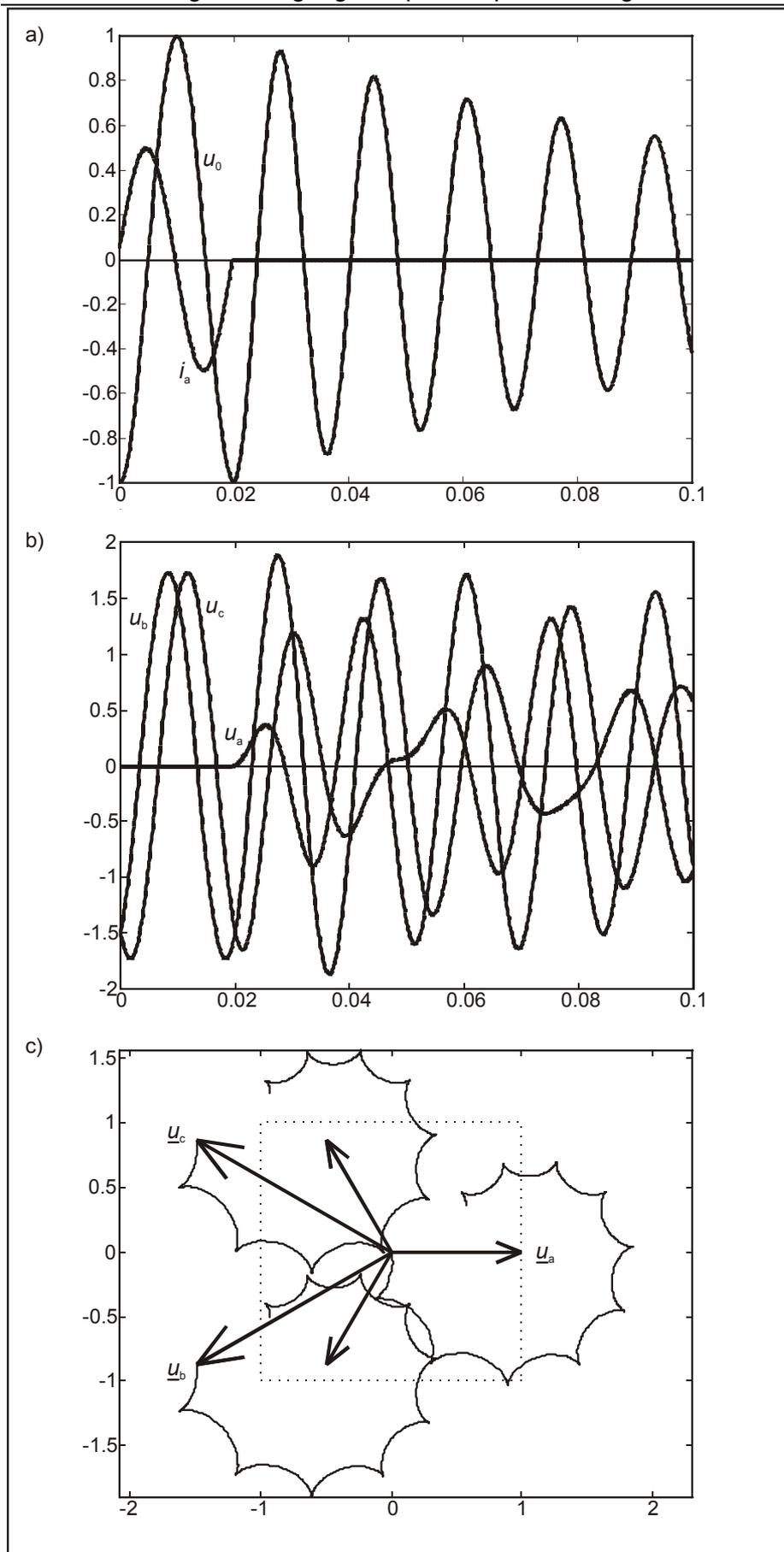


Bild 3.12: Erdschlußlöschung im überkompensierten Netz ($\nu = -0,5$) a) Fehlerstrom- und Nullspannungsverlauf b) Spannungsverläufe c) Bewegung der Spannungszeiger

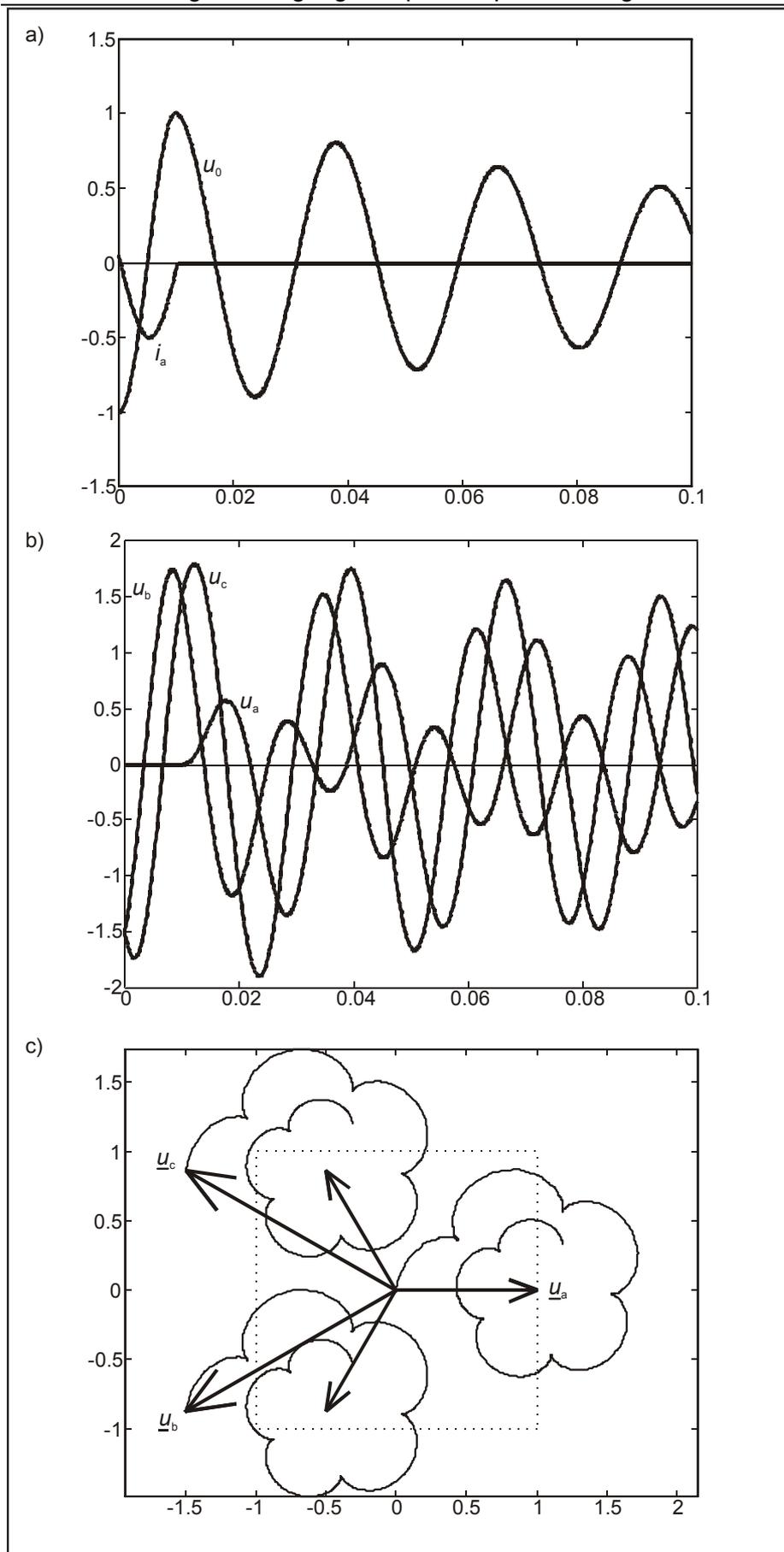


Bild 3.13: Erdschlußlöschung im unterkompensierten Netz ($\nu = 0,5$) a) Fehlerstrom- und Nullspannungsverlauf b) Spannungsverläufe c) Bewegung der Spannungszeiger

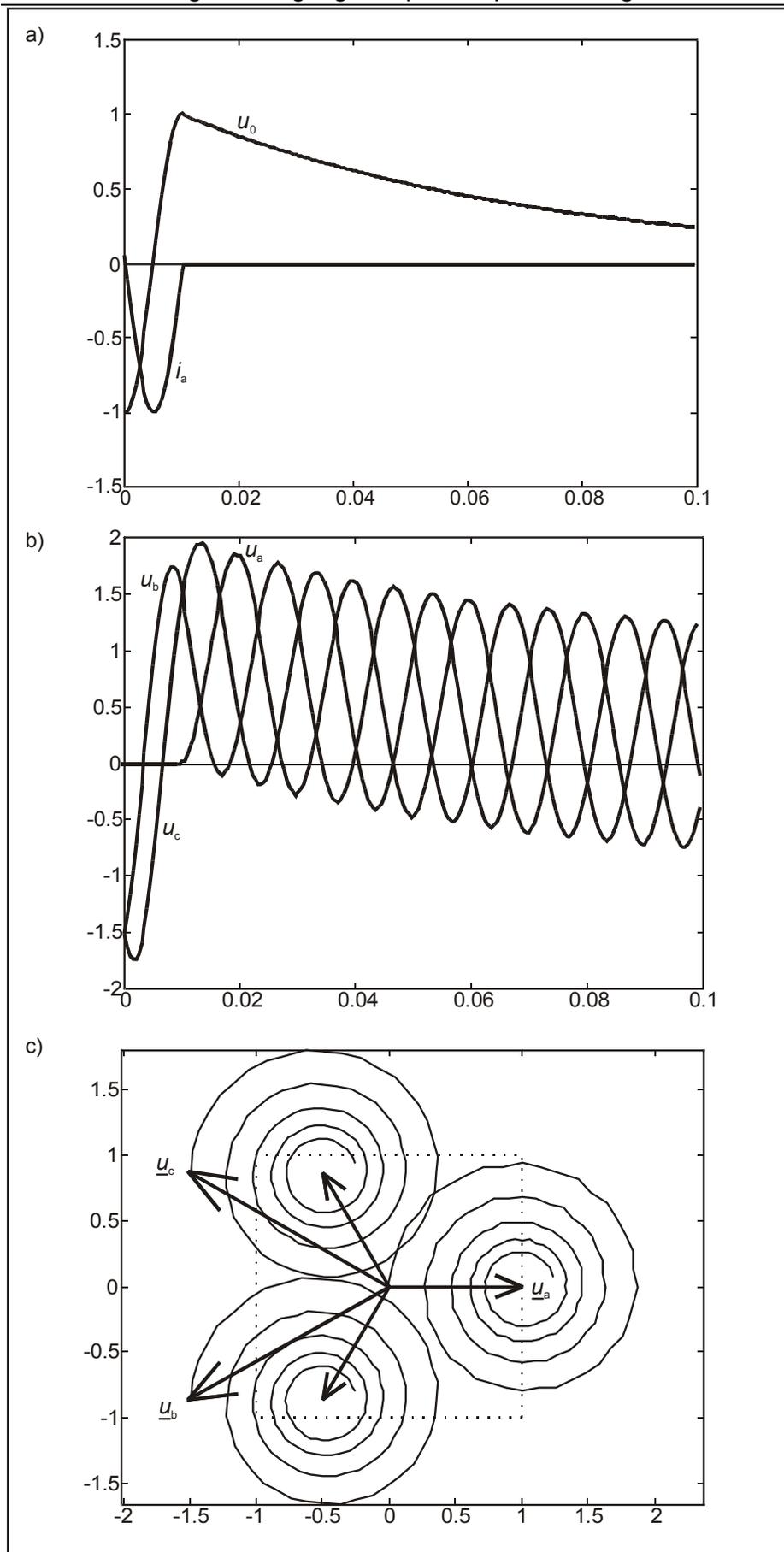


Bild 3.14: Erdschlußlöschung im Netz mit freiem Sternpunkt ($\nu = 1$) a) Fehlerstrom- und Nullspannungsverlauf b) Spannungsverläufe...c) Bewegung der Spannungszeiger

3.4 Anschluß und Aufstellung der Erdschlußlöschspulen

Die Erdschluß- oder PETERSEN-Spulen werden als Eisenkernspulen mit größerem Luftspalt, der eine weitgehend lineare Magnetisierungskennlinie bewirkt, ausgeführt. Wicklung und Kern sind in einem Ölgefäß untergebracht. Der prinzipielle Aufbau einer Erdschlußspule mit Mantelkern ist in Bild 3.15a dargestellt.

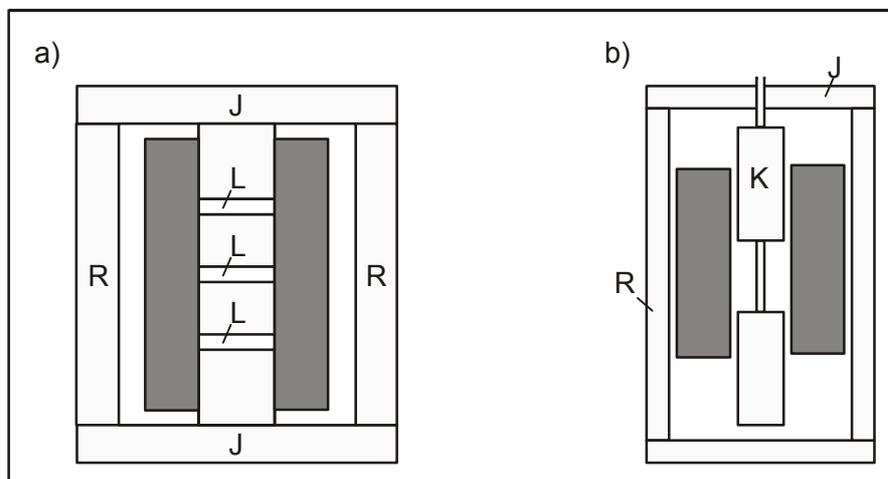


Bild 3.15: Prinzipieller Aufbau der Erdschlußspulen a) mit Mantelkern b) mit Tauchkern

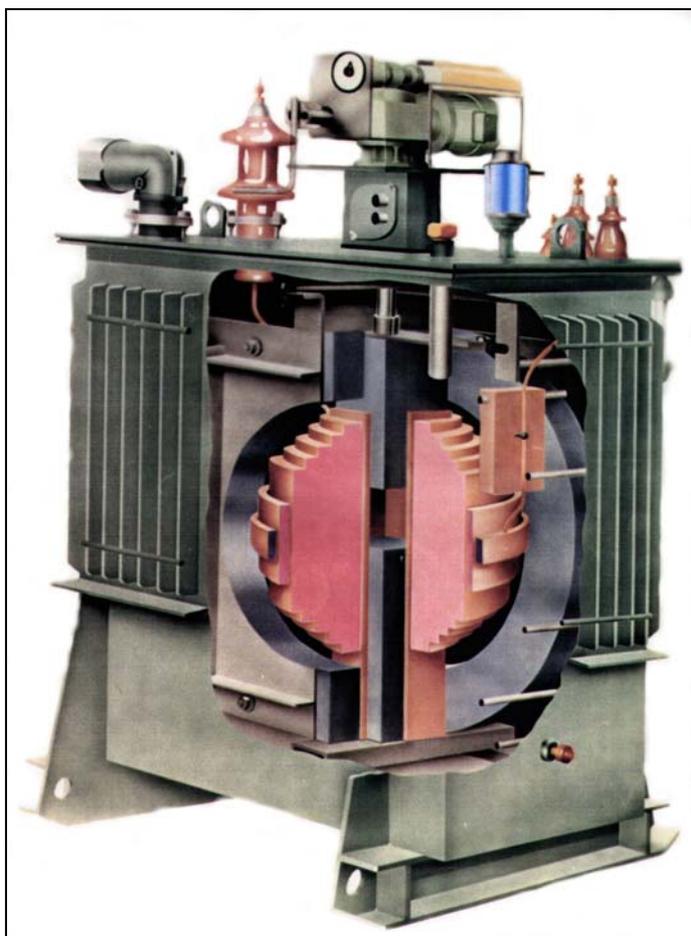


Bild 3.16: Schnittbild durch eine Tauchkernspule

Die Joche (J) und die magnetischen Rückschlußschenkel sind wie beim Transformator parallel geblecht, während der bewickelte runde Kern radial geblecht ist und durch mehrere, durch Keramikscheiben gebildete, Luftspalte (L) unterbrochen ist. Bei der ersten - im Kraftwerk Pleidelsheim eingesetzten - PETERSEN-Spule war die Wick-

lung luftisoliert und je zur Hälfte auf die Schenkel des Kerns verteilt, sowie mit Anzapfungen ausgeführt.

Die Wicklung kann mit Anzapfungen zur stufenweisen Verstellung von X_M versehen werden. Zur stufenlosen Verstellung von X_M werden die Erdschlußspulen als Tauchkernspulen mit beweglichem, radial geblechtem Kern ausgeführt (Bild 3.15b und Bild 3.16)).

Die Spulen sind für Dauerbetrieb ausgelegt. Neben der Nennspannung, die dem $1/\sqrt{3}$ -fachen Wert der Netznennspannung entspricht, werden vom Hersteller die Blindleistung und/oder der Bemessungsstrom angegeben. Es werden Spulen mit Bemessungsströmen zwischen 20 und 300 A gefertigt. Die Blindleistung berechnet sich aus:

$$Q_r = U_{nN} / (\sqrt{3} I_r)$$

Im folgenden ist ein Beispiel für die Daten von Erdschlußspulen gegeben:

$U_r = 22 \text{ kV} / \sqrt{3}$, $Q_r = 508 \text{ kVar}$, Ströme in 6 Stufen unter Last einstellbar: 20, 24, 28, 32, 36, 40 A.

Zur Anpassung des Verstimmungsgrades an die Netzverhältnisse (ggf. durch eine Verstimmungsgradregelung) genügt es neben mehreren Spulen mit festem X_M einige wenige einstellbare Spulen aufzustellen.

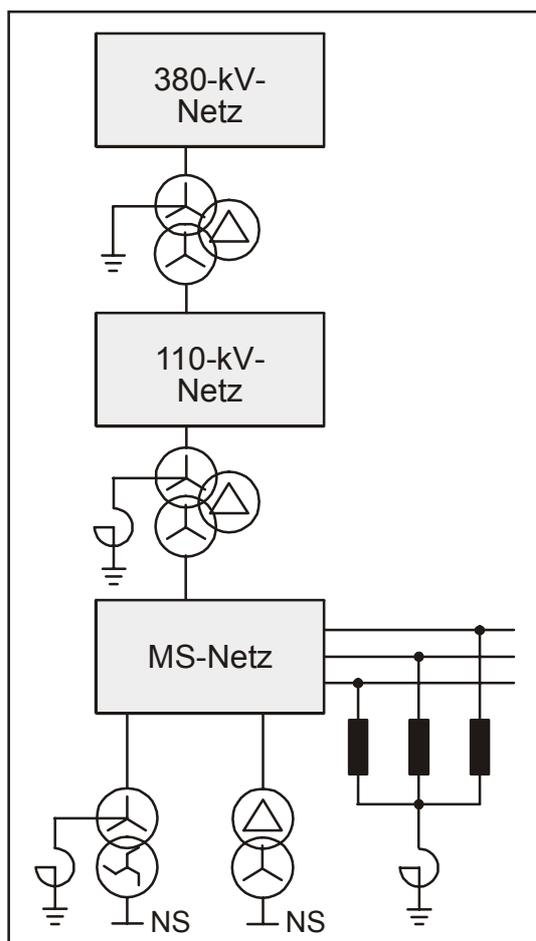


Bild 3.17: Anschluß der Erdschlußspulen im 110-kV- und im MS-Netz

Der Anschluß der Erdschlußspulen erfolgt im 110-kV-Netz an den Sternpunkten der Abspanntransformatoren zur Mittelspannung (Bild 3.17), da diese in relativ großer Anzahl über das Netz verteilt vorhanden sind, so daß sich im Falle des Erdschlusses eine ausgewogene Kompensations-Stromverteilung (im Nullsystem) einstellt und bei Ausfall von Leitungen oder Transformatoren nicht die Gefahr der Bildung von Teilnetzen mit freien Sternpunkten, in denen sich intermittierende Erdschlüsse oder Ferro-

resonanzen ausbilden können, besteht. Im erdschlußkompensierten Mittelspannungsnetz dürfen dann zur Vermeidung der Kopplung des Nullsystems mit dem des 110-kV-Netzes keine Erdschlußspulen auf der US-Seite der 110-kV/MS-Transformatoren angeschlossen werden (Bild 3.17). Sie müssen an die Sternwicklung der Yz5-Abspanntransformatoren zur Niederspannung oder über zusätzliche Sternpunktbildner angeschlossen werden. Ebenso dürfen zur Vermeidung der Durchkopplung der Nullsysteme keine Erdschlußspulen an die US-Seite der 380/110-kV- (bzw. 220/110-kV-) Transformatoren angeschlossen werden, wenn die OS-Seite dieser Transformatoren niederohmig oder starr geerdet ist.

3.5 Zusammenfassende Beurteilung des Erdschlußgeschehens in erdschlußkompensierten Netzen im Vergleich zu Netzen mit freiem Sternpunkt

- Lichtbogenfehler verlöschen bis zu einem bestimmten Wert von I_R von selbst. Die Löschgrenze beträgt 60 A für MS-Netze und 130 A für 110-kV-Netze.
- Der Erdfehlerfaktor und der maximale Überspannungsfaktor bei Erdschlußeintritt betragen wie bei Netzen mit freiem Sternpunkt: $\delta = \sqrt{3}$ und $k_{LE} = 2,5$. Damit besteht auch in erdschlußkompensierten Netzen die Gefahr des Doppelerdkurzschlusses.
- Die Spannung an dem vorher erdschlußbehafteten Leiter kehrt bei Erdschluß wesentlich langsamer wieder als in Netzen mit freiem Sternpunkt. Dadurch ist die höhere Löschgrenze von I_R gegenüber I_{CE} begründet und kommt es zu keiner Wiedertzündung und zu keinen intermittierenden Erdschlüssen mit besonders hohen Überspannungen.
- Im Normalbetrieb verursacht die kapazitive Unsymmetrie bei kleiner Dämpfung bereits Verlagerungsspannungen. Zur Einhaltung des zulässigen Wertes von ca. 20 % von $U_{nN} / \sqrt{3}$ werden die Netze mit einer Mindestverstimmung von 5...20 %, die noch nicht zu einem übermäßigen Anwachsen von I_R führt, unterkompensiert betrieben.
- Die Erdschlußspulen und ihre automatische Einstellung (Verstimmungsgradregelung) bedeuten einen Mehraufwand gegenüber Netzen mit freiem Sternpunkt.
- Die Teilkurzschlußströme über Erde verursachen wie bei Netzen mit freiem Sternpunkt nur unwesentliche Schnitt- und Berührungssowie Beeinflussungsspannungen, so daß sich der Aufwand für die Erdung in Grenzen hält. Die selektive Erdschlußfassung ist nicht weniger schwierig. Da es sich im Gegensatz zu Netzen mit freiem Sternpunkt um die Erfassung des Wirkreststromes handelt, kommen z.B. Meßeinrichtungen, die auf dem Prinzip der Wirkleistungsmessung zwischen \underline{U}_{EM} und I_0 beruhen, in Frage.
- Durch das Anwachsen des Wirkreststromes und ggf. der Verlagerungsspannung im Normalbetrieb mit der Netzgröße und der Netzennspannung bleibt die Anwendung der Erdschlußkompensation auf 110-kV-Netze nicht zu großer Ausdehnung, beschränkt. Sie wird erfolgreich in 110-kV-Netzen mit kapazitiven Erdschlußströmen von $I_{CE} = 100...2000$ A, wobei die hohen Werte für Netze mit hohem Kabelanteil gelten, angewendet.

4 Netze mit niederohmiger Sternpunktterdung

Hochspannungsnetze, für die wegen der zu hohen kapazitiven Erdschluß- oder Wirkrestströme der Betrieb mit freiem Sternpunkt oder Erdschlußkompensation nicht in Frage kommt, werden generell mit niederohmiger Sternpunktterdung betrieben. Die niederohmige Sternpunktterdung ist aber auch eine Alternative für MS- und 110-kV-Netze mit hohem Kabelanteil, wie ihn insbesondere städtische Netze aufweisen. In Deutschland hat sich mit dem Netzausbau die Sternpunktbehandlung vom freien Sternpunkt über die Resonanzsternpunktterdung zur niederohmigen Sternpunktterdung vollzogen. Im Ausland, so z.B. in den USA und England, ist man mit den aufkommenden Schwierigkeiten bei Erdschlüssen in Netzen mit freiem Sternpunkt gleich zur niederohmigen Sternpunktterdung übergegangen.

Mit dem Übergang zur niederohmigen Sternpunktterdung treten die Spannungsprobleme in den Hintergrund. Dafür nehmen die Ströme bei einpoligem Kurzschluß typische Kurzschlußwerte an und man spricht deshalb jetzt auch von Erdkurzschluß und Erdkurzschlußstrom. Mit Hilfe von niederohmigen Spulen, die an die Sternpunkte der Transformatoren angeschlossen werden, wird der Erdkurzschlußstrom einerseits so groß gehalten, daß er vom Netzschutz sicher erfaßt wird und andererseits nicht zu unzulässigen thermischen und dynamischen Kurzschlußbeanspruchungen führt. Bei der Einschaltung von Drosselspulen in die (oder einige) Sternpunkte spricht man von *strombegrenzender niederohmiger Sternpunktterdung*. Sind alle Sternpunkte der Transformatoren eines Netzes geerdet, von *starrer Sternpunktterdung*.

Die Strombegrenzungs-Drosselspulen haben Reaktanzen in der Größenordnung $X_M = 15 \dots 60 \Omega$ und werden als eisenlose Spulen in einen mit Öl gefüllten Kessel eingebaut. Zwischen dem Kessel und der Spule befindet sich ein Abschirmzylinder aus Aluminium, der ein Eindringen des Stromflusses in den Kessel verhindert (Bild 4.1). Ein Beispiel für die Daten einer Strombegrenzungs-Drosselspule ist:

$$U_r = 120 \text{ kV} / \sqrt{3}, \quad Q_r = 4,16 \text{ kVar}, \quad X_M = 18 \Omega.$$

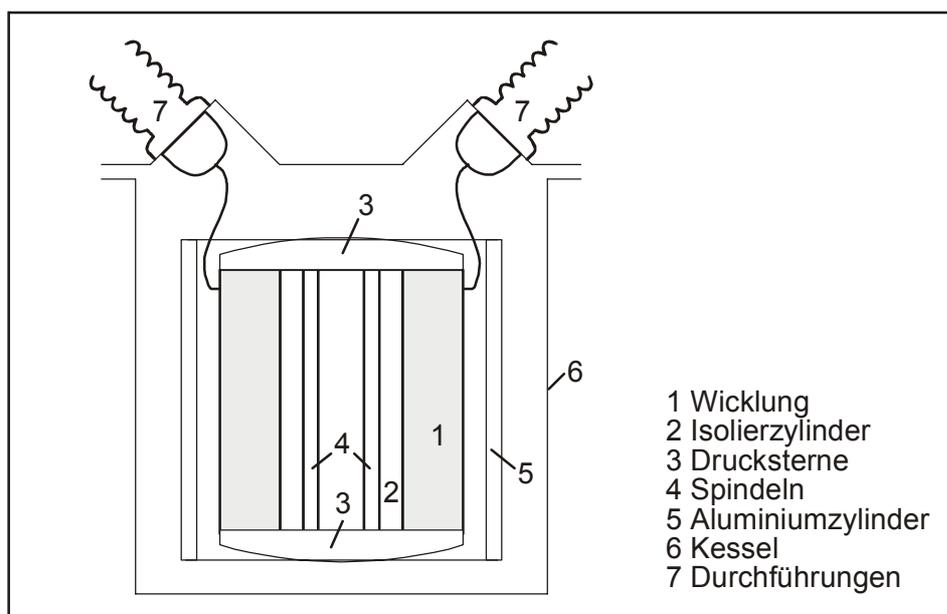


Bild 4.1: Aufbau einer Strombegrenzungs-Drosselspule

In städtischen 110-kV-Kabelnetzen begrenzt man mit Rücksicht auf die Beeinflussungsproblematik die Erdkurzschlußströme auf 5 kA, während man in 110-kV-Überlandnetzen zur sicheren Schutzanregung in Netzausläufern 10 kA zulassen muß.

Im 220/380-kV-Übertragungsnetz wird der einpolige Kurzschlußstrom auf Werte begrenzt, die (40...60)% des dreipoligen Kurzschlußstromes betragen. Dazu werden

einige ausgewählte Sternpunkte starr geerdet, während die anderen Sternpunkte frei bleiben. Diese Kombination wird als *teilstarre* Sternpunktterdung bezeichnet.

4.1 Stationärer Erdkurzschlußstrom

Wegen der jetzt wesentlich kleineren Nullimpedanz als bei Netzen mit freiem Sternpunkt und Erdschlußkompensation dürfen \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 bei der Berechnung des einpoligen Kurzschlußstromes nicht mehr vernachlässigt werden. Es kann aber $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$ gesetzt werden und wir erhalten aus der Reihenschaltung der symmetrischen Komponentennetze (s. auch Skript Fehler):

$$I_{k1}'' = \frac{3\underline{U}_q}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} = \frac{3\underline{U}_q}{2\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0} = \frac{3}{2 + \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1}} \cdot \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}_1} = \frac{3}{2 + \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1}} \cdot I_{k3}''$$

oder

$$\boxed{\frac{I_{k1}''}{I_{k3}''} = \frac{3}{2 + \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1}} = \frac{3}{2 + m}} \quad (4.1)$$

Als Quellenspannung muß wegen des Einflusses des Belastungszustandes im Mitsystem vor dem Kurzschluß hier die *subtransiente* Spannung, für die näherungsweise $1,1 U_{nm} / \sqrt{3}$ gilt, verwendet werden⁴⁾. Für $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_1$ würde der einpolige Kurzschlußstrom die Größenordnung des dreipoligen Kurzschlußstromes erreichen. Dieser Grenzfall wird selbst dann nicht erreicht, wenn die Sternpunkte aller Transformatoren geerdet würden (eine Ausnahme bilden Netze mit Spartransformatoren, bei denen in der Nähe dieser Transformatoren Z_0 kleiner als Z_1 werden kann). Durch Vergrößern der Nullimpedanz, indem nicht alle Sternpunkte geerdet werden, kann man die gewünschte Begrenzung von I_{k1}'' erreichen.

4.2 Erdfehlerfaktor

Die Spannungen an den gesunden Leitern ergeben sich aus:

$$\underline{U}_b^F = \underline{a}^2 \underline{U}_1^F + \underline{a} \underline{U}_2^F + \underline{U}_0^F$$

$$\underline{U}_c^F = \underline{a} \underline{U}_1^F + \underline{a}^2 \underline{U}_2^F + \underline{U}_0^F$$

und mit

$$\underline{U}_1^F = \underline{U}_q - \underline{Z}_1 I_1^F = \underline{U}_q - \frac{1}{3} \underline{Z}_1 I_{k1}'' = \frac{1+m}{2+m} \underline{U}_q$$

$$\underline{U}_2^F = -\underline{Z}_2 I_2^F = -\frac{1}{3} \underline{Z}_1 I_{k1}'' = -\frac{1}{2+m} \underline{U}_q$$

⁴⁾ In den Netzen mit freiem Sternpunkt und mit Resonanzsternpunktterdung ist mit der Vernachlässigung der Belastungsimpedanzen als Quellenspannung $U_{nm} / \sqrt{3}$ zu verwenden, weil sonst die Erdschlußströme zu hoch berechnet werden würden.

$$\underline{U}_0^F = -\underline{Z}_0 \underline{I}_0^F = -\frac{1}{3} \underline{Z}_0 \underline{I}_{k1}'' = -\frac{\underline{m}}{2+\underline{m}} \underline{U}_q$$

wobei \underline{m} das Verhältnis von \underline{Z}_0 zu \underline{Z}_1 ist.

$$\underline{U}_b^F = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a}) + (\underline{a}^2 - 1)\underline{m}}{2 + \underline{m}} \underline{U}_q = -\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{U}_q \left(\frac{\sqrt{3}\underline{m}}{2 + \underline{m}} + j \right) \quad (4.2)$$

$$\underline{U}_c^F = \frac{(\underline{a} - \underline{a}^2) + (\underline{a} - 1)\underline{m}}{2 + \underline{m}} \underline{U}_q = -\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{U}_q \left(\frac{\sqrt{3}\underline{m}}{2 + \underline{m}} - j \right) \quad (4.3)$$

Im Fall des freien Sternpunktes oder der Erdschlußkompensation geht $m \rightarrow \infty$ und es wird bekanntlich $\underline{U}_b^F = (\underline{a}^2 - 1)\underline{U}_q$ und $\underline{U}_c^F = (\underline{a} - 1)\underline{U}_q$ (s. Gln. (2.4) und (2.5)). Aus Gl. (4.2) ergibt sich für den Erdfehlerfaktor unter der Annahme gleicher Impedanzwinkel für das Mit- und Nullsystem ($\underline{m} = m$):

$$\delta = \frac{U_b^F}{U_q} = \frac{U_c^F}{U_q} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{1+m+m^2}}{2+m} \quad (4.4)$$

Wir überprüfen Gl. (4.4) mit den Sonderfällen: $m \rightarrow \infty$, d.h. freier Sternpunkt und Resonanzsternpunktterdung, sowie $m=1$ und erhalten $\delta = \sqrt{3}$ und $\delta = 1$ (keine Spannung am Sternpunkt). Nach Umstellung der Gl. (4.1) in die Form

$$m = \frac{Z_0}{Z_1} = \frac{3}{I_{k1}'' / I_{k3}''} - 2$$

können wir δ auch als Funktion von I_{k1}'' / I_{k3}'' ausdrücken.

$$\delta = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{I_{k1}''}{I_{k3}''} + \frac{1}{3} \left(\frac{I_{k1}''}{I_{k3}''} \right)^2} \quad (4.5)$$

In Bild 4.2 sind die Verläufe von δ und I_{k1}'' / I_{k3}'' als Funktion von Z_0 / Z_1 sowie δ und Z_0 / Z_1 als Funktion von I_{k1}'' / I_{k3}'' dargestellt, anhand derer das Problem der Sternpunktbehandlung noch einmal deutlich wird: Geringe einpolige Kurzschlußströme sind mit hohem Erdfehlerfaktor verbunden und umgekehrt.

Nach der Höhe des Erdfehlerfaktors werden die Netze generell unterteilt in *wirksam geerdete* Netze mit $\delta \leq 1,4$ und in *nicht wirksam geerdete* Netze mit $\delta > 1,4$. Den Hintergrund für diese Unterteilung bildet die Isolationskoordination, nach der in Netzen mit wirksamer Sternpunktterdung eine Reduktion des in der Hochspannungsebene beträchtlichen Isolationsaufwandes möglich ist. Das 220/380-kV-Netz wird als wirksam geerdetes Netz betrieben, wobei nach Bild 4.2 für $\delta \leq 1,4$ ein Impedanzverhältnis von $Z_0 / Z_1 \leq 5,5$ einzuhalten ist. Der einpolige Kurzschlußstrom wird dann $I_{k1}'' \geq 0,4 I_{k3}''$.

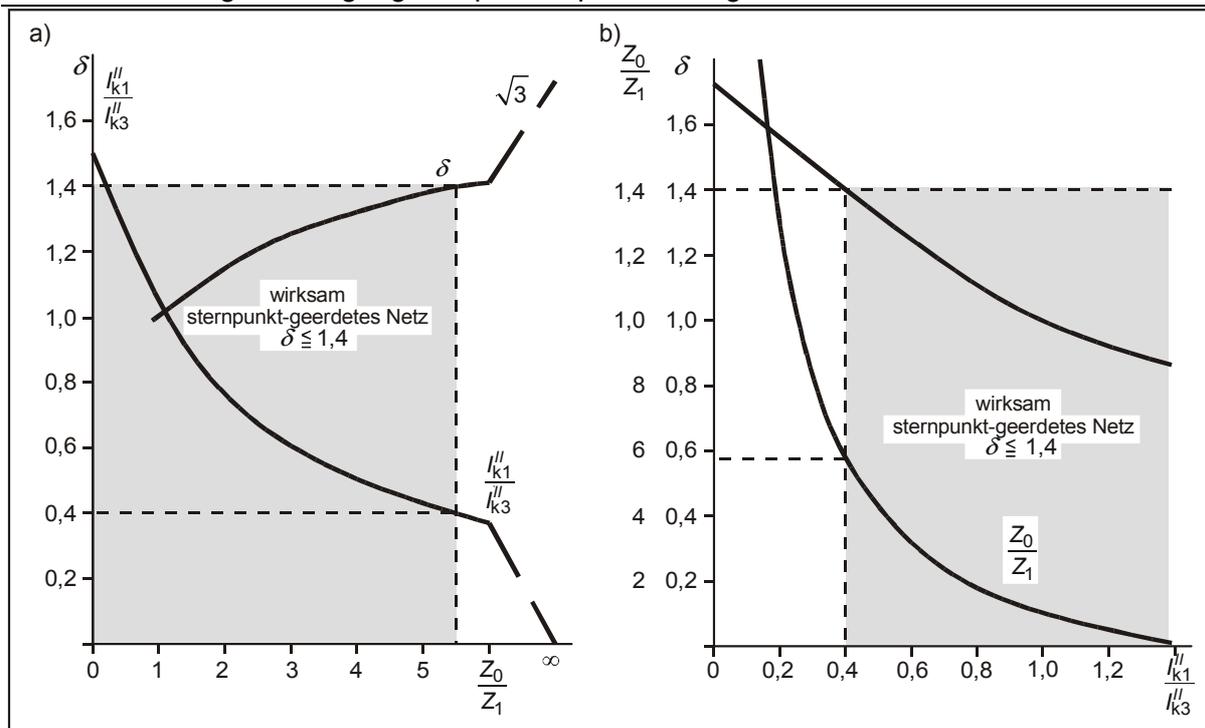


Bild 4.2: (a) Erdfehlerfaktor und (b) Verhältnis I_{k1}'' / I_{k3}'' bei niederohmiger Sternpunktterdung

Beherrschbar sind einpolige Kurzschlußströme bis 50 kA, doch wird man durch Ausnutzung des Wertes von 1,4 für δ dafür sorgen, daß die einpoligen Kurzschlußströme nicht unnötig groß werden. Die Begrenzung der Kurzschlußströme erfolgt dadurch, daß nicht alle Transformatoren geerdet werden (teilstarre Sternpunktterdung). So werden beispielsweise die Blocktransformatoren der größten Kraftwerksblöcke mit 1300 MVA nicht geerdet, weil ihr Beitrag zu I_{k1}'' bereits 7 kA betragen würde. Die teilstarre Sternpunktterdung birgt aber wieder die Gefahr in sich, daß bei Netzauftrennung Netzbezirke mit freiem Sternpunkt entstehen können.

4.3 Kurzunterbrechung

Die Erdkurzschlußströme in niederohmigen Netzen können auch bei Lichtbogenfehlern nicht mehr von selbst verlöschen. Sie müssen schnellstmöglich und selektiv abgeschaltet werden, da sie einerseits eine zerstörende Wirkung an der Fehlerstelle haben und andererseits Schritt- und Berührungsspannungen an der Fehlerstelle verursachen sowie in der Erde verlegte Rohre und Informationsleitungen beeinflussen. Die Kurzschlußabschaltung übernimmt im Hochspannungsnetz der ohnehin installierte Selektivschutz (Distanzschutz) im Zusammenwirken mit einer sog. *Kurzunterbrechung* (KU). Werden Mittelspannungsnetze auf niederohmige strombegrenzende Sternpunktterdung umgestellt, so müssen unter Umständen entsprechende Schutzeinrichtungen und KU-fähige Leistungsschalter nachgerüstet werden.

Im Hochspannungsnetz wird bei einpoliger Anregung des Selektivschutzes zunächst davon ausgegangen, daß es sich um einen der häufigsten Lichtbogenfehler handelt. Auf beiden Seiten der betroffenen Leitung werden gleichzeitig die entsprechenden Pole der Leistungsschalter (die Pole der Hochspannungs-Leistungsschalter sind einzeln schaltbar) geöffnet. In der stromlosen Pause, die zwischen 1 und 1,5 s liegt, hat ein Lichtbogenkurzschluß Gelegenheit zu verlöschen. Nach der stromlosen Pause werden beide Schalterpole wieder gleichzeitig eingeschaltet. Ist der Lichtbogenfehler verloschen, so war die Kurzunterbrechung erfolgreich. Liegt dagegen ein satter Kurzschluß vor, so erfolgt eine erneute Schutzanregung, die dann zur definitiven dreipoligen Abschaltung der Leitung führt. Durch die Redundanz im Hochspannungsnetz ist damit jedoch im Normalfall keine Versorgungsunterbrechung verbunden.

In Hochspannungsnetzen mit Nennspannungen über 400 kV bereitet die einpolige KU Schwierigkeiten, weil dann nach der Abschaltung ein Sekundärlichtbogen an der Kurzschlußstelle über die Leiter-Leiter-Kapazitäten aufrecht erhalten wird.

Im Mittelspannungsnetz wird die KU dreipolig durchgeführt (die Schalter sind nicht einpolig schaltbar), wobei zur Wahrung der Stabilität die stromlosen Pausen kürzer sein müssen (0,2...0,4 s).

4.4 Zusammenfassende Beurteilung des Erdkurzschlußgeschehens in niederohmig geerdeten Netzen im Vergleich zu Netzen mit freiem Sternpunkt und Netzen mit Erdschlußkompensation

Während in Netzen mit freiem Sternpunkt und in Netzen mit Erdschlußkompensation die Spannungsbeanspruchung im Vordergrund steht, gilt es, bei der niederohmigen Sternpunktterdung die mit dem wesentlich höheren Kurzschlußstrom verbundenen Erscheinungen und Probleme zu beherrschen.

In MS-Netzen wird der einpolige Erdkurzschlußstrom durch Sternpunktspulen auf 1,5...2 kA, im 110-kV-Netz auf 5 kA (in städtischen Kabelnetzen) bzw. auf 10 kA in Überlandnetzen begrenzt. Im wirksam geerdeten, teilstarr betriebenen 220/380-kV-Netz beträgt der einpolige Erdkurzschlußstrom $I_{k1}'' \geq 0,4 I_{k3}''$ bei $\delta \leq 1,4$, wenn das Verhältnis $Z_0 / Z_1 \leq 5,5$ eingehalten wird.

- Der Erdkurzschlußstrom wird vom Netzschutz selektiv abgeschaltet. Zur Vermeidung von bleibender Abschaltung von Lichtbogenfehlern wird zunächst eine KU durchgeführt (im Hochspannungsnetz 1-polig mit 1...1,5 s Pausenzeit, im MS-Netz 3-polig mit 0,2...0,4 s Pausenzeit).
- Die zeitweiligen Spannungserhöhungen sind in wirksam geerdeten Netzen auf $1,4 \cdot U_b / \sqrt{3}$ entsprechend $\delta \leq 1,4$ (U_b Betriebsspannung) begrenzt und bleiben auf die Fehlerstelle beschränkt.
- Infolge der geringeren zeitweiligen Spannungserhöhungen sind auch die transienten Überspannungen bei Erdschlußeintritt geringer ($k_{LE} \leq 1,8$).
- Die Ausdehnung der Netze ist nicht mehr begrenzt. Für die Kupplung verschiedener niederohmig geerdeter Netze können Spartransformatoren, die die Nullsysteme durchkoppeln, eingesetzt werden (Netztransformatoren zwischen dem 220- und 380-kV-Netz).

Nachteilig wirken sich der höhere Aufwand für die Erdungsanlagen zur Beherrschung der Berühungs- und Schrittspannungen, der induktiven Beeinflussung, sowie die vermehrte Betätigung der Leistungsschalter aus.

5 Abschließende Übersicht

Art der SPE	freier SP	Resonanz-SPE	niederohmige SPE	
			strombegrenzend	starr / teilstarr
Anwendung	MS-Netze geringer Ausdehnung	10 ... 110-kV-Freileitungsnetze	10 ... 110-kV-Kabelnetz	Hochspannungsnetze $U_n \geq 110\text{kV}$
Netzausdehnung	sehr begrenzt	begrenzt	unbegrenzt	
Z_0 / Z_1 an der Fehlerstelle	groß	sehr groß	>4	3 ... 5,5
1-pol. KS-Strom	$I_{CE} = \sqrt{3}\omega C_E U_n$	$I_R = I_{CE} \sqrt{d^2 + v^2}$	$I_{k1}^n < 2\text{kA (MS)}$ $I_k^n < 5(10)\text{kA (110 kV)}$	$I_{k1}^n = 0,4 \dots 0,6 I_{k3}^n$
Lichtbogenfehler	verlöschen von selbst		Beseitigung durch KU	
Dauerfehler	Weiterbetrieb möglich		Selektive Abschaltung der betroffenen Leitung	
Erdfehlerfaktor δ	$\sqrt{3}$ im gesamten Netz		1,4 ... 1,73 an der Fehlerstelle	>1,4 an der Fehlerstelle
transienter Überspannungsfaktor k_{LE} bei Erdschlußeintritt	< 2,5		1,8 ... 2,5	< 1,8
Doppelerdschlußgefahr	ja		nein	
Beeinflussung	unbedeutend		gering	groß
Aufwand	selektive Erdschlußerfassung	Erdschlußspule selektive Erdschlußerfassung	Sternpunktdrosseln	Erdungsanlagen

6 Anhang

6.1 Bestimmung der Eigenfrequenzen der Aufladeschwingung bei Netzen mit freiem Sternpunkt und Netzen mit Erdschlußkompensation

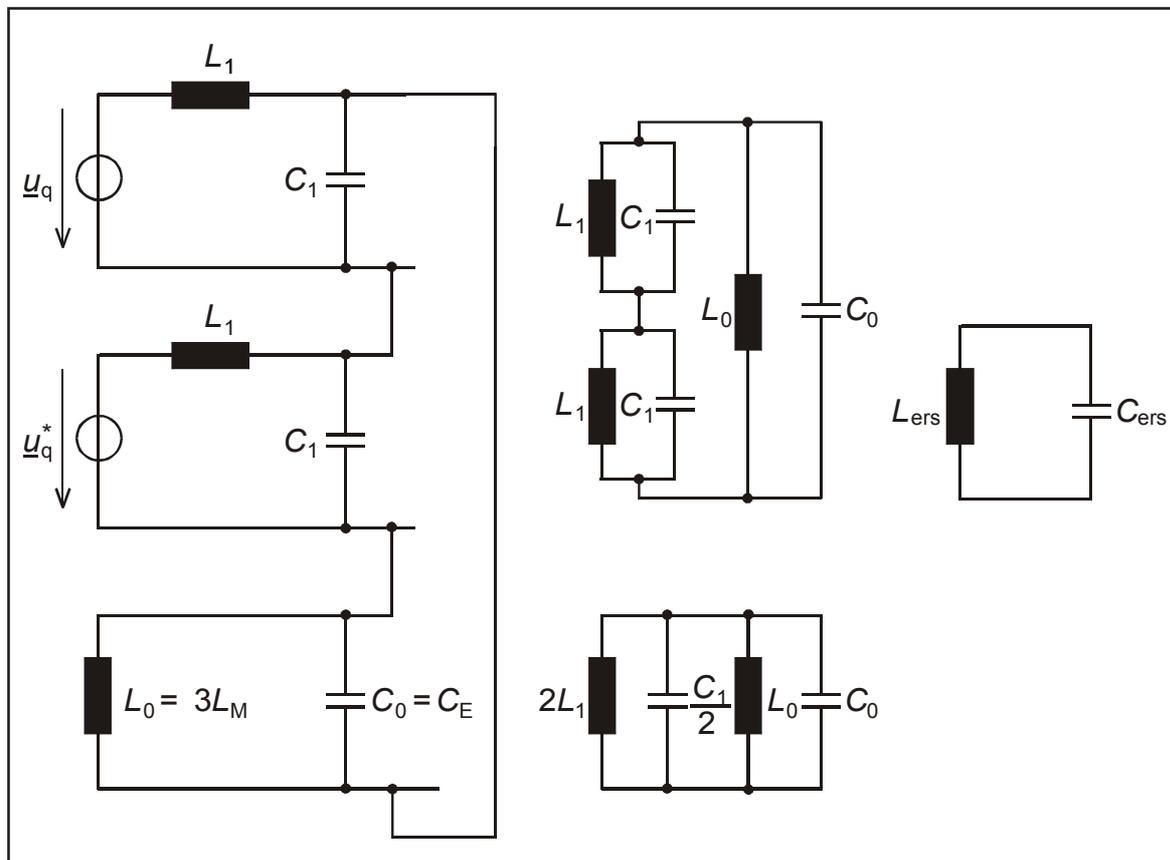


Bild 6.1: Zur Ermittlung der Eigenfrequenz der Aufladeschwingung im erdschlußkompensierten Netz mit Hilfe der Raumzeigerkomponenten

Aus Bild 6.1 folgt:

$$L_{\text{ers}} = \frac{2L_1L_0}{2L_1 + L_0} = \frac{2L_1}{1 + 2L_1/L_0}, \quad C_{\text{ers}} = C_0 + \frac{1}{2}C_1 = \frac{1}{2}(2C_0 + C_1)$$

und damit

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{ers}}C_{\text{ers}}}} = \frac{1}{\sqrt{L_1(2C_0 + C_1)}} \approx \frac{1}{\sqrt{L_1(2C_0 + C_1)}}$$

Oder ausgehend von der Schaltung der $\alpha\beta 0$ -Komponenten in Bild 6.2

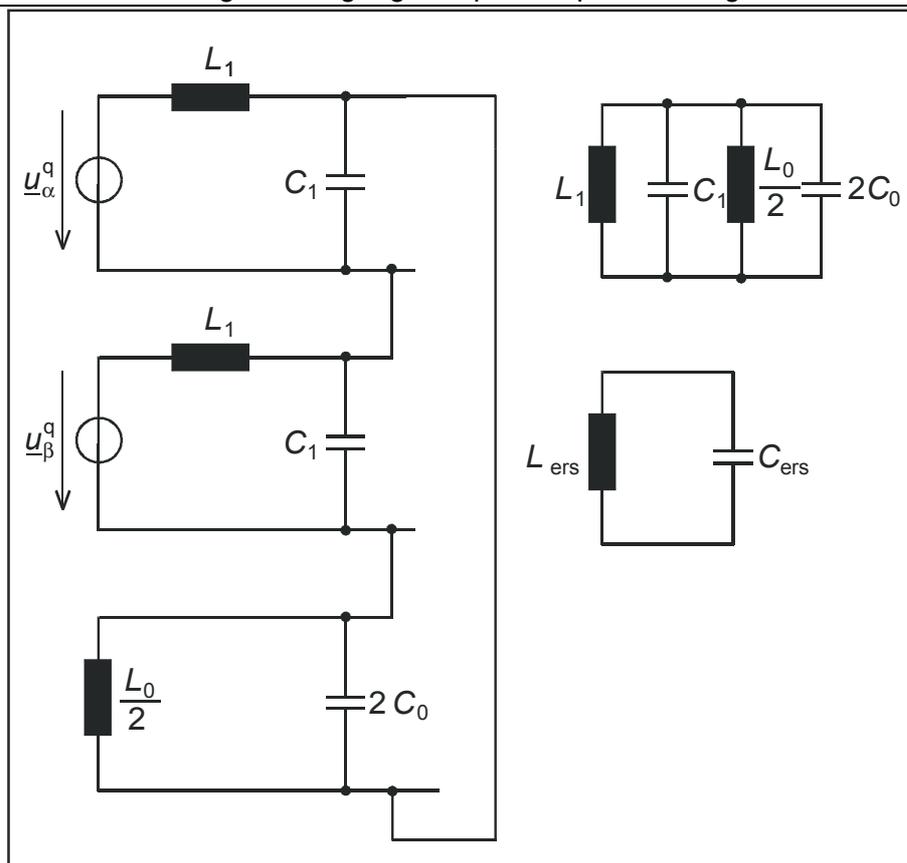


Bild 6.2: Zur Ermittlung der Eigenfrequenz der Aufladeschwingung im erdschlußkompensierten Netz mit Hilfe der $\alpha\beta$ -Komponenten

Mit

$$L_{\text{ers}} = \frac{\frac{1}{2}L_0 \cdot L_1}{\frac{1}{2}L_0 + L_1} = \frac{L_0 \cdot L_1}{L_0 + 2L_1} = \frac{L_1}{1 + 2L_1 / L_0}, \quad C_{\text{ers}} = 2C_0 + C_1$$

wird ebenfalls

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{ers}} C_{\text{ers}}}} = \frac{1}{\sqrt{L_1(C_1 + 2C_0)}} \approx \frac{1}{\sqrt{L_1(C_1 + 2C_0)}}$$

Die Näherung gilt für $L_0 \gg 1$ und ist für erdschlußkompensierte Netze erfüllt. Für Netze mit freiem Sternpunkt ist wegen $L_0 \rightarrow \infty$ der obige Näherungsausdruck mit dem exakten Ausdruck für die Eigenkreisfrequenz identisch. Durch die Zusammenfassung der parallel geschalteten Induktivitäten geht ein Nulleigenwert verloren, auf den es hier aber nicht ankommt.

6.2 Berechnung des Erdschlußstromes erdschlußkompensierter Netze mit kapazitiver Unsymmetrie

$$\underline{I}_b = (\underline{G}_{bE} + j\omega\underline{C}_{bE})\underline{U}_b = \underline{Y}_{bE}\underline{U}_b$$

$$\underline{I}_c = (\underline{G}_{cE} + j\omega\underline{C}_{cE})\underline{U}_c = \underline{Y}_{cE}\underline{U}_c$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_b^q + \underline{U}_{ME} = \underline{a}^2\underline{U}_q - \underline{U}_q = (\underline{a}^2 - 1)\underline{U}_q$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_c^q + \underline{U}_{ME} = \underline{a}\underline{U}_q - \underline{U}_q = (\underline{a} - 1)\underline{U}_q$$

$$\underline{I}_{CE} = -(\underline{I}_b + \underline{I}_c) = \left((\underline{a}^2 - 1)\underline{Y}_{bE} + (\underline{a} - 1)\underline{Y}_{cE} \right)\underline{U}_q$$

$$\underline{I}_{ME} = \underline{Y}_M\underline{U}_{ME} = -\underline{Y}_{ME}\underline{U}_q$$

$$\underline{I}_R = -\underline{I}_{CE} - \underline{I}_{ME} = \left(\underline{Y}_M - (\underline{a}^2 - 1)\underline{Y}_{bE} - (\underline{a} - 1)\underline{Y}_{cE} \right)\underline{U}_q$$

Erweitern mit $\mp\underline{Y}_{aE} = \underline{G}_{aE} + j\omega\underline{C}_{aE}$:

$$\underline{I}_R = \left(\underline{Y}_M + \underline{Y}_{aE} + \underline{Y}_{bE} + \underline{Y}_{cE} - \underline{Y}_{aE} - \underline{a}^2\underline{Y}_{bE} - \underline{a}\underline{Y}_{cE} \right)\underline{U}_q$$

und mit $\underline{Y}_M = \underline{G}_M - j\frac{1}{\omega L_M}$

sowie $\underline{Y}_{aE} + \underline{Y}_{bE} + \underline{Y}_{cE} = 3\underline{Y}_0 = 3(\underline{G}_0 + j\omega\underline{C}_0)$

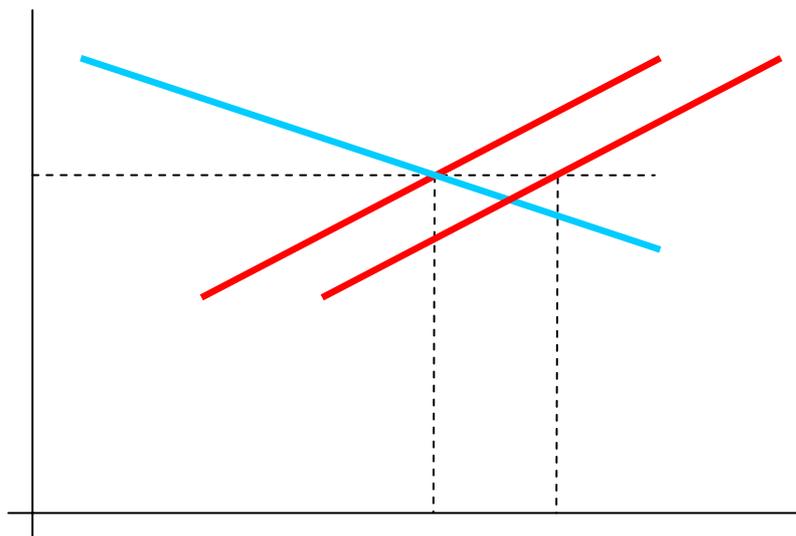
$$\underline{I}_R = -j\omega\underline{C}_0 \left(\frac{1}{\omega^2\underline{C}_0 3L_M} - 1 + j\frac{\underline{G}_M + 3\underline{G}_0}{\omega 3\underline{C}_0} + \frac{\underline{Y}_{aE} + \underline{a}^2\underline{Y}_{bE} + \underline{a}\underline{Y}_{cE}}{\omega 3\underline{C}_0} \right)\underline{U}_q$$

$$\underline{I}_R = \underline{I}_{CE}(v + jd + k)$$

Die kapazitive Unsymmetrie verursacht den zusätzlichen Anteil k \underline{I}_{CE} im Strom an der Erdschlußstelle. Zu beachten ist auch, daß die in \underline{I}_{CE} sowie in d bzw. v eingehenden Parameter \underline{G}_0 und \underline{C}_0 jetzt Mittelwerte der Leiter-Erde-Parameter sind:

$$\underline{G}_0 = \frac{1}{3}(\underline{G}_{aE} + \underline{G}_{bE} + \underline{G}_{cE})$$

$$\underline{C}_0 = \frac{1}{3}(\underline{C}_{aE} + \underline{C}_{bE} + \underline{C}_{cE})$$



Vorlesung Elektrische Energieversorgung II

Skript Netzregelung

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

Inhaltsverzeichnis

1	Übersicht über Arten und Aufgaben der Netzregelung	1
2	Aggregiertes Modell des Netzes für das Frequenzverhalten	3
3	Frequenz-Wirkleistungsregelung im Inselbetrieb	9
3.1	Inselbetrieb ohne Regelung	9
3.2	Frequenz-Wirkleistungsregelung im Inselbetrieb.....	10
3.2.1	Primärregelung.....	12
3.2.2	Sekundärregelung.....	16
3.2.3	Frequenzausgleichsvorgänge*	18
4	Verbundbetrieb	24
4.1	Aufgaben und Vorteile des Verbundbetriebes	24
4.2	Frequenz-Übergabeleistungs-Regelung.....	24
4.3	Dynamisches Verhalten des Verbundnetzes*	28
5	Bereitstellung der Primärregelleistung	32
6	Frequenzabhängiger Lastabwurf.....	35
7	Anhang: Herleitung des Winkelzentrums	36

Hinweis: Das Skript ersetzt nicht die Vorlesung und umgekehrt. Im Skript sind einige Ausführungen, insbesondere mathematische Ableitungen ausführlicher dargestellt, während in der Vorlesung mehr Wert auf das Verständnis gelegt wird.

1 Übersicht über Arten und Aufgaben der Netzregelung

Das Aufgabengebiet der Netzregelung wird üblicherweise unterteilt in die *Spannungs-Blindleistungs-* (oder *U-Q-*) Regelung und in die *Frequenz-Wirkleistungs-*(oder *f-P-*) Regelung. Diese Unterteilung entspricht den dominierenden Abhängigkeiten der Spannung von der Blindleistung und der Frequenz von der Wirkleistung im Hochspannungsübertragungsnetz. Die weitere Unterteilung der Aufgaben der Netzregelung ist in den Bildern 1.1 und 1.2 dargestellt. Danach unterteilen wir die *U-Q-* Regelung in die *Generator-* oder *Erregerregelung*, die *Transformatorregelung*, in die *Verstimmungsgradregelung* in Netzen mit Erdschlußkompensation sowie die Regelung von *Kompensatoren* (Kondensatoren, Drosselspulen). Die Schrägregelung der Transformatoren nimmt eine Sonderstellung ein, da sie sowohl den Blindleistungs- als auch den Wirkleistungsfluß eines Netzes beeinflusst. Die Verstimmungsgradregelung beruht auf der Abhängigkeit der Sternpunkt-Erde-Spannung des ungestörten Netzes vom Verstimmungsgrad (die Verlagerungsspannung hat bei $v = 0$ ein Maximum), so daß es über die Erfassung der Sternpunkt-Erde-Spannung möglich ist, die Verstimmung auf Null (oder einen geringen Wert) zu halten, womit bei Eintritt eines Erdschlusses die Bedingung für das selbsttätige Verlöschen des Lichtbogens erfüllt ist (s. Skript Sternpunktterdung).

Über die Regelung von Kompensationsmitteln ist man nicht nur in der Lage, die Spannungsverhältnisse zu verbessern. Durch geeignete Regelkonzepte können auch die niederfrequenten Schwingungen, zu denen die Netze neigen, gedämpft werden. Zu diesem Zweck beaufschlagt man auch die Spannungsregler der Generatoren mit polradwinkelabhängigen Zusatzsignalen. Die Einrichtungen zur Dämpfung der niederfrequenten Schwingungen, oder wie man auch sagt, der Netzpendelungen, werden allgemein als PSS (Power System Stabilizer) bezeichnet.

Zur Blindleistungskompensation und Spannungsregelung werden neuerdings auch thyristorgesteuerte Kondensatoren und Drosselspulen eingesetzt. Zur Steuerung des Leistungsflusses wurde der sog. universelle Lastflussregler (UPFC) auf der Basis leistungselektronischer Bauelemente entwickelt. Er wirkt wie ein längs-, quer- oder schrägeregelter Transformator. Die Geräte der Leistungselektronik zur Steuerung und Regelung des Netzes faßt man allgemein unter dem Begriff FACTS (Flexible Alternating Current Transmission System) zusammen. Zu den FACTS gehören auch die Hochspannungs-Gleichstromsysteme, da mit ihnen auch eine Leistungsflußsteuerung möglich ist.

Bei der Frequenz-Wirkleistungsregelung (Bild 1.2) muß man zwischen der reinen *Frequenzregelung* im Inselnetz und der *Frequenz-Übergabeleistungsregelung* im Verbundnetz unterscheiden. Der Begriff des Inselnetzes ist dabei so zu verstehen, daß das betrachtete Netz keine Verbindungen (Kuppelleitungen) zu anderen Netzen hat. Ein typisches Inselnetz war das von der BEWAG versorgte Westberliner Netz mit einer installierten Leistung von zuletzt 2500 MW. Als Folge der Teilung Deutschlands wurde das Westberliner Netz am 4. März 1952 für 40 Jahre zur „Strominsel“. Den elektrischen Zusammenschluß mehrerer (Insel-)Netze bezeichnet man als Netzverbund oder *Verbundnetz*. Die Partner eines Verbundnetzes sind in einer Organisation zusammengeschlossen, die alle mit dem Verbundbetrieb zusammenhängenden Aufgaben koordiniert. Die Frequenzregelung in einem Inselnetz ist immer zugleich eine Leistungsregelung, die die Aufgabe hat, die Erzeugerleistung der Verbraucherleistung bei Sollfrequenz anzupassen und die richtige Aufteilung der Regelleistung auf die unterschiedlichen Kraftwerksblöcke zu gewährleisten. Im Verbundbetrieb kommt als weitere Aufgabe die Einhaltung des vereinbarten und tariflich geregelten Leistungsaustausches zwischen den Verbundpartnern hinzu. Neben der Frequenz ist somit auch die Übergabeleistung zu regeln. Bei Störungen in einem Verbundnetz

kann es zum Auslösen der Kuppelleitungen zwischen den Netzen und zur Bildung von Inselnetzen kommen. Typische Inselnetze bilden bei Störungen im übergeordneten Netz mit anschließender Netztrennung auch Industriekraftwerke mit einem Teil der Verbraucher, die unbedingt weiter versorgt werden sollen, sowie das Kraftwerkseigenbedarfsnetz bei störungsbedingter Trennung des Generators vom Netz.

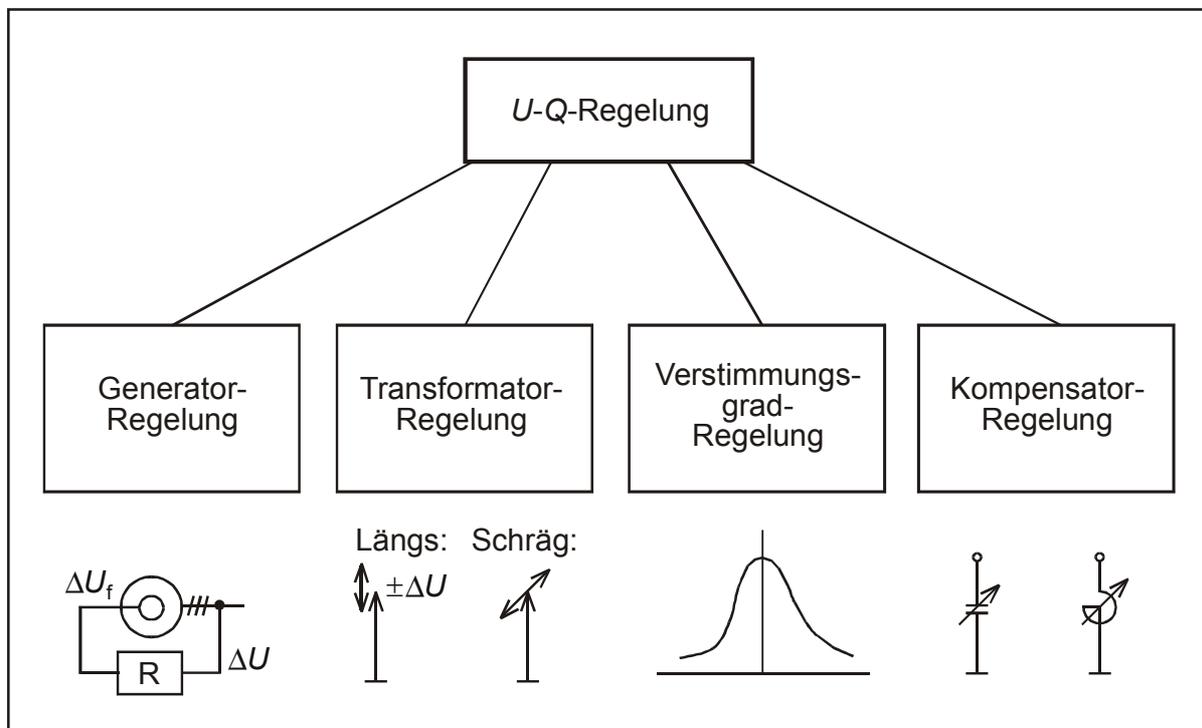


Bild 1.1: Spannungs-Blindleistungsregelung

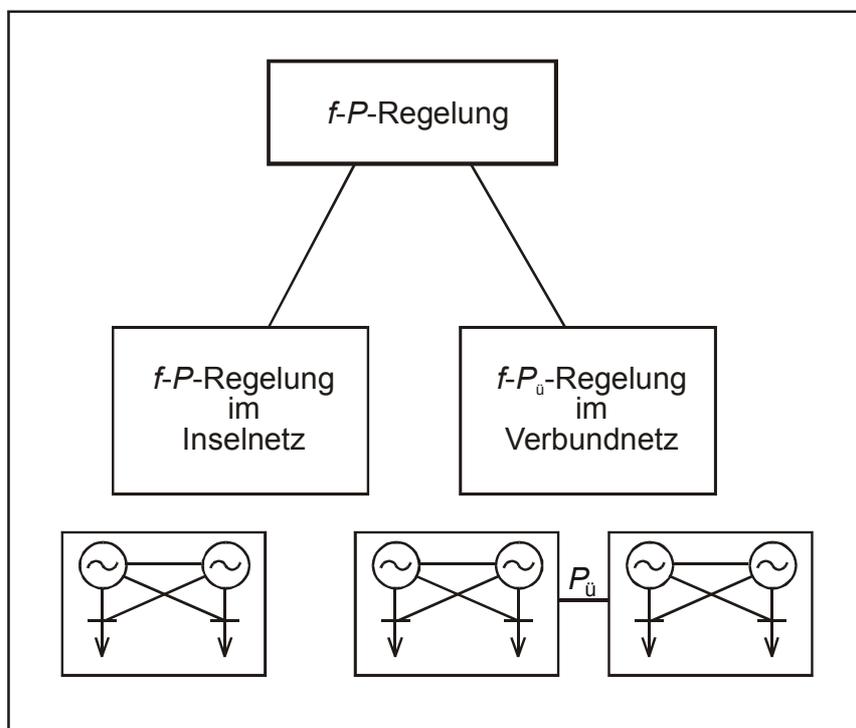


Bild 1.2: Frequenz-Wirkleistungsregelung

2 Aggregiertes Modell des Netzes für das Frequenzverhalten

Das *aggregierte* Modell eines Netzes ist ein zweckmäßig vereinfachtes, aber noch genügend genaues Modell für die Untersuchung der Ausgleichsvorgänge und der stationären Arbeitspunkte bei der Frequenz-Wirkleistungsregelung. Andere Bezeichnungen für das aggregierte Modell sind: *Bilanz-*, *Punkt-* oder *Mittelzeitmodell*. Der interessierende Zeitbereich bei der Frequenz-Wirkleistungsregelung ist der *Sekundenbereich*, der auch *Mittelzeitbereich* genannt wird. Unter *Kurzzeitbereich* wird gewöhnlich der ms-Bereich und unter *Langzeitbereich* der Minutenbereich verstanden. Für die Herleitung des aggregierten Modells wird angenommen, daß alle Generatoren des Netzes transient und statisch stabil sind. Es werden aber begrenzte gegenseitige Polrad-schwingungen zugelassen. Man nennt dieses Verhalten *kohärentes* Generatorverhalten. Den typischen Verlauf der Polradwinkel¹⁾ einer kohärenten Generatorgruppe bei einer Belastungsänderung zeigt Bild 2.1.

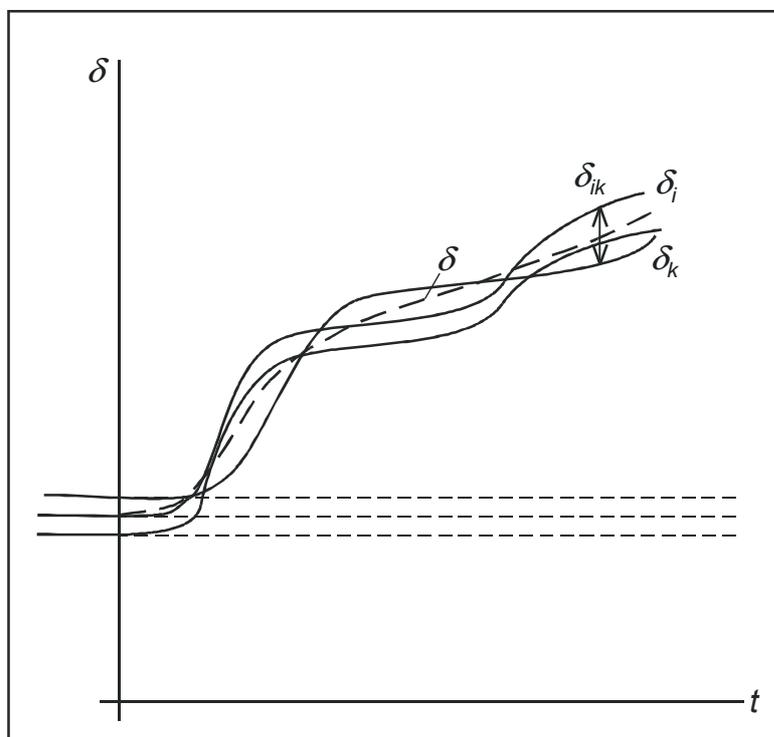


Bild 2.1: Kohärentes Generatorverhalten bei Laständerung in einem Netz

Die Laständerung oder Störleistung P_x kann durch das Zu- und/oder Abschalten von Lasten oder Generatoren oder ganz allgemein durch Abweichungen zwischen der momentanen Netzleistung und der gefahrenen Programmlast (Regelleistung) in der Tagesbelastungskurve verursacht sein (Bild 2.2).

Voraussetzung für kohärentes Generatorverhalten ist eine gute Kopplung der Generatoren untereinander. Eine Belastungsänderung P_x führt dann bis zum Eingriff der Regelung zu einer Beschleunigung oder Verzögerung der gesamten Generatorgruppe mit nur geringen gegenseitigen Winkelabweichungen. Im Unterschied dazu geht die durch Kurzschlüsse hervorgerufene Leistungsänderung bei einer Stabilitätsstörung immer mit Änderungen der Netzstruktur einher, die zur Schwächung der Kopplung und damit zum Auseinanderlaufen einzelner Generatoren führt (Bild 2.3).

¹⁾ Die Polradwinkel beziehen sich auf ein mit ω_0 rotierendes Bezugssystem

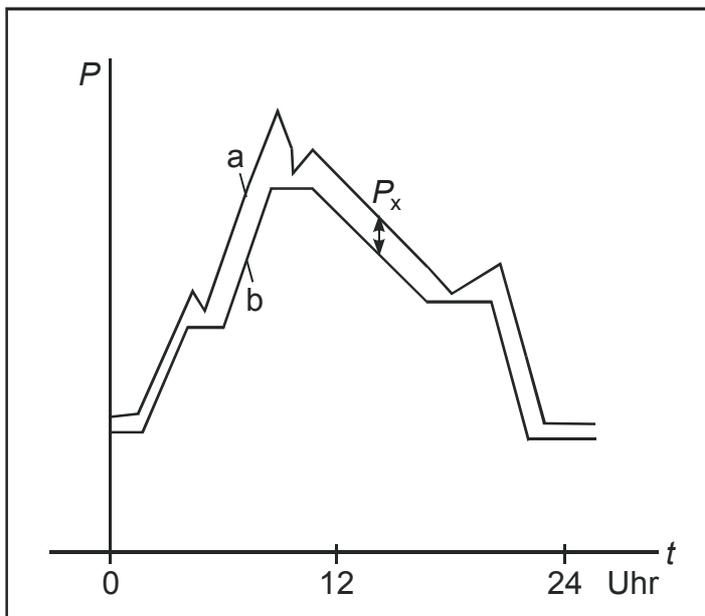


Bild 2.2: Tagesbelastungskurve mit Momentan-(a) und Programmlast (b)

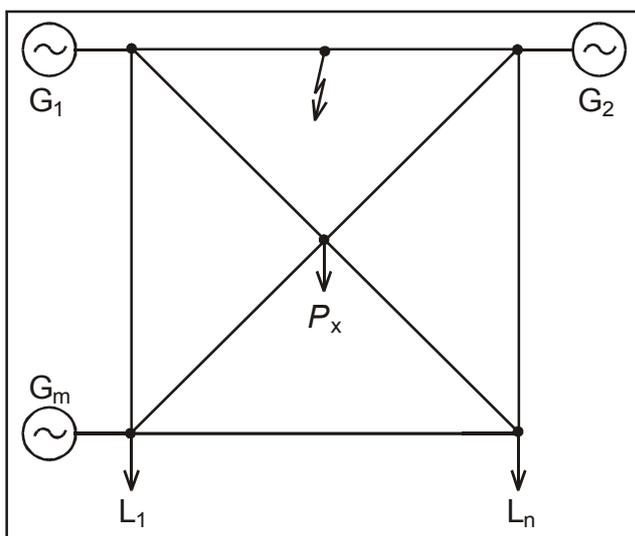


Bild 2.3: Zur Erklärung des kohärenten Generatorverhaltens

Die Annahme eines kohärenten Generatorverhaltens ermöglicht es, in den Bewegungsgleichungen der einzelnen Generatoren die Änderung der Winkelgeschwindigkeit durch die Änderung der mittleren Winkelgeschwindigkeit der Generatorgruppe zu ersetzen (s. Anhang). Die Bewegungsgleichung für den i -ten Generator nimmt mit $\Delta\dot{\omega}_i = \Delta\dot{\omega}$ die folgende Form an (s. Skript Stabilität²⁾):

$$T'_{mi} = \frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_0} = \frac{P_{Ti} - P_{Li}}{P_{rGi}} \tag{2.1}$$

wobei mit

$$T'_{mi} = \frac{J_i \Omega_0^2}{P_{rGi}} = \frac{S_{rGi}}{P_{rGi}} \cdot \frac{J_i \Omega_0^2}{S_{rGi}} = \frac{S_{rGi}}{P_{rGi}} T_{mi} \tag{2.2}$$

²⁾ Die an den Klemmen abgegebene Leistung wird hier mit P_L bezeichnet, weil das Symbol P_N später für die Netzleistung (Summe aus Regelleistung und frequenzabhängiger Lastanteil) benötigt wird.

die *elektromechanische Zeitkonstante* des i -ten Generators eingeführt wurde. Bei der Untersuchung der Frequenz-Wirkleistungsregelung ist es üblich, die Leistungen auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung auf die Generatorbemessungswirkleistung P_{rGi} , und nicht wie bei der transienten Stabilitätsuntersuchung, auf die Bemessungsscheinleistung S_{rGi} zu beziehen. Deshalb unterscheidet sich die elektromechanische Zeitkonstante T'_{mi} in Gl. (2.2) auch um den Faktor S_{rGi}/P_{rGi} von dem bei der Stabilitätsuntersuchung verwendeten Ausdruck T_{mi} .

Im nächsten Schritt stellen wir die Bewegungsgleichungen wie folgt um und addieren die Bewegungsgleichungen der m Generatoren eines Netzes:

$$P_{rGi} T'_{mi} \frac{\Delta \dot{\omega}}{\omega_0} = P_{Ti} - P_{Li} \quad (2.3)$$

$$\sum_{i=1}^m (P_{rGi} T'_{mi}) \frac{\Delta \dot{\omega}}{\omega_0} = \sum_{i=1}^m P_{Ti} - \sum_{i=1}^m P_{Li} \quad (2.4)$$

Die Leistungssummen auf der rechten Seite von Gl. (2.4) stellen die gesamte erzeugte Leistung (Turbinenleistung) und die gesamte an das Netz abgegebene Leistung (Netzlast) dar. Für sie führen wir Abkürzungen ein:

$$P_T = \sum P_{Ti}, \quad P_L = \sum P_{Li}$$

Auf der linken Seite von Gl. (2.4) bilden wir durch Erweitern mit der gesamten installierten Generatorleistung $P_G = \sum P_{rGi}$ eine Ersatzzeitkonstante aller rotierenden Massen im Netz.

$$T_G = \frac{\sum (P_{rGi} T'_{mi})}{\sum P_{rGi}} = \frac{\sum (P_{rGi} T'_{mi})}{P_G} \quad (2.5)$$

Die Änderung der Winkelgeschwindigkeit der kohärenten Generatorgruppe bestimmt die Frequenzänderung des Netzes, denn es gilt:

$$\frac{\Delta \dot{\omega}}{\omega_0} = \frac{2\pi \Delta \dot{f}}{2\pi f_0} = \frac{\Delta \dot{f}}{f_0} \quad (2.6)$$

Mit Gl. (2.6) und

$$M_G = P_G T_G = \sum (P_{rGi} T'_{mi}) \quad (2.7)$$

erhalten wir schließlich eine Differentialgleichung 1. Ordnung für das Frequenzverhalten eines Netzes:

$$\boxed{M_G \frac{\Delta \dot{f}}{f_0} = P_T - P_L} \quad (2.8)$$

Wie man an Gl. (2.7) sieht, gehen die einzelnen elektromechanischen Zeitkonstanten der Generatoren entsprechend ihrer Leistung P_{TGi} in T_G ein. Enthält das Netz nur gleiche Generatoren bzw. Generatorblöcke, so wird $T_G = T_{mi}'$.

Die Gl. (2.8) ist das *aggregierte Modell* des Netzes. Sie beschreibt das Frequenzverhalten in Abhängigkeit von der Differenz aus Erzeuger- und Verbraucherleistung. Das aggregierte Modell setzt also im Netz überall gleiche Frequenz voraus. Die Bilder 2.4, 2.5 und 2.6 veranschaulichen das Modell. Sämtliche rotierenden Massen sind in einem resultierenden Trägheitsmoment J_{ers} bzw. der Zeitkonstante T_G konzentriert. Diese Ersatzmasse rotiert mit ω . An der Welle greifen die gesamte Turbinenleistung P_T und beschleunigend und die gesamte Netzleistung P_L verzögernd an (Bild 2.4).

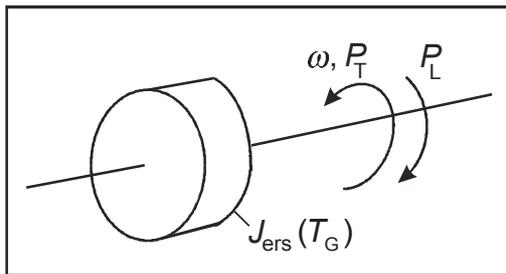


Bild 2.4: Veranschaulichung des aggregierten Modells durch eine rotierende Ersatzmasse

Die Struktur (Topologie) des Netzes tritt im aggregierten Modell nicht mehr in Erscheinung. Das Netz ist auf einen einzigen Ersatz- oder *Bilanz-Knoten*, in den alle Generatoren einspeisen und von dem die Lasten gespeist werden, zusammengeschrumpft (Bild 2.5), woraus sich die Bezeichnungen Punkt- oder Bilanzmodell ableiten.

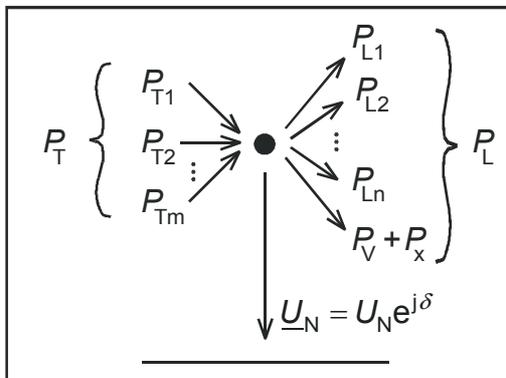


Bild 2.5: Veranschaulichung des aggregierten Modells durch einen Bilanzknoten

Die Netzverluste P_V und die Störleistung P_x werden der Netzlast zugeordnet. Im Bild 2.6 ist das gesamte Netz durch einen resultierenden Kraftwerksblock und ein Punktnetz dargestellt.

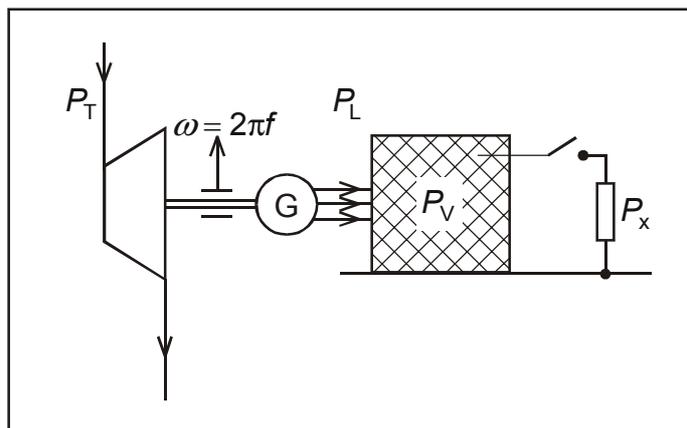


Bild 2.6: Aggregiertes Netzmodell mit Ersatz-Kraftwerk und Ersatz-Netz

Für die Untersuchung der Regelvorgänge ist es üblich, nur die Abweichungen von einem Arbeitspunkt zu betrachten. Dazu werden die Turbinenleistung und Netzlast in Gl. (2.8) in einen zum Arbeitspunkt gehörenden Anteil (Zusatzindex 0) und die Abweichung (Δ) zerlegt: $P_T = P_{T0} + \Delta P_T$ und $P_L = P_{L0} + \Delta P_L$. Die stationären Anteile P_{T0} und P_{L0} heben sich gegenseitig auf, so daß auf der rechten Seite von Gl. (2.8) nur noch die Änderungen verbleiben.

Die Änderung ΔP_T rührt vom Reglereingriff her. Sie ist im unregulierten Fall Null. Die Änderung ΔP_L setzt sich aus der Frequenzabhängigkeit der Netzlasten und der Störleistung P_x zusammen:

$$\Delta P_L = \Delta P_L(f, \dot{f}) + P_x \quad (2.9)$$

Man unterscheidet bei der Frequenzabhängigkeit der Netzlasten zwischen einem statischen und dynamischen Anteil. Der *dynamische* Anteil berücksichtigt die rotierenden Massen der Motoren:

$$\Delta P_{L\text{dyn}} = P_M T_M \frac{\Delta \dot{f}}{f_0} \quad (2.10)$$

wobei P_M und T_M die gesamte Motorleistung und die Ersatzzeitkonstante aller Motoren sind. Sie werden analog zu P_G und T_G berechnet.

In der Nähe der Sollfrequenz f_0 wird der *statische* Anteil der Netzlast durch einen linearen Ansatz approximiert:

$$\Delta P_{L\text{stat}} = k_L \Delta f \quad (2.11)$$

Die Größe k_L in Gl. (2.11) ist die *Last-Leistungszahl*. Die Bestimmung der Frequenzabhängigkeit der Netzlast kann praktisch nur durch Messungen erfolgen, indem man im Netz eine Frequenzänderung durch Zu- oder Abschalten von Lasten bei blockierter Generatorregelung verursacht. Im eingeschwungenen Zustand erhält man aus der gemessenen Leistungs- und Frequenzänderung die Last-Leistungszahl wie folgt. Sie wird in MW pro Hz angegeben.

$$k_L = \left(\frac{\partial P_{L\text{stat}}}{\partial f} \right)_{\text{AP}} \approx \left(\frac{P_{L\text{stat}}}{\Delta f} \right)_{\text{AP}} \quad (2.12)$$

Bei Bezug der Leistungsänderung auf P_{L0} und der Frequenzänderung auf f_0 erhält man die *bezogene Last-Leistungszahl*, deren Reziprokwert die *Netzstatik* s_L ist:

$$k'_L = k_L \frac{f_0}{P_{L0}} = \frac{\Delta P_L}{P_{L0}} \cdot \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\Delta P'_L}{\Delta f'} = \frac{1}{s_L} \tag{2.13}$$

Die Netzstatik liegt in der Größenordnung von 2 p.u. bzw. 200 %. Mit zunehmendem Anteil der drehzahlgeregelten Antriebe an der Netzlast wird s_L größer bzw. k_L kleiner. Aus den Gln. (2.9) und (2.11) ergibt sich bei Auflösung nach der Frequenzänderung die sog. *Lastkennlinie* des Netzes für den eingeschwungenen Zustand ($\Delta \dot{f} = 0$):

$$\Delta f = \frac{1}{k_L} (\Delta P_L - P_x) \tag{2.14}$$

Die Lastkennlinien (LKL) sind in Bild 2.7 für $P_x = 0$ und $P_x > 0$ dargestellt. Ihr Anstieg beträgt $1/k_L$ bzw. s_L . Eine positive Laständerung verschiebt die LKL parallel zu höheren Leistungswerten.

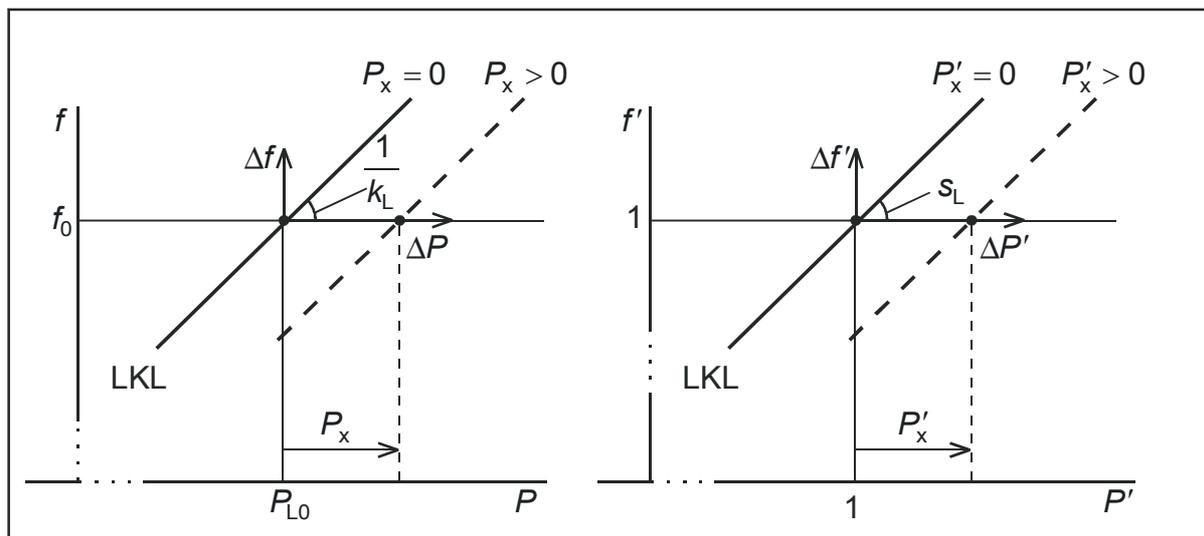


Bild 2.7: Statische Lastkennlinien des Netzes a) nach Gl. (2.15) b) in bezogener Form

Nach Einsetzen der Leistungsänderungen aus den Gln. (2.10) und (2.11) in Gl. (2.8) erhält man für die Frequenzänderung des Netzes schließlich:

$$M_N \frac{\Delta \dot{f}}{f_0} = \Delta P_T - k_L \Delta f - P_x \tag{2.15}$$

oder in auf P_G bezogener Form:

$$T_N \Delta \dot{f}' = \Delta P'_T - k'_L \Delta \dot{f}' - P'_x \tag{2.16}$$

mit $T_N = M_N / P_G$. In der resultierenden Trägheitskonstante M_N sind die Schwungmomente der Generatoren und Motoren zusammengefasst:

$$M_N = T_G P_G + T_M P_M \tag{2.17}$$

3 Frequenz-Wirkleistungsregelung im Inselbetrieb

Um die Aufgabe der Frequenz-Wirkleistungsregelung deutlich zu machen, soll zunächst der Fall *ohne* Regelung betrachtet werden.

3.1 Inselbetrieb ohne Regelung

Ohne Regelung bleibt die Turbinenleistung konstant ($\Delta P_T = 0$). Wir wollen zunächst nur den eingeschwungenen Zustand betrachten, den das Netz infolge einer sprungförmigen Laständerung P_x nach dem Abklingen des Frequenzausgleichsvorganges erreicht. Den Frequenzausgleichsvorgang werden wir später diskutieren (Abschnitt 3.2.3). Für die Untersuchung des eingeschwungenen Zustandes ($\dot{\Delta f} = 0$) genügt die Betrachtung der rechten Seite von Gl. (2.15). Wir erhalten für $P_x > 0$ und $\Delta P_T = 0$ mit dem Index oR für „ohne Regelung“:

$$0 = -k_L \Delta f_{oR} - P_x \tag{3.1}$$

und folglich für die sich einstellende Frequenzabweichung ohne Regelung:

$$\Delta f_{oR} = -\frac{P_x}{k_L} \tag{3.2}$$

Maßgebend für die Frequenzabweichung ist also der Reziprokwert der Leistungszahl der Netzlasten. Auf der Gl. (3.2) beruht auch die bereits in Kapitel 2 erwähnte meßtechnische Bestimmung von k_L .

Im Frequenz-Leistungsdigramm (Bild 3.1) ist die Kraftwerkskennlinie (KKL) eine Senkrechte bei $P_T = P_{T0}$. Für $P_x = 0$ schneidet die Lastkennlinie (LKL), gegeben durch Gl. (2.14), die KKL im Punkt 0. Eine Belastungsänderung $P_x > 0$ bedeutet eine Parallelverschiebung der LKL aus dem Punkt 0 nach rechts in den Punkt 1. Der neue Arbeitspunkt stellt sich im Schnittpunkt der LKL mit der KKL (Punkt 2) bei der Frequenzabweichung Δf_{oR} ein.

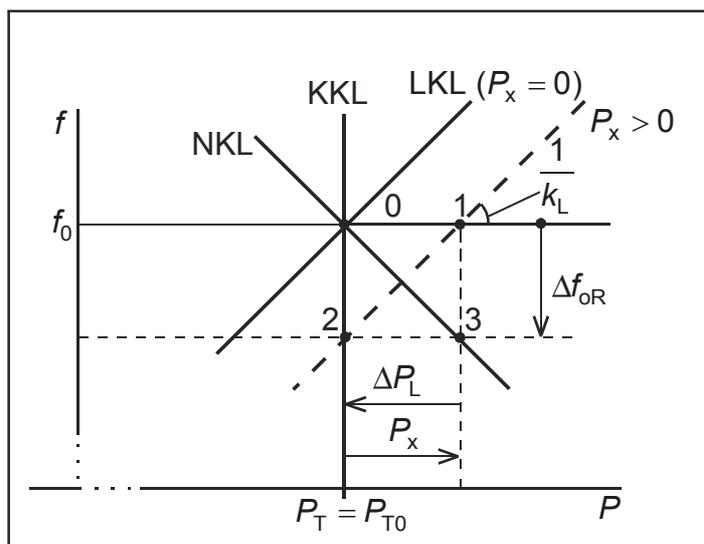


Bild 3.1: Frequenz-Leistungskennlinien für den unregulierten Fall.

Die in das Bild 3.1 ebenfalls eingetragene Netzkennlinie (NKL) ergibt sich aus Gl. (3.2). Sie gibt die Frequenzabweichung als Funktion von P_x an, während die beiden anderen Kennlinien den Anteil der Kraftwerke und der Frequenzabhängigkeit der Netzlasten beschreiben. Im vorliegenden Fall ohne Regelung wird die gesamte Störleistung durch die mit dem Frequenzrückgang freigesetzte Netzlast aufgebracht, denn aus Gl. (2.11) folgt mit Gl. (3.2) und $\Delta P_L = \Delta P_{Lstat}$:

$$\Delta P_L = k_L \Delta f_{oR} = -P_x \quad (3.3)$$

Der Frequenzeinbruch Δf_{oR} ist umso kleiner, desto flacher die NKL, desto größer also die Leistungszahl k_L ist. Die Kompensation der Störleistung durch den frequenzabhängigen Rückgang der Verbraucherleistung nennt man *Selbstregeleffekt* des Netzes. Er reicht jedoch nicht aus, um die Frequenz bei Laständerungen in einem zumutbaren Band zu halten. Diese Aufgabe muß die Frequenz-Wirkleistungsregelung übernehmen.

3.2 Frequenz-Wirkleistungsregelung im Inselbetrieb

Zur Vermeidung größerer Frequenzänderungen sind die Turbinen der Generatoren mit Reglern ausgerüstet. Die Turbinenregelung in Wärmekraftwerken ist kompliziert, weil neben der Frequenzregelung auch eine Vielzahl von weiteren Größen, wie beispielsweise die Temperatur und der Kesseldruck überwacht und ggf. begrenzt werden müssen. Außerdem wird der Regelvorgang zeitlich in zwei nacheinander ablaufende Vorgänge, die sog. *Primärregelung* und *Sekundärregelung*, zu denen auch separate Regeleinrichtungen gehören, aufgeteilt. Durch den zeitlich getrennten Ablauf der Primär- und Sekundärregelung lassen sich diese auch unabhängig voneinander betrachten, indem bei der Untersuchung der Primärregelung noch kein Eingreifen der Sekundärregelung angenommen wird und für die Untersuchung der Sekundärregelung vom eingeschwungenen Zustand der Primärregelung ausgegangen werden kann. Das prinzipielle Wirkungsschema einer Turbinenregelung zeigt Bild 3.2.

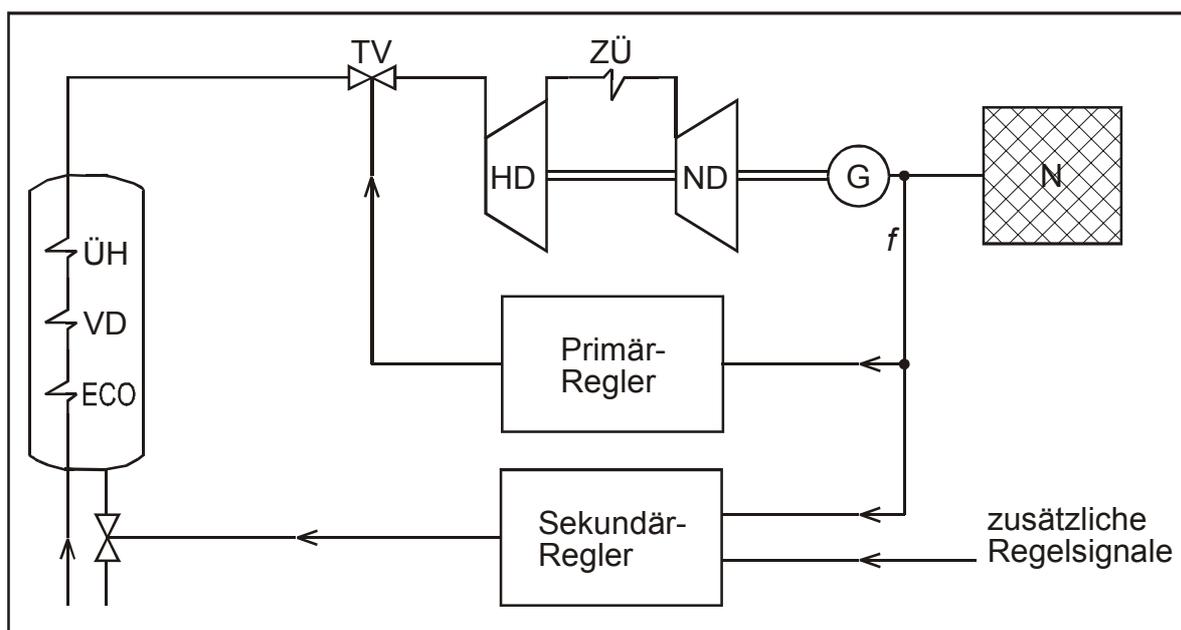


Bild 3.2: Prinzipschema der Turbinenregelung eines Wärmekraftwerkes

Der Primärregler kann über eine Verstellung des Turbineneinlaßventils TV wesentlich schneller Regelleistung (die Primärregelleistung) freisetzen als der Sekundärregler, der über die Brennstoffzufuhr eingreift, womit größere Totzeiten und die (gewünschte) zeitliche Entkopplung von der Primärregelung verbunden sind.

Im Netz sind möglichst viele Kraftwerke an der Primärregelung beteiligt (sog. Regelkraftwerke), um Laständerung wirksam entgegen zu steuern. Voraussetzung dafür, daß genügend schnell Primärregelleistung freigesetzt werden kann, ist bei Wärmekraftwerken eine Fahrweise mit angedrosselten Turbinenventilen, so daß durch Öffnen der Ventile im Kessel gespeicherte Dampfenergie freigesetzt werden kann. Diese Fahrweise heißt *Festdruckbetrieb* im Gegensatz zum sog. *Gleitdruckbetrieb*, bei dem die Ventile stets ganz geöffnet sind.

Kraftwerke, die im Gleitdruckbetrieb gefahren werden, können keinen wesentlichen Beitrag zur Primärregelung leisten (Bild 3.3). Der Gleitdruckbetrieb ist aber wirtschaftlicher als der Festdruckbetrieb. Durch die Androsselung der Turbinenventile wird zum einen die verfügbare Kraftwerksleistung nicht ständig voll ausgenutzt, zum anderen ist der Wirkungsgrad des Dampfkreislaufes im Teillastbetrieb nicht optimal. Grundlastkraftwerke werden deshalb im Gleitdruckbetrieb gefahren.

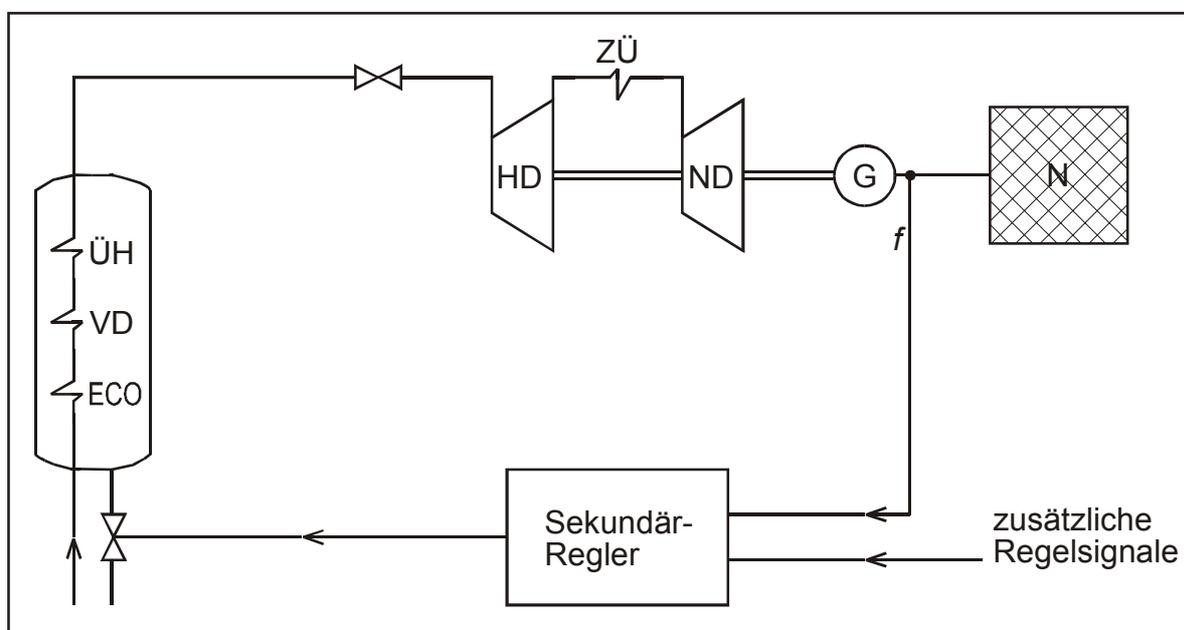


Bild 3.3: Vereinfachte Regelstruktur für Gleitdruckbetrieb

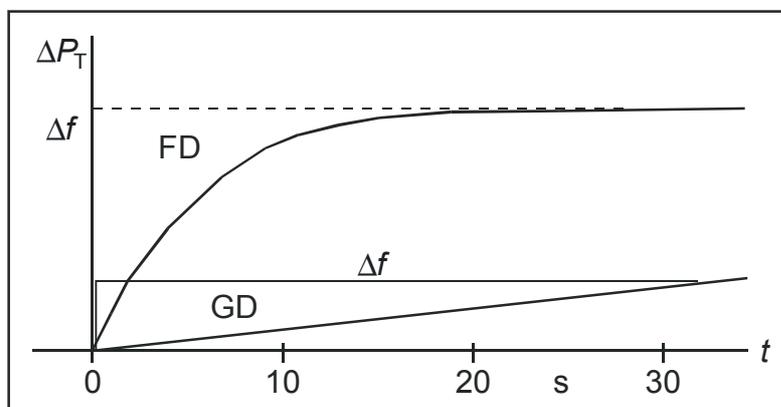


Bild 3.4: Übergangsfunktionen der Turbinenleistung für einen Festdruck (FD)- und einen Gleitdruck (GD)-Block

In Bild 3.4 sind die prinzipiellen Verläufe der Übergangsfunktionen der Turbinenleistung für einen Festdruck- und einen Gleitdruckblock bei einem Sollwertsprung der Frequenz dargestellt.

Im folgenden wollen wir von der Möglichkeit gebrauch machen, die Primär- und Sekundärregelung aufgrund ihrer zeitlichen Entkopplung getrennt voneinander zu betrachten.

3.2.1 Primärregelung

Für eine definierte Aufteilung der Primärregelleistung auf die Regelblöcke müssen, wie wir noch sehen werden, die Primärregler Proportionalverhalten aufweisen. Der einfachste Ausdruck für die Übertragungsfunktion eines Primärreglers, hier des i -ten Reglers, ist ein P-Glied mit Verzögerung 1. Ordnung:

$$F_{P_i}(p) = \frac{\Delta P_{P_i}(p)}{\Delta f(p)} = -\frac{k_{P_i}}{1 + pT_{P_i}} \tag{3.4}$$

Im eingeschwungenen Zustand wird somit:

$$\Delta P_{P_i} = -k_{P_i} \Delta f_p \tag{3.5}$$

wobei Δf_p die bleibende Regelabweichung der Primärregelung ist. Das Blockschaltbild der Primärregelung mit m -Regelblöcken zeigt Bild 3.5.

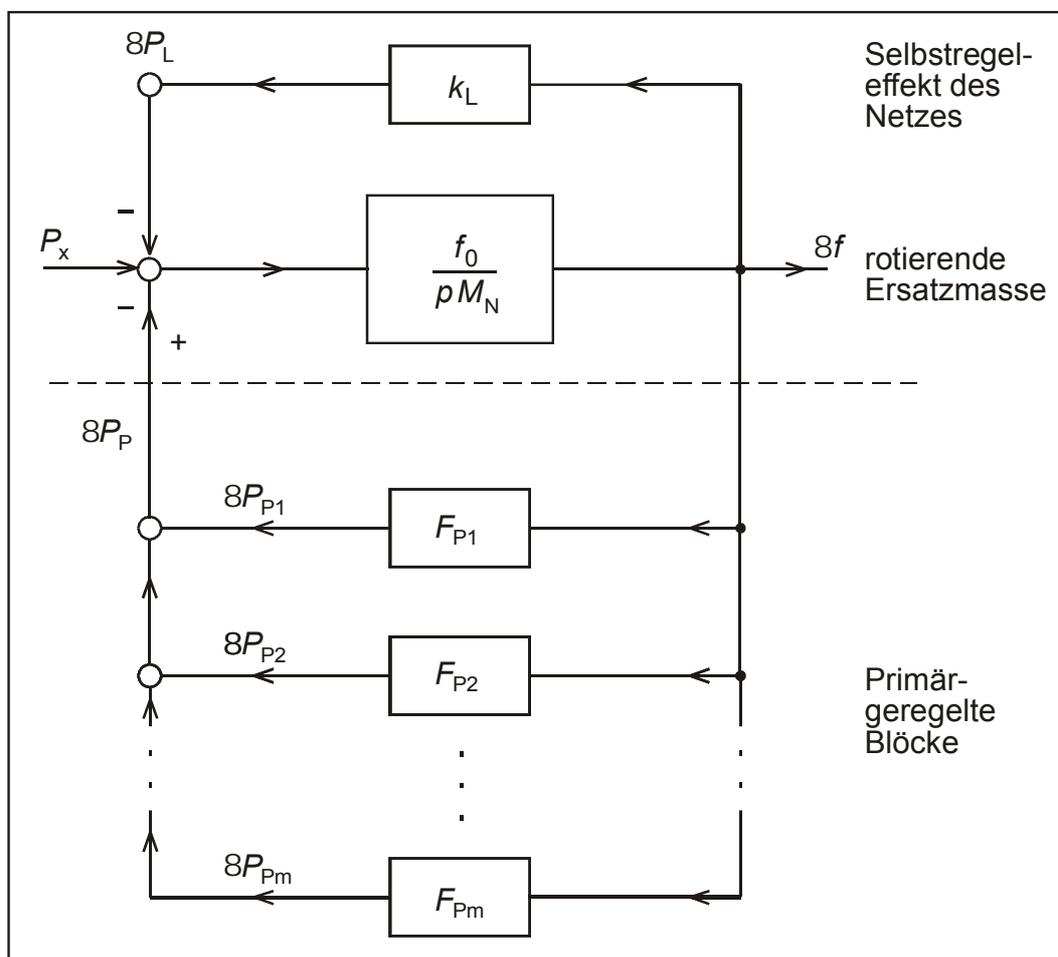


Bild 3.5: Blockschaltbild der Primärregelung

Im Zentrum liegt ein der Gl. (2.15) entsprechender Integrator. Die einzelnen Primärregler bilden Rückkopplungen, ebenso wie der statische Anteil der Frequenzabhängigkeit der Netzlast. Die Turbinenleistungsänderungen der einzelnen Regelblöcke addieren sich zur gesamten Primärregelleistung ΔP_p .

Im eingeschwungenen Zustand gilt:

$$\Delta P_p = -(k_{p1} + k_{p2} + \dots + k_{pm}) \Delta f_p = -k_p \Delta f_p \quad (3.6)$$

Mit k_p wurde in Gl. (3.6) die *Reglerleistungszahl* des Netzes eingeführt. Im Bilanzmodell ist es gleichgültig, wie die Primärregelleistung aufgebracht wird. Es erscheint nur die resultierende Wirkung aller primäreregelten Blöcke. Die Verstärkungen oder Reglerleistungszahlen der einzelnen Blöcke werden gewöhnlich in bezogener Form angegeben, wobei

$$k_{pi}' = k_{pi} \frac{f_0}{P_{rGi}}$$

die bezogene *Block-Reglerleistungszahl* und

$$s_{pi} = \frac{1}{k_{pi}'}$$

die *Reglerstatik* des i -ten Blockes ist. Die Größenordnung von s_p beträgt 4...5 %.

Aus den Reglerstatiken der einzelnen Blöcke berechnet sich die Reglerleistungszahl des Netzes wie folgt:

$$k_p = \frac{1}{f_0} \left(\frac{P_{rG1}}{s_{p1}} + \frac{P_{rG2}}{s_{p2}} + \dots + \frac{P_{rGm}}{s_{pm}} \right) \quad (3.7)$$

Wird die resultierende Statik der Primärregelung angegeben, so ist zu beachten, daß diese gewöhnlich auf die gesamte Generatorleistung P_G des Netzes und f_0 bezogen ist. Da nie alle Generatorblöcke an der Primärregelung beteiligt sind, ergibt sich so eine größere Reglerstatik für das Netz als für die einzelnen Blöcke. Typische Werte für ein Netz liegen zwischen 12 und 18 %.

Für den eingeschwungenen Zustand der Primärregelung ergibt sich aus der rechten Seite der Gl. (2.15) mit $\Delta P_T = \Delta P_p = -k_p \Delta f_p$ nach Gl. (3.6):

$$0 = -k_p \Delta f_p - k_L \Delta f_p - P_x \quad (3.8)$$

Die Auflösung nach der Frequenzänderung ergibt wieder die Netzkennlinie (NKL):

$$\Delta f_p = -\frac{P_x}{k_p + k_L} = -\frac{P_x}{k_N} \quad (3.9)$$

wobei

$$k_N = k_R + k_L \quad (3.10)$$

die *Leistungszahl* des Netzes ist. Sie setzt sich aus Regler- und Last-Leistungszahl zusammen und bestimmt die bleibende Frequenzabweichung nach einer Störung. Zur Veranschaulichung der Verhältnisse zeichnen wir wieder die KKL, LKL und NKL im f - P -Diagramm (Bild 3.6).

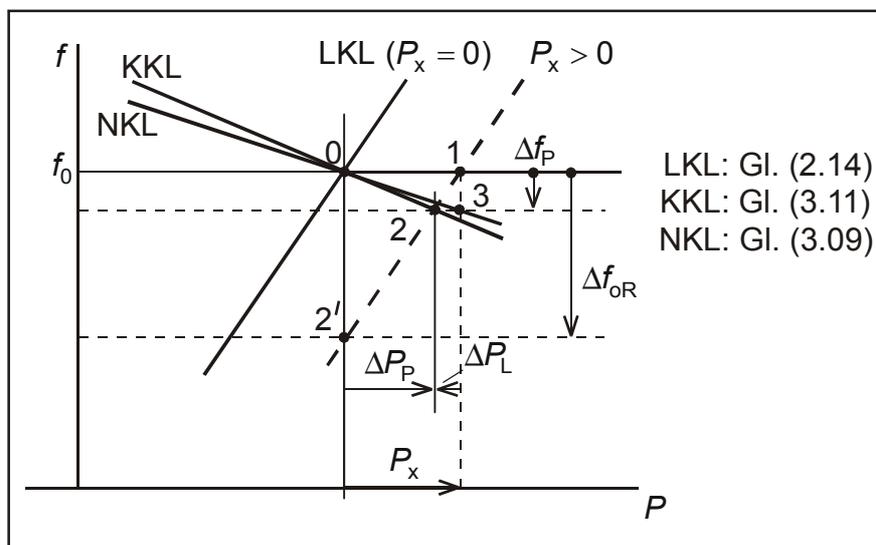


Bild 3.6: Frequenz-Leistungskennlinien für die Primärregelung

An den LKL ändert sich gegenüber Bild 3.1 nichts. Die KKL ergibt sich aus Gl. (3.6):

$$\Delta f_P = -\frac{1}{k_P} \Delta P_P \tag{3.11}$$

Ihre Neigung ist umso geringer, je größer die Reglerleistungszahl des Netzes (je kleiner der resultierende Reglerstatik) ist. Zur Erzielung einer möglichst flachen KKL müssen deshalb möglichst viele Generatorblöcke an der Primärregelung beteiligt sein.

Die Arbeitspunkte werden wieder durch die Schnittpunkte der KKL mit der LKL festgelegt. Für $P_x = 0$ schneiden sich die KKL und die LKL jetzt im Punkt 2 (anstatt im Punkt 2' für den Fall ohne Regelung). Die Netzkennlinie verläuft durch die Punkte 0 und 3. Die Neigungen der KKL und LKL bestimmen die Anteile der Primärregelleistung ΔP_P und des Selbstregelleffektes des Netzes ΔP_L an der Deckung der Störleistung P_x . Die flachere Kennlinie übernimmt den größeren Anteil an P_x (im unregulierten Fall hat die KKL eine Neigung von 90° und trägt hat deshalb nicht zur Deckung von P_x bei).

Mit der bleibenden Frequenzabweichung der Primärregelung aus Gl. (3.9) folgt für die Aufteilung:

$$\Delta P_P = -k_P \Delta f_P = \frac{k_P}{k_P + k_L} P_x = \frac{k_P}{k_N} P_x$$

$$\Delta P_L = k_L \Delta f_P = -\frac{k_L}{k_P + k_L} P_x = -\frac{k_L}{k_N} P_x$$

Die Anteile stehen im Verhältnis der Leistungszahlen:

$$\frac{\Delta P_P}{\Delta P_L} = -\frac{k_P}{k_L}$$

Das Verhältnis von Δf_P zu Δf_{0R} ist der *Regelfaktor*:

$$R = \frac{\Delta f_P}{\Delta f_{0R}} = \frac{k_L}{k_L + k_P} = \frac{1}{1 + \frac{k_P}{k_L}} \approx \frac{k_L}{k_P} \tag{3.12}$$

Die Näherung gilt für $1/k_L \ll 1/k_P$. Der Regelfaktor erlaubt eine Abschätzung der erforderlichen Reglerleistungszahl bei einer vorgegebenen zulässigen Frequenzabweichung.

Es soll nun noch untersucht werden, wie sich eine Laständerung P_x auf die einzelnen Regelkraftwerke aufteilt. Dazu betrachten wir ein Netz mit drei Kraftwerksblöcken, deren Reglerleistungszahlen folgende Relationen aufweisen sollen:

$$k_{P1} = 0 \quad (\text{ungeregelt})$$

$$k_{P2} < k_{P3} \neq 0$$

Die entsprechenden Generatorkennlinien (GKL) sind in Bild 3.7 eingetragen.

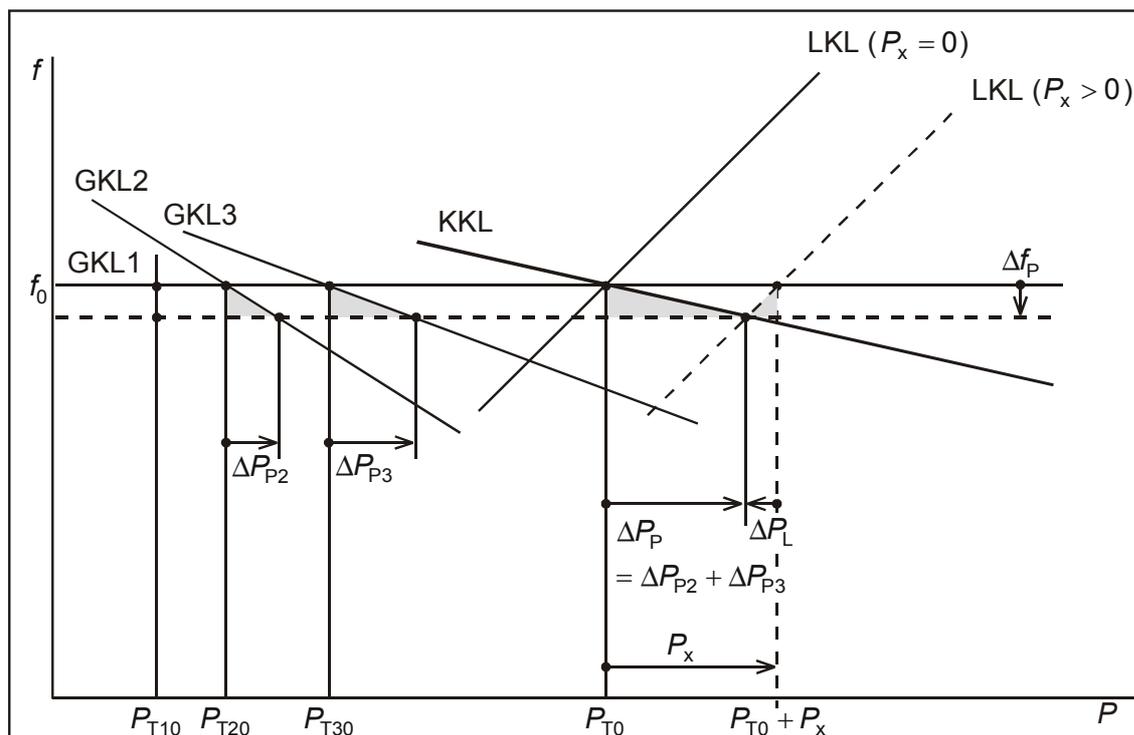


Bild 3.7: Aufteilung der Primärregelleistung auf die einzelnen Kraftwerksblöcke

Die resultierende Kraftwerkskennlinie (KKL) ergibt sich durch Addition der Leistungen der einzelnen Generatoren bei gleicher Frequenz gemäß Gl. (3.6). (Zur Konstruktion addiert man bei zwei beliebigen Frequenzwerten die Leistungen). Der Schnittpunkt der KKL mit der LKL für $P_x > 0$ legt die bleibende Frequenzabweichung der Primärregelung fest. Für die Lastaufteilung sind die Neigungen der GKL maßgebend:

$$\Delta P_{P1} = -k_{P1} \Delta f_P = 0 \quad \text{wegen } k_{P1} = 0$$

$$\Delta P_{P2} = -k_{P2} \Delta f_P$$

$$\Delta P_{P3} = -k_{P3} \Delta f_P$$

und mit Δf_P nach Gl. (3.9):

$$\Delta P_{P2} = \frac{k_{P2}}{k_P + k_L} P_x = \frac{k_{P2}}{k_N} P_x$$

$$\Delta P_{P3} = \frac{k_{P3}}{k_P + k_L} P_x = \frac{k_{P3}}{k_N} P_x$$

Die Aufteilung der Primärregelleistung erfolgt im Verhältnis der Reglerzahlen der geregelten Kraftwerksblöcke. Der Beitrag des i -ten Blockes beträgt allgemein:

$$\Delta P_{Pi} = \frac{k_{Pi}}{k_N} P_x = \frac{k_{Pi}}{k_P} \Delta P_P$$

Die Maschine mit der flachsten Kennlinie (größten Reglerleistungszahl, kleinsten Reglerstatik) übernimmt den größten Anteil. Ein Block mit einem I-Regler (integralem Regler) würde, falls er dazu in der Lage wäre, die gesamte Regelleistung übernehmen. Für einen Parallelbetrieb mehrerer Regelkraftwerke müssen deshalb die Primärregler proportionales Verhalten aufweisen.

3.2.2 Sekundärregelung

Die Sekundärregelung greift bei Wärmekraftwerken über die Brennstoffzufuhr ein (s. Bild 3.2) und hat die Aufgabe, die von der Primärregelung verbliebene Frequenzabweichung Δf_P vollständig auszuregulieren. Dazu ist integrales Regelverhalten notwendig. Durch die vorhandenen Verzögerungs- und Totzeiten des Kessels sowie eine entsprechend groß gewählte Integrationszeitkonstante T_I wird die Sekundärregelung, obwohl sie gleichzeitig mit der Primärregelung einsetzt, praktisch erst wirksam, wenn der Primärregelvorgang bereits abgeschlossen ist. Wir können für die folgenden Betrachtungen also stets vom eingeschwungenen Zustand der Primärregelung, wie wir ihn in Abschnitt 3.2.1 beschrieben haben, ausgehen.

Aus der Netzkennlinie, Gl. (3.9), ist ersichtlich, daß der Frequenzeinbruch bei einer Belastungsänderung $P_x > 0$ umso geringer ist, desto flacher die Netzkennlinie ist, d. h. desto mehr Kraftwerke an der Primärregelung beteiligt sind. Die primärgeregelten Kraftwerke decken zunächst zusammen mit dem Selbstregeleffekt des Netzes die Störleistung. Mit dem Einsetzen der Sekundärregelung übernehmen die sekundärgeregelten Kraftwerke die Primärregelleistung. Am Ende der Sekundärregelung decken die sekundärgeregelten Kraftwerke die Störleistung P_x allein. Deshalb werden zur Sekundärregelung nur die auf Dauer wirtschaftlich arbeitenden Mittel- und Grundlastkraftwerke herangezogen.

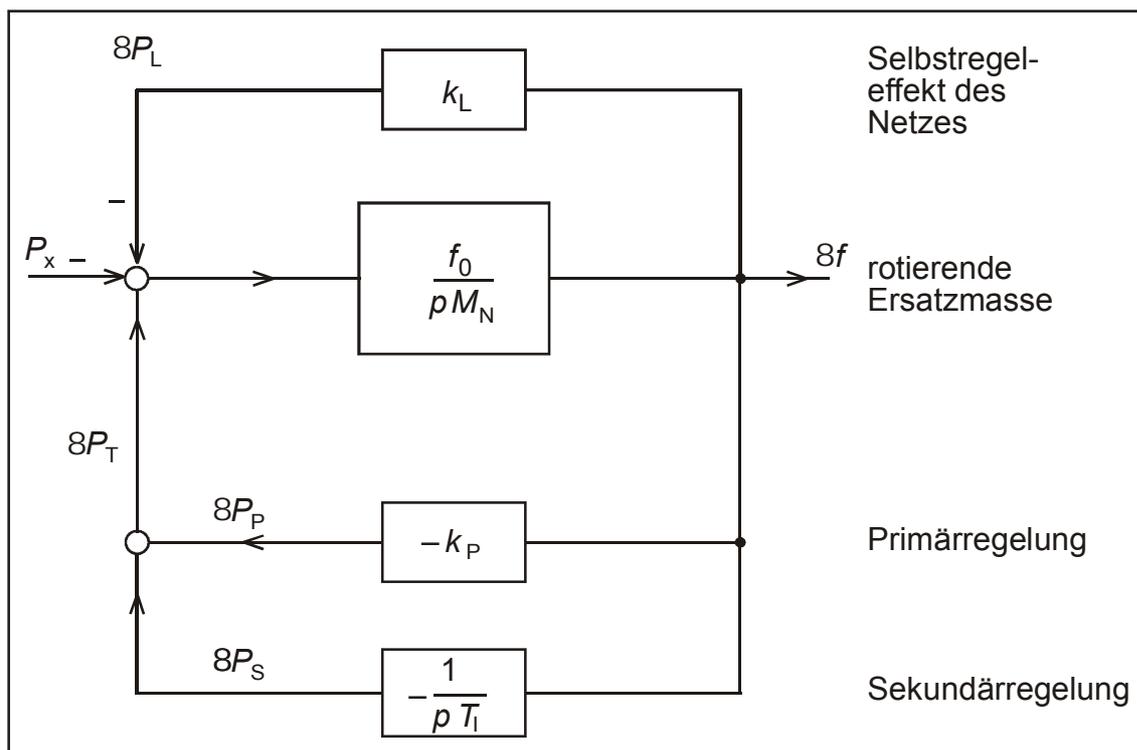


Bild 3.8: Blockschaltbild des primär- und sekundärgeregelten Netzes (eingeschwungener Zustand der Primärregelung vorausgesetzt)

Im Blockschaltbild (Bild 3.8) können wir die Sekundärregelung durch einen einzigen Ersatzregler, der die Sekundärregelleistung ΔP_S freisetzt, berücksichtigen. Die m -Primärregler aus Bild 2.12 sind in Bild 3.8 ebenfalls zu einem Ersatzprimärregler mit der Leistungszahl k_P (eingeschwungener Zustand) zusammengefaßt.

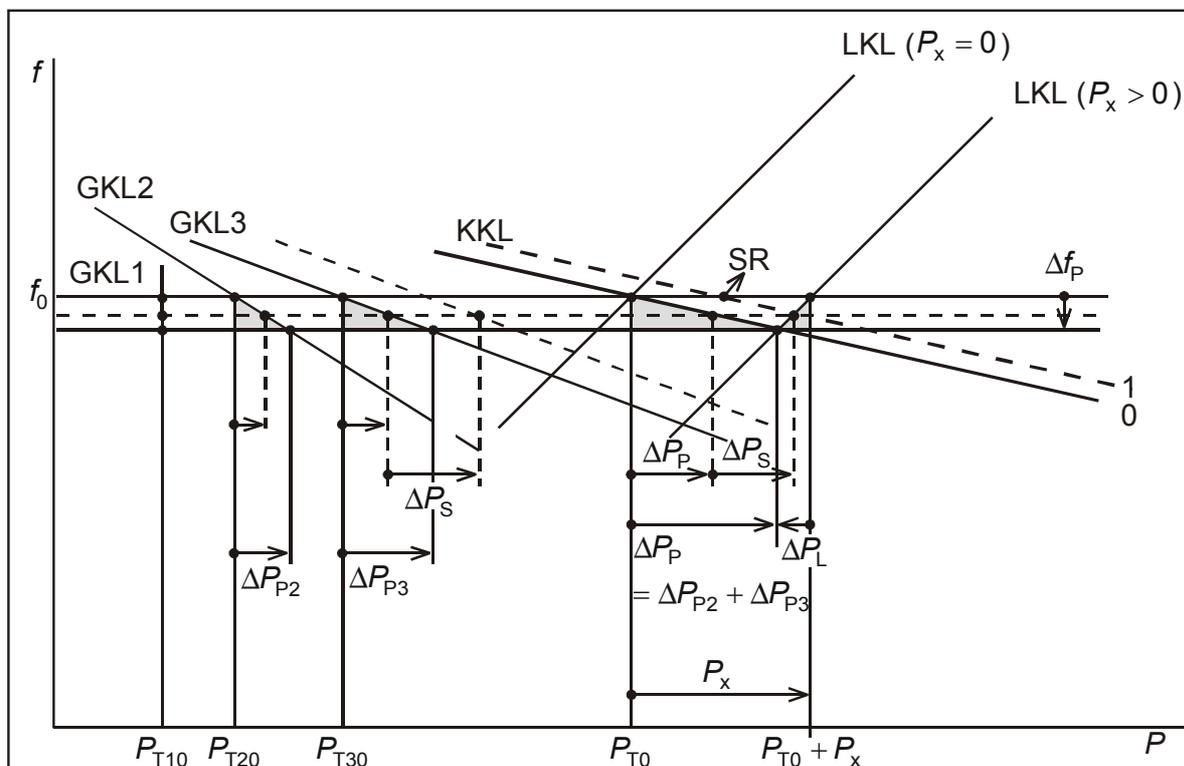


Bild 3.9: Wirkung der Sekundärregelung durch Parallelverschiebung der KKL (G3 sekundärgeregelt)

Die gesamte Turbinenleistung des Netzes ergibt sich jetzt aus

$$\Delta P_T = \Delta P_P + \Delta P_S = -k_p \Delta f + \Delta P_S \quad (3.13)$$

Für die Kraftwerkskennlinie folgt daraus

$$\Delta f = -\frac{1}{k_p} (\Delta P_T - \Delta P_S) = -\frac{1}{k_p} \left(\Delta P_T + \frac{1}{T_I} \int \Delta f dt \right) \quad (3.14)$$

Im Frequenz-Leistungsdigramm bewirkt die Sekundärregelung, ausgehend vom eingeschwungenen Zustand der Primärregelung, eine *Parallelverschiebung* der Kraftwerkskennlinie, so lange, bis die Frequenzabweichung Null geworden ist. Die KKL schneidet dann die LKK für $P_x > 0$ bei $f = f_0$. Die Belastungsänderung wird ausschließlich durch ΔP_S (s. Gl. (3.13)) gedeckt. Die Primärregelleistung ΔP_P und der Anteil des Netzes ΔP_L sind auf Null zurückgegangen. Im Bild 3.9 ist mit den gestrichelten Linien eine Momentaufnahme für den Fall, daß nur der Generator 3 sekundär geregelt ist, eingetragen. Sie läßt erkennen, wie die Primärregelleistung des Generators 2 und der Selbstregeleffekt des Netzes vom Generator 3 abgelöst werden.

3.2.3 Frequenzausgleichsvorgänge*

Bisher haben wir nur die eingeschwungenen Zustände vor und nach dem Frequenzausgleichsvorgang untersucht. In diesem Abschnitt wollen wir uns ein prinzipielles Bild von den Ausgleichsvorgängen, die sich zwischen diesen beiden stationären Zuständen abspielen, verschaffen. Dazu gehen wir von den einfachsten Übertragungsfunktionen aus und benutzen die bezogene Darstellung.

Frequenzausgleichsvorgang ohne Regelung

Zu Gl. (2.16) mit $\Delta P_T' = 0$ gehört folgende Übertragungsfunktion:

$$\Delta f' = -\frac{P_x'}{k_L' + pT_N} = -\frac{s_L}{1 + ps_L T_N} P_x' = -\frac{s_L}{1 + pT_L} P_x'$$

mit der Lastzeitkonstante $T_L = s_L T_N$.

Als *Sprungantwort* auf einen Laststoß ergibt sich:

$$\Delta f' = -s_L (1 - e^{-\frac{t}{T_L}}) P_x' \quad (3.15)$$

Den entsprechenden Frequenzverlauf zeigt das Bild 3.10. Der anfängliche Frequenzgradient beträgt:

$$\left(\frac{d\Delta f'}{dt} \right)_0 = -\frac{P_x'}{T_N}$$

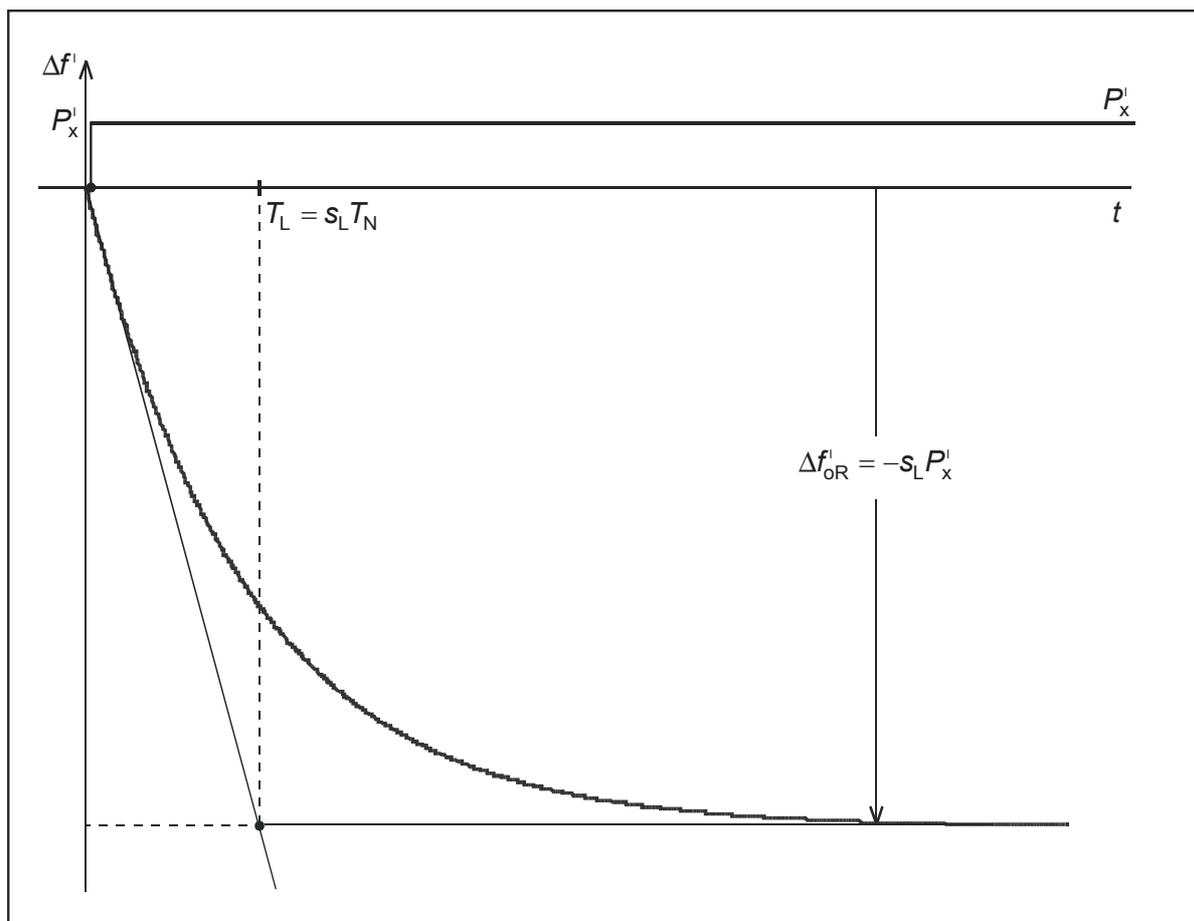


Bild 3.10: Frequenzverlauf ohne Netzregelung bei einem Laststoß

Frequenzausgleichsvorgang während der Primärregelung

Aus der Übertragungsfunktion (s. Gl. (2.16) mit $\Delta P'_T = \Delta P'_P$)

$$\Delta f' = \frac{\Delta P'_P - P'_x}{k'_L + pT_N}$$

folgt mit der Übertragungsfunktion für die Primärregler

$$\Delta P'_P = -\frac{k'_P}{1 + pT_P} \Delta f'$$

$$\Delta f' = -\frac{1 + pT_P}{T_P T_N \left(p^2 + p \frac{k'_L T_P + T_N}{T_P T_N} + \frac{k'_N}{T_P T_N} \right)} P'_x = -\frac{1 + pT_P}{T_P T_N (p - \rho_1)(p - \rho_2)} P'_x \tag{3.16}$$

Die zu Gl. (3.16) gehörende Sprungantwort lautet:

$$\Delta f' = -\frac{P'_x}{T_P T_N} \left\{ \frac{1}{\rho_1 \rho_2} + \frac{1 + \rho_1 T_P}{\rho_1 (\rho_1 - \rho_2)} e^{\rho_1 t} + \frac{1 + \rho_2 T_P}{\rho_2 (\rho_2 - \rho_1)} e^{\rho_2 t} \right\} \tag{3.17}$$

mit den Eigenwerten:

$$\rho_{1,2} = -\frac{k'_L T_P + T_N}{2T_P T_N} \pm \sqrt{\frac{(k'_L T_P + T_N)^2 - 4k'_N T_P T_N}{T_P^2 T_N^2}}$$

Bei Vernachlässigung des Selbstregleffektes des Netzes ($k'_L = 0$) erhält man für die Eigenwerte:

$$\bar{\rho}_{1,2} = -\frac{1}{2T_P} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4k'_P \frac{T_P}{T_N}} \right)$$

Für $4k'_P T_P / T_N > 1$ liegt der schwingende Fall mit

$$\bar{\rho}_{1,2} = -\frac{1}{2T_P} \pm j \frac{1}{2T_P} \sqrt{4k'_P \frac{T_P}{T_N}} \approx -\frac{1}{2T_P} \pm j \sqrt{\frac{k'_P}{T_P T_N}} = -\sigma \pm j\omega_e$$

vor, wobei die Näherung für übliche Parameter zutrifft.

Die Frequenz schwingt mit der Eigenfrequenz ω_e in den stationären Wert

$$\Delta f'_P = -\frac{P'_x}{\rho_1 \rho_2 T_P T_N} = -\frac{P'_x}{k'_N}$$

ein (Bild 3.11).

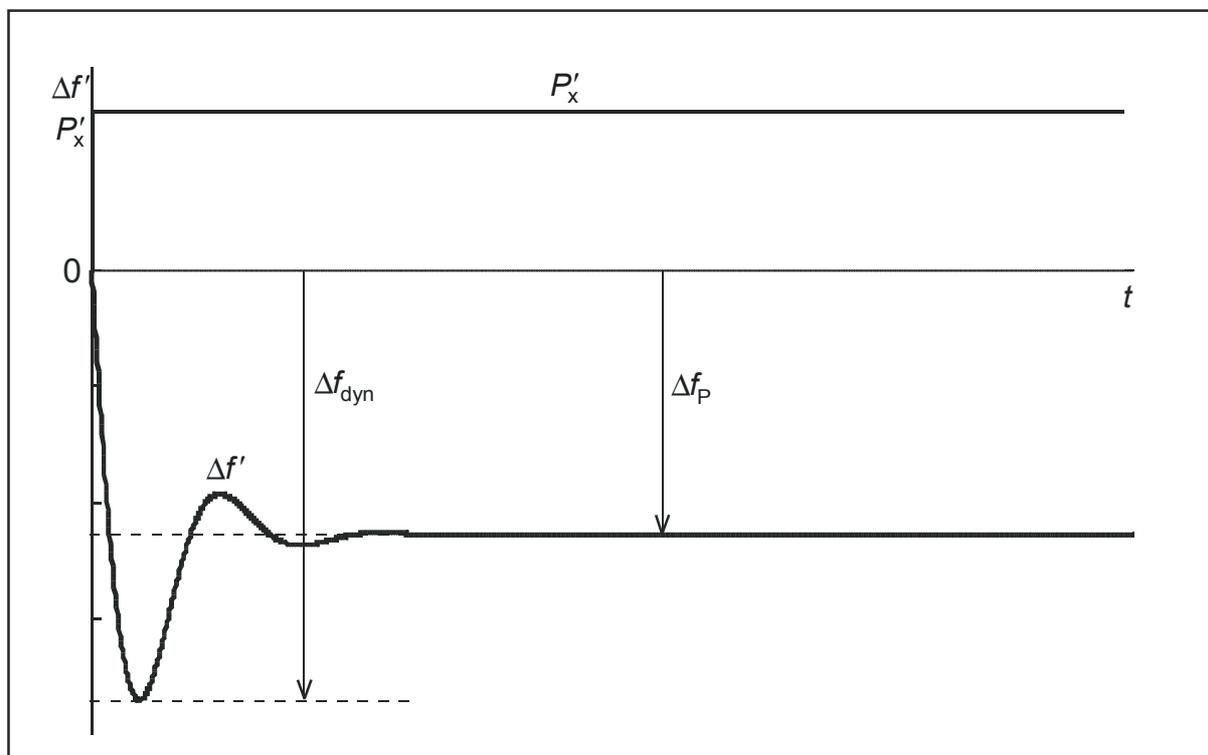


Bild 3.11: Ausgleichvorgang der Primärregelung nach einem Laststoß ($T_P = 1s, T_N = 5s, P'_x = 0,05, k'_P = 10, k'_L = 1$)

Für den dynamischen Frequenzeinbruch Δf_{dyn} ergibt sich bei schwacher Dämpfung die Näherungsbeziehung:

$$\Delta f'_{\text{dyn}} = -\sqrt{\frac{T_P}{k'_N T_N}} P'_x$$

Der Frequenzgradient, mit dem der Frequenzabstieg beginnt, ist wie im Fall ohne Regelung $(\Delta f')_0 = -P'_x / T_N$, da der Regler aufgrund seiner Verzögerung zunächst nicht wirksam ist.

Frequenzausgleichsvorgang während der Sekundärregelung

Durch die zeitliche Entkopplung von Primärregelung und Sekundärregelung können wir die Wirkung der Sekundärregelung während des Primärregelvorganges noch vernachlässigen und andererseits den während der Sekundärregelung erfolgenden Rückgang der Primärregelleistung quasistationär entsprechend der Reglerzahl annehmen.

Für die mit der Sekundärregelung einsetzende Frequenzänderung ergibt sich dann aus Gl. (2.16)

$$T_N \Delta \dot{f}' = \Delta P'_S - k'_N \Delta f' - P'_x \quad (3.18)$$

mit $\Delta f' = \Delta f'_P + \Delta f'_S$ und $\Delta f'(0) = \Delta f'_P = -P'_x / k'_N$.

Mit der integralen Übertragungsfunktion des Sekundärreglers

$$\Delta P'_S = -\frac{1}{T_I} \int \Delta f' dt = -\frac{1}{T_I} \int (\Delta f'_P + \Delta f'_S) dt \quad (3.19)$$

und $k'_N \Delta f'_P = -P'_x$ sowie $\Delta f'_P(p) = \Delta f'_P / p$ folgt aus den Gln. (3.18) und (3.19) die Übertragungsfunktion:

$$\Delta f'_S = -\frac{1}{T_N T_I \left(p^2 + \frac{k'_N}{T_N} p + \frac{1}{T_N T_I} \right)} \cdot \frac{\Delta f'_P}{p} \quad (3.20)$$

Zunächst ist ersichtlich, daß für $t \rightarrow \infty$ $\Delta f'_S = -\Delta f'_P$ wird, womit die von der Primärregelung verbliebene Frequenzabweichung ausgeregelt ist. Aufgrund der zur zeitlichen Abkoppelung von der Primärregelung erforderlichen Größe von T_I können die Wurzeln des Nenners von Gl. (3.20) wie folgt genähert werden:

$$p_{1,2} = -\frac{k'_N}{2T_N} \pm \frac{k'_N}{2T_N} \sqrt{1 - \frac{4T_N}{k'^2_N T_I}} \approx -\frac{k'_N}{2T_N} \pm \frac{k'_N}{2T_N} \left(1 - 2 \frac{T_N}{k'^2_N T_I} \right)$$

also:

$$p_1 \approx -\frac{1}{k'_N T_I} \quad \text{und} \quad p_2 \approx -\frac{k'_N}{T_N} \quad \text{sowie} \quad p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{T_N T_I}$$

Damit wird schließlich:

$$\Delta f'_S = -\Delta f'_P \left\{ 1 - \frac{k'_N T_1}{k'^2_N T_1 - T_N} e^{-\frac{t}{k'^2_N T_1}} + \frac{T_N}{k'^2_N T_1 - T_N} e^{-\frac{k'_N t}{T_N}} \right\} \quad (3.21)$$

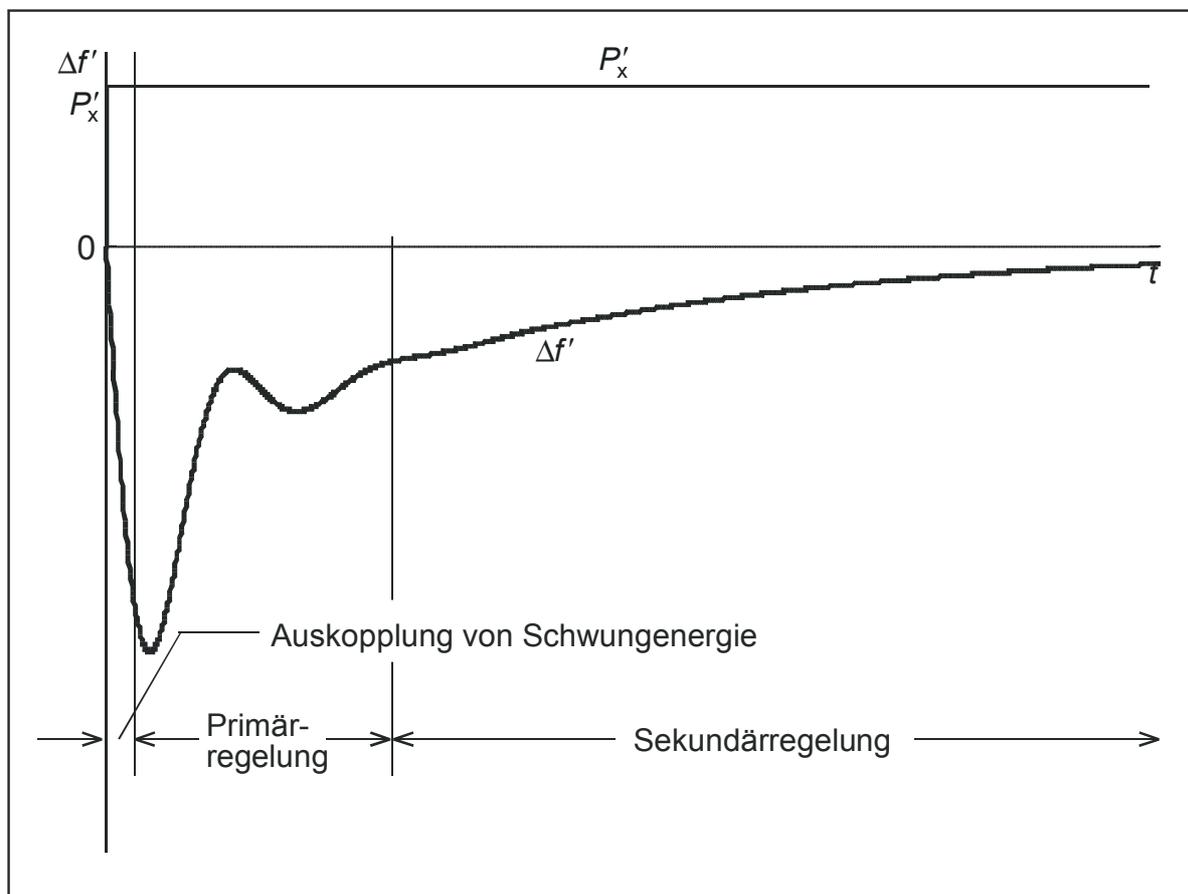


Bild 3.12: Frequenzausgleichsvorgang im primär- und sekundärgeregelten Inselnetz ($P'_x = 0,05$, $k'_L = 1$, $k'_N = 10$, $T_P = 1s$, $T_1 = 1s$)

In Bild 3.12 ist der vollständige simulierte Frequenzverlauf mit nichtentkoppelter Primär- und Sekundärregelung für einen Laststoß $P'_x > 0$ dargestellt. Man erkennt deutlich die zeitliche Aufeinanderfolge der drei Vorgänge:

- 1 Auskoppelung von Schwungenergie und Selbstregelleffekt des Netzes
- 2 Primärregelung und
- 3 Sekundärregelung.

Im Simulationsbeispiel ist die Integrationszeitkonstante T_1 noch kleiner als üblich angenommen, damit der Primärregelvorgang noch genügend zeitlich aufgelöst ist. Bild 3.13 zeigt die gleichen Ausgleichsvorgänge in der f - P -Darstellung. An der Abweichung des Frequenzverlaufes von den statischen Kennlinien läßt sich gut die Ausprägung der Ausgleichsvorgänge erkennen und so die zur besseren Übersichtlichkeit getroffenen Vereinfachungen überprüfen. Bei genügend großem T_1 ist der Primärregelvorgang in Punkt 2 abgeschlossen, bevor die Sekundärregelung einsetzt.

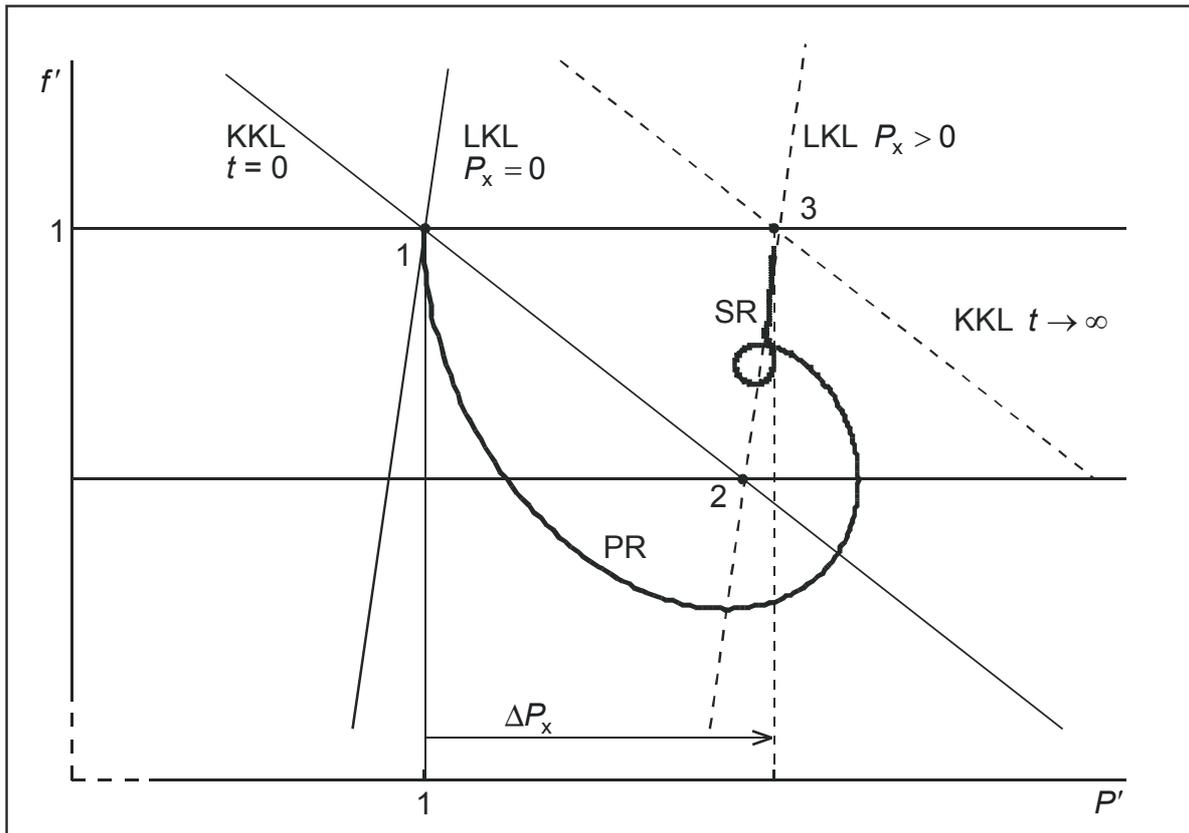


Bild 3.13: Frequenzgleichvorgang im primär- und sekundäreregelten Inselnetz (Daten wie für Bild 3.12)

4 Verbundbetrieb

4.1 Aufgaben und Vorteile des Verbundbetriebes

Der Verbundbetrieb mehrerer Netze bringt wirtschaftliche und technische Vorteile, denen der Organisationsaufwand gegenübersteht.

Die wirtschaftlichen Vorteile des Zusammenschlusses einzelner Netze zu Verbundnetzen liegen im Erzeuger- und Lastausgleich, in einer gemeinsamen Vorhaltung der Regelreserve, in der Möglichkeit Erzeugerengpässe auszugleichen und große kostengünstige Kraftwerksblöcke als Gemeinschaftskraftwerke zu errichten und zu betreiben. Die gemeinsame Höchstlast ist durch den Ausgleich der Belastungskurven stets kleiner als die Summe der einzelnen Höchstlasten. Die unterschiedlichen Kraftwerkstypen (Wasser/Wärme) lassen sich nach wirtschaftlichen Gesichtspunkten einsetzen. So wurde die Idee zur Nutzung der überschüssigen Wasserkraft der Alpen im Sommer und die Lieferung von Strom aus Braunkohlekraftwerken bei Wasserarmut im Winter in den Süden zur Geburtsstunde des Nord-Süd-Verbundes in Europa.

Die technischen Vorteile des Verbundbetriebes bestehen in der geringeren Störanfälligkeit des Systems, der besseren Frequenzhaltung und der verbesserten Versorgungszuverlässigkeit. Die Netzleistungszahl des Verbundnetzes ergibt sich aus der Summe der Einzelleistungszahlen, so daß im Verbundnetz bei Ausfall großer Erzeugereinheiten wesentlich geringere Frequenzeinbrüche als im Einzelnetz, das u.U. den Ausfall seiner größten Erzeugereinheit gar nicht verkraftet, auftreten.

Die technischen Probleme des Verbundbetriebes bestehen in der Notwendigkeit der Regelung der zwischen den einzelnen Verbundteilnehmer ausgetauschten Leistungen (Übergabeleistungen) nach entsprechenden Plänen und Tarifen, der gegenseitigen dynamischen Beeinflussung der Netze und der begrenzten Belastbarkeit der Kuppelleitungen.

4.2 Frequenz-Übergabeleistungs-Regelung

Wir betrachten zunächst nur zwei Netze, die im Verbund arbeiten (Bild 4.1). Die Verallgemeinerung der so gewonnenen Erkenntnisse auf mehrere Netze ist leicht möglich. Jedes Netz ist primär- und sekundär geregelt. An der Kuppelleitung wird die Übergabeleistung $P_{\dot{u}12} = -P_{\dot{u}21}$ ausgetauscht.

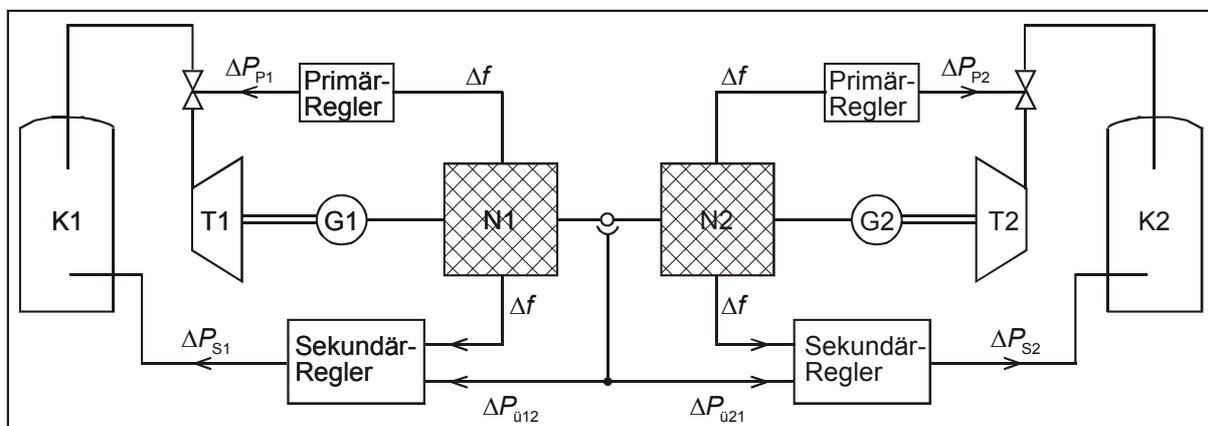


Bild 4.1: Prinzipschema von zwei im Verbund arbeitenden Netzen

Es soll zunächst auch angenommen werden, daß sich die beiden Netze *kohärent* verhalten, d.h. daß sie bei Störungen und während der Regelvorgänge die gleiche Frequenzänderung erfahren.

Nach Gl. (2.15) gilt für jedes Netz mit $\Delta P_T = \Delta P_P + \Delta P_S$ und $\Delta P_P = -k_P \Delta f$ (die Primärregelvorgänge können wieder quasistationär betrachtet werden)

$$M_{N1} \Delta \dot{f}' = -(k_{P1} + k_{L1}) \Delta f - P_{x1} - \Delta P_{\dot{u}12} + \Delta P_{S1} = -k_{N1} \Delta f - P_{x1} - \Delta P_{\dot{u}12} + \Delta P_{S1} \quad (4.1)$$

$$M_{N2} \Delta \dot{f}' = -(k_{P2} + k_{L2}) \Delta f - P_{x2} - \Delta P_{\dot{u}21} + \Delta P_{S2} = -k_{N2} \Delta f - P_{x2} - \Delta P_{\dot{u}21} + \Delta P_{S2} \quad (4.2)$$

Der stationäre Wert der Übergabeleistung hebt sich in jedem Netz gegen den stationären Wert der Turbinenleistung und der Netzlast heraus: $P_{T10} = P_{L10} + P_{\dot{u}120}$ und $P_{T20} = P_{L20} + P_{\dot{u}210}$.

Aus der Summe der Gln. (4.1) und (4.2) ergibt sich die *Gesamtbilanz* des Verbundnetzes zu

$$(M_{N1} + M_{N2}) \Delta \dot{f}' = -(k_{N1} + k_{N2}) \Delta f - P_{x1} - P_{x2} + \Delta P_{S1} + \Delta P_{S2} \quad (4.3)$$

Die Übergabeleistung geht in die Gesamtbilanz nicht ein. Für die stationäre Frequenzabweichung nach Abschluß der Primärregelvorgänge und vor Einsetzen der Sekundärregelung ergibt sich aus der rechten Seite der Gl. (4.3):

$$\Delta f_P = -\frac{P_{x1} + P_{x2}}{k_{N1} + k_{N2}} \quad (4.4)$$

Die Netze fangen die Störleistung gemeinsam nach Maßgabe ihrer Netzkennlinien ab, wodurch bei gleicher Störleistung (z.B. Ausfall des größten Kraftwerksblockes in einem Netz) ein geringerer Frequenzeinbruch als bei Inselbetrieb auftritt, was wir bereits als Vorteil des Verbundbetriebes bereits herausgestellt hatten.

Die Anteile, die die beiden Netze zur Deckung der Störleistung aufbringen, richten sich nach der Netzkennlinie des jeweiligen Netzes (Bild 4.2).

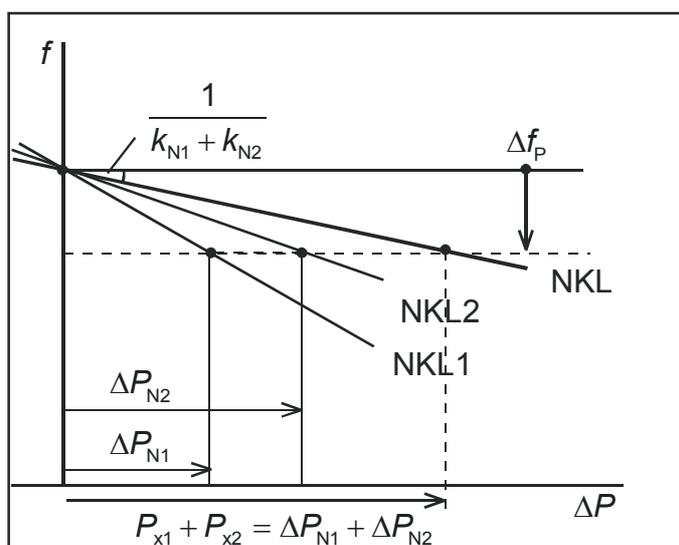


Bild 4.2: Statische Primärregel-Kennlinien eines aus zwei Netzen bestehenden Verbundnetzes (NKL1 und NKL2 gemäß Bild 2.13)

$$\Delta P_{N1} = \Delta P_{P1} - \Delta P_{L1} = -k_{N1} \Delta f_P \tag{4.5}$$

$$\Delta P_{N2} = \Delta P_{P2} - \Delta P_{L2} = -k_{N2} \Delta f_P \tag{4.6}$$

In den einzelnen Netzen wiederum erfolgt die Aufteilung der Netzleistung auf Primärregelleistung und Selbstregелеffekt nach Maßgabe der Leistungszahlen k_P und k_L . Nach Abschluß der Primärregelung und vor Einsetzen der Sekundärregelung ergibt sich für die Änderung der Übergabeleistung aus den Gln. (4.1) und (4.2) mit der Gl. (4.4):

$$\Delta P_{\dot{u}12} = \Delta P_{N1} - P_{x1} = -k_{N1} \Delta f_P - P_{x1} = \frac{k_{N1} P_{x2} - k_{N2} P_{x1}}{k_{N1} + k_{N2}} \tag{4.7}$$

$$\Delta P_{\dot{u}21} = \Delta P_{N2} - P_{x2} = -k_{N2} \Delta f_P - P_{x2} = \frac{k_{N2} P_{x1} - k_{N1} P_{x2}}{k_{N1} + k_{N2}} \tag{4.8}$$

Gewöhnlich ist nur von der Störung in einem Netz auszugehen (P_{x1} oder P_{x2}). In diesem Fall gilt immer, daß die Frequenzabweichung Δf_P und $\Delta P_{\dot{u}}$ (nach obiger Vorzeichendefinition) im gestörten Netz *gleiches* und im ungestörten Netz *ungleiches* Vorzeichen haben. Ist z.B. $P_{x1} > 0$ bei $P_{x2} = 0$, so wird $\Delta f_P < 0$ und $\Delta P_{\dot{u}12} < 0$ sowie $\Delta P_{\dot{u}21} > 0$. Das ungestörte Netz (im Beispiel Netz 2) beteiligt sich entsprechend seiner Leistungszahl an der Deckung der Störleistung. Die Auflösung der Gln. (4.7) und (4.8) nach der Frequenzänderung ergibt mit $\Delta P_{\dot{u}21} = -\Delta P_{\dot{u}12}$:

$$\Delta f_P = -\frac{\Delta P_{N1}}{k_{N1}} = -\frac{\Delta P_{\dot{u}12} + P_{x1}}{k_{N1}} \tag{4.9}$$

$$\Delta f_P = -\frac{\Delta P_{N2}}{k_{N2}} = \frac{\Delta P_{\dot{u}12} - P_{x2}}{k_{N2}} \tag{4.10}$$

In Bild 4.3 ist die Frequenzänderung nach den Gln. (4.9) und (4.10) für $P_{x1} > 0$ und $P_{x2} = 0$ über $\Delta P_{\dot{u}12}$ aufgetragen.

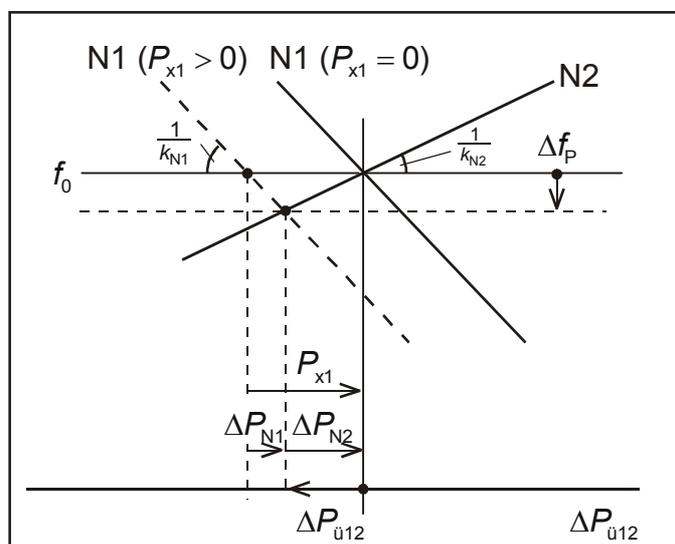


Bild 4.3: Netzkennlinien zur Ermittlung der Übergabeleistung nach Ausregelung der Primärregelung

Im Ausgangszustand ($P_{x1} = P_{x2} = 0$) schneiden sich die Kennlinien bei $\Delta f = \Delta P_{\dot{u}12} = 0$. Für $P_{x1} > 0$ ist die Netzkennlinie N1 um P_{x1} nach links verschoben. Der Schnittpunkt mit der Netzkennlinie N2 bestimmt Δf_p und die Übergabeleistung $\Delta P_{\dot{u}12} = -\Delta P_{N2}$. Das Netz 1 bezieht Übergabeleistung von Netz 2, die dort durch Primärregelleistung und Freisetzung von frequenzabhängigen Lastanteilen aufgebracht wird.

Die *Sekundärregelung* hat nun dafür zu sorgen, daß sowohl der Sollwert für die Frequenz als auch für die Übergabeleistung eingehalten wird. Es müssen also Δf und $\Delta P_{\dot{u}12}$ auf Null zurückgeregelt werden. Für diese *Frequenz-Übergabeleistungsregelung* oder *f-P_ü-Regelung* gibt es zwei prinzipielle Konzepte. Das eine besteht darin, daß das leistungsstärkste Netz die Frequenz regelt und alle anderen Netze ihre Übergabeleistung regeln. Diese Vorgehensweise hat den Nachteil, daß die Regler u. U. gegeneinander arbeiten, wobei es zu Reglerschwingungen und langen Ausregelzeiten kommen kann. Ist im Beispiel des Bildes 4.3 der Sekundärregler des Netzes 2 für die Frequenzregelung verantwortlich, so versucht er durch positive Sekundärregelleistung der Frequenzabweichung entgegenzuwirken (die Netzkennlinie N2 nach links parallel zu verschieben). Ebenso versucht der Sekundärregler des Netzes 1 durch positive Sekundärregelleistung, dem Bezug von Übergabeleistung ($\Delta P_{\dot{u}12} < 0$) entgegenzuwirken. Beide Regler müssen deshalb zeitlich entkoppelt werden. Das bessere Regelkonzept besteht in der sogenannten *Netzkennlinienregelung*, bei der den Sekundärreglern der einzelnen Netze ein Mischsignal Δx aus Frequenz- und Übergabeleistungsabweichung im Verhältnis ihrer Netzkennlinie zugeführt wird:

$$\Delta x_i = \Delta f + \frac{\Delta P_{\dot{u}i}}{k_{Ni}} \quad (4.11)$$

Im obigen Beispiel mit $P_{x1} > 0$ und $P_{x2} = 0$ ergibt sich mit der Frequenzänderung nach Gl. (4.9) für Netz 1 die Regelabweichung

$$\Delta x_1 = \Delta f + \frac{\Delta P_{\dot{u}12}}{k_{N1}} = -\frac{P_{x1}}{k_{N1}} \quad (4.12)$$

und mit Gl. (4.10) für Netz 2:

$$\Delta x_2 = \Delta f + \frac{\Delta P_{\dot{u}21}}{k_{N2}} = 0 \quad (4.13)$$

Die Sekundärregelung wird somit nur im gestörten Netz 1 aktiv. Sie verschiebt die Kennlinie des Netzes 1

$$\Delta f = -\frac{\Delta P_{\dot{u}12} + P_{x1} - \Delta P_{S1}}{k_{N1}} \quad (4.14)$$

über den Anteil der Sekundärregelleistung

$$\Delta P_{S1} = -\frac{1}{T_{I1}} \int \Delta x_1 dt \quad (4.15)$$

so lange parallel nach rechts, bis Δf und damit auch $\Delta P_{\dot{u}12}$ Null geworden ist.

Am Ende des Sekundärregelvorganges ist $\Delta P_{S1} = P_{x1}$ und $\Delta P_{N1} = \Delta P_{N2} = 0$. Die Sekundärregelleistung des Netzes 1 deckt die gesamte Störleistung. Die Primärregelleistungen und Beiträge der Lasten beider Netze sind auf Null zurückgegangen.

Die Sekundärregler der einzelnen Netze können immer nur die Summe der Übergabeleistungen aller Übergabestellen eines Netzes regeln. In einem Verbund von mehr als 2 Netzen erfolgt der Leistungsaustausch zwischen zwei Netzen zwangsläufig auch über unbeteiligte Partner. Soll für das Beispiel in Bild 4.4 Übergabeleistung P_1 von Netz 1 an Netz 3 geliefert werden, so wird der Anteil P_{13} direkt an Netz 3 und der Anteil P_{12} über Netz 2 an Netz 3 geliefert. Die Übergabeleistung für Netz 3 ist in Summe Null. Der sog. Durchleitungsanteil P_{12} führt in Netz 2 zu Verlusten und Spannungsabfällen und belastet die Kuppelleitungen zu Netz 1 und Netz 3. Es wird deshalb vom Betreiber des Netzes 2 eine Durchleitungsgebühr (Peage) erhoben. Je nach Leistungsfluß im Netz 2 kann die Durchleitung aber auch zur Verminderung der Netzverluste im Netz 2 führen.

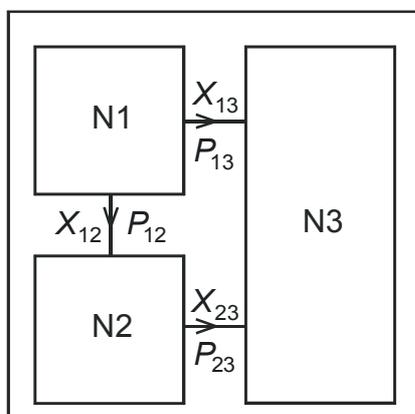


Bild 4.4: Übergabe-Leistungsfluß für ein aus drei Netzen bestehendes Verbundnetz

Die Aufteilung der Übergabeleistung erfolgt näherungsweise nach den Reaktanzverhältnissen der Kuppelleitungen:

$$P_{13} = \frac{X_{12} + X_{23}}{X_{12} + X_{13} + X_{23}} P_1$$

$$P_{12} = \frac{X_{13}}{X_{12} + X_{13} + X_{23}} P_1 = P_{23}$$

4.3 Dynamisches Verhalten des Verbundnetzes*

In Abschnitt 4.2 haben wir kohärentes Verhalten der am Verbund beteiligten Netze vorausgesetzt. Die Frequenz ist dann zu jedem Zeitpunkt in allen Netzen die gleiche und es gibt keine gegenseitige dynamische Beeinflussung der Netze. Will man die dynamische Beeinflussung untersuchen, so muß man diese Voraussetzung fallen lassen und für jedes Netz als zweite Koordinate neben der Frequenz das *Winkelzentrum* δ hinzunehmen³⁾ (s. Anhang). Die Spannungen der Bilanzknoten (siehe Bild 2.5)

³⁾ Das Winkelzentrum hat im Inselnetz keine Bedeutung

$$\underline{U}_{Ni} = \frac{U_{ni}}{\sqrt{3}} e^{j\delta_i} \quad (4.16)$$

der einzelnen Netze bestimmen dann die zwischen den Netzen ausgetauschte Übergabeleistung, wobei wir Netznennspannung an den Knoten voraussetzen. Für die zwischen zwei Netzen i und k gleicher Nennspannung ausgetauschte Übergabeleistung gilt dann

$$P_{\dot{u}ik} = \frac{U_n^2}{X_{ik}} \sin(\delta_i - \delta_k) = -P_{\dot{u}ki} \quad (4.17)$$

wobei X_{ik} die resultierende Reaktanz der Kuppelleitungen ist. Die Frequenz der Netze ergibt sich aus

$$\dot{\delta}_i = \Delta \dot{\delta}_i = 2\pi \Delta f_i \quad (4.18)$$

Für Näherungsuntersuchungen kann Gl. (4.17) in der Umgebung des Arbeitspunktes linearisiert werden und man erhält mit $\delta_{ik} = \delta_i - \delta_k$ und dem Index 0 für den Arbeitspunkt:

$$\Delta P_{\dot{u}ik} = \left(\frac{\partial P_{\dot{u}ik}}{\partial \delta_i} \right)_0 \Delta \delta_i + \left(\frac{\partial P_{\dot{u}ik}}{\partial \delta_k} \right)_0 \Delta \delta_k = \frac{U_n^2}{X_{ik}} \cos \delta_{ik0} (\Delta \delta_i - \Delta \delta_k) = S_{ik0} (\Delta \delta_i - \Delta \delta_k) \quad (4.19)$$

Ist das Netz i mit n Netzen gleicher Nennspannung im Verbund, so erweitert sich die Gl. (4.19) zu:

$$\Delta P_{\dot{u}i} = \sum_{j=1, \neq i}^n S_{ij}^0 (\Delta \delta_i - \Delta \delta_j)$$

mit:

$$S_{ij}^0 = \frac{U_n^2}{X_{ij}} \cos \delta_{ij}^0$$

Ausgehend vom Blockschaltbild eines Inselnetzes mit Primär- und Sekundärregelung in Bild 3.8 erhält man das Blockschaltbild in Bild 4.5 für zwei im Verbund arbeitende Netze, in dem die Rückführung des Selbstregelleffektes mit dem Integrationsglied der rotierenden Massen zu einem Verzögerungsglied 1. Ordnung mit der Zeitkonstante

$$T_{Li} = \frac{M_{Ni}}{k_{Li} f_0} = \frac{P_{Gi} T_{Ni}}{k_{Li} f_0} = S_{Li} T_{Ni}$$

zusammengefaßt ist.

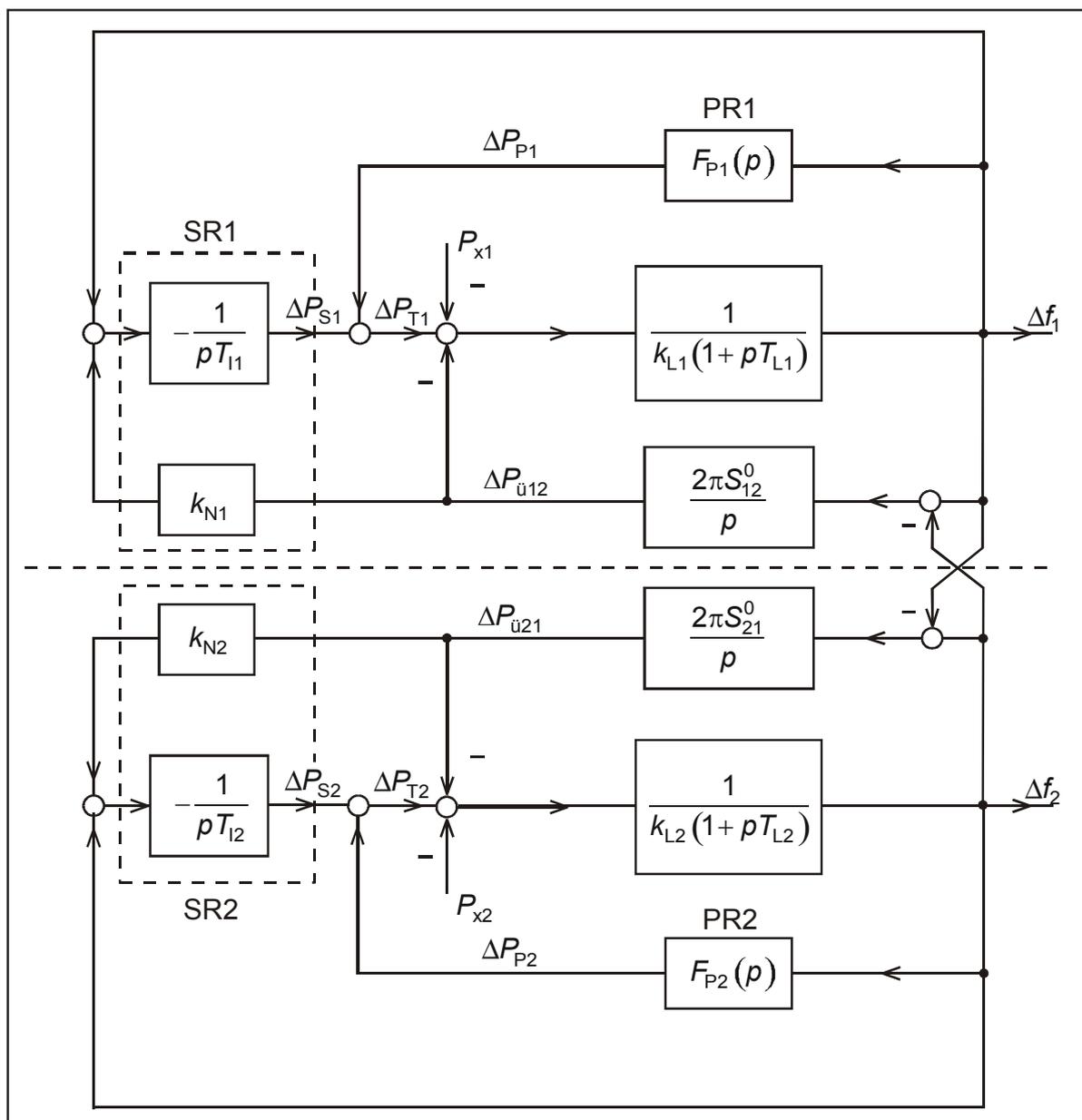


Bild 4.5: Blockschaltbild eines Verbundes von zwei Netzen

Schließlich soll der Vollständigkeit halber noch das Blockschaltbild für kohärentes Verhalten der beiden Netze angegeben werden. Die Übergabeleistungen ergeben sich dann aus den Bewegungsgleichungen der Netze bei gleicher Frequenzänderung $\Delta f_1 = \Delta f_2 = \Delta f$:

$$P_{\dot{u}12} = \Delta P_{T1} - P_{x1} - k_{L1} \Delta f - M_{N1} \frac{\Delta f}{f_0} \tag{4.20}$$

$$P_{\dot{u}21} = \Delta P_{T2} - P_{x2} - k_{L2} \Delta f - M_{N2} \frac{\Delta f}{f_0} \tag{4.21}$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt:

$$(M_{N1} + M_{N2}) \frac{\Delta f}{f_0} = \Delta P_{T1} + \Delta P_{T2} - (k_{L1} + k_{L2}) \Delta f - P_{x1} - P_{x2} = \Delta P_T - k_L \Delta f - P_x$$

Eingesetzt in Gl. (4.20) und (4.21) erhält man schließlich

$$\Delta P_{\dot{u}12} = \Delta P_{T1} - P_{x1} - k_{L1} \left(1 - \frac{k_L M_{N1}}{k_{L1} (M_{N1} + M_{N2})} \right) \Delta f - \frac{M_{N1}}{M_{N1} + M_{N2}} (\Delta P_T - P_x)$$

und einen analogen Ausdruck für $\Delta P_{\dot{u}21}$. Das entsprechende Blockschaltbild ist in Bild 4.6 gezeichnet. Darin wurden folgende Abkürzungen verwendet:

$$T_{L1} = \frac{M_{N1}}{k_{L1} \cdot f_0} = s_{L1} T_{N1}; \quad T_{L2} = \frac{M_{N2}}{k_{L2} \cdot f_0} = s_{L2} T_{N2}$$

$$T_L = \frac{M_{N1} + M_{N2}}{k_L \cdot f_0} = \frac{k_{L1} T_{L1} + k_{L2} T_{L2}}{k_{L1} + k_{L2}}$$

$$k_L = k_{L1} + k_{L2}$$

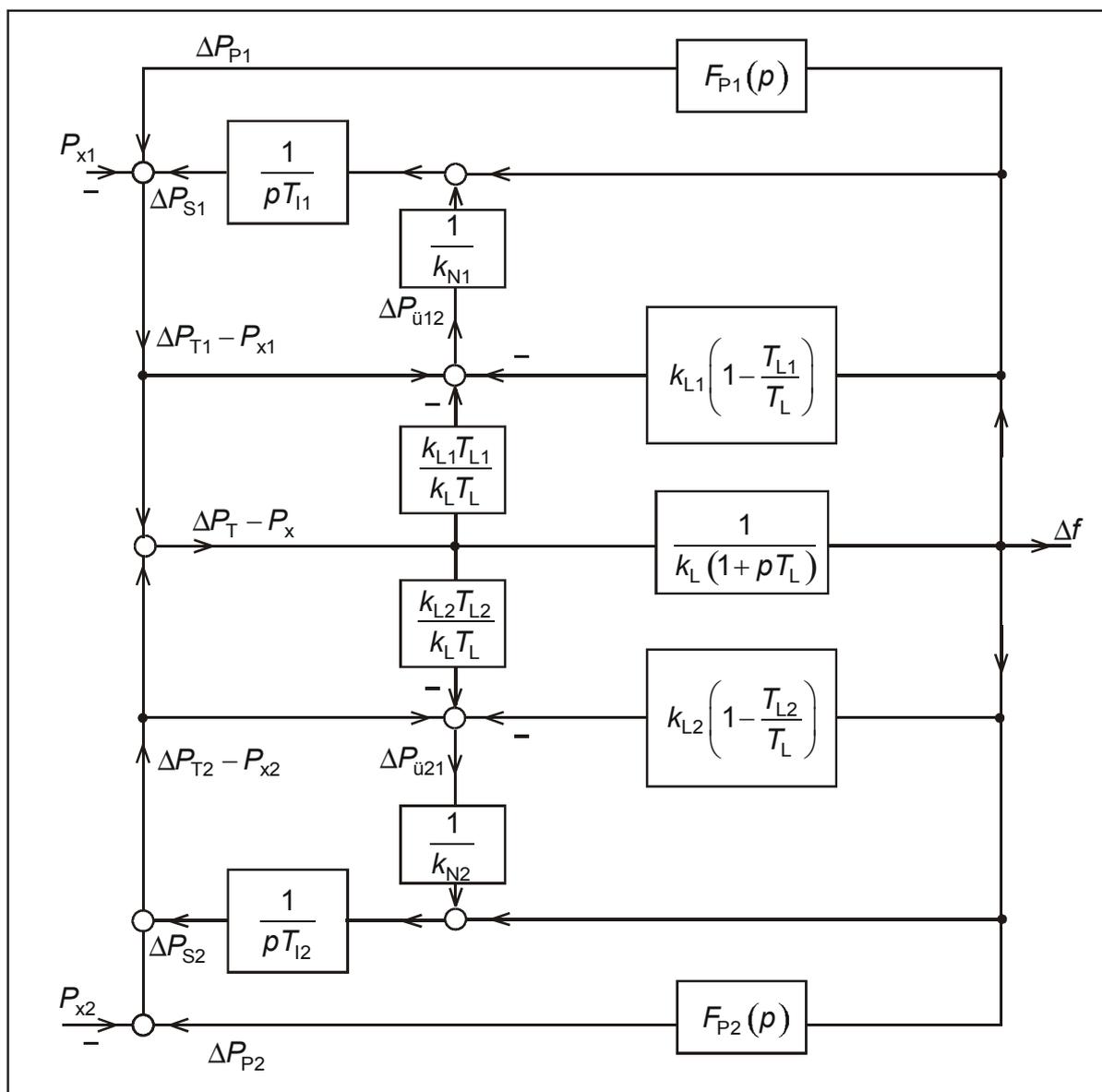


Bild 4.6: Blockschaltbild eines kohärenten Verbundnetzes

5 Bereitstellung der Primärregelleistung

Die Primärregelleistung oder *Wirkleistungs-Sekundenreserve* (WSR) muß so schnell wie möglich aktiviert werden können, um dem durch eine Störung eingeleiteten Frequenzabstieg entgegenwirken zu können, bevor die Frequenz auf einen kritischen Wert abgesunken ist. Neben der schnellen Aktivierung muß aber auch ausreichend Leistungsreserve vorhanden sein (vorgehalten werden). Die erforderliche WSR und die erforderliche Stellgeschwindigkeit für die Primärregelleistung ergeben sich aus der Forderung, daß der Ausfall von großen Erzeugereinheiten nicht zum frequenzabhängigen Lastabwurf von Verbraucherleistung (s. Abschnitt 6.1) führt. So soll im UCTE-Netz der plötzliche Ausfall von 2500 MW Kraftwerksleistung (2 große Blöcke) im Zeitpunkt niedrigster Verbraucherleistung (ca. 75 GW) noch ausgeregelt werden können. Kommt es störungsbedingt zu einer Abtrennung des deutschen Verbundnetzes (DVG) vom UCTE-Netz, so muß ein zusätzlicher Ausfall eines Blockes (1250 MW) ohne Lastabwurf beherrscht werden. Um diesen Anforderungen gerecht zu werden, muß jeder Verbundpartner die in Bild 5.1 dargestellte WSR-Mobilisierung, bezogen auf die momentane Erzeugerleistung, erfüllen können.

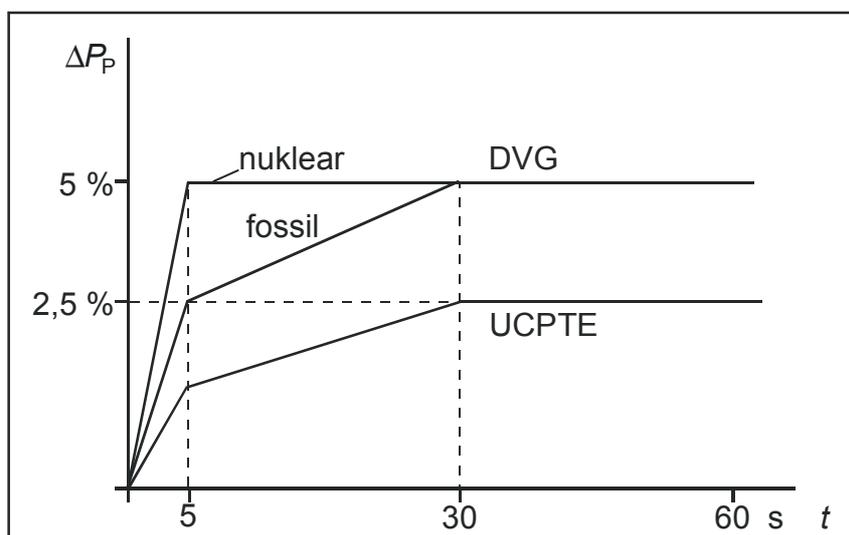


Bild 5.1: Anforderungen an die WSR-Mobilisierung im UCPTE- und DVG-Verbundnetz

In Wärmekraftwerken erfolgt die Vorhaltung der WSR, wie bereits erwähnt, durch Androsselung der Turbineneinlaßventile (Festdruckfahrweise). Es wird also auf das Speichervermögen des Kessels zurückgegriffen. Weitere Möglichkeiten der WSR-Mobilisierung (Bild 5.2) bestehen in der Abschaltung der Speisewasservorwärmer (VWA), der Einspeisung eines Wasserstoff/Sauerstoff-Gemisches in den Dampfkreislauf und in der Zukunft vielleicht durch den Einsatz eines supraleitenden magnetischen Energiespeichers (SMES). Da die WSR zeitlich begrenzt ist, muß die Sekundärregelleistung die Primärregelleistung rechtzeitig ablösen.

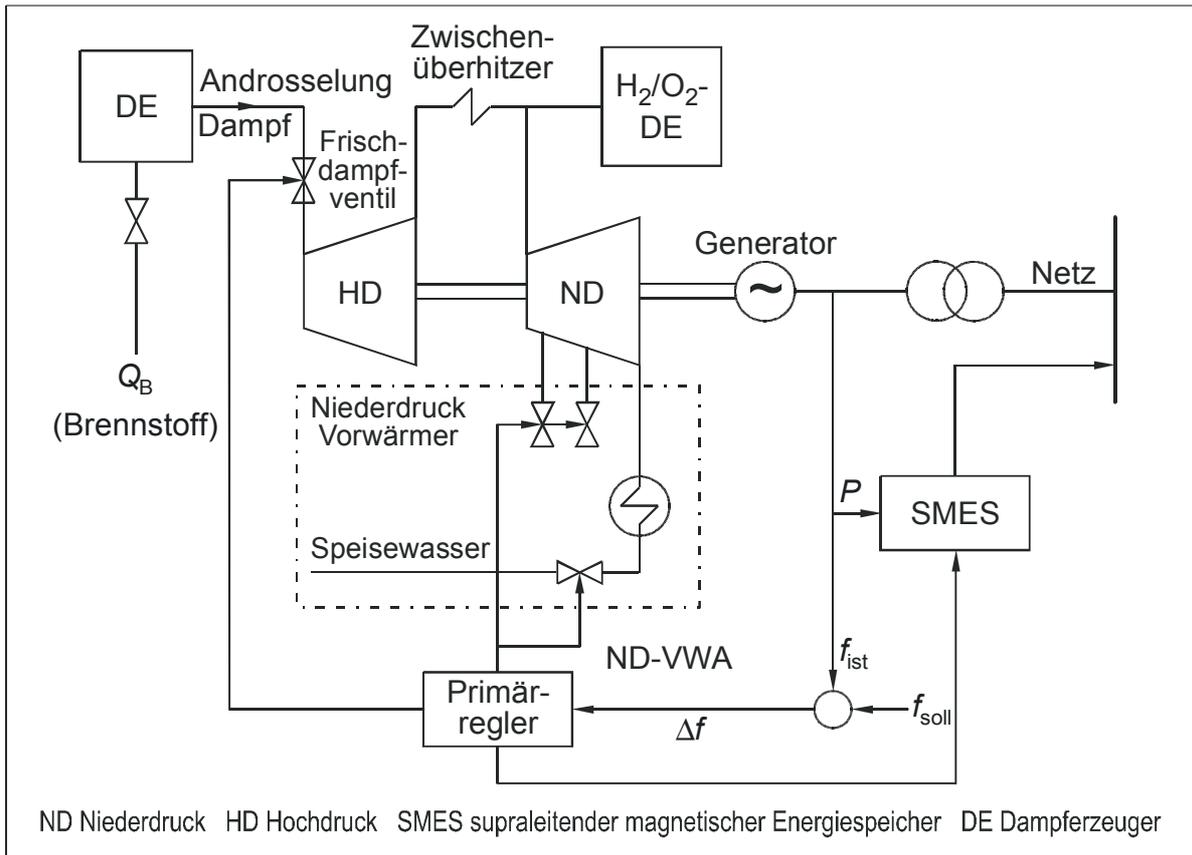


Bild 5.2: Bereitstellung der Primärregelleistung durch SMES, Androsselung, Vorwärmeabschalter(VWA) und H2/O2-Dampferzeuger

Bild 5.3 zeigt den zeitlichen Verlauf der Primärregelleistung und ihre Zusammensetzung aus der Androsselung und Vorwärmerabschaltung. In dem Maße, wie die Sekundärregelleistung über die Feuerung wirksam wird, geht die Primärregelleistung zurück. Mit der Ablösung der Primärregelleistung durch die Sekundärregelleistung wird die WSR wieder aufgebaut.

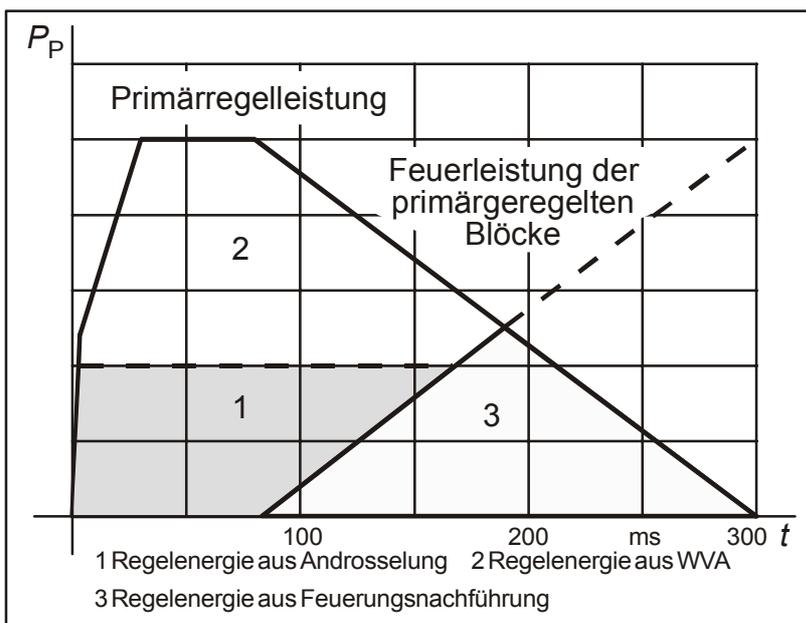


Bild 5.3: Verlauf der maximalen Primärregelleistung

Die Leistungsänderungsgeschwindigkeiten der einzelnen Kraftwerksblöcke im Zeitbereich der Sekundärregelung (Minutenbereich) ist unterschiedlich. Eine Übersicht enthält die Tabelle 5.1. Die Leistungsänderungsgeschwindigkeiten müssen das Nachfahren der Tagesbelastungskurve gewährleisten (Lastfolgebetrieb).

Tabelle 5.1: Mobilisierung der Primärregelleistung

Primärenergie	Öl, Gas	Kohle	Kernenergie
mittlere Leistungsänderungsgeschwindigkeit in % P_n / min	8 ... 12	4 ... 8	5 ... 10
Leistungsstellbereich in % von P_n	40 ... 100		
max. Leistungsänderung in % P_n	60	60	50 ... 20

6 Frequenzabhängiger Lastabwurf

Grundsätzlich soll die Primärregelung bei Netzstörungen auch dafür sorgen, daß während des Frequenzausgleichsvorganges ein oberer und ein unterer Grenzwert für die Frequenz nicht überschritten wird. Der plötzliche Ausfall von 2500 MW Erzeugerleistung im UCTE-Netz soll noch ausgeregelt werden, ohne daß der untere kurzzeitig zulässige Frequenzwert von 49 Hz unterschritten wird (Bild 6.1).

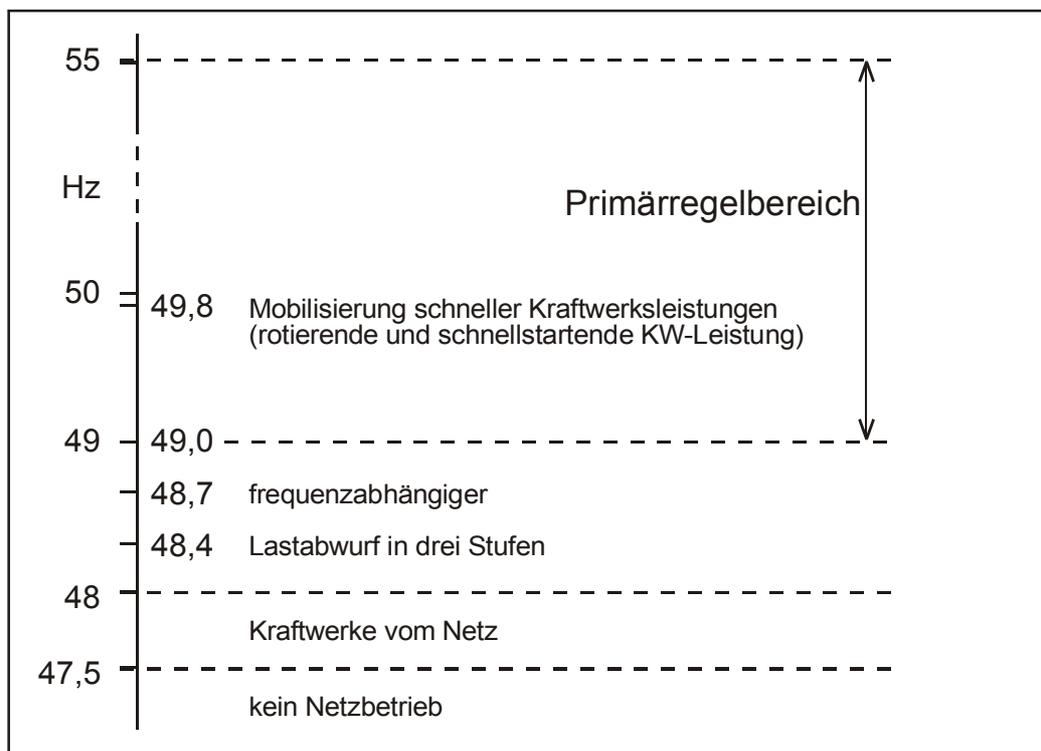


Bild 6.1: Dreistufiges Regelkonzept der DVG

Kommt es störungsbedingt zur Netzinselung, so kann im Inselnetz anfänglich Leistungsüberschuß herrschen, der zum Frequenzanstieg führt. Gelingt es der Primärregelung nicht, den Frequenzanstieg rechtzeitig abzufangen, kommt es bei 55 Hz zum Schnellschluß der Turbinenventile und damit zum Abtrennen von Kraftwerken vom Netz, schlimmstenfalls zum Netzzusammenbruch. Für das DVG-Netz soll im Inselbetrieb der Ausfall von 1200 MW Erzeugerleistung noch nicht zur Unterschreitung des 49-Hz-Grenzwertes führen. Um beim weiteren Ausfall von Erzeugerleistung die Versorgungssicherheit nicht zu gefährden, wird mit Unterschreitung des 49-Hz-Grenzwertes gezielt Last abgeworfen und damit einem weiteren Frequenzabstieg entgegengewirkt. Dieser Lastabwurf wird frequenzabhängig in Stufen vorgenommen, die dafür vorgesehenen Abnehmer werden über entsprechend eingestellte Unterfrequenzrelais versorgt. Bild 6.1 zeigt das dreistufige Regelkonzept der DVG. Der frequenzabhängige Lastabwurf erfolgt in drei Stufen (49,0 Hz, 48,7 Hz und 48,4 Hz), in denen jeweils 15 % der Gesamtlast abgeworfen werden. Bei 48 Hz werden die Kraftwerke vom Netz getrennt. Sie sollen sich bei 47,5 auf ihren Eigenbedarf inseln. Die erfolgreiche Inselung auf Eigenbedarf ist die Voraussetzung für einen schnellen Wiederaufbau des Netzes.

7 Anhang: Herleitung des Winkelzentrums

Wir addieren alle Bewegungsgleichungen der m Generatoren:

$$\sum_{i=1}^m \left(P_{rGi} T_{mi}' \frac{\Delta \dot{\omega}_i}{\omega_0} \right) = \sum_{i=1}^m P_{Ti} - \sum_{i=1}^m P_{Li} = P_T - P_L \quad (\text{A1})$$

Der Vergleich mit Gl. (2.4) liefert:

$$\sum_{i=1}^m \left(P_{rGi} T_{mi}' \Delta \dot{\omega}_i \right) = \Delta \dot{\omega} \sum_{i=1}^m \left(P_{rGi} T_{mi}' \right) \quad (\text{A2})$$

Eine beidseitige Integration ergibt unter Beachtung der verschwindenden Anfangsbedingungen für die Drehzahländerungen:

$$\sum \left(P_{rGi} T_{mi}' \Delta \omega_i \right) = \Delta \omega \sum_{i=1}^m \left(P_{rGi} T_{mi}' \right) = P_G T_G \Delta \omega \quad (\text{A3})$$

Weiterhin gilt für jeden Generator

$$\dot{\delta}_i = \Delta \dot{\delta}_i = \Delta \omega_i \quad (\text{A4})$$

und für die Änderung des mittleren Winkels:

$$\dot{\delta} = \Delta \dot{\delta}_i = \Delta \omega \quad (\text{A5})$$

Die nochmalige Integration der Gl. (A3) ergibt somit

$$\sum \left(P_{rGi} T_{mi}' \Delta \delta_i \right) = P_G T_G \Delta \delta \quad (\text{A6})$$

Für die mittlere Winkeländerung aller Generatoren folgt daraus:

$$\Delta \delta = \frac{\sum \left(P_{rGi} T_{mi}' \Delta \delta_i \right)}{P_G T_G} \quad (\text{A7})$$

Mit der Gl. (A7) kann die mittlere Winkeländerung und damit die Frequenzänderung eines Netzes auch berechnet werden, wenn die Generatoren durch ihre ausführlichen Bewegungsgleichungen modelliert werden. Das Netz kann dann in seiner Struktur erhalten bleiben, wodurch es möglich wird, auch die Spannungsabhängigkeit der Lasten zu berücksichtigen.

Der Verlauf des mittleren Winkels δ wird als *Winkelzentrum* und die mittlere Winkelgeschwindigkeit ω , mit der die Frequenz definiert wird, als *Trägheitszentrum* bezeichnet. Die Bezeichnung Trägheitszentrum rührt von der Vorstellung her, daß sich die Drehbewegung der Ersatzmasse des aggregierten Modells so vollzieht, daß der Drehimpuls, der sich aus der Summe der Drehimpulse der einzelnen Maschinen ergibt, erhalten bleibt. Diesen Zusammenhang beschreibt nämlich Gl. (2.4), nur daß dort die Leistungen und Zeitkonstanten anstelle der Massenträgheitsmomente stehen. Setzen wir die Ausdrücke für die Zeitkonstanten nach Gl. (2.2) wieder ein und teilen beide Seiten durch Ω_0^2 , so erhalten wir den Erhaltungssatz des Drehimpulses:

$$\sum (J_i \Delta \omega_i) = \sum (J_i) \cdot \Delta \omega = J_{\text{ers}} \Delta \omega \quad (\text{A8})$$

Der mittlere Winkel eines Netzes bestimmt die Phasenlage der Spannung am Ersatzknoten des Punktmodells (s. Gl. (4.16)). Im Inselnetz hat der mittlere Winkel keine Bedeutung, da die Phasenlage der Spannung am Ersatzknoten frei gewählt werden kann.