

# Young-Maß-Lösungen für nichtlineare partielle Differentialgleichungen

Vom Fachbereich Mathematik  
der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

DIPL.-MATH. FLORIAN THEIL

geboren am 27. Mai 1968 in Schwäbisch Gmünd

1997

Referent: Prof. Dr. A. Mielke, Hannover

Korreferent: Prof. Dr. C. Carstensen, Kiel

Tag der Promotion: 18. Juli 1997

Datum der Veröffentlichung: Januar 1998

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das effektive Verhalten von instationären Lösungen für zwei nichtlineare partielle Differentialgleichungen untersucht, deren Anfangszustände sehr schnell oszillieren. Zu diesem Zweck werden Young-Maß-Lösungen und Young-Maß-Konvergenz definiert. Ein Youngsches Maß ist eine schwach meßbare Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $(\Psi_x)_{x \in \Omega}$ , wobei  $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist. Eine Funktionenfolge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$  konvergiert im Sinn der Youngschen Maße gegen  $(\Psi_x)_{x \in \Omega}$ , wenn für alle global Lipschitz-stetigen Funktionen  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$g(u_n(x)) \text{ konvergiert schwach gegen } \int_{y \in \mathbb{R}^d} g(y) \Psi_x(dy) \text{ (schwach-* falls } p = \infty).$$

Wir zeigen für beide Modellgleichungen, daß die Dynamik von einem klassischen Sobolev-Raum  $X$  auf den Raum der Youngschen Maße verallgemeinert werden kann und leiten die erweiterten Evolutionsgleichungen her. Dazu beweisen wir, daß der Lösungsoperator  $\Phi_t : X \rightarrow X$  für alle  $t \geq 0$  im Young-Maß-Sinn gleichmäßig stetig ist.

Die erste Gleichung bezeichnen wir als mikrokinetisch regularisiertes Modell:

$$(M) \quad \rho \ddot{u} = \partial_x(\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \dot{u}), \quad u|_{t=0} = u_0, \dot{u}|_{t=0} = v_0, u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = L.$$

Dabei ist  $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x)$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\beta > 0$  und  $\sigma$  eine glatte reelle, nichtmonotone Funktion. Es werden die stationären Youngschen Maße bestimmt und gezeigt, daß sie eine echte Erweiterung der Equilibria der ursprünglichen Gleichung (M) darstellen, d.h. es gibt ein stationäres Youngsches Maß  $(\Psi_x)_{x \in \Omega}$  in der Art, daß keine Folge von stationären Lösungen in  $X$  im Young-Maß-Sinn gegen  $(\Psi_x)_{x \in \Omega}$  konvergiert. Außerdem wird die Existenz klassischer Lösungen nachgewiesen, die für  $t \rightarrow \infty$  gegen ein nichttriviales stationäres Youngsches Maß  $(\Psi_x^\infty)_{x \in \Omega}$  streben. Wir zeigen durch die Anwendung der Energie-Casimir-Methode, daß eine bestimmte Menge von Equilibria gegenüber einer eingeschränkten Menge von Störungen neutral stabil ist. Die Diskussion des mikrokinetischen Modells wird abgeschlossen, indem wir eine Methode entwickeln, um die Dynamik von Young-Maß-Lösungen numerisch zu simulieren und die Ergebnisse einiger Beispielrechnungen angeben.

Im dritten Kapitel untersuchen wir eine viskos gedämpfte Wellengleichung

$$(V) \quad \ddot{u} = \partial_x(\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \dot{u}) - \alpha u, \quad u|_{t=0} = u_0, \dot{u}|_{t=0} = v_0, u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$$

mit  $\alpha \geq 0$ . Die Erweiterung der durch (V) definierten Dynamik auf einen Young-Maß-Raum erfordert die Verwendung von Halbgruppentheorie. Wir erhalten eine verallgemeinerte Energie, deren Ableitung entlang von Lösungskurven nichtpositiv ist. Mit Hilfe dieser Liapunov-Funktion verallgemeinern wir ein Resultat von FRIESECKE und MCLEOD [1996], das bisher nur für klassische Lösungen bekannt war: Alle Young-Maß-Lösungen deren Anfangsenergie schon gering ist, konvergieren gegen ein Equilibrium, das vom Anfangszustand abhängt.

**Schlagworte:** Oszillationen, Youngsche Maße, viskose Dämpfung.

## Abstract

In this thesis the effective behavior of instationary solutions with highly oscillatory initial states of two nonlinear partial differential equations is investigated. For this purpose the notions of a Young-measure solution and Young-measure convergence are introduced. A Young measure is a weakly measurable family of probability measures  $(\Psi_x)_{x \in \Omega}$  where  $\Omega = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . A sequence of functions  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$  tends to  $(\Psi_x)_{x \in \Omega}$  in the sense of Young measures if every globally Lipschitz function  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  has the property that

$$g(u_n(x)) \text{ weakly tends to } \int_{y \in \mathbb{R}^d} g(y) \Psi_x(dy) \text{ (weak-}^* \text{ if } p = \infty).$$

For both model equations we show that it is possible to generalize the dynamics from a classical Sobolev space  $X$  to a Young-measure space. This is done by proving that the semiflow  $\Phi_t : X \rightarrow X$  is uniformly continuous in the sense of Young measures. In addition the evolution equations which determine the Young measure solutions are derived.

The equation

$$(M) \quad \rho \ddot{u} = \partial_x(\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \dot{u}), \quad u|_{t=0} = u_0, \dot{u}|_{t=0} = v_0, u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = L,$$

is referred to as the microkinetic model. Here  $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x)$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\beta > 0$  and  $\sigma$  is a smooth, realvalued nonmonotone function. The stationary Young measures are determined and it is shown that they constitute a genuine extension of the set of equilibria of the original equation (M). This means that there exist stationary Young measures  $(\Psi_x)_{x \in \Omega}$  which cannot be approximated by classical stationary solutions in the sense of Young measures. In addition we prove the existence of classical solutions which converge to a genuine Young measure as  $t$  tends to infinity. By employing the energy-Casimir method we show that a certain set of Young-measure equilibria is neutrally stable with respect to a restricted set of perturbations. The discussion of the microkinetic model is concluded by deriving a numerical scheme which allows us to simulate the dynamics of Young-measure solutions. Results of exemplary computations are presented.

In the third chapter we consider the viscoelastically damped wave equation

$$(V) \quad \ddot{u} = \partial_x(\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \dot{u}) - \alpha u, \quad u|_{t=0} = u_0, \dot{u}|_{t=0} = v_0, u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

where  $\alpha \geq 0$  and  $\beta > 0$ . The extension of the dynamics defined by (V) to a Young-measure space requires the use of semi-group theory. We obtain a generalized energy which decays along solutions. By exploiting this Liapunov function we generalize a result of FRIESECKE and MCLEOD [1996] concerning the asymptotic behavior of classical solutions: every Young-measure solution with low energy converges to an equilibrium which depends in general on the initial value.

**Keywords:** Oscillations, Young measures, viscoelasticity.

## Inhaltsverzeichnis

Einleitung	6
Kapitel 1. Grundlagen	10
1. Die Modellgleichungen	10
2. Maßwertige Lösungen	14
Kapitel 2. Das mikrokinetisch regularisierte Modell	24
1. Existenz der Dynamik	26
2. Langzeitverhalten	31
3. Numerische Simulation	45
Kapitel 3. Das viskos gedämpfte Modell	52
1. Existenz der Dynamik	54
2. Langzeitverhalten	62
Literaturverzeichnis	74
Lebenslauf	76

## Einleitung

Seit dem Beginn der 80er Jahre wurden Youngsche Maße erfolgreich zum Studium nichtlinearer partieller Differentialgleichungen eingesetzt. Die ursprüngliche Motivation zur Betrachtung dieser verallgemeinerten Funktionen entstand bei der Analyse nichtkonvexer Variationsprobleme, deren Infimum nicht angenommen wird, weil die minimierende Funktion unendlich schnell oszillieren müßte. Das klassische Beispiel für ein derartiges Funktional ist  $I(u) = \int_0^1 \frac{1}{4}((\partial_x u)^2 - 1)^2 + u^2 dx$  (siehe [Yo69]). Es entstand zusätzliches Interesse an zeitabhängigen Youngschen Maßen als Lösungen von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, da die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen vektorwertiger nichtlinearer hyperbolischer Gleichungen immer noch offen ist. Vor allem die Vielfalt der möglichen Schocklösungen führte zur Einführung der Entropie- und Viskositätslösungen. 1983 wies DiPERNA in [DiP83] die Existenz von Viskositätslösungen für die skalare quasilineare Wellengleichung nach, indem er die Lösungen einer parabolisch regularisierten Gleichung betrachtete und die Stärke der Regularisierung gegen 0 streben ließ. Dieser Ansatz erforderte den Begriff der maßwertigen Lösungen, allerdings wird in [DiP83] im nachhinein gezeigt, daß die so konstruierten maßwertigen Lösungen tatsächlich nur klassische Funktionen sind. In einer wegweisenden Arbeit konnte SLEMROD 1989 für die Vorwärts-Rückwärtswärmeleitungsgleichung  $\dot{u} = \operatorname{div} q(\nabla u)$ , wobei  $q$  nicht monoton ist ( $[q(\lambda_1) - q(\lambda_2)] \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) < 0$  für mindestens ein Paar  $\lambda_1, \lambda_2$ ), die Existenz echt maßwertiger Lösungen nachweisen, d.h. sie können nicht mehr als Funktionen dargestellt werden. Über ein Eulerverfahren konstruierten KINDERLEHRER, PEDREGAL und DEMOULINI für dieselbe Gleichung ebenfalls echt maßwertige Lösungen. Mit diesen Ergebnissen rückte wieder der ursprüngliche Gesichtspunkt von Youngschen Maßen in den Vordergrund, die Möglichkeit im klassischen Sinn schlecht gestellte Probleme zu analysieren.

Ein vollständiger Übergang von der mittlerweile gut ausgebauten Analysis nichtkonvexer Variationsprobleme mit Hilfe Youngscher Maße zu dynamischen Problemen ist bislang jedoch noch nicht gelungen. 1987 entwickelten BALL und JAMES in [BJ87] eine mathematische Theorie für Materialien, deren elastisches Verhalten von Phasenübergängen gekennzeichnet ist. Sie konnten den experimentell beobachteten Mikrostrukturen Youngsche Maße zuordnen, die das jeweilige Energiefunktional minimieren. Allerdings existiert bislang noch kein brauchbares mathematisches Modell, das die dynamische Erzeugung der feinen Strukturen ausgehend von einem glatten Verzerrungsfeld beschreibt. In [BHJPS91] wird

dieses Problem anhand von zwei Modellgleichungen diskutiert:

$$\begin{aligned} \text{(L)} \quad & \ddot{u} = \partial_x(\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \dot{u}) - \alpha u \quad \text{und} \\ \text{(N)} \quad & \ddot{u} = \sigma(\|\partial_x u\|) \partial_x^2 u + \beta \partial_x^2 \dot{u} - \alpha u, \end{aligned}$$

wobei für  $u$  gilt  $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x)$  und  $\sigma$  nicht monoton ist. Gleichung (N) wird auch als das nichtlokale Modell bezeichnet; die Lösungen entwickeln zwar Mikrostruktur, allerdings kann das Langzeitverhalten nur im Fourierraum diskutiert werden. Hier sieht man jedoch physikalisch interessante Eigenschaften der Lösungen wie Grenzflächen nicht mehr. Gleichung (L) (das lokale Modell) wird auch als viskos gedämpfte Wellengleichung bezeichnet; sie ist physikalisch sinnvoll, allerdings zeigen die Autoren, daß die Lösungen keine Mikrostruktur entwickeln. Diese Tatsache ist überraschend, denn die Energie nimmt auf Lösungskurven ab und ein Penalisierungsterm sorgt dafür, daß das zugehörige Variationsproblem lediglich eine Young-Maß-Lösung besitzt.

Durch diese Resultate ist die Frage motiviert, wie sich Lösungen verhalten, deren Anfangsbedingungen schon hochoszillativ sind, d.h. man interessiert sich für die Evolution von Mikrostruktur unter einer gegebenen Gleichung. Dies stellt eine Abschwächung der ursprünglichen Frage nach der dynamischen Generierung von Mikrostruktur dar: Man betrachtet stark oszillierende Anfangsdaten und fragt nach dem effektiven Verhalten der erzeugten Lösungen. Anders als bei der Vorwärts-Rückwärtswärmeleitungsgleichung ist hier das zugrundeliegende Problem im klassischen Sinn korrekt gestellt. FONSECA, BRANDON und SWART zeigten in [FBS94] für die viskos gedämpfte Wellengleichung (L), daß man die Evolution eines Youngschen Maßes durch den unendlichen Vektor der Momente beschreiben kann, allerdings ist das zugehörige unendlich-dimensionale Differentialgleichungssystem so kompliziert, daß die Frage nach dem qualitativen Verhalten der Lösungen offen blieb.

Gegenstand dieser Arbeit ist es, die Dynamik von zwei Gleichungen auf den Raum der Youngschen Maße zu verallgemeinern und Aussagen über das qualitative Langzeitverhalten herzuleiten. Der Zugang ist jedoch ein anderer, als der in [FBS94] verfolgte. Anstelle die Dynamik eines Wahrscheinlichkeitsmaßes durch das Verhalten der Momente zu charakterisieren, zeigen wir, daß man sie auch erhalten kann, indem man den zum Wahrscheinlichkeitsmaß gehörigen Grundraum transformiert. Dieses Konzept maßwertiger Lösungen ist restriktiver als DIPERNAS Ansatz, in dem nur die Erhaltungsgleichung bezüglich der Erwartungswerte erfüllt sein muß, jedoch nicht die schwache Formulierung, in der allgemeine Funktionen zum Testen zugelassen sind. Dies führt dazu, daß DIPERNAS Young-Maß-Lösungen nicht mehr eindeutig sind. Da seine Young-Maß-Lösungen tatsächlich aber klassische Funktionen sind, spielt das Problem in diesem Fall keine Rolle.

Eine der in dieser Arbeit untersuchten Gleichungen ist die viskos gedämpfte Wellengleichung aus [BHJPS91], die zweite ist eine Modifikation der ersten, sie wurde in der

Literatur bisher wenig erwähnt, wir bezeichnen sie als mikrokinetisches Modell:

$$(M) \quad \rho \ddot{u} = \partial_x(\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \ddot{u}).$$

Sie konserviert eine Summe der klassischen kinetischen und elastischen Energie und einer von V. I. LEVITAS in Gesprächen vorgeschlagenen mikrokinetischen Energie, die die Trägheit mikroskopischer Strukturen wie z.B. Phasengrenzen berücksichtigt.

Wir leiten die Evolutionsgleichung für Youngsche Maße her und charakterisieren die stationären Young-Maß (YM)-Lösungen, dabei erhalten wir eine deutliche Erweiterung der Ruhelagen der klassischen stationären Lösungen. Anschließend weisen wir nach, daß in diesem Modell Mikrostruktur entstehen kann, indem wir einen einfachen Fall betrachten, nur klassische Anfangsbedingungen zulassen und zeigen, daß die Lösung für  $t \rightarrow \infty$  ein stationäres Youngsches Maß approximiert. Somit haben wir ein Beispiel für die dynamische Erzeugung von Mikrostruktur. Die so gefundene Mikrostruktur hat allerdings mit den experimentellen Beobachtungen bei Formgedächtnislegierungen wenig gemeinsam. Wir benutzen die strukturelle Ähnlichkeit des mikrokinetischen Modells mit einer häufig untersuchten Gleichung aus der Plasmaphysik, dem Vlasov-Poisson-System, um Aussagen über die Stabilität von Gleichgewichten herzuleiten. Hauptsächliches Hilfsmittel ist die Energie-Casimir-Methode, die von MARSDEN und anderen erstmals in [HMRW85] vorgestellt wurde. Sie stellt ein sehr allgemeines Verfahren dar, um die Stabilität von Fixpunkten in degenerierten Hamiltonschen Systemen nachzuweisen. Der Kern der Methode besteht darin, den Fixpunkt mit einer spezifisch angepaßten Erhaltungsgröße einzuschließen, die man mit Hilfe der vielen weiteren Erhaltungsgrößen, die das System neben der Energie besitzt, konstruiert. Wir schließen die Diskussion des mikrokinetischen Modells ab, indem wir ein numerisches Verfahren herleiten, mit dem die Dynamik simuliert werden kann und einige numerische Resultate vorstellen.

Viele der an diesem Modell entwickelten Methoden können wir auch auf die zweite Gleichung, die viskos gedämpfte Wellengleichung (L) anwenden, wir leiten auf analoge Weise eine Evolutionsgleichung für YM-Lösungen her. Anders als das mikrokinetische Modell ist (L) dissipativ, dies äußert sich darin, daß die Evolutionsgleichung in einer Komponente parabolisch ist und damit nur in einer Komponente Young-Maß-Lösungen zuläßt. In diesem Modell sind die klassischen stationären Lösungen dicht in der Menge der stationären Youngschen Maße.

Wir zeigen danach in einem längeren Beweis, daß alle Young-Maß-Lösungen, deren Anfangsenergie schon gering ist, für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen Fixpunkt konvergieren. Dieses Ergebnis ist eine Verallgemeinerung einer Arbeit von FRIESECKE und MCLEOD, in der das Langzeitverhalten klassischer Lösungen für die viskos gedämpfte Wellengleichung untersucht wird. Obgleich wir die Konvergenz von Young-Maß-Lösungen zeigen und nicht nur die Konvergenz klassischer Lösungen, können wir viele Argumente aus [FM96] für unsere Zwecke anpassen. Mit dieser Verallgemeinerung ist der Nachweis erbracht, daß das



in dieser Arbeit vorgestellte Konzept von Young-Maß-Lösungen für Transportgleichungen eine natürliche und nützliche Erweiterung des klassischen Lösungsbegriffes darstellen kann.

Herrn Professor Mielke danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und die zahlreichen interessanten Gespräche, die mir sehr geholfen haben. Weiter bedanke ich mich bei meinen Kollegen am Institut für eine angenehme Arbeitsatmosphäre, wobei ich vor allem meinen Zimmernachbarn Herrn Dr. Pius Sprenger hervorheben möchte.

Diese Arbeit wurde von der VW-Stiftung unter dem Titel I 70 284 gefördert.

## KAPITEL 1

### Grundlagen

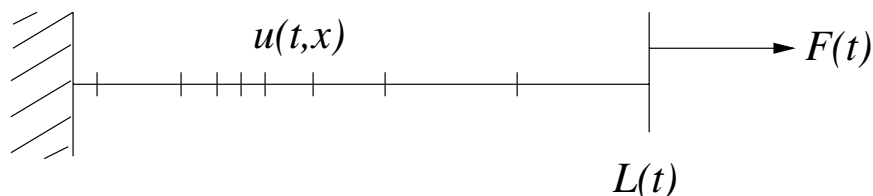
Wir stellen in diesem Kapitel einige Vorüberlegungen zusammen, um den Fluß der in den anschließenden Kapiteln durchgeführten mathematischen Analyse nicht durch Definitionen und einfache Herleitungen unterbrechen zu müssen. Zunächst führen wir die beiden Differentialgleichungen ein, für die wir Young-Maß-Lösungen definieren wollen und diskutieren kurz wichtige Eigenschaften der klassischen Lösungen sowie die bekannten Ergebnisse. Im zweiten Abschnitt definieren wir Young-Maß-Lösungen für nichtautonome lineare Transportgleichungen und fassen einige Gronwall-Abschätzungen in einem Lemma zusammen.

#### 1. Die Modellgleichungen

Die beiden in dieser Arbeit untersuchten Differentialgleichungen modellieren die Dynamik eines eingespannten Zugdrahtes. Das rein elastische Verhalten wird durch die quasilineare Wellengleichung

$$(1.1) \quad \rho \ddot{u} = \partial_x \sigma(\partial_x u), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0$$

beschrieben, wobei wir zunächst die Randbedingungen außer acht lassen. Hierbei ist  $u : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die gesuchte Funktion, das Grundgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}$  wird als Referenzkonfiguration bezeichnet, es definiert die Gestalt des undeformierten Drahtes. Für  $x \in \Omega$  ist die Position eines Materialpunktes zur Zeit  $t$  durch  $x + u(t, x)$  gegeben,  $u$  heißt auch Verschiebung,  $\partial_x u$  Verzerrung,  $\rho$  ist die Materialdichte. Wir beschränken uns auf rein homogenes Materialverhalten, d.h.  $\rho$  hängt nicht von  $x$  ab. Die fest vorgegebene Funktion  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschreibt die Antwort des Materials auf Verzerrungen und wird als Spannungs-Verzerrungsbeziehung bezeichnet.



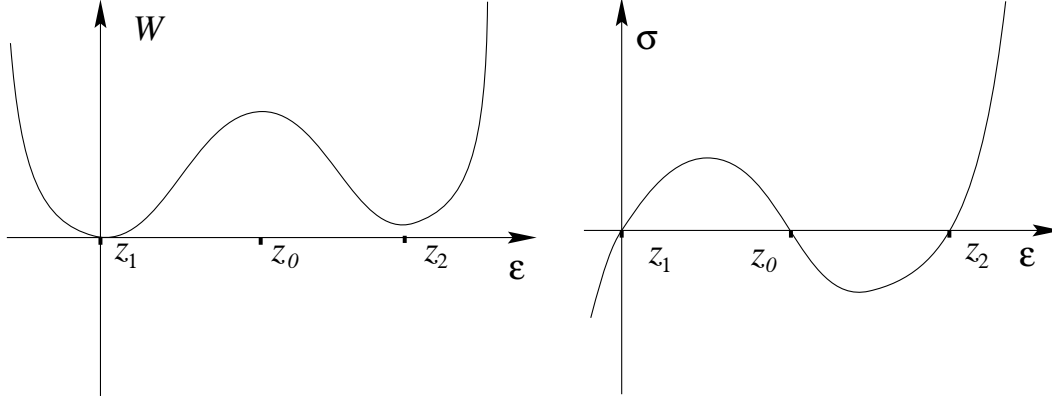
Wir nehmen an, daß das Materialverhalten des Zugdrahtes von Phasenübergängen gekennzeichnet ist und machen daher folgende Annahmen für die Verzerrungsenergiedichtefunktion  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- i.)  $W \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\sigma := W'$ ,  $\inf_{\varepsilon \in \mathbb{R}} W(\varepsilon) = 0$ ,

ii.)  $\sigma$  hat genau drei nichtdegenerierte Nullstellen  $z_1 < z_0 < z_2$ .

iii.) Es existiert  $c > 0$  so, daß  $\sigma'(\varepsilon) > c$  für  $|\varepsilon| \rightarrow \infty$ , und  $\|\sigma'\|_{C_b^0(\mathbb{R})} = \text{lip}(\sigma) < \infty$ .

Unter diesen Voraussetzungen wird  $W$  auch als „double-well“-Potential bezeichnet.



Aus ii.) folgt, daß es eine Konstante  $r > 0$  gibt, so daß für  $|c| \leq r$  die Gleichung  $\sigma(\varepsilon) = c$  genau drei Lösungen  $z_1(c) < z_0(c) < z_2(c)$  besitzt. Wir setzen  $\sigma_0 := |\sigma(0)|$  und  $\sigma_c(\varepsilon) := \sigma(\varepsilon) - c$ .

Auf die in iii.) geforderte globale Lipschitz-Stetigkeit von  $\sigma$  kann zugunsten allgemeinerer Wachstumsbedingungen auch verzichtet werden, allerdings würde dies die Darstellung und Notation verkomplizieren, daher fordern wir die zusätzliche Regularität. Das interessante nichtlineare Verhalten von  $\sigma$  wird dadurch nicht eingeschränkt.

Nur wenn  $\sigma$  monoton wachsend ist, ist durch Gleichung (1.1) ein sinnvolles Cauchy-Problem definiert, anderenfalls existiert eine Hadamard-Instabilität, die zu stark anwachsenden Oszillationen und zum „Blow-up“ in endlicher Zeit führen kann. Um trotz Voraussetzung ii.) eine Dynamik erklären zu können, wird Gleichung (1.1) durch die Hinzunahme eines Termes höherer Ordnung regularisiert, wir betrachten die beiden Fälle  $\beta \partial_x^2 \ddot{u}$  und  $\beta \partial_x^2 \dot{u} - \alpha u$ . Für das Grundgebiet  $\Omega$  setzen wir das Einheitsintervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  und definieren die folgenden Evolutionsgleichungen, deren Dynamik wir in dieser Arbeit analysieren:

#### Das mikrokinetische Modell:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \rho \ddot{u} &= \partial_x(\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \ddot{u}), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, \infty), \\ u|_{t=0} &= u_0, \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0, \quad u|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

An der Stelle  $x = 1$  schreiben wir entweder eine

- Dirichlet-Randbedingung  $u|_{x=1} = L$  oder eine
- Neumann-Randbedingung  $(\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \ddot{u})|_{x=1} = 0$  vor.

#### Das viskos gedämpfte Modell:

$$(1.3) \quad \ddot{u} = \partial_x(\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \dot{u}) - \alpha u, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

Wegen Voraussetzung ii.) für  $\sigma$  sind beide Modelle nur für  $\beta > 0$  korrekt gestellte Cauchy-Probleme. Gleichung (1.2) ist konservativ, d.h. es existiert eine Energie, die von den Lösungen erhalten wird.

SATZ 1.1. *Alle glatten Lösungen von (1.2) konservieren die Gesamtenergie*

$$E_\beta = E_\beta(u) = \int_0^1 \left\{ W(\partial_x u) + \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \beta (\partial_x \dot{u})^2 \right\} dx.$$

BEWEIS. Wir beweisen die Behauptung, indem wir zeigen, daß die zeitliche Ableitung von  $E_\beta(u(t))$  verschwindet.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_\beta(u(t)) &= \int_0^1 \{ \sigma(\partial_x u) \partial_x \dot{u} + \rho \dot{u} \ddot{u} + \beta (\partial_x \dot{u}) \partial_x \ddot{u} \} dx \\ &= \int_0^1 \dot{u} \{ \rho \ddot{u} - \partial_x \sigma(\partial_x u) - \beta \partial_x^2 \ddot{u} \} dx \\ &\quad + \dot{u}(t, 1) (\sigma(\partial_x u(t, x)) + \beta \partial_x \ddot{u}(t, 1)) - \dot{u}(t, 0) (\sigma(\partial_x u(t, 0)) + \beta \partial_x \ddot{u}(t, 0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

wegen der Randbedingungen und Gleichung (1.2). □

Der Term  $\frac{\beta}{2} \int_0^1 (\partial_x \dot{u})^2 dx$  modelliert die kinetische Energie, die durch die Trägheit der mikroskopischen Strukturen (z.B. Phasengrenzen) verursacht wird, er wird daher als mikrokinetische Energie bezeichnet. Die Betrachtung dieses Termes regte V. I. Levitas im Rahmen des fächerübergreifenden Gemeinschaftsprojektes „Spannungs- und verzerrungsbedingte Phasenübergänge“ der VW-Stiftung an. Nach Meinung des Verfassers wurde die durch das mikrokinetische Modell definierte Dynamik bislang kaum studiert, wohingegen das viskos gedämpfte Modell mehrmals intensiv analysiert worden ist.

Im Gegensatz zum mikrokinetischen Modell ist (1.3) dissipativ, wir definieren in diesem Fall die Gesamtenergie

$$E_\alpha(u) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{\alpha}{2} u^2 + W(\partial_x u) \right) dx$$

und erhalten den

SATZ 1.2. *Es sei  $u(t)$  eine glatte Lösung von (1.3). Dann gilt:*

$$\frac{d}{dt} E_\alpha(u(t)) = -\beta \|\partial_x \dot{u}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_\alpha(u(t)) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{\alpha}{2} u^2 + W(\partial_x u) \right) dx = \int_0^1 \dot{u} \ddot{u} + \alpha u \dot{u} + \sigma(\partial_x u) \partial_x \dot{u} dx \\ &= \int_0^1 \dot{u} (\ddot{u} + \alpha u - \partial_x \sigma(\partial_x u)) dx = \int_0^1 \dot{u} \beta \partial_x^2 \dot{u} dx = -\beta \|\partial_x \dot{u}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

Der Regularisierungsterm  $\beta \partial_x^2 \dot{u}$  modelliert eine durch viskose Reibung erzeugte Dämpfung und wird auch als Kelvin-Voigt-Dämpfung bezeichnet.

Im folgenden studieren wir einige qualitative Eigenschaften der stationären Lösungen von (1.2) und (1.3). Zur Vereinfachung verlangen wir am rechten Rand die Dirichlet-Randbedingung  $u|_{x=1} = 0$ , für die anderen Randbedingungen des mikrokinetischen Modells erhalten wir analoge Ergebnisse. Die Equilibria der beiden Systeme sind durch die Gleichung

$$(1.4) \quad \partial_x \sigma(\partial_x u) - \alpha u = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0$$

gegeben, wobei im mikrokinetischen Modell (1.2)  $\alpha = 0$  ist. Falls  $\sigma'(\varepsilon) > 0$  für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  ist (was durch Voraussetzung ii.) ausgeschlossen ist), ist Gleichung (1.4) elliptisch und hat daher eine eindeutige Lösung, siehe [BHJPS91]. In unserem Fall, in dem  $\sigma'$  auch negativ sein kann, existiert allerdings ein Kontinuum stationärer Lösungen, die in [BHJPS91] charakterisiert werden. Für  $\alpha = 0$  erhält man die einfache Gleichung  $\sigma(\partial_x u) = c$  für eine reelle Konstante  $c$ . Somit haben für  $|c| < r$  die Gleichgewichte die Gestalt:

$$\partial_x u = \sum_{i=0}^2 \chi_{\omega_i} z_i(c), \quad u(0) = 0,$$

wobei  $(\omega_i)_{i=0,1,2}$  eine beliebige Partition von  $\Omega$  ist und  $\sum_{i=0}^2 \text{vol}(\omega_i) z_i(c) = 0$  erfüllt sein muß.

Die von der viskosen Dämpfung beherrschte Langzeitdynamik von (1.3) wurde schon mehrfach untersucht; für monotonen  $\sigma$ ,  $\beta > 0$  und  $\alpha = 0$  wiesen 1968 GREENBERG, MACCAMY und MIZEL in [GMM68] zum ersten Mal nach, daß alle Lösungen für  $t \rightarrow \infty$  gegen das eindeutige Equilibrium konvergieren. PEGO behandelte 1987 den Fall, daß  $\sigma$  nicht monoton ist. Obwohl nun viele Equilibria existieren und somit keine eindeutige Ruhelage mehr als potentieller Grenzwert zur Verfügung steht, konnte PEGO zeigen, daß zu jeder Anfangsbedingung eine Gleichgewichtslösung  $u^*$  in der oben angegebenen Form existiert, so daß für  $t \rightarrow \infty$  das Equilibrium  $u^*$  in  $W^{1,p}(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$  von der Lösung  $u(t)$  approximiert wird.

Die Motivation für den Fall  $\alpha > 0$  stammt aus einer aktuellen Fragestellung der Variationsrechnung. Wir setzen zusätzlich zu den Eigenschaften i.-iii.) von  $W$  voraus, daß  $W(z_1) = W(z_2)$  und  $z_1 < 0 < z_2$  ist und betrachten das Funktional  $E_\alpha(u)$ . Durch die Aussage von Satz 1.2 wird nahegelegt, daß für  $\alpha = 0$  jede Lösung  $u(t)$  gegen ein Minimum des Funktionals  $G(u) = \int_0^1 W(\partial_x u) dx$  strebt, dies konnte ja auch von PEGO bestätigt werden. Dabei ist zu berücksichtigen, daß PEGO am rechten Randpunkt nicht die Dirichlet-Randbedingung  $u|_{x=1} = L$ , sondern die Neumann-Randbedingung  $\sigma(\partial_x u)|_{x=1} = 0$  betrachtete. Dies hat zur Folge, daß in den oben konstruierten Equilibria  $c = 0$  ist. Da die beiden lokalen Minima von  $W$  dieselben Werte besitzen, ist jede oben konstruierte stationäre Lösung mit  $\text{vol}(\omega_0) = c = 0$  zugleich ein absolutes Minimum von  $G$ , d.h. für

$t_k \rightarrow \infty$  mit  $k \rightarrow \infty$  ist für jede Lösung  $u(t)$ , die ein Gleichgewicht ohne Anteile auf  $z_0$  generiert, die Folge  $u(t_k)$  eine minimierende Folge von  $G$ . Dieses Bild ändert sich, wenn  $\alpha > 0$  zugelassen wird. In diesem Fall besitzt  $G_\alpha(u) = \int_0^1 W(\partial_x u) + \frac{\alpha}{2} u^2 dx$  kein absolutes Minimum in  $W^{1,p}(\Omega)$  für alle  $p \in [1, \infty]$ . Der zusätzliche Summand  $\int_0^1 \frac{\alpha}{2} u^2 dx$  modelliert eine elastische Energie mit Stärke  $\alpha$ , die den Draht in die Ausgangslage zurückdrängt. Ursache dieser Energie ist ein Kontinuum linear elastischer Federn, die jeden Massepunkt mit seiner Referenzlage verbinden. Die Nichtminimierbarkeit von  $G_\alpha$  in klassischen Funktionenräumen kann durch die Angabe einer minimierenden Folge gezeigt werden. Wenn o.B.d.A.  $z_1 = -z_2$  angenommen wird, dann definieren wir die Folge  $u_n \in W^{1,\infty}(\Omega)$  mit

$$\partial_x u_n(x) = \begin{cases} z_1, & x \in \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{k}{n}, \frac{2k+1}{2n} \right) \\ z_2, & x \in \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{2k+1}{2n}, \frac{k+1}{n} \right) \end{cases}$$

und  $u_n(0) = 0$ . Es ist klar, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} G_\alpha(u_n) = 0$  ist. Angenommen, es gäbe eine Funktion  $u^* \in W^{1,p}(\Omega)$  mit der Eigenschaft  $G_\alpha(u^*) = 0$ , dann würde aus  $W \geq 0$  sofort folgen, daß  $\frac{\alpha}{2} \|u^*\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$  wäre und somit  $u^* = 0$ . Es gilt aber  $G_\alpha(0) = W(0) > 0$ .

Daher ist eine natürliche Frage, ob es eine Lösung  $u(t)$  für Gleichung (1.3) gibt, die das Verhalten der oben konstruierten minimierenden Folge simuliert, d.h.  $\lim_{t \rightarrow \infty} G_\alpha(u(t)) = 0$ . Diese Frage konnte in [BHJPS91] verneint werden, allerdings beinhaltet der Beweis keine Aussage, ob die Lösungen für  $\alpha > 0$  überhaupt in irgendeinem Sinn konvergieren. 1996 bewiesen FRIESECKE und MCLEOD in [FM96], daß zumindest alle Lösungen mit niedriger Anfangsenergie gegen eines der in [BHJPS91] charakterisierten Equilibria von (1.3) konvergieren.

## 2. Maßwertige Lösungen

Wir interessieren uns für das qualitative Verhalten von Lösungen der im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Evolutionsgleichungen. Dabei wollen wir vor allem Lösungen studieren, deren Anfangszustände sehr schnell oszillieren. Wichtigstes Hilfsmittel für die Analyse sind die in diesem Abschnitt vorgestellten Youngschen Maße. Die Motivation für die Betrachtung dieser verallgemeinerten Funktionen besteht darin, daß der schwache Grenzwert  $u^*$  einer Funktionenfolge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (wir schreiben  $u_n \rightharpoonup u^*$ ,  $\overset{*}{\rightharpoonup}$  für schwach\*-Konvergenz) keinerlei Rückschlüsse auf das Verhalten der Folge  $g(u_n)$  zuläßt, wenn  $g$  eine nichtaffine Funktion ist. Durch das Beispiel  $g(u) = u^2$  und  $u_n(x) = \sin(nx)$  ist klar, daß die Beziehung  $g(u_n) \rightharpoonup g(u^*)$  im allgemeinen nicht gilt. Bei beschränkten Folgen  $(u_n)$  kann jedoch eine Teilfolge  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  so ausgewählt werden, daß eine Schar von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\nu_x$  mit der Eigenschaft  $g(u_n(x)) \rightharpoonup \int g d\nu_x$  existiert. Die so erzeugte Wahrscheinlichkeitsmaßschar  $\nu_x$  wird als Youngsches Maß bezeichnet:

**THEOREM 1.3 ([Ba89]).** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Lebesgue-messbar,  $K \subset \mathbb{R}^m$  abgeschlossen und  $z^{(j)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$   $j \in \mathbb{N}$  eine Folge Lebesgue-messbarer Funktionen mit der Eigenschaft*

$$z^{(j)} \rightarrow K \text{ im Maß,}$$

d.h. für alle offenen Umgebungen  $U$  von  $K \subset \mathbb{R}^m$  gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{vol}\{x \in \Omega : z^{(j)}(x) \notin U\} = 0.$$

Dann existiert eine Teilfolge  $(z^{(j_l)})_{l \in \mathbb{N}}$  von  $(z^{(j)})_{j \in \mathbb{N}}$  und eine meßbare Familie von nicht-negativen Maßen  $(\nu_x)_{x \in \Omega}$  auf  $\mathbb{R}^m$ , so daß

- i.)  $\int_{\mathbb{R}^m} 1 d\nu_x \leq 1$ ,
- ii.)  $\text{supp } \nu_x \subset K$  für fast alle  $x \in \Omega$  und
- iii.)  $f(z^{(j_l)}(x)) \rightharpoonup^* \int_{\mathbb{R}^m} f d\nu_x$  in  $L^\infty(\Omega)$  für alle  $f \in C(\mathbb{R}^m)$  mit  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0$ .

Wenn  $(z^{(j_l)})_{l \in \mathbb{N}}$  außerdem eine Beschränktheitsbedingung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{j_l} \text{vol}\{x \in \Omega \cap B_R : |z^{(j_l)}(x)| \geq k\} = 0 \text{ für alle } R > 0$$

erfüllt, wobei  $B_R = B(0, R)$  ist, gilt zusätzlich  $\int_{\mathbb{R}^m} 1 d\nu_x = 1$ , d.h.  $\nu_x$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß und für jede meßbare Teilmenge  $A \subset \Omega$  und jedes  $f \in C(\mathbb{R}^m)$  mit der Eigenschaft, daß  $\{f(z^{(j_l)})\}_{l \in \mathbb{N}}$  schwach relativ folgenkompakt ist, gilt:

$$f(z^{(j_l)}(x)) \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}^m} f d\nu_x \text{ in } L^1(A).$$

Gegenstand dieser Arbeit ist die Frage, inwieweit von einem effektiven Verhalten zeitabhängiger Lösungen gesprochen werden kann, wenn als Anfangsbedingung eine Folge betrachtet wird, die ein Youngsches Maß erzeugt. Formaler ausgedrückt:

Sei  $(u_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Funktionenfolge,  $\Psi_0$  ein Youngsches Maß so, daß für alle stetigen Funktionen  $g$  gilt:  $g(u_0^n) \rightharpoonup \int g(u) \Psi_0(du)$  (die Integration einer Funktion  $g$  bezüglich eines Maßes  $\mu$  wird  $\int g(x) \mu(dx)$  notiert), und es sei  $u^n(t)$  die Lösung einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung, die der Anfangsbedingung  $u^n(0) = u_0^n$  genügt. Gibt es eine eindeutige, über  $t \in [0, T]$  parametrisierte Schar Youngscher Maße  $\Psi_t$  so, daß für alle  $t \in [0, T]$  und alle stetigen Funktionen  $g$  gilt:

$$g(u^n(t)) \rightharpoonup \int g(u) \Psi_t(du)$$

und wenn ja, welche Gleichung erfüllt sie? Eine derartige Schar Youngscher Maße bezeichnen wir als Young-Maß (YM)-Lösung. Ein schwächeres Konzept für Young-Maß-Lösungen schlug DIPERNA in [DiP83] vor; hierbei darf  $g$  nicht beliebig gewählt werden. Dies führt dazu, daß die YM-Schar  $\Psi(t)$  nicht mehr eindeutig ist. Wir illustrieren dies an einem Beispiel aus [Mi97].

Für eine allgemeine quasilineare Gleichung

$$\partial_t[a(u)] + \partial_x[b(u)] = f(u)$$

wird eine YM-Schar  $\Psi(t)$  YM-Lösung genannt, wenn

$$\partial_t \int a(u) \Psi_{t,x}(du) + \partial_x \int b(u) \Psi_{t,x}(du) = \int f(u) \Psi_{t,x}(du)$$

im distributiven Sinne gilt. Dies ist allerdings nur eine Aussage über die Erwartungswerte der Funktionen  $a, b$  und  $f$  bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\Psi_{t,x}$ , wohingegen unsere Definition die volle Information des Maßes enthält. Zum Beispiel ist

$$\Psi_{t,x} = \alpha(t,x)\delta_{-1} + \beta(t,x)\delta_0 + (1 - \alpha(t,x) - \beta(t,x))\delta_1, \quad \alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta \geq 0$$

eine YM-Lösung der Gleichung  $(\partial_t + c\partial_x)u = 0$  genau dann, wenn  $(\partial_t + c\partial_x)[1 - 2\alpha - \beta] = 0$  ist. Für eine eindeutige YM-Lösung in unserem Sinne muß jedoch gelten:  $(\partial_t + c\partial_x)\alpha = (\partial_t + c\partial_x)\beta = 0$ .

Wir werden die oben formulierte Frage zur Existenz und Eindeutigkeit von YM-Lösungen für die beiden in der Einleitung definierten Evolutionsgleichungen positiv beantworten. Grundlegend für die in den anschließenden beiden Kapiteln ausgeführten Überlegungen ist die skalare, nichtautonome Kontinuitätsgleichung

$$(1.5) \quad \dot{f}(t, y) + \operatorname{div}_y(f(t, y) \cdot v_t(y)) = 0.$$

Hierbei ist  $y \in \mathbb{R}^d$  für eine natürliche Zahl  $d$  und  $v_t(\cdot)$  ein vorgegebenes zeitabhängiges Vektorfeld. Gleichung (1.5) beschreibt die durch das Geschwindigkeitsfeld  $v_t$  erzeugte Evolution einer Massendichte  $f(t, y)$ . Unser Hauptinteresse gilt vor allem nichtlinearen Fragestellungen, d.h. das Vektorfeld  $v_t$  hängt nicht nur von  $t$  und  $y$ , sondern auch von der Lösung  $f(t)$  selbst ab; die wichtigsten Begriffe lassen sich jedoch am einfachsten anhand des linearen nichtautonomen Falles einführen.

Wir wollen nicht nur Funktionen als Lösung von (1.5) zulassen, sondern auch Radonmaße, genauer gesagt Wahrscheinlichkeitsmaße, die auch das Verhalten von punktförmigen Partikeln simulieren können. Für  $n, m \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir mit  $C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  den Raum aller global Lipschitz-stetigen Funktionen, die  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  abbilden und an der Stelle 0 verschwinden. Der so definierte Raum trägt die kanonische Norm  $\|g\|_{C_{\text{lip}}} = \operatorname{lip}(g)$ , wobei  $\operatorname{lip}(g)$  die Lipschitzkonstante von  $g$  ist. Weiterhin ist  $M(\mathbb{R}^d)$  der Raum der endlichen Radonmaße. Bezüglich der Norm  $\|\mu\|_{M(\mathbb{R}^d)} = \int_{y \in \mathbb{R}^d} 1 |\mu(dy)|$  ist  $M(\mathbb{R}^d)$  ein Banachraum. Im folgenden notieren wir die Dualität zwischen  $M(\mathbb{R}^d)$  und  $C_b^0(\mathbb{R}^d)$  wie üblich  $\langle \mu, g \rangle$ , wobei links das Maß und rechts die Testfunktion steht. Wenn klar ist, bezüglich welchen Maßes  $\mu$  die Dualität ausgewertet werden soll, schreiben wir auch verkürzt  $\langle g \rangle$ . Es sei  $PM(\mathbb{R}^d) \subset M(\mathbb{R}^d)$  die Teilmenge der Wahrscheinlichkeitsmaße, d.h.

$$\mu \in PM(\mathbb{R}^d) \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \mu, g \rangle \geq 0 \text{ für alle } g \in C_b^0(\mathbb{R}^d) \text{ mit } g \geq 0, \\ \langle \mu, 1 \rangle = 1. \end{cases}$$

Wir erinnern hier an die einfache Tatsache, daß  $PM(\mathbb{R}^d)$  kein Vektorraum mehr ist. Die Teilmenge  $PM^p(\mathbb{R}^d) \subset PM(\mathbb{R}^d)$  bezeichnet die Wahrscheinlichkeitsmaße mit  $p$ -tem Moment:

$$PM^p(\mathbb{R}^d) := \{\mu \in PM(\mathbb{R}^d) \mid \langle \mu(dy), |y|^p \rangle < \infty\}.$$

Die von  $\|\cdot\|_{M(\mathbb{R}^d)}$  definierte Spurmetrik  $d_s$  auf  $PM(\mathbb{R}^d)$  hat zwei Nachteile:



- i.) Für kein  $p > 0$  ist  $PM^p(\mathbb{R}^d)$  bezüglich  $d_s$  vollständig.
- ii.) Der Transport ist nicht stetig, man betrachte als Beispiel  $d = 1$  und die maßwertige Funktion  $\mu : \mathbb{R} \rightarrow PM(\mathbb{R}) : t \mapsto \delta_t$ , wobei  $\delta_t$  die um  $t$  verschobene Deltadistribution ist. Für die so definierte maßwertige Funktion gilt, wie man leicht nachprüft:  $\mu \notin C(\mathbb{R}, (PM(\mathbb{R}), d_s))$ .

Aus diesen Gründen versehen wir  $PM^1(\mathbb{R}^d)$  mit der sogenannten Wasserstein-Metrik:

$$d_W : [PM^1(\mathbb{R}^d)]^2 \rightarrow \mathbb{R} : (\mu, \nu) \mapsto \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle \mu - \nu, g \rangle$$

und vermerken dies mit einem Index W:  $(PM^1(\mathbb{R}^d), d_W) =: PM^1(\mathbb{R}^d)_W$ . Der so erzeugte metrische Raum  $PM^1(\mathbb{R}^d)_W$  ist vollständig [Ra91, S. 130 ff].

Für allgemeine Maße  $\mu$  interpretieren wir Gleichung (1.5) im distributiven Sinne, d.h. für alle Testfunktionen  $g \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$  soll gelten:

$$(1.6) \quad \frac{d}{dt} \langle \mu, g \rangle = \langle \mu(dy), \nabla g(y) \cdot v_t(y) \rangle.$$

Da nur Testfunktionen mit kompaktem Träger betrachtet werden, treten hier keine Probleme mit der Existenz der einzelnen Ausdrücke auf. Ein wichtiges Hilfsmittel für die Betrachtungen in den anschließenden Kapiteln sind Energiebilanzen, daher verschärfen wir an dieser Stelle den Lösungsbegriff geringfügig. Wir setzen

$$C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d) := \{g \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \mid \nabla g \in C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)\}.$$

DEFINITION 1.4. Es sei für alle  $(t, y) \in [0, T) \times \mathbb{R}^d$  das Vektorfeld  $v_t(\cdot) \in C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  und  $v(\cdot, y) \in C([0, T), \mathbb{R}^d)$ . Eine durch  $t \in [0, T)$  parametrisierte Schar von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\mu(t)$  heißt reguläre maßwertige Lösung der Gleichung

$$(1.7) \quad \dot{\mu} + \text{div}_y(\mu \cdot v_t) = 0,$$

wenn

- i.) für alle  $t \in [0, T)$  gilt:  $\mu(t) \in PM^2(\mathbb{R}^d)$ ,
- ii.)  $\mu \in C([0, T), PM^1(\mathbb{R}^d)_W) \cap C^1((0, T), C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d)'_{w^*})$ ,
- iii.) Gleichung (1.6) für alle Testfunktionen  $g \in C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d)$  erfüllt ist.

Die Bedingung  $\mu \in C^1((0, T), C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d)'_{w^*})$  ist dabei im folgenden Sinn zu verstehen: Für alle  $g \in C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d)$  ist die Funktion  $t \mapsto \langle \mu_t, g \rangle$  ein Element von  $C^1((0, T), \mathbb{R})$ .

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  und einen Homöomorphismus  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  definieren wir das transportierte Wahrscheinlichkeitsmaß  $\phi * \mu$ :

$$\langle \phi * \mu, g \rangle := \langle \mu, g \circ \phi \rangle$$

für alle Testfunktionen  $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ . Wir erhalten die Lösung für Gleichung (1.7), indem wir den Anfangszustand  $\mu(0)$  mit der durch das Vektorfeld  $v_t$  definierten Flußfunktion  $\phi_t$  transportieren. Im folgenden Lemma fassen wir die bisherigen Überlegungen zusammen

und beweisen einige Gronwall-Abschätzungen, die wir für den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für die Lösungen der eingangs vorgestellten Evolutionsgleichungen benötigen.

LEMMA 1.5. *Es sei  $(v_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  eine Schar Lipschitz-stetiger Vektorfelder in  $\mathbb{R}^d$ , so daß für alle  $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$  gilt:*

- i.)  $t \mapsto \text{lip}(v(t, \cdot)) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+)$ ,
- ii.)  $v(\cdot, y) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ ,

und es sei  $\phi_t^v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  der globale Lösungsfluß der nichtautonomen gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{y} = v_t(y)$ . Dann ist für jeden Anfangszustand  $\mu_0 \in PM^2(\mathbb{R}^d)$  mit  $\mu(t) := \phi_t * \mu_0$  die eindeutige reguläre maßwertige Lösung von (1.7) gegeben, die der Anfangsbedingung  $\mu(0) = \mu_0$  genügt. Für  $\phi_t$  gelten die folgenden Abschätzungen:

- i.)  $\text{lip}(\phi_t) \leq e^{\ell t}$  mit  $\ell = \|\text{lip}(v)\|_{L^\infty([0,t])}$ ,
- ii.)  $\|\phi_t^1 - \phi_t^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq t e^{\mathcal{L}t} \cdot \sup_{s \in [0,t]} \|v_s^1 - v_s^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$   
mit  $\mathcal{L} = \max_{i=1,2} \{\|\text{lip}(v^i)\|_{L^\infty([0,t])}\}$ ,
- iii.)  $|\phi_t(y) - \phi_s(y)| \leq C(t)|t - s|(|y| + \|v(\cdot, 0)\|_{L^\infty([0,t])})$   
mit  $C(t) = (\ell t + 1)e^{\ell t} \max\{\ell, 1\}$  falls  $t \geq s$  ist.

BEWEIS. Es gilt für  $x, y \in \mathbb{R}^d$ :

$$\begin{aligned} |\phi_t(x) - \phi_t(y)| &= \left| x + \int_0^t v_s \circ \phi_s(x) ds - y - \int_0^t v_s \circ \phi_s(y) ds \right| \\ &\leq |x - y| + \ell \int_0^t |\phi_s(x) - \phi_s(y)| ds. \end{aligned}$$

Mit der Gronwallschen Ungleichung erhalten wir  $\text{lip}(\phi_t) \leq e^{\ell t}$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mu(t, dy), |y|^2 \rangle &= \langle \mu_0(dy), |\phi_t(y)|^2 \rangle \\ &\leq \langle \mu_0(dy), \text{lip}(\phi_t)^2 |y|^2 + 2 \text{lip}(\phi_t) |\phi_t(0)| |y| + |\phi_t(0)|^2 \rangle < \infty. \end{aligned}$$

Somit hat für alle  $t \in \mathbb{R}^+$  die Lösung ein zweites Moment. Für Ungleichung iii.) benötigen wir eine weitere Gronwall-Abschätzung. Für  $t \geq s$  gilt:

$$\begin{aligned} |\phi_t(y) - \phi_s(y)| &\leq \int_s^t |v_{t'} \circ \phi_{t'}(y)| dt' \\ &\leq \int_s^t |v_{t'} \circ \phi_{t'}(y) - v_{t'} \circ \phi_s(y)| dt' + \int_s^t |v_{t'} \circ \phi_s(y)| dt' \\ &\leq \ell \int_s^t |\phi_{t'}(y) - \phi_s(y)| dt' + \int_s^t |v_{t'} \circ \phi_s(y)| dt'. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$|\phi_t(y) - \phi_s(y)| \leq e^{\ell(t-s)} \int_s^t |v_{t'} \circ \phi_s(y)| dt'$$

$$\text{und } |\phi_t(y) - y| \leq e^{\ell t} \left( \ell t |y| + \int_0^t |v_{t'}(0)| dt' \right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & |\phi_t(y) - \phi_s(y)| \\ & \leq e^{\ell(t-s)} \left\{ \int_s^t |v_{t'} \circ \phi_s(y) - v_{t'}(y)| + |v_{t'}(y) - v_{t'}(0)| + |v_{t'}(0)| dt' \right\} \\ & \leq \ell(t-s) e^{\ell(t-s)} \{ |\phi_s(y) - y| + |y| \} + e^{\ell(t-s)} \int_s^t |v_{t'}(0)| dt' \\ & \leq C(t) |t-s| (|y| + \|v(\cdot, 0)\|_{L^\infty([0,t])}) \end{aligned}$$

mit  $C(t) = (\ell t + 1) e^{\ell t} \max\{\ell, 1\}$ . Wir zeigen nun die Punkte ii.) und iii.) der Definition 1.4.

**Beweis für  $\mu_t \in C(\mathbb{R}^+, PM^1(\mathbb{R}^d)_w)$ :** Für  $s \leq t$  gilt:

$$\begin{aligned} d_W(\mu_s, \mu_t) &= \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle \mu_s - \mu_t, g \rangle = \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle \mu_0, g \circ \phi_s - g \circ \phi_t \rangle \leq \langle \mu_0, |\phi_s - \phi_t| \rangle \\ &\leq C(t) |t-s| (\langle \mu_0, |y| \rangle + \|v(\cdot, 0)\|_{L^\infty([0,t])}). \end{aligned}$$

**Beweis für  $\mu(t) \in C^1((0, T), C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d)_{w^*})$ :** Für  $g \in C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d)$  gilt:

$$|\langle \dot{\mu}(t) - \dot{\mu}(s), g \rangle| = \langle \mu_0, \nabla g \circ \phi_t \cdot v_t(\phi_t) - \nabla g \circ \phi_s \cdot v_s(\phi_s) \rangle.$$

Mit den identischen Überlegungen folgt

$$|\langle \dot{\mu}(t) - \dot{\mu}(s), g \rangle| \leq \tilde{C}(t) \text{lip}(\nabla g) |t-s|$$

für eine geeignete Konstante  $\tilde{C} > 0$ .

**$\mu(t)$  ist eine distributive Lösung von (1.7):** Für  $g \in C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d)$  gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \mu_t(dy), g(y) \rangle - \langle \mu_t(dy), \nabla g(y) \cdot v_t(y) \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \langle \mu_0(dy), g \circ \phi_t(y) \rangle - \langle \mu_0(dy), \nabla g \circ \phi_t(y) \cdot v_t \circ \phi_t(y) \rangle \\ &= \left\langle \mu_0(dy), \nabla g \circ \phi_t(y) \cdot \dot{\phi}_t(y) - \nabla g \circ \phi_t(y) \cdot v_t \circ \phi_t(y) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

nach Voraussetzung.

Um die Eindeutigkeit zu beweisen, nehmen wir an, daß  $\nu_t$  eine weitere Lösung sei. Wegen der Dichtheit von  $C^1(\mathbb{R}^d) \cap C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^d)$  in  $C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^d)$  gilt:

$$\begin{aligned}
d_{\text{W}}(\mu(t), \nu(t)) &= \sup_{\substack{g \in C^1(\mathbb{R}^d) \\ \text{lip}(g) \leq 1}} \langle \mu(t) - \nu(t), g \rangle \\
&\leq \sup_{\substack{g \in C^1(\mathbb{R}^d) \\ \text{lip}(g) \leq 1}} \left\{ d_{\text{W}}(\mu_0, \nu_0) + \int_0^t |\langle \dot{\mu}(s) - \dot{\nu}(s), g \rangle| ds \right\} \\
&\leq d_{\text{W}}(\mu_0, \nu_0) + \sup_{\substack{g \in C^1(\mathbb{R}^d) \\ \text{lip}(g) \leq 1}} \int_0^t |\langle \mu(s) - \nu(s), |\nabla g \cdot v_t \rangle| ds \\
&\leq d_{\text{W}}(\mu_0, \nu_0) + \ell \int_0^t d_{\text{W}}(\mu(s), \nu(s)) ds \\
&\Rightarrow d_{\text{W}}(\mu(t), \nu(t)) \leq d_{\text{W}}(\mu_0, \nu_0) e^{\ell t},
\end{aligned}$$

und somit folgt aus  $d_{\text{W}}(\mu_0, \nu_0) = 0$ , daß  $d_{\text{W}}(\mu(t), \nu(t)) = 0$  ist. Als letztes müssen wir noch Abschätzung ii.) beweisen:

$$\begin{aligned}
\|\phi_t^1 - \phi_t^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &= \left\| \int_0^t v_s^1 \circ \phi_s^1 ds - \int_0^t v_s^2 \circ \phi_s^2 ds \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \int_0^t \|v_s^1 \circ \phi_s^1 - v_s^1 \circ \phi_s^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|v_s^1 \circ \phi_s^2 - v_s^2 \circ \phi_s^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} ds \\
&\leq \mathcal{L} \int_0^t \|\phi_s^1 - \phi_s^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} ds + t \sup_{s \in [0, t]} \|v_s^1 - v_s^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt Ungleichung ii.) mit Hilfe der Gronwallschen Ungleichung.  $\square$

Als nächstes führen wir die Objekte ein, denen unser Hauptinteresse gilt: Youngsche Maße. Wir bezeichnen wie in der Einleitung das Einheitsintervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  zur Vereinfachung mit  $\Omega$ .

**DEFINITION 1.6.** Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $Y^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$  die Menge aller schwach meßbaren Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen, deren  $p$ -tes Moment integrierbar ist:

$$\begin{aligned}
Y^p(\Omega, \mathbb{R}^d) &:= \{ \Psi : \Omega \rightarrow PM^p(\mathbb{R}^d) \mid \forall g \in C_b^0(\mathbb{R}^d) : \langle \Psi(\cdot, dy), g(y) \rangle \text{ ist meßbar und} \\
&\quad \langle \Psi(\cdot, dy), |y|^p \rangle \in L^1(\Omega) \}.
\end{aligned}$$

Wir sagen, daß ein Youngsches Maß  $\Psi$  eine Funktion ist, wenn es eine Funktion  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  gibt, so daß  $\Psi_x = \delta_{y(x)}$ .

Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$\| \langle \Psi(\cdot, dy), |y| \rangle \|_{L^p(\Omega)}^p \leq \| \langle \Psi(\cdot, dy), |y|^p \rangle \|_{L^1(\Omega)}.$$

Somit können wir durch  $\|d_{\text{W}}(\cdot, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}$  eine Metrik  $d_p(\cdot, \cdot)$  auf  $Y^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$  definieren.

DEFINITION 1.7 (Starke und schwache Konvergenz). Eine Folge  $\Psi^n \in Y^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$  konvergiert stark gegen  $\Psi^*$  ( $\Psi^n \rightarrow \Psi^*$ ), wenn  $d_p(\Psi^n, \Psi^*) := \|d_W(\Psi^n, \Psi^*)\|_{L^p(\Omega)}$  gegen 0 strebt.  $\Psi^n$  strebt schwach gegen  $\Psi^*$  ( $\Psi^n \rightharpoonup \Psi^*$ ), wenn für alle  $g \in C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^d)$  gilt:  $\langle \Psi^n - \Psi^*, g \rangle \rightarrow 0$  in  $L^p(\Omega)$  ( $\xrightarrow{*}$  falls  $p = \infty$ ).

Wir unterscheiden den schwach topologisierten Raum durch einen Index  $w$ :  $Y^p(\Omega, \mathbb{R}^d)_w$ .

Beide Konvergenzbegriffe sind in gewisser Weise interessant. Die schwache Topologie ermöglicht es, Youngsche Maße mit klassischen Funktionen zu approximieren, siehe Theorem 1.3. Es ist auch sofort klar, daß stark konvergente Funktionenfolgen nur Young-Maße erzeugen können, die eine Funktion sind.

LEMMA 1.8. *Es sei  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u^*$  in  $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{u_n} = \delta_{u^*}$  im starken Sinn in  $Y^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ .*

BEWEIS. Sei  $\text{lip}(g) \leq 1$ , dann ist  $\|g(u_n) - g(u^*)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u_n - u^*\|_{L^p(\Omega)}$ . □

In der starken Topologie können echte Youngsche Maße nicht durch Funktionen approximiert werden, da nur die endlichen Linearkombinationen der Deltadistributionen in  $PM^1(\mathbb{R}^d)$  dicht liegen, nicht jedoch die Menge der Deltadistributionen selbst ([Ra91, S. 113]). Die starke Topologie ist natürlich, wenn numerische Verfahren oder das Verhalten von den im Anschluß definierten YM-Lösungen für endliche Zeiten analysiert werden. Für  $p \neq 1$  ist allerdings  $Y^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$  kein vollständiger Raum.

Definition 1.4 und Lemma 1.5 können in natürlicher Weise auf das Szenario der Youngschen Maße erweitert werden.

DEFINITION 1.9. Es sei  $(v_{t,x})_{(t,x) \in [0,T] \times \Omega} \in C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  eine Schar Lipschitz-stetiger Vektorfelder mit  $v(\cdot, y) \in C([0, T], [L^2(\Omega)]^d)$  für alle  $y \in \mathbb{R}^d$ . Eine durch  $t \in [0, T)$  parametrisierte Schar Youngscher Maße  $\Psi(t)$  heißt reguläre Young-Maß-Lösung der Gleichung

$$(1.8) \quad \dot{\Psi} + \text{div}_y(\Psi \cdot v_t) = 0,$$

wenn

- i.) für alle  $t \in [0, T)$  gilt:  $\Psi(t) \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ,
- ii.)  $\Psi \in C([0, T), Y^2(\Omega, \mathbb{R}^d)) \cap C^1((0, T), C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d)'_{w^*})$ ,
- iii.) für alle  $g \in C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^d)$  die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi_x(t, dy), g(y) \rangle = \langle \Psi_x(t, dy), \nabla g(y) \cdot v_{t,x}(y) \rangle$$

in  $L^1(\Omega)$  erfüllt ist.

LEMMA 1.10. *Es sei  $(v_{(t,x)})_{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega}$  eine Vektorfeldschar, so daß für alle  $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$  gilt:*

- i.)  $(t, x) \mapsto \text{lip}(v_{t,x}) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$
- ii.)  $v(\cdot, y) \in C(\mathbb{R}^+, [L^2(\Omega)]^d)$ ,

und es sei  $\phi_t^v : [L^2(\Omega)]^d \rightarrow [L^2(\Omega)]^d$  der globale Lösungsfluß der Banachraum-wertigen gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{y} = v_t(y)$ . Dann ist für jeden Anfangszustand  $\Psi_0 \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$  durch  $\Psi(t) = \phi_t * \Psi_0$  die eindeutig bestimmte reguläre YM-Lösung von (1.8) gegeben. Für  $\phi_t^v$  gelten die Abschätzungen

- i.)  $\|\text{lip}(\phi_t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\ell t}$  mit  $\ell = \|\text{lip}(v)\|_{L^\infty([0,t] \times \Omega)}$ ,
- ii.)  $\left\| \|\phi_t^1 - \phi_t^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq t e^{\mathcal{L}t} \cdot \sup_{s \in [0,t]} \left\| \|v_s^1 - v_s^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \right\|_{L^2(\Omega)}$   
mit  $\mathcal{L} = \max_{i=1,2} \|\text{lip}(v^i)\|_{L^\infty([0,t] \times \Omega)}$ ,
- iii.)  $\|\phi_t(y) - \phi_s(y)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(t)|t - s| \left( |y| + \left\| \|v(t', x', 0)\|_{L^2(\Omega)} \right\|_{L^\infty([0,t])} \right)$   
mit  $C(t) = (\ell t + 1)e^{\ell t} \max\{\ell, t\}$  falls  $t \geq s$ .

Der Beweis verläuft vollkommen analog zu dem von Lemma 1.5 und wird daher nicht ausgeführt.  $\square$

Wir sagen, ein Youngsches Maß  $\Psi$  besitzt Mikrostruktur, wenn es eine Teilmenge  $\mathcal{M}_\Psi$  von  $\Omega$  gibt, auf der  $\Psi$  nicht als Funktion aufgefaßt werden kann, d.h. nicht die Gestalt einer über  $\mathcal{M}_\Psi$  parametrisierten Schar von Delta-Distributionen hat. Ein wichtiger Aspekt der in dieser Arbeit betrachteten YM-Lösungen ist, daß  $\mathcal{M}_\Psi$  zeitunabhängig ist, d.h. die Mikrostruktur kann nicht in mikrostrukturfreie Bereiche eindringen und sie kann nicht in endlicher Zeit verschwinden ( $\mathcal{M}_{\Psi(t)} = \mathcal{M}_{\Psi_0}$ ). Zur Charakterisierung der Mikrostruktur-region definieren wir die Varianz von  $\Psi$ :

$$V(t, x) = \text{Var}(\Psi(t, x)) = \langle \Psi(t, x, dy), |y|^2 \rangle - |\langle \Psi(t, x, dy), y \rangle|^2.$$

Es ist klar, daß  $V(t, x) \geq 0$  ist; aus  $\Psi(t, x) \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$  folgt außerdem  $V(t) \in L^1(\Omega)$ . Der Träger  $\text{supp}(V(t))$  von  $V(t)$  ist als Träger desjenigen Repräsentanten definiert, der in jedem Lebesgue-Punkt stetig und sonst überall 0 ist. Mit dieser Notation ist  $\mathcal{M}_{\Psi(t)}$  als  $\text{supp} V(t)$  charakterisiert.

**THEOREM 1.11 ([Mi97]).** *Es sei  $v_{t,x}$  eine Vektorfeldschar, die die Voraussetzungen von Lemma 1.10 erfüllt,  $\Psi(t)$  eine reguläre YM-Lösung von (1.8) und  $V(t)$  die Varianz von  $\Psi(t)$ ; dann ist*

$$\text{supp} V(t) = \text{supp} V(0)$$

für alle  $t \in [0, \infty)$ .

**BEWEIS.** Für jedes  $(t, x) \in [0, \infty) \times \Omega$  ist der Fluß des dynamischen Systems  $\dot{y} = v_{t,x}(y)$  ein Diffeomorphismus  $\phi_{t,x}$  in  $\mathbb{R}^d$ . Die Flußabbildung  $\phi_{t,x}$  und die Inverse  $\tilde{\phi}_{t,x}$  sind global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstanten, die durch  $e^{\ell t}$  beschränkt sind.

Für festes  $x \in \Omega$  kann die Varianz folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$V(t) = \langle \Psi(t, dy), \langle \Psi(t, d\tilde{y}, |y - \tilde{y}|^2) \rangle \rangle = \langle \Psi_0(dy), \langle \Psi_0(d\tilde{y}), |\phi_t(y) - \phi_t(\tilde{y})|^2 \rangle \rangle.$$

Somit gilt

$$e^{-2\ell t}V(t, x) \leq V(0, x) \leq e^{2\ell t}V(t, x)$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

**BEMERKUNG 1.12.** Aus diesem Theorem und der Definition maßwertiger Lösungen folgt sofort, daß jede YM-Lösung  $\Psi(t)$  von Gleichung (1.8), deren Anfangsbedingung an der Stelle  $x \in \Omega \setminus \mathcal{M}_{\Psi_0}$  eine Deltadistribution  $\delta_{y_0}$  ist, auch für alle endlichen Zeiten die Darstellung  $\Psi_x(t) = \delta_{y(t)}$  besitzt, wobei  $y(t)$  die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{y} = v_{t,x}(y)$ ,  $y(0) = y_0$ , ist.

## KAPITEL 2

### Das mikrokinetisch regularisierte Modell

Wir werden in diesem Kapitel das Langzeitverhalten der Lösungen des mikrokinetischen Modells (1.2) untersuchen. Dazu verallgemeinern wir den Lösungsfluß von den üblichen Funktionenräumen auf  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Unser Ziel ist es, die zeitliche Entwicklung hochoszillativer Anfangsbedingungen zu studieren. Die im nächsten Abschnitt hergeleitete Evolutionsgleichung für YM-Lösungen kann daher als makroskopische Beschreibung mikroskopischer Eigenschaften verstanden werden. Um präziser zu sein, führen wir zunächst einige Notationen ein. Durch eine einfache Transformation bringen wir (1.2) auf die Gestalt einer Integrodifferentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - \mathcal{B}\sigma(\varepsilon)), \quad (\varepsilon(0), v(0)) = (\varepsilon_0, v_0),\end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{B}$  ein kompakter linearer Operator in  $L^2(\Omega)$  ist. Der 2-Tupel  $(\varepsilon, v)$  löst eine hyperbolische Gleichung mit Wellengeschwindigkeit 0, schnelle räumliche Oszillationen bleiben also erhalten. Wechselwirkungen zwischen  $(\varepsilon(t, x), v(t, x))$  und  $(\varepsilon(t, \tilde{x}), v(t, \tilde{x}))$  finden nur durch den nichtlokalen Operator  $\mathcal{B}$  statt.

Somit können wir zunächst formal eine Evolutionsgleichung für das von  $t$  abhängige Youngsche Maß  $\Psi(t, x, d(\varepsilon, v))$  aufstellen, das die Verteilung von  $(\varepsilon, v)$  beschreibt:

$$(2.1a) \quad \dot{\Psi} = -\operatorname{div}_{(\varepsilon, v)} \left\{ \Psi \cdot \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k) \end{pmatrix} \right\}, \quad \Psi|_{t=0} = \Psi_0,$$

$$(2.1b) \quad k = \mathcal{B} \langle \sigma \rangle.$$

Wir erinnern hier an die Konvention, daß der Ausdruck  $\langle g \rangle$  den Erwartungswert der nichtlinearen Zufallsvariablen  $g$  bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\Psi_{t,x}(dy)$  bezeichnet, wobei  $y = (\varepsilon, v)$  ist. Gleichung (2.1) ist der zentrale Gegenstand der Untersuchungen in diesem Kapitel. Im nächsten Abschnitt zeigen wir durch Anwendung von Ideen aus der Transporttheorie die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (2.1) im Phasenraum  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ . Für festes  $k(t, x)$  erhält man die Lösung von (2.1a), indem die Anfangsverteilung  $\Psi_0$  entlang der Charakteristiken transportiert wird. Dies definiert uns ein neues  $\tilde{k} = \mathcal{B} \langle \Psi_0, \sigma(\phi_t^k) \rangle$ , wobei  $\phi_t^k$  die Lösungsflußschar für die nichtautonome gewöhnliche Differentialgleichung  $\dot{\varepsilon} = v$ ,  $\dot{v} = -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k(t, x))$  ist. Für ein hinreichend kleines Zeitintervall ist diese Abbildung eine Kontraktion, deren einziger Fixpunkt die eindeutige Lösung  $\Psi(t)$  bestimmt. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, daß nur eine



Sobolevfunktion  $k$  anstelle des Youngschen Maßes  $\Psi$  iteriert wird. Die Kopplungsfunktion  $k$  liegt in einem wohlbekanntem Banachraum, wohingegen  $\Psi$  ein Element des Raumes  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  ist, der eine viel komplexere Struktur besitzt.

Am Ende des nächsten Abschnittes zeigen wir, daß Gleichung (2.1) konsistent mit (1.2) ist, das heißt klassische Lösungen generieren spezielle YM-Lösungen. Wir verwenden den Begriff „klassische Lösung“ für die Lösungen von (1.2), „maßwertige Lösungen“ für die Lösungen der verallgemeinerten Gleichung (2.1). Noch wichtiger als die Konsistenz ist allerdings, daß die Lösungen auch in der schwachen Topologie stetig vom Anfangszustand abhängen. Dies impliziert, daß eine Folge von klassischen Lösungen, deren Anfangsbedingungen ein Youngsches Maß  $\Psi_0$  schwach approximieren, auch in der Nähe der zu  $\Psi_0$  gehörigen Lösung von (2.1) bleibt. Somit beschreibt Gleichung (2.1) tatsächlich das effektive Verhalten von Lösungen, die von schnell oszillierenden Anfangsbedingungen erzeugt werden.

Gleichung (2.1) ermöglicht es, das Langzeitverhalten von YM-Lösungen zu untersuchen. Die wichtigste Eigenschaft des mikrokinetischen Modells ist die Erhaltung der verallgemeinerten Energie

$$E_\beta(\Psi) = \int_{x \in \Omega} \langle \Psi_x(d(\varepsilon, v)), W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2 \rangle + \frac{1}{2}\rho \dot{u}^2 dx,$$

wobei  $\dot{u}(t, x) = \int_0^x \langle v \rangle dx$  ist. Wir zeigen, daß jedes stationäre YM  $\Psi_x$ , das für fast alle  $x \in \Omega$  eine Dichtefunktion besitzt, die einfache Form

$$\langle \Psi_x, g \rangle = \int_{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2} f(x, \frac{1}{2}\beta v^2 + W(\varepsilon)) g(\varepsilon, v) d(\varepsilon, v)$$

annimmt, wobei  $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine meßbare Funktion ist. Mit dieser Charakterisierung werden wir zwei Resultate über das Langzeitverhalten beweisen:

- i.) Für  $\rho = 0$  und Neumann-Randbedingungen konvergieren die von generischen, klassischen Anfangsbedingungen erzeugten Lösungen im schwachen Sinn für  $t \rightarrow \infty$  gegen ein stationäres Young-Maß. Dies ist insofern überraschend, weil die Lösungen die Energie  $E_\beta$  erhalten und daher nicht zu einem lokalen Minimum von  $E_\beta$  konvergieren können wie die Lösungen des viskos gedämpften Modells, das im nächsten Kapitel diskutiert wird. Interessanterweise hat der stationäre Zustand  $\Psi^\infty$  auch eine viel komplexere Struktur als der Anfangszustand:  $\Psi^\infty$  ist ein echtes Youngsches Maß, dessen Mikrostruktur ganz  $\Omega$  überdeckt. Im Gegensatz dazu hat wegen Satz 1.11 die Lösung für alle endlichen Zeiten keine Mikrostruktur, da der Anfangszustand eine klassische Funktion ist; somit ist dies ein Beispiel für die dynamische Generierung von Mikrostruktur. Keine der im nächsten Kapitel untersuchten Lösungen für das viskose Modell hat diese Eigenschaft (siehe Satz 3.16).

- ii.) Mit der Energie-Casimir-Methode können wir die Stabilität einer großen Klasse von Equilibria zeigen. Das Verfahren wurde von MARSDEN und anderen in [HMRW85] vorgestellt und danach oft erfolgreich auf Stabilitätsprobleme in konservativen Systemen angewandt. Eine essentielle Voraussetzung für die Anwendung des Verfahrens ist allerdings, daß sowohl das untersuchte Equilibrium als auch die Störung eine Dichte haben, somit sind also keine Rückschlüsse auf das Verhalten klassischer Lösungen möglich.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels stellen wir eine Methode vor, um Gleichung (2.1) numerisch zu integrieren und beweisen, daß das Verfahren in der starken Topologie konvergiert.

## 1. Existenz der Dynamik

**1.1. Vereinfachende Umformungen.** Wir transformieren Gleichung (1.2) in eine Gestalt, die die nachfolgende Analysis wesentlich vereinfacht; dazu setzen wir

$$\varepsilon(t, x) := \partial_x u(t, x), \quad v(t, x) = \partial_x \dot{u}(t, x).$$

Wir bezeichnen mit  $\pi_a$  die orthogonale Projektion in  $L^2(\Omega)$  auf den Unterraum der Funktionen mit Mittelwert 0; für den Mittelwert einer Funktion  $f$  schreiben wir auch  $\llbracket f \rrbracket = f - \pi_a f$ . Durch einen Index  $a$  bei Funktionenräumen bezeichnen wir das Bild von  $\pi_a$ . Im weiteren seien  $A_D$  und  $A_N$  die unbeschränkten Operatoren in  $L_a^2(\Omega)$  und  $L^2(\Omega)$ , die durch

$$D(A_D) = H_{a,\partial}^2(\Omega) = \{u \in H_a^2(\Omega) \mid \partial_x u|_{x \in \{0,1\}} = 0\},$$

$$D(A_N) = H_{\partial,0}^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) \mid \partial_x u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0\}$$

und  $A_D u = A_N u = \rho u - \beta \partial_x^2 u$  definiert sind. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{B}_a : L_a^2(\Omega) \rightarrow H_{a,\partial}^2(\Omega)$  und  $\mathcal{B}_0 : L^2(\Omega) \rightarrow H_{\partial,0}^2(\Omega)$  die in  $L_a^2(\Omega)$  beziehungsweise  $L^2(\Omega)$  kompakten Lösungsoperatoren des elliptischen Randwertproblems

$$(\rho - \beta \partial_x^2) k^{a,0} = \rho g, \quad k^a \in H_{a,\partial}^2(\Omega), \quad k^0 \in H_{\partial,0}^2(\Omega), \quad g \in L_a^2(\Omega) \text{ bzw. } L^2(\Omega).$$

Für  $\rho = 0$  ist  $\mathcal{B}_a = \mathcal{B}_0 = 0$ . Indem wir Gleichung (1.2) einmal nach  $x$  differenzieren, erhalten wir

$$(\rho - \beta \partial_x^2) \ddot{\varepsilon} = \partial_x^2 \sigma(\varepsilon).$$

Wir betrachten zuerst den Fall der Dirichlet-Randbedingung. Wegen  $u(1) = L$  gilt  $0 = \ddot{L} = \llbracket \ddot{\varepsilon} \rrbracket$ . Wir nehmen zunächst an, daß  $\varepsilon - L \in H_{a,\partial}^2(\Omega)$ , damit sind alle nachfolgenden Umformungen gerechtfertigt, allerdings lassen wir im nachhinein die Forderung der  $H^2$ -Regularität wieder fallen.

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} &= \mathcal{B}_a \partial_x^2 \frac{1}{\rho} \sigma(\varepsilon) = -\frac{1}{\beta} \mathcal{B}_a (\rho \pi_a - \beta \partial_x^2) \frac{1}{\rho} \sigma(\varepsilon) + \frac{1}{\beta} \mathcal{B}_a \pi_a \sigma(\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{\beta} [\pi_a \sigma(\varepsilon) - \mathcal{B}_a \pi_a \sigma(\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Im Neumannfall setzen wir  $\varepsilon \in H^2(\Omega)$  sowie  $\partial_x \varepsilon|_{x=0} = 0$  voraus, wobei die Einschränkungen an  $\varepsilon$  wie oben nur formaler Natur sind.

$$\begin{aligned}
\ddot{\varepsilon} - \ddot{\varepsilon}(1) &= \mathcal{B}_0 \left( \partial_x^2 \frac{1}{\rho} \sigma(\varepsilon) - \ddot{\varepsilon}(1) \right) \\
&= -\frac{1}{\beta} \mathcal{B}_0 \left[ (\rho - \beta \partial_x^2) \frac{1}{\rho} (\sigma(\varepsilon) - \sigma(\varepsilon(1))) \right] + \frac{1}{\beta} \mathcal{B}_0 \left[ \underbrace{-\sigma(\varepsilon(1)) - \beta \ddot{\varepsilon}(1)}_{=0} + \sigma(\varepsilon) \right] \\
&= -\frac{1}{\beta} (\sigma(\varepsilon) - \sigma(\varepsilon(1))) + \frac{1}{\beta} \mathcal{B}_0 \sigma(\varepsilon) \\
\Rightarrow \ddot{\varepsilon} &= -\frac{1}{\beta} (\sigma(\varepsilon) - \mathcal{B}_0 \sigma(\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir im Dirichlet- bzw. Neumannfall das folgende System:

$$(2.2a) \quad \dot{\varepsilon} = v,$$

$$(2.2b) \quad \dot{v} = -\frac{1}{\beta} (\sigma(\varepsilon) - k),$$

$$(2.2c) \quad k = \mathcal{B}\sigma,$$

wobei  $\mathcal{B}\sigma = \mathcal{B}_a \pi_a \sigma(\varepsilon) + \llbracket \sigma(\varepsilon) \rrbracket$  bzw.  $\mathcal{B}\sigma = \mathcal{B}_0 \sigma(\varepsilon)$  ist. Da  $H_{a,\partial}^2(\Omega)$  und  $H_{\partial,0}^2(\Omega)$  dicht in  $L_a^2(\Omega)$  und  $L^2(\Omega)$  sind, gelten die Gleichungen also auch für  $\varepsilon - L, v \in L_a^2(\Omega)$  bzw.  $L^2(\Omega)$ . Die wichtigste Eigenschaft dieses Systems ist, daß die Gleichungen für  $\varepsilon$  und  $v$  hyperbolisch mit Wellengeschwindigkeit 0 sind. Diese Transportgleichung gestattet es, schnelle räumliche Oszillationen zu übertragen, allerdings nur in den Variablen  $\varepsilon$  und  $v$  und nicht in  $k$ , da die Kopplung über  $\mathcal{B}$  kompakt und glättend ist. Wir leiten daher aus (2.2) zunächst formal die folgende Evolutionsgleichung für ein Youngsches Maß  $\Psi$  her, wobei wir bei kompakten Operationen nur den Erwartungswert berücksichtigen.

$$(2.3a) \quad \dot{\Psi} = -\operatorname{div}_{(\varepsilon,v)} \left\{ \Psi \cdot \left( v, -\frac{1}{\beta} (\sigma(\varepsilon) - k) \right)^T \right\}, \quad \Psi|_{t=0} = \Psi_0 \in \mathcal{Y}^2(\Omega, \mathbb{R}^2),$$

$$(2.3b) \quad k = \mathcal{B} \langle \sigma \rangle,$$

$$(2.3c) \quad \llbracket \langle \varepsilon \rangle - L \rrbracket = \llbracket \langle v \rangle \rrbracket = 0 \text{ im Fall der Dirichlet-Randbedingung.}$$

Ein Anfangszustand  $\Psi \in \mathcal{Y}^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$  heißt im Fall der Dirichlet-Randbedingung zulässig, wenn (2.3c) erfüllt ist; bei der Neumann-Randbedingung fällt diese Einschränkung weg. Im Rest dieses Abschnittes beweisen wir, daß für jeden zulässigen Anfangswert  $\Psi_0 \in \mathcal{Y}^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  die Lösung  $\Phi_t(\Psi_0)$  des Systems (2.3) global für  $t \in \mathbb{R}$  existiert und eindeutig ist. Wir werden auch zeigen, daß die Lösungen von (2.3) nicht nur in der starken, sondern auch in der schwachen Topologie von  $\mathcal{Y}^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  stetig vom Anfangszustand abhängen. Dieses Resultat ist insofern zentral, da die Youngschen Maße meistens als verallgemeinerte Grenzwerte schwach konvergenter Funktionenfolgen betrachtet werden, vergleiche z.B. [Mi97]. Wenn wir also eine Folge klassischer Lösungen betrachten, deren Anfangswerte  $(\varepsilon_0^i, v_0^i) \in [L^2(\Omega)]^2$  so gewählt seien, daß für alle  $g \in C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^2)$  die Folge  $g(\varepsilon_0^i, v_0^i)$  schwach

gegen  $\langle \Psi_0, g \rangle$  strebt, dann können wir aus dem Stetigkeitsresultat ableiten, daß für die assoziierten Lösungen  $(\varepsilon_t^i, v_t^i)$  die Beziehung  $g(\varepsilon_t^i, v_t^i) \rightarrow \langle \Phi_t(\Psi_0), g \rangle$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt. Danach zeigen wir, daß die klassischen Lösungen von (2.2) spezielle Lösungen von (2.3) sind, die wir durch die Identifikation  $\mathbb{R}^2 \ni y \mapsto \delta_y \in PM(\mathbb{R}^2)$  erzeugen.

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz und verwendet Ideen aus der Transporttheorie. Eine Anwendung dieser Methode findet man in [Mi97], wo YM-Lösungen hyperbolischer Systeme untersucht werden. Die wesentliche Idee besteht darin, das Kontraktionsargument nicht im Raum der Youngschen Maße anzuwenden, sondern nur in  $L^2(\Omega)$ , einem Funktionenraum, der  $k$  enthält. Für gegebenes  $\Psi(t)$  definieren wir  $k^\Psi := \mathcal{K}(\Psi(t)) := \mathcal{B} \langle \Psi_t, \sigma \rangle$ . Unser Beweis ist folgendermaßen strukturiert:

Das Vektorfeld  $(v, -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k))^T$  hat in der Maximumsnorm auf  $\mathbb{R}^2$  die Lipschitz-Konstante  $\max\{1, \frac{\text{lip}(\sigma)}{\beta}\}$ , die wir in diesem Kapitel mit  $\ell$  bezeichnen, wir können also die Überlegungen des ersten Kapitels verwenden. Für festes  $k$  in  $C([0, T], L^2(\Omega))$  lösen wir die nichtautonome lineare Gleichung (2.3a). Dies definiert uns eine Abbildung  $\Psi = \mathcal{Q}(k)$  von  $C([0, T], L^2(\Omega))$  nach  $C([0, T], Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2))$ . Es genügt nun zu zeigen, daß  $\mathcal{K} \circ \mathcal{Q} : C([0, T], L^2(\Omega)) \rightarrow C([0, T], L^2(\Omega))$  für genügend kleines  $T > 0$  ein kontrahierender Operator ist. Wir verwenden die Konvention, daß für einen Banachraum  $X$  mit  $\|\cdot\|_X$  die sup-Norm in  $C([0, T], X)$  bezeichnet wird; für  $\|\cdot\|_{C([0, t], L^2(\Omega))}$  schreiben wir auch  $\|\cdot\|_{\Omega_t}$ .

**THEOREM 2.1** (Globale Existenz und Stetigkeit im Anfangszustand). *Für jeden zulässigen Anfangszustand  $\Psi_0 \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  hat das Cauchy-Problem (2.3) eine eindeutige globale reguläre YM-Lösung  $\Psi(t) = \Phi_t(\Psi_0)$  im Sinne der Definition 1.9. Für festes  $t \in \mathbb{R}$  ist  $\Phi_t(\cdot)$  sowohl in der starken als auch in der schwachen Topologie auf  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  stetig und es gibt eine Konstante  $C > 0$ , so daß  $d_2(\Phi_t(\Psi^1), \Phi_t(\Psi^2)) \leq C d_2(\Psi^1, \Psi^2) e^{3(\ell + \|\mathcal{B}\| \text{lip}(\sigma)/\beta)t}$  ist.*

**BEWEIS.** Wir definieren den Operator  $\mathcal{I}_T : C([0, T], L^2(\Omega)) \rightarrow C([0, T], L^2(\Omega))$  durch

$$\mathcal{I}_T(k)(t) = \mathcal{B} \langle \Psi_0(dy), \sigma(\phi_t^k(y)) \rangle.$$

Diese Konstruktion ist aufgrund der Vorüberlegungen in Kapitel 1 wohldefiniert. Für festes  $k \in C([0, T], L^2(\Omega))$  ist wegen Lemma 1.10 die reguläre YM-Lösung von Gleichung (2.3a) durch  $\Psi(t) = \phi_t^k * \Psi_0$  gegeben, wobei  $\phi_t^k$  der Lösungsfluß des nichtautonomen Systems (2.2a, 2.2b) ist. Da  $\Psi(t)$  eine reguläre YM-Lösung ist, gilt  $\Psi \in C([0, T], Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2))$ . Zusammen mit der Stetigkeit von  $\mathcal{B}$  erhalten wir, daß  $\mathcal{I}_T(k)$  ebenfalls ein Element von  $C([0, T], L^2(\Omega))$  ist. Wir zeigen nun, daß  $\mathcal{I}_T$  kontrahierend ist:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_T(k_1) - \mathcal{I}_T(k_2)\| &= \|\mathcal{B} \langle \Psi_0, \sigma(\phi^{k_1}) - \sigma(\phi^{k_2}) \rangle\| \\ &\leq \|\mathcal{B}\| \text{lip}(\sigma) \left\| \|\phi^{k_1} - \phi^{k_2}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \right\| \\ &\leq T e^{\ell T} \|\mathcal{B}\| \frac{\text{lip}(\sigma)}{\beta} \|k_1 - k_2\| \text{ wegen Lemma 1.10.ii.} \end{aligned}$$

Somit genügt es,  $T$  so klein zu wählen, daß  $Te^{\ell T} \leq \frac{\beta}{\|\mathcal{B}\|_{\text{lip}(\sigma)}}$  ist. Damit ist  $\mathcal{I}_T$  ein kontrahierender Operator, der jedem Anfangszustand  $\Psi_0$  einen eindeutigen Fixpunkt  $k^* \in C([0, T], L^2(\Omega))$  zuordnet. Da die Wahl von  $T$  nicht von der Anfangsbedingung abhängt, erhalten wir die Existenz für alle  $t \in \mathbb{R}^+$ . Indem wir dieselbe Argumentation auf das zeitumgekehrte System

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \text{div}_{(\varepsilon, v)} \left\{ \Psi \cdot \left( v, -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) + k) \right)^T \right\}, \quad \Psi|_{t=0} = \Psi_0 \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2), \\ k &= \mathcal{B} \langle \sigma \rangle \end{aligned}$$

anwenden, ist gezeigt, daß die Lösung auch für alle negativen Zeiten existiert. Das Vektorfeld  $(v, -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k^*))^T$  erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 1.10, damit ist  $\Psi(t) =: \Phi_t(\Psi_0)$  eine reguläre YM-Lösung von (2.3) im Sinne der Definition 1.9.

Als nächstes weisen wir nach, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Im Dirichletfall muß gelten:

$$\llbracket \langle \Psi(t, d(\varepsilon, v)), v \rangle \rrbracket = \llbracket \langle \Psi(t, d(\varepsilon, v)), \varepsilon \rangle - L \rrbracket = 0.$$

Dazu leiten wir die beiden Funktionale nach der Zeit ab:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \llbracket \langle \Psi(t, d(\varepsilon, v)), \varepsilon \rangle - L \rrbracket &= \llbracket \langle \Psi(t, d(\varepsilon, v)), v \rangle \rrbracket, \\ \frac{d}{dt} \llbracket \langle \Psi(t, d(\varepsilon, v)), v \rangle \rrbracket &= \llbracket \left\langle \Psi(t, d(\varepsilon, v)), -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k) \right\rangle \rrbracket = -\frac{1}{\beta}(\llbracket \langle \sigma \rangle \rrbracket - \llbracket k \rrbracket) = 0, \end{aligned}$$

wegen der Definition von  $k$ . Somit bleibt der Anfangszustand  $\llbracket \langle \Psi_0(d(\varepsilon, v)), \varepsilon \rangle - L \rrbracket = \llbracket \langle \Psi_0(d(\varepsilon, v)), v \rangle \rrbracket = 0$  für alle Zeiten konserviert. Für den Neumannfall erhalten wir:

$$\beta \frac{d^2}{dt^2} \langle \varepsilon \rangle + \langle \sigma \rangle = \beta \frac{d}{dt} \langle v \rangle + \langle \sigma \rangle = \beta \left\langle -\frac{1}{\beta}(\sigma - k) \right\rangle + \langle \sigma \rangle.$$

Wegen  $k|_{x=1} = 0$  folgt  $(\beta \frac{d^2}{dt^2} \langle \varepsilon \rangle + \langle \sigma \rangle)|_{x=1} = 0$ .

Zum Schluß zeigen wir, daß  $\Phi_t(\cdot)$  für festes  $t$  sowohl im starken als auch im schwachen Sinn stetig in der Anfangsbedingung ist. Zunächst wird die starke Stetigkeit gezeigt. Für zwei zulässige Anfangsbedingungen  $\Psi^1, \Psi^2 \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  gilt

$$\begin{aligned} & \left\| d_W(\Phi_t(\Psi^1), \Phi_t(\Psi^2)) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle \Phi_t(\Psi^1) - \Phi_t(\Psi^2), g \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} (\langle \Psi^1, g(\phi_t^1) \rangle - \langle \Psi^2, g(\phi_t^2) \rangle) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle \Psi^1, g(\phi_t^1) - g(\phi_t^2) \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle \Psi^1 - \Psi^2, g(\phi_t^2) \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} =: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 1.10.i ist  $I_2 \leq e^{\ell t} d_2(\Psi^1, \Psi^2)$ . Wir schätzen nun  $I_1$  wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \left\| \langle \Psi^1, |\phi_t^1 - \phi_t^2| \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \int_0^t \left\| \left\langle \Psi^1, \begin{pmatrix} \phi_{s,2}^1 - \phi_{s,2}^2 \\ -\frac{1}{\beta}(\sigma \circ \phi_{s,1}^1 - \sigma \circ \phi_{s,1}^2) \end{pmatrix} \right\rangle \right\| + \frac{\|\mathcal{B}\|}{\beta} \left\| \langle \Psi^1, \sigma \circ \phi_{s,1}^1 \rangle - \langle \Psi^2, \sigma \circ \phi_{s,2}^2 \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq \int_0^t \ell \left\| \langle \Psi^1, |\phi_s^1 - \phi_s^2| \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\|\mathcal{B}\|}{\beta} \text{lip}(\sigma) \left\| \langle \Psi^1, |\phi_s^1 - \phi_s^2| \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\|\mathcal{B}\|}{\beta} \text{lip}(\sigma) \left\| \langle \Psi^1 - \Psi^2, |\phi_s^2| \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

Mit der Gronwallschen Ungleichung erhalten wir

$$I_1 \leq \frac{\|\mathcal{B}\|}{\beta} \text{lip}(\sigma) d_2(\Psi^1, \Psi^2) t e^{(2\ell + \text{lip}(\sigma)\|\mathcal{B}\|/\beta)t}.$$

Damit folgt  $d_2(\Phi_t(\Psi^1), \Phi_t(\Psi^2)) \leq C d_2(\Psi^1, \Psi^2) e^{3(\ell + \text{lip}(\sigma)\|\mathcal{B}\|/\beta)t}$  für eine geeignet gewählte Konstante  $C$ . Um die schwache Stetigkeit im Anfangszustand zu zeigen, nutzen wir die Kompaktheit von  $\mathcal{B}$  aus.

Sei  $\Psi^i \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  eine Folge zulässiger Anfangsbedingungen mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Psi^i = \Psi^*$  in  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)_w$  und  $g \in C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^2)$ . Es gilt wie oben:

$$\text{w-lim}_{i \rightarrow \infty} \langle \Phi_t(\Psi^i) - \Phi_t(\Psi^*), g \rangle = \text{w-lim}_{i \rightarrow \infty} \langle \Psi^i, g(\phi^i) - g(\phi^*) \rangle + \text{w-lim}_{i \rightarrow \infty} \langle \Psi^i - \Psi^*, g(\phi^*) \rangle.$$

Der zweite Grenzwert ist 0 wegen der Voraussetzung an  $\Psi^i$  und da mit Lemma 1.10.i  $g(\phi^*)$  eine Lipschitz-Funktion ist. Für den ersten Grenzwert erhalten wir im starken Sinn:

$$\left\| \langle \Psi^i, g(\phi_t^i) - g(\phi_t^*) \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{lip}(g) \left\| \left\| \phi_t^i - \phi_t^* \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{t}{\beta} e^{\ell t} \text{lip}(g) \left\| k^i - k^* \right\|_{\Omega_t}.$$

Es kommt also darauf an, die Konvergenz von  $\left\| k^i - k^* \right\|_{\Omega_t}$  zu beweisen.

$$\begin{aligned}
\left\| k^i - k^* \right\|_{\Omega_t} &= \left\| \mathcal{B} [\langle \Psi^i, \sigma(\phi_1^i) \rangle - \langle \Psi^*, \sigma(\phi_1^*) \rangle] \right\|_{\Omega_t} \\
&\leq \left\| \mathcal{B} \langle \Psi^i - \Psi^*, \sigma(\phi_1^*) \rangle \right\|_{\Omega_t} + \left\| \mathcal{B} \left\| \langle \Psi^i, \sigma(\phi_1^i) - \sigma(\phi_1^*) \rangle \right\|_{\Omega_t} \right\|_{\Omega_t} = I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Wir können  $I_4$  mit  $k^i - k^*$  kontrollieren:

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq \left\| \mathcal{B} \right\| \text{lip}(\sigma) \left\| \left\| \phi_1^i - \phi_1^* \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \right\|_{\Omega_t} \leq \left\| \mathcal{B} \right\| \text{lip}(\sigma) \int_0^t \left\| \left\| \phi_s^1 - \phi_s^2 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \right\|_{\Omega_s} ds \\
&\leq \left\| \mathcal{B} \right\| \text{lip}(\sigma) \int_0^t \frac{s}{\beta} e^{\ell s} \left\| k^i - k^* \right\|_{\Omega_s} ds.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit der Gronwallschen Ungleichung, wenn wir zeigen können, daß  $I_3$  gegen 0 strebt. Aus der Kompaktheit von  $\mathcal{B}$  folgt  $\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{B} \langle \Psi^i - \Psi^*, \sigma(\phi_{t,1}^*) \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} = 0$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \mathcal{B} \langle \Psi^i - \Psi^*, \sigma(\phi_{t,1}^*) \rangle\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathcal{B}\| \|\langle \Psi^i - \Psi^*, \sigma'(\phi_{t,1}^*) \phi_{t,2}^* \rangle\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \|\mathcal{B}\| \operatorname{lip}(\sigma) \operatorname{lip}(\phi_t^*) \left\{ \sup_{i \in \mathbb{N}} \|\langle \Psi^i(dy), |y| \rangle\|_{L^2(\Omega)} + \|\langle \Psi^*(dy), |y| \rangle\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\phi_t^*(0)\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, daß  $\langle \Psi^i(dy), |y| \rangle$  in  $L^2(\Omega)$  schwach konvergent und damit insbesondere beschränkt ist. Damit folgt die gleichmäßige Konvergenz von  $k^i$  gegen  $k^*$  auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}$  und die letzte Behauptung ist gezeigt.  $\square$

Zum Schluß etablieren wir den Zusammenhang zwischen YM-Lösungen von (2.3) und den klassischen Lösungen des ursprünglichen Systems (2.2), indem wir zeigen, daß die starken Lösungen spezielle YM-Lösungen sind. Es ist naheliegend, diese Eigenschaft als Konsistenz von (2.3) mit (2.2) zu bezeichnen.

**SATZ 2.2 (Konsistenz).** *Wenn  $y(t, x) = (\varepsilon(t, x), v(t, x))$  eine Lösung von (2.2) ist, dann ist  $\Psi(t, x) = \delta_{y(t, x)}$  eine YM-Lösung von (2.3).*

**BEWEIS.** Es ist klar, daß für  $\Psi(t) = \delta_{y(t)}$  der klassische Kopplungsterm  $\mathcal{B}\sigma(\varepsilon)$  mit  $\mathcal{B}\langle \sigma \rangle$  übereinstimmt. Für  $g \in C_{\operatorname{lip}}^1(\mathbb{R}^2)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \delta_{y(t)}, g \rangle - \left\langle \delta_{y(t, x)}, \nabla g \cdot \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k) \end{pmatrix} \right\rangle \\ & = \nabla g(y) \cdot \dot{y} - \nabla g(y) \cdot \left( v, -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k) \right)^T = 0 \text{ wegen (2.2)}. \end{aligned}$$

$\square$

## 2. Langzeitverhalten

In diesem Abschnitt studieren wir das Langzeitverhalten von YM-Lösungen für das System (2.3). Wir leiten eine verallgemeinerte Energie  $E_\beta$  her und zeigen das YM-Analogon zu Satz 1.1:  $E_\beta(\Psi)$  wird von den regulären YM-Lösungen von (2.3) erhalten, d.h. auch das verallgemeinerte System ist konservativ. Im Anschluß daran charakterisieren wir die stationären Zustände von (2.3). Das Ergebnis wird zeigen, daß die YM-Lösungen eine echte Erweiterung der Lösungen von Gleichung (1.2) darstellen. Wir haben schon im ersten Kapitel die stationären Lösungen von (1.2) charakterisiert: Die Verzerrung  $\varepsilon$  kann nur Werte aus der dreielementigen Menge  $\{z_i(c)\}_{i=0,1,2}$  annehmen. Im Neumannfall ist  $c = 0$ , im Dirichletfall ist  $c$  zwar beliebig, jedoch muß  $[\varepsilon - L] = 0$  gelten. Somit spielt der übrige Verlauf der Spannungs-Verzerrungsbeziehung  $\sigma$  keine Rolle mehr. Unsere Analyse wird zeigen, daß die so konstruierten einfachen Equilibria nur einen geringen Anteil an der Menge aller Gleichgewichtslösungen darstellen. Mit Hilfe einer kanonischen Transformation wird das durch  $\beta\ddot{\varepsilon} = -(\sigma(\varepsilon) - c)$  definierte dynamische System so einfach,

daß wir die Ruhelagen von (2.3) explizit angeben können. Die nicht-einfachen Gleichgewichte erhält man, indem man die Masse entlang von Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{\varepsilon} = v, \dot{v} = -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - c)$  verschmiert.

Die Charakterisierung verwenden wir für zwei Anwendungen: Wir zeigen, daß im Neumannfall für  $\rho = 0$  eine große Klasse von Anfangsbedingungen Lösungen erzeugt, die für  $t \rightarrow \infty$  im schwachen Sinn gegen ein Equilibrium konvergieren.

Im zweiten Teil wenden wir die Energie-Casimir-Methode aus [Re94] auf das System (2.3) an und können somit beweisen, daß eine gewisse Klasse von Equilibria neutral stabil gegenüber einer eingeschränkten Menge von Störungen ist.

Wir leiten nun die verallgemeinerte Energieerhaltung her. Dabei bezieht sich der Begriff „verallgemeinert“ auf die Tatsache, daß wir nicht nur den klassischen Lösungen eine Energie zuordnen, sondern auch YM-Lösungen. Für die kinetische Energie benötigt man die Stammfunktion von  $x \mapsto \langle \Psi_x, v \rangle$ . Dafür setzen wir  $X = L^2(\Omega)$  bzw.  $L_a^2(\Omega)$  und  $Y = H_{\partial,0}^2(\Omega)$  bzw.  $H_{a,\partial}^2(\Omega)$  im Fall der Neumann-bzw. Dirichlet-Randbedingung. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{C} : X \rightarrow Y$  den Lösungsoperator des elliptischen Randwertproblems

$$\partial_x^2 u = f; \quad f \in X, u \in Y.$$

Es ist klar, daß  $\mathcal{C}$  kompakt, selbstadjungiert und negativ definit ist.

**SATZ 2.3.** *Alle regulären YM-Lösungen für das Cauchy-Problem (2.3) konservieren die verallgemeinerte Energie*

$$E_\beta(\Psi) = \left[ \langle W \rangle + \frac{1}{2}\beta \langle v^2 \rangle - \frac{1}{2}\rho \langle v \rangle \mathcal{C} \langle v \rangle \right].$$

**BEWEIS.**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_\beta(\Psi(t)) &= \left[ \langle \dot{\Psi}, W(\varepsilon) \rangle + \frac{1}{2}\beta \langle \dot{\Psi}, v^2 \rangle - \rho \langle v \rangle \mathcal{C} \langle \dot{\Psi}, v \rangle \right], \text{ da } \mathcal{C} \text{ selbstadjungiert ist} \\ &= \left[ \langle v\sigma \rangle - \beta \left\langle v \frac{1}{\beta}(\sigma - k) \right\rangle - \rho \langle v \rangle \mathcal{C} \left\langle -\frac{1}{\beta}(\sigma - k) \right\rangle \right] \\ &= \left[ \langle v \rangle \left( k + \frac{\rho}{\beta} \mathcal{C} \langle \sigma \rangle - \frac{\rho}{\beta} \mathcal{C} k \right) \right] = \left[ \langle v \rangle \left( \mathcal{C} \left[ \partial_x^2 k + \frac{\rho}{\beta} \langle \sigma \rangle - \frac{\rho}{\beta} k \right] \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

da  $-\beta \partial_x^2 k + \rho k = \rho \langle \sigma \rangle$  ist. □

**2.1. Stationäre Zustände.** Wir charakterisieren die Menge der stationären Zustände von (2.3). Indem wir die zeitliche Ableitung von  $\Psi$  gleich 0 setzen, erhalten wir das stationäre System:

$$(2.4a) \quad \operatorname{div}_{(\varepsilon,v)} \left\{ \Psi \cdot \left( v, -\frac{1}{\beta}(\sigma - k) \right)^T \right\} = 0,$$

$$(2.4b) \quad \rho k - \beta \partial_x^2 k - \rho \langle \Psi, \sigma \rangle = 0,$$

$$(2.4c) \quad \left[ \langle \varepsilon \rangle - L \right] = \left[ \langle v \rangle \right] = 0 \text{ im Fall der Dirichlet-Randbedingung.}$$

Mit der Testfunktion  $g(\varepsilon, v) = \varepsilon$  ergibt Gleichung (2.4a) die Beziehung  $\langle \Psi(d(\varepsilon, v)), v \rangle = 0$ , die zweite Bedingung in (2.4c) ist also stets erfüllt und kann daher wegfallen. Analog folgt



mit der Testfunktion  $g(\varepsilon, v) = v$ , daß  $\langle \Psi(d(\varepsilon, v)), -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k) \rangle = 0$  ist. Somit impliziert Gleichung (2.4b)  $\partial_x^2 k = 0$  und wegen der linken Randbedingung  $\partial_x k|_{x=0}$  ist  $k = c$  für eine reelle Konstante  $c$ . Wir erhalten also das vereinfachte stationäre System:

$$(2.5a) \quad \operatorname{div}_{(\varepsilon, v)} \left\{ \Psi(d(\varepsilon, v)) \cdot \left( v, -\frac{1}{\beta} \sigma_c(\varepsilon) \right)^T \right\} = 0,$$

$$(2.5b) \quad \llbracket \langle \varepsilon \rangle - L \rrbracket = 0 \text{ im Fall der Dirichlet-Randbedingung.}$$

Im Dirichletfall kann  $c$  beliebig gewählt werden, es muß allerdings Gleichung (2.5b) erfüllt sein. Im Neumannfall ist  $c = 0$  aufgrund der rechten Randbedingung  $k|_{x=1} = 0$ . Um die Komplexität der Notation zu verringern, führen wir einige abkürzende Schreibweisen ein. Wir bezeichnen mit  $\phi_t^c(\varepsilon, v)$  den Lösungsfluß der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\beta} \sigma_c(\varepsilon). \end{aligned}$$

Die Lösungen von Gleichung (2.6) konservieren die Energie  $H_c(\varepsilon, v) = \frac{\beta}{2} v^2 + W_c(\varepsilon)$ , wobei die modifizierte Verzerrungsenergiedichte  $W_c(\varepsilon) := W(\varepsilon) - c\varepsilon - \min_{e \in \mathbb{R}} (W(\varepsilon) - c\varepsilon)$  ist. Die Energieflächen  $H_c^{-1}(e) = \{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2 \mid H_c(\varepsilon, v) = e\}$  sind geschlossene Kurven in  $\mathbb{R}^2$ , die invariant unter dem Fluß  $\phi^c$  sind, somit sind alle Lösungen von (2.6) periodisch. Die Periodendauer  $P_c(e)$  einer Lösung ist durch die folgende, wohlbekannt Formel gegeben:

$$(2.7) \quad P_c(e) = \int_{l_c(e)}^{r_c(e)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e - W_c(\varepsilon)}} d\varepsilon,$$

wobei das Intervall  $[l_c(e), r_c(e)]$  diejenige Zusammenhangskomponente von  $\operatorname{supp}(e - W_c(\cdot))_+$  ist, die den Anfangszustand  $\varepsilon(0)$  enthält. Für  $|c| < r$  hat  $\operatorname{supp}(e - W_c(\cdot))_+$  maximal zwei Zusammenhangskomponenten. Wir bezeichnen die einzelnen Periodenlängen mit  $P_c^i(e)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Dabei steht 0 für den Fall von nur einer Zusammenhangskomponente. Wir definieren die folgenden sechs Mengen in  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}$ :

$$\mathcal{P}_1(c) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid H_c(y) < W_c(z_0(c)) \text{ und } y_1 < z_0(c)\},$$

$$\mathcal{P}_2(c) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid H_c(y) < W_c(z_0(c)) \text{ und } y_1 > z_0(c)\},$$

$$\mathcal{P}_0(c) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid H_c(y) > W_c(z_0(c))\},$$

$$\mathcal{E}_1(c) = [E_1(c), E_0(c)), \quad \mathcal{E}_2(c) = [E_2(c), E_0(c)), \quad \mathcal{E}_0(c) = (E_0(c), \infty),$$

wobei  $E_i(c) = W_c(z_i(c))$  ist. Die Dynamik der Lösungen von (2.6) vereinfacht sich erheblich, wenn man anstelle der Phasenraumvariablen  $y = (\varepsilon, v)$  eine Zeit-Energie-Darstellung wählt.

**DEFINITION 2.4.** Es sei  $i \in \{0, 1, 2\}$  und  $y \in C^1(\mathcal{E}_i(c), \mathcal{P}_i(c))$  mit  $H_c(y(e)) = e$ . Dann bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}_y : \mathcal{W}_i \rightarrow \mathcal{P}_i : (e, t) \mapsto \phi_t^c(y(e))$  die von  $y$  erzeugte kanonische Transformation, wobei  $\mathcal{W}_i = \{(e, t) \in \mathcal{E}_i \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t < P_c^i(e)\}$  ist.

Die so definierte kanonische Koordinatentransformation hat die schöne Eigenschaft, daß die Funktionaldeterminante konstant ist. Wir werden auf diese Tatsache noch mehrmals zurückgreifen und formulieren sie daher in einem Lemma.

LEMMA 2.5. *Es sei  $\mathcal{K}_y$  eine von  $y$  erzeugte kanonische Transformation, dann gilt*

$$|\det(\nabla_{(t,e)}\mathcal{K}_y)| = \frac{1}{\beta}.$$

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus der Beziehung  $H_c(\phi_t^c(y(e))) = H_c(y(e)) = e$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d}{de} \{H_c(\phi_t^c(y(e)))\} = \nabla_y H_c(\phi_t^c(y(e))) \cdot \nabla_y \phi_t^c(y(e)) \frac{dy}{de}(e) \\ &= \beta \left| \det \left( \nabla_y \phi_t^c(y(e)) \cdot \frac{dy}{de}(e), \dot{\phi}_t^c(y(e)) \right) \right|. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Mit diesem Rüstzeug können wir nun die stationären Zustände charakterisieren, wobei wir uns auf diejenigen Gleichgewichte beschränken, die keine Masse auf der singulären Menge  $H_c^{-1}(E_0(c))$  haben.

THEOREM 2.6. *Es sei für  $|c| < r$  ( $c = 0$  im Neumannfall) das Youngsche Maß  $\Psi \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  eine Lösung des stationären Systems (2.5a, 2.5b) mit  $\Psi(H_c^{-1}(E_0(c))) = 0$ ,  $\phi_t^c(y)$  der Lösungsfluß von Gleichung (2.6) und  $P_c^i(e)$  die durch (2.7) definierte Periodendauer. Dann gibt es*

$$(\gamma, \mu) \in \left\{ \gamma \in [L^\infty(\Omega)]^3 \left| \gamma(x) \in [0, 1]^3, \sum_{i=0}^2 \gamma_i(x) = 1 \right. \right\} \times \prod_{i=0}^2 Y(\Omega, \mathcal{E}_i(c)),$$

so daß für alle  $g \in C_{\text{lip}}(\mathbb{R}^2)$  und  $x \in \Omega$  gilt:

$$\langle \Psi_x, g \rangle = \sum_{i=0}^2 \gamma_i \int_{e \in \mathcal{E}_i(c)} \int_{t=0}^{P^i(e)} g(\phi_t^c(y_i(e))) dt \mu_x^i(de),$$

wobei  $y_i \in C^1(\mathcal{E}_i(c), \mathcal{P}_i(c))$  eine Schar von Anfangszuständen im Sinne der Definition 2.4 ist. Wenn  $\Psi_x$  außerdem eine Dichte besitzt, dann gibt es für alle  $x \in \Omega$  drei positive Funktionen  $f_i : \mathcal{E}_i(c) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $i = 0, 1, 2$ , so daß gilt:

$$\langle \Psi_x, g \rangle = \sum_{i=0}^2 \int_{y \in \mathcal{P}_i(c)} f_i(H_c(y)) g(y) dy.$$

Umgekehrt ist jedes Young-Maß, das in der oben definierten Art dargestellt werden kann, eine stationäre Lösung des Systems (2.3), wenn im Dirichletfall  $[\langle \Psi(d(\varepsilon, v)), \varepsilon \rangle - L] = 0$  ist.

- BEMERKUNG 2.7. i.) Wenn man zuläßt, daß  $\Psi$  auch auf  $H_c^{-1}(E_0(c))$  Masse hat, ist die obige Darstellung nicht mehr definiert, da  $P_c(E_0(c)) = \infty$  ist. In diesem Fall ist die Masse auf den Punkt  $(\varepsilon, v) = (z_0(c), 0)$  konzentriert, die Betrachtung dieses Falls verkompliziert jedoch die Darstellung, daher wurde darauf verzichtet.
- ii.) Die Menge der Equilibria von (2.3) ist eine qualitative Erweiterung der Menge der stationären Lösungen von (1.2), die in Kapitel 1 charakterisiert wurde und die wir als einfach bezeichnen. Die zu den einfachen stationären Lösungen gehörigen Youngschen Maße haben die Masse auf der Line  $v = 0$  konzentriert, somit liegt die Menge der einfachen Gleichgewichte nicht dicht in der Menge aller stationären Youngschen Maße.

BEWEIS. Da  $\Psi$  eine stationäre Lösung ist, muß für alle  $g \in C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R}^2)$  in  $L^1(\Omega)$  gelten:

$$\left\langle \Psi(d(\varepsilon, v)), \nabla g(\varepsilon, v) \cdot \left( v, -\frac{1}{\beta} \sigma_c(\varepsilon) \right)^T \right\rangle = 0$$

mit  $c = 0$  im Neumannfall. Alle weiteren Rechnungen sind nun punktweise für  $x \in \Omega$  zu verstehen. Die Abhängigkeit von  $x$  wird daher nicht mehr explizit erwähnt. Da aufgrund der Equilibriumseigenschaft von  $\Psi$  der Erwartungswert  $\langle \Psi(d(\varepsilon, v)), v \rangle$  gleich 0 ist, spielt  $\rho$  bei der Charakterisierung der stationären Zustände keine Rolle. Wir nehmen zunächst an,  $\Psi$  habe eine stetig differenzierbare Dichte  $\psi \in L^1(\Omega)$ . Außerdem sei  $\text{supp } g \subset \mathcal{P}_i$  für  $i = 0, 1, 2$ . Dann gilt:

$$\int_{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2} \psi(\varepsilon, v) \nabla g(\varepsilon, v) \cdot \left( v, -\frac{1}{\beta} \sigma_c(\varepsilon) \right)^T d(\varepsilon, v) = 0.$$

Wir wenden eine kanonische Transformation aus Definition 2.4 an und erhalten mit Lemma 2.5

$$\int_{e \in \mathcal{E}_i} \int_{t=0}^{P_i(e)} \frac{1}{\beta} \psi(\phi_t^c(y_i^c(e))) \nabla g(\phi_t^c(y_i^c(e))) \dot{\phi}_t^c(y_i^c(e)) dt de = 0.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\int_{e \in \mathcal{E}_i} \int_{t=0}^{P_i(e)} \frac{1}{\beta} \partial_t \psi(\phi_t^c(y_i^c(e))) g(\phi_t^c(y_i^c(e))) dt de = 0.$$

Aus dem Hauptsatz der Variationsrechnung folgt, daß es eine Funktion  $\tilde{f}(e)$  gibt, so daß  $\psi(\phi_t^c(y_i^c(e))) = \tilde{f}(e)$ . Wenn wir  $\tilde{f}$  mit  $\frac{P_i(e)}{\beta}$  umskalieren, d.h.  $f(e) = \frac{P_i(e)}{\beta} \tilde{f}(e)$ , folgt aus der Tatsache, daß  $\Psi_x$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, die Positivität von  $f$  und

$$\int_{e \in \mathcal{E}_i} f(e) de = 1.$$

Mit analogen Überlegungen folgt, daß die behauptete Darstellung auch für nicht-glatte Wahrscheinlichkeitsmaße  $\Psi \in PM^1(\mathbb{R}^2)$  gilt.

Jeder dieser Schritte kann auch umgekehrt werden, daher ist jedes der auf diese Art konstruierten Youngschen Maße eine stationäre Lösung, wenn im Dirichletfall zusätzlich  $\llbracket \langle \Psi(d(\varepsilon, v)), \varepsilon \rangle - L \rrbracket = 0$  gilt.  $\square$

**2.2. Konvergenz gegen Equilibria.** Die erfolgreiche Charakterisierung der stationären Lösungen beruht auf dem konservativen Charakter von Gleichung (2.3). Trotz der Energieerhaltung kann überraschenderweise in einem einfachen Modellfall gezeigt werden, daß generische Anfangsbedingungen Lösungen erzeugen, die für  $t \rightarrow \infty$  im schwachen Sinn gegen ein Equilibrium konvergieren. Das viskos gedämpfte Modell, das im nächsten Kapitel untersucht wird, verhält sich in einer Komponente parabolisch und gibt daher Energie ab. Durch das konsequente Ausnutzen der Liapunov-Eigenschaft der Energie kann gezeigt werden, daß alle Lösungen des viskos gedämpften Modells mit geringer Anfangsenergie in der starken Topologie gegen eine stationäre Lösung konvergieren. Interessanterweise ist dieses Equilibrium im allgemeinen sogar einfacher strukturiert als der Anfangszustand: Bei klassischen Anfangsbedingungen ist der Grenzwert ebenfalls eine Funktion, kein echtes Youngsches Maß, also kann auch durch den Langzeitlimes keine Mikrostruktur erzeugt werden.

Diese Langzeitasymptotik steht im Gegensatz zum Verhalten der Lösungen des mikrokinetischen Modells. Es wird der Spezialfall  $\rho = 0$  und Neumann-Randbedingung betrachtet. Wir werden zeigen, daß die von generischen, klassischen Anfangsbedingungen erzeugten Lösungen gegen einen stationären Zustand konvergieren, der im allgemeinen ein echtes Youngsches Maß ist. Die Konvergenz findet in der schwachen Topologie, jedoch nicht in der starken statt. Dieses Langzeitverhalten könnte als Modell für die dynamische Generierung von Mikrostruktur dienen.

Falls Anfangsbedingungen mit Dichte betrachtet werden, ist zu erwarten, daß man die Konvergenz sogar in der starken Topologie auf  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  zeigen kann. Dieses Resultat ist allerdings nicht so interessant, da es keinen direkten Rückschluß auf die Langzeitdynamik der Lösungen von (1.2) zuläßt, daher wurde auf die Ausführung verzichtet.

Das Ergebnis beruht im wesentlichen auf der Tatsache, daß die Lösungen im angegebenen Fall keine räumliche Kopplung mehr außer über die Anfangsbedingung aufweisen: für festes  $x \in \Omega$  verhält sich die Lösung wie ein nichtlinearer Oszillator, dessen Periodenlänge von der Anfangsbedingung abhängt. Da wegen der Neumann-Randbedingung und  $\rho = 0$  auch  $k = 0$  ist, kommen nur noch die Funktionen  $\sigma_0$ ,  $W_0$  und  $P_0$  vor, wir lassen daher im weiteren den Index 0 meistens weg. Falls  $P(e)$  nicht konstant ist, entstehen bei generischen Anfangsbedingungen im Laufe der Zeit Phasenverschiebungen, die sich aufaddieren und somit dazu führen, daß die Verzerrung  $\varepsilon$  immer schneller oszilliert. Wir müssen also eine Anforderung an die von der Verzerrungsenergiedichte  $W$  abgeleitete Funktion  $P$  stellen,

die nicht unmittelbar aus den lokalen Eigenschaften von  $W$  gefolgert werden kann:

$$(N) \quad \overline{\{e \in \mathcal{E}_0 \mid P'_0(e) \neq 0\}} = \mathcal{E}_0.$$

THEOREM 2.8. *Es sei  $\rho = 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $P_0 \in C^2(\mathcal{E}_0)$ , für  $W \in C^2(\mathbb{R})$  sei die nichtlokale Voraussetzung (N) erfüllt und für die Anfangsbedingung  $y_0 \in C^2(\Omega, \mathcal{E}_0)$  gelte*

$$(G) \quad \overline{\{x \in \Omega \mid \frac{d}{dx}H_0(y_0(x)) \neq 0\}} = \Omega.$$

*Dann gibt es ein stationäres YM  $\Psi^\infty$  so, daß für die von der Anfangsbedingung  $\Psi|_{t=0} = \delta_{y_0}$  erzeugte Lösung von (2.3) im Fall der Neumann-Randbedingung folgende Konvergenzaussagen zutreffen:*

- i.)  $\Psi(t) \rightharpoonup \Psi^\infty$  in  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,
- ii.)  $\langle \varepsilon \rangle \rightharpoonup (u^\infty)'$  in  $L^2(\Omega)$ ,
- iii.)  $u(t) \rightarrow u^\infty$  in  $L^2(\Omega)$ ,

wobei  $u^\infty = \int_0^x \langle \Psi_{x'}^\infty(d(\varepsilon, v)), \varepsilon \rangle dx'$  ist. Außerdem gilt für alle  $x \in \Omega$  :  $\text{supp } \Psi_x^\infty = H^{-1}(y_0(x))$ . Falls zusätzlich  $\frac{d}{dx}P_0(H_0(y_0(x))) \neq 0$  für alle  $x \in \Omega$  ist, gibt es ein  $C > 0$  so, daß  $\|u(t) - u^\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$ .

BEMERKUNG 2.9. i.) Es ist nicht klar, ob das Ergebnis in abgewandelter Form auch gilt, wenn  $\rho > 0$  zugelassen wird. Der Beweis von Theorem 2.8 beruht auf der Tatsache, daß das System für  $\rho = 0$  und Neumann-Randbedingungen vollständig integrierbar ist. Ob auch das allgemeine System diese Eigenschaft besitzt, ist noch offen, kann aber nicht erwartet werden. Die Ergebnisse der numerischen Simulation weisen darauf hin, daß die Lösungen im allgemeinen nicht gegen einen stationären Zustand konvergieren.

ii.) Wenn  $W$  ein Polynom vierten Grades ist, kann die nichtlokale Voraussetzung (N) mit Hilfe hypergeometrischer Funktionen nachgeprüft werden. Insbesondere hat dann  $P(\cdot)$  an der Stelle  $E_0$  eine logarithmische Singularität. Zwar ist für eine derartige Wahl von  $W$  die Spannungs-Verzerrungsbeziehung  $\sigma$  nicht mehr global Lipschitzstetig, dies bedeutet allerdings keine Einschränkung an die globale Existenz, da die Lösungen von vornherein beschränkt sind. Die triviale Aussage, daß eine Funktion mit Singularität nicht konstant sein kann, sollte vor dem physikalischen Hintergrund der Phasenumwandlungen betrachtet werden. Die Modellierung mit einer „double-well“-Funktion  $W$  schließt den Fall aus, daß  $W$  rein quadratisch ist, die beiden lokalen Minima erzwingen die Existenz des instabilen Fixpunktes. Somit ist die Singularität eine intrinsische Eigenschaft des mikrokinetischen Modells, wenn Phasenübergangsprobleme simuliert werden.

iii.) Auf die Generizitätsvoraussetzung (G) in Theorem 2.8 kann im Fall  $\rho = 0$  nicht verzichtet werden. Anderenfalls gibt es ein nichtdegeneriertes Intervall  $(a, b) \subset \Omega$  so, daß  $\Phi_t(\delta_{y_0})|_{[a,b]} \in Y^2([a, b], \mathbb{R}^2)$  periodisch mit Periodenlänge  $P(y_0(x))$  für ein  $x \in (a, b)$  beliebig ist. Dieser Orbit ist allerdings kompakt und enthält somit keine

Folge, die ein echtes YM approximiert. Falls jedoch  $\Psi_0$  eine Dichte hat, ist keine derartige Voraussetzung mehr nötig.

- iv.) Die Voraussetzung  $y_0 \in C^1(\Omega, \mathcal{E}_0)$  erzwingt, daß die Periodenlänge eindeutig ist und vereinfacht die Notation. Man kann sie problemlos zugunsten der allgemeinen Voraussetzung  $y_0 \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$  wegfällen lassen, dann müssen aufgrund der Singularität von  $P$  bei  $E_0$  einige technische Details beachtet werden.
- v.) Es ist nicht möglich, die erste Konvergenzaussage aus Theorem 2.8 auf die starke Topologie zu verschärfen. Da die Anfangsbedingung eine Delta-Distribution ist, behält die Lösung für alle endlichen Zeiten diese Eigenschaft. Zwar sind die endlichen Konvexkombinationen von Delta-Distributionen dicht in  $PM^1(\mathbb{R}^2)_W$ , die Delta-Distributionen selbst sind jedoch abgeschlossen in  $PM^1(\mathbb{R}^2)_W$ . Für jedes  $x \in \Omega$  ist  $\Psi^\infty$  ein echtes Wahrscheinlichkeitsmaß und somit kann die Wasserstein-Distanz nicht klein werden.

Wir beweisen Theorem 2.8, indem wir diejenigen Abschnitte  $[a, b] \subset \Omega$  betrachten, auf denen  $P_0(H_0(y_0))$  streng monoton ist. In diesem Fall existiert für die Abbildung  $[a, b] \rightarrow H_0(y_0([a, b])) : x \mapsto H_0(y_0(x))$  eine Umkehrfunktion  $\xi$  mit deren Hilfe der schwache Grenzwert beschrieben werden kann. Die Beweisidee besteht darin,  $y_0$  durch stückweise konstante Funktionen zu approximieren. Für eine richtig gewählte Zeit  $t$  erzeugt die Lösung eine Quadraturformel, die konvergiert, wenn die Schrittweite  $h$  gegen 0 und  $t$  gegen  $\infty$  strebt.

**SATZ 2.10.** *Es sei wie in Theorem 2.8 die Deformationsenergiedichte  $W \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $P_0 \in C^2(\mathcal{E}_0)$ ,  $\rho = 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $y_0 \in C^2(\Omega, \mathcal{E}_0)$ , und es existiere ein nichtdegeneriertes Intervall  $[a, b] \subset \Omega$  so, daß gilt:  $\frac{d}{dx}P_0(H_0(y_0(x))) \neq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$ , die von  $\sup_{x \in [a, b]} |1/\frac{d}{dx}P_0(H_0(y_0(x)))|$  abhängt, so daß für die gemittelte Lösung  $\tilde{\Psi}(t) = \int_a^b \Psi(t, x) dx$  gilt:*

$$d_W(\tilde{\Psi}, \mu^\infty) \leq \frac{C}{\sqrt{t}(b-a)},$$

wobei  $\Psi(t)$  die von der Anfangsbedingung  $\Psi|_{t=0} = \delta_{y_0}$  erzeugte Lösung von (2.3) ist, die die Neumann-Randbedingung erfüllt und  $\mu^\infty$  durch die Dichtefunktion

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\beta}{b-a} \left| \frac{\xi'}{P_0}(H_0(y)) \right| & \text{für } H_0(y) \in H_0(y_0([a, b])), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $\xi(H_0(y_0(x))) = x$  gegeben ist.

**BEWEIS.** Für  $\rho = 0$  ist wegen der Neumann-Randbedingung  $k = 0$ . Die resultierende Gleichung

$$(2.8) \quad \beta \ddot{\varepsilon} = -\sigma(\varepsilon)$$

wurde schon im vorangegangenen Abschnitt zur Charakterisierung der stationären Lösungen kurz diskutiert. In diesem Beweis wird allerdings ein weiterer Gesichtspunkt von (2.8)

berücksichtigt. Da  $P(H(y_0(\cdot)))$  in  $[a, b]$  nicht konstant ist, entstehen Phasenverschiebungen, die sich im Laufe der Zeit aufaddieren und dazu führen, daß  $y(t, x)$  räumlich mit einer reziprok zu  $t$  abnehmenden Wellenlänge zu oszillieren beginnt.

Wir definieren für  $\text{lip}(g) \leq 1$  die beiden Integrale  $I^\infty = \int_{y \in \mathbb{R}^2} f(y)g(y) dy$  und  $I(t) = \int_{x \in [a, b]} g(\phi_t(y_0(x))) dx$ .

Es ist zu zeigen, daß für große  $t$  das eindimensionale Integral  $I(t)$  in das zweidimensionale  $I^\infty$  übergeht. Dazu weisen wir nach, daß  $I(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  eine Quadraturformel für  $I^\infty$  erzeugt, indem wir  $I(t)$  durch eine Riemannsumme  $I(t, h)$  nähern.

Wir verwenden den folgenden einfachen Zusammenhang aus der Approximationstheorie: Sei  $\mathcal{A}$  ein kompaktes Gebiet,  $f \in C_{\text{lip}}(\mathcal{A})$ ,  $(\omega_i)_{i=1 \dots N}$  eine Partition von  $\mathcal{A}$  und Stützstellen  $y_i \in \omega_i$  für  $i = 1 \dots N$ . Dann gilt:

$$(2.9) \quad \left| \int_{y \in \mathcal{A}} f(y) dy - \sum_{i=1}^N \text{vol}(\omega_i) f(y_i) \right| \leq \text{lip}(f) \text{vol}(\mathcal{A}) \max_{i=1 \dots N} \text{diam}(\omega_i).$$

Wir definieren nun für eine Intervalllänge  $h > 0$  mit  $(b-a)/h \in \mathbb{N}$  eine Riemannsumme

$$I(t, h) := \frac{h}{b-a} \sum_{i=0}^{\frac{b-a}{h}-1} g(\phi_t(y_0(a+hi))). \text{ Aus (2.9) folgt dann:}$$

$$(2.10) \quad |I(t) - I(t, h)| \leq h \text{lip}(\phi_t) \text{lip}(y_0).$$

Der Hauptteil des Beweises besteht nun darin, den Term  $|I^\infty - I(t, h)|$  abzuschätzen, indem wir wieder auf den oben zitierten Satz aus der Approximationstheorie zurückgreifen.

Sei im weiteren o.B.d.A.  $\frac{d}{dx}P(H(y_0(x))) > 0$  und  $\frac{d}{dx}H(y_0(x)) < 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Wir definieren  $\mathcal{A} := H^{-1}(H(y_0([a, b])))$ . Wegen der Koerzivität von  $H$  ist  $\mathcal{A}$  kompakt.

Wir partitionieren  $\mathcal{A}$  mit der in Definition 2.4 erklärten kanonischen Transformation  $\mathcal{K}_{y_0(\xi(\cdot))}$  für  $\kappa, \tau > 0$  in der folgenden Weise:

$$\omega_{k,l} := \mathcal{K}_{y_0(\xi(\cdot))}(\mathcal{W}_{kl}),$$

$$\text{für } 0 \leq l \leq \frac{|H(y_0(a)) - H(y_0(b))|}{\kappa} - 1 =: L$$

$$\text{und } 0 \leq k \leq \min \left\{ \frac{P(e)}{\tau} \mid e \in [H(y_0(b)) + l\kappa, H(y_0(b)) + (l+1)\kappa] \right\} - 1 =: K(l),$$

wobei  $\mathcal{W}_{kl} := [H(y_0(b)) + l\kappa, H(y_0(b)) + (l+1)\kappa] \times [k\tau, (k+1)\tau]$  ist. Das Mengensystem  $(\omega_{kl})_{\substack{0 \leq k \leq K \\ 0 \leq l \leq L}}$  bildet keine echte Partition von  $\mathcal{A}$ . Wir bestimmen zunächst den Flächeninhalt eines Partitionselementes und damit den Inhalt der nichtüberdeckten Fläche. Durch die Anwendung der kanonischen Transformation  $\mathcal{K}_{y_0(\xi(\cdot))}$  erhalten wir mit Lemma 2.5  $\text{vol}(\omega_{kl}) = \frac{1}{\beta}$ . Mit diesem Ergebnis können wir die nichtüberdeckte Restfläche von  $\mathcal{A}$

abschätzen:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{A}) - \sum_{\substack{0 \leq k \leq K \\ 0 \leq l \leq L}} \text{vol}(\omega_{kl}) &\leq \left( \frac{\text{lip}(P)\kappa}{\tau} + 1 \right) \frac{H(y_0(a)) - H(y_0(b))}{\kappa} \frac{\kappa\tau}{\beta} \\ &\leq \frac{1}{\beta} (H(y_0(a)) - H(y_0(b))) \max\{1, \text{lip}(P)\} (\kappa + \tau) =: C_1(\kappa + \tau). \end{aligned}$$

Der Summand 1 rührt von der Rechnung mit ganzen Zahlen her und kommt auch bei allen weiteren ganzzahligen Abschätzungen vor. Die Konstante  $C_1$  ist unabhängig von  $(b-a)$  beschränkt, diese Eigenschaft haben auch alle weiteren Konstanten, die im Lauf des Beweises konstruiert werden. Wir bestimmen nun die Anzahl der Stützstellen  $y_0(a + hi)$ , die unter  $\phi_t$  in ein Partitionselement  $\omega_{kl}$  abgebildet werden.

Sei nun  $\xi_1 = \xi(H(y_0(b)) + (l+1)\kappa)$  und  $\xi_2 = \xi(H(y_0(b)) + l\kappa)$ . Dann ist die Breite des Bereiches in  $[a, b]$ , in dem der Anfangszustand  $y_0(x)$  die richtige Energie  $(H(y_0(x)) \in [H(y_0(b)) + l\kappa, H(y_0(b)) + (l+1)\kappa])$  besitzt:

$$|\xi_2 - \xi_1| = |\xi'(H(y_0(b)) + l\kappa)|\kappa + O(\kappa^2).$$

Die  $O$ -Konstante ist  $\frac{1}{2} \|\xi''\|_{L^\infty([a,b])}$ . Analog bestimmen wir die von  $t$  abhängige Breite eines Teilintervalls  $[x_1, x_2] \subset [\xi_1, \xi_2]$ , das von  $\phi_t$  vollständig nach  $\omega_{kl}$  abgebildet wird. Es ist

$$|x_1 - x_2| = \frac{\tau}{\frac{d}{dx} P(H(y_0(x)))n} \Big|_{x=x_1} + O\left(\frac{\tau^2}{n^2}\right) = \frac{\tau}{\frac{d}{dx} P(H(y_0(x)))n} \Big|_{x=\xi_2} + O\left(\frac{\tau^2}{n^2} + \frac{\kappa^2\tau}{n}\right)$$

für eine natürliche Zahl  $n$ , die die Zahl der Umläufe von  $y(t)$  um den Punkt  $(z_0, 0)$  bezeichnet. Die  $O$ -Konstante beträgt in diesem Fall

$$\frac{1}{2} \max\{1, \text{lip}(\xi)^2\} \sup_{x \in [a,b]} \left| \frac{1}{\frac{d}{dx} P(H(y_0(x)))} \right| \sup_{x \in [a,b]} \left| \frac{d^2}{dx^2} P(H(y_0(x))) \right|.$$

Wegen der Voraussetzungen ist sowohl das Hauptglied als auch der Fehlerterm endlich. Aus  $\frac{1}{P(H(y_0(\xi_2)))} \leq \frac{n}{t} \leq \frac{1}{P(H(y_0(\xi_1)))}$ , für hinreichend großes  $t$ , erhalten wir die Abschätzung

$$\left| n - \frac{t}{P(H(y_0(\xi_2)))} \right| \leq 1 + \text{lip} \left( \frac{1}{P(H(y_0(\xi(\cdot))))} \right) t\kappa.$$

Die Anzahl  $N_{kl}$  der Teilintervalle  $[x_1, x_2]$ , die nach  $\omega_{kl}$  abgebildet wird, ist

$$N_{kl} = \frac{t|\xi_1 - \xi_2| \frac{d}{dx} P(H(y_0(x))) \Big|_{x=\xi_2}}{P^2(H(y_0(\xi_2)))} + O(t|\xi_1 - \xi_2|^2 + 1)$$

mit  $O$ -Konstante  $\max \left\{ \frac{1}{2} \sup_{x \in [a,b]} \left| \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{P(H(y_0(x)))} \right|, 1 \right\}$ . Die Anzahl der Stützstellen in einem Intervall  $[x_1, x_2]$  ist bis auf einen Fehler von 1 durch  $(x_2 - x_1)/h$  gegeben. Aus den oben durchgeführten Rechnungen mit den angegebenen  $O$ -Konstanten erhalten wir die



Anzahl der nach  $\omega_{kl}$  abgebildeten Stützstellen. Es ist dann

$$\begin{aligned}
& N_{kl} \cdot \frac{x_2 - x_1}{h} + O(N_{kl}) \\
&= \left[ \frac{t \frac{d}{dx} P(H(y_0(x))) \Big|_{x=\xi_2} (\kappa |\xi'(H(y_0(b)) + l\kappa)| + O(\kappa^2))}{P^2(H(y_0(b)) + l\kappa)} + O(t\kappa^2 + 1) \right] \\
&\quad \cdot \left[ \frac{\tau}{\frac{d}{dx} P(H(y_0(x))) \Big|_{x=\xi_2} \left( \frac{t}{P(H(y_0(b)) + l\kappa)} + O(t\kappa + 1) \right)} + O\left(\frac{\kappa^2 \tau}{n} + \frac{\tau^2}{n^2}\right) \right] \frac{1}{h} + O(t\kappa) \\
(2.12) \quad &= \frac{\beta \operatorname{vol}(\omega_{kl}) |\xi'(H(y_0(b)) + l\kappa)|}{h P(H(y_0(b)) + l\kappa)} + \frac{1}{h} O\left(\frac{\tau}{t} + \tau\kappa^2 + ht\kappa\right).
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen die resultierende  $O$ -Konstante, die wir allerdings nicht mehr spezifizieren, mit  $C_2$ . Für  $K \cdot L$  haben wir die Abschätzung  $\sup_{0 \leq l \leq L} L \cdot K(l) \leq \frac{C_3}{\kappa\tau}$  mit

$$C_3 = (H(y_0(a)) - H(y_0(b))) \cdot \sup_{e \in H(y_0([a,b]))} P(e)$$

und erhalten somit zusammengefaßt unter Verwendung von (2.9), (2.10), (2.12) und (2.11):

$$\begin{aligned}
& |I^\infty - I(t)| \leq |I^\infty - I(t, h)| + |I(t, h) - I(t)| \\
& \leq |I^\infty - I(t, h)| + he^{\ell t} \operatorname{lip}(y_0) \text{ wegen (2.10)} \\
& \leq \operatorname{vol}(\mathcal{A}) \max_{\substack{0 \leq k \leq K \\ 0 \leq l \leq L}} \operatorname{diam}(\omega_{kl}) \|f \cdot g\|_{C_{\operatorname{lip}(\mathcal{A})}} + C_2 C_3 \left( \frac{1}{t\kappa} + \kappa + \frac{ht}{\tau} \right) \|g\|_{L^\infty(\mathcal{A})} \frac{1}{b-a} \\
& \quad + C_1 \|f \cdot g\|_{L^\infty(\mathcal{A})} (\kappa + \tau) + he^{\ell t} \operatorname{lip}(y_0).
\end{aligned}$$

Da  $f$  den Faktor  $\frac{1}{b-a}$  enthält, ist auch der Fehler proportional zu  $\frac{1}{b-a}$ . Wegen der Kompaktheit von  $\mathcal{A}$  ist  $\operatorname{lip}(\mathcal{K}_{y_0(\xi(\cdot))}) := C_{\mathcal{K}} < \infty$ , und somit ist  $\operatorname{diam}(\omega_{kl}) \leq C_{\mathcal{K}}(\tau + \kappa)$ . Indem wir nun  $\kappa = \tau = \frac{1}{\sqrt{t}}$ ,  $h = 0$  wählen und berücksichtigen, daß wegen  $g(0) = 0$  und  $\operatorname{lip}(g) \leq 1$  sowohl  $\|f \cdot g\|_{L^\infty(\mathcal{A})}$  als auch  $\|f \cdot g\|_{C_{\operatorname{lip}(\mathcal{A})}}$  unabhängig von  $g$  beschränkt werden können, haben wir die Behauptung des Satzes gezeigt.  $\square$

#### BEWEIS VON THEOREM 2.8.

- i.) Wir definieren  $\langle \Psi_x^\infty, g \rangle = \int_0^{P(H(y_0(x)))} g(\phi_t(y_0(x))) dt$ . Es sei  $h \in L^2(\Omega)$  und  $\lambda > 0$ , dann gibt es eine Treppenfunktion  $\tilde{h}$  mit  $\|h - \tilde{h}\|_{L^2(\Omega)} < \lambda$ . Es genügt also zu zeigen, daß für jede Funktion  $g \in C_{\operatorname{lip}}(\mathbb{R}^2)$  und jedem kompakten Intervall  $[a, b] \subset \Omega$  gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b \langle \Psi_x(t) - \Psi_x^\infty, g \rangle dx = 0.$$

Wegen der Voraussetzungen (N), (G) und  $y_0 \in C^2(\Omega, \mathcal{E}_0)$  ist die Menge der Punkte  $x \in [a, b]$ , für die  $\frac{d}{dx} P(H(y_0(x))) \neq 0$  gilt, offen und dicht in  $[a, b]$ . Es gibt also  $N$

disjunkte Intervalle  $[a_i, b_i] \subset [a, b]$  so, daß  $\|\chi_{[a,b]} - \chi_{\cup_{i=1}^N [a_i, b_i]}\|_{L^2} < \lambda$ , wobei auf jedes Intervall  $[a_i, b_i]$  die Voraussetzung von Satz 2.10 zutrifft. Damit gilt nach Definition:

$$\int_{a_i}^{b_i} \langle \Psi_x^\infty, g \rangle dx = \int_{a_i}^{b_i} \int_0^{P(H(y_0(x)))} g(\phi_t(y_0(x))) dt dx =: *.$$

Wir substituieren  $x = \xi(e)$ , wobei  $\xi(\cdot)$  wie in Satz 2.10 erklärt ist und erhalten

$$\begin{aligned} * &= \int_{e \in H(y_0([a_i, b_i]))} \int_0^{P(H(y_0(\xi(e))))} \frac{|\xi'(e)|}{(b_i - a_i)P(H(y_0(\xi(e))))} g(\phi_t(y_0(\xi(e)))) dt de \\ &= \int_{y \in H^{-1}(H(y_0([a_i, b_i])))} \frac{\beta |\xi'(H(y))|}{(b_i - a_i)P(H(y))} g(y) dy, \end{aligned}$$

indem wir die Umkehrung der kanonischen Transformation  $\mathcal{K}_{y_0(\xi)}(\cdot)$  anwenden. Mit Satz 2.10 folgt nun

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \int_{a_i}^{b_i} \Psi_x(t) dx - \int_{a_i}^{b_i} \Psi_x^\infty dx, g \right\rangle = 0.$$

ii.) folgt nach der Definition der schwachen Konvergenz in  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  aus i.).

iii.) folgt mit dem Rellichschen Einbettungssatz aus ii.).

Falls  $\frac{d}{dx}P(H(y_0(x))) \neq 0$  für alle  $x \in \Omega$  ist, können wir Satz 2.10 mit  $[a, b] = [0, x]$  anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \|u(t) - u^\infty\|_{L^2(\Omega)} &= \left\{ \int_0^1 \left[ x \int_0^x \langle \Psi_{x'}(t) - \Psi_{x'}^\infty, \varepsilon \rangle dx' \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\{ \int_0^1 \left[ x \underbrace{\left| \left\langle \int_0^x \Psi_{x'}(t) dx' - \int_0^x \Psi_{x'}^\infty dx', \varepsilon \right\rangle \right|}_{\leq \frac{C}{\sqrt{tx}}} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

□

**2.3. Stabilität spezieller Equilibria mit der Energie-Casimir-Methode.** Das Problem der Stabilität von Equilibria konservativer Systeme wurde schon häufig untersucht. In vielen Fällen hat sich die Energie-Casimir-Methode bewährt. REIN wandte sie in [Re94] erfolgreich auf die Vlasov-Poisson-Gleichung an, ein System, das strukturelle Ähnlichkeit mit dem von uns untersuchten hat, obgleich es die Evolution eines elektrisch geladenen Kontinuums beschreibt. Wir stellen hier eine Anpassung der in [Re94] präsentierten Vorgehensweise an das von uns untersuchte mikrokinetische Modell vor. Mit der hier ausgeführten Methode können wir nur für eine sehr kleine Klasse von Equilibria die Stabilität zeigen, und es werden auch nur Störungen zugelassen, die eine Dichte besitzen. Daher ist die Aussage im Hinblick auf das Verhalten der Lösungen des ursprünglichen Systems (1.2) wertlos, jedoch wird illustriert, daß die Verallgemeinerung der Dynamik auf die Menge der Youngschen Maße neue Ansatzpunkte gibt. Der Startpunkt ist eine allgemeine

Methode, die nichtlineare Stabilität von Gleichgewichten (unendlich-dimensionaler, degenerierter) Hamiltonscher Systeme nachzuweisen, eine allgemeine Einführung findet man in [HMRW85].

Sei das untersuchte System durch eine Bewegungsgleichung

$$\dot{u} = A(u)$$

auf einem Zustandsraum  $X$  gegeben,  $A : D(A) \rightarrow X$  ein nichtlinearer Operator und sei  $u_0$  der stationäre Zustand, dessen Stabilität untersucht werden soll. Mit den folgenden vier Schritten kann für  $u_0$  ein Stabilitätsresultat bewiesen werden.

- i.) Finde eine Energie (Hamiltonfunktion)  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$  des obigen Systems, so daß für Lösungen  $u(t)$  gilt:  $\frac{d}{dt}H(u(t)) = 0$ .
- ii.) Setze  $u_0$  mit einer weiteren konservierten Größe  $C : X \rightarrow \mathbb{R}$  in Beziehung, so daß  $u_0$  ein kritischer Punkt von  $H_C := H + C$  ist, also  $DH_C(u_0) = 0$ .
- iii.) Zeige, daß der quadratische Anteil der Entwicklung von  $H_C$  bei  $u_0$  positiv definit ist, d.h. finde eine Norm  $\|\cdot\|$  auf  $X$  so, daß

$$H_C(u) - H_C(u_0) - DH_C(u_0)[u - u_0] \geq C\|u - u_0\|^2 \text{ für alle } u \in X,$$

für eine Konstante  $C > 0$ .

- iv.) Finde eine Norm  $\|\cdot\|$  so, daß  $H_C$  an der Stelle  $u_0$  stetig ist.

Wenn die Schritte i.-iii.) durchgeführt werden können, gilt für jede Lösung

$$\|u(t) - u_0\|^2 \leq \frac{1}{C}|H_C(u(t)) - H_C(u_0)|.$$

Schritt iv.) impliziert, daß für jedes  $\kappa > 0$  ein  $\delta > 0$  so existiert, daß aus  $\|u(0) - u_0\| < \delta$  die Ungleichung  $\|u(t) - u_0\| < \kappa$  für alle  $t \geq 0$  folgt, d.h.  $u_0$  ist nichtlinear stabil.

**THEOREM 2.11.** *Es sei  $\Psi^*$  ein Equilibrium von (2.3), das punktweise durch eine Funktionenschar  $(\varphi_x(e))_{x \in \Omega}$  im folgenden Sinn gegeben ist:*

$$\langle \Psi_x^*, g \rangle = \int_{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2} g(\varepsilon, v) \varphi(x, W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2) d(\varepsilon, v)$$

und

- $\varphi(x, e) \geq 0$  für alle  $(x, e) \in (\Omega, \mathbb{R})$
- $\int_{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2} \varphi(x, W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2) d(\varepsilon, v) = 1$  für alle  $x \in \Omega$ .

Wir setzen  $\psi^*(\varepsilon, v) := \varphi(x, W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2)$ . Die Funktionenschar  $\varphi$  erfülle außerdem:

- i.)  $\varphi_x(\cdot) \in C^1((0, \infty))$ ,
- ii.)  $\partial_e \varphi(x, e) < 0$  für  $e \in [0, E_{\max}(x))$ ;  $\varphi(x, e) = 0$  für  $e \notin [0, E_{\max}(x))$ ,
- iii.)  $\sup_{x \in \Omega} \|\varphi(x, \cdot)\|_{C^1((0, E_{\max}(x)))} < \infty$ ,
- iv.)  $\sup_{x \in \Omega} \partial_e \varphi_x(0) < 0$ .

Dann ist der durch  $\varphi_x$  definierte stationäre Zustand im folgenden Sinn nichtlinear stabil: Für jede Konstante  $C_1 > 0$  existiert  $C_2 > 0$  so, daß für alle Anfangsbedingungen  $\Psi_0 \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , die eine Dichte  $\psi_0$  mit  $\|\psi_0\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2)} < C_1$  haben, die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\Phi_t(\psi_0) - \psi^*\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^2)}^2 \\ & \leq C_2 \left\{ \left| \left[ \langle \Psi_0 - \Psi^*, W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2 \rangle \right] \right| + \|\psi_0 - \psi^*\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^2)} + d_2(\Psi_0, \Psi^*)^2 \right\} \end{aligned}$$

gilt.  $d_2$  ist die in Definition 1.6 erklärte Metrik auf  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ .

**BEMERKUNG 2.12.** Wir haben in Satz 2.6 bereits nachgewiesen, daß es sich bei  $\Psi^*$  tatsächlich um ein Equilibrium handelt. Das obige Ergebnis können wir nur für Anfangszustände und Störungen  $\Psi$  beweisen, die durch eine Dichte  $\psi$  mittels  $\langle \Psi, g \rangle = \int_{y \in \mathbb{R}^2} \psi(y)g(y) dy$  gegeben sind, weil

- i.)  $\varphi(\Psi)$  nur definiert ist, wenn  $\Psi$  eine Dichte  $\psi$  hat und
- ii.) auf die Voraussetzung  $\|\psi_x\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$  nicht verzichtet werden kann.

**BEWEIS.** Wir definieren  $\theta_x(\zeta) := -\int_0^\zeta \varphi_x^{-1}(s) ds$  mit  $\varphi_x^{-1} : [0, \varphi_x(0)] \rightarrow [0, E_{\max}(x)]$ . Hierbei verwenden wir, daß  $\min_{\varepsilon \in \mathbb{R}} W(\varepsilon) = 0$  ist. Es ist klar, daß die Ableitungen von  $\theta$  nach  $\zeta$  den folgenden Gleichungen genügen:

- i.)  $\theta'_x(\zeta) = -\varphi_x^{-1}(\zeta)$ ,
- ii.)  $\theta''_x(\zeta) = -\frac{1}{\varphi'_x(\varphi_x^{-1}(\zeta))}$ .

Wir setzen  $\theta_x(\zeta)$  zu  $\theta_x \in C^2(\mathbb{R}^+)$  auf  $\mathbb{R}^+$  fort durch  $\theta''_x(\zeta) = \theta''_x(\varphi_x(0)) = -\frac{1}{\varphi'_x(\varphi_x^{-1}(\varphi_x(0)))} = -\frac{1}{\varphi'_x(0)}$  für  $\zeta > \varphi_x(0)$ . Aus den Voraussetzungen ii.) und iii.) folgt:

$$\theta'' \geq -\frac{1}{\inf\{|\partial_e \varphi_x(e)| \mid 0 \leq e \leq E_{\max}(x), x \in \Omega\}} =: c_\varphi \in (0, \infty)$$

und somit gilt  $\theta(\zeta) - \theta(\zeta_0) - \theta'(\zeta_0)(\zeta - \zeta_0) \geq \frac{c_\varphi}{2}|\zeta - \zeta_0|^2$  für  $\zeta$  und  $\zeta_0 > 0$  wegen des Taylorschen Satzes. Durch den Grenzübergang  $\zeta_0 \rightarrow 0$  sieht man, daß die Ungleichung für alle  $\zeta, \zeta_0 \geq 0$  gilt.

Da die Divergenz des Vektorfeldes  $(v, -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k))^T$  überall 0 ist, ist für alle  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$  der Lösungsfluß  $\phi_{t,x}$  maßtreu. Also erhalten wir zu jeder Anfangsbedingung  $\Psi_0$  mit Dichte  $\psi_0$  die Lösung  $\Psi_t$  des Cauchy-Problems (2.3), indem wir  $\psi_0$  mit  $\phi_t$  transportieren:  $\psi(t, x, \varepsilon, v) = \psi_0(t, x, \phi_{t,x}^{-1}(\varepsilon, v))$ . Wir definieren

$$C(\psi_t) = \left[ \int_{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2} \theta(\psi_t(\varepsilon, v)) d(\varepsilon, v) \right].$$

Wegen der Maßtreue von  $\phi_{t,x}$  ist  $C(\psi)$  neben der Energie  $E_\beta(\psi)$  eine weitere Erhaltungsgröße. Wir setzen  $H_C(\psi) := E_\beta(\psi) + C(\psi)$ . Für die so definierte Erhaltungsgröße können

wir die Schritte ii.) und iii.) durchführen und erhalten

$$\begin{aligned}
& H_c(\psi) - H_c(\psi^*) \\
&= \left[ \int_{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2} (W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2)(\psi - \psi^*) + \theta(\psi) - \theta(\psi^*) d(\varepsilon, v) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\rho \left[ \langle \Psi, v \rangle \mathcal{C} \langle \Psi, v \rangle - \underbrace{\langle \Psi^*, v \rangle \mathcal{C} \langle \Psi^*, v \rangle}_{=0 \text{ da } \Psi^* \text{ ein Equilibrium ist}} \right] \\
&\geq \left[ \int_{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2} (W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2)(\psi - \psi^*) + \theta'(\varphi(W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2))(\psi - \psi^*) + \frac{c_\varphi}{2} |\psi - \psi^*|^2 d(\varepsilon, v) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\rho \langle \Psi, v \rangle \mathcal{C} \langle \Psi, v \rangle \right] \\
&= \left[ \int_{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2} (W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2)(\psi - \psi^*) - (W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2)(\psi - \psi^*) + \frac{c_\varphi}{2} |\psi - \psi^*|^2 d(\varepsilon, v) \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\frac{1}{2}\rho \langle \Psi, v \rangle \mathcal{C} \langle \Psi, v \rangle}_{\geq 0} \right] \\
&\geq \frac{c_\varphi}{2} \|\psi - \psi^*\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^2)}^2.
\end{aligned}$$

Es gibt viele Normen, bezüglich derer  $H_C$  stetig ist. Wir geben eine mögliche Wahl an und führen damit Schritt iv.) durch.

$$\begin{aligned}
& |H_c(\psi) - H_c(\psi^*)| \\
&= \left| \left[ \int_{(\varepsilon, v) \in \mathbb{R}^2} (W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2)(\psi - \psi^*) + \theta(\psi) - \theta(\psi^*) d(\varepsilon, v) \right] - \frac{1}{2}\rho \left[ \langle \Psi, v \rangle \mathcal{C} \langle \Psi, v \rangle \right] \right| \\
&\leq \left| \left[ \langle \Psi_0 - \Psi^*, W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2 \rangle \right] \right| + L \|\psi_0 - \psi^*\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^2)} + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{C}\| d_2(\Psi_0, \Psi^*)^2,
\end{aligned}$$

wobei  $L := \sup \{ |\theta'(\zeta)| \mid \zeta \in [0, \max \{ \|\psi^*\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2)}, \|\psi_0\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^2)} \}] \}$  ist. Damit erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|\psi_t - \psi^*\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^2)}^2 &\leq \frac{2}{c_\varphi} \left\{ \left| \left[ \langle \Psi_0 - \Psi^*, W(\varepsilon) + \frac{1}{2}\beta v^2 \rangle \right] \right| \right. \\
&\quad \left. + L \|\psi_0 - \psi^*\|_{L^1(\Omega \times \mathbb{R}^2)} + \frac{\rho}{2} \|\mathcal{C}\| d_2(\Psi_0, \Psi^*)^2 \right\}
\end{aligned}$$

und haben somit die Behauptung gezeigt.  $\square$

### 3. Numerische Simulation

In der Literatur werden vor allem Partikelverfahren genannt, um Transportgleichungen wie das Vlasov-Poisson-System zu simulieren, siehe z.B. [G196], [NW72]. Wegen der strukturellen Ähnlichkeit dieses Systems mit der aus dem mikrokinetischen Modell hergeleiteten Evolutionsgleichung für Youngsche Maße (2.3) liegt es nahe, diese Gleichung mit einer Partikelmethode zu integrieren. Wir konstruieren ein Verfahren und zeigen, daß

die Näherungslösung im starken Sinn gegen die exakte Lösung konvergiert. Das Verfahren wird angewandt, um das Konvergenzresultat in Theorem 2.8 zu verifizieren: Wir erhalten anstelle der theoretisch berechneten Konvergenzrate von  $t^{-\frac{1}{2}}$  sogar  $t^{-1}$ . Falls allerdings  $\rho > 0$  zugelassen wird, ist die Konvergenz gegen ein Equilibrium nicht mehr nachweisbar. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir o.B.d.A. an, daß  $\beta = 1$  ist.

Wir bezeichnen ein Young-Maß  $\Psi^h$  als elementares Young-Maß, wenn es eine endliche Partition von  $\Omega$  so gibt, daß  $\Psi^h$  auf allen Partitionselementen konstant ist. Es sei  $\Psi_0 \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  eine zulässige Anfangsbedingung in  $Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ , die durch eine Folge von elementaren Young-Maßen  $(\Psi_0^h)_{h>0}$  im starken Sinn approximiert wird, d.h. es existiert eine Folge von Partitionen  $(\omega_i^h)_{i=1\dots I_{\max}(h)}$  von  $\Omega$  und eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $(\mu_0^{hi})_{i \leq I_{\max}(h), h>0}$ , so daß für alle  $h > 0$  gilt:  $\Psi^h = \sum_{i < I_{\max}} \chi_{\omega_i^h} \mu_0^{hi}$  und  $\lim_{h \rightarrow 0} d_2(\Psi_0, \Psi_0^h) = 0$ . Wir nehmen o.B.d.A.  $\text{diam}(\omega_i^h) \leq h$  an. Da  $\Phi_t(\Psi_0^h)$  für  $t > 0$  im allgemeinen kein elementares Youngsches Maß mehr ist, projizieren wir die Dynamik auf die Menge der stückweise konstanten Youngschen Maße. Wir erklären für  $h > 0$  den Orthogonalprojektor

$$\pi_h : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) : f \mapsto \sum_{i \leq I_{\max}(h)} \chi_{\omega_i^h} \int_{\omega_i^h} f dx$$

und damit die diskretisierte Gleichung

$$(2.13a) \quad \dot{\Psi}^h = -\text{div}_{(\varepsilon, v)} \left\{ \Psi \cdot \left( v, -\frac{1}{\beta}(\sigma(\varepsilon) - k^h) \right)^T \right\},$$

$$(2.13b) \quad k^h = \pi_h \mathcal{B} \langle \Psi^h, \sigma \rangle.$$

Die globale Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösungen von (2.13) erhält man in vollkommen analoger Weise wie für das unmodifizierte System (2.3). Insbesondere gilt die Abschätzung in Theorem 2.1 auch für die Lösungen von (2.13). Da  $k^h$  für alle  $i \leq I_{\max}(h)$  auf  $\omega_i$  konstant ist, ist auch der Raum der auf  $\omega_i$  konstanten Youngschen Maße invariant unter dem durch (2.13) definierten Lösungsoperator  $\Phi^h \in C(\mathbb{R} \times Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2), Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2))$ . Die Menge der endlichen Konvexkombinationen von Deltadistributionen liegt dicht in  $PM^1(\mathbb{R}^2)$  (siehe [Ra91], S. 113). Wir können also die Wahrscheinlichkeitsmaße  $(\mu_0^i)_{i=1\dots I_{\max}}$  des Anfangszustandes  $\Psi_0^h$  mit Konvexkombinationen  $\sum_{j=1}^{J_{\max}} \gamma_{ij} \delta_{y_0^{ij}}$  bezüglich der Wassersteinmetrik beliebig genau approximieren. Dabei setzen wir implizit voraus, daß  $J_{\max}$ ,  $\gamma_{ij}$  und  $y_0^{ij}$  von einer vorgegebenen Zahl  $\kappa > 0$  so abhängen, daß

$$\left( \sum_{i=1}^{I_{\max}} \text{vol}(\omega_i) \left[ d_W \left( \mu_0^i, \sum_{j=1}^{J_{\max}} \gamma_{ij} \delta_{y_0^{ij}} \right) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \kappa$$

ist, ohne dies jedoch explizit in der Notation zu vermerken. Die diskrete Struktur des Anfangszustandes wird von der diskretisierten Gleichung (2.13) erhalten:

$$\Phi_t^h \left( \sum_{i,j} \chi_{\omega_i} \gamma_{ij} \delta_{y_0^{ij}} \right) = \sum_{i,j} \chi_{\omega_i} \gamma_{ij} \delta_{y^{ij}(t)},$$

wobei  $y^{ij}(t)$  als Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

$$(2.14) \quad \dot{y}^{ij} = \begin{pmatrix} y_2^{ij} \\ -\sigma(y_1^{ij}) + \pi_h \mathcal{B} \left[ \sum_{i,j} \chi_{\omega_i} \gamma_{ij} \sigma(y_1^{ij}) \right] \end{pmatrix}, \quad y^{ij}(0) = y_0^{ij}$$

definiert ist. Gleichung (2.14) kann nun mit einem beliebigen Integrationsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen numerisch gelöst werden.

**THEOREM 2.13.** *Es sei  $\Psi_0 \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$  ein zulässiger Anfangszustand, dann gibt es eine Konstante  $C > 0$ , die von  $\Psi^0$  abhängt, so daß für alle  $h > 0$ , für alle Partitionen  $(\omega_i^h)_{i \leq I_{\max}(h)}$  von  $\Omega$  mit  $\max_{i \leq I_{\max}(h)} \text{diam}(\omega_i^h) \leq h$  und  $\{y_0^{ij}\}_{\substack{i \leq I_{\max} \\ j \leq J_{\max}}} \subset \mathbb{R}^2$  gilt:*

$$d_2(\Phi_t(\Psi_0), \Phi_t^h(\Psi_0^h)) \leq C e^{3(\ell + \|\mathcal{B}\| \text{lip}(\sigma))t} \cdot (h + d_2(\Psi_0, \Psi_0^h)),$$

wobei  $\Psi_0^h = \sum_{i,j} \chi_{\omega_i} \gamma_{ij} \delta_{y_0^{ij}}$ ,  $\Phi_t^h(\Psi_0^h) = \sum_{i,j} \chi_{\omega_i} \gamma_{ij} \delta_{y^{ij}(t)}$  und  $y^{ij}(t)$  die Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (2.14) ist.

Für den Beweis benötigen wir noch ein wohlbekanntes Lemma, das mit der Poincaré-Ungleichung bewiesen wird.

**LEMMA 2.14.** *Es sei  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$  und  $u \in H^1(\Omega)$ , dann gilt:*

$$|u(x) - u(y)| \leq \sqrt{|x - y|} \|u'\|_{L^2(\Omega)}.$$

**BEWEIS.**  $|u(y) - u(x)|^2 = \left| \int_x^y u'(t) dt \right|^2 \leq |x - y| \int_x^y |u'(t)|^2 dt. \quad \square$

**BEWEIS VON THEOREM 2.13.** Wir verwenden das übliche Beweisschema, um die Konvergenz des numerischen Verfahrens zu zeigen: Konsistenz und Stabilität implizieren Konvergenz. Für die Lösung  $\Phi_t(\Psi_0)$  definieren wir in diesem Beweis  $\phi_t$  als den Fluß des dynamischen Systems

$$\dot{\varepsilon} = v, \quad \dot{v} = -\sigma(\varepsilon) + \mathcal{B} \langle \Phi_t(\Psi_0), \sigma \rangle,$$

und analog  $\phi_t^h$  als Fluß des modifizierten Systems

$$\dot{\varepsilon} = v, \quad \dot{v} = -\sigma(\varepsilon) + \pi_h \mathcal{B} \langle \Phi_t^h(\Psi_0), \sigma \rangle.$$

**Konsistenz von  $\pi_h \mathcal{B}$  mit  $\mathcal{B}$ :** Wir zeigen, daß es eine Konstante  $C > 0$  gibt, so daß  $\|(Id - \pi_h) \mathcal{B}\|_{\text{Lin}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))} \leq Ch$  ist; dieses Ergebnis beruht wesentlich auf der

Glättungseigenschaft von  $\mathcal{B}$ .

$$\begin{aligned}
& \left( \int_{\Omega} |\pi_h u(x) - u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_i \int_{x \in \omega_i} \left| \int_{x' \in \omega_i} u(x') dx' - u(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left( \sum_i \int_{\omega_i} \left( \underbrace{\sqrt{\text{diam}(\omega_i)}}_{\leq \sqrt{h}} \|u'\|_{L^2(\omega_i)} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ wegen Lemma 2.14} \\
& \leq \sqrt{h} \left( \sum_i \underbrace{\text{vol}(\omega_i)}_{\leq h} \|u'\|_{L^2(\omega_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq h \|u'\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Die  $L^2(\Omega)$ -Norm von  $\partial_x(\mathcal{B}u)$  kann durch die  $L^2(\Omega)$ -Norm von  $u$  abgeschätzt werden. Der einfachste Zugang dazu ist,  $u$  in eine Fourierreihe zu entwickeln und die Fourierkoeffizienten von  $\mathcal{B}u$  abzuschätzen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß  $\mathcal{B}$  sowohl im Dirichletfall, als auch im Neumannfall selbstadjungiert ist. Im Dirichletfall ist das Spektrum  $\text{spec}(\mathcal{B}) = \{1\} \cup \left\{ \frac{\rho}{\rho + \beta j^2 \pi^2} \mid j \in \mathbb{N} \right\}$ , die Eigenfunktionen sind  $(\cos(j\pi x))_{j \in \mathbb{N}_0}$ . Analog gilt im Neumannfall:  $\text{spec}(\mathcal{B}) = \left\{ \frac{\rho}{\rho + \beta(j + \frac{1}{2})^2 \pi^2} \mid j \in \mathbb{N}_0 \right\}$  mit den Eigenfunktionen  $(\cos((j + \frac{1}{2})\pi x))_{j \in \mathbb{N}_0}$ . Damit ist  $\|\partial_x \mathcal{B}u\| \leq \|\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+) \|u\|_{L^2(\Omega)}$  mit  $\lambda(j) = \frac{\rho \pi j}{\rho + \beta j^2 \pi^2}$ . Das absolute Maximum von  $\lambda$  ist durch  $(j = \sqrt{\frac{\rho}{\beta \pi^2}}, \lambda = \sqrt{\frac{\rho}{2\beta}})$  gegeben. Durch diese Rechnung haben wir  $\|(Id - \pi_h)\mathcal{B}\|_{\text{Lin}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))} \leq \sqrt{\frac{\rho}{2\beta}} h$  bewiesen.

**Stabilität:** Wir müssen  $d_2(\Psi_0, \Phi_t(\Psi_0))$  kontrollieren, allerdings ist die Abschätzung in Lemma 1.10.iii nicht gut genug für die Behauptung des Theorems, daher beweisen wir mit der Gronwallschen Ungleichung hier eine schärfere. Es ist

$$\begin{aligned}
& \|\langle \Psi_0(dy), |\phi_t(y) - y| \rangle\|_{L^2(\Omega)} \\
& = \left\| \left\langle \Psi_0(dy), \left| \int_0^t \begin{pmatrix} \phi_{s,2}(y) - y_2 + y_2 \\ -\sigma \circ \phi_{s,1}(y) + \mathcal{B} \langle \Psi_0, \sigma \circ \phi_{s,1} \rangle \end{pmatrix} ds \right. \right\rangle \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \int_0^t (\ell + \|\mathcal{B}\| \text{lip}(\sigma)) \cdot \|\langle \Psi_0(dy), |\phi_s(y) - y| \rangle\| ds \\
& \quad + \int_0^t \|\langle \Psi_0(dy), |-\sigma(y_2) + \sigma_0 + \mathcal{B} \langle \Psi_0(d\tilde{y}), \sigma(\tilde{y}_2) - \sigma_0 \rangle|\rangle\|_{L^2(\Omega)} ds + t\sigma_0(1 + \|\mathcal{B}\|) \\
(2.15) \quad & \Rightarrow \|\langle \Psi_0(dy), |\phi_t(y) - y| \rangle\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C} e^{(2\ell + \|\mathcal{B}\| \text{lip}(\sigma))t}
\end{aligned}$$



mit  $\tilde{C} = (1 + \|\mathcal{B}\|)(\text{lip}(\sigma) \langle \Psi_0(dy), |y| \rangle + \sigma_0)$ . Somit können wir den Fehler abschätzen, der durch das Diskretisieren im Laufe der Zeit entsteht:

$$\begin{aligned}
d_2(\Phi_t(\Psi_0), \Phi_t^h(\Psi_0)) &= \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle \Psi_0, g \circ \phi_t - g \circ \phi_t^h \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\langle \Psi_0, |\phi_t - \phi_t^h| \rangle\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \int_0^t \left\| \left\langle \Psi_0, \begin{pmatrix} \phi_{s,2} - \phi_{s,2}^h \\ -\sigma \circ \phi_{s,1} + \sigma \circ \phi_{s,1}^h \end{pmatrix} \right\rangle \right\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathcal{B} \langle \Psi_0, \sigma \circ \phi_{s,1} \rangle - \pi_h \mathcal{B} \langle \Psi_0, \sigma \circ \phi_{s,1}^h \rangle\|_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq \int_0^t \ell \|\langle \Psi_0, |\phi_s - \phi_s^h| \rangle\|_{L^2(\Omega)} + \|(Id - \pi_h)\mathcal{B}\| \|\langle \Psi_0, \sigma \circ \phi_{s,1} \rangle\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\pi_h \mathcal{B}\| \|\langle \Psi_0, |\sigma \circ \phi_{s,1} - \sigma \circ \phi_{s,1}^h| \rangle\|_{L^2(\Omega)} ds.
\end{aligned}$$

Der zweite Summand kann aufgrund der Stabilitätsungleichung (2.15) kontrolliert werden:

$$\begin{aligned}
\|\langle \Psi_0, \sigma \circ \phi_{t,1} \rangle\| &\leq \|\langle \Psi_0, |\sigma \circ \phi_{t,1} - \sigma| \rangle\| + \|\langle \Psi_0, \sigma \rangle\| \\
&\leq \text{lip}(\sigma) (\|\langle \Psi_0(dy), |\phi_t(y) - y| \rangle\| + \|\langle \Psi_0(dy), |y| \rangle\|_{L^2(\Omega)}) + \sigma_0 \\
&\leq \text{lip}(\sigma) \tilde{C} e^{(2\ell + \|\mathcal{B}\| \text{lip}(\sigma))t} + \text{lip}(\sigma) \langle \Psi_0(dy), |y| \rangle + \sigma_0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt wiederum mit Gronwall

$$\begin{aligned}
&d_2(\Phi_t(\Psi_0), \Phi_t^h(\Psi_0)) \\
&\leq C h e^{(\ell + \text{lip}(\sigma) \|\mathcal{B}\|)t} \cdot \left\{ \tilde{C} e^{(2\ell + \|\mathcal{B}\| \text{lip}(\sigma))t} + \text{lip}(\sigma) \langle \Psi_0(dy), |y| \rangle + \sigma_0 \right\}.
\end{aligned}$$

Indem wir  $\tilde{\tilde{C}} := C(\text{lip}(\sigma)\tilde{C} + \text{lip}(\sigma) \langle \Psi_0(dy), |y| \rangle + \sigma_0)$  wählen, erhalten wir

$$(2.16) \quad d_2(\Phi_t(\Psi_0), \Phi_t^h(\Psi_0)) \leq \tilde{\tilde{C}} h e^{3(\ell + \text{lip}(\sigma) \|\mathcal{B}\|)t}.$$

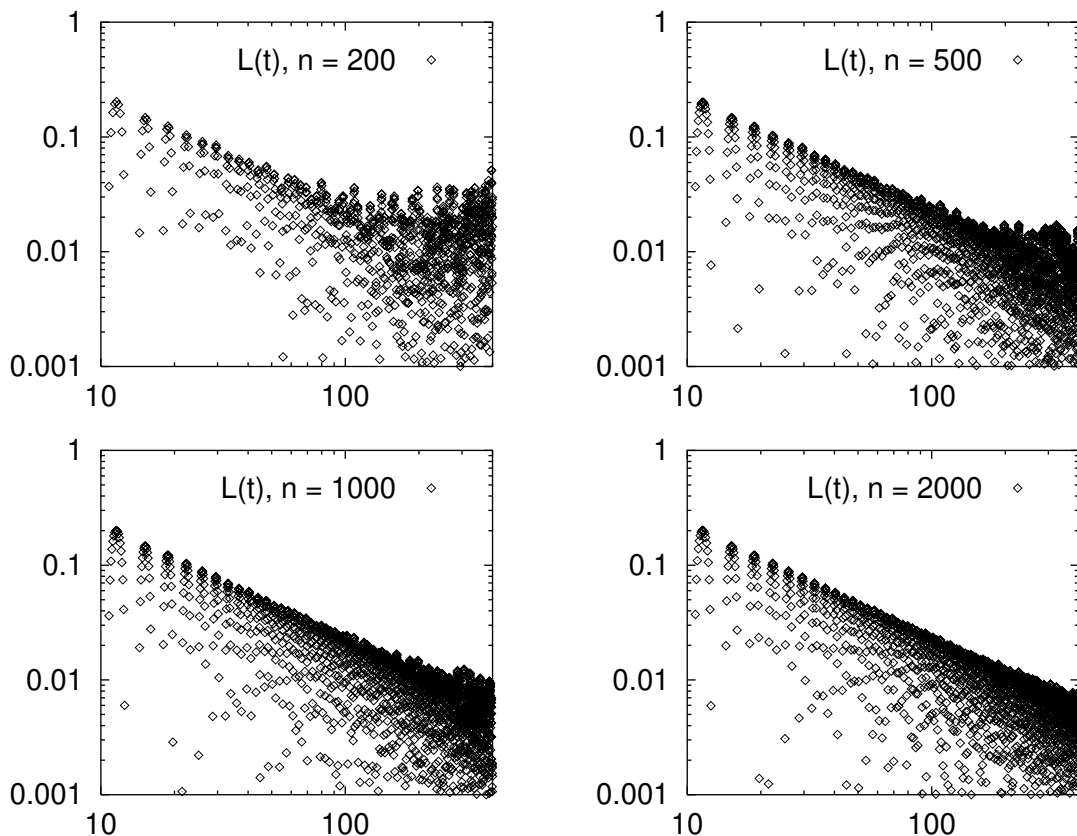
Mit diesen Vorüberlegungen können wir nun den Beweis abschließen. Wegen (2.16) erhalten wir mit der in Theorem 2.1 definierten Konstante  $C_{2,1}$ :

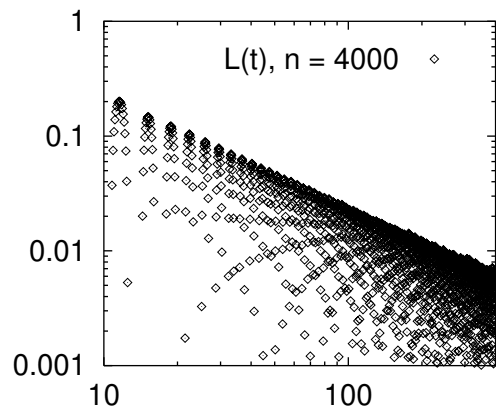
$$\begin{aligned}
&d_2(\Phi_t(\Psi_0), \Phi_t^h(\Psi_0^h)) \\
&\leq d_2(\Phi_t(\Psi_0), \Phi_t^h(\Psi_0)) + d_2(\Phi_t^h(\Psi_0), \Phi_t^h(\Psi_0^h)) \\
&\leq \max\{\tilde{\tilde{C}}, C_{2,1}\} e^{3(\ell + \|\mathcal{B}\| \text{lip}(\sigma))t} (h + d_2(\Psi_0, \Psi_0^h)).
\end{aligned}$$

□

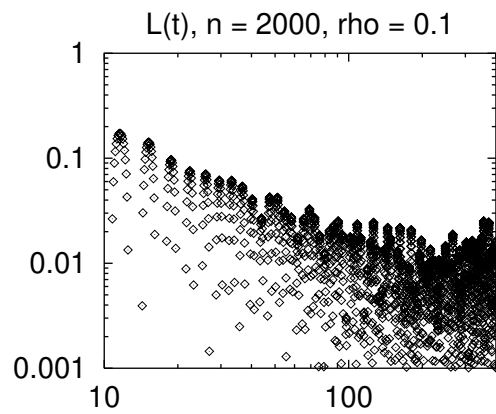
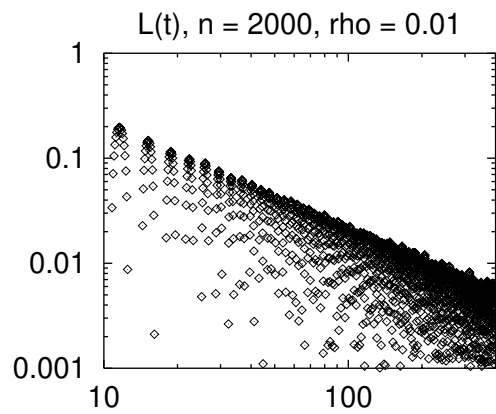
**3.1. Numerische Ergebnisse.** Wir überprüfen die Tauglichkeit des hier entwickelten numerischen Verfahrens, indem wir versuchen, die Langzeitdynamik zu simulieren. Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.8 konvergiert  $\Phi_t(\Psi_0)$  für  $t \rightarrow \infty$  im schwachen Sinn gegen ein stationäres Youngsches Maß  $\Psi^\infty$ . Als Indikator für die schwache Konvergenz dient die skalare Meßgröße  $L(t) = u|_{x=1} = \int_0^1 \varepsilon(t, x) dx$ . Es ist zu berücksichtigen, daß die Langzeitdynamik der numerisch berechneten Lösungen immer davon

dominiert ist, daß sie auf einen endlichdimensionalen Unterraum beschränkt ist. Die numerische Lösung  $\Phi_t^h(\Psi_0^h)$  kann daher nicht schwach konvergieren. Je höher die Dimension des Unterraumes gewählt wird, desto stärker tritt die unendlichdimensionale Dynamik in den Vordergrund. Dies ist bei den verschiedenen Simulationen für unterschiedliche Werte von  $n := \frac{1}{h}$  gut zu erkennen. Für die weiteren Variablen wurde  $W(\varepsilon) = \frac{1}{4}(\varepsilon^2 - 1)^2$ ,  $v_0 = 0$ ,  $\varepsilon_0(x) = \sqrt{2} + x$ ,  $\rho = 0$  und  $\beta = 1$  gewählt. Als Integrationsformel für die gewöhnliche Differentialgleichung wurde die implizite Mittelpunkregel verwendet. Sie hat die Eigenschaft, die Energie für längere Zeiträume weder stark zu verringern noch zu vergrößern, sondern innerhalb einer vernünftigen Schwankungsbreite um den Anfangszustand zu belassen. In allen Simulationen wurde die Zeitschrittweite  $\tau = 0.1$  gewählt, in den Schaubildern ist auf der Abszisse die Zeit  $t$  und auf der Ordinate  $L(t)$  abgetragen. Da  $W$  symmetrisch ist und die Energie des Anfangszustandes oberhalb des kritischen Punktes von  $W$  liegt, ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) = 0$ . Aufgrund der schnellen Oszillationen in der Zeit wirkt der Graph von  $t \mapsto L(t)$  stellenweise flächig. Die Ergebnisse der numerischen Integration zeigen, daß in Theorem 2.8 die Konvergenzordnung nicht richtig eingeschätzt wird: Anhand der Steigung der oberen Begrenzung in der doppelt logarithmischen Darstellung können wir ablesen, daß  $L(t)$  wie  $t^{-1}$  und nicht wie  $t^{-\frac{1}{2}}$  konvergiert.





Um zu überprüfen, ob für  $\rho > 0$  eine ähnliche Langzeitdynamik vorliegt, wurde dieselbe Anfangsbedingung für verschiedene Werte von  $\rho$  über einen festen Zeitraum integriert. Die Ergebnisse geben keinen Hinweis auf eine allmähliche Annäherung an einen stationären Zustand, wenn  $t$  gegen unendlich strebt.



## Das viskos gedämpfte Modell

Wir wenden in diesem Kapitel einige der anhand des mikroskopischen Modells entwickelten Ideen auf die viskos gedämpfte Wellengleichung

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \ddot{u} &= \partial_x (\sigma(\partial_x u) + \beta \partial_x \dot{u}) - \alpha u, \\ u|_{t=0} &= u_0, \dot{u}|_{t=0} = v_0, u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \end{aligned}$$

an. Die grundlegenden Eigenschaften von (3.1), wie die Dissipationsrate und in unserem Zusammenhang wichtige Ergebnisse, wurden in Kapitel 1 zusammengefaßt. Die Resultate in [BHJPS91] und [FM96] besagen, daß keine Lösung von (3.1) schnelle räumliche Oszillationen entwickeln kann, da die viskose Dämpfung die Energie zu schnell aus dem System extrahiert und somit kein Youngsches Maß generiert werden kann. Wir werden das Langzeitverhalten von Lösungen analysieren, die von Beginn an hochoszillativ sind. Wie im vorangegangenen Kapitel leiten wir dazu eine Evolutionsgleichung für reguläre YM-Lösungen her. Für das viskos gedämpfte Modell wurde die Existenz von YM-Lösungen schon in [FBS94] gezeigt. Allerdings ist der Ansatz auf polynomiale Verzerrungsenergiedichten  $W$  beschränkt. Die Dynamik von YM-Lösungen wird dort durch eine Evolutionsgleichung für den unendlichen Vektor aller Momente des Youngschen Maßes definiert. Unser neuer Zugang ist für allgemeine Funktionen  $W$  erfolgreich und setzt auch nicht voraus, daß alle Momente der YM-Lösungen existieren.

Nach den Vorarbeiten können wir die Menge aller stationären Young-Maße charakterisieren und nachweisen, daß das Langzeitverhalten von YM-Lösungen analog zu dem der klassischen Lösungen ist: Falls die verallgemeinerte Anfangsenergie gering ist, konvergiert jede Lösung gegen ein Equilibrium, das eine ähnliche Bauart besitzt wie die klassischen stationären Zustände. Wir führen nun einige Bezeichnungen ein, um die spezifischen Details unserer Vorgehensweise zu erläutern. In [Pe87] wird die Gleichung (3.1) in ein System transformiert, das aus einer parabolischen und einer hyperbolischen Gleichung mit Wellengeschwindigkeit 0 besteht.

$$\dot{p} = \beta \partial_x^2 p + \pi_a \sigma \left( \frac{1}{\beta} [p + q] \right) - \mathcal{B}_a(p + q), \quad \dot{q} = -\pi_a \sigma \left( \frac{1}{\beta} [p + q] \right) + \mathcal{B}_a(p + q).$$

Wie im vorangegangenen Kapitel ist  $\pi_a$  die Orthogonalprojektion auf die Funktionen in  $L^2(\Omega)$  mit Mittelwert 0 und  $\mathcal{B}_a$  ein kompakter und linearer Operator. Nur die hyperbolische Gleichung für  $q$  glättet schnelle Oszillationen nicht weg. Aus diesem Grund können nur in dieser Komponente YM-Lösungen erwartet werden. Das erweiterte System lautet

daher:

$$(3.2a) \quad \dot{p} = \beta \partial_x^2 p + \pi_a \langle \sigma(\frac{1}{\beta}[p + \cdot]) \rangle - \mathcal{B}_a(p + \langle q \rangle),$$

$$(3.2b) \quad \dot{\Psi} = \partial_q \left\{ \Psi \left( \sigma(\frac{1}{\beta}[p + q]) - k \right) \right\} \quad \text{mit } k = \int_0^1 \langle \sigma(\frac{1}{\beta}[p + \cdot]) \rangle dx + \mathcal{B}_a(p + \langle q \rangle).$$

Wir beweisen die globale Existenz und Eindeutigkeit im Phasenraum  $H_a^1(\Omega) \times Y_a^2(\Omega, \mathbb{R})$ , wobei  $Y_a^2(\Omega, \mathbb{R}) = Y^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \{\Psi : \llbracket \langle \Psi(dq), q \rangle \rrbracket = 0\}$  ist. Im Unterschied zum mikrokinetischen Modell liegt hier eine weitere Schwierigkeit darin, daß sich eine Komponente parabolisch verhält und daher den Einsatz der Methoden in [He81] erfordert. Die Hauptidee besteht darin, Gleichung (3.2b) für gegebenes  $p(t, x)$  zu lösen. Da  $k$  von  $\Psi$  abhängt, stellt dies ein nichtautonomes quasilineares Problem dar, das wir analog zu der im vorangegangenen Kapitel ausgeführten Fixpunktiteration in  $k$  lösen. Somit erhalten wir die von  $p$  abhängige Lösung  $\Psi(t)$ . Der vollständige Existenzbeweis ergibt sich, indem wir diese Iteration mit der klassischen parabolischen Theorie für (3.2a) kombinieren. Zum Schluß zeigen wir, daß die YM-Lösungen in der schwachen Topologie stetig von den Anfangsbedingungen abhängen. Somit sind unsere regulären YM-Lösungen dieselben wie in [FBS94] (siehe Theorem 3.6).

Die anschließende Analyse des Langzeitverhaltens ist durch die Vorgehensweise in [Pe87] und [FM96] geprägt. Es treten jedoch wichtige Unterschiede bei den von uns konstruierten YM-Lösungen auf. Nichtsdestotrotz scheint der hier vorgestellte Konvergenzbeweis kürzer zu sein. Die wichtigste Eigenschaft von (3.2) ist die verallgemeinerte Dissipationsidentität

$$E_\alpha(p(t), \Psi(t)) = E_\alpha(p_0, \Psi_0) - \int_0^t \int_0^1 \left( \beta (\partial_x^2 p(s, x))^2 + \frac{1}{\beta} V(\sigma)(s, x) \right) dx ds,$$

die als neuen Term das Integral über die Varianz der Spannung  $\sigma$  enthält:

$$V(\sigma) = \langle \sigma(\frac{1}{\beta}[p + \cdot])^2 \rangle - \langle \sigma(\frac{1}{\beta}[p + \cdot]) \rangle^2.$$

Somit können wir zeigen, daß für  $t \rightarrow \infty$  die Summe  $\|p(t)\|_{H^1} + \|\langle (\sigma - k)^2 \rangle(t)\|_{L^1}$  gegen 0 konvergiert. Dies impliziert die Konvergenz der Phasenanteile (die Masse in einer kleinen Umgebung von  $z_1$ ,  $z_2$  und  $z_0$  und der Verzerrung  $\varepsilon = (p + \langle q \rangle)/\beta$ ). Der letzte Schritt, der die Konvergenz von  $k$  nach sich zieht, beinhaltet eine einfache Beschreibung der Gleichgewichte und eine kurze Anwendung des Satzes über implizite Funktionen (siehe Lemma 3.15). Somit kann die Verwendung des komplizierten „refined comparison principle“ in [FM96] vermieden werden. Aus diesen Konvergenzen folgt, daß alle Lösungen mit geringer Anfangsenergie im starken Sinn gegen einen stationären Zustand  $(0, \Psi^\infty)$  konvergieren.

Auch in diesem Modell können die Mikrostrukturbereiche in endlicher Zeit weder verschwinden noch entstehen. Aus einem Argument in [BHJPS91] folgt jedoch, daß der Langzeitlimes die Mikrostruktur des viskosen Modells höchstens vernichten und nicht

erzeugen kann, somit gilt also  $\mathcal{M}_{\Psi_\infty} \subseteq \mathcal{M}_{\Psi(t)}$ . Im Gegensatz dazu wurde im vorangegangenen Kapitel gezeigt, wie im mikrokinetischen Modell Mikrostruktur entstehen kann.

Zum Schluß verdeutlichen wir den Zusammenhang zwischen Young-Maß-Lösungen und der Existenz eines Minimierers für das Energiefunktional  $G_\alpha = \int_0^1 \frac{\alpha}{2} u^2 + W(\partial_x u) dx$ , indem wir eine Folge  $(\Psi_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y_a^2(\Omega, \mathbb{R})$  mit den folgenden Eigenschaften angeben:

i.) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\lim_{t \rightarrow \infty} G_\alpha(\Phi_t(\Psi_0^n)) = 0$ .

ii.) Es existiert eine klassische Funktion  $\varepsilon^* \in L^2(\Omega)$  so, daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_2(\delta_{\varepsilon^*}, \Psi_0^n) = 0$  ist.

Die Tatsache, daß für alle klassischen Anfangsbedingungen  $y^0 \in [L^2(\Omega)]^2$  die Ungleichung  $\lim_{t \rightarrow \infty} G_\alpha(\Phi_t(\delta_{y^0})) > 0$  gilt, bezeichnen wir als dynamische Nichtminimierbarkeit von  $G_\alpha$  bezüglich der Gleichung (3.1). Durch die Folge  $(\Psi_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist klar, daß die dynamische Nichtminimierbarkeit keine generische Eigenschaft des viskos gedämpften Modells ist, sondern lediglich auf die unzureichende Auswahl an Anfangszuständen zurückzuführen ist.

## 1. Existenz der Dynamik

**1.1. Die Pego-Transformation.** Für die Untersuchung von Gleichung (3.1) ist es vorteilhaft, die sogenannte Pego-Transformation, die für  $\alpha = 0$  erstmalig in [Pe87] verwendet wurde, einzusetzen. Wir bezeichnen hier mit  $v(t, x)$  die Verschiebungsgeschwindigkeit  $\dot{u}(t, x)$  und nicht die Verzerrungsgeschwindigkeit  $\partial_x \dot{u}(t, x)$  wie in Kapitel 2. Es ist

$$p(t, x) = \int_0^x v(t, x') dx' - \int_0^1 \int_0^x v(t, x') dx' dx = \pi_a \int_0^x v(t, x') dx',$$

$$q(t, x) = \beta \partial_x u(t, x) - p(t, x).$$

$H_0^1(\Omega)$  ist der Hilbertraum der Funktionen  $f \in H^1(\Omega)$  mit  $f(0) = f(1) = 0$ . Es ist wohlbekannt, daß die Pego-Transformation  $\mathcal{P} : H_0^1 \times L_a^2 \rightarrow H_a^1 \times L_a^2 : (u, v) \mapsto (p, q)$  ein stetiger Isomorphismus zwischen Banachräumen ist. Nach dieser Transformation nimmt das System (3.1) die folgende Gestalt an:

$$(3.3a) \quad \dot{p} = Ap + \pi_a \sigma \left( \frac{1}{\beta} (p + q) \right) - \mathcal{B}_a(p + q), \quad p(0, x) = p_0(x),$$

$$(3.3b) \quad \dot{q} = -\pi_a \sigma \left( \frac{1}{\beta} (p + q) \right) + \mathcal{B}_a(p + q), \quad q(0, x) = q_0(x).$$

Hier ist  $A : D(A) \subset L_a^2(\Omega) \rightarrow L_a^2(\Omega)$  der unbeschränkte Operator, der durch  $D(A) = H_{a,\partial}^2(\Omega)$  und

$$(3.4) \quad Au = \beta \partial_x^2 u$$

erklärt ist, wobei wir für die Definition von  $H_{a,\partial}^2(\Omega)$  auf Kapitel 2 verweisen. Der kompakte Operator  $\mathcal{B}_a : L_a^2(\Omega) \rightarrow L_a^2(\Omega)$  ist durch  $h = \mathcal{B}_a g$  definiert,  $h$  löst das elliptische

Randwertproblem

$$\partial_x^2 h = \frac{\alpha}{\beta} g; \quad h \in H_{a,\partial}^2(\Omega), \quad g \in L_a^2(\Omega).$$

Wir betrachten System (3.3) im Phasenraum  $H_a^1(\Omega) \times L_a^2(\Omega)$ .

Ein wichtiger Gesichtspunkt dieses Systems ist das parabolische Verhalten der  $p$ -Gleichung. Die  $q$ -Gleichung ist hingegen hyperbolisch mit Wellengeschwindigkeit 0 und erzeugt keine Dissipation. Somit können die Lösungen des Systems nur in der  $q$ -Variablen schnell oszillieren.

**1.2. Globale Existenz und stetige Abhängigkeit vom Anfangszustand.** Wir zeigen nun die globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des folgenden Systems in  $H_a^1(\Omega) \times Y_a^2(\Omega, \mathbb{R})$ :

$$(3.5a) \quad \dot{p} = Ap + \langle \sigma \rangle - k, \quad p(0, x) = p_0(x),$$

$$(3.5b) \quad \dot{\Psi} = \partial_q \left\{ \left( \sigma \left( \frac{1}{\beta}(p + q) \right) - k \right) \Psi \right\}, \quad \Psi(0, \cdot) = \Psi_0(\cdot) \in Y_a^2(\Omega, \mathbb{R}),$$

mit  $k = \mathcal{B}_a(p + \langle q \rangle) + \llbracket \langle \sigma \rangle \rrbracket$ , wobei  $Y_a^2(\Omega, \mathbb{R}) = Y^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \{ \Psi : \llbracket \langle \Psi(dq), q \rangle \rrbracket = 0 \}$ . Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir meistens  $\langle \sigma \rangle$  anstelle von  $\left\langle \Psi(dq), \sigma \left( \frac{1}{\beta}(p(t, x) + q) \right) \right\rangle$ ; bei dieser Schreibweise tritt allerdings die Abhängigkeit des Ausdrucks  $\langle \sigma \rangle$  von  $p$  nicht mehr explizit in Erscheinung. Analog ist  $\langle W \rangle$  definiert. Gleichung (3.5b) erfüllt für festes  $k, p \in C([0, T], L^2(\Omega))$  die Voraussetzungen von Lemma 1.10. Wir setzen in diesem Kapitel  $\ell = \frac{\text{lip}(\sigma)}{\beta}$ . In den weiteren Ausführungen greifen wir auf die Resultate in [He81] zurück.

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz wird wieder mit dem Banachschen Fixpunktsatz bewiesen. In diesem Fall wird das Youngsche Maß nicht von einer, sondern von zwei Funktionen  $(p, k)$  erzeugt, was den Beweis etwas komplizierter macht. Wir benötigen zwei Funktionale

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \langle \sigma \rangle(x) &= S(p, \Psi)(x) = \left\langle \Psi(x, dq), \sigma \left( \frac{1}{\beta}(p(x) + q) \right) \right\rangle \quad \text{und} \\ k(x) &= K(p, \Psi)(x) = \llbracket \langle \sigma \rangle \rrbracket + \mathcal{B}_a[p(\cdot) + \langle \Psi(\cdot, dq), q \rangle](x). \end{aligned}$$

Dies definiert uns eine Abbildung  $(S, K) : H_a^1(\Omega) \times Y_a^2(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\Omega) \times L_a^2(\Omega)$ . Unser Beweis verläuft nun folgendermaßen:

Für gegebenes  $p \in C([0, T], H_a^1(\Omega))$  lösen wir die Gleichung (3.5b) iterativ nach  $\Psi$ , dies definiert uns eine Abbildung  $\Psi = \tilde{\mathcal{T}}(p)$  von  $C([0, T], H_a^1(\Omega))$  nach  $C([0, T], Y_a^2)$ . Wir müssen jedoch nur  $(\langle \sigma \rangle, k) = \mathcal{T}(p) = (S, K)(\tilde{\mathcal{T}}(p), p)$  kontrollieren. Genauer gesagt, erhalten wir die Abschätzung

$$(3.7) \quad \|\mathcal{T}(p_1) - \mathcal{T}(p_2)\|_{L^2 \times H^2} \leq C(T) \|p_1 - p_2\|_{L^2}.$$

Als nächstes definieren wir einen Lösungsoperator für Gleichung (3.5a) in  $C([0, T], H_a^1(\Omega))$  bei gegebenem  $g = \langle \sigma \rangle - k$ , indem wir den Beweis für Theorem 3.3.3 in [He81] für unser Problem passend modifizieren. Dies definiert uns einen linearen Operator  $p = \mathcal{R}(p_0, g)$

von  $H_a^1 \times C([0, T], L_a^2)$  nach  $C([0, T], H_a^1)$ . Die endgültige Iteration wird schließlich in  $p$  in der Form  $p_{n+1} = G(p_n) = \mathcal{R}(p_0, \mathcal{T}(p_n(\cdot)))$  durchgeführt, die explizite Darstellung befindet sich im Beweis zu Theorem 3.6. Die Vorgehensweise bis hierher definiert uns eine milde Lösung in  $C([0, T], H^1(\Omega))$ . Wir beweisen a posteriori, daß die milde Lösung in der Tat eine starke Lösung ist, indem wir nachweisen, daß  $p \in C^\alpha((0, T], L^2(\Omega))$  ist. Es kann leicht gezeigt werden, daß  $\langle \sigma \rangle$  und  $k$  diese Regularität erben. Somit folgt aus Theorem 3.2.2 in [He81], daß  $p$  eine starke Lösung ist. Erst diese Regularität erlaubt es uns, die verallgemeinerte Dissipationsrate im nächsten Kapitel herzuleiten.

Wir studieren für gegebenes  $p(t, x), k(t, x)$  Gleichung (3.5b); in diesem Fall entkoppelt die gewöhnliche Differentialgleichung über  $x \in \Omega$ .

LEMMA 3.1. *Sei  $T > 0$  beliebig. Für  $p \in C([0, T], H_a^1(\Omega))$  existiert eine eindeutige Lösung  $\Psi$  von (3.5b). Außerdem gibt es Konstanten  $T \geq T_0 > 0, C > 0$  so, daß die folgenden Abschätzungen auf  $[0, T_0]$  gelten:*

- i.)  $\| \langle \sigma \rangle(p^1) - \langle \sigma \rangle(p^2) \|_{L^2} \leq C \| p^1 - p^2 \|_{L^2},$
- ii.)  $\| k(p^1) - k(p^2) \|_{H^2} \leq C \| p^1 - p^2 \|_{L^2}.$

BEWEIS. Wir konstruieren die Lösung von (3.5b) mit dem Banachschen Fixpunktsatz und leiten danach die behaupteten Abschätzungen her. Dazu bezeichnen wir mit  $\Psi = \mathcal{Q}(p, k)$  den Lösungsoperator der nichtautonomen linearen Gleichung (3.5b), wenn  $p$  und  $k$  fest sind. Somit ist wegen Lemma 1.10 die reguläre YM-Lösung  $\Psi(t)$  eindeutig durch den Transport von  $\Psi_0$  mit dem Fluß  $\phi_t^{k,p}$  der gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{q} = -\sigma(\frac{1}{\beta}(q + p(t, x))) + k(t, x)$  gegeben:  $\langle \Psi(t, x), g \rangle = \langle \Psi_0(x), g \circ \phi_t^{k,p}(x, \cdot) \rangle$ . Dies definiert uns  $\langle q \rangle(p, k), \langle \sigma \rangle(p, k) \in C([0, T], L^2(\Omega))$ . Wir beweisen zunächst die Existenz von  $C_1(T), C_2(T) > 0, \lim_{T \rightarrow 0} C_1(T) = 0$  mit der Eigenschaft:

$$(*) \quad \begin{aligned} & \| \langle q \rangle(p^1, k^1) - \langle q \rangle(p^2, k^2) \|_{L^2} \leq C_1(T) \{ \| p^1 - p^2 \|_{L^2} + \| k^1 - k^2 \|_{H^2} \}, \\ & \| \langle \sigma \rangle(p^1, k^1) - \langle \sigma \rangle(p^2, k^2) \|_{L^2} \leq C_2 \| p^1 - p^2 \|_{L^2} + C_1(T) \| k^1 - k^2 \|_{H^2}. \end{aligned}$$

Wir definieren  $\mathcal{B}(p, m_1, m_2) = \llbracket m_1 \rrbracket + \mathcal{B}_a(p + m_2)$  und erhalten

$$(**) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{3} \| \mathcal{B}(p^1, \langle \sigma_1 \rangle, \langle q_1 \rangle) - \mathcal{B}(p^2, \langle \sigma_2 \rangle, \langle q_2 \rangle) \|_{H^2} \\ & \leq \frac{\alpha}{\beta} \left( \| p^1 - p^2 \|_{L^2} + \| \langle q_1 \rangle - \langle q_2 \rangle \|_{L^2} \right) + \| \langle \sigma_1 \rangle - \langle \sigma_2 \rangle \|_{L^2}. \end{aligned}$$

Indem wir  $p^1 = p^2$  setzen und (\*) in (\*\*) einsetzen, erhalten wir die gewünschte Kontraktionseigenschaft für die Abbildung  $k \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{Q}(p, k))$  in  $C([0, T], H^2)$ , wenn  $T$  hinreichend klein ist. Der Fixpunkt  $k^*$  bestimmt mit Lemma 1.10 die eindeutige reguläre YM-Lösung  $\Psi$ , die durch  $\Psi = \mathcal{Q}(p, k^*)$  gegeben ist.



Wir zeigen nun die Abschätzungen (\*):

$$\begin{aligned} & \|\langle q \rangle(p_{T'}^1, k_{T'}^1) - \langle q \rangle(p_{T'}^2, k_{T'}^2)\| = \sup_{t \in [0, T]} \|\langle \Psi_0, \phi_t^{p^1, k^1}(q) - \phi_t^{p^2, k^2}(q) \rangle\|_{L^2} \\ (\text{Lemma 1.10.i}) & \leq T e^{\ell T} \max\{\ell, 1\} (\|p_{T'}^1 - p_{T'}^2\|_{L^2} + \|k_{T'}^1 - k_{T'}^2\|_{H^2}). \end{aligned}$$

Ebenso kann der Erwartungswert von  $\sigma$  wegen Lemma 1.10.i wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} & \|\langle \sigma \rangle(p_{T'}^1, k_{T'}^1) - \langle \sigma \rangle(p_{T'}^2, k_{T'}^2)\|_{L^2} \\ &= \sup_{t \in [0, T]} \left\| \left\langle \Psi_0, \sigma \left( \frac{1}{\beta} (p_t^1 + \phi_t^{p^1, k^1}(q)) \right) - \sigma \left( \frac{1}{\beta} (p_t^2 + \phi_t^{p^2, k^2}(q)) \right) \right\rangle \right\|_{L^2} \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{\beta} \text{lip}(\sigma) \left\{ \|p_t^1 - p_t^2\|_{L^2} + t e^{\ell t} \max\{\ell, 1\} (\|p_{T'}^1 - p_{T'}^2\|_{L^2} + \|k_{T'}^1 - k_{T'}^2\|_{H^2}) \right\}. \end{aligned}$$

Es sei nun  $(\Psi, k)$  eine Lösung von (3.5b). Wir leiten die behaupteten Abschätzungen für  $k$  und  $\langle \sigma \rangle$  her.

$$\begin{aligned} \|k(p^1) - k(p^2)\|_{H^2} &\leq \frac{\alpha}{\beta} (\|p^1 - p^2\|_{L^2} + \|\langle q_1 \rangle - \langle q_2 \rangle\|_{L^2}) + \|\langle \sigma_1 \rangle - \langle \sigma_2 \rangle\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\alpha}{\beta} (\|p^1 - p^2\|_{L^2} + C_1(T) \|p^1 - p^2\|_{L^2} + C_1(T) \|k^1 - k^2\|_{H^2}) \\ &\quad + C_2 \|p^1 - p^2\|_{L^2} + C_1(T) \|k^1 - k^2\|_{H^2} \\ &= \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} C_1(T) + C_2 \right) \|p^1 - p^2\|_{L^2} + C_1(T) \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) \|k^1 - k^2\|_{H^2}. \end{aligned}$$

Wir wählen  $T \geq T_0 > 0$  so, daß  $C_1(T_0) < \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta} + 1}$  ist, damit gilt:

$$\|k(p^1) - k(p^2)\|_{H^2} \leq \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} C_1(T_0) + C_2}{1 - C_1(T_0) \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right)} \|p^1 - p^2\|_{L^2}.$$

□

Wir weisen nun nach, daß die Lösungen, die im vorangegangenen Lemma konstruiert wurden, die zeitliche Regularität von  $p$  erben.

**LEMMA 3.2.** *Es sei  $p \in C([0, T], L^2(\Omega))$  lokal Hölder-stetig und  $(\Psi, k) \in Y^2(\Omega, \mathbb{R}) \times L^2(\Omega)$  die Lösung von (3.5b). Dann haben die Erwartungswerte  $\langle q \rangle$  und  $\langle \sigma \rangle$  die folgende zeitliche Regularität in  $L^2(\Omega)$ :*

- i.)  $\langle q \rangle$  ist lokal Lipschitz-stetig und
- ii.)  $\langle \sigma \rangle$  ist lokal Hölder-stetig.

**BEWEIS.** Für  $t \geq s$  gilt wegen Lemma 1.10.iii

$$\begin{aligned} & \|\langle \Psi_t(dq) - \Psi_s(dq), q \rangle\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\langle \Psi_0, |\phi_t - \phi_s| \rangle\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C(t) |t - s| \left( \frac{1}{\beta} \|\langle \Psi_0(dq), |q| \rangle\|_{L^2(\Omega)} + \sigma_0 + \ell \|p\|_{L^2} + \|k\|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left\| \left\langle \sigma \left( \frac{1}{\beta} (p(t) + \phi_t(\cdot)) \right) \right\rangle - \left\langle \sigma \left( \frac{1}{\beta} (p(s) + \phi_s(\cdot)) \right) \right\rangle \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \ell \left\{ \|p(t) - p(s)\|_{L^2(\Omega)} + \|\langle \Psi_0, |\phi_t - \phi_s| \rangle\|_{L^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned}$$

Aus diesen Abschätzungen folgen sofort die behaupteten Stetigkeitseigenschaften.  $\square$

Wir zitieren noch einige Resultate aus [He81] und [Pa83], um zeigen zu können, daß die Lösungen für die parabolische Gleichung starke Lösungen sind.

**SATZ 3.3** ([Pa83], S. 110, Theorem 3.1). *Es sei  $A$  der infinitesimale Generator einer analytischen Halbgruppe  $T(t)$  und es sei  $f \in L^p([0, T], X)$  mit  $1 < p < \infty$ . Wenn  $u$  eine milde Lösung von  $\dot{u} = Au + f(t)$ ,  $u(0) = x$  ist, dann ist  $u$  für jedes  $\varepsilon > 0$  auf  $[\varepsilon, T]$  Hölder-stetig mit Exponenten  $(p-1)/p$ . Wenn außerdem  $x \in D(A)$  ist, dann ist  $u$  mit demselben Exponenten auf ganz  $[0, T]$  Hölder-stetig.*

**SATZ 3.4** ([He81], Theorem 3.2.2). *Es sei  $A$  ein sektorieller Operator in  $X$ ,  $x \in X$ ,  $f : (0, T) \rightarrow X$  lokal Hölder-stetig und  $\int_0^\rho \|f(t)\| dt < \infty$  für ein  $\rho > 0$ ; dann ist durch*

$$u(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s) ds$$

die eindeutige starke Lösung  $u$  für das Anfangswertproblem  $\dot{u} = Au + f(t)$ ,  $u(0) = x$ , gegeben.

**SATZ 3.5** ([He81], Theorem 1.4.3). *Es sei  $A$  sektoriell und der Realteil  $\Re(\text{spec}(A)) < \delta < 0$ . Für jedes  $\alpha \geq 0$  existiert  $C_\alpha < \infty$  so, daß für  $t > 0$*

$$\|(-A)^\alpha e^{At}\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{\delta t}$$

ist. Wenn außerdem  $0 < \alpha \leq 1$  und  $x \in D((-A)^\alpha)$  ist, dann gilt

$$\|(e^{At} - 1)x\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \|(-A)^\alpha x\|.$$

Nun haben wir die Hilfsmittel beisammen, um die globale Existenz der Lösungen von System (3.5) zu beweisen. Außerdem erhalten wir die stetige Abhängigkeit der Lösungen vom Anfangszustand.

**THEOREM 3.6** (Globale Existenz und stetige Abhängigkeit vom Anfangszustand). *Für jeden Anfangszustand  $(p_0, \Psi_0) \in H_a^1(\Omega) \times Y_a^2(\Omega, \mathbb{R})$  hat das Cauchy-Problem (3.5) eine eindeutige Lösung  $(p, \Psi) = \Phi_t(p_0, \Psi_0)$  in  $C([0, \infty), H_a^1(\Omega)) \times C([0, \infty), Y_a^2(\Omega, \mathbb{R}))$ ;  $p$  ist eine starke Lösung von (3.5a) und  $\Psi$  eine reguläre YM-Lösung von (3.5b). Außerdem ist  $\Phi_t(\cdot, \cdot)$  für festes  $t \geq 0$  in  $L^2(\Omega) \times Y^2(\Omega, \mathbb{R})_w$  stetig.*

**BEWEIS.** Wir verallgemeinern den Beweis von Theorem 3.3.3 in [He81], um ihn auf unser parabolisches Problem mit Gedächtnis anwenden zu können, dabei setzen wir o.B.d.A.  $\beta = 1$  voraus.

Es sei  $e^{At}$  die analytische Halbgruppe, die vom unbeschränkten linearen Operator  $A$  generiert wird, wobei  $A$  durch (3.4) definiert ist. Wir erklären den Iterationsoperator  $\mathcal{I}_T$  durch die Formel der Variation der Konstanten:

$$\mathcal{I}_T(p)(t) := e^{At}p_0(x) + \int_0^t e^{A(t-s)}(\langle \sigma \rangle(p) - k(p)) ds.$$

Es ist klar, daß  $\mathcal{I}_T$  den Raum  $C([0, T], H_a^1(\Omega))$  in sich selbst abbildet. Wir weisen nun die Kontraktionseigenschaft von  $\mathcal{I}_T$  nach, wobei  $C_{\frac{1}{2}}$  die in Satz 3.5 definierte Konstante ist. Wegen Lemma 3.1 ist

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{I}_T(p_1) - \mathcal{I}_T(p_2)\|_{\frac{1}{2}} \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|e^{A(t-s)}(\langle \sigma \rangle(p_1) - \langle \sigma \rangle(p_2))\|_{\frac{1}{2}} ds + \int_0^t \|e^{A(t-s)}(k(p_1) - k(p_2))\|_{\frac{1}{2}} ds \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \|(-A)^{\frac{1}{2}} e^{A(t-s)}\| \{ \|\langle \sigma \rangle(p_1) - \langle \sigma \rangle(p_2)\|_{L^2} + \|k(p_1) - k(p_2)\|_{L^2} \} ds \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t C_{\frac{1}{2}}(t-s)^{-\frac{1}{2}} ds \{ \|\langle \sigma \rangle(p_1) - \langle \sigma \rangle(p_2)\|_{L^2} + \|k(p_1) - k(p_2)\|_{L^2} \} \\ & \leq \sup_{t \in [0, T]} -C_{\frac{1}{2}} 2(t-s)^{\frac{1}{2}} \Big|_{s=0}^{s=t} 2C \|p_1 - p_2\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Indem wir  $T < \min\{T_0, 1/(\frac{4}{\pi}C_{\frac{1}{2}}C)^2\}$  wählen, haben wir die Behauptung bewiesen, da  $\|\cdot\|_{L_a^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\pi} \|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$  ist. Die Wahl von  $T$  wird nicht vom Anfangszustand  $(p_0, \Psi_0)$  beeinflusst. Somit haben wir die globale Existenz einer milden Lösung für alle  $t \geq 0$  gezeigt.

Aus Satz 3.3 folgt, daß  $p$  lokal Hölder-stetig ist, also können wir mit Lemma 3.2 folgern, daß  $k$  und  $\langle \sigma \rangle$  lokal Hölder-stetig sind. Somit folgt mit Satz 3.4 (der lineare nichtautonome Fall), daß  $p$  nicht nur eine milde, sondern auch eine starke Lösung ist. Aus Lemma 1.10 folgt, daß  $\Psi$  eine reguläre YM-Lösung von (3.5b) ist.

Die schwache Stetigkeit beweisen wir mit Hilfe der Kompaktheit von  $\mathcal{B}_a$ , die die schwache Konvergenz in  $L^2(\Omega)$  in starke umwandelt.

Wir bezeichnen mit  $k^*, k^i, \phi^*, \phi^i$  die von den Lösungen erzeugten Kopplungsfunktionen und Lösungsflüsse. Nach der Definition der schwachen Konvergenz in  $Y^2(\Omega, \mathbb{R})$  müssen wir zeigen, daß für alle  $t \geq 0$  der folgende Grenzwert in  $L^2(\Omega)$  verschwindet:

$$\begin{aligned} & \text{w-lim}_{i \rightarrow \infty} \langle \Psi_t^* - \Psi_t^i, g \rangle = \text{w-lim}_{i \rightarrow \infty} \{ \langle \Psi_0^*, g(\phi_t^*) \rangle - \langle \Psi_0^i, g(\phi_t^i) \rangle \} \\ & = \text{w-lim}_{i \rightarrow \infty} \langle \Psi_0^* - \Psi_0^i, g(\phi_t^*) \rangle + \text{w-lim}_{i \rightarrow \infty} \langle \Psi_0^i, g(\phi_t^*) - g(\phi_t^i) \rangle. \end{aligned}$$

Der erste Grenzwert ist 0 nach Voraussetzung für  $(\Psi_0^i)_{i \in \mathbb{N}}$ , da  $g(\phi^*)$  wegen Lemma 1.10.i eine Lipschitz-Funktion ist. Für den zweiten Grenzwert erhalten wir in der starken Topologie von  $L^2(\Omega)$  wegen Lemma 1.10.ii:

$$\begin{aligned} \|\langle \Psi_0^i, g(\phi_t^i) - g(\phi_t^*) \rangle\|_{L^2(\Omega)} &\leq \text{lip}(g) \left\| \|\phi_t^i - \phi_t^*\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \text{lip}(g) \max\{\ell, 1\} t e^{\ell t} \left( \|p_t^* - p_t^i\|_{\Omega_t} + \|k_t^* - k_t^i\|_{\Omega_t} \right), \end{aligned}$$

wobei  $\|\cdot\|_{\Omega_t} = \|\cdot\|_{C([0,t], L^2(\Omega))}$ . Somit ist der Beweis vollständig, wenn wir gezeigt haben, daß  $(p^i, k^i)$  in der starken Topologie auf  $L^2(\Omega)$  gleichmäßig auf  $[0, t]$  gegen  $(p^*, k^*)$  konvergiert. Durch die Anwendung der oben bewiesenen Darstellung der Lösung  $p$  für die parabolische Gleichung mittels der Halbgruppe  $e^{At}$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\left| \begin{pmatrix} \|p_{t'}^* - p_{t'}^i\|_{\Omega_t} \\ \|k_{t'}^* - k_{t'}^i\|_{\Omega_t} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \|e^{At'}(p_0^* - p_0^i) + \int_0^{t'} e^{A(t'-s)} (\langle \Psi_0^*, \sigma(p_s^* + \phi_s^*) \rangle - \langle \Psi_0^i, \sigma(p_s^i + \phi_s^i) \rangle - k_s^* + k_s^i) ds\|_{\Omega_t} \\ \|\mathcal{B}_a[p_{t'}^* + \langle \Psi_0^*, \phi_{t'}^* \rangle - p_{t'}^i - \langle \Psi_0^i, \phi_{t'}^i \rangle] + [\langle \Psi_0^*, \sigma(p_{t'}^* + \phi_{t'}^*) \rangle - \langle \Psi_0^i, \sigma(p_{t'}^i + \phi_{t'}^i) \rangle]\|_{\Omega_t} \end{pmatrix} \right| \\ &\leq \left| \begin{pmatrix} \|e^{At'}(p_0^* - p_0^i)\|_{\Omega_t} + \left\| \int_0^{t'} e^{A(t'-s)} \langle \Psi_0^* - \Psi_0^i, \sigma(p_s^* + \phi_s^*) \rangle ds \right\|_{\Omega_t} \\ \|\mathcal{B}_a[p_{t'}^* + \langle \Psi_0^*, \phi_{t'}^* \rangle - p_{t'}^i - \langle \Psi_0^i, \phi_{t'}^i \rangle]\|_{\Omega_t} \end{pmatrix} \right| \\ &\quad + \left( \left\| \int_0^{t'} e^{A(t'-s)} (\langle \Psi_0^i, \sigma(p_s^* + \phi_s^*) - \sigma(p_s^i + \phi_s^i) \rangle - k_s^* + k_s^i) ds \right\|_{\Omega_t} \right. \\ &\quad \left. \|\langle \Psi_0^*, \sigma(p_{t'}^* + \phi_{t'}^*) \rangle - \langle \Psi_0^i, \sigma(p_{t'}^i + \phi_{t'}^i) \rangle\|_{L^\infty([0,t])} \right) \\ &=: \left| \begin{pmatrix} I_1 + I_2 \\ I_3 + I_4 \end{pmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Unsere Strategie besteht darin zu zeigen, daß  $I_l$ ,  $l = 1 \dots 4$  durch einen Ausdruck der Form  $a_l^i + \int_0^t C_l^1 \|p_{s'}^* - p_{s'}^i\|_{\Omega_s} + C_l^2 \|k_{s'}^* - k_{s'}^i\|_{\Omega_s} ds$  majorisiert werden kann, wobei  $C_l^1$  und  $C_l^2$  beliebige positive Zahlen sind, die nur von  $t$  abhängen und  $a_l^i$  eine positive reelle Folge mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_l^i = 0$  ist. Die Konvergenzaussage folgt dann durch Anwendung der Gronwallschen Ungleichung. Wir setzen  $K(t) = \sup_{s \in [0,t]} \|e^{As}\|$ .

**1.:** Für jedes  $\delta > 0$  ist

$$\begin{aligned} I_1 &\leq K(t) \|p_0^* - p_0^i\|_{L^2} + \sup_{t' \in [0,t]} \int_0^{t'} \left\| e^{A(t'-s)} \langle \Psi_0^* - \Psi_0^i, \sigma(p_s^* + \phi_s^*) \rangle \right\|_{L^2} ds \\ &\leq \delta K(t) \text{lip}(\sigma) \sup_{s \in [0,t]} \|\text{lip}(\phi_s^*)\|_{L^\infty(\Omega)} (\|\langle \Psi_0^*, |q| \rangle\|_{L^2} + \|\langle \Psi_0^i, |q| \rangle\|_{L^2}) \\ &\quad + K(t) \|p_0^* - p_0^i\|_{L^2} + \sup_{t' \in [\delta, t]} \int_0^{t'-\delta} \|e^{A(t'-s)} \langle \Psi_0^* - \Psi_0^i, \sigma(p_s^* + \phi_s^*) \rangle\|_{L^2} ds. \end{aligned}$$

Der dritte Term kann durch  $K(t) \int_0^{t-\delta} \|e^{A\delta} \langle \Psi_0^* - \Psi_0^i, \sigma(p_s^* + \phi_s^*) \rangle\|_{L^2} ds$  abgeschätzt werden. Dieser Ausdruck konvergiert gegen 0, da der Integrand eine  $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})$ -Funktion

ist und wegen der Kompaktheit von  $e^{\delta A}$  punktweise konvergiert, somit ist der Satz über die dominierte Konvergenz anwendbar. Da  $\delta$  beliebig gewählt war, strebt  $I_1$  gegen 0.

**2.:** Wegen Lemma 1.10.i gilt:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq K(t) \int_0^t \left\| \left\| \sigma(p_{s'}^* + \phi_{s'}^*) - \sigma(p_{s'}^i + \phi_{s'}^i) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\|_{\Omega_s} + \left\| k_{s'}^* - k_{s'}^i \right\|_{\Omega_s} ds \\ &\leq K(t) \int_0^t \text{lip}(\sigma) \left( \left\| p_{s'}^* - p_{s'}^i \right\|_{\Omega_s} + \left\| \phi_{s'}^* - \phi_{s'}^i \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right) + \left\| k_{s'}^* - k_{s'}^i \right\|_{\Omega_s} ds \\ &\leq K(t) \int_0^t \text{lip}(\sigma)(1 + te^{\ell t}) \left\| p_{s'}^* - p_{s'}^i \right\|_{\Omega_s} + (\text{lip}(\sigma)te^{\ell t} + 1) \left\| k_{s'}^* - k_{s'}^i \right\|_{\Omega_s} ds. \end{aligned}$$

**3.:** Wir schätzen den dritten Ausdruck ähnlich ab:

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{B}_a [p_{t'}^* + \langle \Psi_0^*, \phi_{t'}^* \rangle - p_{t'}^i - \langle \Psi_0^i, \phi_{t'}^i \rangle] \right\|_{\Omega_t} \\ &\leq \|\mathcal{B}_a\| \left\| p_{t'}^* - p_{t'}^i \right\|_{\Omega_t} + \|\mathcal{B}_a\| \left\| \langle \Psi_0^* - \Psi_0^i, \phi_{t'}^* \rangle \right\|_{\Omega_t} + \|\mathcal{B}_a\| \left\| \left\| \phi_{t'}^* - \phi_{t'}^i \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\|_{\Omega_t}. \end{aligned}$$

Den Term  $\|p^* - p^i\|_{\Omega_t}$  haben wir bereits in den Schritten 1 und 2 abgeschätzt. Da  $\mathcal{B}_a$  kompakt ist, konvergiert  $\|\mathcal{B}_a\| \langle \Psi_0^* - \Psi_0^i, \phi_s^* \rangle\|_{L^2(\Omega)}$  punktweise gegen 0. Zusätzlich erhalten wir durch Differentiation nach  $s$ :

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{d}{ds} \mathcal{B}_a [\langle \Psi_0^* - \Psi_0^i, \phi_s^* \rangle] \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathcal{B}_a\| \left\| \langle \Psi_0^* - \Psi_0^i, -\sigma(p_s^* + \phi_s^*) + k_s^* \rangle \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathcal{B}_a\| \text{lip}(\sigma) \|\text{lip}(\phi_s^*)\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \|\langle \Psi_0^*, |q| \rangle\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\phi_s^*(0)\|_{L^2(\Omega)} + \|\langle \Psi_0^i, |q| \rangle\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Da  $\langle \Psi_0^i(dq), |q| \rangle$  schwach konvergiert, ist die Norm beschränkt, also ist der letzte Ausdruck auf  $[0, t]$  beschränkt, somit konvergiert der zweite Summand gleichmäßig gegen 0. Für den dritten Summanden erhalten wir unter Verwendung von Lemma 1.10.i:

$$\begin{aligned} &\left\| \left\| \phi_{t'}^* - \phi_{t'}^i \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\|_{\Omega_t} \\ &= \sup_{t' \in [0, t]} \left\| \left\| \int_0^{t'} -\sigma(p_s^* + \phi_s^*) + k_s^* + \sigma(p_s^i + \phi_s^i) - k_s^i ds \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sup_{t' \in [0, t]} \int_0^{t'} \text{lip}(\sigma) \left( \left\| p_s^* - p_s^i \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \left\| \phi_s^* - \phi_s^i \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + \left\| k_s^* - k_s^i \right\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq \int_0^t \text{lip}(\sigma) \left\| p_{s'}^* - p_{s'}^i \right\|_{\Omega_s} + \max\{\text{lip}(\sigma), 1\} te^{\ell t} \text{lip}(\sigma) \left( \left\| p_{s'}^* - p_{s'}^i \right\|_{\Omega_s} + \left\| k_{s'}^* - k_{s'}^i \right\|_{\Omega_s} \right) \\ &\quad + \left\| k_{s'}^* - k_{s'}^i \right\|_{\Omega_s} ds. \end{aligned}$$

**4.:** Da  $[\cdot] : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  kompakt ist, können wir die analogen Abschätzungen wie in Schritt 3 durchführen. □

Wie beim mikrokinetischen Modell müssen wir noch die Konsistenz von (3.5) mit (3.3) zeigen.

**THEOREM 3.7** (Konsistenz). *Jede klassische Lösung  $(p, q) \in C([0, T], H_a^1(\Omega) \times L_a^2(\Omega))$  von (3.3) erzeugt durch die Einbettung  $(p(x), q(x)) \mapsto (p(x), \delta_{q(x)})$  eine spezielle Lösung  $(p, \Psi)$  von (3.5).*

**BEWEIS.** Es ist klar, daß für  $\Psi = \delta_{q(t,x)}$  die Kopplungsterme  $\mathcal{B}_a[p(t, x) + \langle q \rangle]$  und  $\llbracket \langle \sigma \rangle \rrbracket$  mit  $\mathcal{B}_a[p(t, x) + q(t, x)]$  und  $\llbracket \sigma(\frac{1}{\beta}(p(t, x) + q(t, x))) \rrbracket$  übereinstimmen. Somit ist Gleichung (3.5a) äquivalent zu (3.3a). Für  $g \in C_{\text{lip}}^1(\mathbb{R})$  erhalten wir wegen (3.3b)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \delta_{q(t,x)}, g(\cdot) \rangle - \langle \delta_{q(t,x)}, (-\sigma(\frac{1}{\beta}(p(t, x) + \cdot)) + k)g'(\cdot) \rangle \\ &= g'(q(t, x))\dot{q}(t, x) + g'(q(t, x))(\sigma(\frac{1}{\beta}(p(t, x) + q(t, x))) - k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist Gleichung (3.5b) erfüllt. □

## 2. Langzeitverhalten

Wir untersuchen das asymptotische Verhalten von YM-Lösungen für Gleichung (3.5). Dabei soll die Verzerrungsenergiedichte  $W$  zusätzlich zu den Bedingungen i.-iii.) in Kapitel 1 noch die Forderung

iv.)  $W(z_1) = W(z_2)$ ,  $z_1 < 0 < z_2$

erfüllen. PEGO zeigte in [Pe87], daß für  $\alpha = 0$  jede Lösung von Gleichung (3.3) gegen einen stationären Zustand strebt. FRIESECKE und MCLEOD verallgemeinerten das Resultat auf den Fall  $\alpha > 0$ , jedoch ist ihre Methode auf Lösungen beschränkt, deren Anfangszustand geringe Energie hat. Unser Ziel ist es, dieses Resultat zu beweisen, wenn auch YM-Lösungen zugelassen sind. Wir erhalten einen wichtigen Unterschied im Vergleich zum Fall ohne Youngsche Maße: YM-Lösungen können in der Tat die elastische Energie minimieren, wenn die Zeit gegen unendlich strebt. Der Beweis in [BHJPS91], der zeigt, daß keine klassische Lösung von (3.1) die Energie minimiert, beruht auf der Tatsache, daß die Gleichung für  $q$  asymptotisch autonom ist. Dies impliziert, daß  $q$  gegen ein schwaches relatives Minimum konvergiert. Aber im Falle klassischer Lösungen sind die lokalen Minima Funktionen, die die Energie nicht minimieren können, wie der kurze Beweis in der Einleitung von Kapitel 1 zeigt. Dieselbe Konvergenz gilt auch für YM-Lösungen, jedoch gibt es hier einen eindeutigen Fixpunkt mit minimaler Energie, z.B.  $\Psi_{\min} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$  für  $\sigma(\partial_x u) = (\partial_x u)^3 - \partial_x u$ .

Der Konvergenzbeweis für klassische Lösungen basiert auf der Dissipationsgleichung  $\frac{d}{dt} E_\alpha = -\beta \|\partial_x \dot{u}\|_{L^2}^2$ . Für (3.5) erhalten wir eine etwas kompliziertere Dissipationsrate, sie beinhaltet die Varianz von  $\sigma$ , die wir folgendermaßen definieren:

$$V(\sigma) = \langle \sigma^2 \rangle - \langle \sigma \rangle^2.$$

Da  $\sigma$  global Lipschitz-stetig ist, ist  $V(\sigma)$  wie  $\text{Var}(\Psi)$  eine  $L^1(\Omega)$ -Funktion, falls  $(p, \Psi) \in L^2(\Omega) \times Y^2(\Omega, \mathbb{R})$  ist.

**SATZ 3.8** (Verallgemeinerte Dissipationsgleichung). *Wir definieren die verallgemeinerte Energie*

$$E_\alpha(p, \Psi) = \int_0^1 \left( \langle W \rangle + \frac{1}{2}(\partial_x p)^2 + \frac{\alpha}{2}u^2 \right) dx$$

mit  $u(t, x) = \int_0^x (p(t, x') + \langle q \rangle) / \beta dx'$  und  $\sigma(\varepsilon) = W'(\varepsilon)$ . Dann gilt für Lösungen  $(p, \Psi)$  von (3.5) die verallgemeinerte Dissipationsgleichung:

$$E_\alpha(p(t), \Psi(t)) = E_\alpha(p_0, \Psi_0) - \int_0^t \int_0^1 \left( \beta(\partial_x^2 p(s, x))^2 + \frac{1}{\beta}V(\sigma)(s, x) \right) dx ds.$$

**BEWEIS.** Wir erhalten die Identität durch Differentiation von  $E_\alpha$  nach  $t$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^1 \langle W \rangle + \frac{1}{2}(\partial_x p)^2 + \frac{\alpha}{2}u^2 dx &= \int_0^1 \langle \partial_t \Psi, W \rangle + \left\langle \sigma \cdot \frac{1}{\beta} \dot{p} \right\rangle + (\partial_x p)(\dot{\partial_x p}) + \alpha u \dot{u} dx \\ &= \int_0^1 \left\langle -(\sigma - k) \sigma \frac{1}{\beta} \right\rangle + \left\langle \sigma \left( \partial_x^2 p + \frac{1}{\beta}(\langle \sigma \rangle - k) \right) \right\rangle - (\partial_x^2 p) \beta (\partial_x^2 p) - (\partial_x^2 p)(\langle \sigma \rangle - k) + \alpha u \dot{u} dx \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{\beta} \langle (\sigma - k) \sigma \rangle + \frac{1}{\beta} \langle \sigma \rangle^2 - \frac{1}{\beta} k \langle \sigma \rangle + (\partial_x^2 p) \langle \sigma \rangle - \beta (\partial_x^2 p)^2 - (\partial_x^2 p) \langle \sigma \rangle + (\partial_x^2 p) k + \alpha u \dot{u} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{1}{\beta} (\langle \sigma^2 \rangle - \langle \sigma \rangle^2) + \beta (\partial_x^2 p)^2 dx, \end{aligned}$$

wobei  $\dot{u} = \partial_x p$  und  $\partial_x k = \alpha u$  für die letzte Identität benutzt wurde.  $\square$

**2.1. A Priori-Abschätzungen.** Ein üblicher Weg, die Konvergenz von Lösungen dissipativer Systeme nachzuweisen, besteht darin zu zeigen, daß das Integral der Dissipationsrate über die Zeit beschränkt bleibt. Wenn nun noch die Ableitung des Integranden beschränkt werden kann, konvergiert der Integrand gegen 0. Dies ist die grobe Idee des Beweises, obwohl wir die Konvergenz eines Youngschen Maßes und nicht nur einer einfachen Funktion zeigen wollen.

Da die Energie nicht zunimmt, haben wir die folgenden a priori-Abschätzungen:

$$(3.8) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|\dot{u}(t)\|_{L^2} = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|\partial_x p(t)\|_{L^2} < \infty,$$

$$(3.9) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|\partial_x u(t)\|_{L^2} < \infty,$$

$$(3.10) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|\langle \Psi(t, \cdot, dq), q^2 \rangle\|_{L^1} \leq C(1 + \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|\langle W \rangle\|_{L^1}) < \infty.$$

Diese Abschätzungen implizieren die Existenz einer Konstanten  $C(E_\alpha(p_0, \Psi_0))$ , so daß für jedes  $C_1 \geq C$  das Intervall  $[-C_1, C_1]$  bezüglich des Flusses der nichtautonomen gewöhnlichen Differentialgleichung  $\dot{q} = -\sigma((p(t, x) + q)/\beta) + k(t, x)$  für alle  $(t, x)$  invariant ist. Diese Aussage folgt aus der Beschränktheit von  $\|p\|_{L^\infty}$  wegen (3.8) und da wegen den Ungleichungen (3.9) und (3.10)  $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|k_t\|_{L^\infty} < \infty$  ist. Da  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma(\varepsilon) = \infty$  und

$\lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} \sigma(\varepsilon) = -\infty$  ist, existiert ein  $C > 0$  so, daß  $-\sigma((p+q)/\beta) + k < 0$  für  $q > C$  und  $-\sigma((p+q)/\beta) + k > 0$  für alle  $q < -C$  ist. Falls also  $\text{supp } \Psi_0(x) \subset [-s(x), s(x)]$ ,  $s(x) \in L^2(\Omega)$  ist, dann gilt für alle  $t \geq 0$   $\text{supp } \Psi(t, x) \subset [-\tilde{s}(x), \tilde{s}(x)]$ , wobei  $L^2 \ni \tilde{s}(x) := \max\{s(x), C(E_\alpha(p_0, \Psi_0))\}$ .

Dieses Ergebnis motiviert die Definition des Raumes der Youngschen Maße mit kompaktem Träger:

$$Y_c^p(\Omega, \mathbb{R}) = \{\Psi \in Y^p(\Omega, \mathbb{R}) \mid \exists s_\Psi \in L^p(\Omega) : \text{supp } \Psi_x \subset [-s(x), s(x)]\}.$$

Im weiteren beschränken wir die Analysis auf Youngsche Maße im Raum  $Y_c^2(\Omega, \mathbb{R})$ , der invariant unter der durch (3.5) definierten Evolution ist. Diese Einschränkung erlaubt es, einige technische Schwierigkeiten zu vermeiden, die die Komplexität des Beweises vergrößern würden, ohne jedoch neue Erkenntnisse zu erzeugen.

**2.2. Stationäre Lösungen.** Wir charakterisieren die stationären Zustände des Systems (3.5). Indem man alle Terme, die eine Zeitableitung enthalten, durch 0 ersetzt, erhält man das stationäre System

$$(3.11a) \quad 0 = \beta \partial_x^2 p + \langle \sigma \rangle - k, \quad \partial_x p(0) = \partial_x p(1) = \llbracket p \rrbracket = 0,$$

$$(3.11b) \quad 0 = \partial_q [(\sigma - k)\Psi],$$

$$(3.11c) \quad k = \llbracket \langle \sigma \rangle \rrbracket + \mathcal{B}_a(p + \langle q \rangle).$$

Aus (3.11b) folgt, daß das YM  $\Psi$  eine Konvexkombination von drei Punktmaßen ist, deren Positionen die drei Nullstellen  $q = \zeta_j$ ,  $j = 0..2$  der Gleichung  $\sigma((p+q)/\beta) = k$  sind. Mit (3.11a) ist klar, daß  $p \equiv 0$  ist. Somit sind die Gleichgewichte durch die folgende Teilmenge von  $Y^2(\Omega, \mathbb{R})$  beschrieben:

$$(3.12) \quad \mathcal{S} = \left\{ \sum_{i=0}^2 \gamma_i(x) \delta_{\zeta_i(x)} \mid \gamma_i \in [0, 1], \sum_{i=0}^2 \gamma_i = 1, R(\gamma, \zeta) = 0 \right\}.$$

Die nichtlineare Abbildung  $R : (L^2(\Omega))^6 \rightarrow (L^2(\Omega))^3 \times \mathbb{R}$  ist hierbei folgendermaßen definiert:

$$(3.13) \quad R(\gamma, \zeta) = \begin{pmatrix} (\sigma(\zeta_j(x)/\beta) - \llbracket \sum_{i=0}^2 \gamma_i(x) \sigma(\zeta_i(x)/\beta) \rrbracket - \mathcal{B}_a[\gamma \cdot \zeta])_{j=0..2} \\ \frac{1}{\beta} \llbracket \gamma \cdot \zeta \rrbracket \end{pmatrix}.$$

Die letzte Komponente von  $R(\gamma, \zeta) = 0$  ist die rechte Randbedingung  $u(1) = 0$ , da  $\beta \partial_x u = \langle q \rangle = \gamma \cdot \zeta = \sum_{i=0}^2 \gamma_i \zeta_i$  ist.

Diese Beschreibung der Menge  $\mathcal{S}$  wird beim Beweis des Konvergenzresultates sehr nützlich sein, da auch die instationären Lösungen  $(p_t, \Psi_t)$  durch die nichtlineare Abbildung  $R$  kontrolliert werden können.



**2.3. Das Konvergenzresultat.** Mit diesen Vorbereitungen können wir die folgende Konvergenzaussage beweisen. Interessanterweise findet die Konvergenz gegen den stationären Zustand in der starken YM-Topologie statt.

**THEOREM 3.9.** *Es existiert eine Konstante  $e_0(\alpha, \beta) > 0$  so, daß für alle Anfangszustände  $(p_0, \Psi_0) \in H_a^1(\Omega) \times Y_{a,c}^2(\Omega, \mathbb{R})$  mit  $E_\alpha(p_0, \Psi_0) < e_0(\alpha, \beta)$  ein stationärer Zustand  $\Psi^\infty \in \mathcal{S}$  existiert, so daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(p_0, \Psi_0) = (0, \Psi^\infty)$  in  $H^1(\Omega) \times Y^2(\Omega, \mathbb{R})$  gilt, d.h.  $\|p(t)\|_{H^1} + \|d_W(\Phi_t(\Psi_0), \Psi^\infty)\|_{L^2} \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .*

Unser Ergebnis ist auf Anfangszustände beschränkt, die geringe Energie haben, diese Einschränkung wird auch in [FM96] vorgenommen. Nach unserer Kenntnis ist für beliebige Anfangsbedingungen trotz des stark dissipativen Charakters der erzeugenden Differentialgleichung die Konvergenz der Lösungen bislang noch nicht geklärt.

Der Beweis des Theorems ist sehr technisch, wir gliedern ihn wie folgt: Zuerst zeigen wir, daß  $\|\langle (\sigma - k)^2 \rangle\|_{L^1}$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt, danach beweisen wir, daß  $k$  in  $H^2(\Omega)$  konvergiert. Dieses Ergebnis impliziert, daß  $\Psi$  im starken Sinn gegen einen stationären Zustand  $\Psi^\infty \in \mathcal{S}$  konvergiert.

**LEMMA 3.10.** *Es existiert eine Konstante  $C > 0$  so, daß für alle  $(p, \Psi) \in H_a^1 \times Y^2(\Omega, \mathbb{R})$  die Abschätzung*

$$\|p\|_{H^1}^2 + \|k\|_{H^1}^2 + \|\langle \sigma \rangle\|_{L^2}^2 \leq C E_\alpha(p, \Psi)$$

*gilt, wobei  $\langle \sigma \rangle = S(p, \Psi)$  und  $k = K(p, \Psi)$  durch (3.6) definiert sind.*

**BEWEIS.** Wir erinnern daran, daß  $\partial_x k = \alpha u$  ist, somit gilt  $\|\partial_x k\|_{L^2}^2 = \alpha^2 \|u\|_{L^2}^2 \leq 2\alpha E_\alpha(p, \Psi)$ . Aus den Eigenschaften von  $\sigma$  und  $W$  kann elementar die Existenz einer Konstanten  $C_W$  abgeleitet werden, so daß für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  gilt:  $\sigma^2(\varepsilon) \leq C_W W(\varepsilon)$ . Indem wir noch  $\llbracket k \rrbracket = \llbracket \langle \sigma \rangle \rrbracket$  berücksichtigen, erhalten wir die folgende Ungleichungskette:

$$\llbracket k \rrbracket^2 = \llbracket \langle \sigma \rangle \rrbracket^2 \leq \llbracket \langle \sigma \rangle^2 \rrbracket \leq \llbracket \langle \sigma^2 \rangle \rrbracket \leq C_W \llbracket \langle W \rangle \rrbracket \leq C_W E_\alpha(p, \Psi).$$

Mit der Poincaré-Ungleichung ergibt sich insgesamt

$$\|k\|_{H^1}^2 = \|k\|_{L^2}^2 + \|\partial_x k\|_{L^2}^2 \leq \left( C_W + 2\alpha \left( 1 + \frac{1}{\pi^2} \right) \right) E_\alpha(p, \Psi).$$

Die Abschätzungen für  $p$  und  $\langle \sigma \rangle$  folgen analog. □

Wir beweisen ein Lemma über das Langzeitverhalten von  $p$ . Mit der Dissipationsidentität erhalten wir, daß  $p$  in  $H^1(\Omega)$  gegen 0 konvergiert.

**LEMMA 3.11.** *Sei  $(p, \Psi)$  eine Lösung von (3.5) und  $\tau > 0$ , dann gilt:*

$$\sup_{t > \tau} \|\dot{p}(t)\|_{H^1} < \infty, \quad \int_0^\infty \|p(t)\|_{H^2}^2 dt < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|p\|_{H^1} = 0.$$

BEWEIS. Die Abschätzung für  $\|\dot{p}\|_{H^1}$  folgt aus [Pe87, Lemma A3], einer Umformulierung von Theorem 3.5.2 in [He81] für eine abstrakte semilineare Evolutionsgleichung  $\dot{z} = Az + f(t, z)$ :

$$\|\dot{p}(t)\|_{H^1} \leq K(\tau) \left( \|p(t-\tau)\|_{H^1(\Omega)} + \sup_{s \in [t-\tau, t]} (\|\langle \sigma \rangle(s)\|_{L^2} + \|k(s)\|_{L^2}) \right).$$

Die Beschränktheit der rechten Seite folgt aus dem vorangegangenen Lemma und der Ungleichung  $E_\alpha(p(t), \Psi(t)) \leq E_\alpha(p_0, \Psi_0)$ . Damit haben wir die erste Aussage gezeigt. Die anderen beiden Behauptungen können aus der Dissipationsungleichung  $\int_0^t \|\partial_x^2 p\|_{L^2}^2 ds \leq E_\alpha(p_0, \Psi_0)/\beta$  abgeleitet werden. Wegen  $(\partial_x p)(t, 0) = (\partial_x p)(t, 1) = 0$  gilt  $\|p\|_{H^1} \leq \frac{2}{\pi} \|\partial_x^2 p\|_{L^2}$ . Zusammen mit der Beschränktheit von  $\|\dot{p}\|_{H^1}$  erhalten wir  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|p\|_{H^1} = 0$ .  $\square$

Als nächstes beweisen wir, daß die verallgemeinerte Spannung  $\sigma - k$  gegen eine Punktmasse konvergiert. Diese Aussage wurde für klassische Lösungen in [FM96] bewiesen.

LEMMA 3.12. Für Lösungen  $(p_t, \Psi_t) = \Phi_t(p_0, \Psi_0)$  mit  $(p_0, \Psi_0) \in H_a^1(\Omega) \times Y_{a,c}^2(\Omega, \mathbb{R})$  gilt  $\langle (\sigma - k_t)^2 \rangle \rightarrow 0$  in  $L^1(\Omega)$  für  $t \rightarrow \infty$ .

BEWEIS. Die Hauptidee besteht darin, eine modifizierte Energie  $\tilde{E}(t)$  zu definieren:

$$\tilde{E}(t) = \int_0^1 \frac{\alpha\beta}{2} u^2 + \langle \beta W - p(\sigma - k) \rangle dx.$$

Für die modifizierte Energie werden wir folgende Dissipationsgleichung herleiten:

$$(3.14) \quad \frac{d}{dt} \tilde{E}(t) = \int_0^1 \left( -\langle (\sigma - k)^2 \rangle + \alpha p^2 - p \langle (\beta \partial_x^2 p + \langle \sigma \rangle - \sigma) \sigma' \rangle \right) dx.$$

In der Herleitung verwenden wir die Identität

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\alpha\beta}{2} u^2 dx = \beta \int_0^1 (\partial_x k)(\partial_x p) dx = -\beta \int_0^1 k \partial_x^2 p dx,$$

wobei benutzt wurde, daß  $\dot{u} = \partial_x p$  und  $\partial_x k = \alpha u$  ist. Wir erinnern an die Definitionen  $\langle \dot{\Psi}, g \rangle = \langle \Psi, -(\sigma - k) \partial_q g \rangle$ ,  $W' = \sigma$ , und daß das Argument von  $W$  die Verzerrung  $\partial_x u = (p(t, x) - q)/\beta$  ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Psi, \beta W - p(\sigma - k) \rangle &= \langle \dot{\Psi}, \beta W - p(\sigma - k) \rangle + \langle \Psi, \dot{p}(k - p\sigma'/\beta) + p\dot{k} \rangle \\ &= -\langle (\sigma - k)^2 \rangle + k \langle \dot{p} - \sigma + k \rangle - p \langle (\dot{p} - \sigma + k) \sigma' \rangle + p \dot{k}. \end{aligned}$$

Indem wir diesen Ausdruck integrieren und zur vorangegangenen Gleichung addieren, erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \tilde{E}(t) = \int_0^1 \left( -\langle (\sigma - k)^2 \rangle - p \langle (\dot{p} - \sigma + k) \sigma' \rangle + p \dot{k} \right) dx,$$

wobei aufgrund der Identität  $\beta \partial_x^2 p = \dot{p} - \langle \sigma \rangle + k = \langle \dot{p} - \sigma + k \rangle$  zwei Summanden weggefallen sind. Da  $\llbracket p \rrbracket = 0$  ist, gilt  $\int_0^1 p \dot{k} dx = \int_0^1 p \partial_t(\pi_a k) dx$  und somit folgt aus  $\partial_x k = \alpha u$  und

$\dot{u} = \partial_x p$  die Beziehung  $\int_0^1 p \dot{k} dx = \alpha \|p\|_{L^2}^2$ . Nach der Eliminierung von  $\dot{p}$  ist somit die Herleitung von (3.14) beendet.

Indem wir (3.14) integrieren, erhalten wir

$$\int_0^T \|\langle (\sigma - k_t)^2 \rangle\|_{L^1} dt = \tilde{E}(T) - \tilde{E}(0) + \int_0^T \int_0^1 \left( \alpha p^2 - p_t \langle \sigma' \cdot (\beta \partial_x^2 p + \langle \sigma \rangle - \sigma) \rangle \right) dx dt.$$

Aus den Lemmata 3.10 und 3.11 folgt die Beschränktheit von  $\tilde{E}$  und  $\int_0^\infty \|p\|_{L^2}^2 dt$ . Somit muß nur noch

$$I = \left| \int_0^\infty \int_0^1 p \langle \sigma' \cdot (\beta \partial_x^2 p + \langle \sigma \rangle - \sigma) \rangle dx dt \right|$$

abgeschätzt werden. Indem wir  $\langle |\sigma - \langle \sigma \rangle| \rangle \leq \sqrt{V(\sigma)}$  und  $\|p\|_{L^2} \leq \frac{1}{\pi^2} \|\partial_x^2 p\|_{L^2}$  verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} I &\leq \text{lip}(\sigma) \int_0^\infty \|p\|_{L^2} \left( \|\beta \partial_x^2 p\|_{L^2} + \int_0^1 \sqrt{V(\sigma)} dx \right) dt \\ &\leq \frac{\text{lip}(\sigma)}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{2} \|\partial_x^2 p\|_{L^2}^2 + \frac{3}{4} \left( \|\beta \partial_x^2 p\|_{L^2}^2 + \int_0^1 V(\sigma) dx \right) dt < \infty, \end{aligned}$$

wegen der Dissipationsgleichung. Daraus folgt  $\int_0^\infty \|\langle (\sigma - k)^2 \rangle\|_{L^1} dt \leq C$ .

Um den Beweis zu beenden, benötigen wir noch eine Schranke für die zeitliche Ableitung des Integranden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int_\Omega \langle (\sigma - k)^2 \rangle dx \right| &= 2 \left\| \left\langle (\sigma - k) \left( (\dot{p} + k - \sigma) \sigma' / \beta - \dot{k} \right) \right\rangle \right\|_{L^1} \\ &\leq 2 \text{lip}(\sigma) \left( \|\langle |\sigma - k| \rangle\|_{L^2} \cdot \|\dot{p} / \beta - \dot{k}\|_{L^2} + \frac{1}{\beta} \|\langle (\sigma - k)^2 \rangle\|_{L^1} \right). \end{aligned}$$

Nun sind  $p(t)$  und  $k(t)$  beschränkt in  $L^\infty(\Omega)$ ,  $\text{supp } \Psi(t, x) \subset [-\tilde{s}(x), \tilde{s}(x)]$  mit  $\tilde{s} \in L^2(\Omega)$  (da  $\Psi_0 \in Y_c^2$  ist). Also sind  $\|\langle (\sigma - k)^2 \rangle\|_{L^1}$  und  $\|\langle |\sigma - k| \rangle\|_{L^2}$  beschränkt. Indem wir die Definition  $k = \llbracket \langle \sigma \rangle \rrbracket + \mathcal{B}_a(p + \langle q \rangle)$  verwenden, haben wir die Behauptung gezeigt, da  $\partial_t \langle q \rangle = -\langle \sigma - k \rangle$ ,  $\partial_t \llbracket \langle \sigma \rangle \rrbracket = \int_0^1 \langle (\dot{p} - \sigma + k) \sigma' / \beta \rangle dx$  und  $\|\dot{p}\|_{L^2}$  wegen Lemma 3.10 beschränkt sind.  $\square$

Nun müssen wir das subtilere Verhalten der Verzerrung untersuchen. Im allgemeinen strebt sie nicht mehr gegen ein Punktmaß wie  $\sigma$ , sondern gegen eine Konvexkombination aus drei Punktmaßen. Zunächst zeigen wir, daß die Phasenanteile punktweise konvergieren und leiten eine Abschätzung für den Erwartungswert der Verzerrung her.

Wir erinnern an die Definition von  $r > 0$  in Kapitel 1, mit der aus  $|\lambda| < r$  folgt, daß die Gleichung  $\sigma(z) - \lambda = 0$  genau drei Lösungen  $z_1(\lambda) < z_0(\lambda) < z_2(\lambda)$  hat und definieren:

$$0 < m := \min_{|\sigma(z)| \leq r} |\sigma'(z)|, \quad M := \max_{|\sigma(z)| \leq r} |\sigma'(z)|, \quad l = \frac{r}{2M}, \quad B_i = [z_i(0) - l, z_i(0) + l]$$

und

$$\chi_i(q) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{\beta}q \notin B_i, \\ \frac{2}{\beta l}(q - z_i(0) + l), & \frac{1}{\beta}q \in [z_i(0) - l, z_i(0) - \frac{l}{2}], \\ 1, & \frac{1}{\beta}q \in (z_i(0) - \frac{l}{2}, z_i(0) + \frac{l}{2}), \\ \frac{2}{\beta l}(z_i(0) + l - q), & \frac{1}{\beta}q \in [z_i(0) + \frac{l}{2}, z_i(0) + l]. \end{cases}$$

Für eine Lösung  $(p, \Psi)$  sind die Phasenanteile durch

$$(3.15) \quad \gamma_i = \langle \Psi(t, x), \chi_i \rangle$$

definiert.

LEMMA 3.13 (Konvergenz der Phasenanteile). *Sei  $(p, \Psi)$  eine Lösung von (3.5) und  $\|k(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{ml}{8}$  für  $t \geq t_0$ . Dann existieren die Grenzwerte  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_i(t) =: \gamma_i^\infty$  in  $L^2(\Omega)$  mit  $\gamma_1^\infty + \gamma_0^\infty + \gamma_2^\infty = 1$ .*

Wir weisen darauf hin, daß die geringe Anfangsenergie wegen Lemma 3.10 impliziert, daß  $\|k(t)\|_\infty$  für alle  $t \geq 0$  klein bleibt.

BEWEIS. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir  $\chi_A := 1 - \sum \chi_i$ . Nun gilt  $\langle \chi_A \rangle \leq \frac{64}{l^2 m^2} \langle (\sigma - k)^2 \rangle$ , sobald  $\|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\beta l}{4}$  (man verwende die Konvergenz aus Lemma 3.11). Mit Lemma 3.12 folgt daraus, daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \chi_A \rangle = 0$  und somit  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_2) = 1$  in  $L^1(\Omega)$  ist. Da  $\gamma_i \in [0, 1]$  ist, gilt die Konvergenz auch in  $L^2(\Omega)$ .

Wir müssen noch beweisen, daß die einzelnen Grenzwerte existieren. Dafür genügt es zu zeigen, daß  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  monoton in  $t$  sind. Es sei  $i \in \{1, 2\}$ ,  $t > s$ :

$$\begin{aligned} \gamma_i(s, x) - \gamma_i(t, x) &= \int_s^t \langle \dot{\Psi}, \chi_i \rangle dt' = - \int_s^t \langle \Psi, (\sigma - k) \partial_q \chi_i \rangle dt' \\ &= - \int_s^t \left\langle (\sigma - k) \frac{2}{l\beta} (\chi_{[(z_i(0)-l)\beta, (z_i(0)-\frac{l}{2})\beta]} - \chi_{[(z_i(0)+\frac{l}{2})\beta, (z_i(0)+l)\beta]}) \right\rangle dt' =: J. \end{aligned}$$

Es gilt aber  $\sigma \left( \frac{1}{\beta}p + z_i(0) + \frac{l}{2} \right) - k \geq \frac{ml}{8}$  und  $\sigma \left( \frac{1}{\beta}p + z_i(0) - \frac{l}{2} \right) - k \leq -\frac{ml}{8}$ , daraus folgt  $J \geq 0$ , und wir sind fertig.  $\square$

Für  $x \in \Omega$  definieren wir die YM-gemittelte Verzerrung:

$$\varepsilon(x) = \langle \partial_x u(x) \rangle = \frac{1}{\beta} (p(x) + \langle q \rangle(x))$$

und leiten eine (punktweise) Abschätzung her, die die Konvergenz von  $\varepsilon$  zeigt.

LEMMA 3.14 (Konvergenz der gemittelten Verzerrung). *Es sei  $\Psi \in PM^2(\mathbb{R})$ ,  $|k| \leq r$  und  $|p| \leq \beta \frac{l}{4}$ ,  $\hat{\gamma}_i \in [0, 1]$ ,  $\sum_{i=0}^2 \hat{\gamma}_i = 1$ . Dann existiert eine Konstante  $C > 0$  so, daß*

$$|\varepsilon - \sum_{i=0}^2 \hat{\gamma}_i z_i(k)| \leq C \left( \sqrt{\langle (\sigma - k)^2 \rangle} + \sum_{i=0}^2 |\hat{\gamma}_i - \langle \chi_i \rangle| \right).$$

BEWEIS. Mit der Hölder-Ungleichung ist klar, daß  $\langle |\sigma - k| \rangle \leq \sqrt{\langle (\sigma - k)^2 \rangle}$ . Wir erhalten die folgende Ungleichung, indem wir  $\mathbb{R}$  in  $(B_i)_{i=0,1,2}$  und  $A$  ( $= \text{supp}(\chi_A)$ , definiert in Lemma 3.13;  $A$  ist nicht disjunkt zu  $B_i$ ) zerlegen:

$$\begin{aligned} \left| \langle \varepsilon \rangle - \sum_{i=0}^2 \hat{\gamma}_i z_i(k) \right| &\leq \sum_{i=0}^2 \left\langle \left| \frac{1}{\beta} (p+q) \chi_i - \hat{\gamma}_i z_i(k) \right| \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\beta} |p+q| \chi_A \right\rangle \\ &=: I_0 + I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Wir schätzen zuerst  $I_3$  ab, indem wir die Koerzivitätsvoraussetzung für  $W$  verwenden. Es ist

$$\begin{aligned} I_3 &= \left\langle \frac{1}{\beta} |p+q| \chi_A \right\rangle \leq \left\langle \left( \frac{2}{c} |\sigma - k| + C \right) \chi_A \right\rangle \text{ für } C \text{ groß genug} \\ &\leq \frac{2}{c} \sqrt{\langle (\sigma - k)^2 \rangle} + \left( 1 - \sum_{i=0}^2 \langle \chi_i \rangle \right) C, \end{aligned}$$

wobei  $0 < c = \liminf_{|\varepsilon| \rightarrow \infty} |\sigma'(\varepsilon)|$  wegen Voraussetzung iii.) an  $\sigma$ . Aus  $|p| \leq \beta \frac{L}{4}$  und  $q \in B_i$  folgt  $|\sigma((p+q)/\beta)| \leq r$ . Also gilt für  $i = 0, 1, 2$ :

$$\begin{aligned} I_i &= \langle |z_i(\sigma) \chi_i - \hat{\gamma}_i z_i(k)| \rangle = \langle (z_i(\sigma) - z_i(k)) \chi_i + (\chi_i z_i(k) - \hat{\gamma}_i z_i(k)) \rangle \\ &\leq \sqrt{\langle \chi_i^2 \rangle} \text{lip}(z_i) \sqrt{\langle (\sigma - k)^2 \rangle} + |z_i(k)| |\langle \chi_i \rangle - \hat{\gamma}_i|. \end{aligned}$$

□

Mit diesen vorbereitenden Abschätzungen können wir den Beweis von Theorem 3.9 durchführen, indem wir den Satz über implizite Funktionen anwenden. Die Hauptidee besteht darin, daß wir aus (3.13) einen nichtlinearen, lokal invertierbaren Operator extrahieren, der als Nullstelle die von der Phasenverteilung  $(\gamma_i)_{i=0,1,2}$  eindeutig festgelegte stationäre Lösung hat. Das Argument ist nur innerhalb einer kleinen Umgebung um den absoluten Minimierer herum anwendbar, in größerem Abstand können Verzweigungen auftreten und der Ansatz versagt.

Wir teilen  $k$  wieder entsprechend der ursprünglichen Definition auf:  $k = k_a + \llbracket k \rrbracket = \pi_a k + \llbracket k \rrbracket$  und definieren die nichtlineare Abbildung

$$(3.16) \quad G : U \times (-r/2, r/2) \times (L^2(\Omega))^3 \times L^2(\Omega) \times \mathbb{R} \rightarrow L^2(\Omega) \times \mathbb{R},$$

$$G(k_a, \llbracket k \rrbracket, \gamma, g, h) = \begin{pmatrix} \partial_x^2 k_a - \alpha \sum_{i=0}^2 \gamma_i z_i(k_a + \llbracket k \rrbracket) - g \\ \left[ \sum_{i=0}^2 \gamma_i z_i(k_a + \llbracket k \rrbracket) \right] - h \end{pmatrix},$$

wobei  $U = B(H_{a,\partial}^2, r/2)$  die Kugel um 0 mit Radius  $r/2$  in  $H_{a,\partial}^2(\Omega)$  ist.

LEMMA 3.15. Wir definieren die Phasenanteile des absoluten Minimierers wie folgt:

$$\gamma_1^0 = -\frac{1}{z_1(0) \left( \frac{1}{z_2(0)} - \frac{1}{z_1(0)} \right)}, \quad \gamma_0^0 = 0, \quad \gamma_2^0 = \frac{1}{z_2(0) \left( \frac{1}{z_2(0)} - \frac{1}{z_1(0)} \right)}.$$

Dann kann die Gleichung  $G(\pi_a k, \llbracket k \rrbracket, \gamma, f, g) = 0$  in einer Umgebung um  $(0, 0, \gamma^0, 0, 0)$  eindeutig nach  $(\pi_a k, \llbracket k \rrbracket)$  als Funktion von  $(\gamma, g, h)$  aufgelöst werden.

BEWEIS. Dies ist eine direkte Anwendung des Satzes über implizite Funktionen. Durch klassische Überlegungen kann man sich davon überzeugen, daß  $G$  eine stetig differenzierbare Abbildung ist (siehe z.B. [AP93]). Wir müssen noch die Invertierbarkeit des linearisierten Operators  $(D_{(k_a, \llbracket k \rrbracket)} G)(0, 0, \gamma^0, 0, 0)$  nachweisen. Es gilt:

$$\begin{aligned} (D_{(k_a, \llbracket k \rrbracket)} G)(0, 0, \gamma^0, 0, 0)[k_a, \llbracket k \rrbracket] &= \begin{pmatrix} \partial_x^2 k_a - \alpha(\gamma_1^0 z_1'(0) + \gamma_2^0 z_2'(0))(k_a + \llbracket k \rrbracket) \\ \int_0^1 (\gamma_1^0 z_1'(0) + \gamma_2^0 z_2'(0))(k_a + \llbracket k \rrbracket) dx \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x^2 - \alpha\delta & -\alpha\delta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_a \\ \llbracket k \rrbracket \end{pmatrix} \text{ mit } \delta = \gamma_1^0 z_1'(0) + \gamma_2^0 z_2'(0) > 0. \end{aligned}$$

Da aber  $\partial_x^2 - \alpha\delta : H_{a, \partial}^2 \rightarrow L_a^2$  für  $\alpha \geq 0$  invertierbar ist, haben wir die Behauptung gezeigt.  $\square$

BEWEIS VON THEOREM 3.9. Die Definition von  $k_a = \mathcal{B}_a(p + \langle q \rangle) = \beta \mathcal{B}_a \varepsilon$  und  $u(1) = \llbracket \varepsilon \rrbracket = 0$  impliziert für Lösungen  $(p, \Psi)$  für alle  $t$  die Identität

$$G(k_a(t), \llbracket k(t) \rrbracket, \gamma(t), \alpha f(t), \llbracket f(t) \rrbracket) = 0.$$

Dabei setzen wir  $f(t, x) = \varepsilon - \sum_{j=0}^2 \gamma_j(t, x) z_j(k_a(t, x) + \llbracket k(t) \rrbracket)$  und bezeichnen mit  $\gamma_j(t, x)$  die durch Gleichung (3.15) definierten Phasenanteile. Wegen Lemma 3.13 existieren die Grenzwerte  $\gamma_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_i(t)$  in  $L^2(\Omega)$ , daher folgt mit Lemma 3.12 und Lemma 3.14, daß  $f(t)$  in  $L^2(\Omega)$  gegen 0 strebt. Somit können wir Lemma 3.15 anwenden und erhalten, daß  $k(t)$  in  $H^2(\Omega)$  gegen  $k^\infty$ , die lokal eindeutige Lösung von  $G(k_a^\infty, \llbracket k^\infty \rrbracket, \gamma^\infty, 0, 0) = 0$ , konvergiert.

Um unseren Beweis abzuschließen, müssen wir noch zeigen, daß aus  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|k - k^\infty\|_{L^\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|p\|_{L^\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\langle (\sigma - k)^2 \rangle\|_{L^1} = 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = \gamma^\infty$  folgt, daß  $\Psi(t)$  im starken Sinn in  $Y^2(\Omega, \mathbb{R})$  gegen das Equilibrium  $\Psi^\infty(x) = \sum_{i=0}^2 \gamma_i^\infty(x) \delta_{\beta z_i(k^\infty(x))}$  konvergiert, dessen Masse genau auf den drei Nullstellen von  $\sigma(\frac{1}{\beta}q) - k^\infty$  liegt. Im Rest dieses Beweises schreiben wir  $z_i$  anstelle von  $z_i(k^\infty)$ .

$$\begin{aligned} d_2(\Psi_t, \Psi^\infty) &= \left\| d_W \left( \Psi_t, \sum_{j=0}^2 \gamma_j^\infty \delta_{\beta z_j} \right) \right\|_{L^2} = \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \left\langle \Psi_t - \sum_{j=0}^2 \gamma_j^\infty \delta_{\beta z_j}, g \right\rangle \right\|_{L^2} \\ &\leq \sum_{i=0}^2 \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \left\langle \Psi_t - \sum_{j=0}^2 \gamma_j^\infty \delta_{\beta z_j}, g \cdot \chi_i \right\rangle \right\|_{L^2} + \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \left\langle \Psi_t - \sum_{j=0}^2 \gamma_j^\infty \delta_{\beta z_j}, g \cdot \chi_A \right\rangle \right\|_{L^2} \\ &= I_0 + I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Wir schätzen analog zum Beweis von Lemma 3.14 ab:

$$I_3 \leq \| \langle C_1 |\sigma - k| \rangle \|_{L^2} \leq C_1 \sqrt{ \| \langle (\sigma - k)^2 \rangle \|_{L^1} },$$

für  $C_1$  hinreichend groß,  $\|k\|_\infty \leq \frac{ml}{8}$  und  $\|p\|_\infty \leq \frac{\beta l}{4}$ .

$$\begin{aligned} I_i &= \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle g \chi_i - \gamma_i^\infty g(\beta z_i) \rangle \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle (g - g(\beta z_i)) \cdot \chi_i \rangle \right\|_{L^2} + \left\| \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle (\chi_i - \gamma_i^\infty) g(\beta z_i) \rangle \right\|_{L^2} \\ &\leq \| \langle \beta \text{lip}(z_i) |\sigma(\cdot/\beta) - k^\infty| \cdot \chi_i \rangle \|_{L^2} + \| \gamma_i(t) - \gamma_i^\infty \|_{L^2} \cdot \| \beta z_i \|_{L^\infty} \\ &\leq \beta \text{lip}(z_i) \left( \sqrt{ \| \langle (\sigma - k)^2 \rangle \|_{L^1} } + \frac{\text{lip}(\sigma)}{\beta} \| p \|_{L^\infty} + \| k - k^\infty \|_{L^\infty} \right) + \| \gamma_i(t) - \gamma_i^\infty \|_{L^2} \cdot \| \beta z_i \|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Durch die Anwendung von Lemma 3.11 und Lemma 3.12 schließen wir den Beweis ab.  $\square$

Wir beenden unsere Analyse des viskos gedämpften Modells mit zwei strukturellen Aussagen über die YM-Lösungen von (3.5). Zuerst zeigen wir, daß im Gegensatz zu den Lösungen des mikrokinetischen Modells die Lösungen des viskos gedämpften Modells im Langzeitlimes die Mikrostruktur höchstens vernichten, jedoch nicht generieren können. Dabei erinnern wir an die Tatsache, daß die in dieser Arbeit betrachteten Modelle wegen Theorem 1.11 in endlicher Zeit weder Mikrostruktur generieren noch vernichten können.

**SATZ 3.16.** *Es sei  $(p_0, \Psi_0) \in H_a^1(\Omega) \times Y_a^2(\Omega, \mathbb{R})$  ein beliebiger Anfangszustand, so daß  $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(p_0, \Psi_0) = (0, \Psi^\infty)$  für  $\Psi^\infty \in Y_a^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathcal{S}$  ist, dann gilt:*

$$\mathcal{M}_{\Psi^\infty} \subset \mathcal{M}_{\Psi_0}.$$

**BEWEIS.** In  $\mathcal{C} = \Omega \setminus \text{supp Var}(\Psi(0))$  haben wir wegen Bemerkung 1.12 klassische Lösungen  $(p, q)$  von Gleichung (3.3), somit können wir die Argumentation aus [BHJPS91] anwenden. Wegen Lemma 3.11 strebt  $\|p(t)\|_{C^0(\Omega)}$  gegen 0. Daraus folgt wegen der Definition der schwachen Konvergenz in  $Y^2(\Omega, \mathbb{R})$ , daß  $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \mathcal{B}_a \langle \Psi^\infty(dq), q \rangle + \llbracket \langle \Psi^\infty(dq), \sigma(\frac{1}{\beta}q) \rangle \rrbracket$  in  $C^0(\Omega)$  ist. Sei im folgenden  $x \in \mathcal{C}$ ,  $q^+ = \limsup_{t \rightarrow \infty} q(t, x)$ ,  $q^- = \liminf_{t \rightarrow \infty} q(t, x)$  und  $q_0$  eine beliebige Zahl im offenen Intervall  $(q^-, q^+)$ . Dies definiert eine Folge  $t_i^\pm \rightarrow \infty$ ,  $q(t_i^\pm, x) = q_0$ ,  $\pm \dot{q}(t_i^\pm, x) \geq 0$ . Andererseits ist  $\dot{q}(t_i^\pm, x) = -\sigma((q_0 + p)/\beta) + k(t_i^\pm)$ . Indem wir  $i$  gegen unendlich streben lassen, erhalten wir  $k^\infty = \sigma(q_0/\beta)$ . Jedoch ist  $\sigma'(q/\beta) \neq 0$  für fast alle  $q$ , woraus  $q^+ = q^-$  folgt, d.h.  $q$  konvergiert punktweise und wegen des Satzes über die dominierte Konvergenz konvergiert  $q(x)$  in  $L^2(\mathcal{C})$  gegen  $q^\infty(x)$ . Eine Majorante in  $L^2(\mathcal{C})$  erhalten wir durch  $s(x) = \max\{|q_0(x)|, C(E_\alpha(p_0, \Psi_0))\}$ , wobei  $C(E_\alpha(p_0, \Psi_0))$  in Abschnitt 2.1 definiert wurde. Wegen Lemma 1.8 ist dann  $\Psi_x^\infty = \delta_{q^\infty(x)}$  und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$

Zum Schluß konstruieren wir eine Folge von YM-Anfangszuständen, die einerseits im starken Sinn gegen eine klassische Funktion konvergiert und andererseits gliedweise das absolute Energieminimum für  $t \rightarrow \infty$  realisiert. Damit soll nachgewiesen werden, daß die

dynamische Nichtminimierbarkeit der Energie mit klassischen Anfangsbedingungen eine Folge der unzureichenden Auswahl an Anfangszuständen (nämlich Funktionen) im Raum der Youngschen Maße ist.

**THEOREM 3.17.** *Es gibt eine Folge von YM-Anfangszuständen  $(p_0^i, \Psi_0^i)$  in der Weise, daß einerseits  $(p_0^i, \Psi_0^i)$  für  $i \rightarrow \infty$  im starken Sinn gegen eine klassische Anfangsbedingung strebt und andererseits für jedes  $i \in \mathbb{N}$  die erzeugte Lösung  $\Phi_t(p_0^i, \Psi_0^i)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen das absolute Minimum der Energie konvergiert.*

Dieses Resultat ist interessant, da das globale Minimum  $\frac{1}{1-z_1/z_2}\delta_{\beta z_1} + \frac{1}{1-z_2/z_1}\delta_{\beta z_2}$  nur im schwachen Sinn durch schnell oszillierende Funktionen approximiert werden kann.

**BEWEIS.** Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir o.B.d.A. an, daß  $z_0 = 0$  ist. Wir wählen den homogenen Anfangszustand  $p_0 = 0$  und

$$\Psi_0^\theta(q) = \frac{1}{1-\eta}\delta_{\theta(\eta-1)} + \frac{\eta}{\eta-1}\delta_{\theta(1-\frac{1}{\eta})},$$

wobei  $\eta = z_1/z_2$  und  $\theta > 0$  ist.

Zuerst zeigen wir, daß  $\Psi^\theta$  für  $\theta \rightarrow 0$  im starken Sinn gegen  $\delta_0$  konvergiert:

$$\begin{aligned} d_W(\Psi_0^\theta, \delta_0) &= \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \langle \Psi_0^\theta - \delta_0, g \rangle \\ &= \sup_{\text{lip}(g) \leq 1} \left\{ \frac{1}{1-\eta}g(\theta(\eta-1)) - \frac{\eta}{1-\eta}g\left(\theta\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right) - g(0) \right\} \leq 2\theta. \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, daß jeder Anfangszustand wirklich das globale Minimum realisiert, d.h.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(0, \Psi_0^\theta) = \frac{1}{1-\eta}\delta_{\beta z_1} + \frac{\eta}{\eta-1}\delta_{\beta z_2}$ .

Es ist klar, daß die Lösungen für alle Zeiten homogen bleiben, somit gilt  $\Psi(t) = \frac{1}{1-\eta}\delta_{\zeta_1} + \frac{\eta}{\eta-1}\delta_{\zeta_2}$ , wobei  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  die folgende zweidimensionale autonome Differentialgleichung lösen:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -\sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_1\right) + \frac{1}{1-\eta}\sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_1\right) - \frac{\eta}{1-\eta}\sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_2\right) = \frac{\eta}{1-\eta}\left(\sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_1\right) - \sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_2\right)\right), \\ \dot{\zeta}_2 &= -\sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_2\right) + \frac{1}{1-\eta}\sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_1\right) - \frac{\eta}{1-\eta}\sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_2\right) = \frac{1}{1-\eta}\left(\sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_1\right) - \sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_2\right)\right), \\ \zeta_1(0) &= \theta(\eta-1), \quad \zeta_2(0) = \theta\frac{\eta-1}{\eta}. \end{aligned}$$

Aus  $\dot{\zeta}_2 = \dot{\zeta}_1/\eta$  und  $\zeta_2(0) = \zeta_1(0)/\eta$  folgt  $\zeta_2 = \zeta_1/\eta$  und wir erhalten die eindimensionale gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{\eta}{1-\eta}\left(\sigma\left(\frac{1}{\beta}\zeta_1\right) - \sigma\left(\frac{1}{\beta\eta}\zeta_1\right)\right) =: f_{\beta,\eta}(\zeta_1).$$

Es gilt  $f(\beta z_1) = 0$  und  $f(\zeta) < 0$  für  $\zeta \in (\beta z_1, 0)$ . Der Anfangswert  $\zeta_1(0)$  befindet sich für genügend kleines  $\theta$  im Intervall  $(\beta z_1, 0)$ . Also ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_1(t) = \beta z_1$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_2 = \beta z_2$ .  $\square$



Die Frage, in welchem Sinn und in welcher Topologie die stationären Youngschen Maße ohne instabile Phasenanteile dynamisch stabil sind, ist bislang noch offen.

## Literaturverzeichnis

- [AP93] A. Ambrosetti, G. Prodi. *A Primer to Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press 1993.
- [Ba89] J. M. Ball. A version of the fundamental theorem for Young measures. In *Partial differential equations and continuum models of phase transitions*. Eds. M. Rascle, D. Serre & M. Slemrod. Springer Lecture Notes in Physics 344, S. 207-215, Springer Verlag, 1989.
- [BHJPS91] J. M. Ball, P. J. Holmes, R. D. James, R. L. Pego, P. J. Swart. On the Dynamics of Fine Structure. In *J. Nonlinear Sci. 1*, S. 17-70, 1991.
- [BJ87] J. M. Ball, R. D. James. Fine phase mixtures as minimizers of energy. In *Arch. Ration. Mech. Anal. 100*, S. 13-52, 1987.
- [DiP83] R. DiPerna. Convergence of Approximate Solutions to Conservation Laws. *Arch. Ration. Mech. Anal. 82*, S. 27-70, 1983.
- [Du89] R. M. Dudley. *Real Analysis and Probability*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books and Software, 1989.
- [Ed65] R. E. Edwards. *Functional Analysis*. Holt, Rinehart and Winston, 1965.
- [FBS94] I. Fonseca, D. Brandon, P. Swart. Dynamics and oscillatory microstructure in a model of displacive phase-transformations. In *Progress in partial differential equations: The Metz surveys 3*. Eds. M. Chipot, J. Saint Jean Paulin & I. Shafrir, S. 130-144, Longman Scientific & Technical, 1994.
- [FM96] G. Friesecke, J. B. McLeod. Dynamics as a Mechanism Preventing the Formation of Finer and Finer Microstructure. In *Arch. Ration. Mech. Anal. 133*, S. 199-247, 1996.
- [G196] R. Glassey. *The Cauchy Problem in Kinetic Theory*. SIAM, 1996.
- [GMM68] J. M. Greenberg, R. C. MacCamy, V. J. Mizel. On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation  $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xxt} = \rho_0 u_{tt}$ . In *J. Math. Mech. 17*, S. 707-728, 1968.
- [He81] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer Verlag, 1981.
- [HMRW85] D. Holm, J. Marsden, T. Raitu, A. Weinstein. Nonlinear Stability of fluid and plasma equilibria. In *Phys. Reports 123*, (1-2), S. 1-116, 1985.
- [Mi97] A. Mielke. Evolution equations for Young-measure solutions of semilinear hyperbolic problems. *Manuscript*, Universität Hannover, 1997.
- [NW72] H. Neunzert, J. Wick. Theoretische und numerische Ergebnisse zur nichtlinearen Vlasov-Gleichung. In *Numerische Lösung von nichtlinearen partiellen Differential- und Integrodifferentialgleichungen*, Lecture Notes in Math., Vol 267, Springer Verlag, 1972.
- [Pa83] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 1983.
- [Pe87] R. L. Pego. Phase transitions in one-dimensional viscoelasticity: Admissibility and stability. In *Arch. Ration. Mech. Anal. 97*, S. 353-394, 1987.
- [Ra91] S. T. Rachev. *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*. John Wiley & Sons Ltd., 1991.
- [Re94] G. Rein. Non-Linear Stability for the Vlasov-Poisson System - The Energy-Casimir Method. In *Math. Meth. Appl. Sci. 17*, S. 1129-1140, 1994.

[Yo69] L. C. Young. *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. Saunders, 1969  
(Nachdruck durch Chelsea, 1980).

## Lebenslauf

27. 5. 1968	Geboren in Schwäbisch Gmünd
1974 - 1978	Grundschule
1978 - 1987	Johannes-Kepler-Gymnasium in Leonberg
Mai 1987	Abitur
Okt. 1987 - Okt. 1988	Wehrdienst in Landsberg am Lech
Okt. 1988 - Sep. 1991	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität Stuttgart
Okt. 1990	Vordiplom
Jan. 1990 - Aug. 1991	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Arbeitswissenschaft und Technologiemanagement
Okt. 1991 - Jul. 1994	Fortsetzung des Studiums an der Philipps-Universität Marburg
1992 - 1994	Wissenschaftliche Hilfskraft im Rahmen eines Drittmittelprojektes zur numerischen Analyse von Verzweigungsproblemen
Jul. 1994	Diplom
Sep. 1994 - Apr. 1995	Wissenschaftliche Hilfskraft an der Universität Hannover
Seit Mai 1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am fächerübergreifenden Gemeinschaftsprojekt „Spannungs- und verzerrungsgesteuerte Phasenübergänge“

Hannover, den 13. Januar 1998