

Hauptreferent:

Prof. Dr.-Ing. U. Nackenhorst

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. Ina Schmidt

Doktorand:

M.Eng. Mathias Grehn

Probabilistische Finite Element Modellierung
des mechanischen Materialverhaltens von
Salzgestein

Der Fakultät für
Bauingenieurwesen
und Geodäsie der
Gottfried Wilhelm Leibniz
Universität Hannover

zur Erlangung des Grades
eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigte Dissertation von

M.Eng. Mathias Grehn

Hannover 2017

Tag der Einreichung:

23.11.2016

Tag der mündl. Prüfung:

17.02.2017

**Institut für
Baumechanik
und Numerische
Mechanik**

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. U. Nackenhorst

Verwaltung:

Institut für Baumechanik
und Numerische Mechanik
Gottfried Wilhelm Leibniz

Universität Hannover

Appelstr. 9A

30167 Hannover

Tel.: +49 (0)511 / 762-3219

Fax.: +49 (0)511 / 762-19053

© M.Eng. Mathias Grehn

Institut für Baumechanik
und Numerische Mechanik
Gottfried Wilhelm Leibniz

Universität Hannover

Appelstr. 9A

30167 Hannover

Alle Rechte, insbesondere das der
Übersetzung in fremde Sprachen,
Vorbehalten. Ohne Genehmigung
des Autors ist es nicht gestattet,
dieses Heft ganz oder teilweise
auf photomechanischem,
elektronischem oder sonstigem
Wege zu vervielfältigen

ISBN 978-3-935732-45-1

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein stochastischer Ansatz zur Beschreibung des Materialverhaltens von Salzgestein vorgestellt. Die Anwendbarkeit dieses Ansatzes zur stochastischen Beschreibung des Materialverhaltens von Salzgestein wird anhand von Langzeitkriechversuchen und der Simulation einer Untertagestruktur gezeigt.

Als Materialmodell wird ein eigens entwickeltes Materialmodell zur Beschreibung des Materialverhaltens von Salzgestein verwendet, welches Komponenten des „Composite-Dilatanz-Modells“ von der Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe beinhaltet. Für das Materialmodell wird die deterministische und stochastische Umsetzung vorgestellt und validiert. Bei der Formulierung der Materialgleichungen wurde besonders auf die numerische Stabilität geachtet.

Anhand von Langzeitkriechversuchen die für mehrere Versuchsreihen vorliegen wurden die unsicheren und stochastischen Parameter identifiziert und an Parameterstudien verifiziert. Für die Beschreibung der Zufallsvariablen wird das Polynomial Chaos verwendet, da für diese Methode das mehrmalige Lösen des deterministischen Gleichungssystems nicht notwendig ist. Zum Lösen der stochastischen Finite Elemente Methode wird das Galerkin Verfahren für den Wahrscheinlichkeitsraum vorgestellt.

Die Güte der Lösung der stochastischen Finite-Elemente-Methode wird anhand eines Vergleiches mit einer Monte Carlo Simulation gezeigt. Des Weiteren werden die aus der Methode der stochastischen Finite-Elemente-Methode resultierende Probleme für die nichtlinearen Materialgesetze diskutiert.

Stichworte Finite-Elemente-Methode, Stochastische Finite-Elemente-Methode, Kriechen, Salzgestein, Polynomial Chaos

Abstract

In this thesis a stochastic approach on the description of the material behavior of salt rock is presented. The applicability of this approach for the material behavior of salt rock is shown by a creep test and an underground construction.

A new developed material model is used to describe the mechanical behavior of salt rock. This material model includes components of the „Composite-Dilatanz-Modell“ by the Federal Institute for Geosciences and Natural Resources. For the material model a deterministic and stochastic implementation is presented and validated. In the formulation of the material equations particular attention was paid on the numerical stability.

On the basis of long-term creep tests for the several test series, the uncertain parameters were identified and verified by probabilistic parameter studies. The polynomial chaos expansion has been used for the description of the random variables, since this method does not require the multiple solution of the deterministic system of equations. To solve the stochastic finite element method the Galerkin method is presented for the probability space.

The quality of the solution of the Stochastic Finite-Element-Method is shown in comparison with Monte Carlo simulation. Furthermore, challenges within the framework of Stochastic Finite-Element-Methods considering the non-linear material models are addressed.

Keywords Finite-Element-Method, Stochastic Finite-Element-Method, Creep, Rock Salt, Polynomial Chaos

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Bedeutung
BGR	Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe
BMBF	Bundesministerium für Bildung und Forschung
CDF	Kumulative Verteilungsfunktion
CDM	Composite-Dilatanz-Modell
DGL	Differentialgleichung
E-Modul	Elastizitätsmodul
FE	Finite-Element
FEM	Finite-Elemente-Methode
FZK	Forschungszentrum Karlsruhe
IfG	Institut für Gebirgsmechanik GmbH
INE	Institut für Nukleare Entsorgung
IUB	Institut für Unterirdisches Bauen
kfz	Kubisch flächenzentriert
MC	Monte Carlo
MDCF	Multimechanism Deformation Coupled Fracture
NaCl	Natriumchlorid
PC	Polynomial Chaos
PDF	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
RVE	Repräsentatives Volumenelement
SDGL	Stochastische Differentialgleichung
SFEM	Stochastische Finite-Elemente-Methode
TUC	Technische Universität Clausthal

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben

a	Mittlere Breite der subkornwandnahen Bereiche mit lokal überhöhter Spannung
a_i	Materialparameter für das Stoffmodell von INE/FZK
A	Querschnittsfläche
A_i	Materialparameter für das Stoffmodell von IUB-MDCF
A_{Arr}	Präexponentieller Faktor
A_p	Materialparametern für das Stoffmodell von Günther/-Minkley
\mathbf{a}	Beschleunigung
\mathbf{b}	Volumenkräfte
\mathbf{b}	Burgersvektors
\mathbf{B}	Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix
B_i	Materialparameter für das Stoffmodell von IUB-MDCF
\mathcal{B}	Momentankonfiguration des betrachteten Körpers
\mathcal{B}_0	Referenzkonfiguration des betrachteten Körpers
\mathbb{C}	Materialtensor
D	Schädigungsvariable
D	Dissipationsfunktion
e	Volumenänderung
\mathbf{e}_i	Basisvektoren in der Momentankonfiguration
E	Gesamtenergie
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{E}_i	Basisvektoren in der Referenzkonfiguration
f	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
F	Kumulative Verteilungsfunktion
F_h	Faktor zur Beschreibung der Erhöhung der Kriechrate durch Feuchtigkeit in dilatanten Steinsalz
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathcal{F}	σ -Algebra
g	Relaxationsfunktion
G	Gleitmodul
G	Materialparameter im Stoffmodell von IUB-MDCF
\overline{G}_k^*	Materialparameter für die Verfestigung im Stoffmodell von Hou/Lux
\overline{G}_{kE}^*	Materialparameter für die Erholung im Stoffmodell von Hou/Lux

h	Schrittweite
\mathfrak{h}	Eindimensionales Hermite Polynom
\mathfrak{H}	M dimensionales Hermite Polynom
I_i	Invarianten des Cauchy-Spannungstensors
J	Jacobi-Determinante
J_i	Invarianten des deviatorischen Anteil des Cauchy-Spannungstensors
k_1	Materialparametern für die Verfestigung im Stoffmodell von Hou/Lux
k_2	Materialparametern für das transiente Kriechen im Stoffmodell von Hou/Lux
k_{1E}	Materialparametern für die Erholung im Stoffmodell von Hou/Lux
k_a	Ratenkonstante für die Evolution der Breite der subkornwandnahen Bereiche mit lokaler Spannungsüberhöhung mit zunehmender Kriechverformung
k_r	Anpassparameter für die Evolution des Versetzungsabstandes mit zunehmender Kriechverformung
k_{wi}	Anpassparameter für die jeweilige Evolution des Subkorn-durchmessers der drei Fraktionen i
k_B	Boltzmann Konstante
K	Kinetische Energie
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}^e	Elementsteifigkeitsmatrix
$\tilde{\mathbf{K}}_i$	PC SFEM Koeffizientenmatrix
\mathfrak{K}	PC SFEM Gesamtsteifigkeitsmatrix
l	Materialparameter für das stationäre Kriechen im Stoffmodell von Hou/Lux
\mathbf{L}	Drehimpuls
\mathcal{LN}	Logarithmische Normalverteilung
m	Masse
m	Materialparameter für das stationäre Kriechen im Stoffmodell von Hou/Lux
M	Taylorfaktor
M	Dimension des Wahrscheinlichkeitsraums
n_i	Spannungsexponent
n_p	Materialparametern im Stoffmodell von Günther/-Minkley
\mathbf{n}	Normalenvektor auf der Fläche da
N	Spannungsexponent
\mathbf{N}	Normalenvektor auf der Fläche dA
\mathcal{N}	Normalverteilung
p	Hydrostatischer Druck
\mathbf{p}	Gesamtimpuls

P	Materieller Punkt
P	Dimension der PC Basis
P_F	Nachbruchfaktor
\mathbf{P}	Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
\mathcal{P}	Wahrscheinlichkeit
\mathbb{P}	Projektionstensor
Q	Aktivierungsenergie
r	Mittlerer Versetzungsabstand
r_v	Verhältnis der volumetrischen zur Kriechverformungsrate
R	Allgemeine Gaskonstante
R_D	Triaxial Funktion
\mathbf{R}	Äußere Lasten
\mathbb{R}^n	n-dimensionaler Raum
S	Entropie
\mathbf{t}	Cauchy-Spannungsvektor
T	Temperatur
T_s	Schmelztemperatur
\mathbf{T}	Piola-Kirchhoff-Spannungsvektor
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor bzw. Verschiebungsfeld
U	Innere Energie
\mathbf{v}	Geschwindigkeit
w_i	Mittlerer Subkorndurchmesser der Fraktion $i = 1, 2, 3$
δW	Virtuelle Arbeit
X	Zufallsvariable
\hat{X}	PC Koeffizient der Zufallsvariablen
\mathbf{X}	Zufallsvektor
\mathbf{Y}	Tensorwertige physikalische Größe

Griechische Buchstaben

Δa	Aktivierungsfläche der Verformung
ε	Dehnungstensor
η	Testfunktion
$\bar{\eta}_k^*$	Materialparameter für das transiente Kriechen im Stoffmodell von Hou/Lux
$\bar{\eta}_m^*$	Materialparameter für das stationäre Kriechen im Stoffmodell von Hou/Lux
κ	Kompressionsmodul
λ	Lagrange Multiplikator
λ_L	Lame-Parameter
μ_L	Lame-Parameter
μ_p	Materialparametern im Stoffmodell von Günther/-Minkley
ν	Querkontraktion

ξ	Standardnormalverteilte Zufallsvariable
ϱ	Dichte in der Momentankonfiguration
ϱ_0	Dichte in der Referenzkonfiguration
σ_F	Fließspannung
σ_i	Hauptspannungen des Cauchy-Spannungstensors
σ_{okt}	Oktaedernormalspannung
σ^{vM}	Vergleichsspannung nach von Mises
σ^*	Effektive innere Spannung
σ	Cauchy-Spannungstensor
τ_D	Oktaederschubspannung der BGR-Dilatanzgrenze
τ_{okt}	Oktaederschubspannung
φ	Abbildung von Referenz- auf Referenzkonfiguration
φ_d	Dichteverteilung in der Momentankonfiguration
φ_D	Dichteverteilung in der Referenzkonfiguration
φ_m	Massenverteilung in der Momentankonfiguration
φ_M	Massenverteilung in der Referenzkonfiguration
ϕ_a	Oberflächendichte in der Momentankonfiguration
ϕ_A	Oberflächendichte in der Referenzkonfiguration
ϕ_m	Massendichte in der Momentankonfiguration
ϕ_M	Massendichte in der Referenzkonfiguration
ϕ_v	Volumendichte in der Momentankonfiguration
ϕ_V	Volumendichte in der Referenzkonfiguration
Φ	Kriechpotential
$\bar{\Phi}$	M dimensionales Polynom der PC Basis (komplexe Darstellung)
ψ	Freie Energie
ψ	Ein dimensionales Polynom der PC Basis
Ψ	M dimensionales Polynom der PC Basis
ω	Ereignis
Ω	Ereignismenge

Index bzw. Operatoren

$\tilde{\bullet}$	Deviatorischer Anteil von \bullet
$\dot{\bullet}$	Zeitableitung von \bullet
\bullet^{cr}	Kriechanteil an der Verformung
\bullet^{eff}	Ungeschädigter Anteil von der Ausgangsgröße \bullet_0
\bullet^{el}	Elastischer Anteil an der Verformung
\bullet^{test}	Testgröße von \bullet
\bullet^{vol}	Volumetrischer Anteil von \bullet
\bullet_0	Ausgangsgröße von \bullet
\bullet_D	Geschädigter Anteil von der Ausgangsgröße \bullet_0
\bullet_{ss}	stationäres Kriechen von \bullet

$\det(\bullet)$	Determinante von \bullet
$\Delta\bullet$	Inkrement von \bullet
$\operatorname{div}(\bullet)$	Divergenz von \bullet
$\operatorname{grad}(\bullet)$	Gradient von \bullet
$\operatorname{tr}(\bullet)$	Spur von \bullet
$\operatorname{Var}(\bullet)$	Varianz von \bullet
$\langle\bullet\rangle$	Erwartungswert von \bullet
$\ \bullet\ $	Norm von \bullet
$\bullet(\theta)$	Allgemein von Zufall abhängige Größe
$\partial\bullet$	Partielle Ableitung von \bullet

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Problemstellung und Motivation	1
1.2. Ziele dieser Arbeit	3
1.3. Gliederung dieser Arbeit	3
2. Kontinuumsmechanischer Rahmen	5
2.1. Kinematik	5
2.1.1. Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung	6
2.1.2. Deformation und Verzerrung	7
2.1.3. Infinitesimale Verformung	10
2.1.4. Mechanische Spannung	10
2.1.5. Volumetrisch-Isochorer Split	11
2.1.6. Hauptspannungen und Invarianten des Spannungstensors	13
2.2. Bilanzgleichungen	14
2.2.1. Allgemeine Formulierung von Bilanzgleichungen	14
2.2.2. Massenbilanz	15
2.2.3. Impulsbilanz	16
2.2.4. Drehimpulsbilanz	17
2.2.5. Energiebilanz	18
2.2.6. Entropiebilanz	19
2.3. Materialverhalten und Konstitutivgleichungen	20
2.3.1. Einführung in die Materialtheorie	21
2.3.2. Elastisches Materialverhalten	23
2.3.3. Viskoelastisches Materialverhalten	24
2.3.4. Kriechen	26
2.3.5. Schädigung	29
3. Finite Element Modellierung	35
3.1. Schwache Formulierung	35
3.2. Linearisierung	36
3.3. Finite Element Diskretisierung	38
3.3.1. Ansatzfunktion	38
3.3.2. Elementsteifigkeitsmatrix	40
3.3.3. Numerische Integration der Elementsteifigkeitsmatrix	42
3.3.4. Numerische Differentiation	44

4. Mechanisches Verhalten von Steinsalz	47
4.1. Allgemein	47
4.1.1. Materialtests für Salzgestein	51
4.2. Elastisches Verhalten	54
4.3. Visko-Plastisches Verhalten	55
4.3.1. Versetzungen als Träger der visko-plastischen Verformung	55
4.3.2. Verfestigung durch Verformung	58
4.3.3. Verfestigung durch Korngrenzen	58
4.3.4. Verfestigung durch Mischkristallbildung	58
4.3.5. Versetzungserholung	58
4.3.6. Schädigung und Dilatanz	60
4.4. Temperaturabhängigkeit der Verformung	64
4.5. Feuchteabhängigkeit der Verformung	66
4.6. Zusammenfassung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz .	67
5. Materialmodelle für Steinsalz	69
5.1. Allgemein	69
5.2. Composite-Dilatanz-Modell	71
5.3. Stoffmodell von Günther/Minkley	74
5.4. Stoffmodell von Hou/Lux	75
5.5. Stoffmodell IUB-MDCF	77
5.6. Stoffmodell des Instituts für Nukleare Entsorgung am For-	
schungszentrum Karlsruhe	79
5.7. Zusammenfassung der Materialmodelle	80
5.8. Verwendetes Materialmodell	81
5.8.1. Generalisiertes Maxwell-Modell	81
5.8.2. Modifiziertes Norton-Stoffgesetz	82
5.8.3. Schädigungsgesetz	83
5.8.4. Materialgleichung	84
5.8.5. Nichtlineare Nullfunktionen	85
5.9. Berechnung des konsistenten Tangentenmoduls	86
6. Numerische Beanspruchungsanalyse mittels deterministischer Materialparameter	89
6.1. FE-Modell der Steinsalzprobe	89
6.2. Parameter für das primäre und sekundäre Kriechen	90
6.3. Bestimmen der Parameter für die Schädigung	94
6.4. Identifizierung der sensitiven Parameter	96
6.4.1. Abhängigkeit der elastischen Konstanten	96
6.4.2. Sensitivität der Parameter des generalisierten Maxwell-	
Modells	98
6.4.3. Sensitivität der Parameter für das Norton Kriechgesetz	99
6.4.4. Sensitivität der Parameter für das Schädigungsgesetz .	101
6.5. Validierung der Ergebnisse am Langzeitkriechversuch N2/4-95015103	
6.6. Zusammenfassung	104

7. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	107
7.1. Wahrscheinlichkeitsraum	107
7.1.1. Festlegen des Ergebnisraumes	107
7.1.2. Bestimmen der Ereignis- σ -Algebra	108
7.1.3. Wahrscheinlichkeitsbewertung der Ereignisse	108
7.2. Zufallsvariablen	109
7.2.1. Zufallsvektoren	110
7.3. Verteilungsfunktion	111
7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen	111
7.3.2. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen	112
7.3.3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen	113
7.3.4. Mehrdimensionale Verteilungsfunktion	114
7.4. Stochastische Unabhängigkeit	115
7.5. Stochastische Momente	116
7.6. Rosenblatttransformation	118
8. Stochastische Finite Element Methoden	121
8.1. Stochastische Differentialgleichung	121
8.2. Das Polynomial Chaos	124
8.2.1. Grundlagen	126
8.2.2. Stochastische Momente	128
8.2.3. Fehlerschätzer	128
8.2.4. Wahl der orthogonalen Polynome Φ_i	129
8.2.5. Bestimmung der PC-Basis	130
8.2.6. Bestimmung der deterministischen PC Koeffizienten mittels der Projektionsmethode	131
8.2.7. Bestimmung der deterministischen PC Koeffizienten mittels der Kollokationsmethode	134
8.3. Stochastische Finite Elemente Methode	136
8.3.1. Stochastische Materialgleichung	136
8.3.2. PC-SFEM Gleichungssystem	139
8.3.3. Methoden zum Lösen des SFEM Gleichungssystems	141
9. Numerische Beanspruchungsanalyse bei zufallsverteilten Materialparametern	145
9.1. Verteilung der Materialparameter	145
9.1.1. Parameterstudie Standardabweichung	147
9.1.2. Parameterstudie homogenes Zufallfeld und zufälliges Zufallfeld	148
9.1.3. Stochastische Verteilung des Elastizitätsmoduls und des Parameters E_∞	151
9.1.4. Stochastische Verteilung der Querkontraktionszahl	153
9.1.5. Stochastische Verteilung der Anfangsschädigung	156

9.2. Numerische Beanspruchungsanalyse von Langzeitkriechversuchen	159
9.2.1. Langzeitkriechversuch 0414i	159
9.2.2. Langzeitkriechversuch $N2/i$	161
9.2.3. Vergleich Polynomial Chaos mit Monte Carlo Simulation	162
9.2.4. Schlussfolgerung	166
9.3. Numerische Beanspruchungsanalyse einer Untertagestruktur	169
9.3.1. FE-Modell der Untertagestruktur	170
9.3.2. Verteilung der Materialparameter	172
9.3.3. Ergebnisdarstellung der Simulation	174
9.3.4. Schlussfolgerung	179
10. Zusammenfassung und Ausblick	181
A. Ableitung der nichtlinearen Nullfunktionen	185
B. Wahrscheinlichkeitsverteilungen	189
C. Polynomial Chaos	191
C.1. Hermite Polynome	191
C.2. Erwartungswert dreier multidimensionaler Hermite Polynome	192
C.3. Polynomial Chaos Basis	193
Lebenslauf	197
Literaturverzeichnis	199
Abbildungsverzeichnis	213
Tabellenverzeichnis	217
Forschungs- und Seminarberichte	219

1. Einleitung

In der Bundesrepublik Deutschland muss nach § 9a Abs. 3 „Gesetz über die friedliche Verwendung der Kernenergie und den Schutz gegen ihre Gefahren“ der Bund Anlagen für die Sicherstellung und die Endlagerung radioaktiver Abfälle zur Verfügung stellen. Das letzte Atomkraftwerk geht im Jahre 2022 außer Betrieb. Durch den Rückbau der Kernkraftwerke fallen nach Schätzungen der Entsorgungskommission des Bundes rund $6000 \frac{m^3}{a}$ schwach- und mittelradioaktiver Abfall an, für den ein Endlager benötigt wird, Eder [2014]. Das Verfahren zur Endlagersuche wird sich voraussichtlich über mehr als ein Jahrzehnt hinziehen, da nach Angaben des Bundes erst frühestens 2030 ein Endlager benötigt wird, Beikler und Tretbar [2012]. Zur Zeit geht man davon aus, dass rund 300000 Tonnen hochradioaktiver Müll bereits weltweit existiert und weitere 12000 Tonnen hochradioaktiven Müll pro Jahr dazu kommen, Kowitz und Rosenkranz [2008].

1.1. Problemstellung und Motivation

Die Suche nach einem Endlager für radioaktive Abfälle ist der Grund, warum in den letzten Jahrzehnten viele Forschungsvorhaben und eine große Expertise für das Beschreiben des Materialverhaltens von Salzgestein aufgebaut wurden (z.B. Munson und Dawson [1981], Olschewski et al. [1981], Heusermann et al. [1983], Lux [1984], Stein et al. [1987], Hunsche et al. [1988a], Heemann [1989], Chan et al. [1992], Salzer [1993], Jeremic [1994], Hunsche und Schulze [1994], Hunsche und BGR [1996], Hunsche und Hampel [1999], Minkley [2003] u.a.). Viele dieser Forschungsvorhaben wurden durch den Bund finanziert, da für die Endlagerung des Atommülls nach der Bundesregierung tiefe geologische Formationen in Frage kommen. Solche tiefen geologischen Formationen können alte Salzstöcke sein, da Steinsalz eine geringe Durchlässigkeit für Wasserzuflüsse von außen, gute Wärmeleiteigenschaften und ein hohes Verformungsvermögen aufweist.

Durch die Vielzahl an Autoren gibt es verschiedene Materialmodelle die das Verhalten von Salzgesteinen auf unterschiedlichen Längenskalen beschreiben. Dieses weist auf ein aktives Forschungsfeld hin, welches sich durch ständige Weiterentwicklung der experimentellen Verfahren zur Bestimmung des Materialverhaltens von Steinsalz und die Anpassung der Materialmodelle hinsichtlich ihrer Komplexität an die Rechentechnik für die numerische Simulation auszeichnet. Durch die zahlreichen Forschungsvorhaben wurde im

Laufe der letzten Jahrzehnte eine große Expertise im Bereich der Salzmechanik aufgebaut. Diese Expertise beruht auf einer Vielzahl von Kriech- und Festigkeitsversuchen, die am Salzgestein durchgeführt worden sind. Anhand dieser Versuche wurden für die Materialmodelle die Modellparameter bestimmt und validiert. Die Anwendbarkeit dieser Materialmodelle wurde in einem Verbundvorhaben des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) „Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen“ gezeigt und kann den Arbeiten von Hampel [2006], Günther et al. [2007], Heemann und Schulze [2007], Hou et al. [2007], Pudewills [2007] und Rokahr et al. [2007] entnommen werden. Mit Hilfe dieser Materialmodelle soll das mechanische Verhalten der Salzdome über die nächsten Jahrtausende abgeschätzt werden. Aus diesem Sachverhalt, der auf der großen Halbwertszeit des Atommülls beruht, wird deutlich, dass die Materialmodelle nicht nur das Materialverhalten von Salzgestein widerspiegeln müssen, sondern auch aus numerischer Sicht robust formuliert werden müssen, da auf Grund der Simulationszeit die Berechnung sehr kosten und zeit Intensiv ist.

Aus den Versuchen kann man ableiten, dass das Materialverhalten von Steinsalz einer starken Streuung unterliegt, welche auf die natürliche Entstehung des Salzgesteins zurückzuführen ist. Was dazu führte, dass die Autoren des BMBF-Verbundvorhaben die Materialparameter anhand von Masterkurven bestimmt haben. Durch diesen Ansatz gehen eine Menge an Informationen verloren, was dazu führt, dass die Ergebnisse dieser deterministischen Berechnung mit einer unbekanntem Unsicherheit verbunden sind.

Dieser Sachverhalt und die Tatsache, dass für die nächsten Generationen ein sicheres Endlager für den Atommüll gefunden wird, war die Motivation sich mit diesem Themengebiet zu beschäftigen. Da die vorhandenen Materialmodelle das mechanische Materialverhalten zufriedenstellend abbilden können, wird mit dieser Arbeit die Salzmechanik um die Stochastik, welche noch ein recht junges Forschungsfeld in den Ingenieurwissenschaften darstellt, erweitert. Das die Erweiterung der Stochastik zur Beschreibung des Materialverhaltens anwendbar ist, konnte in den Arbeiten von Hürkamp [2014], Jablonski [2014], Fink [2015] und Grehn et al. [2016] bereits gezeigt werden. Durch die lange Halbwertszeit und die Größe der zu berechnenden Strukturen muss bei der Einbettung der Stochastik in die Finite Elemente Methode besonders auf die numerische Robustheit geachtet werden. Die vorliegende Arbeit kann dazu beitragen, dass die stochastische Finite Elemente Methode Einzug in die Salzmechanik hält. Durch den höheren Grad an Informationen, der sich aus einer stochastischen Berechnung ergibt, kann die Beurteilung von Untertagestrukturen von Salzgestein verbessert werden und somit die Endlagersuche voranbringen.

1.2. Ziele dieser Arbeit

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es mit dem vorgestellten Materialmodell das Materialverhalten von Salzgestein für eine Untertagestruktur mit Hilfe von zufallsverteilten Materialparametern zu berechnen. Für die Untertagestruktur wurde die Maschinenstrecke EU1 der Grube Sondershausen gewählt, da für diese Maschinenstrecke In-situ-Messungen vorliegen. Die Messdaten können der folgenden Literatur entnommen werden Günther et al. [2007], Hampel [2006], Heemann und Schulze [2007], Hou et al. [2007], Pudewills [2007] und Rokahr et al. [2007]. Die Maschinenstrecke EU1 zählt zum Versuchsverschlussbauwerk der Grube Sondershausen und ist daher sehr gut dokumentiert nach Hampel [2006]. Diese Arbeit soll zeigen, ob die Anwendung von stochastisch verteilten Materialparametern möglich ist und ob die stochastischen Methoden die zur Zeit „state of the art“ sind, geeignet sind, um das komplexe Materialverhalten von Salzgestein abbilden zu können. Das Materialmodell soll alle drei Kriechphasen beinhalten und soll aus numerischer Sicht stabil gestaltet werden.

1.3. Gliederung dieser Arbeit

Das **Kapitel 2** beinhaltet die theoretischen Grundlagen der Kontinuumsmechanik zur Gestaltung der konstitutiven Gleichungen. Des Weiteren werden in diesem Kapitel Modellierungsansätze und theoretische Grundlagen für die verschiedenen Verformungsmechanismen von Steinsalz gegeben. Die Grundlagen der Finiten Elementen Methode werden im **Kapitel 3** erläutert. Im **Kapitel 4** wird die Entstehung und die Struktur von Salzgestein erläutert. Die Verformungsmechanismen, die sich aus dem mikrostrukturellen Aufbau von Steinsalz ergeben, werden ebenfalls in diesem erläutert. Das **Kapitel 5** stellt die grundlegenden Differentialgleichungen und Modellierungsansätze der Materialmodelle aus dem BMBF-Verbundvorhaben „Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen“ dar. Des Weiteren wird in diesem Kapitel das verwendete Materialmodell vorgestellt. Für das vorgestellte Materialmodell aus **Kapitel 5** werden im **Kapitel 6** die Materialparameter bestimmt und die unsicheren Materialparameter werden aus den Experimenten abgeleitet. Das **Kapitel 7** behandelt die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die für diese Arbeit von Relevanz sind. Eine Erweiterung der klassischen Finiten Element Methode für unsichere Systemparameter und wie die Zufallsvariablen mittels des Polynomial Chaos beschrieben werden können, wird im **Kapitel 8** gegeben. Die numerischen Beanspruchungsanalysen, die mittels unsicherer Materialparameter durchgeführt werden, werden im **Kapitel 9** gezeigt. Eine Zusammenfassung und einen Ausblick für zukünftige Forschungsvorhaben wird im **Kapitel 10** gegeben.

2. Kontinuumsmechanischer Rahmen

Die Kontinuumsmechanik stellt einen theoretischen Rahmen bereit, um das Verhalten von Körpern unter äußeren Einwirkungen zu untersuchen, ohne dabei den atomaren oder mikroskopischen Aufbau des Körpers zu berücksichtigen. Der Körper wird als Kontinuum betrachtet, was einer Punktmenge entspricht, die zu jedem Zeitpunkt einen Raum stetig ausfüllt. Nur durch die Zuweisung von Materialeigenschaften kann das Verhalten von bestimmten Materialien beschrieben werden. Dieser Modellierungsansatz ist für viele Problemstellungen in den Ingenieurwissenschaften vollkommen ausreichend, da sich die Inhomogenität, die sich beim Betrachten des Materialverhaltens auf kleinen Längenskalen ergeben, ausmitteln. Dadurch kann das makroskopische Verhalten als homogen beschrieben werden. Da im Rahmen dieser Arbeit nur die Grundlagen der Kontinuumsmechanik betrachtet werden, wird für eine ausführliche Beschäftigung mit diesem Thema auf Altenbach [1994], Parisch [2003] und de Souza Neto et al. [2008] verwiesen.

In den folgenden Kapiteln werden die für diese Arbeit benötigten Grundlagen der Kontinuumsmechanik erläutert. Das Kapitel 2.1 beschäftigt sich mit der Bewegung und Deformation eines dreidimensionalen Körpers und die daraus resultierende Beanspruchung des Körpers. Im Kapitel 2.2 wird, ausgehend von der allgemeinen Form der Bilanzgleichung, die für die betrachteten physikalischen Prozesse benötigten Bilanzgleichungen hergeleitet. Die konstitutiven Zusammenhänge für das in dieser Arbeit verwendete Material (Salzgestein) werden in Kapitel 2.3 betrachtet. Eine ausführliche Vorstellung des Materialmodells und die numerische Behandlung erfolgen in Kapitel 5.8.

2.1. Kinematik

Die Bewegung und Deformation eines Körpers \mathcal{B} kann mittels einer zeitlichen Abfolge von Konfigurationen beschrieben werden, allerdings wird die Ursache der Bewegung und der Deformation nicht betrachtet. Voraussetzung hierfür ist, dass der Ausgangszustand des Körpers zum Zeitpunkt $t = 0$ bekannt ist. Um die Bewegung und Deformation beschreiben zu können, muss zwischen der Ausgangskonfiguration und der Momentankonfiguration unterschieden werden. Der Materialpunkt P im betrachteten Körper \mathcal{B}_0 in einem dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 kann durch die Referenzkonfiguration beschrieben werden. Die Beschreibung der Referenzkonfiguration erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem und in diesem Fall ist die Referenzkonfiguration gleichzei-

tig die Ausgangskonfiguration. Die Referenzkonfiguration kann mit Hilfe der Basisvektoren $\mathbf{E} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ und der Koordinaten ${}^P\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]$ ausgedrückt werden, was dem Ortsvektor

$$\mathbf{X} = {}^P X_i \mathbf{E}_i \in \mathcal{B}_0 \quad (2.1)$$

entspricht. Widerfährt ein Körper \mathcal{B} eine Deformation φ , kann der Materialpunkt P unter Zuhilfenahme der Momentankonfiguration beschrieben werden. Dieses erfolgt über den Ortsvektor

$$\mathbf{x} = {}^P x_i \mathbf{e}_i \in \mathcal{B}, \quad (2.2)$$

der ebenfalls durch die Basisvektoren $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ und der Koordinaten ${}^P\mathbf{x}$ definiert ist. Die Koordinaten ${}^P\mathbf{x}$ können mit Hilfe der Deformation φ beschrieben werden. Die Deformation ist eine eindeutige Abbildung des Körpers \mathcal{B} zwischen der Referenzkonfiguration und der Momentankonfiguration,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{B}_0 &\rightarrow \mathcal{B} \\ {}^P\mathbf{x} &= \varphi \left({}^P\mathbf{X} \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

(siehe Abbildung 2.1). Durch Bildung der Inversen von φ kann man von der Momentankonfiguration auf die Referenzkonfiguration schließen. Mit Hilfe der Beziehungen lässt sich die Bewegung eines Körpers vollständig beschreiben, da man zu jedem Zeitpunkt Aussagen über den Ort des Materialteilchens im dreidimensionalen Raum treffen kann. Allerdings muss gewährleistet werden, dass einer der Grundpfeiler der klassischen Physik nicht verletzt werden darf: „Wo ein Materieteilchen ist, kann kein anderes sein“. Dieses ist gewährleistet wenn die Gleichung 2.3 eindeutig umkehrbar ist, also

$$J = \det \left(\varphi \left({}^P\mathbf{X} \right) \right) \neq 0. \quad (2.4)$$

2.1.1. Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Anhand der Abbildung 2.1 wird deutlich, dass sich der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.5)$$

durch die Differenz zwischen der Momentanlage und der Ausgangslage ergibt. Die Verschiebung kann als Funktion von

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \left({}^P\mathbf{X} \right) &= \varphi \left({}^P\mathbf{X} \right) - {}^P\mathbf{X} \\ &\text{oder} \\ \mathbf{u} \left({}^P\mathbf{x} \right) &= {}^P\mathbf{x} - \varphi^{-1} \left({}^P\mathbf{x} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

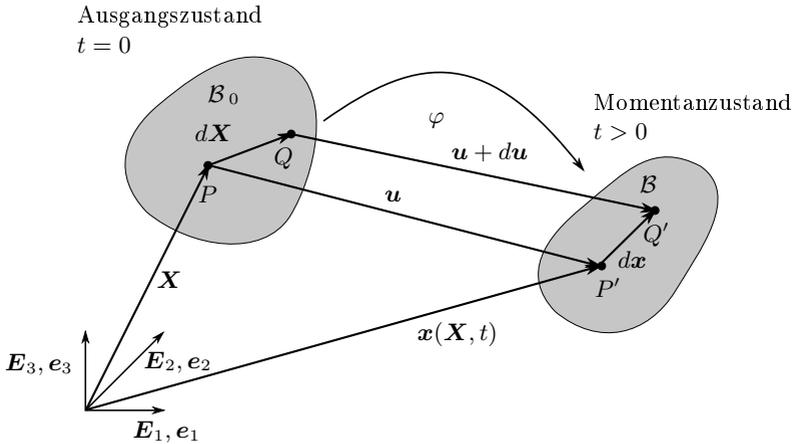


Abbildung 2.1.: Referenz- und Momentankonfiguration eines Körpers \mathcal{B}

ausgedrückt werden. Die Geschwindigkeit ist als zeitliche Änderung des Verschiebungsvektors

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \quad (2.7)$$

definiert. Wird die Geschwindigkeit nach der Zeit abgeleitet, erhält man die Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.8)$$

Da dynamische Effekte in dieser Arbeit nicht betrachtet werden, wird für nähere Informationen auf Altenbach [1994]; Greve [2013] und Betten [2013] verwiesen.

2.1.2. Deformation und Verzerrung

Um Aussagen über die Deformation des materiellen Punktes P treffen zu können, wird die Verzerrung eingeführt. Diese liefert Informationen über die Längenänderung (Länge, Winkel) in der näheren Umgebung eines materiellen Punktes infolge der Bewegung. Die Deformation ergibt sich durch den Vergleich der Ausgangs- mit der Momentankonfiguration, allerdings beinhaltet das Deformations- bzw. Verzerrungsmaß keine Informationen über den zeitlichen Ablauf der Bewegung (siehe Abbildung 2.1). Um ein infinitesimales Linienelement des Ausgangszustandes $d\mathbf{X}$ in den Momentanzustand $d\mathbf{x}$ zu transformieren, wird der Deformationsgradient \mathbf{F} eingeführt. Der Deformationsgradient

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \\ \mathbf{F}^{-1} &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\end{aligned}\tag{2.9}$$

stellt eine Abbildung zwischen der Ausgangskonfiguration und der Momentankonfiguration dar. Die Vektorräume der Ausgangskonfiguration und der Momentankonfiguration werden durch die Basisvektoren \mathbf{E}_i und \mathbf{e}_i beschrieben. Durch 2.4 gilt auch für den Deformationsgradienten

$$J = \det(\mathbf{F}) \neq 0,\tag{2.10}$$

dass dieser eindeutig umkehrbar sein muss.

Im Allgemeinen ist der Deformationsgradient ein unsymmetrischer Tensor, da dieser Starrkörperbewegungen beinhaltet. Dadurch ist der Deformationsgradient ungeeignet als Verzerrungsmaß. Wie man unter Zuhilfenahme des Deformationsgradienten zu einem geeigneten Verzerrungsmaß gelangt, wird im Laufe dieses Abschnittes noch erläutert.

Anhand der Abbildung 2.1 kann man erkennen, dass der Deformationsgradient vom betrachteten Materialpunkt abhängt. Wie schon beschrieben kann ein Linienelement mit den Deformationsgradient von der Referenz- in die Momentankonfiguration transformiert werden. Für die Transformation von Flächen- und Volumenelementen von der Referenz- in die Momentankonfiguration kann ebenfalls der Deformationsgradient verwendet werden, da dieser den Zusammenhang liefert. Für ein Flächenelement unter der Berücksichtigung der Orientierung ergibt sich folgender Zusammenhang

$$da = J\mathbf{F}^{-T}dA.\tag{2.11}$$

Die Transformation des Volumenelementes in die Momentankonfiguration folgt mit

$$dv = JdV.\tag{2.12}$$

Anhand dieser Zusammenhänge (siehe Abbildung 2.2) ist die fundamentale Bedeutung des Deformationsgradienten für die Kontinuumsmechanik zu erkennen.

Wie schon beschrieben, ist der Deformationsgradient kein geeignetes Verzerrungsmaß, da dieser sich auf den gesamten Bewegungsvorgang bezieht (Starrkörperbewegungen). Daraus lässt sich ableiten, dass die Starrkörperbewegungen vom Deformationsgradient abgespalten werden müssen. Durch Anwendung des polaren Zerlegungssatzes für Tensoren auf dem Deformationsgradienten, kann dieser in einen positiv definiten symmetrischen Tensor \mathbf{U} oder \mathbf{V} und einen orthogonalen Tensor \mathbf{R} zerlegt werden

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}.\tag{2.13}$$

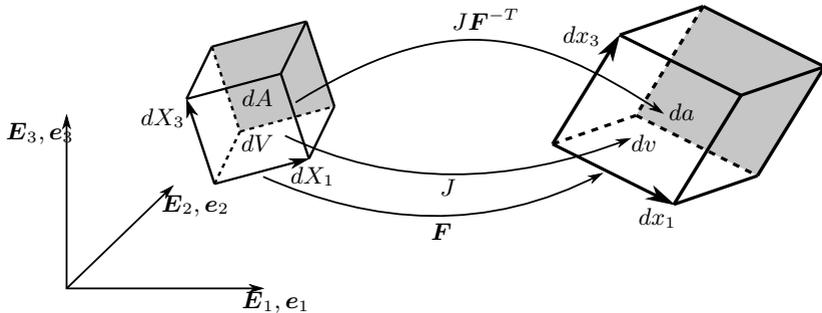


Abbildung 2.2.: Volumenelement in der Referenz- und Momentankonfiguration

Aus dem symmetrischen Tensor \mathbf{U} kann der rechte Cauchy Green Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \quad (2.14)$$

abgeleitet werden. Für nähere Informationen zur Herleitung wird auf Altenbach [1994]; Greve [2013] und Betten [2013] verwiesen. Für die Formulierung von Konstitutivgleichungen ist es von Vorteil, dass das Verzerrungsmaß bei reiner Starrkörperbewegung und für die Referenzkonfiguration den Wert Null annimmt. Der rechte Cauchy Green Tensor ist in der Ausgangskonfiguration definiert und nimmt bei reiner Starrkörperbewegung den Wert Eins an. Aus diesem Grund ist der rechte Cauchy Green Tensor nicht geeignet für die Beschreibung von Konstitutivgleichungen. Mit Hilfe des rechten Cauchy Green Tensor kann der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.15)$$

formuliert werden, der bei reiner Starrkörperbewegung den Wert Null annimmt. Das Verschiebungsfeld definiert die verformte Konfiguration eines Körpers, daher kann man die Deformation und die Verzerrung mittels der Verschiebung berechnen. Bildet man das Differential von Gleichung 2.5 und setzt dies in die Gleichung 2.9 ein, kann der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{1} + \mathbf{H} \quad (2.16)$$

mit Hilfe des Verschiebungsfeldes ausgedrückt werden. Der Tensor \mathbf{H} ist definiert als der Verschiebungsgradient bezogen auf die Ausgangskonfiguration. Der rechte Cauchy Green Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{1} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} \quad (2.17)$$

kann mit dem Verschiebungsgradienten \mathbf{H} ausgedrückt werden. Durch einsetzen der Gleichung 2.17 in die Gleichung 2.15 ergibt sich für den Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor folgender Ausdruck,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H} \right). \quad (2.18)$$

Liegt keine geometrische Nichtlinearität vor, wird der Term $\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}$ vernachlässigbar klein und man erhält durch

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T \right) \quad (2.19)$$

die linearisierte Form des Green-Lagrange'sch Verzerrungstensors.

2.1.3. Infinitesimale Verformung

Da die Verformungen bei Strukturen aus Steinsalz sehr klein sind im Verhältnis zu deren Abmessungen, ist eine Beschränkung auf kleine Deformationen möglich. Zu diesem Schluss kommen auch Günther et al. [2007], Heemann und Schulze [2007], Hampel [2006], Hou et al. [2007], Rokahr et al. [2007] und Pudewills [2007].

Bei infinitesimalen Verformungen ist der Deformationsgradient \mathbf{H} viel kleiner als 1, daraus folgt $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T \approx 0$ und der Unterschied zwischen der Referenz- und der Momentankonfiguration wird vernachlässigbar klein.

2.1.4. Mechanische Spannung

Wirkt eine äußere Kraft auf einen Körper so entsteht im Inneren ein Beanspruchungszustand. Um diesen Beanspruchungszustand in einem Punkt des Körpers bewerten zu können, benötigt man ein geeignetes Maß. Den Ausgangspunkt bildet das Spannungsprinzip von Euler und Cauchy. Führt man einen gedachten Schnitt durch einen Körper, der durch äußere Kraft beansprucht ist, können die inneren Kräfte sichtbar gemacht werden (siehe Abbildung 2.3). Dieses Verfahren wird Schnittprinzip genannt. Als Maß für den Beanspruchungszustand wird der Cauchy-Spannungsvektor

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{a}} \quad (2.20)$$

eingeführt, mit dem resultierenden Kraftvektor $d\mathbf{f}$ auf dem infinitesimalen Flächenelement $d\mathbf{a}$ und dem Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} . Da der Spannungsvektor im Allgemeinen vom Ort, der Zeit und der Orientierung der Schnittfläche abhängig ist, ist dieser als Spannungsmaß nicht sinnvoll. Der Cauchy-Spannungsvektor ist in der Momentankonfiguration definiert. Wendet man das

Cauchy'sche Fundamentaltheorem auf die Gleichung 2.20 an, erhält man den Cauchy-Spannungstensor

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.21)$$

Da der Cauchy-Spannungstensor unabhängig von der Orientierung der Schnittfläche ist, kann dieser als Maß zur Beschreibung des wahren Spannungszustandes herangezogen werden. In Matrixdarstellung ergibt sich folgende Form für den Cauchy-Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Durch das Momentengleichgewicht kann gezeigt werden, dass der Spannungstensor symmetrisch ist

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.23)$$

Benötigt man eine Formulierung für den Beanspruchungszustand in der Referenzkonfiguration erhält man durch analoges Vorgehen den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}_0. \quad (2.24)$$

Da der Spannungszustand in jedem Punkt des Körpers definiert ist, können die Spannungstensoren zur Beurteilung des Beanspruchungszustandes herangezogen werden.

2.1.5. Volumetrisch-Isochorer Split

Die Deformation eines Kontinuums kann durch eine Volumenänderung und eine Gestaltsänderung beschrieben werden. Für kleine Deformation ergibt sich ein additiver Split für den Dehnungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ in einen volumetrischen Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}^{vol}$ und deviatorischen Anteil $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{vol} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.25)$$

Die Volumenänderung wird durch eine skalarwertige Größe $e = tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ beschrieben. Mit dieser Größe kann die Volumenänderung,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{vol} = \frac{1}{3}e\mathbf{1} \quad (2.26)$$

bezogen auf die undeformierte Volumeneinheit angegeben werden. In Gegensatz zur volumetrischen Deformation bewirkt die isochore bzw. deviatorische Deformation

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}e\mathbf{1} \quad (2.27)$$

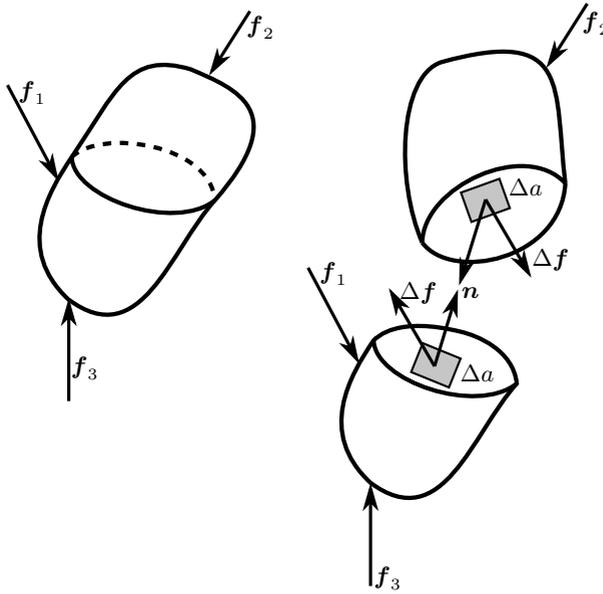


Abbildung 2.3.: Gesamtkörper mit äußeren Kräften und Teilkörper mit äußeren Kräften und die resultierenden gegenseitigen Wirkungen die an der gemeinsamen Schnittfläche am Element Δa wirken, nach Altenbach [1994].

keine Volumenänderung. Dieser Anteil bewirkt eine Gestaltsänderung die volumentreu ist. Für viele Anwendungsgebiete, wie zum Beispiel bei der Plastizität und der Berechnung von inkompressiblen Materialien, hat sich eine Aufspaltung des Dehnungstensors in die beiden Anteile bewährt Parisch [2003]. Daher bietet sich ebenfalls eine Zerlegung des Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{vol} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.28)$$

in diese beiden Anteile an. Der volumetrische Anteil bzw. der hydrostatische Anteil des Spannungstensors ergibt sich zu

$$\boldsymbol{\sigma}^{vol} = -p\mathbf{1} \quad (2.29)$$

mit dem hydrostatischen Druck

$$p = -\frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.30)$$

Der deviatorische Anteil des Spannungstensor kann analog zu Gleichung 2.27 bestimmt werden

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{vol}. \quad (2.31)$$

Dass die Aufteilung ebenfalls von vorteilhaft ist, wird in Lee et al. [1968] und Simo und Ortiz [1985] gezeigt.

2.1.6. Hauptspannungen und Invarianten des Spannungstensors

Der Spannungstensor bzw. seine Komponenten in Gleichung 2.22 sind im Koordinatensystem x , y und z dargestellt. In einigen Fällen ist es notwendig, den Spannungstensor in einen zum Ursprungskordinatensystem gedrehten Koordinatensystem x_1 , y_1 und z_1 anzugeben. Dreht man den Spannungstensor in ein Koordinatensystem in dem keine Schubspannungen und nur Normalspannungen auftreten, befindet sich der Spannungstensor im Hauptachsensystem. Das Hauptachsensystem ist dadurch gekennzeichnet, dass der Spannungsvektor \mathbf{t}_i und der dazugehörige Normalenvektor \mathbf{n}_i jeweils gleichgerichtet sind, somit gilt für Gleichung 2.21

$$\mathbf{t}_i = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_i. \quad (2.32)$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen 2.21 und 2.32 erhält man das homogene lineare Gleichungssystem, Gross und Seelig [2016],

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.33)$$

Eine nichttriviale Lösung ergibt sich für das Gleichungssystem wenn die Koeffizientendeterminante $\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) = 0$ verschwindet. Dadurch ergibt sich eine Polynomgleichung dritten Grades

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (2.34)$$

mit den Vorfaktoren I_1 , I_2 und I_3 . Diese Größen sind die Invarianten des Spannungstensors und sind folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \frac{(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})}{2}, \\ I_3 &= \det(\sigma_{ij}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

wobei diese Größen unabhängig vom Koordinatensystem sind. Diese Größen σ_1 , σ_2 und σ_3 , die auch als Hauptspannungen bezeichnet werden, stellen die Lösung des Gleichungssystems 2.34 dar und sind reelle Größen. Die Hauptspannungen sind die Extremalwerte der Normalspannung.

Durch die Invarianten des Spannungsdeviators

$$\begin{aligned} J_1 &= 0, \\ J_2 &= \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij}, \\ J_3 &= \frac{1}{3} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\sigma}_{jk} \tilde{\sigma}_{ki}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

können die Abweichung zum hydrostatischen Spannungszustands beschrieben werden. Die zweite Invariante des Spannungsdeviators spielt eine wichtige Rolle in der Plastizitätstheorie.

Für eine ausführliche Herleitung dieses Themengebietes wird auf die folgende Grundlagenliteratur verwiesen, z.B. Wriggers et al. [2007] und Gross et al. [2014].

2.2. Bilanzgleichungen

Mit Hilfe von Bilanzgleichungen können Naturgesetze unabhängig von den Kontinuumseigenschaften beschrieben werden. Um globale Aussagen über den betrachteten Körper zu erhalten, werden die Bilanzgleichungen zunächst in integraler Form formuliert. Eine lokale Formulierung der Bilanzgleichungen mittels Differentialgleichungen kann bei hinreichend glatten Feldern vorgenommen werden. Diese können sich auf einen beliebig kleinen Teil des Körpers beziehen. Eine Bilanzgleichung kann auch ein Erhaltungssatz sein, wenn sich die zu bilanzierende Größe über den betrachteten Zeitraum nicht ändert.

2.2.1. Allgemeine Formulierung von Bilanzgleichungen

Mit Hilfe eines Volumenintegrals über die Dichteverteilung der mechanischen bzw. thermischen Größen kann der Zustand eines Körpers \mathcal{B} beschrieben werden. Durch Volumen- und Oberflächenintegrale über die jeweilige Dichte der Belastung kann die Wirkung der äußeren Umgebung ausgedrückt werden. Gegeben sei eine tensorwertige physikalische Größe \mathbf{Y} und die Dichteverteilung φ_d bezogen auf ein Volumenelement dv , somit gilt

$$\mathbf{Y}(t) = \int_{\mathcal{B}} \varphi_d(\mathbf{x}, t) dv. \quad (2.37)$$

Die Änderungsgeschwindigkeit entspricht der Zeitableitung der Funktion \mathbf{Y} und wird mit der Wirkung der Umgebung bilanziert. Mit der Oberflächendichte ϕ_a und der Volumendichte ϕ_v erhält man

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Y}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \varphi_d(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \phi_a(\mathbf{x}, t) da + \int_{\mathcal{B}} \phi_v(\mathbf{x}, t) dv. \quad (2.38)$$

Da die Oberflächendichtefunktion ϕ_a nicht nur Funktionen des Ortes und der Zeit sind, sondern auch von der Orientierung des materiellen Punktes abhängen, kann die Gleichung 2.38 unter Verwendung des Cauchy'schen Lemma für Tensoren beliebiger Stufen p wie folgt ausgedrückt werden,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \varphi_d^{(p)}(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \phi_a^{(p+1)}(\mathbf{x}, t) da + \int_{\mathcal{B}} \phi_v^{(p)}(\mathbf{x}, t) dv. \quad (2.39)$$

Die Bilanzgleichung 2.39 ist in der Momentankonfiguration definiert. Für die Referenzkonfiguration ergibt sich die Gleichung 2.39 zu

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \varphi_D^{(p)}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \phi_A^{(p+1)}(\mathbf{X}, t) dA + \int_{\mathcal{B}_0} \phi_V^{(p)}(\mathbf{X}, t) dV, \quad (2.40)$$

mit der Oberflächendichte ϕ_A und der Volumendichte ϕ_V in der Referenzkonfiguration. Die Bilanzgleichungen 2.39 und 2.40 stellen die allgemeine Form der Bilanzgleichung für die Momentan- und Referenzkonfiguration dar, allerdings ist es für manche Bilanzierungen von Vorteil mit der Massendichte zu rechnen anstelle der Volumenkraftdichte. Durch die Einführung von φ_m , φ_M , ϕ_m und ϕ_M , die die Massendichtefunktionen für die jeweilige Konfiguration repräsentieren, werden die Volumendichtefunktionen in den Gleichungen 2.39 und 2.40 durch die Massendichtefunktionen ersetzt. Man erhält somit die allgemeine mechanische Bilanzgleichung für die Momentankonfiguration

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi_m(\mathbf{x}, t) \varrho dm = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \phi_a(\mathbf{x}, t) da + \int_{\mathcal{B}} \phi_m(\mathbf{x}, t) \varrho dv \quad (2.41)$$

und für die Referenzkonfiguration

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \psi_M(\mathbf{X}, t) \varrho dM = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{N}(\mathbf{X}) \phi_A(\mathbf{X}, t) dA + \int_{\mathcal{B}_0} \phi_m(\mathbf{X}, t) \varrho dV. \quad (2.42)$$

Die Bilanzgleichungen kann man physikalisch so interpretieren, dass die Summe der Zu- und Abflüsse über die Ränder des Körpers und der Zuwachs bzw. der Verlust der Bilanzgröße im Körper gleich der Änderungsgeschwindigkeit der Bilanzgröße ist.

2.2.2. Massenbilanz

Mittels eines Volumenintegrals über das Dichtefeld kann die Masse

$$m = \int_{\mathcal{B}} \varrho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{B}_0} \varrho_0(\mathbf{X}) dV \quad (2.43)$$

bestimmt werden. Die Gleichung beinhaltet die Annahme, dass Masseerhalt vorliegt, da kein Zuwachs oder Verlust von Masse vorliegt. Des Weiteren ist zu erkennen, dass sich die Dichte und das Volumen über die Zeit ändern, allerdings bleibt die Masse über die gesamte Zeit konstant. Geht man von der allgemeinen Form der Bilanzgleichung 2.41 aus unter Berücksichtigung, dass kein Massenaustausch über die Oberfläche und keine innere Massenänderung erfolgt und unter Verwendung der Gleichung 2.12, ergibt sich folgender Ausdruck,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \varrho(\mathbf{x}, t) dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \varrho(\mathbf{x}, t) J dV = 0. \quad (2.44)$$

Führt man nun die Zeitableitung durch, unter Verwendung der Bedingung, dass das Volumen in der Referenzkonfiguration unveränderlich ist, ergibt sich

$$\dot{m} = \int_{\mathcal{B}} \left(\dot{\rho} J + \rho \frac{\partial}{\partial t} J \right) dV. \quad (2.45)$$

Mit der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} J = \operatorname{div} \mathbf{v} J$ ergibt sich die Gleichung 2.45 zu folgendem Ausdruck

$$\dot{m} = \int_V (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \underbrace{J dV}_{dv} = 0, \quad (2.46)$$

diese Gleichung stellt den globalen Massenerhaltungssatz dar. Aus dieser Gleichung kann die lokale Form des Massenerhaltungssatz

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.47)$$

formuliert werden. Unter Einbeziehung der Gleichung

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) dv &= \rho_0(\mathbf{x}, t) dV \\ \rho_0 &= J \rho \end{aligned} \quad (2.48)$$

können folgende Aussagen abgeleitet werden. Die in der Referenzkonfiguration definierte Massendichte ρ_0 ist immer von der Zeit unabhängig und für inkompressible Deformationen gilt $\rho_0 = \rho$ da $J = 1$.

2.2.3. Impulsbilanz

Der Gesamtimpuls \mathbf{p} kann durch die Definitionsgleichung

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) dm = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) dv \quad (2.49)$$

bestimmt werden und verbindet die Geschwindigkeits- und Masseverteilung eines Körpers \mathcal{B} miteinander. Geht man von der allgemeinen Form der Bilanzgleichung 2.41 aus unter der Definition, dass die Summe aller auf den Körper von außen wirkenden Oberflächen- und Volumenkräfte gleich der Änderungsgeschwindigkeit des Gesamtimpulses \mathbf{p} ist,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \rho dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \rho dv, \quad (2.50)$$

mit $\boldsymbol{\varphi}_d^{(p)} = \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\varphi}_a^{(p+1)} = \boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varphi}_v^{(p)} = \mathbf{b}$. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes kann die Gleichung zu

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \rho dv = \int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) dv + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \rho dv \quad (2.51)$$

umgeformt werden. Durch Umformen kann man den Ausdruck jetzt unter einem Integral wie folgt zusammenfassen

$$\int_{\mathcal{B}} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b}_\varrho - \dot{\mathbf{v}}_\varrho) dv = 0. \quad (2.52)$$

Diese Beziehung gilt für jedes beliebige Volumen, daher muss der Klammerausdruck verschwinden. Dadurch gelangt man zur lokalen Form der Impulsbilanz

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b}_\varrho = \dot{\mathbf{v}}_\varrho, \quad (2.53)$$

die dem Newton'schen Bewegungsgesetz entspricht.

2.2.4. Drehimpulsbilanz

Der Drehimpuls \mathbf{L} in globaler Form ist durch den Ausdruck, siehe Altenbach [1994],

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{B}} {}^P \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dm = \int_{\mathcal{B}} {}^P \mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \varrho(\mathbf{x}, t) dv \quad (2.54)$$

gegeben. Geht man von der allgemeinen Form der Bilanzgleichung 2.41 aus, unter der Berücksichtigung, dass die Änderungsgeschwindigkeit des gesamten Drehimpulses

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} {}^P \mathbf{x} \times \mathbf{v}_\varrho dv = \int_{\partial \mathcal{B}} {}^P \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{B}} {}^P \mathbf{x} \times \mathbf{b}_\varrho dv \quad (2.55)$$

bezogen auf den Bezugspunkt ${}^P \mathbf{x}$ gleich der Summe aller Momente die hervorgerufen werden, durch die von außen auf den Körper \mathcal{B} wirkende Oberflächen- und Volumenkräfte, bezogen auf den Punkt ${}^P \mathbf{x}$, mit $\boldsymbol{\varphi}_d^{(p)} = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\varphi}_a^{(p+1)} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varphi}_v^{(p)} = \mathbf{x} \times \mathbf{b}$. Unter Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes, der Massenerhaltung und der Gleichung 2.53 erhält man die Drehimpulsbilanz, nach Altenbach [1994],

$$\mathbf{L} \times \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.56)$$

in lokaler Form. Anhand dieser Beziehung können Aussagen über das Symmetrieverhalten des Cauchy'schen und des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors getroffen werden (siehe Gleichung 2.23).

2.2.5. Energiebilanz

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die Änderungsgeschwindigkeit der Gesamtenergie

$$\dot{E} = \frac{d}{dt}(K + U), \quad (2.57)$$

die sich als Summe aus der kinetischen Energie $K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \varrho dv$ und der inneren Energie $U = \int_{\mathcal{B}} \varrho \mathbf{u} dv$ ergibt, gleich der Leistung aller Oberflächen- und Volumenkräfte am Körper \mathcal{B} sind, die an der Deformation beteiligt sind, zuzüglich der thermischen zu- und abgeführten Energieanteile. Unter Berücksichtigung der allgemeinen Form der Bilanzgleichung 2.41 folgt

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \varrho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \right) dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{B}} \varrho (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) dv \quad (2.58)$$

für die Energiebilanz, mit $\varphi_d^{(p)} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}$, $\phi_a^{(p+1)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q}$ und $\phi_v^{(p)} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r$. Der Term $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ sorgt dafür, dass bei einem Wärmefluss in den Körper \mathcal{B} der Term positiv ist, daher das negative Vorzeichen. In der Gleichung 2.58 beschreibt r die auf die Masseneinheit bezogene Wärmequelle und \mathbf{q} beschreibt den Wärmestromvektor. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes kann das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral überführt werden und man erhält

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \varrho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \right) dv = \int_{\mathcal{B}} (\varrho (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{q})) dv. \quad (2.59)$$

Unter Verwendung des Reynolds'schen Transporttheorems und des Gauß'schen Integralsatzes ergibt sich die Änderungsgeschwindigkeit der Gesamtenergie zu folgendem Ausdruck

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \left(\dot{\varrho} \mathbf{u} + \varrho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\varrho} \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \varrho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \varrho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \right) \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right) dv = \dots \\ \int_{\mathcal{B}} (\varrho (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{q})) dv. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Die lokale Form des Energieerhaltungssatzes

$$\begin{aligned} \dot{\varrho} \mathbf{u} + \varrho \dot{\mathbf{u}} + \dot{\varrho} \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \varrho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \varrho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \right) \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \dots \\ \varrho (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) - \operatorname{div}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.61)$$

erhält man, indem der Klammerausdruck aus Gleichung 2.60 verschwindet, da die Beziehung aus Gleichung 2.59 für jedes beliebige Volumen gilt. Zieht man

von dieser Gleichung die mit \mathbf{v} multiplizierte Impulsbilanz 2.53 ab und berücksichtigt kleine Deformationen und isotherme Prozesse ergibt sich folgende vereinfachte Beziehung

$$\rho \dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \right) \quad (2.62)$$

für die Energiebilanz.

2.2.6. Entropiebilanz

Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgt, dass Energie sich in andere Energieformen umwandeln lässt, jedoch nicht aus dem Nichts entsteht und nicht vernichtet werden kann. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik beinhaltet allerdings keine Aussagen darüber, ob ein Prozess reversibel oder irreversibel ist oder um welche Art der Energieumwandlung es sich handelt. Um Informationen über die fehlenden Aussagen zu erhalten, wird die Entropie

$$S = \int_{\mathcal{B}} s \, dm = \int_{\mathcal{B}} \rho s \, dv \quad (2.63)$$

eingeführt. Die Entropie ist ein Maß, wie viel Energie irreversibel von einer nutzbaren in nicht nutzbare Energie umgewandelt werden kann. Ausgehend von der allgemeinen Form der Bilanzgleichung 2.41 unter Berücksichtigung, dass die Geschwindigkeit der äußeren Entropiezufuhr kleiner ist als die zeitliche Änderung der Entropie

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho s \, dv \geq - \int_{\partial \mathcal{B}} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} \, da + \int_{\mathcal{B}} \rho \frac{r}{\theta} \, dv \quad (2.64)$$

innerhalb eines betrachteten Volumens mit $\varphi_d^{(p)} = s$, $\phi_a^{(p+1)} = -\frac{\mathbf{q}}{\theta}$, $\phi_v^{(p)} = \frac{r}{\theta}$ und der absoluten Temperatur θ . Da nur bei idealisierten Prozessen die Geschwindigkeit der äußeren Entropiezufuhr gleich der Entropieänderungsrate innerhalb eines betrachteten Volumens ist, wird für die Gleichung 2.64 das Größer-Gleich-Zeichen \geq verwendet. Diese Beziehung entspricht dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Die Entropieänderungsrate ergibt sich zu

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho s \, dv = \int_{\mathcal{V}} (\dot{\rho} s + \rho \dot{s}) \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \rho s \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da, \quad (2.65)$$

unter Verwendung des Reynolds'schen Transporttheorems. Wendet man den Gauß'schen Integralsatz auf die Gleichungen 2.64 und 2.65 an, kann die Gleichung 2.64 folgendermaßen

$$\int_{\mathcal{B}} (\dot{\rho} s + \rho \dot{s} + \rho s \operatorname{div}(\mathbf{v})) \, dv \geq \int_{\mathcal{B}} \left(-\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) + \rho \frac{r}{\theta} \right) \, dv \quad (2.66)$$

ausgedrückt werden. Mit der folgenden Beziehung

$$\theta (\dot{\rho} s + \rho \dot{s} + \rho s \operatorname{div}(\mathbf{v})) + \operatorname{div}(\mathbf{q}) - \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}(\theta) \frac{1}{\theta} + \rho r \geq 0 \quad (2.67)$$

ist die lokale Form gegeben. Setzt man die Gleichung für die Energiebilanz 2.62 in die lokale Form der Entropiebilanzen erhält man nach einigen Umformungen

$$\theta (\dot{\rho} s + \rho \dot{s}) - \rho \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}(\theta) \frac{1}{\theta} \geq 0. \quad (2.68)$$

Unter Verwendung der Legendre-Transformation

$$\psi = \mathbf{u} - \theta \mathbf{s} \quad (2.69)$$

und dessen Zeitableitung

$$\dot{\psi} = \dot{\mathbf{u}} - \dot{\theta} \mathbf{s} - \theta \dot{\mathbf{s}} \quad (2.70)$$

kann der Term $\dot{\mathbf{u}}$ in Gleichung 2.68 ersetzt werden, wodurch man

$$\theta (\dot{\rho} s + \rho \dot{s}) - \rho \left(\dot{\psi} + \dot{\theta} \mathbf{s} + \theta \dot{\mathbf{s}} \right) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}(\theta) \frac{1}{\theta} \geq 0 \quad (2.71)$$

erhält. In der Gleichung 2.69 beschreibt ψ die Freie Energie. Durch Umformung und unter Voraussetzung eines isothermen Prozesses kann die Clausius-Duhem-Ungleichung durch

$$\mathcal{D} = -\rho \dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \geq 0 \quad (2.72)$$

ausgedrückt werden.

2.3. Materialverhalten und Konstitutivgleichungen

Wie schon erwähnt, können die speziellen Eigenschaften des Materials durch die bis jetzt eingeführten Gleichungen weitestgehend noch nicht beschrieben werden, da diese so allgemein wie möglich gehalten sind und für alle Kontinua gelten. Daraus ergibt sich das Problem, dass bisher nicht genügend Gleichungen zur Verfügung stehen um das Materialverhalten abbilden zu können. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass weitere Gleichungen zur Beschreibung des Materialverhaltens notwendig sind. Diese Gleichungen werden als Materialgleichungen, Stoffgesetz oder konstitutive Gleichungen bezeichnet.

Die zusätzlichen benötigten Gleichungen um das Verhalten von Steinsalz zu beschreiben und welchen Gesetzmäßigkeiten sie unterliegen, wird in den nachfolgenden Unterkapiteln erläutert.

2.3.1. Einführung in die Materialtheorie

Am Anfang jedes neu entwickelten Materialmodells müssen laut Altenbach [1994] folgende Fragen geklärt werden.

- Wie können die Konstitutivgleichungen formuliert werden?
- Liegt materielle Symmetrie vor?
- Kann man kinematische Einschränkungen in das Modell einarbeiten?

Mit Hilfe der Konstitutivgleichungen werden dem Kontinuum die Materialeigenschaften verliehen. Die Anzahl der Konstitutivgleichungen ist abhängig von der Anzahl der inneren Variablen, die zur Beschreibung des Materialverhaltens nötig sind. Für die Bestimmung der Konstitutivgleichungen werden gut dokumentierte Materialtests (Versuchsparameter) benötigt, um das entwickelte Materialmodell zu validieren. In der Abbildung 2.4 ist diese Vorgehensweise grafisch dargestellt. Die Konstitutivgleichungen lassen sich durch die Einarbeitung von Materialsymmetrien in mathematischer Hinsicht vereinfachen. Allerdings benötigt dieser Schritt eine Menge Erfahrung und ingenieurmäßige Methoden, da die Materialsymmetrien aus Experimenten abgeleitet werden müssen. Eine weitere Vereinfachung der Materialgleichungen in mathematischer Hinsicht liefert die Einarbeitung von kinematischen Einschränkungen in das Modell. Eine solche kinematische Einschränkung für das Material Steinsatz ist, dass unterhalb der Dilatanzgrenze die Volumenänderung rein elastisch ist. Sind diese Fragen geklärt, können die Konstitutivgleichungen mittels grundlegender Axiome bestimmt werden.

Das erste Axiom sagt aus, dass mit Hilfe der Vorgeschichte des Materials und des aktuellen Belastungszustandes der aktuelle Zustand des Kontinuums bestimmt werden kann. Das **Determinismusaxiom** sagt ebenfalls aus, dass das Verhalten des betrachteten materiellen Punktes durch die anderen materiellen Punkte beeinflusst wird. Mit Hilfe des **Axioms der lokalen Wirkung** kann die vorherige Bedingung auf die unmittelbare Umgebung eingeschränkt werden, da die Fernwirkungen vernachlässigbar klein sind. Daraus ergibt sich, dass für Materialien ersten Grades, die sogenannten einfachen Materialien, man für die Beschreibung des Materialverhaltens nur die Variablen und deren Gradienten benötigt. Das **Gedächtnisprinzip** besagt, dass für die zeitliche Beschreibung Vereinfachungen vorgenommen werden können. Bei den Vereinfachungen unterscheidet man zwischen glatten und schwindenden Gedächtnis. Bei schwindenden Gedächtnissen geht man davon aus, dass zurückliegende Ereignisse einen geringeren Einfluss auf den aktuellen Zustand haben. Für hinreichend glatte Funktionen kann eine Taylor-Reihenentwicklung vorgenommen werden, in Altenbach [1994] wird ein Beispiel für eine hinreichend glatte Funktion gegeben. Die Variablen, die das Materialverhalten beschreiben, können in Anlehnung an das **Kausalitätsprin-**

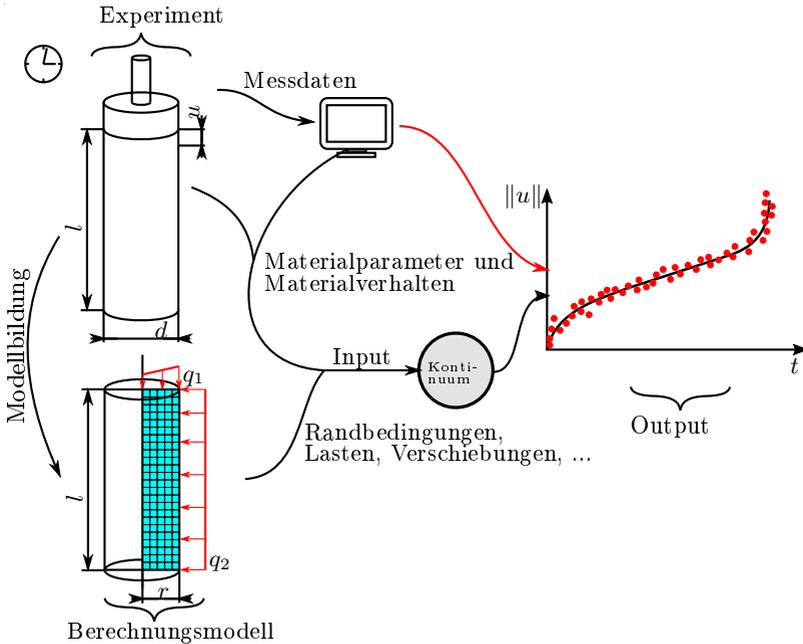


Abbildung 2.4.: Experimentelle Ermittlung des Materialverhaltens und Ableiten des Berechnungsmodells

zip in abhängige und unabhängige Variablen unterteilt werden. Als Beispiel für abhängige und unabhängige Variablen soll ein thermomechanisches Kontinuum dienen. Die Bewegung und die Temperatur sind unabhängige Variablen, da diese Variablen die Spannung, die Wärmeflüsse, die freie Energie und die Entropie beeinflussen, können diese als abhängige Variablen betrachtet werden. Um Wechselwirkungen abbilden zu können, muss der vollständige Satz an unabhängigen Variablen in allen Konstitutivgleichungen enthalten sein, was dem **Äquipräsensaxiom** entspricht. Das gewählte Bezugssystem darf keinen Einfluss auf die Konstitutivgleichungen haben. Des Weiteren sagt das **Axiom der materiellen Objektivität** aus, dass die Beobachtungsabhängigkeit von Starrkörperbewegungen zu prüfen ist. Das **Prinzip der physikalischen Verträglichkeit** sagt aus, dass die entwickelten Konstitutivgleichungen den Bilanzgleichungen aus Kapitel 2.2 nicht widersprechen dürfen.

Ein Materialmodell was diesen Axiomen entspricht, kann das Materialverhalten zuverlässig abbilden und unterliegt dem thermodynamischen Konzept.

2.3.2. Elastisches Materialverhalten

Elastisches Materialverhalten liegt vor, wenn bei einem einachsigen Spannungszustand Be- und Entlastung auf demselben Weg erfolgt und wenn die Verzerrungen die durch die äußere Belastung entstanden sind, vollständig und unmittelbar verschwinden beim Entlasten. Des Weiteren ist die Verformung nur abhängig von der Belastung und nicht von der Belastungsgeschwindigkeit. Die aufgenommene Arbeit wird im Körper vollständig als Verformungsenergie gespeichert und nach der Belastung wieder vollständig abgebaut.

Ausgehend von der freien Energie

$$\psi = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbb{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon})}_{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.73)$$

die man unter Verwendung der Lamé-Parameter auch durch

$$\psi = \frac{1}{2} \kappa (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 + \mu \underbrace{\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \right)}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \right) \quad (2.74)$$

ausdrücken kann. Bildet man die erste Ableitung der freien Energie nach dem Verzerrungstensor, erhält man den Spannungstensor

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \boldsymbol{\sigma} = \kappa \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

was dem Hooke'schen Gesetz entspricht. Den Materialtensor \mathbb{C} erhält man mittels der zweiten Ableitung der freien Energie nach dem Verzerrungstensor

$$\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{C} = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \underbrace{\left(\mathbf{1} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right)}_{\mathbb{P}}. \quad (2.76)$$

Dieser Materialtensor gilt nur für isothermes, isotropes und linear-elastisches Materialverhalten. Im Allgemeinen hat der Materialtensor 81 Unbekannte die durch Experimente bestimmt werden müssen. Die Anzahl der Unbekannten kann durch Einarbeitung von Symmetrien für den einfachsten Fall auf zwei Unbekannte reduziert werden. Somit können die Lamé-Parameter

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \\ \kappa &= \frac{3\lambda_L + 2\mu}{3} \end{aligned} \quad (2.77)$$

durch den Elastizitätsmodul und die Querkontraktion bestimmt werden. Wie sich der Materialtensor für andere Symmetrien ergibt, ist z.B. in Jones [1998] und Altenbach [1994] dargestellt.

2.3.3. Viskoelastisches Materialverhalten

Viskoelastisches Materialverhalten ist dadurch gekennzeichnet, dass die Verzerungen, die durch die äußeren Belastungen entstanden sind, vollständig bei der Entlastung verschwinden. Anders als bei der reinen Elastizität erfolgt jegliche Verformung sowie Rückstellung zeitabhängig. Die über die Zeit aufgenommene Arbeit wird im Körper vollständig als Verformungsarbeit gespeichert und nach der Belastung über die Zeit wieder vollständig abgebaut. Für die freie Energiefunktion zur Bestimmung des viskoelastisches Materialverhalten geben Simo und Hughes [1998] folgenden Ausdruck an

$$\psi = \frac{1}{2}\kappa (tr(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 + \mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Theta \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \right), \quad (2.78)$$

mit der viskosen Dehnung \mathbf{q}_i und dem Parameter N der die Anzahl der Maxwell-Körper angibt. Bildet man das totale Differential von Gleichung 2.78 und setzt das in die Clausius-Duhem-Ungleichung 2.72, kann die Clausius-Duhem-Ungleichung

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \kappa tr(\boldsymbol{\varepsilon}) - 2\mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \sum_{i=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial \Theta(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \right) : \dot{\mathbf{q}}_i \geq 0 \quad (2.79)$$

in der Form ausgedrückt werden. Für die Spannungen und für die Dissipationsfunktion ergeben sich daraus folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \kappa tr(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i, \\ \mathcal{D} &= \sum_{i=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial \Theta(\mathbf{q}_i)}{\partial \mathbf{q}_i} \right) : \dot{\mathbf{q}}_i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Die viskoelastische Antwort kann nach Simo und Hughes [1998] mit Hilfe der Ratengleichung beschrieben werden

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{q}_i &= \frac{\gamma_i}{\tau_i} 2\mu \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

mit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \gamma_i &= 1 - \gamma_\infty \\ 0 &\leq \gamma_\infty < 1 \end{aligned}$$

Die Materialparameter γ_∞, γ_i ergeben sich als Verhältnis der Elastizitätsmodule E_∞, E_i der einzelnen Feder bezogen auf dem gesamten Elastizitätsmodul

und ist durch die folgenden Beziehungen gegeben,

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \frac{E_i}{E} & \text{mit} & \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \gamma_\infty &= \frac{E_\infty}{E}\end{aligned}\tag{2.82}$$

Die Integration der Evolutionsgleichung kann durch die Anwendung der exponentiellen Projektion wesentlich effizienter gestaltet werden. Durch die exponentiellen Projektion kann die Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{q}_i \exp \left(\frac{t}{\tau_i} \right) \right) = \frac{\gamma_i}{\tau_i} 2\mu\tilde{\varepsilon} \exp \left(\frac{t}{\tau_i} \right)\tag{2.83}$$

in dieser Form geschrieben werden. Integriert man diesen Ausdruck und unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen, erhält man

$$\mathbf{q}_i = \frac{\gamma_i}{\tau_i} \int_{-\infty}^t \exp \left(\frac{-(t-s)}{\tau_i} \right) 2\mu\tilde{\varepsilon}(s) ds.\tag{2.84}$$

Wird dieser Ausdruck partiell integriert und in die Spannungsbeziehung 2.80 eingesetzt, erhält man die Konstitutivgleichung

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) &= \kappa \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{d}{ds} (2\mu\tilde{\varepsilon}(s)) ds \\ \text{mit}\end{aligned}\tag{2.85}$$

$$g(t) = \gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \exp \left(\frac{-t}{\tau_i} \right)$$

in der Gedächtnisintegraldarstellung. Die Funktion $g(t)$ in Gleichung 2.85 wird Relaxationsfunktion genannt. Aus dem Ableitungsterm und der Exponentialfunktion der Relaxationsfunktion ergibt sich ein Satz von internen Variablen

$$\mathbf{h}_i = \int_{T_0}^t \exp \left(\frac{-t}{\tau_i} \right) \frac{d}{ds} \underbrace{(2\mu\tilde{\varepsilon}(s))}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test}} ds.\tag{2.86}$$

Bei der unteren Grenze liegt rein elastische Deformation vor und die Zeitdiskretisierung erfolgt mit ${}^{n+1}t = {}^n t + dt$. Mit Hilfe der Zeitdiskretisierung kann die Gleichung 2.86 folgendermaßen

$$\begin{aligned}{}^{n+1}\mathbf{h}_i &= \exp \left(\frac{-dt}{\tau_i} \right) \int_{T_0}^{{}^n t} \exp \left(\frac{-({}^n t - s)}{\tau_i} \right) \frac{d}{ds} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test} ds + \dots \\ &\int_{{}^n t}^{{}^{n+1}t} \exp \left(\frac{-({}^{n+1}t - s)}{\tau_i} \right) \frac{d}{ds} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test} ds\end{aligned}\tag{2.87}$$

ausgedrückt werden. Der erste Term in der Gleichung kann als bis zu diesem Zeitschritt akkumulierte inelastische Deformation interpretiert werden. Der zweite Term wird wie folgt integriert

$$\begin{aligned}
& \int_{n_t}^{n+1_t} \exp\left(\frac{-(n+1_t - s)}{\tau_i}\right) \frac{d}{ds} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test} ds \\
& \cong \frac{d}{ds} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test} \Big|_{s=\frac{n+1_t+n_t}{2}}^{n+1_t} \int_{n_t}^{n+1_t} \exp\left(\frac{-(n+1_t - s)}{\tau_i}\right) ds \\
& = ({}^{n+1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test} - {}^n \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test}) \frac{1}{dt} \tau_i \exp\left(\frac{-(n+1_t - s)}{\tau_i}\right) \Big|_{s=n_t}^{s=n+1_t} \\
& = \frac{1 - \exp\left(\frac{-dt}{\tau_i}\right)}{\frac{dt}{\tau_i}} ({}^{n+1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test} - {}^n \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test}).
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Das Update der internen Variable ergibt sich durch das Einarbeiten der Beziehungen zu folgendem Ausdruck

$${}^{n+1} \mathbf{h}_i = \exp\left(\frac{-dt}{\tau_i}\right) {}^n \mathbf{h}_i + \frac{1 - \exp\left(\frac{-dt}{\tau_i}\right)}{\frac{dt}{\tau_i}} ({}^{n+1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test} - {}^n \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test}). \tag{2.89}$$

Die Spannung zum Zeitpunkt $n + 1$ kann durch

$${}^{n+1} \boldsymbol{\sigma} = \kappa \operatorname{tr}({}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}) + \gamma_\infty {}^{n+1} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test} + \sum_{i=1}^N \gamma_i {}^{n+1} \mathbf{h}_i \tag{2.90}$$

bestimmt werden. Der algorithmisch konstante Tangentenmodul ist durch folgenden Ausdruck gegeben

$${}^{n+1} \mathbb{C} = \frac{\partial {}^{n+1} \boldsymbol{\sigma}}{\partial {}^{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}} = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \underbrace{\left(\gamma_\infty + \sum_{i=1}^N \gamma_i \frac{1 - \exp\left(\frac{-dt}{\tau_i}\right)}{\frac{dt}{\tau_i}} \right)}_{g^*} 2\mu \mathbb{P}. \tag{2.91}$$

2.3.4. Kriechen

Beim Kriechen kann man beobachten, dass bei einem konstanten Beanspruchungsniveau die Verzerrungen ständig zunehmen. Die akkumulierte Kriechdehnung ist wie bei der Plastizität irreversibel. Anhand von einachsigen Experimenten lässt sich beobachten, dass sich der Kriechvorgang in drei Phasen einteilen lässt (siehe Abbildung 2.5)

- Phase *I* das sog. primäre Kriechen,

- Phase *II* das sog. sekundäre bzw. stationäres Kriechen und
- Phase *III* das sog. tertiäre Kriechen.

Das primäre Kriechen *I* ist durch eine große Verformungsrate charakterisiert, die mit Fortschreiten der Deformation rasch abnimmt. Versetzungen innerhalb der Gitterstruktur im Salzkristall sind bestimmend für das primäre Kriechen. Die Versetzungen beginnen sich mit zunehmender Spannung zu bewegen. Das Bewegungspotential der vorhandenen Versetzungen wird durch die anwachsende Verformung verringert. Wird weiterhin Verformung akkumuliert, entstehen neue Versetzungen im Gitter. Die daraus resultierende Versetzungsdichte bewirkt eine Verringerung der Kriechgeschwindigkeit, da diese einen Widerstand gegen die Verformung selbst erzeugt (siehe *I* in Abbildung 2.5). Der sekundäre bzw. stationäres Kriechbereich *II* ist charakterisiert durch eine konstante Kriechgeschwindigkeit. Die konstante Kriechgeschwindigkeit wird maßgebend durch das Klettern von Versetzungen verursacht, da diese zu einem Gleichgewicht zwischen erzeugten und ausgelösten Versetzungen führt. Daraus folgt, dass die Verfestigung und die Entfestigung gleich groß werden (siehe *II* in Abbildung 2.5). Die tertiäre Kriechphase *III* wird durch eine rasch ansteigende Kriechgeschwindigkeit bestimmt. Die Ursache für das rasche Ansteigen der Kriechgeschwindigkeit beruht überwiegend auf Entfestigungsprozesse im Material (siehe *III* in Abbildung 2.5), Bergmann [2003] und Blum [1978].

Die hier gezeigten Kriechphasen sind materialabhängig und sind daher unterschiedlich ausgeprägt je nach Material. Dieses kann dazu führen, dass die Kriechphasen teilweise oder vollständig fehlen.

Zur Beschreibung des Kriechvorgangs werden in der Regel nichtlineare Ansätze benötigt. In der Literatur können zahlreiche Ansätze zur Beschreibung des Kriechverhaltens gefunden werden, allerdings sind diese oftmals auf einen speziellen Einsatzbereich beschränkt. Für die Kriechdehnung kann nach Altenbach [1994], folgender allgemeiner Ansatz formuliert werden

$$\varepsilon^{cr} = f_1(\sigma) f_2(t) f_3(\theta), \quad (2.92)$$

dabei beschreibt die Funktion $f_1(\sigma)$ die Spannungsabhängigkeit der Kriechdehnung, die Funktion $f_2(t)$ die Zeitabhängigkeit der Kriechdehnung und die Funktion $f_3(\theta)$ die Temperaturabhängigkeit der Kriechdehnung. Norton und Bailey formulierten für die Funktionen f_1 und f_2 folgenden einfachen Ansatz. Die Kriechdehnungs-Zeit-Kurve kann durch die Beziehung

$$\varepsilon^{cr} = F T^m \quad (0 < m < \infty) \quad (2.93)$$

beschrieben werden, dabei sind F und m Materialparameter und die Kriechdehnungsgeschwindigkeits-Spannungsbeziehung ergibt sich zu

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = K \sigma^n, \quad (2.94)$$

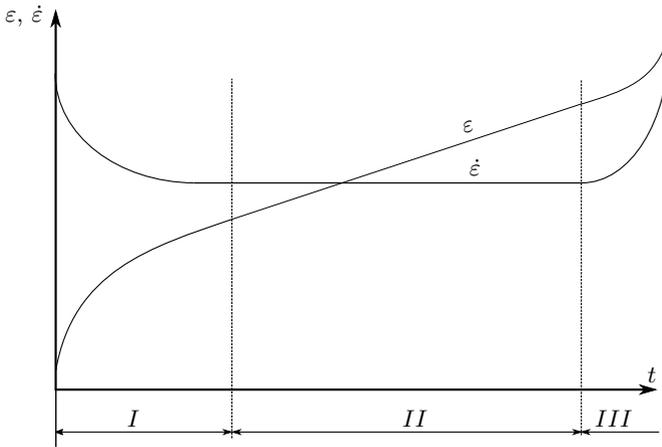


Abbildung 2.5.: Kriechverformung

mit den Materialparametern K und n . Zur Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Kriechdehnung gibt es weitere spezielle Ansätze. Einer dieser Ansätze ist in Gleichung 5.8 dargestellt. Des Weiteren sei erwähnt, dass es in der Literatur eine Vielzahl von Ansätzen zur Beschreibung der unterschiedlichen Kriechphasen gibt, für den interessierten Leser wird auf Ludwik [1909], Lubahn und Felgar [1961], Rusinko und Rusinko [2011] und Betten et al. [1989] verwiesen.

Die hier gezeigten Ansätze beschreiben das Kriechverhalten für einen einachsigen Belastungszustand, eine mehrachsige Verallgemeinerung der verschiedenen Ansätze zur Beschreibung des Kriechverhaltens kann nach Altenbach [1994] und Hampel [2006] mittels der Fließtheorie erfolgen. Voraussetzung dafür ist, dass ein Kriechpotential $\Phi(\sigma)$ existiert. Die Verallgemeinerung erfolgt analog zur Plastizitätstheorie, siehe de Souza Neto et al. [2008], Simo und Hughes [1998] und Jablonski [2014]. Das Kriechpotential

$$\Phi(\sigma) = (\sigma^{vM})^2 = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_F^2, \quad (2.95)$$

wurde von Altenbach [1994] vorgeschlagen, mit σ^{vM} die der Vergleichungsspannung nach von Mises entspricht, mit $\tilde{\sigma}$, die dem deviatorischen Anteil des Spannungstensors entspricht und mit σ_F , die der Fließspannung entspricht. Somit lässt sich der Kriechgeschwindigkeitstensor mittels des assoziierten Fließgesetzes ausdrücken

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \quad (2.96)$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen dem Spannungstensor und dem deviatorischen Anteil des Spannungstensors, kann das Kriechpotential aus Gleichung 2.95 folgendermaßen ausgedrückt werden

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{6} [3\sigma \cdot \sigma - I_1^2(\sigma)]. \quad (2.97)$$

Durch bilden der partiellen Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$, ergibt sich der Kriechgeschwindigkeitstensor zu

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \lambda \tilde{\sigma}. \quad (2.98)$$

Anhand der Gleichung lässt sich erkennen, dass die Forderung, dass die Deformation volumentreu sein muss, erfüllt ist. Über die Äquivalenz des einachsigen und des mehrachsigen Zustandes kann der Faktor λ bestimmt werden. Wird die Gleichung 2.98 mit $\tilde{\sigma}$ multipliziert, ergibt sich die spezifische dissipierte Spannungsleistung, Altenbach [1994],

$$W = \tilde{\sigma} \cdot \dot{\epsilon}^{cr} = \lambda \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma} = \frac{2}{3} \lambda \sigma_F^2. \quad (2.99)$$

Die Äquivalenz des einachsigen und des mehrachsigen Zustandes gilt auch für das Produkt aus äquivalenter Spannung und Kriechdehngeschwindigkeit

$$W = \sigma^{vM} \dot{\epsilon}^{cr,v}. \quad (2.100)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 2.99 und 2.100 ergibt sich der Faktor zu

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}^{cr}}{\sigma^{vM}} \quad (2.101)$$

und durch diese Gleichung kann die Gleichung 2.98 folgendermaßen ausgedrückt werden

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}^{cr}}{\sigma^{vM}} \tilde{\sigma}. \quad (2.102)$$

Für die unterschiedlichen Kriechphasen müssen unterschiedliche Ansätze definiert werden. Wie in dieser Arbeit das Kriechverhalten von Salzgestein beschrieben wird, wird in Kapitel 5.8 erläutert.

2.3.5. Schädigung

Unter Schädigung versteht man einen physikalischen Prozess, in dem im Prozessverlauf die Materialsteifigkeit verringert wird. Dieser Prozessverlauf kann bis zum Materialversagen führen. Die Schädigung ist ein irreversibler Prozess und verursacht bleibende messbare Änderung der Materialeigenschaften und der Geometrie.

Mikromechanisch kann man den Prozess der Schädigung als das Aufbrechen

der atomaren Bindungen und das Wachstum von Mikrorissen sowie von Poren interpretieren. Basierend auf der phenomologischen Beobachtungen haben Lippmann und Lemaitre [1996] und Lemaitre und Chaboche [1994] folgende Begriffe definiert.

- **Spröde Schädigung**

Die spröde Schädigung ist dadurch gekennzeichnet, dass die elastischen Dehnungen ε^{el} viel größer als die plastischen Dehnungen ε^{pl} sind. Dieses beruht darauf, dass an der mikroskopischen Risspitze keine nennenswerten plastischen Effekte auftreten, was dazu führt, dass makroskopisch keine nennenswerte plastische Dehnung akkumuliert wird.

- **Duktile Schädigung**

Anders als bei der spröden Schädigung überlagern sich an den Spitzen der Mikrorisse die plastischen Effekte, sodass die elastischen Dehnungen ε^{el} viel kleiner als die plastischen Dehnungen ε^{pl} sind.

- **Kriechschädigung**

Dieser Schädigungseffekt tritt bei viskosem Materialverhalten auf. Der Prozess ist zum Beispiel für Metalle unter permanenter statischer Last thermisch aktiviert. Der Schädigungsmechanismus ist geprägt durch das Entstehen von Mikroporen an den Korngrenzen.

- **Ermüdung**

Dieser Schädigungsprozess tritt unter zyklischer Beanspruchung auf und ist dadurch gekennzeichnet, dass das Material nur lokale Mikroplastizität aufweist und im globalen elastisches Materialverhalten vorliegt.

- **Isotrope Schädigung**

Die isotrope Schädigung läuft richtungsunabhängig ab. Daraus folgt, dass bei einer Belastung oberhalb der Schädigungsgrenze das Material in allen Raumrichtungen gleichermaßen geschädigt wird. Dieses lässt sich mikroskopisch durch das Wachstum kugelförmiger Poren erklären. Aus diesem Materialverhalten lässt sich für die Beschreibung der isotropen Schädigung eine skalare Schädigungsvariable ableiten.

- **Anisotrope Schädigung**

Anders als bei der isotropen Schädigung läuft die anisotrope Schädigung richtungsabhängig ab, da sie die Mikrorissausbreitungen in der jeweiligen Raumrichtung beschreibt. Für die Berechnung der anisotropen Schädigung müssen tensorielle Schädigungsvariablen eingeführt werden.

In Lippmann und Lemaitre [1996] werden die jeweiligen Schädigungsmechanismen mittels Rasterelektronenmikroskopie optisch dargestellt.

Für die Wahl der Formulierung der Evolutionsgleichung der Schädigungsvariable muss das System hinsichtlich der Schädigungsmechanismen untersucht werden. Die Festlegung der Längenskala, z.B. mikroskopische oder makroskopische Ebene, bestimmt welche Schädigungsmechanismen berücksichtigt werden. Bei der Betrachtung der mikroskopischen Ebene ergibt sich die Schädigung durch Mikrorisse, welche auf Inhomogenitäten des Werkstoffes zurückzuführen sind, oder durch das Aufbrechen der Atombindungen. Diese Effekte führen im Inneren des Materials zur Bildung von Poren und Hohlräumen, die sich soweit ausbreiten können, dass Bruchflächen entstehen. Durch Fortschreiten der Schädigung ergeben sich auf der makroskopischen Ebene Makrorisse im Material. Für die Beschreibung der Schädigung können getrennte Ansätze für die Schädigung formuliert werden oder kombinierte Ansätze zur Beschreibung der Schädigung herangezogen werden.

Aus Experimenten kann man ableiten, dass eine Betrachtung der Längenskala alleine nicht ausreicht, da für die Formulierung der Evolutionsgleichung für die Schädigung das spezifische Materialverhalten berücksichtigt werden muss. Dieses kann an einem kleinen Beispiel verdeutlicht werden: Im Gegensatz zu Stahl kann sich Gummi um mehrere hundert Prozent dehnen, bevor die Materialschädigung zu einem Versagen des Gummis führt. Daraus lässt sich ableiten, dass für verschiedene Materialien unterschiedliche Ansätze zur Beschreibung der Schädigung formuliert werden. Die Beschreibung der Schädigung kann mittels der Ermüdung, der Bruchmechanik, der Kontinuumschädigungsmechanik oder der mikromechanischen Schädigungsmechanik beschrieben werden. Da die Beschreibung der Schädigung ein sehr aktiver Forschungsbereich ist, kann kein Anspruch auf Vollständigkeit gegeben werden. Für den interessierten Leser wird z.B. auf Gross und Seelig [2016], Lippmann und Lemaitre [1996] und Haibach [2006] verwiesen.

Das in dieser Arbeit verwendete Schädigungsmodell wird im Kapitel 5.8.3 näher erläutert.

• Konzept der Schädigung nach Kachanov

Beim Konzept nach Kachanov [1958] ergibt sich die Schädigung als Folge der Entstehung und das Anwachsen von Mikrorissen im Material. Die Entwicklung der Schädigung erfolgt nach Burbulla [2015] im gesamten Kontinuum. Die Mikrospannungen werden über das repräsentative Kontrollelement (RVE) (siehe Abbildung 2.6) im Rahmen der Kontinuumschädigungsmechanik gemittelt. Defekte im Material sind auch schon im Ausgangszustand vorhanden. Die Abbildung der Schädigungseffekte kann nach Lippmann und Lemaitre [1996] durch ein RVE mit einem Volumen von 1mm^3 für ein Polymer beschrieben werden. Das RVE eines Körper $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$ im Punkt P mit der Normalen \mathbf{n} , können die Querschnittsflächen dA_0 , dA_D und dA^{eff} identifiziert werden. Dabei beschreibt die Fläche

dA_0 die vollständige Querschnittsfläche des RVE, die Fläche dA_D gibt die Querschnittsfläche an, die durch Poren und Risse geschädigt ist und die ungeschädigte Querschnittsfläche wird durch dA^{eff} beschrieben. Nach dem Konzept von Kachanov [1958] kann die Riss- und Porenbildung für ein isotropes Material, da die Schädigungsentwicklung unabhängig von der Richtung ist, durch eine skalare Schädigungsvariable D für das RVE ausgedrückt werden. Die Schädigungsvariable D für den Punkt $P \in \mathcal{B}$ ergibt sich durch das Verhältnis

$$D(P, \mathbf{n}) = \frac{dA_D}{dA_0} \quad (2.103)$$

des ungeschädigten zum gesamten Querschnitt des RVE. Die Schädigungsvariable D wird durch das Intervall

$$0 \leq D \leq 1 \quad (2.104)$$

beschränkt, wobei $D = 0$ ein ungeschädigtes und $D = 1$ ein vollständig geschädigtes Material darstellt.

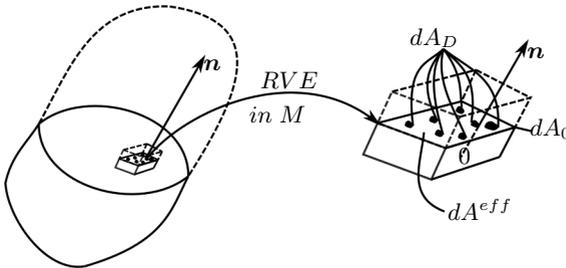


Abbildung 2.6.: Schnitt durch ein RVE des Körpers \mathcal{B} an der die Schädigung definiert wird.

- **Konzept der effektiven Spannung**

Das Konzept der effektiven Spannung, welches durch Rabotnov [1969] vorgeschlagen wurde, geht davon aus, dass die Kraft F , die auf einen Körper wirkt, nicht über den Ausgangsquerschnitt A_0 , sondern über die

ungeschädigte Querschnittsfläche $A_0 - A_D$ übertragen wird (siehe Abbildung 2.7). Dadurch kann für die Spannung σ normal zur Querschnittsfläche der folgende Ansatz formuliert werden

$$\sigma^{eff} = \frac{F}{A_0 - A_D} = \frac{F}{A^{eff}}. \quad (2.105)$$

Mit einer skalaren Schädigungsvariablen D aus Gleichung 2.103 ergibt sich für die effektive Spannung folgender Ausdruck,

$$\sigma^{eff} = (1 - D)\sigma. \quad (2.106)$$

Somit lässt sich ableiten, dass die effektive Spannung in einem geschädigten Material gleich der Spannung in einem ungeschädigten Material mit verringertem Querschnitt ist.

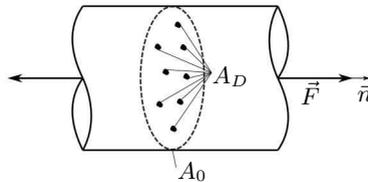


Abbildung 2.7.: Eindimensionales Schädigungselement

• Konzept der Äquivalenz der Dehnung

Nach dem Konzept der Äquivalenz der Dehnung, siehe Lippmann und Lemaitre [1996] wird die Schädigung am Punkt P nur durch den lokalen Zustand beschrieben. Daraus folgt, dass benachbarte Defekte keinen Einfluss auf die Schädigungsentwicklung hat. Des Weiteren werden konkrete Mikrostrukturen und die Mechanismen für die Schädigungsentwicklung nicht berücksichtigt. Mit Hilfe der effektiven Spannung σ^{eff} am ungeschädigten Material können die Größen umformuliert werden. Das Beispiel für ein linear elastisches Materialgesetz soll diesen Sachverhalt verdeutlichen. Unter Verwendung des Konzeptes der Äquivalenz der Dehnung

$$\varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{E^{eff}} \quad \text{für } D = 0, \quad (2.107)$$

$$\varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{(1 - D)E} \quad \text{für } 0 < D < 1, \quad (2.108)$$

können die Gleichungen für die elastische Dehnung folgendermaßen umformuliert werden, nach Lippmann und Lemaitre [1996]. Durch das Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen ergibt sich für den effektiven Elastizitätsmodul der Ausdruck

$$E^{eff} = (1 - D)E. \quad (2.109)$$

Eine Einbettung der Schädigung in das thermodynamische Konzept des verwendeten Materialmodells erfolgt im Kapitel 5.8.

3. Finite Element Modellierung

Die Finite Element Methode (FEM) ist ein etabliertes Verfahren, um partielle Differentialgleichungen näherungsweise zu lösen. Da eine Vielzahl von natürlichen Prozessen mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden kann, ist die FEM aus der wissenschaftlichen und der beruflichen Praxis von Naturwissenschaftlern und Ingenieuren aus heutiger Sicht nicht mehr wegdenkbar. Die für diese Arbeit wichtigen Grundlagen werden in diesem Kapitel erläutert. Darunter fallen die in dieser Arbeit betrachteten Randwertprobleme. Da das Anwendungsfeld für die FEM sehr weit gefächert ist und in dieser Arbeit nur ein kleiner Bereich dieser Methode Anwendung findet, wird für eine ausführliche Beschäftigung mit diesem Thema auf weiterführende Literatur z.B. Zienkiewicz und Taylor [2000], Bathe [2001], Zienkiewicz et al. [2005], Wriggers [2009] und Braess [2013] verwiesen.

Im Kapitel 3.1 wird die Herleitung der verwendeten schwachen Form gezeigt, die aufgrund der materiellen Nichtlinearität im Kapitel 3.2 linearisiert werden muss. Die räumliche Diskretisierung mit finiten Elementen, die numerische Integration der Elementsteifigkeitsmatrix und die numerische Differentiation wird im Kapitel 3.3 behandelt.

3.1. Schwache Formulierung

Durch die Impulsbilanz (siehe Gleichung 2.53) erhält man bei Vernachlässigung der dynamischen Effekte die Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \varrho \mathbf{b} = 0. \quad (3.1)$$

Um zur schwachen Form des Gleichgewichts zu kommen, wird die Gleichung 3.1 mit einer vektorwertigen Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ multipliziert und über das gesamte Gebiet integriert. Dies führt zur schwachen Form des Gleichgewichts,

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \varrho \mathbf{b}) \, dV = 0. \quad (3.2)$$

Dies hat allerdings zur Folge, dass das Gleichgewicht nicht mehr an jedem Punkt des Körpers erfüllt ist, sondern nur noch im gewichteten integralen Mittel, welches eine schwächere Form der Lösung darstellt. Durch Umformen

der Gleichung 3.2 und unter Verwendung der Produktregel $\operatorname{div}(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, ergibt sich für die Gleichung 3.2 folgender Ausdruck

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\sigma}) dV - \int_{\mathcal{B}} \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{b} dV = 0. \quad (3.3)$$

Wendet man nun das Divergenztheorem auf den ersten Term an, unter Berücksichtigung der hier auf dem Rand $\partial\mathcal{B}$ gültigen Spannungsrandbedingung $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ und Verschiebungsrandbedingung $\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}}$, ergibt sich für die schwache Form folgender Ausdruck

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{t} dA - \int_{\mathcal{B}} \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{b} dV = 0. \quad (3.4)$$

Der Ausdruck $\operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}$ in Gleichung 3.4 kann als Variation des Verzerrungszustandes $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ interpretiert werden. Sortiert man nun die Gleichung 3.4 so, dass der erste Term die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte, der zweite Term die virtuelle Arbeit der Volumenkräfte und der dritte Term die virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte beschreibt, erhält man den bekannten Ausdruck für die schwache Form des Gleichgewichtes in Matrizennotation

$$\int_{\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{b} dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t} dA = 0. \quad (3.5)$$

Führt man nun das Stoffgesetz ein, in der Spannungs- und Verzerrungstensor in Voigt-Notation gegeben ist, so lautet Gleichung 3.5

$$\int_{\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{b} dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t} dA = 0. \quad (3.6)$$

Der erste Term in der Gleichung 3.6 repräsentiert die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte $\delta^{int}W$, der zweite Term beschreibt die virtuelle Arbeit der Volumenkräfte und der dritte Term repräsentiert die virtuelle Arbeit der Oberflächenkräfte. Die beiden Terme der Volumenkräfte und Oberflächenkräfte lassen sich zur virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte $\delta^{ext}W$ zusammenfassen. Drückt man die schwache Form des Gleichgewichtes durch

$$\delta W = \delta^{int}W - \delta^{ext}W = 0 \quad (3.7)$$

aus, erkennt man, dass die virtuelle Arbeit der inneren und äußeren Kräfte im Gleichgewicht sein muss.

3.2. Linearisierung

Physikalische Prozesse weisen im Allgemeinen nichtlineares Verhalten auf, dadurch ergibt sich, durch die problembeschreibenden Differenzialgleichungen,

ein nichtlineares Gleichungssystem. Die am häufigsten auftretenden Nichtlinearitäten betreffen den Zusammenhang zwischen der unbekanntem Verschiebung \mathbf{u} und den inneren Kräften. Diese Nichtlinearitäten können geometrischen oder materiellen Ursprungs sein. Im Rahmen dieser Arbeit können die geometrischen Nichtlinearitäten (große Verschiebung, große Verformung, Starrkörperbewegungen und Kontaktrandbedingungen) vernachlässigt werden.

Das so entstehende nichtlineare Gleichungssystem kann linearisiert und mit Hilfe des Newton-Raphson Verfahrens iterativ gelöst werden. Das Newton-Raphson Verfahren stellt somit ein gängiges Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme dar.

Ausgangspunkt für die Linearisierung bildet das Residuum der schwachen Form, welches gegen null streben soll

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \delta^{int} W(\mathbf{u}) - \delta^{ext} W(\mathbf{u}) = 0. \quad (3.8)$$

Das Linearisieren erfolgt mittels einer Taylorreihenentwicklung des Residuums für die Verschiebungen, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird. Dadurch erhält man die linearisierte Form des Residuums (lineares Gleichungssystem)

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) \approx \mathbf{G}(\mathbf{u}_0) + \Delta\mathbf{G}(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) \approx 0. \quad (3.9)$$

Wendet man nun die Gâteaux-Ableitung auf folgenden Term an, erhält man

$$\Delta\mathbf{G}(\mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}) = \left. \frac{d\mathbf{G}(\mathbf{u}_0 + h\Delta\mathbf{u})}{dh} \right|_{h=0} = \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{u}} \Delta\mathbf{u}. \quad (3.10)$$

Setzt man voraus, dass das betrachtete System nur konservative Kräfte (äußere Lasten sind von der primären Variablen \mathbf{u} unabhängig) besitzt, ergibt sich die linearisierte schwache Form des Gleichgewichtes zu

$$\int_{\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_{\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbb{C} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{u}^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{b} dV - \int_{\partial\mathcal{B}} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} dA = 0. \quad (3.11)$$

Bildet man die Ableitung der inneren Knotenkräfte nach den Verschiebungen, erhält man die tangentielle Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_0) = \left. \frac{\partial\delta^{int}W}{\partial\mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$. Somit kann das Verschiebungskrement $\Delta\mathbf{u}$ bestimmt und der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u} \quad (3.12)$$

aktualisiert werden. Nun bildet man die euklidische Norm des Residuums für den upgedateten Verschiebungsvektor und vergleicht sie mit einer vorgegebenen Toleranz. Wird diese nicht unterschritten, muss erneut iteriert werden.

Aufgrund der Nichtbetrachtung von Termen höherer Ordnung kann es vorkommen, dass das Newton-Raphson Verfahren divergiert. In der Regel divergiert das Verfahren, wenn die Näherungslösung zu weit von der gesuchten Lösung entfernt ist. Stellt man dieses Verhalten fest, kann eine Minderung der Lastschrittweite Abhilfe schaffen. In der Abbildung 3.1 ist das Newton-Raphson Verfahren grafisch dargestellt.

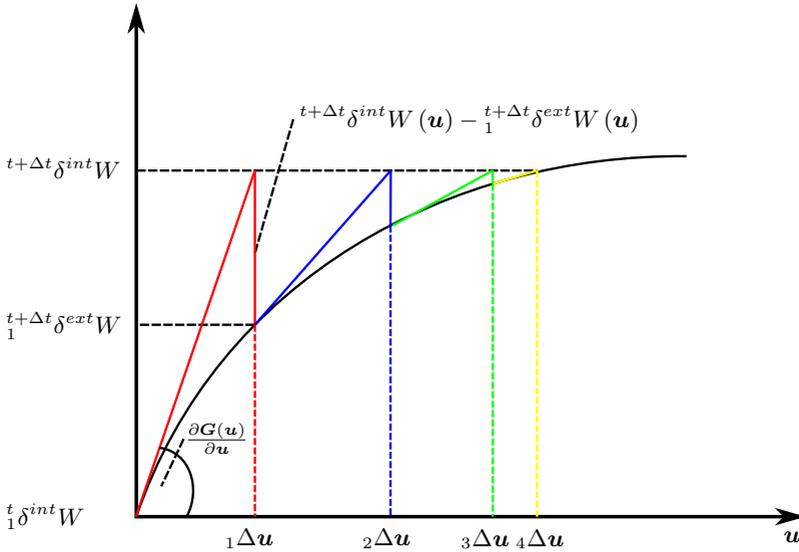


Abbildung 3.1.: Newton-Raphson Gleichgewichtssiteration

3.3. Finite Element Diskretisierung

Das zu berechnende Gebiet \mathcal{B} wird für die finite Element Diskretisierung in n_e Elemente unterteilt, siehe Abbildung 3.2. Die so entstandenen Elemente des Teilgebietes \mathcal{B}_e approximieren das Gebiet \mathcal{B} , allerdings entstehen dadurch Approximationsfehler, da

$$\mathcal{B}_h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{B}_e \neq \mathcal{B}. \quad (3.13)$$

Daraus folgt das \mathcal{B}_h eine Approximation von \mathcal{B} ist.

3.3.1. Ansatzfunktion

Für das approximierte Gebiet \mathcal{B}_e werden Ansatzfunktionen gewählt, die direkt auf dem finiten Element Ω_e definiert sind. Um die Differentialgleichung 3.6 näherungsweise auf \mathcal{B}_e lösen zu können, müssen die Ansatzfunktionen folgende Bedingungen erfüllen.

Die erforderliche Stetigkeitsanforderung kann mit C^{d-1} bestimmt werden, wobei d die höchste Ableitung in der schwachen Form beschreibt. In der Elastizitätstheorie kommen in der schwachen Form, für Zug- bzw. Druckstäbe und

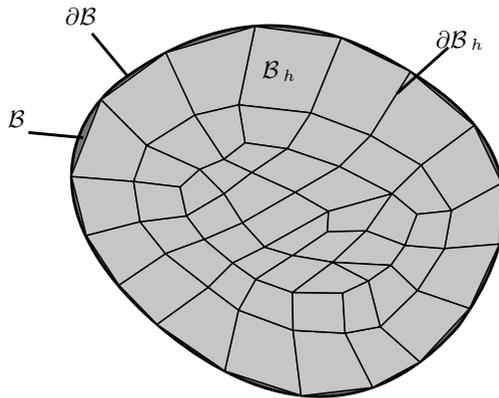


Abbildung 3.2.: Diskretisierung eines Gebiets \mathcal{B} mit finiten Elementen

bei 2D bzw. 3D Kontinuum, nur die erste Ableitung der primären Variable vor ($d = 1$). Somit genügt es, dass die Ansatzfunktionen an den Elementrändern ausschließlich in den primären Variablen stetig sein müssen, dieser Sachverhalt ist bei der C^0 -Stetigkeit erfüllt. Die Ansatzfunktionen werden so definiert, dass sie an einem Knoten genau den Wert Eins annehmen und an allen anderen Knoten den Wert Null. Des Weiteren muss die Summe der Ansatzfunktionen für alle Elemente genau den Wert Eins ergeben.

Wenn die Ansatzfunktionen alle diese Bedingungen erfüllen, kann damit das unbekannte Verschiebungsfeld \mathbf{u} , die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ und das Inkrement der Verschiebung $\Delta \mathbf{u}$ approximiert werden. Die hier dargestellten Ansatzfunktionen sind auf einem Referenzelement mit den Koordinaten (r, s, t) definiert

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} h^{\alpha}(r, s, t) \hat{\mathbf{u}}^{\alpha}, \\
 \delta \mathbf{u} &= \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} h^{\alpha}(r, s, t) \delta \hat{\mathbf{u}}^{\alpha}, \\
 \Delta \mathbf{u} &= \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} h^{\alpha}(r, s, t) \Delta \hat{\mathbf{u}}^{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Summation erfolgt über die Anzahl der Knoten n_{kno} eines Elementes und der Index α beschreibt die Knotennummer. Verwendet man für die Geometrie dieselben Ansätze wie für die Verschiebung, spricht man vom isoparametrischen Konzept. Somit ergeben sich für die Approximation der Geometrie folgende

Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} h^{\alpha}(r, s, t) \hat{\mathbf{x}}^{\alpha}, \\
 \mathbf{y} &= \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} h^{\alpha}(r, s, t) \hat{\mathbf{y}}^{\alpha}, \\
 \mathbf{z} &= \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} h^{\alpha}(r, s, t) \hat{\mathbf{z}}^{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3.2. Elementsteifigkeitsmatrix

Ausgangspunkt zur Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrix bildet der erste Term der Gleichung 3.6. Der Verzerrungstensor ist wie folgt definiert

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \tag{3.16}$$

Bildet man nun die Ableitung der Verschiebung nach den natürlichen Koordinaten, erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^{\alpha}(r, s, t)}{\partial x_j} \hat{\mathbf{u}}_i^{\alpha}, \\
 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \left(\frac{\partial h^{\alpha}(r, s, t)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \frac{\partial h^{\alpha}(r, s, t)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \frac{\partial h^{\alpha}(r, s, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_j} \right) \hat{\mathbf{u}}_i^{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Führt man nun die Matrixschreibweise für die Gleichung 3.17 ein, erhält man folgenden Ausdruck

$$\mathit{grad} \mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \mathbf{B}^{\alpha}(r, s, t) \hat{\mathbf{u}}_i^{\alpha}. \tag{3.18}$$

Die so entstandene Matrix \mathbf{B} wird Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix genannt und lautet wie folgt

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial h^1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial h^{nGP}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial h^1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial h^n}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h^1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial h^n}{\partial z} \\ \frac{\partial h^1}{\partial y} & \frac{\partial h^1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h^n}{\partial y} & \frac{\partial h^n}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial h^1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h^1}{\partial x} & \frac{\partial h^n}{\partial z} & 0 & \frac{\partial h^n}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial h^1}{\partial z} & \frac{\partial h^1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h^n}{\partial z} & \frac{\partial h^n}{\partial y} \end{array} \right] \dots \tag{3.19}$$

Mit der Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix kann die Dehnung für einen beliebigen Punkt im Element durch

$$\varepsilon = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \tag{3.20}$$

ausgedrückt werden. Um die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix bestimmen zu können, benötigt man die Ableitungen der Koordinaten (r, s, t) nach den natürlichen Koordinaten (x, y, z) (siehe Gleichung 3.17). Die gesuchten Ableitungen erhält man, indem man die Gleichungen 3.15 nach den Koordinaten (r, s, t) ableitet und in die Jacobi-Matrix zusammenfasst

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^\alpha}{\partial r} \hat{\mathbf{x}}^\alpha & \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^\alpha}{\partial r} \hat{\mathbf{y}}^\alpha & \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^\alpha}{\partial r} \hat{\mathbf{z}}^\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^\alpha}{\partial s} \hat{\mathbf{x}}^\alpha & \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^\alpha}{\partial s} \hat{\mathbf{y}}^\alpha & \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^\alpha}{\partial s} \hat{\mathbf{z}}^\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^\alpha}{\partial t} \hat{\mathbf{x}}^\alpha & \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^\alpha}{\partial t} \hat{\mathbf{y}}^\alpha & \sum_{\alpha=1}^{n_{kno}} \frac{\partial h^\alpha}{\partial t} \hat{\mathbf{z}}^\alpha \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Anschließend bildet man die Inverse der Jacobi-Matrix \mathbf{J}^{-1} und erhält die gesuchten Ableitungen der Koordinaten (r, s, t) nach den natürlichen Koordinaten (x, y, z) . Anhand der Abbildung 3.3 kann man erkennen, dass man mit Hilfe der Jacobi-Matrix vom Referenzelement auf das verzerrte Element schließen kann. Daraus folgt, dass man vom verzerrten Element mit Hilfe der Inversen der Jacobi-Matrix auf das Referenzelement schließen kann.

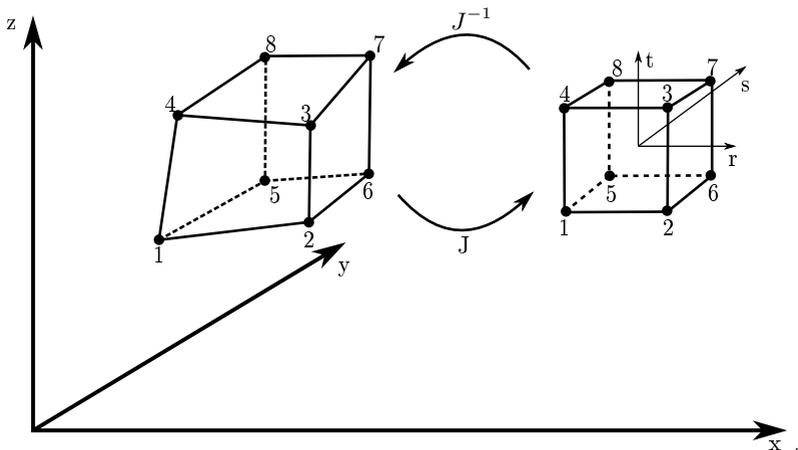


Abbildung 3.3.: Verzerrtes 8-Knoten-Brick-Element

Durch Einsetzen der Beziehung aus Gleichung 3.20 in den ersten Term der

Gleichung 3.6, erhält man die Beziehung

$$\delta \mathbf{u}^T \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} dV}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{u} \quad (3.22)$$

zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix. Ersetzt man nun das Volumenintegral durch ein Dreifach-Integral

$$\mathbf{K}^e = \iiint_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} \underbrace{dx dy dz}_{dV}, \quad (3.23)$$

wird ersichtlich, dass eine Koordinatentransformation in die Koordinaten (r, s, t) durchgeführt werden muss. Für das Volumenelement gilt

$$\underbrace{dx dy dz}_{dV} = \det \mathbf{J} \underbrace{dr ds dt}_{d\hat{V}}. \quad (3.24)$$

Damit folgt

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \underbrace{dr ds dt}_{d\hat{V}}. \quad (3.25)$$

Anmerkend sei noch erwähnt, dass in der Regel $\det \mathbf{J}$ eine Funktion der Koordinaten (r, s, t) ist. Dies macht eine numerische Integration der Elementsteifigkeitsmatrix erforderlich, da $\det \mathbf{J}$ im Nenner der Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix vorkommt und dieses zu einer gebrochenen rationalen Funktion des Integranden führt.

3.3.3. Numerische Integration der Elementsteifigkeitsmatrix

Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, ergibt sich durch die Einführung verallgemeinerter Elemente die Notwendigkeit die Elementsteifigkeitsmatrix numerisch zu integrieren. Für diese Problemstellung hat sich in der FEM das Gauß-Legendre-Verfahren durchgesetzt. Das Verfahren wird anhand eines eindimensionalen Beispiels erläutert und anschließend auf das dreidimensionale Problem in Gleichung 3.25 übertragen. Ausgangspunkt für die Erläuterung des Verfahrens ist die Gleichung

$$A = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.26)$$

Der Kurvenverlauf dieser Gleichung ist in der Abbildung 3.4 dargestellt. Der einfachste Weg, um den Flächeninhalt unter der Kurve zu bestimmen, besteht

darin das Integrationsintervall in n äquidistante Abschnitte zu unterteilen. Für ein Polynom n -ten Grades werden $n + 1$ Stützstellen benötigt, über die integriert werden muss. Die nachfolgenden Gleichungen zeigen die Integration einer Funktion 2. Grades (siehe Abbildung 3.4)

$$A = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} (f(x_0) + f(x_2)),$$

$$A = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)),$$

$$A = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)),$$

$$A = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{90} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)).$$

(3.27)

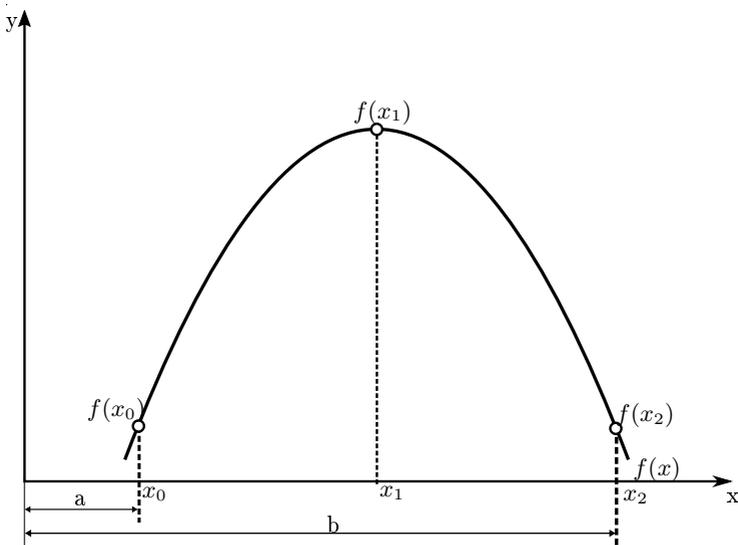


Abbildung 3.4.: Der Kurvenverlauf der zu integrierenden Funktion $f(x)$

Für einen Polynomgrad $n = 1$ ergibt sich die Trapezregel. Für einen Polynomgrad von $n = 2$ erhält man die Simpson'sche Regel. Die so entwickelten Gleichungen entsprechen der Newton-Cotes-Formel. Der Vorteil des Gauß-Legendre-Verfahrens gegenüber der Newton-Cotes-Quadratur liegt darin, dass sie in der Regel ein genaueres Ergebnis bei geringerer Anzahl an Auswertungspunkten liefert. Somit lässt sich das Integral in Gleichung 3.26 als Summe über diskrete Stützstellen, die mit Wichtungsfaktoren w_{GP} multipliziert werden,

$$A = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{n_{GP}} i w_{GP} g(r_i) \quad (3.28)$$

darstellen. Die Stützstellen und Wichtungsfaktoren sind für ein Intervall $[-1, 1]$ gegeben und können Tabellenwerken entnommen werden, Wriggers [2009]. Die Koordinatentransformation von den natürlichen Koordinaten zum Intervall $[-1, 1]$ erfolgt, wie schon beschrieben, anhand $\det J$.

Wendet man die numerische Integration auf Gleichung 3.25 an, kann man die Integrale durch Summen über die Stützstellen für die jeweilige Richtung ersetzen

$$\mathbf{K}_e = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{B}^T(r_i, s_j, t_k) \mathbb{C} \mathbf{B}(r_i, s_j, t_k) i w_{GP} j w_{GP} k w_{GP} \det(J). \quad (3.29)$$

Wenn die Elementsteifigkeitsmatrix keine gebrochene rationale Funktion ist und $\det J$ ist keine Funktion von (r, s, t) , kann das Integral exakt gelöst werden. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass zu stark verzerrte Elemente Einfluss auf die Güte der Lösung haben.

3.3.4. Numerische Differentiation

In vielen naturwissenschaftlichen und ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen werden von Funktionen die Werte der Ableitung benötigt. Allerdings findet man nicht für alle Funktionen ohne Weiteres die dazugehörige Stammfunktion, um diese auswerten zu können. Somit müssen Näherungslösungen für die benötigten Ableitungen berechnet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird sich auf den zentralen Differenzenquotient beschränkt.

Die gesuchte Ableitung erhält man, indem man die Ableitung als Grenzwert eines Differenzenquotienten definiert

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (3.30)$$

Der Differenzenquotient kann als Steigung der Sekante der Funktion $f(x)$ durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ aufgefasst werden. Voraussetzung dafür

ist, dass die Funktion f differenzierbar ist. Der vorgestellte Ausdruck wird auch Vorwärtsdifferenzenquotient genannt, da zur Bestimmung der Ableitung der erste Funktionswert von x aus in die positive Koordinatenrichtung (vorwärts) geht. Geht man in die negative Koordinatenrichtung (rückwärts), erhält man den Rückwärtsdifferenzenquotienten

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}. \quad (3.31)$$

Bildet man den Mittelwert zwischen dem Vorwärtsdifferenzenquotienten und dem Rückwärtsdifferenzenquotienten, erhält man die gesuchte Beziehung für den zentralen Differenzenquotienten

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \quad (3.32)$$

Der Vorteil des zentralen Differenzenquotienten gegenüber den anderen Verfahren liegt darin, dass man eine Differenzenformel mit der Fehlerordnung zwei erhält. Das heißt, der Fehler nimmt mit dem Quadrat der Schrittweite ab.

Um den Einfluss der Schrittweite h auf das Ergebnis zu verdeutlichen, wird für die Funktion $f(x) = 2 \cosh(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$ die Ableitung mit dem zentralen Differenzenquotienten bei verschiedenen Schrittweiten bestimmt.

h	$\ f'(x_0) - 2 \sinh(x_0)\ $	h	$\ f'(x_0) - 2 \sinh(x_0)\ $
10^0	1.270860545268484	10^{-10}	0.000001251752195
10^{-1}	0.012095580899598	10^{-11}	0.000032337996885
10^{-2}	0.000120895951321	10^{-12}	0.000476427206735
10^{-3}	0.000001208953098	10^{-13}	0.006184910941016
10^{-4}	0.000000012094930	10^{-14}	0.073751146831995
10^{-5}	0.000000000175574	10^{-15}	0.148293458093037
10^{-6}	0.000000000308802	10^{-16}	7.253720815694038
10^{-7}	0.000000005020269	10^{-17}	7.253720815694038
10^{-8}	0.000000008302408	10^{-18}	7.253720815694038
10^{-9}	0.000000363573775	10^{-19}	7.253720815694038

Tabelle 3.1.: Lösung mit 15-stelliger dezimaler Rechnung

Der Tabelle 3.1 kann man entnehmen, dass der Fehler beim Verringern der Schrittweite h zuerst abnimmt und dann stark ansteigt. Ab einer Schrittweite $h = 10^{-16}$ bleibt der Fehler konstant, was auf die Rechengenauigkeit von $eps = 2.220446049250313 \cdot 10^{-16}$ zurückzuführen ist. Der Grund dafür ist, dass der Rechner bei $h < eps$ keinen Unterschied zwischen $x_0 + h$ und $x_0 + eps$ macht. Somit ergibt sich eine Zwickmühle bei der Wahl der Schrittweite. Wählt man die Schrittweite zu klein, wird das Ergebnis durch Rundungsfehler verfälscht. Wählt man die Schrittweite zu groß, wird das Ergebnis durch Diskretisierungsfehler verfälscht. Aus dieser Zwickmühle ergibt sich ein Minimierungsproblem

für den Gesamtfehler. Wenn der Gesamtfehler minimal ist, wurde die optimale Schrittweite gefunden.

Nach Knorrenschild [2013] setzt sich der Gesamtfehler aus den Rundungsfehlern und den Diskretisierungsfehlern zusammen

$$\|rd(f'(x_0, h)) - f'(x_0)\| \approx \underbrace{\frac{2\text{eps}\|f(x_0)\|}{h} + \frac{1}{2}\|f''(x_0)\| h}_{\Delta F}. \quad (3.33)$$

Um die optimale Schrittweite zu erhalten, differenziert man ΔF nach h und setzt die Ableitung Null. Mittels der Gleichung

$$h \approx 2\sqrt{\text{eps} \frac{\|f(x_0)\|}{\|f''(x_0)\|}} \quad (3.34)$$

kann die optimale Schrittweite bestimmt werden. In der Abbildung 3.5 wurden die Rundungsfehler und die Diskretisierungsfehler über die Schrittweite aufgetragen. Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass am Schnittpunkt der beiden Linien der Gesamtfehler am geringsten ist.

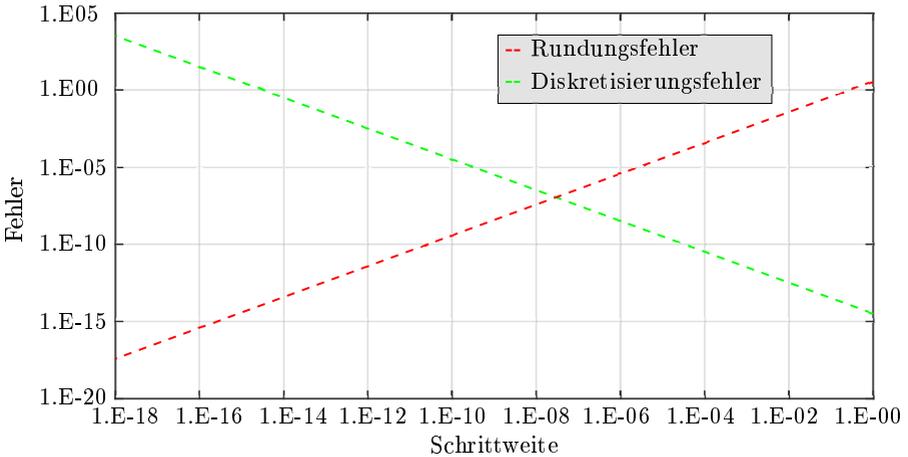


Abbildung 3.5.: Rundungs- und Diskretisierungsfehler für das Beispiel $f(x) = 2 \cosh(x)$

4. Mechanisches Verhalten von Steinsalz

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Verformungsmechanismen und das phänomenologische Verhalten von Salzgestein. Ein Einblick in die Entstehung und Zusammensetzung von Steinsalz und eine Übersicht über das mechanische Verhalten von Steinsalz sowie daraus resultierende Ansätze für die Beschreibung des Materialverhaltens von Steinsalz, die in dieser Arbeit verwendet werden, wird im Kapitel 4.1 gegeben. Das Kapitel 4.2 beschäftigt sich mit dem elastischen Verhalten von Salzgestein und mit welcher Methode sich das Verhalten beschreiben lässt. Mit dem Kapitel 4.3 wird ein Überblick gegeben, welche Prozesse der visko-plastischen Verformung von duktilen Salzgestein zu Grunde liegen. Für den interessierten Leser dieses Themengebietes wird auf die weiterführende Literatur von Bergmann [2003]; Kleber et al. [2010]; Wiese [2010] und Schulze [2013] verwiesen. Welchen Einfluss die Temperatur auf die Verformung hat, wird in Kapitel 4.4 gezeigt. Die Feuchtigkeitsabhängigkeit der Verformung wird im Kapitel 4.5 betrachtet. Im Kapitel 4.6 werden die mechanischen Eigenschaften zusammengefasst und grafisch dargestellt.

4.1. Allgemein

Steinsalz ist ein natürlich vorkommendes Mineral, das durch das Verdunsten von konzentriertem Meerwasser vor rund 250 Millionen Jahren entstanden ist. Die Bildung der Lagerstätten von Steinsalz in Nordeuropa beruht laut der "Barrentheorie" von Ochsenius [1877] darauf, dass es in der geologischen Vergangenheit der Erde in Nordeuropa große Binnenmeere gab, die mittels Barren von Ozeanen getrennt waren. Im oberen Bild der Abbildung 4.1 ist ein solches Binnenmeer exemplarisch dargestellt. Das flache Binnenmeer ist durch die Barre vom Zufluss frischen salzhaltigem Meerwasser teilweise oder vollständig getrennt. Durch das in dieser Zeit wüstenähnliche Klima in Europa, verdunstete das salzhaltige Meerwasser. Dieser Vorgang hatte zur Folge, dass die Salzkonzentration im Binnenmeer anstieg und die gelösten Salze kristallisierten und sich am Boden des Binnenmeeres anlagerten. Dieses ist im mittlerem Bild der Abbildung 4.1 dargestellt. Dieser Vorgang wiederholte sich im Laufe der Erdgeschichte und führte zu den mehreren hundert Metern dicken Steinsalzschieben und den mehrere Meter mächtigen Kaliflözen. Durch wasserundurchlässige Schichten, wie zum Beispiel Ton, wurde im Laufe der Erdgeschichte das Auflösen der Salze verhindert (siehe unteres Bild in

Abbildung 4.1). Nach Hunsche und Schulze [1994] besteht das weltweite Volumen der Salzlagerstätten zu 90% aus Steinsalz. Das Steinsalz besteht aus dem Mineral Halit (NaCl) Na 39,4% Cl 60,6% bis auf geringe Beimengungen von Kieserit, Polyhalit, Anhydrit und Ton und ist ein polykristallines Gestein, welches aus Einzelkristallen besteht, Betechtin [1977].

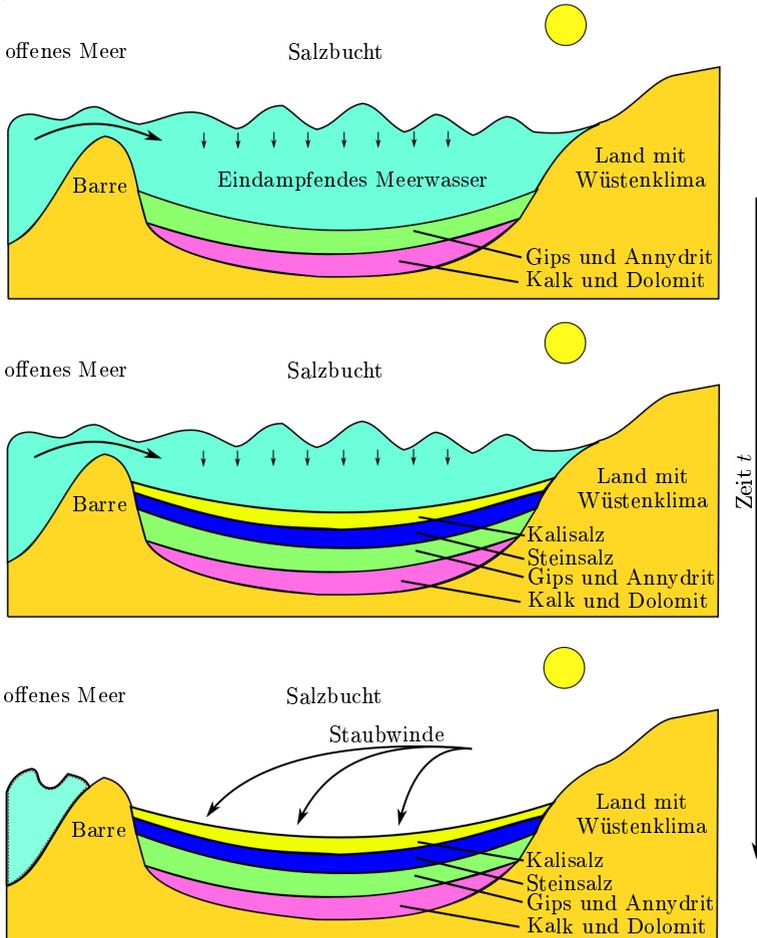


Abbildung 4.1.: Entstehung von Salzen in Binnenmeeren nach Ochsenius [1877]

Die Einzelkristalle können auch als Körner interpretiert werden, die durch Korngrenzen miteinander verbunden sind. Die Kristallstruktur von Steinsalz ist in der Abbildung 4.2 dargestellt. Natriumionen und Chloridionen bilden die Elementarzelle des Halit, diese besteht aus zwei kubisch-flächenzentrierten (kfz) Gittern. Durch den polykristallinen Aufbau von Steinsalz kann man ableiten, dass das mechanische Verhalten durch die Kristalleigenschaften und vom Korngrenzenverhalten beschrieben werden kann. Durch den kristallinen mikrostrukturellen Aufbau von Steinsalz, der dem der kfz Metallen ähnlich ist, können viele Erkenntnisse aus der Metallkunde auf das Salzgestein übertragen werden. Einige Unterschiede zwischen den kfz Metallen und dem Salzgestein existieren, die offensichtlichsten sind die Korngrößen und die Textur. Des Weiteren konnten Weidinger et al. [1998] zeigen das Gleiten beim NaCl bevorzugt in der $\{110\}$ Gleitebene erfolgt, anders als es bei kfz Metallen der Fall ist.

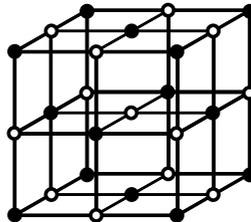


Abbildung 4.2.: Kristallstruktur von NaCl

Nach Kleber et al. [2010] entstehen plastische Verformungen durch Versetzungen. Die Versetzungen werden durch das Abgleiten von Gitterebenen und durch die Verschiebung entlang der Korngrenzen beim Überschreiten der Fließgrenze verursacht. Allerdings muss erwähnt werden, dass in vielen Arbeiten gezeigt wurde, dass anders als bei Metallen Salzgestein keine definierte Fließgrenze hat und somit keine eindeutige Fließfläche definiert werden kann, bei der plastisches Verhalten einsetzt. Die verschiedenen Modellierungsansätze zur Beschreibung des visko-plastischen Materialverhaltens werden in Kapitel 5 vorgestellt. In den Arbeiten von Urai und Spiers [2007] und Günther [2009] wurden die Ursachen erläutert, die dazuführen können, dass es beim Salzgestein keine definierte Fließgrenze gibt.

Wie schon beschrieben, ist Salzgestein ein natürliches in Jahrhunderten entstandenes Material, was sich auf die Materialeigenschaften auswirkt. Man kann davon ausgehen, dass innerhalb der Mikrostruktur Inhomogenitäten auftreten, was sich negativ auf die Materialeigenschaften auswirken. Dieser

Sachverhalt und die daraus resultierenden Probleme wurden bereits in unzähligen Arbeiten diskutiert, Hunsche [1994], Wang et al. [2014], Günther [2009] und Weidinger et al. [1998].

Ein typisches Verhalten eines Steinsalzprüfkörpers der mit einer konstanten Verschiebungsrate gestaucht wurde, ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Dieser Versuch wird Festigkeitsversuch genannt und gemessen werden dabei die Spannungen, anders als beim Kriechversuch, dort werden die Verschiebungen gemessen. Anhand des Verlaufes der Spannung in der Abbildung 4.3 oder durch verschiedene Veröffentlichung von Kriech- und Festigkeitsversuchen (Hou et al. [2007], Heemann und Schulze [2007], Hunsche und BGR [1996], Hunsche et al. [1988b] und Hunsche et al. [1988a]) zeigt sich, dass sich die Deformation des Steinsalzes gemäß

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{th} + \epsilon^v + \epsilon^{pl}, \quad (4.1)$$

aus einer elastischen, einer thermischen, einer viskosen und einer plastischen Verformung zusammensetzt. Je nach Beanspruchung und Versuchsaufbau können einzelne Dehnungsanteile verschwinden, wobei Lux [1984] gezeigt hat, dass sich aufgrund der Messtechnik die viskosen und plastischen Verformungen nicht eindeutig trennen lassen. Das führt dazu, dass man die viskosen und plastischen Dehnungsanteile zusammenfasst zu einem visko-plastischen ϵ^{vpl} Dehnungsanteil.

Anders als bei Metallen, bei denen das Kriechen erst bei hohen Temperaturen einsetzt, besitzt Salzgestein in allen Temperaturbereichen die Fähigkeit sich unter Belastung zeitabhängig plastisch zu verformen. Diese zeitabhängige Verformung lässt sich in drei Phasen einteilen und wurde bereits im Kapitel 2.3.4 behandelt. Dieses Verhalten tritt im unteren Spannungsbereich und unter schneller ablaufenden Belastungen nicht auf, da diese Verformung durch die Deformation von Kristallgittern hervorgerufen wird und eine rein elastische Deformation darstellt. Wie man den Gleichungen aus den Kapitel 4.2 entnehmen kann, ist diese Verformung zeitunabhängig und erfolgt unmittelbar mit der Belastung. Dieser Verformungsanteil ist vollständig reversibel. Dieses Materialverhalten ist in der Abbildung 4.3 mit einem grauen Bereich unterlegt. Des Weiteren kann man der Abbildung 4.3 entnehmen, dass der Anteil der irreversiblen plastischen Verformung bei steigender Belastung an der Gesamtverformung zunimmt. Die plastische Verformung kann in zwei Bereiche eingeteilt werden, der Bereich vor dem Bruch wird als duktil bezeichnet, dem schließt sich der Bereich des Bruchs und des Nachbruchs an. Die Duktilität eines Materials hängt von den viskosen Eigenschaften ab. Dem Festigkeitsversuch kann man entnehmen, dass die plastische Verformung ab einem bestimmten Spannungszustand mit einer Volumenzunahme, was in dieser Arbeit und in der Literatur mit Dilatanz bezeichnet wird, verbunden ist. Ab dem Punkt, an dem die visko-plastische Volumenzunahme $\dot{\epsilon}_{vol}^{vpl}$ größer als die elastische Volumenkompression

(siehe Kapitel 4.2) $\dot{\epsilon}_{vol}^{el}$ ist, überwiegt im duktilen Bereich das visko-plastische Materialverhalten. Der duktile Bereich ist auch dadurch gekennzeichnet, dass die Spannung im Laufe der Verformung noch ansteigt, bevor es in den Bruch- bzw. Nachbruchbereich übergeht (siehe Abbildung 4.3). Das so eintretende Versagen wird nach Flügge [1958] als Duktilbruch bezeichnet. Tritt der Bruch ohne nennenswerte visko-plastische Verformung und direkt nach der elastischen Verformung ein, spricht Flügge [1958] von einem Sprödbbruch.

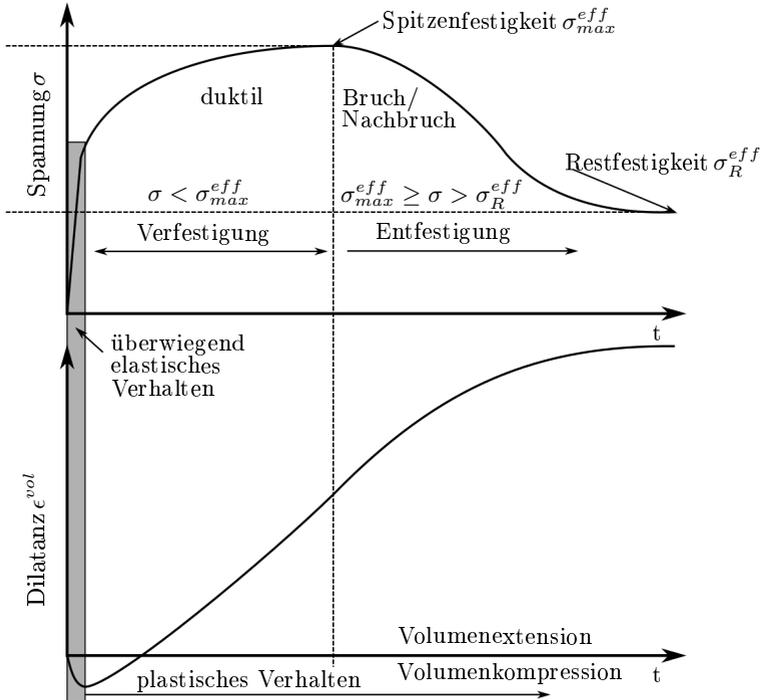


Abbildung 4.3.: Charakteristisches Spannungs-, Verformungs- und Dilatanzverhalten von Steinsalz im Festigkeitsversuch nach Günther [2009]

4.1.1. Materialtests für Salzgestein

Im Laufe der letzten Jahrzehnte wurden zahlreiche Festigkeits- und Kriechversuche an Steinsalz durchgeführt. In den Veröffentlichungen von Hou et al. [2007], Heemann und Schulze [2007], Hunsche und BGR [1996], Hunsche et al.

[1988b], Hunsche et al. [1988a], Günther et al. [2007], Liang et al. [2012] und Hunsche und Hampel [1999] sind zahlreiche Laborversuche beschrieben. Aus diesen Experimenten kann man die natürliche Streuung des Materialverhaltens abschätzen. Die beiden Kriechversuche in der Abbildung 4.4 verdeutlichen diese Streuung, was auf das natürliche Wachsen der Steinsalzsichten zurückzuführen ist. Anhand der Versuchszeit kann man ableiten, dass die Festigkeits- und Kriechversuche sehr kosten- und zeitintensiv sind.

In Abbildung 4.4 sind uniaxiale Kriechversuche dargestellt, die jeweils mit einer Axialspannung von 11 MPa und 14 MPa und einer konstanten Temperatur von 30°C und 22°C durchgeführt wurden. Der Salzsteinprüfkörper war eine zylindrische Probe mit einem Durchmesser von 100 mm und einer Höhe von 250 mm, eine Schemazeichnung des Prüfkörpers ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Der Unterschied zwischen den einzelnen Kriechkurven liegt glegendlich darin, dass die gemessenen Kurven mit unterschiedlichen Proben erstellt wurden.

Aus den gesamten Versuchen leitete die Projektgruppe Günther et al. [2007], Hampel [2006], Heemann und Schulze [2007], Hou et al. [2007], Pudewills [2007] und Rokahr et al. [2007] zur „Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz und deren Vergleich der aktuellen Stoffgesetze und Vorgehensweise für die Beschreibung des Materialverhaltens von Salzgestein“ ab, dass für die Bestimmung der Materialparameter Masterkurven gewählt werden müssen. Als „Masterkurven“ für die Nachrechnung von uniaxialen Kriechversuchen wurden die Kurven 04141 und N2/4-95015 (siehe Abbildung 4.4) gewählt. Durch diese Annahme gehen viele Informationen verloren, die durch die Experimente gewonnen wurden und die Berechnungsergebnisse beinhalten ein unbekanntes Risiko. Durch die Homogenisierung der Materialparameter auf der Makroebene ergeben sich große Unsicherheiten bezüglich der Entwicklung der Schädigung, dieser Sachverhalt wird im Kapitel 9.1 untersucht und wurde bereits in der Arbeit von Jablonski [2014] untersucht.

Dieser Sachverhalt dient als Motivation für diese Arbeit, das Materialverhalten von Steinsalz mit Hilfe der stochastischen Finiten Element Methode (SFEM) abzubilden. Dass die Anwendung der SFEM bei Metall- und Betonkonstruktionen im Ingenieurwesen anwendbar ist, zeigten die Arbeiten von Jablonski [2014] und Fink [2015]. Die Arbeit von Grehn et al. [2016] zeigt, dass die Anwendung der SFEM zur Beschreibung des Materialverhaltens für das primäre und sekundäre Kriechen anwendbar ist. Aufgrund der Versuchszeiten wurden nicht für alle Versuche mehrere Versuchsreihen durchgeführt und die Anzahl der Mehrfachversuche ist beschränkt (siehe Abbildung 4.4), was die Bestimmung der stochastischen Parameter erschwert. Dieser Sachverhalt wird im Kapitel 9.1 behandelt.

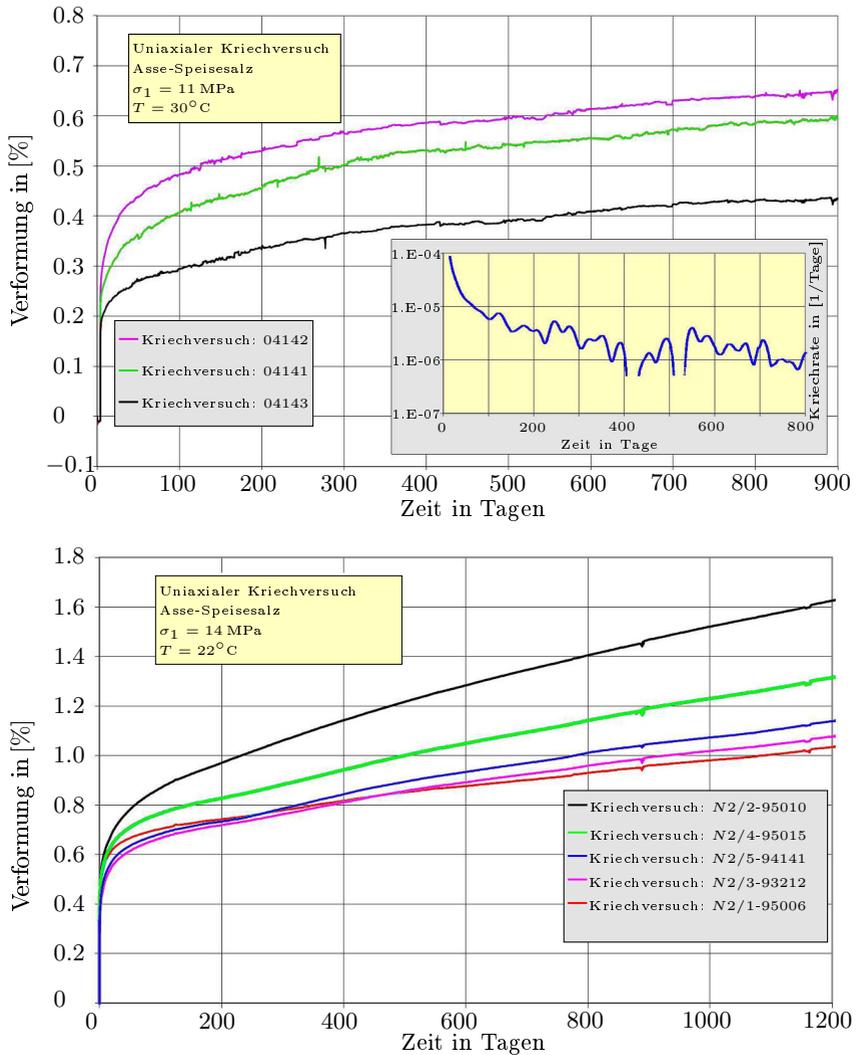


Abbildung 4.4.: Uniaxialer Kriechversuch an Asse-Speisesalz: Die gemessene Verformung der Prüfkörper weist die natürliche Bandbreite des Kriechverhaltens von Steinsalz auf, nach Hunsche und BGR [1996].

4.2. Elastisches Verhalten

Das linear elastische Materialverhalten von Salzgestein kann mittels des Hooke'schen Gesetzes beschrieben werden. Für den elastischen Bereich gilt ebenfalls eine direkte Proportionalität zwischen der Normalspannung σ_{yy} und der Dehnung in y Richtung $\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta y}{y_0}$ der Steinsalzprobe, sowie zwischen der Schubspannung τ_{xy} und dem Verzerrungswinkel $\gamma_{xy} = \frac{\Delta x}{y_0}$. Dieses Verhalten ist in der Abbildung 4.5 dargestellt. Der Elastizitätsmodul E stellt den linearen Zusammenhang zwischen der Normalspannung σ_{yy} und der Dehnung ε_{yy} dar. Der lineare Zusammenhang zwischen der Schubspannung τ_{xy} und der Verzerrung γ_{xy} ergibt sich durch den Gleitmodul G .

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= E \frac{\Delta y}{y_0} = E \varepsilon_{yy} \\ \tau_{xy} &= G \frac{\Delta x}{y_0} = G \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{4.2}$$

Quer zur Belastung entsteht eine Querdehnung ε_{xx} , mit Hilfe der Querkontraktionszahl (auch Poissonzahl)

$$\nu = \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{yy}}\tag{4.3}$$

kann das Verhältnis zwischen Querdehnung und Stauchung beschrieben werden. Eine rein elastische Verformung hat eine Volumenänderung zur Folge. Der lineare Zusammenhang zwischen der Oktaedernormalspannung σ_{okt} und der Volumenverformung ε^{vol} ist durch den Kompressionsmodul κ gegeben.

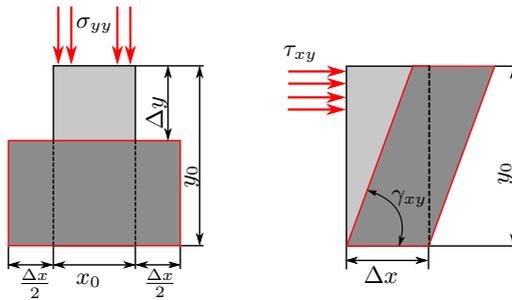


Abbildung 4.5.: Elastische Verformung einer Steinsalzprobe

Die Oktaedernormalspannung

$$\sigma_{okt} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \kappa \frac{\Delta V}{V_0} = \kappa \varepsilon^{vol}\tag{4.4}$$

entspricht dem allseitigen räumlichen Druck. Mit den vorgestellten Materialparametern kann ein isotropes Materialverhalten beschrieben werden. Allerdings benötigt man zur Beschreibung des Materialverhaltens nur zwei der vier gezeigten Materialparameter, da diese ineinander umgerechnet werden können, dieses ist in Schmidt et al. [2013] gezeigt.

Für NaCl-Gitter beschrieb Rosenthal [1974] die physikalischen Grundmechanismen der elastischen Verformung anhand der atomaren Wechselwirkungen zwischen den Atomen.

4.3. Visko-Plastisches Verhalten

4.3.1. Versetzungen als Träger der visko-plastischen Verformung

Wie beschrieben, gibt es bei Steinsalz eine große Streuung des Materialverhaltens, das darauf beruht, dass in realen Gitterverbund Fehler bzw. Defekte auftreten. Unter Defekten des Gitterverbundes wird im Allgemeinen eine Störung der Gittersymmetrie verstanden, die sich je nach Ausdehnungsrichtung kategorisieren lässt, Bergmann [2003], Kleber et al. [2010] und Schulze [2013]. Diese Gitterfehler haben Einfluss auf die Mikrostruktur des Salzgesteins, was sich auf das makroskopische Verhalten des Salzgesteins auswirkt.

- **Nulldimensionale Gitterfehler**

Die nulldimensionalen Gitterfehler beschreiben punktuelle Fehler im Gitter. Eine schematische Darstellung der Gitterfehler kann der Abbildung 4.6 entnommen werden. Der mit 1 gekennzeichnete Gitterfehler wird als Leerstelle bezeichnet, da ein Atom im Gitterverbund fehlt. Befindet sich ein weiteres Atom im Gitterverbund, wird dieser Fehler als Zwischengitteratom 2 bezeichnet. Ist dieses ein Fremdatom, wird der Gitterfehler als eingelagertes Fremdatom 4 bezeichnet. Ersetzt ein Fremdatom ein Atom aus den Gitterverbund, spricht man vom substituierten Fremdatom 3.

- **Eindimensionale Gitterfehler**

Die eindimensionalen Gitterfehler beschreiben eine linienförmige Störung des Gitters, die die Gittersymmetrie beeinträchtigt. Diese werden als Versetzungen bezeichnet, da sich diese nur in einer Raumrichtung ausbreiten. Der sogenannte Burgersvektors b beschreibt den Betrag, um welche sich die Gleitebenen gegeneinander verschieben. Bei einer Stufenversetzung steht der Burgersvektor senkrecht auf der Versetzungslinie. Eine Stufenversetzung kann man sich am einfachsten so vorstellen, dass aus einem perfekten Gitterverbund Atome raus geschnitten werden. Dieser Sach-

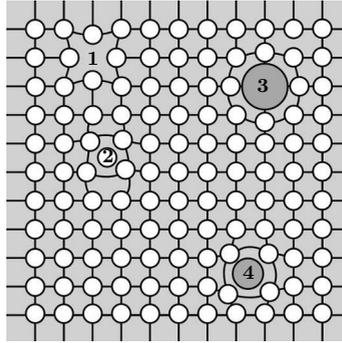


Abbildung 4.6.: Nulldimensionale Gitterfehler nach Bergmann [2003]

verhält ist in der Abbildung 4.7 dargestellt. Die roten Vektoren in der Abbildung 4.7 beschreiben den Burgersumlauf an einem perfekten Gitterverbund und an einer Stufenversetzung. Durch diesen Umlauf ergibt sich der Burgersvektor, der in einigen Materialmodellen zur Beschreibung des Materialverhaltens von Salzgestein zum Einsatz kommt. Steht der Burgersvektor parallel zur Versetzungslinie, spricht man von einer Schraubenversetzung.

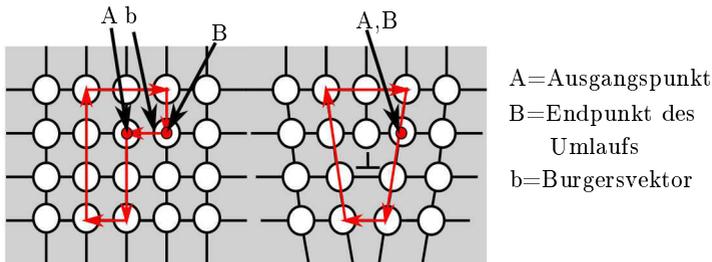


Abbildung 4.7.: Verdeutlichen eines eindimensionalen Gitterfehlers an einer Stufenversetzung und der Definition des Burgersvektor b nach Bergmann [2003]

- **Zweidimensionale Gitterfehler**

Anders als bei den eindimensionalen Gitterfehlern breiten sich die zweidimensionalen Gitterfehler in zwei Raumrichtungen aus. Als zweidimen-

sionale Gitterfehler werden Korn-, Zwillings- und Phasengrenzen sowie Stapelfehler bezeichnet. Für das Composite-Dilatanz-Modell von Hampel [2006] und Heemann und Schulze [2007] sind die Subkorn Grenzen ein entscheidendes Kriterium. Von Subkorn Grenzen spricht man nach Elliger [2005], wenn der Winkel zwischen den gekippten Gitterebenen kleiner als 15° ist.

• Dreidimensionale Gitterfehler

Bei einem dreidimensionalen Gitterfehler handelt es sich um einen räumlichen Defekt des Gitterverbundes. Poren und Mikrorisse können als dreidimensionale Gitterfehler betrachtet werden.

Die Bewegung und Erzeugung von Versetzungen hat einen maßgeblichen Einfluss auf die duktile plastische Verformung bei Polykristallen. Da Salzgestein einen polykristallinen Aufbau hat, können die Erkenntnisse aus der Metallkunde auf das Salzgestein übertragen werden, dieses zeigte z.B. Fokker [1998]. Der Unterschied zwischen der theoretisch abgeleiteten Fließgrenze (siehe Frenkel [1926]) und der gemessenen Fließgrenze, wurde in den Arbeiten von Orowan [1934a,b,c] und Taylor [1934] erläutert. Die plastische Verformung soll anhand einer Stufenversetzung erläutert werden. Die Bewegung einer Stufenversetzung oberhalb der Fließgrenze ist in der Abbildung 4.8 dargestellt. Liegt der Spannungszustand oberhalb der Fließgrenze, verhält sich das Material überwiegend duktil und die Versetzungen wandern durch das Kristallgitter und deformieren diesen bis die Versetzungen auf Hindernisse stoßen oder aufgelöst werden. Diese Hindernisse werden als Versetzungshindernisse bezeichnet und können durch folgende Gitterfehler verursacht werden: Hindernisversetzung, Korn- und Zwillingsgrenzen, gelöste Fremdatome im Gitter und ausgeschiedene Fremdatome als Teilchen, Bergmann [2003]. Eine ausführliche Darstellung der Thematik „Versetzungen als Träger der visko-plastischen Verformung“, kann den Arbeiten von Günther [2009] und Elliger [2005] entnommen werden.

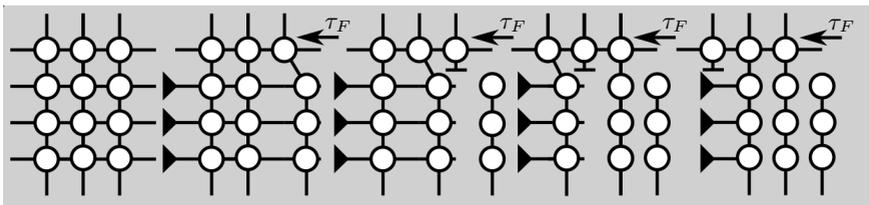


Abbildung 4.8.: Versetzungsmechanismus nach Günther [2009]

4.3.2. Verfestigung durch Verformung

Anhand der Festigkeitsversuche (siehe Abbildung 4.3) von Steinsalz ist ersichtlich, dass beim Erreichen des inelastischen Bereiches die Prüfspannung weiter ansteigt bis die Spitzenfestigkeit σ_{max}^{eff} erreicht wird. Bei Kriechversuchen wird die Verfestigung dadurch sichtbar, dass die Verformungsrate kontinuierlich abnimmt bis sie konstant wird (siehe Abschnitt 2.3.4).

Dieser Effekt wird dadurch verursacht, dass neue Versetzungen entstehen und die Versetzungsdichte erhöht wird, was eine Bewegungsverminderung und eine Bewegungsblockierung zur Folge hat. Dieses bewirkt, dass die Prüfspannung im inelastischen Bereich ansteigt. Für den interessierten Leser dieser Thematik wird auf Rösler et al. [2013], Bergmann [2003] und Gottstein [2007] verwiesen.

4.3.3. Verfestigung durch Korngrenzen

Die Verfestigung durch Korngrenzen beruht darauf, dass an einer Korngrenze die Gleitebene des Korns endet, sodass die Versetzungen hier auf ein nicht zu überwindendes Hindernis treffen. Somit stellen bei einem polykristallinen Werkstoff Korngrenzen ein zusätzliches effektives Versetzungshindernis dar, dadurch lässt sich ableiten, dass ein feinkörniger Werkstoff sich positiv auf die Festigkeit auswirkt (siehe Rösler et al. [2013], Bergmann [2003] und Gottstein [2007]).

4.3.4. Verfestigung durch Mischkristallbildung

Durch die natürliche Entstehung von Salzgestein besteht die Kristallstruktur nicht nur aus NaCl, sondern beinhaltet auch die Einlagerung von Fremdatomen. Diese Verunreinigungen haben einen indirekten Einfluss auf den Verfestigungsprozess, da diese die Versetzungsbewegungen behindern. Zwischen den Fremdatomen und den Versetzungen bestehen anziehend bzw. abstoßend wirkende Beziehungen (siehe Bergmann [2003]). Somit wird eine größere Kraft für die Aufrechterhaltung des Versetzungsgleitens benötigt.

Eine ausführliche Darstellung des Themengebietes der Verformungsverfestigung für Salzgestein kann den Arbeiten von Gyulai [1963] Heemann [1989] und Günther [2009] entnommen werden.

4.3.5. Versetzungserholung

Die Verfestigung eines Materials bei plastischen Deformationen ist durch die sogenannte Erholung begrenzt. Die Versetzungsreaktionen, die dem Verfestigungsprozess entgegenwirken, werden nach Blum [1978] als Erholung bezeichnet. Die Erholung bewirkt, dass die Versetzungen, die im Laufe der plastischen Verformung entstanden sind, was einen Anstieg der inneren Energie zur Folge hat,

abgebaut oder energetisch günstiger angeordnet werden (siehe Hahn [2003]). Nach Blum [1978] bilden sich durch die Umstrukturierung der Versetzungen netzwerkartige Strukturen aus, aus denen sich Subkörner ergeben. Durch das Gleiten der Versetzungen im Subkorninneren nimmt die Versetzungsdichte in Subkorninneren ab. Da die Versetzungen die Subkornnernen nicht überwinden können, steigt die Versetzungsdichte an den Subkornnernen an. Die Erhöhung der Versetzungsdichte bewirkt, dass die Wahrscheinlichkeit zunimmt, dass die Versetzungen durch Annihilation vernichtet werden (siehe Fokker [1998]). Die Abbildung 4.9 zeigt eine Vernichtung von unterschiedlich orientierten Versetzungen, die sich auf einer Gleitebene befinden. Die Versetzungen bewegen sich durch das Kristallgitter, treffen diese beiden Versetzungen aufeinander, vereinigen sie sich und die Versetzungen werden vernichtet.

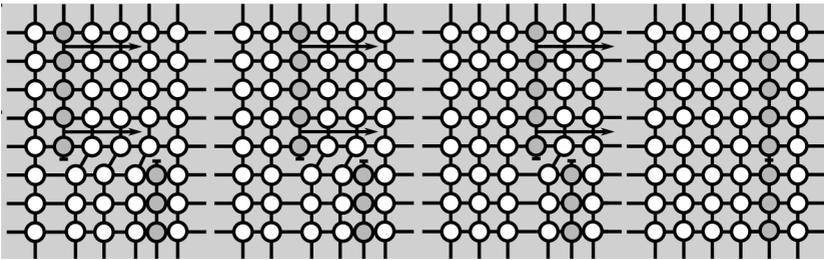


Abbildung 4.9.: Vernichtung von Versetzungen einer Gleitebene durch Annihilation nach Fokker [1998]

In der Abbildung 4.10 ist ein Erholungsmechanismus dargestellt, der auf Versetzungsklettern und Quergleiten beruht. Die Gleitung der Versetzung erfolgt in der Ebene in der ihr Burgersvektor b (siehe Abbildung 4.7) liegt. Somit ist für eine Stufenversetzung, deren Burgersvektor senkrecht zur Versetzungslinie liegt, die Gleitebene festgelegt. In der Abbildung 4.10a ist zu erkennen, dass die Versetzung nicht auf derselben Gleitebene liegt. Stufenversetzungen sind in der Lage ihre ursprüngliche Gleitebene durch das sogenannte Klettern in einer parallelen gelegenen Gleitebene fortzusetzen. Dieser Mechanismus beruht auf der sogenannte Leerstellendiffusion, was in der Abbildung 4.10b dargestellt ist, siehe auch Bergmann [2003]. Der Prozess des Versetzungskletterns ist ein thermisch aktivierter Prozess und tritt daher erst bei höheren Temperaturen in den Vordergrund. Anders als bei einer Stufenversetzung, liegt der Burgersvektor bei einer Schraubenversetzung parallel zur Versetzung. Dieses ist der Grund dafür, dass sich eine Schraubenversetzung auf jeder Gleitebene bewegen kann, die durch die Versetzungslinie geht. Dies ermöglicht einer Schraubenversetzung Gleithindernisse durch das sogenannte Quergleiten zu überwinden. Durch diese beiden Mechanismen können sich Versetzungen vereinigen und sich dadurch gegenseitig auslöschen, was die Abbildung 4.10c verdeutlicht.

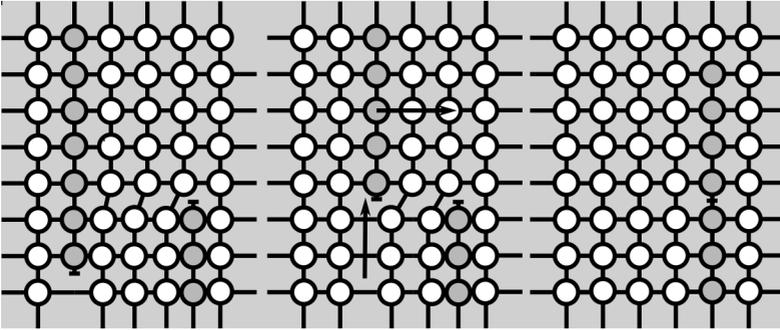


Abbildung 4.10.: Versetzungsklettern und Annihilation nach Günther [2009]

Aus den beiden Kapiteln 4.3.4 und 4.3.5 kann man schlussfolgern, dass sich die Gesamtverformung aus allen Versetzungsreaktionen zusammensetzt. Was das für die Modellierung des Materialverhaltens von Salzgestein bedeutet, wurde in den Arbeiten von Blum [1978], Salzer [1993] und Günther [2009] erläutert.

4.3.6. Schädigung und Dilatanz

Die Materialschädigung von Salzgestein beruht darauf, dass bereits durch den Entstehungsprozess vorhandene Mikrorisse sich weiterentwickeln oder sich durch die visko-plastische Verformung entwickeln, da durch die Versetzungen des Kristallgitters in den Bereichen in denen Versetzungen aufgestaut werden, sich Mikrorisse bilden (siehe Kleber et al. [2010]). Dieses Materialverhalten lässt sich aus der Metallkunde auf das Salzgestein übertragen. Dieser Prozess der Mikrorissentstehung im Bereich der aufgestauten Versetzungen ist in der Abbildung 4.11 dargestellt. Daraus lässt sich ableiten, dass die Schädigungsentwicklung mit dem Vorgang der Verfestigung verbunden ist. Durch die Bruchtheorien ist bekannt, dass sich aus den Mikrorissen das Materialversagen auf der makroskopischen Ebene ergibt, da die Mikrorisse weiterlaufen und sich zu Bruchflächen verbinden. Eine ausführliche Beschreibung dieses Vorganges kann z.B Bergmann [2003], Gross und Seelig [2016] und Rossmannith [2013] entnommen werden. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Beweglichkeit der Versetzung eine entscheidende Rolle bei der Rissbildung spielt. Die Spannungsspitzen an den Risspitzen bei beweglichen Versetzungen können sich leichter durch Verformung abbauen, was eine Verhinderung der Rissausbreitung zur Folge hat. Wird hingegen durch die steigende Versetzungsdichte, was auf die visko-plastische Verformung zurückzuführen ist, die Beweglichkeit der Versetzung eingeschränkt, können die Spannungsspitzen an den Risspitzen nicht mehr

durch Verformung umgelagert werden und beim Überschreiten eines kritischen Spannungszustandes an der Rissspitze beginnt der Riss sich auszubreiten.

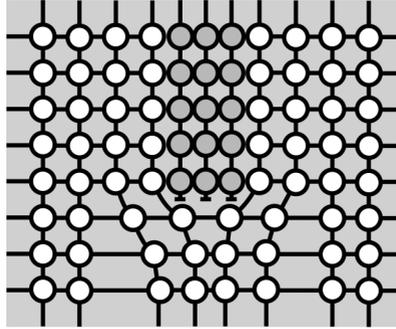


Abbildung 4.11.: Mikrorissentstehung im Bereich aufgestauter Versetzungen nach Günther [2009]

Die Mikrorissbildung bewirkt bei Salzgestein eine Volumenzunahme. Dieser Effekt benötigt spezielle Ansätze für die Modellierung des Materialverhaltens von Salzgestein, die in Kapitel 5 vorgestellt werden. Die Volumenzunahme bei der Rissbildung wird in der Literatur mit Dilatanz oder auch mit Volumendilatanz bezeichnet.

Die Dilatanz eines duktilen Salzgesteins ist an die visko-plastische Verfestigung und an den Spannungszustand gekoppelt. Liegt der Spannungszustand unterhalb der Dilatanzgrenze (siehe Hampel [2006]) läuft die Verformung volumentreu ab. Dieser Effekt ist in der Abbildung 4.12 anhand der Festigkeitsversuche, bei einer Temperatur von $T = 30^\circ\text{C}$ und einer Stauchungsrate von $\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = 1.0\text{E-}05 \frac{1}{s}$, dargestellt. Daraus lässt sich ableiten, dass die Dilatanz und die Festigkeit sich gegenseitig beeinflussen. Vergleicht man die Spannungs-Verformungs-Kurve mit der Volumen-Verformungs-Kurve wird ersichtlich, dass bei steigender Dilatanz die Steigung der Spannungs-Verformungs-Kurve abnimmt, was auf die steigende Verformbarkeit des Salzgesteines zurückzuführen ist. Die Steigung der Spannungs-Verformungs-Kurve flacht immer mehr ab, da bei wachsender Verformung die Entfestigung immer mehr zunimmt und der Verfestigung entgegenwirkt. Die Punkte in der Abbildung 4.12 geben die Spitzenfestigkeit σ_{max}^{eff} bei dem jeweiligen Versuch an und markieren den Punkt an dem die Entfestigung gleich der Verfestigung ist und der Anstieg der Spannungs-Verformungs-Kurve gleich Null ist, was der idealen Plastizität entspricht. Nach Erreichen dieses Punktes wird die Steigung der Spannungs-Verformungs-Kurve negativ und das Material beginnt sich zu entfestigen, was durch den exponentiellen Anstieg der Volumenzunahme zu erklären ist.

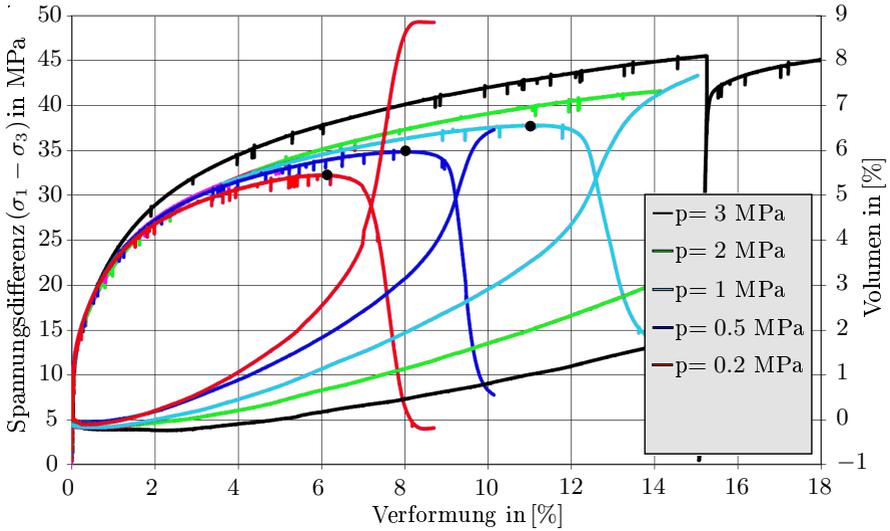


Abbildung 4.12.: Festigkeitsversuche zur Ermittlung der Festigkeits- und Dilatanzentwicklung an Asse-Speisesalz in Abhängigkeit unterschiedlicher Manteldrücke nach Heemann und Schulze [2007]

Vergleicht man die Dilatanzzunahme von Steinsalz mit der von Metallen wird deutlich, dass Steinsalz ein ausgeprägteres Dilatanzverhalten hat als Metalle. In der Literatur wird dieses dadurch erklärt, dass Steinsalz eine geringere Zugfestigkeit als Metall aufweist, wodurch die Rissbildung begünstigt wird (siehe Weidinger et al. [1998]). Dadurch lassen sich zwei maßgebliche Effekte für die Volumendilatanz identifizieren. Der erste ist die Mikrorissbildung in den Bereichen mit Versetzungsanstauungen und der zweite ist das lokale Zugversagen des Materials.

Anhand von Kriech- und Festigkeitsversuchen, die am Salzgestein durchgeführt wurden sind, konnte man ableiten, dass das Festigkeitsverhalten von Salzgestein stark von der Belastungsgeschwindigkeit abhängt. Die Abbildung 4.13 zeigt eine Kriechversuchsserie mit Asse-Speisesalz (z2SP) von der 800m Sohle der Schachanlage Asse II und verdeutlicht die Abhängigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit. Es ist ersichtlich, dass bei steigender Belastungsgeschwindigkeit die Differenzspannung ansteigt, somit muss bei Salzgestein zwischen der Kurzzeitfestigkeit und der Langzeitfestigkeit unterschieden werden. Bei großen Belastungsgeschwindigkeiten spricht man von der Kurzzeitfestigkeit, die durch eine große Spitzenfestigkeit σ_{max}^{eff} und geringe Verformung im Vorbruchbereich charakterisiert ist. Wohingegen man bei geringeren Belastungsgeschwindigkeiten von der Langzeitfestigkeit spricht, die durch eine geringere

Spitzenfestigkeit σ_{max}^{eff} und einer größeren Verformung im Vorbruchbereich charakterisiert ist.

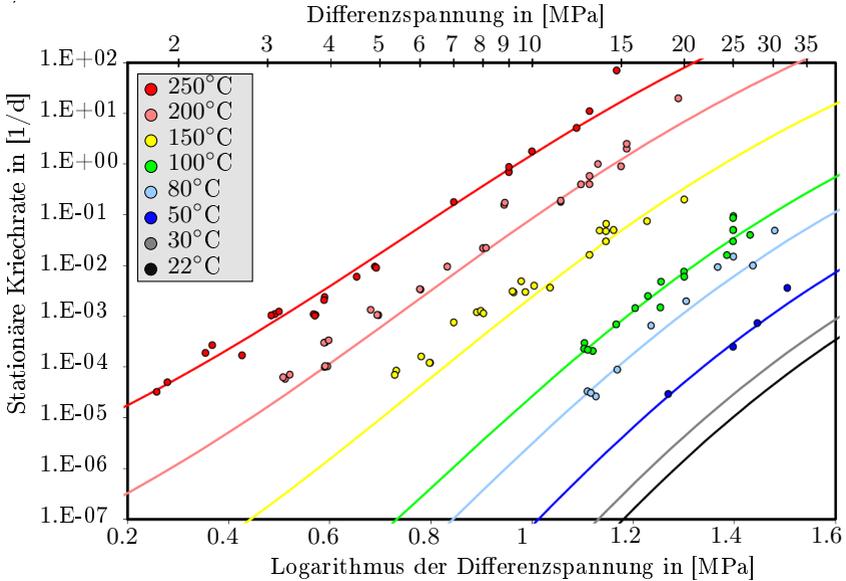


Abbildung 4.13.: Kriechversuchserie mit Asse-Speisesalz (z2SP) von der 800m Sohle der Schachanlage Asse II. Die gemessenen stationären Kriechraten werden durch die Punkte repräsentiert und wurden doppelt-logarithmisch über der Differenzspannung aufgetragen. Die Linien entsprechen den stationären Kriechen nach Hampel [2006].

Nach Günther [2009] und nach Auswertung der zahlreichen Festigkeits- und Kriechversuche kann dieses Verhalten von Salzgestein durch die Verformungsmechanismen auf mikrostruktureller Ebene erklärt werden. Wie bereits an der Abbildung 4.11 erläutert wurde, wird die Schädigung durch Spannungsspitzen an den angestauten Versetzungen verursacht. Durch die Auswertung von Festigkeitsversuchen, die mittels hohen Verformungsraten durchgeführt wurden, konnte ermittelt werden, dass bei diesen Versuchen die Erholung eine untergeordnete Rolle spielt und das Spannungs-Verformungs-Verhalten wird nahezu vollständig durch die Mikrorissbildung und die Verformungsverfestigung beschrieben. Wie bereits im Kapitel 2.3.5 erwähnt, entwickeln sich makroskopische Brüche durch die Mikrorisse, die mit Fortschreiten der Vorverformung weiter anwachsen und sich verbinden. Anhand dieser Versuche und den beteiligten Verformungsmechanismen kann die Aussage über die Kurzzeitfestigkeit

bestätigt werden. Die Aussage über die Langzeitfestigkeit kann durch die Auswertung von Festigkeitsversuchen mit geringer Verformungsrate bestätigt werden, da die Erholung aufgrund der Versuchszeit immer mehr an Bedeutung gewinnt. Die Verformung wird nicht durch blockierte Versetzungen behindert, da sie durch das Versetzungsklettern und Annihilation abgebaut werden. Durch die Annihilation werden die Spannungsspitzen abgebaut und die Entstehung von Mikrorissen wird vermindert, was dem makroskopischen Bruch entgegenwirkt.

Abschließend kann man sagen, dass die Festigkeit von Salzgestein vom wirkenden Spannungszustand, sowie vom Deformationzustand und von der Schädigung des Materials abhängt. Georgi et al. [1975] und Menzel und Schreiner [1977] beschrieben in ihren Arbeiten für den Spannungszustand und den Deformationzustand ein Konzept der spezifischen Formänderungsarbeit.

4.4. Temperaturabhängigkeit der Verformung

Wie bereits erwähnt, erkennt man an den Kriechversuchen aus der Abbildung 4.13 die Temperaturabhängigkeit des Materials. Die Abhängigkeit der Verformung von der Temperatur ergibt sich durch die Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten und der Kriechrate.

Die Temperaturabhängigkeit der elastischen Konstanten kann mittels der Potenzialkurve (siehe Abbildung 4.14) erklärt werden. Geht man von der Energie der Atome beim absoluten Nullpunkt $0K$ aus und betrachtet diese anschließend nach der Erhöhung der Temperatur, stellt man fest, dass sich die Energie um den temperaturabhängigen Betrag ΔE_{pot} erhöht hat. Die Energiezunahme bewirkt eine Verschiebung des Mittelpunktes der Schwingung zu einem größeren Atomabstandes hin. Dieses Verhalten ist in der Abbildung 4.13 durch die Punkte gekennzeichnet. Auf der makroskopischen Ebene wird das durch die thermische Verformung sichtbar, da sich auf der mikroskopischen Ebene die Atomabstände zwischen den Atomen vergrößern. Durch das Betrachten der Wechselwirkungskraftkurve, die in Wiese [2010] dargestellt ist, wird deutlich, dass eine Temperaturerhöhung eine Verminderung des Elastizitätsmoduls zur Folge hat. Für die Beschreibung der Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls für Metalle bei niedrigen Temperaturen $T < 0.5 \cdot T_s$ schlägt Wiese [2010] den folgenden Ansatz vor

$$E(T) = E(0K) \cdot \left(1 - 0.5 \cdot \frac{T}{T_s}\right), \quad (4.5)$$

wobei $E(0K)$ der Elastizitätsmodul bei $0K$ ist und T_s die Schmelztemperatur angibt. Anhand der Abbildung 4.14 wird deutlich, dass dieser Ansatz nur für geringe Temperaturen anwendbar ist. Bei höheren Temperaturen steigt der Grad der nichtlinearen Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Temperatur an. Daher werden nichtlineare Ansätze zur Beschreibung der Temperaturabhängigkeit benötigt, Wiese [2010] gibt an, dass im Allgemeinen ein quadratischer

Ansatz $T < 0.8 \cdot T_s$ für die Temperaturabhängigkeit ausreichend ist. Für Steinsalz geben Ashby und Frost [1982] für die Temperaturabhängigkeit folgenden Ausdruck an

$$G(T) = 15000 \text{ MPa} \cdot \left(1 - 0.73 \cdot \frac{T[K] - 300 \text{ K}}{1070 \text{ K}} \right). \quad (4.6)$$

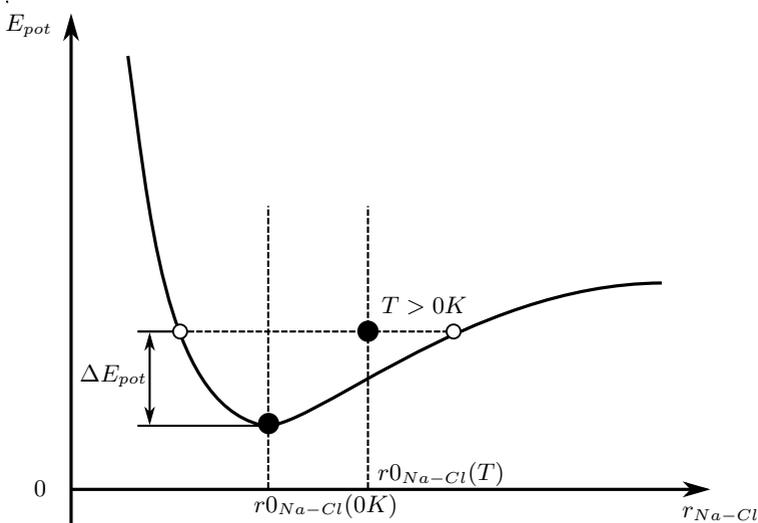


Abbildung 4.14.: Verdeutlichung der Temperaturabhängigkeit der Verformung anhand der Potenzialkurve für zwei unterschiedliche Temperaturen nach Wiese [2010].

Die Temperaturabhängigkeit der Kriechrate beruht darauf, dass die kinetische Energie der Moleküle durch die Erhöhung der Temperatur ansteigt, dieses Verhalten kann den Boltzmann-Kurven in Abbildung 4.15 entnommen werden. Durch die Erhöhung der kinetischen Energie, wird der Anteil von Molekülen größer, die die Aktivierungsenergiebarriere überwinden können und somit wird die Bewegungsfähigkeit des Stoffes erhöht. Dieser Zusammenhang wurde in der Chemie bereits in vielen Veröffentlichungen besprochen und kann der Grundlagenliteratur Vollhardt et al. [2011], Czeslik et al. [2010] und Kurzweil und Scheipers [2005] entnommen werden. Dadurch konnte eine Faustformel abgeleitet werden, dass bei einer Erhöhung der Temperatur von 10°C die Reaktionsgeschwindigkeit sich verdoppelt oder sogar verdreifacht. Der schwedische Physiker, Chemiker und Nobelpreisträger Svante August Arrhenius konnte eine Gesetzmäßigkeit anhand von experimentellen Daten ableiten. Die Arrhenius-

Gleichung (siehe Gleichung 5.8) gibt diesen Zusammenhang zwischen der Reaktionsgeschwindigkeit und der Temperatur an.

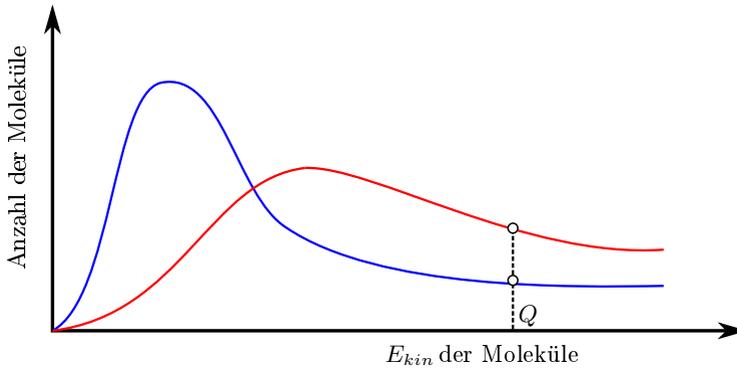


Abbildung 4.15.: Verdeutlichung der Temperaturabhängigkeit der Kriechrate anhand der kinetischen Energie der Moleküle bei einer tiefen (Blau) und bei einer hohen Temperatur (Rot) nach Vollhardt et al. [2011].

4.5. Feuchteabhängigkeit der Verformung

Der Einfluss der Feuchtigkeit auf die Verformung wurde in zahlreichen Laborversuchen unter kontrollierten Bedingungen untersucht, dieses kann den Arbeiten von Hunsche und Schulze [1996] und Hunsche und Schulze [2002] entnommen werden. Die Erhöhung der Verformung von dilatanten Steinsalz ergibt sich dadurch, dass sich die Feuchtigkeit in den Poren, Mikrorissen und Korngrenzen ausbreiten kann. Durch die Laborversuche ist bekannt, dass dieser Effekt einen enormen Einfluss auf die Kriechrate haben kann.

Der Einfluss der Feuchtigkeit hängt stark vom Spannungszustand ab, was dazu führen kann, dass der Einfluss der Feuchte auf die Verformung verschwindet. Bei den Laborversuchen konnte beobachtet werden, dass bei uniaxialen Versuchen der Einfluss der Feuchtigkeit am größten ist. Diese beruht darauf, dass bei triaxialen Versuchen der Manteldruck, oder allgemein gesprochen, die minimale Hauptspannung die Ausbreitung der Feuchtigkeit im Material verhindert und somit bei steigendem Manteldruck der Einfluss der Feuchte abnimmt. In den verschiedenen Materialmodellen wird dieser Effekt unterschiedlich berücksichtigt (siehe Kapitel 5).

4.6. Zusammenfassung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz

Wie die vorherigen Kapitel gezeigt haben, wird das Materialverhalten von Steinsalz durch viele Faktoren beeinflusst, was sich positiv sowie negativ auf das Verhalten von Salzgestein auswirken kann. Dieses Verhalten von Salzgestein lässt sich in einem Differenzspannungs-Manteldruck-Diagramm darstellen und kann der Abbildung 4.16 entnommen werden. Diese Zusammenfassung des Materialverhaltens von Steinsalz wurde durch die BGR vorgenommen. Die rote Linie im Differenzspannungs-Manteldruck-Diagramm beschreibt die Dilatanzgrenze, welche eine wichtige Größe darstellt, da ab diesem Punkt eine Volumenänderung aufgrund der Auflockerung des Steinsalzes stattfindet. Die Auflockerung des Steinsalzes wird in den unterschiedlichen Materialmodellen mit verschiedenen Ansätzen beschrieben. Die Identifizierung dieser Grenze ist ein wesentlicher Bestandteil bei der Entwicklung eines Materialmodells und wurde in zahlreichen Veröffentlichungen, wie z.B. Hunsche und Hampel [1999], Hauck [2001], Hunsche et al. [2003], Eberth [2007], Hou et al. [2007] und Günther [2009], diskutiert.

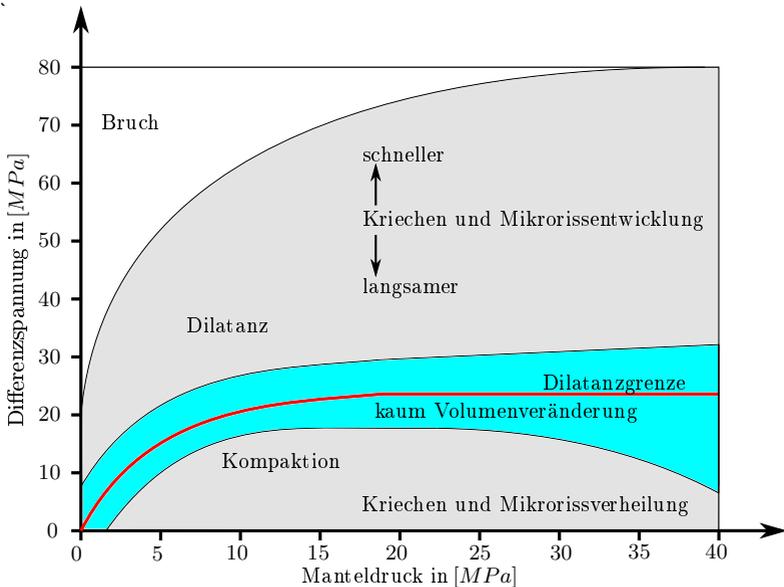


Abbildung 4.16.: Schematische Darstellung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz nach BGR

Unterhalb der Dilatanzgrenze, im grau unterlegten Bereich, wird das Salzgestein verdichtet und es erfolgt eine Mikrorissverheilung. Im türkisen Bereich, unterhalb und oberhalb der Dilatanzgrenze, findet kaum eine Volumenveränderung des Materials statt. Eine Auflockerung des Steinsalzes erfolgt beim Überschreiten des türkisen Bereiches. Anhand dieses Bereiches ist ersichtlich, dass die Verformung und die Mikrorissentwicklung bei höheren Spannungszuständen schneller abläuft. Überschreitet dieser Spannungszustand eine Grenze, tritt der sogenannte Sprödbbruch ein, was durch den weißen Bereich gekennzeichnet ist.

Anhand dieser Zusammenstellung wird erneut ersichtlich, dass eine stochastische Herangehensweise bei der Beschreibung des Materialverhaltens von Salzgestein von Vorteil ist. Das Diagramm wurde anhand von gemittelten Materialversuchen an Salzgestein erstellt, dadurch erhält dieses Diagramm einige Unsicherheiten, die nicht so einfach beurteilt werden können. Wie schon erwähnt, ergeben sich aus dem heutigen Stand der Technik bei der Beschreibung des Materialverhaltens von Steinsalz mit deterministischen Ansätzen Unsicherheiten über die Aussagen der Standsicherheit einer Konstruktion aus Salzgestein. Durch die Erweiterung um einen stochastischen Ansatz zur Beschreibung des Materialverhaltens von Salzgestein ergeben sich neue Möglichkeiten für die Beurteilung von Versagenswahrscheinlichkeiten von Konstruktionen aus Salzgestein. Da ein stochastischer Ansatz zur Beschreibung des Materialverhaltens in den Ingenieurwissenschaften noch relativ neu ist, ergibt sich ein neuer Forschungsbereich für das Gebiet der Salzmechanik.

Die Vorstellung der stochastischen Ansätze zur Beschreibung des Materialverhaltens erfolgt in Kapitel 8, die Ergebnisdarstellung wird im Kapitel 9 gegeben und die Zusammenfassung, ob die stochastischen Ansätze eine zulässige Erweiterung für das Forschungsgebiet der Salzmechanik darstellt, kann dem Kapitel 10 entnommen werden.

5. Materialmodelle für Steinsalz

In diesem Kapitel werden verschiedene Materialmodelle aus Deutschland vorgestellt, die zur Beschreibung des Verformungsverhaltens von Steinsalz eingesetzt werden.

Im Kapitel 5.1 werden Modellansätze beschrieben, die sich weitestgehend auf die vorgestellten Materialmodelle übertragen lassen. Das Kapitel 5.2 beschreibt das Composite-Dilatanz-Modell (CDM) von Hampel [2006] und der Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (BGR), Heemann und Schulze [2007], Hunsche et al. [2003] und Hunsche und BGR [1996]. Im Kapitel 5.3 wird das Materialmodell von Institut für Gebirgsmechanik GmbH (IfG) vorgestellt. Eine detaillierte Darstellung des Materialmodells kann der folgenden Literatur entnommen werden, Günther et al. [2007], Minkley [2003] und Günther [2009]. Das Materialmodell von Hou und Lux basiert auf einen additiven Split des Dehnungstensors und wird im Kapitel 5.4 vorgestellt. In Hou et al. [2007], Hou [1998] und Hou [2002] wird eine ausführliche Darstellung über das Materialmodell gegeben. Das Materialmodell Multimechanism Deformation Coupled Fracture (MDCF) wurde seit 1992 durch verschiedene Forschungsarbeiten entwickelt und am Institut für Unterirdisches Bauen (IUB) modifiziert. Einen Überblick über das IUB-MDCF Materialmodell gibt das Kapitel 5.5 und eine detaillierte Darstellung des Materialmodells kann den Arbeiten von Rokahr et al. [2007], Chan et al. [1992], Chan et al. [1996b], Chan et al. [1995], Chan et al. [1996a] und Chan et al. [1997] entnommen werden. Das Kapitel 5.6 stellt das Materialmodell, das am Institut für Nukleare Entsorgung am Forschungszentrum Karlsruhe (INE/FZK) entwickelt worden ist, dar und kann Pudewills und Droste [2003], Pudewills [2005], Pudewills [2006] und Pudewills [2007] entnommen werden. Im Kapitel 5.7 wird eine Zusammenfassung der Materialmodelle und ein Ausblick der eigenen Forschung gegeben. Das daraus resultierende Materialmodell für diese Arbeit wird im Kapitel 5.8 vorgestellt und erläutert.

5.1. Allgemein

Wie im vorherigen Kapitel beschrieben, kann die gesamte Kriechrate $\dot{\epsilon}^{cr}$ mittels einem primären und einem sekundären Anteil ($\dot{\epsilon}^{cr,p}$, $\dot{\epsilon}^{cr,s}$), die schädigungsfrei sind und einem schädigungsinduzierten Anteil $\dot{\epsilon}^{cr,D}$, beschrieben werden. Somit

ergibt sich für die gesamte Kriechrate $\dot{\epsilon}^{cr}$ folgender Ausdruck

$$\dot{\epsilon}^{cr} = f \left(\dot{\epsilon}^{cr,p}, \dot{\epsilon}^{cr,s}, \dot{\epsilon}^{cr,D} \right). \quad (5.1)$$

Wie sich die gesamte Kriechrate $\dot{\epsilon}^{cr}$ bei den verschiedenen Materialmodellen zusammensetzt, wird in den nachfolgenden Kapiteln gezeigt. Im einfachsten Fall erfolgt die Zusammensetzung additiv.

Die nachfolgenden Modellierungsansätze lassen sich weitestgehend auf die gezeigten Materialmodelle für Steinsalz übertragen. Zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens wird das Hooke'sche Gesetz verwendet, was einen linearen Zusammenhang zwischen der Spannung und der Verformung beschreibt,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\kappa}{3} \text{tr} \left(\boldsymbol{\epsilon}^{el} \right) \mathbf{1} + 2 \mu \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^{el}. \quad (5.2)$$

Für die elastischen Konstanten, wurde in der Projektgruppe Hampel [2006], Günther et al. [2007], Heemann und Schulze [2007], Hou et al. [2007], Pudewills [2007] und Rokahr et al. [2007] für die Querkontraktionszahl der Wert $\nu = 0.265$ festgelegt und der temperaturabhängige Gleitmodul $\mu = G(T)$ ist durch die folgende Beziehung

$$G(T) = 15000 \text{ MPa} \left(1 - 0.73 \frac{T[\text{K}] - 300 \text{ K}}{1070 \text{ K}} \right) \quad (5.3)$$

gegeben. Im Allgemeinen werden die Kriechraten eindimensional formuliert (siehe z.B. Gleichung 5.9 und Gleichung 5.24). Die tensorielle Darstellung der Kriechraten erhält man durch Nutzung folgender Beziehung (Hampel [2006], Heemann [2010])

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \dot{\epsilon}^{cr,vol} \frac{\partial \sigma^{vol}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dot{\epsilon}^{cr} \frac{\partial \sigma^{vM}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (5.4)$$

was der dreidimensionalen Darstellung bei der Fließtheorie nach von Mises entspricht. Auf diesen Sachverhalt wird in Kapitel 2.3.4 näher eingegangen. Die Spannung σ^{vol} in Gleichung 5.4 entspricht dem volumetrischen Anteil des Spannungstensors (siehe Gleichung 2.30). Die Spannung σ^{vM} entspricht der Vergleichsspannung nach von Mises und ist wie folgt definiert

$$\sigma^{vM} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}. \quad (5.5)$$

Die Vergleichsdehnung nach von Mises ϵ^{vM} kann durch

$$\epsilon^{vM} = \sqrt{\frac{2}{3} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}}, \quad (5.6)$$

bestimmt werden. Bildet man nun die Ableitung aus Gleichung 5.4 mit den bekannten Beziehungen, erhält man für die Gleichung folgenden Ausdruck (siehe Kapitel 2.3.4)

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}^{cr,vol} \mathbf{1} + \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}^{cr} \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_{vM}}. \quad (5.7)$$

Da die Verformung von Steinsalz stark von der Temperatur abhängt, was bereits im vorherigen Kapitel diskutiert wurde, wird häufig zur Beschreibung der Temperaturabhängigkeit der Kriechrate die Arrhenius-Gleichung verwendet. Diese wird in der Regel multiplikativ mit der Kriechrate verknüpft, Czeslik et al. [2010] und Kurzweil und Scheipers [2005],

$$k = A_{Arr} \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right). \quad (5.8)$$

Der präexponentielle Faktor A_{Arr} und die Aktivierungsenergie Q sind selbst von der Temperatur abhängig. Da in den meisten Fällen ein Temperaturbereich von 22°C bis 200°C für die Betrachtung des Verformungsverhaltens ausreicht, kann ein gemittelter Wert für den präexponentiellen Faktor A_{Arr} und der Aktivierungsenergie als ausreichend erachtet werden. Bei höheren Temperaturen müsste gegebenenfalls überprüft werden, ob die Arrhenius-Gleichung modifiziert werden muss, Czeslik et al. [2010] und Kurzweil und Scheipers [2005].

Bei der Bestimmung der Aktivierungsenergie muss das zugrundegelegte Materialmodell, welches die innerkristallinen Verformungsmechanismen beschreibt, berücksichtigt werden. Aus diesem Grund findet man für Steinsalz unterschiedliche Angaben für die Aktivierungsenergie, Hunsche [1994], Günther [2009] und Hunsche und Hampel [1999].

5.2. Composite-Dilatanz-Modell

Das Composite-Dilatanz-Modell (CDM) ist ein Verbundmodell, welches von vielen Autoren im Rahmen einer Kooperation entwickelt und weiterentwickelt wurde. Partner dieser Kooperation ist die Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (BGR) in Hannover, Dr. Andreas Hampel, sowie das Institut für Werkstoffwissenschaften der Universität Erlangen-Nürnberg.

Bei dem CDM bilden sechs Differentialgleichungen das grundlegende Gleichungssystem zur Beschreibung des Verformungsverhalten von Steinsalz. In den Gleichungen 5.9, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15 und 5.16 sind die Differentialgleichungen dargestellt Hampel [2006],

$$\frac{d\varepsilon^{cr}}{dt} = \frac{b}{M} \frac{1}{r^2} v_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \sinh\left(\frac{b \Delta a \sigma^*}{M k_B T}\right), \quad (5.9)$$

mit der allgemeinen Gaskonstante R , der Boltzmann-Konstante k_B und dem Taylorfaktor M . Die makroskopischen Größen in der Gleichung werden durch die Kriechverformung ε^{cr} , der Zeit t und der Temperatur T ausgedrückt. Der Einfluss der Mikrostruktur auf die Verformung wird mittel des mittleren Durchmesseres der Subkörner der Fraktion w_1 , w_2 und w_3 , dem mittleren Versetzungsabstandes r und der mittleren Breite der subkornwandnahen Bereiche der mit lokal überhöhter Spannung a beschrieben. Wie die Mikrostrukturgrößen w_1 , w_2 , w_3 und a mit der Gleichung 5.9 verknüpft sind kann Hunsche und BGR [1996] und Hampel [2006] entnommen werden. Die Versetzungsbewegung wird durch den Betrag des Burgersvektors b , der Geschwindigkeitskonstante v_0 , der makroskopischen Aktivierungsenergie Q , der Aktivierungsfläche der Verformung Δa , der effektiven inneren Spannung σ^* und der Ratenkonstanten $k_{w,1}$, $k_{w,2}$, $k_{w,3}$, k_r und k_a , welche die jeweilige verformungsabhängige Evolution der Mikrostrukturgrößen w_1 , w_2 , w_3 , r und a beschreiben, ausgedrückt. Wie die Größen Δa und σ^* bestimmt werden ist in Hampel [2006] dargestellt. Die Gleichung 5.9 entspricht der Orowan-Gleichung und beschreibt die Abhängigkeit der Kriechrate von der Differenzspannung, der Temperatur und der Kriechverformung. Die Differenzspannung $\Delta\sigma$, die der Vergleichsspannung nach von Mises entspricht (siehe Gleichung 5.5), wird in der Gleichung 5.9 durch die effektive innere Spannung σ^* ausgedrückt. Die Orowan Gleichung verknüpft die Scherverformungsrate $\dot{\gamma}$ mit der Versetzungsgeschwindigkeit v und der Versetzungsdichte ρ , Hampel [2006], Heemann und Schulze [2007] und Gottstein [2013]

$$\dot{\gamma} = b \rho v. \quad (5.10)$$

Somit kann der folgende Ausdruck aus der Gleichung 5.9

$$\rho = \frac{1}{M} \frac{1}{r^2} \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \sinh\left(\frac{b \Delta a \sigma^*}{M k_B T}\right), \quad (5.11)$$

als die Versetzungsdichte interpretiert werden. Die Entwicklung der Mikrostruktur hängt hauptsächlich von der Kriechverformung ab, welches durch die folgenden Gleichungen

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{w_{ss} - w_1}{k_{w,1}} \frac{d\varepsilon_{cr}}{dt}, \quad (5.12)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{w_{ss} - w_2}{k_{w,2}} \frac{d\varepsilon_{cr}}{dt}, \quad (5.13)$$

$$\frac{dw_3}{dt} = \frac{w_{ss} - w_3}{k_{w,3}} \frac{d\varepsilon_{cr}}{dt}, \quad (5.14)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r_{ss} - r}{k_r} \frac{d\varepsilon_{cr}}{dt}, \quad (5.15)$$

und

$$\frac{da}{dt} = \frac{a_{ss} - a}{k_a} \frac{d\varepsilon_{cr}}{dt}. \quad (5.16)$$

widergespiegelt wird. Der Index SS beschreibt den Wert der Mikrostrukturgrößen w_1 , w_2 , w_3 , r und a nach Erreichen des stationären Kriechens. Wie die Startwerte der Mikrostrukturgrößen und die Werte der Mikrostrukturgrößen beim Erreichen des stationären Kriechens bestimmt werden, ist in Hunsche und BGR [1996] und Hampel [2006] erläutert. Durch diesen Sachverhalt, wird deutlich, dass die beiden Phänomene sich gegenseitig beeinflussen (Hampel [2006]). Im CDM ergibt sich die totale Kriechverformungsrate $\dot{\varepsilon}^{cr,ges}$ durch eine multiplikative Verknüpfung mit verschiedenen Einflussfaktoren. Die totale Kriechverformung ist in der nachfolgenden Gleichung dargestellt, Hampel [2006],

$$\dot{\varepsilon}^{cr,ges} = P_F \delta^{dam} F_h \dot{\varepsilon}^{cr}. \quad (5.17)$$

Die Funktion F_h in Gleichung 5.17 beschreibt den Einfluss der Feuchtigkeit auf die Verformung des Steinsalzes und setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Die Funktion f_Φ beschreibt den Einfluss unterschiedlicher relativer Feuchten Φ , die zweite Funktion f_c beschreibt den Einfluss der minimalen Hauptspannung σ_3 und der Oktaederschubspannung τ_{okt} , Hunsche et al. [2003],

$$\begin{aligned} f_\Phi &= c_{\Phi 1} \sinh(c_{\Phi 2} \Phi) \\ f_c &= \left[1 + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_u} \right)^{c_{fc1}} \tau_{okt} \right]^{- \left(\frac{c_{fc2}}{1 + \left(\frac{\tau_{okt}}{\sigma_u} \right)} \right)^2} \quad \text{für } \sigma_3 \geq 0 \\ f_c &= 1 \quad \text{sonst,} \end{aligned} \quad (5.18)$$

mit der Normierungsgröße für die Spannung σ_u und den Konstanten $c_{\Phi 1}$, $c_{\Phi 2}$, c_{fc1} und c_{fc2} (siehe Hampel [2002]). Damit ergibt sich für die Funktion F_h folgender Ausdruck, Hampel [2006],

$$F_h = 1 + f_\Phi f_c. \quad (5.19)$$

Die Schädigung des Steinsalzes wird im CDM mittels des Faktors δ^{dam} und des Faktors P_F beschrieben. Nähere Informationen zu diesen beiden Faktoren können Hampel [2006] und Hunsche et al. [2003] entnommen werden.

Aus zahlreichen Kriechversuchen fürASSE Steinsalz kann man ableiten, dass für die transiente Verformung und bei der stationären Verformung oberhalb der Dilatanzgrenze, die Kriechrate $\dot{\varepsilon}^{cr}$ und die volumetrische Kriechrate $\dot{\varepsilon}^{cr,vol}$ in einem konstanten Verhältnis r_v zueinander stehen. Daraus lässt sich ableiten, dass die Auflockerung von Steinsalz mit den Kriechprozess physikalisch gekoppelt ist. Im CDM wird daher die volumetrische Kriechrate $\dot{\varepsilon}^{cr,vol}$ in Abhängigkeit der Kriechrate $\dot{\varepsilon}^{cr}$ formuliert, Hampel [2006],

$$\dot{\varepsilon}^{cr,vol} = \sqrt{\frac{3}{2}} r_v F_h \dot{\varepsilon}^{cr}. \quad (5.20)$$

Das Verhältnis der volumetrischen zur Kriechverformungsrate ist wie folgt definiert Hampel [2006]

$$r_v = 3 \left[\frac{\tau_{okt} - \tau_D}{\sigma_{okt}} \right]^2 \quad \text{für } \tau_{okt} > \tau_D \quad (5.21)$$

$$r_v = 0 \quad \text{sonst,}$$

mit der Oktaedernormalspannung σ_{okt} und der Oktaederschubspannung der BGR-Dilatanzgrenze τ_D nach Hunsche et al. [2003].

5.3. Stoffmodell von Günther/Minkley

Das Materialmodell vom IfG beruht auf der Dehnungs-Verfestigungs-Theorie von Odqvist und Hult [2013]. Daraus folgt für das schädigungsfreie Kriechen, dass die Dehnungsgeschwindigkeit

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{cr} \quad (5.22)$$

sich additiv aus einem elastischen Anteil $\dot{\epsilon}^{el}$ und einem Kriechanteil $\dot{\epsilon}^{cr}$ zusammensetzt. Die elastische Dehnungsgeschwindigkeit ergibt sich durch das Hooke'sche Gesetz zu

$$\dot{\epsilon}^{el} = -\frac{1}{9\kappa} \dot{\sigma}^{vol} + \frac{1}{2\mu} \dot{\tilde{\sigma}}, \quad (5.23)$$

mit den Materialparametern κ und μ . Die Kriechdehnungsgeschwindigkeit, Günther et al. [2007],

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \frac{3 A_p (\sigma^{vM})^{n_p}}{2 (\varepsilon^{vM,V,0} + \varepsilon^{vM,cr})^{\mu^{cr}}} \frac{\tilde{\sigma}}{(\sigma^{vM})^{n_p}}, \quad (5.24)$$

mit dem Materialparametern A_p , n_p und μ^{cr} und den effektiven Verformungen $\varepsilon^{vM,V,0}$ und $\varepsilon^{vM,cr}$ (siehe Gleichung 5.6). Die Bestimmung der Materialparameter dieses Materialmodells erfolgt in Salzer [1993], Salzer et al. [1998], Minkley [2003], Günther et al. [2007] und Günther [2009]. Wie bereits im Kapitel 4.3 erläutert, wird beim Beginn der Belastung die Verformung dominiert durch das Wandern der Versetzungen die bereits im Salzgestein vorhanden sind. Daher wurde die von Odqvist und Hult [2013] vorgeschlagene Formulierung für die Kriechdehnungsgeschwindigkeit mit der Anfangsverfestigung $\varepsilon^{vM,V,0}$ erweitert. Beim Fortschreiten der Deformationen werden neue Versetzungen erzeugt, was dazu führt, dass die Verfestigung immer weiter anwächst. Anhand der Abbildung 4.4 wird deutlich, dass bei fortschreitender Verformung die Kriechrate kleiner wird, was drauf zurückzuführen ist, dass die Versetzungsdichte zunimmt (siehe Kapitel 4.3.2). Dadurch, dass die gesamte akkumulierte effektive Kriechdehnung $\varepsilon^{vM,cr}$ in die Gleichung 5.24 eingeht, wird der Effekt der Verfestigung in der Kriechrate mit berücksichtigt. Der in

Kapitel 4.3.5 beschriebene Effekt der Versetzungserholung wird durch folgende Beziehung in der effektiven Kriechdehnungsgeschwindigkeit berücksichtigt, Günther et al. [2007],

$$\dot{\epsilon}^{vM,cr} = \dot{\epsilon}^{vM,V} + \dot{\epsilon}^{vM,E} \quad (5.25)$$

Stellt man die Gleichung 5.25 nach der effektiven Verfestigungsrate um, erhält man,

$$\dot{\epsilon}^{vM,V} = \dot{\epsilon}^{vM,cr} - \dot{\epsilon}^{vM,E}. \quad (5.26)$$

Günther et al. [2007] gibt für die effektive Erholungsrate die folgende Beziehung an,

$$\dot{\epsilon}^{vM,E} = \frac{\epsilon^{vM,V}}{t_0}, \quad (5.27)$$

mit der Erholungszeit

$$t_0 = t_c \cdot \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right). \quad (5.28)$$

Der Term $\exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$ (siehe Gleichung 5.8) berücksichtigt die Temperaturabhängigkeit der Erholungszeit und wie die Zeitkonstante t_c bestimmt wird ist in Günther et al. [2007] und Günther [2009] dargestellt. Durch Einsetzen der gesamten akkumulierten effektiven Kriechdehnung $\epsilon^{vM,cr}$ und der Gleichung 5.27 in die Gleichung 5.26 kann diese durch

$$\dot{\epsilon}^{vM,V} = \frac{A_p (\sigma^{vM})^{n_p}}{(\epsilon^{vM,V,0} + \epsilon^{vM,cr})^{\mu_{cr}}} - \frac{\epsilon^{vM,V}}{t_0} \quad (5.29)$$

ausgedrückt werden. Wie die Dilatanz und die Schädigung in diesem Materialmodell berücksichtigt werden und weitere Informationen über das Modell kann Salzer [1993], Salzer et al. [1998], Minkley [2003] und Günther et al. [2007] entnommen werden.

5.4. Stoffmodell von Hou/Lux

Das Materialmodell von Hou und Lux wurde in Anlehnung an das Materialmodell „Lubby2“ nach Heusermann et al. [1983] und Lux [1984] unter Anwendung der Schädigungsmechanik entwickelt und durch die Arbeiten von Hou [1998], Hou [2002] und Hou und Lux [2003] erweitert. Das Materialmodell ist phänomenologisch-makroskopisch motiviert und beinhaltet verschiedene Deformationsmechanismen, wie zum Beispiel Diffusion, Dislokation, Verfestigung und Erholung. In den nachfolgenden Gleichungen wird die elastische, die viskoplastische-volumentreue und die schädigungsinduzierte-dilatante Dehnrate vorgestellt. Da in diesem Kapitel nur auf bestimmte Verformungsmechanismen

eingegangen wird, wird für eine vollständige Betrachtung auf Hou [1998], Hou [2002] und Hou et al. [2007] verwiesen.

Das Stoffmodell von Hou/Lux beruht ebenfalls auf einer additiven Verknüpfung der totalen Verzerrungsrate

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{vp} + \dot{\epsilon}^d + \dot{\epsilon}^h, \quad (5.30)$$

mit der elastischen Dehnrate $\dot{\epsilon}^{el}$, der visko-plastischen-volumentreuen Dehnrate $\dot{\epsilon}^{vp}$, der schädigungsinduzierten-dilatanten Dehnrate $\dot{\epsilon}^d$ und der verheilungsinduzierten-kontraktanten Dehnrate $\dot{\epsilon}^h$. Die elastische Dehnrate ergibt sich durch das Hooke'sche Gesetz zu

$$\dot{\epsilon}^{el} = -\frac{1}{9\kappa} \frac{\dot{\sigma}^{vol}}{(1-D)} + \frac{1}{2\mu} \frac{\dot{\sigma}}{(1-D)}, \quad (5.31)$$

mit der Schädigungsvariablen D . Die Schädigungsentwicklung erfolgt über eine modifizierte Potenzfunktion die in Hou et al. [2007] dargestellt ist und basiert auf den Arbeiten von Lippmann und Lemaitre [1996] und Kachanov [2013]. Die visko-plastisch-volumentreue Dehnrate ist nach Hou et al. [2007] definiert,

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{\eta_k} \left(1 - \frac{\epsilon^{tr}}{\max \epsilon^{tr}} \right) + \frac{1}{\eta_m} \right] \cdot \frac{\tilde{\sigma}}{(1-D)}. \quad (5.32)$$

Die Modifikation des „Lubby2“ Materialmodells wird dadurch ersichtlich, dass die Gleichung 5.32 die Verfestigung bei einer Beanspruchungserhöhung und die Erholung bei einer Beanspruchungsminderung berücksichtigt. Dieses Verhalten wird über die maximale transiente Kriechverformung

$$\max \epsilon^{tr} = \frac{1}{G_k} \cdot \frac{\sigma^{vM}}{(1-D)} \quad (5.33)$$

gesteuert mit Hilfe der Funktion G_k , die nach Hou et al. [2007] durch folgenden Ausdruck gegeben ist,

$$G_k = \begin{cases} \overline{G}_k^* \cdot \exp \left(k_1 \cdot \frac{\sigma^{vM}}{(1-D)} \right) & \text{für } \epsilon^{tr} < \max \epsilon^{tr} \\ \overline{G}_{kE}^* \cdot \exp \left(k_{1E} \cdot \frac{\sigma^{vM}}{(1-D)} \right) & \text{für } \epsilon^{tr} > \max \epsilon^{tr} \end{cases} \quad (5.34)$$

Ist die transiente Kriechverformung kleiner als die maximale transiente Kriechverformung $\epsilon^{tr} < \max \epsilon^{tr}$ wird das Material verfestigt und die Funktion G_k wird durch die erste Beziehung in Gleichung 5.34 bestimmt, mit dem Materialparametern für die Verfestigung \overline{G}_k^* und k_1 . Die Erholung des Materials setzt ein wenn die transiente Kriechverformung größer ist als die maximale transiente Kriechverformung $\epsilon^{tr} > \max \epsilon^{tr}$, was zufolge hat, dass die Funktion G_k durch die zweite Beziehung in Gleichung 5.34 bestimmt wird, mit den Materialparametern für die Erholung \overline{G}_{kE}^* und k_{1E} . Die Funktionen η_k und

η_m , die die Abhängigkeit der visko-plastisch-volumentreuen Dehnrate, welche in Gleichung 5.32 dargestellt ist, vom stationären Kriechen

$$\eta_k = \bar{\eta}_k^* \cdot \exp\left(k_2 \cdot \frac{\sigma^{vM}}{(1-D)}\right) \quad (5.35)$$

und dem transienten Kriechen

$$\eta_m = \bar{\eta}_m^* \cdot \exp\left(m \cdot \frac{\sigma^{vM}}{(1-D)}\right) \cdot \exp(l \cdot T) \quad (5.36)$$

beschreiben sind durch Hou et al. [2007] gegeben. Die Materialparameter $\bar{\eta}_k^*$ und k_2 steuern das stationäre Kriechen und die Materialparameter $\bar{\eta}_m^*$, m und l steuern das transiente Kriechen. Die schädigungsinduzierte-dilatante Dehnrate $\dot{\epsilon}^d$ wird im Stoffmodell von Hou/Lux durch

$$\dot{\epsilon}^d = \dot{\epsilon}^{ds} + \dot{\epsilon}^{dz} = a_3 \cdot \frac{\left(\frac{F^{ds}}{F^*}\right)^{a_1}}{(1-D)^{a_2}} \cdot \frac{\partial Q^{ds}}{\partial \sigma} + a_3 \cdot \frac{\left(\frac{F^{dz}}{F^*}\right)^{a_1}}{(1-D)^{a_2}} \cdot \frac{\partial Q^{dz}}{\partial \sigma} \quad (5.37)$$

beschrieben, mit den Materialparametern a_1 , a_2 und a_3 für den Schädigungsprozess und der Normierungsspannung $F^* = 1$ MPa. Die Volumenänderung des Materials wird mit Hilfe der Fließfunktionen F^{ds} und F^{dz} realisiert und entsprechen einer nichtassozierten Fließregel und können Hou et al. [2007] entnommen werden. Mit den folgenden Fließbedingungen

$$F^{ds} = \begin{cases} 0 & \text{für } F^{ds} \leq 0 \\ F^{ds} & \text{für } F^{ds} > 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

und

$$F^{dz} = \begin{cases} 0 & \text{für } F^{dz} \leq 0 \\ F^{dz} & \text{für } F^{dz} > 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

wird sichergestellt, dass durch die Schädigung visko-plastische Dehnung akkumuliert wird beim Überschreiten der aktuellen Schädigungsgrenze in Folge Druck- Schubspannungen ds und oder bei vorhanden sein von Zugspannungen dz . Werden die Fließfunktionen durch den aktuellen Spannungszustand nicht verletzt wird keine visko-plastische Dehnung in Folge Schädigung akkumuliert. Mit Hilfe der Potentialfunktionen Q^{ds} und Q^{dz} kann die Fließrichtung bestimmt werden, diese können Hou et al. [2007] entnommen werden.

5.5. Stoffmodell IUB-MDCF

Das Materialmodell basiert auf dem Materialmodell von Munson und Dawson [1981] und wurde durch gemeinsame Forschungsarbeit von Chan et al. [1992], Chan et al. [1996b], Chan et al. [1995], Chan et al. [1996a] und Chan et al. [1997] erweitert. Die elastische Dehnrate ist durch das Hooke'sche Gesetz (siehe

Gleichung 5.2) gegeben. Die nichtelastische Dehnrates ergibt sich nach Rokahr et al. [2007] zu

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{in} = & \dot{\varepsilon}^{vM,cr} \cdot \frac{\partial \sigma^{vM,cr}}{\partial \sigma} + \dot{\varepsilon}^{vM,w-sh} \cdot \frac{\partial \sigma^{vM,w-sh|f}}{\partial \sigma} + \dots \\ & \dot{\varepsilon}^{vM,w-te} \cdot \frac{\partial \sigma^{vM,w-te}}{\partial \sigma} + \dot{\varepsilon}^{vM,w-h} \cdot \frac{\partial \sigma^{vM,w-h|f}}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

mit der effektiven Dehnrates (siehe 5.6) aus den Versetzungsmechanismen für das schädigungsfreie Kriechen $\dot{\varepsilon}^{vM,cr}$, der schädigungsinduzierten effektiven Dehnrates aus Schub- $\dot{\varepsilon}^{vM,w-sh}$ bzw. Zugspannungen $\dot{\varepsilon}^{vM,w-te}$ und der effektiven Dehnrates, die durch die Heilung $\dot{\varepsilon}^{vM,w-h}$ hervorgerufen wird. Die dreidimensionale Erweiterung erfolgt durch die Fließpotentiale, was im Kapitel 2.3.4 behandelt wurden ist. Die Fließpotentiale ergeben sich aus den jeweiligen Vergleichsspannungen $\sigma^{vM,cr}$, $\sigma^{vM,w-sh|f}$, $\sigma^{vM,w-te}$ und $\sigma^{vM,w-h|f}$ abgeleitet nach den Spannungen. Wie die einzelnen Spannungsanteile bestimmt werden ist in Rokahr et al. [2007] dargestellt.

Die Dehnrates für das schädigungsfreie Kriechen ergibt sich nach Rokahr et al. [2007] zu

$$\dot{\varepsilon}^{vM,cr} = F \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{\varepsilon}_{st_i}^{cr}. \quad (5.41)$$

Mit der Funktion F wird die Veränderung der internen Struktur berücksichtigt, was dem transienten Dehnungsanteil entspricht. Das transiente Kriechen lässt sich in drei Teile aufteilen und ist nach Rokahr et al. [2007] folgendermaßen definiert

$$F = \begin{cases} \exp\left(\Delta \left(1 - \frac{\zeta}{\varepsilon_{tr-max}}\right)^2\right) & \text{für } \zeta < \varepsilon_{tr-max} \\ 1 & \text{für } \zeta = \varepsilon_{tr-max} \\ \exp\left(-\delta \left(1 - \frac{\zeta}{\varepsilon_{tr-max}}\right)^2\right) & \text{für } \zeta > \varepsilon_{tr-max} \end{cases} \quad (5.42)$$

Mit Hilfe der internen Zustandsvariable des transienten Kriechens ζ und dem transienten Endkriechmaß ε_{tr-max} werden die einzelnen Anteile am transienten Kriechen gesteuert. Das transiente Endkriechmaß ist durch Rokahr et al. [2007]

$$\varepsilon_{tr-max} = K_0 \cdot \exp(c \cdot T) \cdot \left(\frac{\sigma^{vM,cr}}{G(1-D)}\right)^m \quad (5.43)$$

gegeben, mit den Materialparametern K_0 , c und m . Wie die Entwicklungsfunktion für die internen Zustandsvariablen des transienten Krieches definiert ist kann Rokahr et al. [2007] entnommen werden. Der erste Pfad in der Gleichung 5.42 beschreibt den Verfestigungsanteil der den Verfestigungsparameter

$$\Delta = \alpha_w + \beta_w \cdot \log\left(\frac{\sigma^{vM,cr}}{G(1-D)}\right) \quad (5.44)$$

und die Materialparameter α_w und β_w beinhaltet. Der Gleichgewichtszeitweig wird durch den zweiten Pfad in der Gleichung 5.42 beschrieben. Die Erholung des transienten Kriechens wird durch den dritten Pfad beschrieben. Der Erholungsparameter ist durch

$$\delta = \alpha_r + \beta_r \cdot \log \left(\frac{\sigma^{vM,cr}}{G(1-D)} \right) \quad (5.45)$$

gegeben, mit den Materialparametern α_r und β_r . Die drei stationären Kriechanteile $\dot{\epsilon}_{st1}^{cr}$, $\dot{\epsilon}_{st2}^{cr}$ und $\dot{\epsilon}_{st3}^{cr}$ aus Gleichung 5.41 sind durch

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{st1}^{cr} &= A_1 \exp \left(-\frac{Q_1}{RT} \right) \cdot \left(\frac{\sigma^{vM,cr}}{G(1-\omega)} \right)^{n_1}, \\ \dot{\epsilon}_{st2}^{cr} &= A_2 \exp \left(-\frac{Q_2}{RT} \right) \cdot \left(\frac{\sigma^{vM,cr}}{G(1-\omega)} \right)^{n_2}, \\ \dot{\epsilon}_{st3}^{cr} &= \left| H \left(\frac{\sigma^{V,cr}}{(1-\omega)} - \sigma_0 \right) \right| \cdot \left(B_1 \exp \left(-\frac{Q_1}{RT} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. B_2 \exp \left(-\frac{Q_2}{RT} \right) \right) \cdot \sinh \left(\frac{q \cdot \left(\frac{\sigma^{vM,cr}}{(1-\omega)} - \sigma_0 \right)}{G} \right), \end{aligned} \quad (5.46)$$

gegeben, siehe Rokahr et al. [2007]. Die Größen A_i , B_i , n_1 , n_2 und q in der Gleichung sind Materialparameter wie diese definiert sind kann Rokahr et al. [2007], Chan et al. [1992], Chan et al. [1996b], Chan et al. [1995], Chan et al. [1996a] und Chan et al. [1997] entnommen werden. Die Terme $\exp \left(-\frac{Q_1}{RT} \right)$ und $\exp \left(-\frac{Q_2}{RT} \right)$ beschreiben die Temperaturabhängigkeit der Kriechrate (siehe Kapitel 4.4). Der Wert σ_0 beschreibt den Schwellenwert für das Einsetzen des Versetzungsgleitens, die Funktion H ist die sogenannte Heaviside Funktion.

5.6. Stoffmodell des Instituts für Nukleare Entsorgung am Forschungszentrum Karlsruhe

Das Materialmodell beruht auf einer additiven Zerlegung der Dehnungsrate

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el,T} + \dot{\epsilon}^{vp} \quad (5.47)$$

in eine thermoelastische Dehnungsrate $\dot{\epsilon}^{el,T}$ und eine visko-plastische Dehnungsrate $\dot{\epsilon}^{vp}$. Die thermoelastische Dehnungsrate ist durch die Gleichung 5.23 gegeben, die durch den Term $\alpha \dot{T} \cdot \mathbf{1}$ erweitert wird. Dabei beschreibt \dot{T} die Temperaturrate und α den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten.

Für die volumentreue Verzerrung ergibt sich die viskoplastische Dehnungsrate $\dot{\epsilon}^{vp}$ durch mehrere Kriechansätze. Für das sekundäre und transiente Kriechen

werden unterschiedliche Materialgleichungen definiert. Das sekundäre Kriechen ergibt sich nach Pudewills [2007] zu

$$\dot{\epsilon}^s = A \cdot \exp\left(\frac{-Q}{RT}\right) \cdot (F^s)^n \frac{\partial F^s}{\partial \sigma}, \quad (5.48)$$

mit den Materialparametern A , n , Q , R und T . Mit Hilfe der von Mises Fließbedingung $F^s = \sqrt{J_2} - F_0^s$ kann der Fließbeginn von Salzgestein berechnet werden. Da Salzgestein keine definierte Fließgrenze hat, wird der Parameter F_0^s zu Null gesetzt, was man so interpretieren kann, dass sich das Material bei Belastungen immer im viskosen Zustand befindet. Für das transiente Kriechen wird nach Pudewills [2007] ein Zeitverfestigungsansatz definiert

$$\dot{\epsilon}^{tr} = a_0 \cdot \left(\sigma^{vM}\right)^n \cdot \exp\left(\frac{-Q}{RT}\right) \cdot [1 + a_1 \cdot t^{a_2-1}] \cdot \frac{\partial F^s}{\partial \sigma}, \quad (5.49)$$

mit den Materialparametern a_0 , a_1 und a_2 . Die Gleichung 5.49 geht nach sehr langen Kriechzeiten in die Gleichung 5.48 über. Die weiteren Kriechanteile können der folgenden Literatur Pudewills und Droste [2003], Pudewills [2005], Pudewills [2006] und Pudewills [2007] entnommen werden.

5.7. Zusammenfassung der Materialmodelle

Die hier vorgestellten Materialmodelle zur Beschreibung des Materialverhaltens von Steinsalz haben im BMBF-Verbundvorhaben „Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen“ gezeigt, dass die Modelle in der Lage sind das Materialverhalten von Salzgestein zu beschreiben. Vergleicht man die Materialmodelle miteinander so wird ersichtlich, dass die Materialmodelle auf einem additiven Split des Dehnungstensors beruhen. Der Unterschied zwischen den Materialmodellen ergibt sich bei der Beschreibung des inelastischen Anteils des Dehnungstensors. Des Weiteren basieren die Materialmodelle auf Kristallphysikalischen Ansätzen auf vergleichsweise kleinen Längenskalen (Mechanismenbasiert). Die benötigten Materialparameter lassen sich ingenieurpraktisch nur mit immensen Aufwand ermittelt, da diese naturgemäß großen Streuungen unterliegen. Auch steigt die Anzahl der Materialparameter mit jedem Detailmechanismus, der auf dieser Längenskala betrachtet wird, überproportional an. Für die numerische Behandlung dieser nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungen sind ferner besondere Maßnahmen (konsistente Linearisierung, entsprechend kleine Zeitschritte, etc.) durchzuführen, um robuste Algorithmen bereitzustellen.

Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit ein neuer Weg beschrieben und ein Materialmodell verwendet, was auf rheologischen Modellen (Federn, Dämpfer, etc.) basiert. Das solche Materialmodelle in der Lage sind das mechanische Verhalten von Salzgestein zu beschreiben, konnte durch Schuppe [1963]; Natta et al. [1986]; Wang et al. [2014] und Grehn et al. [2016] gezeigt werden.

Dieses Vorgehen hat eine enorme Reduzierung der Materialparameter zufolge, was sich positiv auf die Sensitivitätsanalyse (siehe Kapitel 6.4) des Materialmodells hinsichtlich der stochastischen Abhängigkeit der einzelnen Materialparameter auswirkt. Des Weiteren können die Materialparameter aus einfachen Festigkeits- und Kriechversuchen (siehe Kapitel 6.2 und 6.3) bestimmt werden, da die Bestimmung der Parameter nicht von der Entwicklung der Mikrostruktur abhängt. Die stochastische Betrachtung des Materialverhaltens ist ein neuer Forschungszweig in den Ingenieurwissenschaften, was zufolge hat, dass nicht alle vorgestellten Materialgleichungen aus dem Kapitel mit den vorgestellten Methoden (siehe Kapitel 8) abgebildet werden können (siehe Kapitel 10).

5.8. Verwendetes Materialmodell

Das Materialmodell wird auf kleine Deformationen beschränkt, was eine additive Zerlegung des Verzerrungstensors in seine einzelnen Bestandteile ermöglicht. Somit ergibt sich die totale Verzerrungsrate als Summe eines elastischen $\dot{\epsilon}^{el}$, eines viskosen $\dot{\epsilon}^v$ und eines Kriech $\dot{\epsilon}^{cr}$ Dehnungsanteils

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{(1-D)} \left(\dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^v + \dot{\epsilon}^{cr} \right). \quad (5.50)$$

Die schädigungsinduzierte Dehnung $\dot{\epsilon}^D$ wird über die Schädigungsvariable D multiplikativ mit der Gleichung 5.50 verknüpft. In der Abbildung 5.1 ist die additive Zusammensetzung der Kriechdehnung einer Steinsalzprobe gezeigt. Die primäre Kriechphase wird hauptsächlich mit dem generalisiertes Maxwell-Modell (siehe 5.2) beschrieben, da die schädigungsinduzierte Dehnung in dieser Phase gegen Null geht. Anhand der Abbildung 5.1 ist ersichtlich, dass die viskos Dehnung ϵ^v nach Erreichen der sekundären Kriechphase konstant ist. Was darauf zurückzuführen ist, dass keine weitere Dehnung über das generalisierte Maxwell-Modell akkumuliert werden kann (siehe Kapitel 2.3.3). Somit wird die sekundäre Kriechphase primär mittels des modifizierten Norton-Stoffgesetzes beschrieben. Des Weiteren ist zu erkennen, dass der Einfluss der Schädigung bei fortschreitender Verformung in der sekundären Kriechphase immer größer wird. Der Mechanismus der Schädigung bewirkt in der tertiären Kriechphase den sogenannten Kriechbruch und wird über ein Schädigungsgesetz nach Lippmann und Lemaitre [1996] beschrieben.

5.8.1. Generalisiertes Maxwell-Modell

In der Abbildung 5.2 ist das generalisierte Maxwell-Modell dargestellt. Die Herleitung der Materialgleichung für das generalisierte Maxwell-Modell kann dem Kapitel 2.3.3 entnommen werden. Experimente zeigten, dass das Materialverhalten in der primären Kriechphase bereits mit einer Feder E_∞ und drei

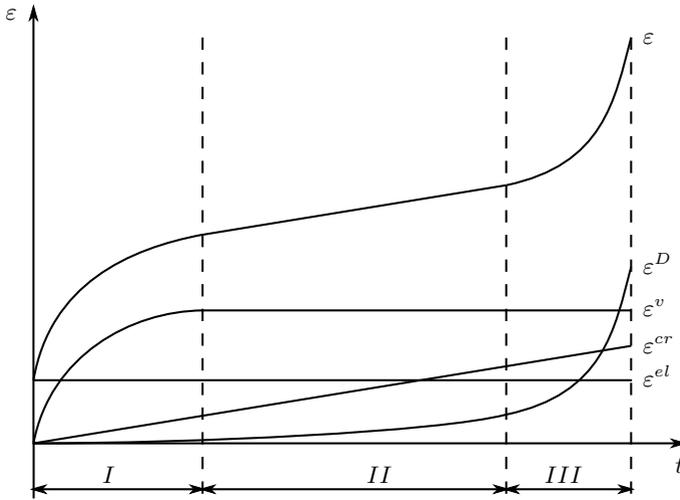


Abbildung 5.1.: Kriechkurve einer Steinsalzprobe

Maxwell-Elementen E_1 , E_2 , E_3 , η_1 , η_2 und η_3 hinreichend genau abgebildet werden kann (siehe Abbildung 6.2).

5.8.2. Modifiziertes Norton-Stoffgesetz

Um das Kriechverhalten von Salzgestein zu beschreiben muss das Norton-Stoffgesetz (siehe 2.94) modifiziert werden. In Anlehnung an Heemann [2010], wird in dieser Arbeit die deviatorische Kriechrate durch den folgenden Ausdruck beschrieben

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = B_1 F_h(\sigma_{okt}, \tau_{okt}) \left(\sigma^{vM} \right)^N. \quad (5.51)$$

Der Term B_1 beinhaltet den Arrhenius Term (siehe Gleichung 5.8), die Funktion F_h (siehe Gleichung 5.19) berücksichtigt den Feuchteinfluss auf die Kriechrate und N ist der Spannungsexponent, der materialabhängig ist. Die Spannung σ^{vM} ist in Gleichung 5.5 dargestellt.

Durch zahlreiche Kriechversuche, die für das Speisesalz des Typs Asse durchgeführt worden sind, konnte Hunsche et al. [2003] ableiten, dass während der stationären Verformung oberhalb der Dilatanzgrenze die volumetrische Verformungsrate $\dot{\varepsilon}^{cr,vol}$ und die Kriechrate $\dot{\varepsilon}^{cr}$ in einem konstanten Verhältnis r_v (siehe Gleichung 5.21) zueinanderstehen. Die volumetrische Kriechrate ist als Produkt der Gleichung 5.21 mit der deviatorischen Kriechrate $\dot{\varepsilon}^{cr}$ definiert

$$\dot{\varepsilon}^{cr,vol} = r_v(\sigma_{okt}, \tau_{okt}) \dot{\varepsilon}^{cr}, \quad (5.52)$$

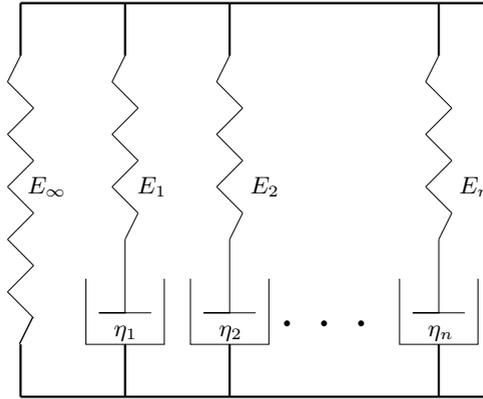


Abbildung 5.2.: Generalisiertes Maxwell-Modell

vgl. Heemann [2010].

5.8.3. Schädigungsgesetz

In der Arbeit von Lippmann und Lemaitre [1996] wird ein Schädigungsgesetz für das Norton-Stoffgesetz vorgestellt, welches in dieser Arbeit verwendet wird. Das Schädigungsgesetz hat den Vorteil, dass der Materialparameter N vom Norton-Stoffgesetz ebenfalls in der Ratengleichung für die Schädigung verwendet werden kann. Die Ratengleichung für die Schädigung ist nach Lippmann und Lemaitre [1996] folgendermaßen definiert

$$\dot{D} = \frac{(\sigma^{vM})^2 R_D}{2 E S_D K_D^N (1 - D)^{N+2}} H_f, \quad (5.53)$$

mit dem Materialparametern S_D und K_D . Die Bestimmung der Materialparameter für die Schädigung ist in Kapitel 6.3 gezeigt. Die Funktion R_D beschreibt den Einfluss des Spannungszustandes auf die Evolution der Schädigung und ist gegeben durch

$$R_D = \frac{2}{3} (1 + \nu) + 3 (1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma^{vol}}{\sigma^{vM}} \right)^2. \quad (5.54)$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} H_f &= 1 && \text{für } \tau_{okt} > \tau_D \\ H_f &= 0 && \text{sonst.} \end{aligned} \quad (5.55)$$

gewährleistet, dass die Evolution der Schädigung nur eintritt, wenn der Spannungszustand oberhalb der Dilatanzgrenze (Auflockerung des Steinsalzes) liegt.

5.8.4. Materialgleichung

Die tensorielle Darstellung der Kriechrate erfolgt analog zur Gleichung 5.7, wobei der Term

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^{vM}} = \mathbf{n} \quad (5.56)$$

als verallgemeinerte Fließnormale aufgefasst werden kann. Nach de Souza Neto et al. [2008] ergibt sich die verallgemeinerte Fließnormale unter Berücksichtigung der Schädigung zu

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{3}{2} \tilde{\sigma}}{(1-D)\sigma^{vM}}. \quad (5.57)$$

Durch die Integration der Gleichung 5.7 mittels des alpha-Algorithmus ergibt sich folgender Ausdruck

$$\Delta \varepsilon = \int_t^{t+dt} \dot{\varepsilon} dt = {}^{t+\alpha dt} \dot{\varepsilon} ({}^{n+1} \sigma) dt \quad \text{mit} \quad (5.58)$$

$${}^{n+1} \sigma = (1-\alpha) {}^n \sigma + \alpha {}^{n+1} \sigma.$$

Für ein numerisch stabiles Materialmodell müssen die Evolutionsgleichungen mit einem impliziten Algorithmus integriert werden. Ein impliziter Algorithmus ergibt sich durch $\alpha = 1$. Unter Einhaltung des impliziten Algorithmus für die Materialgleichungen kann der deviatorische Anteil des Spannungstensors durch

$${}^{n+1} \tilde{\sigma} = \underbrace{(1 - {}^{n+1} D)}_{{}^{n+1} R_{\tilde{\sigma}}} {}^{n+1} \tilde{\sigma}^{test} - dt \underbrace{3\mu_L \dot{\tilde{\varepsilon}}^{cr}}_{{}^{n+1} \tilde{A}_{\tilde{\sigma}}} \frac{1}{{}^{n+1} \sigma^{vM}} {}^{n+1} \tilde{\sigma}, \quad (5.59)$$

mit

$${}^{n+1} \tilde{\sigma}^{test} = \gamma_{\infty} \underbrace{2\mu_L}_{n+1 \circ \tilde{\sigma}} {}^{n+1} \tilde{\varepsilon} + \sum_{i=1}^n \gamma_i {}^{n+1} \tilde{\mathbf{h}}_i - 2\mu_L {}^n \tilde{\varepsilon}^{cr} \quad (5.60)$$

und

$${}^{n+1} \tilde{\mathbf{h}}_i = \exp\left(\frac{-dt}{\tau_i}\right) {}^n \tilde{\mathbf{h}}_i + \frac{1 - \exp\left(\frac{-dt}{\tau_i}\right)}{\frac{dt}{\tau_i}} ({}^{n+1} \tilde{\sigma} - {}^n \tilde{\sigma}) \quad (5.61)$$

bestimmt werden. Für den volumetrischen Anteil des Spannungstensors ergibt sich folgender Ausdruck,

$${}^{n+1} \sigma^{vol} = \underbrace{(1 - {}^{n+1} D)}_{{}^{n+1} R_{\sigma^{vol}}} {}^{n+1} \sigma^{test, vol} - \underbrace{\kappa dt}_{n+1 \gamma^{vol}} \dot{\varepsilon}^{cr, vol}, \quad (5.62)$$

mit

$${}^{n+1}\sigma^{test,vol} = \kappa \left({}^{n+1}\varepsilon^{vol} - {}^n\varepsilon^{cr,vol} \right). \quad (5.63)$$

Die Parameter γ_∞ , γ_i und τ_i und die Indexe i und n können dem Kapitel 2.3.3 entnommen werden. Die volumetrische Verzerrung $\varepsilon^{vol} = tr(\varepsilon)$ und die deviatorische Verzerrung $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon^{vol}\mathbf{1}$ können bestimmt werden.

5.8.5. Nichtlineare Nullfunktionen

Löst man die Gleichung 5.59 nach ${}^{n+1}\tilde{\sigma}$ auf, so ergibt sich

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\tilde{\sigma} \underbrace{\left(1 + dt \, {}^{n+1}\tilde{A}_{\tilde{\sigma}} \right)}_{{}^{n+1}A_{\tilde{\sigma}}} &= {}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}} \\ {}^{n+1}\tilde{\sigma} &= \frac{1}{{}^{n+1}A_{\tilde{\sigma}}} {}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Durch die Gleichung 5.64 ist eine Beziehung gegeben, mit der direkt die deviatorischen Spannungen zum Zeitpunkt $n+1$ berechnet werden können. Bildet man nun die euklidische Norm $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_{11}^2 + x_{12}^2 + \dots + x_{33}^2}$ für die Gleichung 5.64 und multipliziert beide Seiten der Gleichung mit dem Faktor $\sqrt{\frac{3}{2}}$, erhält man folgenden Ausdruck

$$\underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}} \| {}^{n+1}\tilde{\sigma} \|}_{{}^{n+1}\sigma^{vM}} = \frac{1}{{}^{n+1}A_{\tilde{\sigma}}} \sqrt{\frac{3}{2}} \| {}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}} \|. \quad (5.65)$$

Wird die Gleichung 5.65 mit dem Term ${}^{n+1}A_{\tilde{\sigma}}$ multipliziert und so umgeformt, dass der Term mit der von Mises Vergleichsspannung auf die recht Seite der Gleichung gebracht wird, erhält man die nichtlineare Nullfunktion für die von Mises Vergleichsspannung zum Zeitpunkt $n+1$

$${}^{n+1}\tilde{f} = {}^{n+1}A_{\tilde{\sigma}} {}^{n+1}\sigma^{vM} - \sqrt{\frac{3}{2}} \| {}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}} \|. \quad (5.66)$$

Analog zur nichtlinearen Nullfunktion für ${}^{n+1}\sigma^{vM}$ können die anderen beiden nichtlinearen Nullfunktionen gebildet werden,

$$\begin{aligned} {}^{n+1}f^{vol} &= {}^{n+1}\sigma^{vol} - {}^{n+1}\sigma^{vol,test} + \gamma^{vol}, \\ {}^{n+1}f^D &= {}^{n+1}D - {}^nD - \frac{(\sigma^{vM})^2 R_D}{2 E S_D K_D^N (1-D)^{N+2}} H_f dt. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Anhand der Gleichungen für die nichtlinearen Nullfunktionen erkennt man, dass die innere Newton-Raphson Iteration abgebrochen werden kann, wenn die Abbruchkriterien erfüllt sind

$$\begin{aligned} {}^{n+1}\tilde{f} &\leq tol \\ {}^{n+1}f^{vol} &\leq tol \\ {}^{n+1}f^D &\leq tol. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Die nachfolgenden Gleichungen beschreiben die Linearisierung der nichtlinearen Nullfunktionen mittels der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_{in} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^{n+1}\tilde{f}}{\partial {}^{n+1}\sigma^{vM}} & \frac{\partial {}^{n+1}\tilde{f}}{\partial {}^{n+1}\sigma^{vol}} & \frac{\partial {}^{n+1}\tilde{f}}{\partial {}^{n+1}D} \\ \frac{\partial {}^{n+1}f^{vol}}{\partial {}^{n+1}\sigma^{vM}} & \frac{\partial {}^{n+1}f^{vol}}{\partial {}^{n+1}\sigma^{vol}} & \frac{\partial {}^{n+1}f^{vol}}{\partial {}^{n+1}D} \\ \frac{\partial {}^{n+1}f^D}{\partial {}^{n+1}\sigma^{vM}} & \frac{\partial {}^{n+1}f^D}{\partial {}^{n+1}\sigma^{vol}} & \frac{\partial {}^{n+1}f^D}{\partial {}^{n+1}D} \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

Diese erhält man durch die Bildung der partiellen Ableitungen der nichtlinearen Nullfunktionen. Die Herleitung der partiellen Ableitungen erfolgt in Anhang A. Mit Hilfe der Jacobi-Matrix \mathbf{J}_{in} kann das Update der inneren Variablen mittels der Gleichung

$$\begin{bmatrix} {}^{n+1}\sigma^{vM} \\ {}^{n+1}\sigma^{vol} \\ {}^{n+1}f^{vol} \\ {}^{n+1}f^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} \sigma^{vM} - \mathbf{J}_{in}^{-1} \begin{bmatrix} {}^{n+1}\tilde{f} \\ {}^{n+1}f^{vol} \\ {}^{n+1}f^D \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

erfolgen. Die partiellen Ableitungen, auf die nicht näher eingegangen wurde, werden numerisch mittels des zentralen Differenzenverfahrens gebildet (siehe Abschnitt 5.1).

5.9. Berechnung des konsistenten Tangentenmoduls

Um ein numerisch stabiles Materialmodell zu erhalten, wird die Materialgleichung linearisiert. Dieses erhält man, indem man die Materialgleichungen ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}$ nach den Verzerrungen ${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}$ ableitet, was einer konsistenten Linearisierung entspricht,

$${}^{n+1}\mathbb{C} = \frac{\partial {}^{n+1}\sigma^{vol}}{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \mathbf{1} + \frac{\partial {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial {}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (5.71)$$

In den nachfolgenden Gleichungen erfolgt die Herleitung des konsistenten Tangentenmoduls. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial {}^{n+1}\sigma^{vol}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ und $\frac{\partial {}^{n+1}\sigma^V}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ ergeben sich durch Bildung des totalen Differentials der nichtlinearen Nullfunktionen ${}^{n+1}f^{vol}$ und ${}^{n+1}\tilde{f}$ nach den Dehnungen ${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}$.

Für die partiellen Ableitungen ergeben sich folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 df^{vol} &= \left[\frac{\partial f^{vol}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{\partial f^{vol}}{\partial^{n+1}D} \frac{\partial^{n+1}D}{\partial^{n+1}\dot{D}} \frac{\partial^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} + \frac{\partial f^{vol}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} \right) \cdot \dots \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vol}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{\partial f^{vol}}{\partial^{n+1}D} \frac{\partial^{n+1}D}{\partial^{n+1}\dot{D}} \frac{\partial^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} + \frac{\partial f^{vol}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} \right) \cdot \dots \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vM}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} \right] d\boldsymbol{\varepsilon} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.72}$$

mit

$$\frac{\partial f^{vol}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} = - (1 - {}^{n+1}D) \kappa \mathbf{1} \tag{5.73}$$

und

$$\begin{aligned}
 d^{n+1}\tilde{f} &= \left[\frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}D} \frac{\partial^{n+1}D}{\partial^{n+1}\dot{D}} \frac{\partial^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} + \frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} \right) \cdot \dots \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vol}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}D} \frac{\partial^{n+1}D}{\partial^{n+1}\dot{D}} \frac{\partial^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} + \frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} \right) \cdot \dots \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vM}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} \right] d\boldsymbol{\varepsilon} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Mit

$$\frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} = - (1 - {}^{n+1}D) \sqrt{\frac{3}{2}} n_{R_{\bar{\sigma}}} 2 \mu_L {}^{n+1}g^* \mathbb{P}, \tag{5.75}$$

und der Funktion g^* , die der Gleichung 2.91 entnommen werden kann, und der Fließnormalen der Testspannung $n_{R_{\bar{\sigma}}}$. Stellt man die Gleichungen 5.72 und 5.74 nach den gesuchten Ableitungen um und führt die Funktionen ${}^{n+1}A_1$ bis ${}^{n+1}A_4$ ein, erhält man folgende Ausdrücke

$$\frac{\partial^{n+1}\sigma^{vol}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[- \frac{\partial f^{vol}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^{n+1}A_1 \cdot \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vM}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} \right] \left[{}^{n+1}A_2 \right]^{-1} \tag{5.76}$$

und

$$\frac{\partial^{n+1}\sigma^{vM}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[- \frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^{n+1}A_3 \cdot \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vol}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} \right] \left[{}^{n+1}A_4 \right]^{-1} \tag{5.77}$$

für die partiellen Ableitungen. Da die Funktionen 5.76 und 5.77 voneinander abhängig sind, ergibt sich nach dem ineinander einsetzen für die erste partielle

Ableitung der Ausdruck

$$\frac{\partial^{n+1}\sigma^{vol}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\frac{\partial f^{vol}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^{n+1}A_1 {}^{n+1}A_4^{-1} \frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} \right] \cdot \dots \quad (5.78)$$

$$\left[{}^{n+1}A_1 {}^{n+1}A_3 {}^{n+1}A_4^{-1} - {}^{n+1}A_2 \right]^{-1}$$

und für die zweite partielle Ableitung ergibt sich folgender Ausdruck

$$\frac{\partial^{n+1}\sigma^{vM}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^{n+1}A_2^{-1} {}^{n+1}A_3 \frac{\partial f^{vol}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} \right] \cdot \dots \quad (5.79)$$

$$\left[{}^{n+1}A_1 {}^{n+1}A_2^{-1} {}^{n+1}A_3 - {}^{n+1}A_4 \right]^{-1}.$$

Der erste Term des Tangentenmoduls ergibt sich durch die Bildung des dyadischen Produktes zwischen der Gleichung 5.78 und des zweistufigen Einheitsensors. Leitet man die Gleichung 5.64 nach den Verzerrungen ${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}$ ab, erhält man den zweiten Term des Tangentenmoduls

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\partial}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} \left(\frac{1}{{}^{n+1}A_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} {}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \right) \\ &= \frac{1}{{}^{n+1}A_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}} \left[\frac{\partial^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^{n+1}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{test} dt \left(\frac{{}^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vol}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{{}^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vM}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \right) \right] - \frac{dt}{({}^{n+1}A_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}})^2} \left[\frac{\partial^{n+1}A_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vol}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} + \dots \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^{n+1}A_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} \frac{\partial^{n+1}\sigma^{vM}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \right] \otimes {}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \end{aligned} \quad (5.80)$$

mit der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}{\partial^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - {}^{n+1}D) 2\mu_L {}^{n+1}g^* \mathbb{P}. \quad (5.81)$$

Mittels der Beziehungen, die in den vorherigen Kapiteln vorgestellt wurden, kann der Tangentenmodul ${}^{n+1}\mathbf{C}$ zum Zeitpunkt $n + 1$ bestimmt werden. Die Erweiterung der Materialgleichungen für unsichere Materialparameter bezüglich der Polynomial Chaos Entwicklung erfolgt in Kapitel 8.3.

6. Numerische Beanspruchungsanalyse mittels deterministischer Materialparameter

Mit Hilfe der vorgestellten Materialgleichungen aus dem Kapitel 5.8.4 sollen das mechanische Verhalten von Steinsalz in diesem Kapitel beschrieben werden. Durch die Vielzahl an Experimenten und die daraus resultierenden Messdaten, die in verschiedenen Arbeiten von Hampel [2006], Heemann und Schulze [2007] und Hou et al. [2007] veröffentlicht wurden, sollen die Materialparameter für das Materialmodell bestimmt werden. Die Bestimmung der Parameter für das primäre und sekundäre Kriechen erfolgt in Kapitel 6.2 und die Bestimmung der Parameter für die Schädigungsentwicklung wird in Kapitel 6.3 vorgestellt. Bei der Auswertung der Ergebnisse kann man feststellen, dass die gemessene Verformung der verschiedenen Proben einer Versuchsreihe stark variieren. Welche Materialparameter als unsicher anzusehen sind, wird im Kapitel 6.4 gezeigt. Zur Validierung des Materialmodells wird mit den bestimmten Materialparametern ein weiterer Langzeitkriechversuch berechnet, was im Kapitel 6.5 erfolgt. Im Kapitel 6.6 wird eine Zusammenfassung über Erkenntnisse gegeben, die durch die Beanspruchungsanalysen erlangt worden sind.

6.1. FE-Modell der Steinsalzprobe

Die numerischen Experimente werden an einer Steinsalzprobe mit den Abmaßen $l = 250$ mm und $r = 50$ mm durchgeführt. Der Modellaufbau für die Versuche ist in der Abbildung 6.1 dargestellt. Aufgrund des Versuchsaufbaus kann das FEM-Modell von einem 3D-Modell auf ein achsensymmetrisches Modell (2D) reduziert werden, was eine Modifikationen der Verzerrungs-Verschiebungsmatrix, des Dehnungs- und Spannungstensors nach sich zieht. Für den interessierten Leser des Themengebietes der Rotationssymmetrie wird auf Deger [2008] verwiesen. Die Simulationszeit liegt im Bereich von 5 bis 1200 Tagen. Das Gebiet wird mit 100 4-Knoten-Scheibenelementen diskretisiert und kann mit einer Axial- und Radialspannung belastet werden.

Mit diesem Setup lassen sich die Langzeitkriechversuch 04141 bis 04143 und N2/1 – 95006, N2/2 – 95010, N2/3 – 93212, N2/4 – 95015 und N2/5-94141 und die triaxialen Kriechversuch der TUC Reihe nachrechnen, siehe Hampel [2006], Heemann und Schulze [2007] und Hou et al. [2007].

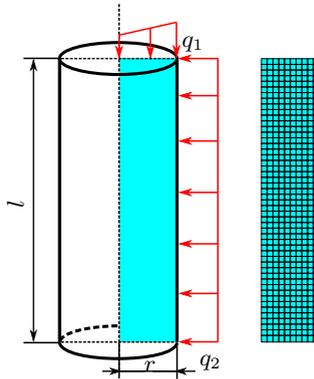


Abbildung 6.1.: Geometrie der Versuchsprobe und Randbedingungen für die Berechnungen der Versuche 04141, $N2/4 - 95015$ und $TUC - 313$

6.2. Parameter für das primäre und sekundäre Kriechen

Die Parameter für das primäre und sekundäre Kriechen können mittels des Langzeitkriechversuches 04141 bestimmt werden, da die Schädigungsentwicklung bei diesen Kriechversuchen eine untergeordnete Rolle spielt. Dieser Langzeitkriechversuch wurde ausgewählt, da durch die Vielzahl an Daten, die durch das Verbundvorhaben des BMBF „Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen“ vorliegen, ein Vergleich mit dem verschiedenen Materialmodellen von Salzgestein möglich ist. Die Randbedingungen für das Experiment ergeben sich aus dem Versuchsaufbau und können der Abbildung 6.1 entnommen werden. Die Simulationszeit beträgt 900 Tage, über die gesamte Versuchszeit wurde eine Differenzspannung $\Delta\sigma$ von 11MPa aufgebracht, was der Axialspannung entspricht. Bei diesem Experiment wurde der Manteldruck p_0 vernachlässigt, der die Radialspannung repräsentiert. Für die Temperatur wurde der Wert 30°C angenommen und für die relative Feuchte wurde der Wert 45% angenommen, da diese Werte der mittleren Laborraumluft entsprechen.

Die Parameter E_∞ , E_i , τ_i und A_s wurden iterativ unter Verwendung von Startwerten an die Kriechkurve des Langzeitkriechversuches 04141 angefügt. Die Materialparameter, die hier nicht erwähnt worden sind, konnten bei diesem Versuch vernachlässigt werden, wie z.B. die Schädigungsparameter, oder wurden bereits von Hampel [2006] bestimmt. Die Abbildung 6.2 zeigt die Gegenüberstellung der berechneten mit der gemessenen Verformung und die Abbildung 6.3 zeigt die daraus resultierende Verformungsrate.

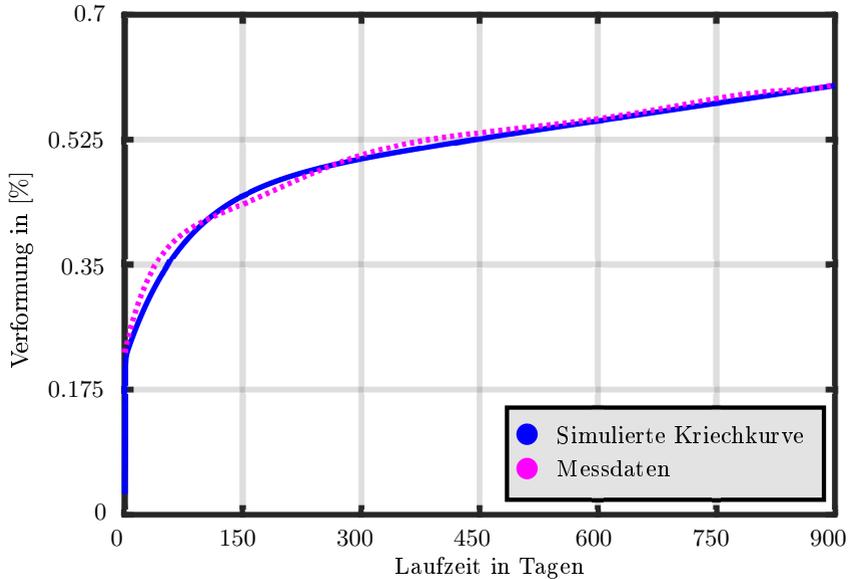


Abbildung 6.2.: Simulation des Langzeitkriechversuchs 04141 und Gegenüberstellung mit den Messergebnissen

Anhand der Abbildung 6.2 kann man erkennen, dass das vorgestellte Materialmodell aus Kapitel 5.8.4 für Steinsalz das Verformungsverhalten des Langzeitkriechversuches 04141 ausreichend genau abbildet. Die verwendeten Parameter für die Simulation des Materialverhaltens können der Tabelle 6.1 entnommen werden.

E_∞ in [MPa]	E_i in [MPa]	τ_i in [1/s]	A_s in [-]
2040	1200	40000	1.2000E + 13
	2300	3000000	
	32328	5	

Tabelle 6.1.: Parameter für das primäre und sekundäre Kriechen

Durch die Messdaten ist der Übergang zwischen primären und sekundären Kriechen bekannt und liegt bei rund 350 Tagen nach Hampel [2006]. Durch Auswertung der berechneten Verformungsrate konnte festgestellt werden, dass

der Übergang zwischen primären und sekundären Kriechen, bei rund 340 Tagen (siehe Abbildung 6.2) erfolgt, was eine vertretbare Abweichung vom Experiment darstellt. Das kann man daran erkennen, dass die Verformungsrate nahezu konstant verläuft, was einen linearen Anstieg der Verformung zur Folge hat.

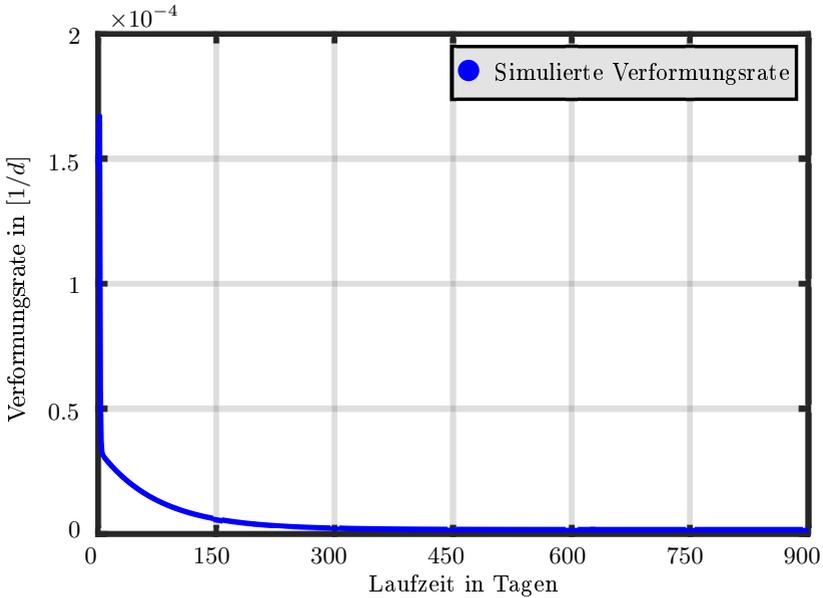


Abbildung 6.3.: Berechnete Verformungsrate des Langzeitkriechversuchs 04141

Der Verlauf der Verformungsrate spiegelt den erwarteten Lauf wider, wie sie eine Kriechverformung aufweist, die die primäre und sekundäre Kriechphase einschließen (siehe Abbildung 2.5). Die gemessene Verformungsrate für den Langzeitkriechversuch 04141 kann der Abbildung 4.4a entnommen werden. Der nicht konstante Verlauf der gemessenen Verformungsrate in der sekundären Kriechphase kann durch Umwelteinflüsse, wie der Schwankung der Luftfeuchte, erklärt werden. In der primären Kriechphase sinkt die berechnete Verformungsrate rasch ab, bis sie in die sekundäre Phase übergeht, was bei rund 340 Tagen erfolgt, und anschließend konstant verläuft. Bei diesem Langzeitkriechversuch wurde die Probe nicht soweit belastet bis diese in die tertiäre Kriechphase übergeht, was dazu führt, dass man aus diesem Versuch keine Information für die Parameter erhält, die den Kriechbruch steuern.

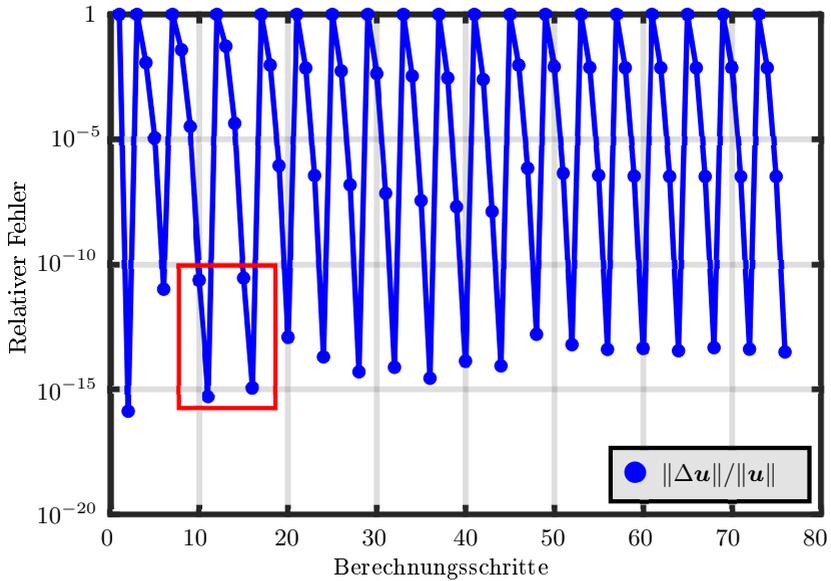


Abbildung 6.4.: Konvergenznorm für den Langzeitkriechversuch 04141

In der Abbildung 6.4 ist die Konvergenznorm über den Berechnungsschritten dargestellt. Aus dieser Abbildung lässt sich schlussfolgern, dass die Linearisierung der Materialgleichungen, die im Kapitel 5.8 und im Anhang A vorgestellt wurden, und die Implementierung des Tangentenmoduls fehlerfrei ist, da quadratische Konvergenz vorliegt. Des Weiteren ist ersichtlich, dass die vorgestellte Linearisierung der Materialgleichungen für das Materialmodell in der Lage ist, den relativen Fehler nahe der Maschinengenauigkeit anzusiedeln. Der rot umrandete Bereich in Abbildung 6.4 zeigt ein lineares Konvergenzverhalten, was drauf beruht, dass der vorletzte Berechnungsschritt der Iteration schon nahe der Maschinengenauigkeit liegt und somit sich kein quadratisches Konvergenzverhalten einstellen kann. Die geringen Abweichungen vom quadratischen Konvergenzverhalten lassen sich auch durch die Verwendung numerisch gebildeter Ableitungen erklären (siehe Kapitel 3.3.4). Quadratische Konvergenz ist die Voraussetzung für ein numerisch stabiles Materialmodell und stellt somit eine wichtiges Kriterium für ein Materialmodell für Salzgestein dar, mit dem das Langzeitverhalten von Untertagestrukturen simuliert werden soll. Das Interesse am Langzeitverhalten der Untertagestruktur beruht darauf, dass diese als Lagerstätte für Atom- und Giftmüll dienen sollen.

6.3. Bestimmen der Parameter für die Schädigung

Die Bestimmung der Schädigungsparameter S_D und K_D erfolgt am triaxialen Kriechversuch TUC-313, der in der Abbildung 6.5 dargestellt ist. Die Entscheidung, einen triaxialen Kriechversuch für die Bestimmung der Parameter heranzuziehen beruht darauf, dass für diesen Versuch ein Vergleich mit dem in der Literatur vorgestellten Materialmodellen möglich ist und dieser Kriechversuch die tertiäre Kriechphase beinhaltet. Die Randbedingungen für das Experiment ergeben sich ebenfalls aus dem Versuchsaufbau, der dem des Langzeitkriechversuches ähnelt, siehe Abbildung 6.1.

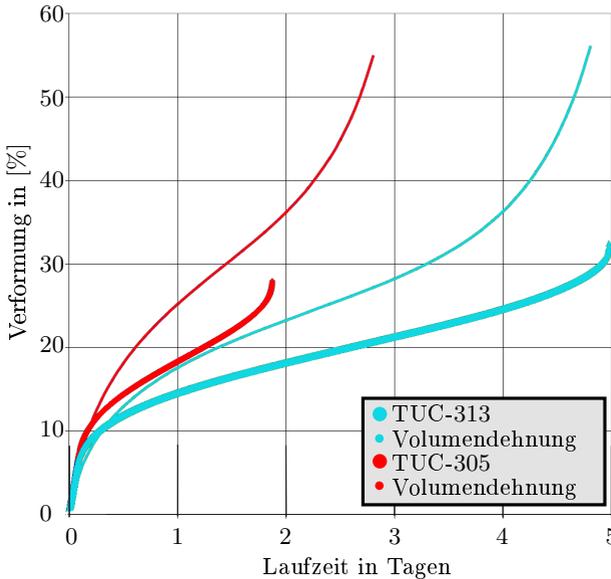


Abbildung 6.5.: Triaxiale Kriechversuche TUC-303 und TUC-313 nach Rokahr et al. [2007]

Die Simulationszeit beträgt 5 Tage, über die gesamte Versuchszeit wurde eine Differenzspannung $\Delta\sigma$ von 38MPa und ein Manteldruck p_0 von 3MPa aufgebracht. Für die Temperatur wurde der Wert 30°C angenommen und für die relative Feuchte wurde der Wert 75% angenommen. Die relative Feuchte von 75% ergibt sich, da bei der Durchführung des Experimentes die Salzsteinprobe mit Teflonfolie und Gummimanschette überzogen war, dabei schloss die Gummimanschette die Druckplatten des Prüfstandes mit ein. Somit konnte die eingeschlossene Feuchtigkeit ihre volle Wirksamkeit entfalten.

Die Parameter S_D und K_D wurden iterativ unter Verwendung von Startwerten ($S_D = 1$ MPa und $K_D = 1$ MPa) an die triaxialen Kriechversuch TUC-313 angefitet. Die Werte der Schädigungsparameter können der Tabelle 6.2 entnommen werden.

S_D in [MPa]	K_D in [MPa]
0.005500	340.0

Tabelle 6.2.: Parameter für das schädigungsbehaftete Kriechen

In der Abbildung 6.6 ist die berechnete Verformung und Verformungsrate dargestellt. Durch den Vergleich der Kriechkurven, die in den Abbildungen 6.5 und 6.6 dargestellt sind, wird deutlich, dass das Materialmodell die primäre Kriechphase nicht exakt wiedergeben kann.

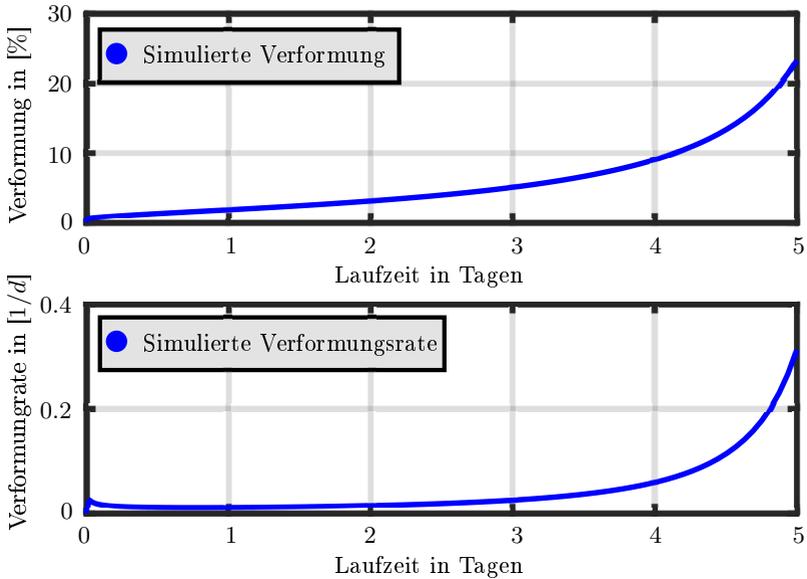


Abbildung 6.6.: Berechnete Verformung und Verformungsrate des triaxialen Kriechversuches TUC-313.

Dieses lässt sich durch die Modellbildung für das primäre Kriechen erklären. Das primäre Kriechen wird zum größten Teil durch das generalisierte Maxwell-Modell beschrieben, was die Dilatanz des Materials nicht abbilden kann, da die

viskose Dehnung ausschließlich durch den deviatorischen Anteil hervorgerufen wird. Da diese Spannungszustände, die bewirken, dass die dritte Kriechphase eintritt in der Simulation der Untertagestruktur nicht vorkommen, wird die berechnete Verformung dieses Kriechversuches als hinreichend genau eingestuft. Die Simulation konnte zeigen, dass die sekundäre und tertiäre Kriechphase durch das Modell abgebildet werden kann. Die berechnete Verformungsrate (siehe Abbildung 6.6b) weist den erwarteten Verlauf auf, wie er in der Abbildung 2.5 gezeigt ist, bei einer Kriechverformung die alle drei Kriechphasen beinhaltet.

6.4. Identifizierung der sensitiven Parameter

Die Abhängigkeit der Materialparameter wird am Langzeitkriechversuch 04141 (siehe 4.4a) untersucht und am Langzeitkriechversuch N2/4 – 95015 (siehe 4.4b) validiert. Die nachfolgenden Kapitel 6.4.1 und 6.4.4 zeigen die Ergebnisse der verschiedenen numerischen Experimente und die daraus resultierenden Erkenntnisse für die stochastische Modellierung. In den nachfolgenden Abbildung 6.7 bis 6.11 repräsentieren die „roten Linien“ das Materialverhalten bei der Verringerung des Wertes des Parameters und die „grünen Linien“ das Materialverhalten beim Erhöhen des Wertes des Parameters. Die „blauen Linien“ stellen die Referenzlösung aus der Abbildung 6.2 dar.

6.4.1. Abhängigkeit der elastischen Konstanten

Die Abbildung 6.7 zeigt das Materialverhalten beim Variieren der elastischen Konstanten E und ν . Vergleicht man die Kriechkurven mit einer Simulationszeit von 900 Tagen in der Abbildung 4.4 mit dem Kriechkurven aus der Abbildung 6.7a, wird ersichtlich, dass die Annahme, dass lediglich der Elastizitätsmodul stochastisch verteilt ist, nicht ausreichend ist. Dieses ergibt sich dadurch, dass die Kriechkurven in der sekundären Kriechphase eine unterschiedliche Steigung aufweisen, was den experimentellen Daten widerspricht. Die Kurvenverläufe lassen sich durch die Gleichungen 5.62 und 5.59 erklären, da sich beim Variieren des Elastizitätsmoduls die Kriechrate ändert. Allerdings ergibt sich durch die Abhängigkeit des generalisierten Maxwell-Modells vom Elastizitätsmodul eine Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls, die durch den Parameter E_∞ hervorgerufen wird. Dieser Zusammenhang wird im Kapitel 6.4.2 näher erläutert. Anders als beim Elastizitätsmodul zeigt sich beim Vergleich der Kriechkurven aus der Abbildungen 6.7b mit den Kriechkurven aus dem Langzeitkriechversuch 04141 bis 04143, dass die Annahme, dass die Querkontraktionszahl ν sensitiv verteilt ist, als anwendbar. Die gleichbleibende Steigung der Kriechkurven in der sekundären Kriechphase lässt sich dadurch erklären, dass die Materialparameter κ und μ_L in einem Verhältnis zueinanderstehen (siehe Gleichung 2.77), was dazu führt, dass die

Verformungsrate in der sekundären Kriechphase konstant bleibt, trotz der veränderten Querkontraktionszahl. Die Dehnungszunahme bzw. Dehnungsabnahme in der primären Kriechphase beruht auf derselben Gesetzmäßigkeit zwischen den beiden Materialparametern. Wird die Querkontraktionszahl erhöht, hat das eine Minderung des Lamé-Parameter μ_L zur Folge, was die visko-elastische Dehnung erhöht. Bei der Minderung der Querkontraktionszahl ergibt sich dementsprechend eine geringere visko-elastische Dehnung. Dieser Zusammenhang kann der Gleichung 2.91 entnommen werden. Die stochastische Modellierung der Querkontraktionszahl birgt auch Gefahren, da bei einer Querkontraktionszahl von $\nu = 0.5$ bei einem isotropen Material der Kompressionsmodul κ gegen Unendlich geht. Dieser Fall muss für die weiterführenden stochastischen Berechnungen ausgeschlossen werden und wird im Kapitel 9.1 gesondert behandelt.

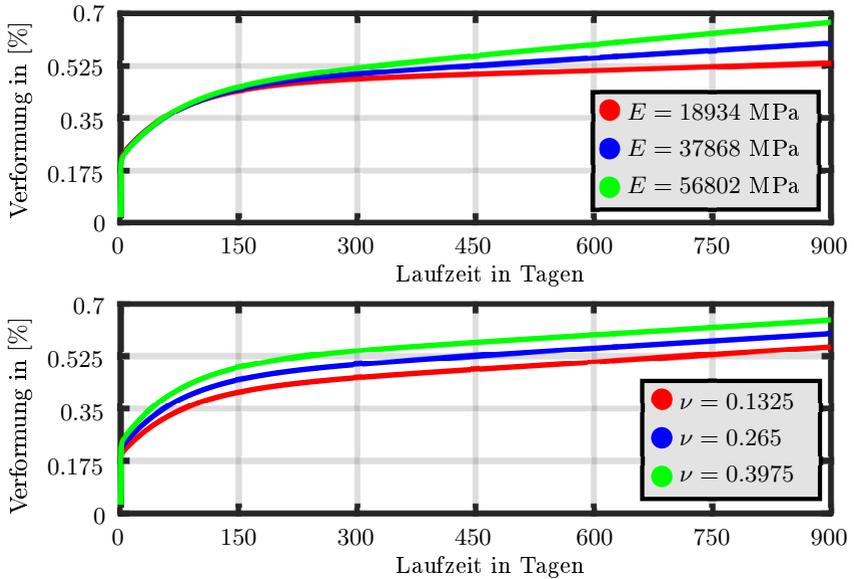


Abbildung 6.7.: Variation der Kriechkurven in Abhängigkeit der elastischen Konstanten

6.4.2. Sensitivität der Parameter des generalisierten Maxwell-Modells

In der Abbildung 6.8 werden die Kriechkurven gezeigt, die sich beim Variieren der Elastizitätsmodule für das generalisierte Maxwell-Modell ergeben haben. Anhand der Abbildung 6.8a wird, wie schon erwähnt, ersichtlich, dass der Parameter E_∞ für die parallelgeschaltete Feder mit den einzelnen Maxwell-Elementen eine Sensitivität aufweist. Da beim Ändern des Parameter E_∞ der gesamte Elastizitätsmodul sich nur minimal ändert, kann die Steigung in der sekundären Kriechphase für die drei Kriechkurven als nahe zu gleich angesehen werden.

Das unterschiedliche Verhalten in der primären Kriechphase zwischen den Kriechkurven lässt sich am einfachsten an der $t = \infty$ Lösung

$$\varepsilon(t = \infty) = \frac{\sigma}{E_\infty} \quad (6.1)$$

für ein 3-Parameter Modell für den eindimensionalen Fall und der Abbildung 5.1 erläutern. Der Parameter E_∞ des generalisierten Maxwell-Modells legt die Maximaldehnung des Materials unter einer bestimmten Last fest. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass beim Erreichen einer Grenzdehnung keine weitere Dehnung akkumuliert wird, was in der Abbildung 5.1 dazu führt, dass die Dehnung ε^v beim Erreichen der II Kriechphase konstant bleibt. Durch das Vermindern des Parameters wird die Grenzdehnung erhöht, was dazu führt, dass der Parameter E_∞ die Maximaldehnung für den visko-elastischen Anteil bestimmt. Die anderen Federparameter E_i für das generalisierte Maxwell-Modell weisen keine Sensitivität hinsichtlich der Kriechverformung auf, da die sich durch die Variation der Parameter ergebenden Kriechkurven den experimentellen Daten widersprechen (siehe Abbildung 6.8b und 6.8c).

Durch den folgenden Zusammenhang der Elastizitätsmodule

$$E := E_\infty + \sum_{i=1}^n E_i \quad (6.2)$$

für ein generalisiertes Maxwell-Modell ergibt sich eine Sensitivität des gesamten Elastizitätsmoduls. Anhand der Kriechkurven in der Abbildung 6.9 wird deutlich, dass die Materialparameter τ_i für die Dämpfer der einzelnen Maxwell-Elemente keine Sensitivität aufweisen. Das eine deterministische Betrachtung der Parameter ausreichend ist, wird deutlich beim Betrachten der Langzeitkriechversuche 04141 und N2/4 – 95015. Die viskosen Eigenschaften bleiben unverändert, da sich der Übergang zwischen dem primären zum sekundären Kriechen nicht ändert. Auf eine Darstellung der Parameter für das dritte Maxwell-Element wurde darum verzichtet.

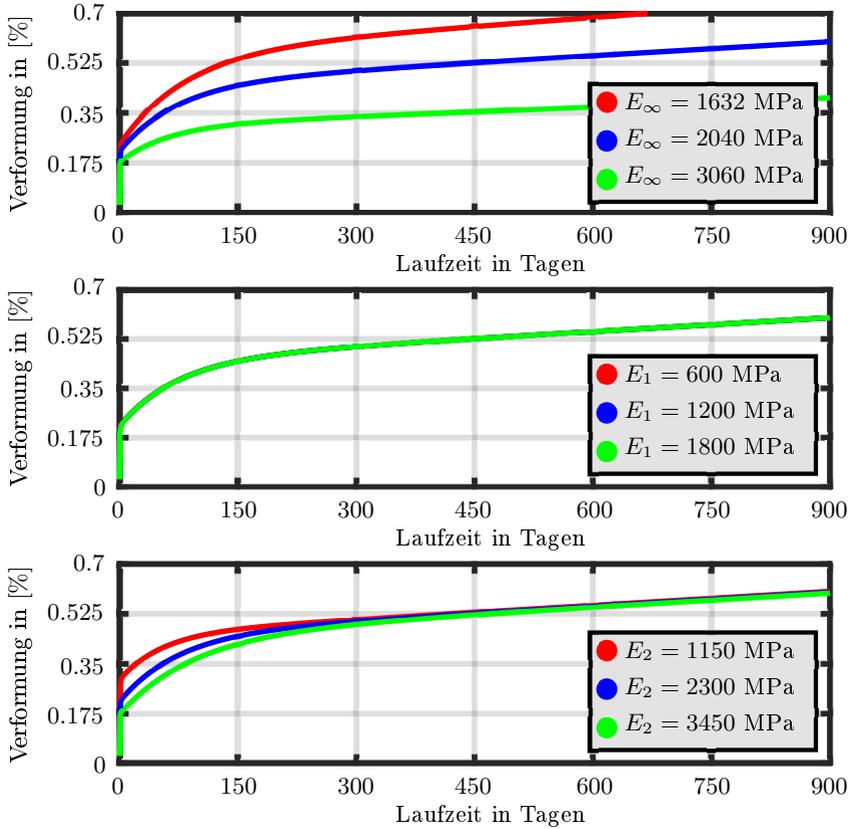


Abbildung 6.8.: Variation der Kriechkurven in Abhängigkeit der Elastizitätsmodule für das generalisierte Maxwell-Modell

6.4.3. Sensitivität der Parameter für das Norton Kriechgesetz

Die Kriechkurven dieser Parameterstudie können der Abbildung 6.10 entnommen werden. Die Parameterstudie zur Untersuchung der Sensitivität der Parameter für das Norton Kriechgesetz ergab das erwartete Ergebnis, dass die Annahme der Sensitivität der Materialparameter für das Norton Kriechgesetz nicht zutrifft. Diese Erkenntnis wird beim Betrachten der Gleichungen 5.51 und 5.52 deutlich, da beim Variieren der Materialparameter A_s , N und Φ die

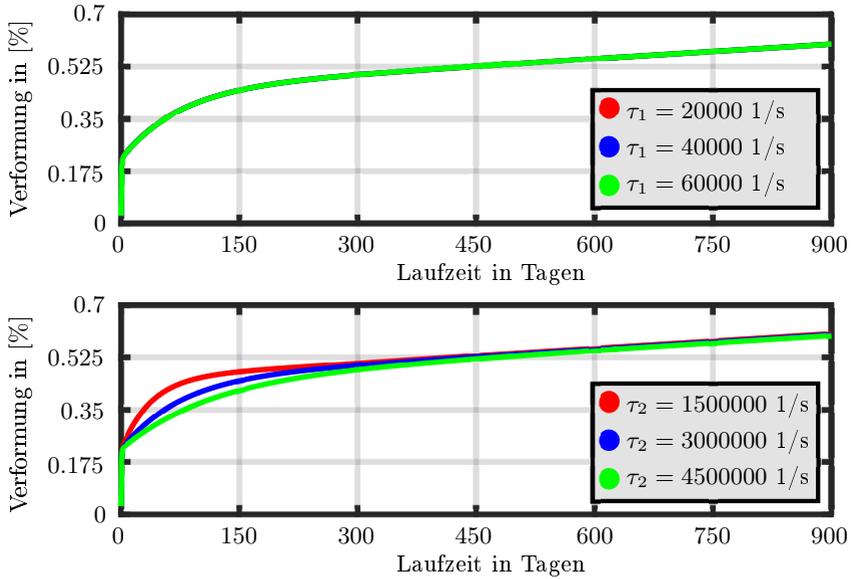


Abbildung 6.9.: Variation der Kriechkurven in Abhängigkeit der Dämpferkonstanten des generalisierten Maxwell-Modells

Kriechrate gemindert bzw. erhöht wird. An der Abbildung 6.10a ist ersichtlich, dass der Parameter A_s eine lineare Abhängigkeit besitzt. Wird der Wert des Parameters A_s halbiert, halbiert sich die Kriechrate. Wohingegen sich beim Erhöhen des Parameters A_s eine größere Kriechrate einstellt. Die Parameter N und Φ haben einen starken Einfluss auf die Kriechrate. Des Weiteren ist aus numerischer Sicht zu bedenken, dass eine rationale Zahl für den Parameter N sich ungünstig auswirken würde. Für den Parameter Φ kann auch aufgrund des Versuchsaufbaus und des konstanten Klimas innerhalb der Untertagestruktur keine stochastische Verteilung besitzen. Dieses konnte mit dem Experiment bestätigt werden (siehe Abbildung 6.10c).

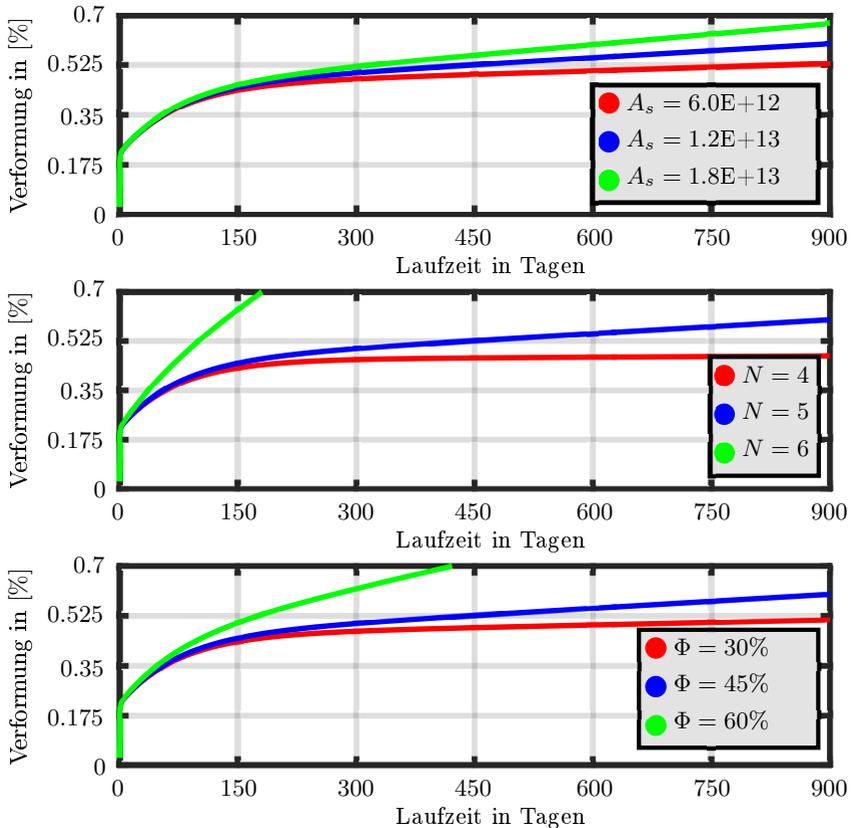


Abbildung 6.10.: Variation der Kriechkurven in Abhängigkeit der Parameter für das Norton Kriechgesetz

6.4.4. Sensitivität der Parameter für das Schädigungsgesetz

Die berechneten Kriechkurven dieser Parameterstudie sind in der Abbildung 6.11 dargestellt. An der Abbildung 6.11a wird deutlich, dass die Schädigungsvariable D ein sensibler Parameter ist. Dieses kann so interpretiert werden, dass innerhalb der Salzsteinprobe Bereiche existieren, die Vorschädigungen durch den Entstehungsprozess aufweisen und andere Bereiche weisen ein weniger geschädigtes Gefüge auf, als das Referenzgefüge. Gefüge die ein günstigeres Gefüge

ge als das Referenzgefüge $D = 0$ werden durch eine Schädigungsvariable $D < 0$ ausgedrückt. Eine Schädigungsvariable $D > 0$ beschreibt ein Gefüge welches ein ungünstigeres Gefüge als das Referenzgefüge aufweist.

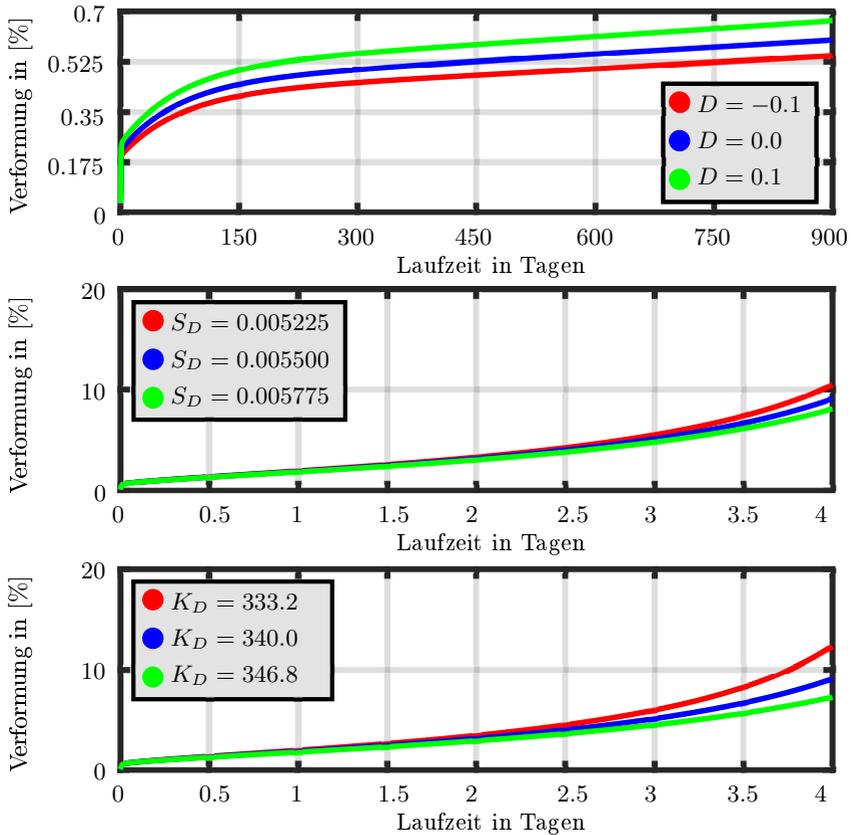


Abbildung 6.11.: Stochastische Abhängigkeit der Schädigung und Parameter für die Schädigungsentwicklung

Die Parameterstudie für S_D und K_D wurde am triaxialen Kriechversuch TUC-313 durchgeführt, da die *III* Kriechphase bei dem Langzeitkriechversuch 04141 nicht erreicht wird und die Parameter das Fortschreiten der Schädigungsvariable D und somit auch den Kriechbruch beschreiben, müssen Kriechversuche

gewählt werden, die die *III* Kriechphase beinhalten. An den Abbildung 6.11b und 6.11c wird deutlich, dass die Parameter S_D und K_D erst beim Erreichen der *III* Kriechphase einen erheblichen Einfluss auf die Verformung haben. Das zeigt sich dadurch, dass die Simulationszeit um 1 Tag verringert werden musste, da beim Mindern der Parameter S_D und K_D ein Versagen der Struktur zwischen dem 4 und 5 Tag erfolgte. Da die Anzahl der triaxialen Kriechversuch sehr gering ist und deswegen keine genaue Aussage getroffen werden kann, ob die Parameter des Schädigungsmodells sensitiv sind oder nicht, werden für die weiteren Berechnungen im Kapitel 9 nur die Vorschädigung D als unsicher betrachtet, da dieses durch die Langzeitkriechversuche der Serie 0414*i* und $N2/i$ nachgewiesen werden konnte.

6.5. Validierung der Ergebnisse am Langzeitkriechversuch N2/4-95015

Wie schon erwähnt, wird das Materialmodell am Langzeitkriechversuch $N2/4 - 95015$ validiert. Die Simulationszeit für diesen Kriechversuch beträgt 1200 Tage und über die gesamte Versuchszeit wurde eine Differenzspannung $\Delta\sigma$ von 14 MPa aufgebracht. Der Manteldruck wird bei diesem Kriechversuch ebenfalls vernachlässigt. Die Literatur gibt für diesen Versuch die folgenden Rahmenbedingungen an: Die Temperatur wird mit 22°C angegeben und für die relative Feuchte wird ebenfalls 45 % angenommen.

Durch den Vergleich der Abbildung 4.4 und der „blauen Linien“ aus der Abbildung 6.12 wird ersichtlich, dass das Materialmodell auch in der Lage ist, das Materialverhalten unter den gegebenen Randbedingungen hinreichend genau abzubilden. Die geringen Unterschiede ergeben sich dadurch, dass nicht gewährleistet werden kann, dass die unterschiedlichen Proben dieselben Materialeigenschaften haben. Dies ergibt sich durch die natürliche Entstehung des Salzgesteins und wurde bereits im Kapitel 4 erläutert. Dieses Experiment bestätigt die Materialparameter die im Kapitel 6.2 und 6.3 ermittelt wurden. Die Unterschiede, die sich in der primären Kriechphase ergeben, sind ebenfalls aus der Modellbildung für das primäre Kriechen zurück zuführen. Da für die Langzeituntersuchungen der Untertagestrukturen die sekundäre Kriechphase am bedeutendsten ist und diese mit dem vorgestellten Materialmodell zufriedenstellend abgebildet werden kann, wird die Modellbildung als hinreichend genau betrachtet und der Fehler in der primären Kriechphase als vertretbar eingestuft.

Des Weiteren konnte gezeigt werden, dass die unsicheren Materialparameter, die in den Kapiteln 6.4.1 bis 6.4.4 identifiziert wurden, sensitiv sind. Die berechneten Kriechkurven können der Abbildung 6.12 entnommen werden.

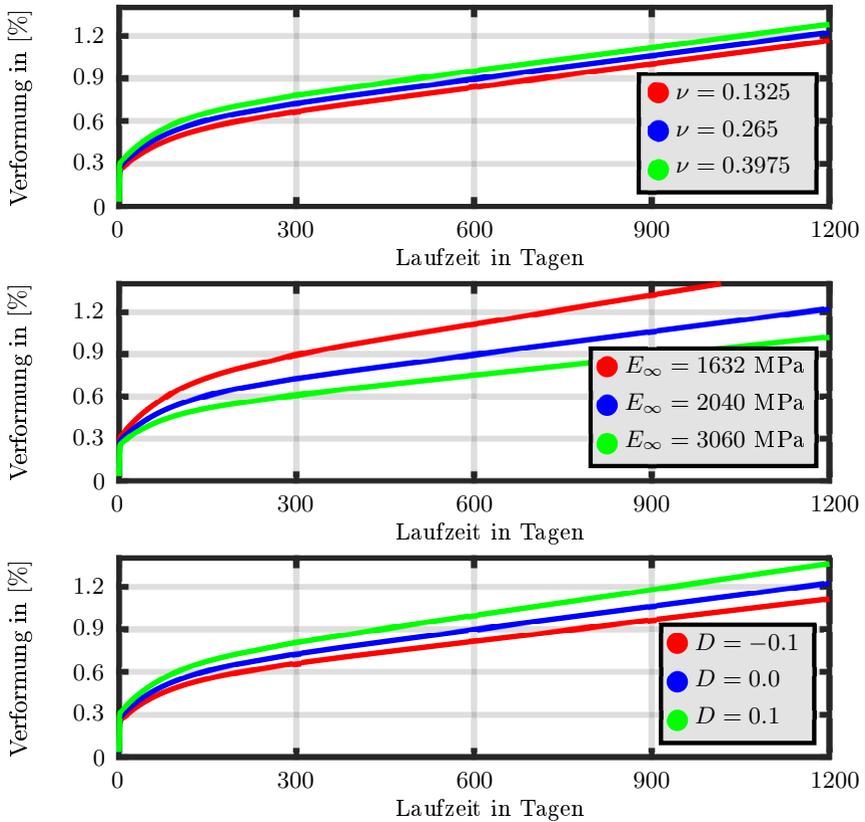


Abbildung 6.12.: Vergleichsrechnung am Langzeitkriechversuch N2/4 – 95015

6.6. Zusammenfassung

Es konnte gezeigt werden, dass die Bestimmung der Materialparameter anhand von ausgewählten Kriech- und Festigkeitsversuchen, wie es im Verbundvorhaben des BMBF „Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen“ erfolgte, nicht so geeignet ist. Da die unterschiedlichen Materialmodelle, deren Materialparameter an Masterkurven bestimmt worden sind, nicht in der Lage sind, das gesamte Spektrum der Kriech- und Festigkeitsversuchen abzubilden. Man kann nicht

gewährleisten, dass die Materialeigenschaften der ausgewählten Kriech- und Festigkeitsversuchen einheitlich sind. Dass die gemessene Verformung bei gleichbleibenden Setup des Versuches stark streuen, kann den experimentellen Daten aus Günther et al. [2007], Hampel [2006], Heemann und Schulze [2007], Hou et al. [2007], Pudewills [2007] und Rokahr et al. [2007] entnommen werden. Es wird deutlich bei der Simulation der verschiedenen Kriechversuche, dass man mit einem Satz von Materialparametern nicht in der Lage ist, die Kriechkurven mit einer minimalen Abweichung zu reproduzieren. Dass das nicht alleine auf die Modellbildung für das in dieser Arbeit verwendet Materialmodell zurück zuführen ist, kann den Arbeiten der Projektgruppe Günther et al. [2007], Hampel [2006], Heemann und Schulze [2007], Hou et al. [2007], Pudewills [2007] und Rokahr et al. [2007] entnommen werden. Beim Analysieren der Daten kann man feststellen, dass die berechneten Kriechkurven für einige Versuche deutlich von den experimentellen Daten abweichen. Dieses ist ein weiterer Anhaltspunkt dafür, dass für die Berechnung der Untertagestruktur ein stochastischer Ansatz aussagekräftigere Ergebnisse liefern kann. Die Annahme, dass die Einbeziehung von unsicheren Materialparametern aussagekräftigere Ergebnisse liefern kann, wird beim Betrachten der Abbildungen 6.7, 6.8, 6.11 und 6.12 noch untermauert. Da gezeigt werden konnte, dass die Materialparameter ν und E_∞ und die Schädigungsvariable D große Sensitivität hinsichtlich der Kriechkurven aufweisen, werden diese Größen mit der im Kapitel 8.2 vorgestellten Methode entwickelt. Der Vorteil einer stochastischen gegenüber einer deterministischen Berechnung liegt darin, dass die Ergebnisse mehr Informationen enthalten.

7. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

In den vorherigen Kapiteln wurde davon ausgegangen, dass die deterministische Mathematik zur Beschreibung des Materialverhaltens von Salzgestein anwendbar ist, was den Kapiteln 4 und 5 entnommen werden kann.

Anders als bei der deterministischen Mathematik wird bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Annahme aufgegeben, dass die Werte von Skalaren und Matrizen fest sind. Dieses Kapitel befasst sich mit dem theoretischen Grundlagen die benötigt werden um Konzepte einzuführen, mit dessen Hilfe sich die stochastischen Parameter und Systemgrößen beschreiben lassen.

Im Kapitel 7.1 wird die Definition des Wahrscheinlichkeitsraumes beschrieben. Zufallsabhängige Größen werden im Kapitel 7.2 vorgestellt und definiert. Wie diese Größen verteilt sind, wird in Kapitel 7.3 gezeigt. Ob die vom Zufall abhängenden Größen stochastisch abhängig oder unabhängig sind, wird im Kapitel 7.4 erläutert. Die Charakterisierung der Zufallsgrößen erfolgt mit den stochastischen Momenten, die im Kapitel 7.5 vorgestellt werden. Das Kapitel 7.6 stellt die Rosenblatttransformation dar, mit der ein Zufallsvektor in einen anderen Zufallsvektor transformiert werden kann.

Da dieses Kapitel nur einen groben Überblick auf das Themenfeld der Wahrscheinlichkeitstheorie gibt, wird der interessierte Leser auf folgende Literatur verwiesen, Georgii [2015], Klenke [2013], Tappe [2013] und Gnedenko [1997].

7.1. Wahrscheinlichkeitsraum

Georgii [2015], schlägt für die Erstellung eines mathematischen Modells zur Abbildung des Anwendungsgebietes folgende drei Schritte vor.

7.1.1. Festlegen des Ergebnisraumes

Um den Ergebnisraum zu definieren muss der abzubildene Vorgang hinsichtlich der Vorgänge analysiert werden und welche von diesen von Interesse sind. In der Menge Ω werden alle Möglichkeiten, die von Interesse sind, zusammengefasst. Wie der Ergebnisraum festgelegt wird, soll am Beispiel eines mehrmalig geworfenen Würfels verdeutlicht werden.

Bei einem Würfel ist man in der Regel an der geworfenen Augenzahl interessiert und nicht an der Position des Würfels auf dem Tisch und an der Handhaltung beim Wurf. Anhand dieser Überlegung ergibt sich die Menge eines n -mal geworfenen Würfels zu $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$ für $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$. Dabei ist ω_i die Augenzahl des i -ten Wurfes.

Das Vorgehen zur Bestimmung der Menge Ω lässt sich auf beliebig Systeme übertragen.

7.1.2. Bestimmen der Ereignis- σ -Algebra

In der Regel ist man nicht an der genauen Augenzahl des Würfels nach einem Wurf interessiert, sondern an dem Eintreten des Ereignisses, welches aus bestimmten Einzelergebnissen besteht. Die Ereignisse sind eine Teilmenge von Ω . Der Sachverhalt, dass ein Ereignis eine Menge von Ergebnissen ist, kann am Beispiel einer n -mal geworfenen Münze mindestens k -mal der Wert Kopf eintritt erläutert werden. Dieses kann durch die Teilmenge

$$A = \left\{ \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \sum_{i=1}^n \omega_i \geq k \right\} \quad (7.1)$$

mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{0, 1\}^n$ beschrieben werden. Das System \mathcal{F} von Ereignissen muss so festgelegt werden, dass jedem Ereignis $A \in \mathcal{F}$ eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für das Eintreten von A zuzuordnen ist. Gemäß Georgii [2015] muss das System $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$ folgende Minimalanforderungen erfüllen,

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
 2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$,
 3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$.
- (7.2)

Der Ereignisraum bzw. der messbare Raum ergibt sich durch das Paar (Ω, \mathcal{F}) . Wie die σ -Algebra festzulegen ist, kann z.B. Georgii [2015] entnommen werden.

7.1.3. Wahrscheinlichkeitsbewertung der Ereignisse

Ein wichtiger Punkt in der Stochastik ist es, den Grad der Wahrscheinlichkeit zu bewerten. Ausgehend davon, dass für $A_i \in \mathcal{F}$ ein Maß $\mathcal{P}(A) \in [0, 1]$ gesucht wird, dass die Wahrscheinlichkeit von A angibt. Für die Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes schlägt Georgii [2015] vor, dass die folgenden

Rahmenbedingungen sinnvollerweise erfüllt sein sollten

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_i) &\geq 0, \quad \forall A_i \in \mathcal{F}, \\ \mathcal{P}(\Omega) &= 1, \\ \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) &= \sum_{i \geq 1} \mathcal{P}(A_i). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Hat die Funktion $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ die Eigenschaften nach den Gleichungen 7.3a bis 7.3c, ergibt sich der Wahrscheinlichkeitsraum zu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Der Wahrscheinlichkeitsraum beschreibt einen Hilbert Raum, wenn die nachfolgenden Bedingungen erfüllt sind. Die verwendeten Zufallsvariablen, die in Kapitel 7.2 behandelt werden, besitzen eine endliche Varianz. Wenn das der Fall ist, kann ein inneres Produkt und eine Norm für den Wahrscheinlichkeitsraum definiert werden.

7.2. Zufallsvariablen

Die Zufallsvariable X stellt in der Stochastik eine Größe dar, dessen Wert vom Zufall abhängt. Die Abhängigkeit vom Zufall wird im Rahmen dieser Arbeit durch die Schreibweise $X(\theta)$ ausgedrückt. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass nur reelle Zufallsvariablen behandelt werden. Für reelle Zufallsvariablen erfolgt die Abbildung von Ω in die Menge \mathbb{R} durch die Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Somit kann für jedes Ereignis $\theta \in \Omega$, unter Einbeziehung der folgenden Gesetzmäßigkeit, Georgii [2015]

$$\{\theta : X(\theta) \leq c\} \in \mathcal{F}, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \tag{7.4}$$

eine reelle Zahl zugeordnet werden. Anhand eines Beispiels, was in der Abbildung 7.1 gezeigt ist, soll die Zuordnung veranschaulicht werden. Ausgangspunkt für das Experiment bilden zwei Würfel, die paarweise geworfen werden. Für das Experiment lässt sich folgender Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ definieren, mit der Menge Ω die alle 36 möglichen Ergebnisse $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ beinhaltet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit das Ereignis eintritt kann der Abbildung 7.1 entnommen werden, bzw. der Tabelle 7.1, in der die Ereignisse nochmal aufbereitet wurden.

$X(\theta)$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{P}(X = X(\theta))$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabelle 7.1.: Verteilungstabelle für die Ereignisse aus Abbildung 7.1

Es ist zu erkennen, dass für die Definition der Borelschen σ -Algebra und der

Funktion $X(\theta)$ eine Beschreibung der Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ notwendig ist. Dieses erfolgt mittels Verteilungsfunktionen. Da die Verteilung nicht immer so eindeutig ist wie in Abbildung 7.1 gezeigt, müssen dafür Verteilungsfunktionen definiert werden, was in Kapitel 7.3 erfolgt.

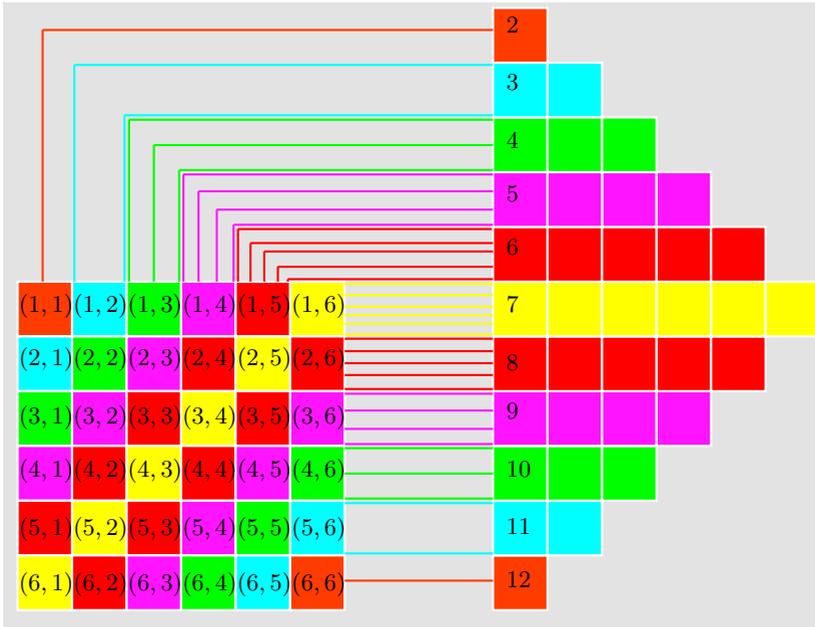


Abbildung 7.1.: Verteilung der Wahrscheinlichkeit und die Summe von zwei gleichzeitig geworfenen Würfeln

7.2.1. Zufallsvektoren

In dem vorherigen Kapitel wurde davon ausgegangen, dass die Zufallsgröße X eine Abbildung darstellt, die jedem Ergebnis $\theta \in \Omega$ nur eine reelle Zahl $X(\theta)$ zuordnet, Hainzl [2013]. In diesem Kapitel wird die Erweiterung der Zufallsvariablen $X(\theta)$ auf einen Zufallsvektor $\mathbf{X}(\theta)$ gezeigt, für weiterführende Beschäftigung mit diesem Themengebiet wird auf Braml [2010], Steland [2013] und Hainzl [2013] verwiesen. Ausgehend vom Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ wird der Zufallsvektor $\mathbf{X}(\theta)$ mit der Dimension M aus den einzelnen Zufallsvariablen $X_1(\theta)$ bis $X_M(\theta)$ definiert. Formal kann der Zufallsvektor durch

$$\mathbf{X}(\theta) = [X_1(\theta), \dots, X_M(\theta)]^T \quad (7.5)$$

ausgedrückt werden. Analog zur Zufallsvariable erfolgt für reelle Zufallsvektoren die Abbildung von Ω in die Menge \mathbb{R}^M durch die Funktion $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^M$. Die mehrdimensionalen Verteilungsfunktionen werden im Kapitel 7.3.4 vorgestellt.

7.3. Verteilungsfunktion

Wie man der Abbildung 7.2 entnehmen kann, können Zufallsvariablen stetig oder diskret verteilt sein. In den nachfolgenden Kapiteln werden die kumulativen Verteilungsfunktionen (CDF) und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (PDF) für die jeweilige Verteilung vorgestellt.

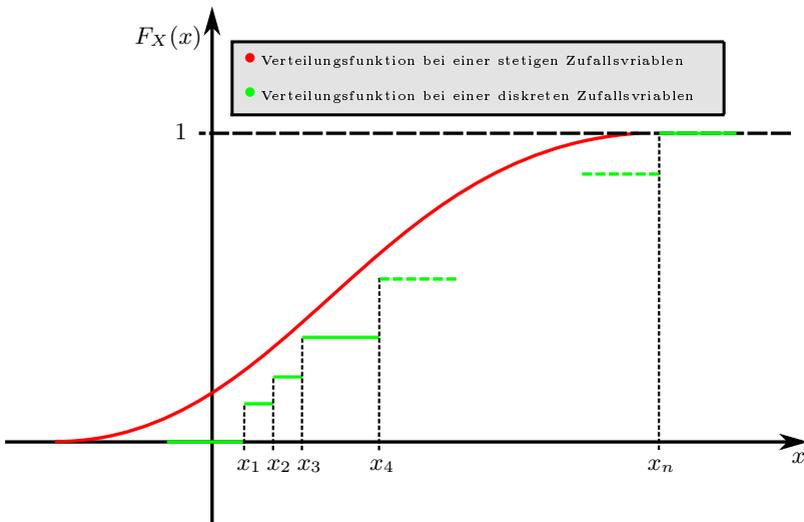


Abbildung 7.2.: Stetige und diskrete Verteilungsfunktion

7.3.1. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen

Die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen X , die auf dem Intervall $-\infty < X < \infty$ definiert ist, kann durch die CDF

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x) \quad (7.6)$$

dargestellt werden. Die CDF erhält man durch Integration $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ der PDF f_X , die folgenden Gesetzmäßigkeiten unterliegen,

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) &= 1, \\ \mathcal{P}(x_1 \leq X \leq x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx = F_X(x_2) - F_X(x_1), \\ 0 &\leq F_X(x) \leq 1. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Aus diesen Zusammenhängen lässt sich ableiten, dass die monoton wachsende CDF F_X die Stammfunktion der PDF f_X ist und kann durch

$$F'_x(x) = f_X(x) \tag{7.8}$$

ausgedrückt werden.

7.3.2. Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen

Die diskreten Zufallsvariablen X können durch die folgende PDF ausgedrückt werden,

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathcal{P}(X = x_i) & \text{für } x = x_i \\ 0 & \text{für } x \neq x_i \end{cases}. \tag{7.9}$$

Die dazugehörige CDF erhält man durch die Aufsummierung aller Werte $x_i \leq x$ und kann formal durch ausgedrückt werden

$$F_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f_X(x_i). \tag{7.10}$$

Die CDF und PDF unterliegen den nachfolgenden Eigenschaften,

$$\begin{aligned} f_X(x_i) &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) &= 1, \\ 0 &\leq F_X(x) \leq 1. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Durch $\mathcal{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ kann die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt werden, dass die Zufallsvariable X im Intervall $[a, b]$ liegt. Da im Rahmen dieser Arbeit nur stetige Zufallsvariablen vorkommen, wird auf eine weitere Darstellung von diskreten Zufallsvariablen verzichtet.

7.3.3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Im Anhang B sind einige ausgewählte PDF's mit den dazugehörigen CDF's dargestellt. Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen bildet die Gleichung B.1, die die PDF für normalverteilte $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ Zufallsvariablen X darstellt. Die folgende PDF

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (7.12)$$

für den Sonderfall der Standardnormalverteilung ergibt sich dadurch, dass die Parameter zu $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ gesetzt werden. Mit Hilfe der Gleichung 7.12 erfolgt die Herleitung des Polynomial Chaos in Kapitel 8.2. Aus physikalischer Sicht eignet sich die Normalverteilung nicht für die Beschreibung von Materialparametern wie zum Beispiel der Elastizitätsmodul, da der Definitionsbereich der Normalverteilung von $(-\infty, +\infty)$ geht. Dieses kann dazu führen, dass der Elastizitätsmodul negativ wird, was aus physikalischer Sicht nicht zulässig ist. Anhand zweier Beispiele wird gezeigt, dass die Anwendung der Normalverteilung aus ingenieurtechnischer Sicht durchaus gerechtfertigt ist. Die verwendeten Systemparameter für den Elastizitätsmodul E und die Schädigung D sind in der Tabelle 7.2 gezeigt und die daraus resultierenden CDF's können der Abbildung 7.3 entnommen werden.

	E	D
μ	210000 MPa	0
σ	42000 MPa	0,1
a	0 MPa	-0,3
b	420000 MPa	0,3
$\mathcal{P}(a < E \leq b)$	99,99994 %	99,73002 %

Tabelle 7.2.: Systemparameter

Das Experiment für den Elastizitätsmodul zeigt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{P}(a < E \leq b) = 99,99994 \%$ der Elastizitätsmodul im positiven dem Bereich liegt. Daraus lässt sich ableiten, dass die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(E \leq 0)$, dass der Elastizitätsmodul einen negativen Wert annimmt, bei r und $2,8665 \cdot 10^{-5} \%$ liegt. Da aus heutiger Sicht die Herstellung von Materialien in einen sehr geringen Toleranzbereich liegt, kann aus Ingenieurssicht ausgeschlossen werden, dass ein negativer Elastizitätsmodul bei der Berechnung auftritt. Eine Parameterstudie zu diesem Thema kann dem Kapitel 9.1 entnommen werden. Das Eintreten von negativen Werten für die Schädigung ist aus physikalischer Sicht vertretbar, da diese Bereiche als Bereiche mit einer geringeren Anzahl an Fehlstellen im Gittergefüge zu interpretieren sind (siehe Kapitel 4.3). Ein anderer Weg um negative Materialparameter zu umgehen, ist die Wahl einer anderen Verteilung der Materialparameter. Wendet man die logarithmische

Normalverteilung auf die Materialparameter an, ist es ausgeschlossen, dass es zu negativen Werten kommt, da der Definitionsbereich $]0, +\infty)$ ist. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Verteilung der Materialparameter sowohl mit der Normalverteilung als auch mit der logarithmischen Normalverteilung.

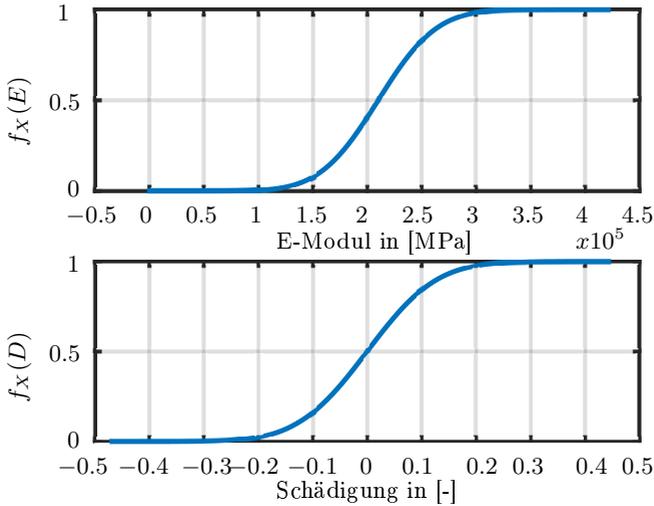


Abbildung 7.3.: CDF für den Elastizitätsmodul E und die Schädigung D

7.3.4. Mehrdimensionale Verteilungsfunktion

Nach Braml [2010] kann die CDF $F_{\mathbf{X}}$ eines Zufallsvektors \mathbf{X} formal durch

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_M) = \mathcal{P}[(X_1 \leq x_1) \cap \dots \cap (X_M \leq x_M)] = \mathcal{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) \quad (7.13)$$

ausgedrückt werden. Die PDF $f_{\mathbf{X}}$ für den M dimensionalen Fall erhält man durch den Zusammenhang, dass die CDF $F_{\mathbf{X}}$ die Stammfunktion der PDF $f_{\mathbf{X}}$ ist und kann durch den folgenden Ausdruck,

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_M) = \frac{\partial^M F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_M)}{\partial x_1, \dots, \partial x_M}, \quad (7.14)$$

beschrieben werden. Die CDF $F_{\mathbf{X}}$ und die PDF $f_{\mathbf{X}}$ für Zufallsvektoren unterliegen den gleichen Gesetzmäßigkeiten die bereits in den vorherigen Kapiteln erläutert wurden. Wie sich die stochastischen Kennwerte für Zufallsvektoren bestimmen lassen, ist in Braml [2010] beschrieben. Anhand eines einfachen

Beispiels soll die Berechnung der PDF für einen Zufallsvektors \mathbf{X} mit der Dimension $M = 2$ verdeutlicht werden. Ausgangspunkt bildet die PDF für den Sonderfall der Standardnormalverteilung. Durch die Verallgemeinerung auf den M dimensionalen Fall kann die Gleichung 7.12 zu

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_M) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M x_i^2\right) \quad (7.15)$$

umformuliert werden. Die Abbildung 7.4 zeigt die Verteilung zweier standardnormalverteilter Zufallsvariablen $X_1(\theta)$ und $X_2(\theta)$.

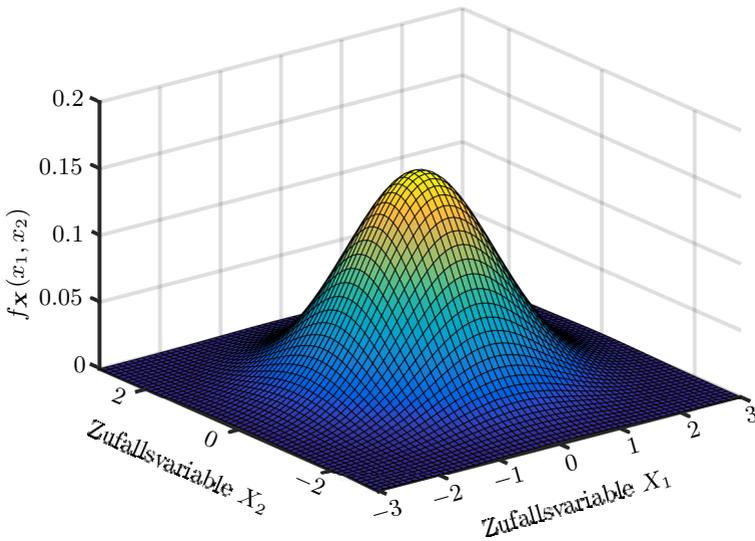


Abbildung 7.4.: PDF einer zweidimensionalen Standardnormalverteilung

7.4. Stochastische Unabhängigkeit

Gegeben ist eine Urne, in der die gleiche Anzahl an weißen und blauen Kugeln enthalten sind. Es ist zu erkennen, dass das Eintreten eines Ereignisses vom vorherigen Ereignis abhängt. Anders als beim vorherigen Beispiel, ist das Beispiel aus Kapitel 7.2 der gleichzeitige Wurf mit zwei Würfeln unabhängig vom vorherigen Ereignis, da sich die Wahrscheinlichkeiten nicht ändern. Formal

kann dieser Zusammenhang durch

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A) \quad (7.16)$$

und

$$\mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B) \quad (7.17)$$

ausgedrückt werden, wobei A das Ereignis A und B das Ereignis B darstellt. Die Unabhängigkeit des Eintretens des Ereignisses A , mit der Zufallsvariablen X_1 und der PDF f_{X_1} , vom Ereignis B , mit der Zufallsvariablen X_2 und der PDF f_{X_2} , hat eine besondere Bedeutung für die Beschreibung des Materialverhaltens.

Durch die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_i, \dots, X_M kann die gemeinsame PDF

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^M f_{X_i}(x_i), \quad (7.18)$$

als Produkt aus den einzelnen PDF's gebildet werden. Dieses hat den Vorteil, dass keine genauen Kenntnisse über den gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum vorliegen müssen und daher keine gemeinsame PDF definiert werden muss. Dieses verringert den Formulierungsaufwand der Gleichungen und den Implementierungsaufwand. Des Weiteren ist eine experimentelle Bestimmung der stochastischen Abhängigkeit der Materialparameter zur Beschreibung des Materialverhaltens so gut wie nicht möglich. Ausgehend von Gleichung 7.7c kann die Wahrscheinlichkeit durch das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden,

$$\mathcal{P}(\mathbf{a} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{b}) = \prod_{i=1}^M \mathcal{P}(a_i \leq X_i \leq b_i), \quad (7.19)$$

dass die Zufallsvariable \mathbf{X} im Intervall $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ liegt. Der Erwartungswert

$$\langle \mathbf{X} \rangle = \prod_{i=1}^M \langle X_i \rangle, \quad (7.20)$$

ergibt sich ebenfalls als Produkt der einzelnen Erwartungswerte $\langle X_i \rangle$.

7.5. Stochastische Momente

Mit Hilfe der stochastischen Momente lassen sich Zufallsgrößen charakterisieren, nach Gnedenko [1997] können die stochastischen Momente allgemein durch

$$\nu_n(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^n f_x dx \quad (7.21)$$

beschrieben werden, mit dem Parameter a . Wird der Parameter zu null gesetzt $a = 0$, erhält man die Anfangsmomente. Die n -ten Anfangsmomente können allgemein durch

$$\nu_n = \langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_x dx \quad (7.22)$$

ausgedrückt werden. Das Anfangsmoment erster Ordnung

$$\nu_1 = \mu = \langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x dx, \quad (7.23)$$

das im Allgemeinen Erwartungswert genannt wird, stellt den wichtigsten Kennwert für die Zufallsvariablen dar. Die Zentralmomente erhält man dadurch, dass der Parameter a gleich dem Anfangsmoment erster Ordnung $a = \langle X \rangle$ ist. Das Zentralmoment erster Ordnung,

$$\nu_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a) f_x dx = 0, \quad (7.24)$$

ist per Definition immer null. Die Varianz

$$\nu_2(a) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 f_x dx, \quad (7.25)$$

das dem Zentralmoment zweiter Ordnung entspricht, ist das wichtigste Zentralmoment, da dieser Kennwert die Streuung der Wahrscheinlichkeitsverteilung angibt. Aus der Varianz kann durch die Beziehung $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ die Standardabweichung bestimmt werden. Der Grad der Asymmetrie der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird durch das Zentralmoment dritter Ordnung,

$$\nu_3(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^3 f_x dx, \quad (7.26)$$

beschrieben, was auch Schiefe genannt wird. Ist $\nu_3(a)$ kleiner null spricht man von der Linksschiefe und bei $\nu_3(a)$ größer null wird von Rechtsschiefe gesprochen. Ist das Zentralmoment dritter Ordnung gleich null, ist die Verteilung symmetrisch (siehe Abbildung 7.3 und 7.4). Die Wölbung,

$$\nu_4(a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^4 f_x dx, \quad (7.27)$$

welche dem Zentralmoment vierter Ordnung entspricht, beschreibt den Grad der „Gipflichkeit“, nach Cleff [2011]. Von „Steilgipfig“ spricht man wenn $\nu_4(a)$

größer null ist und ist $\nu_4(a)$ kleiner null spricht man von „Fachgipfig“. Ist das Zentralmoment vierter Ordnung gleich null ergibt sich die Normalverteilung (siehe Abbildung 7.4). Wie sich die stochastischen Momente für die Polynomial Chaos Entwicklung bestimmen lassen ist im Kapitel 8.2.2 erläutert.

7.6. Rosenblatttransformation

Die Rosenblatttransformation geht auf den US amerikanischer Mathematiker Murray Rosenblatt zurück und wurde zuerst in der Arbeit Rosenblatt [1952] veröffentlicht. Für eine ausführliche Beschäftigung mit der Rosenblatttransformation sei auf Keese [2004], Kotulski und Szczepinski [2009], Blatman [2009], Hurtado [2013] und Rüschendorf [2013] verwiesen. Der Zufallsvektor $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_M]^T$, mit dem gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaßen $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ und $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ und mit der Dimension M , soll mittels der Transformation \mathbf{T} in einen neuen Zufallsvektor $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_M]^T$ überführt werden. Dabei sei die Komponente des Zufallsvektors Y stochastisch unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]^M$. Nach Rosenblatt [1952] erfolgt die Überführung des Zufallsvektors \mathbf{X} in den Zufallsvektor \mathbf{Y} durch den folgenden Ausdruck

$$\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_M]^T = \mathbf{T}\mathbf{x} = T(x_1, \dots, x_M), \quad (7.28)$$

mit der Transformation \mathbf{T} , die durch

$$\begin{aligned} Z_1 &= \mathcal{P}(X_1 \leq x_1) = F_{X_1}(x_1), \\ Z_2 &= \mathcal{P}(X_2 \leq x_2 | X_1 = x_1) = F_{X_2}(x_2 | x_1), \\ &\vdots \\ Z_M &= \mathcal{P}(X_M \leq x_M | x_{M-1} = x_{M-1}, \dots, X_1 = x_1) = \dots \\ &\quad F_{X_M}(x_2 | x_{M-1}, \dots, x_1) \end{aligned} \quad (7.29)$$

geben ist, und den bedingten Verteilungsfunktionen $F_{X_i}(x_i | x_{i-1}, \dots, x_1)$, mit dem Index $i = [1, \dots, M]$. In der Arbeit Rosenblatt [1952] konnte gezeigt werden, dass durch die Transformation der Zufallsvektor $\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ gleichverteilt auf dem M dimensionalen Hyperwürfel $[0, 1]^M$ ist. In den Arbeiten von Sudret [2007] und Hurtado [2013] erfolgt die Transformation durch die Inverse und kann durch

$$\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_M]^T = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z} \quad (7.30)$$

ausgedrückt werden, mit dem Zufallsvektor $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_M]^T$ und der PDF $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ der gesuchten Zufallsvariablen $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_M]^T$. Es sei noch erwähnt, dass die Komponenten des Zufallsvektors Y stochastisch unabhängig und gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]^M$ sind. Dadurch lässt sich der Zufallsvektor \mathbf{Y} mit der vorgegeben PDF $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ durch den folgenden Ausdruck

$$\mathbf{X} = f_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{Y}), \quad (7.31)$$

in den Zufallsvektors \mathbf{X} transformieren. Es ist zu erkennen, dass mit dieser Transformation den gleichverteilten Realisierungen auf dem Intervall $[0, 1]^M$ eine gewünschte Verteilung zugeordnet werden kann.

8. Stochastische Finite Element Methoden

In diesem Kapitel werden die verwendeten stochastischen Methoden vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit relevant sind. Die Herleitung der stochastischen Differentialgleichung erfolgt in Kapitel 8.1. Die Zufallsvariablen werden in dieser Arbeit mit dem Polynomial Chaos entwickelt, die Vorstellung dieses Verfahrens erfolgt im Kapitel 8.2. Die Erweiterung der klassischen FEM um die Stochastik wird im Kapitel 8.3 erläutert.

8.1. Stochastische Differentialgleichung

Durch die stochastischen Differentialgleichungen (SDGL) lassen sich Prozesse beschreiben, die neben den deterministischen auch stochastische Einflussfaktoren besitzen. Für den interessierten Leser dieses Themengebietes wird auf Behrends [2012], Hackenbroch und Thalmaier [2013], Oksendal [2013], und Chow [2014] verwiesen, da hier nur an einem Beispiel die Herleitung verdeutlicht wird und daher nicht auf alle grundlegende Eigenschaften eingegangen wird.

Die deterministische elliptische partielle Differentialgleichung (DGL), Braess [2013],

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (8.1)$$

mit den Bedingungen, dass $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ und $\partial_u \mathcal{B} \cup \partial_t \mathcal{B} = \partial \mathcal{B}$ ist, bildet den Ausgangspunkt der Herleitung. Das Feld \mathbf{u} repräsentiert die primären Variablen und $\Delta(\bullet)$ ist der Laplace Operator. Um eine eindeutige Lösung für die DGL 8.1 zu erhalten, müssen Randbedingungen formuliert werden. Es wird zwischen zwei Randbedingungen unterschieden. Die erste Randbedingung ist die Dirichlet-Randbedingung,

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf} \quad \partial_u \mathcal{B}, \quad (8.2)$$

und die zweite Randbedingung ist die Neumann-Randbedingung,

$$\mathcal{B}_\partial(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf} \quad \partial_t \mathcal{B}. \quad (8.3)$$

Der gesamte Rand des Körpers $\partial \mathcal{B}$ wird durch die Randbedingungen $\partial_u \mathcal{B}$ und $\partial_t \mathcal{B}$ beschrieben, wobei sich die Ränder nicht überlappen dürfen.

Ergibt sich nach Analysen, dass der Prozess nicht nur deterministische sondern auch stochastische Einflussfaktoren hat, müssen diese in die DGL eingebaut werden. Die Analyse des Systems legt fest, welche Systemgrößen unsicher sind, da nicht alle Systemgrößen unsicher sein müssen. Läuft zum Beispiel ein Prozess unter Laborbedingungen ab und die Geometrie der Proben streut nicht, kann die Geometrie als deterministisch angenommen werden. Um so mehr Systemgrößen stochastisch verteilt sind, um so größer wird das zu lösende System (siehe Kapitel 8.3.2). Die Systemgrößen, Materialparameter, Randbedingungen und Geometrie können je nach Prozess unsicher sein. Die unsicheren Systemgrößen können Zufallsvariablen (siehe Kapitel 7.2), Zufallsvektoren oder Zufallsfelder sein und benötigen einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ (siehe Kapitel 7.1) in dem sie definiert sind. Eine SDGL erhält man durch Einsetzen der stochastisch verteilten Systemgrößen in die DGLs 8.1, 8.2 und 8.3. Somit muss nach Nobile und Tempone [2009] eine Lösung für $\mathbf{u} : \mathcal{B} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gefunden werden, die die nachfolgenden Gleichungen erfüllt,

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \theta) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta), & \mathbf{x} &\in \mathcal{B} \times \Omega, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}(\theta), & \text{auf } \partial_u \mathcal{B} \times \Omega, \\ \mathcal{B}_\partial(\mathbf{x}, \theta) &= \bar{\mathbf{t}}(\theta), & \text{auf } \partial_t \mathcal{B} \times \Omega. \end{aligned} \tag{8.4}$$

An der Formulierung der SDGLs kann man erkennen, dass die Geometrie keine Unsicherheiten beinhaltet, da das betrachtete Gebiet \mathcal{B} keine Funktion von θ ist. In Nobile und Tempone [2009] ist die Herleitung der schwachen Form gezeigt, hinsichtlich der Existenz, der Eindeutigkeit und die analytischen Eigenschaften der Lösung. Wie die Lösung durch die Wahl der Systemparameter, Randbedingungen und Anfangsbedingungen beeinflusst wird, wird in Nobile und Tempone [2009] diskutiert. Für die weitere Betrachtung dieses Themengebietes hinsichtlich der Güte und Existenz der Lösung, sei auf Babuska et al. [2004], Xu und Graham-Brady [2005], Babuska et al. [2007] und Nobile et al. [2008] verwiesen. Die hier gezeigte Herleitung der schwachen Form geht auf Xiu und Hesthaven [2005] zurück.

Das Lösen der SDGLs 8.4a bis 8.4c erfolgt mittels des stochastischen Galerkin Verfahrens, die Lösungsschritte sind analog zum deterministischen Galerkin Verfahrens was in Braess [2013] gezeigt ist. Die mathematische Existenz der Lösung für die SDGLs kann der vorgeschlagenen Literatur entnommen werden. Die schwache Form der SDGLs ergibt sich durch die Integration über das Gebiet \mathcal{B} und den Wahrscheinlichkeitsraum mit der Dimension M und die Diskretisierung der Zufallsvariablen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_\infty)$ mit den dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten $\hat{f}_i : \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R}_i$. Es ist zu erkennen, dass eine unendliche Anzahl an Zufallsvariablen aus praktischer Sicht nicht handelbar ist, daher wird der Wahrscheinlichkeitsraum mit der endlichen Dimension M beschränkt (siehe Kapitel 8.2). Der Träger Γ sei folgendermaßen definiert,

$$\Gamma_i \equiv X_i(\Omega), \tag{8.5}$$

in \mathbb{R} für $i = 1, \dots, M$. Dadurch kann die Wahrscheinlichkeitsdichte durch

$$\hat{f}(\mathbf{X}) = \prod_{m=1}^M \hat{f}(X_m) \quad (8.6)$$

ausgedrückt werden, mit dem dazugehörigen Träger

$$\Gamma \equiv \prod_{m=1}^M \Gamma_m \subset \mathbb{R}^M. \quad (8.7)$$

Die stochastisch diskretisierte Form der SDGLs 8.4a bis 8.4c ergibt sich durch das Einsetzen der Zufallsvariablen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$, somit ergibt sich folgendes SDGLs System

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{X}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{X}) \in \mathcal{B} \times \Gamma, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{X}), \quad \text{auf } \partial_u \mathcal{B} \times \Gamma, \\ \mathcal{B}_\partial(\mathbf{x}, \mathbf{X}) &= \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{X}), \quad \text{auf } \partial_t \mathcal{B} \times \Gamma. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Mit $\delta \mathbf{u}$ wird die Testfunktion eingeführt. Für die Testfunktion gilt $\delta \mathbf{u} \in V_\Gamma \subset \mathcal{L}_T^2(\Gamma)$, wobei $V_\Gamma \subset \mathcal{L}_T^2(\Gamma)$ einen endlich dimensionalen Unterraum darstellt. Dieser Raum beschreibt alle \mathcal{L}^2 integrierbaren Funktionen. Nach dem Doob-Dynkin-Lemma können, wie in Bobrowski [2005], Oksendal [2013] und Rao et al. [2014] gezeigt ist, die Systemparameter und $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{X})$ mit denselben Zufallsvariablen beschrieben werden. Die schwache Form der SDGLs kann wie folgt ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \hat{f}_{\mathbf{X}} \Delta(\mathbf{u}_V(\mathbf{x}, \mathbf{X})) \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} &= \dots \\ \int_{\Gamma} \hat{f}_{\mathbf{X}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad \forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \in V_\Gamma, \mathbf{x} \in \mathcal{B}, & \\ \int_{\Gamma} \hat{f}_{\mathbf{X}} \mathcal{B}_\partial(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} &= \dots \\ \int_{\Gamma} \hat{f}_{\mathbf{X}} \mathbf{t}(\mathbf{X}) \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad \forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \in V_\Gamma, \mathbf{x} \in \mathcal{B}. & \end{aligned} \quad (8.9)$$

Für die approximierte Lösung gilt $\mathbf{u}_V \in V_\Gamma(\mathbf{X})$. Unter Einbeziehung des Erwartungswertes $\langle X \rangle = \int_{\Omega} \hat{X} f_X(\hat{X})$ können die Gleichungen 8.9a und 8.9b auch durch

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\mathbf{u}_V(\mathbf{x}, \mathbf{X})) \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \rangle &= \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \rangle, \quad \forall (\mathbf{x}, \delta \mathbf{u}(\mathbf{X})) \in \mathcal{B} \otimes V_\Gamma, \\ \langle \mathcal{B}_\partial(\mathbf{x}, \mathbf{X}) \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \rangle &= \langle \mathbf{t}(\mathbf{X}) \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \rangle, \quad \forall (\mathbf{x}, \delta \mathbf{u}(\mathbf{X})) \in \mathcal{B} \otimes V_\Gamma, \end{aligned} \quad (8.10)$$

ausgedrückt werden. Die Gleichungen 8.10a und 8.10b stellen die schwache Form, die im endlichdimensionalen Wahrscheinlichkeitsraum definiert ist, der

SDGLs 8.4a bis 8.4c dar. In dieser Arbeit wird das Polynomial Chaos für die Wahl des Unterraumes Γ herangezogen.

Abschließend lässt sich festhalten, dass für die Lösung der SDGLs zwei Diskretisierungen erforderlich sind, die erste für den Wahrscheinlichkeitsraum und die zweite für das geometrische Gebiet \mathcal{B} .

8.2. Das Polynomial Chaos

Das Polynomial Chaos (PC), auch Wiener Chaos Entwicklung genannt, wurde zuerst von Wiener [1938] publiziert und stellt eine Reihenentwicklung einer Zufallsvariablen dar.

Ausgehend von der Funktion \mathcal{M} , die von Blatman [2009] als „black-box function“ bezeichnet wird, beschreibt ein solches mathematisches Modell das physikalische System als eine deterministische Abbildung von \mathbb{R}^M auf \mathbb{R}^Q , wobei M die Dimension des Wahrscheinlichkeitsraumes und Q die Dimension des Outputs darstellt. Die Funktion \mathcal{M} ist abhängig von einem Set von Input-Parametern $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_M\}^T$. Im Allgemeinen beschreiben die Input-Parameter Materialparameter, geometrische Eigenschaften oder veränderliche Randbedingungen. Durch die Abhängigkeit der Funktion $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ ergibt sich ein Set von Output-Parametern $\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_Q\}^T$.

Für jede Komponente des Zufallsvektors $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_M\}^T$ gilt $X_i(\theta) : \Omega \rightarrow \mathcal{B}_X$. Die Komponenten spannen den Wahrscheinlichkeitsraum mit der Dimension M auf. Die Varianz der Zufallsvariablen

$$\langle X_i^2 \rangle = \int_{\Omega} X_i^2(\theta) d\mathcal{F}_i(\theta) = \int_{\mathcal{B}_X} x_i^2 f_{X_i}(x) dx < +\infty \quad (8.11)$$

beschränkt den Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}; \mathbb{R})$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{X_i}(\mathcal{B}_X)$. Durch das innere Produkt, was durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle X_1, X_2 \rangle_{\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}} &= \langle X_1, X_2 \rangle = \int_{\Omega} X_1(\theta) X_2(\theta) d\mathcal{P}(\theta) = \dots \\ &= \int_{\mathcal{B}_{X_1 X_2}} x_1 x_2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (8.12)$$

gegeben ist, ergibt sich mit der Gleichung 8.11 nach Blatman [2009], dass der Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}; \mathbb{R})$ einen Hilbert-Raum darstellt. Das Produkt des inneren Produktes gibt die Norm an und ist durch

$$\|X\|_{\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}} = \sqrt{\langle X^2 \rangle} \quad (8.13)$$

definiert. Der Input Vektor für das physikalische Modell ist durch den Zufallsvektor $\mathbf{X}(\theta)$ repräsentiert, mit der dazugehörigen PDF $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. Der Output ergibt sich durch die Beziehung $\mathbf{Y}(\theta) = \mathcal{M}(\mathbf{X}(\theta))$, dieser Sachverhalt ist in der Abbildung 8.1 dargestellt.

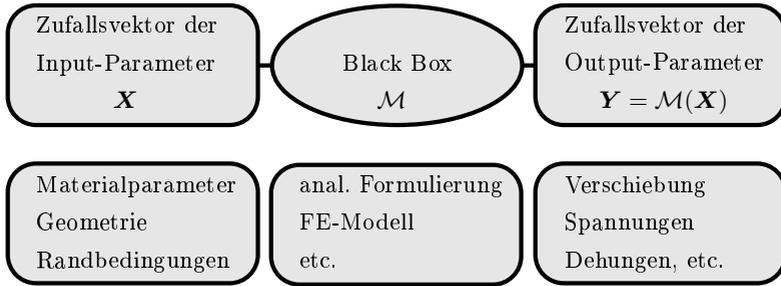


Abbildung 8.1.: Ablaufskizze bei stochastischen Prozessen nach Blatman [2009]

Mit Hilfe von geeigneten Polynomen $\bar{\Phi}_i$, die eine vorgegebene Verteilung aufweisen, und einer Reihe von deterministischen Koeffizienten $\bar{\mathcal{M}}_i$ erfolgt die PC Entwicklung für $\mathcal{M}(\mathbf{X})$. Wie die deterministischen Koeffizienten für die PC Entwicklung berechnet werden, wird in den Kapiteln 8.2.6 und 8.2.7 erläutert. In Anlehnung an Ghanem und Spanos [1991], Keese [2004] und Blatman [2009] kann die PC Entwicklung folgendermaßen geschrieben werden,

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}(\theta)) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\mathcal{M}}_i \bar{\Phi}_i(\theta). \quad (8.14)$$

Die orthogonalen Polynome $\bar{\Phi}_i$ werden so definiert, dass sie eine Basis für den Hilbert-Raum bilden,

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} \bar{\Phi}_i = \mathcal{S} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}; \mathbb{R}). \quad (8.15)$$

Die so definierte Basis soll ebenfalls für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen gelten. Anhand der Gleichung 8.14 ist zu erkennen, dass die Reihenentwicklung für die Funktion $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ aus einer unendlichen Summe besteht. Aus diesem Sachverhalt wird deutlich, dass aus praktischer Sicht die Reihenentwicklung nach einem geeigneten Glied abgebrochen wird. Somit kann für die Gleichung 8.14 unter Einbeziehung der Beschränkung folgender Ausdruck formuliert werden,

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}(\theta)) \approx \sum_{i=0}^{P-1} \bar{\mathcal{M}}_i \bar{\Phi}_i(\theta), \quad (8.16)$$

mit der Anzahl der Polynome P , die der Dimension der PC-Basis entsprechen und

$$\bar{\Phi}_i \in \mathcal{S}^{\mathcal{I}}. \quad (8.17)$$

Die Diskretisierung des stochastischen Raumes muss so erfolgen, dass der Zusammenhang $\mathcal{S}^{\mathcal{I}} \subset \mathcal{S}$ gilt. In der Veröffentlichung von Soize und Ghanem [2004] konnte gezeigt werden, dass die Reihenentwicklung bzgl. der \mathcal{L}^2 konvergiert,

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow +\infty} \left\| \mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{i=0}^{P-1} \bar{\mathcal{M}}_i \bar{\Phi}_i(\theta) \right\|_{\mathcal{L}^2}^2 &\equiv \dots \\ \lim_{P \rightarrow +\infty} \left\langle \left(\mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{i=0}^{P-1} \bar{\mathcal{M}}_i \bar{\Phi}_i(\theta) \right)^2 \right\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Traditionell erfolgte die PC Entwicklung der standardnormalverteilten Zufallsvariablen mit Hermiten Polynomen, Wiener [1938], Ghanem und Spanos [1991], Blatman [2009] und Maitre und Knio [2010]. Da stochastische Prozesse nicht ausschließlich mit standardnormalverteilten Zufallsvariablen beschrieben werden können, wurde die PC Entwicklung um weitere Verteilungen der Zufallsvariablen ergänzt. Die dazugehörigen Polynome können den Asky-Schema entnommen werden, was im Kapitel 8.2.4 vorgestellt wird. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Hermite Polynome verwendet.

8.2.1. Grundlagen

Die Entwicklung der Zufallsvariable X mittels des Polynomial Chaos kann nach Maitre und Knio [2010], Xiu und Karniadakis [2002] und Ghanem und Spanos [1991] allgemein durch

$$\begin{aligned} X(\theta) &= \bar{X}_0 \bar{\Phi}_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} \bar{X}_{i_1} \bar{\Phi}_1(\xi_{i_1}(\theta)) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \bar{X}_{i_1 i_2} \bar{\Phi}_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \bar{X}_{i_1 i_2 i_3} \bar{\Phi}_3(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta)) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} \bar{X}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \bar{\Phi}_4(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta), \xi_{i_4}(\theta)) \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (8.19)$$

beschrieben werden. Durch eine eindeutige Beziehung zwischen $\Phi()$ und $\psi()$ kann die Entwicklung der Zufallsvariable X in Gleichung 8.19 nach Maitre

und Knio [2010] in einem kompakteren Ausdruck überführt werden

$$X(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{X}_i \Psi_i(\xi(\theta)), \quad (8.20)$$

mit den Zufallsvariablen $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots]^T$, den orthogonalen Polynomen Ψ_i und den deterministischen PC-Koeffizienten \hat{X}_i . Die vereinfachte Darstellung der PC Entwicklung in Gleichung 8.20 kann vorgenommen werden, wenn die Zufallsvariablen ξ unabhängig und standardnormalverteilt sind. Dieses ist gewährleistet, wenn der Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{S}^{\mathcal{I}}$ für die Polynome $\bar{\Phi}_i$ ein Unterraum des Wiener Polynomial Chaos ist, Keese [2004]. Werden die Polynome $\bar{\Phi}_i$ nicht so gewählt, dass die Zufallsvariablen ξ unabhängig und standardnormalverteilt sind, ist der Wahrscheinlichkeitsraum ein Unterraum des generalisierten Polynomial Chaos, Xiu und Karniadakis [2003].

Um die Reihenentwicklung für $X(\theta)$ in Gleichung 8.20 praktisch nutzen zu können, wird die Reihenentwicklung auf $P - 1$ Terme beschränkt. Die Dimension der PC-Basis ergibt sich zu,

$$P = \sum_{i=1}^r \binom{M+i-1}{i}, \quad (8.21)$$

mit der gewählten Ordnung r und der Dimension M . In der Tabelle 8.1 sind für ausgewählte Dimensionen M und PC-Ordnungen r die daraus resultierenden Dimensionen der PC-Basis dargestellt. Welche Herausforderung sich aus den gewählten Dimensionen M und PC-Ordnungen r ergeben wird in den folgenden Kapiteln erläutert.

Mit Hilfe der Dimensionen der PC-Basis kann die Reihenentwicklung für $X(\theta)$ durch

$$X(\theta) = \sum_{i=1}^P \hat{X}_i \Psi_i(\xi(\theta)) \quad (8.22)$$

approximiert werden.

M	2				3				6			
r	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
P	3	6	10	15	4	10	20	35	7	28	84	210

Tabelle 8.1.: Dimension der PC-Basis P in Abhängigkeit von der Dimension M und der PC-Ordnung r , nach Maitre und Knio [2010].

8.2.2. Stochastische Momente

Der erste deterministische PC Koeffizient beschreibt das erste stochastische Moment, somit ergibt sich für den Erwartungswert folgender Ausdruck, nach Sudret et al. [2012],

$$\langle X \rangle = \hat{X}_1. \quad (8.23)$$

Aus diesem Zusammenhang lässt sich ableiten, dass alle weiteren deterministischen PC-Koeffizienten die Schwankungen um den Erwartungswert beschreiben. Sudret et al. [2012] gibt für das zweite, dritte und vierte stochastische Moment folgende Beziehungen an,

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle &= \sum_{i=2}^P \hat{X}_i^2 \langle \Psi_i^2 \rangle \\ \langle X^3 \rangle &= \sum_{i=2}^P \sum_{j=2}^P \sum_{k=2}^P d_{ijk} \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{X}_k, \quad \text{mit } d_{ijk} = \langle \Psi_i \Psi_j \Psi_k \rangle, \\ \langle X^4 \rangle &= \sum_{i=2}^P \sum_{j=2}^P \sum_{k=2}^P \sum_{l=2}^P d_{ijkl} \hat{X}_i \hat{X}_j \hat{X}_k \hat{X}_l, \quad \text{mit } d_{ijkl} = \langle \Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_l \rangle. \end{aligned} \quad (8.24)$$

8.2.3. Fehlerschätzer

In diesem Kapitel wird ein grober Überblick über das Themengebiet der Fehlerschätzer für das PC gegeben. Für weitere Informationen wird auf die Arbeiten von Xiu und Karniadakis [2003], Sudret et al. [2012], Wan und Karniadakis [2006] und Keese [2004] verwiesen.

Um die Güte der PC Entwicklung abschätzen zu können, schlagen Sudret et al. [2012] zwei Fehlerschätzer vor. Der erste Fehlerschätzer basiert auf dem Ansatz der kleinsten Fehlerquadrate,

$$\epsilon_1 = \frac{\langle (X - X(\theta))^2 \rangle}{\langle X^2 \rangle}, \quad (8.25)$$

mit der Zufallsvariablen X . Setzt man in die Gleichung die Approximation der Polynomial Chaos Entwicklung aus Gleichung 8.22 ein, erhält man

$$\epsilon_1 = \frac{\left\langle \left(X - \sum_{j=1}^P \hat{X}_j \psi_j(\boldsymbol{\xi}(\theta)) \right)^2 \right\rangle}{\langle X^2 \rangle}. \quad (8.26)$$

Durch einige Umformungen, siehe Sudret et al. [2012], ergibt sich der Ausdruck in Gleichung 8.26 zu

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{1}{\langle X^2 \rangle} \sum_{j=2}^P \hat{X}_j^2 j!. \quad (8.27)$$

Der zweite Fehlerschätzer ist der sogenannte CDF Fehlerschätzer und ist definiert als

$$\epsilon_2 = \sup_X |F_X(x) - F_{\hat{X}}(x)|, \quad (8.28)$$

mit dem Ausdruck $F_X(x)$, der die bekannten Größen beschreibt und $F_{\hat{X}}(x)$, wird durch die isoprobabilistic Transformation $F_{\hat{X}}(x) = \Phi(\xi)$ berechnet. Ein Vergleich dieser beiden Fehlerschätzer ist in Sudret et al. [2012] dargestellt.

8.2.4. Wahl der orthogonalen Polynome Φ_i

Mit Hilfe des Askey Schemas, vergleiche Schoutens [2012], Beck et al. [2012], Koekoek et al. [2010], Temme und Lapez [2001], Ferreira et al. [2003] und Xiu und Karniadakis [2002], können für eine Verteilung die zugrunde gelegten Zufallsvariablen die optimalen orthogonalen Polynome gefunden werden. Mit Hilfe der Familie der hypergeometrischen orthogonalen Polynome erfolgt die Entwicklung des PCs. Eine Teilmenge dieser hypergeometrischen orthogonalen Polynome sind die Hermite Polynome, mit denen sich das homogene Wiener Chaos entwickeln lässt, siehe Wiener [1938]. Welche Basis sich für welche Verteilung eignet, hängt von der Orthogonalität bzw. von den Wichtungsfunktionen ab. Diese entsprechen der Wahrscheinlichkeitsdichte und können nach Ghanem und Spanos [1991]; Sudret und Kiureghian [2000] und Xiu und Karniadakis [2002] durch den folgenden Zusammenhang,

$$\begin{aligned} \langle \Psi_i \Psi_j \rangle &= \int_{\Gamma} \Psi_i(\xi) \Psi_j(\xi) \hat{f}_{\xi} d\xi \\ &= \langle \psi_i^2 \rangle \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (8.29)$$

ausgedrückt werden. Das Askey Schema für bestimmte Verteilungen ist in Tabelle 8.2 dargestellt.

Wie schon erwähnt, werden im Rahmen dieser Arbeit nur standardnormalverteilte Zufallsvariablen vorausgesetzt, daher können Hermite Polynome für die Reihenentwicklung der Zufallsvariablen genutzt werden (siehe Tabelle 8.2). Dadurch kann die Gleichung 8.22 folgendermaßen ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} X(\theta) &= \sum_{i=1}^P \hat{X}_i \Psi_i(\xi(\theta)) \\ &= \sum_{i=1}^P \hat{X}_i \mathfrak{H}_i(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^P \hat{X}_i \prod_{i=1}^M h_{\alpha_i}(\xi_i). \end{aligned} \quad (8.30)$$

	Verteilung von ξ_i	Polynome Φ_i	Träger Γ
Stetig	Standardnormal	Hermite	$(-\infty, \infty)$
	Gamma	Laguerre	$[0, \infty)$
	Gamma	Laguerre (gen.)	$[0, \infty)$
	Beta	Jacobi	$[a, b]$
	Uniform	Legendre	$[a, b]$
Diskret	Possion	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$
	Negative Binomial	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Hypergeometric	Hahn	$\{0, 1, 2, \dots, N\}$

Tabelle 8.2.: Askey Schema nach Xiu und Karniadakis [2002]

Wie die eindimensionalen Hermite Polynome \mathfrak{h} und die multidimensionalen Hermite Polynome \mathfrak{H} definiert sind, kann dem Anhang C.1 entnommen werden.

8.2.5. Bestimmung der PC-Basis

Die multidimensionale Basis kann mittels des Produktes aus eindimensionalen Basen bestimmt werden,

$$\Psi_{\alpha} = \prod_{i=1}^M \psi_{\alpha_i}(\xi_i), \quad (8.31)$$

da die Zufallsvariablen ξ innerhalb des PCs stochastisch unabhängig sind. In den Arbeiten von Maitre und Knio [2010] und Sudret et al. [2012] sind Verfahren dargestellt, um die Integer-Folgen bzw. die Multi-Indexe α_i zu berechnen. Mit Hilfe der Verfahren können die multidimensionalen Hermite Polynome Ψ_i deren Grad nicht größer als die gewählte Ordnung r ist, bestimmt werden. Dadurch kann man die multidimensionalen Hermite Polynome Ψ_i unter Einbeziehung des Multi-Index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ mit M Integern bestimmt werden. Somit kann die Gleichung 8.31 folgendermaßen ausgedrückt werden,

$$\Psi_i = \Psi_{\alpha} = \prod_{i=1}^M \mathfrak{h}_{\alpha_i}(\xi_i), \quad (8.32)$$

mit der Bedingung, dass $\alpha \geq 0$ gilt. Die Arbeiten von Sudret und Kiureghian [2000] und Sudret et al. [2012] stellen dieses anhand des Urnenproblems dar, was diesen Sachverhalt anschaulich macht. Dem Anhang C.3 können eine Auswahl von ein- bis vierdimensionale PC Basen entnommen werden. Die Abbildung 8.3 zeigt die ersten sieben Hermite Polynome $\mathfrak{h}_{e_0}, \dots, \mathfrak{h}_{e_6}$, deren Definition kann der Gleichung C.5 im Anhang C.1 entnommen werden.

In der Abbildung 8.3 ist das zweidimensionale Hermite Chaos für die Ordnung

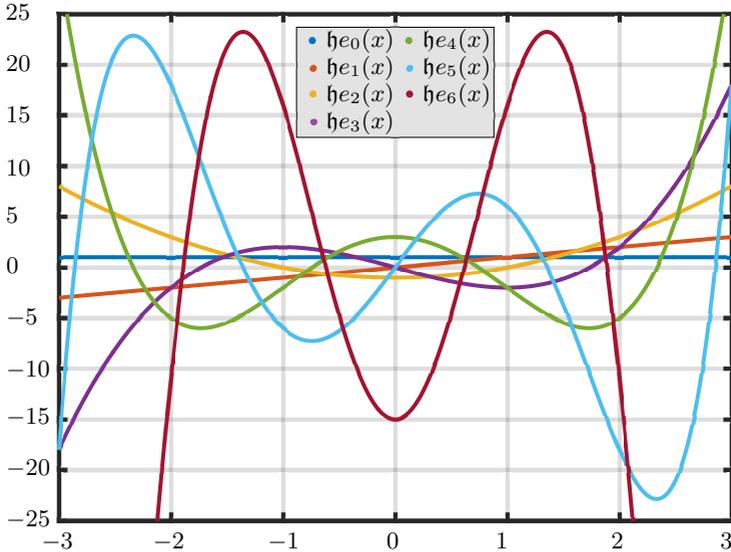


Abbildung 8.2.: Eindimensionale Hermite Polynome

0, 1 und 2 dargestellt, die Beziehungen können der Tabelle C.2 im Anhang C.3 entnommen werden.

Eine ausführliche Darstellung des Themengebietes kann der Literatur Ghanem und Spanos [1991], Sudret und Kiureghian [2000], Blatman [2009] und Sudret et al. [2012], entnommen werden.

8.2.6. Bestimmung der deterministischen PC Koeffizienten mittels der Projektionsmethode

Für die Berechnung der deterministischen PC Koeffizienten \hat{X}_i schlagen Puig et al. [2002], Xiu und Karniadakis [2002], Field und Grigoriu [2004], Maitre und Knio [2010] und Sudret et al. [2012] die Projektionsmethode vor. Die

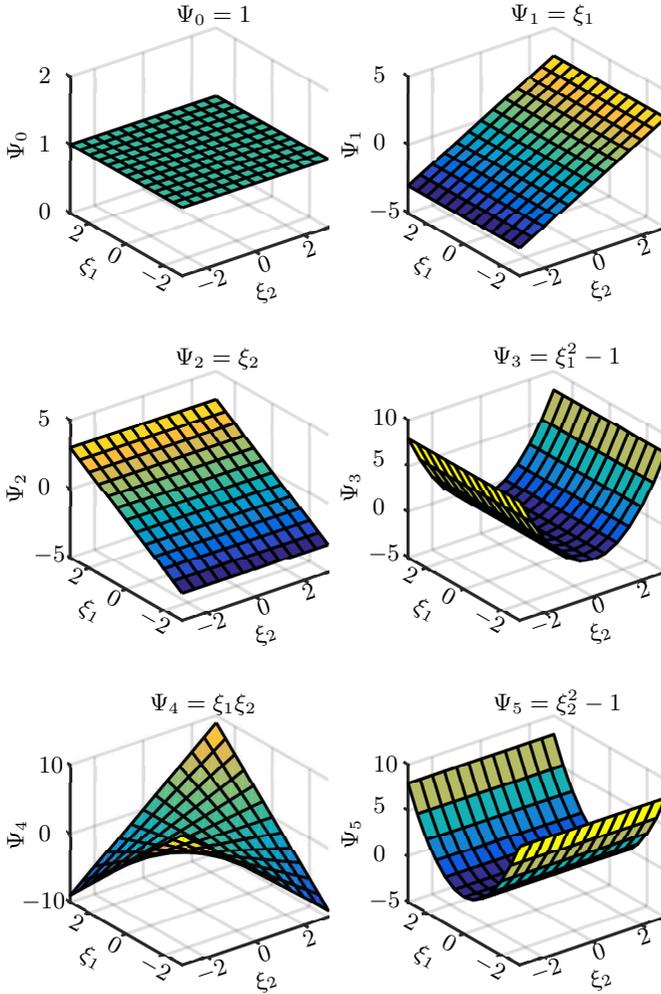


Abbildung 8.3.: Zweidimensionales Hermite Chaos für verschiedene Ordnungen

Entwicklung der Zufallsvariablen X mit den Polynomial Chaos erfolgt mit

$$X = \sum_{i=1}^P \hat{X}_i \psi_i(\xi). \quad (8.33)$$

Unter Betrachtung der PDF f_X und der Orthogonalitätsbedingung aus Gleichung 8.29 folgt nach Sudret et al. [2012] für $M = 1$ die folgende Beziehung

$$\begin{aligned} \langle X \psi_i(\xi) \rangle &= \hat{X}_i \langle \psi_i^2(\xi) \rangle \\ &= \hat{X}_i i!. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Unter Einbeziehung der Transformation in den Standard-Normalraum $X \rightarrow \xi : F_X(X) = F_\xi(\xi)$, was der Rosenblatttransformation (siehe Kapitel 7.6) entspricht, ergibt sich für die Zufallsvariable X die folgende Beziehung

$$X_i(\xi) = F_X^{-1}(F_\xi(\xi)). \quad (8.35)$$

Formt man die Gleichung 8.34 nach den deterministischen PC Koeffizienten \hat{X}_i um und setzt die Beziehung aus Gleichung 8.35 in die Gleichungen, kann die Gleichung 8.34 folgendermaßen ausgedrückt werden,

$$\hat{X}_i = \frac{1}{i!} \langle F_X^{-1}(F_\xi(\xi)) \psi_i(\xi) \rangle, \quad (8.36)$$

mit der standardnormal CDF F_ξ . Wendet man nun auf die Gleichung 8.36 die Definition des Erwartungswertes (siehe Gleichung 8.26) an, kann die Gleichung wie folgt umgeformt werden,

$$\hat{X}_i = \frac{1}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} F_X^{-1}(F_\xi(t)) \psi_i(t) f_X(t) dt. \quad (8.37)$$

In Sudret et al. [2012] findet man für die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, die logarithmische Normalverteilung $\mathcal{LN}(\lambda, \zeta)$ und die gleichmäßige Verteilung $U[a, b]$ die analytischen Lösungen für die Gleichung 8.37,

$$\begin{aligned} X \equiv \mathcal{N}(\mu, \sigma) : \hat{X}_0 &= \mu, \hat{X}_1 = \sigma, \hat{X}_i = 0 \quad \text{für } i \geq 2 \\ X \equiv \mathcal{LN}(\mu, \sigma) : \hat{X}_i &= \frac{\sigma^i}{i!} \exp\left[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right] \quad \text{für } i \geq 0 \\ X \equiv U[a, b] : \hat{X}_0 &= \frac{a+b}{2}, \hat{X}_{2i} = 0, \hat{X}_{2i+1} = \frac{(-1)^i (b-a)}{2^{2i+1} \sqrt{\pi} i! (2i+1)}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Es sei angemerkt, dass in den Gleichungen der Index i bei 0 beginnt. In den Arbeiten von Sudret und Berveiller [2003] und Sudret et al. [2012] wird vorgeschlagen, dass für andere Verteilungen die Integration der Gleichung 8.37 mit dem Gauß-Legendre-Verfahren (siehe Kapitel 3.3.3) möglich ist.

Die Bestimmung der deterministischen PC Koeffizienten \hat{G}_i für die gegebene Funktion $G(X)$ erfolgt analog zur Bestimmung des deterministischen PC Koeffizienten für die Zufallsvariable X . Somit kann für den deterministischen PC Koeffizienten \hat{G}_i die Gleichung 8.37 wie folgt angegeben werden

$$\hat{G}_i = \frac{1}{i!} \int_{-\infty}^{+\infty} G(F_X^{-1}(F_\xi(t))) \psi_i(t) f_X(t) dt. \quad (8.39)$$

8.2.7. Bestimmung der deterministischen PC Koeffizienten mittels der Kollokationsmethode

Eine andere Methode zur Berechnung der deterministischen PC Koeffizienten \hat{X}_i ist die Kollokationsmethode. Die Kollokationsmethode wurde in zahlreichen Arbeiten, wie z.B. Debusschere et al. [2004], Berveiller et al. [2006], Sudret et al. [2012] und Kewlani et al. [2012] zur Bestimmung der deterministischen PC Koeffizienten \hat{X}_i verwendet. Die Kollokationsmethode basiert darauf, dass mittels der kleinsten Fehlerquadratmethode der Fehler zwischen der Input Variable \mathbf{X} und der korrespondierenden PC Darstellung X minimiert werden soll.

Ausgangspunkt für die Bestimmung der deterministischen PC Koeffizienten \hat{X}_i bilden die Gleichungen 8.33 und 8.35 mit der eine beliebige Anzahl an Input Variablen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ generiert worden sind. Der Index n beschreibt dabei die Anzahl der Realisierungen. Es sei angemerkt, dass in dieser Darstellung der Methode die Dimension $M = 1$ beträgt, dadurch können für die Beschreibung der orthogonalen Polynome ψ_i die eindimensionalen Hermite Polynome \mathfrak{h} herangezogen werden. Wird hingegen die Basis ψ_i durch die Basis Ψ_i ersetzt, können mit den gezeigten Gleichungen die Koeffizienten für die multidimensionale PC Entwicklung bestimmt werden. Wendet man nun die Methode der kleinsten Fehlerquadratmethode an, ergibt sich die folgende Beziehung

$$\Delta X = \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_{(i)} - X_{(i)})^2 = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{X}_{(i)} - \sum_{j=1}^P \hat{X}_j \psi_j(\xi_{(i)}) \right)^2. \quad (8.40)$$

Die P Gleichungen für die unbekanntenen \hat{X}_i können in das folgende lineare Gleichungssystem überführt werden, Berveiller et al. [2006] und Sudret et al.

[2012],

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \psi_1(\xi_{(i)})\psi_1(\xi_{(i)}) & \dots & \sum_{i=1}^n \psi_1(\xi_{(i)})\psi_P(\xi_{(i)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \psi_P(\xi_{(i)})\psi_1(\xi_{(i)}) & \dots & \sum_{i=1}^n \psi_P(\xi_{(i)})\psi_P(\xi_{(i)}) \end{pmatrix} \dots \quad (8.41)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{(i)}\psi_1(\xi_{(i)}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_{(i)}\psi_P(\xi_{(i)}) \end{pmatrix}.$$

Es ist zu erkennen, dass die Matrix nicht von den Input Variablen, sondern nur von den jeweiligen Realisierungen der Standardnormalverteilung der ξ 's, abhängt. Aus numerischer Sicht hat das den Vorteil, dass die Matrix nur einmal assembliert werden muss und in bereits faktorisierte Form für die weiteren Rechnungen verwendet werden kann.

Nach Sudret et al. [2012] können die Realisierungen $\xi_{(i)}$ mit Hilfe von Zufallszahlengeneratoren erzeugt werden.

Für eine gegebene Funktion $G(X)$ können die deterministischen PC Koeffizienten \hat{G}_i bestimmt werden, in dem man die Gleichung 8.40 folgendermaßen umformuliert,

$$\Delta G = \sum_{i=1}^n (G(\mathbf{X}_{(i)}) - G_{(i)})^2 = \sum_{i=1}^n \left(G(\mathbf{X}_{(i)}) - \sum_{j=1}^P \hat{G}_j \psi_j(\xi_{(i)}) \right)^2. \quad (8.42)$$

In Analogie zur Gleichung 8.41 lässt sich das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen \hat{G}_i formulieren

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \psi_1(\xi_{(i)})\psi_1(\xi_{(i)}) & \dots & \sum_{i=1}^n \psi_1(\xi_{(i)})\psi_P(\xi_{(i)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \psi_P(\xi_{(i)})\psi_1(\xi_{(i)}) & \dots & \sum_{i=1}^n \psi_P(\xi_{(i)})\psi_P(\xi_{(i)}) \end{pmatrix} \dots \quad (8.43)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{G}_1 \\ \vdots \\ \hat{G}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n G(\mathbf{X}_{(i)})\psi_1(\xi_{(i)}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n G(\mathbf{X}_{(i)})\psi_P(\xi_{(i)}) \end{pmatrix}.$$

8.3. Stochastische Finite Elemente Methode

In diesem Kapitel werden die Erweiterung der klassischen Finite Elemente Methode zur stochastischen Finite Elemente Methode (SFEM) beschrieben. Die SFEM wurde bereits in zahlreichen Veröffentlichungen vorgestellt, wie z. B. Ghanem und Spanos [1991], Sudret und Kiureghian [2000], Sudret und Berveiller [2003], Matthies und Keese [2005], Blatman [2009], Maitre und Knio [2010], Sudret et al. [2012], Jablonski [2014] und Fink [2015].

8.3.1. Stochastische Materialgleichung

Die Überführung der deterministischen Materialgleichungen (siehe Kapitel 5.8.4 und 5.8.5) in die stochastischen Materialgleichungen soll in diesem Kapitel erläutert werden. Das allgemeine Vorgehen soll anhand der linearen Elastizität gezeigt werden.

- **Formulierung der linearen Elastizität mittels stochastischer Materialparameter**

Unter der Annahme, dass der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktion ν stochastisch verteilt sind und mit dem Polynomial Chaos entwickelt wurden, können die Größen mittels der Gleichung 8.22 durch

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \sum_{i=1}^P \hat{E}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}), \\ \nu(\theta) &= \sum_{i=1}^P \hat{\nu}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \tag{8.44}$$

ausgedrückt werden. Alternativ gilt für die Lamé-Parameter,

$$\begin{aligned} \mu_L(\theta) &= \sum_{i=1}^P \hat{\mu}_{L_i} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}), \\ \kappa(\theta) &= \sum_{i=1}^P \hat{\kappa}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \tag{8.45}$$

Für die Berechnung dieser Größen werden iterative Verfahren benötigt, was verdeutlicht, dass die Verwendung von stochastischen Materialparametern hohe Anforderung an den Anwender hinsichtlich der numerischen Methoden stellt. In der Arbeit von Debusschere et al. [2004] werden die häufigsten Rechenoperationen für die Polynomial Chaos Entwicklung vorgestellt. Setzt man die Gleichung 8.45 in die Gleichung 2.76 ein, erhält

man die Polynomial Chaos entwickelte Form der stochastischen Materialtangente

$$\mathbb{C}^{el}(\theta) = \sum_{i=1}^P \hat{\kappa}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \sum_{i=1}^P \hat{\mu}_{L_i} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbb{P}. \quad (8.46)$$

Löst man das System aus Kapitel 8.3.2 mit der vorgestellten Materialtangente unter Einbeziehung des Kapitels 8.3.3, erhält man das Polynomial Chaos entwickelte Verschiebungsfeld in der Form

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_{i=1}^P \hat{\mathbf{u}}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}). \quad (8.47)$$

• Bestimmen der Materialgleichungen

Wie in Abschnitt 6.4 gezeigt, ist das Kriechverhalten des vorgestellten Materialmodells bezüglich der drei Materialparameter, E_∞ , ν und D besonders sensitiv. Aus diesem Grund werden im Weiteren diese Materialparameter als stochastische Variablen formuliert. Unter Verwendung der Gleichung 8.22 folgt deren PC-Approximation

$$\begin{aligned} E_\infty(\theta) &= \sum_{i=1}^P \hat{E}_{\infty_i} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}), \\ \nu(\theta) &= \sum_{i=1}^P \hat{\nu}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}), \\ D(\theta) &= \sum_{i=1}^P \hat{D}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (8.48)$$

Unter Einbeziehung der Gleichung 8.48 kann der deviatorische Anteil des Spannungstensors 5.59 durch

$$\begin{aligned} {}^{n+1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_k &= \sum_{i=1}^P {}^{n+1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{test} \Psi_i - \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P C_{ijk} {}^{n+1} \hat{D}_i {}^{n+1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j^{test} - \dots \\ &dt \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P C_{ijk} {}^{n+1} \hat{A}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i} {}^{n+1} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \end{aligned} \quad (8.49)$$

ausgedrückt werden, mit

$$\begin{aligned}
 {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_l^{test} &= 2 \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P D_{ijkl} \hat{\gamma}_{\infty i} \hat{\mu}_{Lj} {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \dots \\
 &\quad \sum_{m=1}^n \left(\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P C_{ijk} \hat{\gamma}_{mi} {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{h}}_{mj} - \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P C_{ijk} 2\hat{\mu}_{Li} {}^n\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j^{cr} \right), \\
 {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{h}}_{mi} &= \exp\left(\frac{-dt}{\tau_i}\right) \sum_{i=1}^P {}^{n+1}n \hat{\boldsymbol{h}}_{mi} \Psi_i + \frac{1 - \exp\left(\frac{-dt}{\tau_i}\right)}{\frac{dt}{\tau_i}} \dots \\
 &\quad \sum_{i=1}^P \left({}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i - {}^n\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i \right) \Psi_i
 \end{aligned} \tag{8.50}$$

und den Tensoren dritter Stufe C_{ijk} und vierter Stufe D_{ijkl} , die nach Debusschere et al. [2004] folgendermaßen

$$\begin{aligned}
 C_{ijk} &= \frac{\langle \Psi_i \Psi_j \Psi_k \rangle}{\langle \Psi_k^2 \rangle} \\
 D_{ijkl} &= \frac{\langle \Psi_i \Psi_j \Psi_k \Psi_l \rangle}{\langle \Psi_l^2 \rangle}
 \end{aligned} \tag{8.51}$$

definiert sind. Durch analoges Vorgehen ergibt sich der volumetrische Anteil des Spannungstensors 5.62 zu

$${}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{vol} = \sum_{i=1}^P \left({}^{n+1}\hat{R}_{\sigma vol i} - {}^{n+1}\hat{\gamma}_i^{vol} \right) \Psi_i. \tag{8.52}$$

Werden in der Gleichung 5.71 die deterministischen Größen ${}^{n+1}\boldsymbol{\varepsilon}$, ${}^{n+1}\boldsymbol{\sigma}^{vol}$ und ${}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ durch die stochastischen Größen ${}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$, ${}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{vol}$ und ${}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i$ ersetzt, ergibt sich für die Materialtangente der folgende Ausdruck,

$${}^{n+1}\hat{\mathbf{C}}_i = \frac{\partial {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{vol}}{\partial {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i} \otimes \mathbf{1} + \frac{\partial {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_i}{\partial {}^{n+1}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i}, \tag{8.53}$$

unter Verwendung der deterministischen Ableitungen, aus Kapitel 5.8.5 und 5.9 und einen Operatorsplit in einem deterministischen und einem stochastischen Anteil. Die Ableitung der Terme erfolgt unter Einhaltung der Rechenvorschriften aus Debusschere et al. [2004]. Die PC-Materialtangente ergibt sich durch das Zusammenführen der einzelnen Anteile zu

$${}^{n+1}\hat{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^P {}^{n+1}\hat{\mathbf{C}}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}). \tag{8.54}$$

Die einzelnen Anteile der PC Materialtangente werden in die Gleichung 8.59 eingebettet.

8.3.2. PC-SFEM Gleichungssystem

Geht man von dem deterministischen Gleichungssystem der FEM 3.8 für ein nicht lineares Materialverhalten aus und drückt es in der Form

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int} \quad (8.55)$$

aus, ergibt sich für das Gleichungssystem unter Berücksichtigung von unsicheren Materialparametern ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{K}(\theta)\Delta\mathbf{u}(\theta) = \mathbf{f}^{ext}(\theta) - \mathbf{f}^{int}(\theta). \quad (8.56)$$

Für den deterministischen Fall wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \bigoplus_{el} \mathbf{K}^e = \bigoplus_{el} \iiint_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} \underbrace{dx dy dz}_{dV}. \quad (8.57)$$

aus den Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}^e assembliert. Setzt man nun die PC Entwicklung in die Gleichung 3.23 ein, ergeben sich P Elementsteifigkeitsmatrizen und die Gleichung 3.23 ergibt sich zu

$$\mathbf{K}^e(\theta) = \sum_{i=1}^P \hat{\mathbf{K}}_i^e \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^P \iiint_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}}_i \mathbf{B} \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \underbrace{dx dy dz}_{dV}. \quad (8.58)$$

Die \mathbf{B} -Matrix \mathbf{B} setzt sich in diesem Fall wie im deterministischen Fall zusammen, da in dieser Arbeit die Geometrie keine Unsicherheiten beinhaltet (siehe Gleichung 3.19). Wie sich die \mathbf{B} -Matrix bei unsicheren Geometrien zusammensetzt, kann z.B. bei Tootkaboni et al. [2009] entnommen werden. Fügt man diesen Ansatz in die Gleichung 8.57 ein, können die P Gesamtsteifigkeitsmatrizen

$$\hat{\mathbf{K}}_i = \bigoplus_{el} \hat{\mathbf{K}}_i^e = \bigoplus_{el} \iiint_{\mathcal{B}} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}}_i \mathbf{B} \underbrace{dx dy dz}_{dV} \quad (8.59)$$

durch die P Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_i^e assembliert werden. Daraus folgt für die Gleichung 8.56 der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^P \hat{\mathbf{K}}_i \Psi_i(\boldsymbol{\xi}) \sum_{j=1}^P \Delta \hat{\mathbf{u}}_j \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^P \hat{\mathbf{r}}_j^{ext} \Psi_j(\boldsymbol{\xi}) - \sum_{j=1}^P \hat{\mathbf{r}}_j^{int} \Psi_j(\boldsymbol{\xi}). \quad (8.60)$$

Mit Hilfe des beschriebenen stochastischen Galerkin Verfahrens können die Koeffizienten $\Delta \hat{\mathbf{u}}_1$ bis $\Delta \hat{\mathbf{u}}_P$ bestimmt werden. Nach Ghanem und Spanos [1991] fordert das Verfahren die Orthogonalität der Gleichung 8.60 zu den Funktionen $\Psi_k(\boldsymbol{\xi})$ in Abhängigkeit zum Erwartungswert, mit dem Index $k = 1, \dots, P$. Somit ergibt sich für die Gleichung 8.60 der folgende Ausdruck

$$\langle \Psi_k \sum_{i=1}^P \hat{\mathbf{K}}_i \Psi_i \sum_{j=1}^P \Delta \hat{\mathbf{u}}_j \Psi_j \rangle = \langle \Psi_k \left(\sum_{j=1}^P \hat{\mathbf{r}}_j^{ext} \Psi_j - \sum_{j=1}^P \hat{\mathbf{r}}_j^{int} \Psi_j \right) \rangle, \quad (8.61)$$

wobei der Übersicht halber auf die Abhängigkeit der PC Basis Ψ von den Zufallsvariablen ξ verzichtet wurde. Wendet man den Erwartungswertoperator nur auf die multidimensionalen Hermite Polynome Ψ an, die die Standardnormalverteilung enthält, kann die Gleichung 8.61 unter Anwendung der Orthogonalitätsbedingung und einigen Umformungen folgendermaßen ausgedrückt werden,

$$\sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P d_{ijk} \tilde{\mathbf{K}}_i \Delta \hat{\mathbf{u}}_j = \langle \Psi_k^2 \rangle \hat{\mathbf{r}}_k^{ext} - \langle \Psi_k^2 \rangle \hat{\mathbf{r}}_k^{int}, \quad (8.62)$$

mit der Funktion d_{ijk} . Dieses wird möglich, da die Koeffizientenmatrizen $\tilde{\mathbf{K}}_i$ konstant sind. Für die Funktion d_{ijk} gibt es eine analytische Lösung, wie diese sich aus dem Erwartungswert dreier multidimensionalen Hermite Polynome Ψ zusammensetzt ist im Anhang C.2 erläutert. Nach Sudret et al. [2012] ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \cdots & \tilde{\mathbf{K}}_{1,P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{K}}_{P,0} & \cdots & \tilde{\mathbf{K}}_{P,P} \end{bmatrix}}_{\mathfrak{K}_{lm}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}_1 \\ \vdots \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_m} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_1^{ext} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_p^{ext} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_m} - \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_1^{int} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_p^{int} \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_m}, \quad (8.63)$$

mit den Funktionen $\tilde{\mathbf{K}}_{jk} = \sum_{i=1}^P d_{ijk} \tilde{\mathbf{K}}_i$, $\tilde{\mathbf{r}}_k^{ext} = \langle \Psi_k^2 \rangle \hat{\mathbf{r}}_k^{ext}$ und $\tilde{\mathbf{r}}_k^{int} = \langle \Psi_k^2 \rangle \hat{\mathbf{r}}_k^{int}$.

Die Steifigkeitsmatrix im deterministischen Fall hat die Dimension $(N_{nodes} \cdot N_{dof}) \times (N_{nodes} \cdot N_{dof})$, die einzelnen Matrizen $\tilde{\mathbf{K}}_{jk}$ haben ebenfalls die Dimension für den deterministischen Fall. Somit ergibt sich für die PC Steifigkeitsmatrix die Dimension $(N_{nodes} \cdot N_{dof} \cdot P) \times (N_{nodes} \cdot N_{dof} \cdot P)$. In der Abbildung 8.4 sind einige Strukturen der PC Steifigkeitsmatrix dargestellt, für ein rotationsymmetrisches Modell, das mit 4 Knoten Scheibenelementen diskretisiert wurde. Die Abbildung 8.4 a zeigt die Besetzung der deterministischen Steifigkeitsmatrix und stellt somit das Referenzgleichungssystem dar. Vergleicht man die Abbildungen miteinander, wird ersichtlich, dass die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems pro Zunahme der Dimension der PC Basis zunimmt. Die Abkürzung *nz* in der Abbildung 8.4 steht für Elemente die ungleich null sind. Aus diesem Sachverhalt wird ersichtlich, dass der Rechenaufwand stark von der Dimension der PC Basis abhängt. Für das daraus resultierende Gleichungssystem werden spezielle Lösungsverfahren benötigt, die etabliertesten Lösungsverfahren werden im nachfolgenden Kapitel besprochen und im Kapitel 9 wird noch ein Ausblick gegeben, welche neuartigen Lösungsverfahren zur Zeit Forschungsgegenstand sind.

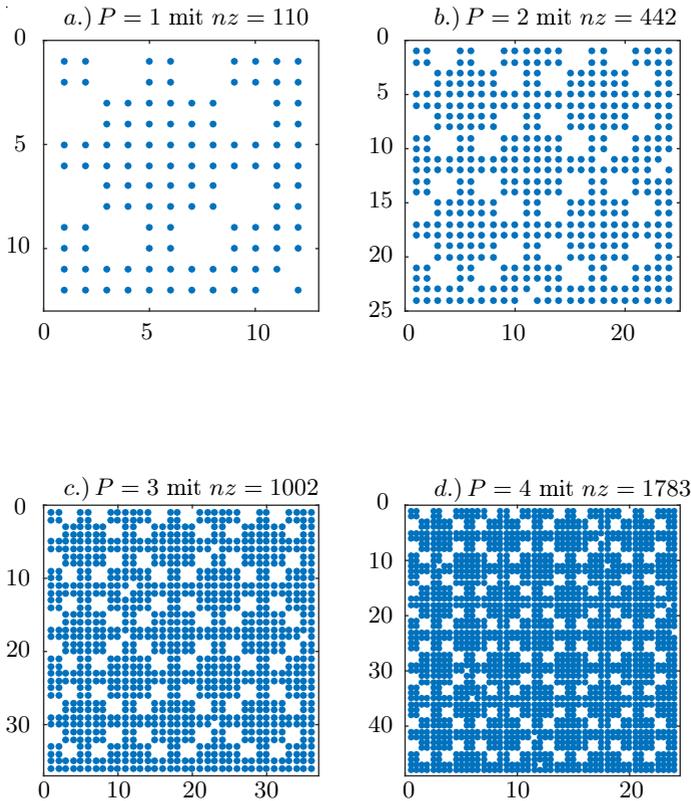


Abbildung 8.4.: Struktur der PC Steifigkeitsmatrix

8.3.3. Methoden zum Lösen des SFEM Gleichungssystems

- **Direkter Löser**

Im Rahmen dieser Arbeit wurde zum Lösen des Gleichungssystems 8.63 der „Backslash Solver“ von MATLAB [2015] verwendet, dieser Solver gehört in die Klasse der direkten Gleichungslöser. Da die Steifigkeitsmatrix in Gleichung 8.63 eine positiv definierte $(N_{nodes} \cdot N_{dof} \cdot P) \times (N_{nodes} \cdot N_{dof} \cdot P)$ Matrix ist, kann diese mit der Cholesky-Zerlegung gelöst werden. Ein erheblicher Nachteil dieser Lösungsmethode ist es, dass die Struktur der Matrix \mathfrak{K}_{lm} nicht berücksichtigt wird. Das führt dazu, dass das gesamte Gleichungssystem 8.63 vollständig assembliert und gelöst werden muss. Da dieser Solver der Klasse der direkten Löser angehört, muss das Gleichungssystem

chungssystem nur einmalig gelöst werden. Der Vorteil des einmaligen LöSENS des Gleichungssystems kann bei sehr großen Systemen Probleme hervorrufen, da für die Zerlegung die ganze Matrix \mathfrak{R}_{lm} vorgehalten werden muss. Dieses kann dazu führen, dass der Speicher nicht ausreicht, was bei deterministischen Systemen aufgrund der heutigen Rechentechnik vernachlässigbar klein ist. Bei stochastischen Systemen ist dieses Problem der Speicherauslastung weiterhin präsent. Die ansteigende Rechenzeit beim LöSEN großer Systeme, ist jedoch in Hinsicht der Rechenkosten für deterministische und stochastische Systeme nicht vernachlässigbar. Aufgrund seiner Einfachheit ist der „Backslash Solver“ ein sehr verbreiteter Löser für kleine und mittlere Gleichungssysteme.

- **Gauss-Seidel PC Löser**

Liegt eine Struktur des zu lösendem Gleichungssystems 8.63 wie in Sudret et al. [2012], Jablonski [2014] und Fink [2015] gezeigt vor, kann das zu lösende Gleichungssystem mit dem Gauss-Seidel PC Löser gelöst werden. Dieser hat den Vorteil gegenüber dem direkten Löser, dass beim iterativen Solver die Struktur des Gleichungssystems ausgenutzt wird. Eine Gegenüberstellung der direkten und iterativen Solvern, kann der Literatur Saad [2003], Young [2003], Gould et al. [2007] und Meister [2014] entnommen werden. Für nähere Informationen über die Struktur und das Konvergenzverhalten des Gauss-Seidel PC LöSers wird auf Rheinboldt [1998], Meister [2014] und Jablonski [2014] verwiesen. Dieser Löser stellt nicht den aktuellen Stand der Forschung dar, kann aber aufgrund seiner Etabliertheit in klassischen FEM-Programmen einfach um die SFEM erweitert werden.

- **Parallelisierung PC-SFEM Gleichungssystem**

Die klassischen Solver können bei hoch dimensionalen Problemen an ihre Grenzen stoßen, da aufgrund der Größe des zu lösenden Gleichungssystems $(N_{nodes} \cdot N_{dof} \cdot P) \times (N_{nodes} \cdot N_{dof} \cdot P)$ (siehe Gleichung 8.63) die Rechenkosten den Mehrwert durch den höheren Grad an Informationen übersteigen.

Um die Rechenkosten zu minimieren, die Effizienz des jeweiligen Solvers zu verbessern und die eingesetzte Rechentechnik optimaler auszunutzen schlägt Lee [2016] die Parallelisierung des zu lösenden Gleichungssystems vor.

Zur Einarbeitung in das Themengebiet der Parallelisierung von Gleichungssystemen wird auf Schwarz und Köckler [2011], Schwandt [2013] und Hackbusch [2013] verwiesen. Nach Schwandt [2013] müssen die zu lösenden Gleichungssysteme folgende grundlegende Regeln aufweisen: Zum einen die Aufteilung des gesamten Gleichungssystems in einzelne ausführbare Teilgleichungssysteme. Das beruht darauf, dass die Teilgleichungs-

systeme Unabhängig von einander sind. Daraus kann man ableiten, dass diese sich nicht gegenseitig beeinflussen dürfen und dass nicht die Lösung eines Teilgleichungssystems nicht für die Lösung eines anderen Teilgleichungssystems benötigt wird. Diese Unabhängigkeit der Teilgleichungssysteme konnte in Lee [2016] nur für lineare PC-SFEM Gleichungssystem gezeigt werden.

- **Monte Carlo Simulation in Verbindung mit Model Reduktions Techniken**

Bei hoch dimensionalen Systemen kann die SFEM Steifigkeitsmatrix (siehe Gleichung 8.63) Dimensionen annehmen, die die heutige Speichertechnik nicht verarbeiten kann, des Weiteren können die Differentialgleichungen, die das Materialverhalten beschreiben Komponenten beinhalten, die zu Problemen bei Lösen führen können, z.B. die Fließnormale und das Eigenwertproblem eines Tensors zweiter Stufe (siehe Kapitel 9.2.4).

Die Monte Carlo Simulation zeichnet sich dadurch aus, dass sie leicht zu implementieren ist und dass sie in den meisten Fällen konvergiert. Für die theoretischen Grundlagen dieser Methode wird auf Ghanem und Spanos [1991], Maitre und Knio [2010], Binder und Heermann [2013] verwiesen. Im Kapitel 9.2.3 ist ein Vergleich der Polynomial Chaos Simulation mit der Monte Carlo Simulation gezeigt. Anhand dieses Kapitels wird der Nachteil der Monte Carlo Simulation gegenüber der PC Simulation sichtbar, der sich in der deutlich höheren Simulationszeit zeigt. Um diesen Nachteil der höheren Simulationszeit zu kompensieren, schlägt Vidal-Codina et al. [2016] die Monte Carlo Simulation in Verbindung mit der Model Reduktions Technik vor. Diese Methode bietet sich an, da das deterministische Gleichungssystem n -mal gelöst werden muss. Die Methode beruht darauf, dass nach dem erstmaligen Lösen das Gleichungssystem reduziert wird und anschließend mit einem reduzierten Gleichungssystem weiter gerechnet wird. Für eine weiterführende Beschäftigung auf dem Themengebiet der Model order reduction wird auf Schilders et al. [2008] und Qu [2013] verwiesen.

- **MINRES-Verfahren**

In den Arbeiten von Keese et al. [2003], Matthies und Keese [2005], Ullmann et al. [2012] und Onwunta [2016] wird vorgeschlagen, dass das SFEM Gleichungssystem mit einem Solver zu lösen der auf dem MINRES-Verfahren basiert, was ein Krylow-Unterraum-Verfahren zur iterativen Lösung symmetrischer linearer Gleichungssysteme darstellt. Für die Grundlagen dieser Methode wird auf Gross und Reusken [2011] verwiesen.

9. Numerische Beanspruchungsanalyse bei zufallsverteilten Materialparametern

Das Kapitel stellt eine Erweiterung des Kapitels 6 und der vorgestellten Materialgleichung aus Kapitel 5.2 um zufallsverteilte Materialparameter dar. Im Kapitel 9.1 wird aus der Verteilung der Verformung, die durch die experimentellen Daten gegeben ist, auf die Verteilung der Input Größen geschlossen. Die Ergebnisse der numerischen Beanspruchungsanalysen der Langzeitkriechversuche werden in Kapitel 9.2 gezeigt. Im Kapitel 9.3 werden die Ergebnisse der numerischen Beanspruchungsanalyse der Untertagestruktur, mit unsicheren Materialparametern vorgestellt.

9.1. Verteilung der Materialparameter

Aufgrund der beschränkten Anzahl der Langzeitkriechversuche (siehe Abbildung 4.4), kann keine genaue Aussage über die stochastische Verteilung der Verformung von Salzgestein gegeben werden. Da viele Prozesse in den Natur- und den Ingenieurwissenschaften sich durch eine Normalverteilung \mathcal{N} beschreiben lassen, wird ebenfalls angenommen, dass diese auch für die Verformung von Salzgestein gilt. Durch diese Annahme lässt sich die Verteilung

$$f_X(u) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{u - \mu_u}{\sigma_u}\right)^2\right), \quad (9.1)$$

durch die Parameter μ und σ beschreiben. In der Abbildung 9.1 ist die Verteilung der Langzeitkriechversuche 0414i und N2/i dargestellt. Für die Berechnung müssen weitere Annahmen getroffen werden. Die erste Annahme ist, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% die berechneten Verformungen innerhalb der lavendelfarbenen Linie bzw. schwarzen Linie, welche die obere Grenze darstellt, und der schwarzen Linie bzw. roten Linie, welche die untere Grenze darstellt, liegt. Das Intervall lässt sich auch durch $\mu_u \pm 1.281\sigma_u$ ausdrücken. Dieses ist in der Abbildung 9.1 durch den grün hinterlegten Bereich visualisiert. Daraus lässt sich ableiten, dass der Mittelwert μ_u der Verformung nach 300 Tagen rund den Wert 0.4755 % annimmt. Für die Standardabweichung σ_u wurde der Wert 0.08495 % ermittelt, was einer Standardabweichung von 17.867 % vom Mittelwert entspricht. Die nachfolgenden Kapitel stellen die Verteilung der stochastisch verteilten Materialparameter aus 6.4 dar. Die Mittelwerte ergeben sich aus den numerischen Experimenten aus Kapitel 6.2 und 6.3 und durch einige Anpassungen an die stochastische Berechnung.

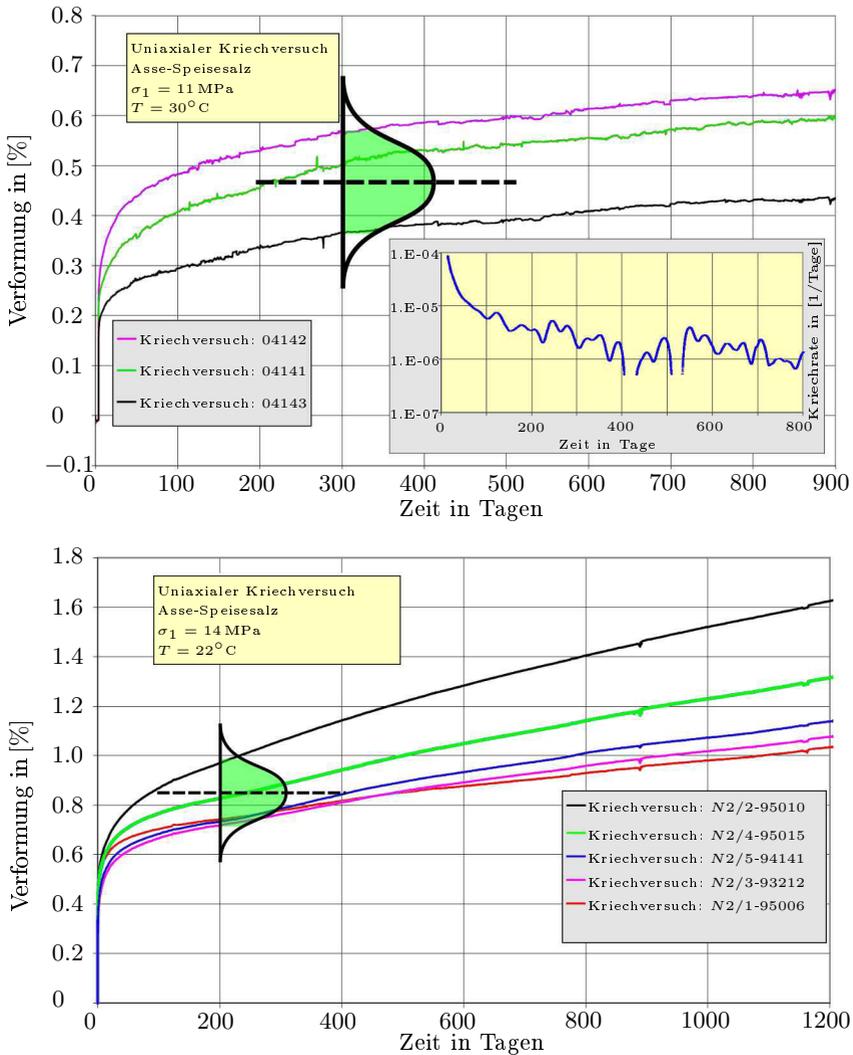


Abbildung 9.1.: Uniaxialer Kriechversuch an Asse-Speisesalz mit einer angenommenen Gauß-Verteilung der Verschiebung; Die gemessene Verformung der Prüfkörper weist die natürliche Bandbreite des Kriechverhaltens von Steinsalz auf, nach Hunsche und BGR [1996].

9.1.1. Parameterstudie Standardabweichung

Die „rote Linie“ in der Abbildung 9.2 zeigt die angenommene Gauß-Verteilung der Verformung bei 300 Tagen der Langzeitkriechversuche 0414*i* aus Kapitel 9.1. Die Wahl, die Verteilung bei 300 Tagen zu vergleichen beruht darauf, dass das Material sich noch in der *I* Kriechphase befindet, da alle unsicheren Parameter hauptsächlich Einfluss auf das primäre Kriechen haben und nur sekundär Einfluss auf die *II* und *III* Kriechphase nehmen (siehe Kapitel 6.4). Des Weiteren stellt diese Annahme eine vertretbare Annahme dar, dass die berechnete Verteilung der Verformung bei 300 Tagen mit den Parametern die in dieser Parameterstudie gefunden wurden auch für andere Zeitschritte gilt. Das dies zutrifft, kann Kapitel 9.2 entnommen werden. Die Simulationszeit von 300 Tagen stellt auch einen guten Kompromiss zwischen der Bestimmung der Verteilung der Verformung und der Rechenzeit dar.

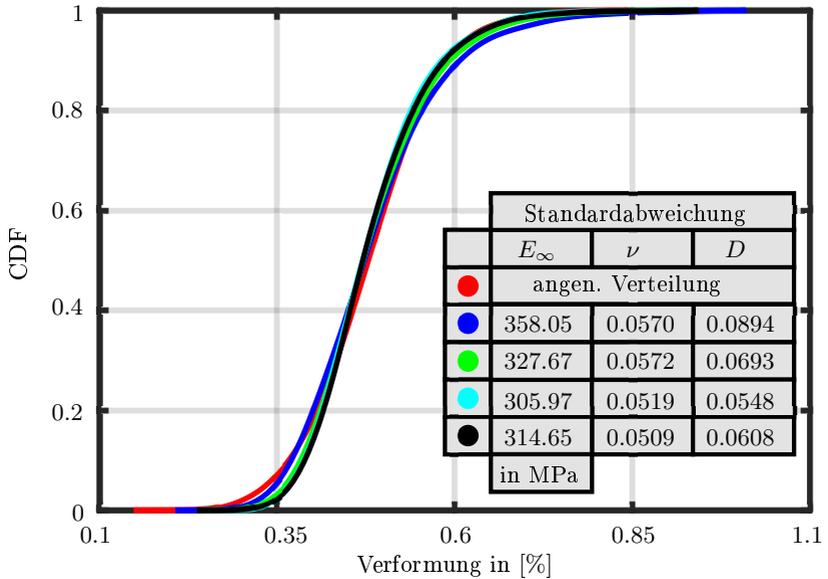


Abbildung 9.2.: Ausgewählte Verteilungen der Parameterstudie zur Standardabweichung der unsicheren Materialparametern im Vergleich mit der angenommenen Verteilung bei 300 Tagen.

Eine weitere Annahme bezieht sich auf die Input-Parameter, diese weisen ebenfalls eine Normalverteilung \mathcal{N} auf. Die Verteilung der Input-Parameter kann den Abbildungen 9.5, 9.7 und 9.9 entnommen werden.

Die Abbildung 9.2 zeigt einige ausgewählte Verteilungen der Parameterstudie zur Bestimmung der Standardabweichungen der unsicheren Parameter E_∞ , ν und D . Es ist zu erkennen, dass die berechneten Verteilungen aus der Abbildung 9.2 die gewählte Verteilung für die Verformung gut widerspiegeln können. Allerdings ist zu erkennen, dass die berechnete Verteilung der Verformung von der Normalverteilung \mathcal{N} abweicht. Dieses ist der nicht linearen Berechnung geschuldet, dass beim normalverteilten Input der Output eine andere Verteilung aufweist. Für die weiterführende Berechnung wurden aus der Parameterstudie die Standardabweichungen $\sigma_{E_\infty} = 359.05$ MPa, $\sigma_\nu = 0.057$ und $\sigma_D = 0.0894$ gewählt. Diese Parameter repräsentieren die „blaue“ Verteilung (siehe Abbildung 9.2) der Verformung. Die Verteilung wurde gewählt, da sie den Bereich mit der größten Wahrscheinlichkeit am besten repräsentiert und im oberen und unteren Bereich vertretbare Abweichungen besitzt. Da die Normalverteilung \mathcal{N} der Verformung für Salzgestein nur eine Annahme darstellt, für genauere Aussagen über die Verteilung benötigt man mehr experimentelle Daten von den Kriech- und Festigkeitsversuchen oder es werden die vorhandenen Kriech- und Festigkeitsversuche mit stochastischen Methoden analysiert und bewertet. Ein kurzer Ausblick zu diesem Thema wird im Kapitel 10 gegeben.

Bei der Parameterstudie stellte sich heraus, dass die Querkontraktionszahl ν den größten Einfluss auf die Verformung hat und mit einer Standardabweichung von 21.5% vom Mittelwert μ_ν die größte Streuung aufweist.

9.1.2. Parameterstudie homogenes Zufallsfeld und zufälliges Zufallsfeld

In dieser Parameterstudie wird der Einfluss eines homogenen und eines zufälligen Zufallsfeldes untersucht. Ein homogenes Zufallsfeld ist dadurch gekennzeichnet, dass für eine Realisierung die unsicheren Materialparameter an allen Gauß-Punkten des Systems denselben Wert aufweisen. Wenn die unsicheren Materialparameter an allen Gauß-Punkten des Systems für eine Realisierung unterschiedliche Werte aufweisen, spricht man von einem zufälligen Zufallsfeld. Drei exemplarische Verteilungen der unsicheren Materialparameter für eine Realisierung kann den Abbildungen 9.6, 9.8 und 9.10 entnommen werden.

In der Abbildung 9.3 ist der Vergleich der beiden Zufallsfelder bei einer Realisierung an der Stelle $x = 30$ mm über die Probenhöhe dargestellt. Die „grünen Linien“ (siehe Abbildung 9.3) repräsentieren den Mittelwert μ_E , μ_ν und μ_D der unsicheren Materialparameter, die „blauen Linien“ (siehe Abbildung 9.3) stellen das homogene Zufallsfeld dar und die „roten Linien“ (siehe Abbildung 9.3) zeigen die Verteilung der unsicheren Materialparameter über die Probenhöhe und repräsentieren somit das zufällige Zufallsfeld. Es ist zu erkennen, dass die unsicheren Materialparameter beim zufälligen Zufallsfeld um den Mittelwert streuen. Welchen Einfluss das auf die Berechnung hat, wird im Laufe dieses Kapitels noch erläutert.

Anhand der Abbildung 9.3 wird deutlich, dass man mit einem homogenen

Zufallsfeld nicht in der Lage ist, lokale Effekte abzubilden, da für eine Realisierung ein homogenes Spannungs- und Dehnungsfeld unter Verwendung des vorgestellten Materialmodells vorliegt. Daraus lässt sich ableiten, dass ein Versagen der Probe über den gesamten Querschnitt eintreten wird, dieses widerspricht dem natürlichen Materialverhalten.

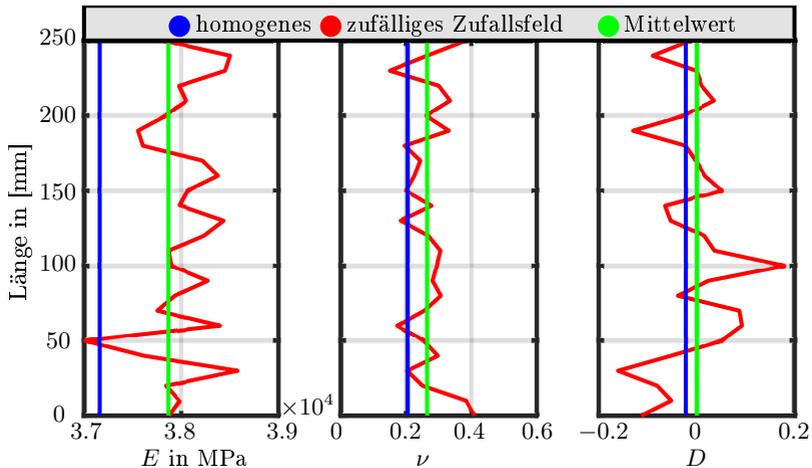


Abbildung 9.3.: Vergleich zwischen homogenem Zufallsfeld und zufälligem Zufallsfeld anhand der unsicheren Materialparameter.

Wie bereits im Kapitel 3 erläutert, ist Salzgestein ein natürlich entstandenes Material und weist daher kein homogenes Gefüge auf, dieses inhomogene Gefüge hat einen erheblichen Einfluss auf das Materialverhalten. Vergleicht man die Verteilung der unsicheren Materialparameter bei einem homogenen Zufallsfeld mit einem zufälligen Zufallsfeld, wird deutlich, dass ein zufälliges Zufallsfeld in der Lage ist, Fehler im Kristallgitter innerhalb der Probe bei einer Realisierung abzubilden. Durch diesen Modellierungsansatz ergibt sich ein inhomogener Spannungs- und Dehnungszustand innerhalb der Probe für eine Realisierung. Dieses wird deutlich beim Vergleich der unsicheren Materialparameter bei der Probenhöhe $l = 50$ mm und $l = 125$ mm. Es ist davon auszugehen, dass bei der Probenhöhe von $l = 50$ mm die größte Materialbeanspruchung vorliegt und die Probe an diesem Punkt wahrscheinlich anfängt zu versagen. Diese Annahme ergibt sich dadurch, dass an dieser Stelle das Material vorgeschädigt ist und der Elastizitätsmodul den geringsten Wert aufweist und somit den geringsten Widerstand gegen die Verformung besitzt. Diese Eigenschaft gewinnt bei Kriech- und Festigkeitsversuchen an Bedeutung, die bis zur Zerstörung der Probe führen, da auch Proben versagen können, die sehr gute Materialeigenschaften bis auf einen Gefügefehler besitzen, der

zur Zerstörung der Probe führt. Somit kann gesagt werden, dass ein zufälliges Zufallsfeld die Streuung der Materialeigenschaften innerhalb des Gefüges eines Materials am besten beschreibt.

Allerdings sei noch erwähnt, dass die Berechnungen der Langzeitkriechversuche an einem rotationssymmetrischen Modell durchgeführt werden. Somit weist das Gefüge in Umfangsrichtung an jedem Schnitt dasselbe Gefüge auf, da das Gefüge um die y -Achse rotiert wird. Für eine vollständige Abbildung der Fehlstellen muss eine 3D Simulation der Langzeitkriechversuche durchgeführt werden. Allerdings steht der Zuwachs an Informationen in keinem Verhältnis zu der erhöhten Simulationszeit, was die 2D Simulation legitimiert.

Ein weiterer Vorteil eines zufälligen Zufallsfeld gegenüber einem homogenen Zufallsfeld ist, dass man für das Postprocessing weniger Realisierungen benötigt. Dieser Sachverhalt ist in der Abbildung 9.4 dargestellt.

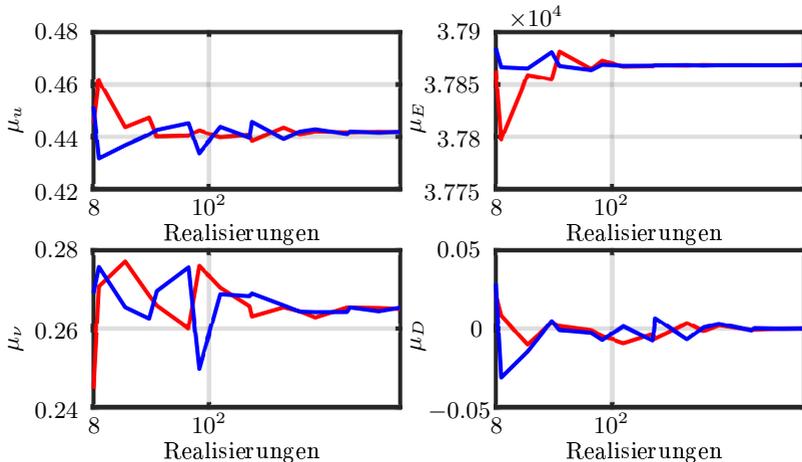


Abbildung 9.4.: Konvergenzverhalten der unsicheren Materialparameter und der Verformung bei einem homogenen Zufallsfeld („blaue Linien“) und zufälligen Zufallsfeld („rote Linien“).

Bei dem Vergleich des Konvergenzverhaltens der unsicheren Materialparameter und der Verformung beim homogenen Zufallsfeld („blaue Linien“) und zufälligen Zufallsfeld („rote Linien“) wird deutlich, dass die In- und Output-Größen sich bei geringer Anzahl an Realisierungen sich dem Mittelwert annähern. Dieses Konvergenzverhalten war beim Betrachten der Abbildung 9.3 zu erwarten, da die Parameter um den Mittelwert streuen und die Summe der Parameter geteilt durch die Anzahl der Gauß-Punkte bei großen System schon den Mit-

telwert ergibt. Es ist zu erkennen, dass die Verformung bei einer Anzahl von rund 1000 Realisierungen für ein zufälliges Zufallsfeld gegen den Mittelwert konvergiert, wohingegen bei einem homogenen Zufallsfeld rund 3000 Realisierungen benötigt werden, damit die Verformung gegen den Mittelwert konvergiert. Für die Input-Parameter sieht das Konvergenzverhalten ähnlich aus. Für alle folgenden Berechnungen wurde ein zufälliges Zufallsfeld und eine Anzahl von 1000 Realisierungen verwendet.

9.1.3. Stochastische Verteilung des Elastizitätsmoduls und des Parameters E_∞

Anhand der Abbildung 9.5 ist zu erkennen, dass der Input-Parameter E_∞ normalverteilt ist, dadurch kann die Verteilung durch den folgenden Ausdruck

$$f_X(E_\infty) = \frac{1}{\sigma_{E_\infty} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{E_\infty - \mu_{E_\infty}}{\sigma_{E_\infty}}\right)^2\right) \quad (9.2)$$

beschrieben werden. Wie bereits im Kapitel 7.3.3 erläutert, muss gewährleistet sein, dass der Elastizitätsmodul keine negativen Werte annimmt, da dieses gegen physikalische Gesetzmäßigkeiten verstößt. Aus dem Grund, dass der Elastizitätsmodul nur durch den normal Verteilten Parameter E_∞ stochastisch verteilt ist, ist es ausgeschlossen durch die geringe Standardabweichung σ_E vom Elastizitätsmodul, dass dieser negative Werte annimmt. Allerdings muss auch sichergestellt werden, dass der Input-Parameter E_∞ stets positive Werte annimmt. In der Tabelle 9.1 sind einige Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Intervalle dargestellt.

	E_∞	E_∞
μ_{E_∞}	2170.00 MPa	2170.00 MPa
σ_{E_∞}	358.05 MPa	358.05 MPa
a	0 MPa	1500.00 MPa
b	4340.00 MPa	2840.00 MPa
$\mathcal{P}(a < E \leq b)$	99.99999986 %	93.8689 %
$\mathcal{P}(a \geq E)$	$6.7804 \cdot 10^{-8}$ %	3.0655 %
$\mathcal{P}(E > b)$	$6.7804 \cdot 10^{-8}$ %	3.0655 %

Tabelle 9.1.: Wahrscheinlichkeiten für den Parameter E_∞ bezüglich verschiedener Intervalle.

Der Tabelle 9.1 ist zu entnehmen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{P}(0 \text{ MPa} < E \leq 4340.00 \text{ MPa}) = 99.99999986\%$ der Parameter E_∞ in diesem Intervall liegt, dadurch ist es aus ingenieurtechnischer Sicht gerechtfertigt,

den Parameter als normalverteilt anzusehen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der unsichere Materialparameter E_∞ negative Werte annimmt beträgt rund $6.7804 \cdot 10^{-8} \%$, ist also durch die geringe Wahrscheinlichkeit nahe zu ausgeschlossen. Experimente zeigten, dass die Annahme, dass der unsichere Materialparameter E_∞ keine negative Werte annimmt bei einer Standardabweichung von rund 600 MPa verworfen werden muss, da die Wahrscheinlichkeit, dass negative Werte auftreten, bei 0.0149 % liegt. Wenn die Verwendung dieser Standardabweichung notwendig ist, kann dieses durch eine Abfrage der Zufallszahlen geschehen und beim Eintreten des Falles die entsprechende Zufallszahl ersetzt werden kann.

Das zweite Intervall ist in der Abbildung 9.5 als grün hinterlegter Bereich visualisiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte des Input-Parameters E_∞ in diesem Bereich liegen, beträgt rund 93.8689 %. Die Abbildung 9.5 zeigt, dass der verwendete und programmierte Algorithmus in der Lage ist, eine Normalverteilung zu generieren.

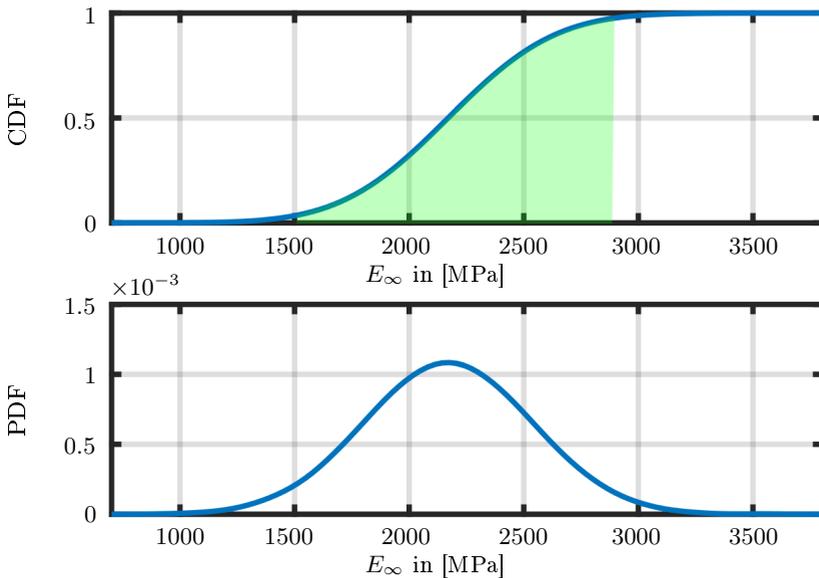


Abbildung 9.5.: Darstellung der Verteilung des unsicheren Materialparameters E_∞ anhand der CDF und PDF.

In der Abbildung 9.6 ist eine Verteilung des Elastizitätsmodul über die Probe

für eine Realisierung dargestellt und zeigt die natürliche Streuung der Materialparameter. Es ist zu erkennen, dass der Elastizitätsmodul um den Mittelwert streut, der bei rund 37868.44 MPa liegt. Da der Elastizitätsmodul eine Funktion von E_∞ ist, beträgt die Standardabweichung ebenfalls 358.05 MPa. Der überhöhte Wert des Elastizitätsmoduls von 39440.0 MPa an der Stelle $x = 0$ und $y = 0$, geht auf einen Projektionsfehler von den Gaußpunktwerten auf die Knotenwerte zurück, da diese nur für die Darstellung der Verteilung verwendet wird und das System an den Gaußpunkten gelöst wird, kann der Fehler vernachlässigt werden. Für den interessierten Leser wird auf Grundlagenliteratur wie Bathe [2001], Barth und Rustler [2010] und Braess [2013] verwiesen.

9.1.4. Stochastische Verteilung der Querkontraktionszahl

Werden die stochastischen Parameter für die Querkontraktionszahl in die Gleichung 9.1 eingesetzt, kann die Verteilung aus Abbildung 9.2 durch

$$f_X(\nu) = \frac{1}{\sigma_\nu \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\nu - \mu_\nu}{\sigma_\nu}\right)^2\right) \quad (9.3)$$

ausgedrückt werden, da die Querkontraktionszahl ebenfalls normalverteilt ist. Wie schon erläutert, ergab die Parameterstudie aus Kaptiel 9.1.1, dass die Querkontraktionszahl mit einer Standardabweichung von 21.5 % vom Mittelwert $\mu_\nu = 0.265$ die größte Streuung aufweist. Daher muss für die weiterführende Berechnung sichergestellt werden, dass die Querkontraktionszahl nicht den Wert 0.5 annimmt, da bei diesem Wert der Materialtensor gegen Unendlich geht. Dieses Verhalten würde ein inkompressibles Materialverhalten darstellen, was den experimentellen Daten widersprechen würde. Die untersuchten Intervalle und deren Wahrscheinlichkeiten können der Tabelle 9.2 entnommen werden.

	ν	ν
μ_ν	0.265	0.265
σ_ν	0.056975	0.056975
a	0	0.1
b	0.5	0.4
$\mathcal{P}(a < \nu \leq b)$	99.997978 %	98.92032 %
$\mathcal{P}(a \geq \nu)$	0.00101 %	0.5398 %
$\mathcal{P}(\nu > b)$	0.00101 %	0.5398 %

Tabelle 9.2.: Wahrscheinlichkeiten für die Querkontraktionszahl bezüglich verschiedener Intervalle.

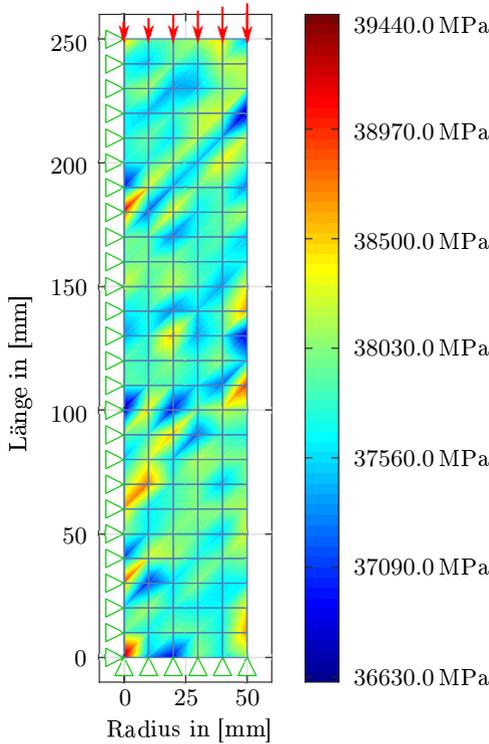


Abbildung 9.6.: Exemplarische Verteilung des Elastizitätsmoduls für eine Realisierung einer axialsymmetrisch approximierten Steinsalzprobe.

Es ist zu erkennen, dass es nicht ausgeschlossen werden kann, dass die Querkontraktionszahl den Wert 0.5 oder ähnlich ungünstige Werte annimmt, da die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}(a < \nu \leq b) = 98.92032\%$, dass die Werte innerhalb dieses Intervalls $[0.1 < \nu \leq 0.4]$ liegen, nicht ausreicht um die unzulässigen bzw. ungünstigen Werte auszuschließen. Aus diesem Grund wird für diesen Sachverhalt die vorgeschlagene Lösung aus Kapitel 9.1.3 verwendet, dass beim Eintreten des Falls die Zufallszahl ersetzt wird. Durch diese Experimente konnte festgestellt werden, dass die Querkontraktion für dieses Materialmodell der stochastische Parameter ist, der dazu führen kann, dass die stochastische

Berechnung keine zufriedenstellende Ergebnisse liefert, da der vorgestellte Algorithmus bei einer Querkontraktionszahl größer 0.42 versagt.

Der grün hinterlegte Bereich in der Abbildung 9.7 repräsentiert das zweite Intervall $[0.1 < \nu \leq 0.4,]$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{P}(a < \nu \leq b) = 98.92032\%$. Die aus der PDF (siehe Gleichung 9.3) resultierende CDF ist in der Abbildung 9.7 dargestellt.

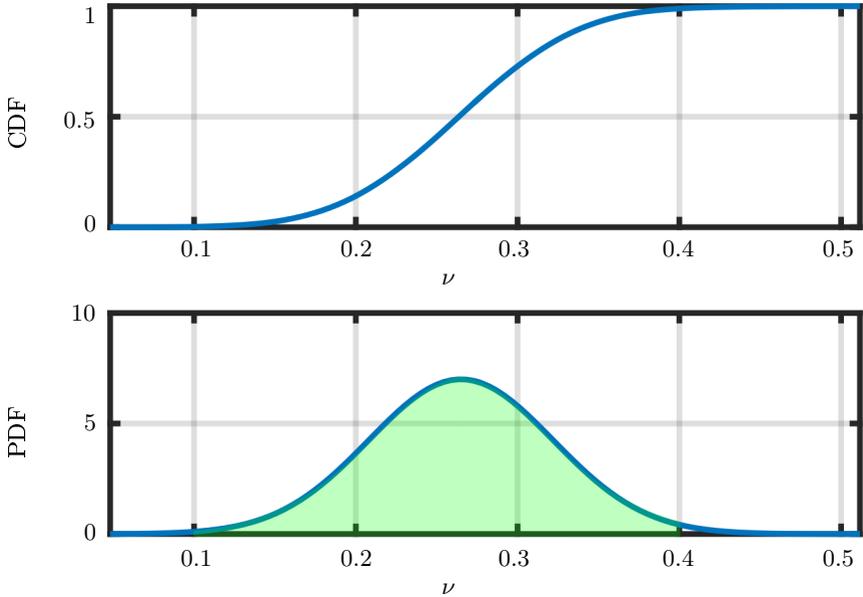


Abbildung 9.7.: Darstellung der Verteilung der Querkontraktionszahl ν anhand der CDF und PDF.

Die Verteilung der Querkontraktionszahl über der Probenhöhe für eine repräsentative Verteilung, ist in der Abbildung 9.8 gezeigt. Auch für diese Verteilung ist die Streuung um den Mittelwert $\mu_\nu = 0.265$ zu erkennen. Des Weiteren ist zu erkennen, dass der Algorithmus funktioniert, der das Eintreten des Falls, dass die Querkontraktionszahlen einen ungünstigen Wert annehmen, verhindern soll. Der Wert von 0.0571 an der Stelle $x = 0$ und $y = 40$ ist ebenfalls auf einen Projektionsfehler zurückzuführen und kann daher vernachlässigt werden.

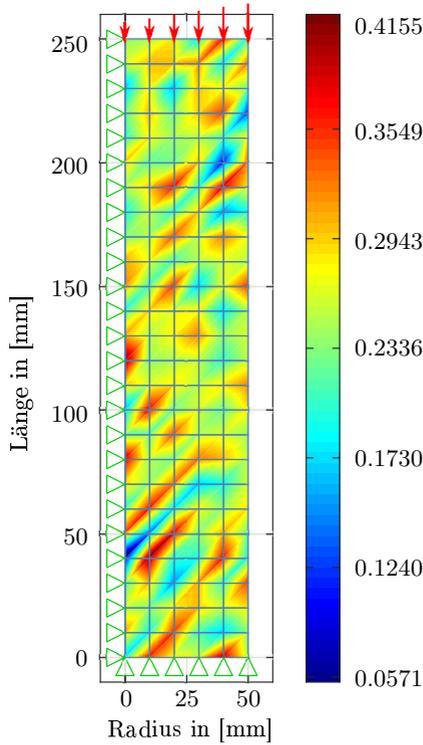


Abbildung 9.8.: Exemplarische Verteilung der Querkontraktionszahl für eine Realisierung einer axialsymmetrisch approximierten Steinsalzprobe.

9.1.5. Stochastische Verteilung der Anfangsschädigung

Die Verteilung der Schädigung D kann ebenfalls dadurch beschrieben werden, dass die stochastischen Parameter für die Schädigung in die Gleichung 9.1 eingesetzt werden. Somit ergibt sich folgende Verteilungsfunktion

$$f_X(D) = \frac{1}{\sigma_D \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{D - \mu_D}{\sigma_D}\right)^2\right) \quad (9.4)$$

für die Schädigung. Die dazugehörige Verteilung und die daraus resultierende CDF sind in der Abbildung 9.9 dargestellt.

	D	D	D
μ_D	0	0	0
σ_D	0.08944	0.08944	0.08944
a	-1	-0.2	-0.3
b	1	0.2	0.3
$\mathcal{P}(a < D \leq b)$	100.00 %	97.465268 %	99.9204 %
$\mathcal{P}(a \geq D)$	0 %	1.267365 %	0.0398 %
$\mathcal{P}(D > b)$	0 %	1.267365 %	0.0398 %

Tabelle 9.3.: Wahrscheinlichkeiten für die Schädigung bezüglich verschiedener Intervalle.

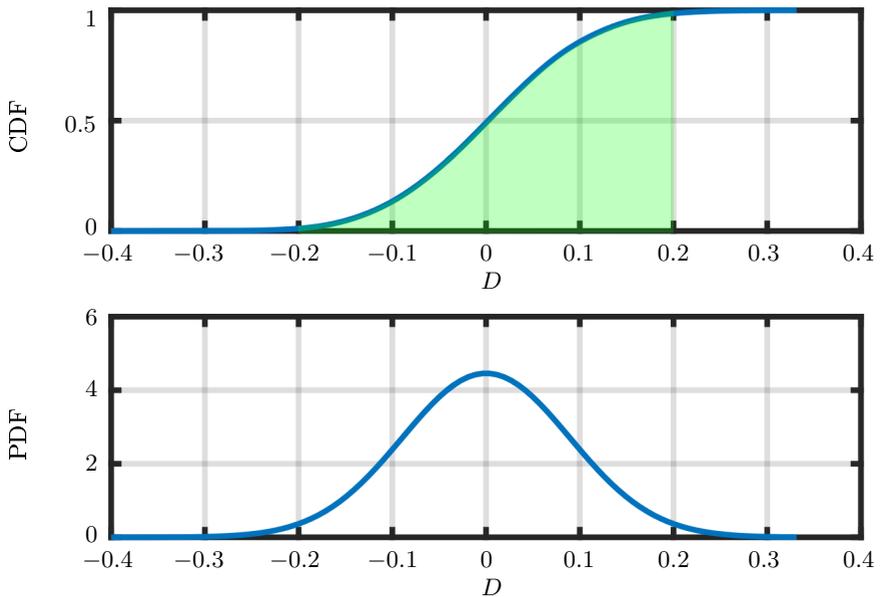


Abbildung 9.9.: Darstellung der Verteilung der Schädigung D anhand der CDF und PDF.

Durch die Parameterstudie, von der ausgewählte Werte in der Tabelle 9.3

gezeigt sind, konnte gezeigt werden, dass die Schädigung mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{P}(a < D \leq b) = 100.00$ sich in diesem Intervall befindet, bei einer Standardabweichung von $\sigma_D = 0.08944$ und einem Mittelwert von $\mu_D = 0$. Durch die vorliegende Parameterstudie kann ausgeschlossen werden, dass die Schädigungsvariable den Wert $D = 1$ annimmt, da dieses ein Material repräsentiert, das keinen tragfähigen Querschnitt mehr besitzt und das gleiche gilt dafür, dass die Schädigungsvariable den Wert $D = -1$ annimmt, da dieses dazu führen würde, dass die Verformung sich bei einem Kriechversuch verdoppelt.

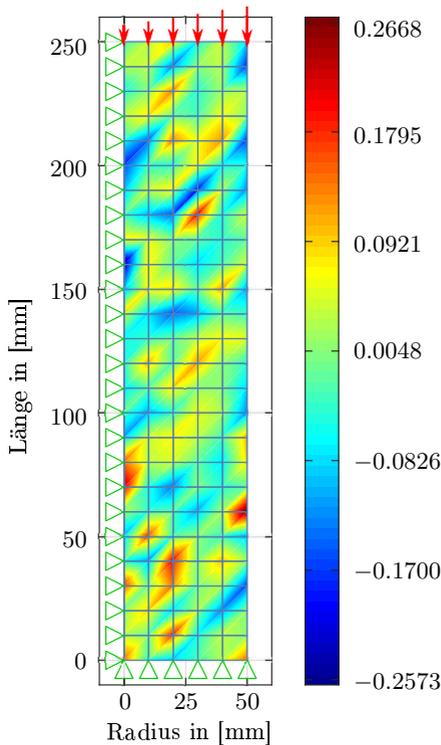


Abbildung 9.10.: Verteilung der Schädigung für eine Realisierung für eine Steinsalzprobe.

Dieses muss ebenfalls ausgeschlossen werden, da dieses Verhalten sich nicht in den Kriechversuchen gezeigt hat. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{P}(a < D \leq b) = 99.9204\%$ liegen die generierten Werte in diesem Intervall $[-0.3 < \nu \leq 0.3]$, dass diese Annahme zutrifft konnte in der Parameterstudie zur Standardabweichung im Kapitel 9.1.1 gezeigt werden.

Die Verteilung der Anfangsschädigung für eine Realisierung über der Probenhöhe ist in der Abbildung 9.10 gezeigt.

9.2. Numerische Beanspruchungsanalyse von Langzeitkriechversuchen

Dieses Kapitel zeigt die Ergebnisse der numerischen Beanspruchungsanalyse mit unsicheren Materialparametern für die Langzeitkriechversuche 0414*i* und N2/*i* und stellt somit die Erweiterung des Kapitels 6 dar. Des Weiteren soll das Kapitel zeigen ob die vorgestellten Methoden aus dem Kapitel 8 anwendbar sind für diese Art von Problemstellungen.

9.2.1. Langzeitkriechversuch 0414*i*

Die Ergebnisse der numerischen Beanspruchungsanalyse des Langzeitkriechversuches können der Abbildung 9.11 entnommen werden und die Randbedingungen für diesen Versuch sind im Kapitel 6.2 dargestellt. Die „blaue“ Kriechkurve in der Abbildung 9.11a stellt den Mittelwert der Kriechkurven dar und entspricht annähernd dem Langzeitkriechversuch 04141 aus der Abbildung 6.2. Die Mittelwerte der unsicheren Materialparameter und die daraus resultierende Verformung kann der Tabelle 9.4 im grau hinterlegten Bereich entnommen werden.

	E_∞	E	ν	D	u
1	2170.00 MPa	37868.44 MPa	0.26500	0	0.5862%
2	2369.50 MPa	38067.94 MPa	0.23379	0.13829	0.6014%
3	2383.98 MPa	38082.42 MPa	0.26679	-0.04395	0.5059%
4	2016.24 MPa	37714.68 MPa	0.24766	-0.16067	0.5302%
5	1651.89 MPa	37350.33 MPa	0.25914	-0.05456	0.6893%
6	2297.18 MPa	37995.63 MPa	0.23685	-0.00755	0.5392%

Tabelle 9.4.: Mittelwerte der unsicheren Systemparameter und Materialparameter und Verformung für ausgewählte Realisierungen.

Die „rote“ Kriechkurve stellt die obere Grenze und die „grüne“ Kriechkurve

stellt die untere Grenze des 80% Quantils dar. Das bedeutet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\mathcal{P}(a < \mathbf{u}_y \leq b) = 80\%$ die berechneten Kriechkurven in diesem Intervall liegen.

In der Abbildung 9.11b ist die Verteilung der Verformung bei 900 Tagen dargestellt. Die Punkte repräsentieren ausgewählte Realisierungen und sollen zeigen, dass die berechnenden Kriechkurven mit der CDF übereinstimmen. Die Materialparameter dieser Realisierungen können ebenfalls der Tabelle 9.4 entnommen werden.

An der CDF ist zu erkennen, dass die Verteilung der Verformung nicht normalverteilt ist, trotz der normalverteilten Input Variablen, was auf die nicht-lineare Berechnung zurückzuführen ist. Da die Normalverteilung der Verformung auf einer Annahme beruht und es zur Zeit keine Kenntnisse über die Verteilung der Verformung von Salzgestein existieren, wird diese Abweichung als akzeptabel eingestuft.

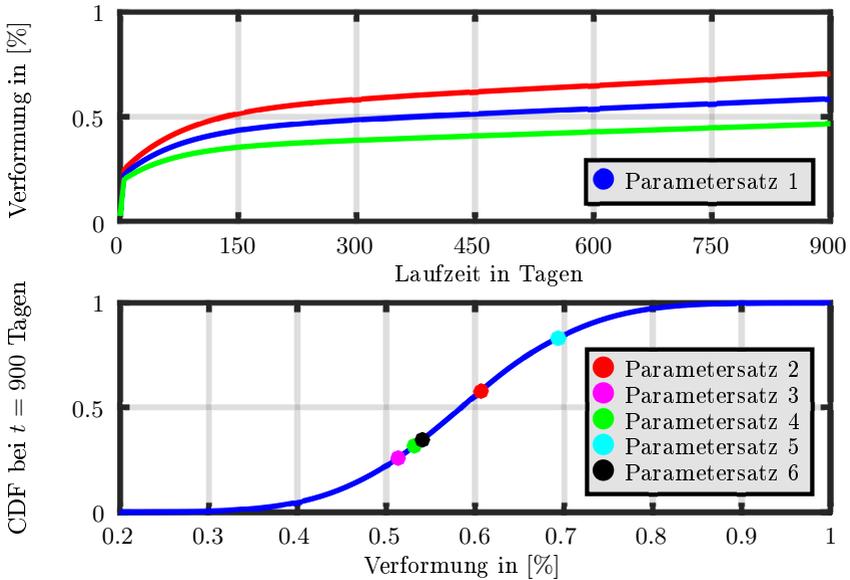


Abbildung 9.11.: Simulation des Langzeitkriechversuchs 0414i mit unsicheren Materialparametern und die daraus resultierende Verteilung der Verformung bei 900 Tagen.

Vergleicht man die berechnenden Kriechkurven mit dem Langzeitkriechversuchen aus der Abbildung 4.4a wird deutlich, dass das vorgestellte Materialmodell mit der stochastischen Erweiterung, das Materialverhalten von Salzgestein sehr

gut widerspiegeln kann. Durch den gesteigerten Grad an Informationen können Wahrscheinlichkeiten für Intervalle angegeben werden, in denen sich die Verformung befindet. Somit können ebenfalls Wahrscheinlichkeiten angegeben werden, ob ein Versagen der Salzsteinprobe bei ungünstigen Materialverteilungen bei diesem Langzeitkriechversuch eintreten kann.

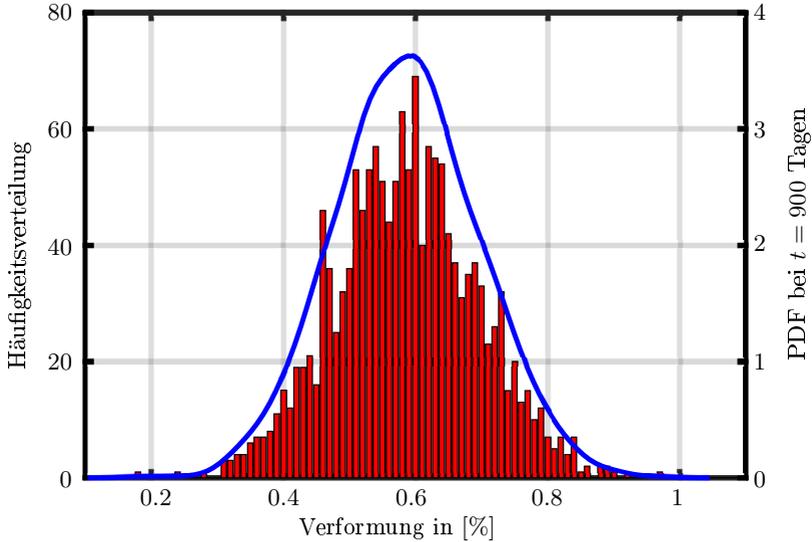


Abbildung 9.12.: PDF der Verformung bei 900 Tagen mit der Häufigkeitsverteilung der Realisierungen.

Die Abbildung 9.12 zeigt die gemittelte PDF der Verformung des Langzeitkriechversuches mit einer Häufigkeitsverteilung an einem Element für eine Realisierung.

9.2.2. Langzeitkriechversuch $N2/i$

Anhand des Langzeitkriechversuch $N2/i$ soll die stochastische Berechnung validiert werden. Die aus der stochastischen Berechnung resultierten Kriechkurven sind in der Abbildung 9.13 dargestellt, dabei repräsentiert die „rote“ Kriechkurve die obere Grenze und die „grüne“ Kriechkurve die untere Grenze des 80% Quantils. Die Randbedingungen für diesen Versuch können dem Kapitel 6.5 entnommen werden. Die „blaue“ Kriechkurve stellt den Langzeitkriechversuch $N2/4 - 95015$ dar. Durch den Vergleich der Kriechkurven aus der Abbildung

9.13a mit den Kriechkurven aus der Abbildung 4.4b wird ebenfalls deutlich, dass das vorgestellte Materialmodell mit der stochastischen Erweiterung das Materialverhalten von Salzgestein für die Langzeitkriechversuche sehr gut widerspiegeln kann.

In der Abbildung 9.13 ist die CDF der Verformung bei 1200 Tagen dargestellt, wobei die Punkte in dieser Abbildung die Verformung ausgewählter Realisierungen repräsentieren.

	E_∞	E	ν	D	u
1	2170.00 MPa	37868.44 MPa	0.26500	0	1.1917%
2	1662.54 MPa	37360.99 MPa	0.17778	-0.03400	1.3821%
3	2094.69 MPa	37793.13 MPa	0.29082	-0.05974	1.1746%
4	1968.00 MPa	37666.44 MPa	0.32910	-0.24543	1.0471%
5	2300.34 MPa	37998.79 MPa	0.25285	0.10724	1.2396%
6	1970.52 MPa	37668.97 MPa	0.30100	-0.03477	1.2724%

Tabelle 9.5.: Mittelwert der unsicheren Systemparameter und Materialparameter und Verformung für ausgewählte Realisierungen.

Die Materialparameter für die ausgewählten Realisierungen sind in der Tabelle 9.5 gezeigt. Die gemittelte PDF der Verformung für diesen Langzeitkriechversuch mit der Häufigkeitsverteilung an einem zufälligen Element mit der dazugehörigen Realisierung ist in der Abbildung 9.14 gezeigt.

9.2.3. Vergleich Polynomial Chaos mit Monte Carlo Simulation

In diesem Kapitel wird die PC Simulation mit der Monte Carlo (MC) Simulation verglichen, die Ergebnisse dieser Simulationen können den Abbildungen 9.15 bis 9.17 entnommen werden. Auf eine theoretische Einführung in das Themengebiet der Monte Carlo Simulation wird in dieser Arbeit verzichtet, für eine Einführung in das Themengebiet wird auf z.B. Binder et al. [2013] und Landau und Binder [2014] verwiesen.

In der Abbildung 9.15 sind die Mittelwerte der PC Simulation („blaue“ Kriechkurve) und MC Simulation („rote“ Kriechkurve) und die daraus resultierende Verteilung bei 900 Tagen dargestellt. Bei dem Vergleich der Mittelwerte der beiden Simulation wird deutlich, dass der Fehler zwischen den Mittelwerten gering ist, was eine vertretbare Abweichung darstellt. Werden hingegen die resultierenden Verteilungen der Verformung bei 900 Tagen aus der Abbildung 9.15b verglichen, ergibt sich ein anderes Bild. Man erkennt, dass die Streuung

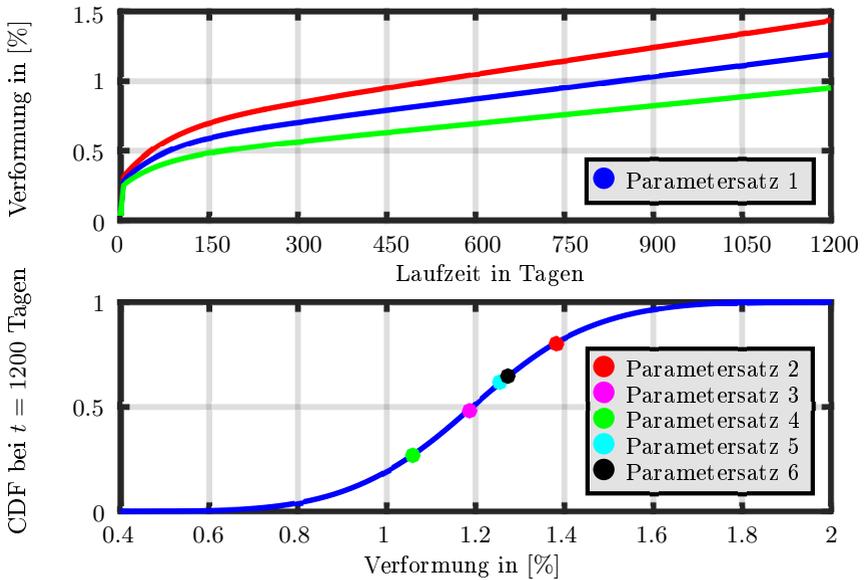


Abbildung 9.13.: Simulation des Langzeitkriechversuchs $N2/i$ mit unsicheren Materialparametern und die daraus resultierende Verteilung der Verformung bei 1200 Tagen.

der Verformung bei der PC Simulation deutlich größer ist als bei der MC Simulation. Das dieses Verhalten sich nicht durch eine zu geringe Anzahl an MC Simulationen ergibt, kann der Abbildung 9.16a entnommen werden. In dieser Abbildung ist der Fehler über die Anzahl der MC Simulationen dargestellt.

Durch Experimente konnte die Erkenntnis erlangt werden, dass bei nicht-linearen Berechnungen nicht mehr sichergestellt werden kann, dass die simulierte Verteilung der Verformung gegen die Verteilung der Verformung der MC Simulation konvergiert. Dieses wird beim Vergleich einer linearen Berechnung Sudret et al. [2012] mit einer nicht-linearen Berechnung (siehe 9.15) ersichtlich. Aus den Simulationen konnte abgeleitet werden, dass dieses durch die Summation von numerischen Fehlern verursacht wird, da es für bestimmte Rechenoperationen keine analytischen Lösungen gibt und diese somit numerisch bestimmt werden müssen, siehe Debusschere et al. [2004]. Im Anhang ist die Herleitung des Materialmodells dargestellt, wodurch die Anzahl an numerischen Lösungen der Ratengleichungen ersichtlich wird. Eine weitere Fehlerquelle für das nicht konvergieren der PC Simulation gegen die MC Simulation kann in der Beschreibung des Zufallsfeldes liegen. Wie die Zufallsfelder für die PC Simulati-

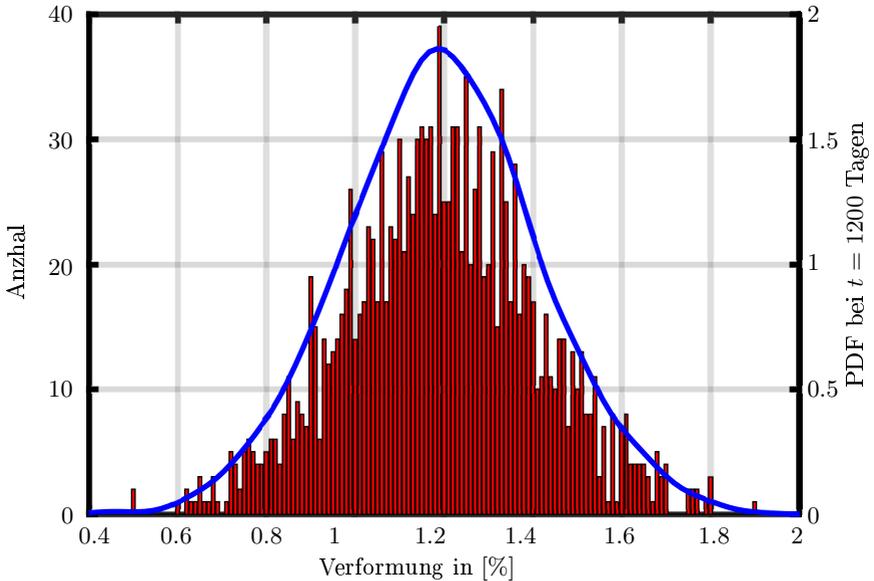


Abbildung 9.14.: PDF der Verformung bei 1200 Tagen mit der Häufigkeitsverteilung der Realisierungen.

on beschrieben werden, kann dem Kapitel 9.1 entnommen werden. Für die MC Simulation sind die Materialparametern homogen für eine Realisierung über dem Querschnitt verteilt, was der Simulation im Kapitel 6 entspricht. Das die Abweichung der Verteilung der Verformung nicht auf die zu geringe Anzahl an MC Simulation zurückzuführen ist, wird bei Vergleich der beiden Mittelwerte der Verformung und des relativen Fehlers ersichtlich. Der Mittelwert der Verformung der MC Simulation konvergiert bei 1000 Simulationen gegen den Mittelwert der PC Simulation.

Für das Postprocessing der PC Simulation werden 1500 Realisierungen verwendet, was den Informationsgehalt von 1500 MC Simulationen entspricht. Die Anzahl an Realisierungen wird für die Berechnung der Hauptspannungen benötigt, da diese mittels der MC Simulationen bestimmt wurden. Das ist darauf zurückzuführen, dass es zur Zeit keine Lösungsmethode, für das Eigenwertproblem eines vom Zufall abhängigen Tensor zweiter Stufe gibt. Dieses wirkt sich negativ auf die Simulationszeit aus, allerdings wird beim betrachten der „roten“ Kurve in der Abbildung 9.16 deutlich, dass die PC Simulation trotz dem einen deutlich Vorteil gegenüber der MC Simulation mit sich bringt. Um demselben Informationsgrad durch die MC Simulation zu erhalten, benötigt man rund die 25 fache Berechnungszeit gegenüber der PC Simulation. Die deutlich ge-

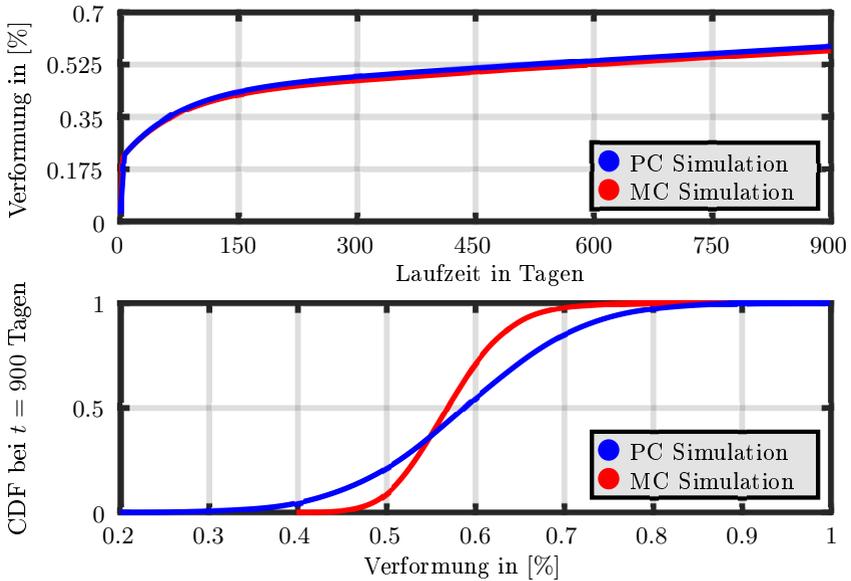


Abbildung 9.15.: Gegenüberstellung der Verformung aus der PC- und der MC Simulation für den Langzeitkriechversuch 0414i.

ringeren Simulationskosten der PC Simulation gegenüber der MC Simulation rechtfertigen den erhöhten Implementierungsaufwand der Materialgleichungen und den Einsatz der SFEM.

Die Abbildung 9.17 zeigt das Konvergenzverhalten der unsicheren Materialparameter in Abhängigkeit der Anzahl der MC Simulationen. Anhand der „roten“ Linien, die den Fehler zwischen der Verteilung der Input Parameter der PC und der MC Simulation darstellt, ist zu erkennen, dass die Verteilung der unsicheren Materialparameter gegen die MC Simulation konvergiert. Die Verteilungen der Input-Parameter die mittels des PC entwickelt wurden konvergieren nach rund 1500 MC Simulationen gegen die daraus resultierende Verteilung der Input-Parameter. Dieses Verhalten bestätigt ebenfalls die Erkenntnis, dass das nichtlineare Materialmodell aus Kapitel 5 die Verteilung der Output-Parameter beeinflusst. Die „blauen“ Linien in der Abbildung 9.17 repräsentieren die Verteilung der Input Parameter nach nur zwei MC Simulationen und die „magenta“ farbigen Linien in der Abbildung stellen die Verteilung der Input Parameter mittels der PC Entwicklung dar.

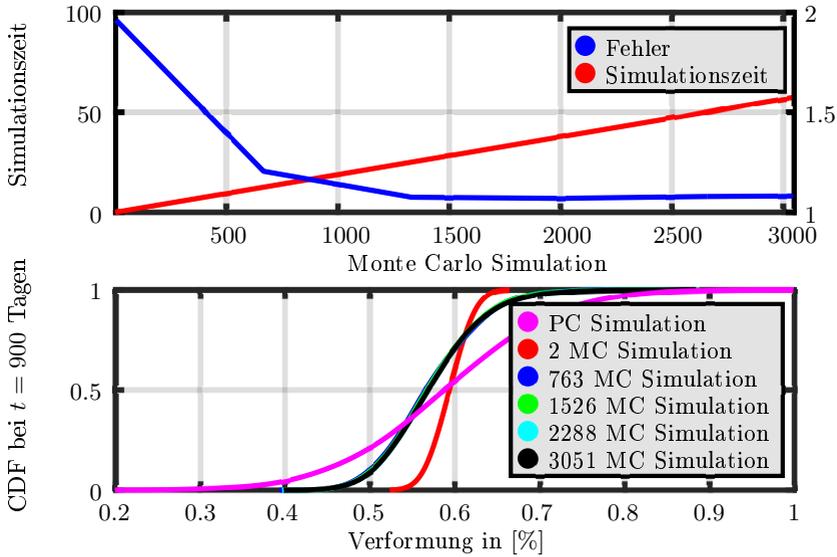


Abbildung 9.16.: Konvergenzverhalten der Verformung und der relativen Fehler der Verformung in Abhängigkeit der Anzahl der MC Simulation.

9.2.4. Schlussfolgerung

In diesem Kapitel konnte gezeigt werden, dass die Erweiterung der Salzmechanik um unsichere Materialparameter zweckmäßig ist und dass die Erweiterung eine erhebliche Erhöhung des Informationsgehalts pro Simulation zufolge hat. Allerdings ergeben sich bei der Erweiterung der Materialgleichung um unsichere Materialparameter einige Probleme die zur Zeit noch nicht zufrieden stellend gelöst sind. In den folgenden Unterpunkten wird auf diesen Sachverhalt eingegangen und anhand geeigneter Beispiele erläutert.

- Norm eines Tensors

In den meisten nicht-linearen Materialgesetzen wird die Norm eines Tensors benötigt, als Beispiel dieses Sachverhaltes soll die Vergleichsspannung nach von Mises dienen. Die Vergleichsspannung nach von Mises kann durch folgenden Ausdruck

$$\sigma^{vM} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\overset{n+1}{\sigma}\| \quad (9.5)$$

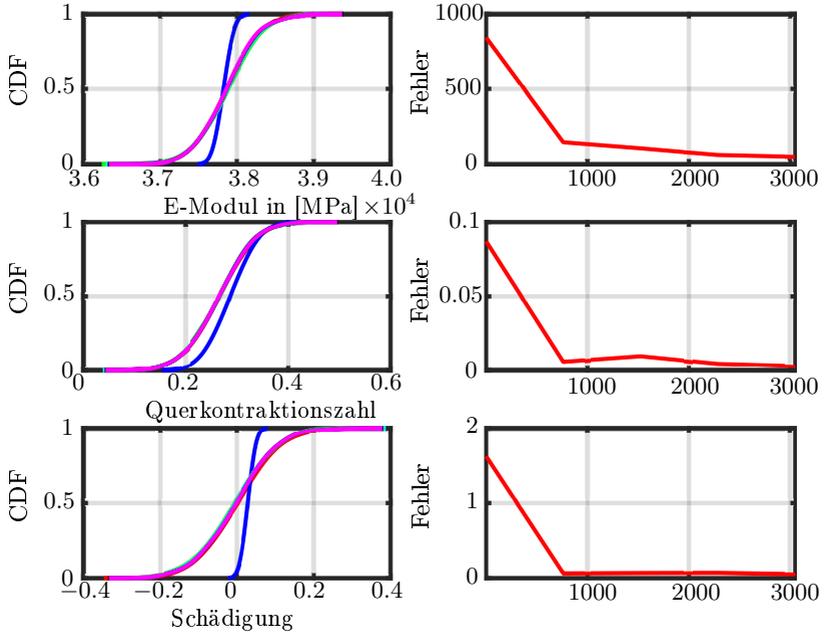


Abbildung 9.17.: Konvergenzverhalten der Input Parameter in Abhängigkeit der Anzahl der MC Simulation.

bestimmt werden. In der Literatur findet sich keine effizientere Methode um die Vergleichsspannung zu berechnen. Nach Debusschere et al. [2004] müssen die folgenden Schritte durchgeführt werden

$${}^{n+1}\hat{\sigma}_k^2 = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P C_{ijk} {}^{n+1}\hat{\sigma}_i {}^{n+1}\hat{\sigma}_j \quad (9.6)$$

und

$$\hat{\sigma}^{vM} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{{}^{n+1}\hat{\sigma}^2}. \quad (9.7)$$

Wobei für die Gleichung 9.7 zur Zeit keine analytische Lösung in der Literatur verfügbar ist. Dadurch muss die Gleichung mittels Näherungslösungen, die in Debusschere et al. [2004] gezeigt sind, gelöst werden. Das iterative Lösen der Gleichung wirkt sich ungünstig auf die Berechnungszeit aus und kann ein Grund dafür sein, dass die berechnete

Verteilung von der MC Simulation abweicht.

- **Fließnormalen**

Eine weitere wichtige Größe für nichtlineare Materialmodelle stellt die Fließnormale (siehe Gleichung 5.56) dar, die unter Verwendung der Gleichung 9.6, 9.7 und 5.56 bestimmt werden kann. Für die Berechnung der Fließnormale benötigt man ein weiteres iteratives Verfahren, was in Debusschere et al. [2004] gezeigt ist.

- **Invertieren von Tensoren**

Für die Berechnung der Quadratwurzel in Gleichung 9.7 benötigt man die Inverse Jacobi Matrix die eine Funktion von C_{ijk} ist, was dazu führen kann, dass große Tensoren invertiert werden müssen, was sich ebenfalls negativ auf die Berechnungszeit auswirkt.

- **Eigenwertproblem eines Tensors zweiter Stufe**

Im Laufe dieser Arbeit wurde festgestellt, dass für die Lösung des Eigenwertproblems des Spannungstensors

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) = 0 \quad (9.8)$$

in der Literatur keine Methode existiert, dieses für die PC Entwicklung zu berechnen. Dieser Sachverhalt ist der Grund dafür, dass die Gleichung f_c (siehe Gleichung 5.18), die den Einfluss der Feuchte auf die Kriechrate beschreibt, modifiziert werden musste. Nach Hunsche et al. [2003] kann die Gleichung f_c durch den folgenden Ansatz

$$f_c = \begin{cases} \left[1 + \left(\frac{\sigma_{okt}}{\sigma_u} - \frac{\tau_{okt}}{\sqrt{2}\sigma_u} \right)^{c_{fc1}} \tau_{okt} \right]^{-\left(\frac{c_{fc2}}{1 + \left(\frac{\tau_{okt}}{\sigma_u} \right)} \right)^2} & \text{für } \sigma_{okt} \geq \frac{\tau_{okt}}{\sqrt{2}} \\ f_c = 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (9.9)$$

ersetzt werden. Da für die Auswertung der Maschinenstrecke die minimale Hauptspannung benötigt wird, wird diese im Postprocessing über die Realisierung berechnet. Das hat aber zu Folge, dass für einen Gausspunkt 1500 mal das Eigenwertproblem gelöst werden muss, was einen enormen Anstieg der Rechenzeit für das Postprocessing zufolge hat.

Abschließend kann man zusammenfassen, dass die vorgestellte Methode das Materialverhalten von Salzgestein gut widerspiegeln kann. Allerdings wirken sich

die vorgestellten Probleme, die sich aus der SFEM mit PC entwickelten Zufallsvariablen ergeben, negativ auf die Performance der Simulation aus. Wenn in weiteren Forschungsarbeiten Methoden gefunden werden, die Rechenoperationen effizienter durchzuführen, stellt die SFEM mit PC entwickelten Zufallsvariablen eine gute Methode dar, um das nicht-lineare Verhalten von Materialien zu beschreiben.

9.3. Numerische Beanspruchungsanalyse einer Untertagestruktur

In diesem Kapitel wird mittels des vorgestellten Materialmodells eine Untertagestruktur, welche in der Abbildung 9.18 dargestellt ist, aus Salzgestein berechnet. Die Untertagestruktur ist die Maschinenstrecke EU1 des Bergwerks Sondershausen in Thüringen.

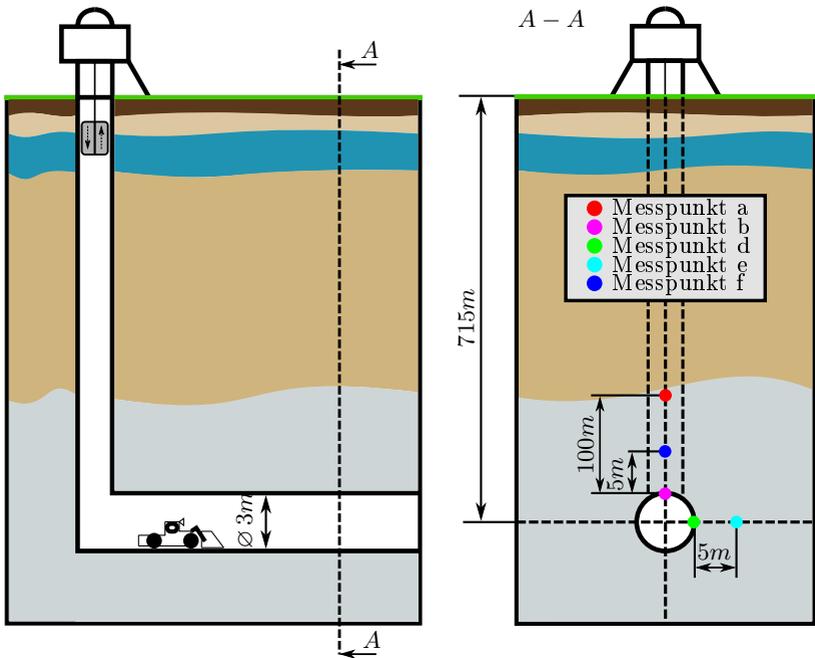


Abbildung 9.18.: Schematische Darstellung der Maschinenstrecke EU1 im Bergwerk Sondershausen.

Diese wurde gewählt, da für diese Maschinenstrecke In-situ-Messdaten vorlie-

gen, die in Hampel [2006], Günther et al. [2007], Heemann und Schulze [2007], Hou et al. [2007], Pudewills [2007] und Rokahr et al. [2007] veröffentlicht wurden. Damit wird ein Vergleich des vorgestellten Materialmodells mit den in der Literatur verwendeten Materialmodellen möglich. In der Abbildung 9.18 ist eine schematische Darstellung der Maschinenstrecke gezeigt. Die Maschinenstrecke wurde im Oktober 1969 aufgefahren und im Zeitraum vom 02.12.1998 bis 04.05.1999 wurde eine Extensiomermessung im Stoß und in der First durchgeführt. Dadurch ergibt sich eine Simulationszeit von 36.5 Jahren, die sich von der Zeit der Auffahrung bis zum Ende der Messung erstreckt. Die Maschinenstrecke befindet sich auf der 715 m Sohle und besitzt einen kreisförmigen Querschnitt mit einem Durchmesser von 3 m. Eine detaillierte Darstellung der Lage des Versuchsverschlussbauwerkes in der EU1 der Grube Sondershausen kann der Arbeit von Heemann und Schulze [2007] entnommen werden. In der Tiefe von 715 m liegt ein hydrostatischer Druck von $p = 17.9 \text{ MPa}$ vor. Die Punkte in der Abbildung 9.18 stellen die Auswertungspunkte für das Modell dar und entsprechen den Auswertungspunkten in der Literatur. Die Strecke zwischen den Messpunkten b und f sowie d und e entsprechen der 5 m langen Extensiomermessstrecke in der First und im Stoß vergleiche, Hampel [2006]. Das FE-Modell der Untertagestruktur wird im nachfolgenden Kapitel vorgestellt.

9.3.1. FE-Modell der Untertagestruktur

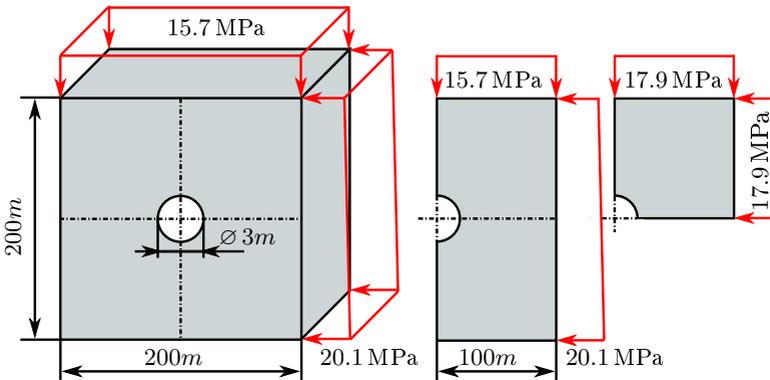


Abbildung 9.19.: Vorstellung verschiedener FE-Modell für die Maschinenstrecke EU1.

Durch die Geometrie der Untertagestruktur und der angenommenen Homogeni-

tät des Versuchsfeldes durch die Projektgruppe „Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen“ können mehrere FE- Modelle verwendet werden (siehe Abbildung 9.19). Ein dreidimensionales FE-Modell der Maschinenstrecke EU1 wäre möglich, ist aber aus numerischer Sicht nicht ratsam, da der zusätzliche Gewinn an Informationen in keiner Relation zur gesteigerten Rechenzeit steht. Aufgrund der Symmetrie der Maschinenstrecke kann das Modell halbiert werden, was eine Spiegelung der Zufallsfelder an der Symmetrieebene nach sich zieht. Des Weiteren wird die Dehnung in Längsrichtung behindert, wodurch die Dehnung in dieser Richtung gegen Null geht und somit der ebene Dehnungszustand angewendet werden kann. Die Reduzierung des Modells von 3D auf 2D hat zur Folge, dass das Zufallsfeld sich in Längsrichtung nicht verändert. Der Verlust an Informationen über die Verteilung der Materialparameter und der Vorschädigung des Salzstocks wird durch die enorme Reduzierung der Simulationszeit kompensiert.

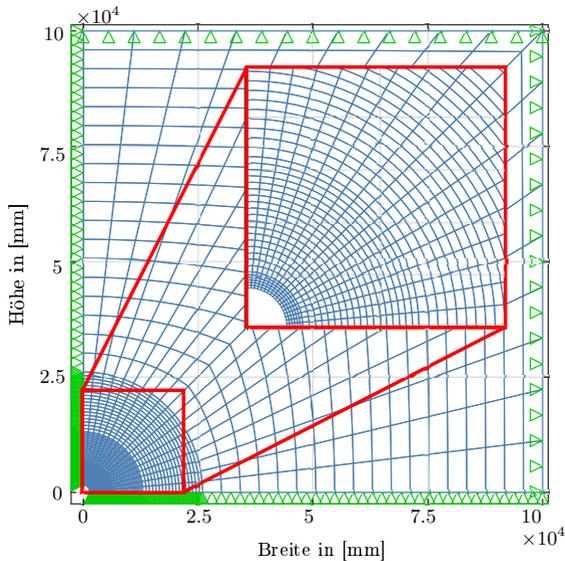


Abbildung 9.20.: FE-Modell für die Maschinenstrecke EU1 mit den Randbedingungen.

Für die Abbildung der Maschinenstrecke mittels des ebenen Dehnungszustandes haben sich zwei Varianten durchgesetzt, siehe Rokahr et al. [2007]. Die erste Variante ist ein zweidimensionales FE-Modell mit den Abmaßen $100 \text{ m} \times 200 \text{ m}$ und einer Symmetrierandbedingung, einer konstanten Flächen-

last von 15.7MPa am oberen Rand, einer linearen veränderlichen Flächenlast gegenüber der Symmetrierandbedingung mit dem Minimalwert von 15.7MPa und dem Maximalwert von 20.1MPa und einer Verschiebungsrandbedingung am unteren Rand. Die zweite Variante stellt eine vereinfachte Variante der ersten Variante dar. Die linear veränderliche Flächenlast wird gemittelt über das Gebiet und ergibt sich zu 17.9MPa. Aufgrund der verringerten Rechenzeit und der Tatsache, dass die Unterschiede an den Messpunkten zwischen den beiden Varianten vernachlässigbar klein sind, was in Rokahr et al. [2007] gezeigt wird, wurde für die Nachrechnung der Maschinenstrecke die zweite Variante gewählt. In der Abbildung 9.20 ist das FE-Modell mit den Randbedingungen und den Abmessungen dargestellt.

9.3.2. Verteilung der Materialparameter

In diesem Kapitel wird die Verteilung der unsicheren Materialparameter der Realisierung für die Maschinenstrecke EU1 und dem umgebenden Steinsalz gezeigt.

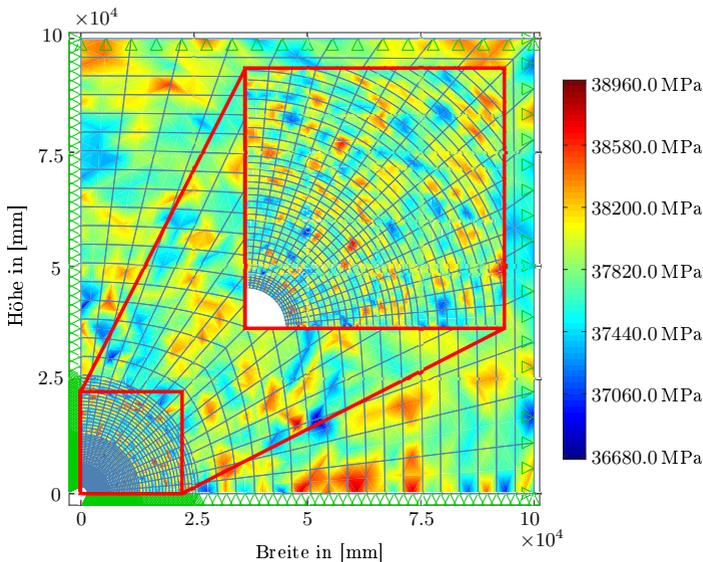


Abbildung 9.21.: Verteilung des Elastizitätsmoduls für eine Realisierung der Maschinenstrecke EU1 und dem umgebenden Steinsalz.

In der Abbildung 9.21 ist die Verteilung des Elastizitätsmoduls dargestellt.

Der „rot“ umrandete Bereich in der Abbildung 9.21 zeigt die Verteilung des Elastizitätsmoduls nahe der Rundung der Maschinenstrecke. Aufgrund der Vernetzung ergeben sich in den weit entfernten Bereichen vom Querschnitt große Gebiete mit nahezu gleichen Materialeigenschaften. Da in diesen Bereichen ein hydrostatischer Spannungszustand vorliegt und die Verformung gegen Null geht, kann auf eine feinere Vernetzung in diesem Bereich verzichtet werden.

Es ist zu erkennen, dass der Elastizitätsmodul um den Mittelwert streut. Die Streuung der Querkontraktionszahl für die Maschinenstrecke EU1 ist in der Abbildung 9.22 dargestellt. Der maximale Wert der Querkontraktionszahl im oberen Bereich von $x = 0\text{m}$ bis $x = 10\text{m}$ und $y = 100\text{m}$ geht auf einen Projektionsfehler zurück. Anhand der Verteilung der Querkontraktionszahl ist zu erkennen, dass diese ebenfalls um den Mittelwert streut.

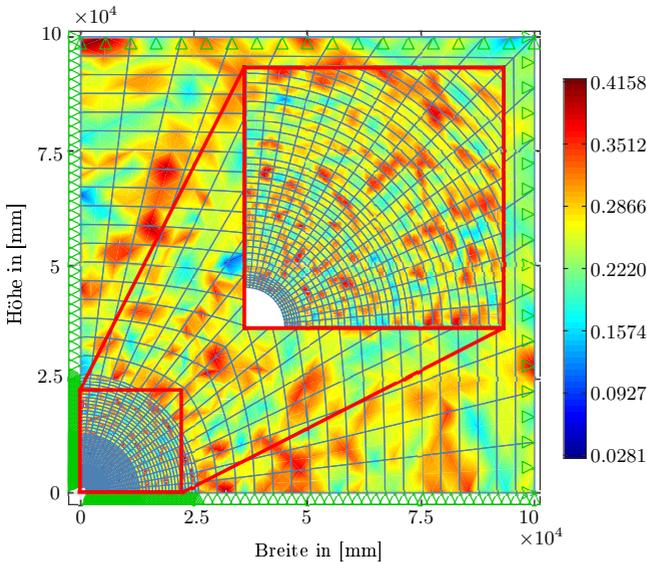


Abbildung 9.22.: Verteilung der Querkontraktionszahl für eine Realisierung der Maschinenstrecke EU1 und dem umgebenen Steinsalz.

In der Abbildung 9.23 ist die Verteilung der Schädigung dargestellt. An den Verteilungen der unsicheren Materialparameter ist zu erkennen, dass sich im Bereich des hydrostatischen Spannungszustandes kein homogenes Dehnungsfeld einstellen kann, wie es in der Literatur dargestellt ist. Dieses muss beim Vergleich der berechneten Verformung mit der Verformung aus der Literatur berücksichtigt werden. Für den Vergleich mit der Literatur werden deshalb

die Mittelwerte der Verformung herangezogen.

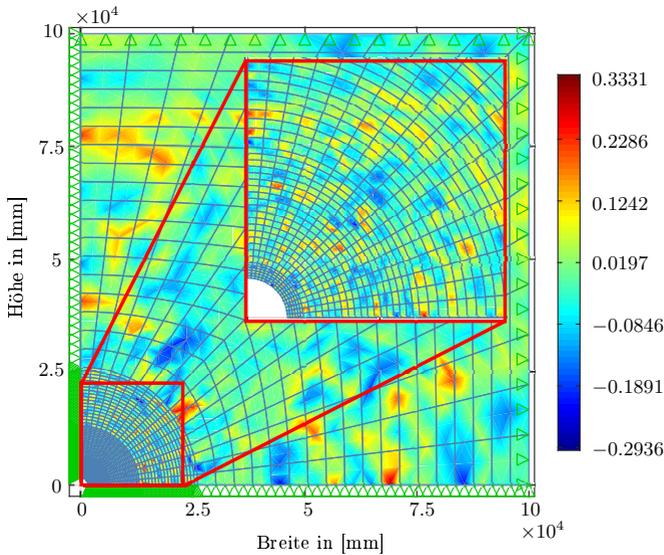


Abbildung 9.23.: Verteilung der Schädigung für eine Realisierung für die Maschinenstrecke EU1 und dem umgebenden Steinsalz.

9.3.3. Ergebnisdarstellung der Simulation

Die Entwicklung der Vertikal- und Horizontalverschiebungen der Messpunkte b, d, e und f kann den Abbildungen 9.25 und 9.26 entnommen werden, wobei die Kriechkurven den Mittelwert der Verformung repräsentieren. Auf eine Darstellung der Vertikal- und Horizontalverschiebung des Messpunktes a wird verzichtet, da aufgrund der Randbedingungen dieser Messpunkt keine Verformung erfährt. Dasselbe gilt für die nicht dargestellten Vertikal- und Horizontalverschiebungen der Messpunkte b, d, e und f.

Durch den Vergleich der simulierten Verschiebung an den Messpunkten der Maschinenstrecke EU1, welche in den Abbildungen 9.25 und 9.26 dargestellt sind, mit den in der Literatur berechneten Verschiebungen an den Messpunkten (siehe Abbildung 9.24) wird deutlich, dass das vorgestellte Materialmodell das Materialverhalten von Salzgestein Untertage anhand der Maschinenstrecke EU1 hinreichend genau abbilden kann.

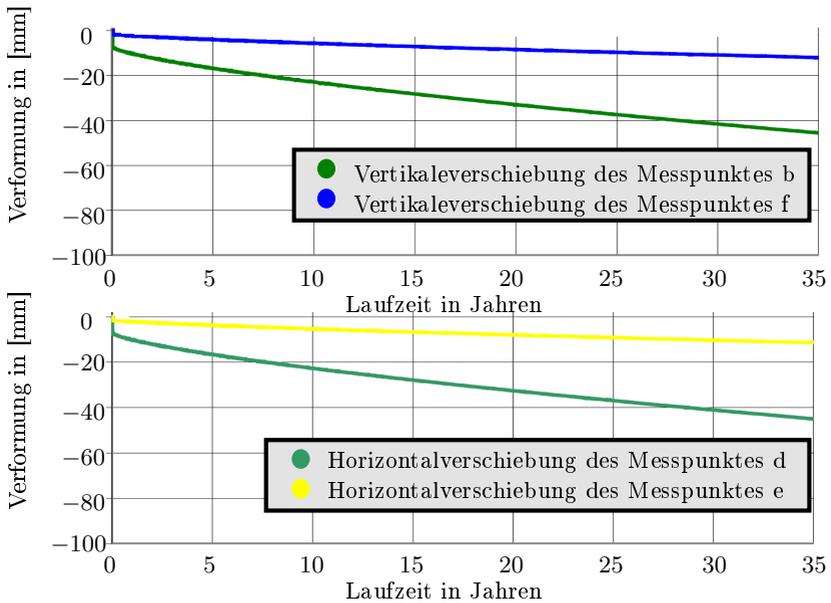


Abbildung 9.24.: Berechnete Vertikalverformung und Horizontalverformung der Messpunkte b, d, e und f aus Rokahr et al. [2007]

Des Weiteren ist zu erkennen, dass in der Literatur die simulierte Vertikalverschiebung des Punktes b im Bereich vom 30 mm bis 62 mm liegt, siehe Hampel [2006], Günther et al. [2007], Heemann und Schulze [2007], Hou et al. [2007], Pudewills [2007], Rokahr et al. [2007]. Da nur die Verformungsraten gemessen wurden, kann keine endgültige Aussage über den Betrag der Verformung getroffen werden. Beim Betrachten der Vertikalverschiebung und der dazugehörigen Verteilung bei 36 Jahren der Messpunkte b und f wird deutlich, dass die Verschiebung und die dazugehörige Standardabweichung für weit entfernte Gebiete von der Maschinenstrecke gegen Null geht. Dieses Verhalten wurde vermutet aufgrund der Größe des betrachteten Gebietes und dem vorherrschenden hydrostatischen Spannungszustandes.

Anhand der Verteilungsfunktion der Verformung in den Abbildung 9.25 und 9.26 wird ersichtlich, dass das Materialmodell in der Lage ist, die natürliche Streuung der Verformung von Salzgestein zu beschreiben. Um Aussagen über die Güte der Verteilung treffen zu können, benötigt man weitere In-situ-Messdaten für verschiedene Maschinenstrecken, um diese mit den Berechnungsergebnissen abzugleichen. Da das Materialmodell die Verteilung der Verfor-

mung bei den Langzeitkriechversuchen zufriedenstellend abbilden konnte, wird davon ausgegangen, dass die Verformung der Maschinenstrecke ebenfalls hinreichend genau abgebildet werden kann.

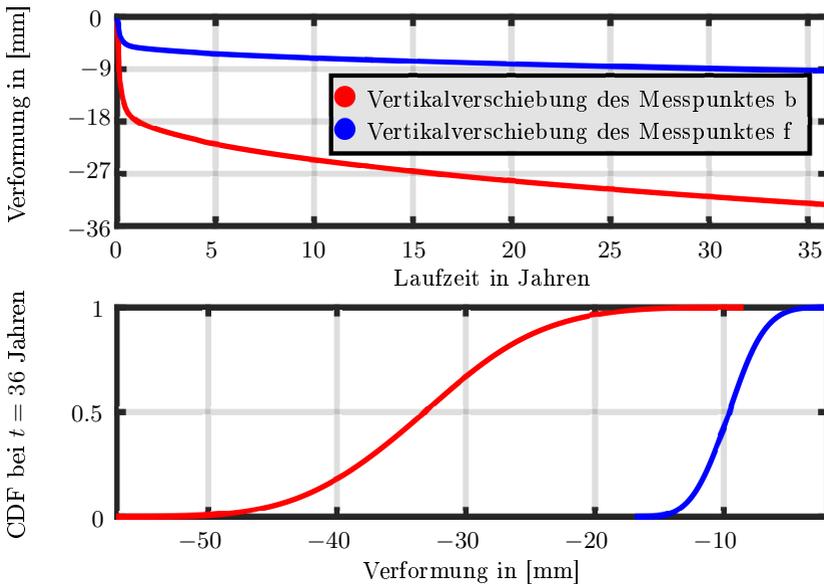


Abbildung 9.25.: Entwicklung der Vertikalverschiebung der Messpunkte b und f und die dazugehörige Verteilung der Vertikalverschiebung bei 36 Jahren.

Die Extensiomermessungen an den Messpunkten d und e ergaben Verformungsraten in vertikaler Richtung von 1.09 bis 1.3 mm/a und in horizontaler Richtung von 0.365 bis 0.62 mm/a, siehe Hampel [2006], Günther et al. [2007], Heemann und Schulze [2007], Hou et al. [2007], Pudewills [2007], Rokahr et al. [2007]. Die berechneten Verformungsraten der Messpunkte liegen für die vertikale Richtung bei rund 0.8 mm/a und für die horizontale Richtung bei rund 0.2 mm/a. Die Differenz zwischen der gemessenen und berechneten Verformungsrate lässt sich durch das vereinfachte Materialmodell zur Beschreibung des Materialverhaltens von Salzgestein erklären. Da für die Beschreibung der Kriechrate in der stationären Kriechphase ein modifiziertes Norton-Stoffgesetz (siehe Gleichung 5.51 und 5.52) verwendet wird, was nicht in der Lage ist alle Effekte des Salzgesteines abzubilden. Allerdings zeigen die Ergebnisse der deterministischen (siehe Kapitel 6) und stochastischen (siehe Kapitel 9) Berechnung des Materialverhaltens von Salzgestein, dass die primären Größen, wie die Verformung und die Spannungen, hinreichend genau abgebildet werden können.

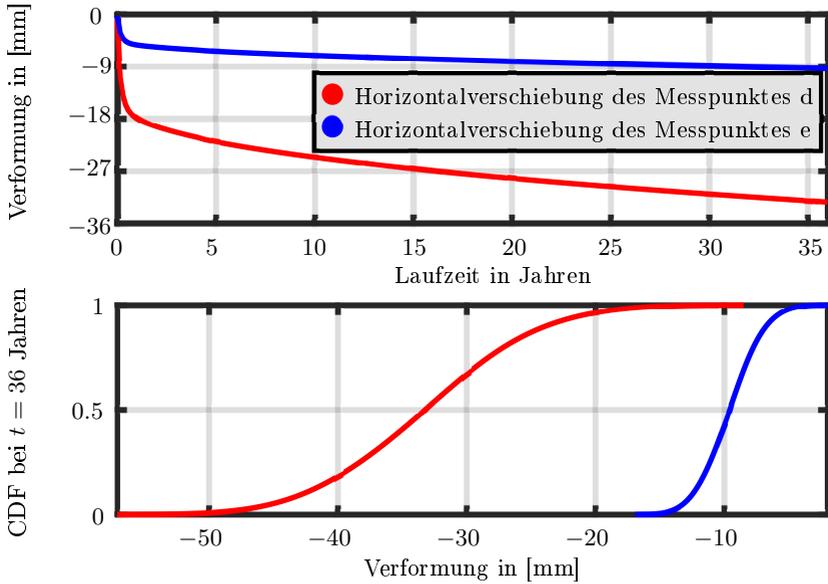


Abbildung 9.26.: Entwicklung der Horizontalverschiebung der Messpunkte d und e und die dazugehörige Verteilung der Horizontalverschiebung bei 36 Jahren.

Vergleicht man die Verschiebung der berechneten Verformung der Messpunkte aus der Literatur, z.B. Pudewills [2007], Hampel [2006] und der Abbildung 9.24, ist zu erkennen, dass z.B. die Vertikalverschiebung des Messpunktes *b* von der Horizontalverschiebung des Messpunktes *d* abweichen (siehe Abbildung 9.24), was bei der gezeigten Simulation der Maschinenstrecke nicht der Fall ist. Diese Abweichungen der Ergebnisse lassen sich durch die Modellbildung erklären, da für das gesamte Gebiet ein einheitlicher Gebirgsdruck von 17.9 MPa angenommen wurde. Durch diese Annahme ergibt sich die betragsmäßig gleiche Entwicklung für die Vertikal- und Horizontalverschiebungen und der Vertikal- und Horizontalspannungen (siehe Abbildung 9.29) der Messpunkte *b*, *d*, *e* und *f*.

In der Abbildung 9.28 ist der Betrag der maximalen Hauptspannung in Abhängigkeit vom Abstand zur Streckenkantur bei einer Teufe von 715m dargestellt. Der Vergleich mit der Literatur und der Abbildung 9.27 zeigt, dass die Entwicklung der maximalen Hauptspannung gute Übereinstimmungen mit den In-situ-Messdaten aufweist. Des Weiteren kann der Abbildung 9.28 entnommen werden, dass die maximale Hauptspannung gegen den Gebirgsdruck 17.9 MPa

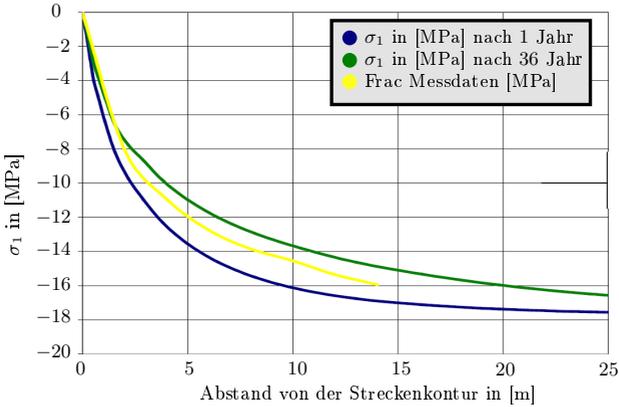


Abbildung 9.27.: Berechnete maximale Hauptspannung und Frac Messdaten aus Rokahr et al. [2007]

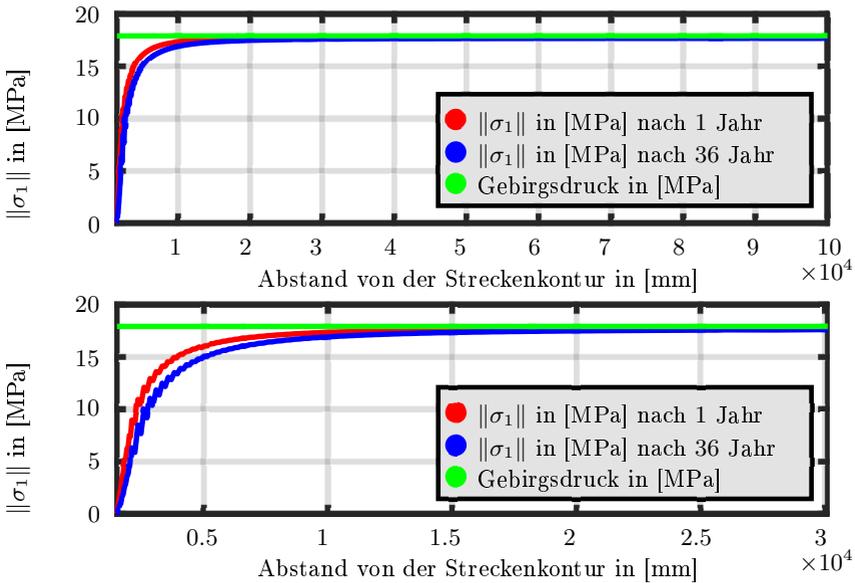


Abbildung 9.28.: Betrag der maximalen Hauptspannung nach einem Jahr und nach 36 Jahren.

konvergiert. Die maximale Hauptspannung konvergiert nach einer Entfernung von rund 22 m gegen den angenommenen ungestörten Gebirgsdruck. Wie sich der Spannungszustand über die Zeit für die Messpunkte b, d, e und f entwickelt, ist in der Abbildung 9.29 gezeigt. In der Abbildung sind die Spannungen σ_{xx} und σ_{yy} dargestellt, auf eine Darstellung der Spannung σ_{zz} wird verzichtet, da diese der Spannung in Dickenrichtung entspricht und über die gesamte Zeit konstant ist und dem Wert des Gebirgsdruck besitzt. Der Vergleich mit der Literatur (siehe Abbildung 9.27) zeigte, dass die simulierte Entwicklung der Spannungen sehr gute Übereinstimmung mit der Literatur aufweist (siehe Pudewills [2007]).

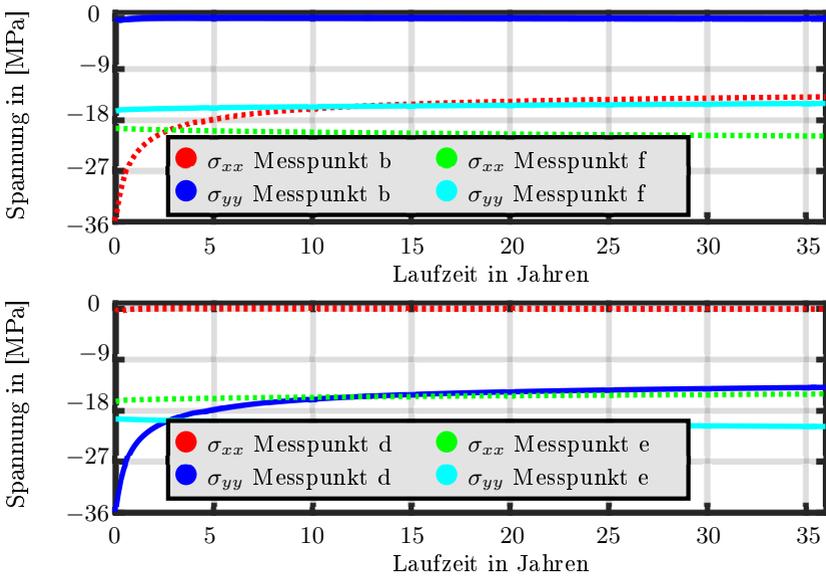


Abbildung 9.29.: Entwicklung der Vertikal- und Horizontalspannungen an den Messpunkten b, d, e und f.

9.3.4. Schlussfolgerung

Die gezeigten Ergebnisse der Simulation der Maschinenstrecke EU1 mit unsicheren Materialparametern untermauern die Aussage, dass die Erweiterung der Salzmechanik um die Stochastik anwendbar ist. Es konnte gezeigt werden, dass der Informationsgrad unter Anwendung der SFEM deutlich höher ist, als es bei

der deterministischen Simulation der Fall ist. Um den gleichen Informationsgrad durch die deterministische Simulation unter Verwendung der Monte Carlo Methode zu erhalten, wird durch einen enormen Zuwachs der Simulationszeit erkaufte. Dieser Sachverhalt kann der Abbildung 9.16 entnommen werden. Somit ist der Mehraufwand für die Implementierung der Materialgleichungen und die Erweiterung auf die SFEM gerechtfertigt, da der Mehraufwand bei der Implementierung durch die verringerte Simulationszeit amortisiert wird.

10. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit konnte anhand des vorgestellten Materialmodell gezeigt werden, dass die Erweiterung der Salzmechanik um die Annahme, dass die Systemparameter stochastisch verteilt sind, praktikabel ist. Dieses Resultat wurde durch eine langjährige Forschungsarbeit auf diesem Themengebiet erlangt. Der Weg der Forschungsarbeit und die daraus resultierende Erkenntnisse sind in der Abbildung 10.1 visualisiert.

Die numerischen Experimente zeigen, dass der Grad der Informationen einer stochastischen Beanspruchungsanalyse gegenüber einer deterministischen Beanspruchungsanalyse um vieles höher ist, allerdings wird der höhere Informationsgehalt der Beanspruchungsanalyse durch erhöhten Rechenaufwand und Implementierungsaufwand erkauft. Der erhöhte Rechenaufwand kann durch immer besserer werdende Rechentechnik kompensiert werden und ist somit händelbar. Durch die Implementierung des stochastisch motivierten Materialmodell ergaben sich weiterführende Fragestellungen die in anderen Forschungsarbeiten geklärt werden müssen.

Durch die Zunahme des Informationsgehaltes des Outputs ergeben sich neue Anforderungen an den Input. Für die stochastische Berechnung werden Systemparameter wie die Standardabweichung, der Mittelwert und die Verteilungsfunktion benötigt, dadurch muss eine Vielzahl an auswertbaren Materialtests unter Laborbedingungen vorliegen. Für Salzgestein liegt eine große Datenbasis an Festigkeits- und Kriechversuchen unter Laborbedingungen vor, die in zahlreichen Forschungsvorhaben erstellt worden sind. Die Systemparameter in dieser Arbeit wurden anhand eines Langzeitkriechversuches der Reihe 0414*i* ermittelt und unterliegen daher einer präzisen Stochastik. Für die Verteilung der Verformung wurde eine Normalverteilung angenommen. Da diese Arbeit zeigen sollte, ob die Erweiterung der Salzmechanik praktikabel ist, wurde die Analyse der vorhandenen Daten mit statistischen Methoden nicht weiter verfolgt, wie sie in Leonard und Hsu [1999] gezeigt ist. Dieses beruht auf der zu geringen Anzahl der einzelnen Festigkeits- und Kriechversuchs Serien. Um den Informationsgehalt des Inputs zu steigern, könnte in weiter führenden Forschungsarbeiten die Datenmenge durch weitere Experimente am Salzgestein erhöht werden, um Aussagen über die Verteilung treffen zu können.

Für zukünftige Forschungsvorhaben auf dem Feld der Salzmechanik unter Berücksichtigung von unsicheren Materialparametern müssen weitere numerische

Experimente zeigen, ob das vorgestellte Materialmodell, die vorgestellten Methoden und die Annahmen, wie z.B. das die Verteilung der Verformung normalverteilt ist, das Materialverhalten von Salzgestein unter Einbeziehung von weiteren Festigkeits- und Kriechversuchen hinreichend genau abbilden kann. Bei der Erweiterung des Materialmodells um weitere Effekte, wie z. B. die Heilung des Salzgesteins, mit dem das Materialverhalten realistischer abgebildet werden kann, ist besonders auf die Eignung der Materialgleichungen im Bezug auf die stochastische Erweiterung zu achten. Als Beispiel hierfür, soll die Gleichung 5.18 dienen, mit der im CDM der Einfluss der Feuchtigkeit auf die Verformung des Steinsalzes beschrieben wird. Diese Gleichung ist eine Funktion der dritten Hauptspannung, für die die Lösung des Eigenwertproblems eines Tensors zweiter Stufe benötigt wird. Zur Zeit gibt es in der Literatur keine effiziente Lösungsmethode für das Eigenwertproblem eines stochastischen Tensors zweiter Stufe, was dazu führt, dass solche Formulierungen hinsichtlich der numerischen Effizienz bei der SFEM vermieden werden sollten. Des Weiteren stellt sich die Berechnung der Fließnormalen (siehe Gleichung 5.56) als ineffizient dar, da es zur Zeit für die Division von stochastischen Größen keine analytische Lösung gibt, siehe Debusschere et al. [2004]. In der Arbeit von Debusschere et al. [2004] sind alle heutigen Stand der Technik effizienten Lösungsmethoden für Zufallsvariablen, die mittels des Polynomial Chaos entwickelt worden, dargestellt. Aus diesem Sachverhalt, ergibt sich ein erheblicher Forschungsbedarf bei der effizienten Lösen der Materialgleichungen für nichtlineare Materialmodelle. Dieses wird ersichtlich beim Vergleich der benötigten Methoden zum Lösen der Steifigkeitsmatrix eines linear-elastischen mit einem nichtlinearen Materialmodell, siehe Gleichung 2.76 und 5.71.

Aufgrund der Komplexität der Unterstagestrukturen hinsichtlich der unsicheren Systemparameter kann die stochastische Dimensionalität stark ansteigen, was sich negativ auf die Rechenzeit auswirkt, da sehr große Gleichungssysteme gelöst werden müssen. Dieses kann zum Teil durch die verbesserte Rechen-technik kompensiert werden, allerdings benötigt man für hoch dimensionale Systeme effiziente Gleichungslöser, wie sie in den Arbeiten von Lee [2009], Lee [2016] und Deman et al. [2016] vorgestellt wurden.

Des Weiteren stellt der erhöhte Grad an Informationen Anforderungen an den Anwender, da er die zusätzlichen Informationen auffassen, verarbeiten und visualisieren muss, um die Ergebnisse der stochastischen Berechnung interpretieren zu können. Die Erweiterung der Salzmechanik um unsichere Systemparameter könnte zeigen, dass der höhere Grad an Informationen einen wichtigen Beitrag zur Endlagersuche für Atommüll liefert.

In der Abbildung 10.1 ist das Forschungsvorhaben zur Erweiterung der Salzmechanik um das Feld der Stochastik dargestellt. Der eigene Forschungsweg ist in den hellgrauen Feldern gezeigt. Daraus wird ersichtlich, dass wir uns

für ein eigenes Materialmodell entschieden haben, was Komponenten der etablierten Materialmodell beinhaltet, siehe Kapitel 5.8. Für die Entwicklung der Zufallsfelder wurde sich für das Polynomial Chaos entschieden, da diese gegen über der Karhunen Loeve Entwicklung Vorteile besitzt. Für eine Karhunen Loeve Entwicklung benötigt man einen sehr hochdimensionalen Wahrscheinlichkeitsraum, was dazuführen kann, dass die Anzahl an Kollokationspunkten im Bereich einer Monte Carlo Simulation liegt. Welche Auswirkungen dieses auf die Berechnungszeit hat ist in der Abbildung 9.17 dargestellt. Um eine gute numerische Approximation der Karhunen Loeve Eigenfunktionen zu gewährleisten benötigt man ein feines FEM Netz, was dazuführen kann, dass das verwendetet Netz feiner sein muss, als es für die mechanische Antwort vonnöten wäre. Anhand der Ergebnisse der Simulation (siehe Kapitel 9) könnte die eingangs gestellte Frage „Ist die Erweiterung der Salzmechanik um unsichere Systemparameter zweckmäßig?“ mit „ja“ beantwortet werden.

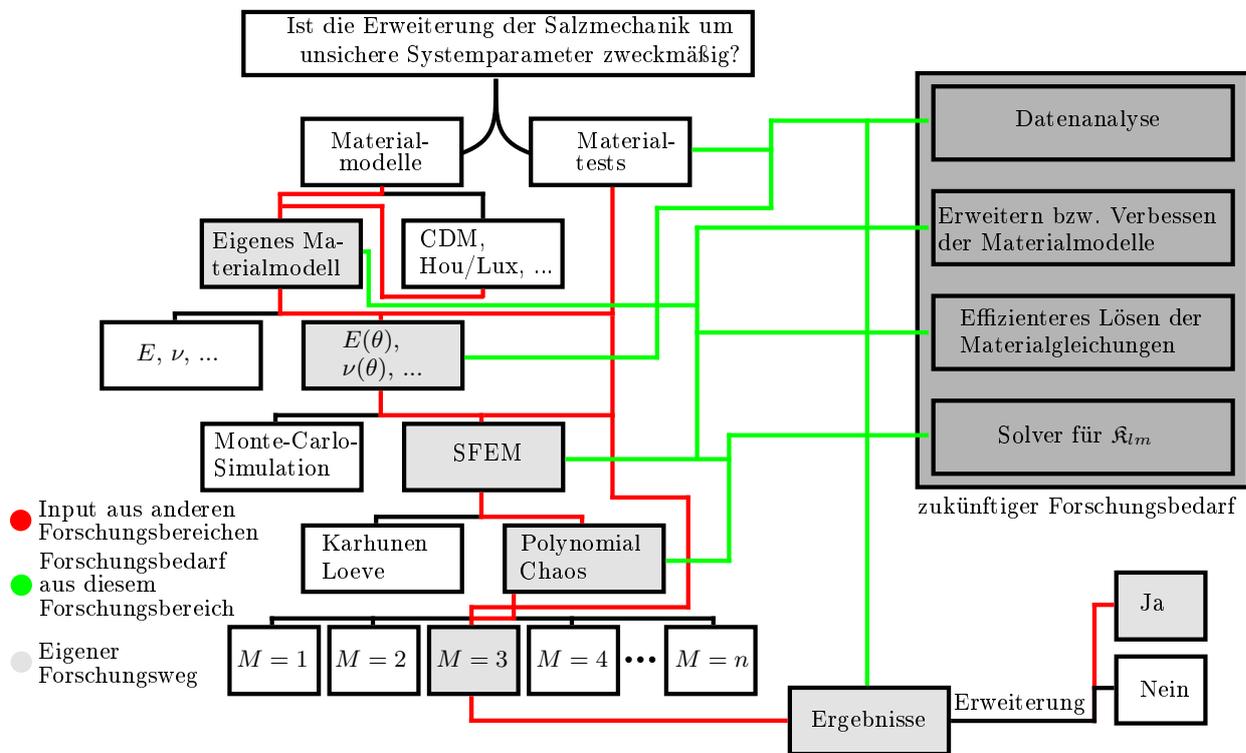


Abbildung 10.1.: Zusammenfassung und Ausblick des Forschungsvorhabens zur Erweiterung der Salzmechanik um das Feld der Stochastik.

A. Ableitung der nichtlinearen Nullfunktionen

Dieses Kapitel stellt eine Erweiterung des Kapitels 5.8.5 dar. Die Ableitung der nichtlinearen Nullfunktion ${}^{n+1}\tilde{f}$ (siehe Gleichung 5.66) nach der Vergleichsspannung σ^{vM} kann durch

$$\frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} = {}^{n+1}A_{\tilde{\sigma}} + \frac{\partial^{n+1}A_{\tilde{\sigma}}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} {}^{n+1}\sigma^{vM} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial\|{}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}\|}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} \quad (\text{A.1})$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1}A_{\tilde{\sigma}}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} &= dt \, 3\mu_L \left(\frac{\partial^{n+1}\dot{\tilde{\epsilon}}^{cr}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} \frac{1}{{}^{n+1}\sigma^{vM}} - \frac{{}^{n+1}\dot{\tilde{\epsilon}}^{cr}}{({}^{n+1}\sigma^{vM})^2} \right), \\ \frac{\partial^{n+1}\dot{\tilde{\epsilon}}^{cr}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} &= B_1 \left(\frac{\partial^{n+1}F_h}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} \left({}^{n+1}\sigma^{vM} \right)^N + {}^{n+1}F_h N \left({}^{n+1}\sigma^{vM} \right)^{N-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

und

$$\frac{\partial\|{}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}\|}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} = - \frac{{}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}}{\|{}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}\|} {}^{n+1}\tilde{\sigma}^{test} dt \frac{{}^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} \quad (\text{A.3})$$

berechnet werden. Die partielle Ableitung nach dem volumetrischen Anteil des Spannungstensors ist durch den folgenden Ausdruck

$$\frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} = {}^{n+1}\sigma^{vM} \frac{\partial^{n+1}A_{\tilde{\sigma}}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial\|{}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}\|}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} \quad (\text{A.4})$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1}A_{\tilde{\sigma}}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} &= dt \, 3\mu_L \left(\frac{\partial^{n+1}\dot{\tilde{\epsilon}}^{cr}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} \frac{1}{{}^{n+1}\sigma^{vM}} \right), \\ \frac{\partial^{n+1}\dot{\tilde{\epsilon}}^{cr}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} &= B_1 \left(\frac{\partial^{n+1}F_h}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} \left({}^{n+1}\sigma^{vM} \right)^N \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

und

$$\frac{\partial\|{}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}\|}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} = - \frac{{}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}}{\|{}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}\|} {}^{n+1}\tilde{\sigma}^{test} dt \frac{{}^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} \quad (\text{A.6})$$

gegeben. Leitet man nun die nichtlineare Nullfunktion ${}^{n+1}\tilde{f}$ nach der Schädigungsvariable D ab, ergibt sich folgender Ausdruck

$$\frac{\partial^{n+1}\tilde{f}}{\partial^{n+1}D} = - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\partial\|{}^{n+1}\mathbf{R}_{\tilde{\sigma}}\|}{\partial^{n+1}D} \quad (\text{A.7})$$

mit

$$\frac{\partial \|^{n+1} \mathbf{R}_{\hat{\sigma}}\|}{\partial^{n+1} D} = - \frac{^{n+1} \mathbf{R}_{\hat{\sigma}}}{\|^{n+1} \mathbf{R}_{\hat{\sigma}}\|} {}^{n+1} \sigma^{test}. \quad (\text{A.8})$$

Für die zweite Zeile der Jacobi-Matrix werden die partiellen Ableitungen der nichtlinearen Nullfunktionen $^{n+1} f^{vol}$ (siehe Gleichung 5.67a) benötigt. Die partielle Ableitung nach $^{n+1} \sigma^{vM}$ ergibt sich zu

$$\frac{\partial^{n+1} f^{vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}} = - \frac{\partial^{n+1} R_{\sigma^{vol}}}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}} + \frac{\partial^{n+1} \gamma^{vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}} \quad (\text{A.9})$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} R_{\sigma^{vol}}}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}} &= - {}^{n+1} \sigma^{test,vol} dt \frac{^{n+1} \dot{D}}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}}, \\ \frac{\partial^{n+1} \gamma^{vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}} &= dt \kappa \frac{\partial \dot{\varepsilon}^{cr,vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

und

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}^{cr,vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}} = \frac{\partial^{n+1} r_v}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}} {}^{n+1} \dot{\varepsilon}^{cr} + {}^{n+1} r_v \frac{\partial^{n+1} \dot{\varepsilon}^{cr}}{\partial^{n+1} \sigma^{vM}}. \quad (\text{A.11})$$

Die partielle Ableitung nach $^{n+1} \sigma^{vol}$ erhält man durch folgenden Ausdruck

$$\frac{\partial^{n+1} f^{vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}} = 1 - \frac{\partial^{n+1} R_{\sigma^{vol}}}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}} + \frac{\partial^{n+1} \gamma^{vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}} \quad (\text{A.12})$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n+1} R_{\sigma^{vol}}}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}} &= - {}^{n+1} \sigma^{vol,test} dt \frac{^{n+1} \dot{D}}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}}, \\ \frac{\partial^{n+1} \gamma^{vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}} &= dt \kappa \frac{\partial \dot{\varepsilon}^{cr,vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

und

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}^{cr,vol}}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}} = \frac{\partial^{n+1} r_v}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}} {}^{n+1} \dot{\varepsilon}^{cr} + {}^{n+1} r_v \frac{\partial^{n+1} \dot{\varepsilon}^{cr}}{\partial^{n+1} \sigma^{vol}}. \quad (\text{A.14})$$

Die Ableitungen der nichtlinearen Nullfunktion nach der Schädigungsvariable D ist durch

$$\frac{\partial^{n+1} f^{vol}}{\partial^{n+1} D} = - \frac{\partial^{n+1} R_{\sigma^{vol}}}{\partial^{n+1} D} \quad (\text{A.15})$$

mit

$$\frac{\partial^{n+1} R_{\sigma^{vol}}}{\partial^{n+1} D} = - {}^{n+1} \sigma^{vol,test} \quad (\text{A.16})$$

gegeben. Für die partiellen Ableitungen der nichtlinearen Nullfunktion ${}^{n+1}f^D$ (siehe Gleichung 5.67b) nach den Variablen ${}^{n+1}\sigma^{vM}$, ${}^{n+1}\sigma^{vol}$ und ${}^{n+1}D$ ergeben sich folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}f^D}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}} &= -dt H_f \frac{{}^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vM}}, \\ \frac{\partial^{n+1}f^D}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}} &= -dt H_f \frac{{}^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}\sigma^{vol}}\end{aligned}\tag{A.17}$$

und

$$\frac{\partial^{n+1}f^D}{\partial^{n+1}D} = 1 - dt H_f \frac{{}^{n+1}\dot{D}}{\partial^{n+1}D}.\tag{A.18}$$

B. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Für die Normalverteilung \mathcal{N} mit den Parametern μ und σ ergibt sich die folgende PDF

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad (\text{B.1})$$

mit der dazugehörigen CDF

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt. \quad (\text{B.2})$$

Die PDF für eine logarithmische Normalverteilung \mathcal{LN} ist durch gegeben

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad (\text{B.3})$$

mit den Parametern μ und σ . Die CDF kann durch

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt \quad (\text{B.4})$$

bestimmt werden. Die gleichmäßige Verteilung U für das Intervall $[a, b]$ kann durch die folgende PDF beschrieben werden

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (\text{B.5})$$

mit der dazugehörigen CDF

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}. \quad (\text{B.6})$$

C. Polynomial Chaos

Dieses Kapitel stellt eine Erweiterung des Kapitels 8.2 dar. Im Kapitel C.1 werden die Hermite Polynome vorgestellt, mit deren Hilfe die Entwicklung der Zufallsvariable in dieser Arbeit erfolgt.

C.1. Hermite Polynome

Die Hermite Polynome, die nach den französischen Mathematiker Charles Hermite benannt worden sind, gehören zu der Klasse der orthogonalen Funktionen nach Brandt et al. [2013]. In der Literatur finden sich verschieden Ansätze zur Beschreibung der Hermite Polynome, in dieser Arbeit werden die beiden wichtigsten Formulierungen für die Hermite Polynome vorgestellt nach Maitre und Knio [2010]. Geht man von den sogenannten Erzeuger Funktionen

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (\text{C.1})$$

bzw.

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \quad (\text{C.2})$$

die stetig differenzierbar und über das Intervall $[-\infty, \infty]$ definiert sind. Nach Maitre und Knio [2010] und Sudret et al. [2012] ergeben sich für die allgemeine Form der Hermite Polynome folgende Ausdrücke

$$\mathfrak{h}_n(x) = (-1)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (\text{C.3})$$

und

$$\mathfrak{h}_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2). \quad (\text{C.4})$$

Für eine genaue Herleitung dieses Sachverhaltes wird auf die folgende Literatur Maitre und Knio [2010] und Ghanem und Spanos [1991] verwiesen. Die nachfolgenden Gleichungen stellen die ersten sieben Hermite Polynome da, die

sich durch Differenzieren der Gleichungen C.3 und C.4 ergeben.

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{h}e_0(x) &= 1 \\
 \mathfrak{h}e_1(x) &= x \\
 \mathfrak{h}e_2(x) &= x^2 - 1 \\
 \mathfrak{h}e_3(x) &= x^3 - 3x \\
 \mathfrak{h}e_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\
 \mathfrak{h}e_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x \\
 \mathfrak{h}e_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{h}_0(x) &= 1 \\
 \mathfrak{h}_1(x) &= 2x \\
 \mathfrak{h}_2(x) &= 4x^2 - 2 \\
 \mathfrak{h}_3(x) &= 8x^3 - 12x \\
 \mathfrak{h}_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\
 \mathfrak{h}_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \\
 \mathfrak{h}_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Die sieben Hermite Polynome $\mathfrak{h}e_{0..6}$ können der Abbildungen 8.2 entnommen werden.

C.2. Erwartungswert dreier multidimensionaler Hermite Polynome

Nach Sudret et al. [2012], können anhand der Gleichung 8.32 die Erwartungswerte $\langle \Psi_i \Psi_j \Psi_k \rangle$ für die drei Polynome Ψ wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned}
 \Psi_i &= \prod_{m=1}^M \mathfrak{h}_{\alpha_m}(\xi_m), \quad \text{auf } \alpha_m \geq 0, \\
 \Psi_j &= \prod_{m=1}^M \mathfrak{h}_{\beta_m}(\xi_m), \quad \text{auf } \beta_m \geq 0, \\
 \Psi_k &= \prod_{m=1}^M \mathfrak{h}_{\gamma_m}(\xi_m), \quad \text{auf } \gamma_m \geq 0.
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Geht man von dem Erwartungswert

$$\begin{aligned}
 D_{ijk} &= \langle \mathfrak{h}_i(\xi) \mathfrak{h}_j(\xi) \mathfrak{h}_k(\xi) \rangle \\
 &= \begin{cases} \frac{i! j! k!}{\left(\frac{i+j-k}{2}\right)! \left(\frac{i+k-i}{2}\right)! \left(\frac{k+i-j}{2}\right)!}, & \text{wenn } \begin{cases} (i+j+k) \text{ gerade} \\ k \in [|i-j|, i+j] \end{cases} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{C.8}
 \end{aligned}$$

dreier eindimensionaler Hermite Polynome für normalverteilte Variablen aus ergibt sich nach Berveiller et al. [2004] und Sudret et al. [2012] für den gesuchten Erwartungswert folgender Ausdruck

$$d_{ijk} = \langle \Psi_i \Psi_j \Psi_k \rangle = \prod_{m=1}^M \langle h_{\alpha m}(\xi) h_{\beta m}(\xi) h_{\gamma m}(\xi) \rangle = \prod_{m=1}^M D_{\alpha m \beta m \gamma m} \quad (C.9)$$

C.3. Polynomial Chaos Basis

Die nachfolgenden Tabellen C.1 bis C.4 stellen die PC Basis als Produkt aus den eindimensionalen Hermiten Polynomen und den dazugehörigen Varianzen dar und wurden der folgenden Literatur Ghanem und Spanos [1991] und Jablonski [2014] entnommen.

i	PC Ordnung r	$\prod_{i=1}^M h_{\alpha i}$	Polynome Φ_i	$\langle \Psi_i^2 \rangle$
1	0	h_0	1	1
2	1	h_1	ξ_1	1
3	2	h_2	$\xi_1^2 - 1$	2
4	3	h_3	$\xi_1^3 - 3\xi_1$	6
5	4	h_4	$\xi_1^4 - 6\xi_1^2 + 3$	24
6	5	h_5	$\xi_1^5 - 10\xi_1^3 + 15\xi_1$	120
7	6	h_6	$\xi_1^6 - 15\xi_1^4 + 45\xi_1^2 - 15$	720

Tabelle C.1.: Eindimensionale PC Basis mit dem Produkt aus Eindimensionalen Hermiten Polynomen und den dazugehörigen Varianzen nach Ghanem und Spanos [1991].

i	PC Ordnung r	$\prod_{i=1}^M h_{\alpha i}$	Polynome Φ_i	$\langle \Psi_i^2 \rangle$
1	0	$h_0 h_0$	1	1
2	1	$h_1 h_0$	ξ_1	1
3		$h_0 h_1$	ξ_2	1
4	2	$h_2 h_0$	$\xi_1^2 - 1$	2
5		$h_0 h_1$	$\xi_1 \xi_2$	1
6		$h_0 h_2$	$\xi_2^2 - 1$	2
7	3	$h_3 h_0$	$\xi_1^3 - 3\xi_1$	6
8		$h_2 h_1$	$\xi_1^2 \xi_2 - \xi_2$	2
9		$h_1 h_2$	$\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1$	2
10		$h_0 h_3$	$\xi_2^3 - 3\xi_2$	6
Fortsetzung auf der nächsten Seite				

i	PC Ordnung r	$\prod_{i=1}^M h_{\alpha_i}$	Polynome Φ_i	$\langle \Psi_i^2 \rangle$
11	4	$h_4 h_0$	$\xi_1^4 - 6\xi_1^2 + 3$	24
12		$h_3 h_1$	$\xi_1^3 \xi_2 - 3\xi_1 \xi_2$	6
13		$h_2 h_2$	$\xi_1^2 \xi_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + 1$	4
14		$h_1 h_3$	$\xi_1 \xi_2^3 - 3\xi_1 \xi_2$	6
15		$h_0 h_4$	$\xi_2^4 - 6\xi_2^2 + 3$	24

Tabelle C.2.: Zweidimensionale PC Basis mit dem Produkt aus Eindimensionalen Hermiten Polynomen und den dazugehörigen Varianzen nach Ghanem und Spanos [1991].

i	PC Ordnung r	$\prod_{i=1}^M h_{\alpha_i}$	Polynome Φ_i	$\langle \Psi_i^2 \rangle$
1	0	$h_0 h_0 h_0$	1	1
2	1	$h_1 h_0 h_0$	ξ_1	1
3		$h_0 h_1 h_0$	ξ_2	1
4		$h_0 h_0 h_1$	ξ_3	1
5	2	$h_2 h_0 h_0$	$\xi_1^2 - 1$	2
6		$h_1 h_1 h_0$	$\xi_1 \xi_2$	1
7		$h_1 h_0 h_1$	$\xi_1 \xi_3$	1
8		$h_0 h_2 h_0$	$\xi_2^2 - 1$	2
9		$h_0 h_1 h_1$	$\xi_2 \xi_3$	1
10		$h_0 h_0 h_2$	$\xi_3^2 - 1$	2
11	3	$h_3 h_0 h_0$	$\xi_1^3 - 3\xi_1$	6
12		$h_2 h_1 h_0$	$\xi_1^2 \xi_2 - \xi_2$	2
13		$h_2 h_0 h_1$	$\xi_1^2 \xi_3 - \xi_3$	2
14		$h_1 h_2 h_0$	$\xi_1 \xi_2^2 - \xi_2$	2
15		$h_1 h_1 h_1$	$\xi_1 \xi_2 \xi_3$	1
16		$h_1 h_0 h_2$	$\xi_1 \xi_3^2 - \xi_3$	2
17		$h_0 h_3 h_0$	$\xi_2^3 - 3\xi_2$	6
18		$h_0 h_2 h_1$	$\xi_2^2 \xi_3 - \xi_3$	2
19		$h_0 h_1 h_2$	$\xi_2 \xi_3^2 - \xi_3$	2
20		$h_0 h_0 h_3$	$\xi_3^3 - 3\xi_3$	6
21	4	$h_4 h_0 h_0$	$\xi_1^4 - 6\xi_1^2 + 3$	24
22		$h_3 h_1 h_0$	$\xi_1^3 \xi_2 - 3\xi_1 \xi_2$	6
23		$h_3 h_0 h_1$	$\xi_1^3 \xi_3 - 3\xi_1 \xi_3$	6
24		$h_2 h_2 h_0$	$\xi_1^2 \xi_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + 1$	4
25		$h_2 h_1 h_1$	$\xi_1^2 \xi_2 \xi_3 - \xi_2 \xi_3$	2
26		$h_2 h_0 h_2$	$\xi_1^2 \xi_3^2 - \xi_3^2 - \xi_2^2 + 1$	4
27		$h_3 h_1 h_0$	$\xi_1 \xi_2^3 - 3\xi_1 \xi_2$	6
28		$h_1 h_2 h_1$	$\xi_1 \xi_2^2 \xi_3 - \xi_1 \xi_3$	2
29		$h_1 h_1 h_2$	$\xi_1 \xi_2 \xi_3^2 - \xi_1 \xi_2$	2

Fortsetzung auf der nächsten Seite

i	PC Ordnung r	$\prod_{i=1}^M h_{\alpha i}$	Polynome Φ_i	$\langle \Psi_i^2 \rangle$
30	4	$h_1 h_0 h_3$	$\xi_1 \xi_3^3 - 3\xi_1 \xi_3$	6
31		$h_0 h_4 h_0$	$\xi_2^4 - 6\xi_2^2 + 3$	2
32		$h_0 h_3 h_1$	$\xi_2^3 \xi_3 - 3\xi_2 \xi_3$	6
33		$h_0 h_2 h_2$	$\xi_2^2 \xi_3^2 - \xi_3^2 - \xi_2^2 + 1$	4
34		$h_0 h_1 h_3$	$\xi_2 \xi_3^3 - 3\xi_2 \xi_3$	6
35		$h_0 h_0 h_4$	$\xi_3^4 - 6\xi_3^2 + 3$	24

Tabelle C.3.: Dreidimensionale PC Basis mit dem Produkt aus Eindimensionalen Hermiten Polynomen und den dazugehörigen Varianzen nach Ghanem und Spanos [1991].

i	PC Ordnung r	$\prod_{i=1}^M h_{\alpha i}$	Polynome Φ_i	$\langle \Psi_i^2 \rangle$
1	0	$h_0 h_0 h_0 h_0$	1	1
2	1	$h_1 h_0 h_0 h_0$	ξ_1	1
3		$h_0 h_1 h_0 h_0$	ξ_2	1
4		$h_0 h_0 h_1 h_0$	ξ_3	1
5		$h_0 h_0 h_0 h_1$	ξ_4	1
6	2	$h_2 h_0 h_0 h_0$	$\xi_1^2 - 1$	2
7		$h_1 h_1 h_0 h_0$	$\xi_1 \xi_2$	1
8		$h_1 h_0 h_1 h_0$	$\xi_1 \xi_3$	1
9		$h_1 h_0 h_0 h_1$	$\xi_1 \xi_4$	1
10		$h_0 h_2 h_0 h_0$	$\xi_2^2 - 1$	2
11		$h_0 h_1 h_1 h_0$	$\xi_2 \xi_3$	1
12		$h_0 h_1 h_0 h_1$	$\xi_2 \xi_4$	1
13		$h_0 h_0 h_2 h_0$	$\xi_3^2 - 1$	2
14		$h_0 h_0 h_1 h_1$	$\xi_3 \xi_4$	1
15		$h_0 h_0 h_0 h_2$	$\xi_4^2 - 1$	2
16	3	$h_3 h_0 h_0 h_0$	$\xi_1^3 - 3\xi_1$	6
17		$h_2 h_1 h_0 h_0$	$\xi_1^2 \xi_2 - \xi_2$	2
18		$h_2 h_0 h_1 h_0$	$\xi_1^2 \xi_2 - \xi_3$	2
19		$h_2 h_0 h_0 h_1$	$\xi_1^2 \xi_2 - \xi_4$	2
20		$h_1 h_2 h_0 h_0$	$\xi_1 \xi_2^2 - \xi_1$	2
21		$h_1 h_1 h_1 h_0$	$\xi_1 \xi_2 \xi_3$	1
22		$h_1 h_1 h_0 h_1$	$\xi_1 \xi_2 \xi_4$	1
23		$h_1 h_0 h_2 h_0$	$\xi_1 \xi_3^2 - \xi_1$	2
24		$h_1 h_0 h_1 h_1$	$\xi_1 \xi_3 \xi_4$	1
25		$h_1 h_0 h_0 h_2$	$\xi_1 \xi_4^2 - \xi_4$	2
26		$h_0 h_3 h_0 h_0$	$\xi_3^3 - 3\xi_3$	6
27		$h_0 h_2 h_1 h_0$	$\xi_3^2 \xi_3 - \xi_3$	2
28		$h_0 h_2 h_0 h_1$	$\xi_3^2 \xi_4 - \xi_4$	2
Fortsetzung auf der nächsten Seite				

i	PC Ordnung r	$\prod_{i=1}^M h_{\alpha_i}$	Polynome Φ_i	$\langle \Psi_i^2 \rangle$
29	3	$h_0 h_1 h_2 h_0$	$\xi_2 \xi_3^2 - \xi_2$	2
30		$h_0 h_1 h_1 h_1$	$\xi_2 \xi_3 \xi_4$	1
31		$h_0 h_1 h_0 h_2$	$\xi_2 \xi_4^2 - \xi_2$	2
32		$h_0 h_0 h_3 h_0$	$\xi_3^3 - 3\xi_3$	6
33		$h_0 h_0 h_2 h_1$	$\xi_3^2 \xi_4 - \xi_4$	2
34		$h_0 h_0 h_1 h_2$	$\xi_3 \xi_4^2 - \xi_3$	2
35		$h_0 h_0 h_0 h_3$	$\xi_4^3 - 3\xi_4$	6
36	4	$h_4 h_0 h_0 h_0$	$\xi_1^4 - 6\xi_1^2 + 3$	24
37		$h_3 h_1 h_0 h_0$	$\xi_1^3 \xi_2 - 3\xi_1 \xi_2$	6
38		$h_3 h_0 h_1 h_0$	$\xi_1^3 \xi_3 - 3\xi_1 \xi_3$	6
39		$h_3 h_0 h_0 h_1$	$\xi_1^3 \xi_4 - 3\xi_1 \xi_4$	6
40		$h_2 h_2 h_0 h_0$	$\xi_1^2 \xi_2^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + 1$	4
41		$h_2 h_1 h_1 h_0$	$\xi_1^2 \xi_2 \xi_3 - \xi_2 \xi_3$	2
42		$h_2 h_1 h_0 h_1$	$\xi_1^2 \xi_2 \xi_4 - \xi_2 \xi_4$	2
43		$h_2 h_0 h_2 h_0$	$\xi_1^2 \xi_3^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 + 1$	4
44		$h_2 h_0 h_1 h_1$	$\xi_1^2 \xi_3 \xi_4 - \xi_3 \xi_4$	2
45		$h_2 h_0 h_0 h_2$	$\xi_1^2 \xi_4^2 - \xi_4^2 - \xi_1^2 + 1$	4
46		$h_1 h_3 h_0 h_0$	$\xi_1 \xi_2^3 - 3\xi_1 \xi_2$	6
47		$h_1 h_2 h_1 h_0$	$\xi_1 \xi_2^2 \xi_3 - \xi_1 \xi_3$	2
48		$h_1 h_2 h_0 h_1$	$\xi_1 \xi_2^2 \xi_4 - \xi_1 \xi_4$	2
49		$h_1 h_1 h_2 h_0$	$\xi_1 \xi_2 \xi_3^2 - \xi_1 \xi_2$	2
50		$h_1 h_1 h_1 h_1$	$\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$	1
51		$h_1 h_1 h_0 h_2$	$\xi_1 \xi_2 \xi_4^2 - \xi_1 \xi_2$	2
52		$h_1 h_0 h_3 h_0$	$\xi_1 \xi_3^3 - 3\xi_1 \xi_3$	6
53		$h_1 h_0 h_2 h_1$	$\xi_1 \xi_3^2 \xi_4 - \xi_1 \xi_4$	2
54		$h_1 h_0 h_1 h_2$	$\xi_1 \xi_3 \xi_4^2 - \xi_1 \xi_3$	2
55		$h_1 h_0 h_0 h_3$	$\xi_1 \xi_4^3 - 3\xi_1 \xi_4$	6
56		$h_0 h_4 h_0 h_0$	$\xi_2^4 - 6\xi_2^2 + 3$	24
57		$h_0 h_3 h_1 h_0$	$\xi_2^3 \xi_3 - 3\xi_2 \xi_3$	6
58		$h_0 h_3 h_0 h_1$	$\xi_2^3 \xi_4 - 3\xi_2 \xi_4$	6
59		$h_0 h_2 h_2 h_0$	$\xi_2^2 \xi_3^2 - \xi_3^2 - \xi_2^2 + 1$	4
60		$h_0 h_2 h_1 h_1$	$\xi_2^2 \xi_3 \xi_4 - \xi_3 \xi_4$	2
61		$h_0 h_2 h_0 h_2$	$\xi_2^2 \xi_4^2 - \xi_4^2 - \xi_2^2 + 1$	4
62		$h_0 h_1 h_3 h_0$	$\xi_2 \xi_3^3 - 3\xi_2 \xi_3$	6
63		$h_0 h_1 h_2 h_1$	$\xi_2 \xi_3^2 \xi_4 - \xi_2 \xi_4$	2
64		$h_0 h_1 h_1 h_2$	$\xi_2 \xi_3 \xi_4^2 - \xi_2 \xi_3$	2
65		$h_0 h_1 h_0 h_3$	$\xi_2 \xi_4^3 - 3\xi_2 \xi_4$	6
66		$h_0 h_4 h_0 h_0$	$\xi_3^4 - 6\xi_3^2 + 3$	24
67	$h_0 h_0 h_3 h_1$	$\xi_3^3 \xi_4 - 3\xi_3 \xi_4$	6	
68	$h_0 h_0 h_2 h_2$	$\xi_3^2 \xi_4^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 + 1$	4	
69	$h_0 h_0 h_1 h_3$	$\xi_3 \xi_4^3 - 3\xi_3 \xi_4$	6	
70	$h_0 h_0 h_0 h_4$	$\xi_4^4 - 6\xi_4^2 + 3$	24	

Tabelle C.4.: Vierdimensionale PC-Basis mit dem Produkt aus Eindimensionalen Hermiten Polynomen und den dazugehörigen Varianzen nach Ghanem und Spanos [1991].

Lebenslauf

Persönliche Daten

Mathias Grehn

geboren am 09. November 1983 in Grevesmühlen

Schulbildung

08/1994–06/2000 Realschule Klütz

09/2004–06/2005 Fachoberschule Wismar

Wehrdienst

08/2005–06/2006 Grundausbildung: Marinetechnikschule in Parow
in der 9. Inspektion
Stammereinheit: SEKM /MZL Boot Schlei

Studium

09/2006–09/2011 Studium des Maschinenbaus
an der Hochschule Wismar
Abschluss: Master of Engineering (M.Eng.)

Berufstätigkeit

09/2000–08/2004 Berufsausbildung bei Aker MTW Werft GmbH in
Wismar, erlernter Beruf: Anlagenmechaniker

seit 10/2011 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Baumechanik und Numerische Mechanik
der Leibniz Universität Hannover

5. Dezember 2017

Literaturverzeichnis

- Altenbach, J. und Altenbach, H. (1994). *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner.
- Ashby, M. und Frost, H. (1982). *Deformation-mechanism maps*. Pergamon Press Oxford.
- Babuska, I., Nobile, F., und Tempone, R. (2007). A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3):1005–1034.
- Babuska, I., Tempone, R., und Zouraris, G. E. (2004). Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(2):800–825.
- Barth, C. und Rustler, W. (2010). *Finite Elemente in der Baustatik-Praxis: Mit vielen Anwendungsbeispielen DVD mit Demoverionen von RSTAB, RFEM*. Beuth Verlag GmbH.
- Bathe, K.-J. (2001). *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin, 2. auflage edition.
- Beck, J., Tempone, R., Nobile, F., und Tamellini, L. (2012). On the optimal polynomial approximation of stochastic pdes by galerkin and collocation methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 22(09):1250023.
- Behrends, E. (2012). *Markovprozesse und stochastische Differentialgleichungen: Vom Zufallsspaziergang zur Black-Scholes-Formel*. SpringerLink : Bücher. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Beikler, S. und Tretbar, C. (2012). „Wir brauchen ein Endlager erst 2030“ Grünen-Fraktionschef Trittin fordert Verfahren ohne Vorfestlegung auf Gorleben als Standort für Atommüll. *Der Tagesspiegel*.
- Bergmann, W. (2003). *Werkstofftechnik: Grundlagen : mit 4 Tabellen*. Hanser-Studien-Bücher. Hanser.
- Berveiller, M., Sudret, B., und Lemaire, M. (2004). Comparison of methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis. *Proc. AsRANET*, 2.
- Berveiller, M., Sudret, B., und Lemaire, M. (2006). Stochastic finite element: a non intrusive approach by regression. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 15(1-3):81–92.

- Betehtin, A. (1977). *Lehrbuch der speziellen Mineralogie: 14 Tabellen*. Dt. Verlag für Grundstoffindustrie.
- Betten, J. (2013). *Kontinuumsmechanik: Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg.
- Betten, J., Borrmann, M., und Butters, T. (1989). Constitutive equations describing the primary creep behaviour of isotropic cylindrical shells subjected to internal pressure. *Ingenieur-Archiv*, 60(2):99–109.
- Binder, K., Baumgärtner, A., Binder, K., Hansen, J., Kalos, M., Kehr, K., Landau, D., Levesque, D., Müller-Krumbhaar, H., Rebbi, C., et al. (2013). *Applications of the Monte Carlo Method in Statistical Physics*. Topics in Current Physics. Springer Berlin Heidelberg.
- Binder, K. und Heermann, D. (2013). *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics: An Introduction*. Springer Series in Solid-State Sciences. Springer Berlin Heidelberg.
- Blatman, G. (2009). *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. PhD thesis, Clermont-Ferrand 2.
- Blum, W. (1978). *Gleitung und Erholung während plastischer Verformung kristalliner Stoffe bei hohen Temperatur*. Habilitationsschrift, Universität Erlangen-Nürnberg.
- Bobrowski, A. (2005). *Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes: An Introduction*. Cambridge University Press.
- Braess, D. (2013). *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer Berlin Heidelberg.
- Braml, T. (2010). *Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit von Massivbrücken auf der Grundlage der Ergebnisse von Überprüfungen am Bauwerk*. Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau. Univ. der Bundeswehr München.
- Brandt, S., Pahl, F., Feagin, J., und Dahmen, H. (2013). *Methoden der Quantenmechanik mit Mathematica®*. Springer Berlin Heidelberg.
- Burbulla, F. (2015). *Kontinuumsmechanische und bruchmechanische Modelle für Werkstoffverbunde*. Berichte des Instituts für Mechanik. Kassel University Press.
- Chan, K., Bodner, S., Fossum, A., und Munson, D. (1992). A constitutive model for inelastic flow and damage evolution in solids under triaxial compression. *Mechanics of Materials*, 14(1):1 – 14.
- Chan, K., Fossum, A., Bodner, S., Munson, D., et al. (1995). Constitutive

- representation of damage healing in wlp salt. In *The 35th US Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. American Rock Mechanics Association.
- Chan, K., Munson, D., Bodner, S., und Fossum, A. (1996a). Cleavage and creep fracture of rock salt. *Acta Materialia*, 44(9):3553 – 3565.
- Chan, K. S., Bodner, S. R., Fossum, A. F., und Munson, D. E. (1997). A damage mechanics treatment of creep failure in rock salt. *International Journal of Damage Mechanics*, 6(2):121–152.
- Chan, K. S., Bodner, S. R., Munson, D. E., und Fossum, A. F. (1996b). Inelastic flow behavior of argillaceous salt. *International Journal of Damage Mechanics*, 5(3):292–314.
- Chow, P. (2014). *Stochastic Partial Differential Equations, Second Edition*. Advances in Applied Mathematics. Taylor & Francis.
- Cleff, T. (2011). *Deskriptive Statistik und moderne Datenanalyse: Eine computergestützte Einführung mit Excel, PASW (SPSS) und STATA*. Gabler Verlag.
- Czeslik, C., Seemann, H., und Winter, R. (2010). *Basiswissen Physikalische Chemie*. Studienbücher Chemie. Vieweg+Teubner Verlag.
- de Souza Neto, E., Peric, D., und Owen, D. (2008). *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. Wiley.
- Debusschere, B. J., Najm, H. N., Pébay, P. P., Knio, O. M., Ghanem, R. G., und Le Maître, O. P. (2004). Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes. *SIAM journal on scientific computing*, 26(2):698–719.
- Deger, Y. (2008). *Die Methode der finiten Elemente: Grundlagen und Einsatz in der Praxis*. Kontakt & Studium. expert-Verlag.
- Deman, G., Konakli, K., Sudret, B., Kerrou, J., Perrochet, P., und Benabderahmane, H. (2016). Using sparse polynomial chaos expansions for the global sensitivity analysis of groundwater lifetime expectancy in a multi-layered hydrogeological model. *Reliability Engineering & System Safety*, 147:156–169.
- Eberth, S. (2007). *Modellansätze zum Verheilungsverhalten von Steinsalz und ihre Anwendung auf Querschnittsabdichtungen im Salinargebirge*. Technischen Universität Clausthal.
- Eder, S. W. (2014). Atommüll droht Notstand. *VDI Nachrichten Nr. 51/52*.
- Elliger, C. (2005). *Untersuchungen zum Permeationsverhalten von Salzlaugen in Steinsalz bei der Endlagerung wärmeentwickelnder nuklearer Abfälle*. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Leibniz-Universität Hannover. Technische Universität Darmstadt.

- Ferreira, C., Lopez, J. L., und Mainar, E. (2003). Asymptotic relations in the askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials. *Advances in Applied Mathematics*, 31(1):61 – 85.
- Field, R. und Grigoriu, M. (2004). On the accuracy of the polynomial chaos approximation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19(1–2):65 – 80. Fourth International Conference on Computational Stochastic Mechanics.
- Fink, S. (2015). *Simulation of elastic-plastic material behaviour with uncertain material parameters : a spectral stochastic finite element method approach*. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Leibniz Universität Hannover.
- Flügge, S. (1958). *Handbuch der Physik: pt.1-2. Kristallphysik I-II*. Handbuch der Physik. Springer.
- Fokker, P. A. (1998). The micro-mechanics of creep in rocksalt. *Series on rock and soil mechanics*, pages 49–61.
- Frenkel, J. (1926). Zur Theorie der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit Kristallinischer Körper. *Zeitschrift für Physik*, 37(7-8):572–609.
- Georgi, F., Menzel, F., und Schreiner, W. (1975). Zum geomechanischen Verhalten von Steinsalz verschiedener Salzlagerstätten der DDR, Teil 1: Das Festigkeitsverhalten. *Neue Bergbautechnik, Jg*, 5:669–676.
- Georgii, H. (2015). *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. De Gruyter Studium. De Gruyter.
- Ghanem, R. G. und Spanos, P. D. (1991). *Stochastic finite elements : A spectral approach*. Dover publications 2003, Mineola, New York.
- Gnedenko, B. (1997). *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie: mit 28 Tabellen*. Deutsch.
- Gottstein, G. (2007). *Physikalische Grundlagen der Materialkunde*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg.
- Gottstein, G. (2013). *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik: Physikalische Grundlagen*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg.
- Gould, N. I., Scott, J. A., und Hu, Y. (2007). A numerical evaluation of sparse direct solvers for the solution of large sparse symmetric linear systems of equations. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 33(2):10.
- Grehn, M., Fau, A., und Nackenhorst, U. (2016). A stochastic finite element approach on creep of rock salt. In *Proceedings of the XLIV Summer School - Conference Advanced Problems in Mechanics*.
- Greve, R. (2013). *Kontinuumsmechanik: Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Physics and astronomy online library. Springer Berlin Heidelberg.

- Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., und Wall, W. (2014). *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg.
- Gross, D. und Seelig, T. (2016). *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer Berlin Heidelberg.
- Gross, S. und Reusken, A. (2011). *Numerical Methods for Two-phase Incompressible Flows*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.
- Günther, R. (2009). *Erweiterter Dehnungs-Verfestigungs-Ansatz: phänomenologisches Stoffmodell für duktile Salzgesteine zur Beschreibung primären, sekundären und tertiären Kriechens*. Veröffentlichungen des Instituts für Geotechnik der Technischen Universität Bergakademie Freiberg. Institut für Geotechnik.
- Günther, R., Minkley, W., und Salzer, K. (2007). *Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen*. BMBF-Verbundvorhaben, Ergebnisbericht zu Teilvorhaben 1, Förderkennzeichen 02 C 1004.
- Gyulai, Z. (1963). Das Weiterwachsen von plastisch deformierten NaCl-Kristallen. *Zeitschrift für Physik*, 176(4):370–379.
- Hackbusch, W. (2013). *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.
- Hackenbroch, W. und Thalmaier, A. (2013). *Stochastische Analysis: Eine Einführung in die Theorie der stetigen Semimartingale*. Mathematische Leitfäden. Vieweg+Teubner Verlag.
- Hahn, F. (2003). *Untersuchung des zyklisch plastischen Werkstoffverhaltens unter umformnahen Bedingungen*. Schriftenreihe Werkstoffe und werkstofftechnische Anwendungen. Techn. Univ., Lehrstuhl für Verbundwerkstoffe.
- Haibach, E. (2006). *Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. VDI-Buch. Springer Berlin Heidelberg.
- Hainzl, J. (2013). *Mathematik für Naturwissenschaftler*. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik - Teubner Studienbücher. Vieweg+Teubner Verlag.
- Hampel, A. (2002). *Durchführung einer Modellierung der Entwicklung der Verformung, der Schädigung und des Bruchusters in Verformungsversuchen am Steinsalz*. Abschlussbericht zum BGR-Auftrag Nr. 2-01011019.
- Hampel, A. (2006). *Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen*. BMBF-Verbundvorhaben, Ergebnisbericht zu Teilvorhaben 1, Förderkennzeichen 02 C 1004.

- Hauck, R. (2001). *Tragverhalten tiefliegender Salzkavernen bei atmosphärischem Innendruck*. Forschungsergebnisse aus dem Tunnel- und Kavernenbau Universität Hannover. Inst. für Unterirdisches Bauen d. Univ. Hannover.
- Heemann, U. (1989). *Transientes Kriechen und Kriechbruch im Steinsalz*. IB-NM.
- Heemann, U. (2010). *Grundlagen des Norton-Stoffgesetz mit v_0 konzept*. BGR Mitteilung vom 23.08.2010.
- Heemann, U. und Schulze, O. (2007). *Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen*. BMBF-Verbundvorhaben, Ergebnisbericht zu Teilvorhaben 1, Förderkennzeichen 02 C 1004.
- Heusermann, S., Lux, K., und Rokahr, R. (1983). *Entwicklung mathematisch-mechanischer Modelle zur Beschreibung des Stoffverhaltens von Salzgestein in Abhängigkeit von der Zeit und der Temperatur auf der Grundlage von Laborversuchen mit begleitenden kontinuumsmechanischen Berechnungen nach der Methode der finiten Elemente*. 83,1 -: Forschungsbericht T. Fachinformationszentrum Energie, Physik, Mathematik.
- Hou, Z. (1998). *Untersuchungen zum Nachweis der Standsicherheit für Untertagedeponien im Salzgebirge*. Professur für Deponietechnik und Geomechanik, Institut für Aufbereitung und Deponietechnik, Technische Universität Clausthal. Papierflieger.
- Hou, Z. (2002). *Geomechanische Planungskonzepte für untertägige Tragwerke mit besonderer Berücksichtigung von Gefügeschädigung, Verheilung und hydromechanischer Kopplung*. Schriftenreihe. Papierflieger.
- Hou, Z. und Lux, K.-H. (2003). *Mechanical degradation and self-healing of the excavation damaged zone around a drift dam in rock salt. European commission CLUSTER conference and workshop impact of the excavation disturbed or damaged zone (EDZ) on the performance of radioactive waste geological repositories*. Luxembourg, 3-5 November 2003.
- Hou, Z., Wolters, R., und Düsterloh, U. (2007). *Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen*. BMBF-Verbundvorhaben, Ergebnisbericht zu Teilvorhaben 1, Förderkennzeichen 02 C 1004.
- Hunsche, U. (1994). *Visco-Plastic Behaviour of Geomaterials*, chapter Uniaxial and Triaxial Creep and Failure Tests on Rock: Experimental Technique and Interpretation, pages 1–53. Springer Vienna, Vienna.
- Hunsche, U. und BGR (1996). *Thermomechanisches Verhalten von Salzgesteinen: Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben, Berichtszeitraum: 01.01.1993 - 31.12.1994*. BGR.

- Hunsche, U. und Hampel, A. (1999). Rock salt - the mechanical properties of the host rock material for a radioactive waste repository. *Engineering Geology*, 52(3&4):271 – 291.
- Hunsche, U., Plischke, I., und für Geowissenschaften und Rohstoffe, B. (1988a). *Langzeitdeformationsverhalten von Salzgesteinen*. Geotechnisches Verhalten verschiedener Salzgesteine : Abschlußbericht; Contract KWA-5502-8 / Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe.
- Hunsche, U., Plischke, I., und Schulze, O. (1988b). Long-term deformation behaviour of salt rock.
- Hunsche, U., Schulze, F., Walter, F., und Plischke, I. (2003). *Thermomechanisches Verhalten von Salzgestein*. Projekt Gorleben 9G2138110000, Abschlussbericht, Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe, Hannover, Tagebuch-Nr. 11766/03, 157 S.
- Hunsche, U. und Schulze, O. (1996). Effect of humidity and confining pressure on creep of rock salt. In *The Mechanical Behavior of Salt, Proceedings of the 3rd Conference, Palaiseau, 1993*.
- Hunsche, U. und Schulze, O. (2002). Humidity induced creep and its relation to the dilatancy boundary. In *Basic and Applied Salt Mechanics, Proceedings of the 5th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, Bukarest, S. 73-87, Swets & Zeitlinger, Lisse*.
- Hunsche, U. und Schulze, O. (HunscheSchulze1994). Das Kriechverhalten von Steinsalz. *Kali und Steinsalz Band 11, Heft 8/9*.
- Hürkamp, A. (2014). *Micro-mechanically based damage analysis of ultra high performance fibre reinforced concrete structures with uncertainties*. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Leibniz Universität Hannover.
- Hurtado, J. (2013). *Structural Reliability: Statistical Learning Perspectives*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Berlin Heidelberg.
- Jablonski, P. (2014). *Numerische Simulation probabilistischer Schädigungsmodelle mit der stochastischen Finite-Elemente-Methode*. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Leibniz Universität Hannover.
- Jeremic, M. (1994). *Rock Mechanics in Salt Mining*. Taylor & Francis.
- Jones, R. (1998). *Mechanics Of Composite Materials*. Materials Science and Engineering Series. Taylor & Francis.
- Kachanov, L. (2013). *Introduction to continuum damage mechanics*. Mechanics of Elastic Stability. Springer Netherlands.
- Kachanov, L. M. (1958). Time of the rupture process under creep conditions. *Izv. Akad. Nauk. S.S.R. Otd. Tech. Nauk.*, 8:26–31.

- Keese, A. (2004). *Numerical Solution of Systems with Stochastic Uncertainties: A General Purpose Framework for Stochastic Finite Elements*.
- Keese, A., Matthies, H., et al. (2003). Numerical methods and smolyak quadrature for nonlinear stochastic partial differential equations.
- Kewlani, G., Crawford, J., und Iagnemma, K. (2012). A polynomial chaos approach to the analysis of vehicle dynamics under uncertainty. *Vehicle System Dynamics*, 50(5):749–774.
- Kleber, W., Bautsch, H., Bohm, J., und Klimm, D. (2010). *Einführung in die Kristallographie*. De Gruyter.
- Klenke, A. (2013). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer Berlin Heidelberg.
- Knorrenschild, M. (2013). *Numerische Mathematik: Eine beispielorientierte Einführung*. Mathematik-Studienhilfen. Carl Hanser Verlag GmbH & Company KG.
- Koekoek, R., Koornwinder, T., Lesky, P., und Swarttouw, R. (2010). *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.
- Kotulski, Z. und Szczepinski, W. (2009). *Error Analysis with Applications in Engineering*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands.
- Kowitz, D. und Rosenkranz, J. (2008). Energieknappheit und klimawandel verhelfen der atomkraft zu einer überraschenden renaissance. doch wohin mit dem hoch radioaktiven müll? 300.000 tonnen gibt es schon auf der welt - aber noch immer kein endlager. *Stern*.
- Kurzweil, P. und Scheipers, P. (2005). *Chemie: Grundlagen, Aufbauwissen, Anwendungen und Experimente*. Viewegs Fachbücher der Technik. Vieweg.
- Landau, D. und Binder, K. (2014). *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*. Cambridge University Press.
- Lee, B. (2009). Guidance for choosing multigrid preconditioners for systems of elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(4):2803–2831.
- Lee, B. (2016). Parallel preconditioners and multigrid solvers for stochastic polynomial chaos discretizations of the diffusion equation at the large scale. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 23(1):5–36.
- Lee, E., of Mechanical Engineers, A. S., und of APPLIED MECHANICS., S. U. C. D. (1968). *Elastic-plastic Deformation at Finite Strains*. American Society of Mechanical Engineers. Defense Technical Information Center.
- Lemaitre, J. und Chaboche, J. L. (1994). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press.

- Leonard, T. und Hsu, J. (1999). *Bayesian Methods: An Analysis for Statisticians and Interdisciplinary Researchers*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press.
- Liang, W., Zhang, C., Gao, H., Yang, X., Xu, S., und Zhao, Y. (2012). Experiments on mechanical properties of salt rocks under cyclic loading. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 4(1):54 – 61.
- Lippmann, H. und Lemaitre, J. (1996). *A Course on Damage Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg.
- Lubahn, J. und Felgar, R. (1961). *Plasticity and creep of metals*. Wiley series on the science and technology of materials. Wiley.
- Ludwik, P. (1909). *Elemente der Technologischen Mechanik*. Springer Berlin Heidelberg.
- Lux, K. (1984). *Gebirgsmechanischer Entwurf und Felderfahrungen im Salzkaavernenbau: ein Beitrag zur Entwicklung von Prognosemodellen für den Hohlraumbau im duktilen Salzgebirge*. Forschungsergebnisse aus dem Tunnel- und Kavernenbau. Enke.
- Maitre, O. und Knio, O. (2010). *Spectral Methods for Uncertainty Quantification: With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Scientific Computation. Springer Netherlands.
- MATLAB (2015). *Version 8.6.0.267246(R2015b)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts.
- Matthies, H. G. und Keese, A. (2005). Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12):1295–1331.
- Meister, A. (2014). *Numerik linearer Gleichungssysteme: Eine Einführung in moderne Verfahren. Mit MATLAB®-Implementierungen von C. Vömel*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Menzel, W. und Schreiner, W. (1977). Zum geomechanischen Verhalten von Steinsalz verschiedener Lagerstätten der DDR. Teil II: Das Verformungsverhalten. *Neue Bergbautechnik*, 5(8):565–571.
- Minkley, W. (2003). *Gebirgsmechanische Beschreibung von Entfestigung und Sprödbrecherscheinungen im Carnallit*. Number Bd. 2 in Schriftenreihe des Institut für Gebirgsmechanik. Shaker.
- Munson, D. und Dawson, P. (1981). Salt-constitutive modeling using mechanism maps. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (USA); Cornell Univ., Ithaca, NY (USA). Dept. of Mechanical and Aerospace Engineering.

- Natau, O., Lempp, C., Borm, G., et al. (1986). Stress relaxation monitoring prestressed hard inclusions. In *ISRM International Symposium*. International Society for Rock Mechanics.
- Nobile, F. und Tempone, R. (2009). Analysis and implementation issues for the numerical approximation of parabolic equations with random coefficients. *International journal for numerical methods in engineering*, 80(6-7):979–1006.
- Nobile, F., Tempone, R., und Webster, C. G. (2008). A sparse grid stochastic collocation method for partial differential equations with random input data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(5):2309–2345.
- Ochsenius, C. (1877). *Die Bildung der Steinsalzlager und ihrer Mutterlaugen-salze: unter specieller Berücksichtigung der Flötze von Douglasshall in der egehn'schen Mulde*. C.E.M. Pfeffer.
- Odqvist, F. und Hult, J. (2013). *Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe*. Springer Berlin Heidelberg.
- Oksendal, B. (2013). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg.
- Olschewski, J., Stein, E., Wagner, W., und Wetjen, D. (1981). *Stoffgleichungen für Steinsalze unter mechanischer und thermischer Beanspruchung*. IBNM.
- Onwunta, A. (2016). *Low-Rank Iterative Solvers for Large-Scale Stochastic Galerkin Linear Systems*. PhD thesis, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg.
- Orowan, E. (1934a). Zur Kristallplastizität. i. *Zeitschrift für Physik*, 89(9-10):605–613.
- Orowan, E. (1934b). Zur Kristallplastizität. ii. *Zeitschrift für Physik*, 89(9-10):614–633.
- Orowan, E. (1934c). Zur Kristallplastizität. iii. *Zeitschrift für Physik*, 89(9-10):634–659.
- Parisch, H. (2003). *Festkörper-Kontinuumsmechanik: Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. Teubner Studienbücher Technik. Vieweg+Teubner Verlag.
- Pudewills, A. (2005). Numerical modelling of the long-term evolution of edz: Development of material models, implementation in finite-element codes, and validation. *Wissenschaftliche Berichte FZKA*, 7185.
- Pudewills, A. (2006). Modelling of the hydro-mechanical processes around excavations in rock salt. *Proc. of EUROCK 2006, Liege, Belgium, Eds.: A. Van Cotthem et al.; Taylor & Francis Group, London, pp. 527-530*.

- Pudewills, A. (2007). *Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen*. BMBF-Verbundvorhaben, Ergebnisbericht zu Teilvorhaben 1, Förderkennzeichen 02 C 1004.
- Pudewills, A. und Droste, J. (2003). Numerical modeling of the thermomechanical behavior of a large-scale underground experiment. *Computers & structures*, 81(8):911–918.
- Puig, B., Poirion, F., und Soize, C. (2002). Non-gaussian simulation using hermite polynomial expansion: convergences and algorithms. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17(3):253 – 264.
- Qu, Z. (2013). *Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis*. Springer London.
- Rabotnov, Y. N. (1969). *Creep rupture*, pages 342–349. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Rao, M., Birnbaum, Z., und Lukacs, E. (2014). *Foundations of Stochastic Analysis*. Probability and Mathematical Statistics. Elsevier Science.
- Rheinboldt, W. (1998). *Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations: Second Edition*. CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104).
- Rokahr, R., Staudtmeister, K., Zander-Schiebenhöfer, D., und Zapf, D. (2007). *Die Modellierung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz: Vergleich aktueller Stoffgesetze und Vorgehensweisen*. BMBF-Verbundvorhaben, Ergebnisbericht zu Teilvorhaben 1, Förderkennzeichen 02 C 1004.
- Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation. *The annals of mathematical statistics*, 23(3):470–472.
- Rosenthal, D. (1974). *Resistance and Deformation of Solid Media*. Pergamon.
- Rösler, J., Harders, H., und Bäker, M. (2013). *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*. Vieweg+Teubner Verlag.
- Rossmannith, H. (2013). *Grundlagen der Bruchmechanik*. Springer Vienna.
- Rüschendorf, L. (2013). *Copulas, Sklar's Theorem, and Distributional Transform*, pages 3–34. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Rusinko, A. und Rusinko, K. (2011). *Plasticity and Creep of Metals*. Springer Berlin Heidelberg.
- Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems: Second Edition*. EngineeringPro collection. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104).

- Salzer, K. (1993). *Ableitung eines kombinierten Kriechgesetzes unter Berücksichtigung der Erholung*. Teilbereich zum BMFT Vorhaben 02 C 00 628, IfG Leipzig.
- Salzer, K., Konietzky, H., und Günther, R.-M. (1998). *Application of Numerical Methods to Geotechnical Problems: Proceedings of the Fourth European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering Numge98 udine, Italy October 14-16, 1998*, chapter A New Creep Law to Describe the Transient and Secondary Creep Phase, pages 377–387. Springer Vienna, Vienna.
- Schilders, W., van der Vorst, H., und Rommes, J. (2008). *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*. Mathematics in Industry. Springer Berlin Heidelberg.
- Schmidt, H., Buchmaier, R., und Vogt-Breyer, C. (2013). *Grundlagen der Geotechnik: Geotechnik nach Eurocode*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Schoutens, W. (2012). *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*. Lecture Notes in Statistics. Springer New York.
- Schulze, G. (2013). *Metallphysik: Ein Lehrbuch*. Springer Vienna.
- Schuppe, F. (1963). Ein rheologisches Modell für das Salzgebirge. *Bergakademie*, 15:583–586.
- Schwandt, H. (2013). *Parallele Numerik: Eine Einführung*. Vieweg+Teubner Verlag.
- Schwarz, H. und Köckler, N. (2011). *Numerische Mathematik*. Vieweg+Teubner Verlag.
- Simo, J. und Ortiz, M. (1985). A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(2):221 – 245.
- Simo, J. C. und Hughes, T. J. R. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer, Berlin.
- Soize, C. und Ghanem, R. (2004). Physical systems with random uncertainties: chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2):395–410.
- Stein, E., Wetjen, D., Mahnken, R., und Heemann, U. (1987). *Theoretische und numerische Aspekte der Berechnung thermo-mechanischer Kriechvorgänge im Steinsalz*. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 39 S.61-121.
- Steland, A. (2013). *Basiswissen Statistik: Kompaktkurs für Anwender aus Wirtschaft, Informatik und Technik*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg.

- Sudret, B. (2007). Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models—contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. *Habilitations diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France*.
- Sudret, B. und Berveiller, M. (2003). Application of a stochastic finite element procedure to reliability analysis. In *Proceedings of the 11th IFIP WG7.5 Conference, Banff, Canada*.
- Sudret, B., Berveiller, M., und Lemaire, M. (2012). *A stochastic finite element procedure for moment and reliability analysis*. European Journal of Computational Mechanics.
- Sudret, B. und Kiureghian, A. (2000). *Stochastic Finite Element Methods and Reliability A State-of-the-Art Report*. Department of civil & environmental engineering university of california.
- Tappe, S. (2013). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Berlin Heidelberg.
- Taylor, G. I. (1934). The mechanism of plastic deformation of crystals. part i. theoretical. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 145(855):362–387.
- Temme, N. und Lapez, J. (2001). The askey scheme for hypergeometric orthogonal polynomials viewed from asymptotic analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 133(1–2):623 – 633. 5th Int. Symp. on Orthogonal Polynomials, Special Functions and their Applications.
- Tootkaboni, M., Graham-Brady, L., und Schafer, B. (2009). Geometrically non-linear behavior of structural systems with random material property: An asymptotic spectral stochastic approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37–40):3173 – 3185.
- Ullmann, E., Elman, H. C., und Ernst, O. G. (2012). Efficient iterative solvers for stochastic galerkin discretizations of log-transformed random diffusion problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(2):A659–A682.
- Urai, J. und Spiers, C. (2007). The effect of grain boundary water on deformation mechanisms and rheology of rocksalt during long-term deformation. In *Proc. 6th Conf. Mech. Beh. of Salt*, pages 149–158.
- Vidal-Codina, F., Nguyen, N., Giles, M., und Peraire, J. (2016). An empirical interpolation and model-variance reduction method for computing statistical outputs of parametrized stochastic partial differential equations. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 4(1):244–265.
- Vollhardt, K., Butenschön, H., und Schore, N. (2011). *Organische Chemie*. VCH [Imprint].

- Wan, X. und Karniadakis, G. E. (2006). Long-term behavior of polynomial chaos in stochastic flow simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(41–43):5582 – 5596. John H. Argyris Memorial Issue. Part {II}.
- Wang, G., Zhang, L., Zhang, Y., und Ding, G. (2014). Experimental investigations of the creep damage rupture behaviour of rock salt. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 66:181 – 187.
- Weidinger, P. Blum, W., Hampel, A., und Hunsche, U. (1998). Description of the creep of rock salt with the composite model-i. transient creep. *Series on rock and soil mechanics*, pages 287–299.
- Wiener, N. (1938). The Homogeneous Chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936.
- Wiese, S. (2010). *Verformung und Schädigung von Werkstoffen der Aufbau- und Verbindungstechnik: Das Verhalten im Mikrobereich*. Springer Berlin Heidelberg.
- Wriggers, P. (2009). *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer, Berlin.
- Wriggers, P., Nackenhorst, U., Beuermann, S., Spiess, H., und Löhnert, S. (2007). *Technische Mechanik kompakt: Starrkörperstatik - Elastostatik - Kinetik*. Vieweg+Teubner Verlag.
- Xiu, D. und Hesthaven, J. S. (2005). High-order collocation methods for differential equations with random inputs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(3):1118–1139.
- Xiu, D. und Karniadakis, G. E. (2002). The Wiener–Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24(2):619–644.
- Xiu, D. und Karniadakis, G. E. (2003). Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, 187(1):137 – 167.
- Xu, X. und Graham-Brady, L. (2005). A stochastic computational method for evaluation of global and local behavior of random elastic media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(42–44):4362 – 4385.
- Young, D. (2003). *Iterative Solution of Large Linear Systems*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications.
- Zienkiewicz, O. und Taylor, R. (2000). *Finite Element Method (5th Edition) Volume 1 - The Basis*. Elsevier.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R., und Zhu, J. (2005). *Finite Element Method - Its Basis and Fundamentals*. Butterworth Heinemann.

Abbildungsverzeichnis

2.1. Referenz- und Momentankonfiguration eines Körpers \mathcal{B}	7
2.2. Volumenelement in der Referenz- und Momentankonfiguration	9
2.3. Gesamtkörper mit äußeren Kräften und Teilkörper mit äußeren Kräften und die resultierenden gegenseitigen Wirkungen die an der gemeinsamen Schnittfläche am Element Δa wirken, nach Altenbach [1994].	12
2.4. Experimentelle Ermittlung des Materialverhaltens und Ableiten des Berechnungsmodells	22
2.5. Kriechverformung	28
2.6. Schnitt durch ein RVE des Körpers \mathcal{B} an der die Schädigung definiert wird.	32
2.7. Eindimensionales Schädigungselement	33
3.1. Newton-Raphson Gleichgewichtssiteration	38
3.2. Diskretisierung eines Gebiets \mathcal{B} mit finiten Elementen	39
3.3. Verzerrtes 8-Knoten-Brick-Element	41
3.4. Der Kurvenverlauf der zu integrierenden Funktion $f(x)$	43
3.5. Rundungs- und Diskretisierungsfehler für das Beispiel $f(x) = 2 \cosh(x)$	46
4.1. Entstehung von Salzen in Binnenmeeren nach Ochsenius [1877]	48
4.2. Kristallstruktur von NaCl	49
4.3. Charakteristisches Spannungs-, Verformungs- und Dilatanz-Verhalten von Steinsalz im Festigkeitsversuch nach Günther [2009]	51
4.4. Uniaxialer Kriechversuch an Asse-Speisesalz: Die gemessene Verformung der Prüfkörper weist die natürliche Bandbreite des Kriechverhaltens von Steinsalz auf, nach Hunsche und BGR [1996].	53
4.5. Elastische Verformung einer Steinsalzprobe	54
4.6. Nulldimensionale Gitterfehler nach Bergmann [2003]	56
4.7. Verdeutlichen eines eindimensionalen Gitterfehlers an einer Stufenversetzung und der Definition des Burgersvektor b nach Bergmann [2003]	56
4.8. Versetzungsmechanismus nach Günther [2009]	57
4.9. Vernichtung von Versetzungen einer Gleitebene durch Annihilation nach Fokker [1998]	59
4.10. Versetzungsklettern und Annihilation nach Günther [2009]	60
4.11. Mikrorissentstehung im Bereich aufgestauter Versetzungen nach Günther [2009]	61

4.12. Festigkeitsversuche zur Ermittlung der Festigkeits- und Dilatanzentwicklung an Asse-Speisesalz in Abhängigkeit unterschiedlicher Manteldrücke nach Heemann und Schulze [2007]	62
4.13. Kriechversuchserie mit Asse-Speisesalz (z2SP) von der 800m Sohle der Schachanlage Asse II. Die gemessenen stationären Kriechraten werden durch die Punkte repräsentiert und wurden doppelt-logarithmisch über der Differenzspannung aufgetragen. Die Linien entsprechen den stationären Kriechen nach Hampel [2006].	63
4.14. Verdeutlichung der Temperaturabhängigkeit der Verformung anhand der Potenzialkurve für zwei unterschiedliche Temperaturen nach Wiese [2010].	65
4.15. Verdeutlichung der Temperaturabhängigkeit der Kriechrate anhand der kinetischen Energie der Moleküle bei einer tiefen (Blau) und bei einer hohen Temperatur (Rot) nach Vollhardt et al. [2011].	66
4.16. Schematische Darstellung des mechanischen Verhaltens von Steinsalz nach BGR	67
5.1. Kriechkurve einer Steinsalzprobe	82
5.2. Generalisiertes Maxwell-Modell	83
6.1. Geometrie der Versuchsprobe und Randbedingungen für die Berechnungen der Versuche 04141, N2/4 – 95015 und TUC – 313	90
6.2. Simulation des Langzeitkriechversuchs 04141 und Gegenüberstellung mit den Messergebnissen	91
6.3. Berechnete Verformungsrate des Langzeitkriechversuchs 04141 .	92
6.4. Konvergenznorm für den Langzeitkriechversuch 04141	93
6.5. Triaxiale Kriechversuche TUC-303 und TUC-313 nach Rokahr et al. [2007]	94
6.6. Berechnete Verformung und Verformungsrate des triaxialen Kriechversuches TUC-313.	95
6.7. Variation der Kriechkurven in Abhängigkeit der elastischen Konstanten	97
6.8. Variation der Kriechkurven in Abhängigkeit der Elastizitätsmodule für das generalisierte Maxwell-Modell	99
6.9. Variation der Kriechkurven in Abhängigkeit der Dämpferkonstanten des generalisierten Maxwell-Modells	100
6.10. Variation der Kriechkurven in Abhängigkeit der Parameter für das Norton Kriechgesetz	101
6.11. Stochastische Abhängigkeit der Schädigung und Parameter für die Schädigungsentwicklung	102
6.12. Vergleichsrechnung am Langzeitkriechversuch N2/4 – 95015 . .	104

7.1. Verteilung der Wahrscheinlichkeit und die Summe von zwei gleichzeitig geworfenen Würfeln	110
7.2. Stetige und diskrete Verteilungsfunktion	111
7.3. CDF für den Elastizitätsmodul E und die Schädigung D	114
7.4. PDF einer zweidimensionalen Standardnormalverteilung	115
8.1. Ablaufskizze bei stochastischen Prozessen nach Blatman [2009]	125
8.2. Eindimensionale Hermite Polynome	131
8.3. Zweidimensionales Hermite Chaos für verschiedene Ordnungen	132
8.4. Struktur der PC Steifigkeitsmatrix	141
9.1. Uniaxialer Kriechversuch an Asse-Speisesalz mit einer angenommenen Gauß-Verteilung der Verschiebung: Die gemessene Verformung der Prüfkörper weist die natürliche Bandbreite des Kriechverhaltens von Steinsalz auf, nach Hunsche und BGR [1996].	146
9.2. Ausgewählte Verteilungen der Parameterstudie zur Standardabweichung der unsicheren Materialparametern im Vergleich mit der angenommen Verteilung bei 300 Tagen.	147
9.3. Vergleich zwischen homogenem Zufallsfeld und zufälligem Zufallsfeld anhand der unsicheren Materialparameter.	149
9.4. Konvergenzverhalten der unsicheren Materialparameter und der Verformung bei einem homogenen Zufallsfeld („blaue Linien“) und zufälligen Zufallsfeld („rote Linien“).	150
9.5. Darstellung der Verteilung des unsicheren Materialparameters E_∞ anhand der CDF und PDF.	152
9.6. Exemplarische Verteilung des Elastizitätsmoduls für eine Realisierung einer axialsymmetrisch approximierten Steinsalzprobe.	154
9.7. Darstellung der Verteilung der Querkontraktionszahl ν anhand der CDF und PDF.	155
9.8. Exemplarische Verteilung der Querkontraktionszahl für eine Realisierung einer axialsymmetrisch approximierten Steinsalzprobe.	156
9.9. Darstellung der Verteilung der Schädigung D anhand der CDF und PDF.	157
9.10. Verteilung der Schädigung für eine Realisierung für eine Steinsalzprobe.	158
9.11. Simulation des Langzeitkriechversuchs 0414 <i>i</i> mit unsicheren Materialparametern und die daraus resultierende Verteilung der Verformung bei 900 Tagen.	160
9.12. PDF der Verformung bei 900 Tagen mit der Häufigkeitsverteilung der Realisierungen.	161
9.13. Simulation des Langzeitkriechversuchs $N2/i$ mit unsicheren Materialparametern und die daraus resultierende Verteilung der Verformung bei 1200 Tagen.	163

9.14. PDF der Verformung bei 1200 Tagen mit der Häufigkeitsverteilung der Realisierungen.	164
9.15. Gegenüberstellung der Verformung aus der PC- und der MC Simulation für den Langzeitkriechversuch 0414 <i>i</i>	165
9.16. Konvergenzverhalten der Verformung und der relative Fehler der Verformung in Abhängigkeit der Anzahl der MC Simulation.	166
9.17. Konvergenzverhalten der Input Parameter in Abhängigkeit der Anzahl der MC Simulation.	167
9.18. Schematische Darstellung der Maschinenstrecke EU1 im Bergwerk Sondershausen.	169
9.19. Vorstellung verschiedener FE-Modell für die Maschinenstrecke EU1.	170
9.20. FE-Modell für die Maschinenstrecke EU1 mit den Randbedingungen.	171
9.21. Verteilung des Elastizitätsmoduls für eine Realisierung der Maschinenstrecke EU1 und dem umgebenen Steinsalz.	172
9.22. Verteilung der Querkontraktionszahl für eine Realisierung der Maschinenstrecke EU1 und dem umgebenen Steinsalz.	173
9.23. Verteilung der Schädigung für eine Realisierung für die Maschinenstrecke EU1 und dem umgebenen Steinsalz.	174
9.24. Berechnete Vertikalverformung und Horizontalverformung der Messpunkte b, d, e und f aus Rokahr et al. [2007]	175
9.25. Entwicklung der Vertikalverschiebung der Messpunkte b und f und die dazugehörige Verteilung der Vertikalverschiebung bei 36 Jahren.	176
9.26. Entwicklung der Horizontalverschiebung der Messpunkte d und e und die dazugehörige Verteilung der Horizontalverschiebung bei 36 Jahren.	177
9.27. Berechnete maximale Hauptspannung und Frac Messdaten aus Rokahr et al. [2007]	178
9.28. Betrag der maximalen Hauptspannung nach einem Jahr und nach 36 Jahren.	178
9.29. Entwicklung der Vertikal- und Horizontalspannungen an den Messpunkten b, d, e und f.	179
10.1. Zusammenfassung und Ausblick des Forschungsvorhabens zur Erweiterung der Salzmechanik um das Feld der Stochastik.	184

Tabellenverzeichnis

3.1. Lösung mit 15-stelliger dezimaler Rechnung	45
6.1. Parameter für das primäre und sekundäre Kriechen	91
6.2. Parameter für das schädigungsbehaftete Kriechen	95
7.1. Verteilungstabelle für die Ereignisse aus Abbildung 7.1	109
7.2. Systemparameter	113
8.1. Dimension der PC-Basis P in Abhängigkeit von der Dimension M und der PC-Ordnung r , nach Maitre und Knio [2010].	127
8.2. Askey Schema nach Xiu und Karniadakis [2002]	130
9.1. Wahrscheinlichkeiten für den Parameter E_∞ bezüglich verschiede- ner Intervalle.	151
9.2. Wahrscheinlichkeiten für die Querkontraktionszahl bezüglich verschiedener Intervalle.	153
9.3. Wahrscheinlichkeiten für die Schädigung bezüglich verschiedener Intervalle.	157
9.4. Mittelwerte der unsicheren Systemparameter und Materialpara- meter und Verformung für ausgewählte Realisierungen.	159
9.5. Mittelwert der unsicheren Systemparameter und Materialpara- meter und Verformung für ausgewählte Realisierungen.	162
C.1. Eindimensionale PC Basis mit dem Produkt aus Eindimensio- nalen Hermiten Polynomen und den dazugehörigen Varianzen nach Ghanem und Spanos [1991].	193
C.2. Zweidimensionale PC Basis mit dem Produkt aus Eindimensio- nalen Hermiten Polynomen und den dazugehörigen Varianzen nach Ghanem und Spanos [1991].	194
C.3. Dreidimensionale PC Basis mit dem Produkt aus Eindimensio- nalen Hermiten Polynomen und den dazugehörigen Varianzen nach Ghanem und Spanos [1991].	195
C.4. Vierdimensionale PC-Basis mit dem Produkt aus Eindimensio- nalen Hermiten Polynomen und den dazugehörigen Varianzen nach Ghanem und Spanos [1991].	196

Forschungs- und Seminarberichte

Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Bisher in dieser Schriftenreihe erschienene Berichte:

- S 73/1 Seminar über Thermodynamik und Kontinuumsmechanik, Hannover 1973
- F 75/1 "Die Spannungsberechnung im Rahmen der Finite-Element-Methode",
R. Ahmad, Dissertation, April 1975
- F 76/1 "Zur Theorie und Anwendung der Stoffgleichungen elastisch-plastisch-viskoser Werkstoffe",
H. Mentlein, Dissertation, April 1976
- S 77/1 Seminar über lineare und geometrisch nichtlineare Schalentheorie einschließlich Stabilitätstheorie, Hannover 1977
- F 77/2 "Beitrag zur Berechnung von Gründungsplatten mit Hilfe der Finite-Element-Methode",
H. Meyer, Dissertation, Juli 1977
- F 77/3 "Zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen räumlich vorgekrümmter und vorverwundener Stäbe",
J. Möhlenkamp, Dissertation, Dezember 1977
- F 77/4 "Zur Theorie und Berechnung geometrisch und physikalisch nicht-linearer Kontinua mit Anwendung der Methode der finiten Elemente",
J. Paulun, Dissertation, Dezember 1977
- S 78/1 2. Seminar über Thermodynamik und Kontinuumsmechanik,
Hannover 1978
- F 79/1 "Theoretische und numerische Behandlung geometrisch nichtlinearer viskoplastischer Kontinua",
K.-D. Klee, Dissertation, Februar 1979
- F 79/2 "Zur Konstruierbarkeit von Variationsfunktionalen für nichtlineare Probleme der Kontinuumsmechanik",
J. Siefer, Dissertation, Oktober 1979
- F 80/1 "Theoretische und numerische Behandlung gerader Stäbe mit endlichen Drehungen",
M. Kessel, Dissertation, Februar 1980
- F 81/1 "Zur Berechnung von Kontakt- und Stoßproblemen elastischer Körper mit Hilfe der Finite-Element-Methode",
P. Wriggers, Dissertation, Januar 1981
- F 81/2 "Stoffgleichungen für Steinsalze unter mechanischer und thermischer Beanspruchung",
J. Olschewski, E. Stein, W. Wagner, D. Wetjen, geänderte Fassung eines Zwischenberichtes zum BMFT-Forschungsvorhaben KWA 1608/5
- F 82/1 "Konvergenz und Fehlerabschätzung bei der Methode der Finiten Elemente",
R. Röhrbach, E. Stein, Abschlußbericht eines VW-Forschungsvorhabens, Februar 1982

- F 82/2 "Alternative Spannungsberechnung in Finite-Element-Verschiebungsmodellen",
C. Klöhn, Dissertation, November 1982
- F 83/1 Seminar über nichtlineare Stabtheorie, Hannover 1983
- F 83/2 "Beiträge zur nichtlinearen Theorie und inkrementellen Finite-Element-Berechnung dünner elastischer Schalen",
A. Berg, Dissertation, Juli 1983
- F 83/3 "Elastoplastische Plattenbiegung bei kleinen Verzerrungen und großen Drehungen",
J. Paulun, Habilitation, September 1983
- F 83/4 "Geometrisch nichtlineare FE-Berechnung von Faltenwerken mit plastisch / viskoplastischem Deformationsverhalten",
M. Krog, Dissertation, Dezember 1983
- F 85/1 Verleihung der Ehrendoktorwürde des Fachbereichs Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Hannover an die Herren Prof. Dr. Drs. h.c. J.H. Argyris, Dr.-Ing. H.Wittmeyer
- F 85/2 "Eine geometrisch nichtlineare Theorie schubelastischer Schalen mit Anwendung auf Finite-Element-Berechnungen von Durchschlag- und Kontaktproblemen",
W. Wagner, Dissertation, März 1985
- F 85/3 "Geometrisch/physikalisch nichtlineare Probleme — Struktur und Algorithmen —", GAMM-Seminar im Februar 1985 in Hannover
- F 87/1 "Finite-Elemente-Berechnungen ebener Stabtragwerke mit Fließgelenken und großen Verschiebungen",
R.Kahn, Dissertation, Oktober 1987
- F 88/1 "Theorie und Numerik schubelastischer Schalen mit endlichen Drehungen unter Verwendung der Biot-Spannungen",
F. Gruttmann, Dissertation, Juni 1988
- F 88/2 "Optimale Formgebung von Stabtragwerken mit Nichtlinearitäten in der Zielfunktion und in den Restriktionen unter Verwendung der Finite-Element-Methode",
V. Berkhahn, Dissertation, Oktober 1988
- F 88/3 "Beiträge zur Theorie und Numerik großer plastischer und kleiner elastischer Deformationen mit Schädigungseinfluß",
R. Lammering, Dissertation, November 1988
- F 88/4 "Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihrer Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode",
P. Wriggers, Habilitation, November 1988
- F 88/5 "Mathematische Formulierung und numerische Methoden für Kontaktprobleme auf der Grundlage von Extremalprinzipien",
D. Bischoff, Habilitation, Dezember 1988
- F 88/6 "Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse",
C. Miehe, Dissertation, Dezember 1988
- F 89/1 "Zur Stabilität und Konvergenz gemischter finiter Elemente in der linearen Elastizitätstheorie",
R. Rolfes, Dissertation, Juni 1989
- F 89/2 "Traglastberechnungen von Faltenwerken mit elastoplastischen Deformationen",
K.-H. Lambertz, Dissertation, Oktober 1989

- F 89/3 "Transientes Kriechen und Kriechbruch im Steinsalz",
U. Heemann, Dissertation, November 1989
- F 89/4 "Materialgesetze zum Verhalten von Betonkonstruktionen bei harten Stößen",
E. Stein, P. Wriggers, T. Vu Van & T. Wedemeier, Dezember 1989
- F 89/5 "Lineare Konstruktion und Anwendungen von Begleitmatrizen",
C. Carstensen, Dissertation, Dezember 1989
- F 90/1 "Zur Berechnung prismatischer Stahlbetonbalken mit verschiedenen Querschnittsformen für allgemeine Beanspruchungen",
H. N. Lucero-Cimas, Dissertation, April 1990
- F 90/2 "Zur Behandlung von Stoß- Kontaktproblemen mit Reibung unter Verwendung der Finite-Element-Methode",
T. Vu Van, Dissertation, Juni 1990
- F 90/3 "Netzadaption und Mehrgitterverfahren für die numerische Behandlung von Faltwerken",
L. Plank, Dissertation, September 1990
- F 90/4 "Beiträge zur Theorie und Numerik finiter inelastischer Deformationen",
N. Müller-Hoeppe, Dissertation, Oktober 1990
- F 90/5 "Beiträge zur Theorie und Numerik von Materialien mit innerer Reibung am Beispiel des Werkstoffes Beton",
T. Wedemeier, Dissertation, Oktober 1990
- F 91/1 "Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente",
W. Wagner, Habilitation, April 1991
- F 91/2 "Mehrgitterverfahren und Netzadaption für lineare und nichtlineare statische Finite-Elemente-Berechnungen von Flächentragwerken",
W. Rust, Dissertation, Oktober 1991
- F 91/3 "Finite Elemente Formulierungen im Trefftzchen Sinne für dreidimensionale anisotrop-elastische Faserverbundstrukturen",
K. Peters, Dissertation, Dezember 1991
- F 92/1 "Einspielen und dessen numerische Behandlung von Flächentragwerken aus ideal plastischem bzw. kinematisch verfestigendem Material",
G. Zhang, Dissertation, Februar 1992
- F 92/2 "Strukturoptimierung stabilitätsgefährdeter Systeme mittels analytischer Gradientenermittlung",
A. Becker, Dissertation, April 1992
- F 92/3 "Duale Methoden für nichtlineare Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik",
R. Mahnken, Dissertation, April 1992
- F 93/1 "Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation",
C. Miehe, Habilitation, Dezember 1993
- F 93/2 "Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen aus isotropen, hyperelastischen Materialien",
F.-J. Barthold, Dissertation, Dezember 1993
- F 94/1 "Adaptive Verfeinerung von Finite-Element-Netzen für Stabilitätsprobleme von Flächentragwerken",
E. Stein, B. Seifert, W. Rust, Forschungsbericht, Oktober 1994

- F 95/1 "Adaptive Verfahren für die Formoptimierung von Flächentragwerken unter Berücksichtigung der CAD-FEM-Kopplung",
A. Falk, Dissertation, Juni 1995
- F 96/1 "Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen",
F. Gruttmann, Habilitation, Januar 1996
- F 96/2 "Zur Theorie und Numerik finiter elastoplastischer Deformationen von Schalenstrukturen",
B. Seifert, Dissertation, März 1996
- F 96/3 "Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens",
J. Schröder, Dissertation, März 1996
- F 96/4 "Statische und dynamische Berechnungen von Schalen endlicher elastischer Deformationen mit gemischten finiten Elementen",
P. Betsch, Dissertation, März 1996
- F 96/5 "Kopplung von Finiten Elementen und Randelementen für ebene Elastoplastizität mit Implementierung auf Parallelrechnern",
M. Kreienmeyer, Dissertation, März 1996
- F 96/6 "Theorie und Numerik dimensions- und modelladaptiver Finite-Elemente-Methoden von Flächentragwerken",
S. Ohnimus, Dissertation, Juni 1996
- F 96/7 "Adaptive Finite Element Methoden für MIMD-Parallelrechner zur Behandlung von Strukturproblemen mit Anwendung auf Stabilitätsprobleme",
O. Klaas, Dissertation, Juli 1996
- F 96/8 "Institutsbericht 1971–1996 aus Anlaß des 25-jährigen Dienstjubiläums von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. Erwin Stein, Dezember 1996
- F 97/1 "Modellierung und Numerik duktiler kristalliner Werkstoffe",
P. Steinmann, Habilitation, August 1997
- F 97/2 "Formoptimierung in der Strukturdynamik",
L. Meyer, Dissertation, September 1997
- F 97/3 "Modellbildung und Numerik für Versagensprozesse in Gründungen von Caissonwellenbrechern",
M. Lengnick, Dissertation, November 1997
- F 98/1 "Adaptive gemischte finite Elemente in der nichtlinearen Elastostatik und deren Kopplung mit Randelementen",
U. Brink, Dissertation, Februar 1998
- F 98/2 "Theoretische und numerische Aspekte zur Parameteridentifikation und Modellierung bei metallischen Werkstoffen",
R. Mahnken, Habilitation, Juli 1998
- F 98/3 "Lokalisierung und Stabilität der Deformation wassergesättigter bindiger und granularer Böden",
J. M. Panesso, Dissertation, August 1998
- F 98/4 "Theoretische und numerische Methoden in der angewandten Mechanik mit Praxisbeispielen",
R. Mahnken (Hrsg.), Festschrift anlässlich der Emeritierung von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. h.c. mult. Erwin Stein, November 1998
- F 99/1 "Eine h-adaptive Finite-Element-Methode für elasto-plastische Schalenprobleme in unilateralem Kontakt",
C.-S. Han, Dissertation, Juli 1999

- F 00/1 "Ein diskontinuierliches Finite-Element-Modell für Lokalisierungsversagen in metallischen und granularen Materialien",
C. Leppin, Dissertation, März 2000
- F 00/2 "Untersuchungen von Strömungen in zeitlich veränderlichen Gebieten mit der Methode der Finiten Elemente",
H. Braess, Dissertation, März 2000
- F 00/3 "Theoretische und algorithmische Beiträge zur Berechnung von Faserverbundschalen",
J. Tessmer, Dissertation, März 2000
- F 00/4 "Theorie und Finite-Element-Methode für die Schädigungsbeschreibung in Beton und Stahlbeton",
D. Tikhomirov, Dissertation, August 2000
- F 01/1 "A C1 - continuous formulation for finite deformation contact",
L. Krstulovic-Opara, Dissertation, Januar 2001
- F 01/2 "Strain Localisation Analysis for Fully and Partially Saturated Geomaterials",
H. Zhang, Dissertation, Januar 2001
- F 01/3 "Meso-makromechanische Modellierung von Faserverbundwerkstoffen mit Schädigung",
C. Döbert, Dissertation, April 2001
- F 01/4 "Thermomechanische Modellierung gummiartiger Polymerstrukturen",
S. Reese, Habilitation, April 2001
- F 01/5 "Thermomechanisches Verhalten von Gummimaterialien während der Vulkanisation – Theorie und Numerik –",
M. André, Dissertation, April 2001
- F 01/6 "Adaptive FEM für elastoplastische Deformationen – Algorithmen und Visualisierung",
M. Schmidt, Dissertation, Juni 2001
- F 01/7 "Verteilte Algorithmen für h-, p- und d-adaptive Berechnungen in der nichtlinearen Strukturmechanik",
R. Niekamp, Dissertation, Juni 2001
- F 01/8 "Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen mit elastoplastischen Deformationen",
K. Wiechmann, Dissertation, Juli 2001
- F 01/9 "Direct Computation of Instability Points with Inequality Constraints using the Finite Element Method",
H. Tschöpe, Dissertation, September 2001
- F 01/10 "Theorie und Numerik residualer Fehlerschätzer für die Finite-Elemente-Methode unter Verwendung äquilibrierter Randspannungen",
S. Ohnimus, Habilitation, September 2001
- F 02/1 "Adaptive Algorithmen für thermo-mechanisch gekoppelte Kontaktprobleme",
A. Rieger, Dissertation, August 2002
- F 02/2 "Consistent coupling of shell- and beam-models for thermo-elastic problems",
K. Chavan, Dissertation, September 2002
- F 03/1 "Error-controlled adaptive finite element methods in large strain hyperelasticity and fracture mechanics",
M. Rüter, Dissertation, Mai 2003
- F 03/2 "Formulierung und Simulation der Kontaktvorgänge in der Baugrund-Tragwerks-Interaktion",
A. Haraldsson, Dissertation, Juni 2003

- F 03/3 "Concepts for Nonlinear Orthotropic Material Modeling with Applications to Membrane Structures",
T. Raible, Dissertation, Juni 2003
- F 04/1 "On Single- and Multi-Material arbitrary Lagrangian-Eulerian Approaches with Application to Micromechanical Problems at Finite Deformations",
D. Frefkamm, Dissertation, Oktober 2004
- F 04/2 "Computational Homogenization of Microheterogeneous Materials at Finite Strains Including Damage",
S. Löhnert, Dissertation, Oktober 2004
- F 05/1 "Numerical Micro-Meso Modeling of Mechanosensation driven Osteonal Remodeling in Cortical Bone",
C. Lenz, Dissertation, Juli 2005
- F 05/2 "Mortar Type Methods Applied to Nonlinear Contact Mechanics",
K.A. Fischer, Dissertation, Juli 2005
- F 05/3 "Models, Algorithms and Software Concepts for Contact and Fragmentation in Computational Solid Mechanics",
C. Hahn, Dissertation, November 2005
- F 06/1 "Computational Homogenization of Concrete",
S. Moftah, Dissertation, Januar 2006
- F 06/2 "Reduction Methods in Finite Element Analysis of Nonlinear Structural Dynamics",
H. Spiess, Dissertation, Februar 2006
- F 06/3 "Theoretische und algorithmische Konzepte zur Beschreibung des beanspruchungsadaptiven Knochenwachstums",
B. Ebbecke, Dissertation, März 2006
- F 06/4 "Experimentelle Untersuchungen an elastomeren Werkstoffen",
M. Dämgen, Dissertation, Dezember 2006
- F 07/1 "Numerische Konzepte zur Behandlung inelastischer Effekte beim reibungsbehafteten Rollkontakt",
M. Zieffle, Dissertation, Februar 2007
- F 07/2 "Begleitbuch zur Leibniz-Ausstellung",
Hrsg: E. Stein, P. Wriggers, 2007
- F 07/3 "Modellierung und Simulation der hochfrequenten Dynamik rollender Reifen",
M. Brinkmeier, Dissertation, Juni 2007
- F 07/4 "Computational Homogenization of micro-structural Damage due to Frost in Hardened Cement Paste",
M. Hain, Dissertation, Juli 2007
- F 07/5 "Elektromechanisch gekoppelte Kontaktmodellierung auf Mikroebene",
T. Helmich, Dissertation, August 2007
- F 07/6 "Dreidimensionales Diskrete Elemente Modell für Superellipsoide",
C. Lillie, Dissertation, Oktober 2007
- F 07/7 "Adaptive Methods for Continuous and Discontinuous Damage Modeling in Fracturing Solids",
S.H. Reese, Dissertation, Oktober 2007
- F 08/1 "Student Projects of Micromechanics",
Hrsg: U. Nackenhorst, August 2008

- F 09/1 "Theory and Computation of Mono- and Poly- crystalline Cyclic Martensitic Phase Transformations",
G. Sagar, Dissertation, August 2009
- F 09/2 "Student projects of Micromechanics",
D. Balzani and U. Nackenhorst, Course Volume, October 2009
- F 09/3 "Multiscale Coupling based on the Quasicontinuum Framework, with Application to Contact Problems",
W. Shan, Dissertation, November 2009
- F 10/1 "A Multiscale Computational Approach for Microcrack Evolution in Cortical Bone and Related Mechanical Stimulation of Bone Cells",
D. Kardas, Dissertation, September 2010
- F 11/1 "Ein integrales Modellierungskonzept zur numerischen Simulation der Osseointegration und Langzeitstabilität von Endoprothesen",
A. Lutz, Dissertation, Oktober 2011
- F 12/1 "Ein physikalisch motiviertes Reifen-Fahrbahnmodell für die Gesamtfahrzeugsimulation",
R. Chiarello, Dissertation, Februar 2012
- F 13/1 "Thermomechanical Analysis of Tire Rubber Compounds in Rolling Contact",
A. Suwannachit, Dissertation, September 2012
- F 13/2 "Towards a Finite Element Model for Fluid Flow in the Human Hip Joint",
K. Fietz, Dissertation, September 2013
- F 14/1 "Micro-Mechanically Based Damage Analysis of Ultra High Performance Fibre Reinforced Concrete Structures with Uncertainties",
A. Hürkamp, Dissertation, Dezember 2013
- F 14/2 "Numerical Solution of High-Dimensional Fokker-Planck Equations with Discontinuous Galerkin Methods",
F. Loerke, Dissertation, Dezember 2013
- F 14/3 "Numerische Simulation probabilistischer Schädigungsmodelle mit der Stochastischen Finite Elemente Methode",
P.-P. Jablonski, Dissertation, September 2014
- F 15/1 "On a Finite Element Approach for the Solution of a mechanically Stimulated Biochemical Fracture Healing Model",
A. Sapotnick, Dissertation, Februar 2015
- F 15/2 "Stimulation of Elastic-Plastic Material Behavior with Uncertain Material Parameters. A Spectral Stochastic Finite Element method Approach",
S. Fink, Dissertation, Februar 2015
- F 15/3 "A Fully Micro-mechanically Motivated Material Law for Filled Elastome",
O. Stegen, Dissertation, März 2015
- F 16/1 "A modified adaptive harmony search algorithm approach on structural identification and damage detection",
M. Jahjough, Dissertation, Januar 2016
- F 17/1 "Computational Simulation of Piezo-electrically Stimulated Bone Adaption Surrounding Activated Teeth Implants",
A. Shirazibeheshtiha, Dissertation, Januar 2017
- F 17/2 "A Constitutive Contact Model for Homogenized Tread-Road Interaction in Rolling Resistance Computations",
R. Beyer, Dissertation, Februar 2017
- F 17/3 "A Posteriori Error Estimates for Advanced Galerkin Methods",
M.O. Rüter, Habilitation, November 2017