Risikoseparierung und Unternehmensbewertung

Von der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät

der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des Grades einer

DOKTORIN DER WIRTSCHAFTWISSENSCHAFT

- Dr. rerum politicarum -

genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Kffr., Yanqiong Bolik

geboren am 08. Juli 1970, in Beijing, V. R. China

2006

Referent: Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler

Korreferent: Prof. Dr. Stephan Lengsfeld

Tag der Promotion: 27. Juli 2006

Abstract

A diversified firm has several projects for investment in its portfolio. These projects can be structured in a single corporation (option 1) or in a corporate group (option 2). The question is, if a difference in shareholder-value is caused by these alternative structures.

The thesis analyzes the effects of structuring investments on the value of a diversified firm. with special emphasis on risk separation. The analysis focuses on the future cash flows, which are affected by uncertainties. Structured as a corporate group, the risky projects are separated. As an advantage of this risk separation, ceteris paribus, the shareholder of the corporate group receives higher expected returns than the shareholder of a single corporate. This difference involves a difference in the shareholder-value between the two options of structure forms.

The thesis also provides an approach to calculate the difference in shareholder value between option 1 and option 2. The method used belongs to the DCF approach. However, there are differences in formalizing uncertainty. First, the risky development of the projects will be described as stochastic processes. Second, the information about these processes is collected in a filtration. If the market for real investments is complete and free of arbitrage, then an equivalent probability measure exists, known as martingale measure. Under the martingale measure, the riskless interest rate can be used for discounting the expected future cash flows from the real investments.

Keyword: Option pricing model
Shareholder value
Valuation

Kurze Zusammenfassung

Diversifizierte Unternehmungen tätigen regelmäßig mehrere Investitionen. Dadurch stellt sich die Frage, ob diese Investitionen in einer Einheitsunternehmung (Option 1) oder in einem Konzern (Option 2) organisiert werden sollen. Hier schließt sich die Überlegung an, ob ein Unterschied im Unternehmenswert bezüglich dieser Organisationsalternativen existiert.

Die vorliegende Dissertation untersucht die Auswirkung der rechtlichen Organisationsformen auf den Unternehmenswert, mit Beachtung der Risikoseparierung. Untersucht werden die zukünftigen Cash Flows, die unsicher sind. Falls die Investitionen in einem Konzern organisiert werden, hat man die Möglichkeit, die riskanten Investitionen voneinander getrennt in einer selbstständigen Unternehmenseinheit durchzuführen. Der Vorteil der Risikoseparierung ist, dass, ceteris paribus, die Eigenkapitalgeber eines Konzerns höhere Rückflüsse aus dem gesamten Investitionspaket erwarten können als die Eigenkapitalgeber einer Einheitsunternehmung.

Ein weiterer Kernpunkt dieser Dissertation besteht darin, einen Ansatz zu entwickeln, um den Vorteil der Risikoseparierung zu quantifizieren. Die dabei verwendete Methode kann zu den DCF–Verfahren eingeordnet werden. Jedoch benutzt der hier entwickelte Ansatz eine andere Risikomodellierung als die in der Literatur vorhandenen DCF–Ansätze. Erstens wird die unsichere Entwicklung der Investitionen durch einen stochatischen Prozess beschrieben. Zweitens werden die Informationen über die zukünftige Entwicklung der Investitionen in einer Filtrierung zusammengefasst. Bei der Unterstellung eines perfekten und arbitragefreien Kapitalmarktes existiert ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, ein sog. Martingalmaß. Unter diesem Martingalmaß können die erwarteten Rückflüsse aus den Investitionen mittels des risikolosen Zinses diskontiert werden.

Keyword: Optionspreistheorie
Unternehmensbewertung
Unternehmenswert

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

AFA	–	Accumulatoren–Fabrik Aktiengesellschaft
AG	–	Aktiengesellschaft
AktG	–	Aktiengesetz
c. p.	–	ceteris paribus
CAPM	–	Capital Asset Pricing Model
d. h.	–	das heißt
DCF	–	Discounted Cash Flow
et al	–	und andere
etc.	–	et cetera
f.	–	folgend
ff.	–	folgende
GuV	–	Gewinn- und Verlustrechnung
IDW	–	Institut der Wirtschaftsprüfer
MB	–	Mega Byte
MHz	–	Mega Hertz
p. a.	–	per anno
RAM	–	Random Access Memory
sog.	–	so genannt
S.	–	Seite
usw.	–	und so weiter
UmWG	–	Umwandlungsgesetz
vgl.	–	vergleiche
WD	–	Wertdifferenz
z. B.	–	zum Beispiel

Symbolverzeichnis

A	–	Index des ersten Tochterunternehmens
A_n	–	Teilmenge von Ω
B	–	Index des zweiten Tochterunternehmens
B_t	–	Wertentwicklungsprozess eines risikolosen Wertpapiers
C	–	Preis einer Call Option
D	–	Symbol einer Tochtergesellschaft
$E[\cdot]$	–	Erwartungswert
$E[r_M]$	–	Erwartete Marktrendite gemäß CAPM
I^i	–	$i$te Investitionsprojekt, $i = 1, 2$
I_0	–	Investitionsausgabe
K	–	Ausübungspreis
K_0	–	Kapitalbedarf der I^2
L	–	Betrag der Festansprüche
M_t	–	Martingal
N	–	Anzahl der Zeitpunkte
NPV	–	Kapitalwert
P	–	Wahrscheinlichkeitsmaß
Q	–	Risikoneutrales Martingalmaß
S	–	Preisprozess eines riskanten Wertpapiers
SHV_E	–	Shareholder–Value einer Einheitsunternehmung
SHV_K	–	Shareholder–Value eines Konzerns
S_0	–	Preis eines Wertpapiers in $t = 0$
T	–	Planungszeitraum
$V(\cdot)$	–	Wert einer Zahlung oder eines Assets
W	–	Standardisierter Wiener Prozess
X_i	–	Stochastischer Prozess
Z_t	–	Zahlung am Zeitpunkt t

Ω	–	Ereignismenge
Φ	–	Verteilungsfuntkion der Standardnormalverteilung
§	–	Paragraph
$\breve{S}$	–	Diskontierter Preisprozess
$\hat{r}$	–	Normierte Vermögensveränderung nach einer Anlageperiode
$\mathcal{F}$	–	Filtrierung
μ	–	Wachstumsrate
ω	–	Ereignis in Ω
ρ	–	Korrelationskoeffizient
σ	–	Standardabweichung
φ	–	Dichte der Standardnormalverteilung
$\widetilde{CF}$	–	Unsicherer Cash Flow
$\widetilde{Z^E}$	–	Unsichere Zahlung an Anteilseigner einer Einheitsunternehmung
$\widetilde{Z^K}$	–	Unsichere Zahlung an Anteilseigner eines Konzerns
d	–	Faktor der Preisveränderung nach einer Abwärtsbewegung
f	–	Funktion
h	–	Itô Prozess
i	–	Laufindex für Investitionen
j	–	Laufindex für Zustände
l	–	Länge des Zeitintervals
p	–	Wahrscheinlichkeit
q	–	Wahrscheinlichkeit unter dem Maß Q
r	–	Stetiger risikoloser Zins p. a.
ς	–	Interner Zinsfuß
r_f	–	Diskreter sicherer Zinssatz p. a.
t	–	Zeitpunkt
u	–	Faktor der Preisveränderung nach einer Aufwärtsbewegung

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Forschung über Unternehmensstrategien gehört zu den interessantesten Gebieten der Wirtschaftswissenschaften. Der Gegenstand dieser Forschung ist das durch Strategien bestimmte unternehmerische Handeln. Die einzelnen Unternehmensentscheidungen bilden im Zeitablauf eine historische Unternehmensentwicklung, an der sich der Erfolg einer Strategie ablesen lässt. Der rote Faden der Unternehmensentwicklung sind die unternehmerischen Ziele. Da sich das Marktumfeld ständig ändert, müssen Unternehmen auch ihre Strategien anpassen, um ihre Ziele nachhaltig zu erreichen. Zu den strategischen unternehmerischen Handlungen gehören insbesondere Investitionen und die eigene Unternehmensorganisation. Im Zusammenhang mit Entscheidungen über neue Investitionsprogramme, etwa wie bei Akquisitionen, Fusionen oder dem Eintritt in internationale Geschäftsbeziehungen, lassen sich häufig Umstrukturierungen der Unternehmung beobachten. Zur Verdeutlichung soll die Entwicklung der VARTA AG im Folgenden kurz dargestellt werden:[1]

Der Ursprung der VARTA Batterie AG ist die Accumulatoren–Fabrik Tuborschen Systems Büsche & Müller oHG. Diese Gesellschaft wurde im Jahr 1890 in die Accumulatoren–Fabrik Aktiengesellschaft (AFA) umgewandelt. In den folgenden siebzig Jahren hat die AFA zahlreiche Werke und Tochtergesellschaften im In– und Ausland gegründet bzw. erworben. Bis 1960/1961 gehörten der AFA zwölf Tochtergesellschaften. Außerdem war sie an acht Gesellschaften im In- und Ausland beteiligt. Diese Betriebe gehörten meistens zur elektrotechnischen Industrie. Im Jahr 1962 wurde die AFA in die VARTA Aktiengesellschaft umbenannt. In der Nachkriegszeit hatte die VARTA AG ihren Kernbereich der Batterieproduktion um verschiedene andere Bereiche erweitert: Medikamente, Kosmetika, diätetische Präparate, Luftfilter, Werkbänke, Starkstromtechnik etc. Im Jahr 1968 wurde die VARTA AG als VAR-

[1] Vgl. Stremmel (1996).

TA Gruppe umstrukturiert. Zum Jahreswechsel 1976/1977 erfolgte eine Spaltung der VARTA AG. Im Jahr 1977 begann eine grundlegende Neuordnung der VARTA–Gruppe mit der Einführung einer Spartenorganisation und der Umwandlung der VARTA AG in eine Holding. Dabei wurden einige Beteiligungen abgegeben, die nicht mehr zur Unternehmensstrategie passten. Die Bereiche Pharmazeutik, Diätetik und Kosmetik wurden in der Busch–Jäger AG und die Stromversorgung, Elektrik in der CEAG–Dominit–AG zusammengefasst. Anschließend wurden die Anteile der CEAG–Dominit–AG in eine neu gegründete Holding CEAG AG und die Anteile der Busch–Jäger AG in die ebenfalls neu gegründete Holding Altana AG eingebracht. Die Anteile der neuen Holdings wurden von der VARTA AG (Holding) gehalten, ebenso die Anteile der VARTA Batterie AG.

Bei der Betrachtung der dynamischen Entwicklung der VARTA AG erkennt man, dass ihre Entscheidungsträger offensichtlich das nachhaltige Wachstum als das unternehmerische Ziel verfolgt haben. Nach dem Erfolg im Batteriegeschäft wurden weitere Geschäftsfelder zur besseren Ausschöpfung des Unternehmenspotenzials erschlossen. Durch die Übernahme anderer Unternehmen und der Ausweitung der bestehenden Geschäftsfelder gewann die VARTA AG zusätzliche Quellen unternehmerischer Erträge. In diesem Prozess wurde die Unternehmung häufig umstrukturiert. Dabei entstanden meistens selbstständige Unternehmenseinheiten für die jeweiligen neuen Geschäftszweige, die unter dem Dach der VARTA AG zusammenarbeiten.

Es bleibt festzuhalten, dass die VARTA AG exemplarisch die Entwicklung eines typischen Unternehmens verdeutlicht: Nach einer Startphase, in der ein erfolgreiches Produkt auf dem Markt etabliert werden konnte, folgten Erweiterungs– und Verteilungsinvestitionen, die das Wachstum der Unternehmung ermöglichten und mit Umstrukturierungen einhergehen, um das angestrebte Wachstumsziel zu erreichen.

Um die Erreichung eines Wachstumszieles zu quantifizieren, bedarf es einer Messgröße. Ökonomisch wird das Unternehmenswachstum in der Steigerung des Marktwertes des Eigenkapitals gemessen. In welchem Umfang das Wachstumsziel erreicht wurde, lässt sich dadurch identifizieren, dass man den Unternehmenswert vor und nach der Investition gegenüberstellt. Steigt der Unternehmenswert, wächst das Unternehmen. Wie sich der Unternehmenswert durch die Einführung neuer Geschäftsfelder verändert, hängt vom Zusammenwirken folgender Effekte ab:

- Neue Geschäftsfelder schaffen zusätzliche Quellen für unternehmerische Erträge.

  Jedes Geschäftsfeld bietet neues Umsatzpotenzial, welches zusätzliche Gewinne für die Unternehmung generieren kann. Das ist die Voraussetzung für die Erhöhung des Unternehmenswertes.

- Durch neue Geschäftsfelder wird das Leistungsportfolio der Unternehmung diversifiziert.

  Eine der Motivationen für die Erweiterung der Geschäftsbereiche ist die Risikostreuung, die die Unternehmung durch Diversifizierung der Geschäftsfelder erreicht.

- Mit den neuen Geschäften entstehen auch neue Risiken.

  Dieser Effekt hat zwei Dimensionen: Einerseits kann man die Höhe der Umsätze in den neuen Geschäften vorher nicht feststellen. Neben der Chance, dass zusätzliche Gewinne geschafft werden, besteht auch die Gefahr, dass die neuen Geschäfte ökonomisch nicht vorteilhaft sind. Andererseits benötigt die Erweiterung der Investitionsprogramme zusätzliches Kapital. Dafür muss die Unternehmung möglicherweise auch Fremdkapital aufnehmen. So entstehen eventuell höhere Ausfallsrisiken für Eigentümer.

Es ist daher erforderlich, dass das Management der Unternehmung vor der Verwirklichung einer neuen Investition die Mittelverwendung in Relation zur daraus resultierenden betriebswirtschaflichen Zielerreichung prüft. Dabei soll nicht nur der Wertbeitrag der einzelnen Geschäfte überprüft werden, sondern es ist zu fragen, in welchem Zusammenhang diese Geschäfte zueinander stehen. Gegebenenfalls ist es notwendig, die Unternehmungsstruktur entsprechend anzupassen. So fanden auch bei der dargestellten VARTA AG mehrmals Betriebsaufspaltung statt, und zwar meist im Zusammenhang mit neuen Investitionen.

Unter Betriebsaufspaltung versteht man die Aufteilung eines bisher einheitlichen Unternehmens in zwei oder mehrere rechtlich selbstständige Unternehmen. Eine Aufspaltung von Unternehmungen ist das Gegenstück zur Unternehmensfusion. Bei einer Aufspaltung werden organisatorisch verselbstständigte Betriebseinheiten aus ihrer bisherigen rechtlichen Zuordnung herausgelöst und anderen Unternehmensträgern übereignet. In solchen Konstruktionen kann die Unternehmung wie folgt organisiert sein: Das wesentliche Anlagevermögen, wie z. B. Immobilien, Maschinen oder wertvolle immaterielle Wirtschaftsgüter, werden einem Besitzunternehmen zugeordnet, das die Funktion hat, Betriebsvermögen an das operativ tätige Betriebsunternehmen zu vermieten. Die Betriebsgesellschaft übernimmt die eigentlichen unternehmerischen Geschäfte, wie etwa Produktion, Marketing und Vertrieb. Häufig wird dabei das Umlaufvermögen, wie Warenbestand, Forderungen und Verbindlichkeiten, in der Unternehmenspraxis an die Betriebsgesellschaft übertragen, damit sie die Geschäfte lückenlos weiterführen kann. Allein diese Betriebsgesellschaft tritt am Markt gegenüber Kunden, Lieferanten oder Gläubigern in Erscheinung.

Das in der Unternehmenspraxis häufig beobachtbare Konstrukt der Betriebsaufspaltung zeigt, dass es offenbar einen Unterschied macht, ob eine Investition in einem Tochterunternehmen oder im bestehenden Geschäftsbetrieb durchgeführt wird. Eines der Vorteile der Betriebsaufspaltung ist, dass bei einem wirtschaftlichen Fehlschlag einer Investition im schlimmsten Fall zwar die Betriebsgesellschaft insolvent werden kann, das wertvolle Betriebsvermögen aber vor dem Zugriff der Gläubiger geschützt ist, da es nicht zur Haftungsmasse der Betriebsgesellschaft gehört. Eine solche Konstellation wird in der hier vorliegenden Arbeit als Risikoseparierung bezeichnet.

Risikoseparierung stellt somit eine Unternehmensstrategie dar, durch die das wertvolle Betriebsvermögen vor dem Risiko wirtschaftlicher Fehlschläge geschützt wird. An dieser Stelle können betriebswirtschaftliche Forschungen anschließen, die untersuchen, wie man bei gegebenen Marktbedingungen die Risiken der neuen Geschäfte durch geschickte Unternehmensorganisation eingrenzen kann, und wie sich diese Organisationsstrategie auf die Bewertung der Unternehmung auswirkt.

1.2 Zielsetzung und Abgrenzung

Diese Dissertationsschrift entstand auf Grundlage einer Forschungsarbeit, in deren Rahmen ein Bewertungsansatz entwickelt wurde, der Finanzierungswissenschaft mit Unternehmensstrategien wirksam verknüpft. Der erarbeitete Bewertungsansatz soll in erster Linie dazu verwendet werden, um das Wertsteigerungspotenzial von Unternehmungen mit einer Vielzahl von riskanten Geschäftsfeldern bzw. Investitionen in der Abhängigkeit der Unternehmensorganisation zu beurteilen.

Das Ziel der Arbeit besteht darin, die Wirkung der Risikoseparierung in der Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung von Insolvenzrisiken zu analysieren. Dies wird in der einschlägigen Literatur bisher zu wenig angesprochen und in der Praxis vernachlässigt.[2] Ein weiteres Kernelement dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Bewertungsansatzes, der die Wirkung der Risikoseparierung wertmäßig erfasst. Aus Gründen der Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit wird lediglich der Einfluss der Risikoseparierung auf den ökonomischen Wert der Kapitalgesellschaften erörtert.

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sei zur Vereinfachung folgende Situation betrachtet: Eine Unternehmung möchte zwei riskante Investitionen verwirklichen, die in der gesamten Arbeit mit I^1 und I^2 bezeichnet werden.

Grundsätzlich kann die Unternehmung zwischen zwei Organisationsmöglichkeiten wählen.

Option 1 (Keine Risikoseparierung)
Die riskanten Investitionsprojekte werden in einer einzigen, rechtlich selbstständigen Unternehmenseinheit verwirklicht. Die Risiken aus den Investitionen sind unter dem gleichen Dach vereint.

Eine solche Unternehmenseinheit wird in der Literatur als Einheitsunternehmung

[2] Einer der wenigen neueren Beiträge in diesem Bereich ist die Arbeit von Kruschwitz *et al.* (2005). In dieser Arbeit haben die Autoren aus der Blickrichtung der Finanzierungspolitik gezeigt, dass das Insolvenzrisiko den Gesamtunternehmenswert nicht beeinflusst.

bezeichnet.[3]

Option 2 (Risikoseparierung)

Die Investitionen werden getrennt, jeweils in einer rechtlich selbstständigen Unternehmenseinheit durchgeführt. Die Risiken der beiden Investitionen werden voneinander separiert.

Option 2 lässt sich wie folgt realisieren: Man kann die Investitionen in einem Konzern organisieren. Das betrachtete Unternehmen kann selbst als Konzernmutter auftreten und zwei juristisch eigenständige Tochterunternehmen gründen, die jeweils eine der Investitionen durchführen. Die Tochterunternehmen tragen die Risiken der jeweiligen Investition. Damit werden die Risiken aus der Investition I^1 und die aus der Investition I^2 voneinander getrennt. Diese Organisationsvariante entspricht einer Konstellation mit Risikoseparierung.

An dieser Stelle soll noch einmal betont werden, dass in Option 2 jede Tochtergesellschaft nur eine Investition durchführt. Der Fall, dass in einer Tochtergesellschaft mehrere riskante Investitionen verwirklicht werden, entspricht der Konstellation ohne Risikoseparierung, also Option 1. Abbildung 1 stellt die beiden Optionen grafisch dar.

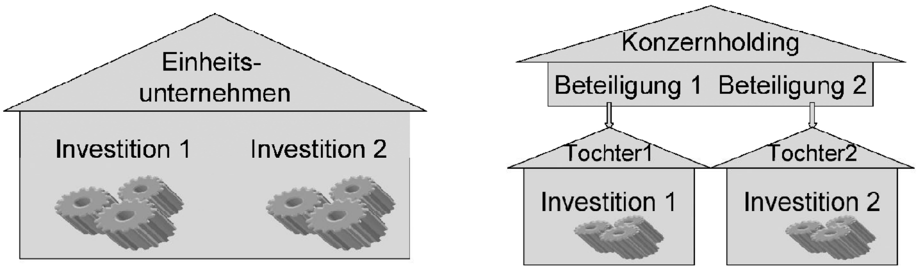


Abbildung 1: Optionen der Investitionsorganisation

Um die Wirkung der Risikoseparierung herauszuarbeiten, vergleiche ich den Unter-

[3]Vgl. Krüger (1993). S. 269. Eine genaue Definition für Einheitsunternehmung findet sich in Kapitel 2.1.1.

nehmenswert der Option 1 mit dem der Option 2. Es sollen sowohl der Gesamtunternehmenswert als auch der Marktwert des Eigenkapitals (Shareholder–Value) verglichen werden. Dabei stellt sich heraus, dass die Shareholder–Value beider Alternativen unterschiedliche Werte aufweisen, während die Gesamtunternehmenswerte in beiden Alternativen identisch sind. Zur Quantifizierung der Differenz zwischen den Shareholder–Values beider Alternativen müssen diese zunächst ermittelt werden. In der Literatur wurden verschiedene Modelle zur Bestimmung eines Shareholder–Values entwickelt. Eine Auseinandersetzung mit den gängigen Bewertungsmodellen ist Voraussetzung für die angestrebte Untersuchung. Deswegen werden die ökonomischen Grundlagen dieser Modelle kurz eingeführt und kritisch hinterfragt. Im Rahmen dieser Arbeit kann jedoch keine vollständige und detaillierte Beschreibung der einzelnen Shareholder–Value Modelle erfolgen.

Darauf aufbauend entwickelt die vorliegende Arbeit einen Ansatz zur Ermittlung des Shareholder–Values in der hier relevanten Entscheidungssituation. Da der Schwerpunkt der Arbeit in der Analyse der Risikoseparierung liegt, werden die steuerlichen und gesellschaftlichen Aspekte nicht Kerngegenstand der Arbeit sein. Des Weiteren soll ein risikoneutraler Wert für den Shareholder–Value mit Hilfe des entwickelten Ansatzes bestimmt werden. Das bedeutet, dass der dadurch ermittelte Wert unabhängig von der Risikoeinstellung der Individuen ist.

Ein weiterer Betrachtungspunkt der vorliegenden Arbeit ist die Anwendung des zu entwickelnden Modells. Dies erfolgt durch die Ermittlung des Shareholder–Values eines Modellunternehmens in einem Zahlenbeispiel. Bei der Ermittlung des Shareholder–Values ergibt sich ein beachtlicher Rechenaufwand. Hier wurde die Software Mapel in Version 9 verwendet. Sämtliche Algorithmen sind auf einem Notebook mit einem Intel Celeron–Prozessor, 598 MHz und 256 MB RAM implementiert worden. Diese technische Beschränkung begrenzt die nachfolgenden Simulationen. Die grundlegenden Aussagen werden jedoch dadurch nicht beeinträchtigt.

1.3 Methodisches Vorgehen und Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel. Die Motivation bildet die in Kapitel 1 geschilderte Unternehmensgeschichte von VARTA AG. Diese kann als Indiz der hohen Relevanz der Risikoseparierung in der Praxis herangezogen werden. Dies verdeutlicht, warum die Entwicklung eines Bewertungsansatzes, der den Wertbeitrag der Risikoseparierung erfasst, als Thema der vorliegenden Arbeit gewählt wurde.

Zur Vorbereitung der Modellentwicklung werden zunächst in Kapitel 2 die relevanten ökonomischen Grundlagen aus der Betriebswirtschaftslehre eingeführt. In Abschnitt 2.1 werden jene grundlegenden Begriffe und Definitionen zusammengestellt, die für die Untersuchung der Auswirkungen der Risikoseparierung im Rahmen der Unternehmensbewertung von Bedeutung sind. Die vorliegende Arbeit unterscheidet hierbei zwischen der Ermittlung des Gesamtunternehmenswertes und der Ermittlung des Shareholder–Values. Beide Vorhaben werden unter dem Begriff Unternehmensbewertung erfasst.

In der Literatur wird eine große Anzahl von Verfahren zur Unternehmensbewertung beschrieben. Die Auswahl der Bewertungsverfahren hängt vom Zweck der Bewertungstätigkeit ab. Die zukunftserfolgsorientierten Discounted Cash Flow (DCF) Verfahren eignen sich besonders gut zur Bestimmung des Marktwertes einer Unternehmung. Sie stellen betriebliche Ein- und Auszahlungen gegenüber und ermitteln den Diskontierungsfaktor aus den vom Kapitalmarkt abgeleiteten Renditen. Da die DCF–Verfahren in der Unternehmensbewertung eine besonders wichtige Rolle spielen, ist Abschnitt 2.3 der Beschreibung vom DCF–Verfahren gewidmet. Ausgangspunkt dieser Beschreibung ist eine Zusammenstellung der ökonomischen Theorien (Unterabschnitt 2.3.1), um einen Überblick über die Charakteristika der DCF–Verfahren zu geben. Im Zentrum steht das Capital Asset Pricing Model zur Bestimmung der Kapitalkosten, das als das Grundkonzept nahezu aller Modelle des DCF–Verfahrens dient. In Unterabschnitt 2.3.2 werden weiter die wichtigen Modellkomponenten im Rahmen des DCF–Verfahrens erläutert und damit der umfassende

Charakter des DCF–Verfahrens veranschaulicht.

Am Ende des Abschnitt 2.3 werden die DCF Ansätze kritisch hinterfragt. Hierbei sollen neben den grundlegenden Vorteilen auch die Probleme dargestellt werden. Als Problem für die hier untersuchte Fragestellung wird sich die Verallgemeinerung des Wertbeitrags einer Risikoseparierung bei der Unternehmensbewertung erweisen.

Auf dieser Grundlage wird in Kapitel 3 die Auswirkung der Risikoseparierung bei der Unternehmensbewertung untersucht. Dabei werden die Rahmenbedingungen der Analyse vorgestellt, die dazu dienen, einen perfekten Kapitalmarkt zu konstruieren. Anschließend wird im Rahmen dieser Modellumgebung bewiesen, dass die Risikoseparierung keine Auswirkung auf den Gesamtunternehmenswert hat, und dass sich der Shareholder–Value von der Risikoseparierung beeinflussen lässt.

Basierend auf den Erkenntnissen aus Kapitel 3, dass die Risikoseparierung den Shareholder–Value grundsätzlich positiv beeinflusst, wird in Kapitel 4 der Versuch unternommen, den Vorteil der Risikoseparierung zu quantifizieren. Dazu dient die risikoneutrale Bewertung mit Hilfe eines Martingalmaßes, die als zentrales Bewertungsprinzip für Wertpapiere auf dem Finanzmarkt gilt. Die Entwicklung der Investitionen wird durch stochastische Prozesse definiert. Die Cash Flows stellen den Wert der Investitionen am Ende des Planungszeitraums dar. Die Auszahlung an die Anteilseigner hängt, nicht vom Entwicklungsverlauf der Investitionen, sondern ausschließlich von den Cash Flows aus den Investitionen ab. Somit ist diese Auszahlung eine pfadunabhängige Größe.

Kapitel 4 fährt mit der Herleitung des risikoneutralen Bewertungsprinzips fort, welches durch das Black–Scholes Modell stark auf dem Finanzmarkt verbreitet ist. Nach dem risikoneutralen Bewertungsprinzip kann der Wert einer riskanten Investition unabhängig von der Risikoneigung der Marktteilnehmer bestimmt werden. Außerdem wird das Binomialmodell zum Zweck der Approximation einer geometrischen Brownschen Bewegung vorgestellt. Es liefert eine flexible Lösung für Probleme, bei denen keine analytische Lösung bekannt ist. In Abschnitt 4.1 wird der Bewertungsansatz entwickelt, der die Auswirkung der Risikoseparierung erfasst. Unter den Modellannahmen, zu denen im Wesentlichen die Annahmen eines arbitragefreien Marktes und die Annahme der log–normalverteilten Investitionsrückflüsse gehören, wird zunächst das risikoneutrale Martingalmaß hergeleitet und dann der Lösungsansatz zur Bewertung einer Unternehmung mit diversen Investitionen entwickelt. In der Vorgehensweise orientiert sich dieser Abschnitt eng an der Arbeit von Boyle *et al.* (1989). Dort werden Finanzoptionen auf mehrere Underlying Assets bewertet.

Die Anwendung des entwickelten Ansatzes erfolgt in Abschnitt 4.2 an einem Beispiel einer Modellunternehmung. Das Beispiel zeigt eindeutig, dass man mit dem in Abschnitt 4.1 entwickelten Ansatz den Wertbeitrag der Risikoseparierung ermitteln kann. Um feststellen zu können, wann die Strategie der Risikoseparierung besonders lohnend ist, wird in Abschnitt 4.2.2 eine Sensitivitätsanalyse in direkter Abhängigkeit von Risikostruktur vorgenommen. Bei der Anwendung einer Sensitivitätsanalyse müssen zunächst die Parameter definiert werden. Danach wird die Sensitivitätsanalyse mittels eines Simulationsverfahrens durchgeführt. Schließlich werden die Ergebnisse der Simulationen grafisch dargestellt und die Wirkung einzelner Parameter wird analysiert.

Kapitel 5 fasst die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit zusammen.

Zum Schluss stellt Kapitel 6 die mathematischen Theorien zusammen, die zur Herleitung des Multinomialmodells relevant sind.

2 Ökonomische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die ökonomischen und theoretischen Grundlagen dargestellt, welche die Basis für die spätere Analyse bilden. Abschnitt 2.1 führt zunächst einige Definitionen zum Thema Unternehmen ein, die für die Untersuchung der Auswirkung der Risikoseparierung relevant sind. Im Anschluss daran geht Abschnitt 2.2 auf die Ziele der Unternehmen ein. In der Wirtschaft ist es gebräuchlich, den Unternehmenswert als Indikator für die Zielerreichung heranzuziehen. Da der Unternehmenswert auch für die hier vorliegende Arbeit große Bedeutung hat, werden in Abschnitt 2.3 die Verfahren zur Ermittlung des Unternehmenswertes besprochen. Der Schwerpunkt dabei liegt auf den DCF–Verfahren. Dieses Kapitel gilt als Ausgangspunkt der anschließenden Untersuchung.

2.1 Begriffe und Definitionen

In diesem Abschnitt werden die Begriffe eingeführt und eingegrenzt, die für diese Arbeit von entscheidender Bedeutung sind.

2.1.1 Unternehmen und ihre Organisationen

Die Definition des Unternehmens und seiner Organisation umfasst sowohl die betriebswirtschaftliche als auch die juristische Einstufung, weil "das Recht den Rahmen vorgibt, innerhalb dessen sich wirtschaftliches Handeln vollzieht."[4]

Unternehmen versus Unternehmung

Nach Gutenberg sind Unternehmen ökonomische Gebilde aus marktwirtschaftlichen Systemen, die nach dem Autonomieprinzip, dem erwerbswirtschaftlichen Prinzip und dem Prinzip des Privateigentums handeln.[5]

[4]Vgl. Hoffmann (1993), S. 5.
[5]Vgl. Schierenbeck (2000), S. 24.

Unternehmen befinden sich im Privateigentum und streben im Marktsystem nach einer langfristigen Gewinnmaximierung. Aufgrund allgemeiner Marktbewegungen unterliegen nahezu alle Geschäfte Risiken, die sich durch eine Schwankung der zukünftigen Erträge äußern. Kosiol (1972) ergänzt deswegen "Übernahme der Risiken" zu den Merkmalen der Unternehmen.[6] Im Rahmen dieser Arbeit bedeutet das Risiko sowohl "Gefahr" bzw. "Wagnis" (potenzielle Schadensgefahr und Vermögensminderung) als auch "Chance" (positive Zielabweichung von ursprünglichen Erwartungen).[7] Als Risikofaktoren sind preisbestimmende Faktoren im Markt oder der Umwelt zu nennen: Z. B. Absatzrisiko, Branchenrisiko und Konjunkturrisiko. Grundsätzlich ist die Zielverfolgung der Unternehmen durch Risiken beeinflusst. In der Bewertungsanalyse müssen daher diese Risiken berücksichtigt werden.

In der Literatur findet sich auch der Begriff "Unternehmung", der in der Betriebswirtschaftslehre fast synonym zu "Unternehmen" gebraucht wird.[8] Es gibt jedoch einen ganz feinen Unterschied zwischen diesen beiden Begriffen. Der juristischen Literatur zufolge ist das Unternehmen der Träger aller Rechte und Pflichten einer (Handels-)Gesellschaft,[9] während eine Unternehmung eine innerlich und äußerlich autonome Erwerbseinheit bezeichnet.[10] Da in dieser Arbeit die Wirkung der rechtlichen Unternehmensgestaltung in der Unternehmensbewertung untersucht werden soll, verwende ich ebenfalls diese Unterscheidung zwischen Unternehmen und Unternehmung: Ich verwende Unternehmen und Gesellschaft synonym für die juristische Einheit, und bezeichne mit dem Begriff "Unternehmung" eine ökonomische Einheit. Mithin kann eine Unternehmung sowohl aus einem als auch aus mehreren Unternehmen bestehen.

Unternehmungsorganisation

Die Unternehmungsorganisation ist eine umfangreiche und komplexe Thematik in

[6] Vgl. Schierenbeck (2000), S. 24.
[7] Vgl. Kremers (2002), S. 37 f.
[8] Vgl. Wöhe (2000), S. 6.
[9] Vgl. Creifelds (1997), S. 1317.
[10] Vgl. Grochla (1982), S. 380–382.

der Betriebswirtschaftslehre. Um den Rahmen nicht zu sprengen, beschränkt sich diese Arbeit auf die Betrachtung ausgewählter Aspekte der Organisation von Kapitalgesellschaften. Nach ihrer juristischen Struktur unterscheidet man zwei Unternehmungsformen:[11]

- *Einheitsunternehmung*

  Eine Einheitsunternehmung besteht aus nur einem juristisch selbstständigen Unternehmen. Damit sind die wirtschaftliche autonome Einheit "Unternehmung" und die juristische Einheit "Unternehmen" identisch.

- *Konzernunternehmung*

  Eine Konzernunternehmung – kurz Konzern – umfasst mindestens zwei, oft auch drei oder mehr Unternehmen.[12] Ein Konzern ist ein Verbund mehrerer rechtlich selbstständiger Kapitalgesellschaften unter der einheitlichen Leitung einer herrschenden Gesellschaft.[13] Die einzelnen Gesellschaften sind Konzernunternehmen und bilden eine rechtlich separierte Wirtschaftseinheit.[14] Damit verlieren sie ihre wirtschaftliche Unabhängigkeit.[15] Der Konzern hingegen verkörpert die wirtschaftliche Einheit als Unternehmung, ist aber selbst keine Rechtsperson. Dementsprechend bestehen in der Regel rechtliche Beziehungen

[11]Vgl. Schubert und Küting (1981), S. 239.

[12]Vgl. Theisen (2000), S. 22, Abbildung 6.

[13]Vgl. § 18 Abs. 1 AktG.

[14]Vgl. Werder (1995), S. 624.

[15]Die Geschäftspolitik der Konzerngesellschaften und sonstige grundsätzliche Fragen ihrer Geschäftsführung werden von der Konzernleitung bestimmt. Während die rechtliche Selbstständigkeit der Konzerngesellschaften ohne weiteres feststellbar ist, wird der Begriff der einheitlichen Leitung als unabdingbares konstitutives Merkmal gestaltet. Oft übernimmt eine Muttergesellschaft die Konzernleitung. Unter der Konzernobergesellschaft oder Muttergesellschaft bzw. Konzernmutter versteht man die Konzerngesellschaft, die die führende Position im Konzern hat und an der keine andere Konzerngesellschaft direkt oder indirekt mehrheitlich beteiligt ist. Alle anderen Konzerngesellschaften werden als Konzernuntergesellschaften bzw. Tochtergesellschaft oder Konzerntochter bezeichnet.

von Gläubigern etc. nur mit den einzelnen Konzerngesellschaften.

2.1.2 Gesamtunternehmenswert und Shareholder–Value

Nachdem Unternehmungen als das Bewertungsobjekt definiert sind, geht dieser Unterabschnitt der Frage nach, was das Ergebnis der Bewertung darstellt.

Gesamtunternehmenswert

Der Gesamtunternehmenswert ist als der Marktwert der Gesamtunternehmung anzusehen.

Einerseits drückt der Gesamtunternehmenswert die Erwartungen der Kapitalgeber hinsichtlich der zukünftigen Erträge der Unternehmung aus. Man kann den Gesamtunternehmenswert als den Barwert aller Zahlungen verstehen, die während der Existenz an die Unternehmung fließen[16]. Die in die Unternehmung fließenden Zahlungen sind in der Regel durch Investitionen generiert. Nach dem Wertadditivitätsprinzip[17] entspricht der Unternehmenswert dem kumulierten Barwert der erwarteten Investitionsrückflüsse. Daher gilt:

$$\text{Gesamtunternehmenswert} = \sum \text{Barwerte aller Investitionsrückflüsse} \tag{1}$$

Andererseits wird der Gesamtunternehmenswert als die Summe der Marktwerte des in die Unternehmung gegebenen Kapitals definiert. Dieses Kapital lässt sich in Eigenkapital und Fremdkapital aufteilen. Aus verschiedenen Gründen entscheiden sich Unternehmungen oft, Investitionen nicht vollständig mit Eigenkapital zu finanzieren. In diesem Fall wird ein Teil des Finanzierungsbedarfs durch Fremdkapital gedeckt. Die Erträge der Investition werden auch zwischen Fremdkapitalgebern und Unternehmenseigentümern (Eigenkapitalgebern) verteilt. Der Wert der Gesamtunternehmung

[16] Den Ursprung der Bewertung mit Barwertorientierung findet man in Williams (1938), S. 55: “Let us define the investment of a stock as the present worth of all dividends to be paid upon it”.

[17] Das Wertadditivitätsprinzip besagt, dass der Marktpreis eines Finanztitel–Portfolios auf gleicher Höhe liegen muss wie die Summe der Einzelpreise aller in dem Portfolio enthaltenen Titel. Vgl. Kruschwitz (1999), S. 45.

setzt sich zusammen aus dem Marktwert des Eigenkapitals und dem Marktwert des Fremdkapitals. Nach dieser Definition ergibt sich:

$$\text{Gesamtunternehmenswert} = \text{Eigenkapitalwert} + \text{Fremdkapitalwert} \qquad (2)$$

Der Begriff "Unternehmenswert" ist folglich kontextbezogen: Er kann über die Mittelverwendung als Summe der Marktwerte der Investitionen (Definition 1) oder alternativ über die Mittelherkunft als Summe der Marktwerte von Fremd- und Eigenkapital (Definition 2) eingeführt werden. Theoretisch liefern beide Ermittlungsverfahren unter ansonst gleichen Annahmen ein identisches Ergebnis. Die theoretische Grundlage hinter dieser Aussage ist das Arbitragefreiheitsprinzip.[18]

Shareholder–Value

Stellt man die Definitionsgleichung (2) nach dem Eigenkapitalwert um, so ergibt sich:

$$\text{Eigenkapitalwert} = \text{Gesamtunternehmenswert} - \text{Fremdkapitalwert} \qquad (3)$$

In der Literatur ist der Marktwert des Eigenkapitals als Shareholder–Value etabliert.

Shareholder–Value = Eigenkapitalwert[19]

In einer Aktiengesellschaft ist der Shareholder–Value der Marktwert aller Aktien. Überträgt man diese Betrachtung auf Personengesellschaften, entspricht der Shareholder–Value dem Marktwert der gesamten Unternehmensbeteiligungen. Daher kann man auch sagen, dass der Shareholder–Value ein Unternehmenswert aus Sicht der Eigenkapitalgeber ist.[20]

[18] In der Kapitalmarkttheorie ist das Arbitragefreiheitsprinzip die fundamentale Argumentationsgrundlage bei der Bewertung eines Wirtschaftsgutes unter Unsicherheit. Vgl. z. B. Modigliani und Miller (1958). Ausführliche Erläuterung des Arbitragefreiheitsprinzips findet sich in der Annahme 3.

[19] Vgl. z. B. Bieg und Kußmaul (2000a), S. 365.

[20] Vgl. die Definition und Funktionen des Eigenkapitals in Bieg und Kußmaul (2000b), S. 34 ff.

Der Shareholder–Value errechnet sich aus dem Barwert der Rückzahlungen an die Anteilseigner. Diese Zahlungen können Dividenden und/oder Wertsteigerungen der bestehenden Beteiligung sein.

Sowohl der Gesamtunternehmenswert als auch der Shareholder–Value kann die Zielgröße der Unternehmensbewertung sein. Welche Größe die Unternehmensführung als Steuerungsgröße auswählt, hängt von dem Zielsystem der Unternehmung ab.

2.2 Zielsystem der Unternehmen

Die Frage, was das oberste Ziel einer Unternehmung sein sollte, wird kontrovers diskutiert.[21] Als gemeinsamer Kern aller Zieldefinitionen hat sich die nachhaltige Wertsteigerung der Unternehmung herausgebildet, denn kein Unternehmen bzw. kein Management kann überleben, wenn es ihm nicht gelingt, Wert für die Unternehmung zu schaffen.

Wenn eine Unternehmung nach einem möglichst hohen Marktwert des Eigenkapitals strebt, verfolgt sie das Ziel der Schaffung des Shareholder–Values. Damit wird gefordert, dass sich die Unternehmung an der Zielgröße der Eigentümer zu orientieren hat.

Die Wurzel dieser Eigentümer–Orientierung findet man in der Betrachtungsweise, die z. B. Rieger vertrat. Er betrachtete die Unternehmung als "eine Veranstaltung zur Erzielung von Geldeinkommen durch Bestätigung im Wirtschaftsleben, [· · ·] und zwar für den Unternehmer".[22] Unabhängig von Rechtsform und Größe eines Unternehmens muss es eines der wichtigsten Ziele jedes Unternehmens sein, den Wert der Anteilseigner zu steigern. Diese Einsicht begründet sich auf das gewinnmaximierende Verhalten des Kapitalgebers, der sein Augenmerk darauf richtet, möglichst hohe Kapitalrückflüsse zu erzielen. In Einzelunternehmen oder Personengesellschaften stammt das Eigenkapital von einer oder wenigen Personen, die mit ihrem gesamten persönlichen Vermögen für das Unternehmen haften. Die Eigenkapitalgeber sind meistens gleichzeitig Geschäftsführer der Unternehmung. Aufgrund der Interessenidentität zwischen Eigenkapitalgeber und Unternehmungsführung ist die Shareholder–Value Orientierung von Einzelunternehmen und Personengesellschaften evident. Als gleichzeitige Geschäftsführung können Eigenkapitalgeber ihre Ziele unmittelbar umsetzen. In Kapitalgesellschaften unterschiedlicher Größen herrscht oft die Konstel-

[21] Die lebhafte Diskussion zwischen Drukarczyk und Hahn ist ein anschauliches Beispiel. Vgl. Drukarczyk (1993), S. VII; Hahn (1994), S. 1085 f.; Drukarczyk (1995). S. 483 ff.; Hahn (1995), S. 486.

[22] Vgl. Rieger (1964), S. 42 ff.

lation der Trennung von Eigentum und Management. Dennoch müssen Kapitalgesellschaften die nachhaltige Erhöhung des Shareholder–Values als Ziel verfolgen, da die Anteilseigner ihr Kapital sonst aus dem Unternehmen abziehen und anderweitig in gewinnbringendere Alternativen anlegen, die auf dem gleichen oder in anderen Märkten agieren. Aufgrund des verschärften Wettbewerbs ist eine anhaltend gute Finanzkraft eine der Vorraussetzungen für Unternehmen, sich eine dauerhaft sichere Position im Wettbewerb zu sichern, da die Kapitalgeber nur dann bereit sein werden, zusätzliche Mittel zur Verfügung zu stellen, wenn sich ihr bisheriges Engagement als lohnend erwiesen hat. Eine gute Entwicklung im Shareholder–Value steigert somit die Selbstfinanzierungskraft. Durch die Umsetzung des Basel II–Abkommens der Banken verstärkt sich der Wettbewerb um knappes Kapital, was die Orientierung an den Interessen der Eigenkapitalgeber unterstreicht.[23]

Trotzdem bleibt die Ausrichtung an der Eigenkapitalwert–Maximierung umstritten. Der Hauptkritikpunkt wird von der Konkurrenz, dem Stakeholder–Ansatz, vorgebracht.[24] Die Stakeholder–Ansatz–Vertreter definieren eine Unternehmung als "offenes, komplexes, dynamisches, zweck- und zielorientiertes, marktgerichtetes und marktabhängiges, teilweise autonomes, strukturiertes, kommunikatives, soziales System".[25] In diesem Zusammenhang haben verschiedene unternehmensinterne und unternehmensexterne Anspruchsgruppen[26] legitimes Interesse an der Unternehmung. Die Unternehmung müsse die Bedürfnisse der anderen Anspruchsgruppen genauso bedienen wie die der Eigentümer. Diese humanitärgesellschaftliche Orientierung der Unternehmung solle eine "ideale Norm" für eine soziale, ethisch situationsgerechte Anwendung des Gewinnprinzips sein, das in der Marktwirtschaft die unternehmeri-

[23]Vgl. Gleißner und Füser (2003), S. 25–46.

[24]Es gibt eine Vielzahl von Arbeiten, die sich mit dem Thema "Stakeholder–Ansatz" beschäftigen. Vgl. bspw. Freeman (1984), Hinterhuber (1989) und Mintzberg (1983).

[25]Vgl. Ulrich (1970), S. 150.

[26]Zu den unternehmensinternen Anspruchsgruppen gehören Mitarbeiter, Management usw. Unternehmensexterne Anspruchsgruppen umfassen Kunden, Lieferanten, Fremdkapitalgeber, Staat, Wettbewerber, verschiedene Interessen vertretende Organisationen usw.

sche Handlung zu einem friedensstiftenden Gebrauch anleiten soll.[27]

Das Ziel, Shareholder–Value zu steigern, schließt nicht aus, gleichzeitig die Interessen des Stakeholders zu berücksichtigen. Die beiden Zielorientierungen sind nicht divergent. So dient ein ausgewogenes soziales Umfeld auch der Wertsteigerung des Unternehmens. Die Manager können den Shareholder–Value nicht nachhaltig steigern, ohne die Interessen der übrigen Anspruchsgruppen zu berücksichtigen. Die Ansprüche des Stakeholders wirken sich wie "rechtliche Rahmen– und Nebenbedingungen für die Unternehmungsführung" aus.[28] Ein Unternehmen kann nur dann reibungslos fortgeführt werden und langfristig Wert für Eigentümer schaffen. wenn die Interessen aller Anspruchsgruppen ausbalanciert sind. Auf der anderen Seite besteht ohne dauerhafte Beschaffung der Cash Flows keine Möglichkeit, die Ansprüche der Stakeholder zu befriedigen. Der Kern des Shareholder–Value–Ansatzes ist, langfristig Cash durch effiziente und konkurrenzfähige Geschäfte zu erwirtschaften. Davon profitieren alle Stakeholder: Mitarbeiter erhalten kompetitive Arbeitsentlohnung, Kunden bekommen qualitativ hochwertige Waren- und Dienstleistungen, Zahlungen an Lieferanten und an Fremdkapitalgeber werden geleistet, der Staat erhält Steuerzahlungen usw. Erst danach wird ein verbleibender Rest entweder reinvestiert oder an die Anteilseigner ausgeschüttet. Somit haben die Eigentümer im Gegensatz zu allen anderen Gruppen keinen festen Anspruch auf ein Entgelt für die von ihnen erbrachte Leistung, nämlich die Kapitalüberlassung. Ihr Anspruch beschränkt sich auf diejenigen Erträge der Unternehmung, die übrigbleiben, wenn alle anderen Anspruchsgruppen ausgezahlt worden sind. D. h., die übrigen Gruppen werden zuerst, die Eigentümer zuletzt berücksichtigt. Vor diesem Hintergrund impliziert die Wertbeschaffung für Shareholder, dass die Ansprüche der Stakeholder bereits befriedigt sind. Deshalb sind Stakeholder bevorzugt vor den Shareholdern an den Vorteilen der Wertbeschaffung beteiligt.

Ganz unabhängig von der Diskussion über das Für und Wider einer Mittelpunktstel-

[27]Vgl. Löhr und Steinmann (1988), S. 301 f., bzw. Löhr und Steinmann (1992), S. 95.

[28]Vgl. Jensen (1991), S. 21.

lung der Interessen der Eigenkapitalgeber ist eine auf Wertschaffung konzentrierte Unternehmungspolitik aus strategischer Sicht wichtig. Das Management muss darauf ausgerichtet sein, den Unternehmenswert langfristig zu steigern.

Bei der Bewertung betont man die Zukunftsorientierung. Eine kurzfristige Wertbetrachtung würde dazu führen, dass die wesentlichen Erfolgspotenziale nicht ausreichend berücksichtigt würden, so dass Unternehmen möglicherweise unterbewertet werden.[29] Ein Charakteristikum des Shareholder–Value–Ansatzes ist die Analyse der gesamten Lebensdauer der Unternehmung. Eine Prognose der zukünftigen Zahlungen und Erträge unter Berücksichtigung der Risiken ist Voraussetzung für eine aussagekräftige Unternehmensbewertung und für die Ableitung der sinnvollen strategischen und operativen Handlungsmaßnahmen. Das Prinzip der Marktwertmaximierung bei den Shareholder–Value–Ansätzen verspricht, die Interessen der verschiedenen Anspruchsgruppen zu integrieren und stellt die Zielfunktion der Unternehmung unabhängig von subjektiven Präferenzen dar.

Aus der praktischen Durchsetzung des Ziels der Marktwertmaximierung entstand ein wachsender Bedarf an effektiven Konzepten. Diese Konzepte beantworten die Fragen, wie der Wert der Unternehmen richtig gemessen wird, und ob die geplanten bzw. die bestehenden Strategien dem Ziel der Marktwertmaximierung dienen, indem sie Werterhöhung erwirken. In diesem Zusammenhang gewann die wertorientierte Unternehmenssteuerung in der Betriebswirtschaftslehre- bzw. Managementliteratur in den letzten Jahren an Bedeutung. Verschiedene Verfahren wurden entwickelt, um ein genaues Bild der Wertsteigerungen zu ermitteln. Diese Verfahren kann man unter dem Dachbegriff "Unternehmensbewertung" zusammenfassen.

Der folgende Abschnitt vermittelt einen Überblick über geeignete Verfahren der Unternehmensbewertung.

[29]Vgl. Nölting (1998), S. 172 f.

2.3 Unternehmensbewertung

Die Ansätze der Unternehmensbewertung befassen sich mit der Frage, wie man den ökonomischen Wert einer Unternehmung bestimmen kann. Unternehmensbewertungen sind in vielen unterschiedlichen Situationen notwendig, nicht nur dann, wenn eine Unternehmung oder ein Unternehmungsteil den Eigentümer wechseln soll, sondern auch wenn strategische unternehmerische Entscheidungen getroffen und/oder der Erfolg des Managements gemessen werden soll. Daher kann der ermittelte Wert für verschiedene Parteien von Bedeutung sein. Es ist deswegen besonders wichtig, dass das Bewertungsergebnis den wahren Wert der Unternehmung darstellt.

Seit etwas mehr als zehn Jahren verfeinert die Betriebswirtschaft die Methoden und Verfahren zur Ermittlung eines realitätsnahen Unternehmenswertes. Drukarczyk (2003) bietet in seinem klassischen Lehrbuch zur Unternehmensbewertung eine verständliche Darstellung der Grundideen. Ein guter Überblick über die Unternehmensbewertungsmethoden findet sich auch bei Schultze (2003). Zur Diskussion verschiedener Bewertungsverfahren ist das Buch von Ballwieser (2004) hilfreich. Bei Richter (2002) wird spezifisch die kapitalmarktorientierte Unternehmensbewertung behandelt.

Die Auswahl der Verfahren richtet sich nach dem Zweck, dem die Unternehmensbewertung in der konkreten Situation dienen soll. Die Aufgabenstellungen der Unternehmensbewertung beeinflussen die Bewertungsprämissen, die Methodik und damit das Resultat.[30] Bei einem Bewertungsproblem, an dem eine große Anzahl von Individuen beteiligt ist, wie bei der Bewertung einer Aktiengesellschaft mit vielen Anteilseignern, kommt es nicht mehr auf die subjektiven Interessen und Einschätzungen Einzelner an. Um die Interessen von allen Beteiligten zu berücksichtigen, zieht man die Bewertungsverfahren heran, die den Marktpreis der zu bewertenden Unternehmung bestimmen.

Es hat sich herausgestellt, dass sich die DCF–Verfahren am besten zur Ermittlung

[30] Vgl. Richter (2002), S. 20.

des Marktwertes einer Unternehmung eignen. Die Begründung liegt in ihrer konzeptionellen Grundlage: DCF–Verfahren beruhen auf dem Kapitalwertkalkül und berücksichtigen die Unsicherheit der zukünftigen Zahlungen. Die Bewertungsgrundlage ist der unternehmerische Cash Flow, der sich durch Aus- und Einzahlungen zwischen Unternehmen und Dritten ergibt. In der nachfolgenden Untersuchung wird das Bewertungsprinzip der DCF–Verfahren angewendet.

2.3.1 Theoretische und ökonomische Grundlagen der DCF–Verfahren

DCF–Verfahren stammen aus der anglo–amerikanischen Bewertungspraxis. In Europa setzten sich diese Bewertungsverfahren mit der Zunahme internationaler Unternehmensverflechtungen durch. Seit dem Jahr 2000 werden DCF–Verfahren vom Institut der Wirtschaftsprüfer (IDW) als Unternehmensbewertungsverfahren für Wirtschaftsprüfer anerkannt.[31]

Begleitet durch die rasche Verbreitung der DCF–Verfahren in der Wirtschaft hat die wissenschaftliche Arbeit über diese Verfahren in Deutschland in der letzten Zeit enorme Fortschritte gemacht. Zu den deutschsprachigen Autoren, die sich intensiv mit den DCF–Verfahren auseinandersetzen, gehören Gerling (1985), Volpert (1989), Hachmeister (2000), Drukarczyk (2003), Richter (1997) sowie Kruschwitz und Löffler (2001).[32] Ein anspruchsvoller Überblick über die Grundlagen der DCF–Verfahren findet sich in Kruschwitz und Löffler (2005).

Mit DCF–Verfahren wird der ökonomische Wert einer Unternehmung bestimmt, indem die prognostizierten zukünftigen unternehmerischen Cash Flows mittels eines Kapitalkostensatzes diskontiert werden. Dies wird in der Abbildung 2 veranschaulicht.[33]

[31]Vgl. IDW Standard: Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen (Stand: 18. 10. 2005), S. 32.

[32]Vgl. Ballwieser (2004), S. 177.

[33]Vgl. Abbildung III. 2 in Schultze (2003), S. 73.

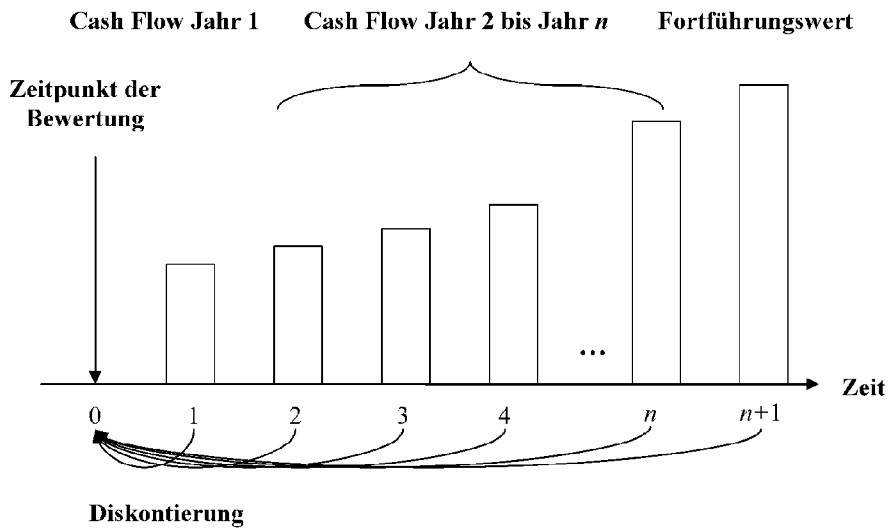


Abbildung 2: DCF–Verfahren: Ein zukunftsorientiertes Verfahren

Nachstehend sind wichtige Grundsätze der Finanzierungstheorie vorgestellt, auf denen DCF–Verfahren aufbauen.[34]

Rationale Entscheidung und Dynamische Investitionsrechnung

Wie bereits erläutert, dienen DCF–Verfahren dem Zweck, den Marktwert einer Unternehmung zu ermitteln. Dieser Wert ist die Summe der Barwerte aller zukünftigen Zahlungen. Die Bildung des Marktwertes beruht auf der Methode der dynamischen Investitionsrechnung, die die zeitliche Reihenfolge der Cash Flows berücksichtigt. Die dynamische Investitionsrechnung setzt voraus, dass die Investoren rational handeln.

Rationale Entscheidung

Die rationale Entscheidung ist ein grundlegendes Prinzip der Betriebswirtschaftslehre. Mit Hilfe dieses Prinzips werden verschiedene Ansätze entwickelt, die versuchen, komplexe wirtschaftliche Handlungen mit möglichst einfachen Modellannahmen zu

[34]Zur vollständigen Darstellung der Finanzierungstheorien empfiehlt sich die Lektüre von Kruschwitz (2002).

erklären. Generell schreiben diese Ansätze den handelnden Akteuren rationales Verhalten zu, wenn sie aufgrund ihrer Präferenzen ein nutzenmaximierendes Verhalten zeigen. So charakterisierte Gäfgen (1963) rationale Entscheidung dadurch, dass der Entscheidungsträger "versucht, sich die Konsequenzen der möglichen Handlungsalternativen zu vergegenwärtigen, um dann eine Handlung mit günstigen oder gar mit den allergünstigsten Folgen zu wählen".[35]

In der Wirtschaftspraxis verbindet das Rationalprinzip die Unternehmensziele mit dem Mitteleinsatz zu ihrer Erreichung. Um rationale Entscheidungen zu treffen, muss man also im ersten Schritt das Ziel der Handlungen festlegen. Dann wird unter allen Handlungsalternativen diejenige ausgewählt, mit der man bei gegebenem Mitteleinsatz den höchsten Zielerreichungsgrad hat. Wenn eine Unternehmung die Maximierung ihres Marktwertes in die erste Präferenz setzt, wird sie die Handlungsalternative auswählen, die zum höchsten Barwert des Unternehmensvermögens führt.

Investitionen sind unternehmerische Handlungen, die der Wertsteigerung dienen. Im Sinne der Betriebswirtschaftslehre ist eine Investition eine zeitliche Umschichtung von freiem Kapital in materielle oder immaterielle Wirtschaftsgüter, aus denen Rückflüsse erwartet werden.[36] Ein investierendes Unternehmen tätigt in der Gegenwart eine feste Auszahlung, durch die es eine Reihe von Erträgen in der Zukunft erzielen möchte. Rational handelnde Unternehmen untersuchen die Wirtschaftlichkeit der betrachteten Investitionsprojekte, bevor sie diese durchführen. Dabei stellen sich die Fragen, welche Erträge man erwarten kann, welche Finanzierungsmöglichkeiten es für die Investitionen gibt und in welcher Form man die Investitionen organisieren bzw. durchführen soll. Die Antworten auf diese Fragen sind mögliche Handlungsalternativen. Zur Quantifizierung der Handlungsalternativen, also zur Bezifferung, welchen Wert man durch eine Handlungsalternative schafft, bietet sich die Methode der dynamischen Investitionsrechnung an.

[35]Vgl. Gäfgen (1963), S. 23.

[36]Vgl. Schmidt und Terberger (1996), S. 11.

Dynamische Investitionsrechnung

Zu unterscheiden sind bei der dynamischen Investitionsrechnung hauptsächlich zwei Ansätze:

- Kapitalwert–Methode

  Die Kapitalwert–Methode ist ein wertorientiertes Verfahren für Investitionsentscheidungen. Da die Zahlungen einer Investition in der Regel in unterschiedlichen Zeitpunkten eintreten, müssen diese Zahlungen in ihrer konkreten zeitlichen Abfolge erfasst und wertmäßig berücksichtigt werden. Alle zukünftigen Zahlungen werden auf den Bewertungszeitpunkt abgezinst. Daraus wird der Barwert der zukünftigen Zahlungen errechnet. Der Kapitalwert stellt bei einer sicheren Investition die Differenz zwischen diesem Barwert und der Investitionsausgabe dar.

$$
\begin{aligned}
NPV &= -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r_f)^t} \\
\text{mit} \quad NPV &: \text{Kapitalwert} \\
I_0 &: \text{Investitionsausgabe in Zeitpunkt } 0 \\
Z_t &: \text{Zahlung im Zeitpunkt } t \\
r_f &: \text{Sicherer Zinssatz.}
\end{aligned}
$$

  Die Entscheidungsregel lautet: Wenn $NPV \geq 0$ gilt, entscheidet man sich für die Investition. Im Fall, dass $NPV < 0$ gilt, wird die Investition unterlassen. Der Kapitalwert der Investition bringt zum Ausdruck, um welchen Betrag sich der gegenwärtige Wohlstand des Investors verändert, wenn er die untersuchte Investition durchführt.

- Methode des internen Zinsfußes

  Die Methode des internen Zinsfußes dient ebenfalls der Berechnung der Wirtschaftlichkeit einer Investition. Die Vorgehensweise ist jedoch anders als bei der

Kapitalwertmethode. Mit der Methode des internen Zinsfußes wird die Verzinsung des in einer Investition jeweils gebundenen Kapitals ermittelt. Dabei wird ein Zinsfuß bestimmt, bei dem der Kapitalwert gerade Null sein wird.

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{Z_t}{(1+\varsigma)^t} = 0 \qquad (4)$$

$$\text{mit} \quad \varsigma \quad : \quad \text{Interner Zinsfuß}$$

Die Anwendung der Methode des internen Zinsfußes ist beschränkt. Sie kann nur Normalinvestitionen beurteilen, die mit Anfangsauszahlung/en beginnen und danach positive Einzahlungsüberschüsse aufweisen. Das bedeutet, in den Zahlungsreihen darf das Vorzeichen nur einmal wechseln. Andernfalls ergibt sich kein interpretierbares Ergebnis. Liegt eine Normalinvestition vor, kann man die Gleichung (4) mit Hilfe eines Interpolationsverfahrens lösen.[37] Liegt dieser Zinsfuß über dem Kapitalkostensatz, soll die Investition verwirklicht werden.

Zum Vergleich verschiedener Handlungsalternativen und zur Auswahl einer Alternative, mit der der Unternehmenswert maximiert sein soll, ist die Methode des Internen Zinsfußes nicht geeignet, denn es ist möglich, dass eine Investition mit einem höheren internen Zinsfuß einen geringeren Kapitalwert hat als eine andere Investition.[38] Man verwendet daher meistens die Kapitalwertmethode. Dabei werden alle Handlungsalternativen mit positivem Kapitalwert nach der Höhe des Kapitalwertes geordnet. Man entscheidet sich für die Alternative, die den höchsten Kapitalwert aufweist. Werden in einer Unternehmung derartige Projekte durchgeführt, so steigern sie den Unternehmenswert.

Da es sich bei unternehmerischen Investitionen meistens um unsichere zukünftige Erträge handelt, ist es erforderlich, bei der Entscheidungsfindung den Aspekt der

[37] Das Standardverfahren zur numerischen Lösung der Gleichung (4) ist das Newtonsche Näherungsverfahren (auch Newton–Raphsonsche Methode). Die Anwendung des Newtonschen Verfahrens in der Berechnung des Internen Zinsfußes wird in Kruschwitz (1995), S. 96 f beschrieben.

[38] Vgl. Kapitel 2.3.5 von Kruschwitz (1995), S. 91 ff.

Unsicherheit der Zukunft zu berücksichtigen. Der Vergleich zwischen Alternativen soll auf dem Äquivalenzprinzip beruhen. D. h., die Risikostruktur der Alternativen muss bei der Bewertung erfasst werden. Im Ein–Perioden–Fall stellt das Capital Asset Pricing Model (CAPM) aus der neoklassischen Finanzierungstheorie das gängige Verfahren zur Risikoerfassung dar. In DCF–Verfahren trägt das CAPM dazu bei, risikoangepasste Kapitalkosten abzubilden.

Capital Asset Pricing Model

Das Capital Asset Pricing Model (CAPM) ist das klassische Gleichgewichtsmodell für die Bewertung von risikobehafteten Investitions- und Finanzierungsprojekten. Die konzeptionellen Grundlagen wurden in den grundlegenden Arbeiten von Sharpe (1963), Sharpe (1964), Lintner (1965a), Lintner (1965b) und Mossin (1966) entwickelt. Die Autoren versuchten mit diversen Ansätzen eine Frage zu beantworten: Wie stehen die Preise aller Ansprüche auf unsichere Zahlungen im Gleichgewicht zueinander.

Eine dem CAPM zugrunde liegende Theorie ist die Portfoliotheorie von Markowitz (1952). Die Portfoliotheorie besagt, dass Investoren durch Diversifikation, also eine Mischung der Wertpapiere mit unterschiedlicher Wertentwicklung in einem Portfolio, ihr Investitionsrisiko reduzieren können. Der Teil des Risikos, der durch Diversifikation ausgeräumt werden kann, ist als unsystematisches Risiko definiert. Der andere Teil, welchen der Investor übernehmen muss, wird als systematisches Risiko (oder Marktrisiko) bezeichnet.

Das CAPM verwendet die Erkenntnisse der Portfoliotheorie und beschreibt für einen Planungshorizont von einer Periode den Preisbildungsprozess der Wertpapiere mit unsicheren Rückflüssen auf einem Kapitalmarkt. Dieser Kapitalmarkt ist perfekt und durch folgende Annahmen gekennzeichnet:

Annahme 1 (Vollkommener und unbeschränkter Kapitalmarkt)
Jeder Marktteilnehmer kann einen beliebigen Geldbetrag zum einheitlichen risikolosen Zins anlegen oder entleihen. Alle gehandelten Wertpapiere sind beliebig teilbar.

Der einjährige risikolose Zinssatz wird in dieser Arbeit mit r_f bezeichnet. Die Folge der Annahme 1 ist, dass die Marktteilnehmer zu einem einheitlichen risikolosen Zins Zahlungsströme zu Investitions- und Finanzierungszwecken in die von ihnen gewünschte zeitliche Struktur transformieren können. Außerdem kann man, falls erforderlich, jeden beliebigen Bruchteil eines Wertpapiers erwerben. Annahme 1 ermöglicht die Anwendung der dynamischen Investitionsrechnung, die wiederum das theoretische Fundament des DCF–Verfahrens bildet.

Annahme 2 (Perfekter Konkurrenzmarkt für Investitionsobjekte)

Es gibt eine unendliche Anzahl von Marktteilnehmern. Auf dem Kapitalmarkt herrscht perfekte Konkurrenz. Alle Marktteilnehmer sind Preisnehmer. Mit dem Kauf bzw. Verkauf von Investitionsobjekten beeinflusst kein Akteur den Marktpreis.

Für die Verkäufer bedeutet die Annahme 2, dass sie selbst keinen überhöhten Preis fordern können, weil auf dem Kapitalmarkt hinreichend viele Investitionsalternativen existieren und die Käufer auf diese Anlagealternativen ausweichen können. Gleichzeitig hat kein Käufer ausreichende Marktmacht, um die Preise in seinem Sinne zu beeinflussen. Mit dieser Annahme schlagen sich weder Marktmacht noch die Interessen eines einzelnen Verkäufers oder Käufers im Preis der Investitionen nieder. Somit ist es möglich, den Marktpreis für Investitionen zu ermitteln.

Annahme 3 (Arbitragefreier Kapitalmarkt)

Im Kapitalmarkt bestehen keine Arbitragemöglichkeiten. Alle Marktteilnehmer bewerten identische Zahlungsströme mit dem gleichem Wert.

Eine Arbitragemöglichkeit ist eine Handelsstrategie, die keinen eigenen Mitteleinsatz benötigt und mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn ergibt, ohne ein Verlustrisiko zu beinhalten. Eine typische Arbitragegelegenheit ist das Ausnutzen von Preisdifferenzen für Vermögensgegenstände durch deren Kauf und/oder Verkauf. Man realisiert einen Arbitragegewinn, wenn man mit einer geeigneten Strategie Vermögensgegenstände z. B. zu niedrigen Preisen kauft, und diese zeitgleich zu höheren Preisen verkaufen kann. Arbitragefreiheit impliziert, dass auf dem Kapitalmarkt das Gesetz des einheitlichen Preises gilt. Zwar spiegelt der Wert eines Wirtschaftsgutes nicht nur dessen Eigenschaften wider, sondern bildet auch den Nutzen dieses Gutes für eine bestimmte Person oder Institution ab, so dass sich möglicherweise unterschiedliche subjektive Werte für ein und dasselbe Wirtschaftsgut ergeben. Jedoch sorgt ein perfekt funktionierender Kapitalmarkt dafür, dass es für gleiche Vermögensgegenstände nur einen Marktpreis gibt. Diese Annahme ist wenig umstritten, da die Marktteilnehmer durch elektronischen Handel und die schnelle Verbreitung von neuen Informationen in der Lage sind, ihre Preisvorstellung eines Vermögensgegenstandes so schnell wie möglich dem Marktpreis anzupassen. Aus der Arbitragefreiheit folgen zwei Prinzipien:[39]

Prinzip der Wertadditivität: Der Wert einer Kombination von Finanzprodukten entspricht der Summe der Werte der einzelnen Finanzprodukte der Kombination.

Prinzip der Dominanz: Wenn ein Wertpapier mit Sicherheit keine negative Zahlung in allen möglichen Zuständen verursacht und mindestens eine dieser Zahlungen mit einer Wahrscheinlichkeit größer Null echt positiv ist, dann muss auch der Preis dieses Vermögensgegenstandes echt positiv sein.

In dieser Arbeit seien ausschließlich monetäre Ereignisse für die Bewertung von Investitionsprojekten relevant. Die einzige wertbildende Größe eines Investitionsprojekts sind die Zahlungsströme, die im Laufe des Projekts entstehen. Alle anderen subjektiven Faktoren, wie z. B. Prestige, Macht, Besitzerstolz etc., bleiben im Marktpreis unberücksichtigt. In Verbindung mit Annahme 3 bepreisen alle Marktteilnehmer Investitionen mit identischen Zahlungsströmen mit einem gleichen Wert.

Annahme 4 (Reibungsloser Kapitalmarkt)
Auf dem Kapitalmarkt existieren keine Steuern und Transaktionskosten. Alle vorhandenen Informationen sind für alle Marktteilnehmer kostenlos verfügbar.

[39]Vgl. z. B. Kruschwitz (2002), S. 70 f.

Der Kapitalmarkt ist frei von Friktionen. Steuern werden nicht erhoben. Der Handel mit Wertpapieren erfolgt reibungslos. Auf Transaktionen werden keine Kosten, Gebühren erhoben. Ferner existiert vollkommene Markttransparenz (symmetrische Informationsverteilung). Niemand ist vom freien Handel ausgeschlossen. Kein einziger Marktteilnehmer genießt personelle, sachliche oder sonstige Privilegien gegenüber anderen.

Mit diesen Annahmen wird ein perfekter und effizienter Kapitalmarkt vorausgesetzt. Auch wenn diese Annahmen tendenziell realitätsfern sind, so ermöglichen sie es jedoch, die Kernproblematik der Bepreisung unsicherer Wertpapiere bereits in einem relativ einfachen mathematischen Umfeld zu erklären. Daher werden diese Annahmen üblicherweise in Bewertungsmodellen zugrunde gelegt.

Hinzu kommen weitere Annahmen über die Marktteilnehmer, die ausschließlich monetäre Konsequenzen der Investitionen beachten:

Annahme 5 (Homogene Erwartung)
Alle Marktteilnehmer haben gleiche Erwartungen hinsichtlich Erwartungswert und Varianz der Wertpapierrendite.

Da der Kapitalmarkt im Geltungsbereich der Annahme 4 effizient ist, benutzen alle Marktteilnehmer identische Informationen in Bezug auf die Entwicklung der Wertpapiere, um ihre Erwartung auf die Rentabilität der Wertpapiere zu bilden. Folglich werden alle Marktteilnehmer gleiche Erwartungen haben.

Annahme 6 (Risikoaverse Investoren)
Bei der Wahl zwischen zwei Anlagealternativen mit unterschiedlicher Risikostruktur aber identischer erwarteter Rendite ziehen Investoren die Alternative mit dem geringeren Risiko vor.

Die Risikoaversion führt dazu, dass Investoren für die Übernahme von Risiken entsprechende zusätzliche Rendite verlangen. Empirische Untersuchungen über das Investitionsverhaltens führten zum Ergebnis, dass in der Regel Risikoaversion auf dem

Kapitalmarkt vorherrscht.

Annahme 7 (Renditestreben der Investoren)
Bei der Wahl zwischen zwei Anlagealternativen mit unterschiedlicher erwarteter Rendite aber identischer Risikostruktur ziehen Investoren die Alternative mit der höheren erwarteten Rendite vor.

Wegen Annahme 7 wählen die Investoren zwischen zwei Wertpapieren mit gleichem Risiko das Papier aus, das eine höhere erwartete Rendite bietet.

Die Annahmen 6 und 7 werden in einer μ–σ–Nutzenfunktion formalisiert. Ausgehend von den Annahmen 5 und der Annahme des perfekten Kapitalmarktes maximieren alle Marktteilnehmer ihre μ–σ–Nutzenfunktion und streben eine optimale Anlagestrategie auf derselben Effizienzlinie an. Das Ergebnis der Nutzenmaximierung im CAPM stellt die Theorie der Tobin–Separation dar: Bei Existenz eines risikolosen Wertpapiers stellen alle Investoren ihr Portfolio aus einer Kombination von risikolosem Wertpapier und riskantem Marktportfolio zusammen. Die Struktur des riskanten Marktportfolios aller Investoren ist im Gleichgewicht unabhängig von der individuellen Nutzenfunktion und für alle Investoren identisch.

Die optimale Form der Kapitalanlage aus der Theorie der Tobin–Separation deutet auf einen linearen Zusammenhang zwischen dem Risiko eines Portfolios und dessen zu erwartender Rendite hin. Aus der Kapitalmarktlinie wird die Wertpapiermarktlinie abgeleitet. Demzufolge entspricht die erwartete Rendite eines riskanten Wertpapiers im CAPM–Gleichgewicht dem risikolosen Zins zuzüglich der Marktüberrendite multipliziert mit einem Risikomaß, das als Betafaktor bezeichnet wird.[40] Die Marktüberrendite ist die Differenz zwischen der erwarteten Rendite des Marktportfolios und dem risikolosen Zins. Der Betafaktor misst das systematische Risiko einer riskanten Kapitalanlage, das man durch Diversifikation nicht vernichten kann und stellt dies zum allgemeinen Marktrisiko in Bezug. Somit wird nur die Übernahme von systematischem Risiko mit einer zusätzlichen Rendite belohnt. Je größer das

[40] Vgl. Sharpe (1964), S. 425–442.

systematische Risiko eines Wertpapiers ist, umso höher werden die Renditeanforderungen der Investoren ausfallen.[41]

Bei der Entscheidung, ob man sein Kapital bei gegebenem Risiko in ein Projekt investieren soll oder nicht, wird die Wertpapiermarktlinie herangezogen. Liegt das Projekt auf oder über der Wertpapiermarktlinie, ist es empfehlenswert, in das Projekt zu investieren. In anderen Fällen soll man sein Kapital zwischen dem risikolosen Wertpapier und dem Marktportfolio aufteilen.

Basierend auf Kapitalmarkttheorien und neoklassischen Finanzierungstheorien wird in den anschließenden Abschnitten versucht, die DCF–Verfahren näher zu charakterisieren.

2.3.2 Grundlegende Elemente der DCF–Verfahren

Schon in der Einführung zu Abschnitt 2.3 wurde erwähnt, dass die Bewertung durch DCF–Verfahren auf dem Kapitalwertkalkül in Verbindung mit Cash Flows als Bewertungsgrundlage basiert. Die entscheidenden Elemente der DCF–Verfahren sind mithin die Ermittlung der Cash Flows und die Bestimmung des Kapitalkostensatzes zur Diskontierung dieser Cash Flows. Nachstehend sollen diese wichtigen Komponenten erläutert werden.

Cash Flows als Bewertungsgrundlage

Cash Flows sind der Strom liquider Mittel, also die Zahlungsflüsse einer Unternehmung,[42] und geben den Überschuss der Einzahlungen über die Auszahlungen der Betriebstätigkeit einer Periode an.[43] Die Ermittlung der Cash Flows kann nach einer direkten oder einer indirekten Methode erfolgen. Gemäß der direkten Methode gilt:

[41] Vgl. Kruschwitz (1999), S. 200.

[42] Der Begriff "Cash Flow" wurde erstmals Anfang der 50er Jahre in den USA als Instrument zur Wertpapieranalyse verwendet. Vgl. Siener (1991), S. 33.

[43] Vgl. Düsterlho (2003), S. 39.

Cash Flow = Einzahlungen − Auszahlungen

Bei der indirekten Methode werden Cash Flows aus dem Jahresüberschuss abgeleitet, indem man den Jahresüberschuss aus der Gewinn– und Verlustrechnung (GuV) um alle nicht auszahlungswirksamen Aufwendungen vermehrt und um die Einnahmen vermindert, denen keine Einzahlungen gegenüberstehen. Das hat den Vorteil, dass bilanzielle Ansatz- und Bewertungswahlrechte die Cash Flows nicht beeinflussen.

Die Ermittlung der zukünftigen Cash Flows basiert grundsätzlich auf der Einschätzung des Managements. Dabei wird normalerweise eine Zwei–Phasen–Methode verwendet:[44]

- Prognosephase

  Die Prognosephase umfasst einen endlichen Zeitraum. Er hat in der Regel die Länge von drei bis fünf Jahren nach dem Bewertungsstichtag. Für diese Phase kann man die finanziellen Überschüsse anhand einer Planungsrechnung verhältnismäßig gut prognostizieren. Wesentliche Grundlagen für die Planungsrechnungen bestehen aus Bilanzen, Gewinn- und Verlustrechnungen sowie Kapitalflussrechnungen, die aufeinander abgestimmt sind.

- Fortführungsphase

  Im Anschluss an die Prognosephase folgt eine zeitlich unbegrenzte Fortführungsphase. Da man zum Bewertungszeitpunkt nur wenig Information über die bis dahin eintretenden Marktbedingungen zur Verfügung hat, kann man nur noch Entwicklungstendenzen der Cash Flows in der Fortführungsphase in Form der Wachstumsrate schätzen.

Die geschätzten zukünftigen Cash Flows müssen auf den Bewertungsstichtag abgezinst werden. Infolgedessen kommt der Bestimmung der Kapitalkosten eine zentrale Bedeutung zu.

[44] Vgl. Kruschwitz und Löffler (1999), S. 6.

Bestimmung des Kapitalkostensatzes

Die Diskontierung mit einem Kapitalkostensatz überführt Cash Flows in Gegenwartswerte. Sowohl in der Unternehmensbewertung als auch in der wertorientierten Unternehmensführung spielt der Kapitalkostensatz eine entscheidende Rolle. Der Kapitalkostensatzes wird als "erwartete Rendite" des Kapitalgebers verstanden[45] und stellt die Benchmarke für neue Investitionen dar. Investitionen, die eine höhere Rendite als den Kapitalkostensatz erzielen, schaffen zusätzlichen Wert für Unternehmen, während Investitionen mit einer geringeren Rendite als dem Kapitalkostensatz zu einer Wertvernichtung führen.[46]

Allgemein werden die Zeitpräferenz und die Risikoübernahme der Kapitalgeber bei der Ermittlung des Kapitalkostensatzes berücksichtigt. Im Kapitalkostensatz sind folgende Komponenten enthalten:

- Die zeitliche Konsumpräferenz

  Wenn ein Kapitalgeber sein Geld einer Unternehmung zur Verfügung stellt, muss er dementsprechend auf gegenwärtigen Konsum verzichten. Daher ist eine Geldeinheit in der Regel dem Kapitalgeber heute mehr wert als eine Geldeinheit morgen. Die Höhe dieser Zeitpräferenz wird durch den risikolosen Zins angegeben, der das monetäre Entgelt für Konsumverzicht im Gleichgewicht darstellt.

- Die Entschädigung für Übernahme der Risiken der Investitionen von den Kapitalgebern

  Die Höhe der Renditeforderung der Eigenkapitalgeber ist aufgrund der riskanten Charakteristika der Investition und der nachrangigen Befriedigung ihrer Ansprüche nicht vertraglich festgelegt. Die Höhe der von Eigenkapitalgebern übernommenen Risiken erklärt die grundlegende Kapitalstruktur. Dement-

[45] Vgl. Kruschwitz (2002), S. 235.
[46] Vgl. Rappaport (1999), S. 44.

sprechend wird eine Risikoprämie mit der Berücksichtigung der Annahme 6 aus dem CAPM zu dem risikolosen Zins addiert.

Außer Acht gelassen wird die unterschiedliche Aufteilung der Finanzierungsrisiken zwischen Eigen- und Fremdkapitalgebern bei den verschiedenen Organisationsformen der Investitionen. Solche Finanzierungsrisiken beinhalten die Gefahr, dass bei der negativen Entwicklung der Investitionen die Rückzahlung an die Kapitalgeber ausbleibt. In einem Unternehmen mit Mischfinanzierung haben sowohl Eigen- als auch Fremdkapitalgeber Ansprüche auf die unternehmerischen Erträge. Üblicherweise werden die Ansprüche der Fremdkapitalgeber (Festbetragsansprüche) vorrangig aus den unternehmerischen Cash Flows befriedigt. Die Eigentümer erhalten die residuale Größe der Unternehmungsgewinne und haben damit die Restbetragsansprüche. Wenn die Cash Flows die Festbetragsansprüche der Fremdkapitalgeber nicht bedienen können, wird das Unternehmen insolvent und die Fremdkapitalgeber erhalten die Erlöse aus der Liquidation des Unternehmens. Die Eigenkapitalgeber gehen dabei leer aus. Aufgrund der vorrangigen Bedienung der Festansprüche entstehen Finanzierungsrisiken für die Unternehmenseigentümer. Falls die Erlöse aus der Liquidation des Unternehmens die Ansprüche der Fremdkapitalgeber nicht vollständig bedienen können, ist die Haftung der Eigentümer nur auf ihr investiertes Eigenkapital beschränkt. Der Umfang dieser auszubleibenden Ansprüche der Fremdkapitalgeber verdeutlicht die Finanzierungsrisiken aus der Sicht der Fremdkapitalgeber.

Die Notwendigkeit, Finanzierungsrisiken bei der Unternehmensbewertung zu erfassen, ist durch den Umstand begründet, dass die Struktur der Zahlungen an die Kapitalgeber von den Finanzierungsrisiken abhängig ist. Die Höhe der Finanzierungsrisiken ist aus der Sicht der Eigenkapitalgeber unter anderem auch von der gewählten Organisationsoption abhängig. So lässt sich die Frage stellen, ob der Shareholder–Value einer Unternehmung, die eine festgelegte Anzahl von Investitionen mit der Organisationsoption 1 (Einheitsunternehmung) durchführt, **immer** auf der gleichen

Höhe liegt, wie der Shareholder–Value einer Unternehmung mit Organisationsoption 2 (Konzern). Diese Problematik wird bis jetzt in der Literatur kaum diskutiert.

Behandlung der Steuern

Anders als im CAPM sind Steuern ein weiterer wichtiger Aspekt bei DCF–Verfahren. Eine Diskussion über Steuerwirkungen auf Investitions- und Finanzierungsentscheidungen bzw. über den steuerlichen Einfluss auf den Unternehmenswert brachten Modigliani und Miller (1958) in Gang. Die zentrale Aussage der Modigliani/Miller Theorie lautet, dass bei Abwesenheit von Steuern der durchschnittliche Kapitalkostensatz eines verschuldeten Unternehmens von der Kapitalstruktur unabhängig ist und c. p. mit dem Eigenkapitalkostensatz eines unverschuldeten Unternehmens übereinstimmt. Daraus folgt, dass die Kapitalstruktur keinen Einfluss auf den Marktwert der Unternehmen hat.[47] Werden Steuern bei der Unternehmensbewertung berücksichtigt, gilt die Modigliani/Miller Theorie nicht mehr. Prinzipiell reduzieren Steuerzahlungen aus der Sicht der Unternehmen den finanziellen Überschuss und mindern somit den Gesamtunternehmenswert.

Steuern dienen in erster Linie zur Finanzierung der Staatsausgaben.[48] Darüber hinaus sind in Steuergesetzen vielfältige wirtschaftspolitische Lenkungsnormen enthalten. Wirtschaftspolitisch erwünschte Investitionsvorhaben werden gegenüber anderen Investitionen begünstigt. Die Förderung erfolgt häufig durch Abschreibungsvergünstigungen oder steuerfreie Rücklagen.[49] Diesbezüglich haben steuerlich geförderte Investition einen höheren Netto–Rückfluss gegenüber anderen Alternativen, wodurch sich die Entscheidung zu Gunsten der geförderten Investition verändert. In unternehmerischen Entscheidungen entfalten Steuern damit umfangreiche Wirkungen. Sie sind im Hinblick auf Investitionsentscheidungen ein bedeutender Einflussfaktor, weil sie bei verschiedenen Investitionen in unterschiedlicher Höhe anfallen können.

[47] Vgl. Modigliani und Miller (1958), S. 261–297.

[48] Eine ausführliche Darstellung über die Funktionen der Steuern findet man im Diskussionsbeitrag von Kruschwitz *et al.* (2002), S. 1 ff.

[49] Vgl. §6b und §7 ff. EStG.

Bei der Unternehmensbewertung im Rahmen der DCF–Verfahren werden üblicherweise die direkten Steuern auf Unternehmen, die sog. Körperschaftsteuer und Gewerbesteuer, berücksichtigt. Dieser Ansatz wird unter der Bezeichnung "Standardmodell" verbreitet. Meistens wird von einem deterministischen, zeitlich konstanten Steuersatz ausgegangen, der sowohl für Einkommen aus Unternehmen (Zahlungsüberschüsse) als auch für Einkommen aus Kapitalanlagen (Zinseinkünfte) gilt.[50] Taggart (1991) bietet einen Überblick über die verschiedenen Ansätze zur Kalkulation des Diskontierungssatzes nach Steuern, den man im Standardmodell verwenden kann.

2.3.3 Würdigung der Bewertungsansätze im Rahmen der DCF–Verfahren

Die DCF–Verfahren sind zukunftsorientiert und berücksichtigen gleichzeitig die Unsicherheit in der Zukunft. Damit wird die Eigenschaft der Risikoübernahme von Unternehmen quantifiziert. Die Berücksichtigung der Risiken erfolgt über das CAPM. Eine Risikoprämie für Investitionen mit unsicheren Zahlungen lässt sich aus einem perfekten Kapitalmarkt im Gleichgewicht herleiten. Diese Risikoprämie entschädigt die Kapitalgeber für ihre Übernahme der systematischen Risiken der Investitionen. Die Finanzierungsrisiken aus der Sicht der Eigenkapitalgeber werden aber bei den meisten DCF–Verfahren nicht beachtet.

Das im anschließenden Kapitel entwickelte Modell versucht die Frage zu beantworten, wie die Organisation der Investitionen den Gesamtunternehmenswert bzw. den Shareholder–Value einer Unternehmung beeinflusst.

[50] Vgl. Schultze (2003), S. 285 ff.

3 Das Modell – Risikoseparierung in der Unternehmensbewertung

Im nachstehenden Modell wird ein spezieller Aspekt der Unternehmensbewertung untersucht, nämlich die Risikoseparierung zur Abgrenzung der Finanzierungsrisiken aus Sicht der Eigenkapitalgeber. Dieses Modell soll zeigen, dass ein Zusammenhang zwischen Risikoseparierung und Shareholder–Value existiert. Die Wirkung der Risikoseparierung auf den Unternehmenswert aus der Eigentümersicht soll herausgearbeitet werden. Eine solche Analyse liefert die Basis für weitere Entscheidungen über die Entwicklung der Unternehmen: Welche Geschäftsbereiche bzw. Geschäftseinheiten können in einer Unternehmenseinheit belassen werden und welche sollen in selbstständige Tochterunternehmen ausgegliedert werden, um mehr Wert für die Eigentümer zu schaffen?

Das theoretische Gerüst der Analyse ist die grundlegende Arbeit von Merton (1973). In Abschnitt 3.1 wird einleitend zunächst das zu entwickelnde Modell in die Systematik der DCF–Verfahren eingeordnet. Anschließend folgt die Modellentwicklung in Abschnitt 3.2. In Abschnitt 3.3 werden die aus den Organisationsoptionen resultierenden wirtschaftlichen Folgerungen geprüft.

3.1 Modellabgrenzung

Der in diesem Modell vorgestellte Bewertungsansatz dient dem Vergleich der Vorteilhaftigkeit der Organisationsalternativen. Die Basisgröße sind die direkten Zahlungsströme zwischen den Anteilseignern und der Unternehmung.

Im Unterschied zu den in Abschnitt 2.3.1 vorgestellten DCF–Verfahren, die auf dem CAPM beruhen, wird in meinem Modell die Unternehmenswertermittlung nach dem Prinzip der risikoneutralen Bewertung durchgeführt. Der risikoneutrale Bewertungsansatz wird in Kapitel 4 ausführlich beschrieben.

Darüber hinaus werden Steuern in diesem Modell nicht betrachtet. Steuern hätten einen entscheidungsrelevanten Einfluss, wenn die Wahl zwischen einer begünstigten und einer nicht begünstigten Investition bzw. die Entscheidung über die Kapitalstruktur zu treffen wäre.[51] In der hier modellierten Untersuchung sind jedoch sowohl die zugrunde liegenden Investitionen als auch die Kapitalstrukur unveränderlich, während der Einfluss von Organisationsalternativen der Investitionen auf der Ebene der investierenden Unternehmung betrachtet wird. Eine eventuelle steuerliche Bevorzugung des gegebenen Investitionsvorhabens würde damit in beiden Organisationsoptionen gleichermaßen wirken, so dass steuerliche Einflüsse symmetrisch in beiden verglichenen Organisationsvarianten auftreten würden. Damit würde die Einbeziehung von Steuereffekten die nachfolgende Untersuchung verkomplizieren, ohne Auswirkungen auf die relative Vorteilhaftigkeit der Handlungsalternativen zu haben. Deshalb werden derartige Steuerwirkungen nicht in die Untersuchung einbezogen.

Entscheidungsrelevant können folglich nur steuerliche Einflüsse sein, die sich aus dem Unterschied zwischen den verglichenen Organisationsoptionen ergeben. Die Steuerbelastung im Einheitsunternehmen und im Konzern richtet sich nach der Rechtsform des investierenden Unternehmens. Im Rahmen dieser Arbeit werden riskante Investitionen in haftungsbeschränkten Kapitalgesellschaften durchgeführt, wodurch die zugrunde liegende Investition im Rahmen der Körperschaftsteuer belastet wird. Führt eine Tochterkapitalgesellschaft die Investition aus, unterliegt sie dort der Gewerbesteuer und der Körperschaftsteuer. Schüttet dann das Tochterunternehmen die erwirtschafteten Gewinne als Dividenden an die Muttergesellschaft aus, so unterliegen diese Gewinnausschüttungen weder beim Tochter- noch beim Mutterunternehmen einer weiteren Besteuerung.[52] Es macht deshalb steuerlich keinen Un-

[51] Vgl. Abschnitt 2.3.2, S. 39.

[52] Im Rahmen der Gewerbesteuer erfolgt eine Kürzung der Gewinnausschüttungen aus dem sog. Gewerbeertrag der Obergesellschaft (§9 Nr. 2a GewStG). Vgl. Gewerbesteuergesetz (GewStG) in der Fassung vom 15. Oktober 2002, Bundesgesetzblatt I S. 4167.). Bei der Körperschaftsteuer greift das sog. Freistellungsverfahren, nach dem die Gewinnausschüttungen von Tochtergesellschaften unabhängig von Beteiligungshöhe oder Sitz des Tochterunternehmens beim Mutterunternehmen

terschied, ob ein Einheitsunternehmen in der Rechtsform einer Kapitalgesellschaft die betrachteten Investitionen selbst ausführt oder ob die Investition in einer oder mehreren Tochterkapitalgesellschaften durchgeführt wird, die ihre Gewinne steuerfrei an die Muttergesellschaft ausschütten. Solange sich die Gesamtsteuerbelastung im Einheitsunternehmen und im Konzern nicht unterscheidet, können auch hier die Berechnungen ohne Steuerberücksichtigung erfolgen.

Ansonsten sind die grundlegenden Bewertungsprinzipien im nachstehenden Modell identisch mit denjenigen der DCF–Ansätzen: Eigentümerperspektive und Orientierung an den zukünftigen Erfolgen. Somit lässt sich dieses Modell als eine spezielle Variante der DCF–Ansätze verstehen.

steuerfrei bleiben (§8b Abs. 1 KStG). Vgl. Körperschaftsteuergesetz (KStG) in der Fassung der Bekanntmachung vom 15. Oktober 2002, Bundesgesetzblatt I, S. 4144.

3.2 Modelleinführung

Dieser Abschnitt beschreibt das Modell, in dessen Rahmen die Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung der Risikoseparierung durchgeführt werden soll. Den Schwerpunkt dieses Abschnittes bilden die Handlungsoptionen der Unternehmung im Hinblick auf die Risikoseparierung. Es werden verschiedene Annahmen über den Markt, die Marktteilnehmer, die Art der Cash Flow Entwicklung und die Rangfolge der Kapitalansprüche getroffen.

3.2.1 Rahmenbedingungen

Die folgenden Ausführungen gehen von einer Modellwelt ohne Steuern mit zwei Zeitpunkten aus. Ein Unternehmen hat die Möglichkeit ein Investitionsprojekt I^2 durchzuführen. Zum Zeitpunkt der Entscheidung läuft bereits das Investitionsprojekt I^1. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit wird der Einfachheit halber unterstellt, dass I^1 vollständig mit Eigenkapital finanziert wird und dass zur Durchführung des neuen Investitionsprojekts nun auch Fremdkapital benötigt wird. Fremdkapitalgeber erhalten nach der Laufzeit eine Rückzahlung in Höhe L.[53]

Die Restlaufzeit von I^1 ist mit der Laufzeit von I^2 identisch und beträgt eine Zeiteinheit. Demzufolge ist dieses Modell ein Zwei–Zeitpunkte–Modell mit $t = \{0, 1\}$. Unsichere Zahlungsüberschüsse aus beiden Investitionen, die mit $\widetilde{CF}^1$ und $\widetilde{CF}^2$ bezeichnet werden, fallen nur in $t = 1$ an. Im Zeitpunkt $t = 0$ nimmt das Unternehmen bei seiner Bank einen Kredit auf. Im Kreditvertrag wird festgehalten, dass die Bank nach der Laufzeit, in $t = 1$, eine Rückzahlung in Höhe L erhält, die Zins und Tilgung umfasst. Eine dynamische Anpassung der Verzinsung während der Laufzeit wird ausgeschlossen. Das Unternehmen wird den Kredit und die vereinbarten Zinsen

[53] Die Bestimmung von L wird in dieser Arbeit nicht weiter diskutiert. Somit ist L ein exogen gegebener Parameter. Man kann davon ausgehen, dass bei der Bestimmung der Kreditverzinsung relevante Faktoren wie Forderungsklasse und die eingebrachten Sicherheiten (z. B. der für I^2 vorgesehene Eigenkapitalanteil) einbezogen sind.

mit den Cash Flows aus den Investitionen begleichen. Vor dem Zeitpunkt $t = 1$ leistet das Unternehmen keine Tilgung und Zinszahlung. Das Unternehmen beendet in $t = 1$ seine Geschäftstätigkeit. Den Restbetrag der Cash Flows aus den Investitionen erhalten die Anteilseigner. Es entsteht kein Liquidationserlös aus Maschinen und Anlagen. Vor dem Zeitpunkt $t = 1$ wird keine Dividende ausgeschüttet.

Die Unternehmung ist daran interessiert, ob die Durchführung von I^2 ökonomisch sinnvoll ist und wie viel Wert durch die Verwirklichung der zusätzlichen Investition I^2 geschaffen werden kann. Um dies zu analysieren, bezieht das Unternehmen einen perfekten Kapitalmarkt ein. Das bedeutet, der Kapitalmarkt ist vollkommen und unbeschränkt (Annahme 1), ein perfekter Konkurrenzmarkt (Annahme 2), arbitragefrei (Annahme 3) und reibungslos (Annahme 4). Zu den Cash Flows wird Folgendes unterstellt:

Annahme 8 (Eigenständigkeit des Wertprozesses der Cash Flows)
Sei $i = \{1, 2\}$ der Laufindex für die Investitionsprojekte. Der Wertentwicklungsprozess von $\widetilde{CF}^i$ ist unabhängig davon, ob die i–te Investition allein in einem Tochterunternehmen (Organisationsoption 2) durchgeführt wird oder beide Investitionen gemeinsam in einer Einheitsunternehmung (Organisationsoption 1) verwirklicht werden.

In diesem Modell wird eine Unternehmung betrachtet, die ein Bündel von Investitionsprojekten durchführt. Es soll primär ein Marktwert des Eigenkapitals des Unternehmens "wie es steht und liegt" abgebildet werden, ein sogenannter "Stand–Alone–Wert".[54] D. h., die einzelnen Wirtschaftsgüter der Investitionen arbeiten unabhängig voneinander und bewirken für den Eigentümer keine betriebswirtschaftlichen Synergien bzw. Dissynergien.

Da das Investitionsprojekt I^2 mit Eigenkapital und Fremdkapital finanziert wird, haben sowohl der Fremd– als auch der Eigenkapitalgeber im Zeitpunkt $t = 1$ Ansprüche an $\widetilde{CF}^2$. In diesem Modell wird allein der Fall betrachtet, dass die Forderung

[54] Vgl. Schultze (2003), S. 7 ff.

der Fremdkapitalgeber vorrangig befriedigt wird und die Anteilseigner nur mit dem investierten Eigenkapital für ihr Unternehmen haften.

Annahme 9 (Keine persönliche Haftung der Anteilseigner)
Das Unternehmen[55] *verfügt über eine selbstständige Rechtspersönlichkeit.*[56] *Im Insolvenzfall haftet das Unternehmen unbeschränkt.*[57] *Der Eigentümer des Unternehmens haftet nur mit seinem Eigenkapitalanteil.*

Im Eigenkapital manifestiert sich für den Anteilseigner sein Eigentumsanteil am Unternehmensvermögen und sein Anspruch auf die mit dem Unternehmensvermögen erwirtschafteten Gewinne. Der Anspruch des Anteilseigners ist ein Residualanspruch nach Abzug aller Festbetragsansprüche. Die Anteilseigner sind nicht verpflichtet, unerfüllte Festbetragsansprüche aus ihrem privaten Vermögen zu begleichen. Aufgrund der beschränkten Haftung ist der mögliche Verlust des Eigenkapitalgebers begrenzt.

3.2.2 Organisationsoptionen und die Zahlung an Eigenkapitalgeber

Während aus einem rechtlich geregelten Schuldverhältnis ein Anspruch auf eine feste Leistung für Fremdkapitalgeber besteht, beschränkt sich der vermögensrechtliche Anspruch der Eigentümer auf den Residualerlös der Unternehmung und des Liquidationsergebnisses.[58] Bei der Aufteilung der unternehmerischen Cash Flows an ihre Kapitalgeber ist die Zahlung an die Eigenkapitalgeber zum Zeitpunkt der Schuldentilgung gleich der Cash Flows weniger den Schulden, falls die Cash Flows die Schulden übersteigen und gleich null, falls die Schulden größer als die Cash Flows sind.

[55]Gemeint sind hier beide betrachteten Organisationsformen: Einheitsunternehmung und Mutter– bzw. Tochterunternehmen im Konzern.

[56]Bei Unternehmen ohne Rechtspersönlichkeit (z. B. bei Personengesellschaften) erfolgt im Fall der Zahlungsunfähigkeit ein Durchgriff in die Vermögenssphäre der (Mit–)Unternehmer.

[57]Im hier untersuchten Spezialfall des Ein–Perioden–Modells stellen die Free Cash Flows in $t = 1$ das gesamte Vermögen der Kapitalgesellschaft dar. Die Gesellschaft haftet in diesem Fall mit ihren Free Cash Flows.

[58]Vgl. Creifelds (1997), S. 63, 343 und 1113.

Die konkrete Höhe der Zahlungen an die Eigenkapitalgeber richtet sich nach der Organisationsform der Investitionen:

Option 1 Die Investitionen werden in einem Einheitsunternehmen durchgeführt. Dies ist die Organisationsform ohne Risikoseparierung. Zur Bedienung des Fremdkapitalanspruchs stehen die Erträge aus beiden Investitionen ein. Der Zahlung an die Anteilseigner liegt die Summe der Cash Flows aus beiden Investitionen zugrunde. Wenn diese Summe einen höheren Wert als L hat, erhalten die Anteilseigner eine Zahlung in Höhe $\widetilde{CF}^1 + \widetilde{CF}^2 - L$; im anderen Fall werden alle Cash Flows zur Begleichung der Kreditschulden an die Fremdkapitalgeber herangezogen. Zusammengefasst entspricht die Rückzahlung an die Anteilseigner dem Ausdruck $\widetilde{Z^E}$, mit

$$\widetilde{Z^E} \quad = \quad (\widetilde{CF}^1 + \widetilde{CF}^2 - L)^+, \tag{5}$$

wobei $(f)^+$ den nicht negativen Wertbereich der Funktion f darstellt.

Option 2 Nach dem § 123 ff. des UmwG hat das Unternehmen die Möglichkeit, eine Betriebsaufspaltung durchzuführen,[59] indem das Unternehmen als Konzernmutter agiert und zwei rechtlich eigenständige Tochterunternehmen gründet. An Stelle einer Betriebsaufspaltung können I^1 und I^2 unmittelbar von einer dafür gegründeten Tochtergesellschaft D^A und D^B durchgeführt werden. Der in der jeweiligen Investition gebundene Vermögensanteil bzw. die Schulden werden als Gesamtheit auf Tochtergesellschaften übertragen. Somit ist Tochterunternehmen D^B allein rechtlich verpflichtet, den Kapitaldienst L an die Fremdkapitalgeber zu zahlen.[60] Mit Risikoseparierung erfolgt die Zahlung an

[59]Vgl. § 123 ff. im dritten Buch "Spaltung" des Umwandlungsgesetzes (UmWG), vom 28. Oktober 1994.

[60]Da die Tochtergesellschaft eine eigenständige juristische Person ist, erfolgt im Insolvenzfall kein Durchgriff in die Vermögenssphäre der Muttergesellschaft. Die Muttergesellschaft haftet grundsätzlich nur mit ihrem in diese Tochtergesellschaft investierten Eigenkapital.

die Eigenkapitalgeber der Konzernmutter in Höhe $\widetilde{Z^K}$, mit

$$\widetilde{Z^K} = \widetilde{CF^1} + (\widetilde{CF^2} - L)^+. \tag{6}$$

Es ist ersichtlich, dass die Zahlung an Eigenkapitalgeber nicht nur von den erwirtschafteten Cash Flows der Investitionen abhängt, sondern auch durch die Organisationsform der Investitionen bestimmt ist. Diesbezüglich ergibt sich ein fundamentaler Unterschied zwischen Gleichung (5) und (6). Während die Zahlung $\widetilde{Z^K}$ im Konzernfall linear additiv von den Zahlungen aus I^1 und I^2 zusammengesetzt ist, ist die Zahlung $\widetilde{Z^E}$ im Fall des Einheitsunternehmens eine Maximumfunktion auf die Summe der Cash Flows aus beiden Investitionsprojekten. Folgendes Beispiel zeigt mit Hilfe eines einfachen Sachverhaltens die Intuition, wie sich die Zahlungen an Eigenkapitalgeber durch unterschiedliche Organisationsoptionen beeinflussen lassen.

Beispiel 1 (Ein einführendes Beispiel)

In der nachfolgenden Rechnung wird die Anzahl der möglichen Zustände im Zeitpunkt $t = 1$ mit vier angesetzt. Die zustandsabhängigen Cash Flows $\widetilde{CF^1}$ und $\widetilde{CF^2}$ sollen eine Gleichverteilung aufweisen, die in Abbildung 3 dargestellt ist.

Zustand	Zustand 1	Zustand 2	Zustand 3	Zustand 4
Wahrscheinlichkeit	0.25	0.25	0.25	0.25
$\widetilde{CF^1}$	90	100	110	120
$\widetilde{CF^2}$	80	70	60	50

Abbildung 3: Verteilung der zustandsabhängigen Cash Flows

Der Fremdkapitaldienst wird in Höhe von 60 unterstellt. Die zustandsabhängigen Zahlungen beider Optionen $\widetilde{Z^E}$ und $\widetilde{Z^K}$ errechnen sich nach

	Zustand 1	Zustand 2	Zustand 3	Zustand 4	$E[\cdot]$
$\widetilde{Z^E}$	110	110	110	110	110
$\widetilde{Z^K}$	110	110	110	120	112.5

Abbildung 4: Verteilung bzw. Erwartungswert von $\widetilde{Z^E}$ und $\widetilde{Z^K}$

Gleichung (5) und (6). Abbildung 4 stellt $\widetilde{Z^E}$ und $\widetilde{Z^K}$ sowie deren Erwartungswert gegenüber.

Im Zustand 4 beträgt der Cash Flow aus I^2 lediglich 50. Damit kann der Fremdkapitaldienst in Höhe 60 nicht beglichen werden. In diesem Fall werden in der Konstellation "Einheitsunternehmung" (Option 1) die Cash Flows aus I^1 herangezogen. In der Konstellation "Konzern" (Option 2) wird D^B insolvent. Die Cash Flows aus I^1 sind jedoch wegen der rechtlichen Eigenständigkeit der D^B durch Risikoseparierung vor dem Zugriff der Fremdkapitalgeber geschützt und werden an die Muttergesellschaft ausgeschüttet. Somit erhalten die Anteilseigner eines Konzerns im Zustand 4 höhere Zahlungen als diejenigen einer Einheitsunternehmung. Dadurch hat $\widetilde{Z^K}$ einen höheren Erwartungswert.

Wird die Anzahl der Zustände in $t = 1$ auf unendlich viele erweitert, lässt sich der Unterschied zwischen den Zahlungen $\widetilde{Z^E}$ und $\widetilde{Z^K}$ mit Hilfe von Abbildung 5 anschaulich darstellen.

Die bisherige Analyse dient dem Hauptziel der Arbeit, welches im Vergleich der Unternehmenswerte der unterstellten Organisationsalternativen liegt. Dabei wird der Vergleich formal sowohl am Gesamtunternehmenswert als auch am Shareholder–Value durchgeführt werden.

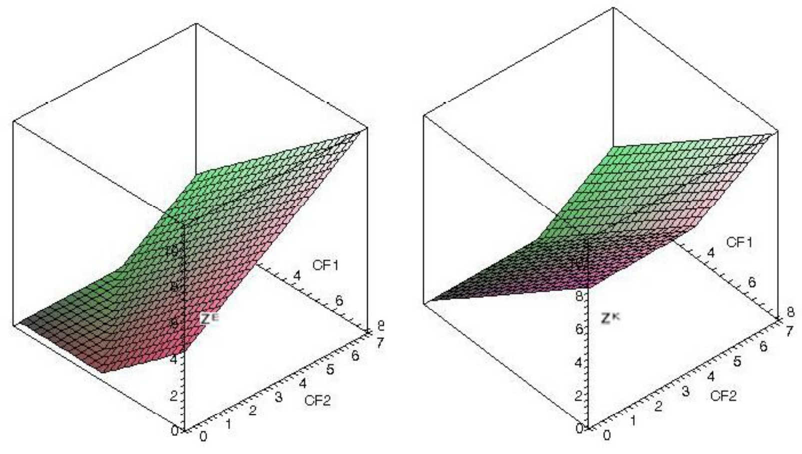


Abbildung 5: Risikoseparierung und Netto Free Cash Flow

3.3 Qualitative Erkenntnisse aus dem Modell

Der Gesamtunternehmenswert ist hier nach der Definition 1 aus Abschnitt 2.1.2 als Marktwert der allen Kapitalgebern zufließenden Zahlungen zu verstehen. Die Zahlungen an alle Kapitalgeber resultieren aus den durchgeführten Investitionen. Daraus folgt:

Satz 1 (Identität im Gesamtunternehmenswert)
Der gesamte Unternehmenswert eines Konzerns und derjenige einer Einheitsunternehmung sind unter den Modellbedingungen identisch.

Beweis: Satz 1 kann man direkt aus der Arbitrage Theorie ableiten.

Der gesamte Unternehmenswert ist gleich dem Wert der in dem Unternehmen durchgeführten Investitionen. Wenn der gesamte Unternehmenswert eines Konzerns höher als der Gesamtunternehmenswert einer Einheitsunternehmung mit identischen Investitionen wäre, könnte man diese Einheitsunternehmung kaufen, sie in einen Konzern umwandeln und dann wieder zu einem höheren Preis verkaufen. Das wäre eine Arbitragegelegenheit, was der Annahme der Arbitragefreiheit widerspricht.

Es gilt auch im Umkehrschluss: Wenn der Gesamtunternehmenswert einer Einheitsunternehmung höher als der Gesamtunternehmenswert eines Konzerns mit identischen Investitionen wäre, könnte man Arbitragegewinne erzielen, indem man den Konzern günstig kaufen, und als Einheitunternehmen wieder teuer veräußern würden.

Aufgrund des arbitragefreien Markt muss der Gesamtunternehmenswert eines Konzerns gleich dem Gesamtunternehmenswert einer Einheitsunternehmung mit identischen Investitionen sein. ■

Satz 1 erklärt sich auch dadurch, dass im Gesamtunternehmenswert die gesamten Risiken der durchgeführten Investitionen berücksichtigt sind. Hierbei ist es unerheblich, wie die Finanzierungsrisiken zwischen Eigen- und Fremdkapitalgebern aufgeteilt werden.

Im Gegensatz zum Gesamtunternehmenswert errechnet sich der Shareholder–Value aus den Zahlungen an die Eigenkapitalgeber. In einem Konzern werden die Investitionsprojekte separat von zwei rechtlich selbstständigen Tochterunternehmen durchgeführt. Die Abschirmungswirkung der rechtlichen Aufspaltung in eine eigenständige Kapitalgesellschaft isoliert die beiden Investitionsprojekte voneinander. Für den Fall, dass I^2 erfolglos verläuft und $\widetilde{CF}^2$ die Ansprüche der Fremdkapitalgeber nicht bedienen kann (Zustand 4 in Beispiel 1), wird das Eigenkapital in dem mit diesem einen Investitionsprojekt betrauten Tochterunternehmen D^B angegriffen. Falls das Eigenkapital in D^B nicht ausreicht, um die anfallenden Fremdkapitalansprüche zu befriedigen, wird nur D^B insolvent. Die Erträge des anderen Tochterunternehmens stehen dem Mutterunternehmen ungeschmälert zur Verfügung. Daher zeigt die Zahlungsstruktur von $\widetilde{Z}^K$, gemäß Gleichung (6), dass eine lineare Beziehung zwischen den Cash Flows $\widetilde{CF}^1$ und $\widetilde{CF}^2$ existiert. Dies führt zu folgender Erkenntnis:

Satz 2 (Wertadditivität in einem Konzern)

Der Shareholder–Value der Konzernmutter in der Organisationsoption 2 entspricht unter Annahme 1 bis Annahme 9 der Summe der Marktwerte seiner Töchter.

Beweis: Satz 2 folgt direkt aus dem Wertadditivitätsprinzip.

$V(\widetilde{Z^K})$ sei der Marktwert von $\widetilde{Z^K}$. Auf einem arbitragefreien Markt muss nach dem Wertadditivitätsprinzip gelten

$$\begin{aligned} V(\widetilde{Z^K}) &= V(\widetilde{CF^1} + (\widetilde{CF^2} - L)^+) \\ &= V(\widetilde{CF^1}) + V((\widetilde{CF^2} - L)^+). \end{aligned}$$

■

Aufgrund der durch die rechtliche Eigenständigkeit der Tochterunternehmen D^A und D^B induzierten Risikoseparierung kann die Muttergesellschaft das Investitionsprojekt I^2 mit dessen Kapitalwert beurteilen. Weist I^2 einen positiven Kapitalwert auf, wird die Investition getätigt. In diesem Fall stimmt der Shareholder–Value eines Konzerns mit der Summe der Marktwerte des Eigenkapitals der Töchter überein. Somit kann man das Wertadditivitätsprinzip bei der Bewertung des Eigenkapitals der Konzernmutter heranziehen.

Im Gegensatz dazu darf das Wertadditivitätsprinzip bei der Ermittlung des Shareholder–Values eines Einheitsunternehmes bei Einbeziehung von Unsicherheit bzw. Finanzierungsrisiko nicht angewendet werden. In einer Einheitsunternehmung haftet das Eigenkapital nämlich für sämtliche Projekte, die dieses Unternehmen durchführt. So kann der Fall eintreten, dass der aus dem Investitionsprojekt I^2 entstehende Rückfluss $\widetilde{CF^2}$ so gering ist (wie im Zustand 4 im Beispiel 1), dass die Einheitsunternehmung die mit I^2 zusammenhängenden Festbetragsansprüche L allein aus den Cash Flows von I^2 nicht bedienen kann. In diesem Fall muss die Einheitsunternehmung den anstehenden Fremdkapitaldienst auch mit dem Rückflüss aus I^1 bedienen. Das schmälert die Gewinne aus dem wirtschaftlich erfolgreichen Investitionsprojekt I^1. Wenn der Rückfluss aus I^1 nicht ausreicht, um die Fremdkapitalgeberansprüche zu finanzieren, wird auf das Eigenkapital zurückgegriffen. Im Extremfall reichen die in der Einheitsunternehmung vorhandenen liquiden Mittel nicht aus, um alle Fremdkapitalansprüche zu bedienen. Die Einheitsunternehmung wird zahlungsunfähig und insolvent. Der Misserfolg mit dem Investitionsprojekt I^2 infiziert das Projekt I^1. Dies ist in folgendem Satz festgehalten:

Satz 3 (Wertminderung des Shareholder–Values im Einheitsunternehmen) *Unter den Annahmen 1 bis Annahme 9 ist die erwartete Rückzahlung aus einer Einheitsunternehmung an seine Anteilseigner kleiner als oder gleich der erwarteten Rückzahlung im Konzernfall. Somit ist der Shareholder–Value der Einheitsunternehmung kleiner als oder gleich der Shareholder–Value des Konzerns.*

Satz 3 wird wie folgt formalisiert:

$$E[(\widetilde{CF}^1 + \widetilde{CF}^2 - L)^+] \quad \leq \quad E[\widetilde{CF}^1 + (\widetilde{CF}^2 - L)^+]. \tag{7}$$

Beweis: Satz 3 lässt sich direkt aus der Theorie 4 von Merton (1973) und der Jensenschen Ungleichung ableiten.

Merton hat gezeigt, dass die aus den Investitionen erhältlichen Zahlungen der Eigentümer (5) bzw. (6) konvexe Funktionen in Abhängigkeit der Cash Flows sind.[61] j sei der Laufindex der möglichen Zustände $\omega \in \Omega$. Nach dem Satz der Jensenschen Ungleichung gilt für alle j:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\widetilde{CF}^1(\omega_j) + \widetilde{CF}^2(\omega_j) - L}{2}\right)^+ \leq \frac{\widetilde{CF}^1(\omega_j) + (\widetilde{CF}^2(\omega_j) - L)^+}{2} \\ \Longrightarrow \quad & 2\left(\frac{\widetilde{CF}^1(\omega_j) + \widetilde{CF}^2(\omega_j) - L}{2}\right)^+ \leq \widetilde{CF}^1(\omega_j) + (\widetilde{CF}^2(\omega_j) - L)^+ \\ \Longrightarrow \quad & (\widetilde{CF}^1(\omega_j) + \widetilde{CF}^2(\omega_j) - L)^+ \leq \widetilde{CF}^1(\omega_j) + (\widetilde{CF}^2(\omega_j) - L)^+. \end{aligned} \tag{8}$$

Da die Wahrscheinlichkeitsfunktion, mit der der Zustand ω_j eintritt, im Intervall [0,1] liegt, folgt Gleichung (7) direkt aus der Definition des Erwartungswerts und aus Gleichung (8). ■

[61] Vgl. *Theorem 4* von Merton (1973).

Aus der ökonomischen Pespektive besagt *Satz 3*, dass die fehlende Abschirmung der Eigenkapitalanteile unterschiedlicher Investitionen zu einer Reduzierung des Shareholder–Values der Einheitsunternehmung führt.

Ohne Risikoseparierung besteht kein linearer Zusammenhang zwischen $\widetilde{CF}^1$ und $\widetilde{CF}^2$ in der Zahlungsstruktur von $\widetilde{Z}^E$. Aus diesem Grund darf das Wertadditivitätsprinzip bei der Ermittlung des Shareholder–Values der Einheitsunternehmung nicht herangezogen werden. Zur Beurteilung der Wirtschaftlichkeit der Investition I^2 muss die Wirtschaftlichkeit des gesamten Investitionspakets betrachtet werden.

K_0 sei das Eigenkapital, das D^B von der Konzernmutter erhält und in I^2 investiert werden kann. Als Unterlassungsalternative zu I^2 kommt eine Anlage von K_0 auf dem Kapitalmarkt in die Betrachtung. Wird die erwirtschaftete Rendite der Kapitalmarktanlage mit $\widetilde{r}$ bezeichnet, muss nach dem Fundamentalsatz der Preistheorie[62] gelten:

$$E_Q[(1+\widetilde{r})K_0] = (1+r_f)K_0,$$

wobei Q das risikoneutrale Martingalwahrscheinlichkeitsmaß darstellt, das in Abschnitt 6.1 eingeführt und ausführlich erklärt wird. Die erwartete Zahlung der Unterlassungsalternative an die Anteilseigner setzt sich aus dem erwarteten Rückfluss von I^1 und der Rückzahlung aus der Anlage am Kapitalmarkt zusammen. So erwarten die Anteilseigner der Einheitsunternehmung in $t = 1$ einen Rückfluss in Höhe von

$$E_Q[\widetilde{CF}^1] + (1+r_f)K_0.$$

Folgerung 1 (Entscheidungskriterium bei einer Einheitsunternehmung)
In einer Einheitsunternehmung sollte man sich für die Durchführung der Investition

[62]Die ausführlichen Erklärungen zum Fundamentalsatz der Preistheorie finden sich in Abschnitt 6.1.2.

I^2 entscheiden, wenn die folgende Relation erfüllt ist:

$$E_Q[\widetilde{Z^E}] \quad \geq \quad E_Q[\widetilde{CF^1}] + (1 + r_f)K_0. \tag{9}$$

Folgerung 1 stellt ein korrigiertes Entscheidungskriterium dar. Auf der linke Seite der Ungleichung (9) steht die erwartete Zahlung an die Anteilseigner der betrachteten Einheitsunternehmung bei Durchführung der Investition I^2. Die rechte Seite stellt die erwartete Zahlung bei Wahl der Unterlassungsalternative dar. Das korrigierte Entscheidungskriterium fordert, den Kapitalwert vom Investitionsprojekt I^2 nicht isoliert zu betrachten und stattdessen das saldierte Ergebnis von I^1 und I^2 zusammen in die Entscheidung einzubeziehen. Wenn die erwarteten Rückflüsse aus dem gesamten Investitionspaket mindestens so groß sind wie der Wert der Unterlassungsalternative, werden sich die Anteilseigner einer Einheitsunternehmung für eine zusätzliche Investition entscheiden. Die Begründung der Folgerung 1 liefert Satz 3. Aus Ungleichung (7) ergibt sich:

$$E_Q[\widetilde{Z^E}] - E_Q[\widetilde{CF^1}] \quad \leq \quad E_Q[(\widetilde{CF^2} - L)^+].$$

Somit folgt bei Gültigkeit der Relation $E_Q[(\widetilde{CF^2} - L)^+] \geq (1 + r_f)K_0$ nicht zwingend die Gültigkeit von Gleichung (9). Eine Entscheidung anhand der Ungleichung $E_Q[(\widetilde{CF^2} - L)^+] \geq (1 + r_f)K_0$ kann zu Fehlentscheidungen führen.

Aus der Erkenntnis aus Satz 3 heraus lässt sich eine nichtnegative Differenz zwischen der Zahlung an die Anteilseigner eines Konzerns und der an die Eigentümer einer Einheitsunternehmung bilden. Diese Differenz wird in Abbildung 6 grafisch dargestellt.

Das vorgestellte Modell hilft, die Quelle der Wertdifferenz zwischen dem Shareholder–Value verschiedener Organisationsformen zu identifizieren. Die Eigenkapitalgeber einer Unternehmung mit der Organisationsform, in der man die Investitionen rechtlich getrennt voneinander durchführt, tragen geringere Finanzierungsrisiken als Anteilseigner einer Einheitsunternehmung. Der Grund dafür liegt in der Möglichkeit,

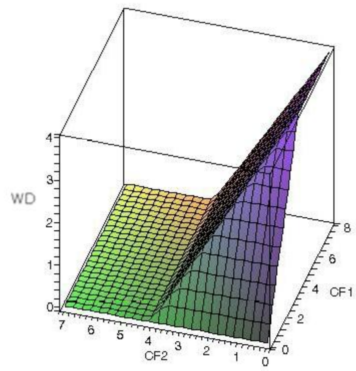


Abbildung 6: Wertdifferenz (WD) zwischen dem Shareholder–Value eines Konzerns und dem einer Einheitsunternehmung

durch die rechtlich selbständigen Tochtergesellschaften die Risiken unterschiedlichen Investitionen voneinander zu trennen. Hat beispielsweise eine Unternehmung zwei Investitionen zu verwirklichen, werden diese oft jeweils von einer eigenständigen Tochtergesellschaft durchgeführt. Falls eine Investition Misserfolg hat, könnte hoher Verlust entstehen. Die betreffende Tochtergesellschaft haftet mit ihrem gesamten Vermögen und könnte im extremen Fall insolvent werden. Durch die gesellschaftsrechtliche Selbstständigkeit der Tochtergesellschaft ist ein Durchgriff auf die Anteilseigner der Tochtergesellschaft (hier die Muttergesellschaft) nicht zulässig. Erzielt die zweite Investition derzeit Gewinne, muss die Muttergesellschaft diese Gewinne nicht mit den Verlusten verrechnen. Das hat zur Folge, dass der Shareholder–Value einer Unternehmung mit Risikoseparierung höher ausfällt als der Shareholder–Value einer Einheitsunternehmung.

3.4 Weiterführende Überlegung

Aus den bisherigen Ausführungen kann geschlossen werden, dass aus der Sicht der Eigenkapitalgeber, die Organisationsoption "Konzern" in dem oben vorgestellten Grundmodell gegenüber der Organisationsoption "Einheitsunternehmung" vorteilhaft erscheint, wenn mehrere Investitionsprojekte durchgeführt werden sollen. Jeder rational entscheidende Anteilseigner sollte bei der Wahl der Rechtsform die Organisationsform Konzern vorziehen.

In der realen Welt sind Unternehmungen mit unterschiedlichen Rechtsformen in der Wirtschaft zu finden. Die Begründung für den Unterschied zwischen Realität und Modell besteht darin, dass das Grundmodell auf der Annahme eines perfekten Kapitalmarkts basiert und dass diese Annahme in der Realität nicht immer erfüllt ist. Bei Vorhandensein von Friktionen hat jede Rechtsform spezifische Vor- und Nachteile.

In der Praxis wird festgestellt, dass der Konzern nicht immer die überlegene Organisationsform ist. Als Nachteil ist z. B. zu sehen, dass die eine Investition ausführende Unternehmungseinheit und die leitende Unternehmungseinheit meistens nicht identisch sind. Es gibt Situationen, in denen das führende Unternehmen nur beschränkt Kontrolle über seine Tochterunternehmen ausübt. Entsteht ein Interessenkonflikt zwischen der Konzernmutter und den Tochterunternehmen, ist es möglich, dass diese Tochtergesellschaften ihre eigenen Interessen überordnen und nicht im besten Interesse der Konzernmutter handeln. Eine derartige Beziehung zwischen dem Mutter- und dem Tochterunternehmen ist ein typisches Beispiel für die sog. "Agency Beziehung", die durch einen Vertrag zwischen zwei Parteien zustande kommt. Eine Partei beauftragt dabei die andere, durch eine Übertragung von Entscheidungsbefugnissen, ihre Interessen wahrzunehmen.[63] Bei der operativen Umsetzung der Geschäftsfeldstrategie kann dann ein sog. "Principal Agent Konflikt" auftreten, dessen Grundproblematik im Vorhandensein der asymmetrischen Informationsverteilung zwischen

[63] Vgl. Jensen und Meckling (1976), S. 308.

der delegierenden Unternehmenseinheit (Principal) und der ausführenden Unternehmenseinheit (Agent) liegt. Wenn Principal und Agent gleichzeitig ihren Eigennutzen maximieren, ist es unmöglich, eine Lösung zur gleichzeitigen Erreichung der Nutzenmaximierung für beide Parteien zu finden.[64] Außerdem ist in einer Unternehmung eine gute Koordination der einzelnen Tochterunternehmen erforderlich. Dies wird in einem Konzern dadurch erschwert, dass die Unternehmensleitung einer eigenständigen Kapitalgesellschaft nicht in gleicher Weise gesteuert werden kann wie eigenes, abhängig beschäftigtes Personal, wozu auch der Leiter eines Geschäftsfeldes zählen würde.

Die Lösungen dieser Probleme sind mit zusätzlichen Kosten verbunden,[65] die den Vorteil der Risikoseparierung in einem Konzern schmälern. Wenn die zusätzlichen Kosten in einem Konzern den Vorteil der Risikoseparierung übersteigen, wird die Organisationsoption mit einer Einheitsunternehmung doch attraktiver als diejenige mit einem Konzern.

Aus dieser Überlegung heraus ist es sinnvoll, den Vorteil der Risikoseparierung wertmäßig zu ermitteln. Erst aus der Gegenüberstellung des Vorteils der Risikoseparierung und den Zusatzkosten im Konzernfall kann die Unternehmung schließen, welche Organisationsoption gewählt werden soll. Zu diesem Zweck muss man den Shareholder–Value des Konzerns und den der Einheitsunternehmung bestimmen.

Nach Satz 2 ist bei der Ermittlung des Shareholder–Values der Konzernmutter das Wertadditivitätsprinzip anwendbar. Man bestimmt zuerst den einzelnen Wert der Zahlung für Anteilseigner aus der jeweiligen Investition. Die Summe dieser Werte ist der Shareholder–Value der Konzernmutter. Wird der Shareholder–Value eines

[64] In der Literatur werden Modelle entworfen, um eine Lösung für solche Konflikte abzuleiten. Im Mittelpunkt der Modellierung steht die optimale Gestaltung der vertraglichen Beziehung zwischen Kooperationsparteien. Vgl. Ross (1973) oder Fama und Jensen (1983).

[65] Vgl. Friedlich (1999).

Konzerns mit SHV_K bezeichnet, gilt:

$$SHV_K = V\left(\widetilde{CF}^1\right) + V\left((\widetilde{CF}^2 - L)^+\right). \tag{10}$$

Zur Ermittlung des Shareholder–Values der Einheitsunternehmung darf man gemäß Satz 3 das Wertadditivitätsprinzip nicht heranziehen. In diesem Fall wird der Shareholder–Value durch die erwarteten Rückflüsse aus dem gesamten Investitionspaket bestimmt. Bezeichnet SHV_E den Shareholder–Value der Einheitsunternehmung, gilt:

$$SHV_E = V\left((\widetilde{CF}^1 + \widetilde{CF}^2 - L)^+\right). \tag{11}$$

Zur Berechnung von SHV_K und SHV_E wird in dieser Arbeit die Methode der risikoneutralen Bewertung herangezogen, die in der Theorie der Optionsbewertung breite Anwendung findet. Die Begründung dieser Vorgehensweise besteht darin, dass die Rückzahlung an die Anteilseigner die gleichen Merkmale einer Option auf dem Finanzmarkt aufweist. Dies sind folgende Eigenschaften:

- Die zukünftige Rückzahlung ist nicht negativ.
- Die Höhe der Rückzahlung ist unsicher.

Aufgrund der beschränkten Haftung der Eigenkapitalgeber lässt sich die Zahlung an die Eigenkapitalgeber als eine Call Option auf die Cash Flows interpretieren, wobei der Festbetragsanspruch der Fremdkapitalgber als Ausübungspreis zu verstehen ist.

In dem nachfolgenden Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der risikoneutralen Bewertungsmodelle vorgestellt. Anschließend wird damit statt des Optionspreises der Marktwert des Eigenkapitals bestimmt.

4 Bewertungsansatz bei Risikoseparierung

In diesem Kapitel wird ein Bewertungsansatz entwickelt, der die Auswirkung der Risikoseparierung berücksichtigt. Die Ansatzentwicklung erfolgt in Abschnitt 4.1. Die praktische Umsetzbarkeit des entwickelten Ansatzes wird in Abschnitt 4.2 an einem Zahlenbeispiel demonstriert. Zur Modellierung der unsicheren Entwicklung des zukünftigen Cash Flows wird auf die Theorie der stochastischen Prozesse zurückgegriffen. Die zur Heranführung an die Thematik benötigten Terminologien aus der Wahrscheinlichkeitstheorie werden im Anhang (Abschnitt 6.1) in den entsprechenden Zusammenhängen dargestellt.

4.1 Entwicklung des Bewertungsansatzes

Da in dieser Arbeit nach einem risikoneutralen Bewertungsansatz gestrebt wird, soll die Bewertung des SHV_E und des SHV_K unter dem sog. risikoneutralen Martingalmaß erfolgen. Gemäß der Martingaleigenschaft sind die somit ermittelten Shareholder–Values unabhängig von der Risikoneigung der Investoren. Diese Modellierung stützt sich auf die Grundlagen der Statistik und Stochastiktheorien. Weil die Ausführung der verwendeten Theorien etwas Raum im Anspruch nimmt, werden sie in den Anhang (Abschnitt 6.1) dargestellt.

4.1.1 Abbildung der unsicheren Investitionsentwicklung

Abweichend von herkömmlichen Bewertungsansätzen, in denen der zukünftige Cash Flow auf der Grundlage der Managementeinschätzung prognostiziert wird, beschreibe ich in dieser Arbeit die unvorhersehbaren Wertentwicklungsprozesse der Cash Flows durch stochastische Prozesse.[66]

Die Cash Flows aus den Investitionen sind diskrete Zahlungen, die nur am Zeitpunkt $t = T$ anfallen. Die Cash Flows generierenden Investitionen werden in einer sich

[66]Eine systematische Darstellung über stochastische Prozesse findet sich im Unterabschnitt 6.1.1.

kontinuierlich ändernden Umwelt realisiert. Weiterhin sind diese Investitionen auf dem Kapitalmarkt jeder Zeit handelbar. Die Veränderung der Umwelt beeinflusst die Wertbildung der Investitionen. Aufgrund der Handelbarkeit ist es möglich, zu jeder Zeit aktuelle Werte der Investitionen zu ermitteln. Vor diesem Hintergrund sind die Wertentwicklungsprozesse der Investitionen stetige Prozesse.

Nachfolgend werden die Wertentwicklungsprozesse der zukünftigen Cash Flows als geometrische Brownsche Bewegungen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit der Indtexmenge T modelliert.

Seien die Prozesse $(X_t^i)_{t\in[0,1]}$ mit $i = \{1, 2\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ die Wertentwicklungsprozesse der künftigen Zahlungen aus den Investitionen. X_t^i sind dann die zum Zeitpunkt t auf dem Kapitalmarkt erzielbaren Marktwerte der Investitionen. Der Parameterraum $T = [0, 1]$ ist stetig und beschreibt den Planungszeitraum. Die Menge Ω umfasst alle Umweltzustände, die während der Durchführung der Investitionen auftreten und den Wert der betrachteten Investitionen beeinflussen können. Das Maß P beschreibt die Eintrittswahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse. Die durch σ–Algebra erzeugte Filtrierung $\mathcal{F}_{t\in[0,1]}$ ist eine aufsteigende Folge und bildet ein Mengensystem. Unter diesem Mengensystem versteht man eine Informationsstruktur des Kapitalmarktes. Aufgrund des effizienten Kapitalmarktes kennen alle Investoren die zur Verfügung stehenden Informationen über die Investitionen. Mathematisch ausgedrückt bedeutet das, dass X_t^i an $\mathcal{F}_t$ adaptiert oder $\mathcal{F}_t$–messbar sind. Weiter wird eine proportionale Wertveränderung von X_t^i unterstellt. Die Schwankung von X^i soll nicht von einzelnen Zeitpunkten abhängen, sondern lediglich von der Länge des betrachteten Zeitraums. Unter diesen Annahmen lassen sich $(X_t^i)_{t\in[0,1]}$ formal durch zwei geometrische Brownsche Bewegungen darstellen. Folgende stochastische Differentialgleichung bildet die Veränderung von X_t^i ab:

$$\frac{dX_t^i}{X_t^i} = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i, \tag{12}$$

wobei gilt:

i	:	Index für Investitionen mit $i = 1, 2$,
μ_i	:	Wachstumsrate der Investition i,
σ_i	:	Standardabweichung der Investition i,
W_t^i	:	Standard–Brownsche Bewegung.

Der Korrelationskoeffizient zwischen W_t^1 und W_t^2 wird als ρ bezeichnet.

Die Cash Flows ($\widetilde{CF^i}$) aus den Investitionen sind nur im Zeitpunkt $t = 1$ zu realisieren. In diesem Modell stellen die Cash Flows die Werte der Investitionen im Zeitpunkt $t = 1$ dar. Es gilt:

$$\widetilde{CF^i} = X_1^i. \tag{13}$$

Setzt man die Gleichung (13) in die Gleichung (5) (bzw. (6)) ein, die den Rückfluss an die Anteilseigner einer Einheitsunternehmung (bzw. eines Konzerns) formuliert, erhält man:

$$\widetilde{Z^E} = (X_1^1 + X_1^2 - L)^+, \tag{14}$$

$$\widetilde{Z^K} = X_1^1 + (X_1^2 - L)^+. \tag{15}$$

Zur Bestimmung des Shareholder–Values muss man den Erwartungswert der Gleichungen (14) und (15) ermitteln. Dazu bedient man sich der Methode der risikoneutralen Bewertung, die im Anhang 6.1.2 vorgestellt wird.

4.1.2 Risikoneutrale Bewertung mit dem Black–Scholes Modell

Gemäß Annahme 9 erfolgt im Fall der Insolvenz kein Durchgriff durch die Einheitsunternehmung auf deren Gesellschafter. Die Anteilseigner erhalten die residualen Erträge aus den Investitionsrückflüssen. Aus der ökonomischen Sichtweise entspricht diese Eigenschaft dem Charakteristikum einer finanzwirtschaftlichen Call Option.

So kann der Anspruch der Eigenkapitalgeber als ein Call Optionsrecht auf die Cash Flows aus den vom Unternehmen getätigten Investitionen betrachtet werden. Diese Modellierung ist z. B. in der Arbeit von Merton (1973) vorgestellt worden.[67] In seinem Modell wird ein Unternehmen mit einem einzigen wertschöpfenden Gut betrachtet. Das Unternehmen finanziert sich mit Eigenkapital und Fremdkapital in Form eines Bonds.

Der Shareholder–Value entspricht dem Wert einer finanzwirtschaftlichen Call Option auf das Wirtschaftsgut des betrachteten Unternehmens. Die Zahlung an die Eigenkapitalgeber ist bei Merton (1973) mit der Auszahlungsfunktion einer Call Option identisch.[68] Als Bewertungsansatz kann die Bewertungsformel von Black–Scholes[69] für Finanzcalloptionen herangezogen werden.

Im Unterschied zu einer einfachen europäischen Option weist $\widetilde{Z^E}$ in der Zahlungsfunktion (14) einer Einheitsunternehmung eine zusätzliche Spezifikation auf, nämlich dass $\widetilde{Z^E}$ von der Entwicklung der Summe der Zufallsgrößen X_1^1 und X_1^2 abhängt: Wie bereits im Abschnitt 3.3 mit Satz 3 gezeigt wurde, kommt es bei der Bewertung des Shareholder–Values einer Einheitsunternehmung nicht mehr allein auf den wirtschaftlichen Erfolg eines einzelnen Investitionsprojektes an. Weil Erfolge und Misserfolge der Projekte in der Einheitsunternehmung miteinander verrechnet werden. ergeben sich Kombinationseffekte. Der Shareholder–Value hängt damit von den Erfolgen beider gemeinsam ausgeführten Investitionsprojekte ab. Das entspricht einer Call Option auf zwei Underlying Assets.[70]

Durch die Anwendung des Black–Scholes Modells und die Anwendung von Gleichung

[67]Vgl. Merton (1973).

[68]Vgl. Gleichung (37) im Anhang 6.1.2.

[69]Vgl. Gleichnung (47) im Anhang 6.1.2. Die ausführliche Herleitung von Black–Scholes Formel findet sich im Abschnitt 6.1.2.

[70]Auf dem Finanzmarkt wird die Option auf mehrere Underlying Assets Basketoption genannt. Sei $S_i(T)$ der Kassakurs des $i$ten Underlying Asset am Ausübungszeitpunkt T, K der Basispreis. Die Endzahlung der Basketoption ergibt sich dann als $(\sum_i S_T^i - K)^+$.

(14) auf Gleichung (11) ergibt sich:

$$\begin{aligned} SHV_E &= E_Q^0[\exp\{-r\}(X_1^1 + X_1^2 - L)^+] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X_0^1\exp\{-0.5\sigma_1^2 + \sigma_1 z_1\} + X_0^2\exp\{-0.5\sigma_2^2 + \sigma_2 z_2\} \\ &\quad - \exp\{-r\}L)^+\varphi(z_1, z_2)dz_1dz_2, \end{aligned}$$

wobei $\exp\{-r\} = 1 + r_f$ und $\varphi(z_1, z_2)$ die gemeinsame Dichtefunktion einer bivariaten Normalverteilung bezeichnet.[71] Um eine analytische Lösung für die obige Gleichung zu finden, müssen zwei Untergrenzen für die Doppelintegration bestimmt werden. Dazu steht nur eine Relation zur Verfügung:

$$X_0^1\exp\{-0.5\sigma_1^2 + \sigma_1 z_1\} + X_0^2\exp\{-0.5\sigma_2^2 + \sigma_2 z_2\} \geq \exp\{-r\}L.$$

Aus einer Relation mit zwei Variablen kann man keine eindeutige Lösung finden. Zur Lösung dieses Problems steht bisher keine analytische Lösung im Sinne einer geschlossenen Formel zur Verfügung. So bleiben nur numerische Verfahren zur Lösung der Probleme übrig. Eine Konstruktion analytischer Approximationen, die effizient und flexibel ist, bietet dabei das Binomialmodell.[72]

4.1.3 Einführung der Approximation der geometrischen Brownschen Bewegung im Binomialmodell

Das Binomialmodell wurde von Cox *et al.* (1979) aufgestellt. Es beruht auf der Konvergenz der Binomialverteilung gegen die Normalverteilung nach dem zentralen Grenzwertsatz und kann als Diskretisierung des Black–Scholes Modells aufgefasst werden. Infolgedessen wird der Entwicklungsprozess des Basistitels mittels stationärer Auf- und Abwärtsbewegungen in einem Binomialbaum modelliert. Dieses Verfahren simuliert zunächst in einem Vorwärtsschritt die zukünftige Entwicklung

[71] Die Herleitung dieses Ergebnisses erfolgt analog der Herleitung der Black–Scholes Formel (47) im Unterabschnitt 6.1.2.

[72] Systematische Darstellung von Binomialmodell findet sich im Anhang 6.1.3.

des Basiswertes bis zum Fälligkeitszeitpunkt T, rechnet dann rückwärts den Optionspreis am Zeitpunkt $t = 0$. In Kwok (1998) werden verschiedene Möglichkeiten vorgestellt, wie man den Preisprozess durch die Anpassung der Momente approximieren kann. In dieser Arbeit erfolgt die Approximation der geometrischen Brownschen Bewegung nach der Methode von Cox/Ross/Rubinstein.[73]

Cox/Ross/Rubinstein approximierten die geometrischen Brownschen Bewegung durch einen Binomialprozess.[74] Sie teilten die Laufzeit der zu bewertenden Option in N äquidistanten Zeitpunkten. Dementsprechend macht das zugrunde liegende Asset während der Laufzeit insgesamt N Bewegungsschritte. Nach jedem Bewegungsschritt kann der Preis des zugrunde liegenden Assets entweder um Faktor u steigen oder um Faktor d fallen. Die Wahrscheinlichkeit für die Aufwärtsbewegung ist p. Der Preis der Call Option ist gegeben durch:

$$C_0 = \frac{1}{\hat{r}^N} \sum_{j=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{N-j} (S_0 u^j d^{N-j} - K)^+,$$

mit

$$\begin{aligned} u &= \exp\{\sigma\sqrt{l}\}, \\ d &= \exp\{-\sigma\sqrt{l}\}, \\ p &= \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{l}), \\ \hat{r} &= \exp\{rl\}, \\ l &= \frac{T}{N}, \\ j &: \text{ die Anzahl der Aufwärtsbewegungen.} \end{aligned}$$

[73]Neben der Methode aus dem Cox/Ross/Rubinstein Modell wird das Verfahren mit der Bezeichnung “Equal Probability Approach” oft verwendet. Dabei werden die Wahrscheinlichkeiten auf einen bestimmten Wert festgelegt, typischerweise auf 0.5. Die Faktoren u und d werden dann aufgrund der Vorgaben für μ und σ bestimmt. Dieser Ansatz wurde erstmals in Jarrow und Rudd (1983) beschrieben.

[74]Die ausführliche Darstellung über Cox/Ross/Rubinstein Modell findet sich im Abschnitt 6.1.3.

Die kleinste Anzahl der Aufwärtsbewegungen, bei der sich die Ausübung der Call Option noch lohnt, kann bestimmt werden durch:

$$\begin{aligned} S_0 u^j d^{N-j} - K &\geq 0 \\ \Rightarrow \qquad j &\geq \frac{\ln(K/S_0) - N \ln d}{\ln(u/d)}. \end{aligned}$$

Damit ist die erforderliche kleinste Anzahl der Aufwärtsbewegung j^* die kleinste natürliche Zahl, die größer als $\frac{\ln(K/S_0)-N\ln d}{\ln(u/d)}$ ist. Die Preisgleichung vereinfacht sich zu:

$$C_0 = S_0 \left(\sum_{j=j^*}^{N} \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{N-j} \frac{u^j d^{N-j}}{\hat{r}^N} \right) - \frac{1}{\hat{r}^N} K \left(\sum_{j=j^*}^{N} \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{N-j} \right).$$

Man setze

$$p' = \frac{u}{\hat{r}} p \qquad \text{bzw.} \qquad 1 - p' = \frac{d}{\hat{r}}(1-p),$$

und erhält die Bewertungsformel des Cox/Ross/Rubinstein Binomialmodells:

$$C_0^{CRR} = S_0 \left(\sum_{j=j^*}^{N} \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} p'^j (1-p')^{N-j} \right) - \frac{1}{\hat{r}^N} K \left(\sum_{j=j^*}^{N} \begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{N-j} \right). \tag{16}$$

Zum Zweck der Approximation wird der Erwartungswert bzw. die Varianz des Basistitels im Cox/Ross/Rubinstein Modell unter dem nicht transformierten Maß P berechnet.[75] Dadurch kann die Martingaleigenschaft des approximierten diskontierten Basiswertes verloren gehen. Gleichzeitig verwenden Cox/Ross/Rubinstein zur Diskontierung den risikolosen Zinssatz. Somit gilt der durch Formel (16) ermittelte Preis nur für risikoneutrale Investoren.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Preis für Investitionen unabhängig von der Risikoeinstellung der Investoren zu ermitteln. Dazu wird das Grundprinzip der Approximation im Cox/Ross/Rubinstein Modell verwendet. Statt der Wahrscheinlichkeit p soll

[75] Vgl. Gleichung (49) und Gleichung (50) im Abschnitt 6.1.3.

die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit q bestimmt und in die Bewertung eingesetzt werden.[76]

Unter dem Martingalmaß gilt:

$$u = \exp\{\sigma\sqrt{l}\}, \qquad d = \exp\{-\sigma\sqrt{l}\} \qquad \text{und}$$

$$q \quad = \quad \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{l}\right). \tag{17}$$

Des Weiteren werden neue Größen definiert:

$$q' = \frac{u}{\hat{r}}q \quad \text{bzw.} \quad 1 - q' = \frac{d}{\hat{r}}(1-q).$$

Damit erhält man eine neue Preisgleichung für das Binomialmodell mit dem Martingalmaß Q:

$$C_0^Q \quad = \quad S_0\left(\sum_{j=j^*}^{N}\begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} q'^j(1-q')^{N-j}\right) - \frac{1}{\hat{r}^N}K\left(\sum_{j=j^*}^{N}\begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{N-j}\right) \tag{18}$$

$$\text{mit} \qquad j^* \quad = \quad \frac{\ln(K/S_0) - N\ln d}{\ln(u/d)}.$$

In der folgenden Ausführung wird das Binomialmodell unter dem Maß Q mit dem Cox/Ross/Rubinstein–Modell verglichen. Beispiel 2 wird anhand einer einfachen europäischen Call Option, für die eine analytische Lösung bekannt ist, zeigen, dass man mit der Preisgleichung (18) ein besseres Approximationsergebnis erzielt als mit der Gleichung (16) aus dem Cox/Ross/Rubinstein Modell.

Beispiel 2 (Vergleich zwischen den Binomialmodellen)

Es wird eine Aktie ohne Dividendenzahlung in $t = 0$ mit dem Preis $S_0 = 100$ gehandelt. Zu bewerten ist eine europäische Call Option mit

[76] Die ausführliche Herleitung des Martingalmaßes im Rahmen des Binomialmodells findet sich im Abschnitt 6.1.3.

einem Ausübungspreis $K = 105$. Die Restlaufzeit der Call Option beträgt drei Monate. Der stetige Zins beträgt 10 % a. p. Die Volatilität der Aktie beträgt 0.4.

Zunächst wird die Baumtiefe auf $N = 5$ gesetzt, damit der Rechenaufwand überschaubar bleibt. Anschließend wird die Approximation mit $N = 10, 30, 60$ und 120 per Computer durchgeführt. Dabei wird die Software "Mapel" (Version 9) verwendet.

Berechnung der Call Option mit einer Baumtiefe $N = 5$

1. Im ersten Schritt wird der Preis für die Call mit Hilfe von Gleichung (18) bestimmt. Dabei bezeichnet C_0^Q den Preis unter dem Maß Q. Mit $l = 0.25/5 = 0.05$ berechnet man die Parameter des Binomialmodells unter dem Maß Q

   $$u = 1.09356 \quad \text{bzw.} \quad d = 0.91444$$
   $$q = 0.51003 \quad \text{bzw.} \quad q' = 0.55496.$$

   Für $N = 5$ ist die kleinste Anzahl der Aufwärtsbewegung dann $j^* = 3$ und $\hat{r} = 1.00501$. Die Preisbildung nach der Formel (18) ist in der Abbildung 7 aufgearbeitet.

j	$S_0 \begin{pmatrix} 5 \\ j \end{pmatrix} q'^j(1-q')^{5-j}$	$-$	$K/\hat{r}^N \begin{pmatrix} 5 \\ j \end{pmatrix} q^j(1-q)^{N-j}$	$=$
3	33.97108	$-$	32.61776	=1.35331
4	21.14394	$-$	16.97625	=4.16769
5	5.26408	$-$	3.53419	=1.72989
$C_0^Q = \sum$				=7.25090

Abbildung 7: Binomialmodell mit Martingalmaß Q

Das Ergebnis lautet: $C_0^Q = 7.2509$.

2. Anschließend wird der Preis nach Gleichung (16) errechnet. C_0^{CRR} bezeichnet den Preis aus Cox/Ross/Rubinstein Modell.

   Die Bestimmung des Optionspreises mit der Preisgleichung (16) aus dem Cox/Ross/Rubinstein Modell erfolgt in Analogie zur Abbildung 7 und führt zu dem Ergebnis $C_0^{CRR} = 9.43182$.

3. Als Referenz wird der Black–Scholes Preis (C_0^{BS}) herangezogen.

   Zur Berechnung des Optionspreises mit der Black–Scholes Formel bestimmt man zunächst

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\ln(100/105) + (0.1 + 0.4^2/2) \cdot 0.25}{0.4 \cdot \sqrt{0.25}} = -0.0190 \\
z_2 &= \frac{\ln(100/105) + (0.1 - 0.4^2/2) \cdot 0.25}{0.4 \cdot \sqrt{0.25}} = -0.2190
\end{aligned}
$$

   und damit

$$
\begin{aligned}
C_0^{BS} &= 100 \cdot \Phi(-0.0190) + \exp\{-0.1 \cdot 0.25\} \cdot 105 \cdot \Phi(-0.2190) \\
&= 6.91592.
\end{aligned}
$$

Die Resultate zeigen, dass $C_0^Q = 7.25090$ ein deutlich besseres Approximationsergebnis erzielt als $C_0^{CRR} = 9.43182$. Das Binomialmodell mit dem Maß Q als besser geeignet für die Approximation eines risikoneutralen Optionspreises als das Modell von Cox/Ross/Rubinstein.

Trotzdem gilt für eine Baumtiefe von $N = 5$, dass C_0^Q nur eine grobe Annäherung an den Wert $C_0^{BS} = 6.91592$ ist.

Bewertung der Call Option mit $N = 10, 30, 60, 120$

Mit der wachsenden Baumtiefe N konvergiert der Binomialoptionspreis C_0^Q gegen den Black–Scholes Optionspreis C_0^{BS}. Abbildung 8 verdeutlicht die Verbesserung des Approximationsergebnisses des Binomialmodells mit dem Maß Q bei steigender Anzahl der Baumtiefe.

Mit dem Beispiel 2 wurde gezeigt, dass das Binomialmodell mit dem Martingalmaß Q ein besseres Approximationsergebnis liefert als das Binomialmodell von Cox/Ross/-

N	5	10	30	60	120	C_0^{BS}
C_0^Q	7.25090	7.08042	6.96235	6.93077	6.92638	6.91592

Abbildung 8: Konvergenz des C_0^Q gegen den C_0^{BS}

Rubinstein und dass der damit bestimmte Optionspreis bei feiner werdender Zerlegung der Laufzeit T gegen den Optionspreis des Black–Scholes Modells konvergiert. Deswegen verwende ich im Folgenden das Approximationverfahren mit dem Maß Q.

4.1.4 Multinomialmodell mit dem Martingalmaß Q

Bei der Bestimmung des SHV_E und des Preises einer Basket–Option stößt das eindimensionale Binomialmodell seine Grenzen. Boyle *et al.* (1989) erweiterten ein Binomialmodell zu einem Multinomialmodell. In ihrem Modell wird die gemeinsame Entwicklung mehrerer Basistitel durch die Multinomialverteilung approximiert. Das Modell ist anwendbar für die Bewertung vieler exotischer Optionen, denen mehrere Basiswerte zugrunde liegen, z. B. eine Basket Option. Die Erläuterung der Multinomialverteilung findet sich im Abschnitt 6.1.3. An dieser Stelle wird der Shareholder–Value der Einheitsunternehmung durch Anwendung des Multinomialmodells unter dem Martingalmaß ermittelt.

Es sei daran erinnert, dass die Ertragsentwicklung der Investitionen X_t^i einer geometrischen Brownschen Bewegung (Gleichung 12) folgt und die Höhe der Zahlung an die Anteilseigner durch Gleichung (14) determiniert wird. Unter dem Martingalmaß Q gilt:

$$E_Q^0[\widetilde{Z^E}] \quad = \quad E_Q^0[(X_1^1 + X_1^2 - L)^+].$$

Die Bestimmung des Shareholder–Values der Einheitsunternehmung erfolgt, indem man $E_Q^0[\widetilde{Z^E}]$ mit einem risikolosen Zins diskontiert.

$$SHV_E \quad = \quad \exp\{-r\}E_Q^0[(X_1^1 + X_1^2 - L)^+] \tag{19}$$

Der Shareholder–Value hängt damit von der Entwicklung beider Faktoren (X_t^1, X_t^2) ab. Zur Approximation von $E_Q^0[\widetilde{Z^E}]$ ist die Berechnung der Modellparameter u, d und q unter dem Maß Q von zentraler Bedeutung. Dies wird im Folgenden mittels der charakteristischen Funktion vorgenommen.

Im vorangegangen Abschnitt wurde gezeigt, dass der Erwartungswert bzw. die Varianz der eindimensionalen multikativen Binomialverteilung gegen den entsprechenden Erwartungswert bzw. die Varianz der eindimensionalen Lognormalverteilung konvergiert, wenn man den Betrachtungszeitraum (ein Jahr) in N Subzeitintervalle mit der Länge $l = 1/N$ aufteilt und N ins Unendliche laufen lässt. Aus diesen Überlegungen wird ein Index $k \in [1, N]$ eingeführt, um den Diskretisierungspunkt zu bezeichnen. Die Länge zwischen zwei benachbarten Diskretisierungspunkten beträgt l. Die relative Preisänderung einer festverzinslichen Anlage ist durch $\hat{r} = \exp\{rl\}$ gegeben. $\hat{r}$ dient dann zur Diskontierung von $E_Q^0[\widetilde{Z^E}]$. Die Modellparameter werden nach den Gleichungen (58) und (59) ausgewählt:[77]

$$u_i = \exp\{\sigma_i\sqrt{l}\} \qquad \text{bzw.} \qquad d_i = \exp\{-\sigma_i\sqrt{l}\}.$$

Mit der Gleichung (64) kann für jeden Prozess X_k^i ein Parameter $q^i = 1/2(1 + (r - \sigma_i^2)\sqrt{l})$ berechnet werden. Diese helfen bei der Ermittlung von $E_Q^0[\widetilde{Z^E}]$ nicht weiter. Zur Approximation sind die Parameter der gemeinsamen Verteilung von (X_k^1, X_k^2) erforderlich, da der Shareholder–Value SHV_E nach Gleichung (19) von der Summe der Rückflüsse der Investitionen determiniert wird. Als Beispiel wird die gemeinsame Entwicklung der Prozesse (X_k^1, X_k^2) nach einem Zeitintervall in Abbildung 9 zusammengefasst.

Es ist abzulesen, dass nach einem Bewegungsschritt insgesamt vier mögliche Szenarien erfolgen. j_s sei die zufällige Anzahl, mit der das Ereignis ω_s im gesamten Prozess eintritt. Die gemeinsame Verteilung von (X_k^1, X_k^2) kann durch die Multinomialverteilung mit $j = \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$ charakterisiert werden, wobei die Verteilungsfunktion durch $q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ und N determiniert wird.

[77] Vgl. die Herleitung der Gleichung (58) und der Gleichung (59) im Anhang.

Zustände mit der Whk. q_s	Beschreibung	Ertrags- entwicklung
$\omega_1 := uu$ mit q_1	X^1 und X^2 bewegen sich aufwärts.	$u_1 X_0^1 + u_2 X_0^2$
$\omega_2 := ud$ mit q_2	X^1 bewegt sich aufwärts, X^2 abwärts.	$u_1 X_0^1 + d_2 X_0^2$
$\omega_3 := du$ mit q_3	X^1 bewegt sich abwärts, X^2 aufwärts.	$d_1 X_0^1 + u_2 X_0^2$
$\omega_4 := dd$ mit q_4	X^1 und X^2 bewegen sich abwärts.	$d_1 X_0^1 + d_2 X_0^2$

Abbildung 9: Entwicklung der Cash Flows nach einem Zeitintervall

Zur Bestimmung der Parameter q_1, q_2, q_3 und q_4 bedingt man sich der Theorie der stochastischen Konvergenz, die auch als sog. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit bekannt ist.

Gemäß der stochastischen Konvergenz ergibt sich die Parameter $q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ wie folgt:

$$q_1 = \frac{1}{4}\left(1 + \rho + (\frac{r - \sigma_1^2/2}{\sigma_1} + \frac{r - \sigma_2^2/2}{\sigma_2})\sqrt{l}\right) \tag{20}$$

$$q_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \rho + (\frac{r - \sigma_1^2/2}{\sigma_1} - \frac{r - \sigma_2^2/2}{\sigma_2})\sqrt{l}\right) \tag{21}$$

$$q_3 = \frac{1}{4}\left(1 - \rho + (-\frac{r - \sigma_1^2/2}{\sigma_1} + \frac{r - \sigma_2^2/2}{\sigma_2})\sqrt{l}\right) \tag{22}$$

$$q_4 = \frac{1}{4}\left(1 + \rho + (-\frac{r - \sigma_1^2/2}{\sigma_1} - \frac{r - \sigma_2^2/2}{\sigma_2})\sqrt{l}\right) \tag{23}$$

Es ist ersichtlich, dass für $N \to \infty$ bzw. für $l = T/N \to 0$ die Wahrscheinlichkeitsparameter $q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ entweder gegen $1/4(1 + \rho)$ oder gegen $1/4(1 - \rho)$ konvergieren. Das bedeutet, dass die Grenzwerte von q_s nicht negativ sind. Außerdem sind die q_s unter anderem auch von dem Korrelationskoeffizient ρ abhängig. Somit wird die Abhängigkeit der X_t^i berücksichtigt. Wie im Black–Scholes Modell und im Binomialmodell mit dem Martingalmaß Q sind die Parameter q nicht von den Drifttermen μ_i abhängig. Mit den Parametern q kann man die risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten bestimmen.

Weil es sich hier um einen pfadunabhängigen bivariaten Prozess handelt, ist die Auszahlung nicht von der Reihenfolge des Eintretens von ω_s, sondern von derer Anzahl $j = \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$ abhängig. Die Wahrscheinlichkeit unter dem Maß Q und in Abhängigkeit von j ist gegeben durch:

$$P_Q(j) = \begin{pmatrix} N \\ j_1, j_2, j_3, j_4 \end{pmatrix} q_1^{j_1} q_2^{j_2} q_3^{j_3} q_4^{j_4} \qquad \text{mit} \sum_{s=1}^{4} j_s = N.$$

Des Weiteren wird der Shareholder–Value der Einheitsunternehmung SHV_E wie folgt ermittelt:

$$SHV_E = \frac{1}{\hat{r}^N} \left(\sum_{j_1=0}^{N} \sum_{j_2=0}^{j_2^*} \sum_{j_3=0}^{j_3^*} \sum_{j_4=0}^{j_4^*} P_Q(J) (X_0^1 u_1^{j_1+j_2} d_1^{j_3+j_4} + X_0^2 u_2^{j_1+j_3} d_2^{j_2+j_4} - L)^+ \right)$$

mit

$$\begin{aligned} j_2^* &= N - j_1 \\ j_3^* &= N - j_1 - j_2 \\ j_4^* &= N - j_1 - j_2 - j_3. \end{aligned}$$

Wegen $ud = 1$ und $\sum_{s=1}^{4} j_s = N$ kann die obige Formel wie folgt umgestaltet werden

$$SHV_E = \frac{1}{\hat{r}^N} \left(\sum_{j_1=0}^{N} \sum_{j_2=0}^{j_2^*} \sum_{j_3=0}^{j_3^*} \sum_{j_4=0}^{j_4^*} P_Q(J) (X_0^1 u_1^{2(j_1+j_2)-N} + X_0^2 u_2^{2(j_1+j_3)-N} - L)^+ \right). \tag{24}$$

Die Anwendung der Formel (24) wird im nachfolgenden Abschnitt mit einem Zahlenbeispiel verdeutlicht.

4.2 Anwendung des Bewertungsansatzes

Die Anwendung des Multinomialmodells wird anhand eines bewusst einfach gehaltenen Beispiels erläutert. Dabei wird der Lösungsalgorithmus zunächst für eine Baumtiefe $N = 2$ grafisch veranschaulicht. Der Lösungsalgorithmus für höhere Baumtiefen wird anschließend mit Hilfe der Software "Mapel" (Version 9) implementiert. Danach wird der Einfluss unterschiedlicher Modellparameter auf den Vorteil der Risikoseparierung untersucht.

4.2.1 Zahlenbeispiel zum Bewertungsansatz

Als Anwendungsbeispiel wird eine Einheitsunternehmung betrachtet. Der Shareholder–Value dieser Einheitsunternehmung soll in Abhängigkeit der möglichen Durchführung einer riskanten Investition bestimmt werden. Die Laufzeit der Investition beträgt ein Jahr. Weiterhin ist zu prüfen, wie hoch der Vorteil bei einer Umwandlung in einen Konzern sein kann. Es wird auf die Modellrahmenbedingungen aus Abschnitt 3.2.2 zurückgegriffen. Dort wurde erklärt, dass die Investition I^1 vollständig mit Eigenkapital und die Investition I^2 sowohl mit Eigen– als auch mit Fremdkapital finanziert ist. Der Kapitalmarkt ist perfekt, reibungslos und die Eigentümer haften nur mit dem investierten Kapital. Weiterhin wird die Notation aus Abschnitt 4.1.1 im Anwendungsbeispiel verwendet:

- Zwei geometrische Brownsche Bewegungen X_t^i, mit $i = \{1, 2\}$, beschreiben die Entwicklungsprozesse der Investitionen, wobei

$$\begin{aligned} X_0^1 &= 50 \quad \text{und} \quad X_0^2 = 100 \\ \sigma_1 &= 0.2 \quad \text{und} \quad \sigma_2 = 0.3 \\ \rho &= 0.5. \end{aligned}$$

  Da alle Parameter in einem Multinomialmodell mit dem Martingalmaß nicht vom Driftterm μ abhängig sind, ist eine Annahme über μ entbehrlich.

- L bezeichnet den im Kreditvertrag festgelegten Rückzahlungsbetrag an die Fremdkapitalgeber (Zinsen und Tilgung) im Zeitpunkt $T = 1$ mit

$$L = 100.$$

- Der einheitliche risikolose Zins beträgt 10 % p. a.

Am Ende der Laufzeit soll das Unternehmen aufgelöst und sämtliche Überschüsse nach dem Fremdkapitaldienst L an die Anteilseigner ausgeschüttet werden.

Im ersten Schritt wird die Anzahl der Teilintervalle auf $N = 2$ gesetzt, um die Vorgehensweise des numerischen Verfahrens anschaulich zu demonstrieren.

Für $N = 2$ ergeben sich die Parameter im Multinomialmodell mit dem Martingalmaß:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \exp\left\{0.2\sqrt{\frac{1}{2}}\right\} = 1.1519 \\
u_2 &= \exp\left\{0.3\sqrt{\frac{1}{2}}\right\} = 1.2363 \\
\hat{r} &= \exp\left\{0.1 \cdot \frac{1}{2}\right\} = 1.0513.
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsparameter werden nach den Gleichungen (20) bis (23) berechnet:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{4}(1 + 0.5 + \sqrt{\frac{1}{2}}(\frac{0.1 - 0.2^2/2}{0.2} + \frac{0.1 - 0.3^2/2}{0.3})) \approx 0.4708 \\
q_2 &= \frac{1}{4}(1 - 0.5 + \sqrt{\frac{1}{2}}(\frac{0.1 - 0.2^2/2}{0.2} - \frac{0.1 - 0.3^2/2}{0.3})) \approx 0.1235 \\
q_3 &= \frac{1}{4}(1 - 0.5 + \sqrt{\frac{1}{2}}(-\frac{0.1 - 0.2^2/2}{0.2} + \frac{0.1 - 0.3^2/2}{0.3})) \approx 0.1265 \\
q_4 &= \frac{1}{4}(1 + 0.5 + \sqrt{\frac{1}{2}}(-\frac{0.1 - 0.2^2/2}{0.2} - \frac{0.1 - 0.3^2/2}{0.3})) \approx 0.2792.
\end{aligned}$$

Die Summe von q_s ist in Übereinstimmung mit der Definition für das Wahrscheinlichkeitsmaß gleich eins. Die Parameter q_s bestätigen das korrelierte Verhalten der

X^i. Die Wahrscheinlichkeiten (q_1 und q_4) der Zustände, in denen sich beide Größen X^1 und X^2 in die gleiche Richtung bewegen, sind etwas größer als die Wahrscheinlichkeiten (q_2 und q_3) der Zustände, in denen sie in entgegengesetzter Richtung verlaufen. Dies ergibt sich aus dem positiven Korrelationskoeffizient.

Nach zwei Bewegungsschritten umfasst der Entwicklungsprozess insgesamt $4^2 = 16$ mögliche Pfade. Aufgrund der Eigenschaft der Pfadunabhängigkeit im Rahmen des Multinomialmodells können manche Pfade zur gleichen Endauszahlung führen. Das bedeutet, dass die Auszahlung an die Anteilseigner nur von der Anzahl des Eintretens der Ereignisse ω (definiert in Abbildung 9) abhängig ist. j_s sei die Anzahl der eingetretenen Ereignisse ω_s. In $t = 1$ erhalten die Eigenkapitalgeber der Einheitsunternehmung eine zustandsabhängige Zahlung in Höhe von

$$\widetilde{Z^E}(j) \quad = \quad \left(X_0^1 u_1^{2(j_1+j_2)-2} + X_0^2 u_2^{2(j_1+j_3)-2} - L\right)^+$$

mit der Wahrscheinlichkeit

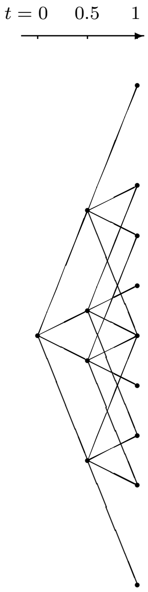
$$P_Q(j) \quad = \quad \left(\begin{array}{c} 2 \\ j_1, j_2, j_3, j_4 \end{array} \right) q_1^{j_1} q_2^{j_2} q_3^{j_3} q_4^{j_4} \qquad \text{mit } j_s \in \{0, 1, 2\} \qquad \text{und } \sum_{s=1}^{4} j_s = 2.$$

Im Vergleich dazu beläuft sich die Zahlung an die Anteilseigner eines Konzerns in Abhängigkeit von j auf

$$\widetilde{Z^K}(j) \quad = \quad X_0^1 u_1^{2(j_1+j_2)-2} + \left(X_0^2 u_2^{2(j_1+j_3)-2} - L\right)^+.$$

Abbildung 10 illustriert die Approximation des Entwicklungsprozesses von $\widetilde{Z^E}$ und $\widetilde{Z^K}$ mit der jeweils dazugehörigen Wahrscheinlichkeit, wobei der Betrachtungszeitraum in zwei Intervalle zerlegt wird.

In der Abbildung 10 stellt $S(\cdot\cdot, \cdot\cdot)$ einen möglichen Pfad dar. In Klammern vor dem Komma steht die Bewegung beider Zufallsgrößen X^i im ersten Schritt (der erste Punkt steht für X^1 und der zweite für X^2). Entsprechend kommt nach dem Komma die Bewegung im zweiten Schritt. So steht z. B. $S(uu, ud)$ dafür, dass im ersten Schritt beide X^i eine Aufwärtsbewegung machen und im zweiten Schritt sich



Zustand	$\widetilde{Z^E}(j)$	$\widetilde{Z^K}(j)$	$P_Q(j)$
$S(uu, uu)$	119.1913	119.1913	0.2216
$S(uu, ud)$ und $S(ud, uu)$	66.3448	66.3448	0.1163
$S(uu, du)$ und $S(du, uu)$	102.8465	102.8465	0.1191
$S(ud, ud)$	31.7699	66.3448	0.0153
$S(uu, dd)$ $S(ud, du)$ $S(du, ud)$ und $S(dd, uu)$	50	50	0.2942
$S(du, du)$	90.5284	90.5284	0.0160
$S(ud, dd)$ und $S(dd, ud)$	15.4251	50	0.0690
$S(du, dd)$ und $S(dd, du)$	37.6819	37.6819	0.0706
$S(dd, dd)$	3.1070	37.6819	0.0780

Abbildung 10: Entwicklung der zustandsabhängigen Zahlung an die Eigenkapitalgeber in beiden Organisationsalternativen

X^1 nach oben und X^2 nach unten geht. Es ist zu erkennen, dass in allen Zuständen $S(\cdot\, d, \cdot\, d)$, in denen X^2 zweimal Abwärtsbewegungen macht, $\widetilde{Z^K}(j)$ größer als $\widetilde{Z^E}(j)$ ist.

Die erwartete Auszahlungen aus den Investitionen an die Anteilseigner der beiden Organisationsoptionen $E_Q^0[\widetilde{Z^E}]$ und $E_Q^0[\widetilde{Z^K}]$ berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} E_Q^0[\widetilde{Z^E}] &= \sum P_Q(j)\widetilde{Z^E}(j) = 66.9852 \\ E_Q^0[\widetilde{Z^K}] &= \sum P_Q(j)\widetilde{Z^K}(j) = 72.5942. \end{aligned}$$

Somit liegen die Shareholder–Values SHV_E und SHV_K nach der risikoneutralen Bewertung jeweils bei

$$\begin{aligned} SHV_E &= \frac{1}{\hat{r}^2} E_Q^0[\widetilde{Z^E}] = 60.6107, \\ SHV_K &= \frac{1}{\hat{r}^2} E_Q^0[\widetilde{Z^K}] = 65.6859. \end{aligned}$$

Die Differenz zwischen SHV_K und SHV_E ist dann

$$WD = SHV_K - SHV_E = 65.6859 - 60.6107 = 5.07518.$$

WD ist ein Absolutbetrag. Bei der Interpretation dieses Absolutbetrages spielen dessen Größenordnung, Währung etc. eine wichtige Rolle. Um eine aussagekräftige Kennzahl abzuleiten, bietet es sich an, den Absolutbetrag in eine relative Größe umzurechnen. Diese relative Größe wird mit ξ bezeichnet und ergibt sich, indem WD zu SHV_E ins Verhältnis gesetzt wird. Für $N = 2$ liegt ξ bei:

$$\xi = \frac{WD}{SHV_E} = 8.373\%.$$

Für große N wird die Anzahl der Pfade im Entwicklungsprozess exponentiell steigen. Bei einer Baumtiefe N lassen sich insgesamt $(N+1)^2$ mögliche Werte für die Realisation generieren. Solche Berechnungen kann man nur noch mit Hilfe eines Computers vornehmen. In Abbildung 11 werden die Ergebnisse der Approximation für jeweils $N = 30$, $N = 60$ und $N = 90$ zusammengefasst.

	$N = 30$	$N = 60$	$N = 90$
SHV_K	66.6192	66.6766	66.6957
SHV_E	59.6467	59.6581	59.6618
WD	6.9725	7.0185	7.0339
ξ	11.69 %	11.76 %	11.79 %

Abbildung 11: Simulationsergebnisse

In Übereinstimmung mit den Aussagen aus Kapitel 3 zeigt das Ergebnis der Approximation, dass die rechtliche Organisationsform der Investitionen den Shareholder–Value einer Unternehmung beeinflusst. Mit Risikoseparierung weist der Shareholder–Value einen höheren Wert auf. Dabei wird ein risikoneutrales Martingalmaß verwendet, das aus der Marktinformation hergeleitet wird. Wenn man also bei der Unternehmensbewertung den Aspekt der Risikoseparierung vernachlässigt, kann die Bewertung zu einem falschen Wert führen. Im Fall des Zahlenbeispiels liegt die Überbewertung einer Einheitsunternehmung für ab $N = 30$ über 11 %.

4.2.2 Sensitivitätsanalyse

Nun wird eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Im Rahmen dieser Sensitivitätsanalyse wird untersucht, wie sich eine gezielte Änderung von Modellparametern auf das Modellergebnis auswirkt.

Die nachstehende Sensitivitätsanalyse zeigt die Auswirkung der Risikostruktur des Investitionsportfolios auf die Vorteilhaftigkeit der Risikoseparierung. Zu diesem Zweck wird auf die im vorherigen Abschnitt definierte relative Wertdifferenz ξ zwischen einem Konzern und einer Einheitsunternehmung zurückgegriffen. Dabei wird jeweils ein Parameter variiert und die Wertdifferenz ξ bei sonst konstant bleibenden Ausgangswerten, die im Zahlenbeispiel im letzten Unterabschnitt eingeführt sind, nach dem Multinomialmodell mit dem Martingalmaß simuliert. Anschließend werden die damit errechneten Modellergebnisse miteinander verglichen. Die veränderlichen Parameter der Risikostruktur sind die Standardabweichung von I^2 "σ_2" (im Folgenden wird die Bezeichnung von σ_2 durch σ ersetzt) und der Korrelationskoeffizient "ρ", weil σ und ρ die Parameter q_s und u_2 im Multinomialmodell determinieren. Da Abbildung 11 zeigt, dass für ξ nur sehr geringe Unterschiede zwischen den Approximationsergebnissen mit den Baumtiefen 30, 60 oder 90 vorliegen, wird die Baumtiefe N nachfolgend auf 30 festgesetzt.

Man darf behaupten, je riskanter die Investition I^2 ist, desto höher wird der Vorteil der Risikoseparierung. Dies wird durch das Ergebnis der Simulation bestätigt. In Abbildung 12 sind alle Ergebnisse für die Wertdifferenz $\xi(\sigma, \rho)$ zusammengestellt. Die Standardabweichung wird spaltenweise variiert, während sich der Korrelationskoeffizient zeilenweise verändert.

ξ (σ,ρ) in % n = 30		Standardabweichung σ					
		0.1	0.3	0.5	0.8	1	1.5
Korrelationskoeffizient ρ	-1	1.27	11.97	23.97	41.13	47.69	53.60
	-0.6	1.27	11.90	23.72	37.60	43.29	49.97
	-0.3	1.27	11.90	23.18	35.52	40.64	47.33
	0	1.27	11.90	22.52	33.67	38.33	44.90
	0.3	1.27	11.79	21.80	31.96	36.26	42.66
	0.6	1.27	11.63	21.04	30.38	34.37	40.54
	1	1.27	11.36	20.09	28.48	32.17	37.68

Abbildung 12: Wertdifferenz $\xi(\sigma, \rho)$

Die Ergebnisse der Simulationen werden zu Vergleichszwecken grafisch dargestellt. Abbildung 13 zeigt die Auswirkungen der Standardabweichung auf die Wertdifferenz.

Anhand der Grafik ist leicht zu erkennen, dass die Wertdifferenz ξ eindeutig und schnell bei wachsender Volatilität σ steigt, unabhängig davon, welcher Korrelationskoeffizient zwischen X^i herrscht. Eine hohe Volatilität σ impliziert, dass die Cash Flows aus der Investition I^2 in einem großen Interval streuen werden. Somit erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass möglicher Weise der Fremdkapitaldienst mit diesen Cash Flows nicht beglichen werden kann. Dies führt zu einer erhöheren Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Cash Flows aus der Investition I^1 durch die Strategie der Risikoseparierung vor dem Zugriff der Fremdkapitalgeber geschützt werden können.

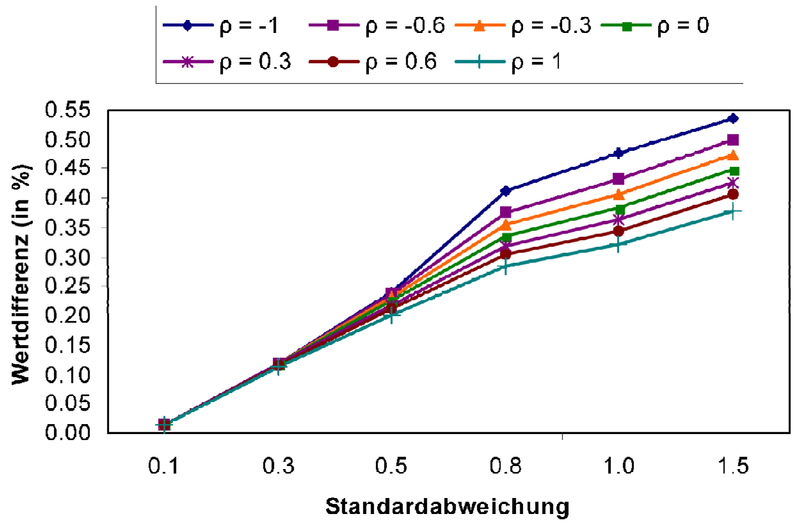


Abbildung 13: Vergleich der Wertdifferenz ξ in Abhängigkeit von σ

Eine riskante Investition sollte deshalb von anderen Investition rechtlich getrennt organisiert werden.

In Abbildung 14 ist die Wertdifferenz in Abhängigkeit von ρ eingezeichnet. Abbildung 14 zeigt, dass ξ moderat auf die Veränderung von ρ reagiert. Insbesondere bei wenig riskanten Investition hat ρ kaum Wirkung auf ξ: Bei $\sigma = 0.1$ bleibt ξ für $\rho \in [-1, 1]$ fast unverändert. Mit steigendem σ wird der Einfluss von ρ auf ξ langsam erkennbar: ξ fällt in ρ. Bei einer riskanten Investition fällt ξ deutlich. So führt, in Abbildung 14 bei $\sigma = 1.5$, eine Senkung des Korrelationskoeffizienten von 1 auf einen Wert -1 zu einer Zunahme der Wertdifferenz von ca. 37.68 % auf ca. 53.60 %. Das bedeutet, die stark negative Korrelation zwischen Investitionen verstärkt den Schutzeffekt der Risikoseparierung für die Anteilseigner.

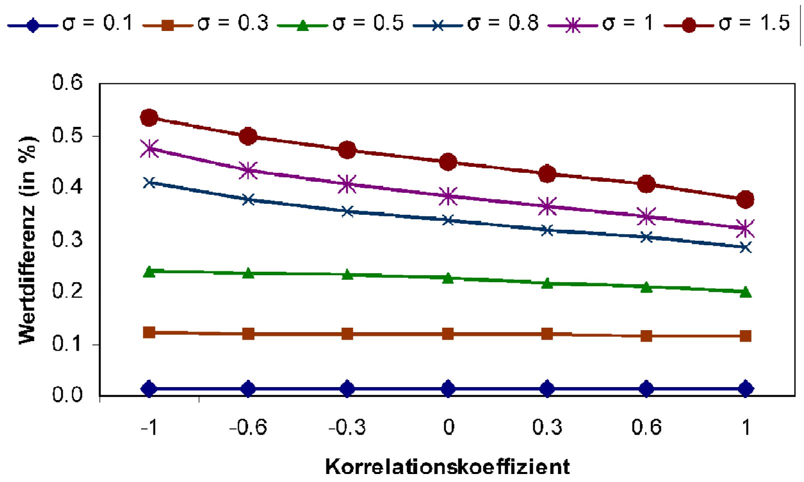


Abbildung 14: Vergleich der Wertdifferenz ξ in Abhängigkeit von ρ

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Bewertung einer Unternehmung ist eine Aufgabe mit sehr hoher Komplexität, die viele Dimensionen beinhaltet. Schon die Prognose zukünftiger Cash Flows unter Unsicherheit gestaltet sich schwierig. Die Probleme setzen sich bei der Identifizierung von Finanzierungsalternativen, der Berücksichtigung der Besteuerung und Insolvenzen, der Festlegung der Kapitalkosten und der Definition des risikolosen Zinses fort. Viele von diesen Dimensionen werden in Wissenschaft und Praxis ausführlich und intensiv diskutiert. In den meisten Unternehmensbewertungsmodellen sind Haftungsbeschränkung der Anteilseigner von Kapitalgesellschaften und die Organisationsoptionen der Investitionen in einer Unternehmung unberücksichtigt.

Die Organisationsoption, dass die riskanten Investitionen jeweils in einer rechtlich selbstständigen Unternehmenseinheit durchgeführt werden, wurde in der Arbeit als Risikoseparierung bezeichnet. Diese dient zur Trennung der Finanzierungsrisiken verschiedener Investitionen. Die Arbeit versuchte, den Effekt der Risikoseparierung als wesentliche Dimension in der Unternehmensbewertung herauszuarbeiten. Es wurde die Auswirkung der Risikoseparierung sowohl auf den Gesamtunternehmenswert als auch auf den Shareholder–Value untersucht. Die Untersuchung ging von der Annahme rationaler Eigenkapitalgeber aus.

Die Hauptergebnisse der Untersuchung zeigen, dass die Risikoseparierung einen deutlich positiven Effekt auf den Shareholder–Value einer Kapitalgesellschaft hat, wenn die Kapitalgesellschaft mehrere riskante Investitionen realisiert. Der Vorteil der Risikoseparierung ergab sich aus der rechtlichen Konstellation, dass die Eigentümer nur mit dem Eigenkapital für ihre Unternehmen haften. Somit lassen sich die Finanzierungsrisiken einzelner Investitionen aus der Sicht der Anteilseigner begrenzen, indem die Investitionen getrennt, jeweils einzeln in rechtlich eigenständigen Unternehmen, die wirtschaftlich zusammengehören, verwirklicht werden. Dadurch erhöht sich die erwartete Rückzahlung an die Anteilseigner eines Konzerns, was zu einer Steigerung des Shareholder–Values führt.

Die Finanzierungsrisiken verschwinden jedoch nicht. Sie werden von Fremdkapitalgebern übernommen. Aus diesem Grund bleibt die Höhe der gesamten Risiken einer Unternehmung unabhängig davon, ob die Risikoseparierung vorgenommen wird oder nicht. Demzufolge beeinflusst die Risikoseparierung nicht den Gesamtunternehmenswert.

Man kann im Modell feststellen, dass eine nicht negative Wertdifferenz zwischen dem Shareholder–Value der Organisationsoption “Konzern” (mit Risikoseparierung) und dem der Organisationsoption “Einheitsunternehmung” (ohne Risikoseparierung) aufgrund der Abgrenzung der Finanzierungsrisiken der Anteilseigner existiert. In der Praxis beeinflusst die Entscheidung der Organisationsform jedoch nicht nur die Höhe der Finanzierungsrisiken, die die Anteilseigner tragen, sondern auch den Ablauf bzw. die Koordination in einer Unternehmung. So können in einem Konzern aufgrund der Trennung der Entscheidungsfindung bei der Konzernmutter und der Entscheidungsrealisierung bei den Konzerntöchtern zusätzliche Kosten entstehen. Folglich muss man den Trade Off zwischen dem Vorteil der Risikoreduzierung und den zusätzlichen Transaktions- und Kommunikationskosten abwägen.

Die Schwierigkeit bei der Auswahl zwischen den Organisationsoptionen besteht weniger in deren logischen Herleitung, als vielmehr in der Quantifizierung der Wirkung einer Risikoseparierung. Daher bildete die Entwicklung eines zielführenden Bewertungsansatzes zur Vorteilsquantifizierung der Risikoseparierung bei der Ermittlung des Shareholder–Values einen eigenen Schwerpunkt dieser Arbeit.

Zur Berechnung der Vorteilhaftigkeit der Organisationsform mit Risikoseparierung wurden zukunftserfolgsorientierte DCF–Verfahren herangezogen. Da der Netto Free Cash Flow die Basis des Bewertungsansatzes bildet, ist der entwickelte Ansatz den Nettomethoden zuzuordnen.

Abweichend von den Lehrbuchansätzen der DCF–Verfahren folgt dieser Ansatz dem risikoneutralen Bewertungsprinzip, welches bei der Optionsbewertung auf Finanzmärkten breite Anwendung findet. Die Transformation in die risikolose Bewertung erfolgt, indem das statistische Wahrscheinlichkeitsmaß zur Erwartungsbildung durch das Martingalwahrscheinlichkeitsmaß ersetzt wird. Unter dem Martingalmaß liegt der erwartete Zuwachs der Investitionserträge auf Höhe des risikolosen Zinses. Im Ergebnis erhält man risikoneutrale erwartete Zahlungen, die man mit dem risikolosen Zins diskontiert.

Ausgangspunkt für die Berechnung dieser risikoneutralen erwarteten Zahlungen an die Eigentümer ist die Spezifikation der Verteilungsfunktion der Investitionsrückflüsse. Diesbezüglich wurde eine Modellierung mit geometrischen Brownschen Bewegungen vorgenommen. Zur Ableitung des Martingalmaßes wurden die Marktdaten verwendet.

Das Prinzip der risikoneutralen Bewertung hat folgende Vorteile:

- Die Bewertung ist frei von den Prämissen zur Risikoeinstellung der Entscheidungsträger und überwindet die Unbestimmtheit der Erwartungsnutzenfunktionen der Eigentümer.
- Der ermittelte Wert ist aus den Marktdaten abgeleitet. Somit hängt dieser

Wert nicht von der individuellen Einschätzung der Wahrscheinlichkeit ab.

Die Quantifizierung der positiven Wirkung der Risikoseparierung auf den Shareholder–Value beruhte auf dem Prinzip des relativen Vorteilhaftigkeitsvergleichs. Im ersten Schritt wurde der Shareholder–Value beider Organisationsoptionen ausgerechnet. Anschließend wurde die Differenz der ermittelten Werte ins Verhältnis am Shareholder–Value der Organisationsoption ohne Risikoseparierung gesetzt. Während der Shareholder–Value eines Konzerns (SHV_K) mit Hilfe der Black–Scholes Formel berechnet werden kann, weist die Bestimmung des Shareholder–Values einer Einheitsunternehmung (SHV_E) zusätzliche Spezifikationen auf. Die Bewertungsbasis des SHV_E ist die Summe der Rückflüsse aller Investitionen. Diesbezüglich wurde SHV_E wie eine Basketoption als Call Option auf die Summe mehrerer Underlying Assets bewertet. Um die Komplexität der Bewertung des SHV_E zu bewältigen, wurde ein numerisches approximatives Verfahren verwendet. Zentraler Punkt dieses numerischen Verfahrens war die Bestimmung des Martingalmaßes durch Anwendung des schwachen Konvergenzsatzes.

Zusammenfassend ergeben sich bei dem in der vorliegenden Arbeit entwickelten Ansatz folgende Vorteile:

- Zukunftserwartungen werden systematisch berücksichtigt,
- Marktrisiken und Ausfallsrisiken sind voll einbezogen und
- der Ansatz ermittelt einen objektiven Maßstab für den Vergleich strategischer Optionen, benutzt die Marktdaten und ist unabhängig von der subjektiven Erwartung der Einzelnen.

Die praktische Umsetzbarkeit des Bewertungsansatzes wurde durch ein Zahlenbeispiel vorgeführt. Die Resultate des Zahlenbeispiels spiegelten die Hauptergebnisse der durchgeführten Untersuchung wider. Es wurde gezeigt, dass eine Bewertung ohne Berücksichtigung des Aspekts der Risikoseparierung zu einer systematischen Überschätzung des Shareholder–Values einer Einheitsunternehmung führt.

Im Anschluss wurde eine Sensitivitätsanalyse zu den Modellparametern durchgefhrt. Die Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse zeigten, dass der relative Vorteil der Risikoseparierung mit zunehmender Volatilität und abnehmendem Korrelationskoeffizienten ansteigt.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass die Risikoseparierung die Finanzierungsrisiken aus der Sicht der Eigentümer begrenzt und zur Steigerung des Shareholder–Values genutzt werden kann. Daher soll die Analyse der Organisationsoptionen ein integraler Bestandteil bei der Ermittlung des Shareholder–Values sein. Ausgehend von der fehlenden Anpassung an spezielle Organisationsformen ergeben sich möglicherweise falsche Werte.

In dieser Arbeit wurde der Aspekt der Besteuerung ausgeblendet. Die Vernachlässigung der Steuern ist einer sehr große Vereinfachung. Dies spricht jedoch aufgrund des verwendeten relativen Vorteilhaftigkeitsvergleichs prinzipiell nicht gegen die Ergebnisse der Untersuchung. Bei der Ermittlung des Gesamtunternehmenswerts bzw. des Shareholder–Values muss man jedoch die Steuern einbeziehen. Die Erweiterung dieses Modells um Steuern könnte ein Thema für weitere Forschungen darstellen.

6 Anhang

6.1 Mathematische Grundlagen

Dieser Abschnitt fasst die Theorien der Stochastik und der Statistik zusammen. Die Darstellung beginnt mit einer Erläuterung verschiedener stochastischer Prozesse in Unterabschnitt 6.1.1, geht über die Vorstellung der Theorien der Maßtransformation in Unterabschnitt 6.1.2 bis zur Herleitung der Binomialmodelle in Unterabschnitt 6.1.3. Die weiterführende Darstellung des Gebietes der Stochastik findet sich z. B. bei Arnold (1974), Ikeda und Watanabe (1989), Mikosch (1998), Klebaner (1998), sowie Protter (2004). Hier werden lediglich die grundlegenden mathematischen Ideen eingeführt, die für das Verstehen der vorliegenden Arbeit von Relevanz sind.

6.1.1 Stochastische Prozesse

Die Erläuterung der stochastischen Prozesse soll die Beschreibung der Wertentwicklungsprozesse der Investitionen in Unterabschnitt 4.1.1unterstützen.

In der Mathematik wird ein stochastischer Prozess wie folgt definiert:

Definition 1 (Stochastischer Prozess)
Ein stochastischer Prozess ist eine parametrisierte Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in T}$ *auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *mit Werten in* $\mathbb{R}^n$*. Dabei symbolisiert*

- Ω *die Menge der Elementarereignisse,*
- $\mathcal{F}$ *ein Mengensystem der* σ*–Algebra auf der Grundereignismenge* Ω*,*
- P *das Wahrscheinlichkeitsmaß und*
- T *einen deterministischen Parameterraum (die Zeitdimension).*

Das Mengesystem $\mathcal{F}$ genügt den folgenden Eigenschaften:

- $\Omega \in \mathcal{F}$ und $\emptyset \in \mathcal{F}$, d. h. die Grundereignismenge selbst und die leere Menge sind Teil des Mengensystems.

- Für jede Menge $A \in \mathcal{F}$ gilt $A^c \in \mathcal{F}$, d. h., zu jeder Menge liegt auch ihr Komplement in $\mathcal{F}$.

- Für $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, d. h., die Vereinigung im Unendlichen von Familien aus $\mathcal{F}$ liegt in $\mathcal{F}$.

P liegt im Intervall $[0, 1]$, ist eine Funktion von $(\Omega, \mathcal{F})$ und weist folgende Eigenschaften auf:

- $P(\Omega) = 1$, bzw. $P(\emptyset) = 0$

- $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Die Elemente in Ω werden als ω bezeichnet. Wird ein bestimmter Zeitpunkt $t \in T$ festgehalten, so ist $\omega \mapsto X_t(\omega)$ mit $\omega \in \Omega$ eine Zufallsvariable. Für jedes fixierte ω ist $t \mapsto X_t(\omega)$ mit $t \in T$ eine Funktion, die man den Pfad von X_t nennt. Die Gesamtheit aller möglichen Pfade bildet einen stochastischen Prozess.

Im Mengensystem $\mathcal{F}$ sind alle Informationen über die Zukunft enthalten. Für den Fall, dass die Informationen über die Zukunft im Laufe der Zeit immer genauer werden, wächst das Mengensystem dementsprechend an. So entsteht eine geordnete Folge von immer größer werdenden σ–Algebra. Man spricht von einer Filtrierung.

Definition 2 (Filtrierung)
Eine Familie der σ–Algebra $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_T\}$ heißt Filtrierung, wenn Folgendes gilt:

- *Für alle $t \in T$ gilt $\mathcal{F}_t \in \mathcal{F}$*

- $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T$.

Diese Definition wird anhand des Beispiels 3 veranschaulicht.

Beispiel 3 (Binomialmodell mit drei Zeitpunkten)

Betrachtet wird die Preisentwicklung eines Wertpapiers S_t in einem Binomialmodell. Das heißt, das Wertpapier wird nur zu bestimmten Zeitpunkten gehandelt. Die Länge zwischen zwei beliebigen, benachbarten Zeitpunkten ist einheitlich. Nach einer Zeiteinheit kann der Preis entweder um den Faktor u steigen oder um den Faktor d sinken. Der Index t symbolisiert den Zeitpunkt mit $t = 0, 1, 2$. Abbildung 15 stellt die Entwicklung des Preises in einem binomischen Baum dar.

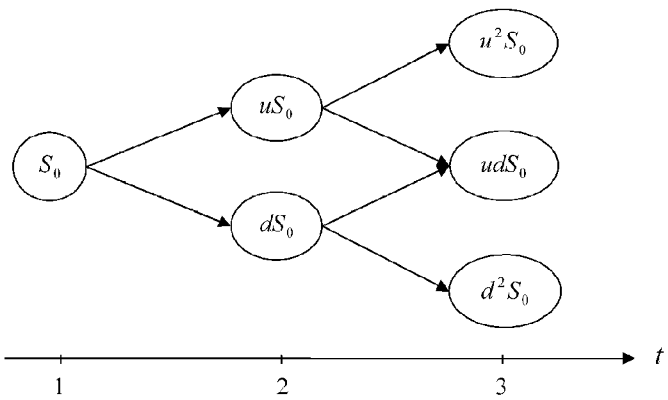


Abbildung 15: Preisentwicklung in einem Binomialmodell mit drei Zeitpunkten

Die Filtrierung modelliert die zeitliche Entwicklung der Informationsmengen, die die beobachteten Preise enthalten. Offensichtlich bilden die vier möglichen Preisentwicklungspfade die Grundereignismenge Ω. Diese Pfade bezeichne ich als ω_j, mit $j = \{1, 2, 3, 4\}$, wobei:

- $\omega_1 = uu$: der Preis des Wertpapiers steigt sowohl in $t = 1$ als auch $t = 2$ um u;
- $\omega_2 = ud$: der Preis steigt in $t = 1$ um u, fällt dann in $t = 2$ um d;
- $\omega_3 = du$: der Preis fällt zuerst in $t = 1$ um d, steigt aber in $t = 2$

um u;

- und $\omega_4 = dd$: sowohl in $t = 1$ als auch in $t = 2$ fällt der Preis um d.

Im Zeitpunkt $t = 0$ ist lediglich bekannt, dass sich einer der vier Pfade realisieren wird. Man hat also nur minimale Informationen. Diese werden durch die kleinste $\sigma-$Algebra $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ dargestellt.

In $t = 1$ kann man beobachten, dass der Preis entweder um den Faktor u steigt oder um den Faktor d sinkt. Damit weiß man, ob in $t = 2$ das Ereignis $\{\omega_1, \omega_2\}$ oder das Ereignis $\{\omega_3, \omega_4\}$ eintreten wird. Deswegen enthält die Filterierung $\mathcal{F}_1$ mehr Informationen:

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}.$$

In $t = 2$ kann man beobachten, welcher Preis tatsächlich realisiert wird und welcher nicht. Daher nimmt man die Potenzmenge, die die Menge aller Teilmengen von Ω darstellt, um die Informationen zu beschreiben.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 \quad = \quad & \{\emptyset, \Omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \\ & \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}\} \end{aligned}$$

Damit ist die Filtrierung vollständig konstruiert.

Einer der wichtigsten stetigen stochastischen Prozesse, der in den ökonomischen Modellen oft verwendet wird, ist die sog. Brownsche Bewegung.[78] Schon 1900 schlug der französische Mathematiker Louis Bachelier in seiner Dissertation vor, die Verhaltensweise der spekulativen Preisprozesse mit der Brownschen Bewegung zu be-

[78] Die erste Entdeckung der Brownschen Bewegung machte der Botaniker Robert Brown im Jahr 1827. Er beobachtete mit einem Mikroskop Pollenkörner, die sich über eine lange Zeit in ständiger regelloser Bewegung befanden. In der Wirtschaftswissenschaft ist dieser Prozess unter dem Namen "Wiener Prozess" bekannt, der nach dem amerikanischen Mathematiker Norbert Wiener bezeichnet ist.

schreiben.[79] Die heutigen Anwendungen der Brownschen Bewegung und der daraus abgeleiteten Prozesse in der Wirtschaft reichen von gängigen Börsenmodellen bis zur stochastischen Kontrolle von Prozessen.

Eine Brownsche Bewegung[80] ist wie folgt definiert:

Definition 3 (Brownsche Bewegung)

Sei $(W_t)_{t \in T}$ ein Prozess auf einem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $(W_t)_{t \in T}$ heißt dann Brownsche Bewegung, falls

- *$W_0 = 0$, P–fast sicher, d. h., $P(W_0 \neq 0) = 0$.*
- *Für $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ sind die Inkremente $W_{t_1} - W_{t_0}$, $W_{t_2} - W_{t_1}$, ..., $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ unabhängig und normalverteilt, mit*

  $$W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2 |t - s|).$$

- *Die Pfade $t \mapsto W_t(\omega)$ sind stetig P–fast sicher für alle $\omega \in \Omega$.*

Eine Brownsche Bewegung mit $\sigma = 1$ wird als Standard–Brownsche Bewegung bezeichnet. Die technisch kompliziert erscheinende Definition 3 lässt sich wie folgt veranschaulichen. Der Startpunkt einer Brownschen Bewegung ist immer null. Die Verteilung der Inkremente ist nicht von den einzelnen Zeitpunkten abhängig, sondern allein von der zeitlichen Differenz. Somit ändert sich die Verteilungsfunktion der Inkrementen bei einer Zeitverschiebung nicht. Der Erwartungswert der Inkremente ist gleich null, da bei einer Brownschen Bewegung keine bestimmte Richtung präferiert wird. Abbildung 16[81] zeigt zwei mögliche Pfade einer Standard–Brownschen Bewegung mit dem Parameterraum $T = [0, 2]$.

Die wichtigen Eigenschaften der Brownschen Bewegung sind:

[79] Louis Bachelier hat seine Dissertation "Théorie de la Spéculation" im Jahr 1900 an der Ecole Normale Supérieure in Paris eingereicht.

[80] In dieser Arbeit steht der Begriff "Brownsche Bewegung" für eine Brownsche Bewegung ohne Drift ($\mu = 0$). Ein analoger Prozess mit Drift wird als Brownsche Bewegung mit Drift bezeichnet.

[81] Das Diagramm ist unter der GNU–Lizenz zur freien Dokumentation veröffentlicht. Vgl. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/archive/5/5e/20050415212258%21Wienerprozess.png

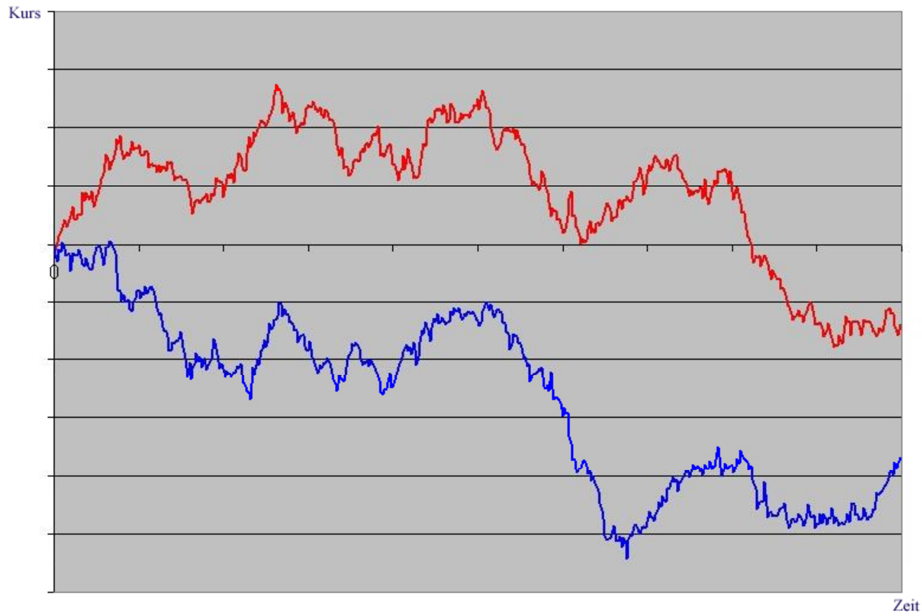


Abbildung 16: Pfade einer Standard–Brownschen Bewegung

- $(W_t)_{t\in T}$ ist ein Prozess ohne "Gedächtnis".

  Nach Erreichen des Zeitpunkts s verhält sich die Zufallsvariable W_t weiter so, als ob sie "vergessen" hätte, was bis s geschehen ist. Beispiele für derartige Prozesse ohne "Gedächtnis" sind Wertpapierkurse. Der Erwartungswert der Kurse hängt lediglich vom aktuellen Kurs ab. Der Verlauf der Kursentwicklung spielt dabei keine Rolle.

- $(W_t)_{t\in T}$ hat stetige Pfade und ist ein Martingal.

  Da der Erwartungswert der Inkremente von W_t definitionsgemäß gleich null ist, entspricht der Erwartungswert von W_t in der Zukunft dem jetzigen Wert. In der Theorie der Stochastik wird ein derartiger Prozess als Martingal bezeichnet.

Ursprünglich stand der Begriff "Martingal" für ein französisches Glücksspiel. Bei diesem Spiel entspricht das zu erwartende Ergebnis des nächsten Spiels gerade dem aktuellen Spielstand. Durch diese Eigenschaft wird das Spiel "Martingal" als ein faires Spiel bezeichnet. Die Bildung des Erwartungswertes eines Martingals ist das formale Äquivalent zu einer heuristischen Vorhersage: Man benutzt alle Informationen, die bis zum Zeitpunkt t angefallen sind, um eine Vorhersage zu diesem Zeitpunkt zu treffen. Dies macht sich die Theorie der Stochastik zu Nutze. um Prozesse formal zu beschreiben, deren Inkremente einen Erwartungswert von null haben. Die Informationen bei den heuristischen Vorhersagen entsprechen der Filtrierung $\mathcal{F}$ in der Theorie der stochastischen Prozesse. Da der Erwartungswert anhand der Filtrierung gebildet wird, ist der Prozess an die Filtrierung $\mathcal{F}$ adaptiert. Formal ist ein Martingal in der Mathematik wie folgt definiert:

Definition 4 (Martingal)

Ein an die Filtrierung $\mathcal{F}$ adaptierter stochastischer Prozess $(M_t)_{t\in T}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt P–Martingal, wenn bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P gilt:

$$E[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_t, \tag{25}$$

$$E[||M_t||] < \infty, \tag{26}$$

wobei $E[||M_t||]$ die quadratische Variation von M_t bezeichnet.[82]

Die Bedingung (25) besagt, dass der Erwartungswert eines Martingals unter der Voraussetzung der vorhandenen Informationen der aktuellen Beobachtung entspricht. Diese Bedingung wird als Martingaleigenschaft bezeichnet. Die Ungleichung (26) besagt, dass die quadratische Variation eines Martingals endlich ist. Weil der Prozess $(M_t)_{t\in T}$ an die Filtrierung $\mathcal{F}$ adaptiert ist, hängt die Martingaleigenschaft eines

[82] In der Theorie der stochastischen Prozesse misst die Variation einer Funktion das lokale Schwingungsverhalten der Funktion. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem reellen Intervall $[a,b]$. Die Variation der Funktion f ist definiert als

$$|f|_{[a,b]} := \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}^{(n)}) - f(t_k^{(n)}| : n \in \mathbb{N}, a \le t_0^{(n)} \le t_1^{(n)}) \cdots \le t_n^{(n)} \le b \right\}.$$

Ersetzt man in der obigen Definition $|f(t_{k+1}^{(n)}) - f(t_k^{(n)}|$ durch $\left(f(t_{k+1}^{(n)}) - f(t_k^{(n)}\right)^2$, gelangt man zur quadratischen Variation der Funktion f.

Prozesses sowohl von der Filtrierung als auch vom Wahrscheinlichkeitsmaß ab. Deswegen ist es erforderlich, immer zusätzlich anzugeben, mit welchem Maß bzw. welcher Filtrierung der Erwartungswert gebildet wurde. In dieser Arbeit wird statt des Ausdrucks $E[\cdot|\mathcal{F}_t]$, analog zu Gleichung (25), die Bezeichnung $E_P^t[\cdot]$ verwendet, um darzustellen, dass der Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P und der Filtrierung $\mathcal{F}_t$ gebildet ist.

Betrachten wir erneut das Beispiel 3:

Fortsetzung des Beispiels 3

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der erwartete Preis für den Zeitpunkt $t = 1$ ($E_P^0[S_1]$) bezüglich der Filtrierung $\mathcal{F}_0$ gebildet. Sei p die Wahrscheinlichkeit für die Aufwärtsbewegung, dann folgt:

$$\begin{aligned} E_P^0[S_1] &= puS_0 + (1-p)dS_0 \\ &= (p(u-d)+d)S_0. \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 1$ bildet man anhand der Filtrierung $\mathcal{F}_1$ den Erwartungswert für den Preis in $t = 2$. Der Preis S_1 ist in $t = 1$ eine beobachtbare Größe. Es gilt:

$$\begin{aligned} E_P^1[S_2] &= puS_1 + (1-p)dS_1 \\ &= (p(u-d)+d)S_1. \end{aligned}$$

Für den Fall, dass $p(u-d)+d$ gleich eins ist und dass p im offenen Intervall $(0,1)$ liegt, folgt:

$$\begin{aligned} E_P^0[S_1] &= S_0 \qquad \text{in } t=0 \text{ bzw.} \\ E_P^1[S_2] &= S_1 \qquad \text{in } t=1. \end{aligned}$$

Dann ist S_t bezüglich $\mathcal{F}$ ein P–Martingal.[83]

Bei Mikosch (1998) wird gezeigt, dass eine Standard–Brownsche Bewegung ein Martingal ist.[84] Komplexere stochastische Prozesse können mit Hilfe der Brownschen Bewegung konstruiert werden. Eine geometrische Brownsche Bewegung ist einer der Prozesse, der aus der Standard–Brownschen Bewegung abgeleitet ist.

Definition 5 (Geometrische Brownsche Bewegung)
Sei W_t eine Standard–Brownsche Bewegung, dann ist $(X_t)_{t\in T}$ mit

$$X_t = X_0 \exp\{\mu t + \sigma W_t\}$$

eine geometrische Brownsche Bewegung.

Dabei ist X_0 der deterministische und positive Startwert des Prozesses. Der Parameter μ ist die Drift und beschreibt die deterministische Entwicklungstendenz des Prozesses. Für den Fall, dass die Drift μ gleich null ist, ist X_t ein Martingal. Der Parameter σ wird als Volatilität bezeichnet und bestimmt den Einfluss des Zufallsterms W_t auf den Prozess. Beide Parameter steuern die Pfade des Prozesses. Abbildung 17 zeigt beispielhafte Pfade von drei voneinander unabhängigen geometrischen Brownschen Bewegungen mit unterschiedlichen Drifttermen und gleicher Volatilität $\sigma = 0.2$.[85]

Eine geometrische Brownsche Bewegung hat unabhängige multiplikative Zuwächse. Das bedeutet, für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$ sind die $\frac{X_{t_2}}{X_{t_1}}, \frac{X_{t_3}}{X_{t_2}}, \cdots, \frac{X_{t_n}}{X_{t_{n-1}}}$ voneinander unabhängig. X_t unterliegt der logarithmischen Normalverteilung

[83] Es gilt:

$$p(u-d)+d \geq 1 \quad \Rightarrow \quad S_t \text{ ist ein Submartingal,}$$
$$p(u-d)+d \leq 1 \quad \Rightarrow \quad S_t \text{ ist ein Supermartingal.}$$

[84] Vgl. Mikosch (1998), S. 82 f.

[85] Das Diagramm ist unter der GNU–Lizenz zur freien Dokumentation veröffentlicht. Vgl. http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/archive/5/5e/20050415212258%21Wienerprozess.png

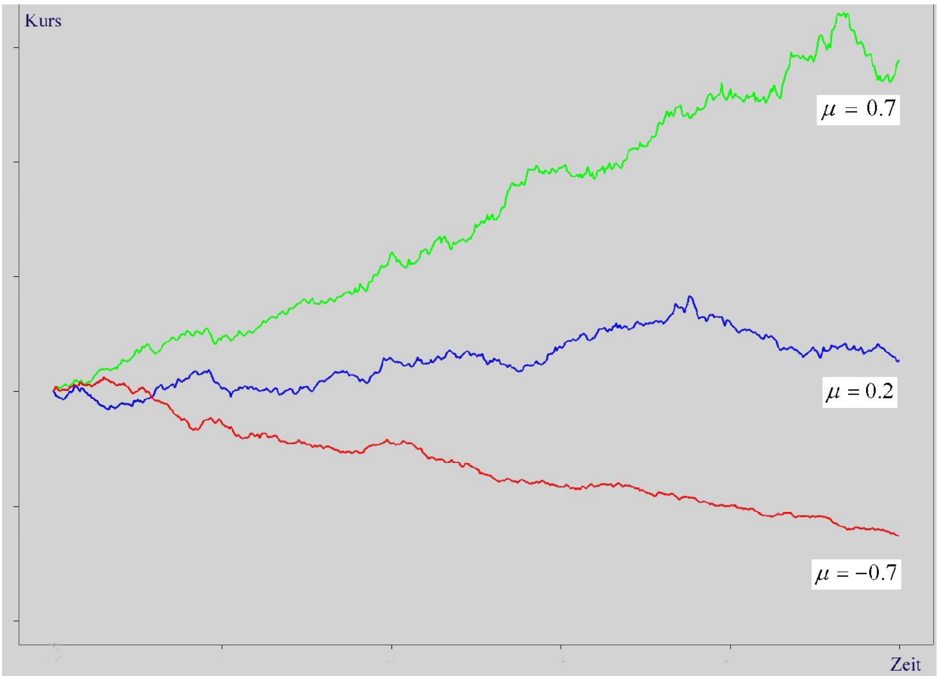


Abbildung 17: Pfade der geometrischen Brownschen Bewegungen

(kurz Log–Normalverteilung). Die Logarithmen $\ln X_t$ sind normalverteilt. In Abbildung 18 werden die Dichtefunktionen einer Standard–Normalverteilung f_Y, mit $Y \sim N(0,1)$, und die Dichtefunktion einer Standard–Log–Normalverteilung f_X, mit $X \sim LN(1,1)$, miteinander verglichen.

Allgemein ergibt sich die Dichtefunktion einer Log–Normalverteilung f_X aus der Transformation der Dichte f_Y, wobei $Y = \ln X$, mit den Parametern (μ, σ), normalverteilt ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{für} \quad y \in (-\infty, \infty) \\ f_X(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} \exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{für} \quad x \in (0, \infty). \end{aligned}$$

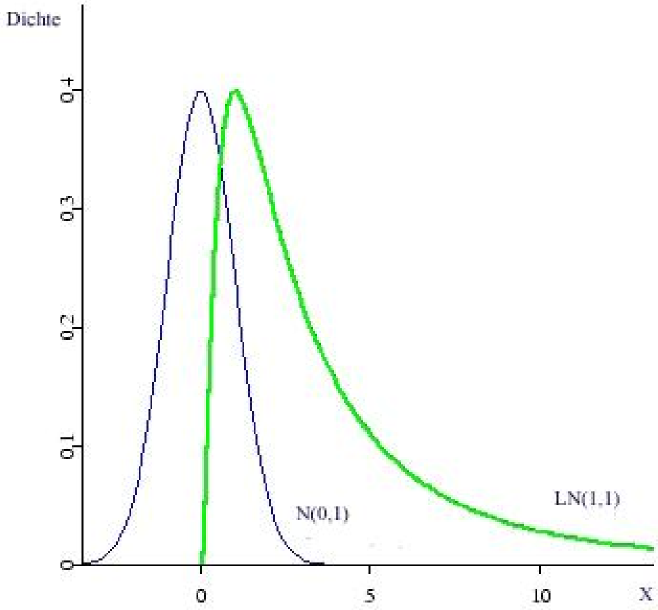


Abbildung 18: Dichtenvergleich zwischen Normal- und Log–Normalverteilung

Der Erwartungswert und die Varianz der log–normalverteilten Größe X lauten:

$$E[X] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \tag{27}$$
$$Var[X] = \exp\{2\mu + \sigma^2\}(\exp\{\sigma^2\} - 1). \tag{28}$$

Weil das Änderungsverhalten eines Prozesses den Zusammenhang zwischen dem künftigen Wert und dem der Vergangenheit darstellt, ist es zur Kalkulation eines solchen Prozesses von großer Bedeutung, zu beschreiben, wie sich der Prozess bis jetzt verändert. Die Gleichung, die das Änderungsverhalten eines stochastischen Prozesses beschreibt, heißt stochastische Differentialgleichung (kurz Differentialgleichung). Um die Veränderung des Wertpapierpreises darzustellen, wird oft eine Differentialgleichung der folgenden Art herangezogen.

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{29}$$

Diese Modellierung beruht auf der Annahme, dass Kurszuwächse proportional erfolgen. In der Regel steigen die Kurse mit dem Maß in der Nähe ihrer Drift μ. Nur in wenigen Situationen werden die Kurse nach oben driften. Daher entsteht die rechtsschiefe Verteilung, wie es bei der Log–Normalverteilung der Fall ist.

Folgende Ausführung zeigt, dass die Lösung der Differentialgleichung (29) eine geometrische Brownsche Bewegung ist

$$X_t = X_0 \exp\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\}. \tag{30}$$

Ein wichtiges Werkzeug zur Prüfung, ob Gleichung (30) die Lösung der Differentialgleichung (29) darstellt, ist Itô's Formel (auch bekannt als Itô's Lemma, benannt nach dem japanischen Mathematiker Itô Kiyoshi[86]). Itô betrachtet in seinem Lemma Prozesse, die als Itô Prozess bezeichnet werden und wie folgt definiert sind:

Definition 6 (Itô Prozess)
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. $(W_t)_{t\in[0,T]}$ sei eine Standard–Brownsche Bewegung. Ein Prozess $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ heißt Itô Prozess, falls für alle $t \in [0,T]$ gilt:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(s, W_s)ds + \int_0^t g(s, W_s)dW_s, \tag{31}$$

wobei:

- *Y_0 ist $\mathcal{F}_0$ messbar,*
- *$(f_t)_{t\in[0,t]}$ und $(g_t)_{t\in[0,T]}$ sind $\mathcal{F}_t$–adaptierte Prozesse,*
- *$\int_0^t |f_s|ds < \infty$, P–fast sicher und*
- *$\int_0^t |g_s|^2 ds < \infty$, P–fast sicher.*

In Differentialschreibweise hat der Itô Prozess (31) die Form:

$$dY_t = f(t, W_t)dt + g(t, W_t)dW_t. \tag{32}$$

[86]Vgl. Itô (1954), S. 1–51.

Der Term $\int_0^t g(s,W_s)dW_s$ in Gleichung (31) heißt Itô Integral. Eine sehr nützliche Eigenschaft des Itô Integrals lautet: Falls die Funktion $g(t,W_t)$ an $\mathcal{F}$ adaptiert ist, dann ist $\int_0^t g(s,W_s)dW_s$ ein Martingal.[87] Der Beweis für diese Eigenschaft findet sich bei Mikosch (1998).[88]

Itô's Formel besagt:

Satz 4 (Itô's Formel)

h sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion eines Itô Prozesses $(Y_t)_{t\in[0,T]}$. Dann ist $h(t,Y_t)$ ein Itô Prozess und es gilt:

$$\begin{aligned} h(t,Y_t) &= h(0,Y_0) + \int_0^t h_s'(s,Y_s)ds + \int_0^t h_y'(s,Y_s)dY_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t h_{yy}''(s,Y_s)d\langle Y,Y\rangle_s \end{aligned} \tag{33}$$

Der Beweis von Itô's Formel (33) findet sich z. B. bei Karatzas und Shreve (1991).[89]

Mit Hilfe Itô's Formel lässt sich zeigen, dass Gleichung (30) die Lösung der Differentialgleichung (29) ist.

Beweis: Im ersten Schritt werden folgende definiert:

$$Y_t = W_t, \qquad f(t,W_t) = \mu X_t, \qquad g(t,W_t) = \sigma X_t \qquad \text{und} \qquad h(t,Y_t) = X_t$$

Wendet man nun Itô's Formel (33) an, folgt aus der Gleichung (30):

$$\begin{aligned} X_t = h(t,Y_t) &= h(0,Y_0) + \int_0^t h_s'(s,Y_s)ds + \int_0^t h_y'(s,Y_s)dY_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t h_{yy}''(s,Y_s)d\langle Y,Y\rangle_s \\ &= X_0 + \int_0^t X_s(\mu - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t X_s\sigma dW_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t X_s\sigma^2 ds \qquad\qquad |\text{mit } \langle Y,Y\rangle_s = s \\ &= X_0 + \int_0^t X_s\mu ds + \int_0^t X_s\sigma dX_s \end{aligned} \tag{34}$$

[87] Vgl. Mikosch (1998), S. 111.

[88] Vgl. Mikosch (1998), S. 190 f.

[89] Vgl. Theorem 3.3 in Karatzas und Shreve (1991), S. 149 ff.

Die Differentialform der Gleichung (34) lautet:

$$dX_t = X_t \mu dt + X_t \sigma dW_t.$$

Dividiert man diese Gleichung durch X_t, so ergibt sich

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

Dies ist die Differentialgleichung (29). ■

6.1.2 Methode der risikoneutralen Bewertung

Zu Beginn des Kapitels 2.1.2 wurde erwähnt, dass der Unternehmenswert die Erwartungen der Kapitalgeber hinsichtlich der künftigen Erträge einer Unternehmung widerspiegelt. Dabei prägen zwei wesentliche Faktoren die Erwartungsbildung: die Einschätzung der Entwicklung der unternehmerischen Erträge und die Risikoeinstellung der Kapitalgeber. Dies bedeutet, dass die Erwartungen subjektiv sind und sich von Individuum zu Individuum unterscheiden. Der Marktwert einer Unternehmung soll aber eine gewisse Objektivität darstellen und für alle Marktteilnehmer gelten. Es ist eine Aufgabe des Marktes, die subjektiven Erwartungen zum Marktpreis überzuleiten.

In der Literatur existieren viele Modelle, die den Marktpreisbildungsprozess erklären. Neben dem CAPM ist die risikoneutrale Bewertung eine der am häufigsten verwendeten Methoden. Sie beruht auf der im letzten Abschnitt vorgestellten Theorie der stochastischen Prozesse. Dabei wird der Marktmechanismus als ein perfekt funktionierendes Informationssystem interpretiert. Auf dem Kapitalmarkt werden alle notwendigen Informationen aufgenommen. Der Unternehmenswert lässt sich aufgrund der zu einem bestimmten Zeitpunkt zur Verfügung stehenden Informationen ermitteln. Dieser Wert ist objektiv in dem Sinne, dass alle Marktteilnehmer unter Berücksichtigung der auf dem Markt verfügbaren Informationen Erwartungen formulieren, die als Basis ihrer Bewertung dienen. Aus der Aggregation der Erwartungen ergeben sich die Marktpreise. Da sich der Informationsbestand im Zeitablauf ändert, können die Erwartungen der Marktteilnehmer von einem Zeitpunkt zu einem anderen verschieden sein. Dadurch schwanken auch die Marktpreise. Nach diesem Marktmechanismus sind die Preise allein aus den aktuell verfügbaren Informationen abgeleitet. Dies entspricht der Beschreibung in der Modellierung, dass die Preise von dem Informationssystem adaptiert sind.

Der amerikanische Ökonom Paul A. Samuelson[90] war der Vorreiter, der sich intensiv mit der Modellierung der Preisentwicklung auseinander setzte. Er begann, spekulative Preisprozesse mit stochastischen Prozessen zu modellieren, was eine Welle weiterer Arbeiten auslöste. Basierend auf der Idee von Samuelson (1965) haben Black und Scholes (1973) sowie Merton (1973) unabhängig voneinander eine Preisgleichung für Optionen der europäischen Art entwickelt. Ihre Modelle gelten als ein Meilenstein der Finanzwissenschaft.[91]

Insbesondere das Black–Scholes Modell hat nachhaltig die Bewertung von Optionen im Finanzmarkt beeinflusst. Die wesentlichen Erkenntnisse des Black–Scholes Modells sind, dass sich eine Finanzoption durch ein selbstfinanzierendes Portfolio aus dem risikolosen Wertpapier und dem Basiswert duplizieren lässt und dass der Optionspreis dem Preis des duplizierten Portfolios entsprechen muss.[92] Die Bewertung der Option kann durch Diskontierung mittels eines risikolosen Zinssatzes ohne Zuschlag einer Risikoprämie erfolgen. Dieses Bewertungsprinzip wird in der Literatur auch als Fundamentalsatz der Preistheorie bezeichnet.[93] Dem Fundamentalsatz zufolge ist die Bewertung unabhängig von der Risikopräferenz der Marktteilnehmer. Deswegen wird dieser Ansatz als risikoneutrale Bewertung bezeichnet.

[90]Paul A. Samuelson hat den Nobelpreis für Wirtschaft im Jahre 1970 erhalten.

[91]Scholes und Merton wurden für die Entwicklung ihrer Modelle im Jahr 1997 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaft geehrt. Black war zu dieser Zeit bereits verstorben.

[92]Vgl. Black und Scholes (1973), S. 637.

[93]Vgl. Kruschwitz *et al.* (2005), S. 4.

Heutzutage wird das risikoneutrale Bewertungsverfahren sowohl zum Bewerten und Hedgen von derivativen Wertpapieren als auch im Bereich Corporate Finance (z. B. bei der Beurteilung der Rentabilität von Investitionen in einer Unternehmung)[94] verwendet. Die Anzahl der Modelle hat sich entsprechend stark ausgeweitet. Eine systematische und ausführliche Darstellung der Modellierung mit stochastischen Prozessen findet sich z. B. in Karatzas und Shreve (1991) oder speziell in Verbindung mit Finanzmathematik in Karatzas und Shreve (1998) bzw. in Baxter und Rennie (2001).

Bei der risikoneutralen Bewertung ist der Vorgang der sog. Maßtransformation von großer Bedeutung. Die Maßtransformation ist eine sehr nützliche Technik in der stochastischen Kalkulation. Die zentrale Idee besteht darin, ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß des zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraums abzuleiten. Unter diesem äquivaltenten Maß soll ein betrachteter stochastischer Prozess bestimmte (gewünschte) Eigenschaften aufweisen. Die Voraussetzung zur Maßtransformation ist die absolute Stetigkeit und Äquivalenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Definition 7 (Absolute Stetigkeit und Äquivalenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen)
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt absolut stetig bezüglich P (im Zeichen $Q \ll P$), falls für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt:

$$P(F) = 0 \Longrightarrow Q(F) = 0$$

Wenn sowohl $Q \ll P$ als auch $P \ll Q$ gilt, dann sind die beiden Maße P und Q äquivalent.

Die theoretische Grundlage für die Maßtransformation ist der Satz von Girsanov.

Satz 5 (Satz von Girsanov)
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung

[94] Vgl. z. B. die Modelle in Dixit und Pindyck (1993).

bezüglich P. Ein Prozess $(M_t)_{t\in[0,T]}$*, definiert als:*

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right\}$$

ist ein Martingal, wobei $(\theta_t)_{t\in[0,T]}$ *mit der Eigenschaft* $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ *ein* $\mathcal{F}$*–adaptierter Prozess ist. Die Relation*

$$Q(A) = \int_A M_T(\omega) dP(\omega)$$

definiert ein Maß Q, das äquivalent zum Maß P ist. Definiert man einen Prozess $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$*, als*

$$W_t^* = W_t + \int_0^t \theta_s ds,$$

dann ist $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ *eine Standard–Brownsche Bewegung auf* $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$*.*

Der Beweis für Satz 5 findet sich z. B. in Karatzas und Shreve (1991).[95]

Durch eine Maßtransformation wird der diskontierte Preisprozess des Basiswertes bzw. die diskontierte Wertentwicklung des nachgebauten Portfolios im Black–Scholes Modell ein Martingal. Mit Hilfe der Martingaleigenschaft (25) wird der Preis der europäischen Call Option berechnet. Im Folgenden soll als Beispiel die Maßtransformation bei der risikoneutralen Bewertung einer europäischen Call Option im Rahmen des Black–Scholes Modells vorgestellt werden. Kapitel 4.1 entwickelt dazu einen Ansatz, der das risikoneutrale Bewertungsprinzip anwenden wird. Mit diesem Ansatz wird die Vorteilhaftigkeit der Risikoseparierung quantifiziert.

Die zentrale Annahme zur risikoneutralen Bewertung ist der Ausschluss von Arbitragemöglichkeiten (Annahme 3). Die Konstruktion eines Martingalmaßes im Rahmen des Black–Scholes Modells fordert darüber hinaus noch folgende Annahme:

Annahme 10 (Vollständiger Kapitalmarkt)
Es existiert ein vollständiger Kapitalmarkt. Die Replikation jedes Zahlungsstroms auf dem Kapitalmarkt ist für jeden Marktteilnehmer möglich.

[95]Vgl. Theorem 5.1 in Karatzas und Shreve (1991), S. 191 ff.

Mit der Annahme 10 unterstellt man, dass jeder Marktteilnehmer die Wertentwicklung eines derivativen Finanzproduktes durch ein Portfolio aus Finanzbasistiteln rekonstruieren kann. Der Wert von Investitionen entspricht dem Wert des konstruierten Portefeuilles.

Wenn der Kapitalmarkt vollkommen (Annahme 1), arbitragefrei (Annahme 3) und vollständig (Annahme 10) ist, dann existiert ein eindeutiges Martingalmaß.[96]

Black–Scholes betrachteten in ihrem Modell einen Basiswert (S), der weder Dividende noch Bezugsrecht zahlt. S_t sei der Preis des Basiswertes zum Zeitpunkt t. Eine stochastische Differentialgleichung in der Art von Gleichung (29) beschreibt die Preisveränderung des Basistitels:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t \tag{35}$$

Die Anwendung von Itô's Formel (33) auf die Differentialgleichung (35) führt zu einer geometrischen Brownschen Bewegung:

$$S_t = S_0 \exp\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right\} \tag{36}$$

Es existiert weiterhin ein risikoloses Wertpapier (B). Der Preis des risikolosen Wertpapiers B_t ist gegeben durch eine deterministische Differentialgleichung:

$$dB_t = rB_t dt \qquad \forall\ t \in [0, T],$$

wobei r die stetige risikolose Zinsrate bezeichnet. Eine europäische Call Option (C) räumt dem Halter das Recht (aber nicht die Pflicht) ein, den zugrunde liegenden Basiswert (S), an einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt (T), zu einem im Voraus festgelegten Preis (Ausübungspreis K) zu erwerben. Der Verkäufer einer Call Option ist zur Lieferung des Basiswerts zum Preis K verpflichtet, für die er eine

[96] Weitere Arbeiten, die sich mit der Existenz des Martingalmaßes beschäftigen, sind z. B. die Arbeit von Harrison und Kreps (1979), von Harrison und Pliska (1983) und von Delbaen und Schachemayer (1994).

Prämie vom Käufer erhält. In der Praxis wird allerdings der Basiswert im Falle der Ausübung nicht tatsächlich geliefert. Der Verkäufer zahlt dem Käufer stattdessen die Differenz zwischen dem aktuellen Marktpreis des Basiswertes (S_T) und dem Ausübungspreis. Aufgrund dieses Wahlrechts erbringt eine Call Option ihrem Besitzer am Ausübungszeitpunkt einen Rückfluss (C_T) in Höhe

$$C_T = (S_T - K)^+. \tag{37}$$

Der Wert einer Call Option (C_t) während der Laufzeit variiert in Abhängigkeit zum Preis des Basiswertes.

Unter der Annahme 10 kann die Call Option durch ein Portfolio nachgebaut werden. Die Zahlungsstruktur des nachgebauten Portfolios (äquivalenten Portfolios) ist mit der Zahlungsstruktur der Call Option identisch. Das äquivalente Portfolio (V) besteht aus dem risikolosen Wertpapier (B) und dem Basiswert.

Sei a_t die Stückzahl des Basisititels und b_t die Stückzahl des risikolosen Wertpapiers, die man zum Zeitpunkt t im Portfolio V hält, dann ist der Wert V_t gegeben durch:

$$V_t = a_t S_t + b_t B_t \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

Das Portfolio V wird zum Zweck der Duplikation dynamisch an den Kursverlauf des Basiswertes angepasst. Es dürfen aber keine Zahlungen während der Anpassung anfallen, da bei der betrachteten Option keine Zahlungen während der Laufzeit erfolgen.[97] Das bedeutet, dass bei dem Anpassungsprozess weder Geldnachschüsse notwendig noch Geldrückflüsse möglich sind. Man bezeichnet dies als selbstfinanzierend. Formal gilt folgende Gleichung:

$$dV_t = a_t dS_t + b_t dB_t. \tag{38}$$

Weil die Arbitragegelegenheiten auf dem Markt ausgeschlossen sind, gilt damit das Gesetz des einheitlichen Preises. Der Optionswert (C_t) muss für alle $t \in T$ dem

[97] Vgl. Löffler (2005), S. 77.

Portfoliowert (V_t) entsprechen, da die Call Option und das äquivalente Portfolio dieselbe Auszahlung ergeben.

Man betrachte den diskontierten Preis des Basistitels $(\check{S}_t)_{t\in[0,T]}$

$$\check{S}_t = \exp\{-rt\}S_t$$

und wende Itô's Formel (33) an[98]:

$$\begin{aligned} d\check{S}_t &= -r\exp\{-rt\}S_t dt + \exp\{-rt\}dS_t \qquad (39)\\ &= -r\exp\{-rt\}S_t dt + \exp\{-rt\}S_t(\mu dt + \sigma dW_t)\\ &= \check{S}_t[(\mu - r)dt + \sigma dW_t]\\ &=: \sigma\check{S}_t dW_t^*, \qquad (40)\end{aligned}$$

wobei $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ wie folgt definiert ist:

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t.$$

Unter dem äquivalenten Martingalmaß Q ist $(\check{S}_t)_{t\in[0,T]}$ nach Satz 5 ein $\mathcal{F}$–messbares Martingal:

$$\check{S}_t = \check{S}_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t^*\right\}.$$

Durch Anwendung der Definitionen (27) und (28) ergeben sich Erwartungswert und Varianz von $\check{S}_t$ unter dem Maß Q als:

$$\begin{aligned} E_Q^0[\check{S}_t] &= S_0 \qquad (41)\\ Var[\check{S}_t] &= \exp\{\sigma^2\} - 1. \qquad (42)\end{aligned}$$

Die Gleichung (41) spiegelt die Martingaleigenschaft wider. In Analogie zu $\check{S}$ ist der diskontierte Wertprozess des duplizierten Portfolios $(\check{V}_t)_{t\in[0,T]}$ gegeben durch:

$$\check{V}_t = \exp\{-rt\}V_t = \exp\{-rt\}(a_t S_t + b_t B_t).$$

[98] Der diskontierte Preis $\check{S}_t$ ist eine Funktion von t und S_t: $\check{S}_t(t, S_t) = \exp\{-rt\}S_t$. Die zweite Ableitung von $\check{S}$ nach S_t ist gleich null.

Aus Itô's Formel (33) folgt:

$$d\check{V}_t = -r\check{V}_t dt + \exp\{-rt\} dV_t.$$

Aufgrund der Tatsache, dass das Portfolio selbstfinanzierend ist (Bedingung 38), ergibt sich zusammen mit Gleichung (40):

$$\begin{aligned} d\check{V}_t &= -r\exp\{-rt\}(a_t S_t + b_t B_t)dt + \exp\{-rt\}(a_t dS_t + b_t dB_t) \\ &= a_t(-r\exp\{-rt\}S_t dt + \exp\{-rt\}dS_t) \\ &= a_t d\check{S}_t. \end{aligned} \tag{43}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (40) in Gleichung (43) und Umformulierung der Gleichung (43) in Integralform ergibt sich:

$$\begin{aligned} \check{V}_t &= V_0 + \int_0^t a_s d\check{S}_s \\ &= V_0 + \sigma \int_0^t a_s \check{S}_s dW_s^*, \end{aligned} \tag{44}$$

wobei $\check{V}_0 = V_0$ gelten muss. Unter dem äquivalenten Martingalmaß Q ist $(W_t^*)_{t\in[0,T]}$ eine Standard–Brownsche Bewegung. Der Prozess $(a_t\check{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ist an $\mathcal{F}$ adaptiert. Nach Gleichung (44) ist der Prozess $(\check{V}_t)_{t\in[0,T]}$ unter dem Maß Q ein $\mathcal{F}$–messbares Martingal, da $\check{V}_t$ keine Drift hat und zum Zeitpunkt t eine Funktion von W_t^* ist, wobei W_t^* $\mathcal{F}_t$–messbar ist.

Die Martingaleigenschaft (25) impliziert:

$$E_Q^t[\check{V}_T] = V_t. \tag{45}$$

Weil das Portfolio V die Call Option duplizieren soll, muss gelten, dass V zum Fälligkeitstermin der Option den gleichen Rückfluss wie die Option liefert:

$$\begin{aligned} V_T &= C_T \\ &= (S_T - K)^+. \end{aligned} \tag{46}$$

Bedingung (46) wird als Randbedingung bezeichnet. Unter Verwendung von $\check{V}_T = \exp\{-r(T-t)\}V_T$ folgt nach Einsetzen der Randbedingung (46) in Gleichung (45):

$$\begin{aligned} E_Q^t[\exp\{-r(T-t)\}C_T] &= E_Q^t[\exp\{-r(T-t)\}(S_T-K)^+] \\ &= V_t. \end{aligned}$$

Da während der Laufzeit der Preis der Call Option dem Wert V_t entspricht, gilt:

$$\begin{aligned} C_t = V_t &= E_Q^t[\exp\{-r(T-t)\}(S_T-K)^+] \\ &= E_Q^t[(\exp\{-r(T-t)\}S_T - \exp\{-r(T-t)\}K)^+] \\ &= E_Q^t[(\check{S}_T - \exp\{-r(T-t)\}K)^+]. \end{aligned}$$

Laut der Definition 3 haben die Inkremente $W_T^* - W_t^*$ unter dem Maß Q eine Normalverteilung mit Parametern $(0, T-t)$. Damit gilt für jeden Zeitpunkt t:

$$C_t = \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 \exp\{-0.5\sigma^2(T-t) + \sigma z(T-t)^{0.5}\} - \exp\{-r(T-t)\}K)^+ \varphi(z)dz,$$

wobei $\varphi(z)$ die Dichtefunktion der Standard–Normalverteilung bezeichnet. Relevant sind die Zustände, bei denen die Call Option eine positive Auszahlung liefert. Folglich muss gelten:

$$\begin{aligned} S_0 \exp\{-0.5\sigma^2(T-t) + \sigma z(T-t)^{0.5}\} &\geq \exp\{-r(T-t)\}K \\ \Longrightarrow \qquad z &\geq -\frac{\ln(S_0/K) + (r-0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)^{0.5}}. \end{aligned}$$

Man setze die Untergrenze der Integration als $z^* = -\frac{\ln(S_0/K)+(r-0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)^{0.5}}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} C_t^{BS} &= \int_{z^*}^{\infty} (S_0 \exp\{-0.5\sigma^2(T-t) + \sigma z(T-t)^{0.5}\} - \exp\{-r(T-t)\}K)\varphi(z)dz \\ &= S_0\Phi(z_1) - \exp\{-r(T-t)\}K\Phi(z_2), \qquad (47) \end{aligned}$$

wobei $\Phi(z)$ mit[99]

$$\begin{aligned} z_1 &= -z^* + \sigma(T-t)^{0.5} = \frac{\ln(S_0/K) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)^{0.5}} \quad \text{und} \\ z_2 &= -z^* = \frac{\ln(S_0/K) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma(T-t)^{0.5}} \end{aligned}$$

die Verteilungsfunktion der Standard–Normalverteilung bezeichnet.

Formel (47) ist eine Bewertungsgleichung für eine Call Option der europäischen Art, deren Auszahlungsfunktion (37) eine einfache Struktur hat. Der Optionspreis ist während der Laufzeit demnach eine Funktion der Restlaufzeit, des risikolosen Zinses, des Ausübungspreises, des aktuellen Kurses und der Volatilität des Basistitels. Bis auf die Volatilität des Basistitels sind alle Parameter auf dem Markt beobachtbar.

6.1.3 Binomialmodelle

Binomialmodelle sind diskrete Modelle und werden oft als Approximationsverfahren zum stetigen Black–Scholes Modell verwendet. Die zugrunde liegenden Prozesse haben zeitdiskrete Pfade.

Binomialprozess

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei Ω die Menge der Elementarereignisse, $\mathcal{F}$ die Filtrierung und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}$ bezeichne. Das Binomialmodell ist ein zeitdiskretes Modell. Es gebe während der Laufzeit der Option insgesamt N Handelszeitpunkte t_k, mit $k = \{1, 2, ..., N\}$. Die Länge zwischen zwei beliebigen benachbarten Handelszeitpunkten l seien gleich, mit $l = T/N$.

[99]Zur Berechnung z_1 und z_2 wird folgende Regel in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigt: P sei das unterliegende Wahrscheinlichkeitsmaß und $y = ax + b$, wobei $a > 0$ und b zwei deterministische Parameter sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(X \geq x) &= 1 - P(X \leq x) = P(X \leq -x) \\ P(Y \leq y) &= P(aX + b \leq y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) \end{aligned}$$

Bezeichne S_k den Wert des Basiswertes zum Handelszeitpunkt t_k,[100] kann S_k mit $k > 0$ die Werte

$$S_k = \begin{cases} uS_{k-1} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ dS_{k-1} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases} \qquad p \in (0,1)$$

annehmen, wobei u und d Konstanten sind. Definiert man die relative Veränderung des Basistitels als $R_k = \frac{S_k}{S_{k-1}}$, kann der Prozess $(S_k)_{k\in[1,N]}$ als ein geometrischer Binomialprozess dargestellt werden.

Definition 8 (Geometrischer Binomialprozess)
Eine $\mathcal{F}$–adaptierte Folge von Zufallsvariablen $(S_k)_{k\in[1,N]}$ heißt geometrischer Binomialprozess (kurz Binomialprozess), wenn die relativen Zuwächse $R_k := \frac{S_k}{S_{k-1}}$

- *nur zwei Werte $u > 1$ bzw. $1 > d > 0$ annehmen können,*
- *unabhängig identisch verteilt und unabhängig vom Anfangswert S_0 sind.*

Der Prozess $(S_k)_{k\in[1,N]}$ hat die Form:

$$S_k \quad = \quad S_0 \cdot \frac{S_1}{S_0} \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdots \frac{S_k}{S_{k-1}} = S_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} R_j. \tag{48}$$

Die grafische Darstellung eines Binomialprozesses nennt man einen Binomialbaum. Die Anzahl N ist die Tiefe des Binomialbaums. In Abbildung 19 ist der Binomialbaum für die Entwicklung des Basistitels dargestellt.

Es ist ersichtlich, dass ein solcher Binomialprozess pfadunabhängig ist, da ein möglicher zum Zeitpunkt T realisierter Wert des Basistitels S_T über mehrere Pfade erreichbar ist. Dagegen wird S_T von der Anzahl der Aufwärtsbewegungen des Basistitels während der Laufzeit bestimmt. Damit keine Arbitragegelegenheit existiert, muss gelten:

$$u > \hat{r} > d > 0,$$

[100] Für den Handelszeitpunkt t_N $(k = N)$ gilt: $S_N = S_T$.

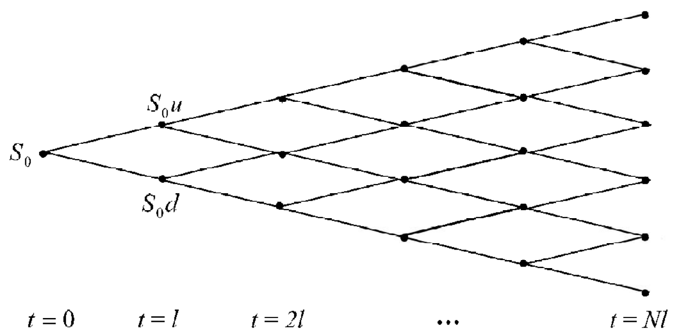


Abbildung 19: Pfadunabhängiger Binomialprozess

wobei $\hat{r}$ die relative Preisveränderung des risikolosen Wertpapiers nach einer Zeiteinheit ist. Unter dem Maß P gilt:

$$E_P^k[R_k] = pu + (1-p)d \tag{49}$$

$$Var[R_k] = pu^2 + (1-p)d^2 - (E_P^k[R_k])^2. \tag{50}$$

Mit dem vorgestellten Binomialprozess wende ich mich nun der Methode der Approximation zu. Nach dem zentralen Grenzwertsatz nähert sich die Verteilung der standardisierten Summe einer Folge von binomialverteilten Zufallsgrößen der Standardnormalverteilung an.

Satz 6 (Zentraler Grenzwertsatz)

X_n, mit $n \to \infty$, seien eine Folge unabhängiger, identisch binomialverteilter Zufallsvariablen, für die der Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz $Var[X]$ existiert. $\mathcal{Z}_n$ bezeichnet die Standardisierung von

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Wenn gilt:

$$\mathcal{Z}_n = \frac{S_n - nE[X]}{\sqrt{nVar[X]}},$$

dann ist $\mathcal{Z}_n$ approximativ standardnomal verteilt.

Der Beweis für Satz 6 findet sich z. B. bei Chung (1978).[101] An dieser Stelle wird das im Satz 6 dargestellte Verhalten durch Abbildung 20 veranschaulicht.

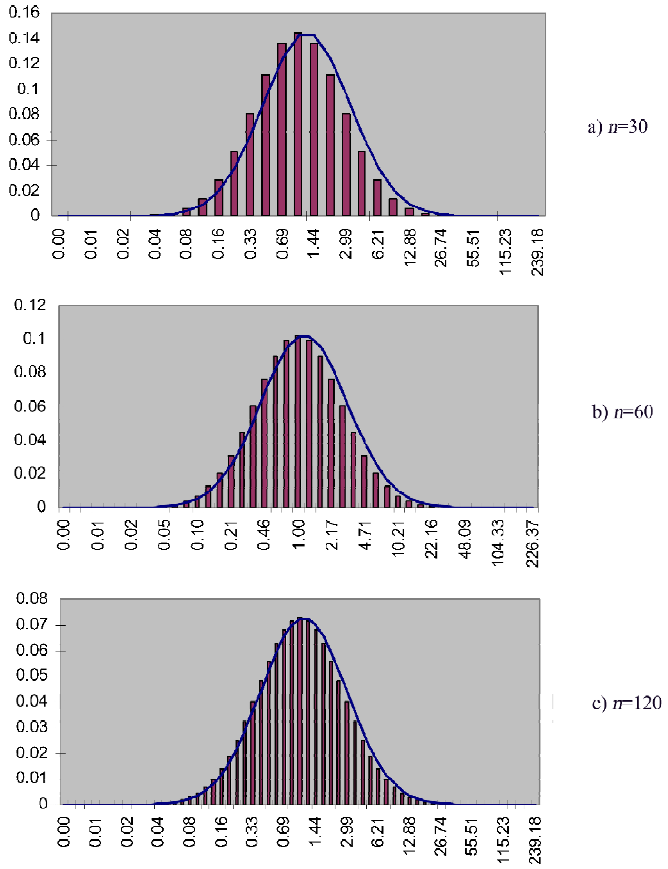


Abbildung 20: Vergleich zwischen der Dichte der Normalverteilung und der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung

Dabei wird die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung als Flächen von Rechtecken und die Dichte der Normalverteilung als Gaußsche Glockenkurve dargestellt. Es ist in Abbildung 20 leicht zu erkennen, dass sich die Anpassung der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung an die Dichte der Normalverteilung mit wachsender Anzahl N verbessert.

[101]Vgl. Chung (1978), S. 236 ff.

Cox/Ross/Rubinstein–Modell

Mit Hilfe von Satz 6 lässt sich der Preis des Basistitels im Black–Scholes Modell durch eine Folge von Binomialzufallsvariablen mit großem N approximieren. Ein sehr verbreiteter Ansatz ist das Modell von Cox/Ross/Rubinstein. Die Parameter $\hat{r}$, u und d wurden in diesem Modell so bestimmt, dass die Konvergenz unter dem Maß P gewährleistet wird.

Berechnung des Parameters $\hat{r}$

Wenn man eine Geldeinheit zum Zinssatz r mit stetiger Verzinsung für einen Zeitraum der Länge T anlegt, so erhält man am Ende des Zeitraums eine Auszahlung in Höhe $\exp\{rT\}$. Würde hingegen der Zeitraum in N äquidistante Zeitintervalle geteilt, erhält man zu den N äquidistanten Zeitpunkten jeweils eine Zinszahlung. Diese wird wieder zum gleichen Zinssatz angelegt, so dass man am Ende des Zeitraums ein Gesamtvermögen von $\hat{r}^N$ besitzt, wobei $\hat{r}$ die relative Veränderung des Vermögens nach einem Zeitintervall bezeichnet. Lässt man die Zeitdifferenz zwischen den Zahlungen gegen null (bzw. die Anzahl der Zeitpunkte gegen unendlich) gehen, gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \hat{r}^N = \exp\{rT\} \implies \hat{r} \approx \exp\left\{r\frac{T}{N}\right\} = \exp\{rl\}.$$

Berechnung der Parameter u, d und p

Bei der Approximation ist Erwartungstreue eine wünschenswerte Eigenschaft. Das bedeutet, dass die Momente von R_k für $N \to \infty$ den Momenten von $\frac{S_t}{S_{t-l}}$ entsprechen sollen.

Wegen Gleichung (36) ist die Preisveränderung des Basiswertes nach einem Zeitintervall der Länge $l = T/N$ gegeben durch:

$$\frac{S_t}{S_{t-l}} = \exp\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})l + \sigma(W_t - W_{t-l})\right\}.$$

Laut der Definition 3 gilt:

$$W_t - W_{t-l} \sim N(0, l).$$

Somit ist $\frac{S_t}{S_{t-l}}$ lognormalverteilt mit den Parametern $((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)l, \sigma\sqrt{l})$. Durch Anwendung der Gleichungen (27) und (28) ergeben sich unter dem Maß P der Erwartungswert und die Varianz von $\frac{S_t}{S_{t-l}}$:

$$E_P^k[\frac{S_t}{S_{t-l}}] = \exp\{\mu l\} \tag{51}$$

$$Var[\frac{S_t}{S_{t-l}}] = \exp\{2\mu l\}(\exp\{\sigma^2 l\} - 1). \tag{52}$$

In Verbindung mit der Gleichung (49) und (50) gilt bei einer erwartungstreuen Appoximation:[102]

$$\lim_{N\to\infty} pu + (1-p)d = \exp\{\mu l\} \tag{53}$$

$$\lim_{N\to\infty} p(u^2 - d^2) + d^2 - (E_P^k[R_k])^2 = \exp\{2\mu l\}(\exp\{\sigma^2 l\} - 1), \tag{54}$$

wobei p für die Wahrscheinlichkeit der Aufwärtsbewegung steht. Durch Auflösung der Gleichung (53) nach p ergibt sich:

$$p = \frac{\exp\{\mu l\} - d}{u - d}. \tag{55}$$

Damit keine der Bewegungsrichtigungen bei dem Binomialprozess präferiert wird, muss gelten:

$$ud = 1. \tag{56}$$

Somit gelangt der Preis des Basiswertes nach einer Aufwärtsbewegung, auf die eine Abwärtsbewegung folgt, zum Ausgangswert zurück. Setzt man die Gleichungen (55) und (53) in Gleichung (54) ein, folgt

$$u + \frac{1}{u} - \frac{1}{\exp\{\mu l\}} = \exp\{\mu l + \sigma^2 l\}.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet[103]

$$u = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1},$$

[102] In Cox/Ross/Rubinstein Modell wird der Erwartungswert unter dem nicht transformierten Wahrscheinlichkeitsmaß verwendet.

[103] Die negative Wurzel ist $d = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1}$.

wobei $c = \exp\{-\mu l\} + \exp\{\mu l + \sigma^2 l\}$ gilt.

Mit der Rechenregel

$$\exp\{x\} \quad = \quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{57}$$

lässt sich c approximativ bestimmen[104].

$$\begin{aligned} c &\approx \underbrace{1 - \mu l}_{\approx \exp\{-\mu l\}} + \underbrace{1 + \mu l + \sigma^2 l}_{\approx \exp\{\mu l + \sigma^2 l\}} \\ &= 2 + \sigma^2 l. \end{aligned}$$

Damit gilt näherungsweise für u

$$\begin{aligned} u &\approx 1 + \frac{\sigma^2 l}{2} + \sqrt{\frac{(2 + \sigma^2 l)^2}{4} - 1} \approx 1 + \sigma\sqrt{l} + \frac{\sigma^2 l}{2} \\ &\approx \exp\{\sigma\sqrt{l}\}. \end{aligned}$$

Für kleine Zeitintervalle mit der Länge l ergeben sich[105]

$$u = \exp\{\sigma\sqrt{l}\} \tag{58}$$

$$d = \exp\{-\sigma\sqrt{l}\}. \tag{59}$$

Werden die Gleichungen (58) und (59) in Gleichung (55) eingesetzt, erhält man

$$p = \frac{\exp\{\mu l\} - d}{u - d} = \frac{\exp\{\mu l\} - \exp\{-\sigma\sqrt{l}\}}{\exp\{\sigma\sqrt{l}\} - \exp\{-\sigma\sqrt{l}\}}.$$

Mit der Anwendung der Rechenregel (57) gilt

$$p \quad = \quad \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{l}). \tag{60}$$

Binomialmodell unter dem Martingalmaß Q

[104] Alle Terme der Ordnung x^2 und höher werden vernachlässigt, weil l für große N einen sehr kleinen Wert annimmt.

[105] Die Berechnung von d erfolgt analog der Bestimmung von u.

Die Multinomialverteilung ist die Verallgemeinerung der Binomialverteilung auf mehr als zwei mögliche Ereignisse. Jedem Ereignis wird eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet, die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss dabei eins sein. Man zählt, wie oft bei N Versuchen jedes Ereignis eintritt.

Definition 9 (Multinomialverteilung)
Sei $N \geq 1$, $p = \{p_1, ..., p_S\}$ mit $0 < p_s < 1$ und $\sum p_s = 1$. Eine Folge von Zufallsvariablen $J = \{j_1, ..., j_S\}$ heißt multinomialverteilt, wenn sie folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt:

$$P(J) = \begin{cases} \begin{pmatrix} N \\ j_1, ...j_S \end{pmatrix} p_1^{j_1} \cdots p_S^{j_S} & \text{mit } \sum_{s=1}^{S} j_s = N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{61}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} N \\ j_1, ...j_S \end{pmatrix} = \frac{N!}{j_1! \cdots j_S!}$$

den Multinomialkoeffizient bezeichnet.

Unter dem Martingalmaß Q ist der diskontierte Preisprozess des Basistitels im Black–Scholes Modell ein $\mathcal{F}$–Martingal. Die relative Veränderung nach einem Zeitraum mit einer Länge l ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{\check{S}_t}{\check{S}_{t-l}} &= \frac{\exp\{-rt\}S_t}{\exp\{-r(t-l)\}S_{t-l}} = \exp\{-rl\}\frac{S_t}{S_{t-l}} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 l + \sigma(W_t^* - W_{t-l}^*)\right\}. \end{aligned}$$

Somit ist $\check{S}_t/\check{S}_{t-l}$ lognormalverteilt mit den Parametern $(-\frac{1}{2}\sigma^2 l, \sigma\sqrt{l})$. Durch Anwendung der Gleichungen (27) und (28) ergeben sich unter dem Maß Q der Erwartungswert und die Varianz von $\check{S}_t/\check{S}_{t-l}$:

$$\begin{aligned}
E_Q^{t-l}[\frac{\exp\{-rl\}S_t}{S_{t-l}}] &= 1 \\
\Longrightarrow \quad E_Q^{t-l}[\frac{S_t}{S_{t-l}}] &= \exp\{rl\} \quad \text{und} \\
Var[\frac{\exp\{-rl\}S_t}{S_{t-l}}] &= \exp\{\sigma^2 l\} - 1 \\
\Longrightarrow \quad Var[\frac{S_t}{S_{t-1}}] &= \exp\{2rl + \sigma^2 l\} - \exp\{2rl\}.
\end{aligned}$$

Im Rahmen eines Binomialmodells gilt für den diskontierten Preisprozess $\check{S}_k$:

$$\check{S}_k = \frac{1}{\hat{r}^k} S_k.$$

Damit $\check{S}_k$ unter dem Maß Q ein Martingal ist, muss gelten

$$\begin{aligned}
E_Q^k[\check{S}_{k+1}] &= \check{S}_k \\
E_Q^k[\frac{1}{\hat{r}^{k+1}} S_{k+1}] &= \frac{1}{\hat{r}^k} S_k \qquad |S_k \text{ ist } \mathcal{F}_k\text{–messbar.} \\
E_Q^k[\frac{1}{\hat{r}} \frac{S_{k+1}}{S_k}] &= 1 \\
E_Q^k[R_k] &= \hat{r} \qquad |R_k \text{ ist nach Definition 8 nicht } \mathcal{F}_k\text{–messbar.} \qquad (62) \\
qu + (1-q)d &= \hat{r},
\end{aligned}$$

wobei q die Wahrscheinlichkeit für Aufwärtsbewegung unter dem Maß Q ist. Unter dem Maß Q entspricht der erwartete relative Zuwachs $E_Q^k[R_k]$ der risikolosen Verzinsung $\hat{r}$.

Die Varianz von R_k ist gegeben durch:

$$Var[R_k] = qu^2 + (1-q)d^2 - (E_Q^k[R_k])^2. \qquad (63)$$

Bei einer schätztreuen Approximation muss im Rahmen eines Binomialmodells unter dem Maß Q Folgendes gelten:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} qu + (1-q)d &= \hat{r} = \exp\{rl\} \qquad \text{und} \\
\lim_{N\to\infty} q(u^2 - d^2) + d^2 - (E_Q^k[R_k])^2 &= \exp\{2rl + \sigma^2 l\} - \exp\{2rl\}.
\end{aligned}$$

Durch analoge Berechnung zu den Gleichungen (53) bis (60) erhält man:

$$u = \exp\{\sigma\sqrt{l}\}, \qquad d = \exp\{-\sigma\sqrt{l}\} \qquad \text{und}$$

$$q = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{l}\right). \tag{64}$$

Herleitung des Martingalmaßes im Rahmen eines Multinomialmodells

Um eine zweidimensionale geometrische Brownsche Bewegung zu approximieren, greift man auf das Multinomialmodell zurück. Sei (X_t^1, X_t^2) eine zweidimensionale geometrische Brownsche Bewegung, (X_k^1, X_k^2) ein zweidimensionaler Binomialprozess, der sich bei immer feiner werdender Diskretisierung gegen (X_t^1, X_t^2) konvertiert.

Herleitung des Martingalmaßes im Rahmen eines Multinomialmodells benötigt die Theorien aus der statistischen Konvergenz.

Definition 10 (Konvergenz in Wahrscheinlichkeit)
Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n>0}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen die Zufallsvariable X, wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

Eine Möglichkeit, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit zu realisieren, wird im Satz der schwachen Konvergenz vorgestellt.

Satz 7 (Schwache Konvergenz)
Eine Folge von Verteilungsfunktionen $\{F_n\}$ konvergiere schwach gegen eine Verteilungsfunktion F. Dann konvergiert die Folge der zugehörigen charakteristischen Funktionen ϕ_n für jedes θ gegen die charakteristische Funktion ϕ von F. Wenn umgekehrt eine Folge charakteristischer Funktionen ϕ_n für jedes θ gegen eine stetige Funktion ϕ konvergiert, dann konvergiert die zugehörige Folge von Verteilungsfunktionen F_n schwach gegen eine Verteilungsfunktion F und ϕ ist die charakteristische Funktion von F.

Der Satz der schwachen Konvergenz geht auf Lévy zurück.[106] Den Beweis dafür findet man z. B. bei Billingsley (1968).[107]

Die charakteristische Funktion ϕ wird wie folgt definiert:

Definition 11 (Charakteristische Funktion)
X sei eine n–dimensionale zufällige Variable. Den Erwartungswert

$$E[e^{i\theta X}] = \phi_X(\theta)$$

bezeichnet man als charakteristische Funktion der zufälligen Variablen X.

Die in Satz 7 verwendete Tatsache, dass $\phi_X(\theta)$ für alle $\theta \in R_n$ erklärend ist, wird im Satz von Lévy festgehalten.

Satz 8 (Satz von Lévy 1925)
$\phi_X(\theta)$ sei die charakteristische Funktion einer zufälligen Variablen X mit der Verteilungsfunktion F. Dann ist die Verteilungsfunktion F durch $\phi_X(\theta)$ eindeutig bestimmt und umgekehrt.[108]

Damit die Konvergenz der gemeinsamen Verteilungsfunktion von (X_k^1, X_k^2) gegen die Verteilung von (X_t^1, X_t^2) gewährleistet ist, muss die charakteristische Funktion von (X_k^1, X_k^2) nach dem Satz der schwachen Konvergenz approximativ gleich der charakteristischen Funktion von (X_t^1, X_t^2) sein. Das bedeutet, man soll q so bestimmen, dass die charakteristische Funktion von (X_k^1, X_k^2) für $N \to \infty$ gleich der charakteristischen Funktion von (X_t^1, X_t^2) ist.

Probleme bereitet die charakteristische Funktion der zweidimensionalen lognormalverteilten Zufallsgröße. Eine solche charakteristische Funktion ist analytisch nicht handhabbar. Daher transformiert man X^i, indem man die neuen Variablen $R_t^i = ln(\frac{X_t^i}{X_{t-l}^i})$ als logarithmierte Wertveränderung einführt. Die gemeinsame Verteilung

[106] Vgl. Lévy (1925), S. 195 ff.
[107] Vgl. Billingsley (1968), S. 33 f.
[108] Vgl. Lévy (1925) S. 166 ff.

der Zufallsvariablen (R_t^1, R_t^2) genügt dann einer zwei–dimensionalen Normalverteilung. Die charakteristische Funktion von (R_t^1, R_t^2) lautet:

$$\phi_{R_t}(\theta_1, \theta_2) \quad = \quad E[e^{i\theta_1 R^1 + i\theta_2 R^2}]. \tag{65}$$

Im Falle einer Multinomialverteilung lässt sich die charakteristische Funktion wie folgt darstellen:[109]

$$\begin{aligned} \phi_{R_k}(\theta_1, \theta_2) \quad &= \quad p_1 e^{i\sqrt{h}(\theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2)} + p_2 e^{i\sqrt{h}(\theta_1\sigma_1 - \theta_2\sigma_2)} \\ & \quad +p_3 e^{i\sqrt{h}(-\theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2)} + p_4 e^{i\sqrt{h}(-\theta_1\sigma_1 - \theta_2\sigma_2)}. \end{aligned} \tag{66}$$

Um beide charakteristische Funktionen zu vergleichen, entwickelt man für $\phi_{R_t}(\theta_1, \theta_2)$ und $\phi_{R_k}(\theta_1, \theta_2)$ jeweils eine Taylor Reihe. Eine Taylor Reihe ist in der Analysis eine Darstellung einer Funktion in der Umgebung bestimmter Punkte. Ist eine Funktion f im Punkt θ beliebig oft differenzierbar, kann man diese Funktion durch eine Potenzreihe darstellen.

$$f(x) \quad = \quad \sum_{b=0}^{\infty} \frac{f^{(b)}(\theta)}{b!} x^b$$

Betrachtet man nur endlich viele Glieder der obigen Reihe, lautet die Taylor Reihe der Funktion $e^{i\theta X}$:

$$\begin{aligned} \phi_X(\theta) \quad &= \quad 1 + \sum_{b=1}^{r} \frac{(i\theta)^b}{b!} \mu_b + o(\theta), \qquad (67) \\ \text{mit } \lim_{\theta \to 0} o(\theta) \quad &= \quad 0. \end{aligned}$$

Dabei ist μ_b das b–te Moment. Durch die Anwendung von Gleichung (67) auf die charakteristische Funktionen (65) und (66) wurden zwei Taylor Reihen entwickelt:

$$\begin{aligned} \phi_{R_t}(\theta_1, \theta_2) \quad &= \quad 1 + i\sqrt{l}(\theta_1(r - \frac{\sigma_1^2}{2}) + \theta_2(r - \frac{\sigma_2^2}{2})) \\ & \quad -\frac{l}{2}(\theta_1^2\sigma_1^2 + 2\theta_1\theta_2\rho\sigma_1\sigma_2 + \theta_2^2\sigma_2^2) + o(\theta_1, \theta_2) \end{aligned} \tag{68}$$

[109]Vgl. die Darstellung in Boyle *et al.* (1989).

und

$$\begin{aligned}\phi_{R_k}(\theta_1,\theta_2) &= q_1(1+i\sqrt{l}(\theta_1\sigma_1+\theta_2\sigma_2)-\frac{l}{2}(\theta_1\sigma_1+\theta_2\sigma_2)^2)\\ &\quad +q_2(1+i\sqrt{l}(\theta_1\sigma_1-\theta_2\sigma_2)-\frac{l}{2}(\theta_1\sigma_1-\theta_2\sigma_2)^2)\\ &\quad +q_3(1+i\sqrt{l}(-\theta_1\sigma_1+\theta_2\sigma_2)-\frac{l}{2}(-\theta_1\sigma_1+\theta_2\sigma_2)^2)\\ &\quad +q_4(1+i\sqrt{l}(-\theta_1\sigma_1-\theta_2\sigma_2)-\frac{l}{2}(-\theta_1\sigma_1-\theta_2\sigma_2)^2)+o(\theta_1,\theta_2).\end{aligned} \tag{69}$$

Sortieren der Taylor Reihe (69) führt zu:

$$\begin{aligned}\phi_{R_k}(\theta_1,\theta_2) &= \sum_{s=1}^{4} q_s + i\sqrt{l}(\theta_1\sigma_1(q_1+q_2-q_3-q_4)+\theta_2\sigma_2(q_1-q_2+q_3-q_4))\\ &\quad +\frac{l}{2}(\theta_1^2\sigma_1^2+2\theta_1\theta_2(q_1-q_2-q_3+q_4)\sigma_1\sigma_2+\theta_2^2\sigma_2^2)+o(\theta_1,\theta_2).\end{aligned} \tag{70}$$

Um die Konvergenz zu gewährleisten, muss $\phi_{R_t}(\theta_1,\theta_2)$ für große N bzw. $l = T/N \to 0$ approximativ gleich $\phi_{R_k}(\theta_1,\theta_2)$ sein. Das bedeutet, die rechte Seite von Gleichung (68) muss der rechten Seite von Gleichung (70) entsprechen. Führt man jetzt einen Vergleich der Koeffizienten der rechten Seiten von Gleichung (68) und Gleichung (70) durch, so lässt sich das folgende Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned}q_1+q_2+q_3+q_4 &= 1\\ q_1-q_2-q_3+q_4 &= \rho\\ q_1+q_2-q_3-q_4 &= \frac{r-\sigma_1^2/2}{\sigma_1}\sqrt{l}\\ q_1-q_2+q_3-q_4 &= \frac{r-\sigma_2^2/2}{\sigma_2}\sqrt{l}.\end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind folgende:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{4}\left(1+\rho+(\frac{r-\sigma_1^2/2}{\sigma_1}+\frac{r-\sigma_2^2/2}{\sigma_2})\sqrt{l}\right)\\
q_2 &= \frac{1}{4}\left(1-\rho+(\frac{r-\sigma_1^2/2}{\sigma_1}-\frac{r-\sigma_2^2/2}{\sigma_2})\sqrt{l}\right)\\
q_3 &= \frac{1}{4}\left(1-\rho+(-\frac{r-\sigma_1^2/2}{\sigma_1}+\frac{r-\sigma_2^2/2}{\sigma_2})\sqrt{l}\right)\\
q_4 &= \frac{1}{4}\left(1+\rho+(-\frac{r-\sigma_1^2/2}{\sigma_1}-\frac{r-\sigma_2^2/2}{\sigma_2})\sqrt{l}\right)
\end{aligned}$$

$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ist das Martingalmaß im Rahmen des betrachteten Multinomialmodells.

6.2 Software Code zur Simulation in Abschnitt 4.2

Die Berechnung der Wertdifferenz in Abschnitt 4.2 wurde mit dem nachfolgenden Softwarecode (Mapel 9) vorgenommen. Dabei wurde die Baumtiefe auf 30 festgelegt. n bezeichnet die Baumtiefe, l die Länge des Teilintervalls, $a1$ die Standardabweichung von X_1, $a2$ die Standardabweichung von X_2 und c den Korrelationskoeffizient zwischen X_1 und X_2.

```
> restart:
> n:=30:
> l:=1/n:
> a1:=0.2:
> a2:=0.1:
> c:=0.5:
> u1:=exp(a1*l^0.5);
                          u1 := 1.037189693
> u2:=exp(a2*l^0.5);
                          u2 := 1.018425104
> with(Units[Natural]):
> with(combinat, multinomial):
 Warning, the assigned names factor and polar now have a
 global binding Warning, these protected names have been
 redefined and unprotected: *, +, -, /, <, <=, <>, =, Im,
 Re, ^, abs, add, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc,
 arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh,
 argument, ceil, collect, combine, conjugate, convert, cos,
 cosh, cot, coth, csc, csch, csgn, diff, eval, evalc, evalr,
 exp, expand, floor, frac, int, ln, log, log10, max, min, mul,
 normal, root, round, sec, sech, seq, shake, signum, simplify,
 sin, sinh, sqrt, surd, tan, tanh, trunc, type, verify
```

```
> r:=exp(0.1*l);
                              r := 1.003338895
> q1:=0.25*(1+c+l^0.5*((0.1-a1^2/2)/a1+(0.1-a2^2/2)/a2));
                             q1 := 0.4366187878
> q2:=0.25*(1-c+l^0.5*((0.1-a1^2/2)/a1-(0.1-a2^2/2)/a2));
                             q2 := 0.09989604945
> q3:=0.25*(1-c+l^0.5*(-(0.1-a1^2/2)/a1+(0.1-a2^2/2)/a2));
                             q3 := 0.1501039506
> q4:=0.25*(1+c+l^0.5*(-(0.1-a1^2/2)/a1-(0.1-a2^2/2)/a2));
                             q4 := 0.3133812122
> S:=0:
> T:=0:
> for k from 0 to n do
> for j from 0 to n-k do
> for i from 0 to n-k-j do
> h:=n-k-i-j:
> Q(h,i,j,k):=multinomial(n,h,i,j,k)*q1^h*q2^i*q3^j*q4^k;
> v(h,i,j,k):=max(50*u1^(2*(h+i)-n)+100*u2^(2*(h+j)-n)-100,0);
> S:=S+v(h,i,j,k)*Q(h,i,j,k);
> ek(h,i,j,k):=50*u1^(2*(h+i)-n)+max(100*u2^(2*(h+j)-n)-100,0);
> T:=T+ek(h,i,j,k)*Q(h,i,j,k);
> od;
> od;
> od;
> ev:=S/r^n;
> kv:=T/r^n;
> wd:=kv-ev;
                             ev := 59.64665776
                             kv := 66.61920485
```

```
                    wd := 6.97244709
> wd/ev;
                     0.11690998026
```

7 Literaturverzeichnis

L. Arnold (1974): Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York, Wiley.

W. Ballwieser (2004): Unternehmensbewertung: Prozeß, Methoden und Probleme. Stuttgart, Schäffer–Poeschel.

M. Baxter und A. Rennie (2001): Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing. Cambridge, Cambridge University Press.

H. Bieg und H. Kußmaul (2000): Investitions- und Finanzierungsmanagement, Bd. 1: Investition. München, Vahlen.

H. Bieg und H. Kußmaul (2000): Investitions- und Finanzierungsmanagement, Bd. 2: Finanzierung. München, Vahlen.

P. Billingsley (1968): Convergence of Probability Measures. New York, Wiley.

F. Black und M. Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81 (1973), S. 637 – 659.

P. P. Boyle, J. Evnine und S. Gibbs (1989): Numerical Evaluation of Multivariate Contingent Claims. The Review of Financial Studies, 2 (1989), S. 241 – 250.

K. L. Chung (1978): Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse. Berlin, Springer.

J. C. Cox, S. A. Ross und M. Rubinstein (1979): Option Pricing: A Simplified Approach. Journal of Financial Economics, 7 (1979), S. 229 – 263.

C. Creifelds (1997): Rechtswörterbuch. München, Beck.

F. Delbaen und W. Schachemayer (1994): A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. Mathematische Annalen, 300 (1994), S. 463 – 520.

A. K. Dixit und R. S. Pindyck (1993): Investment under Uncertainty. Princeton, Princeton University Press.

J. Drukarczyk (1993): Theorie und Politik der Finanzierung. München, Vahlen.

J. Drukarczyk (1995): Theorie und Politik der Finanzierung – Stellungnahme zur Rezension von Oswald Hahn. Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 47 (1995), S. 483 – 485.

J. Drukarczyk (2003): Unternehmensbewertung. München, Vahlen.

J.-E. v. Düsterlho (2003): Das Shareholder Value Konzept. Wiesbaden, Deutscher Universitäts–Verlag.

E. F. Fama und M. C. Jensen (1983): Separation of Ownership and Control. The Journal of Law and Economics, 26 (1983), S. 312 – 313.

R. E. Freeman (1984): Strategic Management: A Stakeholder Approach. Boston, Pitman.

S. A. Friedlich (1999): Kernkompetenzen und Strategisches Outsourcing. Arbeitspapier des Instituts für Unternehmungsführung, Universität Innsbruck.

G. Gäfgen (1963): Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung. Tübingen, Mohr.

C. Gerling (1985): Unternehmensbewertung in den USA. Bergisch Gladbach, Eul.

W. Gleißner und K. Füser (2003): Leitfaden Rating. München, Vahlen.

E. Grochla (1982): Grundlagen der organisatorischen Gestaltung. Stuttgart, Poeschel.

D. Hachmeister (2000): Der Discounted Cash Flow als Maß der Unternehmenswertsteigerung. Frankfurt am Main, Peter Lang.

O. Hahn (1994): Ohne Titel – Rezension von Drukarczyk, J. (1993). Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 46 (1994), S. 1085 – 1086.

O. Hahn (1995): Erwiderung zur Stellungnahme von Jochen Drukarczyk. Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 47 (1995), S. 486.

M. J. Harrison und D. M. Kreps (1979): Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Marktets. Journal of Economic Theory, 29 (1979), S. 381 – 408.

M. J. Harrison und S. R. Pliska (1983): A Stochastic Calculus model of Continuous Trading: Complete Markets. Stochastic Processes and their Applications, 15 (1983), S. 313 – 316.

H. H. Hinterhuber (1989): Strategische Unternehmensführung, Bd. 1: Strategisches Denken: Vision, Unternehmungspolitik, Strategie. Berlin, Schmidt.

F. Hoffmann (1993): Konzernhandbuch: Recht, Steuern, Rechnungslegung, Führung, Organisation, Praxisfälle. Wiesbaden, Gabler.

N. Ikeda und S. Watanabe (1989): Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Amsterdam, North – Holland.

K. Itô (1954): On Stochastic Differential Equations. Memoirs of the American Mathematical Society, 4 (1954), S. 1 – 51.

R. Jarrow und M. Rudd (1983): Option Pricing. Homewood, Irwin.

M. Jensen und W. H. Meckling (1976): Theory of the Firm Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure. Journal of Financial Economics, 3 (1976), S. 305 – 360.

M. C. Jensen (1991): Corporate Control and the Politics of Finance. Journal of Applied Corporate Finance, 4 (1991), S. 13 – 33.

I. Karatzas und S. E. Shreve (1991): Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York, Springer.

I. Karatzas und S. E. Shreve (1998): Methods of Mathematical Finance. New York, Springer.

F. C. Klebaner (1998): Introduction to Stochastic Calculus with Applications. London, Imperial College Press.

E. Kosiol (1972): Die Unternehmung als wirtschaftliches Aktionszentrum. Hamburg, Reinbek.

M. Kremers (2002): Risikoübernahme in Industrieunternehmen. Sternenfels, Verlag Wissenschaft & Praxis.

W. Krüger (1993): Organisation der Unternehmung. Stuttgart, Kohlhammer.

L. Kruschwitz (1995): Investitionsrechnung. Berlin, de Gruyter.

L. Kruschwitz (2002): Finanzierung und Investition. München, Oldenbourg.

L. Kruschwitz und A. Löffler (1999): Sichere und unsichere Steuervorteile bei der Unternehmensbewertung I – Kritische Anmerkungen (nicht nur) zum WP–Handbuch 1998. Institut für Bank- und Finanzwirtschaft der Freien Universität Berlin.

L. Kruschwitz und A. Löffler (2001): DCF – Verfahren, Finanzierungspolitik und Steuern. In: G. Seicht (Hrsg.), Jahrbuch für Controlling und Rechnungswesen 2001, S. 101 – 116. Wien, Orac.

L. Kruschwitz, S. Husmann und D. Schneider (2002): Investitionsneutrale Steuersysteme vor dem Hintergrund der Kontroverse um Einkommen oder Konsum als geeignete Steuerbemessungsgrundlage. Diskussionsbeiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaft der Freien Universität Berlin.

L. Kruschwitz, A. Lodowicks und A. Löffler (2005): Zur Bewertung insolvenzbedrohter Unternehmen. Die Betriebswirtschaft, 65 (2005), S. 221 – 236.

L. Kruschwitz und A. Löffler (2005): Discounted Cash Flow. Chichester, Wiley.

Y.-K. Kwok (1998): Mathematical Models of Financial Derivatives. Singapore, Springer.

P. Lévy (1925): Calcul des Probabilites. Paris, Gauthier – Villars.

J. Lintner (1965a): Security Prices and Maximal Gains from Diversification. Journal of Finance, 20 (1965), S. 587 – 616.

J. Lintner (1965b): The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. Review of Economics and Statistics, 47 (1965), S. 768 – 783.

A. Löffler (2005): Skript – Risikomanagement und Derivate. Universität Hannover. [Hinweis: Seit dem 1. Juli 2006 nunmehr: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover].

A. Löhr und H. Steinmann (1988): Unternehmenspolitik – Eine "realistische Idee". Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 4 (1988), S. 299 – 315.

A. Löhr und H. Steinmann (1992): Unternehmensethik. Stuttgart, Schäffer–Poeschel.

H. Markowitz (1952): Portfolio Selection. The Journal of Finance, 7 (1952), S. 77 – 91.

R. Merton (1973): Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1973), S. 141 – 183.

T. Mikosch (1998): Elementary Stochastic Calculus – With Finance in View. Singapore, World Scientific.

H. Mintzberg (1983): Power in and around Organizations. Englewood Cliffs, Prentice Hall.

F. Modigliani und M. Miller (1958): The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. The American Economic Review, 48 (1958), S. 261 – 297.

J. Mossin (1966): Equilibrium in a Capital Asset Market. Econometrica, 34 (1966), S. 768 – 783.

A. Nölting (1998): Unter Wert verkauft. Manager Magazin, 4 (1998), S. 172 – 176.

P. E. Protter (2004): Stochastic integration and differential equations. Berlin, Springer.

A. Rappaport (1999): Shareholder Value: Ein Handbuch für Manager und Investoren. Stuttgart, Schäffer–Poeschel.

F. Richter (1997): DCF – Methoden und Unternehmensbewertung: Analyse der systematischen Abweichungen. Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft, 9 (1997), S. 237 – 266.

F. Richter (2002): Kapitalmarktorientierte Unternehmensbewertung: Konzeption, finanzwirtschaftliche Bewertungsprämissen und Anwendungsbeispiel. Frankfurt am Main, Peter Lang.

W. Rieger (1964): Einführung in die Privatwirtschaftslehre. Erlangen, Krische.

S. Ross (1973): The Economic Theory of Agency. American Economic Review, Papers and Proceedings, 63 (1973), S. 134 – 139.

P. A. Samuelson (1965): Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. Industrial Management Review, 6 (1965), S. 41 – 49.

H. Schierenbeck (2000): Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre. München, Oldenbourg.

R. H. Schmidt und E. Terberger (1996): Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie. Wiesbaden, Betriebswirtschaftlicher Verlag.

W. Schubert und K. Küting (1981): Unternehmungszusammenschlüsse. München, Vahlen.

W. Schultze (2003): Methoden der Unternehmensbewertung: Gemeinsamkeiten, Unterschiede, Perspektiven. Düsseldorf, IDW – Verlag.

W. F. Sharpe (1963): A Simplified Model for Portfolio Analysis. Management Science, 9 (1963), S. 277 – 293.

W. F. Sharpe (1964): Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. Journal of Finance, 19 (1964), S. 425 – 442.

F. Siener (1991): Der Cash Flow als Instrument der Bilanzanalyse. Stuttgart, Schäffer.

R. Stremmel (1996): Der Bestand "VARTA Batterie AG" im westfälischen Wirtschaftsarchiv, Dortmund. Westfälische Forschungen, 46 (1996), S. 489 – 494.

R. A. Taggart (1991): Consistent Valuation and Cost of Capital Expressions with Corporate and Personal Taxes. Financial Management, 20 (1991), S. 8 – 20.

M. R. Theisen (2000): Der Konzern: Betriebswirtschaftliche und rechtliche Grundlagen der Konzernunternehmung. Stuttgart, Schäffer–Poeschel.

H. Ulrich (1970): Die Unternehmung als produktives soziales System – Grundlagen der allgemeinen Unternehmungslehre. Bern, Haupt.

V. Volpert (1989): Kapitalwert und Ertragsteuern. Wiesbaden, Deutscher Universitäts–Verlag.

A. v. Werder (1995): Konzernmanagement. Die Betriebswirtschaft, 55 (1995), S. 641 – 661.

J. B. Williams (1938): The Theory of Investment Value. Cambridge, Harvard Business Press.

G. Wöhe (2000): Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaftslehre. München, Vahlen.