

# **Transport in selbstorganisierten Silizium/Germanium- Nanostrukturen**

Von der  
Fakultät für Mathematik und Physik  
der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
- Dr. rer. nat. -  
genehmigte Dissertation  
von

Dipl.-Phys. Kai-Martin Haendel

geboren am 14. Juli 1973 in Hannover

2005



Referent: Prof. Dr. R. J. Haug  
Korreferent: Priv.-Doz. Dr. R. Winkler

Tag der Promotion: 11. Mai 2005



Für Ruth!



»Selbst wenn es möglich wäre - was nicht der Fall ist -  
mit unserem Verstand das Wesen der Dinge zu erkennen,  
so wäre es unmöglich, diese Erkenntnis  
in Worte zu fassen.«

*Gorgias von Leontinoi*  
ca. 480 bis 380 v. Chr.



# Abstract

In this thesis the electronic properties of *p*-type silicon/germanium heterostructures were studied by resonant tunneling spectroscopy.

The dc-transport measurements were performed using diodes with diameters in the micron- and submicron-range at temperatures down to 20 mK and magnetic fields up to 20 T. Basically, the active region of the heterostructures was composed of two 10 nm thick silicon/germanium quantum wells separated by a 10 nm thick silicon barrier. In the middle of the silicon barrier a few monolayers germanium were embedded. Due to the Stranski-Krastanov growth of germanium on silicon it depends on the thickness of the germanium layer whether the silicon barrier contains a two-dimensional, pseudomorphic germanium wetting layer or three-dimensional, coherently strained, self-assembled nanoscaled germanium islands.

In devices containing a germanium wetting layer the resonant tunnelling of holes through light- and heavy-hole subbands of the wetting layer could be observed. The current-voltage characteristics included a significant part of non-resonant or parasitic current components. The parasitic current was a consequence of the high doping concentration of the emitter and collector layers that were directly attached to the active region. Hence, the non-resonant current paths were attributed to transport processes through migrated acceptors levels in the active region. At low bias voltage (around zero bias) a steplike increase of the current (of some picoamperes) was attributed to resonant tunnelling through the shallow acceptor levels. These levels were characterised by magnetotransport experiments: In a magnetic field orientation parallel to the growth and current direction a linear splitting of the current steps was related to the Zeeman splitting of the acceptor levels. The measured effective *g*-factor agreed well with the effective *g*-factor of boron in germanium determined by optical experiments. As a consequence of the thin germanium layer a diamagnetic shift of the levels could not be observed, even at 18 Tesla. This is due to the fact that the effective Bohr radius of an impurity in a thin layer is reduced in comparison to an impurity in a bulk material. In a magnetic field orientated perpendicular to the growth and current direction the linear splitting was suppressed. This behaviour was an evidence for transport through heavy hole acceptor levels as for an in-plane magnetic field the linear Zeeman splitting is suppressed for heavy holes.

The transport in devices containing self-assembled germanium quantum dots was completely different. In the current-voltage characteristics a current instability between a high- and low-current regime could be observed. The transport in the low-current regime depended on the device diameter. In diodes with diameters in the micron range a (variable-range-) hopping transport behaviour was observed. The

corresponding activation energy, which could be interpreted as a charging energy, was related with the quantum dot dimensions. In diodes with diameters in the sub-micron range the excitation spectrum of a single germanium quantum dot could be analysed. The high-current regime was independent of the diameter of the devices: here, the transport was due to a filamentary current flow.

Possibly, in devices containing a sheet of self-assembled quantum dots, the transport of a collective state formed in an array of quantum dots was observed. A confirmation for this assumption was, on one the hand, a small thermal activation energy and, on the other hand, a high bias voltage, that was required to initiate the transition from the low- to the high-current regime.

**Keywords**

Self-Assembled Nanostructures, Silicon/Germanium, Shallow Acceptors, Current Instability

# Kurzfassung

In dieser Arbeit wurde unter Verwendung der resonanten Tunnelspektroskopie der elektronische Transport in  $p$ -dotierten Silizium/Germanium-Heterostrukturen untersucht. Hierbei konnte die Auswirkung von Schichtdicken und Spannungsfeldern auf den Lochtransport in Submikrometer-Dioden studiert werden.

Der für die Transporteigenschaften charakteristische Bereich der Heterostrukturen war nach der Dicke einer in einer Silizium-Matrix eingebetteten Germaniumschicht klassifizierbar: Germanium zeigt auf Silizium ein Stranski-Krastanov-Wachstum. Unterhalb der kritischen Schichtdicke war der eingebettete Germaniumfilm glatt und biaxial verspannt. Wurde die kritische Dicke überschritten, riss die Germaniumschicht auf und es bildeten sich auf Grund von Relaxationsprozessen selbstorganisierte, nanometergroße Germanium-Inseln, so genannte Quantenpunkte.

Bei tiefen Temperaturen ergaben die Transportuntersuchungen an Heterostrukturen mit einem biaxial verspannten Germaniumfilm, dass der resonante Tunnelstrom über die zweidimensionalen Subbänder des Germaniumfilms von einem hohen, parasitären Stromanteil überlagert war. Dieser wurde auf die Migration von Dotieratomen aus den hochdotierten Zuleitungen in den aktiven Bereich zurückgeführt. Durch die Ermittlung der effektiven Massen in Magnetotransportexperimenten ließ sich erkennen, ob ein Tunnelprozess durch ein Leicht-Loch- beziehungsweise Schwer-Loch-Subband des Germaniumfilms stattfand. Des Weiteren gelang es, aus der Verschiebung der Stromresonanzen in hohen Magnetfeldern die Dicke der Tunnelbarrieren zu bestimmen.

Niveaus von flachen Akzeptoren, die in den Germaniumfilm migriert waren, konnten im Spannungsbereich weniger zehn Millivolt charakterisiert werden: In einer Magnetfeldorientierung senkrecht zur Wachstumsebene und parallel zum Strom zeigten die Niveaus eine deutliche Zeeman-Aufspaltung. Eine diamagnetische Verschiebung der Niveaus konnte bei den zur Verfügung stehenden Magnetfeldern (bis 18 T) nicht beobachtet werden. Dieses Verhalten resultierte aus dem Umstand, dass der effektive Bohrradius der Akzeptoren im dünnen Germaniumfilm im Vergleich zur Migration im Volumenmaterial stark reduziert war. Der aus der Zeeman-Aufspaltung ermittelte effektive  $g$ -Faktor korrespondierte gut mit dem aus optischen Experimenten bekannten Wert des effektiven  $g$ -Faktors von Bor in Germanium. Diese Übereinstimmung wurde weiterhin durch den Sachverhalt gestützt, dass die unmittelbar an den aktiven Bereich anschließenden Silizium-Zuleitungen hoch Bor dotiert waren. Es wurde somit erstmalig durch Tunneltransportexperimente der effektive  $g$ -Faktor von flachen Bor-Akzeptoren in einem dünnen Germaniumfilm bestimmt. Für eine Magnetfeldorientierung parallel zur Wachstumsebene wurde keine

Aufspaltung der Niveaus beobachtet. Dies wurde als Indiz für die Beobachtung des resonanten Tunnelns über Schwer-Loch-Zustände interpretiert, da schwere Löcher keine lineare Zeeman-Aufspaltung für diese Magnetfeldorientierung zeigen.

Charakteristisch für den Transport in Heterostrukturen mit einer Schicht selbstorganisierter Germanium-Inseln war das Auftreten eines instabilen Bereichs in der Strom-Spannungs-Charakteristik bei Temperaturen unterhalb eines Kelvins: Beim Erreichen einer Schwellspannung fand ein sprunghafter Übergang aus einem Niedrigstrom-Regime in ein Hochstrom-Regime statt. Hierbei war der Transport im Niedrigstrom-Regime entschieden von der Querschnittsfläche der Diode beeinflusst. Bei Dioden mit einigen Mikrometern Durchmesser wurde ein (Variable-Range-) Hopping-Transportverhalten analysiert. Die korrespondierende Aktivierungsenergie ließ sich der gemittelten Ladeenergie der am Hopping-Transport beteiligten Quantenpunkte zuordnen. Aus der Ladeenergie war es möglich, die Ausdehnung der Quantenpunkte abzuschätzen. In Dioden mit Submikrometer-Durchmesser konnte im Niedrigstrom-Regime das Anregungsspektrum eines einzelnen Germanium-Quantenpunktes beobachtet werden. Im Hochstrom-Regime war das Transportverhalten in den Mikro- und Submikrometer-Dioden identisch: Es zeichnete sich durch einen filamentartigen Ladungstransport aus.

Möglicherweise konnte in den Dioden mit einer Schicht aus Germanium-Quantenpunkten das Transportverhalten eines kollektiven Zustandes, der sich über eine Reihe von Quantenpunkten ausgebildet hatte, beobachtet werden. Ein Indiz für diese Vermutung war die Tatsache, dass einerseits eine geringe thermische Energie, andererseits jedoch eine hohe Vorspannung benötigt wurde, um einen Übergang vom Niedrigstrom- in das Hochstrom-Regime zu initiieren.

### **Schlagworte**

Silizium/Germanium, selbstorganisierte Nanostrukturen, flache Akzeptoren, Strom-Instabilität

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Quantenphysik und Nanostrukturen . . . . .	1
1.2. Motivation . . . . .	3
<b>2. Nanostrukturen</b>	<b>5</b>
2.1. Elektronische Zustände in Nanostrukturen . . . . .	7
2.1.1. Eindimensionale Einschlusspotenziale . . . . .	8
2.1.2. Quantisierte Lochsysteme . . . . .	10
2.1.3. Die Zustandsdichte . . . . .	15
2.2. Magnetfelder in Nanostrukturen . . . . .	17
2.2.1. Der Spin und Landè g-Faktor . . . . .	23
2.2.2. Zeeman-Effekt für Löcher . . . . .	24
2.3. Reale Systeme: Der Einfluss von Temperatur und Streueffekten . . .	25
2.3.1. Die Fermi-Gleichgewichtsverteilungsfunktion . . . . .	27
2.4. Zusammenfassung . . . . .	28
<b>3. Transport in Nanostrukturen</b>	<b>29</b>
3.1. Transportsysteme . . . . .	29
3.1.1. Fundamentale Längenskalen in Nanostrukturen . . . . .	29
3.1.2. Klassisch, diffusiver Transport . . . . .	30
3.1.3. Kohärenter Transport . . . . .	30
3.1.4. Ballistischer Transport . . . . .	31
3.2. Resonante Tunnelstrukturen . . . . .	32
3.2.1. Doppelbarrierenstruktur . . . . .	32
3.2.2. Quantenpunktstruktur . . . . .	44
3.3. Transport in Magnetfeldern . . . . .	55
3.3.1. Magnetfeld parallel zum Strom . . . . .	55
3.3.2. Magnetfeld senkrecht zum Strom . . . . .	56
3.4. Hopping-Transport und Nichtgleichgewichtsprozesse . . . . .	57
3.4.1. Hopping-Transport in Nanostrukturen . . . . .	57
3.4.2. Thermoelektrische Effekte - Grundbegriffe der Leitfähig- keits-theorie . . . . .	61
3.5. Raumladungsbegrenzter Stromtransport . . . . .	64
3.6. Zusammenfassung . . . . .	67

<b>4. Selbstorganisierte Nanostrukturen</b>	<b>69</b>
4.1. Epitaktisches Wachstum dünner Halbleiterschichten . . . . .	69
4.2. Verspannte epitaktische Schichten:	
Silizium-Germanium Heterostrukturen . . . . .	72
4.2.1. Der Volumenkristall: Silizium und Germanium . . . . .	72
4.2.2. Der Silizium-Germanium Mischkristall . . . . .	75
4.3. Stranski-Krastanov Wachstum von Germanium auf Silizium (0 0 1)	82
4.3.1. Strukturelle Eigenschaften von Hut-Clustern . . . . .	82
4.3.2. Elektronische Eigenschaften . . . . .	84
4.4. Zusammenfassung . . . . .	86
<b>5. Prozessierung vertikaler Tunnelioden</b>	<b>87</b>
5.1. Aufbau der Supergitter . . . . .	87
5.2. Elektronenstrahlolithographie: Schreiben der Ätzmasken . . . . .	88
5.2.1. Das Lacksystem . . . . .	89
5.2.2. Rechnergestützte Elektronenstrahlolithographie mit Elphy <sup>Plus</sup> .	90
5.3. Entwicklung und Metall-Evaporation . . . . .	91
5.4. Einlegieren der Ätzmasken . . . . .	92
5.5. Mesa-Ätzen . . . . .	93
5.6. Passivierung mit Polyimid . . . . .	94
5.7. Freilegen der Kontakte im Sauerstoffplasma . . . . .	94
5.8. Zweiter Lithographieschritt: Schreiben der Vorderseitenkontakte . .	95
5.9. Elektrische Kontaktierung . . . . .	96
5.10. Zusammenfassung . . . . .	97
<b>6. Mess-Prinzip</b>	<b>99</b>
6.1. Experimenteller Aufbau . . . . .	99
<b>7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen</b>	<b>103</b>
7.1. Resonanter Tunnelstrom . . . . .	105
7.1.1. Temperaturabhängigkeit des Tunnelstroms . . . . .	111
7.1.2. Resonantes Tunneln in äußeren Magnetfeldern . . . . .	116
7.1.3. Zusammenfassung . . . . .	126
7.2. Diskrete Zustände im Germanium Quantentopf . . . . .	126
7.2.1. Einfluss der Temperatur . . . . .	131
7.2.2. Quantenpunkte im Magnetfeld: Gequetschte Akzeptor-	
Zustände? . . . . .	134
7.2.3. Zusammenfassung . . . . .	142
<b>8. Silizium/Germanium-Quantenpunktstrukturen</b>	<b>145</b>
8.1. Instabilität im Transport . . . . .	145
8.1.1. Niedrigstrom-Regime: Hopping Transport . . . . .	146
8.1.2. Übergangsbereich: Bistabilität . . . . .	154
8.1.3. Hochstrom-Regime: Filamentartiger Transport . . . . .	160
8.1.4. Zusammenfassung . . . . .	162

8.2. Fock-Darwin ähnliche Zustände . . . . .	164
8.2.1. Zusammenfassung . . . . .	170
<b>9. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>171</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>175</b>
A.1. Transfer-Matrix-Methode . . . . .	175
A.1.1. Berechnung der Transmissionskoeffizienten mit der Transfer-Matrix-Methode . . . . .	176
A.2. Akzeptor im schmalen Quantentopf . . . . .	182
A.3. Hall Messung . . . . .	183
A.4. Daten der untersuchten Proben . . . . .	185
A.5. Bond-Parameter . . . . .	186
A.6. Normierung der Kennlinien . . . . .	187
A.7. Konstanten . . . . .	189
A.7.1. Fundamentalkonstanten . . . . .	189
A.7.2. Materialparameter von Silizium und Germanium . . . . .	189
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>190</b>

## *Inhaltsverzeichnis*

# 1. Einleitung

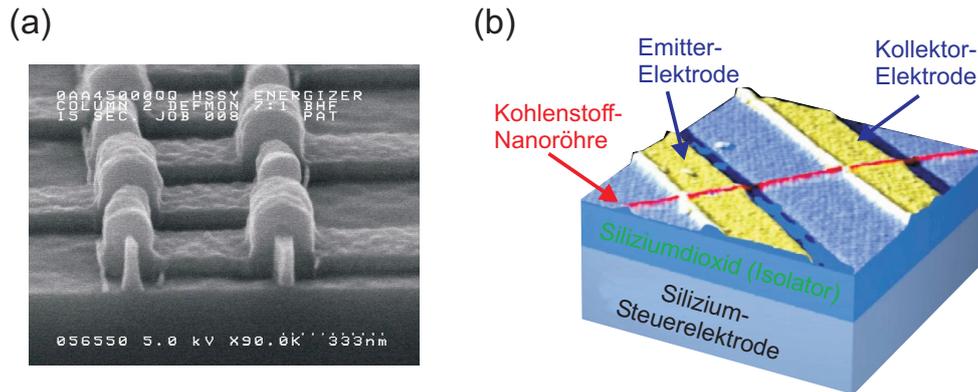
## 1.1. Quantenphysik und Nanostrukturen

Als Max Planck am 14. Dezember 1900 vor die Physikalische Gesellschaft in Berlin trat, ahnte niemand, dass er mit seinem Vortrag »Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum« das bislang gültige physikalische Weltbild radikal verändern und das Tor für eine neue Physik öffnen würde. Dieser Vortrag gilt als die Geburtsstunde der Quantenphysik.

Für die Erklärung von Abläufen in atomaren Systemen nimmt die Quantentheorie die zentrale Stellung ein. Mit ihrer Hilfe gelang es, die Spektren der Atome zu verstehen. Viele heuristisch gefundenen Gesetzmäßigkeiten ließen sich auf der Basis der Quantentheorie erklären. Trotz ihrer großen Erfolge in der Welt der Atome galt die Quantentheorie lange Zeit für technologische Anwendungen als nicht relevant, da sich ihre Aussagen auf eine Welt bezogen, deren Ausmaße um ein Vielfaches kleiner waren als jedes vom Menschen hergestellte Bauteil. Die Welt der Mikroobjekte lag fernab der Alltagswelt. Ein Irrtum, wie sich herausstellte. Heute ist die Quantentheorie das Fundament vieler moderner Technologien. Die enormen technologischen Fortschritte des 20. Jahrhunderts sind eng verknüpft mit der Entwicklung der Quantenphysik. Ohne sie gäbe es viele moderne Technologien nicht, beispielsweise keine Halbleitertechnik und damit keinen Computer.

Die Quantenphysik eröffnet auch für die Zukunft faszinierende Perspektiven. Aus der Symbiose mit der Informatik entstehen völlig neuartige Konzepte und Algorithmen, deren Implementierung in der Informations- und Datenverarbeitung noch ungeahnte Möglichkeiten eröffnen. Die Herstellung neuer Materialien mit maßgeschneiderten Eigenschaften ist ein weiteres viel versprechendes Entwicklungsfeld. Die enormen Erwartungen an die Mikroelektronik, die in fast allen Lebensbereichen Einzug gehalten hat, zwingt die Branche einerseits zur stetigen Weiterentwicklung diskreter Bauelemente, andererseits zur Verkleinerung von kompletten Schaltungen. Kleiner - Schneller - Billiger, das sind die Rahmenbedingungen. Moderne Halbleiterbauelemente erreichen Abmessungen im Bereich weniger hundert Nanometer. Ihre Miniaturisierung schreitet ungebremst voran. Im Jahr 1965 skizzierte Gordon Moore [1] die beispiellose Entwicklung in der Siliziumtechnologie. Sein „Gesetz“ hat heute noch Gültigkeit. Etwa alle 18 Monate verdoppelt sich die Integrationsdichte der Schaltkreise. Gleichbedeutend halbiert sich die Größe der integrierten Transistoren. Ein Beispiel zeigt Abbildung 1.1 (a). Zu sehen ist eine rasterelektronenmikroskopische Aufnahme eines kommerziellen Speicherbausteins. Die minimale Strukturbreite einer Zuleitung beträgt 90 nm. Das Ende dieser Entwicklung ist unvermeidlich. Neue Strategien für die Herstellung von Transistoren im Bereich unterhalb von 100 nm müssen entwickelt werden,

## 1. Einleitung



**Abbildung 1.1.:** Gegenwärtige Speicherchips, aufgebaut aus Feldeffekt-Transistoren (FETs) mit 90 nm Gate-Länge. Quelle: Infineon. **(b)** Prototyp eines Kohlenstoff-Nanoröhren-Transistors; Universität Delft.

um die Grenzen der Photolithographie zu umgehen. Die Methode des „einfachen“ Herunterskalierens von Bauelementen birgt das Problem in sich, dass grundlegende Prinzipien der Elektronik und Schaltungstechnik nicht mehr funktionieren. Quanteneffekte dominieren das Transportverhalten, wenn die Bauelemente in die Größenordnung der de Broglie-Wellenlänge der Ladungsträger vorstoßen. Dies ist für Schichtdicken unterhalb von 30 nm der Fall. Für die technische Anwendung relevante Bauelemente müssen zuverlässig bei Raumtemperatur arbeiten. Entsprechende Bauelemente werden daher kleiner als 10 nm sein. Konzepte zur Realisierung solcher Nanostrukturen gibt es viele. So wurden bereits Moleküle elektrisch kontaktiert und aus ihnen grundlegende elektronische Bauelemente realisiert, zum Beispiel ein Transistor aus einem Kohlenstoff-Nanoröhrchen [2]; siehe Abbildung 1.1 **(b)**.

Auch die Halbleitertechnologie bietet Lösungen an. Mit Hilfe moderner Epitaxieverfahren - vor allem der Molekularstrahlepitaxie - gelingt es, Strukturen zu wachsen, die in natürlichen Kristallen nicht vorkommen. Beliebte sind heterogene Halbleiterschichtsysteme, so genannte Heterostrukturen. Sie sind meist durch eine Schichtfolge ABA von zwei Halbleitern A und B mit unterschiedlicher Energielücke aufgebaut. Sobald die Schichtdicke des Materials B kleiner als die de Broglie-Wellenlänge der Ladungsträger wird, verwirklicht man auf diese Weise entlang der Wachstumsrichtung einen rechteckförmigen Potenzialtopf. Mit dieser Methode gelingt es, die elektronischen Eigenschaften der Halbleitermaterialien, wie die Bandstruktur und die Ladungsträgerbeweglichkeit, gezielt zu modifizieren. Man spricht im Englischen vom *Band-engineering*. Eine Schlüsseltechnologie werden nicht-lithographische Herstellungsprozesse sein. Der Wunsch ist ein integrierter Hochleistungsschaltkreis, der sich selbstorganisiert aus nanometergroßen Bauelementen zusammensetzt. Die Selbstorganisation eröffnet neue Möglichkeiten zur Strukturierung in kleineren Dimensionen, als es bisher möglich war. Schon 1937 hatten die Physiker Strancki und Krastanov festgestellt: »wenn man einen Kristall auf einen anderen aufwächst, ist dies nur dann problemlos möglich,

wenn beide die gleiche Gitterkonstante haben. [3]« Ihre Atome müssen also exakt im gleichen Abstand angeordnet sein. Ist das nicht der Fall, entstehen Verspannungen und die Schicht reißt auf. Die aufgerissene Schicht bildet winzige dreidimensionale Halbleiter-Inseln, die nur noch wenige Nanometer breit und hoch sind. Dieser Vorgang der selbstorganisierten Inselbildung wird als *Stranski-Krastanov-Wachstumsinstabilität* bezeichnet. Die geringe Größe der Inseln im Vergleich zu normalen Kristallen hat Konsequenzen. Die Ladungsträger können sich in den Inseln, anders als in einem normalen Kristall, nicht frei bewegen; sie sind „eingesperrt“ und können nur ganz bestimmte - *diskrete* - Energieniveaus besetzen. Zwischen den Energieniveaus können die Ladungsträger hin und her springen, ähnlich wie in einem einzelnen Atom. Der Unterschied jedoch ist, dass die Energieniveaus über Größe, Form und Material der Inseln beeinflusst werden können. Daher spricht man von ihnen als „self-made atoms“- künstlichen Atomen. Auf Grund dieser Manipulierbarkeit sind die Halbleiter-„Nanostrukturen“ beliebte Objekte der physikalischen Grundlagenforschung. Mitunter ermöglichen die „künstlichen Atome“ die experimentellen Fragestellungen, deren Realisierung in der Atomphysik unter Laborbedingungen nicht oder nur mit erheblichem Aufwand möglich wäre.

## 1.2. Motivation

Der dominierende Werkstoff der Halbleitertechnologie ist Silizium. In Kombination mit dem chemisch verwandten Element Germanium lassen sich Heterostrukturen realisieren, die die Herstellung von Hochleistungstransistoren [4, 5] mit geringer Leistungsaufnahme und Frequenzen im Bereich einiger hundert Gigahertz ermöglichen. Silizium und Germanium sind jedoch nicht allein das Materialsystem neuartiger Mikroelektronik, sondern sie bergen auch das Potenzial zukünftiger Nanoelektronik [6, 7, 8, 9, 10].

Die unterschiedlichen Gitterkonstanten von Silizium und Germanium führen zu Verspannungen auf Grund der Gitteranpassung in der Heterostruktur. Die von Stranski und Krastanov beschriebenen Wachstumsprozesse, die zur selbstorganisierten Bildung von nanometergroßen Inseln führen, sind beim Wachstum von Germanium auf Silizium zu beobachten. Die Spannungsfelder führen nicht allein zu plastischen Relaxationsprozessen, sondern sie besitzen schon im Vorfeld der Relaxation einen entscheidenden Einfluss auf die elektronischen Zustände und somit auf die elektronischen Transporteigenschaften der Heterostruktur. Die Art und Stärke der Verspannung ist über die Legierungskomposition und Schichtdicke beeinflussbar. Insbesondere ist die Wirkung der Verspannung auf Valenzband-Zustände zu beobachten. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit der Transport von Defektelektronen, den so genannten Löchern, in Silizium/Germanium-Nanostrukturen untersucht. Es werden Gleichstrom-Transportmessungen an Dioden mit nur wenigen Mikrometern Durchmesser beziehungsweise Submikrometer-Dioden durchgeführt. Hierbei erhält man Informationen über die elektronischen Zustände der Ladungsträger, die Aussagen

## 1. Einleitung

beispielsweise über deren effektive Masse ermöglichen.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Nach der Einleitung in **Kapitel 1** führt **Kapitel 2** in die grundlegenden Eigenschaften von elektronischen Zuständen in niederdimensionalen Strukturen ein. Insbesondere wird der Einfluss von äußeren Magnetfeldern und Streueffekten auf die Zustände diskutiert.

Das **Kapitel 3** behandelt die Grundlagen des elektronischen Transports in Nanostrukturen. Das Konzept des quantenmechanischen Tunnelns beim Transport in resonanten Tunnelstrukturen wird am Beispiel der Doppelbarrieren- und Quantenpunktstrukturen vorgestellt. Einen Schwerpunkt bildet dabei die Betrachtung der Systeme unter der Wirkung eines statischen äußeren Magnetfeldes. Des Weiteren werden Nicht-Gleichgewichtsprozesse, so z. B. der Hopping-Transport und thermoelektrische Effekte in Nanostrukturen betrachtet. Abschließend wird der raumladungsbegrenzte Transport in Nanostrukturen diskutiert.

In **Kapitel 4** werden die Material- und Wachstumseigenschaften von Silizium, Germanium sowie ihrer Legierung zusammengefasst. Zudem werden die Grundlagen des selbstorganisierten Inselwachstums von Germanium auf Silizium vorgestellt.

Das **Kapitel 5** beschäftigt sich mit Herstellungsverfahren von Mikro- und Submikrometer-Dioden. Die wichtigsten Verfahrensparameter und Konzepte der Elektronenstrahlolithographie, des Lacksystems sowie der elektrischen Kontaktierung der Dioden werden in diesem Kapitel vorgestellt.

Im **Kapitel 6** werden das Prinzip der Tunnelspektroskopie sowie Details des experimentellen Aufbaus vorgestellt.

Das **Kapitel 7** diskutiert experimentelle Untersuchungen an Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen. Es ist in mehrere Abschnitte gegliedert, die jeweils einen Schwerpunkt der Untersuchungen bilden: Der erste Abschnitt konzentriert sich auf Untersuchungen des resonanten Tunnelstroms in der Silizium/Germanium-Quantentopfstruktur. Der Einfluss der Temperatur und äußerer Magnetfelder werden berücksichtigt. In einem weiteren Abschnitt werden Messungen an nulldimensionalen Zuständen vorgestellt.

Im **Kapitel 8** wird der Transport in Silizium/Germanium-Quantenpunktstrukturen analysiert. Die Strom-Spannungs-Kennlinien zeigen eine deutliche Bistabilität zwischen einem Niedrigstrom-Regime und einem Hochstrom-Regime. Das sich in der Kennlinie widerspiegelnde Transportverhalten wird auf die Anwesenheit der Germanium-Quantenpunkte zurückgeführt. In Dioden mit Submikrometer Durchmesser lassen sich zudem Fock-Darwin-ähnliche Spektren, die den Germanium-Quantenpunkt-Zuständen zugesprochen werden, beobachten.

Eine Zusammenfassung der Arbeit sowie ein Ausblick auf weiterführende Untersuchungsmöglichkeiten werden in **Kapitel 9** gegeben.

## 2. Nanostrukturen

Nanostrukturen sind Systeme, deren funktionsbestimmende Abmessungen im Bereich einiger Nanometer liegen. In der physikalischen Beschreibung spricht man von ihnen auch als *mesoskopische*<sup>1</sup> Systeme [11], und betont hiermit, dass die Systemlängen auf mikroskopischen (atomaren) Skalen groß, jedoch klein auf makroskopischen Skalen sind. Die Beschreibung der physikalischen Eigenschaften von Nanostrukturen, insbesondere den elektronischen, geschieht in einer quantentheoretischen Darstellung. Der elektronische Transport in einer Nanostruktur ist von Quanteneffekten bestimmt. Die Ladungsträger, Elektronen oder Löcher, verlieren ihren Teilchen-Charakter und zeigen Welleneigenschaften. Bekannte Phänomene der Wellenmechanik wie Beugung und Interferenz sind beobachtbar [12, 13]. Bereits im Jahr 1923 veröffentlichte der Physiker de Broglie die Hypothese, dass die Gleichungen

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{und} \quad |\mathbf{p}| = \frac{h}{\lambda} \quad (2.1)$$

in Analogie zum Licht so verstanden werden können, dass einem bewegten Teilchen mit der Energie  $E$  und Impuls  $\mathbf{p}$  eine Materiewelle mit der Frequenz  $\nu$  und der Wellenlänge  $\lambda$  zugeordnet werden kann. Dabei ist  $\mathbf{k}$  der Wellenvektor der zugehörigen Materiewelle. Die Teilchen- und Welleneigenschaften sind durch  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  miteinander verknüpft. Die Wahrscheinlichkeit, den Ladungsträger an einer bestimmten Stelle nachzuweisen, ist durch das Betragsquadrat seiner Wellenamplitude  $\psi$  gegeben. Der Widerspruch zwischen den klassischen Modellen *Welle* und *Teilchen* wird hierdurch aufgelöst. Es gibt eine Wahrscheinlichkeitsamplitude (Welle), deren Betragsquadrat die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Nachweis des Teilchen ist. Somit lässt sich jedem Ladungsträger mit wohldefiniertem Impuls eindeutig eine Wellenlänge zuordnen. Aus der Eindeutigkeit der Wellenlänge resultiert eine räumlich-periodische Aufenthaltswahrscheinlichkeit sowie die Konsequenz, dass der Ladungsträger über die gesamte Struktur erstreckt ist. Er ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit an einer beliebigen Stelle der gesamten Struktur. Sein Ort ist somit völlig unbestimmt. Die Schwankung zwischen den Mittelwerten der Orts- und Impulsunschärfe des Ladungsträgers ist jedoch nicht beliebig, sondern durch die *Heisenbergsche Unschärferelation*

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar \quad (2.2)$$

gegeben. Begriffe wie Ort und Impuls sind im mikroskopischen Bereich nicht anwendbar. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude beziehungsweise die Wellenfunktion

---

<sup>1</sup>*meso...* nach dem griechischen Bestimmungswort von Zusammensetzungen mit der Bedeutung „mittel, in der Mitte zwischen.“

## 2. Nanostrukturen

$\psi$  ist die gültige und vollständige Beschreibung des Systemzustands. Ihre Entwicklung liefert die Schrödinger-Gleichung. Sie ist die Feldgleichung der Wellenfunktion des Ladungsträgers. Die Schrödinger-Gleichung<sup>2</sup>

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (2.3)$$

hat die Form einer Eigenwertgleichung von Operatoren. Der systembeschreibende Operator ist der Hamilton-Operator  $H$ . Die Wellenfunktion ist also ein Eigenvektor beziehungsweise eine Eigenfunktion des Hamiltonoperators zu dem Eigenwert  $E$ . In der Quantentheorie werden die Zustände eines Systems durch die Eigenwerte (Quantenzahl) von physikalischen Zustandsgrößen gekennzeichnet. Will man den Zustand eines Teilchens beschreiben, dann hat man die Werte gleichzeitig messbarer Größen des Teilchens anzugeben. Die Zustandsgrößen können aber nur dann gleichzeitig gemessen werden, wenn sie vertauschen. Man braucht also zur Festlegung des Teilchenzustandes einen vollständigen Satz vertauschbarer Zustandsgrößen. Das Eigenwertspektrum einer physikalischen Zustandsgröße und alle möglichen Zustände des Systems bilden eine abzählbare Folge. Wird die Wellenfunktion  $\psi$  der Forderung unterworfen, dass sie innerhalb der Struktur räumlich periodisch sein soll, so werden Impuls- und Energiespektrum diskret. Bei großen Strukturen spielt diese Diskretisierung keine Rolle; die Zustände sind quasi kontinuierlich verteilt. Bei kleinen Systemen macht sich jedoch die Diskretisierung bemerkbar. Nanostrukturen dringen in Dimensionen vor, bei denen die Diskretisierung beobachtbar ist. Im Folgenden werden Ladungsträgersysteme in Nanostrukturen betrachtet, bei denen das Energie-Eigenwertspektrum in einer oder mehreren Raumrichtungen diskret ist. Solche Systeme werden entsprechend *quantisierte* beziehungsweise *niederdimensionale Ladungsträgersysteme* genannt.

---

<sup>2</sup>hier in der darstellungsunabhängigen Formulierung

## 2.1. Elektronische Zustände in Nanostrukturen

In niederdimensionalen Ladungsträgersystemen ist die elektronische Wellenfunktion der Ladungsträger in einem oder mehreren Freiheitsgraden quantisiert. Dies bedeutet, dass die Bewegungsfreiheit des Ladungsträgers bezüglich der entsprechenden Raumrichtungen reduziert ist. Je nach Anzahl der verbliebenen freien Raumrichtungen spricht man von einem *zwei-* (2D), *ein-* (1D), oder *null-dimensionalen* (0D) Ladungsträgersystem. Im nulldimensionalen System werden die Ladungsträger in allen drei Raumrichtungen auf ein Punktvolumen eingeschränkt; daher heißt es auch *Quantenpunkt*. Allen niederdimensionalen Systemen ist gemeinsam, dass die räumliche Einschränkung des Systems in Quantisierungsrichtung in der Größe der de Broglie Wellenlänge der am Transport beteiligten Ladungsträger sein muss. Diese spezielle Wellenlänge wird *Fermi-Wellenlänge* genannt, da die transportrelevanten Ladungsträger energetisch nahe an der Fermi-Energie liegen,

$$\lambda_F \equiv \frac{h}{p_F} = \frac{2\pi}{k_F}. \quad (2.4)$$

In diesen Systemen dominieren die Welleneigenschaften der Ladungsträger. Durch die räumliche Einschränkung bilden sich in der eingeschränkten Raumrichtung stehende Ladungsträgerwellen mit diskretem Energiespektrum. Eine quantentheoretische Beschreibung niederdimensionaler Systeme geschieht durch Lösen der Schrödinger-Gleichung (2.3). Liegen die elektronischen Zustände in der Nähe der Bandkante, so schreibt sich die Schrödinger-Gleichung in Effektiv-Massen-Näherung (engl. **effective mass approximation** - EMA) [14, 15, 16]

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{m_z^*(z)} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\hbar^2}{2m_{\parallel}^*} \nabla_{\mathbf{r}_{\parallel}}^2 + V(z) \right) \psi(\mathbf{r}_{\parallel}, z) = E \psi(\mathbf{r}_{\parallel}, z) \quad (2.5)$$

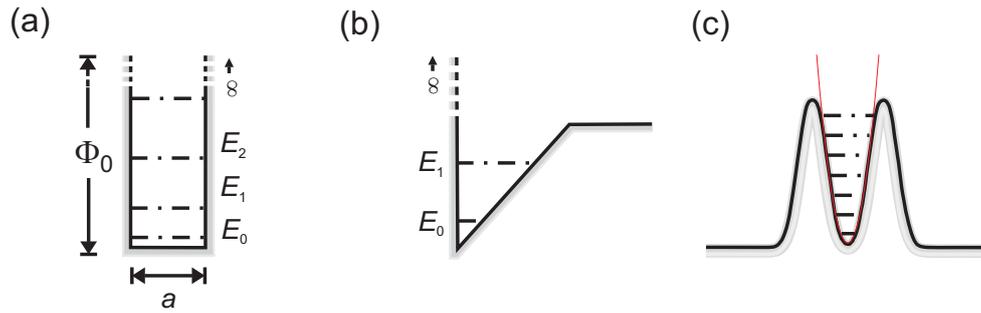
mit  $m_z^*(z)$ ,  $m_{\parallel}^*$  den effektiven Massen senkrecht und parallel zur Grenzfläche. Positionen innerhalb der Grenzfläche werden durch den Vektor  $\mathbf{r}_{\parallel} = (x, y)$  beschrieben. Das effektive Potenzial in Gleichung (2.5) setzt sich aus den Verläufen der Banddiskontinuitäten  $\Delta E_{c/v}(z)$  an den Grenzflächen der Halbleiter, den elektrostatischen Potenzialen der ionisierten Donatoren beziehungsweise Akzeptoren  $V_{D/A}(z)$  und dem Wechselwirkungspotenzial  $V_{\text{ex}}(z)$  der Ladungsträger zusammen

$$V(z) = \Delta E_{c/v}(z) + V_{D/A}(z) + V_{\text{ex}}(z). \quad (2.6)$$

Spannungsfelder beziehungsweise Deformationspotenziale sind in  $\Delta E_{c/v}(z)$  berücksichtigt. Auf Grund der Translationssymmetrie des Systems parallel zu den Grenzflächen lässt sich die Schrödinger-Gleichung (2.5) in zwei linear unabhängige Differenzialgleichungen, entsprechend der longitudinalen und transversalen Komponente, separieren. Die Lösungen von Gleichung (2.5) sind von der Form

$$\psi(\mathbf{r}_{\parallel}, z) = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}_{\parallel}} \varphi_n(z). \quad (2.7)$$

## 2. Nanostrukturen



**Abbildung 2.1.:** Beispiele für eindimensionale, elektrostatische Einschlusspotenziale: (a) Kastenpotenzial, (b) Dreieckspotenzial und (c) parabolisches Potenzial. Gestrichelt sind mögliche Eigenenergien in den Potenzialen eingetragen.

Der longitudinale Anteil entspricht einer freien Bewegung der Ladungsträger parallel zur Grenzfläche.  $\mathbf{k}_{\parallel}$  ist der zugehörige Wellenvektor. Die transversale Komponente beschreibt die Ausbreitung in Richtung des Einschlusspotenzials, mit den Eigenzuständen beziehungsweise Subbändern  $\varphi_n(z)$ . Die einzelnen Subbänder sind mit dem Index  $n$  nummeriert.  $A$  ist eine Normierungskonstante, entsprechend der lateralen Fläche des Systems. Die Subbänder müssen die Schrödinger-Gleichung

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{m_z^*(z)} \frac{d}{dz} + V(z) \right) \varphi_n(z) = E_n \varphi_n(z) \quad (2.8)$$

in Wachstumsrichtung erfüllen. Ihre Gesamtenergie relativ zur Bandkante ist

$$E_n(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_{\parallel}^*} + E_n. \quad (2.9)$$

Für die Lösungen der Gleichung (2.8) gelten die Anschlussbedingungen, die besagen, dass an den Grenzflächen sowohl  $\varphi_n(z)$  als auch  $1/m_z^*(z) \varphi_n'(z)$  stetig sein müssen.

### 2.1.1. Eindimensionale Einschlusspotenziale

Im Folgenden werden häufig in Nanostrukturen auftretende eindimensionale Potenzialverläufe diskutiert. Die  $z$ -Richtung sei als Quantisierungsrichtung gewählt. In Abbildung 2.1 sind beispielhaft drei Potenzialverläufe skizziert.

#### Unendlicher Potenzialtopf

Für den Fall eines rechteckförmigen Potenzials, der Breite  $a$  und unendlich hohen Potenzialwänden,  $\Phi_0 = \infty$  (in Abbildung 2.1 (a)), ergeben sich für einen Ladungsträger aus der Bedingung für stehende Wellen  $n(\lambda/2) = a$  und der de Broglie Relation  $k = 2\pi/\lambda$ , die erlaubten, diskreten Wellenzahlen

$$k_n = n \frac{\pi}{a} \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Hieraus resultiert ein diskretes Energiespektrum

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m_z^*} k_n^2. \quad (2.11)$$

Zu jedem Energieeigenwert gibt es genau eine Eigenfunktion

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right), \quad (2.12)$$

die die *lokalisierten beziehungsweise gebundenen Zustände* beschreibt.

In der Realität sind die Potenzialwände nur endlich hoch. Hieraus resultiert eine endliche Anzahl von *quasi-gebundenen Zuständen* (z. B. die Zustände im Potenzial Abbildung 2.1 (c)) und ein Kontinuum von Streulösungen. Ist die Energie des Teilchens jedoch sehr klein im Vergleich zur Potenzialhöhe ( $E \ll \Phi_0$ ), so ist Gleichung 2.11 eine gute Näherung für die Energieeigenwerte der tief im Topf gebundenen Zustände.

### Dreiecksförmiger Potenzialtopf

Dreiecksförmige Potentiale entstehen meist an Verarmungszonen von Heteroübergängen. Ihr Potenzialverlauf als Funktion des elektrischen Feldes ist häufig von der Form

$$V(z) = \begin{cases} eFz, & z > 0, \\ \infty, & z \leq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Die entsprechenden Eigenfunktionen von Dreieckspotenzialen (s. Abbildung 2.1 (b)) sind *Airy-Funktionen* [17, 18]. Die zugehörigen Eigenwerte sind die Wurzeln der Airy-Funktion,

$$E_n = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m^* a^2} \alpha_{n+1} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m^* a^2} \left(n + \frac{3}{4}\right)^{2/3}. \quad (2.14)$$

$\alpha_i \cong -[3\pi/2 (i + 3/2)]^{2/3}$  drückt die  $i$ -te Wurzel der Airy-Funktion aus. Die ersten drei Wurzeln haben die Werte  $\alpha_1 \approx 2,338$ ,  $\alpha_2 \approx 4,088$  und  $\alpha_3 \approx 5,527$ .

### Parabolisches Potenzial

Die in der Physik am häufigsten verwendete Näherung für Potenzialverläufe ist das parabolische Potenzial des *harmonischen Oszillators*. In Abbildung 2.1 (c) wurde als Näherung für das Einschlusspotenzial zwischen zwei Potenzialbarrieren ein parabolisches Potenzial  $V(z) = 1/2 m^* \omega_0^2 z^2$  gestrichelt eingezeichnet. Die Energieeigenwerte des parabolischen Potentials sind

$$E_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hbar^2}{m^* a^2} \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (2.15)$$

## 2. Nanostrukturen

Die Eigenwerte sind äquidistant und haben den Abstand  $\hbar\omega_0$ . Aus der klassischen Betrachtung der Umkehrpunkte eines Oszillators  $E = 1/2 m^* \omega_0^2 a^2$  lässt sich der Oszillatordradius im Grundzustand  $E_0 = 1/2 \hbar\omega_0$  abschätzen

$$a = \sqrt{\frac{2E_0}{m^* \omega_0^2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega_0}} = \sqrt{\frac{\hbar^2/m^*}{\hbar\omega_0}}. \quad (2.16)$$

Die Ausdehnung des Grundzustandes entspricht  $2a$ . Ist das Potenzial nicht unendlich hoch, so ist die Ausdehnung des Grundzustandes geringfügig größer, da ein Eindringen der Wellenfunktion in die Potenzialbarrieren berücksichtigt werden muss. Diese Aspekte werden in Kapitel 3.2 in Gleichung (3.12) mit einbezogen<sup>3</sup>. Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind

$$\varphi_n(z) = \frac{c_n}{\sqrt{a}} \mathcal{H}_n\left(\frac{z}{a}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2a^2}\right). \quad (2.17)$$

Hierbei sind  $c_n$  eine reelle Normierungskonstante und  $\mathcal{H}_n(y)$  die *Hermiteschen Polynome*<sup>4</sup> [18, 19].

Für beliebige eindimensionale Potenzialverläufe ist eine analytische Formulierung der Energieeigenwerte nicht möglich. Eine qualitative Abschätzung der Größenordnung der Diskretisierungsenergie ist durch [20]

$$E_{n+1} - E_n \sim \frac{\hbar^2}{m^* a^2} \quad (2.18)$$

gegeben. Numerisch lassen sich die Energie-Eigenwerte beliebiger, eindimensionaler Potenziale beispielsweise mit Hilfe der *Transfer-Matrix-Methode* [21, 22] ermitteln. Bei der Transfer-Matrix-Methode wird das beliebige Potenzial auf einem feinen Gitter aus Potenzialsprüngen und konstanten Potenzialen aufgebaut. Die Lösungen für konstante Potenzialbereiche beziehungsweise Potenzialsprünge sind bekannt und analytisch lösbar. Das Eigenwertspektrum des beliebigen Potenzials setzt sich dann aus den Lösungen der Teilpotenziale zusammen. Im Anhang A.1 wird diese Methode an einigen Beispielen vorgestellt.

### 2.1.2. Quantisierte Lochsysteme

Bei der Beschreibung der elektronischen Struktur wird man mit zwei Problemen konfrontiert: Erstens mit der Aufstellung der Schrödinger-Gleichung und zweitens mit der Bestimmung der Eigenlösungen dieser Gleichung. Beim Aufstellen der Schrödinger-Gleichung versucht man stets das Vielteilchenproblem auf ein Einteilchenproblem zu reduzieren. Die Schwierigkeit besteht nun darin, das effektive Potenzial zu bestimmen. Zur Lösung versucht man die gesuchten Eigenzustände zu einem bestimmten Wellenvektor  $\mathbf{k}$  nach einem Satz endlich vieler Basisfunktionen

<sup>3</sup>Achtung! In Gleichung (3.12) ist mit  $a$  die Ausdehnung des Potenzials gemeint. In Gleichung (2.16) gibt  $a$  den Radius des Oszillators an.

<sup>4</sup> $\mathcal{H}_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{\partial^n}{\partial y^n} e^{-y^2}$ , mit  $\mathcal{H}_0(y) = 1$ ,  $\mathcal{H}_1(y) = 2y$ ,  $\mathcal{H}_2(y) = 4y^2 - 2$ . [18]

vom Blochschen Typ zu entwickeln. Dem Hamilton-Operator wird dadurch eine  $\mathbf{k}$ -abhängige komplexe hermitesche Matrix mit entsprechend vielen Spalten und Zeilen zugeordnet, wie der Basissatz pro  $\mathbf{k}$ -Vektor Funktionen besitzt. Die Berechnung der elektronischen Struktur reduziert sich auf die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenfunktionen dieser Matrix. Die in Frage kommenden Basissätze unterscheiden sich durch die Anzahl und Art der in ihnen enthaltenen Funktionen. Man möchte mit möglichst wenig Funktionen auskommen, um die Matrix klein und somit den numerischen Aufwand möglichst gering zu halten. Der Preis dafür ist jedoch ein Verlust an Genauigkeit, denn mit weniger Basisfunktionen lassen sich die gesuchten Eigenfunktionen schlechter approximieren. Streng genommen benötigt man unendlich viele Basisfunktionen zur Darstellung der Eigenfunktionen. Bei vorgegebener Anzahl von Basisfunktionen ist die erreichbare Genauigkeit umso höher, je besser die Basisfunktion den gesuchten Energie-Eigenzuständen angepasst ist. Zur Darstellung der Leitungsbandzustände nahe des  $\Gamma$ -Punktes, also bei  $\mathbf{k} = 0$ , sind ebene Wellen als Basisfunktionen geeignet, da man von der Vorstellung fast freier Elektronen ausgeht und die stationären Zustände der Elektronen nur wenig von ebenen Wellen abweichen. Für Valenzbandzustände nahe des  $\Gamma$ -Punktes ist diese Auswahl häufig ungeeignet.

### Der Luttinger-Kohn Hamilton-Operator

Nahe des  $\Gamma$ -Punktes ist die Valenzbandstruktur nicht-parabolisch. An Stelle ebener Wellen zur Beschreibung der Valenzbandzustände<sup>5</sup> sind Basisfunktionen des Drehimpulses  $\mathbf{J}$  mit  $J = 3/2, 1/2$  geeignet [23, 24]. Unter der Annahme einer unendlichen großen Spin-Bahn Kopplung lassen sich die zwei obersten Valenzbänder im  $\Gamma$ -Punkt mit dem Luttinger-Operator [24, 25]

$$H_L = \frac{1}{m_0} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2} \left( \gamma_1 + \frac{5}{2} \gamma_2 \right) - \gamma_3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{J})^2 + (\gamma_3 - \gamma_2) \sum_i p_i^2 \cdot J_i^2 \right] \quad (2.19)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{hh} & \mathcal{S} & \mathcal{R} & 0 \\ \mathcal{S}^\dagger & \mathcal{E}_{lh} & 0 & \mathcal{R} \\ \mathcal{R}^\dagger & 0 & \mathcal{E}_{lh} & -\mathcal{S} \\ 0 & \mathcal{R}^\dagger & -\mathcal{S}^\dagger & \mathcal{E}_{hh} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

<sup>5</sup>Unter Berücksichtigung der Spin-Bahn Kopplung sind die Valenzbandzustände am  $\Gamma$ -Punkt vierfach entartete  $p_{3/2}$ -Zustände. Die Spin-Bahn Kopplung führt zu einer Aufspaltung der  $p$ -Orbitale in vierfach entartete  $p_{3/2}$  entsprechend  $J = 3/2$  und  $J_z = \pm 3/2, \pm 1/2$  und zweifach entartete  $p_{1/2}$ -Zustände entsprechend  $J = 1/2$  und  $J_z = \pm 1/2$ .

## 2. Nanostrukturen

beschreiben. Hierbei sind die Matrixelemente von der Form

$$\mathcal{E}_{\text{hh}} = \frac{\gamma_1 - 2\gamma_2}{2m_0} p_z^2 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2m_0} p_{\parallel}^2, \quad (2.21)$$

$$\mathcal{E}_{\text{lh}} = \frac{\gamma_1 + 2\gamma_2}{2m_0} p_z^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2m_0} p_{\parallel}^2, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{R} = \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{2m_0} (-\sqrt{3}/2)(p_x - ip_y)^2, \quad (2.23)$$

$$\mathcal{S} = \frac{\gamma_3}{2m_0} (-2\sqrt{3})(p_x - ip_y)p_z. \quad (2.24)$$

$\gamma_1, \gamma_2$  und  $\gamma_3$  sind die materialabhängigen *Luttinger-Parameter*. Die ersten zwei Terme in Gleichung (2.19) berücksichtigen den kugelsymmetrischen Anteil und der letzte Term eine kubische Symmetrie des Kristalls. An der Gleichung (2.19) ist sofort zu erkennen, dass die Verwerfungen des Valenzbandes proportional zur Differenz der beiden Parameter  $\gamma_2$  und  $\gamma_3$  sind.

Im Volumenmaterial ist der sphärische Anteil des Hamilton-Operator (2.19) nicht von der Richtung des  $\mathbf{p}$ -Operators beziehungsweise des korrespondierenden Wellenvektors  $\mathbf{k}$  abhängig. Zur Bestimmung der Eigenwerte des Hamilton-Operators sei  $\mathbf{k}$  daher in  $z$ -Richtung gewählt. Durch die Diagonalisierung (Eigenzustände von  $k_z$  zu Basisfunktionen von  $J_z^2$ ) des Luttinger Hamilton-Operators erhält man vier unabhängige Eigenvektoren mit zwei unterschiedlichen Eigenwerten. Diese beiden doppelt entarteten Energiebänder im Valenzband werden Leicht-Loch-Band (engl. **light hole band** - lh) mit  $J = 3/2, J_z = \pm 3/2$  und Schwer-Loch-Band (engl. **heavy hole band** - hh) mit  $J = 3/2, J_z = \pm 1/2$  genannt. Das hier vernachlässigte Spin-abgespaltene Band (engl. **spin split off band** - so) besitzt die Zustände  $J = 1/2, J_z = \pm 1/2$ .

Die kinetische Energie der Löcher mit  $k_z$  in  $[0\ 0\ 1]$ -Richtung ist

$$E_{\text{hh}} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} (\gamma_1 - 2\gamma_2) \quad \text{für} \quad J_z = \pm \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad (2.25)$$

$$E_{\text{lh}} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_0} (\gamma_1 + 2\gamma_2) \quad \text{für} \quad J_z = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.26)$$

Hieraus ergeben sich in  $[0\ 0\ 1]$  Richtung die effektiven Massen:

$$m_{\text{hh}} = \frac{m_0}{\gamma_1 - 2\gamma_2}, \quad (2.27)$$

$$m_{\text{lh}} = \frac{m_0}{\gamma_1 + 2\gamma_2}. \quad (2.28)$$

Die beiden Energien  $\mathcal{E}_{\text{hh, lh}}$  entsprechen der kinetischen Energie der Löcher.

Für Loch-Energieniveaus in einem Quantentopf wird das Quantentopf-Potenzial als Störung der Zustände im  $\Gamma$ -Punkt betrachtet und anschließend die Luttinger Wechselwirkung als neue Störung der Quantentopf-Niveaus hinzugefügt. In erster Ordnung hebt das Quantentopf-Potenzial die Entartung zwischen  $J_z = \pm 3/2$  und  $\pm 1/2$  Bändern auf, entsprechend den unterschiedlichen Massen. Aus dem Luttinger-Operator, Gleichung (2.19), erhält man durch Einsetzen von  $k_x = k_{\perp}, k_y = k_z = 0$

die Dispersion in  $[1\ 0\ 0]$  Richtung senkrecht zu  $z$ :

$$E = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_0} (\gamma_1 + \gamma_2) \quad \text{für } J_z = \pm \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad (2.29)$$

$$= \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_0} (\gamma_1 - \gamma_2) \quad \text{für } J_z = \pm \frac{1}{2}. \quad (2.30)$$

Die transversale Dispersionsrelation entsprechend den  $J_z = \pm 3/2$  (Schwer-Loch Band in  $z$ -Richtung) hat nun die leichte Masse

$$m_{\text{hh}} = \frac{m_0}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (2.31)$$

hingegen besitzen die  $J_z = \pm 1/2$  Zustände die schwere Masse

$$m_{\text{lh}} = \frac{m_0}{\gamma_1 - \gamma_2}. \quad (2.32)$$

Diese Situation ist vergleichbar der Entwicklung bei uniaxialen beziehungsweise biaxialen Verspannungen in  $[1\ 0\ 0]$ -Richtung. Ein Kreuzen der Bänder wird jedoch durch Terme höherer Ordnung in  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  Störungstheorie verhindert [25], indem die Bänder entsprechend energetisch angehoben beziehungsweise abgesenkt werden. Dieses Verhalten ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

Tatsächlich ist das eben beschriebene Verhalten nicht korrekt, es liefert aber eine qualitative Beschreibung. Im entarteten Satz aus Valenzband-Zuständen bei  $\mathbf{k} = 0$  muss der gestörte Hamilton-Operator diagonalisiert werden:

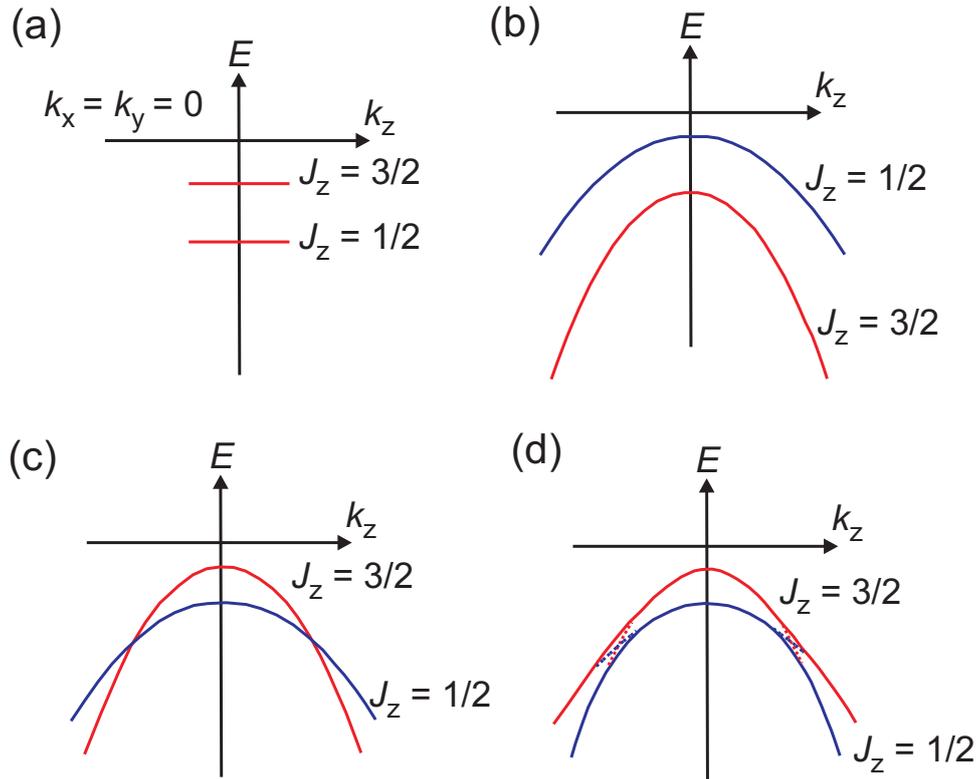
$$H = H_L + V_{\text{QW}}. \quad (2.33)$$

Es ist bekannt, dass in erster Ordnung die Lösungen Linearkombinationen der  $\mathbf{k} = 0$  Valenzband-Wellenfunktion sind. Bei  $V_{\text{QW}} = 0$  sind das die  $J_z = \pm 3/2$  und  $J_z = \pm 1/2$  Funktionen, die durch die Dispersionsrelationen (2.25) und (2.29) gegeben sind. Schwierigkeiten können jedoch von den Randbedingungen verursacht werden, da sie gleichzeitig von dem Quantentopf erfüllt werden müssen. Der Satz von Funktionen, der  $H_L$  diagonalisiert, ist nicht gleichzeitig eine Basis von  $V_{\text{QW}}$ . Die Randbedingungen werden nur durch ein starkes Vermischen der  $J_z = \pm 3/2$  und  $J_z = \pm 1/2$  Bänder erfüllt. Ein weiterer Punkt ist, dass die starke Nichtparabolizität des Valenzbandes die Zustandsdichte des Valenzbandes deutlich beeinflusst. Für den Fall eines unendlich tiefen Quantentopfs lässt sich der Sachverhalt analytisch berechnen. Unter Vernachlässigung von Bandverkrümmungen ( $\gamma_2 = \gamma_3 = \bar{\gamma}$ ), sind die Energie-Zustände bei  $\mathbf{k} = 0$  durch

$$E_{\text{lh, hh}} = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (\gamma_1 \pm 2\bar{\gamma}) \quad (2.34)$$

gegeben. Die Bestimmungsgleichung für  $k_{\perp} = k_y \neq 0$  ist [26]

$$4 [k_{\text{lh},z}^2 k_{\text{hh},z}^2 + k_y^2 (k_{\text{hh},z}^2 + k_{\text{lh},z}^2) + 4k_y^4] \sin k_{\text{hh},z} a \sin k_{\text{lh},z} a + 6 k_y^2 k_{\text{lh},z} k_{\text{hh},z} (1 - \cos k_{\text{hh},z} a \cos k_{\text{lh},z} a) = 0 \quad (2.35)$$



**Abbildung 2.2.:** Schema der Energiedispersion der  $J_z = 3/2$  und  $J_z = 1/2$  Valenzbandzustände in (a) einen Quantentopf mit Einschränkung in  $z$ -Richtung, (b) unter Berücksichtigung der Auswirkungen einer uniaxialen Verspannung in  $z$ -Richtung auf die Bänder, (c) unter Vernachlässigung der „off-diagonal“ Terme, also ohne ein Vermischen der Bänder. (d) Ein Mischen der Bänder wird berücksichtigt.

mit

$$k_{(\text{lh, hh}),z} = \sqrt{\frac{2E}{\gamma_1 \pm 2\bar{\gamma}} \frac{m_0}{\hbar^2} - k_y^2}. \quad (2.36)$$

Hiermit ist es nun möglich, die effektive Masse für die Schicht zu ermitteln [26]:

$$\frac{1}{m_{(\text{lh, hh}),z}} = 2 \left( \frac{\partial^2 E_{(\text{lh, hh}),z}}{\partial k_{\parallel}^2} \right)_{k_z=0}. \quad (2.37)$$

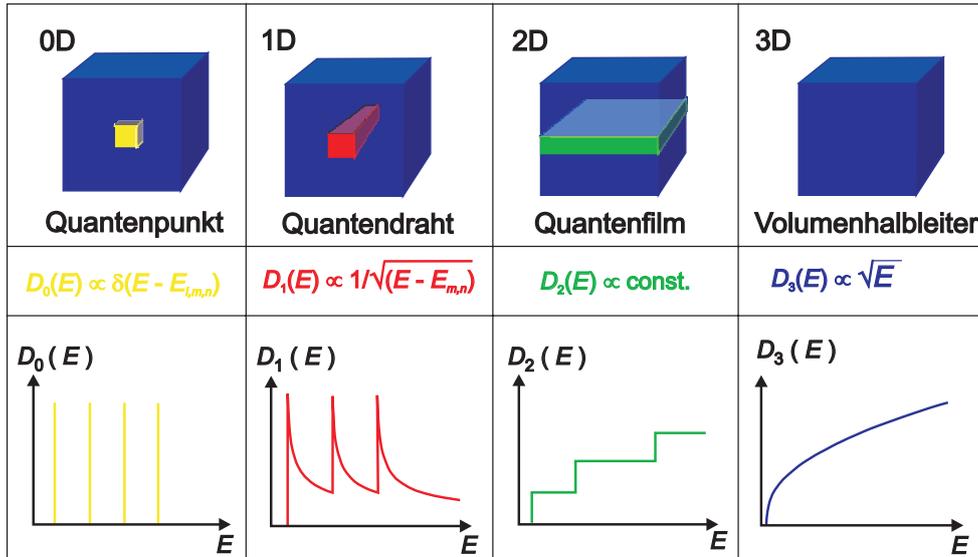


Abbildung 2.3.: Zustandsdichten von niederdimensionalen Systemen.

### 2.1.3. Die Zustandsdichte

Aus dem Energiespektrum eines Ladungsträgersystems<sup>6</sup> folgt eine weitere charakteristische Größe, die *Zustandsdichte*

$$D(E) \equiv 1/V \, dN/dE. \quad (2.38)$$

Sie gibt die Anzahl der Einteilchen-Zustände  $N$  im Energieintervall  $[E, E + dE]$  pro Einheits-Länge (1D System), -Fläche (2D System) bzw. -Volumen (3D System) an. Die Zustände sind durch den Impuls  $\mathbf{p}$  und die Spinprojektion  $s_z$  festgelegt. Ein Ladungsträger im  $d$ -dimensionalen System spannt ein  $2d$ -dimensionales Phasenraumvolumen  $V_d$  auf, entsprechend seiner  $d$  Orts-Koordinaten und  $d$  Impuls-Komponenten. Nach der Unschärferelation (2.2) hat der Phasenraum eine Zellengröße  $(2\pi\hbar)^d$ . Das System besitzt demnach [20]

$$N = 2 \frac{V_d}{(2\pi\hbar)^d} \quad (2.39)$$

Zustände, wobei die Zahl 2 den beiden möglichen Spinzuständen Rechnung trägt. Bei tiefen Temperaturen verhalten sich die Ladungsträger im Volumenmaterial wie ein ideales Fermi-Gas. Die Ladungsträger können sich frei im  $L^3$ -Volumen des Materialkörpers bewegen und besetzen alle energetisch möglichen Impulse innerhalb der Fermi-Kugel ( $4/3 \pi p_F^3$ ). Ihr Energiespektrum ist isotrop

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2 m^*}. \quad (2.40)$$

<sup>6</sup>nichtrelativistische Fermionen mit Spin 1/2 und Masse  $m^*$

## 2. Nanostrukturen

Dies ermöglicht ein einfaches Abzählen der Zustände im Bereich  $dE = p/m^* dp$  mit  $p = \sqrt{2m^*E}$ . Ein dreidimensionales System (Volumenmaterial) hat somit die Zustandsdichte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \frac{dN}{dE} &= \frac{1}{L^3} 2 \frac{d}{dE} \left( \frac{L^3 \frac{4}{3} \pi p^3}{(2\pi\hbar)^3} \right) \\ &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{m^*}{p} \frac{d}{dp} \left( \frac{4}{3} \pi p^3 \right) \\ D_3(E) &= \frac{(2m^*)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \sqrt{E} \cdot \Theta(E). \end{aligned} \quad (2.41)$$

In Abbildung 2.3 ist der wurzelförmige Verlauf der Zustandsdichte exemplarisch skizziert.

In zweidimensionalen Ladungsträgersystemen, so genannten *Quantenfilmen*, ist die Zustandsdichte in jedem Subband konstant. Erreicht die Energie ein neues Subband, macht die Zustandsdichte einen Sprung von  $m^*/\pi\hbar^2$ ; mathematisch beschreibt dies die Sprungfunktion  $\Theta(E - E_n)$ . Die Gesamtzustandsdichte aller Subbänder ist somit die Superposition von konstanten Beiträgen. Die Gesamtzustandsfunktion ist somit eine Treppenfunktion

$$D_2(E) = \frac{m^*}{\pi\hbar^2} \sum_n \Theta(E - E_n). \quad (2.42)$$

Ein Beispiel ist in Abbildung 2.3 gezeigt.

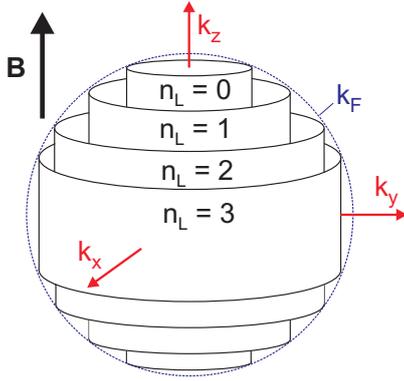
Bei eindimensionalen Ladungsträgersystemen, so genannten *Quantendrähten*, zeigt die Zustandsdichte pro Subband einen  $1/\sqrt{E}$  Verlauf und die Gesamtzustandsdichte ist:

$$D_1(E) = \frac{\sqrt{m^*/2}}{\pi\hbar} \sum_{m,n} \frac{\Theta(E - E_{m,n})}{\sqrt{E - E_{m,n}}}. \quad (2.43)$$

In Abbildung 2.3 ist der Verlauf einer Zustandsdichte für einen Quantendraht gezeigt.

Ein *Quantenpunkt* besitzt ein vollständig diskretisiertes Energiespektrum, wobei jeder Energie-Eigenzustand entsprechend der zwei Spin-Zustände zweifach entartet ist. Die Gesamtzustandsdichte ist die Superposition aller Eigenzustände; sie zeigt einen  $\delta$ -förmigen Verlauf (s. Abbildung 2.3):

$$D_0(E) = 2 \sum_{l,m,n} \delta(E - E_{l,m,n}). \quad (2.44)$$



**Abbildung 2.4.:** Freies Ladungsträgersystem im Magnetfeld. Die erlaubten Zustände liegen auf so genannten *Landau-Röhren*. Diese sind durch zwei Eigenschaften charakterisiert. Erstens erfolgt der Umlauf eines Ladungsträgers senkrecht zu  $\mathbf{B}$  auf einer Fläche konstanter Energie. Zweitens ist die zwischen aufeinander folgenden Röhren eingeschlossene Fläche konstant. Zur Orientierung ist zusätzlich die Fermi-Kugel, die die Besetzung ohne Magnetfeld angibt, gestrichelt eingezeichnet.

## 2.2. Magnetfelder in Nanostrukturen

Statische, äußere Magnetfelder  $B$  beeinflussen tiefgreifend die elektronischen Zustände in Nanostrukturen. Im klassischen Bild bewirkt die *Lorentz-Kraft*,

$$\mathbf{F}_L = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.45)$$

dass sich die Ladungsträger (Elektronen  $q = -e$  und Löcher  $q = +e$ ) auf kreisförmigen Bahnen, so genannten *Zyklotron-Bahnen*, senkrecht zur Magnetfeldrichtung bewegen. In Feldrichtung ist ihre Bewegung vom Magnetfeld unbeeinflusst. Die Umlauffrequenz der Kreisbewegung, *Zyklotronfrequenz*, folgt unmittelbar aus der Gleichheit der Zentrifugal- und der Lorentz-Kraft ( $m_{\parallel}^* v \omega_c = e v B$ ),

$$\omega_c = \frac{e B}{m_{\parallel}^*}. \quad (2.46)$$

Die effektive Masse  $m_{\parallel}^*$  ist die Komponente der effektiven Masse der Ladungsträger in der Ebene der Kreisbewegung. In einer quantentheoretischen Betrachtung entsprechen die Energien der Zyklotron-Bewegung den Energie-Eigenwerten eines harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz  $\omega_c$  (vgl. Gleichung (2.15)):

$$E_L = \hbar \omega_c \left( n_L + \frac{1}{2} \right), \quad n_L = 0, 1, 2, \dots \quad (2.47)$$

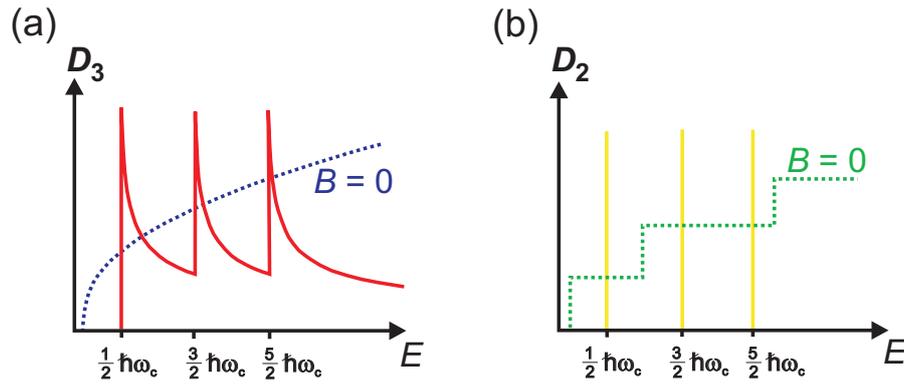
Die *Landau-Quantenzahl*  $n_L$  gibt das entsprechende *Landau-Niveau* beziehungsweise *magnetische Subband* an. Der Radius einer Zyklotron-Bahn  $r_c$  lässt sich ebenfalls in der semi-klassischen Betrachtungsweise ermitteln. Die Landau-Energie Gleichung (2.47) entspricht einer Rotationsenergie. Aus der Gleichheit der beiden Energien

$$\frac{1}{2} m_{\parallel}^* \omega_c^2 r_c^2 = \hbar \omega_c \left( n_L + \frac{1}{2} \right) \quad (2.48)$$

folgt unmittelbar der magnetfeldabhängige Zyklotron-Radius

$$r_c = \sqrt{(2n_L + 1) \frac{\hbar}{e B}}. \quad (2.49)$$

## 2. Nanostrukturen



**Abbildung 2.5.:** Dargestellt ist die Zustandsdichte für (a) ein drei- beziehungsweise (b) zweidimensionales Ladungsträgersystem im äußeren Magnetfeld. Die gepunkteten Kurven entsprechen den Zustandsdichten ohne Magnetfeld.

Der *Lamor-Radius*, also die kleinste Zyklotron-Bahn ( $n_L = 0$ ), wird *magnetische Länge*

$$\ell_B = r_c(n_L = 0) = \sqrt{\frac{\hbar}{e B}} \quad (2.50)$$

genannt.

### Freies Ladungsträgersystem im Magnetfeld

Unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfelds wird ein freies Ladungsträgersystem quantisiert. Landau-Niveaus entsprechend der magnetischen Subbänder entstehen. Das Energiespektrum setzt sich aus der quantisierten Landau-Energie (2.47) und einer Komponente entsprechend der freien Bewegung parallel zur Magnetfeldrichtung zusammen

$$\begin{aligned} E &= E_L + E_z \\ &= \hbar\omega_c \left( n_L + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_z^*}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Das Magnetfeld verändert auch die Zustandsdichte des Systems. Für ein freies, dreidimensionales Ladungsträgersystem sitzen die Ladungsträger auf Röhren, den so genannten Landau-Röhren (s. Abbildung 2.4). Die erlaubten Zustände im  $\mathbf{k}$ -Raum kondensieren gewissermaßen auf diesen Röhren, sobald ein Magnetfeld eingeschaltet ist. Die Zahl der Zustände bleibt jedoch konstant. Auf jeder Röhre müssen daher zu jedem erlaubten  $k_z$ -Wert die Zustände sitzen, die sonst zwischen den Röhren lagen. Durch das magnetische Einschlusspotenzial wird das freie System zu einem eindimensionalen mit nur noch einer freien Bewegungsrichtung zusammengeschnürt. Entsprechend zeigt die Zustandsdichte einen  $1/\sqrt{E}$ -Verlauf (vgl. Gleichung 2.51).

chung (2.43)) [27, 28, 29]:

$$D_3(E, B) = 2 \frac{\sqrt{2m^*}}{4\pi^2\hbar} \frac{e B}{\hbar} \sum_{n_L}^{n_L^{\max}} \left( E - \hbar\omega_c \left( n_L + \frac{1}{2} \right) \right)^{-1/2} \quad (2.52)$$

mit  $n_L^{\max}$ , dem energetisch höchsten Landau-Niveau.

### Zweidimensionales Ladungsträgersystem im Magnetfeld

Ist die Bewegungsfreiheit der Ladungsträger im feldfreien Fall bereits durch ein elektrostatisches Einschlusspotenzial reduziert, muss bei der Wechselwirkung eines Magnetfeldes mit den Ladungsträgern zwischen zwei grundsätzlichen Magnetfeld-Orientierungen unterschieden werden: Das Magnetfeld ist entweder parallel (longitudinal) oder senkrecht (transversal) zur freien Ausbreitungsrichtung der Ladungsträger orientiert.

#### Longitudinale Magnetfeldorientierung

Ein zweidimensionales Ladungsträgersystem, das parallel zur Magnetfeldrichtung in seiner Beweglichkeit eingeschränkt ist, besitzt ein vollständig quantisiertes Energiespektrum aus Landau- und Raum-Quantisierung

$$\begin{aligned} E &= E_L + E_n \\ &= \hbar\omega_c \left( n_L + \frac{1}{2} \right) + E_n, \\ n_L, n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.53)$$

Die resultierende Zustandsdichte des zweidimensionalen Ladungsträgersystems hat entsprechend der vollständigen Quantisierung die Form äquidistanter  $\delta$ -Peaks [27, 28, 29]:

$$D_2(E, B) = \frac{e B}{h} \sum_{n_L, n} \delta(E - E_{n_L, n}). \quad (2.54)$$

Für ein spezielles Subband ist ohne Magnetfeld die Zustandsdichte wegen der Zweidimensionalität eine Stufenfunktion. Diese kontinuierliche Funktion spaltet bei endlichem Magnetfeld in eine Reihe von  $\delta$ -Funktionen auf, die auf der Energieskala um  $\hbar\omega_c$  voneinander entfernt sind. Die Zustände kondensieren in scharfe Landau-Niveaus. Weil keine Zustände verloren gehen, müssen so viele Zustände in einem  $\delta$ -funktionsartigen Landau-Niveau enthalten sein wie ursprünglich im feldfreien Fall in der Fläche zwischen je zwei Landau-Niveaus vorhanden waren. Der Entartungsgrad eines Landau-Niveaus beträgt somit  $D_2\hbar\omega_c = (e/h) B$ . Wenn der Landau-Zustand energetisch unterhalb des Fermi-Niveaus liegt, ist er bei genügend tiefer Temperatur gerade mit  $(e/h) B$  Ladungsträgern besetzt. Eine Variation des äußeren Magnetfelds ändert nun die energetische Aufspaltung  $\hbar\omega_c$  der Landau-Niveaus. Mit wachsender Magnetfeldstärke verschieben sich die Landau-Zustände zu höheren Energien und durchlaufen schließlich das Fermi-Niveau. Dabei werden sie entleert, wobei die überzähligen Ladungsträger jeweils auf dem darunter liegenden Landau-Niveau Platz finden.

## 2. Nanostrukturen

### Transversale Magnetfeldorientierung

Ist das Magnetfeld senkrecht zum elektrostatischen Einschlusspotenzial orientiert, liegen das elektrostatische und das magnetische Einschlusspotenzial in einer Ebene. Je nach Stärke des Magnetfeldes und Breite des elektrostatischen Einschlusspotenzials unterscheidet man zwei Grenzfälle:

1. **Magnetische Quantisierung:** Das elektrostatische Einschlusspotenzial ist breit und das Magnetfeld so stark, dass sich klassisch betrachtet im elektrostatischen Potenzial (mit Breite  $a$ ) Landau-Zyklotron-Bahnen ausbilden können ( $\ell_B \ll a$ ). Dann ist die Bewegung der Ladungsträger durch das elektrostatische Potenzial nur wenig beeinflusst und die Quantisierung wird durch das Magnetfeld vorgegeben.
2. **Elektrostatische Quantisierung:** Für schwache Magnetfelder und enge Einschlusspotenziale liegt der Fall ( $\ell_B \gg a$ ) vor. Es kann zu keiner Ausbildung von Landau-Bahnen kommen, da die Ladungsträger auf beiden Seiten an den elektrostatischen Potenzialwänden anstoßen (skipping orbits). In diesem Fall werden die diskreten Energieniveaus durch die Breite des Potenzialtopfs bestimmt; man spricht von elektrostatischer Quantisierung. Diese Feldorientierung ermöglicht es, Spin-Effekte zu studieren, ohne dass diese in dominierenden Bahndrehimpulseffekten untergehen. Ein weiterer Effekt ist, dass das parabolische, magnetische Einschlusspotenzial die Subbänder, die sich auf Grund des elektrostatischen Einschlusspotenzials ergeben, energetisch anheben. Dies wird auch als *diamagnetische Verschiebung* (s. Kapitel 3.3.2) bezeichnet. Zudem wird die Komponente der effektiven Masse der Ladungsträger, die senkrecht zum Magnetfeld und zum elektrostatischen Einschlusspotenzial liegt, beeinflusst.

Der Tunneltransport in transversalen Magnetfeldern wird detailliert in Kapitel 3.3.2 diskutiert.

### Quantenpunkt im Magnetfeld

Das Problem eines geladenen Teilchens in einem zweidimensionalen Potenzial ist erstmals von Fock [30] und Darwin [31] gelöst wurden. Die hier verwendete Formulierung basiert auf der Operator-Methode von Rössler [27, 32]. Eine ausführliche Diskussion des Problems ist zudem in [33] zu finden. Der Hamilton-Operator eines Ladungsträgers mit Spin, der sich in einem symmetrischen Potenzial befindet, schreibt sich bei Anwesenheit eines äußeren statischen Magnetfeldes

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + \frac{1}{2}m^*\omega_0^2 (x^2 + y^2) + \frac{g^* \mu_B}{\hbar} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}, \quad (2.55)$$

wobei  $\mathbf{A}$  das Vektorpotenzial des Magnetfeldes  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$  ist. Der letzte Term repräsentiert die Zeeman-Aufspaltung mit  $\mathbf{S}$  dem Spin-Operator,  $g^*$  dem

effektiven Landé  $g$ -Faktor und  $\mu_B = e\hbar/2m_0 \approx 0.058 \text{ meV/T}$ , dem Bohrschen Magneton. Das Magnetfeld ist entlang der  $z$ -Richtung orientiert, wobei  $\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$  genutzt wird. Der Hamilton-Operator (2.55) lässt sich somit in

$$\begin{aligned} H &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2 + \frac{1}{2}m^*\Omega^2(x^2 + y^2) \right] + \frac{1}{2}\omega_c L_z + \frac{g^*\mu_B}{\hbar} B S_z \quad (2.56) \\ &= H_\Omega + \frac{1}{2}\omega_c L_z + \frac{g^*\mu_B}{\hbar} B S_z \quad \text{mit} \quad L_z = xp_y - yp_x \end{aligned}$$

umschreiben. Hierbei ist

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4}} \quad (2.57)$$

die hybridisierte Oszillatorfrequenz, die sich aus der Eigenfrequenz des elektrostatischen harmonischen Oszillator-Potenzials und der Zyklotronfrequenz (2.46) zusammensetzt. Der Operator-Term in den eckigen Klammern,  $H_\Omega$ , ist der Hamilton-Operator eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz  $\Omega$ .

Unter Verwendung der kartesischen Leiteroperatoren

$$a_x = \sqrt{\frac{m^*\omega_x}{2\hbar}} \left( x + i \frac{p_x}{m^*\omega_x} \right), \quad a_x^\dagger = \sqrt{\frac{m^*\omega_x}{2\hbar}} \left( x - i \frac{p_x}{m^*\omega_x} \right) \quad (2.58)$$

$$a_y = \sqrt{\frac{m^*\omega_y}{2\hbar}} \left( y + i \frac{p_y}{m^*\omega_y} \right), \quad a_y^\dagger = \sqrt{\frac{m^*\omega_y}{2\hbar}} \left( y - i \frac{p_y}{m^*\omega_y} \right) \quad (2.59)$$

lassen sich zirkulare Leiteroperatoren

$$a_\circlearrowleft = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y) \quad \text{und} \quad a_\circlearrowright = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y) \quad (2.60)$$

eingeführen, die das Problem auf Grund seiner Radialsymmetrie elegant beschreiben. Mit Hilfe der zirkularen Leiteroperatoren lassen sich sowohl der Hamilton-Operator  $H_\Omega$  als auch der Drehimpuls-Operator in  $z$ -Richtung  $L_z$  ausdrücken;

$$H_\Omega = (a_\circlearrowleft^\dagger a_\circlearrowleft + a_\circlearrowright^\dagger a_\circlearrowright + 1) \hbar\Omega = (n_\circlearrowleft + n_\circlearrowright + 1) \hbar\Omega = (n + 1) \hbar\Omega \quad (2.61)$$

und

$$L_z = (a_\circlearrowleft^\dagger a_\circlearrowleft - a_\circlearrowright^\dagger a_\circlearrowright) \hbar = (n_\circlearrowleft - n_\circlearrowright) \hbar = m \hbar. \quad (2.62)$$

In Gleichung (2.61) repräsentiert  $n$  die Hauptquantenzahl des Zustands. Die Eigenwerte des Bahndrehimpulses sind  $m\hbar$ . Für jedes  $n = n_\circlearrowleft + n_\circlearrowright$  existieren  $n + 1$  mögliche Werte für  $m = n_\circlearrowleft - n_\circlearrowright$ :

$$\begin{array}{lll} n_\circlearrowleft = n & n_\circlearrowright = 0 & m = n \\ n_\circlearrowleft = n - 1 & n_\circlearrowright = 1 & m = n - 2 \\ n_\circlearrowleft = n - 2 & n_\circlearrowright = 2 & m = n - 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n_\circlearrowleft = 1 & n_\circlearrowright = n - 1 & -(n - 2) \\ n_\circlearrowleft = 0 & n_\circlearrowright = n & -n. \end{array} \quad (2.63)$$

## 2. Nanostrukturen

Für einen Energiezustand kann daher die Drehimpulsquantenzahl  $m$  einen der Werte

$$m = -n, -(n-2), \dots, n-2, n \quad (2.64)$$

annehmen.

Der Spin-Operator  $S_z$  wirkt auf die Spin-Komponente der Wellenfunktion und besitzt die Eigenwerte  $\pm\hbar/2$ , entsprechend der Spin-auf  $|\uparrow\rangle$  und Spin-ab  $|\downarrow\rangle$  Eigenzustände. Dies führt zu einer zweifachen Spinaufspaltung der Energie-Niveaus in hohen Magnetfeldern. Da der Bahndrehimpuls-Operator mit  $H$  kommutiert, sind die Eigenzustände von  $H$  und  $H_\Omega$  gleich, so dass der Hamilton-Operator (2.56) sich wie folgt schreiben lässt:

$$H = (n_\circ + n_\circ + 1) \hbar\Omega + \frac{1}{2}\omega_c L_z + \frac{g^* \mu_B}{\hbar} B S_z. \quad (2.65)$$

Seine Energie-Eigenwerte sind

$$E_{n,m} = (n+1) \hbar\Omega + \frac{1}{2} m \hbar\omega_c \pm \frac{g^* \mu_B B}{2}. \quad (2.66)$$

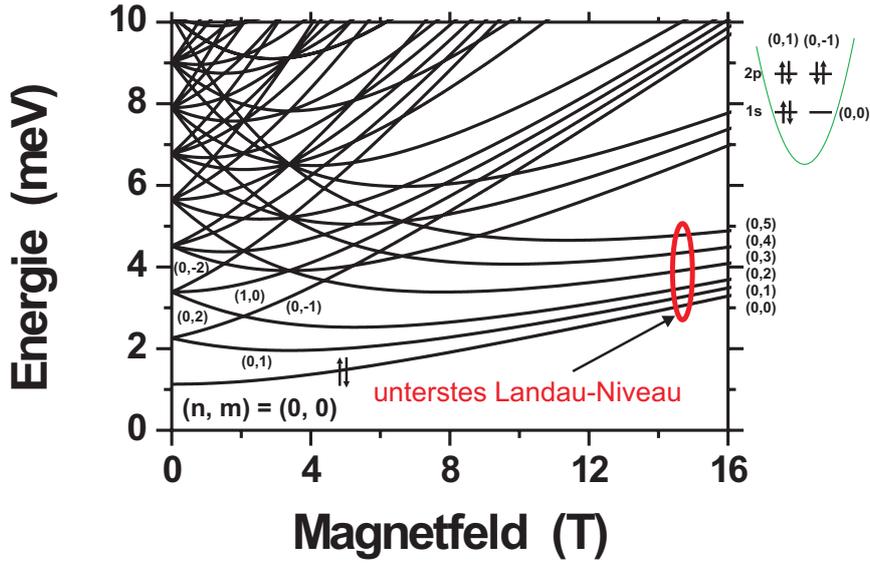
Dies bedeutet, dass die  $(n+1)$ -fach entarteten Bahndrehimpuls-Zustände durch das Magnetfeld angehoben werden, so dass die Gesamtenergie ihrerseits nur noch vom Bahndrehimpuls abhängt, siehe Abbildung 2.6. Die Spinaufspaltung sei hier vernachlässigt. Für kleine Felder ( $\omega_c \ll \Omega$ ) ähneln die Lösungen denen eines harmonischen Oszillators. Wächst  $\omega_c$ , so spalten die Niveaus in Abhängigkeit des Vorzeichens von  $m$  zu höheren beziehungsweise niedrigeren Energien auf. Jedes Subband ist um den Betrag  $\hbar\omega_c$  verschoben, da  $m$  sich in dem Fall um 2 erhöht hat. Im Grenzfall sehr großer magnetischer Felder ( $\omega_c \gg \omega_0$ ) nähert sich Gleichung (2.66) (ohne Zeeman-Term)

$$E_{n,m} \approx (n+m+1) \frac{\hbar\omega_c}{2} + (n+1) \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}. \quad (2.67)$$

Für extrem große Felder geht Gleichung (2.67) in die Landau-Niveaus  $(n+m+1)\hbar\omega_c$  entsprechend eines zweidimensionalen Ladungsträgersystems ( $n+m = 2n_\circ$ ) über. Dies bedeutet, in großen Feldern spüren die Ladungsträger nicht das parabolische Einschlusspotenzial, sondern es dominiert die Zyklotron-Bewegung. Für die großen Felder, in Abbildung 2.6 zu sehen, laufen die Bahndrehimpulszustände für  $m = -n$  zusammen und bilden das unterste Landau-Niveau. Alle  $m = -(n-2)$  Zustände bilden das erste angeregte Niveau, usw. Für mittlere magnetische Feldstärken führt das Aufspalten der Bahndrehimpulszustände zu einem gekreuzten Muster aus vielen Zuständen.

In der Originalarbeit von Fock [30] wählte dieser eine Darstellung der Variablen in Polarkoordinaten. Hieraus resultiert eine leicht geänderte Darstellung der Gleichung (2.66) in der Form

$$\begin{aligned} E_{n',m} &= (2n' + |m| + 1) \hbar\Omega + \frac{1}{2} m \hbar\omega_c \\ n' &= 0, 1, 2, \dots, \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.68)$$



**Abbildung 2.6.:** Fock-Darwin Zustände eines parabolischen zweidimensionalen Quantenpunktes in Anwesenheit eines statischen, äußeren Magnetfeldes. Ohne Magnetfeld haben die Eigenwerte wie beim eindimensionalen harmonischen Oszillator den Abstand  $\hbar\Omega$ .

Die Spinaufspaltung ist ebenfalls vernachlässigt. Die zugehörigen Eigenzustände sind [27, 28]

$$\varphi_{n'm}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \frac{1}{\ell_\Omega} \sqrt{\frac{n'!}{(n' + |m|)!}} e^{-r^2/4\ell_\Omega^2} (r/\sqrt{2}\ell_\Omega)^{|m|} \mathcal{L}_{n'}^{|m|}(r^2/2\ell_\Omega^2) \quad (2.69)$$

mit der charakteristischen Länge  $\ell_\Omega = (\hbar/m^*\Omega)^{1/2}$  und  $\mathcal{L}_{n'}^{|m|}$ , den *verallgemeinerten Laguerre Polynomen*.

### 2.2.1. Der Spin und Landè g-Faktor

Für Ladungsträger ist neben der effektiven Masse  $m^*$  und der Ladung  $q = \pm e$  der innere Drehimpuls, *Spin*, eine wichtige diskrete Quantenzahl. Im Gegensatz zum Bahndrehimpuls kann der Spin nicht durch Ort und Impuls des Ladungsträgers ausgedrückt werden. Der Gesamtdrehimpuls eines Ladungsträgers setzt sich aus Bahndrehimpuls und Spin zusammen. Im Ruhesystem des Ladungsträgers verschwindet der Beitrag des Bahndrehimpulses zum Gesamtdrehimpuls. Der Spin ist somit der Drehimpuls im Ruhesystem des Teilchens und wird daher auch *Eigendrehimpuls* genannt. Auf Grund des Spins besitzen die Ladungsträger ein magnetisches Moment [34]

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g^* \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{S}, \quad (2.70)$$

## 2. Nanostrukturen

das in Richtung des Spins zeigt. Der Spin-Operator ist durch  $\mathbf{S} = \hbar/2 \boldsymbol{\sigma}$  dargestellt, wobei  $\sigma_i$  die *Pauli-Spinmatrizen*<sup>7</sup> sind. Der gyromagnetische Landé  $g$ -Faktor<sup>8</sup>, kurz  $g$ -Faktor, ist von der Ladungsträgerart abhängig. Dies wird durch das hoch gestellte Sternchen betont. Mit  $\mu_B = e\hbar/2m_0 = 0.058 \text{ meV/T}$  wird das Bohrsche Magnetron bezeichnet. In Folge des magnetischen Moments  $\boldsymbol{\mu}$  haben die Ladungsträger in einem äußeren Magnetfeld  $\mathbf{B}$  die Wechselwirkungsenergie  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ . Das äußere Magnetfeld  $\mathbf{B}$  hebt also die Spinentartung auf, so dass sich die Spins der Ladungsträger im Feld ausrichten können. Im Magnetfeld spalten die diskreten Energieniveaus in zwei getrennte Niveaus (Dubletts) auf. Zustände mit Spin- $|\uparrow\rangle$  verschieben sich zu höheren Energien um den Betrag  $1/2 g^* \mu_B B$ , Spin- $|\downarrow\rangle$ -Zustände verschieben sich um den selben Betrag zu niedrigeren Energien. Die Spin-Eigenzustände besitzen also die Spin-Energie  $E_s = \pm 1/2 g^* \mu_B B$ . Die Aufspaltung der spinentarteten Niveaus im Magnetfeld heißt *Zeeman-Aufspaltung*,

$$\Delta E_Z = g^* \mu_B B. \quad (2.71)$$

### 2.2.2. Zeeman-Effekt für Löcher

Die vorhergehende Betrachtung gilt nur für isotrope Ladungsträgersysteme mit parabolischer Dispersion. Für diesen Fall ist die Zeeman-Aufspaltung proportional zum Betrag des Magnetfelds (vgl. Gleichung (2.71)) und unabhängig von der Magnetfeldorientierung. Für Ladungsträgersysteme mit nicht parabolischer Dispersionsrelation, so zum Beispiel Schwer- und Leicht-Loch-Systeme, lässt sich der Luttinger-Operator (2.19) um den Spin-Magnetfeld-Operator erweitern [35, 36, 37, 38]

$$H = H_L + 2 \kappa \mu_B \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} + 2 q \mu_B (J_x^3 B_x + J_y^3 B_y + J_z^3 B_z). \quad (2.72)$$

Der effektive  $g$ -Faktor des ersten Terms  $\kappa$  repräsentiert den isotropen Anteil des Ladungsträgersystems. Er ist meist um zwei Ordnungen größer als  $q$ , der die anisotropen Eigenschaften wiedergibt. Vorerst sei der anisotrope Anteil vernachlässigt. Für ein Magnetfeld, das in Wachstumsrichtung, also der  $z$ -Richtung orientiert ist, koppeln die Schwer- und Leicht-Loch-Bänder an  $\kappa$ , so dass eine Zeeman-Aufspaltung entsprechend Gleichung (2.71) sowohl für das Schwer-Loch- als auch für das Leicht-Loch-Band beobachtet werden kann.

Ist das Magnetfeld parallel zur Wachstumsebene orientiert, so koppelt  $\kappa$  zwar an die beiden Leicht-Loch-Zustände  $J_z = \pm 1/2$ , aber nicht an die Schwer-Loch-Zustände  $J_z = \pm 3/2$ . Der Zeeman-Effekt ist für Schwer-Loch-Zustände unterdrückt.

Für sehr große Magnetfelder ist dennoch eine Aufspaltung der Schwer-Loch-Zustände beobachtbar. Die Aufspaltung resultiert aus dem geringen anisotropen Anteil sowie dem Einfluss aus höherer Ordnung Störungstheorie.

<sup>7</sup>

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<sup>8</sup>Allgemein ist  $g$  ein Tensor. Für ein isotropes System vereinfacht sich der Tensor zu einem Faktor  $g^*$ .

## 2.3. Reale Systeme: Der Einfluss von Temperatur und Streueffekten

Die Energiedispersionen (3.5) und (3.6) gelten nur für ideale Fermi-Gase. In realen Systemen erfahren die Energieniveaus durch den Einfluss der endlichen Temperatur und Streueffekte eine Verbreiterung. Das idealisierte Modell beschreibt jedoch befriedigend das Experiment unter folgenden Voraussetzungen: Zum einen sollte die thermische Energie hinreichend klein im Vergleich zur Separation der Energieniveaus sein

$$kT \ll E_{n+1} - E_n, \quad (2.73)$$

zum anderen sollte die Stoßverbreiterung deutlich kleiner sein als der Abstand benachbarter Energieniveaus. Aus der Energie-Zeit-Unschärferelation folgt unmittelbar:

$$\frac{\hbar}{\tau} \ll E_{n+1} - E_n. \quad (2.74)$$

Die Streuprozesse charakterisierende Größe  $\tau$  wird mittlere Relaxationszeit, Streuzeit oder Lebensdauer genannt. Sie gibt an, wie lange ein Ladungsträger in einem diskreten Zustand verweilt. Streuprozesse unterscheiden sich in energierhaltende, *elastische* und dissipative, *inelastische* Wechselwirkungen. Elastische Wechselwirkungen, die von Gitterstörungen oder Materialverunreinigungen verursacht werden, können durch eine höhere Materialreinheit verringert werden. Bei endlicher Temperatur überwiegen inelastische Wechselwirkungen, die die Phasenkohärenz der Ladungsträgerwellenfunktion zerstören. Zumeist handelt es sich hierbei um Wechselwirkungen der Ladungsträger mit Phononen [29, 39, 40, 41]. Solche Prozesse können die Beobachtung der quantisierten Zustände erschweren beziehungsweise verhindern. Die Streueffekte lassen sich in der Schrödinger-Gleichung berücksichtigen, indem ein Streupotenzial mit imaginärem Anteil  $i\Gamma_s/2$  integriert wird.  $\Gamma_s$  ist die *inelastische Streurate*, die über die Energie-Zeit-Unschärferelation mit der *inelastischen Streuzeit*  $\tau_\phi$  verbunden ist,

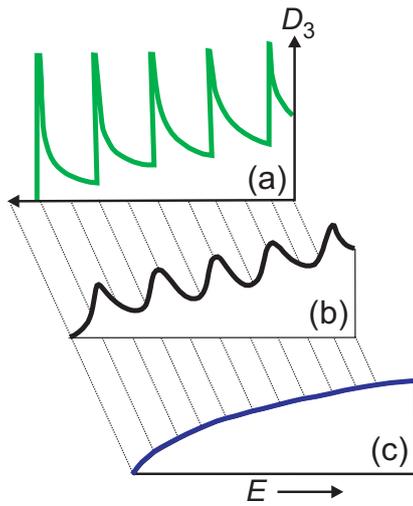
$$\Gamma_s \approx \frac{\hbar}{\tau_\phi}. \quad (2.75)$$

Durch die Verbreiterung der Energieniveaus ändern sich gleichzeitig die Zustandsdichten. Bei einem dreidimensionalen System im Magnetfeld ändert sich die Zustandsdichte in [42]

$$D_3(E, B) \sim \text{Re} \sum_{n_L} \frac{1}{\sqrt{E - (n_L + \frac{1}{2})\hbar\omega_c + i\Gamma_s}}. \quad (2.76)$$

Bei zweidimensionalen Ladungsträgersystemen werden die Delta-Funktionen in Gleichung (2.54) durch Gauß-Funktionen ersetzt [39, 43]:

$$\delta(E - E_{n_L, \sigma}) \rightarrow \frac{1}{\Gamma_s \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(E - E_{n_L, \sigma})^2}{2\Gamma_s^2} \right]. \quad (2.77)$$



**Abbildung 2.7.:** Zustandsdichte eines dreidimensionalen Ladungsträgersystems im Magnetfeld:

(a) ohne inelastische Streuung:

$$D_3 \sim \sum_{n_L} [E - \hbar\omega_c(n_L + \frac{1}{2})]^{-1/2}$$

(b) mit inelastischer Streuung:

$$D_3 \sim \sum_{n_L} [E - \hbar\omega_c(n_L + \frac{1}{2}) + i\Gamma_s]^{-1/2}$$

(c) ohne Magnetfeld:

$$D_3 \sim \sqrt{E}$$

Die Formel ist empirisch ermittelt worden. Die Deutung, insbesondere die Wirkung des Magnetfeldes auf  $\Gamma_s$ , ist in Gleichung (2.77) nur schwer verständlich. Mit Hilfe der Störungstheorie unter Verwendung der selbstkonsistenten Bornschen-Näherung konnte Ando [44] zeigen, dass die Zustandsdichte bei Anwesenheit kurzreichweitiger Störstellen von der Form einer Lorentzkurve ist,

$$D_2(E) = \frac{1}{2\pi \ell_B^2} \sum_{n_L} \left[ 1 - \left( \frac{E - E_{n_L}}{\Gamma_s} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.78)$$

Ein weiterer Einfluss ist die Verbreiterung der Fermi-Kante auf Grund einer endlichen Temperatur. Im folgenden Abschnitt wird diese Auswirkung eingehend diskutiert.

### 2.3.1. Die Fermi-Gleichgewichtsverteilungsfunktion

Die Fermi-Dirac Verteilungsfunktion

$$f_{\text{FD}}(E, T) = \frac{1}{1 + \exp[(E - \mu)/kT]}, \quad 0 < f_{\text{FD}}(E, T) < 1 \quad (2.79)$$

gibt die mittlere Besetzungswahrscheinlichkeit eines Systemzustands mit der Energie  $E$  unter Gleichgewichtsbedingungen an. Der Wert des chemischen Potentials bei  $T = 0$  wird Fermi-Energie  $E_F$  genannt. Im Grenzfall  $T \rightarrow 0$  sind alle Niveaus unterhalb von  $E_F$  vollbesetzt und alle Niveaus oberhalb  $E_F$  leer. Für  $T \neq 0$  besitzen Zustände mit  $E = \mu$  eine 50%-ige Besetzungswahrscheinlichkeit ( $f_{\text{FD}}(\mu) = 1/2$ ). Alle Energiezustände oberhalb des chemischen Potentials besitzen eine geringere und unterhalb des chemischen Potentials eine höhere Besetzungswahrscheinlichkeit. Ein Zustand ist mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - f_{\text{FD}}$  nicht besetzt. Für endliche Temperaturen mit der thermischen Energie  $kT \ll E_F$  gilt  $\mu \approx E_F$ . In diesem Temperaturbereich verwendet man den Begriff der Fermi-Energie als Synonym für das chemische Potential, obgleich dies streng genommen für  $T = 0$  gilt.

Die Temperaturverbreiterung der Fermi-Kante für endliche Temperaturen ergibt sich aus Differentiation von Gleichung (2.79) nach der Energie. Zur Verdeutlichung sei hier die Herleitung an der einheitslosen Fermifunktion  $f(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$  gezeigt. Die Ableitung  $f'(x) = e^{-x}/(1 + e^{-x})^2 = f(x)(1 - f(x))$  ist eine Resonanzfunktion mit dem Maximum bei  $x = 0$ . Das Maximum der Resonanz hat den Wert  $f'(0) = 1/4$ . Gesucht sind nun die Stellen  $x_{1,2}$ , bei denen der Funktionswert der Resonanz gerade den halben Wert des Maximums annimmt,  $f'(x_{1,2}) = 1/8$ . Die Lösungen sind  $x_1 = -\ln(3 - 2\sqrt{2})$  und  $x_2 = -\ln(3 + 2\sqrt{2})$ . Hieraus ergibt sich die Halbwertsbreite der Resonanz  $x_{\text{FWHM}} = |x_1| + |x_2| = -\ln(3 - 2\sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2}) \approx 3.525$ . Sie gibt die Verbreiterung der Fermi-Funktion an. Für die einheitenbehaftete Fermi-Funktion ergibt sich somit, dass die Halbwertsbreite der Fermi-Kante um den Energiebetrag

$$\Delta E \approx 3.525 kT \quad (2.80)$$

mit der Temperatur zunimmt.

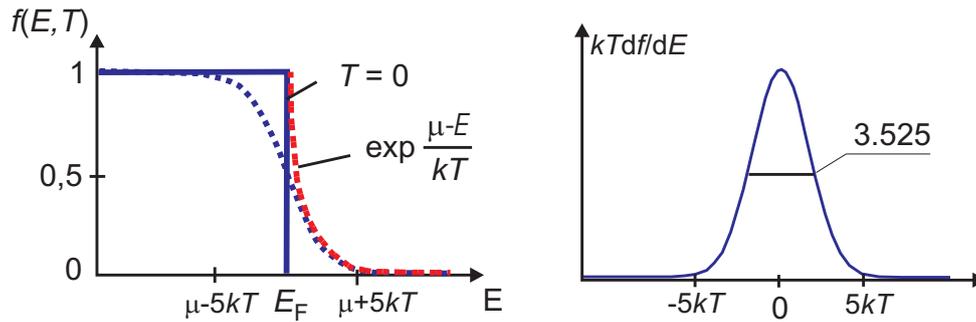
Es gibt zwei Grenzfälle, für die die Gleichgewichtsverteilungsfunktion sich durch mathematisch einfachere Funktionen nähern lässt. Für hohe Temperaturen ( $\exp(E - \mu/kT) \gg 1$ ) geht der fermionische Charakter der Ladungsträger verloren und die Fermi-Dirac Verteilungsfunktion geht in die Boltzmannsche Verteilungsfunktion  $f_{\text{kl}}$  über,

$$f_{\text{FD}}(E, T) \approx f_{\text{kl}} = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/kT]} = e^{\frac{\mu - E}{kT}}. \quad (2.81)$$

Für sehr niedrige Temperaturen ( $\exp(E - \mu/kT) \ll 1$ ) konvergiert die Fermi-Dirac Verteilungsfunktion gegen die Stufenfunktion

$$f_{\text{FD}}(E) \approx \Theta(E_F - E). \quad (2.82)$$

## 2. Nanostrukturen



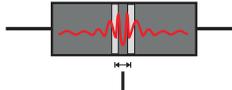
**Abbildung 2.8.:** Verlauf der mittleren Besetzungszahl eines Fermi-Gases für  $T = 0$  und  $T \neq 0$ . Für  $T = 0$  befindet sich das System im quantenmechanischen Grundzustand. Die Aufweichung der Fermi-Kante für endliche Temperaturen ist von der Größe  $3.53 kT$ .

## 2.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden niederdimensionale Ladungsträgersysteme vorgestellt und ihre grundlegenden theoretischen Eigenschaften erarbeitet. Die für die Transportspektroskopie notwendigen Zusammenhänge zwischen den Energieeigenwerten und der Potenzialform sowie der effektiven Ladungsträgermasse wurden anhand der drei häufigsten in Heterostrukturen auftretenden eindimensionalen Näherungen für Potenzialverläufe dargestellt; dem unendlichen Potenzialtopf, dem dreiecksförmigen Potenzialtopf und dem parabolischen Potenzial.

Für die Interpretation der Ergebnisse dieser Arbeit war die Berücksichtigung der speziellen Natur quantisierter Lochsysteme notwendig. Die Nicht-Parabolizität der Valenzbandstruktur und deren Auswirkungen auf die Energieeigenwerte beziehungsweise die effektive Masse der Löcher wurde im Rahmen des Luttinger-Kohn Hamilton-Operators dargestellt. Aus den Energiedispersionen niederdimensionaler Systeme wurde die korrespondierende Zustandsdichte hergeleitet und ihre Veränderungen auf Grund äußerer Magnetfelder betrachtet. Das Problem eines parabolischen Quantenpunktes in einem äußeren Magnetfeld wurde in einer algebraischen Darstellung gelöst. Das resultierende Fock-Darwin-Spektrum wurde insbesondere für die Grenzfälle schwacher beziehungsweise starker Magnetfelder diskutiert.

Die im Magnetfeld zu beobachtende Zeeman-Aufspaltung wurde sowohl für Elektronen- als auch Lochsysteme vorgestellt und deren Unterschiede dargelegt. Abschließend wurde der Einfluss von Temperatur und Streueffekten auf die elektronischen Zustände diskutiert, deren Auswirkungen in der Transportspektroskopie zu einem Anstieg der Halbwertsbreite der Leitfähigkeitsresonanzen beziehungsweise nicht-resonanter Stromanteile in der Kennlinie führen.

Konventionelles Bauteil	Mesoskopisches Bauteil
	
$L \gg l$ diffusiv	$L \leq l$ ballistisch
$L \gg l_\phi$ inkohärent	$L \leq l_\phi$ kohärent
$L \gg \lambda_F$ <b>keine</b> Quantisierung	$L \leq \lambda_F$ Quantisierung

**Abbildung 3.1.:** Längenskalen und Transportregime konventioneller und mesoskopischer Bauteile.

## 3. Transport in Nanostrukturen

In diesem Kapitel wird der elektronische Transport in Nanostrukturen diskutiert. Transportphänomene, die auf dem quantenmechanischen Tunneln basieren, werden vorgestellt. Das Kapitel beginnt mit der Beschreibung charakteristischer Transportgrößen.

### 3.1. Transportsysteme

Der elektronische Transport in Nanostrukturen lässt sich in drei fundamentale Transportprozesse einteilen: In *klassischen* [45] beziehungsweise *diffusiven* [46, 47, 48], in *kohärenten* [13, 49] und in *ballistischen* [50, 51] Transport. Die Einstufung geschieht auf folgenden Längenskalen.

#### 3.1.1. Fundamentale Längenskalen in Nanostrukturen

##### Mittlere, freie Weglänge

Der elektronische Transport findet in der Nähe der Fermi-Kante statt. Die Geschwindigkeit der Ladungsträger an der Fermi-Kante wird Fermi-Geschwindigkeit  $v_F$  genannt. Aus dem Produkt der Relaxationszeit mit der Fermi-Geschwindigkeit erhält man eine das System charakterisierende Längeneinheit, die *mittlere freie Weglänge*

$$\ell = \tau \cdot |v_F|. \quad (3.1)$$

Sie ist die Distanz, die ein Ladungsträger an der Fermi-Kante in der Relaxationszeit zurücklegt.

#### Phasen-Kohärenz-Länge

Eine weitere charakteristische Längeneinheit in niederdimensionalen Systemen ist die *Phasen-Kohärenz-Länge*. Dies ist die Distanz, in der sich ein Ladungsträger in einem Zustand mit fester Phasenbeziehung befindet. Zusammen mit der inelastischen Streuzzeit  $\tau_\phi$  und der Diffusionskonstante  $\mathfrak{D} = (v_F^2 \tau)/d$  für ein  $d$ -dimensionales System berechnet sich die Phasen-Kohärenz-Länge zu

$$\ell_\phi = \sqrt{\mathfrak{D}\tau_\phi}. \quad (3.2)$$

Für hohe Temperaturen gilt  $\tau_\phi \sim \tau$ , wobei gleichsam  $\ell_\phi \ll \ell$  ist. Es sei erwähnt, dass mit sinkender Temperatur  $\ell_\phi$  wächst und die Systemlänge  $L$  erreichen kann. Dies geschieht insbesondere dann, wenn die elastische mittlere freie Weglänge  $\ell$  wesentlich kürzer als die Systemlänge ist.

#### Thermische-Diffusions-Länge

In diffusiven Systemen erfährt jeder Eigenzustand eine spürbare Überlappung der Ordnung  $\hbar\tau$  mit Eigenzuständen in der Umgebung von  $E(\mathbf{k})$ . Hieraus ergibt sich eine wohldefinierte räumliche Variation der Wellenfunktion, die *Thermische-Diffusions-Länge*

$$\ell_T = \sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\hbar(kT)}} \quad (3.3)$$

genannt wird und eine charakteristische Längenskala für diffusive Systeme ist.

#### Magnetische Länge

Als letzte relevante Längeneinheit soll die bereits in Abschnitt 2.2 eingeführte *magnetische Länge*  $\ell_B = 26 \text{ nm} \sqrt{(T)/B}$  Gleichung (2.50) genannt werden. Die magnetische Länge ist die einzige der hier genannten Längeneinheiten, die man durch Variation des äußeren Magnetfeldes kontinuierlich ändern kann.

#### 3.1.2. Klassisch, diffusiver Transport

In Systemen, bei denen die Systemlänge  $L$  wesentlich größer als die mittlere freie Weglänge  $\ell$  ist,

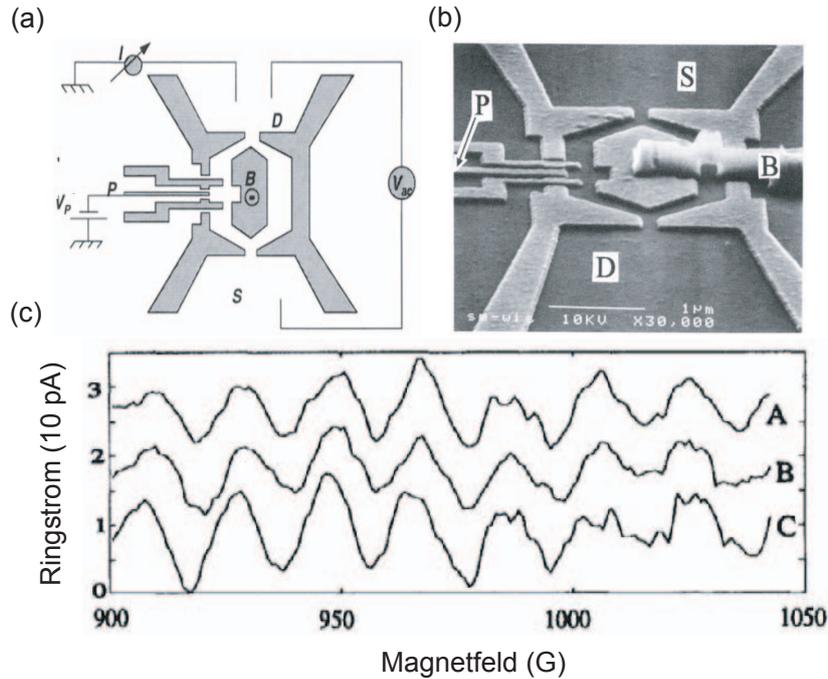
$$L \gg \ell,$$

geschieht der Transport auf klassische Art. Die Ladungsträger durchdringen die Nanostruktur diffusiv.

#### 3.1.3. Kohärenter Transport

Für Systemgrößen, die kleiner als die Kohärenzlänge  $\ell_\phi$  sind,

$$L \leq \ell_\phi,$$



**Abbildung 3.2.:** (a) Eine schematische Darstellung einer Aharonov-Bohm Geometrie. Die schattierten Flächen sind metallische Gates, die die Elektronen dort verdrängen. (b) SEM-Bild der Anordnung. Im linken Arm befindet sich zusätzlich noch ein Quantenpunkt. (c) Strom als Funktion des angelegten Magnetfeldes, welches die Phasendifferenz zwischen den Wegen durch den linken oder rechten Arm des Interferometers regelt [52].

besitzt die Wellenfunktion der Ladungsträger im gesamten System eine wohldefinierte Phase. In dieser Situation zeigt der elektronische Transport quantenmechanische Interferenzphänomene, wie beispielsweise *Aharonov-Bohm Oszillationen* [12, 49] (siehe Abbildung 3.2) oder *Leitfähigkeitsfluktuationen* [50, 51].

### 3.1.4. Ballistischer Transport

Vom ballistischen Transport spricht man, wenn die geometrischen Systemlängen kleiner oder gleich lang der elastischen mittleren freien Weglänge sind,

$$L \leq \ell.$$

Zudem ist die Temperatur niedrig genug, so dass die inelastische mittlere freie Weglänge größer als die elastische mittlere freie Weglänge ist,

$$\ell_\phi > \ell.$$

Die Ladungsträger können somit ohne Streuprozesse das System durchdringen. In diesem Fall ist der Transport ein Transmissionsproblem, das sich mit dem *Landau-Büttiker-Formalismus* [53] elegant beschreiben lässt. Hierbei wird der

### 3. Transport in Nanostrukturen

Transport auf Transportprozesse durch eindimensionale Kanäle zurückgeführt, wobei die jeweiligen physikalischen Umstände, unter denen Transport stattfindet, über Transmissions- und Reflexionskoeffizienten  $T(E)$  und  $R(E)$  eingehen. Das Problem der quantitativen Beschreibung liegt dann in der Berechnung dieser Koeffizienten.

## 3.2. Resonante Tunnelstrukturen

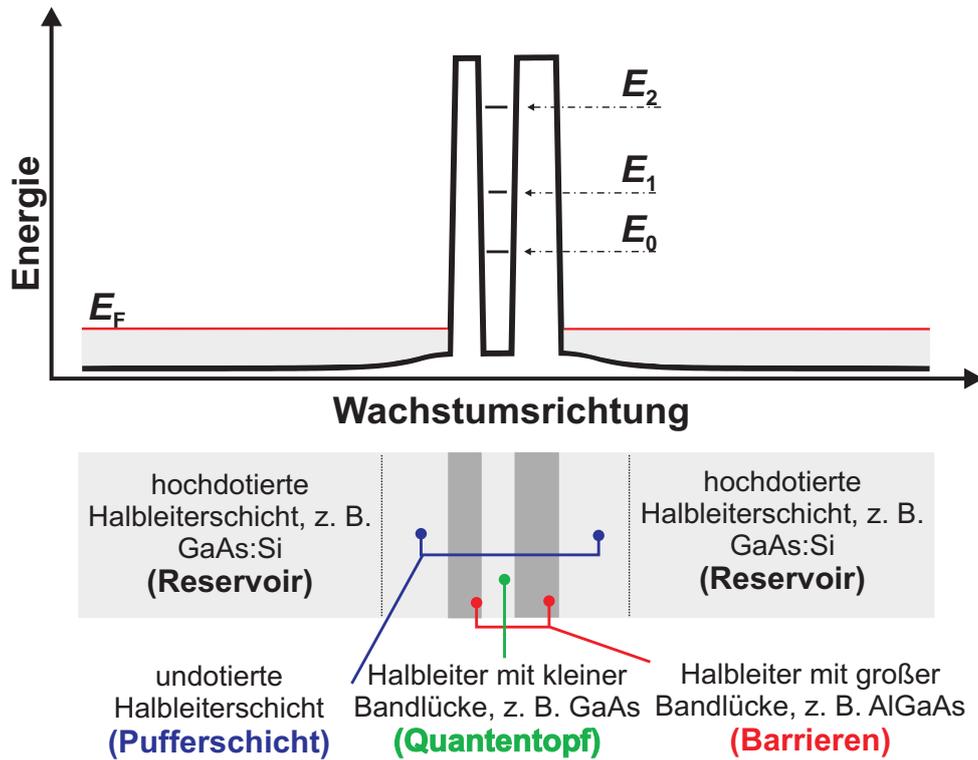
Eines der beeindruckendsten Phänomene der Quantenwelt ist der Tunneleffekt, bei dem ein Teilchen eine Potenzialbarriere durchdringen kann, obwohl es unter klassischer Betrachtung hierfür nicht ausreichend Energie besitzt. Die Erklärung dieses Phänomens liefert die Quantentheorie. In der Quantenwelt lassen sich dem Teilchen auch Welleneigenschaften zuordnen. Auf Grund dieser Wellennatur besitzt das Teilchen eine endliche Wahrscheinlichkeit, die Barriere zu durchdringen, so lange die Barriere nicht unendlich hoch oder breit ist.

Der Tunneleffekt ist in vielen Systemen beobachtbar, so auch bei Ladungsträgern in Halbleiterheterostrukturen. Die modernen Methoden im Kristallwachstum, wie beispielsweise die Molekularstrahlepitaxie, ermöglichen es, gezielt Halbleiterheterokristalle zu wachsen, deren Bandstruktur den Potenzialen von Lehrbuchbeispielen [17, 54, 55] für Tunnelstrukturen gleicht. Um 1970 erzeugten Forscher des IBM Thomas J. Watson Research Centers auf diese Weise Dioden aus Doppel- und Mehrfach-Heterostrukturen, deren Strom-Spannungs-Charakteristik bei Temperaturen von 77 Kelvin eine deutliche Nichtlinearität aufwies. Dieses Verhalten ließ sich auf die Quantisierung der Ladungsträger und deren Fähigkeit zum quantenmechanischen Tunneln zurückführen. In den Strukturen wurde das *resonante Tunneln* von Ladungsträgern beobachtet [56, 57]. Im Folgenden werden die theoretischen Grundlagen des Transportverhaltens von Ladungsträgern in resonanten Tunnelstrukturen diskutiert.

### 3.2.1. Doppelbarrierenstruktur

Eine der bekanntesten resonanten Tunnelstrukturen ist die Doppelbarrierenstruktur. Eine direkte Realisierung der Doppelbarrierenstruktur als Halbleiterbauelement ist die Doppelbarrieren-Resonante-Tunneldiode (DBRTD), bei der zwei Halbleitermaterialsysteme mit unterschiedlicher Energielücke zur Definition eines Quantentopfes verwendet werden. Das Material mit der größeren Energielücke definiert die Potenzialbarrieren, wobei durch den Bandkantensprung  $\Delta V_{c/v}$  die Barrierenhöhe und durch die Schichtdicke die Barrierenbreite  $b$  bestimmt werden. Die Breite des Potenzialtopfes  $a$  ist durch die Dicke der eingeschlossenen Halbleiterschicht gegeben. Der Potenzialtopf wird zudem in hochdotierte Bereiche eingebettet, die als Ladungsträgerreservoir dienen. Die Abbildung 3.3 zeigt den typischen Potenzialverlauf einer Doppelbarrierenstruktur.

Der elektronische Transport durch eine Doppelbarrierenstruktur gleicht einem Streuproblem. Die Ladungsträger werden an den Potenzialbarrieren gestreut. Hier-

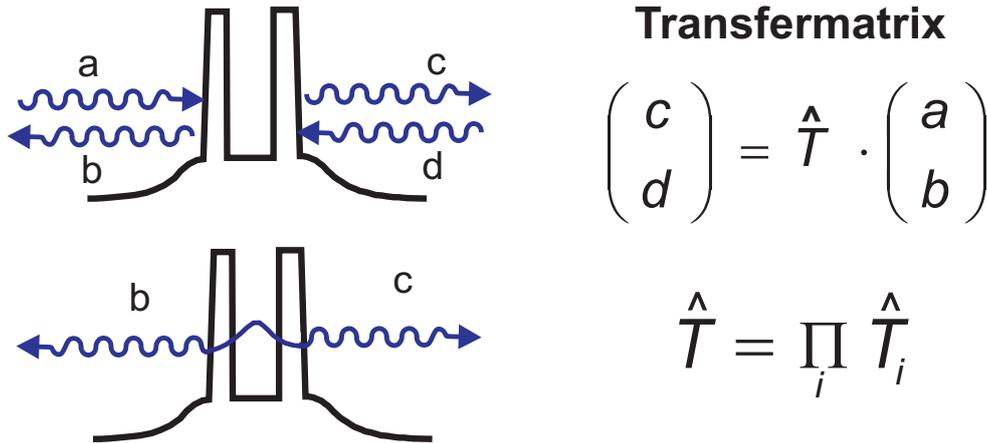


**Abbildung 3.3.:** Potenzialverlauf einer Doppelbarrierenstruktur. Neben dem Quantentopf ist der Verlauf der Transmission gezeigt. Die Resonanzen entsprechen den quasi-gebundenen Zuständen des Quantentopfs. Unter dem Profil ist eine mögliche Heterostruktur dargestellt.

bei lässt sich der Transportprozess auf zweierlei Weise interpretieren. In Analogie zum optischen Fabry-Pérot Interferometer kann dem Ladungsträger eine „globale“ Wellenfunktion zugeordnet werden. Hierbei werden die Reflektions- beziehungsweise Transmissionskoeffizienten des Ladungsträgers in Bezug auf die gesamte Tunnelstruktur ermittelt. Diese Formulierung eignet sich besonders zur Beschreibung von *kohärenten* [58] resonanten Tunnelprozessen, bei denen die Phasenbeziehung während des gesamten Tunnelprozesses erhalten bleibt. In realen Systemen werden die Ladungsträger jedoch auch inelastisch gestreut, zum Beispiel an Phononen. Bei diesem Streuprozess ändert sich der Impuls des Ladungsträgers; er geht in den Zustand anderer Energie über, wobei die Phase seiner Wellenfunktion in keinem Bezug zur Phase vor der Streuung steht. Für diesen Fall eignet sich eine alternative Beschreibung des resonanten Tunnelns durch die Doppelbarrierenstruktur, bei der die Gesamttransmission als Ergebnis zweier aufeinander folgender, nicht korrelierter Tunnelprozesse betrachtet wird. Im Bild des *sequenziellen* Tunnelns existiert somit von vornherein keine Phasenbeziehung; ausschließlich die Erhaltung des transversalen Impulses des Ladungsträgers wird vorausgesetzt. Diese Betrachtungsweise geht auf den Physiker S. Luryi [59] zurück.

Welchem Modell der Vorzug zu geben ist, hängt von der Transportzeit und somit

### 3. Transport in Nanostrukturen



**Abbildung 3.4.:** Schematische Darstellung eines (quasi-gebundenen) Eigenzustandes einer Doppelbarrierenstruktur. Die Transfermatrix  $\hat{T}$  setzt die Amplituden  $a, b$  der ebenen Wellen auf der linken Seite der Struktur mit denen der rechten Seite  $c, d$  in Beziehung. Bei einem quasi-gebundenen Zustand verschwinden die einlaufenden Wellen  $a = d = 0$ .

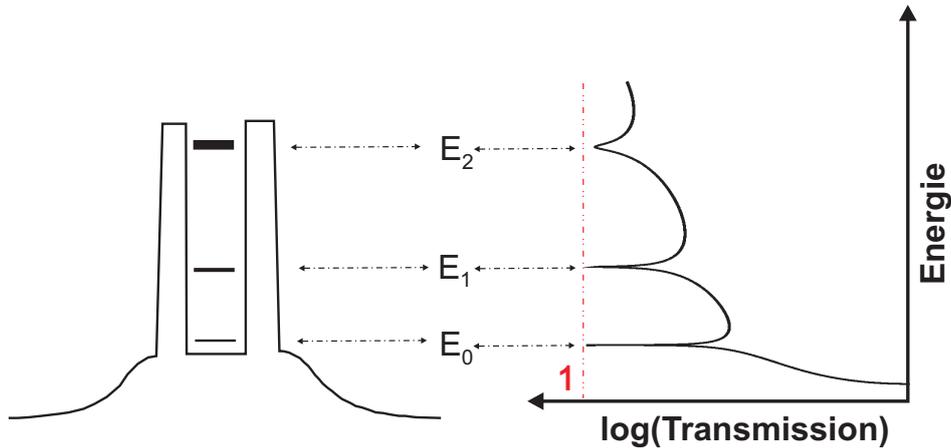
den Barrierendicken ab. Für dünne, transparente Barrieren ist eine kohärente Beschreibung des resonanten Tunneltransports geeignet. Sind die Barrieren jedoch dick und besitzen nur eine geringe Transmission, so beschreibt das sequenzielle Modell den Transport treffender.

Die Abbildung 3.4 zeigt schematisch die Streuprozesse für beide Transportmodelle. Es gilt nun, die Transmissionskoeffizienten  $T(E)$  für ein Teilchen mit der Energie  $E$  für die einzelnen Barrieren beziehungsweise die gesamte Doppelbarrierenstruktur zu ermitteln. Hierfür werden die jeweils ein- und auslaufenden Wahrscheinlichkeitsstromdichten, die aus den Lösungen der Schrödinger-Gleichung resultieren, ermittelt und zueinander in Verhältnis gesetzt. Da sich die Schrödinger-Gleichung nur für wenige Potenzialformen analytisch lösen lässt, muss in den meisten Fällen mit Näherungsverfahren gearbeitet werden. Für Teilchenenergien, die klein im Vergleich zur Barrierenhöhe sind, bietet sich die semiklassische Näherung nach *Wenzel-Kramer-Brillouin* (WKB) an.

Die WKB-Näherung setzt voraus, dass die Variation der potenziellen Energie auf der Distanz der Fermi-Wellenlänge  $\lambda_F$  in Bezug auf die kinetische Energie klein ist. Für den Transmissionskoeffizienten eines Teilchens mit der effektiven Masse  $m^*$ , das durch eine Potenzialbarriere der Breite  $b$  tunnelt, ergibt sich näherungsweise der Ausdruck

$$T(E) \approx \exp \left[ -\frac{2}{\hbar} \int_0^b dz \sqrt{2m^* (V(z) - E)} \right]. \quad (3.4)$$

Die Unterschiede zwischen der quantenmechanischen und der klassischen Grenze sind unmittelbar aus der Gleichung (3.4) ablesbar. Ist die Breite der Barriere von der Größenordnung der Fermi-Wellenlänge  $\lambda_F$ , besitzt das Teilchen Wellencharakter und eine annehmbare Wahrscheinlichkeit, die Barriere zu durchdringen. Das



**Abbildung 3.5.:** Beispiel eines Bandkantenverlaufs einer Doppelbarrierenstruktur. Rechts: Der logarithmische Verlauf des Transmissionskoeffizienten als Funktion der Energie. Die Resonanzen entsprechen den quasi-gebundenen Zuständen im Quantentopf. Es ist deutlich zu erkennen, dass tief im Topf liegende Zustände eine schärfere Resonanz in der Transmission besitzen.

Problem ist dann auf quantenmechanische Weise zu behandeln. Im anderen Fall wird die zu erwartende Gesamttransmission klein sein und sich dem klassischen Fall nähern. Dies tritt bei sehr breiten bzw. hohen Barrieren oder bei Teilchen mit schwerer Masse ein.

Eine weitere Methode, die Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung zu ermitteln, ist die *Transfer-Matrix-Methode* [22, 60, 61], bei der ein beliebiges Potenzial in elementare Strukturen - konstante Potenziale und Potenzial Sprünge - zerlegt wird. Die analytischen Lösungen der beiden Teilpotenziale sind bekannt. Die Gesamtlösung erhält man aus dem Produkt der Teillösungen. Hierbei ist auf eine hinreichend feine Zerlegung des Ausgangspotenzials zu achten. Auf Grund der feinen Zerlegung der Potenzialstruktur ist diese Methode besonders für numerische Berechnungen geeignet. Im Anhang A.1 wird die Funktionsweise der Transfer-Matrix-Methode an einigen Beispielen erläutert.

Eine typische Strom-Spannungs-Kennlinie einer Doppelbarrieren-Resonantentunnelodiode zeigt Abbildung 3.5. Charakteristisch für die Kennlinienform ist ein *negativ differentieller Widerstands*-Bereich (engl. **negative differential resistance - NDR**), der eine direkte Konsequenz ist aus der Quantisierung der Ladungsträger im Quantentopf sowie der Energie- und Impulserhaltung des parallel zur Tunnelrichtung orientierten Impulses.

Auf Grund der Schichtdicke besitzen die Ladungsträgerreservoir Eigenschaften des Volumen-Halbleiters. Die Ladungsträger können sich im Reservoir uneingeschränkt in alle drei Raumrichtungen bewegen. Temperatureinflüsse und Wechselwirkungen der Ladungsträger untereinander werden nicht berücksichtigt. In diesem idealisierten Modell spricht man von einem *freien, dreidimensionalen (3D)* Ladungsträgersystem. In adiabatischer Einelektronennäherung besitzen die Reser-

### 3. Transport in Nanostrukturen

voire eine parabolische, isotrope Energiedispersion:

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*} = \frac{(\hbar\mathbf{k})^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \quad (3.5)$$

Hierbei ist  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  der Impuls und  $m^*$  die effektive Masse<sup>1</sup> der Ladungsträger. Die erlaubten Werte für den Wellenvektor  $\mathbf{k}$  bzw. der Wellenzahlen  $k_x$ ,  $k_y$  und  $k_z$  ergeben sich aus der Bedingung, dass die Wellenfunktion  $\psi \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$  am Rand des Reservoirs verschwindet. Hieraus resultiert für zwei benachbarte Wellenzahlen die Beziehung  $\Delta k = 2\pi/L$ , wobei die Ausmaße  $L$  des Reservoirs hinreichend groß sind, so dass die Wellenzahlen quasi kontinuierliche Werte annehmen können. Somit sind im Reservoir alle Wellenzahlen von Null bis zur Wellenzahl der Fermi-Energie  $k_F$  erlaubt.

Im Quantentopf können sich die Ladungsträger parallel zur Wachstumsebene frei bewegen; zum Beispiel in der  $(x, y)$ -Ebene. Hingegen ist ihre Bewegung in der Tunnelrichtung ( $z$ -Richtung) durch die Potenzialbarrieren eingeschränkt. Das Energiespektrum im Quantentopf setzt sich somit aus einem kontinuierlichen Anteil  $E_{\parallel} = \mathbf{p}_{\parallel}^2/2m^*$ , entsprechend der Bewegung  $\mathbf{p}_{\parallel} = (p_x, p_y)$  in der „freien“ Ebene und einem diskreten Spektrum  $E_n$  in Tunnelrichtung zusammen:

$$E_n(\mathbf{p}_{\parallel}) = E_{\parallel}(\mathbf{p}_{\parallel}) + E_n. \quad (3.6)$$

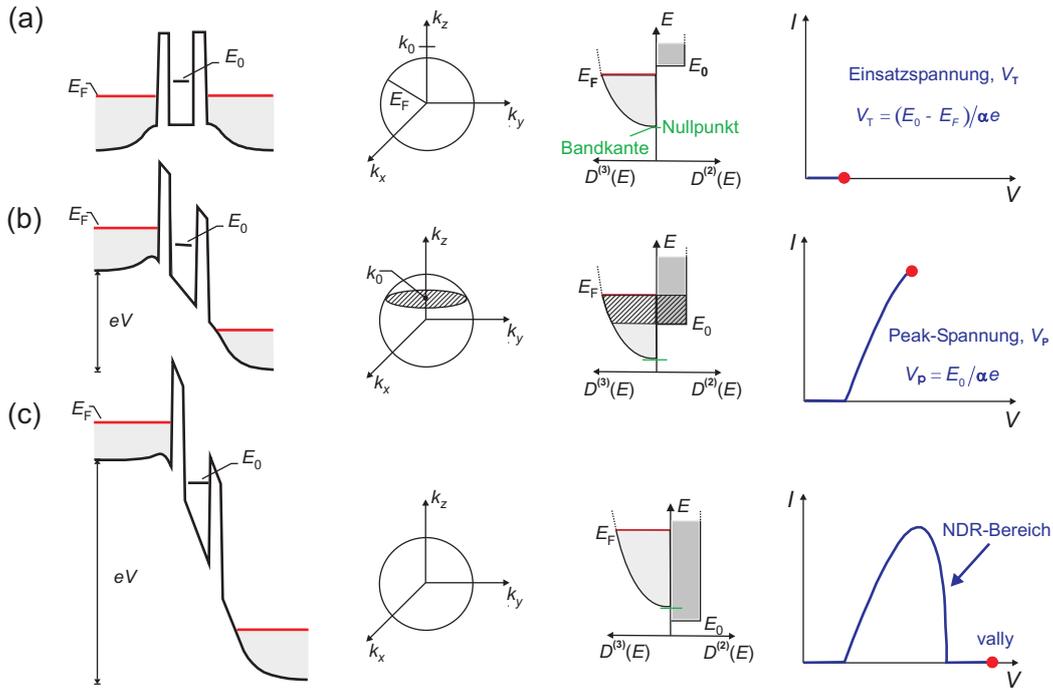
Der diskrete Anteil gibt die Energieeigenwerte der quasi-gebundenen Zustände im Quantentopf wieder. Diese Zustände werden auch als Subbänder bezeichnet und mit der Quantenzahl  $n$  angegeben.

Ein Teilchen aus einem Reservoir (Emitter) kann resonant in den Quantentopf tunneln, wenn ein quasi-gebundener Zustand des Quantentopfs sich im Energiebereich zwischen der Bandkante und der Fermi-Energie befindet. Während des Tunnelprozesses ist die laterale Bewegung des Teilchens frei und bleibt erhalten ( $\mathbf{k}_{\parallel}^{\text{emitter}} = \mathbf{k}_{\parallel}^{\text{qw}}$ ). Da inelastische Prozesse nicht berücksichtigt werden, ist die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße. Für den Fall, dass die effektiven Massen des Teilchens im Reservoir und im Quantentopf vergleichbar sind, folgt aus den Gleichungen (3.5) und (3.6) die Resonanzbedingung:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m^*} k_z^2. \quad (3.7)$$

Die Resonanzbedingung besagt, dass nur Teilchen aus dem Reservoir in den Quantentopf tunneln können, die die parabolische Dispersion Gleichung (3.7) erfüllen. Im Impulsraum ist die Fermifläche des dreidimensionalen Reservoirs die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius des Fermi-Wellenvektors  $k_F$ . Alle Reservoirzustände liegen innerhalb der Kugel. Die Teilchen, die resonant aus dem Reservoir tunneln

<sup>1</sup>Für parabolische Bänder in der Umgebung eines kritischen Punktes ist  $m^*$  eine skalare Größe. Allgemein ist die effektive Masse eines Teilchens der Tensor  $m_{i,j}^* = \hbar^2 \partial k_i \partial k_j / \partial^2 E(\mathbf{k})$  und somit von  $\mathbf{k}$  abhängig. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird jedoch einheitlich das Formelzeichen  $m^*$  verwendet. In Fällen, in denen die effektive Masse nicht isotrop ist, wird speziell im Text darauf verwiesen.



**Abbildung 3.6.:** Resonantes (3D-2D) Tunneln: Verlauf des Bandprofils, der Fermi-Kugel und der Zustandsdichten im Emittor und dem Quantentopf beim resonanten Tunneln. Für die jeweilige Situation ist die Strom-Spannungs-Kennlinie skizziert. **(a)** zeigt die Situation ohne Vorspannung. Es befindet sich kein quasi-gebundener Zustand im „Energie-Fenster“ zwischen Band- und Fermi-Kante. Es fließt kein resonanter Tunnelstrom. Die Situation **(b)** zeigt den Resonanz-Fall. Nach dem Unterschreiten der Fermi-Kante bei einer Spannung  $V_T = (E_0 - E_F)/\alpha e$  setzt der resonante Tunnelstrom ein und erreicht sein Maximum bei  $V_p = E_0/\alpha e$ , wenn der quasi-gebundene Zustand energetisch mit der Bandkante übereinstimmt. Bei **(c)** liegt der quasi-gebundene Zustand unterhalb der Bandkante. Resonanter Tunnelstrom ist unterbunden.

können, besitzen alle denselben  $k_z$ -Wert und liegen somit auf einer Schnittfläche der Kugel. Vergleichbar dem Zerfall eines resonanten Nuklearenzustandes hat die Transmission der Fermi-Welle eines Ladungsträgers in Resonanz den Verlauf einer Breit-Wigner-Funktion

$$T(E) \approx T_{\max} \frac{\Delta E_n^2}{(E - E_n)^2 + \Delta E_n^2}. \quad (3.8)$$

Hierbei ist

$$T_{\max} = 4 \frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \quad (3.9)$$

der Maximalwert der Transmission mit  $T_1$  und  $T_2$  den Transmissionskoeffizienten der zwei Barrieren in Resonanz  $E = E_n$ .  $\Delta E_n$  ist die Halbwertsbreite des  $n$ -ten quasi-gebundenen Zustands. Der Zusammenhang zwischen der Halbwertszeit  $\tau$  und

### 3. Transport in Nanostrukturen

der Halbwertsbreite<sup>2</sup>  $\Delta E_n$  der  $n$ -ten Resonanz folgt unmittelbar aus der Energie-Zeit-Unschärferelation

$$\tau = \frac{\hbar}{2 \Delta E_n}. \quad (3.10)$$

Schmale Resonanzen entsprechen langen Halbwertszeiten und kurze Halbwertszeiten breiten Resonanzen. Die Gleichung (3.10) zeigt, dass Transmissionskoeffizienten, Halbwertszeiten und Bindungsenergien eng miteinander verbundene Begriffe sind.

Es soll nun die Halbwertszeit, also die Verweildauer eines Ladungsträgers im quasi-gebundenen Zustand abgeschätzt werden. In einem einfachen Bild [60] oszilliert das Teilchen innerhalb des quasi-gebundenen Zustands  $E_n$  mit der Frequenz

$$\nu = \frac{v_n}{2 a_{\text{eff}}}, \quad (3.11)$$

wobei  $v_n = \sqrt{2E_n/m^*}$  die klassische Geschwindigkeit des Teilchens ist und  $a_{\text{eff}}$  die effektive Ausdehnung des Zustands. Die effektive Ausdehnung ergibt sich aus der Quantentopfbreite  $a$  und der Eindringtiefe der de Broglie Wellenfunktion in die Barrieren

$$a_{\text{eff}} = a + \alpha_1/\kappa_1 + \alpha_2/\kappa_2. \quad (3.12)$$

Hier sind  $\kappa_{1,2}$  die imaginären Wellenvektoren und  $\alpha_{1,2} = m_{1,2}^*/m_w^*$  Dämpfungsfaktoren, die sich aus dem Verhältnis der effektiven Massen in den Barrieren und im Quantentopf ergeben. Die Dämpfungsfaktoren liegen meistens in der Größenordnung von 1. Für die Halbwertszeit folgt damit

$$\tau = \frac{1}{\nu (T_1 + T_2)} = \frac{1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (3.13)$$

Mit

$$\Gamma_{1,2} = \nu T_{1,2} \quad (3.14)$$

lassen sich die Tunnelraten für die einzelnen Barrieren angeben. Zusammenfassend ergibt sich für die Halbwertsbreite einer Resonanz der Ausdruck

$$2 \Delta E_n = \frac{\hbar \sqrt{2E_n/m^*} (T_1 + T_2)}{2 (a + \alpha_1/\kappa_1 + \alpha_2/\kappa_2)}. \quad (3.15)$$

Aus der Gleichung (3.8) lässt sich zudem ablesen, dass eine symmetrische Doppelbarrierenstruktur  $T_1 = T_2$  in Resonanz vollständig transparent ist  $T(E_n) = 1$ . Für asymmetrische Barrierenverhältnisse gilt das nicht. In Resonanz gibt es auch einen Anteil an reflektierten Teilchen, die Transmission ist nicht vollständig  $T(E_n) < 1$ . Die Transmission ist proportional zum Verhältnis aus minimaler und maximaler Transmission der Einzelbarrieren  $T_{\text{min}}/T_{\text{max}}$ . In Abbildung 3.5 ist der Verlauf der Transmission für eine symmetrische Doppelbarrierenstruktur gezeigt. Es ist gut zu erkennen, dass die Transmission in Resonanz 1 ist und die Linienbreite der quasi-gebundenen Zustände zum Topfrand zunehmen. Das bedeutet, die quasi-gebundenen Zustände, die näher am Topfrand liegen, haben eine kürzere Halbwertszeit.

<sup>2</sup>Wird auch Linienbreite oder Bindungsenergie genannt.

### Kohärente Beschreibung des Tunnelstroms - Farbray Pérot Modell

Der in Abbildung 3.6 gezeigte Verlauf der Kennlinie erklärt sich wie folgt: Ohne äußere Spannung  $V$  liegen die Subbänder des Quantentopfes oberhalb der Fermi-Kugel. Keine Reservoirzustände erfüllen die Resonanzbedingung (3.7); es fließt kein Strom. Erst durch eine genügend große äußere Spannung  $V_T$  wird der erste quasi-gebundene Zustand durch Verkippen des Bandprofils in Resonanz mit dem Fermi-Niveau gebracht und der Tunnelstrom setzt ein. Eine äußere Spannung  $V$  trennt die Fermi-Energien des linken Reservoirs (Emitter) vom rechten Reservoir (Kollektor) um den Betrag  $eV$ , wobei sich die Energien im Quantentopf um den Betrag  $\alpha eV$  verschieben. Der Faktor  $\alpha$  wird Hebelfaktor oder Spannungs-Energie-Konversionsfaktor genannt. Durch ein Erhöhen der äußeren Spannung wandert die Schnittfläche vom Pol der Fermi-Kugel in Richtung des Äquators. Hierbei wächst der Tunnelstrom proportional zur Schnittfläche. Der maximale Stromwert ist erreicht, wenn der quasi-gebundene Zustand die Bandkante erreicht hat. Ein weiteres Erhöhen der äußeren Spannung verschiebt den Zustand unterhalb der Bandkante. Keine Reservoirzustände erfüllen die Resonanzbedingung und der Stromfluss endet abrupt. Erst wenn das nächste Subband des Quantentopfes im Bereich zwischen Fermi-Niveau und Bandkante gelangt, ist ein resonanter Tunnelstrom erneut beobachtbar.

Es soll nun der gemessene Tunnelstrom analytisch beschrieben werden. Im Impulsraum ist die elektrische Stromdichte der Teilchen, die aus dem Emitter mit dem Impuls  $\mathbf{k}_1$  auf die Tunnelstruktur treffen, gleich

$$j_1 = -e D_3(\mathbf{k}_1) f_1(\mathbf{k}_1) v_z(\mathbf{k}_1) d\mathbf{k}_1, \quad (3.16)$$

mit  $D_3(\mathbf{k}) = 2/(2\pi)^3$  der Zustandsdichte des dreidimensionalen Emitters und

$$v_z(\mathbf{k}_1) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(\mathbf{k}_1)}{\partial k_{z,1}} = \frac{\hbar k_{z,1}}{m^*} \quad (3.17)$$

der Gruppengeschwindigkeit der Teilchen in Tunnelrichtung. Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Teilchen den Impuls  $\mathbf{k}_1$  besitzen, ist durch die Verteilungsfunktion  $f_1$  im Emitter gegeben. Die Stromdichte, die im Kollektor einläuft, entspricht der mit der Transmissionswahrscheinlichkeit gewichteten Stromdichte aus dem Emitter

$$j_1 = -\frac{2e\hbar}{(2\pi)^3 m^*} T(k_{z,1}) f_1(\mathbf{k}_\parallel, k_{z,1}) k_{z,1} dk_{z,1} d\mathbf{k}_\parallel. \quad (3.18)$$

Für die Stromdichte aus dem Kollektor in den Emitter gilt entsprechend,

$$j_2 = -\frac{2e\hbar}{(2\pi)^3 m^*} T(k_{z,2}) f_2(\mathbf{k}_\parallel, k_{z,2}) k_{z,2} dk_{z,2} d\mathbf{k}_\parallel. \quad (3.19)$$

Für einen Energiewert  $E_z$  sind die Transmissionskoeffizienten symmetrisch für beide Tunnelrichtungen, so dass  $T(E_{z,1}) = T(E_{z,2})$  gilt. Ferner gilt  $k_{z,1} dk_{z,1} = k_{z,2} dk_{z,2} = m^*/\hbar^2 dE_z$ . Der Nettostrom ergibt sich aus der Differenz der Teilströme. Ohne Potenzialgefälle zwischen den Reservoirs heben sich die Teilströme auf und der Nettostrom ist Null. Erst durch eine äußere Spannung erhält man

### 3. Transport in Nanostrukturen

einen Nettostrom in Richtung des energetisch niedrigeren Reservoirs. Der gemessene Tunnelstrom ergibt sich aus der Integration der Nettoströme über alle Impulse  $\mathbf{k}$

$$j = \frac{1}{(2\pi)^3} \left( \frac{e}{\hbar} \right) \int_0^\infty dE_z \int_0^\infty d\mathbf{k}_\parallel^2 T(E_z) [f_1(E_z, \mathbf{k}_\parallel) - f_2(E_z, \mathbf{k}_\parallel)]. \quad (3.20)$$

Die Gleichung (3.20) lässt sich nicht weiter vereinfachen, so lange die Verteilungsfunktionen der Reservoirs nicht bekannt sind. Eine erste Näherung der Verteilungsfunktionen ist die Gleichgewichts Fermi-Dirac Verteilungsfunktion

$$f_{1,2}(E_z, E_\parallel) = \frac{1}{1 + \exp(E_z + E_\parallel - \mu_{1,2})/kT}. \quad (3.21)$$

Die Differenz zwischen den chemischen Potenzialen der Reservoirs entspricht der angelegten äußeren Spannung,  $\mu_1 = \mu_2 + eV$ :

$$f_2(E) = f_1(E + eV). \quad (3.22)$$

In Gleichung (3.20) lässt sich die Integration über den lateralen Wellenvektor durch eine Integration über die Energie substituieren ( $d\mathbf{k}_\parallel = 2\pi m^*/\hbar^2 dE_\parallel$ ). Die anschließende Integration über die Fermi-Funktionen führt zu der Gleichung

$$j = \frac{e m^* kT}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dE_z T(E_z) \ln \left[ \frac{1 + \exp\left(\frac{\mu_1 - E_z}{kT}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\mu_1 - E_z - eV}{kT}\right)} \right]. \quad (3.23)$$

Der logarithmische Term wird *Supply Funktion* genannt. Er gibt die Anzahl der für den Transport zur Verfügung stehenden Ladungsträger an. Für Temperaturen am absoluten Nullpunkt  $T = 0$  konvergiert die Supply Funktion gegen die Stufenfunktion. Für diesen Fall lautet die Gleichung (3.23)

$$j = \frac{e m^*}{2\pi^2 \hbar^3} \left[ \int_0^{\mu_1} dE_z T(E_z) (\mu_1 - E_z) - \int_0^{\mu_1 - eV} dE_z T(E_z) (\mu_1 - eV - E_z) \right]. \quad (3.24)$$

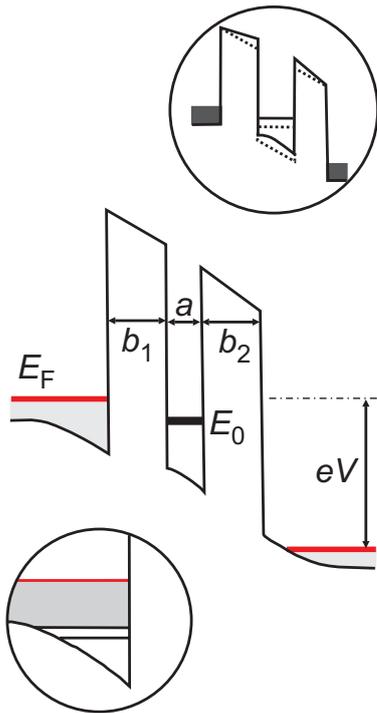
Für Energien nahe der Resonanz  $E_z = E_n$  lässt sich der Verlauf des Transmissionskoeffizienten durch die Lorentz-Kurve (Gleichung (3.8)) annähern. Die Gleichung (3.24) lässt sich nun integrieren und man erhält den Ausdruck:

$$j = \frac{e m^*}{2\pi \hbar^3} T_{\max} \Delta E_n (\mu_1 - E_n), \quad 0 < E_n < \mu_1. \quad (3.25)$$

Der maximale Strom fließt, wenn der quasi-gebundene Zustand die Bandkante erreicht:  $E_n = 0$ . Aus Gleichung (3.25) folgt dann für den Peakstrom

$$j_p = \frac{e m^*}{2\pi \hbar^3} T_{\max} \Delta E_n \mu_1. \quad (3.26)$$

Wie man in Gleichung (3.26) sieht, hängt der Peakstrom einerseits vom chemischen Potenzial und somit von der Dotierung ab, andererseits ist die Transmission entscheidend. Da sowohl Resonanzbreite und Amplitude von der Dicke der Barrieren abhängen, nimmt der Peakstrom mit abnehmender Barrierenbreite zu.



**Abbildung 3.7.:** Doppelbarrierenstruktur, die durch ein elektrisches Feld verkippt wurde. Das untere Innenbild zeigt eine mögliche Ladungsträgerakkumulation vor der emitterseitigen Barriere. Es bildet sich ein trichterförmiges Potenzial aus. Bei genügend starker Verkipfung können sich hier zweidimensionale Zustände ausbilden. Im oberen Innenbild werden die Auswirkungen einer dynamischen Ladungsträgerakkumulation im Quantentopf dargestellt. Die Akkumulation bewirkt eine Anhebung des Topfbodens. Hierdurch resultiert ein unterschiedlicher Spannungsabfall über den Barrieren. Die gepunkteten Linien zeigen die Situation ohne Akkumulation.

### Sequenzielle Beschreibung des Tunnelstroms

Im vorhergehenden Abschnitt wird zur Erklärung des resonanten Tunneleffekts und dem Entstehen eines negativ differentiellen Widerstands eine „globale“ elektronische Wellenfunktion herangezogen. Ein alternatives Modell zur Erklärung des negativ differentiellen Widerstands in Doppelbarrieren schlug Luryi [59] vor. Sein Modell des *sequenziellen Tunnelns* beschreibt die Gesamttransmission als Ergebnis zweier aufeinander folgender, nicht korrelierter Prozesse. Ein Ladungsträger tunnelt zunächst durch die Emitterbarriere in den Quantentopf. Im Quantentopf kann seine Phaseninformation durch Streuprozesse verloren gehen. Aus dem Quantentopf tunnelt er dann durch die zweite Barriere in den Kollektor. In diesem Bild existieren von Anfang an keine Phasenbeziehungen; ausschließlich die Erhaltung des transversalen Impulses wird vorausgesetzt, um den negativ differentiellen Widerstandsbereich zu erklären. Interessanterweise ist die Stromdichte im Maximum der Resonanz für beide Modelle identisch, so dass zwischen kohärentem und sequenziellem Tunneln nicht unterschieden werden kann [62, 63, 64, 65].

#### *Ladungsträgerakkumulation im Quantentopf*

Es soll nun die Stromdichte im sequenziellen Bild (bei  $T = 0$  K) berechnet werden. Die Zustandsdichte des zweidimensionalen Subbandes im Quantentopf ist aus Gleichung (2.54) bekannt und beträgt

$$D_2(E_z) = \frac{m^*}{\pi\hbar^2} \Theta(E_z - E_1). \quad (3.27)$$

### 3. Transport in Nanostrukturen

Die Anzahl  $N(E_z)$  der am Tunnelprozess beteiligten Elektronen entspricht den Zuständen, die im Energiebereich zwischen Quantentopf-Niveau und Fermi-Kante liegen. Anschaulich ist  $N(E_z)$ , die Querschnittsfläche der Fermi-Kugel,

$$N = \pi (k_F^2 - k_1^2) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} (E_F - E_1). \quad (3.28)$$

Die beiden Teilströme Emitter-Topf  $j_1$  und Topf-Kollektor  $j_2$  erhält man aus der einfachen Annahme, dass die Stromdichte das Produkt aus der Anzahl der freien Zustände im Topf und der Tunnelrate ist [60]:

$$j_1 = e (1 - f_1) N \Gamma_1, \quad (3.29)$$

$$j_2 = e f_1 N \Gamma_2. \quad (3.30)$$

Im Vergleich zu den Gleichungen (3.18) und (3.19) geschieht die Formulierung hier mit Hilfe der Tunnelraten  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ . Die Ladungsträger-Geschwindigkeit muss somit nicht explizit aufgeführt werden. Die Verteilungsfunktion  $f_1$  der Quantentopfstände resultiert aus der Erhaltung der Stromdichte  $j_1 = j_2$  [61]:

$$f_1 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (3.31)$$

Die Gesamtstromdichte ergibt sich somit zu [60]

$$j = e N \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = e \left[ \frac{m^*}{\pi \hbar^2} (E_F - E_1) \right] \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (3.32)$$

Die im Quantentopf dynamisch akkumulierte Ladungsträgerdichte ist [66, 67, 68, 69]

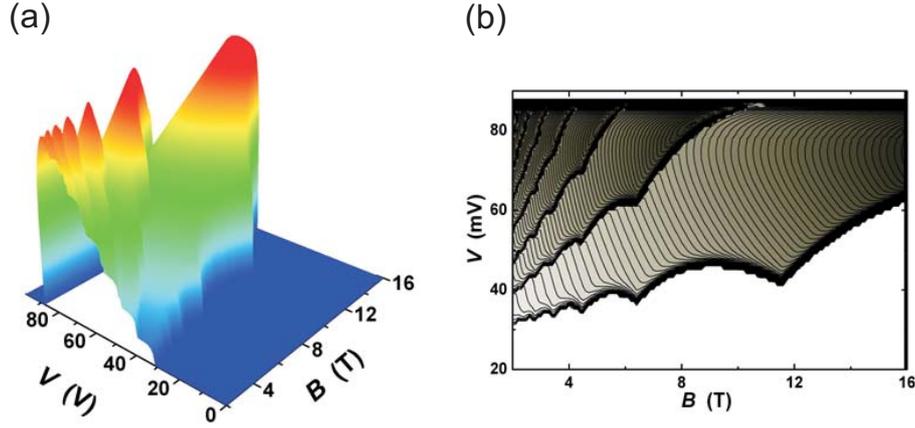
$$n_w = f_1 N = \frac{j}{e \Gamma_2} = \left[ \frac{m^*}{\pi \hbar^2} (E_F - E_1) \right] \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (3.33)$$

### Magnetotransport in Doppelbarrierenstrukturen

In diesem Abschnitt wird der Einfluss eines in Wachstumsrichtung orientierten Magnetfeldes auf die Stromdichte untersucht. Wie in Abschnitt 2.2 gezeigt, diskretisiert das Magnetfeld die Energieeigenwerte für die Bewegung, die parallel zur Grenzschicht verläuft. Ein Ladungsträger spürt das effektive Potenzial [70]

$$V_{\text{eff}}(n_L, z) = V(z) + \hbar \omega_c \left( n_L + \frac{1}{2} \right), \quad (3.34)$$

wobei  $V(z)$  das Ladungsträgerpotenzial im feldfreien Fall ist. Die Energiedispersion der Elektronen im Emitter und Kollektor ist durch Gleichung (2.51) gegeben. Für die Stromdichte (3.20) ergeben sich hieraus zwei wesentliche Konsequenzen. Erstens wird das Integral über  $k_{\parallel}$  zu einer Summe über Landau-Subbänder  $n_L$ , wobei der Wertebereich von  $n_L$  von 0 bis zur größten ganzen Zahl läuft, für welche



**Abbildung 3.8.:** Simulation des resonanten Tunnelstromes in einer Doppelbarrientunnelstruktur unter der Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes. Die Magnetfeldorientierung ist parallel zum Strom und senkrecht zur Barrierenstruktur. **(a)** Dreidimensionale Darstellung der  $I(V, B)$ -Kennlinie; **(b)** Graustufendarstellung der Kennlinie. In dieser Darstellung ist sehr gut die Oszillation der Fermi-Kante zu sehen sowie die Übergänge der einzelnen Landau-Niveaus.

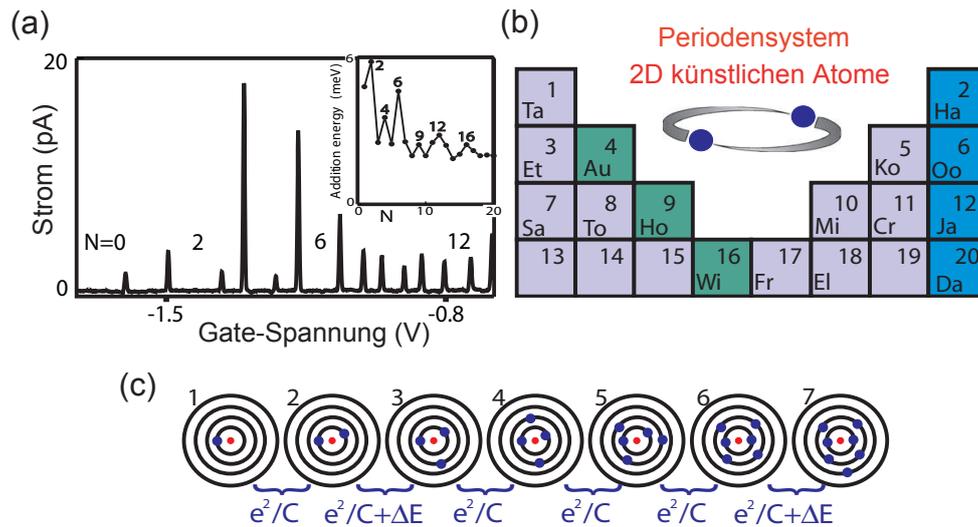
die Bedingung  $\hbar\omega_c(n_L + 1/2) \leq E_F$  gilt. Die zweite Konsequenz ist, dass die Verteilungsfunktion ebenfalls explizit vom Magnetfeld abhängig ist. Für die Gesamtstromdichte im Magnetfeld ergibt sich somit folgender Ausdruck [54, 71, 72, 73]:

$$j(V, B) = 2 \frac{e^2 B}{h^2} \sum_{n_L} \int_0^{E_F - E_L} dE_z T(E_z) \times \quad (3.35)$$

$$[f_{\text{FD}} \{E_z + E_L\} - f_{\text{FD}} \{E_z + E_L + eV\}],$$

mit  $E_L = (n_L + \frac{1}{2}) \hbar\omega_c$ . Die Abbildung 3.8 zeigt die Simulation des resonanten Tunnelstroms in einer Doppelbarrierenstruktur unter Verwendung von Gleichung (3.35). Deutlich sind die Stromstufen in der  $I(V, B)$ -Kennlinie zu erkennen, wenn ein Landau-Niveau mit der Fermi-Kante in Resonanz tritt. Ferner sieht man, dass mit steigendem Magnetfeld die Entartung der Landau-Niveaus zunimmt. Gleichsam reduziert sich die Anzahl der Landau-Niveaus. Für höhere Magnetfelder sind somit weniger Stromstufen zu beobachten, wobei die Stufenhöhe anwächst. In Abbildung 3.8 **(b)** ist zudem die  $1/B$ -Oszillation der Fermi-Kante deutlich in der Oszillation der Einsatzspannung und der Stromstufen zu erkennen. In der Graustufendarstellung sieht man außerdem den so genannten *Landau-Fächer*. Unter dem Landau-Fächer versteht man die Geradenschar, die sich aus den Stufenpositionen im Magnetfeld ergibt.

### 3. Transport in Nanostrukturen



**Abbildung 3.9.:** Periodensystem der zweidimensionalen künstlichen Atome aus [74]. **(a)** Strom als Funktion der Gate-Spannung in einem zirkulären lateralen Quantenpunkt. Der erste Strom-Peak entspricht einem Einzel-Elektronen Tunnelprozess. Bei jedem weiteren Peak wird der Quantenpunkt mit einem Elektron angereichert. Die Abstände der Peaks korrespondieren mit der Additionsenergie, siehe Innenbild. **(b)** Die elektronischen Eigenschaften aus der zweidimensionalen Schalenstruktur können in einem Periodensystem für zweidimensionale Atome zusammengefasst werden. Die Namen der Elemente ergeben sich aus Namen der Gruppenmitglieder der NTT-Grupp der Universität Delft. **(c)** Schalenstruktur der zweidimensionalen Atome.

#### 3.2.2. Quantenpunktstruktur

Ein Quantenpunkt ist ein nulldimensionales Ladungsträgersystem. Das bedeutet, die Wellenfunktion der Ladungsträger ist im Quantenpunkt in allen drei Raumdimensionen so weit eingeschränkt, dass das Energieeigenwertspektrum der Ladungsträger nicht mehr kontinuierliche, sondern nur noch diskrete Werte annehmen kann. Vergleichbar mit einem Atom besitzt der Quantenpunkt ein diskretes Energiespektrum. Die Analogie ist noch weitreichender. Die Ladungsträgerkonfiguration im Grundzustand des Quantenpunktes gleicht dem Schalenmodell der Elektronenhülle der Atome. Die Aufbauprinzipien, wie beispielsweise das *Pauli-Prinzip* und die *Hundschen Regeln* werden befolgt. Doch es gibt auch deutliche Unterschiede. Zum einen ist ein Quantenpunkt sehr viel größer als ein Atom. Die typischen Größen sind im Bereich von einigen Nanometern bis wenigen Mikrometern. Zum anderen ist die Manipulation der „künstlichen“ Atome deutlich einfacher. Durch eine angelegte äußere Spannung lassen sich die Quantenpunkte laden und somit unterschiedliche „Elemente“ erzeugen. Diese künstlichen Atome sind noch aus einem weiteren Aspekt interessant. Experimente, die an natürlichen Atomen im Labor nicht durchführbar wären, sind in Quantenpunktsystemen zugänglich. So hat ein äußeres Magnetfeld auf den Quantenpunkt eine wesentlich stärkere Wirkung als auf ein normales Atom. Bei einem Magnetfeld von einem Tesla ist die magnetische Länge zirka

25 nm groß, was in etwa dem Durchmesser eines Germanium-Quantenpunktes entspricht. Für eine magnetische Länge in der Größenordnung der Atomdurchmesser wäre ein Magnetfeld von mehr als 2625 Tesla nötig. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Quantenpunkte gezielt hergestellte Ladungsträgersysteme sind, die viele Eigenschaften von natürlichen Atomen zeigen. Ihre Manipulierbarkeit sowie der experimentelle Zugang sind deutlich einfacher als bei natürlichen Atomen. Im Prinzip sind Quantenpunktsysteme kleine leitende Inseln in einer isolierenden Umgebung. Diese Inseln können entweder aus einem Metall oder einem Halbleiter bestehen. In den meisten Fällen sind Quantenpunkte, auch wenn das der Name suggeriert, nicht kugelsymmetrisch. Häufig ist die Ausdehnung des Quantenpunktes in eine Raumrichtung wesentlich kleiner als in den beiden verbleibenden. Ein Beispiel hierfür sind Dioden mit einer Doppelbarrieren-Heterostruktur, die in kleine Mesas prozessiert sind. Das Einschlusspotenzial in Wachstumsrichtung (von den Doppelbarrieren erzeugter Quantentopf) ist meist kleiner als das Einschlusspotenzial auf Grund des Mesa-Durchmessers. In solchen Fällen lässt sich der Hamilton-Operator des Quantenpunktes in einen Anteil senkrecht und parallel zur Wachstumsebene separieren. Eine Näherung für das eindimensionale Potenzial in Wachstumsrichtung ist meistens ein Kasten- oder ein harmonisches Potenzial. Für das zweidimensionale Potenzial in der Wachstumsebene wird in erster Näherung ebenfalls ein parabolischer Verlauf angenommen. Der Einteilchen-Hamilton-Operator des Quantenpunktes lautet dann

$$H = H_z + H_{\parallel} \quad (3.36)$$

mit

$$H_{\parallel} = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 \mathbf{r}^2. \quad (3.37)$$

$\mathbf{r} = (x, y)$  liegt in der Wachstumsebene. Beispiele für den Hamilton-Operator in Wachstumsrichtung und dessen Energieeigenwertspektren sind in Abschnitt 2.1.1 gegeben. Der Hamilton-Operator (3.37) besitzt die Eigenenergien

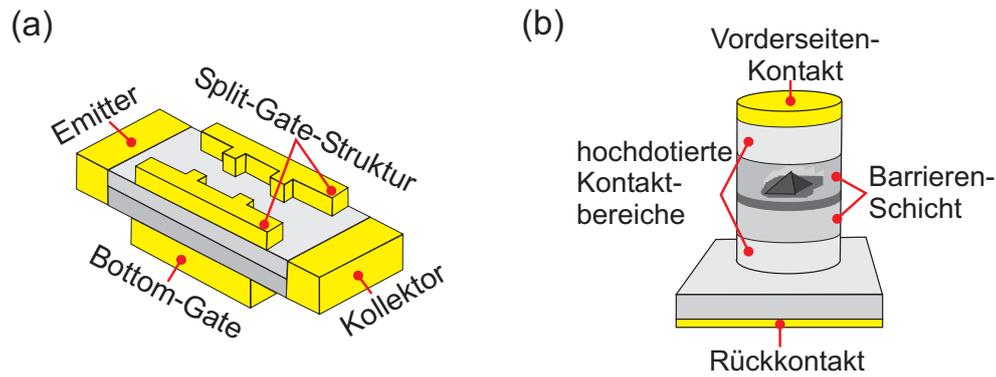
$$E_{n,m} = (2n + |m| + 1) \hbar\omega_0. \quad (3.38)$$

Hierbei ist  $n$  die Hauptquantenzahl mit den Werten  $0, 1, 2, \dots$  und  $m$  die Drehimpulsquantenzahl, die im Gegensatz zum Wasserstoffatom ohne einschränkende Nebenbedingungen die Werte  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$  annehmen kann. Die Energieeigenwerte sind äquidistant mit dem Abstand  $\hbar\omega_0$ .

### Realisierung von Quantenpunktstrukturen

Ein Quantenpunktsystem setzt sich zusammen aus einem Quantenpunkt, der schwach über Tunnelbarrieren an Ladungsträgerreservoirie gekoppelt ist. Hierbei ist die Kopplung der Reservoirie untereinander deutlich schwächer als über den Quantenpunkt. Typische Konfigurationen von Quantenpunktsystemen sind in Abbildung 3.10 gezeigt. Der Quantenpunkt befindet sich stets zwischen den Ladungsträgerreservoirien. In Abhängigkeit von der angelegten Spannung werden Ladungsträger

### 3. Transport in Nanostrukturen



**Abbildung 3.10.:** Schema von Quantenpunktsystemen (a) Beispiel einer lateralen Bauform, eine so genannte Split-Gate-Struktur. (b) Vertikale Tunneliode mit selbstorganisiertem Quantenpunkt innerhalb der Tunnelbarrieren.

aus einem Reservoir emittiert oder absorbiert. Die entsprechenden Reservoirs werden als Emitter (engl. source) oder Kollektor (engl. drain) bezeichnet. Zudem besteht die Möglichkeit, weitere Reservoirs kapazitiv an den Quantenpunkt zu koppeln. Solche Reservoirs heißen Steuerelektrode oder Basis (engl. gate). Mit ihnen lässt sich das elektrostatische Potenzial des Quantenpunktes beeinflussen. Durch gezielte Potenzialdifferenzen zwischen den einzelnen Reservoirs lassen sich die Quantenpunkt-Eigenschaften spektroskopieren. Wie schon in Abbildung 3.10 zu erkennen ist, existieren zwei Konzepte zur Realisierung von Quantenpunktsystemen, eine laterale und eine vertikale Konfiguration.

#### Laterale Systeme

In lateralen Quantenpunktsystemen findet der elektronische Transport in der Ebene eines zweidimensionalen Ladungsträgersystems statt. Das zweidimensionale Ladungsträgersystem wird meist in einer Heterostruktur erzeugt und liegt nur wenige 100 nm unter der Oberfläche. Die Definition der Quantenpunktstruktur geschieht durch Strukturierung der Oberfläche der Heterostruktur. Hierfür stehen unterschiedliche lithographische Verfahren zur Verfügung. Nachdem in einem Ätzverfahren die Ladungsträgerreservoirs aus dem Quantenfilm strukturiert und elektronisch kontaktiert wurden, stehen folgende Methoden für die Definition des Einschlusspotenzials des Quantenpunktes beziehungsweise der Tunnelkontakte zur Verfügung.

1. Es lassen sich **metallische Elektrodenstrukturen** mit Hilfe optischer oder Elektronenstrahlolithographie im Lift-Off-Verfahren (siehe hierzu Kapitel 5.2) auf die Oberfläche der Heterostruktur prozessieren. Durch Anlegen einer äußeren Spannung an die Elektroden werden die Ladungsträger im Quantenfilm auf Grund des elektrischen Feldes verdrängt. Die Verarmung des Quantenfilmes unterhalb der Elektrodenstruktur ist von der angelegten Spannung abhängig. Mit dieser Methode lassen sich die Höhen der Tunnelkontakte variabel

einstellen. Erstmals ist von Meirav [75] eine solche Struktur vorgestellt worden.

2. Bei einer weiteren Methode werden die Tunnelkontakte durch **Abtragen der Oberfläche** mit der Diamantspitze eines Rasterkraftmikroskops erzeugt. Durch das „Kratzen“ werden im Vergleich zur vorhergehenden Methode höhere, dafür aber breitere Barrieren geschaffen. Hierdurch ist die Kopplung der Reservoire an den Quantenpunkt schwächer als bei der vorherigen Methode. Andererseits sind die Barrieren nicht variabel einstellbar. Schumacher [76] erzeugte auf diese Weise Quantenpunktsysteme. Eine weitere Strukturierungsmethode mit Hilfe des Rasterkraftmikroskops ist die **Lokal-Anodische Oxidation** [77]. Bei diesem Verfahren werden die Tunnelstrukturen mit einer stromleitenden Rasterkraftspitze lokal anodisch oxidiert. Dies ändert den Abstand der Oberfläche zum zweidimensionalen Ladungsträgersystem. Hierdurch wird der Bandkantenverlauf lokal verändert und das dreiecksförmige Potenzial des zweidimensionalen Ladungsträgersystems wird über die Fermi-Kante angehoben. Damit ist lokal eine Barriere im zweidimensionalen System geschaffen.
3. Die Vorzüge der variabel einstellbaren Tunnelkontakte unter Verwendung metallischer Elektrodenstrukturen und die Vorzüge stabiler, schmaler aber hoher Barrieren lassen sich kombinieren. Strukturen, die in einem Kombinationsverfahren aus Rasterkraft- und Elektronenstrahlolithographie hergestellt worden, sind von Rogge [78] vorgestellt worden.

Weitere laterale Bauformen sind Strukturen, die nicht auf Halbleitern basieren. So lassen sich Quantenpunktsysteme beispielsweise mit wenigen Nanometer großen, granularen Metall-Clustern [79] oder Makromolekülen, wie Kohlenstoff-Nanoröhren [80], herstellen.

#### Vertikale Systeme

In vertikalen Quantenpunktsystemen findet der elektronische Transport senkrecht zur Wachstumsebene statt. Diese Systeme werden meist durch **Mesa-Ätzen** (siehe Kapitel 5) von Heterostrukturen erzeugt. Im Wesentlichen existieren hier zwei Bauformen. Hochdotierte Schichten über und unter dem Quantenpunkt bilden die Ladungsträgerreservoire. Die elektronische Kontaktierung geschieht durch Einlagern von metallischen Kontakten. Der Quantenpunkt kann nun durch zweierlei Arten definiert sein.

1. Durch eine **Doppelbarrierenstruktur** ist das vertikale Einschlusspotenzial gegeben. Hierbei handelt es sich meist um einen wenige Nanometer breiten Potenzialkasten. Mit Hilfe der modernen Molekularstrahlepitaxie oder vergleichbaren Gasphasenepitaxieverfahren lassen sich die Schichten der Tunnelbarrieren beziehungsweise des Quantentopfs atomlagengenau herstellen. Die Höhe der Barriere ist durch den Bandkantensprung zwischen den Heterostrukturen festgelegt. Das laterale Einschlusspotenzial ist mehr oder minder

### 3. Transport in Nanostrukturen

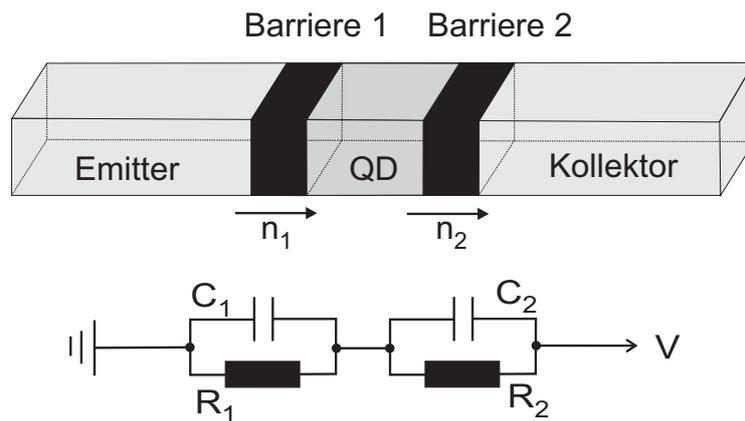


Abbildung 3.11.: Quantenpunktschaltbild

durch den Mesa-Durchmesser gegeben. Im Vergleich zu den lateralen Systemen sind die Tunnelbarrieren deutlich schmaler und höher. Austing [81] und Tarucha [82] gelang es, durch eine ringförmige metallische Elektrode, die in nur wenigen Nanometern Abstand um die Mesa platziert wurde, das laterale Einschlusspotenzial zu variieren.

- Bei der Epitaxie von Halbleitern mit unterschiedlicher Gitterkonstante ist ein Stranski-Krastanov-Phasenübergang (siehe Kapitel 4.1) beobachtbar, bei dem sich **selbstorganisierte Halbleiterinseln** bilden. Die Inseln sind nur wenige Nanometer hoch und breit. Jede Insel ersetzt im Vergleich zur vorhergehenden Methode die Doppelbarrierenstruktur und stellt für sich einen Quantenpunkt dar. Der Mesa-Durchmesser bestimmt also nicht den Quantenpunktdurchmesser. Ein entscheidender Unterschied dieser Methode ist, dass sich in einer Mesa nicht ein Quantenpunkt, sondern je nach Mesa-Durchmesser einige Tausend beziehungsweise Zehntausend Quantenpunkte befinden. Die typische Inselnflächendichte liegt in der Größenordnung von  $10^{-11} \text{ cm}^{-2}$ . Bei einem Mesa-Durchmesser von einem Mikrometer erwartet man zirka Tausend Quantenpunkte in der Mesa. Hierbei entscheidet die Inselgröße und die Kopplung der Insel an die Zuleitungen, ob der Transport über eine entsprechende Insel stattfindet. Bei kleinen Spannungen sind durchaus einzelne Inseln spektroskopierbar.

#### Coulomb-Blockade und Einzel-Ladungs-Effekte

Wie bereits im vorhergehenden Abschnitt beschrieben wurde, werden für die elektronische Transportspektroskopie Quantenpunkte elektrostatisch über Tunnelkontakte von den Zuleitungen getrennt. Ladungen können ausschließlich durch Tunnelprozesse auf den Quantenpunkt gelangen beziehungsweise ihn verlassen. Tunnelt eine Ladung aus den Zuleitungen auf den Quantenpunkt, ändert dies das elektrostatische Potenzial des Systems. Für die Ladungsumordnung wird eine entsprechende

Energie benötigt, die Ladeenergie. Erst wenn die Ladeenergie zur Verfügung steht, beispielsweise durch eine angelegte Spannung, kann die Ladung auf den Quantenpunkt gelangen. Vorher ist der Transportprozess blockiert. Dieses Phänomen wird *Coulomb-Blockade* [83, 84, 85, 86, 87, 88] genannt, da die zu überwindende Ladeenergie aus der Coulomb-Wechselwirkung der Ladungsträger resultiert.

Unter bestimmten Voraussetzungen ist die Coulomb-Blockade in der Strom-Spannungs-Charakteristik von Quantenpunktsystemen beobachtbar. Abbildung 3.11 zeigt ein Schaltbild des Quantenpunktsystems. Es soll nun die Änderung der elektrostatischen Energie dieses Systems betrachtet werden, wenn die angelegte Spannung  $V$  verändert wird. Die elektrostatische Energie ergibt sich aus der Differenz der im System gespeicherten Energie und der Arbeit, die von der Spannungsquelle für den Ladungstransfer aufgebracht werden muss.

Bei einem System aus  $N$  gegeneinander isolierten Leitern ist die Ladung auf dem  $i$ ten Leiter durch die Relation

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j \quad (3.39)$$

gegeben. Hierbei entsprechen die Diagonalelemente der Kapazitätsmatrix  $C_{ii} = C$  der Kapazität des  $i$ ten Leiters, wenn alle anderen Leiter geerdet sind. Die in dem System gespeicherte elektrostatische Energie ist

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (C^{-1})_{ij} Q_i Q_j. \quad (3.40)$$

Bezogen auf das Quantenpunktsystem in Abbildung 3.11 ergibt sich die Gesamtladung des Quantenpunktes aus den Differenzen der Influenzladungen an den Tunnelkontakten

$$Q = Q_2 - Q_1. \quad (3.41)$$

Die Influenzladungen an den Tunnelkontakten berechnen sich aus Gleichung (3.39) zu

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 V_1 \\ Q_2 &= C_2 V_2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

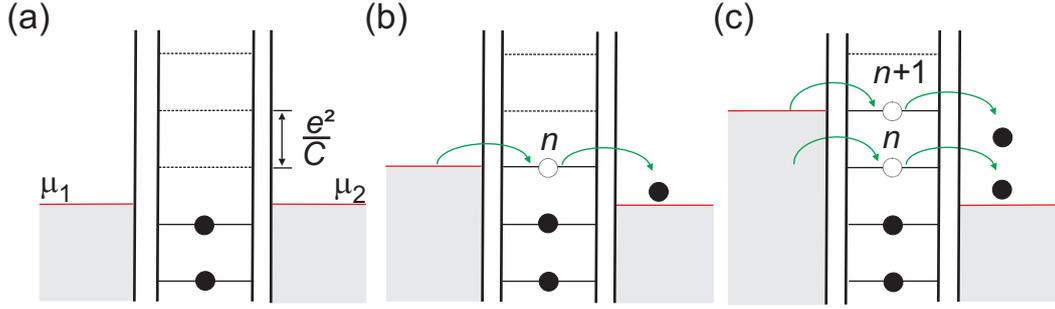
Der Quantenpunkt ist elektrostatisch neutral, solange keine Tunnelprozesse stattfinden. Erst durch einen Tunnelprozess werden zusätzliche Ladungen auf den Quantenpunkt befördert und die Differenz der Influenzladungen ist von Null verschieden,

$$Q = Q_2 - Q_1 = n e, \quad (3.43)$$

wobei  $n = n_1 - n_2$  die Anzahl der zusätzlichen Ladungen auf dem Quantenpunkt ist. Auf Grund der Ladungsquantisierung muss  $n$  eine ganze Zahl sein und somit  $Q$  ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung  $e$ . Die angelegte Spannung  $V$  ist die Summe der über den Tunnelkontakten abfallenden Spannungen

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{C} (C_2 V + n e) \\ V_2 &= \frac{1}{C} (C_1 V - n e) \end{aligned} \quad (3.44)$$

### 3. Transport in Nanostrukturen



**Abbildung 3.12.:** Einzel-Elektronen-Tunneln. (a) Das System ist im Gleichgewicht. Es fließt kein Strom. (b) Durch Anlegen einer äußeren Spannung kann ein Elektron in den Quantenpunkt tunneln und ihn in den Kollektor verlassen. (c) Ein weiterer null-dimensionaler Kanal öffnet sich erst, wenn die Spannung sich um den Betrag  $e^2/C$  erhöht hat.

mit  $C = C_1 + C_2$  der Kapazität des Quantenpunktes. Die im Quantenpunkt gespeicherte elektrostatische Energie ist

$$E_{\text{ch}}(n, V) = \frac{Q_1}{2C_1} + \frac{Q_2}{2C_2}. \quad (3.45)$$

Sie lässt sich mit Hilfe der Gleichungen (3.42) und (3.44) in die Form

$$E_{\text{ch}}(n, V) = \frac{1}{2C} (C_1 C_2 V^2 + Q^2) \quad (3.46)$$

umschreiben.

Die von der Spannungsquelle geleistete Arbeit ist

$$W_{\text{ch}} = V \Delta Q. \quad (3.47)$$

$\Delta Q$  ist die Summe aller Ladungen, die von der Spannungsquelle befördert werden muss. Sie setzt sich zusammen aus der diskreten Anzahl von Ladungen, die auf den Quantenpunkt tunneln und den kontinuierlichen Influenzladungen, die aus der Änderung des elektrostatischen Potentials des Quantenpunktes resultieren. Tunnelt eine Ladung über die zweite Barriere aus dem Quantenpunkt, so ändert sich die Anzahl der Ladungen auf dem Quantenpunkt in  $n' = n - 1$ . Nach Gleichung (3.44) ändert sich das elektrostatische Potenzial zwischen der ersten Barriere und dem Quantenpunkt in  $V_1' = V_1 - e/C$ . Hieraus resultiert die Influenzladung  $\Delta Q = -e C_1/C$ , die von der Spannungsquelle kompensiert werden muss. Tunnelt  $n_2$  Ladungen über den zweiten Tunnelkontakt, so muss von der Spannungsquelle die Arbeit

$$W_{\text{ch}}(n_2) = -n_2 eV \frac{C_1}{C} \quad (3.48)$$

geleistet werden. Um  $n_1$  Ladungen über die erste Barriere zu befördern, bedarf es der Arbeit

$$W_{\text{ch}}(n_1) = -n_1 eV \frac{C_2}{C}. \quad (3.49)$$

Die elektrostatische Energie des Quantenpunktsystems ist somit

$$E(n_1, n_2) = E_{\text{ch}} - W_{\text{ch}} = \frac{1}{2C} (C_1 C_2 V^2 + Q^2) + \frac{eV}{C} (C_1 n_2 + C_2 n_1). \quad (3.50)$$

Die Energiedifferenz bei der Zufuhr (+) beziehungsweise Abfuhr (-) einer Ladung über die erste Barriere ist

$$\Delta E_1^\pm = E(N_1, n_2) - E(n_1 \pm 1, n_2) = \frac{e}{C} \left[ -\frac{e}{2} \mp (en - VC_2) \right], \quad (3.51)$$

und entsprechend gilt für die zweite Barriere

$$E_2^\pm = E(N_1, n_2) - E(n_1, n_2 \pm 1) = \frac{e}{C} \left[ -\frac{e}{2} \pm (en + VC_2) \right]. \quad (3.52)$$

Ist der Quantenpunkt elektrostatisch neutral  $n = 0$ , so reduzieren sich die Gleichungen (3.51) und (3.52) zu

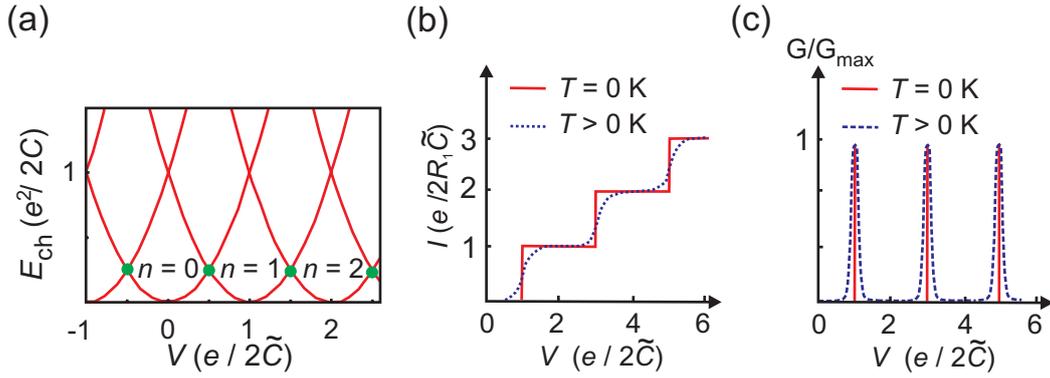
$$\Delta E_{1,2}^\pm = -\frac{e^2}{2C} \mp \frac{eV C_{2,1}}{C} > 0. \quad (3.53)$$

An Gleichung (3.53) ist zu erkennen, dass Tunnelprozesse erst möglich sind, wenn die Spannung den Wert<sup>3</sup>  $V > e/2\tilde{C}$  überschritten hat. Dann kann die abstoßende Coulombwechselwirkungsenergie, der erste Term in Gleichung (3.53), überwunden werden. Vorher fließt kein Strom. Das System befindet sich im Bereich der Coulomb-Blockade. Ist erst einmal eine Ladung auf den Quantenpunkt getunnelt, so ändert sich das chemische Potenzial des Quantenpunktes um den Betrag  $e^2/C$ . Eine weitere Ladung kann erst wieder auf den Quantenpunkt befördert werden, wenn die zusätzliche Coulomb-Energie überwunden ist; das geschieht bei  $V > 3e/2\tilde{C}$ . Vorher fließt kein weiterer Strom. Aus der Coulomb-Blockade resultiert eine stufenförmige Strom-Spannungs-Charakteristik, die so genannte *Coulomb-Treppe* (engl. Coulomb stairs). Um die Coulomb-Treppe gut auflösen zu können, muss die Tunnelstruktur asymmetrisch sein. Die Kapazitäten der Tunnelkontakte sind in der Regel kaum unterschiedlich; daher sollten die Tunnelwiderstände unterschiedlich groß sein, beispielsweise  $R_1 \gg R_2$ . In diesem Fall bestimmt die erste Tunnelbarriere den Transportprozess. Der Quantenpunkt befindet sich in einem Ladungszustand entsprechend einer positiven Spannung nach Gleichung (3.52). Jedesmal, wenn eine Ladung den Quantenpunkt über die erste Tunnelbarriere verlässt, wird der Quantenpunkt wieder von einer Ladung über den zweiten Tunnelkontakt aufgefüllt. Der Strom durch den Quantenpunkt wird näherungsweise durch den Spannungsabfall am ersten Tunnelkontakt bestimmt. Für gleiche Kapazitäten ist der Spannungsabfall nach Gleichung (3.44)  $V_1 = V/2 + n e/C$ . Die Spannung am ersten Tunnelkontakt springt somit jedesmal um den Wert  $e/C$ , wenn eine Ladung über den zweiten Tunnelkontakt auf den Quantenpunkt gelangt. Im Strom ist dann gleichzeitig ein sprunghafter Anstieg in der Größenordnung

$$\Delta I \approx \frac{\Delta V_1}{R_1} = \frac{e}{C R_1} = \frac{e}{2\tilde{C} R_1} \quad (3.54)$$

<sup>3</sup>Zur Vereinfachung sei hier  $C_1 = C_2 = \tilde{C}$  gewählt.

### 3. Transport in Nanostrukturen



**Abbildung 3.13.:** (a) Ladeenergie als Funktion der Spannung; (b) Strom-Spannungskennlinie eines Quantenpunktes mit Coulomb-Lade-Effekten; (c) erste Ableitung von (b).

zu beobachten. Der differentielle Leitwert  $dI/dV$  zeigt an der Stelle der Stromstufen ein Resonanzmaximum. Die Breite der Resonanz hängt entscheidend von der Temperatur ab. Für die Beobachtung der Coulomb-Treppe ist es notwendig, dass die Coulomb-Blockade nicht durch thermische Energie überlagert ist und die Ladungsträger die Ladungsenergie in Form von thermischer Energie besitzen. Das Experiment sollte dafür in einem Temperaturbereich

$$kT \ll \frac{e^2}{2C} \quad (3.55)$$

durchgeführt werden. Typische Kapazitäten ( $C = 8\epsilon_0\epsilon_r R$ ; Eigenkapazität einer flachen Scheibe mit dem Radius  $R$  [89] oder  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^2/(b_1 + b_2)$ ; Kapazität eines vertikalen Quantenpunktes,  $b_1, b_2$  sind die Dicken der Tunnelbarrieren[90]) von Quantenpunkten mit einem Durchmesser von 100 nm liegen in der Größenordnung von 100 aF ( $10^{-16}$  F). Hieraus resultiert eine Coulombenergie von ca. 1 meV; das entspricht der thermischen Energie bei einer Temperatur von zehn Kelvin. Bei größeren Kapazitäten des Quantenpunktes muss die Temperatur entsprechend geringer sein. Eine weitere Bedingung ist, dass die Kopplung des Quantenpunktes an die Zuleitungen schwach ist. Hieraus resultieren scharfe Energieniveaus. Notwendig ist somit die Bedingung

$$\Delta E \ll \frac{e^2}{2C} \sim \frac{1}{2} \frac{\hbar}{R_K C} = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\tau_t}. \quad (3.56)$$

Hierbei ist  $R_K = h/e^2 \approx 25.8$  k $\Omega$  die von Klitzing-Konstante und  $R_K C = \tau_t$ , die Zeit, in der der Ladungsausgleich stattfindet.

#### Tunnel-Hamilton-Operator

Für die Berechnung der Coulomb-Treppe ist es notwendig, die Tunnelraten der beiden Barrieren zu ermitteln. Die Herleitung der Raten soll hier im Rahmen von

wechselwirkenden Ladungen und deren Transfer im Konzept des Tunnel-Hamilton-Operators vollzogen werden. Die Änderungen des elektrostatischen Potentials auf Grund von Tunnelprozessen werden Tunnelraten entsprechend der beiden Tunnelkontakte zugeordnet. Im Modell des Tunnel-Hamilton-Operators sind die Ladungen auf dem Quantenpunkt und den Zuleitungen durch eine unüberwindbare Barriere getrennt. Der Tunnelprozess wird als eine Störung  $H_t$  in den Tunnel-Hamilton-Operator eingeführt

$$H = H_1 + H_{\text{QD}} + H_2 + H_t. \quad (3.57)$$

Die explizite Form der einzelnen Hamilton-Operatoren sei hier nur aus Gründen der Vollständigkeit genannt und soll nicht weiter vertieft werden. Für eine weitere Studie sei auf die Arbeiten von [40] und [91] verwiesen. Mit den Wellenvektoren  $\mathbf{k}, \mathbf{q}$  und dem Spin  $\sigma$  lautet  $H_{1,2}$

$$H_{1,2} = \sum_{\mathbf{k}_{1,2}, \sigma} (E_{\mathbf{k}_{1,2}} + eV_{1,2}) c_{\mathbf{k}_{1,2}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{k}_{1,2}\sigma} \quad (3.58)$$

mit  $c, c^\dagger$ , den fermionischen Erzeuger- und Vernichter-Operatoren, des unabhängigen Vielteilchenzustandes in der linken und rechten Zuleitung. Der Hamilton-Operator des Quantenpunktes ist

$$H_{\text{QD}} = \sum_{\mathbf{q}, \sigma} E_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{q}\sigma} + \frac{e^2}{2C} \hat{n}^2 \quad (3.59)$$

mit  $\hat{n} = \sum_{\mathbf{q}, \sigma} c_{\mathbf{q}\sigma}^\dagger c_{\mathbf{q}\sigma}$  (Hintergrund). Der Tunnel-Hamilton-Operator setzt sich aus dem Operator für den Übergang aus der linken Zuleitung auf den Quantenpunkt und dem Operator vom Quantenpunkt in die rechte Zuleitung zusammen,

$$H_t = H_{1,\text{QD}} + H_{\text{QD},2} \quad (3.60)$$

mit

$$H_{1,\text{QD}} = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}} T_{\mathbf{k}_1 \mathbf{q}}^{1,\text{QD}} c_{\mathbf{k}_1 \sigma}^\dagger c_{\mathbf{q}\sigma} + \text{h. c.} \quad (3.61)$$

Mit Fermis „Goldener Regel“ lässt sich die Tunnelrate von einem Anfangszustand  $|i\rangle$  auf der einen Seite der Barriere in einen Endzustand  $|f\rangle$  auf der anderen Seite berechnen,

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle i | H_t | f \rangle|^2 \delta(E_f - E_i). \quad (3.62)$$

Die Tunnelrate über die linke Barriere auf den Quantenpunkt ist unter Berücksichtigung der thermischen Besetzung der Ausgangszustände [92]

$$\Gamma_1(n) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}, \sigma} f_{\text{FD}}^1(E_{\mathbf{k}_1}) [1 - f_{\text{FD}}^{\text{QD}}(E_{\mathbf{q}})] |T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}}^1|^2 \delta(E_{\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}_1} + \Delta E) \quad (3.63)$$

mit  $f_{\text{FD}}^{1,\text{FD}}$  der Fermi-Dirac Verteilungsfunktion der linken Zuleitung und des Quantenpunktes und  $\Delta E$ , der aus dem Ladungstransfer resultierenden Änderung des

### 3. Transport in Nanostrukturen

elektrostatischen Potentials. Gleichung (3.63) lässt sich in Integralform bringen [92]

$$\Gamma_1(n) = \frac{1}{e^2 R_1} \int dE_1 \int dE_{\text{QD}} \times \quad (3.64)$$

$$\underbrace{f_{\text{FD}}^1(E_1) [1 - f_{\text{FD}}^{\text{QD}}(E_{\text{QD}})] \delta(E_{\text{QD}} - E_1 + \Delta E)}_{\text{wesentlich } \neq 0 \text{ nur für } E_1 = E_{\text{QD}} + \Delta E}$$

$$\approx \frac{1}{e^2 R_1} \int dE f_{\text{FD}}(E) [1 - f_{\text{FD}}(E + \Delta E)] \quad (3.65)$$

mit

$$1/R_1 = 2 \frac{2\pi e^2}{\hbar} D_1(0) D_{\text{QD}}(0) |T^1|^2, \quad (3.66)$$

dem inversen Tunnelwiderstand der ersten Barriere. Hierbei sind  $D_{1,\text{QD}}$  die Zustandsdichten in der linken Zuleitung beziehungsweise auf dem Quantenpunkt. Da der Verlauf der Zustandsdichte sich im Bereich der Integration (nahe der Fermi-Energie von Zuleitung und Quantenpunkt) nur unwesentlich ändert, kann die Zustandsdichte in diesem Bereich als konstant angesehen werden. Hierdurch reduziert sich die zweifache Integration durch die Delta-Funktionen auf eine einfache. Die Transmission von der Zuleitung auf den Quantenpunkt  $T_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}}^1$  ist von  $\mathbf{k}_1$  und  $\mathbf{q}$  unabhängig. Gleichung (3.65) lässt sich explizit integrieren:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{e^2 R_1} \frac{\Delta E}{1 - \exp(-\Delta E/kT)}. \quad (3.67)$$

Unter Verwendung von Gleichung (3.67) lassen sich die Tunnelraten für die Tunnelprozesse auf den Quantenpunkt oder davon weg ( $n \rightarrow n \pm 1$ ) für die erste und zweite Tunnelbarriere berechnen

$$\Gamma_{1,2}^\pm = \frac{1}{e^2 R_{1,2}} \frac{\Delta E_{1,2}^\pm}{1 - \exp(-\Delta E_{1,2}^\pm/kT)}. \quad (3.68)$$

Mit  $p(n)$ , der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Ladungen auf der Insel, ergibt sich der stationäre (DC-) Tunnelstrom zu [40, 92]

$$I(V) = I_2(V) = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) (\Gamma_2^- - \Gamma_2^+) = I_1 = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(n) (\Gamma_1^- - \Gamma_1^+). \quad (3.69)$$

Im Gleichgewichtszustand ( $p(n) = \text{const.}$ ) muss gelten:

$$p(n) (\Gamma_1^+(n) + \Gamma_2^+(n)) = p(n+1) (\Gamma_1^-(n+1) + \Gamma_2^-(n+1)). \quad (3.70)$$

Dies ermöglicht bei gegebenen Parametern  $R_{1,2}$ ,  $C_{1,2}$  und  $T$  die Berechnung von  $p(n)$  und  $I(V)$ .

### Random Telegraph Signale

Befinden sich in der Nähe ( $\sim kT$ ) des Transportkanals Störstellenzustände, so können diese das elektrostatische Potenzial beeinflussen. In der Strom-Spannungskennlinie führt dies zu Stromfluktuationen, die mit zufälligen Lade- beziehungsweise Entladevorgängen der Störstellenzustände korrelieren. Die Stromfluktuationen werden *Random-Telegraph-Signale* genannt. Random-Telegraph-Signale besitzen eine gewisse Ähnlichkeit zur Coulomb-Blockade, da es sich hier auch um einen Einzel-Ladungs-Effekt handelt.

## 3.3. Transport in Magnetfeldern

Die Wirkung eines Magnetfeldes auf niederdimensionale Ladungsträgersysteme, insbesondere auf isolierte Quantenpunkte, wurde bereits in Kapitel 2.2 diskutiert. Es soll nun die Wirkung eines Magnetfeldes auf ein Quantenpunktsystem besprochen werden, wenn zusätzlich in Wachstumsrichtung ein elektrisches Feld anliegt. Im Magnetfeld soll der Tunnelprozess zwischen den Zuleitungen und dem Quantenpunkt analysiert werden. Hierbei muss zwischen zwei Orientierungen des Magnetfeldes unterschieden werden. Das Magnetfeld kann entweder parallel oder senkrecht zum elektrischen Feld und somit dem Strom verlaufen.

### 3.3.1. Magnetfeld parallel zum Strom

Der Hamilton-Operator eines geladenen Teilchens im Magnetfeld ist durch Gleichung (2.55) beschrieben. Mit einem Magnetfeld in  $z$ -Richtung, entsprechend einem Vektorpotenzial  $\mathbf{A} = Bx \mathbf{e}_y$ , schreibt sich der Hamilton-Operator (2.55) (ohne Zeeman-Term) in der Form [93],

$$\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m^*} + V(\mathbf{r}) + eFz = \frac{1}{2m^*} [\mathbf{p}_{\parallel}^2 - 2ie\hbar Bx \partial_y + (eBx)^2] + V_{\parallel}(\mathbf{r}_{\parallel}) + \frac{p_z^2}{2m^*} + V_z(z) + eFz. \quad (3.71)$$

Die Umformung setzt voraus, dass sich das Potenzial  $V(\mathbf{r})$  in die beiden Potenziale  $V_{\parallel}(\mathbf{r}_{\parallel})$  beziehungsweise  $V_z(z)$  separieren lässt.  $V_{\parallel}(\mathbf{r}_{\parallel})$  und  $V_z(z)$  beschreiben den Potenzialverlauf ohne externes Feld.  $F$  sei das in  $z$ -Richtung anliegende elektrische Feld. An Gleichung (3.71) ist zu erkennen, dass ein parallel zur Tunnelrichtung orientiertes Magnetfeld keine Auswirkungen auf die Bewegungskomponente in Richtung des elektrischen Feldes hat. Im Strom ist die Wirkung des Magnetfeldes dennoch sichtbar, da das Magnetfeld in der Wachstumsebene, also senkrecht zum Strom, ein magnetisches Einschlusspotenzial erzeugt und somit im Strom die transversalen Bewegungsanteile berücksichtigt werden. Bei freien Ladungsträgern in den Zuleitungen bilden sich im Magnetfeld in der Wachstumsebene Landau-Niveaus aus, die der freien Bewegung in Tunnelrichtung überlagert sind.

Die Wirkung eines Magnetfeldes auf einen Quantenpunkt ist bereits in Kapitel

### 3. Transport in Nanostrukturen

2.2 besprochen worden. Die Energieeigenwerte des Quantenpunktes im Magnetfeld sind durch Gleichung (2.66) gegeben. Die Gleichung (2.66) lässt sich für zwei Grenzfälle entwickeln. Für den Fall kleiner Magnetfelder ( $\omega_c \ll \Omega$ ) dominiert der Anteil des harmonischen Oszillatorpotenzials  $(n + 1)\hbar\omega_0$ . Mit wachsenden  $\omega_c$  verschieben sich die Subbänder, die sich auf Grund des elektrostatischen Einschlusspotenzials ergeben, zu höheren beziehungsweise niedrigeren Energien, je nach Vorzeichen von  $m$ . Der Abstand der Niveaus zueinander ist  $\hbar\omega_c$ . Die Grundzustandsenergie  $E_{0,0}$  wird mit wachsendem Magnetfeld um

$$\Delta E_D = \frac{1}{8} \frac{e^2 \hbar}{(m^*)^2 \omega_0} B^2 \stackrel{a=\sqrt{\frac{\hbar}{m^* \omega_0}}}{=} \frac{e^2 B^2}{8m^*} a^2 \quad (3.72)$$

angehoben. Das Anheben der Energie wird als diamagnetische Verschiebung bezeichnet.

Im Grenzfall großer Magnetfelder ( $\omega_c \gg \omega_0$ ) gilt für Gleichung (2.66) näherungsweise die Entwicklung [44]

$$E_{n,m} \approx (n + m + 1) \frac{\hbar\omega_c}{2} + (n + 1) \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}. \quad (3.73)$$

Gleichung (3.73) geht für sehr große Felder in  $(n + m + 1)\hbar\omega_c/2$  über, was der Entwicklung von Landau-Niveaus in zweidimensionalen Ladungsträgersystemen entspricht. In großen Magnetfeldern spüren die Ladungsträger nicht das elektrostatische Einschlusspotenzial, sondern es überwiegt die Zyklotronbewegung.

#### 3.3.2. Magnetfeld senkrecht zum Strom

Im Folgenden wird eine Magnetfeldorientierung, beispielsweise  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_x$ , senkrecht zu einem in  $z$ -Richtung angelegten elektrischen Feld betrachtet. Auf die Ladungsträger wirkt die Lorentz-Kraft nach Gleichung (2.45). Aus dem Magnetfeld gewinnen die Ladungsträger keine zusätzliche Energie, da die Lorentz-Kraft senkrecht zur Tunnelrichtung wirkt. Stattdessen findet ein Energieübertrag der  $z$ -Komponente des Ladungsträgers auf seine  $y$ -Komponente statt. Im Tunnelprozess durch eine Barriere der Dicke  $b$  gewinnt oder verliert ein Ladungsträger den Impulsbetrag  $\Delta k_y = b/\ell_B^2$  in  $y$ -Richtung. Der Energieübertrag in  $y$ -Richtung

$$\Delta E_y = \frac{\hbar^2 (\Delta k_y)^2}{2m^*} = \frac{e^2 B^2}{2m^*} \langle b \rangle^2 \quad (3.74)$$

wird der  $z$ -Komponente entzogen beziehungsweise hinzugefügt. Hierdurch können Quantenpunkt-Niveaus aus Subbändern der Zuleitung erreicht werden, die um den Energiebetrag (3.74) tiefer liegen. Daraus resultiert, dass die Resonanzposition proportional zu  $B^2 \langle b \rangle^2$  zu höheren Spannungen verschoben ist.

## 3.4. Hopping-Transport und Nichtgleichgewichtsprozesse

### 3.4.1. Hopping-Transport in Nanostrukturen

Im Rahmen des Bändermodells findet der Transport über ausgedehnte Zustände statt. Dies bedeutet, dass die Wellenfunktion der Ladungsträger über den gesamten Festkörper ausgedehnt ist. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Bloch-Wellen. Voraussetzung für die Ausbildung von Bloch-Wellen ist die Periodizität des Kristallgitters, die zur Überlagerung der atomaren Eigenzustände von gleicher Energie führt. Das Vorhandensein von Unordnung, beispielsweise Defektzentren, bewirkt ab einem gewissen Grad eine Lokalisierung der Wellenfunktion, da kein Überlappen der atomaren Wellenfunktionen mehr stattfindet. Die Einhüllende der Wellenfunktion eines bei  $\mathbf{r}_0$  lokalisierten Ladungsträgers fällt exponentiell ab [94, 95, 96]

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 \propto \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{\xi}\right). \quad (3.75)$$

Hierbei beschreibt die Lokalisierungslänge  $\xi$  die Ausdehnung der Wellenfunktion im lokalisierten Zustand.

Alternativ zum Transport über ausgedehnte Zustände kann bei endlicher Temperatur ein Transportmechanismus durch lokalisierte Ladungsträger stattfinden. Die Ladungsträger durchqueren den Festkörper durch thermisch aktivierte Sprünge in Kombination mit quantenmechanischem Tunneln zwischen den einzelnen lokalisierten Zuständen. Dieser Transportmechanismus wird Hüpfleitung (engl. hopping conductance) genannt. Im Modell des Hopping-Transports führte Mott [94] die Leitfähigkeit *a priori* auf die wahrscheinlichsten Übergänge zurück. Die temperaturabhängige Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den lokalisierten Zuständen  $i$  und  $j$ , die den Abstand  $r_{ij} = |\mathbf{j} - \mathbf{i}|$  und eine Energiedifferenz  $\Delta E_{ij} = |E_i - E_j|$  besitzen, ist [96]

$$p_{ij} \propto \exp\left(-\frac{r_{ij}}{\xi}\right) \exp\left(\frac{-\Delta E_{ij}}{kT}\right). \quad (3.76)$$

Die Bedingung von Mott lautet somit:

$$\sigma \propto \max\{p_{ij}\}. \quad (3.77)$$

Damit ein Ladungsträger von einem besetzten in einen unbesetzten Zustand tunneln kann, muss die Energiedifferenz  $\Delta E_{ij}$  durch ein Phonon ausgeglichen werden. Der zweite Term in Gleichung (3.76) ist ein Maß für die Existenz eines entsprechenden Phonons. Ist die Temperatur hoch ( $kT > \Delta E_{ij}$ ), so ist der zweite Term annähernd gleich Eins und der erste Term charakterisiert die Leitfähigkeit. Nach der Bedingung aus Gleichung (3.77) sollen nur die wahrscheinlichsten Übergänge stattfinden; somit muss der erste Term maximiert werden. Dies geschieht, indem der Hopping-Radius minimiert wird. Es finden also nur Übergänge zwischen nächstliegenden Zuständen statt. Deren Energiedifferenz ist nebensächlich, weil entsprechende Phononen zur Verfügung stehen. Der Transport findet über *nächste Nachbarn* (engl.

### 3. Transport in Nanostrukturen

nearest neighbour) statt.

Nimmt die Temperatur ab, so kommt der zweite Term zum Tragen. Die Auswahl an Phononenenergien ist reduziert. Es ist jetzt möglicherweise nicht mehr der Übergang in den nächstliegenden Zustand der Wahrscheinlichste, sondern ein weiter entfernter Übergang, dessen Energie jedoch näher an der des Ausgangszustandes liegt. Zudem muss die entsprechende Energiedifferenz an Phononenenergie zur Verfügung stehen. Um den optimalen Hopping-Radius in Abhängigkeit von der Temperatur zu bestimmen, muss die Summe der beiden Exponenten von Gleichung (3.76) optimiert werden. Zudem muss mindestens ein Zustand im entsprechenden Radius mit der Energie  $\Delta E_{ij}$  existieren. Für ein dreidimensionales System lautet die Bedingung

$$1 = \frac{4}{3} \pi r_{ij}^3 \Delta E_{ij} D_3(E_F). \quad (3.78)$$

Zusammen mit der Nebenbedingung (3.78) muss somit die Gleichung

$$\max \left\{ -\frac{2r}{\xi} - \frac{\Delta E_{ij}}{kT} \right\} \quad (3.79)$$

optimiert werden. Die Rechnung liefert den optimalen Hopping-Radius [96, 97]

$$r_m = \left( \frac{9\xi}{8\pi D_3(E_F) kT} \right)^{1/4} \propto \xi \left( \frac{T_m}{T} \right)^{1/4} \quad (3.80)$$

mit

$$kT_m = \frac{\beta^4}{D_3(E_F) \xi^3}. \quad (3.81)$$

Hierbei ist  $\beta$  eine numerische Konstante. Durch Einsetzen von Gleichung (3.80) in die Nebenbedingung (3.78) erhält man die optimale Energiedifferenz der beiden Zustände

$$\Delta E_m = \left( \frac{2}{9\pi D_3(E_F)} \right)^{1/4} \left( \frac{kT}{\xi} \right)^{3/4} \propto kT \left( \frac{T_m}{T} \right)^{1/4}. \quad (3.82)$$

Für die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit ergibt sich aus der Mott-Bedingung (3.77) und dem Einsetzen der Gleichungen (3.80) und (3.82) in Gleichung (3.76):

$$\sigma \propto \exp \left[ - \left( \frac{T_m}{T} \right)^{1/4} \right]. \quad (3.83)$$

Charakteristisch für dieses Transportverhalten ist, dass mit abnehmender Temperatur die mittlere Sprungweite größer wird, da es für die Ladungsträger günstiger wird, zu weiter entfernten Potenzialminima zu tunneln, für deren Erreichung weniger Aktivierungsenergie erforderlich ist. Der Transport durch Hüpfen mit variabler Sprunglänge wird *Variable-Range-Hopping* genannt. Das Verhalten der Leitfähigkeit, Gleichung (3.83), lässt sich auf beliebige Dimensionen  $d$  verallgemeinern. Die

### 3.4. Hopping-Transport und Nichtgleichgewichtsprozesse

optimalen Werte für den Hopping-Radius und der entsprechenden Energie sind hierfür  $r_m \propto T^{-1/(d+1)}$  und  $\Delta E_m \propto T^{d(d+1)}$ . Mit diesen Annahmen lautet die verallgemeinerte Leitfähigkeit im *Mott-Variable-Range-Hopping Modell* [96, 97]

$$\sigma(T) = \sigma_0(T) \exp \left[ - \left( \frac{T_m}{T} \right)^x \right], \quad (3.84)$$

mit  $x = 1/(d + 1)$ . Der Vorfaktor  $\sigma_0(T)$  ist von der Form

$$\sigma_0(T) = \frac{e^2}{h} \frac{1}{T^s}. \quad (3.85)$$

Für Materialien mit einer isotropen Einhüllenden der Wellenfunktion ist  $s = -1/4$ , während für eine anisotrope Einhüllende, wie sie beispielsweise beim Germanium oder Silizium vorkommt,  $s = -3/8$  gilt. Die Perkolationstheorie liefert  $s = 1/2$ . Für die Herleitung von Gleichung (3.84) wurden keine Ladungsträgerwechselwirkungen berücksichtigt. In der Modellvorstellung von Mott besitzt das System in der Umgebung der Fermi-Kante eine ausreichend hohe Zustandsdichte  $D(E_F)$ , so dass bei abfallender Temperatur stets ausreichend viele Zustände vorhanden sind, über die der Hopping-Prozess mit der Temperatur entsprechenden Aktivierungsenergie stattfinden kann. Wird die Coulomb-Wechselwirkung der Ladungsträger berücksichtigt, so führt dies zu einer Lücke in der Nähe der Fermi-Kante, die so genannte Coulomb-Lücke (engl. Coulomb gap). Die Ursache für diese Lücke lässt sich folgendermaßen veranschaulichen. Ein System aus lokalisierten Ladungsträgern befindet sich im Grundzustand. Alle Zustände mit Energien unterhalb der Fermi-Energie sind besetzt. Für einen Übergang aus einem besetzten Zustand  $i$  mit  $E_i < E_F$  in einen unbesetzten  $j$  mit  $E_j > E_F$  wird die Energie

$$E = \Delta E_{ij} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon r_{ij}} \geq 0 \quad (3.86)$$

benötigt. Hierbei ist  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  die Dielektrizitätskonstante. Der letzte Term entspricht der Coulomb-Wechselwirkung. Das Minuszeichen in Gleichung (3.86) verdeutlicht die attraktive Wechselwirkung zwischen einem besetzten und einem unbesetzten Zustand<sup>4</sup>. Für den Grundzustand muss  $E \geq 0$  gelten. Liegen die beiden Zustände in einem Energieintervall  $[E_F - \epsilon/2, E_F + \epsilon/2]$  um die Fermi-Energie, so gilt  $\Delta E_{ij} < \epsilon$ . Damit  $E \geq 0$  ist, muss  $r_{ij} \geq e^2/\epsilon\epsilon$  sein. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Zustände  $N(E)$  in diesem Intervall nicht größer als  $\epsilon^3\epsilon^3/e^6$  sein kann. Für die Zustandsdichte  $dN(E)/d\epsilon$  folgt damit  $D(E) \leq \epsilon^3\epsilon^2/e^6$ . Unter Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung existiert also eine parabolische Coulomb-Lücke um die Fermi-Energie. Da der Übergang langsam abfällt und nicht abrupt ist, spricht man auch von einem *weichen* Übergang (engl. soft gap).

Efros und Shklovskii zeigten, dass die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit

<sup>4</sup>Ein unbesetzter Elektronen-Zustand kann als besetzter Loch-Zustand verstanden werden. Die Wechselwirkung zwischen besetztem und unbesetztem Elektronen-Zustand entspricht also der Wechselwirkung zwischen einem Elektron und einem Loch und ist somit attraktiv.

### 3. Transport in Nanostrukturen

bei Anwesenheit einer Coulomb-Lücke zu einem dimensionsunabhängigen Exponenten  $x = 1/2$  in Gleichung (3.84) führt. Hopping-Leitfähigkeit unter Berücksichtigung der Coulomb-Wechselwirkung wird daher als *Efros-Shklovskii Variable-Range-Hopping* (ES-VRH) [96] bezeichnet:

$$\sigma(T) = \sigma_0 \exp \left[ - \left( \frac{T_{\text{es}}}{T} \right)^{1/2} \right] \quad (3.87)$$

mit

$$kT_{\text{es}} = C \frac{e^2}{4\pi\epsilon\xi}. \quad (3.88)$$

Heute nimmt man an, dass beide Modelle Grenzwerte des Variable-Range-Hopping sind, je nach Verhältnis der Hopping Energie  $\Delta E_m$  und Coulomb-Lücke. Ist die Hopping-Energie größer als die Coulomb-Lücke, so ist kein Einfluss der veränderten Zustandsdichte zu erwarten.

#### Elektrische Felder

Bis jetzt wurde ausschließlich die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit betrachtet. Es soll nun die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von elektrischen Feldern  $F = V/L$  untersucht werden. Dabei soll die Energiedifferenz  $eFr$  des elektrischen Feldes innerhalb des Hopping-Radius kleiner als die thermische Energie sein [98, 99]:

$$eF\xi/kT \ll 1 \quad \text{kleine elektrische Felder.} \quad (3.89)$$

Im Leitfähigkeitsregime des Variable-Range-Hopping nimmt der Hopping-Radius kontinuierlich mit sinkender Temperatur zu, so dass der Feldstärkenbereich, in dem ein Ohmsches Verhalten der Leitfähigkeit beobachtet werden kann, schneller als die Temperatur abnimmt. Wenn das elektrische Feld anwächst, beobachtet man einen Anstieg der Leitfähigkeit, da in Feldrichtung die Energiezustände abgesenkt werden, so dass das Hüpfen erleichtert wird. Dieser Effekt übersteigt bei Weitem den Effekt der Reduktion der Übergangswahrscheinlichkeit von entgegen der Feldrichtung verlaufenden Hopping-Prozessen. Die Leitfähigkeit zeigt das Verhalten

$$\sigma(F, T) = \sigma(0, T) \exp \left( C \frac{eFr}{kT} \right), \quad (3.90)$$

mit  $C$  einer numerischen Konstante, die durchaus temperaturabhängig sein kann. Für den Fall sehr großer elektrischer Felder

$$eF\xi/kT \gg 1 \quad \text{sehr große elektrische Felder} \quad (3.91)$$

zeigt sich, dass elektrische Felder eine ähnliche Rolle spielen wie die Temperatur. Um die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von hohen elektrischen Feldern zu bekommen, ersetzt man die Temperatur  $T$  in Gleichung (3.84) beziehungsweise Gleichung (3.87) [98, 99]

$$\sigma(F) = \sigma_0 \exp \left[ - \left( \frac{F_0}{F} \right)^{x'} \right] \quad (3.92)$$

mit den Konstanten  $\sigma_0$ ,  $F_0$  und dem Exponenten  $x' = x$ .

### Magnetische Felder

Ein äußeres Magnetfeld führt zum Schrumpfen der Wellenfunktion und somit zur Reduktion der Übergangswahrscheinlichkeit. Es ist also zu erwarten, dass die Leitfähigkeit mit wachsendem Magnetfeld abnimmt. Durch den Einfluss eines Magnetfeldes verringert sich der Lokalisierungsradius, entsprechend [96]

$$\xi(B) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m^* E_0(B)}}. \quad (3.93)$$

Hierbei ist  $E_0$  der Grundzustand der Ladungsträgerfalle, z. B. eine Störstelle oder ein Quantenpunkt. Für schwache Magnetfelder ( $\ell_B \gg \xi$ ) zeigt die Leitfähigkeit ein Verhalten, entsprechend [96]

$$\sigma(B, T) = \sigma_0 \exp(-b(T) B^2) \quad (3.94)$$

mit

$$b = t \frac{e^2 \xi^4}{\hbar^2} \left( \frac{T_0}{T} \right)^y. \quad (3.95)$$

Für Mott-Variabel-Range-Hopping gilt der Parametersatz,  $t = 5/2016, y = 3/4$ .

Für Efros-Shklovskii-Variabel-Range-Hopping gilt [96]:  $t = 0.0015, y = 3/2$ .

Für starke Felder ( $\ell_B \approx \xi$ ) gilt:

$$\sigma(B, T) = \sigma_0 \exp \left[ - \left( \frac{T_0(B)}{T} \right)^z \right]. \quad (3.96)$$

Die Werte für  $T_0$  und  $z$  für Mott- und Efros-Shklovskii-Variable-Range-Hopping sind für den Fall konstanter Zustandsdichte an der Fermi-Kante  $D(E_F) = \text{const.}$ :

$$z = 1/3, \quad kT_0(B) = \frac{2.1 eB}{D(E_F) \hbar \xi(B)}. \quad (3.97)$$

Für Systeme mit einer Coulomb-Lücke in der Zustandsdichte gilt [96]:

$$z = 3/5, \quad kT_0(B) = 3.17 \frac{e^2}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{\ell_B^2 \xi(B)} \right)^{1/3}. \quad (3.98)$$

### 3.4.2. Thermoelektrische Effekte - Grundbegriffe der Leitfähigkeitstheorie

Bei der Untersuchung thermodynamischer Größen, wie beispielsweise der spezifischen Wärme, wird implizit vorausgesetzt, dass das zu untersuchende System sich im Quasi-Gleichgewicht befindet. Dies bedeutet, dass Änderungen des Systems auf Grund äußerer Störungen, wie zum Beispiel der Temperatur oder ein äußeres Magnetfeld, sehr langsam und reversibel ablaufen. Die zeitliche Entwicklung eines Systems beziehungsweise das Verhalten eines Systems unter Nichtgleichgewichtsbedingungen werden im Rahmen der mikroskopischen Transporttheorie<sup>5</sup> beschrieben.

<sup>5</sup>Die mikroskopische Transporttheorie basiert auf der Boltzmann (Transport-)Gleichung

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Feld}} + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Drift}} + \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Stoß}} = 0. \quad (3.99)$$

### 3. Transport in Nanostrukturen

Die folgenden Betrachtungen konzentrieren sich auf Systeme mit einer kleinen Abweichung aus dem Gleichgewichtszustand. Wird die Störung, die das System aus dem Gleichgewicht bringt, abgeschaltet, so kehrt das System innerhalb der *Relaxationszeit* in das Gleichgewicht zurück. Für kleine Störungen lassen sich Transportkoeffizienten aufstellen, die die Reaktion des Systems auf die Störung beschreiben. Die wichtigsten Transportkoeffizienten sind:

$$\text{- elektrische Leitfähigkeit, } \sigma: \quad j = \sigma \times F, \quad \nabla T = 0 \quad (3.101)$$

$$\text{- Wärmeleitfähigkeit, } \kappa: \quad Q = -\kappa \times \nabla T, \quad j = 0 \quad (3.102)$$

$$\text{- Peltier-Koeffizient, } \Pi: \quad Q = \Pi \times I \quad \nabla T = 0 \quad (3.103)$$

$$\text{- Seebeck-Koeffizient, } \mathcal{S}: \quad F = \mathcal{S} \times \nabla T, \quad j = 0 \quad (3.104)$$

mit  $j, Q, \nabla T$  und  $F$ , dem elektrischen Strom, dem Wärmestrom, dem Temperaturgradient und dem elektrischen Feld. Ein weiterer, hier nicht aufgeführter Transportkoeffizient, ist die *Hall-Konstante*  $R_H = F_y / (B j_x)$  mit  $j_y = \nabla T = 0$ . Die Transportkoeffizienten sind auf Grund der Zeitreversibilität mikroskopischer Prozesse nicht völlig unabhängig. Die *Onsager-Relation*<sup>6</sup> ermöglicht es, aus bekannten Koeffizienten unbekanntes zu ermitteln. Die bekannteste Relation verbindet den elektrischen mit dem Wärmetransport (ohne Magnetfeld):

$$\begin{aligned} j &= L_{11} \mathbf{F} - L_{12} \frac{\nabla T}{T}, \\ Q &= L_{11} \mathbf{F} - L_{12} \frac{\nabla T}{T}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Bei der Bewegung der Elektronen beziehungsweise Löcher werden Ladung und Energie gleichzeitig befördert, unabhängig davon, ob diese Bewegung durch ein elektrisches Feld oder ein Temperaturgefälle hervorgerufen wird. Ein elektrischer Strom kann somit nicht nur durch ein elektrisches Feld, sondern auch durch ein Temperaturgefälle zu Stande kommen; entsprechendes gilt für den Wärmestrom. In den meisten Fällen wird jedoch durch die experimentelle Anordnung der Transport

---

Sie ist eine Bestimmungsgleichung für die gestörte Verteilungsfunktion  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ . Ihre Lösung erfordert meist eine dem speziellen Transportvorgang angepasste Näherung. Besondere Schwierigkeiten bereiten dabei die Stoßterme, weil sie mikroskopische Wechselwirkungen berücksichtigen. Detaillierte Betrachtungen zur Transporttheorie findet man in den Standard Festkörperbüchern von Ashcroft und Mermin [100], Ibach und Lüth [101] und Ziman [102]. Ein alternativer Zugang zur Beschreibung von Transportphänomenen, insbesondere für Bauelemente, in denen Quanteneffekte dominieren, geschieht durch die Betrachtung einer für das System charakteristischen Dichtematrix  $\hat{\rho}$ . Ihre zeitliche Entwicklung wird durch die *von Neumann Gleichung*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [H, \hat{\rho}] \quad (3.100)$$

gegeben. Die eckigen Klammern beschreiben den Kommutator des Hamilton-Operators und der Dichtematrix.

<sup>6</sup>Die Onsager-Relation besagt ein symmetrisches Verhalten der verallgemeinerten Transportkoeffizienten,

$$L_{21} = L_{12}. \quad (3.105)$$

### 3.4. Hopping-Transport und Nichtgleichgewichtsprozesse

im thermischen Gleichgewicht betrachtet; der Wärmestrom ist zu vernachlässigen. Im Folgenden werden kurz die drei wichtigsten thermoelektrischen Effekte beschrieben, bei denen der Wärmestrom eine entscheidende Rolle spielt.

Der *Seebeck-Effekt* liefert die Feldstärke, die sich bei einem Temperaturgefälle einstellt, sofern kein elektrischer Strom fließt. Diese Feldstärke macht sich in der Thermospannung  $V_{a,b}$  bemerkbar, die in einem offenen Stromkreis auftritt, wenn sich zwei Materialien mit unterschiedlichem Seebeck-Koeffizienten auf verschiedenen Temperaturen befinden,

$$V_{a,b} = \int_a^b dT (\mathcal{S}_a - \mathcal{S}_b). \quad (3.107)$$

Eine Abschätzung für die Größenordnung des Seebeck-Koeffizienten von Halbleitern ist durch

$$\mathcal{S} \approx \left(\frac{k}{e}\right) \left(\frac{E_g}{kT}\right) \quad (3.108)$$

gegeben.

Beim Hopping-Transport ist die spezifische Wärme temperaturunabhängig. Die Ladungsträger liefern einen konstanten Beitrag zur Entropie in der Größenordnung  $\ln 2$ . Hieraus resultiert ein Seebeck-Koeffizient in der Größenordnung von

$$\mathcal{S} \approx \left(\frac{k}{e}\right) \ln 2 = 60 \text{ mV/K}. \quad (3.109)$$

Der *Peltier-Effekt* beschreibt den Wärmestrom, der sich ohne Temperaturgefälle in Folge eines elektrischen Feldes einstellt. Er wirkt sich an den Verbindungsstellen zweier unterschiedlicher Materialien aus. In Folge der verschiedenen Peltier-Koeffizienten ist der Wärmestrom an beiden Seiten einer Verbindungsstelle unterschiedlich, so dass dort ein „Wärmestau“

$$Q_{ab} = (\Pi_a - \Pi_b) \times I \quad (3.110)$$

auftritt. Auf der einen Seite findet eine Erwärmung statt, entsprechend wird die andere Seite abgekühlt. Der Peltier-Koeffizient steht über die *Kelvin-Relation*

$$\Pi = \mathcal{S} \times T \quad (3.111)$$

mit dem Seebeck-Koeffizienten in Beziehung.

Schließlich ist noch der *Thomson-Effekt* zu erwähnen. Er besagt, dass bei einem homogenen Leiter, in dem ein Temperaturgefälle herrscht, neben der Jouleschen Wärme ( $I^2/G$ ) eine zusätzliche Erwärmung oder Abkühlung stattfindet, sobald in ihm ein elektrischer Gleichstrom fließt. Der Thomson-Effekt lässt sich somit als ein kontinuierlicher über den Leiter verteilter Peltier-Effekt beschreiben. Man unterscheidet zwischen positiver Thomson - Wärme, bei der sich der Leiter beim Stromdurchgang erwärmt (keine Joulesche Wärme!) und negativer Thomson - Wärme, die ein Abkühlen des Leiters beim Stromdurchgang zur Folge hat.

### 3.5. Raumladungsbegrenzter Stromtransport

Bei der Injektion von Ladungsträgern sind zwei Grenzfälle zu betrachten. Zum einen kann der Stromtransport durch die Injektion von Ladungsträgern aus den Elektroden in den Halbleiter bestimmt sein. Hierbei sind die energetischen Verhältnisse an der Grenzfläche zwischen der metallischen Elektrode und dem Halbleiter entscheidend. Auf Grund der unterschiedlichen Austrittsarbeit bildet sich an der Grenzfläche eine Sperrschicht aus. Die unterschiedlichen Austrittsarbeiten führen zu einem Ausgleich der beweglichen Ladungsträger. Bei einem n-Halbleiter fließen Elektronen in das Metall. Dadurch entstehen im Halbleiter gebundene positive und im Metall negative Raumladungszonen, die zur Ausbildung eines elektrischen Feldes führen, das einen weiteren Ladungsträgertransport verhindert. Damit ein Strom fließen kann, müssen die Ladungsträger die mit der Sperrzone verbundene Potenzialbarriere  $\Phi_0$  überwinden. Kennzeichnend für den Transport an Metall-Halbleiter-Übergängen ist der von der Richtung der angelegten Spannung abhängige Strom. In der so genannten Durchlassrichtung steigt die Stromdichte als Funktion der angelegten Spannung  $V$  [103]

$$j = j_s \left[ \exp \left( \frac{eV}{kT} - 1 \right) \right] \quad \text{mit} \quad j_s = A^* T^2 \exp \left( -\frac{e\Phi_0}{kT} \right). \quad (3.112)$$

$A^*$  ist die *effektive Richardson-Konstante* [103]

$$A^* = \frac{m^*}{m} \left[ \frac{4\pi e m_0 k^2}{h^3} \right] = \frac{m^*}{m} \left[ 1.2 \times 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}^2 \text{K}^2} \right]. \quad (3.113)$$

Bei entgegengesetzter Spannungspolarität ist die Stromdichte von der Spannung unabhängig. In Sperrrichtung fließt nur eine kleine Sperrstromdichte  $j_s$ . Charakteristisch für diesen Transportmechanismus ist ein hohes Gleichrichtungsverhältnis zwischen den Stromdichten in Durchlass- und Sperrrichtung.

Ein gänzlich unterschiedlicher Transportmechanismus tritt auf, wenn die Injektionsfähigkeit der Elektrode auf Grund einer geringen Energiebarriere  $\Phi_0$  sehr groß ist, jedoch der Stromfluss durch den Transport der Ladungsträger innerhalb des Halbleitervolumens begrenzt ist. Dieser Fall wird als *raumladungsbegrenzter* Stromtransport<sup>7</sup> (engl *space charge limited current* - SCLC) bezeichnet. Durch eine zu geringe Leitfähigkeit der Halbleiter bauen die injizierten Ladungsträger im Bereich der Elektrode eine Raumladungszone auf und begrenzen dadurch die Injektionsrate des Kontakts. Auf Grund der geringen Leitfähigkeit des Halbleiters soll im Weiteren für ihn der Begriff Isolator gleichwertig verwendet werden. Für einen idealen Isolator, der keine<sup>8</sup> frei beweglichen oder in Störstellen lokalisierten Ladungsträger enthält,

<sup>7</sup>Die Theorie der Ladungsträgerinjektion in Isolatoren und des damit verbundenen raumladungsbegrenzten Stromtransports wurde im Wesentlichen von Rose [104] und Lampert [105] entwickelt. Die Ausführungen in der vorliegenden Arbeit zu dieser Thematik orientieren sich an der sehr guten und übersichtlichen Darstellung im Buch von Lampert und Mark [106].

<sup>8</sup>Zumindest sollte die Anzahl der freien (intrinsischen) Ladungsträger im Vergleich zur induzierten Ladungsträgerkonzentration sehr gering sein. Ist dies nicht der Fall, so wird ein Ohmsches Transportverhalten beobachtet.

gilt die *Mott-Guerney* oder *Child-Beziehung* zwischen angelegter Spannung und Stromdichte,

$$j = \frac{9}{8} \epsilon_0 \epsilon_r \mu \frac{V^2}{L^3}. \quad (3.114)$$

Hierbei ist mit  $L$  die Ausdehnung des Isolators und mit  $\epsilon_r$  die spezifische Dielektrizitätskonstante bezeichnet. Im Modell des raumladungsbegrenzten Stroms ist der Stromfluss ausschließlich volumenbestimmt. Die Forderungen an die Kontakteigenschaften begrenzen sich auf die Bedingung einer beliebig hohen Injektionsfähigkeit. Dies wird für Ladungsträger erfüllt, bei denen die Angleichung der Fermi-Energien von Elektrode und Isolator eine Ladungsträgeranreicherung im Bereich der Kontaktfläche des Isolatorvolumens erzeugt. Hieraus resultiert, dass der Spannungsabfall über der Grenzschicht im Vergleich zum Spannungsabfall über der Isolatorschicht zu vernachlässigen ist. Im Folgenden werden Kontakte, die diesen Anforderungen genügen, als Ohmsche Kontakte bezeichnet, unabhängig davon, ob in der entsprechenden Strom-Spannungs-Charakteristik ein Ohmsches Verhalten beobachtbar ist.

Auf Grund von chemischen Verunreinigungen oder Kristalldefekten existieren in realen Isolatoren Zustände, die Ladungsträger einfangen können. Diese Zustände werden Ladungsträgerfallen, kurz Fallen (engl. traps) genannt. Je nach relativer Lage des Fallen-Energieniveaus  $E_t$  zur Fermi-Energie unterscheiden sich die Fallen in:

$$\text{tiefe Fallen:} \quad E_t - E_F < kT, \quad (3.115)$$

$$\text{flache Fallen:} \quad E_t - E_F > kT. \quad (3.116)$$

### Fallenzustände bei diskreter Energie

Die (lokale) Konzentration der freien Ladungsträger in nicht-entarteten Halbleitern beziehungsweise Isolatoren ergibt sich aus dem Produkt der effektiven Zustandsdichte  $D_{c/v}$  und dem Boltzmann-Faktor [105, 106]

$$n = D_{c/v} \exp\left(\pm \frac{E_F - E_{c/v}}{kT}\right), \quad (3.117)$$

wobei das Pluszeichen für Elektronen im Leitungsband und das Minuszeichen für Löcher im Valenzband gilt. In einem Isolator mit insgesamt  $\rho_t$  flachen Fallen sind die meisten der Fallen gefüllt. Die Konzentration der gefüllten Fallen folgt der Fermi-Dirac Statistik und lautet [106]

$$n_t = \frac{\rho_t}{1 + \left(\frac{1}{g_s}\right) \exp\left(\pm \frac{E_t - E_F}{kT}\right)}. \quad (3.118)$$

Mit  $g_s$  ist der Entartungsgrad der Fallenzustände bezeichnet. Für den Fall, dass beide Spinniveaus in einem Fallenzustand besetzt werden können, ist  $g_s = 2$ . Das Verhältnis der freien Ladungsträgerdichte zur Dichte der besetzten Fallen ist unabhängig von Ort und Stromdichte. Es gilt mit  $\Delta E_t = \pm(E_{c/v} - E_t)$

$$\theta = \frac{n}{n_t} = \frac{D_{c/v}}{g_s \rho_t} \exp\left(\pm \frac{\Delta E_t}{kT}\right) = \text{const.} \quad (3.119)$$

### 3. Transport in Nanostrukturen

Für den Transport bedeutet das Vorhandensein noch unbesetzter flacher Fallen, dass ein geringerer Anteil der induzierten Ladungsträger als freie Ladungsträger für den Transport zur Verfügung steht. Ein Großteil der induzierten Ladungsträger wird in den Fallen gebunden. Die Konsequenz ist ein späterer Aufbau der Raumladung. Der Übergang vom Ohmschen zum raumladungsbegrenzten Transport erfolgt bei höheren Spannungen. Im Vergleich zum Transport im idealen Isolator ist die Beweglichkeit auf Grund der flachen Fallen um den Faktor  $\theta$  reduziert. Der raumladungsbegrenzte Transport bei Anwesenheit flacher Fallen folgt der Relation [106]

$$j = \frac{9}{8} \theta \mu \epsilon_0 \epsilon_r \frac{V^2}{L^3} = \frac{9}{8} \mu \epsilon_0 \epsilon_r \frac{V^2}{L^3} \left[ \left( \frac{D_{c/v}}{\rho_t} \right) \exp \left( \frac{\Delta E_t}{kT} \right) \right]. \quad (3.120)$$

Ab einer Spannung  $V_{\text{TFL}}$  (engl. **trap filled limit** - TFL) sind alle Fallen mit Ladungsträgern besetzt. Jetzt trägt jeder injizierte Ladungsträger zum Strom bei, wodurch der Strom bei geringer Spannungserhöhung stark zunimmt. Der Stromsprung erfolgt bis zu dem Maximalstrom, der bei dieser Spannung durch das fallenfreie Verhalten des Isolators nach Gleichung (3.114) gegeben ist und nicht überschritten werden kann. Die vollständige Auffüllung der Fallen bei  $V_{\text{TFL}}$  bedeutet ferner, dass das Fermi-Niveau die Fallenenergie  $E_t$  durchläuft und somit die Näherung der flachen Fallen aus (3.115) nicht mehr gültig ist. Bei weiterer Spannungserhöhung ist ein Verhalten entsprechend Gleichung (3.114) beobachtbar. Sind mehrere diskrete Energieniveaus flacher Fallen vorhanden, so sind entsprechend viele Stromsprünge zu beobachten.

Für den Fall des Vorhandenseins tiefer Fallen sind fast alle Fallen gefüllt. Die Anzahl der nicht besetzten Fallenniveaus ist

$$p_t = \rho_t - n_t = \frac{\rho_t}{1 + g \exp \left( \frac{E_F - E_t}{kT} \right)}. \quad (3.121)$$

Beim Transport durch einen Isolator mit tiefen Fallen werden bei kleinen Spannungen die freien Fallen gefüllt. Ein Ohmsches Verhalten ist in der Kennlinie beobachtbar. Sind alle Fallen gefüllt - dies geschieht bei der Spannung  $V_{\text{TFL}}$  - geht das System sprunghaft in den Zustand des idealen Isolators über und ein Transportverhalten entsprechend Gleichung (3.114) ist beobachtbar. Im Vergleich zu den flachen Fallen entfällt also der Bereich reduzierter Beweglichkeit. Da nach (3.118) für tiefe Fallen  $n_t \approx \rho_t$  gilt, ändert sich das Verhältnis  $n/\rho_t$  mit dem Injektionspegel, so dass sich keine konstante effektive Beweglichkeit, wie im Fall flacher Fallen, einstellt.

#### **Energetische Verteilung von Fallenzuständen**

Im vorangegangenen Abschnitt besaßen alle Ladungsträgerfallen das diskrete Energieniveau  $E_t$ . Es sollen nun die Auswirkungen auf den Transport erörtert werden, wenn die Fallenzustände energetisch verteilt sind. Hierbei wird einerseits eine konstante beziehungsweise gleichförmige Energieverteilung

$$D_t = \text{const.} \quad (3.122)$$

und eine exponentielle Energieverteilung

$$D_t = \frac{\rho_t}{kT_t} \exp\left(\frac{E - E_c}{kT_t}\right) \quad (3.123)$$

angenommen.  $T_t$  ist eine für die Fallenverteilung charakteristische Temperatur. Mit dem Verteilungsparameter  $\lambda$ , der die Variation der Zustandsdichte innerhalb des Energiebereichs  $kT$  bestimmt, gilt  $T_t = \lambda T$ . Für kleine Werte von  $\lambda$  variiert  $D_t$  stark mit der Energie und für große  $\lambda$  nur schwach. Ferner lässt sich zeigen [106], dass im Experiment zwischen einer exponentiellen und einer Gaußschen Energieverteilung

$$D_t = \frac{\rho_t}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{E - E_{\max}}{\sigma}\right)^2\right) \quad (3.124)$$

nicht unterschieden werden kann.

Für den Fall einer exponentiellen Energieverteilung der Fallen ist eine analytische Herleitung der Strom-Spannungs-Charakteristik nicht möglich. Lampert entwickelte daher ein Modell, bei dem die Probe in drei Bereiche unterteilt wird, in denen dann bestimmte Näherungen für die Ladungsträgerdichten gelten. Mit Hilfe dieser Näherungsmethode konnte Lampert ein Kennlinienmodell entwickeln. Die Stromdichte-Spannungsabhängigkeit im Übergangsbereich zwischen Ohmschem und raumladungsbegrenztem Transport zeigt dann die Beziehung

$$j = D_{c/v} \mu e^{1-\lambda} \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_r \lambda}{\rho_t (\lambda + 1)}\right) \left(\frac{\lambda + 1}{\lambda + 1}\right)^{\lambda+1} \frac{V^{\lambda+1}}{L^{2\lambda+1}}. \quad (3.125)$$

Es erfolgt also ein Anstieg der Stromdichte  $j \propto V^{\lambda+1}$ .

Die gleichförmige Energieverteilung der Fallenzustände kann als Grenzfall der exponentiellen Verteilung für  $\lambda \rightarrow \infty$  betrachtet werden. Der Kennlinienverlauf lässt sich mit dem Lampertschen Näherungsverfahren bestimmen und ergibt

$$j = 2e n_0 \mu F \exp\left(\frac{2 \epsilon_0 \epsilon_r}{D_t e L} \frac{F}{kT}\right), \quad (3.126)$$

mit  $F = V/L$  und  $n_0$  der intrinsischen, freien Ladungsträgerkonzentration.

## 3.6. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Transportmechanismen in niederdimensionalen Ladungsträgern diskutiert. Einen Schwerpunkt bildete die Beschreibung des resonanten Tunnelstroms über null- und zweidimensionale Zustände. Am Beispiel einer Doppelbarrierenstruktur wurden die Modelle des kohärenten und sequenziellen Tunnelstroms vorgestellt; hierbei wurden Effekte wie die dynamische Ladungsträgerakkumulation im Quantentopf berücksichtigt. In einem separaten Abschnitt wurde in den Magnetotransport bei Doppelbarrierenstrukturen eingeführt.

Nach einer kurzen Beschreibung zur Realisierung von lateralen und vertikalen

### 3. *Transport in Nanostrukturen*

Quantenpunktstrukturen wurde auf Besonderheiten des Transports von einzelnen Ladungsträgern in Quantenpunktstrukturen eingegangen. So wurde beispielsweise die Ursache der stufenförmigen Strom-Spannungs-Charakteristik, die so genannte Coulomb-Treppe, auf die Coulomb-Blockade zurückgeführt. Im Rahmen des Tunnel-Hamilton-Operators wurde eine theoretische Beschreibung der Strom-Spannungs-Kennlinie von Quantenpunktstrukturen hergeleitet. In einem separaten Abschnitt wurde der Einfluss äußerer Magnetfelder auf den Tunnelstrom durch Quantenpunktstrukturen untersucht. Hierbei wurden die beiden Standardgeometrien der Magnetfeldorientierung, senkrecht und parallel zum Strom, einzeln diskutiert.

Ein weiterer Abschnitt führte in den Hopping-Transport in Nanostrukturen ein. Der Transport durch Hüpfen mit variabler Sprunglänge, dem so genannten Variable-Range-Hopping wurde sowohl im Mott-Modell (ohne Wechselwirkung der Ladungsträger) als auch im Efros-Shklovskii-Modell (mit Coulomb-Wechselwirkung) vorgestellt. Der Einfluss moderater elektrischer Felder und Magnetfelder auf den Hopping-Transport wurde diskutiert. Der Abschnitt endete mit einer Einführung in die Grundbegriffe thermodynamischer Größen beziehungsweise Effekte.

Der letzte Abschnitt behandelte den raumladungsbegrenzten Transport in Halbleiterstrukturen. Die Mott-Guerney- oder Child-Relation wurde hergeleitet sowie die Änderungen dieser Relation auf Grund von Fallenzuständen diskutiert.

# 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen

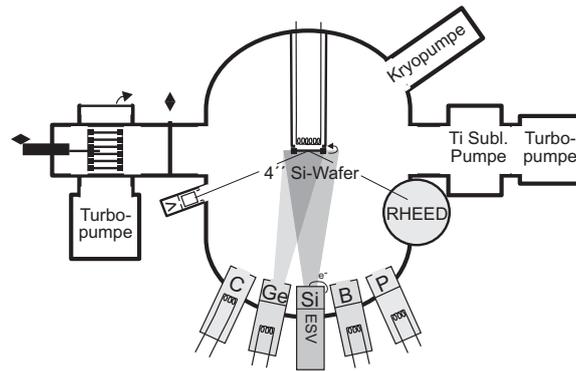
## 4.1. Epitaktisches Wachstum dünner Halbleiterschichten

Dünne Halbleiterschichten finden in vielen Bereichen von Forschung und Anwendung ein reges Interesse. Zur Herstellung von dünnen Halbleiterschichten existiert eine große Anzahl von Verfahren [103]. Im Bereich der Grundlagenforschung, bei der große Wachstumsraten eine untergeordnete Rolle spielen, ist die Molekularstrahlepitaxie (engl. **M**olecular **B**eam **E**pitaxy - MBE) am gebräuchlichsten. Bei der Molekularstrahlepitaxie werden Atome oder Moleküle aus einer Effusionszelle thermisch verdampft und scheiden sich epitaktisch auf einem einkristallinen Substrat ab. Um Verunreinigungen mit Fremdatomen zu vermeiden, wird die Molekularstrahlepitaxie im Ultrahochvakuum bei einem Umgebungsdruck im Bereich von  $10^{-10}$  mbar durchgeführt. Mit der Molekularstrahlepitaxie können einkristalline Schichten von nur wenigen Atomlagen und großer Grenzflächenschärfe erzeugt werden. Ein Schema einer Molekularstrahlepitaxie-Anlage ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

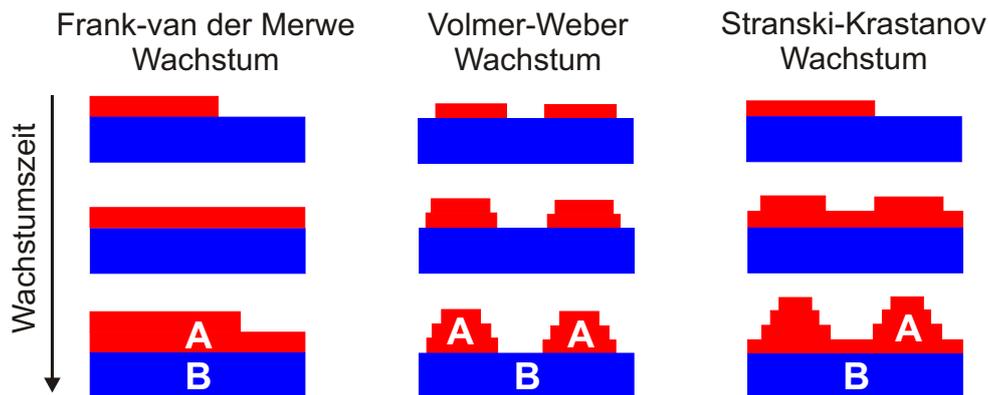
Die Molekularstrahlepitaxie ist ein bewährtes Epitaxieverfahren zur Herstellung von Heterostrukturen. Beim epitaktischen Wachstum zweier unterschiedlicher Materialien aufeinander (Heteroepitaxie) ist die Oberflächenenergie der beteiligten Materialien ein entscheidender Parameter, nach dem sich der Wachstumsmodus klassifizieren lässt. In der Heteroepitaxie wird zwischen drei Wachstumsmodi unterschieden: Ist die Oberflächenenergie des Substrats (B) größer als die des aufwachsenden Films (A), so benetzt der Film A das Substrat B und es tritt glattes, lagenweises Wachstum (engl. layer-by-layer growth) auf. Dieser Wachstumsmodus ist nach seinen Entdeckern benannt und heißt *Frank-van der Merwe-Wachstum* [108], siehe Abbildung 4.2. Ist die Oberflächenenergie des Substrats geringer als die des aufwachsenden Films, so wird das Substrat vom aufwachsenden Film nicht vollständig benetzt. Material A ordnet sich auf Material B so an, dass es möglichst wenig Oberfläche bedeckt. Es bilden sich dreidimensionale Material-Cluster auf dem Substrat. Man spricht vom *Vollmer-Weber-Wachstum* [109], siehe Abbildung 4.2.

Neben der Oberflächenenergie ist die Spannungsenergie auf Grund einer Gitterfehl-anpassung ein weiterer Wachstumsparameter. Ist die Gitterkonstante des aufwachsenden Materials größer als die des Substrats, so kristallisieren die ersten Monolagen des aufwachsenden Films mit einer dem Substrat ähnlichen Gitterkonstanten.

#### 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen

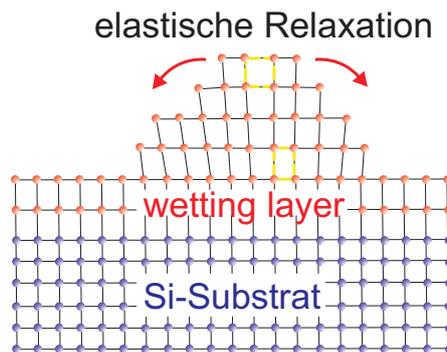


**Abbildung 4.1.:** Schema einer Silizium-Germanium Molekularstrahlepitaxie-Anlage [107]. Das Substrat ist auf einem rotierenden Halter angebracht und kann während der Wachstumsphase auf einige hundert Grad aufgeheizt werden, um eine genügend hohe Beweglichkeit der auftreffenden Atome zu erzielen. In Effusionszellen werden die Ausgangsstoffe durch elektrisches Heizen (z. B. Ge, C, B) oder bei Materialien mit hohem Schmelzpunkt (z. B. Si) durch Elektronenbombardement verdampft. Durch die Temperatur des Schmelzriegels ist der Teilchenfluss, also die Wachstumsgeschwindigkeit, regelbar und durch so genannte Shutter an- und abschaltbar. Mit Hilfe von Elektronenbeugung lässt sich in situ die kristallographische Struktur des epitaktisch gewachsenen Films analysieren.



**Abbildung 4.2.:** Wachstumsmodi in der Heteroepitaxie. Ist die Wechselwirkung zwischen dem Substrat und den Atomen der aufgebracht Lage stärker als zwischen den Adatomen, beginnt eine neue Lage erst dann zu wachsen, wenn die vorhergehende bereits vollständig ist. Es handelt sich um das Frank-van der Merwe-Wachstum. Beim Vollmer-Weber-Wachstum ist die entgegengesetzte Situation vorzufinden. Die Wechselwirkung der Atome der aufgebracht Lage untereinander ist größer als die zwischen aufgebracht Lage und Substrat. Es kommt zum Inselwachstum. Das Stranski-Krastanov-Wachstum setzt sich aus den vorangegangenen Wachstumsarten zusammen. Die Atome ordnen sich bis zu einer kritischen Schichtdicke lagenweise an. Beim Überschreiten der kritischen Dicke reißt der Film auf und Inselwachstum beginnt.

#### 4.1. Epitaktisches Wachstum dünner Halbleiterschichten



**Abbildung 4.3.:** Schematische Darstellung einer selbstorganisierten Nanostruktur. Wichtig beim Übergang vom glatten Wachstum zur Inselbildung ist die elastische Verspannung und deren Relaxation. Im Gegensatz zu pseudomorphen Schichten, die nur einen metastabilen Zustand darstellen und beim Überschreiten einer kritischen Dicke plastisch relaxieren, können die dreidimensionalen Inseln ihre Spannungsenergie durch elastische Relaxation abbauen. Die Spannungsrelaxation geschieht durch Vergrößerung des Gitterabstandes an den Inselkanten und in höheren Lagen. So kommt es zu einer schrittweisen Annäherung an den Volumenabstand.

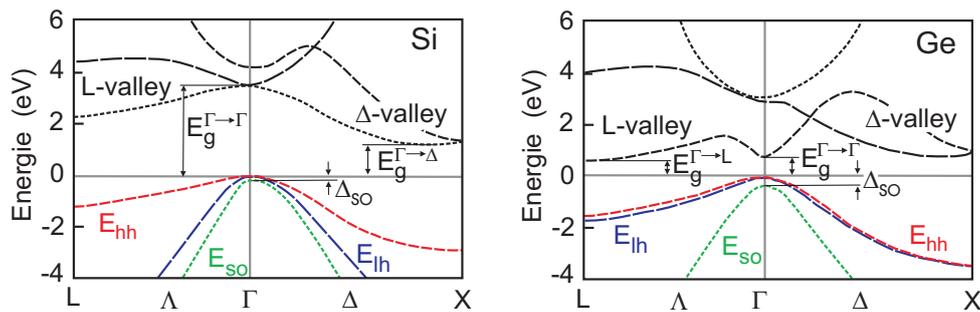
Da die Gitteranpassung parallel zur Grenzschicht des unverspannten Substrats erfolgt, spricht man von einem pseudomorphen Film (engl. wetting layer). Auf Grund des Poisson-Verhältnisses<sup>1</sup> erfolgt auch senkrecht zur Grenzschicht eine Gitteranpassung, die die auftretende laterale Verspannung kompensiert. Der aufgewachsene Film ist somit biaxial verspannt. Diese Spannungsenergie nimmt mit der Schichtdicke zu. Ab einer kritischen Filmdicke tritt eine Wachstumsinstabilität auf, bei der der geordnete, glatte Film energetisch ungünstig ist und aufreißt. Ein Übergang zum dreidimensionalen, zufällig verteilten Inselwachstum erfolgt. Hierbei bestimmen der Unterschied der Gitterkonstanten sowie die Wachstumstemperatur und Wachstumsraten die Form, Größe und Flächendichte der Inseln. Der Phasenübergang vom epitaktischen zum zufällig verteilten Inselwachstum wird *Stranski-Krastanov-Phasenübergang* [3] genannt. Der Wachstumsmodus heißt entsprechend *Stranski-Krastanov-Wachstum*, siehe Abbildung 4.2.

Die Inselbildung erlaubt den Gitterebenen des aufgewachsenen Materials, sich ihrem Volumenabstand anzunähern (elastische Relaxation, siehe Abbildung 4.3). Dies verringert die im Film gespeicherte elastische Energie. Andererseits kostet die Inselbildung durch die Vergrößerung der Oberfläche zusätzliche Oberflächenenergie. Dieses Wechselspiel von Erniedrigung der elastischen Energie und Vergrößerung der Oberflächenenergie ist die treibende Kraft beim Übergang vom glatten zum Inselwachstum.

Die zum Teil nur wenige Nanometer großen Inseln besitzen eine perfekte Kris-

<sup>1</sup>Das Poisson-Verhältnis  $\nu = -\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel}$  ist der Quotient aus Querkontraktion  $\varepsilon_{\perp}$  und Längsdehnung  $\varepsilon_{\parallel}$ . Die Dehnung ist als positiv definiert und die Stauchung als negativ. Das Poisson-Verhältnis enthält ein Minuszeichen, damit normale Materialien ein positives Verhältnis besitzen. Ähnlich wie das Youngsche Modul ist das Poisson-Verhältnis eine Materialeigenschaft.

## 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen



**Abbildung 4.4.:** Bandstruktur von Silizium und Germanium in der Nähe der Bandlücke [115].

tallstruktur ohne Kantendefekte oder Versetzungen. Für Ladungsträger sind die Inseln ideale Quantenpunktsysteme, da die Beweglichkeit der Ladungsträger in allen drei Raumrichtungen auf das Inselvolumen reduziert ist. Das Besondere bei dieser Art von Quantenpunktsystemen ist, dass sie ohne Zuhilfenahme von lithographischen oder Ätzverfahren erzeugt werden können. Die Inseln des Stranski-Krastanov-Phasenübergangs entstehen vollkommen selbstständig. Sie werden daher selbstorganisierte Inseln bzw. Quantenpunkte (engl. self-assembled Quantum dot - SAD) genannt.

## 4.2. Verspannte epitaktische Schichten: Silizium-Germanium Heterostrukturen

Im Folgenden werden die für Transportprozesse relevanten Größen der Silizium-Germanium Heteroepitaxie eingeführt. Zur Vertiefung sei auf die umfangreichen Arbeiten zur Silizium-Germanium Heteroepitaxie von Friedrich Schäffler [110], Oliver G. Schmidt [111], Bert Voigtländer [112], Karl Brunner [113] und Ulrich Denker [114] hingewiesen. Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich der Löcher-Transport studiert, so dass Details des Leitungsbandes nur am Rande betrachtet werden. Die elektronischen Eigenschaften des Valenzbandes stehen im Vordergrund.

### 4.2.1. Der Volumenkristall: Silizium und Germanium

Die am intensivsten untersuchten und am besten verstandenen Halbleiterbandstrukturen sind die der Elemente Silizium (Si) und Germanium (Ge). Sie gehören der IV. Hauptgruppe des Periodensystems an. Beide Elemente kristallisieren in der Diamantstruktur. Dies ermöglicht eine dreidimensionale kovalente Bindung, bei der jedes Atom von vier nächsten Nachbarn in tetraedrischer Konfiguration ( $sp^3$ ) umgeben ist. Die Diamantstruktur ist darstellbar durch zwei ineinander gestellte, kubisch flächenzentrierte Strukturen, die entlang der Raumdiagonalen verschoben sind. Die

## 4.2. Verspannte epitaktische Schichten: Silizium-Germanium Heterostrukturen

Bandstrukturen der beiden Elemente weisen viele Gemeinsamkeiten auf und werden daher hier gemeinsam behandelt. Abbildung 4.4 zeigt die Energiedispersion von Silizium und Germanium in der Nähe der Bandlücke  $E_g$ . Die Dispersionskurve  $E(\mathbf{k})$  des Leitungsbandes durchläuft mehrere Minima, wohingegen das Valenzband ein räumlich entartetes Maximum am  $\Gamma$ -Punkt, also bei  $\mathbf{k} = 0$  besitzt. Da die Minima des Leitungsbandes nicht im  $\Gamma$ -Punkt liegen, sind Silizium und Germanium indirekte Halbleiter. Die indirekte Bandlücke  $E_g^{\Gamma \rightarrow \Delta}$  von Silizium beträgt 1.11 eV, für Germanium ist  $E_g^{\Gamma \rightarrow L} = 0.66$  eV. Die direkten Bandlücken betragen im Silizium  $E_g^{\Gamma \rightarrow \Gamma} = 3.40$  eV und im Germanium  $E_g^{\Gamma \rightarrow \Gamma} = 0.80$  eV.

Die Valenzbandkante  $E_v$  ist im  $\Gamma$ -Punkt dreifach entartet. Der Verlauf der drei Bänder ist in Abbildung 4.4 mit  $E_{hh}$  für die schweren Löcher (engl. **heavy hole**),  $E_{lh}$  für den Verlauf der leichten Löcher (engl. **light hole**) und  $E_{so}$  für die auf Grund der Spin-Bahn-Kopplung Spin-abgespaltenen Löcher (engl. **spin split off hole**) angegeben. Nahe der Bandkante lässt sich die Energiedispersion  $E(\mathbf{k})$  in entarteter Störungsrechnung [25] ermitteln. Unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung ergibt sich für die Energiedispersion der beiden zusammenliegenden Schwer-Loch und Leicht-Loch Bänder [25, 39, 110]

$$E_{hh, lh}(\mathbf{k}) = E_v - \frac{\hbar^2}{2 m_0} \left[ Ak^2 \mp \sqrt{B^2 k^4 + C^2 (k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2)} \right], \quad (4.1)$$

wobei das Minuszeichen das Schwer-Loch Band und das Pluszeichen das Leicht-Loch Band beschreibt. Das um den Betrag der Spin-Bahn Aufspaltung  $\Delta_{so}$  (engl. **spin-orbit splitting**) gegenüber der Bandkante energetisch abgesenkte Band der Spin-abgespaltenen Löcher wird durch die Dispersion [110]

$$E_{so}(\mathbf{k}) = E_v - \Delta_{so} - \frac{\hbar^2}{2 m_0} Ak^2 \quad (4.2)$$

beschrieben. Die Konstanten  $A$ ,  $B$ , und  $C$  lassen sich nicht mehr im strengeren Sinn auf die effektive Masse zurückführen, da die Energiedispersion keine quadratische Funktion von  $\mathbf{k}$  ist. Die Valenzbänder sind demnach nicht parabolisch, sondern sie ändern ihre Krümmung in Abhängigkeit von der Kristallrichtung. Man bezeichnet sie deshalb als Bänder mit Verwerfungen. Die Isoenergieflächen  $E(\mathbf{k}) = \text{const.}$  haben in etwa die Gestalt von „ausgebeulten“ Würfeln; man spricht daher von gewölbten Energieflächen (engl. **warped surfaces**). In Abbildung 4.5 sind beispielhaft die isoenergetischen Flächen der Löcher im Silizium illustriert.

Mit den Konstanten  $A$ ,  $B$ , und  $C$  lassen sich die effektiven Loch-Massen in Wachstumsrichtung in Einheiten der Elektronenmasse  $m_0$  wie folgt ausdrücken [25, 110]:

$$m_z^{hh} = \frac{1}{-A + B} \quad (4.3)$$

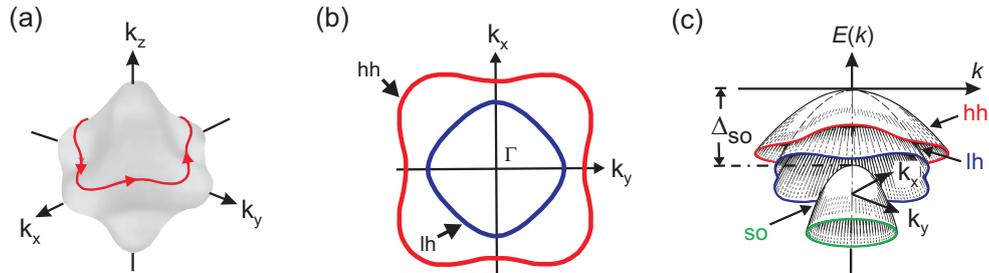
$$m_z^{lh} = \frac{1}{-A - B} \quad (4.4)$$

$$m_z^{so} = \frac{1}{-A}. \quad (4.5)$$

#### 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen

	Si	Ge
$\gamma_1$	4.285	13.38
$\gamma_2$	0.339	4.24
$\gamma_3$	1.446	5.69
$\kappa$	-0.42	3.41
$q$	0.01	0.06

**Tabelle 4.1.:** Luttinger-Parameter von Silizium und Germanium



**Abbildung 4.5.:** Isoenergieflächen der Löcher im Silizium

Der Zusammenhang der Parameter  $A$ ,  $B$  und  $C$  mit den in Kapitel 2.1.2 in Gleichung (2.19) genannten Luttinger-Parametern ergibt sich wie folgt [25]:

$$\gamma_1 = -A, \quad (4.6)$$

$$\gamma_2 = -B/2, \quad (4.7)$$

$$\gamma_3 = \sqrt{(B/2)^2 + \frac{1}{3}(C/2)^2}. \quad (4.8)$$

Die Werte für die effektiven Landé  $g$ -Faktoren der drei Loch-Bänder im Silizium- und Germanium-Volumenkristall lassen sich aus dem  $6 \times 6$  Hamilton-Operator der  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$  Theorie ableiten [116, 117, 118]. Die  $g$ -Faktoren sind richtungsabhängig. Die zwei ausgezeichneten Richtungen sind parallel und senkrecht zur Wachstumsrichtung ( $z$ -Richtung). In Wachstumsrichtung ergibt sich aus der Diagonalisierung des Operators (2.72) mit  $q = 0$

$$g_z^{\text{hh}} = -6 \kappa^L(0), \quad (4.9)$$

$$g_z^{\text{lh}} = -2 \kappa^L(0), \quad (4.10)$$

$$g_z^{\text{so}} = -4 \kappa^L(-\Delta) - 2, \quad (4.11)$$

dazu senkrecht

$$g_{\parallel}^{\text{hh}} = 0, \quad (4.12)$$

$$g_{\parallel}^{\text{lh}} = -4 \kappa^L(0) \quad (4.13)$$

$$g_{\parallel}^{\text{so}} = -4 \kappa^L(-\Delta) - 2. \quad (4.14)$$

## 4.2. Verspannte epitaktische Schichten: Silizium-Germanium Heterostrukturen

	Si	Ge
$g_z^{\text{hh}}$	2.52	-20.46
$g_z^{\text{lh}}$	0.84	-6.82
$g_z^{\text{so}}$	0.32	-15.64
$g_{\parallel}^{\text{hh}}$	0	0
$g_{\parallel}^{\text{lh}}$	1.68	-13.64
$g_{\parallel}^{\text{so}}$	0.32	-15.64

**Tabelle 4.2.:** Effektive Landé  $g$ -Faktoren, senkrecht und parallel zur Wachstumsrichtung.

	$A$	$B$	$ C $	$m_{\text{hh}}^*/m_0$	$m_{\text{lh}}^*/m_0$	$m_{\text{so}}^*/m_0$
Si	-4.26 (-4.38)	-0.63 (-1.00)	4.93 (4.80)	0.53	0.15	0.23
Ge	-13.27 (-12.35)	-8.63 (-8.26)	12.4 (12.07)	0.28	0.04	0.09

	Si	Ge
Gitterkonstante (nm)	0.5431	0.5657
elastische Module $C_{11}, C_{12}$ (Mbar)	1.66, 0.64	1.29, 0.48
Poisson-Verhältnis in $[001]$ -Richtung $\nu = C_{12}/(C_{11} + C_{12})$	0.278	0.273
dielektrische Konstante ( $\epsilon_r$ )	11.9	16.2
indirekte Bandlücke (eV)	1.11 ( $\Delta$ )	0.664 (L)
direkte Bandlücke (eV)	3.40	0.80
Spin-Bahn Aufspaltung (eV)	0.044	0.296
effektiver Landé $g$ -Faktor	s. Tab. 4.2	s. Tab. 4.2
Loch-Mobilität ( $\text{cm}^2 \text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ )	450	1900

**Tabelle 4.3.:** Wichtige Materialparameter von Silizium und Germanium

Der effektive  $g$ -Faktor in beliebiger kristallographischer Richtung  $\langle k l m \rangle$  lässt sich aus den  $g$ -Faktoren senkrecht und parallel zur Wachstumsrichtung ermitteln,

$$g^2 = g_z^2 \cos^2 \phi + g_{\perp}^2 \sin^2 \phi. \quad (4.15)$$

Hierbei ist  $\phi = \angle(\langle k l m \rangle, \langle 0 0 1 \rangle)$  der Winkel zwischen der Richtung  $\langle k l m \rangle$  und der Wachstumsrichtung  $z = \langle 0 0 1 \rangle$ . In Tabelle 4.2 sind die effektiven  $g$ -Faktoren von Silizium und Germanium zusammengefasst. Die Tabelle 4.3 zeigt die wichtigsten Materialparameter von Silizium und Germanium.

### 4.2.2. Der Silizium-Germanium Mischkristall

Silizium und Germanium lassen sich in jedem Mischungsverhältnis zu einer Legierung der Form  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$  mit einem Germaniumgehalt  $x$  im Bereich von 0 bis 1 (0% - 100%) herstellen. Die Legierung kristallisiert, wie die Volumenkristalle, in der Diamantstruktur. Unterhalb einer Germaniumkonzentration von 85% gleicht die

#### 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen

Bandstruktur des Silizium-Germanium-Mischkristalls der von Silizium, mit Leitungsbandminima im  $\Delta$ -Punkt. Ab einem Germaniumanteil von 85% liegen die Minima des Leitungsbandes im  $L$ -Punkt und die Bandstruktur ähnelt der reinem Germaniums.

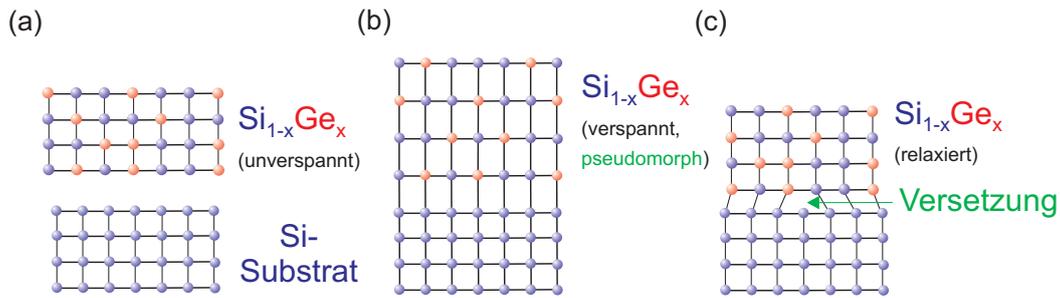
Nach dem Vegard-Gesetz lässt sich die Gitterkonstante des Mischkristalls linear aus den Gitterkonstanten des reinen Siliziums  $a_{\text{Si}} = 0.543 \text{ nm}$  und Germaniums  $a_{\text{Ge}} = 0.566 \text{ nm}$  interpolieren<sup>2</sup> [110, 113]

$$a_{\text{SiGe}}(x) = a_{\text{Si}} + (a_{\text{Ge}} - a_{\text{Si}}) x = 0.543 + 0.023 x \text{ nm.} \quad (4.16)$$

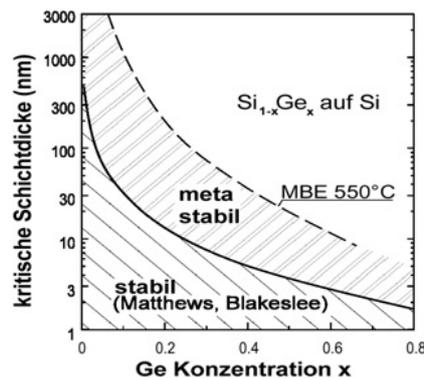
Hierbei gibt  $x$  die Germaniumkonzentration in der Legierung an. Auf Grund der vom Siliziumsubstrat unterschiedlichen Gitterkonstanten der Legierung und der daraus resultierenden Gitterfehlanspassung beim Wachstum kristallisieren die ersten Monolagen Silizium-Germanium pseudomorph auf dem Siliziumsubstrat. Die aufgewachsene Silizium-Germaniumschicht ist somit biaxial verspannt. Parallel zur Grenzschicht passt sich die Gitterkonstante des Silizium-Germaniums der Gitterkonstante von Silizium an,  $a_{\text{SiGe},\parallel}^{\text{verspannt}} = a_{\text{Si}}$ . Der Betrag der zugehörigen lateralen Verspannung  $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = (a_{\text{Si}} - a_{\text{SiGe}})/a_{\text{SiGe}} \approx -0.04 x$  [113] nimmt näherungsweise linear mit der Germaniumkonzentration zu. Das Minuszeichen zeigt, dass die Gitterkonstante zur Anpassung gestaucht wurde. Bei  $\varepsilon_{\parallel}$  handelt es sich also um eine Druckspannung (engl. compressive strain). Senkrecht zur Grenzschicht wird die Gitterkonstante auf Grund des Poisson-Verhältnisses gedehnt. Die Gitterkonstante in Wachstumsrichtung erfährt eine Zugspannung (engl. tensile strain)  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{zz} = -2 C_{12}/C_{11} \varepsilon_{\parallel} = -0.77\varepsilon_{\parallel} \approx 0.03 x$ , [113] die ebenfalls eine lineare Abhängigkeit von der Germaniumkonzentration in der Legierung zeigt. Die in der verspannten Schicht gespeicherte elastische Energie wächst linear mit der Schichtdicke. Ab einer gewissen maximalen Schichtdicke setzen plastische Spannungsrelaxationsprozesse ein, bei der Versetzungen entstehen. Grundsätzlich sind auch elastische Spannungsrelaxationen möglich, bei denen es zu einem Aufräumen der Oberfläche beziehungsweise zur Inselbildung kommt. Bei sehr kleinen Wachstumsraten ist auch ein Stranski-Krastanov Phasenübergang möglich. Das Verhalten bei inelastischen Spannungsrelaxationen ist in Abbildung 4.6 illustriert. Die so genannte kritische Schichtdicke der Silizium-Germaniumschicht hängt entscheidend von der Germaniumkonzentration der Legierung ab. Dies ist insofern verständlich, da hierdurch die Gitterkonstante beziehungsweise die Spannungsfelder beeinflusst werden. Matthews und Blakeslee berechneten [120, 121] auf der Basis mechanischer Gleichgewichtszustände den Verlauf der kritischen Schichtdicke von Silizium-Germanium auf einem Siliziumsubstrat in Abhängigkeit von der Germaniumkonzentration. In Abbildung 4.7 ist der von Matthews und Blakeslee berechnete Verlauf der kritischen Schichtdicke in Schwarz eingezeichnet. Untersuchungen der Versetzungsdichte an gewachsenen Silizium-Germaniumschichten zeigen jedoch, dass die von Matthews und Blakeslee berechneten kritischen Schichtdicken für das

<sup>2</sup>Experimentelle Untersuchungen an unverspannten Silizium-Germanium-Kristallen zeigen eine Abhängigkeit der Gitterkonstanten von der Germaniumkonzentration in der Form [119]:  $a_{\text{SiGe}}(x) = 0.5431 + 0.2 x + 0.027 x^2 \text{ nm}$ .

## 4.2. Verspannte epitaktische Schichten: Silizium-Germanium Heterostrukturen



**Abbildung 4.6.:** Silizium-Germanium-Heteroepitaxie. Für die Deformation des Gitters wird eine bestimmte Energie benötigt, die mit wachsender Schichtdicke zunimmt. Ab einer kritischen Schichtdicke übersteigt die zur elastischen Deformation benötigte Energie jenen Wert, der ausreicht, um Versetzungen zu erzeugen. Es setzt die plastische Relaxation ein und das aufwachsende Gitter wird durch die Bildung von Versetzungen an das Gitter der Unterlage angepasst. Gitteranpassung, a) zwei kubische Gitter mit unterschiedlichen Gitterkonstanten, b) Gitteranpassung durch elastische Deformation, c) Gitteranpassung durch plastische Deformation und Einbau von Versetzungen



**Abbildung 4.7.:** Kritische Schichtdicke als Funktion der Germanium-Konzentration in der  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$ -Legierung. Die untere Kurve [120, 121] gibt das theoretische Limit im thermischen Gleichgewicht an. Die experimentell bestimmte obere Kurve grenzt das Gebiet metastabiler Schichten ein.

Entstehen von Versetzungen durchaus nicht zwingend sind. Es lassen sich glatte, verspannte Schichten mit Dicken oberhalb der kritischen Schichtdicke wachsen, die jedoch nicht temperaturstabil sind und bei thermischen Beanspruchungen inelastisch relaxieren können. Diese Schichten gelten als metastabil. People und Bean [122] konnten dieses Verhalten durch rein energetische Betrachtung erklären: Der von Matthews und Blakeslee berechnete Verlauf der kritischen Schichtdicke ist eine untere Grenze für das Einsetzen von plastischen Relaxationen. In ihrem Modell sind keine Prozesse, die die Bildung von Versetzungslinien behindern, berücksichtigt. Erforderliche Schwellenergien und Wechselwirkungen von Gitterdefekten wurden vernachlässigt. Das Modell von People und Bean berücksichtigt diese Prozesse und

#### 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen

liefert gute Übereinstimmungen mit den experimentellen Befunden. Das Modell liefert zudem eine obere Grenze, bei der die Schichten grundsätzlich relaxiert sind.

### Bandverlauf

Die elektronischen Eigenschaften der Silizium-Germaniumlegierung, insbesondere die Bandlücke, die kleiner ist als im reinen Silizium, lassen sich durch den Germaniumgehalt variieren (Bandgap engineering). Die Abbildung 4.8 (a) zeigt den Verlauf der Energielücke für verspannte und unverspannte Silizium-Germaniumlegierungen in Abhängigkeit vom Germaniumgehalt der Legierung. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Verspannung einen entscheidenden Einfluss auf die Bandlücke hat. In theoretischen Betrachtungen zur Auswirkung der vom Germaniumgehalt abhängigen Spannungsfelder auf die Silizium-Germanium-Bandstruktur, konnte People<sup>3</sup> [122, 124, 125] zeigen, dass Spannungsfelder Energiezustände im Leitungs- und Valenzband verschieben und die Entartung in den Bändern aufheben können. Im Rahmen der selbstkonsistenten Dichte-Funktional-Theorie unter Einbeziehung von Spannungsfeldern berechneten van der Walle und Martin [126] die Bandkantensprünge (engl. band offsets) in Silizium-Germanium-Heterostrukturen. Die Analysen von van der Walle und Martin sowie empirische Pseudopotenzial-Rechnungen von Rieger und Vogl [127] zeigen, dass der Verlauf des Mittelwerts des Valenzbandkantensprungs  $\Delta E_v^{\text{av}}$  zwischen Valenzbandkante des unverspannten Substrats<sup>4</sup> und der des verspannten Films nur schwach von der Verspannung abhängt und linear mit der Germaniumkonzentration  $x$  im Film variiert [127],

$$\Delta E_v^{\text{av}} = (x - y) (0.47 - 0.006 y) \text{ eV}. \quad (4.17)$$

Ausgehend vom mittleren Valenzbandkantensprung  $\Delta E_v^{\text{av}}$  können die Verläufe aller Bandkanten der Leitungs- und Valenzbänder beschrieben werden, indem die Korrekturen durch Spin-Bahn-Aufspaltung, Bandlücken und Deformationspotenziale für das entsprechende Band zu  $\Delta E_v^{\text{av}}$  addiert werden. Eine biaxiale Verspannung lässt sich formal durch eine hydrostatische Verspannung ( $2\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}$ ) und eine uniaxiale Verspannung ( $\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel}$ ) in  $[0 \ 0 \ 1]$  Richtung ausdrücken. Die beiden Spannungskomponenten bewirken einerseits eine energetische Verschiebung der Bänder beziehungsweise eine Aufhebung der Entartung der Bänder und somit eine Aufspaltung. Die hydrostatische Verspannung verschiebt die Bandkanten [113, 128]

$$\Delta E_v^{\text{av}} = a_v(2\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}) \quad (4.18)$$

<sup>3</sup>Die Arbeit von People basiert auf Überlegungen von Bir und Pikus [123]

<sup>4</sup>Hier wurde allgemein ein unverspanntes  $\text{Si}_{1-y}\text{Ge}_y$ -Substrat angeführt. Für  $y = 0$  erhält man ein unverspanntes Siliziumsubstrat.

## 4.2. Verspannte epitaktische Schichten: Silizium-Germanium Heterostrukturen

mit  $a_v$ , dem hydrostatischen Deformationspotenzial des Valenzbandes.

Eine uniaxiale Verspannung führt zu einer Aufspaltung der Bänder [110, 129]

$$\Delta E_{hh} = \frac{1}{3}\Delta_{so} - \frac{1}{2}\delta E \quad (4.19)$$

$$\Delta E_{lh} = -\frac{1}{6}\Delta_{so} + \frac{1}{4}\delta E + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_{so}^2 + \Delta_{so}\delta E + \frac{9}{4}\delta E^2} \quad (4.20)$$

$$\Delta E_{so} = -\frac{1}{6}\Delta_{so} + \frac{1}{4}\delta E - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_{so}^2 + \Delta_{so}\delta E + \frac{9}{4}\delta E^2} \quad (4.21)$$

mit  $\delta E = 2b(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{\parallel})$  und  $b$ , dem uniaxialen Deformationspotenzial des Valenzbandes. In Abbildung 4.8 (b) sind die Auswirkungen einer hydrostatischen beziehungsweise uniaxialen Deformation auf den Bandverlauf skizziert.

Unter Verwendung von Gleichung (4.17) ist die Abhängigkeit des mittleren Valenzbandsprungs von der Germaniumkonzentration eines pseudomorph auf unverspanntem Silizium ( $y = 0$ ) aufgewachsenen Silizium-Germanium-Films durch die Beziehung  $\Delta E_v^{av} = 0.47 x$  eV gegeben. Der Valenzbandsprung  $\Delta E_v$  zwischen den energetisch am höchsten liegenden Valenzbändern des Substrats und Films lässt sich unter Berücksichtigung der Aufspaltung der Valenzbänder durch folgende Gleichung annähern [129]

$$\Delta E_v = \Delta E_v^{av} + \max\{\Delta E_{hh}, \Delta E_{lh}, \Delta E_{so}\} = 0.71 x \text{ eV}. \quad (4.22)$$

In der Regel ist das Schwer-Loch Band (hh) das energetisch am höchsten verlaufende. Somit ist der Verlauf von  $\Delta E_{hh}$  durch Gleichung (4.22) gegeben.

Beim verspannten Silizium-Germanium auf unverspanntem Silizium ist die Größe der indirekten Bandlücken ( $\Gamma \rightarrow \Delta$ ) abhängig von der Germaniumkonzentration [129, 130],

$$E_g^{\Gamma \rightarrow \Delta}(x, 4.2 \text{ K}) = 1.17 - 0.896 x + 0.4396 x^2 \text{ eV} \quad (x < 0.4). \quad (4.23)$$

Die Temperaturabhängigkeit der Bandlücke zeigt ein vergleichbares Verhalten wie im reinen Silizium, [103]

$$E_g(x, T) = E_g(x, 0 \text{ K}) - \frac{4.72 \times 10^{-4} T^2}{T + 636}. \quad (4.24)$$

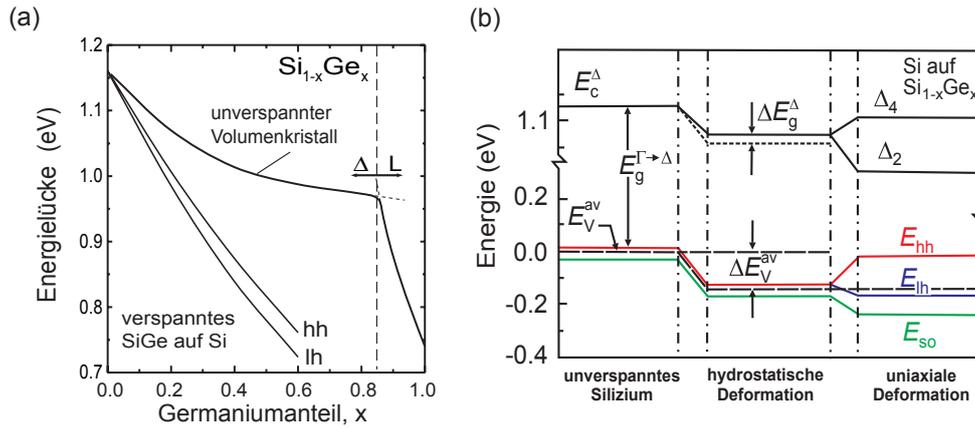
Eine in Silizium eingebettete pseudomorphe Silizium-Germaniumschicht besitzt einen Type II Bandverlauf [131]. Die Ladungsträger können daher nicht in der gleichen Schicht lokalisiert werden. Allerdings lässt sich der Leitungsbandkantenprung  $\Delta E_c$  für die meisten Zwecke vernachlässigen, wie aus Abbildung 4.9 zu entnehmen ist.

### Dielektrizitätskonstante

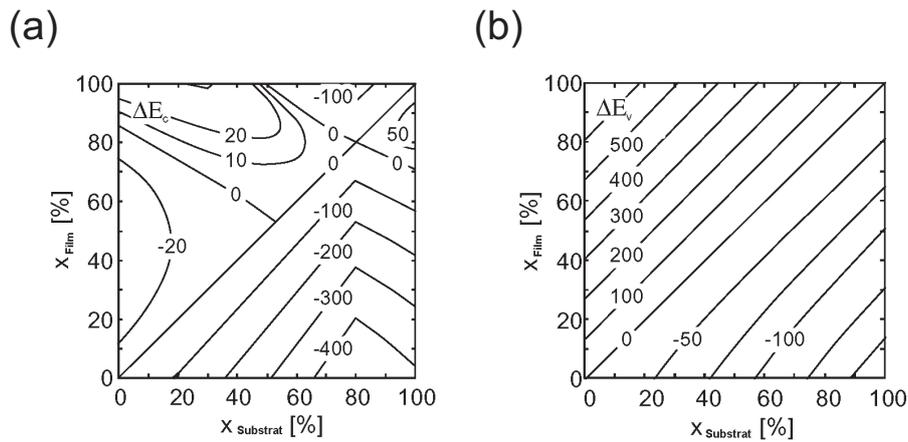
Die Dielektrizitätskonstante der Silizium-Germaniumlegierung  $\epsilon(x)$  lässt sich mit Hilfe der Clausius-Mossotti Gleichung [132]

$$\frac{\epsilon(x) - 1}{\epsilon(x) + 2} = (1 - x) \frac{\epsilon_{Si} - 1}{\epsilon_{Si} + 2} + x \frac{\epsilon_{Ge} - 1}{\epsilon_{Ge} + 2} \quad (4.25)$$

#### 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen



**Abbildung 4.8.:** (a) Bandlücke als Funktion des Germaniumgehalts in der  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$ -Legierung. Die obere Kurve zeigt den Verlauf für unverspannte Legierungen. Für  $x = 0.85$  beobachtet man einen Übergang zwischen einer Silizium-ähnlichen (Leitungsbandminimum im  $\Delta$ -Punkt) und einer Germanium-ähnlichen Bandstruktur (Leitungsbandminimum im  $L$ -Punkt). Die beiden anderen Kurven beziehen sich auf pseudomorphe  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$ -Schichten, die auf unverspanntes Silizium-Substrat gewachsen wurden. Dies führt zu einem Aufspalten des Valenzbandes. (b) Auswirkung der hydrostatischen und uniaxialen Verspannung auf das Valenz- und Leitungsband. Quelle: [110]



**Abbildung 4.9.:** Kontur-Darstellung des Leitungsband- beziehungsweise Valenzband-Offsets an der  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x/\text{Si}_{1-x_s}\text{Ge}_{x_s}$ -Grenzschicht. Quelle: [110]

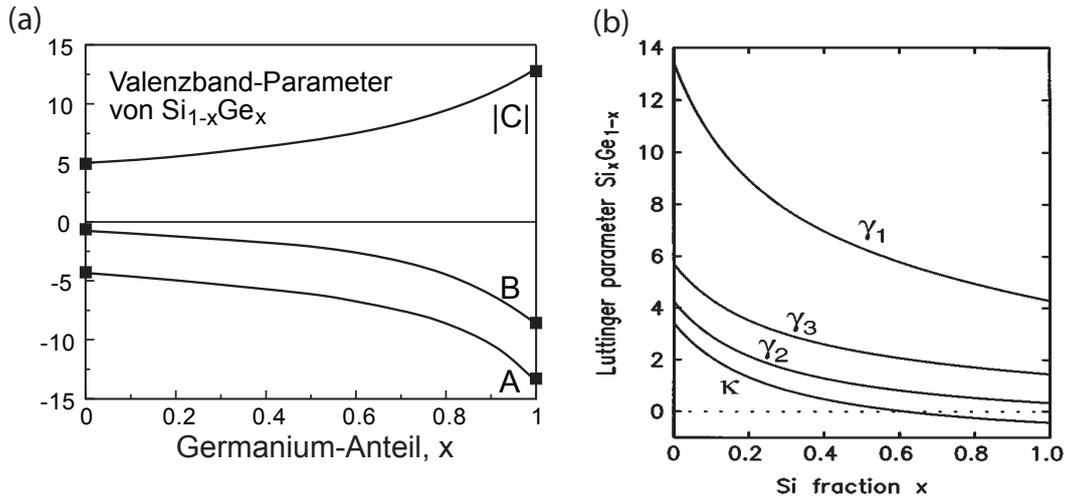
aus den Dielektrizitätskonstanten von Silizium und Germanium berechnen. Gleichung (4.25) vereinfacht sich zu

$$\epsilon(x) = \frac{2(A+B)+1}{1-(A+B)} \quad (4.26)$$

mit

$$A = (1-x) \frac{\epsilon_{\text{Si}} - 1}{\epsilon_{\text{Si}} + 2} \quad \text{und} \quad B = x \frac{\epsilon_{\text{Ge}} - 1}{\epsilon_{\text{Ge}} + 2}. \quad (4.27)$$

## 4.2. Verspannte epitaktische Schichten: Silizium-Germanium Heterostrukturen



**Abbildung 4.10.:** (a) Verlauf der Silizium-Germanium Valenzband-Parameter  $A$ ,  $B$  und  $C$  als Funktion der Germanium-Konzentration [110]. (b) Verlauf der entsprechenden Luttinger-Parameter [138].

Eine Obergrenze für die Werte der Dielektrizitätskonstante der Legierung ist durch eine lineare Interpolation der Dielektrizitätskonstanten beider Elemente möglich [133, 134]

$$\epsilon(x) = 11.9 (1 + 0.36 x). \quad (4.28)$$

### Zustandsdichte

Die Zustandsdichte des Valenzbandes des Silizium-Germanium-Mischkristalls ist beträchtlich kleiner als im Silizium. Manku und Nathan [135, 136] haben Dispersionsrelationen  $E(\mathbf{k})$  für verspanntes Silizium-Germanium berechnet. Ihre Rechnung ergab, dass die Zustandsdichte auf Grund der Reduktion der Loch-Masse signifikant kleiner ist. Beispielsweise reduziert sich die Zustandsdichte im Mischkristall im Vergleich zum reinen Silizium fast um den Faktor drei bei einem Germaniumanteil von 30%. Die Rechnungen von Manku und Nathan werden durch experimentelle Untersuchungen [137] unterstützt. So konnte beispielsweise in  $p$ -dotierten  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$ -Strukturen ein Ausfrieren von Löchern bei höheren Temperaturen als in Strukturen aus reinem Silizium gleicher Dotierung beobachtet werden. Des Weiteren wurde in den  $\text{Si}_{1-x}\text{Ge}_x$ -Strukturen eine höhere Mobilität gemessen.

### Effektive Massen

Die effektiven Loch-Massen in verspannten Silizium-Germanium-Heterostrukturen berechnet man am besten im Rahmen einer Sech-Band  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Methode (drei Valenzbänder + Spin) [127], die die Spin-Bahn Kopplung berücksichtigt. Der Effekt von Verspannungen lässt sich über Deformationspotenziale als Störung einführen

#### 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen

[139, 140]

$$m_{\text{hh}}^{\text{SiGe}}/m_0(x) = -0.1432 x^3 + 0.3618 x^2 - 0.3669 x + 0.2534 \quad (4.29)$$

$$m_{\text{lh}}^{\text{SiGe}}/m_0(x) = -2.8369 x^3 + 4.6844 x^2 - 2.8700 x + 0.8956 \quad (4.30)$$

In Abbildung 4.10 ist der Verlauf der Valenzbandparameter beziehungsweise Luttinger-Parameter als Funktion des Germaniumgehalts der Legierung dargestellt.

### 4.3. Stranski-Krastanov Wachstum von Germanium auf Silizium (0 0 1)

Germanium wächst auf Silizium im Stranski-Krastanov-Wachstumsmodus. Die ersten Monolagen Germanium kristallisieren pseudomorph auf dem Siliziumsubstrat und bilden eine Benetzungsschicht. Ab zirka 4.5 Monolagen reißt der glatte Film auf und es entstehen zufällig verteilte Germanium-Inseln. Abhängig von der Substrattemperatur existieren drei unterschiedliche Inseltypen: Bei Substrattemperaturen oberhalb von 600°C können sich entweder kugelabschnittsförmige Domes [141, 142] oder  $\{1\ 0\ 5\}$  facettierte Pyramiden mit quadratischer Grundfläche [143] bilden. Beide Inselnformen können reversibel ineinander übergehen [114]. Typischerweise liegt der Durchmesser der Inseln im Bereich von 50 nm bis 300 nm [144].

Der dritte Inseltyp entsteht bei Substrattemperaturen im Bereich von 350°C bis 550°C. Diese Inseln sind im Vergleich zu den erstgenannten deutlich kleiner und werden Hut-Cluster [141, 145] genannt.

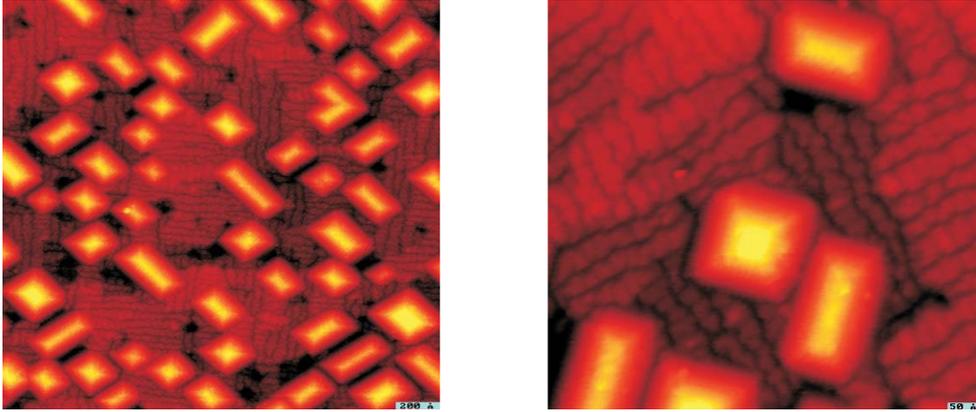
Im Rahmen dieser Arbeit wurden ausschließlich Proben mit Hut-Cluster-Inseln gewachsen. Im weiteren Verlauf wird daher nur auf Eigenschaften von Hut-Clustern Bezug genommen.

#### 4.3.1. Strukturelle Eigenschaften von Hut-Clustern

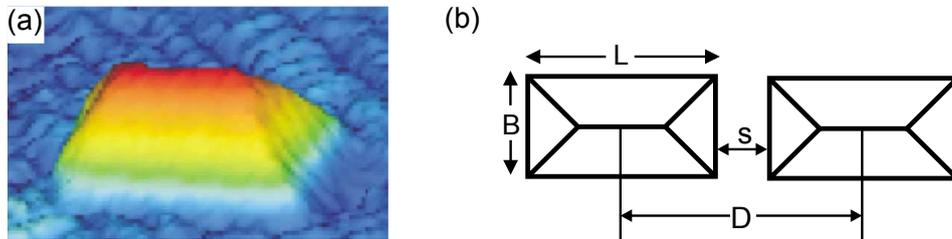
Bei der Nukleation von Hut-Clustern bilden sich anfangs Pyramiden mit quadratischer Grundfläche und einer Kantenlänge von zirka 10 nm bis 15 nm. Die Oberfläche der Hut-Cluster ist  $\{1\ 0\ 5\}$  facettiert. Bei anhaltender Germaniumzufuhr geht die quadratische Grundfläche der Hut-Cluster in eine rechteckige über. Ihre Form ähnelt hierdurch der Gestalt von Walmdächern. Typischerweise haben die Hut-Cluster eine Breite  $B$  von 10 nm bis 15 nm und besitzen ein Längenzu-Breite-Verhältnis von  $L:B = 3:1$  [112]. Die durchschnittliche Inselhöhe  $H$  beträgt  $1.0\text{ nm} \pm 20\%$ . Hut-Cluster besitzen ein selbstlimitierendes Wachstumsverhalten [141]. Das bedeutet, dass große Inseln deutlich langsamer als kleine wachsen. Durch dieses Verhalten ist eine gewisse Inselgrößen-Homogenität sichergestellt. Die Standardabweichung  $\sigma$  der mittleren Inselgröße  $\langle L \rangle$  liegt im Bereich von  $\sigma/\langle L \rangle \sim 0.5 - 0.9$  [112, 144, 147]. Die Fluktuation in der mittleren Inselgröße ist normalverteilt,

$$w(L) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{L-\langle L \rangle}{\sigma}\right)^2}. \quad (4.31)$$

### 4.3. Stranski-Krastanov Wachstum von Germanium auf Silizium (0 0 1)



**Abbildung 4.11.:** Rastertunnelmikroskopische Aufnahmen von nicht überwachsenen Hut-Clustern auf Silizium. Der linke Bildausschnitt ist  $200 \text{ nm} \times 180 \text{ nm}$ , der rechte  $55 \text{ nm} \times 55 \text{ nm}$  groß. [146]

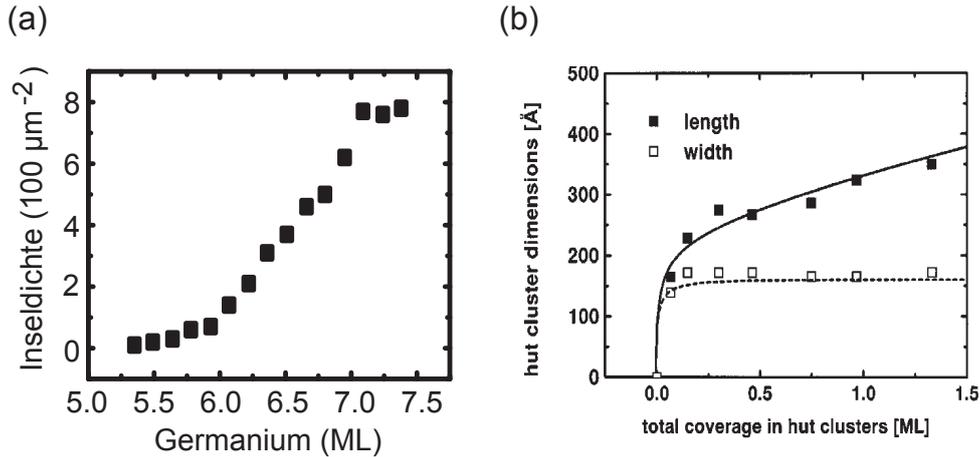


**Abbildung 4.12.:** Hut-Cluster. (a) Rastertunnelmikroskopische Aufnahme eines Hut-Clusters [112]. (b) Aufriss zweier Hut-Cluster.

Aus den Fluktuationen der Inselgröße ergeben sich Fluktuationen im Energieabstand:  $w(E) \propto w(L)(dE/dL)^{-1}$ . Unter der Voraussetzung, dass der Energieabstand mit wachsender Inselgröße im Verhältnis  $1/L^\gamma$  schrumpft, ergibt sich folgende Beziehung:  $w(E) \propto w(L)/E^{(1+\gamma)/\gamma}$  mit  $\gamma$  als Fit-Parameter. Ein weiterer Effekt dieses selbstlimitierenden Wachstums ist, dass die Insel-Flächendichte  $\rho$  entscheidend von der deponierten Germaniummenge abhängt [147]. In Abbildung 4.13 ist die Abhängigkeit der Insel-Flächendichte von der Germaniumdeposition dargestellt. Unterhalb einer Germaniumschichtdicke von etwa 6 Monolagen ist die Flächendichte relativ niedrig im Bereich von  $1 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ . Ab 6 Monolagen steigt die Inseldichte stark an. Die Dichte nimmt annähernd linear mit der Germanium-Deposition zu und erreicht bei etwa 7 Monolagen Germanium die Sättigung. Die maximale Insel-Flächendichte ist bei  $8 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  erreicht. Oberhalb von 7 Monolagen bilden sich großflächige Material-Cluster mit Versetzungen [141]. Der mittlere Abstand der Inselzentren  $d$  ergibt sich aus der Inseldensität wie folgt:

$$d \sim 1/\sqrt{\rho}. \quad (4.32)$$

#### 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen



**Abbildung 4.13.:** (a) Hut-Cluster Flächendichte als Funktion der Anzahl von Germanium Monolagen [114]. (b) Laterale Ausdehnung der Hut-Cluster als Funktion der Germanium Monolagen [112].

Hieraus lässt sich ein mittlerer Inselabstand

$$s = d - \langle L \rangle \quad (4.33)$$

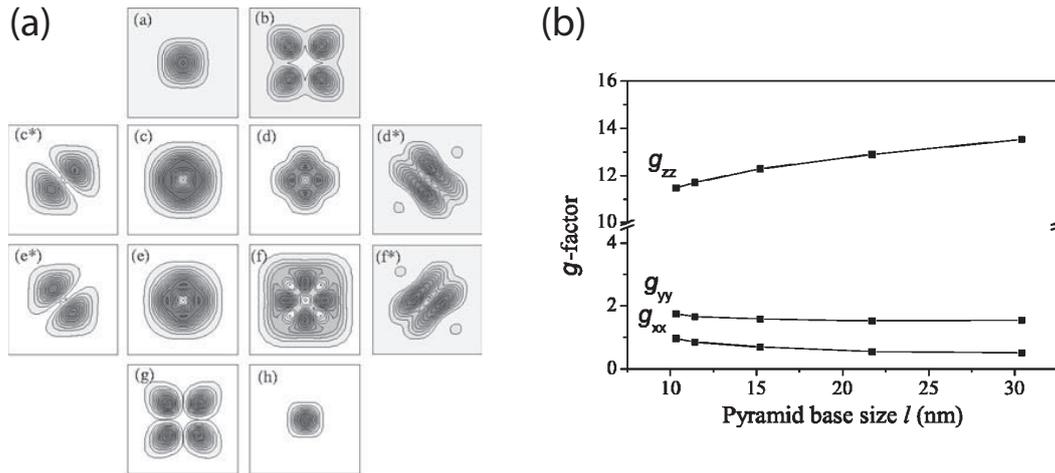
abschätzen.

#### 4.3.2. Elektronische Eigenschaften

Hut-Cluster in einer Silizium-Matrix besitzen einen Type-II Bandkantenverlauf [149]. Der mittlere Bandkantenprung zwischen der Silizium und der Germanium-Valenzbandkante beträgt  $0.84 \pm 0.005$  eV. Das Schwer-Loch Band liegt energetisch am höchsten und bildet die Valenzbandkante. Die Bandkantenprünge zwischen der Siliziumumgebung und den Germanium Hut-Clustern definiert ein dreidimensionales Einschlusspotential, in dem Löcher lokalisiert werden können. Auf Grund des selbstorganisierten Wachstums der Hut-Cluster spricht man daher auch von ihnen als selbstorganisierte Quantenpunkte.

Zur Berechnung der Eigenzustände der Hut-Cluster ist es notwendig, den Einfluss von Verspannungen auf den Bandverlauf zu kennen. Dazu benötigt man genaue Kenntnisse über die Deformationspotenziale [150]. Zudem sollte der Potenzialverlauf nicht starr, sondern selbstkonsistent unter Einbeziehung der durch die Ladungsträger erzeugten elektrischen Felder, das bedeutet in Hartree Näherung [149, 151] berechnet werden. Eine weitere Verbesserung erhält man, wenn zur Berechnung der Eigenzustände die Wechselwirkungen der einzelnen Bänder mit berücksichtigt werden. Hierfür benutzt man die  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Methode [32, 152].

Die Anzahl der Arbeiten, die explizite Eigenzustände von Löchern in Germanium-Quantenpunkten untersuchen, ist überschaubar. Für pyramidenförmige Germanium-Quantenpunkte sind von Dvurechenskii und Yakimov [149, 151]



**Abbildung 4.14.:** (a) Kontur-Darstellung der Wellenfunktion von  $|\frac{3}{2}\rangle$ - und  $|\frac{1}{2}\rangle$ -Zuständen für die ersten vier Niveaus im Quantenpunkt: Grundzustand hh-(a), lh-(b); erster angeregter Zustand hh-(c), lh-(d); zweiter angeregter Zustand hh-(e), lh-(f) und die dritten angeregten Zustände hh-(g), lh-(h). Die Darstellungen mit dem (...) entsprechen der Superposition des ersten und zweiten angeregten Zustandes:  $(1/\sqrt{2})[|\psi_1\rangle \pm |\psi_1\rangle \exp(i\phi)]$ . Hierdurch wird der  $p$ -ähnliche Charakter unterstrichen. (c\*), (d\*) entsprechen der Superposition unter Verwendung des Pluszeichens, (e\*) und (f\*) der des Minuszeichens. (b)  $g$ -Faktor des Grundzustandes eines Germanium-Quantenpunktes als Funktion der lateralen Ausdehnung. Der Quantenpunkt besitzt eine Höhe von 1.5 nm. Quelle: [148]

sowie von Nenashev und Dvurechenskii [148] Simulationen in Effektivmassennäherung durchgeführt worden. In den Rechnungen wurde für die schweren Löcher eine effektive Masse  $m_{\parallel}^* = 0.39m_0$  für die Komponente in der Wachstumsebene und  $m_z^* = 0.2$  für die Masse in Wachstumsrichtung angesetzt. Der Schwerpunkt der Rechnungen galt der Untersuchung des  $g$ -Faktors. Insbesondere wurde die Größe des  $g$ -Faktors als Funktion der lateralen Ausdehnung der Quantenpunkte untersucht. Für sehr breite Quantentröge berechnet sich der Loch- $g$ -Faktor wie im Volumenmaterial:  $g_z = 6\kappa$ ,  $g_{\parallel} = 0$  bei schweren Löchern und  $g_z = 2\kappa$ ,  $g_{\parallel} = 4\kappa$  bei leichten Löchern.  $g_z$ ,  $g_{\parallel}$  sind die Komponenten des effektiven  $g$ -Faktor-Tensors für eine Magnetfeldorientierung senkrecht beziehungsweise parallel zur Wachstumsebene ( $x$ - $y$ -Ebene),  $\kappa$  ist ein Luttinger-Parameter, siehe Tabelle 4.1. In schmalen Quantentöpfen führt die Unbestimmtheit in der  $k_z$ -Komponente des Wellenvektors zu einer Änderung des Leicht-Loch- $g$ -Faktors, auf Grund des Mischens von Leicht-Loch- und Split-Off-Zuständen [123]. Der  $g$ -Faktor der schweren Löcher bleibt hierbei unverändert. Bei sehr dünnen Quantenfilmen ist der  $g$ -Faktor durch die Materialeigenschaften des umgebenden Barrierenmaterials bestimmt. In einem Quantenpunkt ist die Wellenfunktion sowohl in Wachstumsrichtung als auch in der Wachstumsebene quantisiert. Dies führt zu einer Modifikation des  $g$ -Faktors, da nun  $k_x$ ,  $k_y$  unbestimmt sind, was ein starkes Vermischen [123] der leichten und schweren Löcher zur Folge hat. Das Vermischen resultiert letztlich aus den Spannungsfeldern  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  im Quantenpunkt. Wenn die Zeeman-Energie im Vergleich zur Raum-

#### 4. Selbstorganisierte Nanostrukturen

quantisierung klein ist, hängt der  $g$ -Faktor nur von der Richtung des Magnetfeldes ab und lässt sich in erster Ordnung Störungstheorie entwickeln:

$$|g| = 2\sqrt{|\langle \psi | \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\text{QD}} | \psi \rangle|^2 + |\langle \psi | \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\mu}_{\text{QD}} | \psi^* \rangle|^2}, \quad (4.34)$$

mit  $\psi, \psi^*$  den Kramer-Doublets,  $\mathbf{e}$  dem Einheitsvektor in Magnetfeldrichtung und  $\boldsymbol{\mu}_{\text{QD}}$ , dem magnetischen Moment des Quantenpunktes. Zur Berechnung des Matrixelementes von  $\boldsymbol{\mu}_{\text{QD}}$  müssen die Wellenfunktionen  $\psi, \psi^*$  bestimmt werden. Nenashev *et al.* [148] verwendeten zur Bestimmung der Loch-Zustände im Quantenpunkt einen Tight-Binding Ansatz. Die Abbildung 4.14 (a) zeigt Kontur-Darstellungen der Wellenfunktionen der ersten vier Quantenpunkt-Zustände.

Die Untersuchungen von Nenashev *et al.* ergaben eine deutliche Anisotropie des  $g$ -Faktors für den Quantenpunkt-Grundzustand:  $g_{zz}$  ist zirka eine Größenordnung größer als  $g_{xx}$  und  $g_{yy}$ . Zudem nimmt die Anisotropie des  $g$ -Faktors bei Quantenpunkten mit größerer lateraler Ausdehnung zu. Die Abhängigkeit der Komponenten des  $g$ -Faktors von der lateralen Ausdehnung des Germanium-Quantenpunktes sind in Abbildung 4.14 (b) dargestellt. Nach Nenashev *et al.* ist die Ursache für die starke Anisotropie des  $g$ -Faktors die Ähnlichkeit des Grundzustandes mit dem Schwer-Loch-Zustand  $|\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\rangle$ , dessen transversale Komponenten einen  $g$ -Faktor nahe Null besitzen. Mit anwachsender lateraler Ausdehnung nimmt der Grundzustand zunehmend die Eigenschaften des Schwer-Loch-Zustandes an; dies verstärkt die Anisotropie.

### 4.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das epitaktische Wachstum dünner Halbleiterschichten erläutert. Die drei wichtigsten Wachstumsmodi des epitaktischen Wachstums dünner Halbleiterschichten (Frank-van der Merwe-Wachstum, Vollmer-Weber-Wachstum und Stranski-Krastanov-Wachstum) wurden vorgestellt.

Die grundlegenden Modelle zur Beschreibung der Selbstorganisation von Halbleiternanostrukturen im Silizium-Germanium Materialsystem wurden besprochen.

Ein weiterer Abschnitt erläuterte beziehungsweise fasste wichtige Materialparameter der Silizium und Germanium Volumenmaterialien sowie des Mischkristalls zusammen, wobei ein Schwerpunkt auf den Parametern der Valenzbandstruktur lag. Insbesondere wurden die Auswirkungen von Verspannungen auf die Eigenzustände und effektiven Massen in Abhängigkeit des Germanium-Anteils in der Legierung betrachtet.

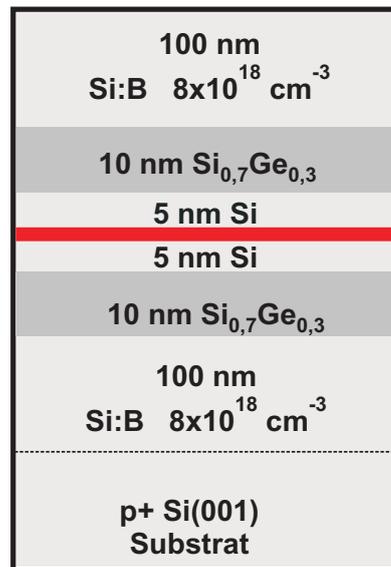
Eine Zusammenfassung der strukturellen und elektronischen Eigenschaften von Germanium-Quantenpunkten in der Hut-Cluster-Phase beendete das Kapitel, wobei ein Schwerpunkt auf der Diskussion des  $g$ -Faktors der Germanium-Quantenpunkte lag.

# 5. Prozessierung vertikaler Tunneldioden

## 5.1. Aufbau der Supergitter

Die untersuchten Silizium-Germanium-Heterostrukturen sind in der Molekularstrahlepitaxie am Max-Planck-Institut für Festkörperforschung in Stuttgart gewachsen worden [107]. Sie besitzen folgende Schichtfolge:

Bei einer Substrattemperatur von 460°C wird auf p+-dotiertem<sup>1</sup> Silizium-(0 0 1)-Substrat eine 100 nm dicke Bor-dotierte Silizium-Schicht gewachsen. Um genügend Ladungsträger und somit eine gute Leitfähigkeit bei Temperaturen von wenigen Millikelvin gewährleisten zu können, beträgt die Dotierkonzentration  $8 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . Anschließend wird ein 10 nm dicker Silizium-Germanium-Film mit einem Germaniumanteil von 30% in der Legierung gewachsen. In dieser Schicht thermalisieren die Löcher aus den hochdotierten Silizium-Kontaktbereichen. Die Thermalisierungsschicht wird von einer 5 nm dicken Siliziumschicht bedeckt, die die Ladungsträger von der folgenden aktiven Schicht trennt. Die aktive Schicht besteht, je nach Probe (siehe Tabelle 5.1), aus einigen Monolagen (ML) undotierten Germaniums. Durch eine 5 nm dicke Siliziumdeckschicht ist die aktive Schicht komplett in Silizium eingebettet. Zum Abschluss folgt erneut ein 10 nm dicker Silizium-Germanium-Film, der wiederum von einer 100 nm dicken, p+-hochdotierten Silizium-Kontaktschicht überwachsen ist. Germanium zeigt auf Silizium ein Stranski-Krastanov Wachstum (s. Kapitel 4). Bei den untersuchten Heterostrukturen variiert die Dicke der aktiven Schicht, so dass sowohl Proben mit einer Schichtdicke unterhalb des Phasenübergangs als



**Abbildung 5.1.:** Schichtfolge der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Proben. Der rot skizzierte Bereich der aktiven Schicht variiert von 4.5 ML (wetting layer) bis 6.5 ML (Hut-Cluster Inseln) reinen Germaniums.

<sup>1</sup>4 Zoll Silizium p++ Wafer mit einem spezifischen Widerstand von weniger als 0,002 Ωcm bei Raumtemperatur

## 5. Prozessierung vertikaler Tunnelnioden

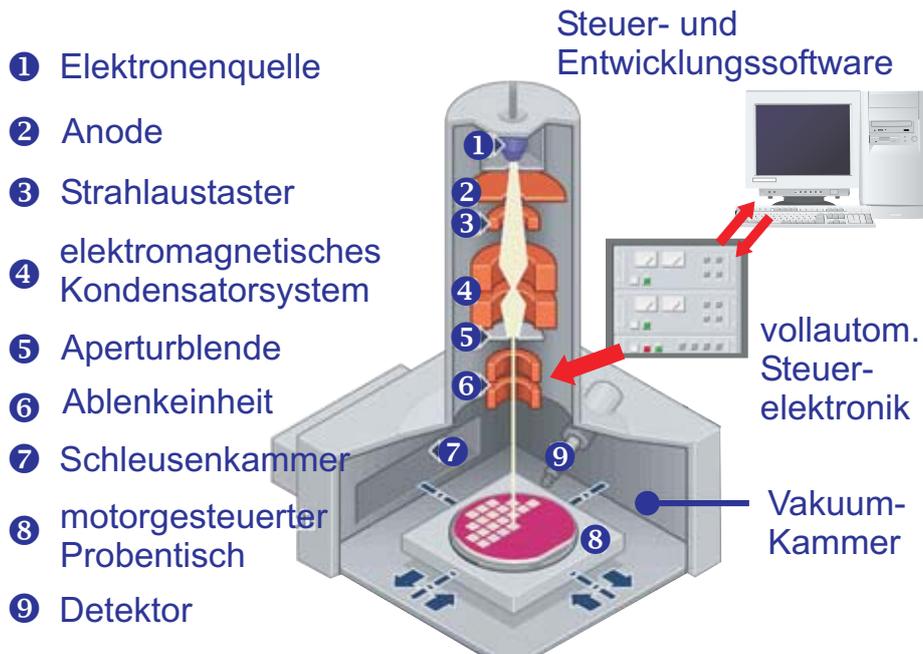
		<b>Wafer</b>	<b>aktive Schicht</b> (ML Germanium)
Wachstumstemperatur:	460°C		
Dotierung in den Kontakten:	$8 \times 10^{18} \text{cm}^{-3}$	S1323	5.5
Thermalisierungsschicht:	10 nm $\text{Si}_{0.7}\text{Ge}_{0.3}$	S1324	4.5
Barrieren:	5 nm Silizium	S1456	5.0
		S1457	6.5

**Tabelle 5.1.:** Übersicht der Wachstumsparameter der im Rahmen dieser Arbeit gewachsenen Proben. Wafer S1324 unterschreitet die kritische Schichtdicke. Es findet kein Phasenübergang im Wachstum statt; es wächst ein glatter biaxial verspannter Germanium-Film (wetting layer). Bei den übrigen Wafern ist ein Phasenübergang beobachtbar. Es bilden sich zufällig verteilte Germanium-Inseln, so genannte Hut-Cluster. Mit der Anzahl der Monolagen korreliert die Zunahme der Insel-Flächendichte, s. Abbildung 4.13 in Abschnitt 4.3.1.

auch darüber gewachsen worden. Der Phasenübergang vom pseudomorphen zum Inselwachstum lässt sich in situ mit Elektronenbeugung (RHEED - reflection high energy electron diffraction) beobachten. Durch die Substrattemperatur lässt sich die Inselgröße der entstehenden Germaniuminseln beeinflussen. Unterhalb von 550°C bilden sich Inseln des metastabilen Hut-Cluster Typs. Die Hut-Cluster sind die kleinsten Germanium-Inseln, die beim Wachstum auf Silizium entstehen können. Sie haben die Form von Walmdächern mit einer Basislänge von 15 nm bis 20 nm. Die Inseln besitzen ein selbstorganisiertes und selbstlimitiertes Wachstum. Die Inselnflächendichte nimmt oberhalb der kritischen Dichte von 4.5 Monolagen stark zu und erreicht nach zirka zwei Monolagen die Sättigung. Ab 7.5 Monolagen wachsen die Inseln zu großen Material-Clustern zusammen. Dieses Verhalten ist durch rasterkraftmikroskopische Aufnahmen an nicht bedeckten Strukturen belegt. Diese Aufnahmen liefern gleichzeitig die Inselnflächendichte (siehe Abbildung 4.13 in Abschnitt 4.3.1), die typischerweise im Bereich von  $1 \times 10^{10} \text{cm}^{-2}$ , unmittelbar nach dem Phasenübergang bis hin zu  $8 \times 10^{10} \text{cm}^{-2}$  für 7 Monolagen Germanium, liegt. In Tabelle 5.1 sind alle Wachstumsparameter der Proben zusammengefasst. Die Abbildung 5.1 skizziert das Supergitter.

## 5.2. Elektronenstrahlolithographie: Schreiben der Ätzmasken

Für die Diodenprozessierung werden aus den 4 Zoll Wafern  $4 \text{ mm} \times 4 \text{ mm}$  große Teilstücke unter Verwendung eines Diamantritzers gebrochen. Anschließend werden die Waferstückchen 5 Minuten im Aceton-Ultraschallbad gereinigt. Nach der Entnahme aus dem Ultraschallbad werden die Proben intensiv mit Aceton und Isopropanol abgespritzt, wobei die Probenstückchen stets mit Flüssigkeit benetzt sind, um eine Schlierenbildung zu verhindern. Im letzten Reinigungsschritt werden die Proben durch Abblasen mit Stickstoff getrocknet. Der Reinheitsgrad der Oberfläche wird mit einem Lichtmikroskop kontrolliert. Gegebenenfalls wird diese Prozedur wiederholt, bis ein befriedigender Reinheitsgrad erreicht ist.



**Abbildung 5.2.:** Schema eines Rasterelektronenmikroskops, das für den Lithographieeinsatz modifiziert wurde. Die Lithographie-Steuerung erfolgt durch einen Rechner, auf dem gleichzeitig die zu schreibenden Strukturen in einer Entwicklungssoftware designed werden können.

### 5.2.1. Das Lacksystem

Bevor das Lacksystem (engl. resist) auf die Probe aufgetragen wird, wird sie auf der Lackschleuder (engl. chuck) erneut mit Aceton und Isopropanol gereinigt, um mögliche Kontaminationen zu beseitigen.

Für die Elektronenstrahlolithographie wird ein zweikomponentiges Positiv-Lacksystem verwendet. Die erste Lackschicht besteht aus 10% Copolymer der Firma MicroChem Corporation. Um die chemischen Eigenschaften des Copolymer konstant zu halten, wird der Lack bei Temperaturen von 3°C gelagert. Für die Prozessierung muss jedoch sowohl der Lack als auch die Probe Raumtemperatur besitzen. Daher wird eine kleine Menge Lack mit einer Einwegpipette zirka eine Stunde vor der Belackung dem gekühlten Lack entnommen. Die Ruhezeit hat einen weiteren Vorteil. Kleine Luftblasen, die sich durch die Entnahme in der Pipette gebildet haben, lösen sich in der Dispension auf, so dass der Lack sehr homogen ist. Bei 500 U/min werden ein bis zwei Tropfen aus der Einwegpipette auf die Probe gegeben. Diese relativ geringen Umdrehungen sichern eine gleichmäßige Bedeckung der Probe. Nach 5 Sekunden beschleunigt die Lackschleuder automatisch auf 4000 U/min. Über die Endgeschwindigkeit und Schleuderzeit wird die Lackdicke eingestellt. Längere Zeiten sichern die Lackgleichmäßigkeit. Die Umdrehungsgeschwindigkeit bestimmt die Lackdicke, da der Lack dank der Fliehkraft breit fließt und somit überflüssiger Lack abgeschleudert wird. Parameter

## 5. Prozessierung vertikaler Tunnelnioden

wie die Größe des Probenstückchens, die Oberflächenbeschaffenheit und das Umgebungsklima sind weitere, das Lacksystem beeinflussende Faktoren. Die Belackung einer Probe auf einer Lackschleuder wird Spin-coating genannt.

Nach dem Auftragen der ersten Lackschicht wird die Probe 15 Minuten bei 180°C auf eine Heizplatte (engl. hotplate) zum Aushärten des Lacks gelegt. Nach diesem so genannten Prebake oder Softbake wird die Probe wenige Minuten zum Abkühlen auf eine Aluminiumplatte (engl. chill plate) gelegt.

Nach dem Abkühlen der Probe wird die zweite Lackschicht aufgetragen. Diese soll den Intraproximity-Effekt [153], der letztlich eine Aufweitung des Strahls im Lack erzeugt, reduzieren, so dass das Belichtungsprofil möglichst scharf ist. Eine dünne Lackschicht aus 950K PMMA<sup>2</sup> 2% in Anisol erfüllt die Anforderungen. Die zweite Lackschicht wird mit dem beschriebenen Spin-Coating Verfahren aufgetragen. Zum Aushärten der neuen Lackschicht wird die Probe erneut 15 Minuten auf die Heizplatte gelegt. Das zweite Lacksystem hat zirka eine Dicke von 50 nm bis 60 nm. Nach dem Abkühlen ist das Lacksystem für die Elektronenstrahlolithographie fertig.

Das zweikomponentige Lacksystem hat eine Gesamtdicke von ungefähr 2 Mikrometern. Die Dicke ist ausreichend für einen sicheren Lift-off Prozess. Grundsätzlich gilt für Lacksysteme, dass für die Abhebetechnik der metallisierten Deckschicht, dem Lift-off, ein gutes Aspektverhältnis aus Lackdicke und Metall-Evaporation und somit idealerweise ein möglichst dickes Lacksystem wünschenswert ist. Andererseits benötigt man für Strukturen im Mikro- und Submikrobereich dünne Lacksysteme, um den Proximity-Effekt gering zu halten. Dies sind die Extrema, unter denen das Lacksystem optimiert werden muss. Alternativ zur Reduktion der Schichtdicke lassen sich auch Elektronen mit wesentlich höherer Energie von beispielsweise 100 kV zur Belichtung verwenden.

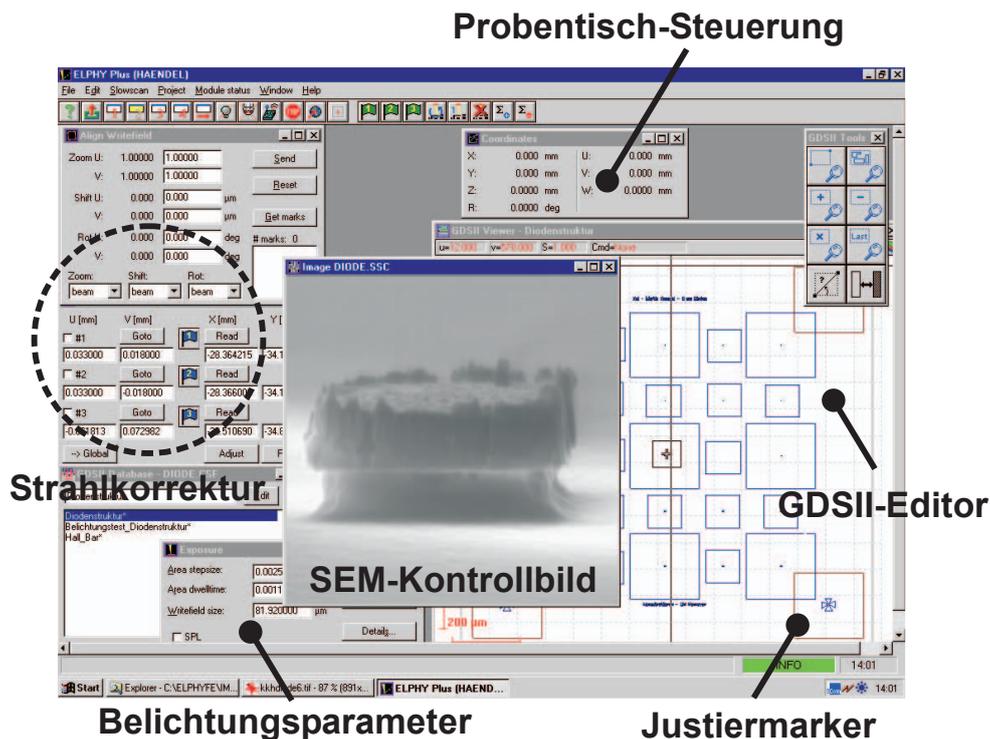
Die typischen Belichtungsdosen des verwendeten Lacksystems betragen 180  $\mu\text{C}/\text{cm}^2$ . Unter Reinraumbedingungen lassen sich belackte Proben einige Tage ohne Qualitätsverlust aufbewahren.

### 5.2.2. Rechnergestützte Elektronenstrahlolithographie mit Elphy<sup>Plus</sup>

Für die Herstellung von Mikro- bis Submikrometer großen Dioden werden sämtliche Belichtungsschritte mit der hochauflösenden Elektronenstrahlolithographie (engl. electron beam lithography - EBL) durchgeführt. Hierfür steht ein modifiziertes Rasterelektronenmikroskop der Firma Leo Modell 1530 zur Verfügung. Durch das computergestützte Lithographiesystem Elphy<sup>Plus</sup> der Firma Raith ist eine schnelle und komfortable Realisierung der Strukturen im Mikro- und Nanometer Bereich möglich. Im Einzelnen setzt sich Elphy<sup>Plus</sup> aus der vollautomatischen Steuerelektronik für den Schreibstrahl und Probenstisch sowie einer Steuer- und Entwicklungssoftware mit integriertem GDSII-Editor zusammen. Die grafische Benutzeroberfläche ist Microsoft Windows orientiert und läuft unter Microsoft Windows

---

<sup>2</sup>Polymethylmethacrylat - bekanntester Handelsname: Plexiglas



**Abbildung 5.3.:** Bildschirmausgabe der Steuerungs- und Entwicklungssoftware Elphy<sup>Plus</sup>. Das Programm enthält sowohl einen GDSII-Editor sowie die gesamte Strahl- und Belichtungssteuerung. Das Rasterelektronenmikroskop ist mit Elphy<sup>Plus</sup> steuerbar.

NT. Die Abbildung 5.3 zeigt beispielhaft eine Bildschirmausgabe der Elphy<sup>Plus</sup>-Benutzeroberfläche.

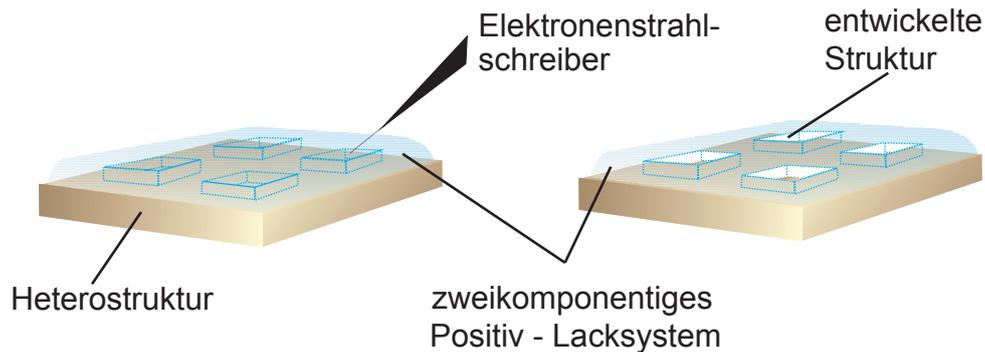
Im GDSII-Editor lassen sich die Quadrate, die später die Ätzmasken beziehungsweise die Diodenköpfe darstellen, zeichnen. Die Quadrate haben Kantenlängen von 500 nm bis 2  $\mu\text{m}$ . Das Schreibfeld hat eine Größe von 1,2 mm und wird mit einer 30  $\mu\text{m}$  Blende geschrieben. Die Beschleunigungsspannung beträgt 30 kV. Nach der Positionierung und dem Scharfstellen des Schreibstrahls auf der Probe werden die Belichtungsparameter unter Angabe der Lackempfindlichkeit<sup>3</sup> automatisch von Elphy<sup>Plus</sup> berechnet. Die Belichtung dauert zirka 2 Minuten. Zusätzlich zu den Ätzmasken werden noch Markierungsmarken für den zweiten Lithographieschritt geschrieben.

## 5.3. Entwicklung und Metall-Evaporation

Nach der Belichtung mit dem Elektronenstrahl werden die Strukturen 90 Sekunden im Entwickler-Bad entwickelt. Als Entwickler dient ein Methylisobutylketon (MIBK) und Isopropanol Gemisch im Verhältnis 1 : 3. Die Entwicklung wird unter

<sup>3</sup>Die Lackempfindlichkeit wird in Belichtungsreihen ermittelt.

## 5. Prozessierung vertikaler Tunnelioden



**Abbildung 5.4.:** Links: Mit dem Elektronenstrahl werden die gewünschten Strukturen in das Lacksystem geschrieben. Rechts: Nach dem Entwickeln ist der Lack an den Stellen der geschriebenen Strukturen gelöst.

ständigem Rühren mit Hilfe eines Magnetrührers durchgeführt. Zum Stoppen der Entwicklung wird die Probe aus dem Bad genommen und mit Isopropanol gespült sowie durch Abblasen mit Stickstoff getrocknet.

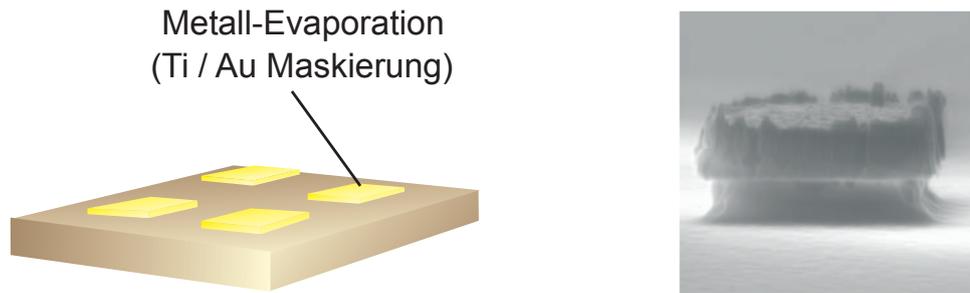
Nach der Entwicklung ist die Probe zügig in die Aufdampfanlage zur Metall-Evaporation einzubauen. Durch das zügige Einbauen soll das Risiko der Partikel-Kontaminationen sowie ein Zulaufen der freigelegten Strukturen minimiert werden. Zur Metall-Evaporation der Ätzmasken dient eine Aufdampfanlage der Firma Leibold mit Elektronenstrahlverdampfer der Firma Telemark. Nach dem Abpumpen des Rezipienten auf einen Druck von zirka  $5 \times 10^{-6}$  mbar werden 20 nm Titan, das als Haftvermittler dient und 150 nm bis 180 nm Gold aufgedampft.

Der anschließende Lift-Off Prozess geschieht im Aceton-Bad. Zur Unterstützung und Beschleunigung des Lift-off Prozesses kann das Acetonbad auf 40°C bis 50°C erwärmt werden. Hartnäckige Lackreste lassen sich durch kräftiges Abspülen mit Aceton entfernen. Zurück bleiben die metallischen Ätzmasken. Um Aceton-Schlieren zu vermeiden, wird die Probe mit Isopropanol gespült und in Stickstoffumgebung getrocknet.

### 5.4. Einlegieren der Ätzmasken

Um später Ohmsche Kontakte zwischen der Halbleiterschicht und den metallischen Kontakten beziehungsweise Ätzmasken zu erhalten, werden die Ätzmasken unter Formiergas-Atmosphäre bei 310°C in einem Annealing-Ofen des Typs AZ 500 der Firma MBE Komponenten GmbH einlegiert. Hierbei darf die Prozesstemperatur nicht beliebig hoch gewählt werden, da sonst die Germanium Hut-Cluster, die nur metastabil sind, sich in größere Inseln umwandeln. Folgende dreistufige Einlegierung hat sich als geeignet herausgestellt:

1. Stufe: 60 Sekunden bei 50°C
2. Stufe: 320 Sekunden bei einer Temperatur von 310°C



**Abbildung 5.5.:** Links: In einer Aufdampfanlage werden die metallischen Ätzmasken auf die Heterostruktur aufgedampft. Diese werden einlegiert und anschließend wird die Probe nasschemisch geätzt. Rechts: Elektronenstrahlmikroskopische Aufnahme einer 1  $\mu\text{m}$  breiten und zirka 300 nm hohen Mesa.

3. Stufe: 60 Sekunden bei 50°C

## 5.5. Mesa-Ätzen

Im nun folgenden Schritt werden die Proben nasschemisch mit einer Mischung aus Flußsäure (HF) und Salpetersäure ( $\text{HNO}_3$ ) geätzt. Die durch das Ätzen entstehenden Strukturen haben die Form eines kleinen Pilzes (siehe Abbildung 5.5) und werden Mesa (dt. Tafelberg) oder Pillar (dt. Säule) genannt. Die Reaktion läuft in zwei Schritten ab. Zunächst oxidiert die Salpetersäure das Silizium und im zweiten Schritt reduziert die Flußsäure das Siliziumoxid zu gasförmigem Siliziumtetrafluorid. Die Lösung ätzt Silizium und Germanium isotrop und unabhängig von der Dotierung. Die in alle Kristallrichtungen gleiche Ätzrate ermöglicht Mesadurchmesser, die wesentlich kleiner sind als die als Ätzmaske dienenden metallischen Kontakte. Dieser Vorgang wird Unterätzen (engl. under cut) genannt. Das Ätzen ist der kritischste Prozessschritt. Um einigermaßen kontrolliert durch die 120 nm tief liegende, aktive Schicht ätzen zu können, wurde der Flußsäureanteil stark reduziert. Die Ätzrate ist durch die Geschwindigkeit, in der das Siliziumtetrafluorid gelöst wird, limitiert [154, 155]. Daher ist auf eine sehr gute Durchmischung der Lösung während des Ätzvorgangs zu achten. Hierfür wird ein Magnetrührer benutzt. Die Proben werden während des Prozesses mit einer Teflon-Pinzette gehalten. Der Ätzprozess sieht folgendermaßen aus:

1. Zuerst werden die Proben 60 Sekunden in eine HF:  $\text{H}_2\text{O}$ -Lösung im Verhältnis 1:50 getaucht, um vorhandenes  $\text{SiO}_2$  zu entfernen.
2. Danach wird die Probe zirka 30 Sekunden in HF:  $\text{HNO}_3$  im Verhältnis 1:100 geätzt. Während des Ätzvorgangs wird die Lösung mit einem Magnetrührer durchmischt. Die Ätzrate beträgt in dieser Konfiguration etwa 10 nm/s.
3. Anschließend wird die Probe ausgiebig mit destilliertem Wasser abgespült.

## 5. Prozessierung vertikaler Tunnelioden

4. Zum Schluss wird die Probe mit Stickstoff abgeblasen und getrocknet.

Trotz sorgfältiger Einhaltung der Prozessparameter ist die Reproduzierbarkeit der Mesa ein großes Problem beim nasschemischen Ätzen. Möglicherweise sind lokale Strömungsverhältnisse der Ätze an der Probe hierfür verantwortlich.

## 5.6. Passivierung mit Polyimid

Um die geätzten Mesas mechanisch zu stabilisieren und eine Isolationsschicht herzustellen, werden die Proben flächendeckend mit Polyimid<sup>4</sup> beschichtet. Hierfür sind folgende Prozessschritte notwendig:

1. Vorsichtige Reinigung der Probe durch Abspülen mit Aceton und Isopropanol.
2. Auf der Lackschleuder werden zwei Tropfen der Polyimid-Vorstufe bei zirka 500 U/min auf die Probe gegeben. Nach 5 Sekunden erhöht die Lackschleuder auf 1000 U/min und nach weiteren 5 Sekunden auf 10000 U/min. Mit dieser Methode erhält man einen gleichmäßigen, zirka 1  $\mu\text{m}$  dicken Polyimidfilm.
3. Zum Aushärten des Polyimids werden die Proben anschließend 15 Stunden auf einer 200°C heißen Heizplatte getempert. Dadurch dampfen die Lösungsmittel ab und die vorher zähflüssige Masse imidisiert.

Nach dem Auftragen und Aushärten des Polyimids ist die Mesa vollständig im Polyimid eingebettet, siehe Abbildung 3.8. Die metallischen Kontakte liegen einige 100 nm unter der Polyimidoberfläche. Für die elektrische Kontaktierung müssen sie wieder freigelegt werden. Die Mesastrukturen und das Substrat bleiben jedoch weiterhin im Polyimid passiviert.

## 5.7. Freilegen der Kontakte im Sauerstoffplasma

Zum Freilegen der Diodenköpfe werden die oberen Schichten des Imids in einem Sauerstoffplasma verascht. Das benutzte Gerät ist ein 100E Plasma-System der Firma TePla Technics Plasma GmbH. Folgende Prozessschritte und Parameter wurden angewandt:

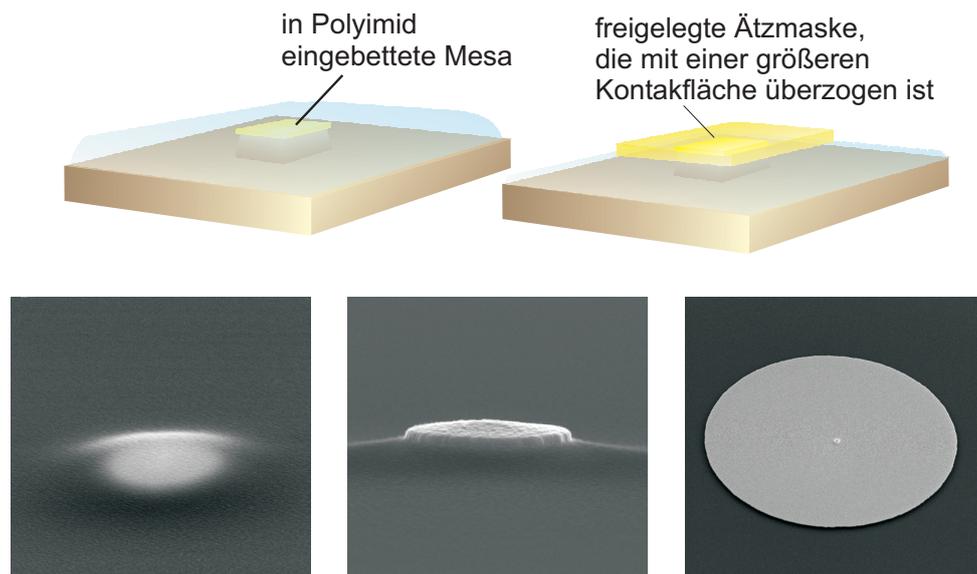
1. Vor dem Einbau der Proben werden Reste aus früheren Plasmaprozessen durch ein 30-minütiges Reinigungsplasma entfernt.
2. Das Veraschen<sup>5</sup> des Polyimids erfolgt in mehreren Schritten von jeweils 5 Minuten bei 0,35 Torr und einer Leistung von 200 W.

---

<sup>4</sup>Probimid HTR 3-50, der Firma Olim Microelectronic Materials

<sup>5</sup>Der Verascher bietet die Möglichkeit, durch ein Glasgestänge die Proben unterschiedlich nahe an das brennende Plasma heranzuführen. Die in dieser Arbeit genannten Zeiten und Leistungsstufen beziehen sich auf das Veraschen von Proben, die auf der obersten Glasstange direkt unterhalb des Plasmas eingebaut sind.

## 5.8. Zweiter Lithographieschritt: Schreiben der Vorderseitenkontakte

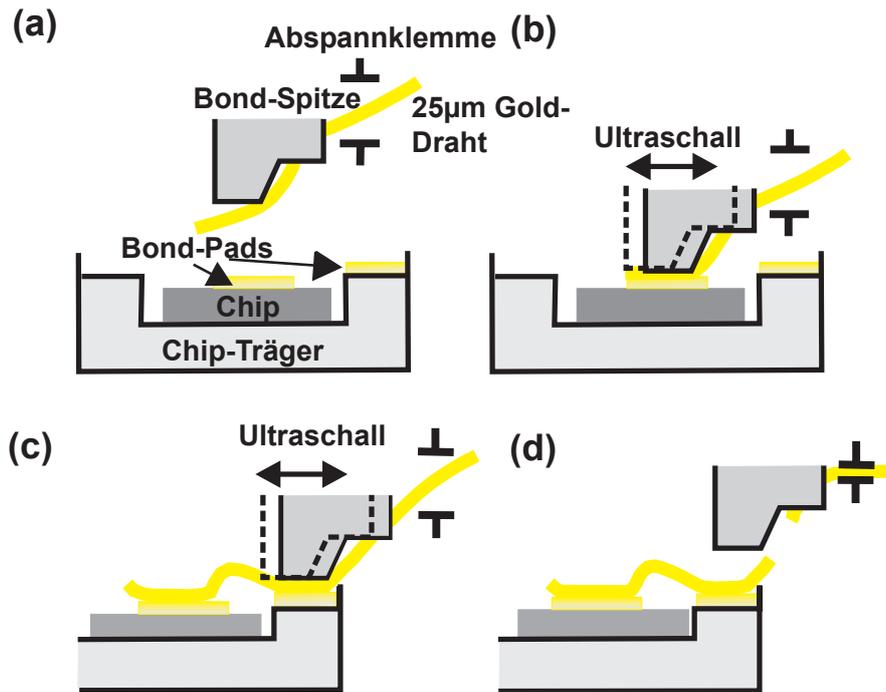


**Abbildung 5.6.:** Passivierung der Mesa und Freilegen der Ätzmasken. Die elektronenmikroskopischen Aufnahmen [107] zeigen eine im Polyimid eingebettete Mesa, eine im Sauerstoffplasma freigelegte Ätzmaske und eine Mesa, die von einem großen Goldkontakt bedeckt ist.

Die Kontrolle der Polyimidschichtdicke erfolgt durch ein hochpräzises Oberflächenanalysegerät mit computergesteuerter graphischer Benutzerschnittstelle, dem Dektak<sup>3</sup> der Firma Veeco Sloan Technology. Hierzu wird am Rand der Probe mit einem Skalpell das Polyimid entfernt und mit dem Dektak der Höhenunterschied vermessen. Mit der entsprechenden Erfahrung lässt sich auch die richtige Höhe mit dem bloßen Auge einschätzen. Diese ist erreicht, wenn der Film leicht bläulich schimmert. Im Lichtmikroskop ist dann auch deutlich die gelb schimmernde Oberfläche der Ätzmasken zu erkennen.

## 5.8. Zweiter Lithographieschritt: Schreiben der Vorderseitenkontakte

Für die elektrische Kontaktierung sind die Ätzmasken zu klein. Daher müssen in einem zweiten Lithographieschritt größere Kontaktflächen auf die Diodenköpfe prozessiert werden. Die Belichtung der  $100\ \mu\text{m} \times 100\ \mu\text{m}$  großen Kontaktflächen erfolgt ebenfalls mit der Elektronenstrahlolithographie. In einem ersten Schritt wird daher das bereits oben beschriebene Positiv-Lacksystem auf die Probe aufgetragen. Mit Hilfe der im ersten Lithographieprozess geschriebenen Markerfelder lässt sich die Probe so positionieren, dass jeweils unter einer großen Kontaktfläche ein Diodenkopf sitzt. Um die Belichtungszeit möglichst kurz zu halten, wird eine große Blende von  $120\ \mu\text{m}$  verwendet. Nach zirka 10 Minuten sind alle Kontaktflächen geschrieben. Nach dem Entwickeln werden in der Aufdampfanlage zirka 20 nm Ti-



**Abbildung 5.7.:** Die Skizze illustriert das Keil-Bonden. (a) Grobpositionierung, Absenkung auf Suchhöhe, Feinpositionierung (b) ersten Bond setzen US+Druck, Loop fahren (c) Absenken, Feinpositionierung, zweiten Bond setzen (d) Draht abreißen, Hochfahren

tan und 150 nm bis 180 nm Gold aufgedampft. Für den Lift-off Prozess werden die Proben für zirka 30 Minuten in ein Aceton-Bad gelegt, wobei gegebenenfalls durch zusätzliches, kräftiges Abspritzen mit Aceton dem Abheben der überschüssigen Metall-Lackschicht nachgeholfen werden muss.

## 5.9. Elektrische Kontaktierung

Im letzten Schritt geschieht die elektrische Kontaktierung der Mesas. Die Probenstückchen werden mit Leitsilber in einen Chipträger geklebt; hierdurch ist gleichzeitig die Rückseitenkontaktierung vollzogen. Der Chipträger verfügt über 20 Goldkontakte. Ein Kontakt (in der Regel Kontaktnummer 14) ist für den Rückseitenkontakt reserviert; daher können insgesamt maximal 19 Dioden pro Chipträger kontaktiert werden. Für die elektrische Kontaktierung zwischen Diodenkopf und Chipträger stehen zwei Techniken zur Verfügung. Die vollständige Kontaktierung mit einem Keilbonder und ein Klebverfahren, das in Kombination mit dem Keilbonder angewandt wird. Bei beiden Verfahren wird jeweils eine Drahtverbindung zwischen Diodenkopf und Chipträger hergestellt.

Bei der Kontaktierung der Dioden mit einem Keilbonder wird ein Golddraht mit einem Durchmesser von 25 µm bei einer Temperatur von 150 °C unter hohem Druck und Ultraschallvibrationen mit einem Keil (engl. wedge) auf den Gold-Kontakt der

Diode gepresst. Der Draht lässt sich auf Grund des Ultraschalls durch die Druckkraft leichter verformen. Dadurch nähern sich die Oberflächen auf atomaren Abstand an und verschweißen. Anschließend wird ein freier Gold-Kontakt des Chipträgers auf die gleiche Weise kontaktiert. Der Golddraht wird dann durchtrennt. Den Ablauf der einzelnen Bondphasen zeigt Abbildung 5.7. Bei dem verwendeten Keilbonder<sup>6</sup> erfolgt die Positionierung und die Auslösung des Bondvorganges manuell. Die Parameter für den 1. und 2. Bond werden vorher eingestellt (siehe Tabelle A.2 im Anhang). Ebenfalls manuell lässt sich der Bondkopf in  $z$  und  $x$ - $y$ -Richtung verschieben. Der Bondabstand und damit der Drahtvorschub ergibt sich aus dem manuell gesteuerten Verfahren des  $x$ - $y$ -Tisches. Der eigentliche Bondvorgang läuft dann nach der Einstellung der prozessbestimmenden Parameter, wie Bondkraft, Amplitude der Ultraschallschwingung, Bondzeit und Absenkgeschwindigkeit automatisch ab. Die Verfahrensparameter sind in Tabelle (A.2) im Anhang zusammengefasst. Auf Grund der Keilgeometrie besteht keine Richtungsfreiheit nach dem 1. Bond. Dadurch muss der Substrattisch während des Bondens gedreht werden, so dass der 2. Bond genau in Flucht zum ersten liegt. 90°-Bonden ist nicht möglich!

Das vollständige Bonden mit einem Keilbonder hat den Vorteil, dass für die gesamte Kontaktierung eine Maschine zur Verfügung steht, mit deren Hilfe man präzise kleinflächige Kontakte ansteuern und reproduzierbar den Golddraht genau setzen kann. Leider eignet sich das Keilverfahren nur schlecht, wenn die Kontakte auf weichem Untergrund liegen. Für die Kontaktierung der Vorderseitenkontakte der in Polyimid-eingebetteten Mesastrukturen ist der Bonder ungeeignet. Hier lässt sich nur der Golddraht auf dem Goldkontakt des Chipträgers mit dem Keilbonder bonden. Das andere Ende des Drahtes muss mit Leitsilber auf den Vorderseitenkontakt geklebt werden. Hierfür wird eine feine Drahtlitze in Leitsilber getaucht. Unter einem Mikroskop wird mit einer Pinzette der feine Golddraht auf die Kontaktfläche gedrückt. Mit einer zweiten Pinzette wird die Drahtlitze mit Leitsilber zur Kontaktfläche geführt und gibt dort auf den Golddraht und die Kontaktfläche einen kleinen Tropfen Leitsilber ab. Beim Antrocknen des Leitsilbers werden somit Golddraht und Kontaktfläche miteinander verklebt.

Die im Anhang befindliche Tabelle A.1 zeigt alle in dieser Arbeit untersuchten Proben. Der nominelle Diodendurchschnitt variiert von 500 nm bis 120  $\mu\text{m}$ .

## 5.10. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die einzelnen Prozessschritte zur Herstellung von Submikrometer-Dioden erläutert: Das Kapitel begann mit der Beschreibung der verwendeten Heterostrukturen, wobei die in dieser Arbeit untersuchten Heterostrukturen sich nominell nur in der aktiven Zone unterschieden. Im Wesentlichen bestand der aktive Bereich der Dioden aus zwei 10 nm breiten Silizium-Germanium-Quantentöpfen, die durch eine 10 nm dicke Silizium-Barriere getrennt waren. In die Mitte der Silizium-Barriere waren wenige Monolagen reines Germanium eingebettet. Die Variation der einzelnen Dioden bestand aus der Anzahl der Monolagen an

<sup>6</sup>Kulicke & Soffa, Manual Wire Bonder, Type 4526

## 5. Prozessierung vertikaler Tunnelnioden

Germanium in der Silizium-Barriere. Bis zu einer Dicke von 4.5 Monolagen war der eingebettete Germaniumfilm pseudomorph gespannt. Man erhielt somit einen dünnen Quantentopf. Für eine größere Anzahl Monolagen riss der vorher glatte Film auf und es bildeten sich auf Grund plastischer Relaxationsprozesse kleine Materialinseln. Diese Heterostrukturen wurden in der Arbeit Quantenpunktstrukturen genannt, da man einen nulldimensionalen Charakter für die Quantenpunkte erwartete.

Anschließend wurde die rechnergestützte Elektronenstrahlolithographie in der Elphy<sup>plus</sup>-Entwicklungsumgebung vorgestellt, wobei auf Details des verwendeten Lacksystems eingegangen wurde. Die folgenden Prozessschritte der Metall-Evaporation, des Einlegierens und Mesa-Ätzens wurden beschrieben und die in Folge der Arbeit ermittelten optimalen Prozessierungsparameter genannt.

Eine besondere Herausforderung bestand in der elektrischen Kontaktierung der in Polyimid eingebetteten Dioden. Die Verwendung eines Bonding-Automaten war nicht möglich, da die Polyimid-Oberfläche zu weich war und der Bondkeil den Golddraht auf dem Vorderseitenkontakt nicht setzen konnte. Daher wurde im letzten Abschnitt eine alternative Kontaktierungsmethode, das Kleben mit Leitsilber, vorgestellt.

## 6. Mess-Prinzip

Die Zustände in einem Quantentopf beziehungsweise einem Quantenpunkt sind durch die Energie-Eigenwerte und die zugehörigen Wellenfunktionen gegeben. Eine effiziente Methode, die Energie-Eigenwerte zu bestimmen, ist die Tunnelspektroskopie<sup>1</sup> [93, 156, 157], bei der Gleichstrom-(DC)-Strom-Spannungs-Kennlinien der zu untersuchenden Struktur aufgenommen werden. Die Resonanzen der ersten Ableitung korrelieren dann mit Zuständen in der Struktur. Mit der Kenntnis des Spannungsabfalls über die Struktur lässt sich ein Spannungs-Energie-Konversionsfaktor ermitteln, der eine Interpretation der Spannungsskalen als Energieskalen ermöglicht. Dies gestattet das Einschlusspotenzial aus den Abständen der Resonanzen zueinander abzuschätzen, desweiteren erhält man auf diese Weise Informationen über Verspannungen innerhalb der Struktur. Ebenso lassen sich aus den Energie-Eigenwerten wichtige Materialparameter wie beispielsweise die effektive Ladungsträgermasse extrahieren. Aus den Änderungen der Halbwertsbreite der Resonanzen sind zudem Aussagen über die Ladungsträgertemperatur möglich. Im folgenden Kapitel werden Dioden mit tunnelspektroskopischen Verfahren analysiert. Detaillierte Informationen zu den einzelnen Dioden sind in Kapitel 4 zusammengefasst.

### 6.1. Experimenteller Aufbau

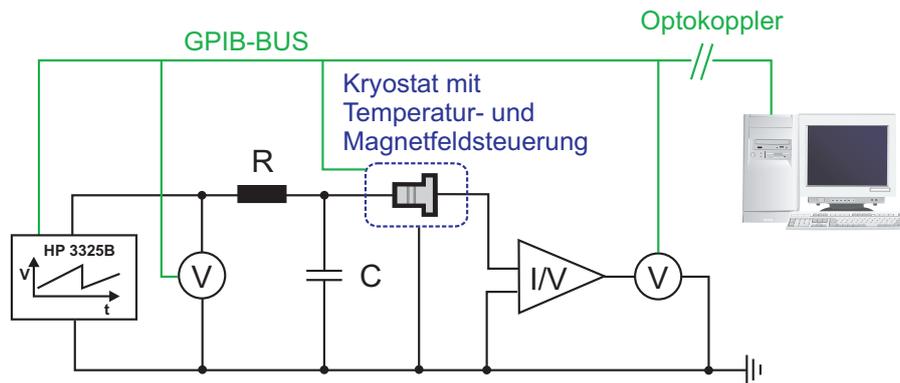
Für die Erforschung von Quanteneffekten in Nanostrukturen ist es notwendig, dass thermische Anregungen und Wechselwirkungen der Ladungsträger untereinander deutlich geringer sind als die Energieseparation der am Transport beteiligten Zustände; siehe hierzu Abschnitt 2.3. Daher werden sämtliche Transportuntersuchungen an den Nanostrukturen in Kryostatsystemen durchgeführt, die es erlauben, die Proben in Umgebungstemperaturen unterhalb eines Kelvins zu studieren. Die Kryostatsysteme ermöglichen zudem die gezielte Regelung und Steuerung auf gewünschte Umgebungstemperaturen innerhalb eines für die Bauart des Kryostatsystems spezifischen Temperaturbereichs. Hierdurch ist die maximale, thermische Anregung eines Ladungsträgersystems in gewisser Weise<sup>2</sup> beeinflussbar. Ein weiterer wichtiger Bestandteil der Untersuchungen ist die Analyse statischer, äußerer Magnetfelder in Nanostrukturen. Zu diesem Zweck stehen supraleitende Magneten mit sehr homogenen Feldstärken bis zu 20 Tesla beziehungsweise ein resistiver Magnet bis 28 Tesla zur Verfügung. Die verwendeten Kryostatsysteme sind in Tabelle 28

---

<sup>1</sup>Strom-Spannungs-Kennlinien bilden die Basis für Aussagen bezüglich der zu untersuchenden Struktur und deren elektronische Eigenschaften.

<sup>2</sup>je nachdem, wie stark die Ladungsträger an das Kristallgitter ankoppeln

## 6. Mess-Prinzip



**Abbildung 6.1.:** Schema der Zwei-Punkt-Messung: Ein Funktionsgenerator dient als Spannungsquelle. Die an der Probe angelegte Spannung wird mit einem Multimeter gemessen. Ein zweites Multimeter misst die Ausgangsspannung eines Stromverstärkers, die proportional ist zum Strom durch die Probe. Das Kryostatsystem und der Funktionsgenerator sowie die Multimeter werden über den GPIB-Bus mit Hilfe der Software LabView angesteuert und ausgelesen.

aufgeführt.

Die untersuchten Heterostrukturen sind zu Dioden prozessiert; siehe hierzu Kapitel 5. Die Transportmessungen erfolgen in Zwei-Punkt-Geometrie: Zwischen dem Vorderseiten- und Rückseitenkontakt der Diode wird eine Potenzialdifferenz (Gleichspannung) angelegt, so dass ein sehr geringer Strom durch die Diode getrieben wird. Auf diese Weise werden Strom-Spannungs-Kennlinien der Dioden aufgezeichnet. Die Anforderungen an den Messaufbau sind der Art, dass sowohl Gleichstrom-Signale im Bereich weniger Pico-Ampere sowie einiger hundert Mikro-Ampere gemessen werden können. Für die Untersuchungen standen zwei Messaufbauten zur Verfügung, die gleichsam die Anforderungen erfüllen.

Die beiden verwendeten Messaufbauten sind in Abbildung 6.1 beziehungsweise Abbildung 6.2 schematisch dargestellt. Der Messaufbau in Abbildung 6.1 setzt sich aus folgenden Komponenten zusammen: Als Spannungsquelle dient ein Funktionsgenerator der Firma Hewlett-Packard (Modell HP3325-B). Das Gerät besitzt ein sehr geringes Eigenrauschen und eine sehr hohe Signalstabilität. Die Spannungsrampen lassen sich mit einer minimalen Frequenz von  $1 \mu\text{Hz}$  und einer maximalen Frequenz von 20 MHz betreiben. Die an die Probe angelegte Spannung wird mit einem Multimeter der Firma Keithley (Modell 2000) gemessen. Der Rückseitenkontakt der Diode ist auf den Eingang eines sehr rauscharmen Stromverstärkers des Herstellers Ithaco, Modell 1211, gelegt, dessen Ausgangsspannung direkt proportional zum Strom durch die Probe ist. Die Ausgangsspannung des Stromverstärkers wird ebenfalls mit einem digitalen Multimeter (Modell 2000, Keithley) ausgelesen. Die Zuleitungen zu den Dioden sind durch Tiefpass-Filter mit einer Grenzfrequenz von 1 Hz von den beiden Keithley 2000 Multimetern abgeschirmt. Zudem sind sämtliche Leitungen zwischen den einzelnen Messgeräten und dem Kryostatsystem mit abgeschirmten Koaxialleitungen vom Typ RG58 verbunden. Die im Kryos-

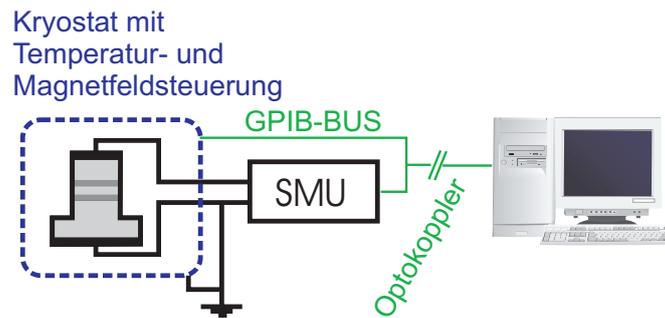
Kryostattyp	Temperaturbereich (K)	Magnet / max. Feld (T)
<sup>3</sup> He-Badkryostat, ( <i>Helinox, Oxford</i> )	0.3 - 300	S / (14)16
<sup>3</sup> He/ <sup>4</sup> He-Mischkryostat, ( <i>Kelvinox 300, Oxford</i> )	0.02 - 0.7	S / (13)15
<sup>3</sup> He/ <sup>4</sup> He-Mischkryostat, ( <i>Kelvinox TLM, Oxford</i> )	0.01 - 1	S / (18)20
<sup>3</sup> He/ <sup>4</sup> He-Mischkryostat, ( <i>Kelvinox TLM, Oxford</i> )	0.02 - 1	R / 28

**Tabelle 6.1.:** Verwendete Kryostat- und Magnetsysteme. Eine detaillierte Beschreibung der Funktionsweise der einzelnen Kryostatsysteme ist in [158, 159] zu finden. Bei der Angabe der Magnettypen bedeutet der Bezeichner »S«, dass es sich um supraleitende Spulen handelt. »R« steht für resistive Magnetspulen in Bitter-Geometrie. Die maximalen magnetischen Feldstärken der supraleitenden Spulen sind kühlungsabhängig. Die eingeklammerten Werte beziehen sich auf eine Umgebungstemperatur von 4.2 K; flüssig <sup>4</sup>Helium. Der zweite Wert gilt für Betriebstemperaturen von 2.2 K, dem Lambda-Punkt von superfluidem <sup>4</sup>Helium.

tat zur Probe führenden Leitungen sind Drähte aus Konstantan mit einem Durchmesser von 0.1 mm. Der Widerstand der Drähte pro Leitung beträgt zirka 200 Ω. Spezielle Durchgangfilter, so genannte π-Filter, schneiden im Übergang zwischen den Koaxialleitungen und den Leitungen im Kryostaten den Hochfrequenzanteil auf den Probenleitungen ab. Hierdurch soll ein unkontrolliertes Aufheizen der Probe durch elektromagnetisches Einstreuen von Radio- und Mikrowellenstrahlung reduziert werden. Die verwendeten π-Filter besitzen eine Kapazität von 1500 pF und haben eine Einfügungsdämpfung im Bereich von 10 MHz bis 10 GHz.

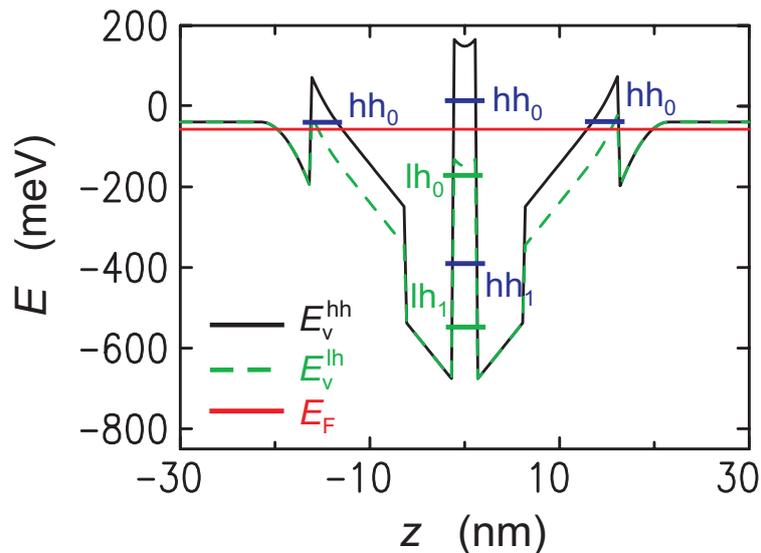
Die Messgeräte und der Kryostat sind mit einer separaten Messerde, die im Labor zur Verfügung steht, verbunden. Sämtliche im Messaufbau verwendeten Geräte sind über Trenntransformatoren mit der Spannungsversorgung verbunden. Die Trenntransformatoren wiederum sind über eine unterbrechungsfreie Stromversorgung (USV) an das Einspeisernetz angeschlossen. Die USV liefert eine unterbrechungs- und störungsfreie Sinus-Wechselspannung innerhalb eng spezifizierter Spannungs- und Frequenztoleranzen. Auf diese Weise wird ein Einkoppeln mittlerer Frequenzmoden in den Messaufbau verhindert. Die Messwernerfassung sowie die Steuerung des Messsystems geschieht computerunterstützt. Hierzu lassen sich die Messgeräte über IEEE-488 Schnittstellen beziehungsweise den GPIB-Bus ansprechen. Die Magnete beziehungsweise die Magnet-Netzteile sind über den der Firma Oxford spezifischen ISO-Bus mit dem Messrechner verbunden. Zur Vermeidung von Brummschleifen sind sämtliche Verbindungen zwischen Messgeräten und dem Messrechner durch einen Optokoppler galvanisch getrennt. Mit dem beschriebenen Messaufbau ist das Stromrauschen im Messbereich bis 10 pA auf zirka 300 fA reduzierbar. Der zweite Messaufbau ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Er besteht aus einem Messgerät, einer programmierbaren Source-Measurement Unit - SMU - der Firma Keithley, Modell 6430. In einer solchen SMU sind mehrere Komponenten enthalten, die es unter anderem ermöglichen, dass diese SMU gleichzeitig als Quelle (engl. source) und als Messgerät (engl. measurement) agiert. Somit lassen sich Strom-Spannungs-Kennlinien mit einem einzigen Messgerät aufzeichnen. Außer Hochfrequenzfiltern auf dem Kryostatenkopf wurden keine zusätzlichen Tiefpass-

## 6. Mess-Prinzip



**Abbildung 6.2.:** Schema der Zwei-Punkt-Messung mit Hilfe einer Source-Measure Unit (SMU). Das Kryostatsystem und die SMU werden über den GPIB-BUS eines Messrechners angesteuert und ausgelesen. Galvanisch ist der Messrechner vom Messsystem über einen Optokoppler getrennt.

filter verwendet. Ein großer Vorteil des Messaufbaus mit der SMU liegt darin, dass der SMU-eigene Vorverstärker sich direkt auf den Kryostatenkopf montieren lässt und somit die kürzeste Verbindung zwischen Probe und Messgerät realisiert ist. Die SMU besitzt eine minimale Spannungsaufösung von  $1 \mu\text{V}$  und kann Ströme im Subfemtoampere-Bereich detektieren. Mit der SMU lässt sich das Stromrauschen auf zirka 100 fA bis 200 fA reduzieren.



**Abbildung 7.1.:** Simulation der Valenzbandkante in Wachstumsrichtung. Die Rechnung [160] berücksichtigt Verspannungen und das Hartree-Potenzial der Ladungen. Deutlich ist die große Leicht-Loch-Schwer-Loch-Aufspaltung in der Heterostruktur zu erkennen.

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen

In diesem Abschnitt werden Dioden des Wafers S1324 untersucht, deren eingebettete Germaniumschicht nominell unterhalb der kritischen Schichtdicke für plastische Relaxationsprozesse liegt. Der in einer Silizium-Matrix eingebettete Germaniumfilm besitzt eine Dicke von 4.0 bis 4.5 Monolagen Germanium.

Die Abbildung 7.1 zeigt einen selbstkonsistent berechneten Verlauf der Valenzbandkante in Wachstumsrichtung. Zusätzlich sind die Positionen der Grundzustände und ersten angeregten Zustände der schweren (hh) und leichten Löcher (lh) in den Quantentöpfen eingetragen. Die Rechnung basiert auf der Diagonalisierung des 4-Band-Luttinger-Hamilton-Operators unter Berücksichtigung der Verspannung und des Hartree-Potenzials der Ladungen im System. Die Rechnungen wurden von R. Winkler [160] durchgeführt. Die Eingabeparameter entsprechen den nominellen Wachstumsparametern des Wafers S1324; siehe hierzu Kapitel 5. Im thermodynamischen Gleichgewicht sind die Grundzustände der schweren Löcher in den Quantentöpfen besetzt. Die höchste Ladungsträgerdichte befindet sich in der dünnen Germaniumschicht. Deutlich weniger Ladungsträger sind in den Siliziumgermanium-Quantentöpfen lokalisiert.

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen

In Abbildung 7.2 ist der Verlauf der Ladungsverteilung skizziert. Entsprechend der Ladungsverteilung ist die Bandkante in Richtung der Germaniumschicht stark angehoben. Hierdurch erhalten die Siliziumgermanium-Quantentöpfe einen dreiecksförmigen Verlauf. An der Grenzschicht zu den hochdotierten Silizium-Zuleitungen bilden sich auf Grund der Verarmungsschicht dreiecksförmige Barrieren, durch die die Löcher aus den Zuleitungen in die Siliziumgermanium-Quantentöpfe tunneln. Die Kopplung an die Zuleitungen ist trotz der dreiecksförmigen Barriere stark, so dass nur der zweidimensionale Schwer-Loch Grundzustand eine hinreichend hohe Lebenszeit besitzt und somit von den dreidimensionalen Schwer-Loch-Zuständen in den Zuleitungen unterscheidbar ist. Die angeregten Zustände in den Siliziumgermanium-Quantentöpfen koppeln so stark an die Zustände in den Zuleitungen, dass sie quasi-kontinuierlich verteilt sind. Im Germaniumfilm existieren vier quasi-gebundene Zustände, die jeweils dem Grundzustand ( $hh_0, lh_0$ ) und ersten angeregten Zustand ( $hh_1, lh_1$ ) der schweren und leichten Löcher entsprechen. Die Mitte zwischen der Bandkante der schweren und leichten Löcher im Quantentopf definiert den Nullpunkt in Abbildung 7.1. Bezogen auf diesen Nullpunkt liegt die Fermi-Energie bei  $E_F = -57$  meV. Der Abstand der Valenzbandkante zur Fermi-Energie beträgt zirka  $27$  meV<sup>1</sup>. Der quasi-gebundene Schwer-Loch Zustand in den Siliziumgermanium-Quantentöpfen liegt bei zirka  $-39$  meV. Der Grundzustand der schweren Löcher in der Germaniumschicht besitzt die Energie  $E_{hh_0} = +13$  meV. Der erste angeregte Zustand hat die Energie  $E_{hh_1} = -383$  meV. Die entsprechenden Leicht-Loch Zustände liegen bei  $E_{lh_0} = -138$  meV und  $E_{lh_1} = -523$  meV. Die im Rahmen der Tunnelspektroskopie zugänglichen Energien entsprechen den Energiedifferenzen der einzelnen Zustände zueinander. Die Abstände der Energieeigenwerte des Germanium-Quantentopfs sind:

$$\Delta E_{hh_1}^{hh_0} = E_{hh_0} - E_{hh_1} = 393 \text{ meV}, \quad (7.2)$$

$$\Delta E_{lh_1}^{lh_0} = E_{lh_0} - E_{lh_1} = 385 \text{ meV}, \quad (7.3)$$

$$\Delta E_{lh_0}^{hh_0} = E_{hh_0} - E_{lh_0} = 151 \text{ meV}, \quad (7.4)$$

$$\Delta E_{hh_1}^{lh_0} = E_{lh_0} - E_{hh_1} = 245 \text{ meV}, \quad (7.5)$$

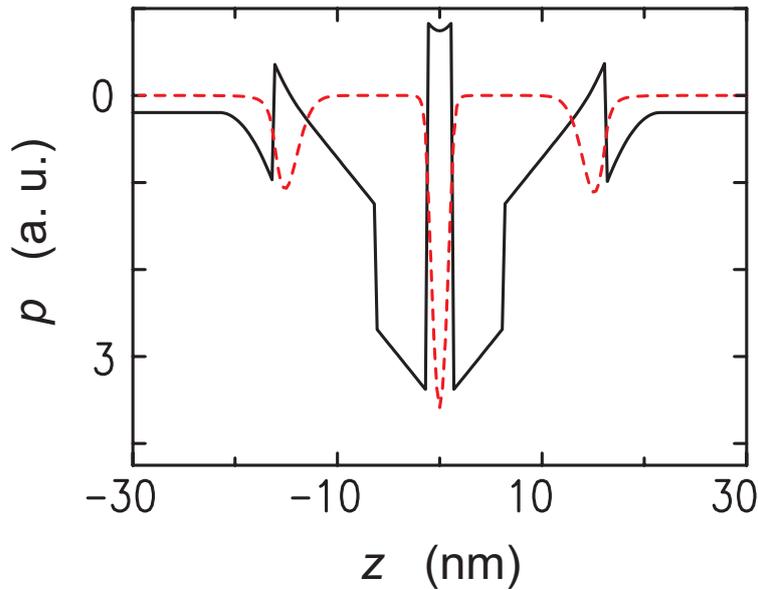
$$\Delta E_{lh_1}^{hh_1} = E_{hh_1} - E_{lh_1} = 140 \text{ meV}. \quad (7.6)$$

Für den Ladungstransport in der in Abbildung 7.1 gezeigten Struktur erwartet man im Bild des resonanten Tunnelstroms Bereiche in der Kennlinie mit Strommaxima und *negativ differenzieller Leitfähigkeit* (NDC - engl. **n**egative **d**ifferential **c**onductivity). Entsprechend der Erklärungen in Abschnitt 3.2 ergibt sich ein Strommaximum, wenn ein Subband des Germanium-Quantentopfes in Resonanz mit der

<sup>1</sup>Für die selbstkonsistente Rechnung ist der Abstand der Fermi-Energie zur Bandkante ein Eingabeparameter. Eine Abschätzung für den Startwert ist

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m^*} (3\pi^2 p)^{\frac{2}{3}} + V(z) \quad (7.1)$$

mit  $V(z) = 0$ . An der Gleichung (7.1) ist abzulesen, dass die Fermi-Energie, die Ladungskonzentration und das Bandprofil selbstkonsistent zu bestimmende Größen sind.



**Abbildung 7.2.:** Ladungsverteilung. Die meisten Ladungsträger befinden sich in der dünnen Germaniumschicht zwischen den Siliziumbarrieren. Hieraus resultiert die starke Bandverbiegung.

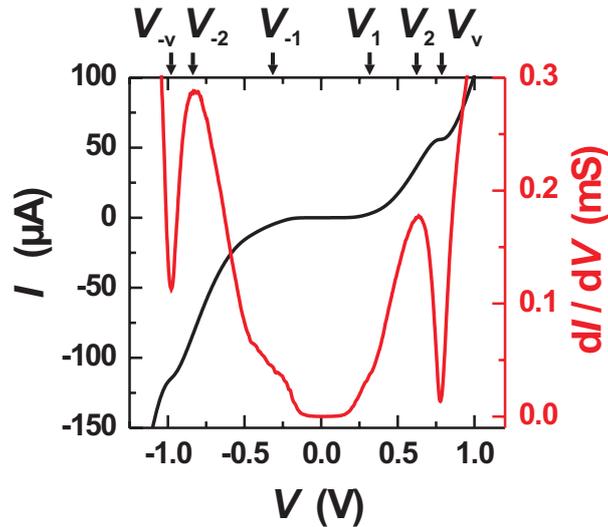
Fermi-Energie des hochdotierten Silizium-Emitters tritt und gleichzeitig freie Zustände im Kollektor vorhanden sind. Weitere Maxima sind zu erwarten, wenn Subbänder der benachbarten Quantentöpfe untereinander in Resonanz geraten. Sind die Quantentöpfe gegenseitig nur schwach gekoppelt, so überlappen ihre Wellenfunktionen nicht. Die jeweilige Wellenfunktion eines Subbandes ist demnach nicht sensibel für Eigenarten des benachbarten Quantentopfes und der benachbarte Quantentopf wirkt wie eine Barriere.

Nicht-kohärente Transportprozesse, wie inelastische Streuung [64, 65], führen zu einer Änderung der Phasenbeziehung und somit einem *Aufweichen* von Impuls- und Energieerhaltung. Hierdurch stehen für den Transport mehrere Tunnelkanäle zur Verfügung, die zudem im Quantentopf miteinander interferieren können. Dies führt einerseits zu einer Verbreiterung der Resonanz, andererseits ist die Transmission stets kleiner als 100%. In realen Bauelementen ist grundsätzlich mit einem gewissen Anteil nicht-kohärenter Transportprozesse zu rechnen. Eine sequenzielle Formulierung des Tunnelstroms ist daher zweckmäßig und wird im Folgenden genutzt.

## 7.1. Resonanter Tunnelstrom

In Abbildung 7.3 ist eine typische nicht-lineare Strom-Spannungs-Charakteristik einer Tunneldiode mit nominell  $1.4 \mu\text{m}$  Durchmesser des Wafers S1324 gezeigt. Im Spannungsbereich von  $-1.1 \text{ V}$  bis  $1.0 \text{ V}$  sind in der Kennlinie deutlich zwei Stromplateaus zu erkennen. Im negativen Spannungsast liegt das Plateau bei  $V_{-v} =$

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen



**Abbildung 7.3.:** Strom-Spannungs-Charakteristik einer Tunnel diode (Wafer S1324) mit  $1.4 \mu\text{m}$  Durchmesser. Die Kennlinie wurde bei einer Umgebungstemperatur von zirka  $350 \text{ mK}$  aufgezeichnet. In Rot ist die differentielle Leitfähigkeit eingetragen. An den Positionen  $V_{\pm 1}$  sind Sattelpunkte, bei  $V_{\pm 2}$  Maxima und bei  $V_v$  liegen Minima in der differentielle Leitfähigkeit.

$978 \text{ mV}$  und trägt den Strom  $I_{-v} = 115 \mu\text{A}$ . Das Plateau im positiven Spannungsast liegt bereits bei  $V_v = 777 \text{ mV}$  und trägt den Strom von  $I_v = 56 \mu\text{A}$ . In der roten Kurve, der zugehörigen numerisch differentielle Leitfähigkeit  $G(V) = dI/dV$ , sind weitere Strukturen zu erkennen. Den bereits erwähnten Stromplateaus entsprechen Minima in der differentielle Leitfähigkeit. Zusätzlich sind in der Ableitung für jede Polarität zwei deutliche Leitfähigkeitsmaxima bei  $V_{-2} = -820 \text{ mV}$  und  $V_2 = 636 \text{ mV}$  zu beobachten. Zudem sind zwei schwach ausgeprägte Plateaus bei  $V_{-1} = -310 \text{ mV}$  und  $V_1 = 306 \text{ mV}$ . Die Bestimmung der Spannungsposition von  $V_{\pm 1}$  ist auf Grund der stark verbreiterten Struktur schwierig. Der Fehler in der Positionsbestimmung liegt bei zirka  $20\%$ . Auf Grund des berechneten Potenzialprofils (Abbildung 7.1) ist es nahe liegend, den beiden Resonanzen bei  $V_{\pm 1}$  und  $V_{\pm 2}$  Tunnelprozesse aus den kontinuierlich besetzten Schwer-Loch Emitter-Zuständen in Subbänder des schmalen Germanium-Quantentopfs zuzuschreiben. Das schwach ausgeprägte Plateau in der ersten Ableitung resultiert aus dem resonanten Tunneln von schweren Löchern aus den dreidimensionalen Emitter-Zuleitungen in den zweidimensionalen Leicht-Loch Grundzustand des Germanium-Quantentopfes. Die zweite Resonanz entspricht einem Tunneln aus dreidimensionalen Schwer-Loch Zuständen im Emitter in den ersten angeregten Schwer-Loch-Zustand des Germanium-Quantentopfes. Der energetische Abstand des Leicht-Loch Grundzustands zum ersten angeregten Schwer-Loch-Zustand beträgt für die simulierte Struktur  $245 \text{ meV}$ ; siehe Gleichung (7.5). In der Kennlinie beträgt die Spannungsdifferenz zwischen dem schwach ausgeprägten Plateau und dem Maximum in

der Leitfähigkeit

$$\Delta V_{12}^- = V_{-1} - V_{-2} = (510 \pm 11\%) \text{ mV} \quad (7.7)$$

in der negativen Spannungspolarität und

$$\Delta V_{21}^+ = V_2 - V_1 = (330 \pm 10\%) \text{ mV} \quad (7.8)$$

für die positive Polarität. Für eine quantitative Analyse ist es notwendig, den Spannungen beziehungsweise Spannungsdifferenzen Energiedifferenzen zuzuordnen. Für komplexe Mehrbarrierenstrukturen wie der untersuchten Heterostruktur ist es sehr schwierig [161], den Spannungsabfall über den einzelnen Tunnelbarrieren zu bestimmen. Somit ist eine Interpretation der Spannungsskalen als Energieskalen problematisch. Die experimentelle Bestimmung eines Spannungs-Energie-Konversionsfaktors  $\alpha$  bei Doppelbarrierenstrukturen geschieht üblicherweise durch temperaturabhängige Messungen der Strom-Spannungs-Kennlinien [162]. Meist ist eine temperaturabhängige Verbreiterung der Resonanzen in der Kennlinie zu beobachten. Unter der Annahme, dass eine Temperaturerhöhung im Wesentlichen eine Verbreiterung der Fermi-Kante des Emitters bewirkt, entspricht der Verbreiterung der Stromresonanz der energetischen Verbreiterung der Fermi-Funktion. Über die Beziehung (2.80) aus Kapitel 2.3.1 lässt sich dann ein Konversionsfaktor  $\alpha$  bestimmen. Eine weitere Möglichkeit, den Konversionsfaktor experimentell zu bestimmen, basiert auf der Untersuchung der Positionsänderung der Stromresonanzen als Funktion eines äußeren statischen Magnetfeldes. Die Verschiebung auf der Spannungsskala ist proportional zu  $\hbar\omega_c$ . Somit ist eine Korrelation zwischen Spannungs- und Energieskala realisiert.

Auf Grund des hohen Anteils an parasitären Strömen in den untersuchten Dioden ist die Positionsbestimmung der Leitfähigkeitsresonanzen mit einer relativ großen Unsicherheit von bis zu 20% versehen; dies erschwert eine genaue Bestimmung des Konversionsfaktors. Dennoch lassen sich Größe und Spannungsverhalten des Konversionsfaktors aus den Kennlinien abschätzen.

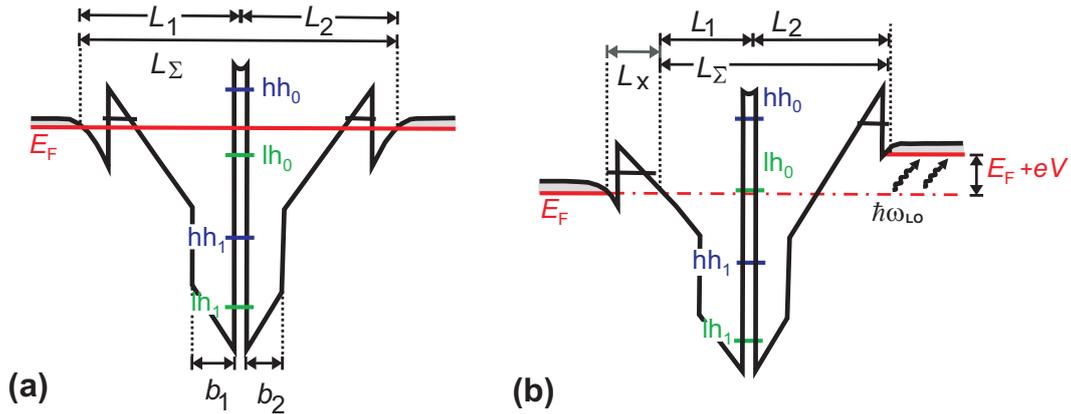
Bis zu den schwach ausgeprägten Plateaus bei  $V_{\pm 1}$  verläuft die differenzielle Leitfähigkeit symmetrisch für beide Polaritäten. Der Konversionsfaktor sollte daher in diesem Spannungsbereich für beide Polaritäten gleich sein. Für Spannungen oberhalb von  $V_{\pm 1}$  entwickelt sich die Kennlinie asymmetrisch; hier ist eine Aussage über den Konversionsfaktor schwierig. Es ist jedoch damit zu rechnen, dass er sich entsprechend unterschiedlich in den beiden Polaritäten entwickelt. Unter der Annahme, dass die Spannungsdifferenz zwischen  $V_{\pm 2}$  und  $V_{\pm 1}$  mit der Energieseparation des Grundzustands der leichten Löcher und dem ersten angeregten Schwer-Loch-Zustand in dem Germanium-Quantentopf korreliert, ergeben sich für die entsprechenden Spannungsbereiche folgende mittlere Konversionsfaktoren. Für den negativen Spannungssast gilt

$$\langle \alpha^- \rangle = \Delta E_{hh_1}^{lh_0} / \Delta V_{12}^- = 245/510 \approx 1/2 \quad (7.9)$$

und für die positive Spannungspolarität

$$\langle \alpha^+ \rangle = \Delta E_{hh_1}^{lh_0} / \Delta V_{21}^+ = 245/330 \approx 3/4. \quad (7.10)$$

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen



**Abbildung 7.4.:** (a) Schematischer Verlauf der Valenzbandkante der schweren Löcher im Gleichgewichtszustand. Zusätzlich sind im Germaniumfilm der Grundzustand und der erste angeregte Zustand für schwere und leichte Löcher eingezeichnet. Die Darstellung ist so gewählt, dass Loch-Energien zum oberen Seitenrand zunehmen. (b) Auf Grund einer äußeren Spannung ist die Valenzbandkante verkippt, so dass schwere Löcher aus der linken Zuleitung (Emitter) resonant durch einen Leicht-Loch-Zustand im Germaniumfilm tunneln können. Bei dem Übergang in die rechte Zuleitung (Kollektor) relaxieren die Ladungsträger durch Emission von longitudinal-optischen (LO) Phononen. Dies führt zu einer Erwärmung des Kollektors.

In der negativen Spannungspolarität fällt somit zwischen dem Emitter und den Subbändern im Germanium-Quantentopf im Mittel die Hälfte der angelegten Spannung ab. In der positiven Polarität ist der Spannungsabfall zirka um das 3/2-fache größer. Diese Asymmetrie lässt sich vermutlich auf eine unterschiedliche effektive Barrierenbreite zurückführen. Unabhängig von der detaillierten Potenzialstruktur korreliert mit dem Spannungsabfall zwischen Emitter und Subband der Widerstand  $R_1$ . Entsprechend korreliert ein Widerstand  $R_2$  mit einem Spannungsabfall zwischen Subband und Kollektor. In dieser Interpretation lautet der Konversionsfaktor

$$\alpha = \frac{R_1}{R_\Sigma} \sim \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (7.11)$$

mit  $R_\Sigma \sim R_1 + R_2$  dem Gesamtwiderstand der aktiven Zone. Der Widerstand ergibt sich wiederum aus dem Überlapp der Wellenfunktion der Emitter-Zustände mit den Subband-Zuständen. Neben der effektiven Masse und der Potenzialhöhe ist der entscheidende Parameter für den Überlapp zweier Zustände die Breite der Potenzialbarriere. Die Verhältnisse der effektiven Masse sind unabhängig von der Spannungspolarität. Die Differenz in der Potenzialhöhe bezüglich der Polarität ist sehr gering und deshalb zu vernachlässigen. Entscheidend ist somit die Variation der Barrierenbreite in Abhängigkeit der Polarität. Es ergibt sich hiermit eine geometrische Interpretation des Konversionsfaktors. Die effektive Barrierenbreite zwischen Emitter und Kollektor ist  $L_\Sigma$ . Sie teilt sich in einen Anteil entsprechend der emitterseitigen Barriere  $L_1$  und der kollektorseitigen Barriere  $L_2$  auf. Die Bestim-

mungsgleichung (7.11) für den Konversionsfaktor lautet dann entsprechend

$$\alpha = \frac{L_1}{L_\Sigma} \sim \frac{L_1}{L_1 + L_2}. \quad (7.12)$$

Mit Hilfe von Abbildung 7.4 ist das Spannungsverhalten des Konversionsfaktors leicht nachzuvollziehen. Für geringere Spannungen  $|V| \ll V_{\pm 1}$  müssen die Ladungsträger bereits aus der Verarmungszone über eine Distanz  $L_\Sigma$  in den Kollektor tunneln. Unterschiede in der Dicke der Silizium-Barrieren ( $b_1, b_2$ ) sind auf Grund der starken Bandverbiegung zu vernachlässigen. Sie bewirken nur eine minimale Variation von  $L_1$  beziehungsweise  $L_2$ . In diesem Spannungsbereich gilt  $L_1 \approx L_2$  und somit

$$\alpha \approx 1/2 \quad (|V| \ll V_{\pm 1} \quad \text{und/oder} \quad L_1 \approx L_2). \quad (7.13)$$

Mit zunehmender äußerer Spannung verstärkt sich die Kopplung der Zuleitungen an die Siliziumgermanium-Quantentöpfe; die Barrieren sind deutlich transparenter geworden. Im Bereich  $L_x$  liegen quasi-kontinuierliche dreidimensionale Zustände. Entsprechend gering ist der Spannungsabfall in dieser Zone. So lange kein Zustand des Germanium-Quantentopfs mit dem Fermi-Niveau der Emitter-Zuleitung in Resonanz ist, tunneln die Ladungsträger über die Distanz  $L_\Sigma$  aus der Emitter-Zuleitung in die Kollektor-Zuleitung. Im Vergleich zur „fast“ Gleichgewichtssituation ist  $L_\Sigma$  deutlich reduziert, so dass Variationen von  $b_1$  und  $b_2$  durchaus eine Wirkung zeigen können. Gilt für die „fast“ Gleichgewichtssituation  $L_1 \approx L_2 \approx L_\Sigma/2$ , ist das Verhältnis für hohe Spannungen stark von dem Dickenverhältnis der Barrieren abhängig. Im Fall einer breiteren emitterseitigen Barriere ist  $L_1 > L_2$  und der Kollektor koppelt besser an Niveaus im Quantentopf als der Emitter. Die Transmission durch die Emitter-Barriere nimmt mit steigender Spannung ab und die Ladungsträger tunneln durch eine effektiv höhere Barriere. Hieraus resultiert ein Konversionsfaktor

$$\alpha > 1/2 \quad (|V| > V_{\pm 1} \quad \text{und} \quad L_1 > L_2). \quad (7.14)$$

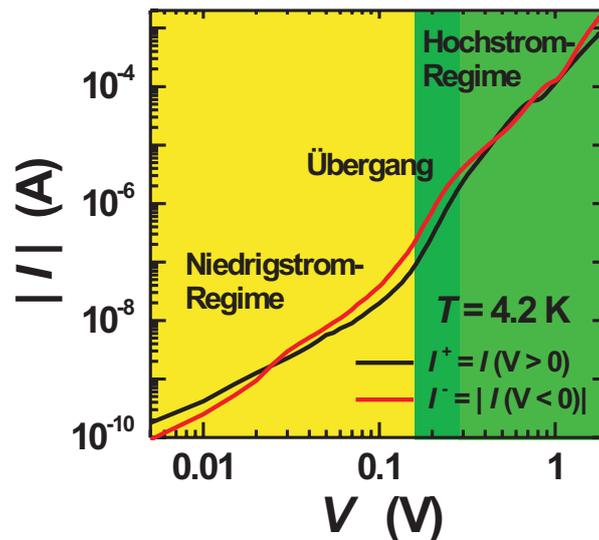
Im Fall einer dickeren kollektorseitigen Barriere nimmt die Transmission mit steigender Spannung zu, da die Struktur durch die Spannung stark verkippt wird und die Ladungsträger mit einer effektiv dünneren Barriere wechselwirken:

$$\alpha \lesssim 1/2 \quad (|V| > V_{\pm 1} \quad \text{und} \quad L_1 < L_2). \quad (7.15)$$

Im Mittel ist für eine dickere kollektorseitige Barriere ( $L_1 < L_2$ ) die Verweildauer der Ladungsträger in den quasi-gebundenen Zuständen des Germanium-Quantentopfs größer als für den umgekehrten Fall einer dickeren emitterseitigen Barriere ( $L_1 > L_2$ ). Auf Grund der erhöhten Verweildauer spricht man von einer *dynamischen Akkumulation* der Ladungsträger in den quasi-gebundenen Zuständen. Entsprechend wird die Barrieren-Konstellation ( $L_1 < L_2$ ) *Aufladungsregime* beziehungsweise ( $L_1 > L_2$ ) *Nicht-Aufladungsregime* genannt. Die Aufladung der Zustände macht sich in einem Hystereseverhalten bei auf- und absteigender Spannung bemerkbar.

Die Asymmetrie in der Strom-Spannungs-Kennlinie resultiert somit aus einer

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen



**Abbildung 7.5.:** Doppellogarithmische Darstellung der Strom-Spannungs-Kennlinie. In der Kennlinie sind zwei Transportregime zu erkennen: Ein Niedrigstrom-Regime bis zirka 150 mV, dann folgt ein Übergangsbereich in ein Hochstrom-Regime.

Asymmetrie in der nominell symmetrisch gewachsenen Heterostruktur. In der negativen Spannungspolarität tunneln die Ladungsträger zuerst durch eine dünne emitterseitige Barriere und anschließend durch eine dickere kollektorseitige Barriere. Durch ein Wechseln der Polarität wird die Emitter-Barriere zur dickeren der beiden Barrieren. Aus der Polarität erhält man zudem die Information, dass die dickere Barriere die substratseitige Barrierenstruktur ist.

Weitere Details der Kennlinie sind in einer doppellogarithmischen Auftragung zu erkennen. Die Abbildung 7.5 zeigt die doppellogarithmische Darstellung der Strom-Spannungs-Kennlinie aus Abbildung 7.3. Deutlich lassen sich drei Transportregime identifizieren: Ein Niedrigstrom-Regime, ein Übergangsbereich und ein Hochstrom-Regime. Der Transport im Niedrigstrom-Regime liegt im Spannungsbereich fernab der Resonanz des Leicht-Loch-Grundzustands. Der Strom in diesem Bereich ist dominiert von nicht-resonanten, parasitären Transportprozessen, wie beispielsweise direkten Tunnelprozessen zwischen den Zuleitungen oder Hopping-Transportmechanismen über Störstellen. Dem Transport im Niedrigstrom-Regime ist ein Extraabschnitt 7.2 gewidmet. Im Übergangsbereich dominieren zunehmend resonante Stromanteile die Kennlinie. Der Beginn des Hochstrom-Regimes resultiert aus dem Erreichen der ersten Resonanz. Dann finden Tunnelprozesse zwischen schweren Löchern des Emitters und Leicht-Loch-Subband-Zuständen statt. Auf Grund der hohen Transmission der Barrierenstruktur in Resonanz fließt ein großer Strom, wobei gleichzeitig inelastische Transportmechanismen durch Zuführen Joulescher Wärmeleistung ( $\sim RI^2$ ) gefördert werden. Daher kehrt das System zwischen der ersten und zweiten Resonanz nicht erneut in ein Niedrigstrom-Regime zurück. Mit zunehmender Spannung bestimmen parasitäre Transportprozesse den Strom im Hochstrom-Regime. Die Strom-Spannungs-Charakteristik ist somit die

Summe aus resonanten und nicht-resonanten Stromanteilen,

$$I = I_{\text{RT}} + I_{\text{NRT}}. \quad (7.16)$$

Der nicht-resonante Tunnelstrom,  $I_{\text{NRT}}$ , des Hochstrom-Regimes setzt sich wiederum aus vielseitigen Prozessen zusammen. Mögliche Prozesse sind: Tunnelprozesse über Störstellen [64, 163, 164, 165], elastische Streuprozesse über Verunreinigungen, Grenzflächenrauigkeiten, zufällige Legierungsschwankungen [166, 167, 168] oder inelastische Streuprozesse von Ladungsträgern untereinander beziehungsweise mit Phononen [166, 168, 169, 170]. Diese Streumechanismen führen zu einer Verbreiterung der Stromresonanz und somit zu einem höheren Strom im Minimum nach der Resonanz, dem so genannten Valley<sup>2</sup>-Strom. Die Heteroübergänge, die die Barrieren definieren, sollten daher auf atomarer Skala glatt sein, so dass beim Tunneln der transversale Impuls erhalten bleibt und Streuprozesse an Grenzflächenrauigkeiten reduziert werden. Die Barrieren und der Quantentopf sollten keine Ladungsträger enthalten, um Ladungsträger-Wechselwirkungen zu reduzieren. Die Dotierung in den Zuleitungen sollte einerseits hoch genug sein, um einen Spannungsabfall in den Zuleitungen gering zu halten, andererseits auch nicht zu groß sein, so dass in der Verarmungszone des Kollektors keine zu große Kapazität entsteht.

### 7.1.1. Temperaturabhängigkeit des Tunnelstroms

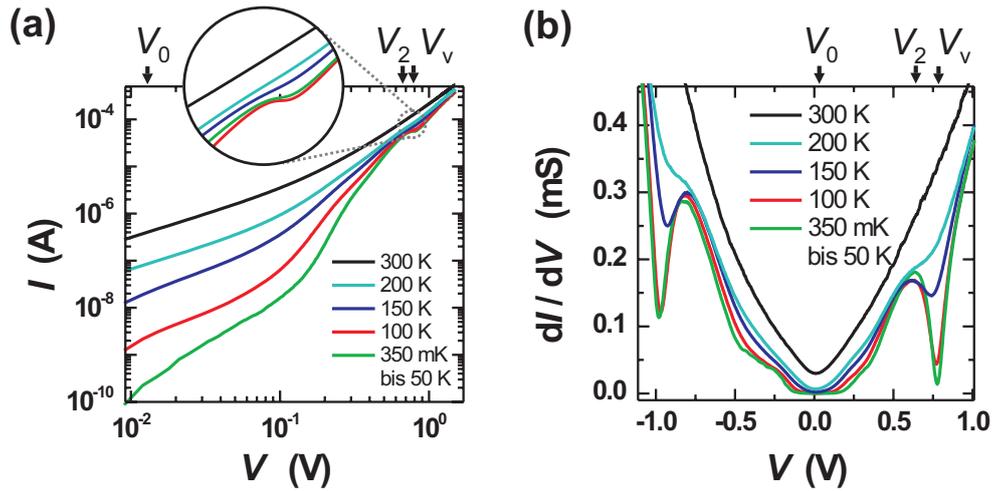
Wenn die Temperatur zunimmt, verbreitert sich die Fermi-Kante im Emitter entsprechend der Fermi-Verteilungsfunktion (2.79). Die thermisch aktivierten Ladungsträger im Emitter können in Quantentopf-Zustände tunneln, wenn die Energiedifferenz zwischen Fermi-Kante des Emitters und Quantentopf-Subband in der Größenordnung von  $kT$  liegt. Hierdurch werden Strukturen in der Kennlinie geglättet beziehungsweise, wenn  $5kT$  in der Größe der charakteristischen Energien der resonanten Tunnelstruktur liegt, ausgewaschen. Es ist notwendig, zwischen der Umgebungstemperatur  $T$ , die durch das Kryostatsystem zur Verfügung gestellt wird und der Temperatur des Ladungsträgersystems  $T_{\text{eff}}$  zu unterscheiden. Insbesondere bei tiefen Temperaturen gilt auf Grund von thermoelektrischen Prozessen [171, 172, 173, 174, 175, 176], wie beispielsweise das Joulsche Heizen des Bauelements oder der Injektion von heißen Ladungsträgern, dass  $T_{\text{eff}} \geq T$  ist; siehe hierzu auch Kapitel 3.4.2. Die Umgebungstemperatur lässt sich unmittelbar im Experiment messen beziehungsweise einstellen; hingegen ist die effektive Ladungsträgertemperatur indirekt in der Kennlinie enthalten.

In diesem Abschnitt wird das Transportverhalten in Abhängigkeit der Umgebungstemperatur untersucht. Hierzu werden Strom-Spannungs-Kennlinien im Bereich von -1.1 V bis +1.0 V im Temperaturbereich von 350 mK bis 300 K aufgenommen. Eine detaillierte Untersuchung des Temperaturverhaltens des Niedrigstrom-Regimes im Bereich von 50 mK bis 1 K wird gesondert in Abschnitt 7.2 diskutiert. Die Abbildung 7.6 (a) zeigt in einer doppellogarithmischen Darstellung fünf

---

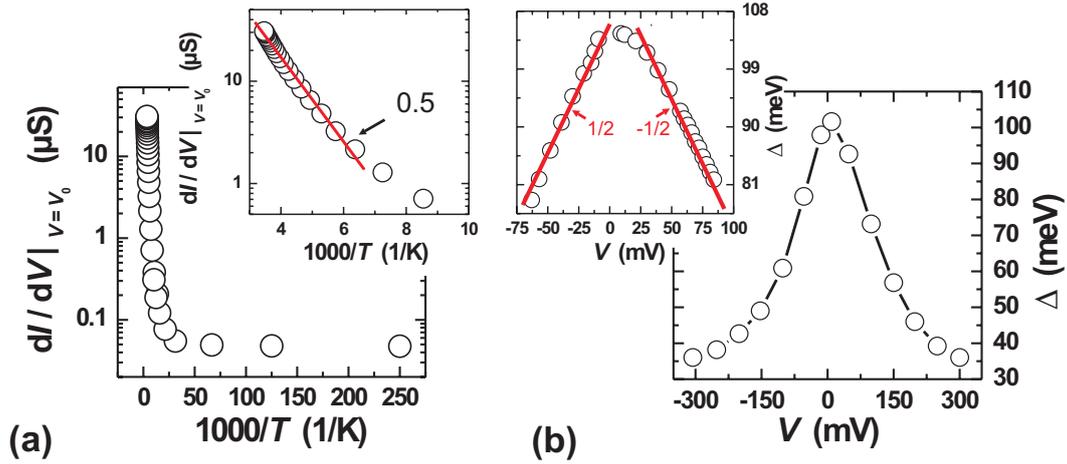
<sup>2</sup>engl. Tal

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen



**Abbildung 7.6.:** Temperaturverhalten der Strom-Spannungs-Charakteristik einer Tunnel diode (S1324) mit  $1.4 \mu\text{m}$  Durchmesser. **(a)** Doppellogarithmische Darstellung der Kennlinien unterschiedlicher Umgebungstemperaturen. **(b)** Verlauf der entsprechenden differentiellen Leitfähigkeit. Ergänzend sind in den Abbildungen 7.8 und 7.9 die differentielle Leitfähigkeit bei  $V_0$ ,  $V_2$  der Peakposition und  $V_v$  der Position des Minimums als Funktion der Temperatur gezeigt. Die Untersuchungen umfassen den Temperaturbereich von 350 mK bis zur Raumtemperatur (300 K).

Strom-Spannungs-Kennlinien für die Temperaturen von 350 mK bis 300 K. Im Niedrigstrom-Regime des nicht-resonanten Transportbereichs ist deutlich zu erkennen, dass mit einer Erhöhung der Temperatur der Strom zunimmt. Der Übergang zum Hochstrom-Regime, bei dem der resonante Tunnelstrom einsetzt, flacht mit der Zunahme der Temperatur ab. Die grundsätzliche Veränderung in der Kennlinie auf Grund der Temperaturerhöhung führt zu einer Zunahme des Stroms und gleichsam einem „Auswaschen“ der Strukturen. Dies resultiert aus der Zunahme der inkohärenten Stromanteile mit zunehmender Temperatur. Die Veränderungen in der Kennlinie sind besonders deutlich in der zugehörigen differentiellen Leitfähigkeitskurve zu erkennen. Daher konzentriert sich die Analyse auf die entsprechenden Kurven. Abbildung 7.6 (b) zeigt die Veränderungen der differentiellen Leitfähigkeit bei Variation der Umgebungstemperatur. Die äußere, grüne Kurve zeigt den Verlauf der differentiellen Leitfähigkeit für Umgebungstemperaturen im Bereich von 350 mK bis zirka 50 K. Innerhalb der gewählten Spannungsdarstellung sind für diesen Temperaturbereich keine Veränderungen beobachtbar. Die differentielle Leitfähigkeit ist unabhängig gegen Temperaturänderungen bis zu 50 K. Für Temperaturen oberhalb von 50 K setzt das bereits erwähnte Auswaschen der Strukturen in der differentiellen Leitfähigkeit ein. Hierbei werden insbesondere die Minima durch die Temperaturerhöhung angehoben. Bei 300 K sind keine ausgeprägten Minima und Maxima zu erkennen. Um das Temperaturverhalten im Detail zu verstehen, wird für drei signifikante Spannungen des positiven Spannungssastes die differentielle Leitfähigkeit als Funktion der Temperatur untersucht. Hierbei wird eine Spannung des



**Abbildung 7.7.:** Differenzielle Leitfähigkeit bei  $V_0 = 12$  mV als Funktion der Temperatur. **(a)** Arrhenius-Darstellung. Der Bildausschnitt belegt ein aktiviertes Transportverhalten oberhalb von 160 Kelvin. **(b)** Spannungsabhängiger Verlauf der Aktivierungsenergie. Für beide Spannungspolaritäten ist ein relativ symmetrisches Verhalten der spannungsabhängigen Aktivierungsenergie zu beobachten. Bis zu einer Vorspannung von  $\pm 100$  mV ist das Spannungsverhalten der Aktivierungsenergie nahezu linear, wie im Innenbild zu sehen ist. Aus dem Spannungsverhalten lässt sich der Spannungs-Energie-Konversionsfaktor  $\alpha$  abschätzen.

Niedrigstrom-Regimes nahe dem Nullpunkt bei  $V_0 = 12$  mV sowie die Position des Leitfähigkeitsmaximums bei  $V_2 = 634$  mV und des Minimums bei  $V_v = 777$  mV gewählt. Das Temperaturverhalten bei kleiner Vorspannung  $V_0$  ist in Abbildung 7.7 gezeigt. Der Graph 7.7 **(a)** zeigt die differenzielle Leitfähigkeit bei  $V_0$  als Funktion der Temperatur in einer Arrhenius-Darstellung. Eine entscheidende Veränderung in der differenziellen Leitfähigkeit ist erst oberhalb von 50 K zu beobachten. Unterhalb von 50 K zeigt die differenzielle Leitfähigkeit keine Temperaturabhängigkeit. Im kleinen Innenbild, das einen Ausschnitt der Kurve für Temperaturen oberhalb von 100 K zeigt, ist ein aktiviertes Verhalten der differenziellen Leitfähigkeit über zirka zwei Größenordnungen in der Leitfähigkeit zu beobachten. Nach Gleichung (3.99) aus Kapitel 2.3.1 ist die klassische Verteilungsfunktion als Näherung für die Besetzung der Zustände im Emittor gerechtfertigt. Hieraus resultiert ein Temperaturverhalten des Tunnelstroms

$$I \propto T \times \exp\left(-\frac{|E_{lh_0} - E_F| - eV}{kT}\right). \quad (7.17)$$

Für die differenzielle Leitfähigkeit ist somit das Temperaturverhalten

$$\frac{dI}{dV} \propto \exp\left(-\frac{\Delta(V)}{kT}\right) \quad (7.18)$$

zu erwarten. Hierbei ist  $\Delta(V) = |E_{lh_0} - E_F| - eV$  die spannungsabhängige Aktivierungsenergie. Für die gewählte Darstellung in Abbildung 7.7 **(a)** erhält man aus

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen

der Steigung der Kurve den Wert der Aktivierungsenergie bei 12 mV

$$\Delta(12 \text{ mV}) \simeq k \times (0.5 \times \ln(10) \times 1000) \approx 100 \text{ meV}. \quad (7.19)$$

Hierbei sind  $\ln(10) \times 1000$  zwei darstellungsbedingte Umrechnungsfaktoren. Die Abbildung 7.7 (b) zeigt das Spannungsverhalten der Aktivierungsenergie. Für den gewählten Spannungsbereich ist ein symmetrisches Spannungsverhalten zu beobachten. Unterhalb von  $\pm 100$  mV lässt sich der Verlauf linear nähern. Aus dem Spannungsverlauf der Aktivierungsenergie ist gleichsam eine Einschätzung des Spannungs-Energie-Konversionsfaktors  $\alpha$  möglich. Er resultiert aus der spannungsabhängigen Änderung der Aktivierungsenergie,

$$\alpha = \frac{1}{e} \frac{d}{dV} \Delta(V). \quad (7.20)$$

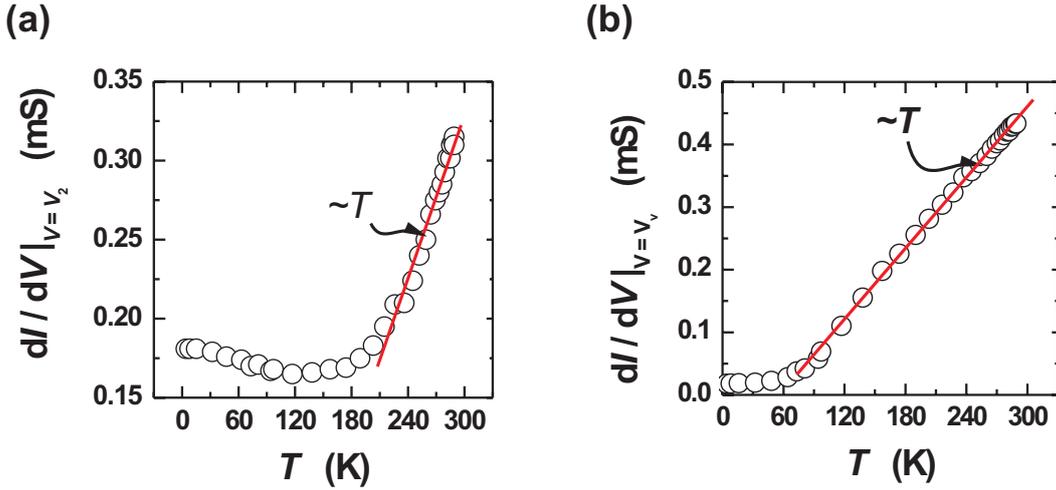
Im Innenbild von Abbildung 7.7 (b) besitzen die rot eingezeichneten Fit-Geraden die Steigung  $\pm 1/2$ . Entsprechend sollte der Konversionsfaktor in diesem Spannungsbereich in der Größe von  $1/2$  sein. Dies bestätigt die Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt, dass für kleine Vorspannungen der Spannungsabfall zwischen Emitter und dem quasi-gebundenen Zustand für beide Polaritäten gleich ist. Hieraus resultiert ein annähernd symmetrischer Verlauf der Potenzialstruktur. Aus Abbildung 7.7 (b) ist ferner zu entnehmen, dass für Spannungen oberhalb von  $\pm 100$  mV die Aktivierungsenergie deutlich nicht-linear abnimmt. Somit sollte auch der Konversionsfaktor entsprechend dem Verlauf der Aktivierungsenergie mit zunehmender Spannung kleiner werden. Wie zu erwarten war, wird die Potenzialstruktur mit zunehmender Vorspannung asymmetrisch. Für den Mittelwert des Konversionsfaktors im Spannungsbereich bis zu den schwach ausgeprägten Plateaus in der Leitfähigkeit  $V_{\pm 1}$  ergibt sich  $\langle \alpha \rangle = \Delta_0 / V_{\pm 1} \approx 0.3$ , wobei  $\Delta_0$  die Aktivierungsenergie ohne Vorspannung ist. Sie wird nur unwesentlich größer sein als der experimentell bestimmte Wert von  $\Delta(12 \text{ mV}) \approx 100 \text{ meV}$ . Zum Vergleich: Aus der selbstkonsistenten Rechnung ergibt sich für die Aktivierungsenergie ohne Vorspannung der Wert

$$\Delta_0 = E_{\text{lh}_0} - E_{\text{F}} = 138 \text{ meV} - 57 \text{ meV} = 81 \text{ meV}. \quad (7.21)$$

Die theoretische Vorhersage passt somit zu den experimentellen Werten.

Die Abbildung 7.8 zeigt die Temperaturabhängigkeit des Maximums und Minimums in der differentiellen Leitfähigkeit. In Abbildung 7.8 (a) ist zu beobachten, dass mit steigender Temperatur die Leitfähigkeit erst leicht reduziert wird, um anschließend bei Temperaturen oberhalb von 180 Kelvin linear mit der Temperatur anzusteigen. Dieses Verhalten resultiert aus der temperaturbedingten Minderung der Ladungsträger-Supply-Funktion; siehe Gleichung (3.23). Der lineare Anstieg erklärt sich aus dem Zusammenbruch des resonanten Tunnelregimes. Für Temperaturen unterhalb 150 Kelvin dominieren resonante Tunnelstromanteile die Kennlinienform. Es existieren Bereiche negativ differentieller Leitfähigkeit, wie z. B. bei  $V_v$ . Hier gilt

$$\left. \frac{dI}{dV} \right|_{V=V_2} > \left. \frac{dI}{dV} \right|_{V=V_v} \quad (T < 150 \text{ K}). \quad (7.22)$$



**Abbildung 7.8.:** (a) Differenzielle Leitfähigkeit bei  $V_2$  als Funktion der Temperatur. Von 350 mK bis 15 K sind keine Änderungen der Leitfähigkeit beobachtbar. Für höhere Temperaturen nimmt die Leitfähigkeit geringfügig ab und erreicht bei zirka 120 Kelvin ein Minimum. Oberhalb von 200 Kelvin nimmt die Leitfähigkeit linear mit der Temperatur zu. (b) Differenzielle Leitfähigkeit bei  $V_v$  als Funktion der Temperatur. Oberhalb von 120 Kelvin findet ein Übergang zu einem linearen Temperaturverhalten der differentiellen Leitfähigkeit statt. Im linearen Bereich der beiden Kurven beträgt die Steigung  $(1.7 \pm 0.1) \times 10^{-6}$  S/K.

Mit steigender Temperatur prägen nicht-resonante, parasitäre Stromanteile den Kennlinienverlauf. Der Bereich negativ differentieller Leitfähigkeit wird reduziert beziehungsweise verschwindet. Dieses Verhalten ist deutlich in Abbildung 7.6 (b) zu beobachten. Für Temperaturen oberhalb 150 Kelvin ist kein Minimum in der differentiellen Leitfähigkeit mehr zu erkennen,

$$\left. \frac{dI}{dV} \right|_{V=V_2} < \left. \frac{dI}{dV} \right|_{V=V_v} \quad (T > 150 \text{ K}). \quad (7.23)$$

Eine Abschätzung für den maximalen Temperaturbereich, in dem resonantes Tunneln den Transportprozess dominiert, ist mit Hilfe der Tunnelzeit  $\tau_T$  möglich. Die Tunnelzeit [41, 168, 177],

$$\tau_T = \frac{b}{v(E_z)} + \hbar \left. \frac{d\phi}{dE} \right|_{E=E_z} \quad (7.24)$$

ist die Zeit, die ein Teilchen zum Durchdringen einer Barriere benötigt. Hierbei ist der erste Term in Gleichung (7.24) die semiklassische Transferzeit, also die Zeit, die ein Teilchen mit der Geschwindigkeit  $v = \hbar^{-1} dE_z / dk_z = \hbar k_z / m^* = \sqrt{2(\Phi_0 - E_z) / m^*}$  benötigt, um die Strecke  $b$  zurückzulegen.  $\Phi_0$  ist die Höhe und  $b$  die Breite einer Barriere. Der zweite Term entspricht der quantenmechanischen Phasenzeit. Der Bereich negativ differentieller Leitfähigkeit ist eine Konsequenz der Erhaltung des transversalen Impulses während des resonanten Tunnelprozesses. Inelastische Streuprozesse, die den transversalen Impuls während des Übergangs

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen

ändern, müssen beim resonanten Tunneln auf großen Zeitskalen im Vergleich zur Tunnelzeit stattfinden,  $\tau_s \gg \tau_T$ . Impulsändernde Wechselwirkungszeiten sind in der Größenordnung  $\tau_s \sim \hbar/2kT$ . Hieraus ergibt sich die Temperaturbedingung für die Beobachtung negativ differenzieller Leitfähigkeitsbereiche:

$$\tau_T \ll \tau_s \sim \frac{1}{2} \frac{\hbar}{kT} \quad (7.25)$$

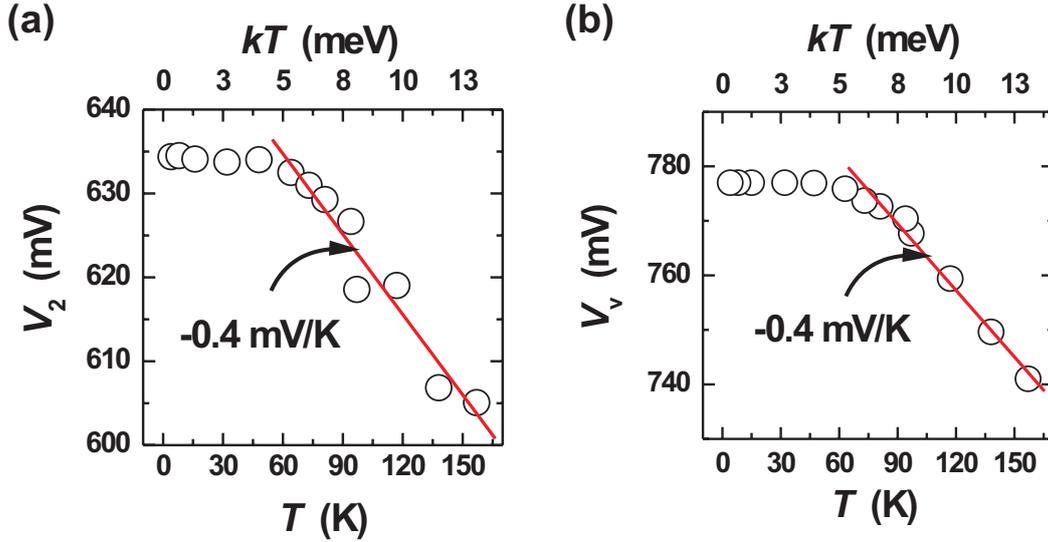
$$\leadsto kT_{\text{limit}} \ll \frac{\hbar}{\tau_T} \approx \frac{\hbar}{2b} \sqrt{\frac{2(\Phi_0 - E_z)}{m^*}}. \quad (7.26)$$

Die untersuchte Struktur hat eine nominelle Barrierenbreite von 5 nm. Die effektive Masse des tunnelnden Teilchens ist  $m_{\text{hh}}^{\text{Si}} \approx 0.5 \times m_0$ . Der erste angeregte Zustand befindet sich zirka 250 meV von der Oberkante der Tunnelbarriere entfernt. Daher sollte  $kT_{\text{limit}} \ll 30$  meV entsprechend einer Temperatur von 300 Kelvin sein. Auf Grund dieser Abschätzung ist nachzuvollziehen, dass oberhalb von 150 Kelvin keine typischen Merkmale des resonanten Tunnelns in der Kennlinie zu beobachten sind, obgleich die Bedingung  $kT \ll E_{n+1} - E_n$  in diesem Temperaturbereich erfüllt ist.

Die Abbildung 7.9 zeigt  $V_2$  und  $V_v$  als Funktion der Temperatur. Bis zu 50 K sind keine Positionsänderungen festzustellen. Oberhalb von 50 K schiebt sowohl  $V_2$  als auch  $V_v$  mit zirka -0.4 mV/K zu niedrigeren Spannungen. Dieses Verhalten ist das Resultat vieler Prozesse. Im Bild des resonanten Tunnelns ist der maximale Strom erreicht, wenn das Subband des Quantentopfes die Bandkante erreicht hat. Eine Temperaturerhöhung führt zu keiner Verschiebung der Spannungsposition des Maximums, sondern zu einer Reduzierung des Peak-Stromes und gleichzeitig einer „Abrundung“ des Strom-Maximums. Als Konsequenz dieser Verbreiterung, dessen Ursache die Temperaturverbreiterung des Subbandes ist, liegt jedoch das Maximum der ersten Ableitung bei niedrigerer Spannung. Die Temperaturverbreiterung des Subbandes ist von der Größe  $3.53kT$ . Die Verschiebung des Maximums sollte daher in der Größe  $3.53 \frac{kT}{2\alpha}$  liegen. Dies gestattet aus der beobachteten Verschiebung des Leitfähigkeitsmaximums  $V_2$  die Bestimmung eines Konversionsfaktors  $\alpha \simeq 0.37$ . Der auf diese Weise bestimmte Wert des Konversionsfaktors ist geringfügig größer als der Wert, der sich aus der spannungsabhängigen Änderung der Aktivierungsenergie in der Nähe der ersten Resonanz ergibt ( $\langle \alpha \rangle = \Delta_0/V_{\pm 1} \approx 0.3$ ). Die Diskrepanz ist darauf zurückzuführen, dass der Spannungsabfall über die Barrierenstruktur bei höherer Spannung  $V_2$  geringfügig kleiner ist als im Spannungsbereich der ersten Resonanz bei  $V_1$ . Der Konversionsfaktor ist entsprechend gewachsen.

### 7.1.2. Resonantes Tunneln in äußeren Magnetfeldern

In diesem Abschnitt wird der Einfluss statischer Magnetfelder auf die Strom-Spannungs-Charakteristik diskutiert. Für die Transportmessungen stehen die beiden Standard-Geometrien der Magnetfeldanordnung zur Verfügung. Das Magnetfeld ist entweder parallel oder senkrecht zum Tunnelstrom orientiert. Entsprechend resultieren magnetische Quantisierungen in der Wachstumsebene beziehungsweise der Wachstumsrichtung.



**Abbildung 7.9.:** Temperaturabhängigkeit der Spannungsposition des Leitfähigkeitsmaximums (a) und -minimums (b).

**Magnetfeld parallel zum Strom** Ist das Magnetfeld senkrecht zur Wachstumsebene und parallel zum Strom orientiert, quantisiert das Magnetfeld die Bewegung der Ladungsträger in der Wachstumsebene. In den Zuleitungen und in den Quantentöpfen entstehen Landau-Niveaus,

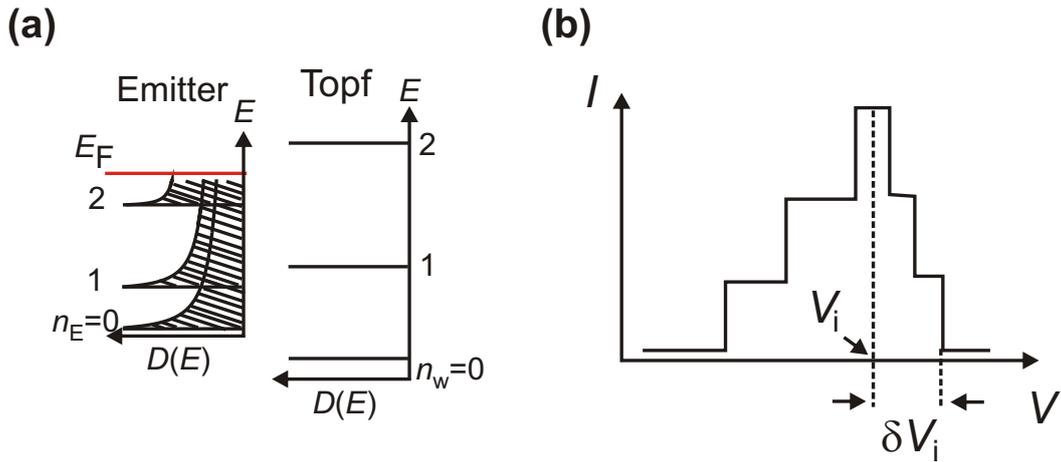
$$E_{E/C} = E_{E/C,i} + \hbar \frac{e B}{m_{E/C,\parallel}^*} \left( n_{E/C} + \frac{1}{2} \right), \quad (7.27)$$

$$E_w = E_{w,i} + \hbar \frac{e B}{m_{w,\parallel}^*} \left( n_w + \frac{1}{2} \right). \quad (7.28)$$

$n_{E/C}$  und  $n_w$  sind die Landau-Quantenzahlen in den Zuleitungen beziehungsweise im Quantentopf.  $E_{E/C,i}$  sind mögliche quasi-gebundene Zustände in den Zuleitungen, die beispielsweise durch Ladungsträgerakkumulation vor einer Barriere entstehen. Mit  $E_{w,i}$  sind die quasi-gebundenen Zustände im Quantentopf bezeichnet. An den Gleichungen (7.27) und (7.28) ist zu erkennen, dass für identische effektive Massen die magnetfeldabhängige Energieaufspaltung im Emittor und im Topf gleich ist. Aus der Erhaltung des transversalen Impulses resultiert die Erhaltung der Landau-Quantenzahlen beim resonanten Tunneln im parallelen Magnetfeld. Für elastische Übergänge aus Emittor-Zuständen in den Quantentopf gilt somit  $\Delta n = n_E - n_w = 0$ . Unter dieser Voraussetzung setzt der resonante Tunnelstrom im Magnetfeld ein, wenn das erste Subband in Resonanz mit der Fermi-Kante des Emittors gerät. Die entsprechende Resonanzbedingung lautet

$$E_F = E_{w,0} - \alpha eV + \hbar \omega_{c,w} \left( n_w + \frac{1}{2} \right). \quad (7.29)$$

Da ein parallel zur Wachstumsrichtung orientiertes Magnetfeld keinen Einfluss auf die Transmission einer Barriere besitzt, resultiert im Wesentlichen die Änderung

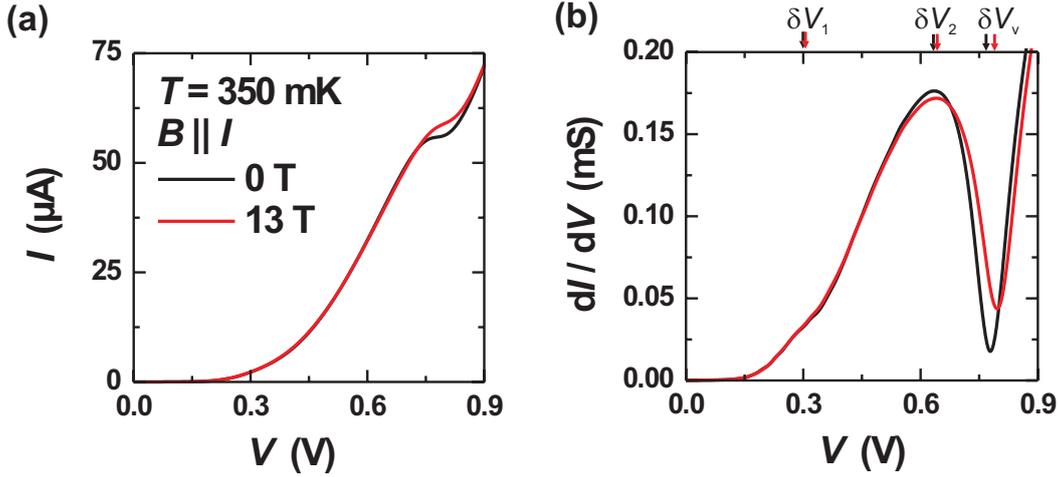


**Abbildung 7.10.:** (a) Verlauf der Zustandsdichten bei parallelem Magnetfeld. Ist die effektive Masse im Emitter größer als im Topf, stehen sich die Landau-Niveaus mit gleicher Quantenzahl nicht mehr gegenüber; die Quantentopf-Niveaus sind weiter aufgespalten. Dies führt dazu, dass zunächst der Strom durch das  $n_w = 0$  Niveau verboten wird, dann durch das  $n_w = 1$  usw. (b) Die Resonanz schiebt linear mit dem Magnetfeld und dem reziproken Massenunterschied zwischen Emitter und Topf.

im Tunnelstrom aus den Änderungen in den Zustandsdichten, siehe Abbildung 2.5 in Kapitel 2.2. Jedes Mal, wenn sich ein Landau-Niveau des Quantentopfes unter die Fermi-Kante des Emitters schiebt, ist eine Stufe in der Kennlinie zu beobachten, siehe Abbildung 3.8 in Kapitel 10. Die maximale Anzahl an Stromstufen für ein Magnetfeld entspricht der Anzahl an besetzten Landau-Niveaus im Emitter. Mit steigendem Magnetfeld nimmt die Entartung der Landau-Niveaus zu. Gleichzeitig nimmt die Anzahl der besetzten Landau-Niveaus ab. Als Konsequenz reduziert sich die Anzahl der Stufen in der Kennlinie mit steigendem Magnetfeld. Gleichzeitig kommt es zu einer Erhöhung der Stromstufen, da bei fester Vorspannung und steigendem Magnetfeld mehr Ladungsträger zum Tunneln zur Verfügung stehen. Die Stufenpositionen folgen Geraden im Magnetfeld. Diese Geradenschar bildet den so genannten *Landau-Fächer*. Ein weiteres Verhalten der Kennlinie im Magnetfeld ist eine  $1/B$ -periodische Oszillation der Einsatzspannung sowie der Position des Strommaximums. Diese Oszillationen sind auf die Oszillation der Fermi-Kante zurückzuführen, die der Depopulation der Landau-Niveaus folgt. Aus der Periodizität der Fermi-Kante ist einerseits über die Bestimmungsgleichung

$$p = \int_{E_v}^{E_F} dE D_3(E, B) \quad (7.30)$$

die Ladungsträgerkonzentration bestimmbar, andererseits lassen sich Aussagen treffen über den Verlauf der Zustandsdichte und somit indirekt über Streuprozesse. Für gleiche effektive Massen im Emitter und Quantentopf wird der Strom auf Grund der Landau-Quantenzahl Erhaltung unterdrückt, sobald ein Subband unter die Va-



**Abbildung 7.11.:** (a) Strom-Spannungs-Charakteristik einer Tunneldiode (S1324) mit nominell  $1.4 \mu\text{m}$  Querschnitt, bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes mit einer Feldstärke von 13 Tesla (rote Kurve). Die Magnetfeldorientierung ist parallel zum Strom und zur Einschränkungrichtung. Als Referenz ist in Schwarz die Kennlinie für den feldfreien Fall eingezeichnet. (b) Verlauf der entsprechenden differentiellen Leitfähigkeit. Eine leichte magnetfeldabhängige Verschiebung von  $V_2$  und  $V_v$  ist zu beobachten.

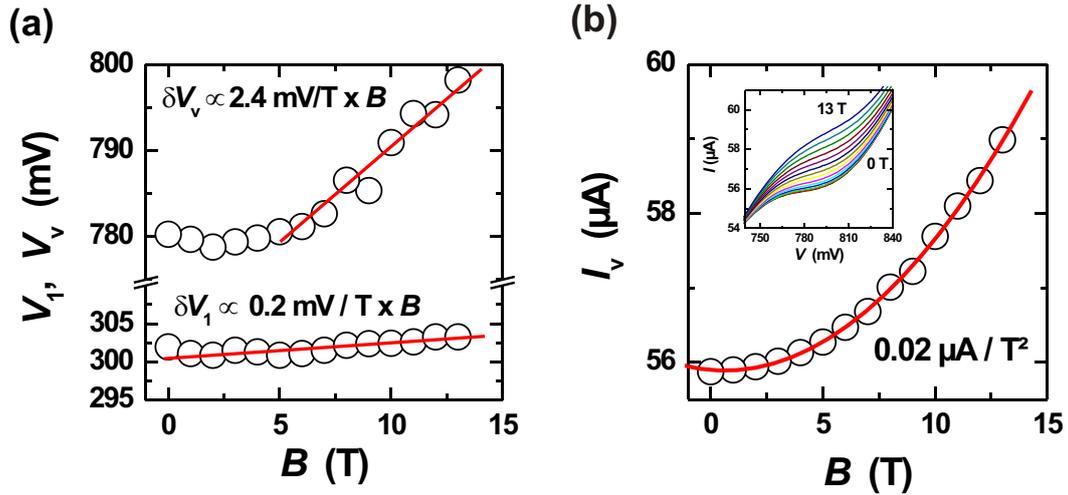
lenzbandkante des Emitters schiebt. Bei unterschiedlichen effektiven Massen<sup>3</sup> stehen sich die Landau-Niveaus mit gleicher Quantenzahl nicht mehr gegenüber; die Quantentopf-Niveaus sind weiter aufgespalten. Dies führt dazu, dass zunächst der Strom durch das  $n_w = 0$  Niveau verboten wird, dann durch das  $n_w = 1$  usw. Sofern im Emitter  $n_E^{\text{max}}$  Niveaus besetzt sind, bricht die Resonanz erst bei einer um [178]

$$\delta V_i = \frac{\hbar B}{\alpha} \left( \frac{1}{m_{w,i}^*} - \frac{1}{m_E^*} \right) \left( n_E^{\text{max}} + \frac{1}{2} \right) \quad (7.31)$$

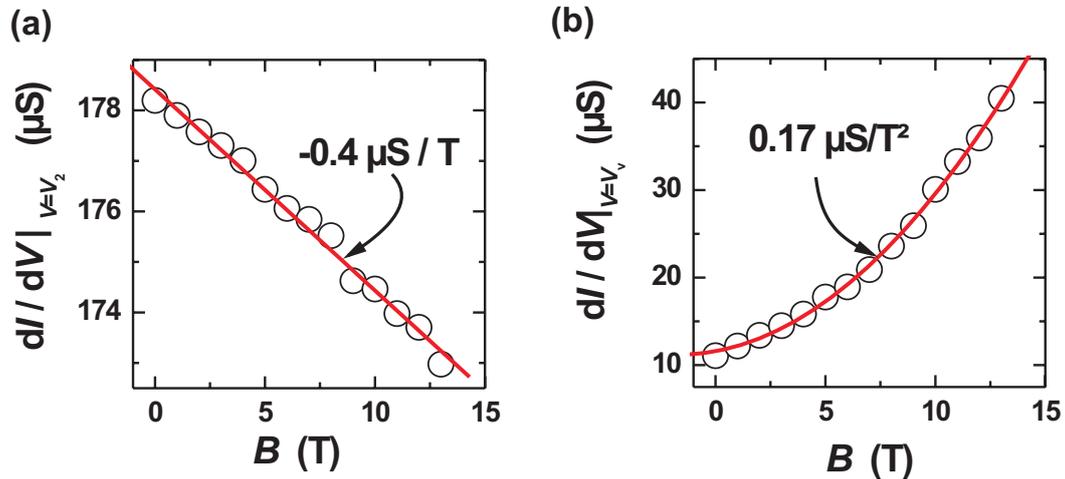
höheren Spannung zusammen. Die Resonanz verschiebt also linear mit dem Magnetfeld und dem reziproken Massenunterschied zwischen Emitter und Topf. Dieses Verhalten ist in Abbildung 7.10 dargestellt. Die Abbildung 7.11 (a) zeigt die Wirkung eines Magnetfeldes auf die Strom-Spannungs-Charakteristik. Die schwarze Kurve entspricht der Kennlinie ohne Magnetfeld, die rote bei einem Magnetfeld von 13 Tesla. Im Wesentlichen ist eine Erhöhung des Stromplateaus bei  $V_v = 780 \text{ mV}$  zu erkennen. Eine Treppenstruktur in der Kennlinie, wie oben beschrieben, ist nicht zu beobachten. In der ersten Ableitung ist lediglich eine sehr geringe Verschiebung der Leitfähigkeitsschulter bei  $V_1$  sowie eine Verbreiterung der folgenden Leitfähigkeitsresonanz festzustellen. Die Verschiebungen von  $V_1$  und  $V_v$  sind in Abbildung 7.12 (a) aufgetragen. Das Maximum in der Leitfähigkeit bei  $V_2$  wird hierbei mit zunehmender Feldstärke reduziert; hingegen wächst die Leitfähigkeit im Minimum bei  $V_v$ . Dieses Verhalten wird in Abbildung 7.13 gezeigt. Das Fehlen stufenförmiger Strukturen ist so zu deuten, dass auf Grund einer hohen Dotierung von  $8 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$

<sup>3</sup>Beispielsweise, wenn die effektive Masse im Emitter größer als im Topf ist ( $m_E^* > m_w^*$ ).

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen



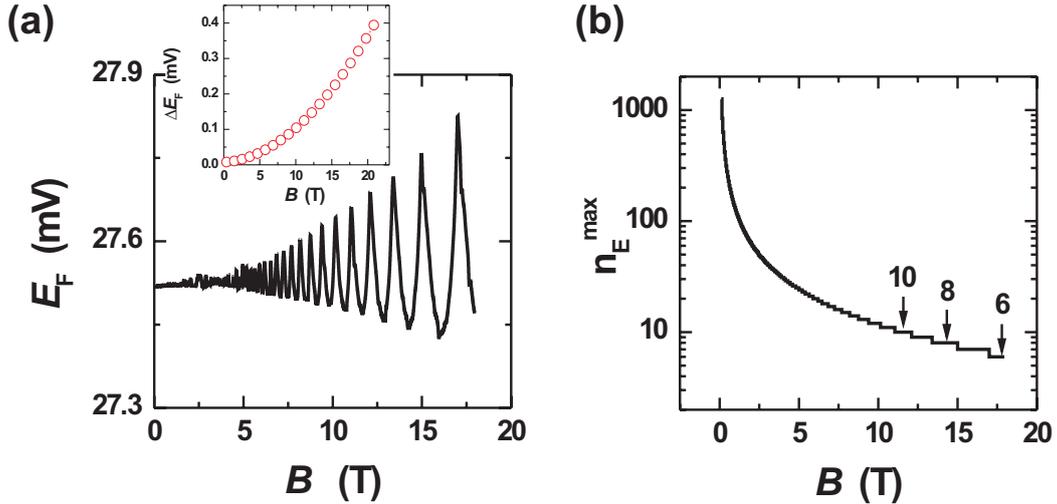
**Abbildung 7.12.:** (a) Verlauf von  $V_V$  und  $V_1$  als Funktion des äußeren Magnetfeldes. (b)  $I_V$  als Funktion des Magnetfeldes.



**Abbildung 7.13.:** (a) Reduzierung des Leitfähigkeitsmaximums bei  $V_2$  als Funktion des Magnetfeldes. (b) Magnetfeldabhängige Zunahme der Leitfähigkeit im Minimum bei  $V_V$ .

und einer effektiven Masse von  $m_{\text{hh}}^{\text{Si}}/m_0 \approx 0.5$  die Oszillation der Fermi-Kante für die im Experiment zur Verfügung stehenden Feldstärken zu vernachlässigen sind. Zudem sind selbst bei Feldstärken von 18 Tesla noch mindestens sechs Landau-Niveaus im Emittor besetzt. Dies konnte durch eine Simulation der Fermi-Kanten Oszillation gezeigt werden. Die Ergebnisse der Rechnung sind in Abbildung 7.14 dargestellt. Inelastische Wechselwirkungen führen zusätzlich zu einer Verbreiterung der Singularitäten in der Zustandsdichte, siehe hierzu Kapitel 2.3. Dies führt insgesamt zu einem Auswaschen der Strukturen, so dass einzelne Stromstufen nicht mehr als solche zu erkennen und detektierbar sind.

Die bereits erwähnten Verschiebungen der Resonanzen, die eine Konsequenz der

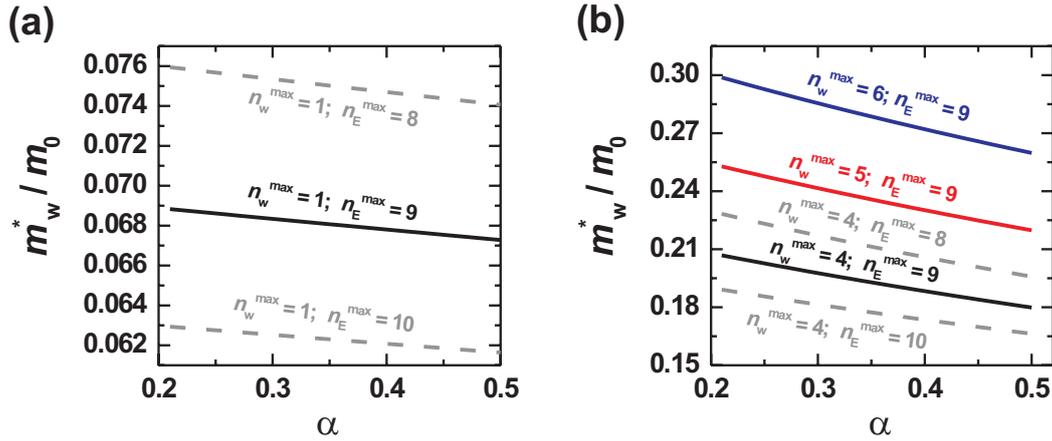


**Abbildung 7.14.:** (a) Simulation der Oszillation der Fermi-Kante bis zu Magnetfeldstärken von 18 Tesla. Die Ladungsträgerkonzentration beträgt  $8 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . (b) Anzahl der bevölkerten Landau-Niveaus als Funktion der Magnetfeldstärke. Für die gewählte Ladungsträgerkonzentration an schweren Emitter-Löchern ist das Quantenlimit ( $n_E^{\text{max}} = 0$ ) erst bei einer Feldstärke von 96 Tesla erreicht. Bei 13 Tesla sind noch 9 Landau-Niveaus im Emitter besetzt.

Massendifferenz der Ladungsträger im Emitter und Topf sind, lassen sich jedoch gut beobachten. Die Gleichung (7.31) setzt implizit elastische Übergänge aus Emitter-Zuständen in Zustände des Quantentopfs voraus. Dies ist, wie die bisherigen Untersuchungen ergeben haben, für die Struktur eine unzutreffende Annahme. Inelastische Streuprozesse während des Tunnelprozesses führen zu Übergängen, bei denen die Landau-Quantenzahl nicht erhalten ist,  $n_E - n_w = 0, \pm 1$ . Für diesen Fall erwartet man eine Verschiebung [178]

$$\delta V_i = \frac{\hbar B}{\alpha} \left( \frac{n_w + \frac{1}{2}}{m_{w,i}^*} - \frac{n_E + \frac{1}{2}}{m_E^*} \right). \quad (7.32)$$

Mit Hilfe von Gleichung (7.32) lässt sich ein Zusammenhang zwischen den besetzten Landau-Niveaus im Emitter und im Quantentopf sowie deren effektiven Massen darstellen. Sind die effektiven Massen beispielsweise durch vergleichbare Experimente bekannt, ist die Bestimmung des für die Resonanz relevanten Spannungs-Energie-Konversionsfaktors  $\alpha$  möglich. Die entsprechenden Zusammenhänge sind in Abbildung 7.15 zusammengestellt. Für den Positionsverlauf von  $V_v$  stimmen die experimentellen Daten gut mit bekannten Werten überein. Für die nominellen Parameter der Struktur resultiert ein Konversionsfaktor  $\alpha \approx 0.35$ , der durchaus plausibel erscheint und mit den Werten der temperaturabhängigen Untersuchungen konsistent ist. Die Bestimmung der Resonanzposition von  $V_1$  ist auf Grund der starken Verbreiterung der Resonanz schwierig und mit einem Fehler von zirka 20% verbunden.



**Abbildung 7.15.:** Verhalten der Topfmasse als Funktion des Konversionsfaktors und der besetzten Landau-Niveaus im Emittor beziehungsweise dem Quantentopf. **(a)** Darstellung für die Resonanz bei  $V_1$ . **(b)** Darstellung für die Resonanz bei  $V_V$ .

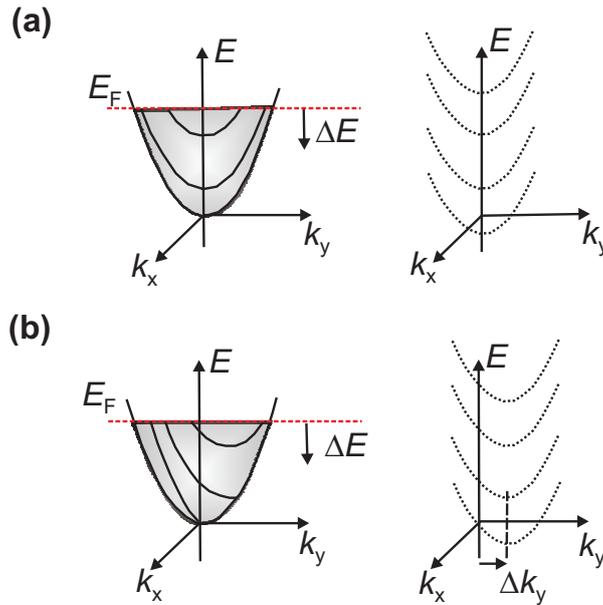
**Magnetfeld senkrecht zum Strom** In parallel zum Strom orientierten Magnetfeldern ist der Hamilton-Operator in die beiden orthogonalen Bewegungen - senkrecht und parallel zur Tunnelrichtung - separierbar. Beim resonanten Tunneln aus Emittor-Zuständen in Subbänder des Quantentopfes bleibt die Landau-Quantenzahl erhalten. Aus dieser Bedingung resultieren stufenförmige Strukturen in der Strom-Spannungs-Charakteristik.

Für eine Magnetfeldorientierung senkrecht zum Strom ist die Interpretation des resonanten Tunnelstroms komplizierter, da der transversale Impuls beim resonanten Tunneln keine Erhaltungsgröße mehr ist. Das magnetische und elektrostatische Einschlusspotenzial überlagern zu einem effektiven Potenzial. Dies führt zu einer Kopplung der parallelen und senkrechten Bewegungskomponente. Der wesentliche Effekt eines senkrecht zum Strom orientierten Magnetfeldes auf die Kennlinie resultiert in der magnetfeldabhängigen Änderung des transversalen Impulses. Der Hamilton-Operator für die Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluss eines senkrecht zur Tunnelrichtung wirkenden Magnetfeldes ist

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m^*} + \frac{e^2 B^2 z^2}{2m^*} - \frac{p_y e B z}{m^*} + V(z) - e F z, \quad (7.33)$$

mit  $F$  dem elektrischen Feld in Tunnelrichtung. Das Magnetfeld ist in Landau-Eichung gewählt:  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  mit  $\mathbf{A} = -zB \mathbf{e}_y$ . In Gleichung (7.33) ist zu erkennen, dass ein Ladungsträger keine Energie durch das Magnetfeld gewinnt. Das Magnetfeld verursacht nur einen Energieübertrag der  $z$ -Komponente auf die  $y$ -Komponente. Beim Tunneln durch die mittlere Barrierenbreite  $\langle b \rangle$  wird dem Ladungsträger ein Impulsbetrag  $\Delta k_y = eB\langle b \rangle/\hbar$  in  $y$ -Richtung beziehungsweise abgeführt. Ladungsträger aus Emittor-Zuständen können somit elastisch in Quantentopf-Zustände tunneln, die einen Energiebetrag

$$\Delta E_y = \frac{\hbar^2 (\Delta k_y)^2}{2m^*} = \frac{e^2 \langle b \rangle^2 B^2}{2m^*} \quad (7.34)$$



**Abbildung 7.16.:** (a) Darstellung im Energie-Impuls-Raum der besetzten Emittler-Zustände (links, grau-schattierte Fläche) und Subbänder des Topfes (rechts, gestrichelte Parabeln) für vier unterschiedliche Werte  $\Delta E$  und  $\Delta k_y = 0$ . Die Zustände des Emitters, die elastisch in Quantentopf Subbänder tunneln können, entsprechen den dick gedruckten Parabeln. (b) Die gleiche Situation wie in (a), jedoch mit zusätzlichem senkrechten Magnetfeld, so dass  $\Delta k_y \neq 0$  ist.

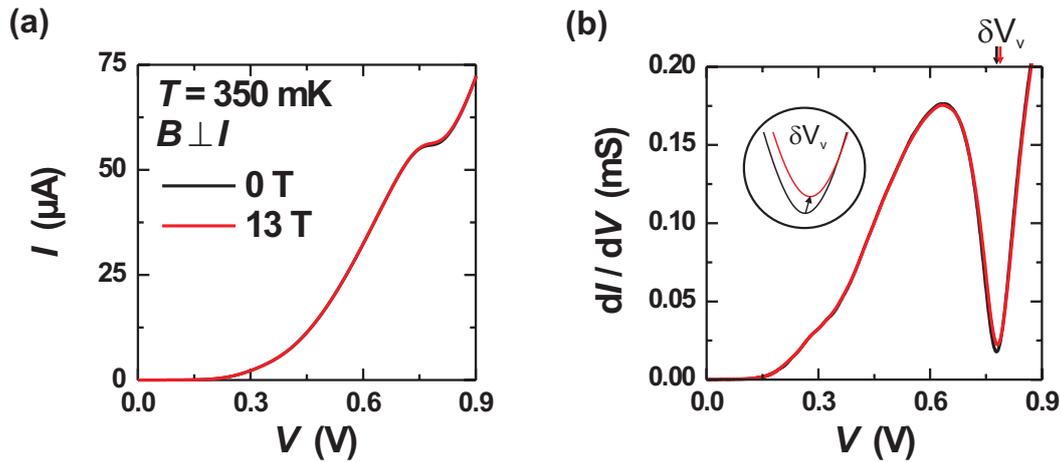
tiefer liegen. In Abbildung 7.16 sind die Veränderungen auf Grund eines senkrecht zur Tunnelrichtung wirkenden Magnetfeldes skizziert. Aus der Energiedifferenz in Gleichung (7.34) resultiert eine Verschiebung der Resonanzposition proportional  $B^2 \langle b \rangle^2$  zu höheren Spannungen,

$$\delta V_v = \frac{e \langle b \rangle^2 B^2}{\alpha 2m^*}. \quad (7.35)$$

In einer semiklassischen Betrachtung lässt sich diese Verschiebung verstehen als eine Konsequenz der Lorentz-Kraft, die während der Tunnelprozesse wirkt. Die Ladungsträger tunneln durch eine effektiv breitere Barriere auf Grund der Ablenkung, die sie durch die Lorentz-Kraft erfahren.

Die Kennlinie in Abbildung 7.17 zeigt im senkrechten Magnetfeld nur eine geringe Veränderung. Auf Grund der hohen Dotierung der Zuleitungen sowie der Ladungsträgermasse der schweren Silizium-Löcher ( $m_{\text{hh}}^{\text{Si}}/m_0 \approx 0.5$ ) sind für die im Experiment zur Verfügung stehenden Magnetfeldstärken mehr als acht Landau-Niveaus besetzt. Die Landau-Niveaus sind zudem durch Streueffekte stark verbreitert. Die Wirkung des Magnetfeldes auf die Fermi-Kante kann daher vernachlässigt und die Fermi-Energie des Emitters als unabhängig vom Magnetfeld angesehen werden. Die Quantisierung im Germanium-Quantentopf resultiert überwiegend aus dem elektrostatischen Einschlusspotenzial der Heterostruktur. Das Magnetfeld wirkt daher nur als kleine Störung, die entsprechend Gleichung (3.72) zu einem diamagnetischen

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen



**Abbildung 7.17.:** (a) Strom-Spannungs-Charakteristik einer Tunneldiode des Wafers S1324 mit nominell  $1.4 \mu\text{m}$  Querschnitt. Die schwarze Kurve zeigt die Kennlinie ohne Magnetfeld, die rote bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes mit einer Feldstärke von 13 Tesla. Die Magnetfeldorientierung ist senkrecht zum Strom und parallel zur Wachstumsebene. (b) Differenzielle Ableitung der Kurven aus (a). Als Konsequenz auf die beim Tunnelprozess wirkende Lorentz-Kraft ist eine magnetfeldabhängige Verschiebung von  $V_v$  zu beobachten.

Shift führt. Für die betrachteten Felder sind diese Energiekorrekturen jedoch auf Grund des dünnen Germanium-Topfes und der schweren Masse der Ladungsträger zu vernachlässigen. Dementsprechend ist die Zustandsdichte im Quantentopf in erster Ordnung nicht vom senkrechten Magnetfeld beeinflusst. Infolgedessen sind in der Kennlinie keine magnetfeldabhängigen Strukturen auf einer Skala  $\hbar\omega_c$  zu erwarten.

Wie bereits in der parallelen Magnetfeldorientierung beobachtet wurde, führt auch ein senkrecht Magnetfeld zu einer leichten Dämpfung des Leitfähigkeitsmaximums bei gleichzeitiger Erhöhung der Leitfähigkeit im Minimum. Dieses Verhalten ist in Abbildung 7.18 gezeigt. Es ist davon auszugehen, dass die selben Transportmechanismen, wie sie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben wurden, für dieses Verhalten verantwortlich sind. Sie sollen daher hier nicht erneut diskutiert werden. Entsprechend den vorangegangenen Erörterungen ist daher der wesentliche Effekt des Magnetfeldes die Verschiebung der Resonanzposition. Auf Grund der starken Verbreiterung der Strukturen in der Kennlinie wird zur Auswertung der experimentellen Daten das Minimum in der ersten Ableitung als Position des Maximums in der Stromresonanz betrachtet. Die magnetfeldabhängige Verschiebung des Minimums bei  $V_v$  wird daher als Konsequenz eines Impulsübertrags beziehungsweise Energieübertrags entsprechend Gleichung (7.34) interpretiert. Die Abbildung 7.19 (a) zeigt die Verschiebung von  $V_v$  als Funktion des Magnetfeldes. Entsprechend der Gleichung (7.35) lässt sich aus der Verschiebung ein Zusammenhang aus der effektiven Masse der Ladungsträger, der Tunnelstanz und des Spannungs-Energie-Konversionsfaktors darstellen, siehe Abbildung 7.19 (b). Es ist anzunehmen, dass

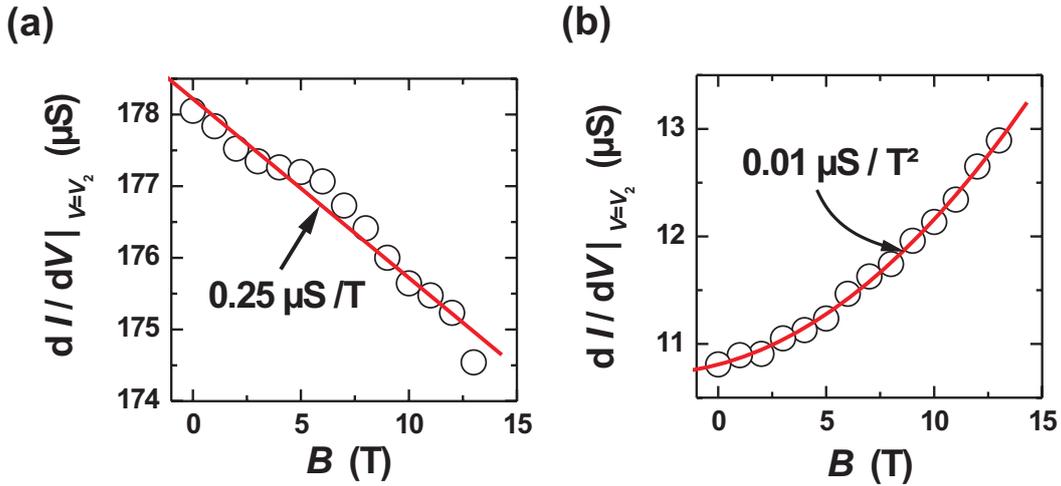


Abbildung 7.18.: (a) Magnetfeldabhängige Dämpfung des Leitfähigkeitsmaximums. (b) Zunahme der Leitfähigkeit im Minimum als Funktion des Magnetfeldes

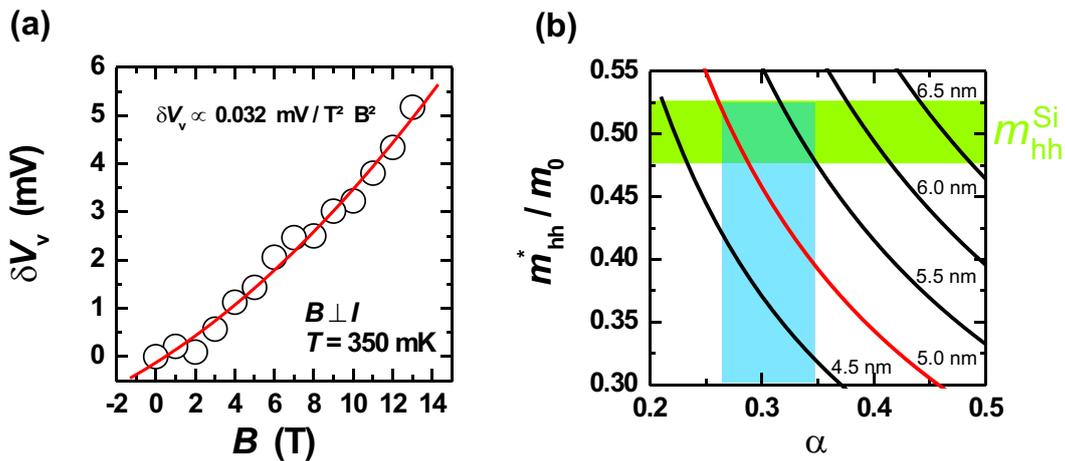


Abbildung 7.19.: (a) Verschiebung von  $V_V$  als Funktion des senkrechten Magnetfeldes. (b) Zusammenhang zwischen der Verschiebung, der Tunneldistanz, der effektiven Masse des tunnelnden Teilchens und des Spannungs-Energie-Konversionsfaktors  $\alpha$ . Die Konturlinien entsprechen Tunneldistanzen von 4.5 nm bis 6.5 nm.

die effektive Masse der tunnelnden Ladungsträger in der Größe der effektiven Masse der schweren Silizium-Löcher des Emitters liegen wird. Eine geeignete Annahme für die Tunneldistanz liegt im Bereich der nominellen Barrierendicke von zirka 5 nm. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen und Verschiebung von  $V_V$  resultiert ein Konversionsfaktor im Bereich  $0.27 < \alpha < 0.35$ . Der auf diese Weise bestimmte Konversionsfaktor ist konsistent mit den Werten von  $\alpha$  aus den temperaturabhängigen Messungen des vorangegangenen Abschnitts.

### 7.1.3. Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich festhalten: In der Strom-Spannungs-Charakteristik einer Diode des Wafers S1324 mit  $1.4 \mu\text{m}$  Durchmesser waren zwei schwache Stromresonanzen zu beobachten. Diese Resonanzen ließen sich Übergängen von schweren Löchern des dreidimensionalen Silizium-Emitters in zweidimensionale Subbänder des in der Silizium-Matrix eingebetteten Germanium-Quantentopfes zuordnen. Hierbei fanden sowohl Übergänge schwerer Löcher in Leicht-Loch-Zustände (1. Resonanz) als auch in Schwer-Loch-Zustände (2. Resonanz) des Quantentopfes statt.

Die Kennlinie besaß jedoch einen hohen nicht-resonanten Tunnelstromanteil, der die typischen resonanten Tunnelstrukturen (Bereiche mit negativ differenzieller Leitfähigkeit und großem peak-to-valley ratio) in der Kennlinie entscheidend überlagerte. Die Ursache hierfür war möglicherweise eine hohe Diffusion von Dotieratomen aus den Zuleitungen in die aktive Zone.

Temperaturabhängige Messungen ermöglichten es dennoch, Aussagen über den Spannungsabfall in der aktiven Zone treffen zu können. Dies gestattete die Bestimmung eines Spannungs-Energie-Konversionsfaktors  $\alpha$ , mit dem sich die Spannungsskalen als Energieskalen interpretieren ließen. Mit der Kenntnis des Konversionsfaktors ließen sich aus der Positionsänderung der Leitfähigkeitsresonanzen im Magnetfeld die effektiven Massen der Löcher in den Quantentopf-Zuständen bestimmen. Die auf diese Weise ermittelten Werte der effektiven Massen stimmten gut mit Werten aus vergleichbaren Experimenten überein.

## 7.2. Diskrete Zustände im Germanium Quantentopf

Im vorangegangenen Kapitel ist das resonante Tunneln von freien Ladungsträgern aus dreidimensionalen Emitter-Zuständen in zweidimensionale Quantentopf-Subbänder untersucht worden. Stromresonanzen in der Kennlinie waren ein Beleg für die resonanten Übergänge. Dieses Kapitel untersucht den Quantentransport im Niedrigstrom-Regime, bei kleinen Vorspannungen deutlich vor dem Einsetzen der ersten Stromresonanz. Die Abbildung 7.20 zeigt die Strom-Spannungs-Charakteristik und die erste Ableitung der bereits im vorherigen Kapitel diskutierten Diode S1324 mit  $1.4 \mu\text{m}$  Querschnittsfläche im Spannungsbereich von  $-10 \text{ mV}$  bis  $10 \text{ mV}$ . Die Kennlinien wurden in einem  $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten bei einer Umgebungstemperatur von  $50 \text{ mK}$  aufgenommen. In der Strom-Spannungs-Kennlinie (Abbildung 7.20 (a)) sind mehrere, unterschiedlich hohe und breite Stromstufen zu erkennen. Den Stromstufen entsprechen scharfe Maxima in der differentiellen Leitfähigkeit. Diese scharfen Maxima (Peaks) sind in Abbildung 7.20 (b) zu beobachten. Die Stufen beziehungsweise Peaks sind exakt reproduzierbar, auch nach mehrfachem Ein- und Ausbauen der Probe. Die Stufenposition ist für die jeweilige Probe charakteristisch. Auf Grund der Stufenform und Größe ist davon auszugehen, dass die Stromstufen aus resonanten Tunnelprozessen von Löchern in

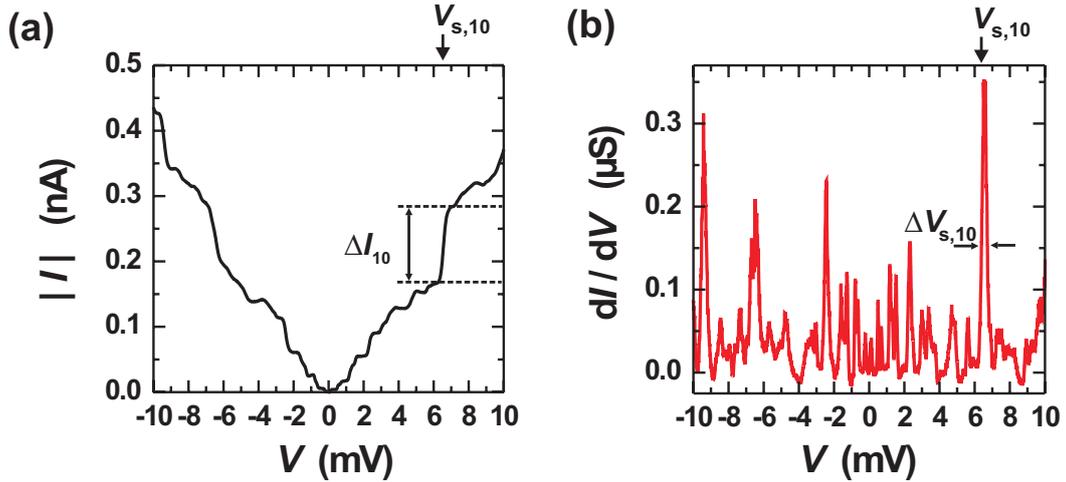
diskrete Zustände, die in der Germaniumschicht liegen, resultieren. Nominell befinden sich solche Zustände nicht in der Germaniumschicht. Die folgenden Ursachen könnten jedoch zur Bildung von nulldimensionalen Zuständen innerhalb der Germaniumschicht geführt haben: Es ist bekannt, dass Silizium und Germanium pseudomorph aufeinander wachsen [3, 110, 125, 179]. Zudem sind lokale Schichtdickenfluktuationen insbesondere bei dünnen Filmen von nur wenigen Monolagen nicht auszuschließen. Dies kann zu lokalen Potenzialminima führen, die dem Quantentopfpotenzial überlagert sind und so zu weiteren Ladungsträgereinschränkungen führen. Auf diese Art können nulldimensionale Zustände innerhalb des Quantentopf-Bereichs entstanden sein. Der elektronische Transport kann dann in bestimmten Spannungsbereichen über diese lokalen Potenzialminima stattfinden [180, 181, 182]. Eine weitere Möglichkeit für die Existenz nulldimensionaler Zustände in der Region des Quantentopfes ist die Diffusion von Dotieratomen aus den hochdotierten Zuleitungen. Dellow *et al.* [183] konnten den resonanten Tunneltransport über einzelne Donator-Zustände, die im Quantentopf liegen, beobachten. Eine eindeutige Zuordnung des nulldimensionalen Transportkanals zu diskreten Zuständen einer Störstelle oder eines lokalen, wachstumsbedingten Potenzialminimums ist sehr schwierig. Die Vorstellung, dass Bor-Akzeptor-Atome aus den hochdotierten Zuleitungen in den undotierten Quantentopf diffundiert sind und dort nulldimensionale Transport-Kanäle erzeugen, ist jedoch nahe liegend, lässt sich aber nicht eindeutig beweisen. Ebenso lassen sich lokale Potenzialfluktuationen nicht ausschließen. Im weiteren Verlauf wird daher allgemein von einem Quantenpunkt gesprochen, unabhängig davon, ob es sich um eine Störstelle oder ein andersartig bedingtes punktförmiges Potenzial handelt.

Im Folgenden soll der Transport über die diskreten Zustände diskutiert werden: Sobald die Fermi-Kante des Emitters in Resonanz mit einem Quantenpunkt-Niveau gerät, setzt der Tunnelprozess ein. Beim elastischen Tunneln von freien Ladungsträgern des Emitters in nulldimensionale Zustände ist der transversale Impuls keine Erhaltungsgröße mehr; ausschließlich die Gesamtenergie bleibt erhalten. Die Resonanzbedingung lautet entsprechend

$$E_{s,i} = \frac{\hbar^2 k_{s,i}^2}{2m_s^2} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_E^*}, \quad (7.36)$$

mit  $E_{s,i}$  dem Niveau des  $i$ -ten Quantenpunktes und  $\mathbf{k}$  beziehungsweise  $k_{s,i}$  dem Wellenvektor des Ladungsträgers im Emitter und im Quantenpunkt.  $m_E^*, m_s^*$  sind die effektiven Massen des Ladungsträgers im Emitter und im Quantenpunkt. In der Kennlinie sind somit an den Positionen  $V_{s,i} = (E_{s,i} - E_F)/\alpha e$  Stromstufen  $\Delta I_i$  zu beobachten. Im idealisierten Bild des elastischen 3D-0D Tunnelns nimmt der Strom nach dem Sprung mit zunehmender Spannung linear ab, bis das Quantenpunktniveau die Bandkante erreicht hat. Inelastische Übergänge in realen Strukturen führen jedoch dazu, dass der Strom nach dem Sprung mit zunehmender Spannung nicht sinkt, sondern annähernd konstant bleibt oder sogar zunimmt. In Abbildung 7.21 (a) und (b) ist dieses Verhalten zu beobachten. Der Strom bleibt nach dem Sprung plateauartig konstant, bis die nächste Stromstufe folgt. Ausschließ-

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen



**Abbildung 7.20.:** (a) Strom-Spannungs-Kennlinie der Probe aus Abbildung 7.3 im Bereich des Niedrigstrom-Regimes von -10 mV bis +10 mV. In der Charakteristik sind deutlich Stromstufen  $\Delta I$  unterschiedlicher Höhe und Breite zu beobachten. (b) Korrespondierende differentielle Leitfähigkeit. Den Stromstufen in der Kennlinie entsprechen Peaks in der differentiellen Leitfähigkeit. Ein besonders ausgeprägter Leitfähigkeitspeak liegt bei  $V_{s,10} \approx 6.6$  mV. Der Peak hat eine Halbwertsbreite von  $\Delta V_{s,10} \approx 0.3$  mV. Bei der Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der Probe wird die Verbreiterung dieser Stromstufe beziehungsweise Halbwertsbreite der korrespondierenden Leitfähigkeitsresonanz diskutiert, siehe hierzu Abbildung 7.23 (d).

lich bei der Stufe um -1 mV ist nach dem Sprung ein Stromabfall zu beobachten. Die Höhen der Stromstufen in Abbildung 7.21 (a) beziehungsweise (b) werden entscheidend vom Verhältnis der Tunnelraten *in* beziehungsweise *aus* dem diskreten Quantenpunkt-Zustand beeinflusst. Die Tunnelraten legen die Besetzungswahrscheinlichkeit<sup>4</sup>  $p = p_{s,i}$  des *i*ten Zustandes fest. Der Strom aus dem Emitter in einen nicht-entarteten diskreten Zustand  $E_{s,i}$  ist das Produkt aus der Verteilungsfunktion des Emitters bei der Energie  $E_{s,i}$ , der Tunnelrate  $\Gamma_1$  in den diskreten Zustand und der Wahrscheinlichkeit  $(1 - p)$ , dass der diskrete Zustand unbesetzt ist. Aus dem diskreten Zustand kann die Ladung entweder zurück in den Emitter tunneln mit der Rate  $p[1 - f(E)]\Gamma_1$  oder in den Kollektor mit der Rate  $p\Gamma_2$ . Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$f(E)[1 - p]\Gamma_1 = p[1 - f(E)]\Gamma_1 + p\Gamma_2 \quad (7.37)$$

folgt unmittelbar der funktionale Zusammenhang der Besetzungswahrscheinlichkeit als Funktion der Tunnelraten

$$p = f(E) \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (7.38)$$

<sup>4</sup>Zur besseren Übersicht, werden die Indices an den Tunnelraten, Besetzungswahrscheinlichkeiten und Verteilungsfunktionen weggelassen.

Der Tunnelstrom vom Emitter über einen diskreten Zustand in den Kollektor ist somit

$$\Delta I = e p \Gamma_2 = e f(E) \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (7.39)$$

An Gleichung (7.39) ist zu erkennen, dass der Tunnelstrom proportional zur Verteilungsfunktion  $f(E)$  des Emitters ist. Gleichung (7.39) beschreibt den Tunnelstrom über einen nicht-entarteten Zustand. Stehen zwei unabhängige Transportkanäle auf Grund der beiden Spin-Zustände zur Verfügung, beträgt die Besetzungswahrscheinlichkeit für die beiden Kanäle  $2p$  und der Tunnelstrom ist doppelt so groß wie der Strom über ein nicht-entartetes Niveau. Die Coulomb-Blockade und die Elektron-Elektron-Wechselwirkung verhindert, dass zwei Ladungen gleichzeitig die beiden Transportkanäle besetzen. Die Kanäle sind letztendlich nicht unabhängig voneinander und somit reduziert sich der Strom, der nur durch einen der beiden entarteten Zustände getragen wird. Für  $T = 0$  K ist der Tunnelstrom über ein Zwei-Zustandssystem, bei dem niemals beide Kanäle gleichzeitig den Strom tragen [184, 185, 186]

$$\Delta I = 2e \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (7.40)$$

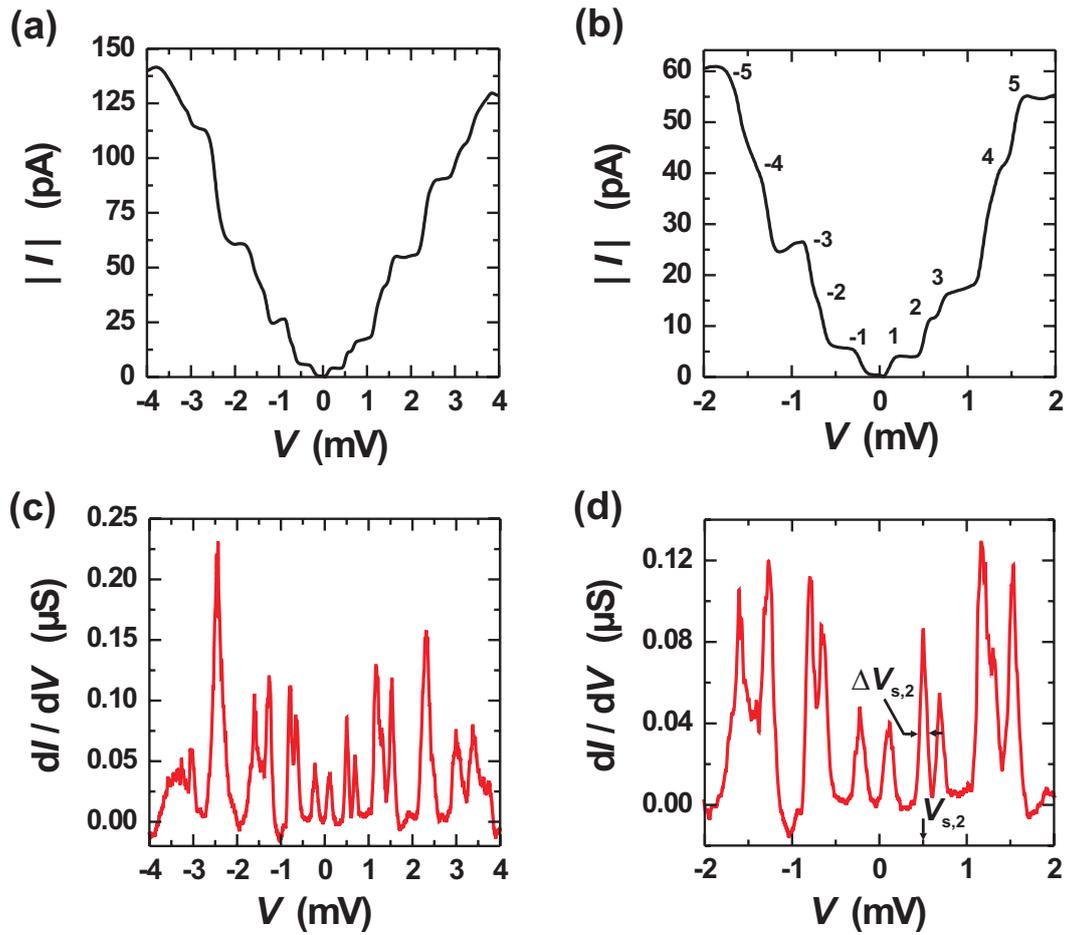
Anhand von Gleichung (7.40) lässt sich der Einfluss der Tunnelraten auf die Stufenhöhe studieren. Bei stark unterschiedlichen Tunnelraten bestimmt die kleinere Tunnelrate beziehungsweise die Lage der dickeren Tunnelbarriere die Stufenhöhe. Dominiert das Tunneln in den Quantenpunkt,  $\Gamma_1 \gg \Gamma_2$ , ist die Stufenhöhe durch den Tunnelprozess in den Kollektor bestimmt,  $\Delta I \approx e\Gamma_2$ . Im umgekehrten Fall, einer deutlich kleineren Tunnelrate in den Quantenpunkt als aus ihm heraus,  $\Gamma_1 \ll \Gamma_2$ , ist die Stufenhöhe  $\Delta I \approx 2e\Gamma_1$  vom Tunnelprozess in den Quantenpunkt bestimmt. Der Kennlinienverlauf in Abbildung 7.21 (a) beziehungsweise (b) belegt, dass im Spannungsbereich bis 4 mV die Tunnelraten annähernd<sup>5</sup> gleich groß sind  $\Gamma_1 \approx \Gamma_2 \approx \Gamma$ . Dies ist konform mit der Vorstellung, dass die Barrierenstruktur symmetrisch ist. Die spektroskopierten Quantenpunkte sollten daher möglichst in der Mitte des Germanium-Quantentopfes liegen. Möglicherweise könnte dies ein Indiz dafür sein, dass es sich bei den beobachteten Quantenpunkten um Störstellen handelt. Auf Grund des aufgeladenen Quantentopfes ist das Band stark gebogen; siehe Abbildung 7.30 (a). Einzelne Störstellen in der Mitte des Topfes könnten somit herausgehoben sein. Durch diese wenigen, ausgewählten Störstellen findet dann der beobachtete Tunneltransport statt.

Aus der Stufe  $\Delta I_2 = 8$  pA bei  $V_{s,2} = 0.5$  mV lässt sich die Tunnelrate  $\Gamma \approx 7.5 \times 10^7$  s<sup>-1</sup> unter Verwendung von Gleichung (7.40) abschätzen. Mit der ermittelten Tunnelrate lässt sich die Linienbreite des Quantenpunktniveaus  $\Delta E_s = \hbar/2\tau$  mit der Verweildauer  $\tau = 1/(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 1/2\Gamma$  des Ladungsträgers im Quantenpunkt berechnen:

$$\Delta E_{s,i}/\alpha e = \hbar(\Gamma_1 + \Gamma_2)/2\alpha e. \quad (7.41)$$

Auf Grund des symmetrischen Potenzialprofils wird ein Konversionsfaktor  $\alpha = 1/2$  angenommen. Für die ermittelte Tunnelrate ergibt sich aus Gleichung (7.41) eine

<sup>5</sup>In der negativen Polarität sind die Stufenhöhen geringfügig größer als in der positiven.



**Abbildung 7.21.:** Ausschnitte der Strom-Spannungs-Kennlinien aus Abbildung 7.20. (a) Für eine Vorspannung von  $\pm 4$  mV beziehungsweise (b)  $\pm 2$  mV. Die Stromstufe bei -1 mV entspricht dem typischen Kennlinienverlauf für 3D-0D-3D Tunnelprozesse, mit abfallendem Plateau. Für betragsmäßig höhere Spannungen ist dieses Verhalten in dieser Deutlichkeit nicht mehr zu beobachten. Die Stufen in der negativen Spannungspolarität sind geringfügig größer als in der positiven. Dieses Verhalten ist ein Indiz für eine kleine Asymmetrie der Tunnelraten. Die Spannungspositionen der Stufen sind in beiden Polaritäten gleich. Jede Stromstufe  $V_{s,i}$  besitzt eine endliche Breite, deren Wert durch die Halbwertsbreite  $\Delta V_{s,i}$  der korrespondierenden Leitfähigkeitsresonanz wiedergegeben wird. Die Abbildungen (c) und (d) zeigen die zugehörigen ersten Ableitungen der Ausschnitte der Kennlinie aus (a) und (b).

Halbwertsbreite  $\Delta V_{s,2} \approx 0.025 \mu\text{V}$ . Die im Experiment gemessene Halbwertsbreite der Leitfähigkeitsresonanz beträgt jedoch  $87 \mu\text{V}$  und ist damit fast 3500mal breiter. Dies ist verständlich, da die Halbwertsbreite der Leitfähigkeitsresonanz nicht der Linienbreite des Quantenpunktniveaus entspricht. Der Tunnelstrom ist im Wesentlichen von der Verteilungsfunktion des Emitters bestimmt [187] (siehe Abbildung

7.22),

$$I(V) = \frac{\Delta I_{s,i}}{1 + \exp \frac{-\alpha e(V - V_{s,i})}{kT_{\text{eff}}}}. \quad (7.42)$$

Somit gibt die Halbwertsbreite die Temperaturverbreiterung der Fermi-Kante wieder. In Gleichung (7.42) ist ein wichtiger Umstand berücksichtigt. Es ist notwendig, zwischen der Umgebungstemperatur der Mischungskammer im Kryostaten  $T$  und der Temperatur des Ladungsträgersystems  $T_{\text{eff}}$  zu unterscheiden. Die Umgebungstemperatur ist stets nur eine untere Grenze der Ladungsträgertemperatur. Insbesondere bei sehr tiefen Temperaturen ist die Ankopplung der Ladungsträger an das Kristallgitter gering. Entsprechend schlecht ist die Kühlleistung. Ladungsträgerwechselwirkungen, thermoelektrische Effekte (siehe Kapitel 3.4.2) und Joulesches Heizen führen zu Heizeffekten und einer deutlichen Differenz von  $T$  zu  $T_{\text{eff}}$ . Während  $T$  direkt messbar ist, muss  $T_{\text{eff}}$  aus der Kennlinie extrahiert werden. Unter der Annahme<sup>6</sup>, dass die Stufenbreite im Wesentlichen aus der thermischen Verbreiterung der Verteilungsfunktion hervorgeht, lässt sich aus der Stufenbreite beziehungsweise der mit ihr korrelierten Energie  $\alpha e\Delta V_s \approx 44 \mu\text{eV}$  die effektive thermische Energie der Ladungsträger und somit ihre Temperatur ermitteln,

$$kT_{\text{eff}} \approx \alpha e\Delta V_{s,i}/3.53. \quad (7.43)$$

Die Kennlinie aus Abbildung 7.21 ist bei einer Umgebungstemperatur  $T = 50 \text{ mK}$  aufgezeichnet worden. Aus der Verbreiterung der ersten Stromstufe ergibt sich eine effektive Ladungstemperatur von  $T_{\text{eff}} \approx 145 \text{ mK}$ . Die Temperatur des Ladungsträgersystems ist also um den Faktor 3 höher als die Umgebungstemperatur.

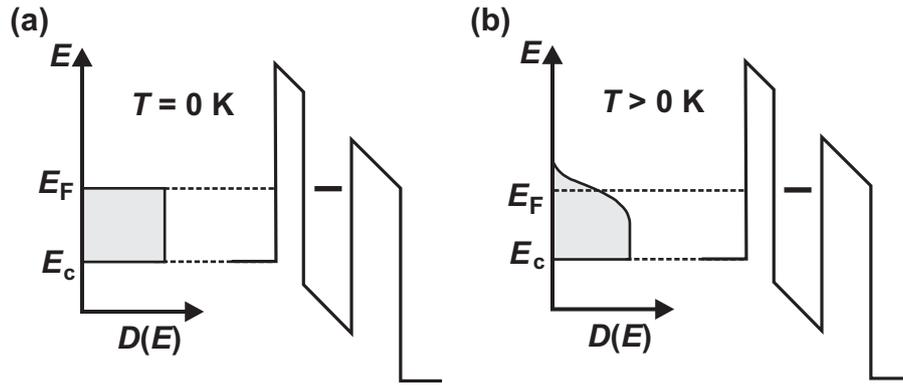
Die Gleichung (7.43) setzt voraus, dass der Konversionsfaktor  $\alpha$  bekannt ist. Auf Grund der gleichen Tunnelraten, entsprechend einem symmetrischen Bandprofil, wurde implizit ein symmetrischer Spannungsabfall über die Struktur angenommen. Dies fordert unmittelbar einen Konversionsfaktor  $\alpha = 1/2$ . Im Rückschluss lässt sich jedoch aus der Annahme, dass eine Temperaturvariation im Temperaturbereich  $kT \ll E_F$  im Wesentlichen eine Veränderung der Verteilungsfunktion und somit eine damit korrelierte Änderung in der Halbwertsbreite der Leitfähigkeitsresonanz bewirkt, der Konversionsfaktor ermitteln. Auf dieses Verfahren wird im Folgenden Abschnitt näher eingegangen.

### 7.2.1. Einfluss der Temperatur

Gerät die Fermi-Kante des Emitters in Resonanz mit einem Quantenpunktniveau im Quantentopf, tunneln Löcher elastisch in den diskreten Zustand. Der Tunnelstrom ist in erster Ordnung proportional zur Anzahl der besetzten Zustände an der Fermi-Kante. Die mittlere Besetzungswahrscheinlichkeit ist durch die Fermi-Funktion (Gleichung (2.79), Kapitel 2.3.1) gegeben. Mit zunehmender Temperatur

<sup>6</sup>Die Coulomb-Wechselwirkung der Ladungsträger im Quantenpunkt mit den Ladungsträgern im Emitter kann zu einer deutlichen Verbreiterung führen. In diesem Fall ist die Stufenbreite durch die Ladeenergie  $E_{\text{ch}}$  bestimmt. Weitere Verbreiterungsmechanismen sind Streuprozesse der Ladungsträger im Emitter und thermoelektrische Effekte; siehe hierzu Kapitel 2.3.

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen



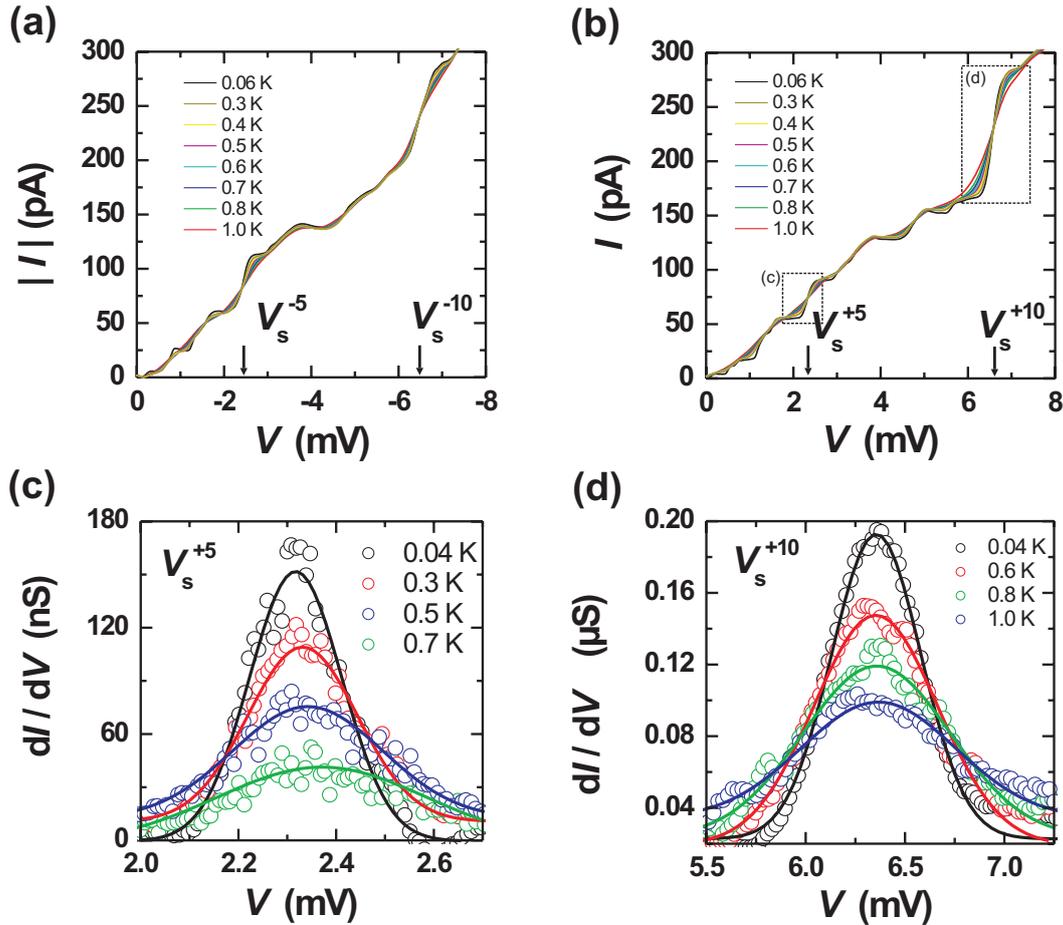
**Abbildung 7.22.:** (a) Bei  $T = 0 \text{ K}$  ist die Fermi-Kante nicht durch die Temperatur verbreitert und die Breite der Stromstufe entspricht der Linienbreite des resonanten Zustandes. (b) Bei  $T > 0 \text{ K}$  ist die Fermi-Kante verbreitert. Entsprechend besitzt die Stromstufe im resonanten Tunnelstrom eine endliche Steigung.

werden Ladungsträger oberhalb der bei  $T = 0$  scharfen Fermi-Kante besetzt. Dies führt zu der in Abbildung 3.21 gezeigten Verbreiterung der Fermi-Kante und somit zu einer Temperaturverbreiterung der Leitfähigkeitspeaks (siehe Abbildung 7.22). Aus der Halbwertsbreite der Resonanz lässt sich dann mit der Beziehung (7.44) der Konversionsfaktor  $\alpha$  bestimmen.

$$(\alpha e \Delta V_{s,i})^2 = (\Delta E_{s,i})^2 + (3.53 \times k T_{\text{eff}})^2 \quad (7.44)$$

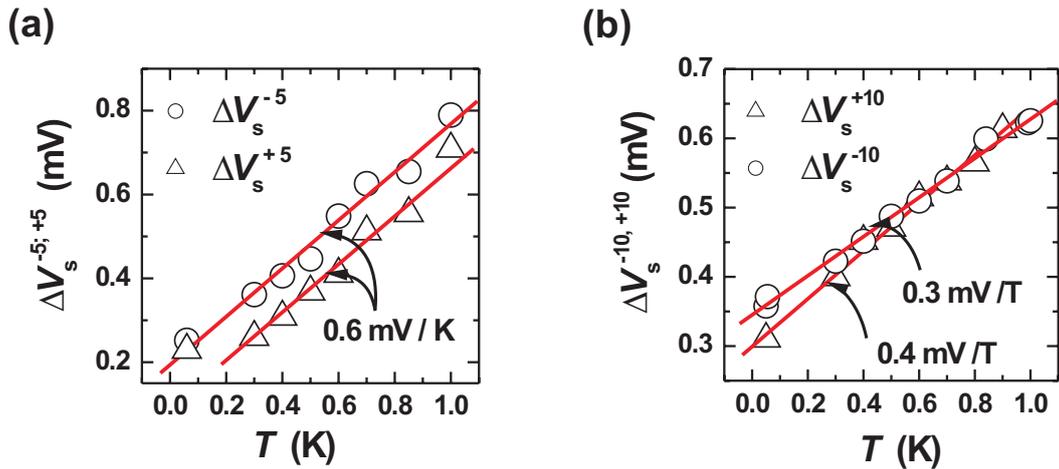
Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (7.44) gibt die intrinsische Linienbreite des Quantenpunktniveaus an. Im Vergleich zum zweiten Term, der Temperaturverbreiterung der Verteilungsfunktion des Emitters, ist der erste Term meist zu vernachlässigen. Gleichung (7.44) setzt die Kenntnis der effektiven Ladungsträgertemperatur voraus. Da zur Bestimmung des Konversionsfaktors nicht die Absolutwerte der Temperatur, sondern die Änderungen entscheidend sind, sollten entsprechende Messungen in einem Temperaturbereich durchgeführt werden, in dem die Ladungsträger an den Kristall und somit der Umgebungstemperatur gut angekoppelt sind. Für diesen Fall sollte  $\Delta T \approx \Delta T_{\text{eff}}$  gelten. Dies erlaubt dann die Verwendung von  $T$  an Stelle von  $T_{\text{eff}}$  in Gleichung (7.44). Hierdurch vereinfacht sich die Bestimmung von  $\alpha$ , da der Konversionsfaktor in Gleichung (7.44) die einzige Unbekannte ist.

Abbildung 7.23 zeigt den Kennlinienverlauf im Niedrigstrom-Regime für Temperaturen von 50 mK bis 1 K. An den Stufenpositionen  $V_s^{\pm 5} = \pm 2.3 \text{ mV}$  und  $V_s^{\pm 10} = \pm 6.6 \text{ mV}$  wird unter Verwendung von Gleichung (7.44) aus der temperaturabhängigen Verbreiterung der Halbwertsbreite, der mit den Stromstufen korrespondierenden Leitfähigkeitsresonanzen (Abbildung 7.24), der Konversionsfaktor  $\alpha$  bestimmt. Die Verbreiterung der Resonanz bei  $V_s^{\pm 5} = \pm 2.3 \text{ mV}$  ergibt wie erwartet einen Konversionsfaktor  $\alpha = 0.5$ . Aus der Verbreiterung der Resonanz bei  $V_s^{\pm 10} = \pm 6.6 \text{ mV}$  erhält man jedoch deutlich größere Konversionsfaktoren  $\alpha_s^{-10} \approx 1$  und  $\alpha_s^{+10} \approx 0.8$ . Diese Abweichung resultiert daher, dass das Joul-



**Abbildung 7.23.:** Kennlinien-Verlauf im Niedrigstrom-Regime. **(a)** Negative Spannungspolarität. Es ist zur besseren Darstellung der Absolutbetrag des Stroms aufgetragen. Bild **(b)** zeigt die positive Polarität. In Abbildung **(c)** und **(d)** sind die Ableitungen der Stromstufen bei  $V_s^{+5}$  und  $V_s^{+10}$  dargestellt. Aus der temperaturabhängigen Verbreiterung der Halbwertsbreite der Resonanzen  $\Delta V_s^{+5}(T)$  bzw.  $\Delta V_s^{+10}(T)$  lässt sich der Spannungs-Energie-Konversionsfaktor bestimmen; siehe Abbildung 7.24.

sche Heizen bei  $V_s^{\pm 10} = \pm 6.6$  und  $I_s^{\pm 10} > 200$  pA bereits einen deutlichen Einfluss besitzt. Dies führt zu einem deutlichen Unterschied zwischen  $T_{\text{eff}}$  und  $T$ . Wie in Abbildung 7.24 zu beobachten ist, wurde die Halbwertsbreite der Resonanz gegen die Umgebungstemperatur aufgetragen. Dies ist jedoch für die Stufen bei  $V_s^{\pm 10} = \pm 6.6$  mV nicht mehr zulässig. Wieso jedoch trotzdem eine lineare Temperaturverbreiterung beobachtet werden kann, ist unklar. Der Kennlinienverlauf beginnt beim Maximalwert der Vorspannung in der negativen Polarität und wird kontinuierlich reduziert bis zum Nulldurchgang, um anschließend kontinuierlich bis zur maximalen Vorspannung anzusteigen. Aus dieser Verlaufsrichtung ist auch verständlich, dass die Stufe bei  $V_s^{-10} = -6.6$  mV breiter als in der positiven Polarität bei  $V_s^{+10} = +6.6$  mV verläuft und eine geringere Temperaturabhängigkeit zeigt. Hier findet ein Übergang von hoher dissipativer Energie zur niedrigeren statt;

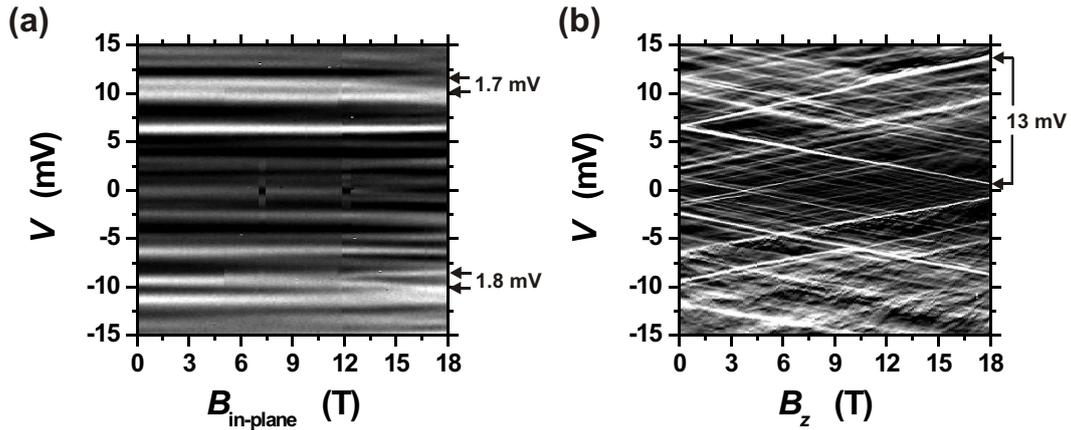


**Abbildung 7.24.:** Halbwertsbreite der Leitfähigkeitsresonanz als Funktion der Temperatur. **(a)** Verlauf der Halbwertsbreite der 5. Leitfähigkeitsresonanz in positiver und negativer Spannungspolarität. **(b)** Verlauf der Halbwertsbreite der 10. Leitfähigkeitsresonanz für die positive und negative Polarität. Bei der 10. Resonanz ( $I_{s,10} > 150 \text{ pA}$ ) ist bereits ein Heizeffekt und somit eine Abweichung zwischen  $T$  und  $T_{\text{eff}}$  zu beobachten.

hingegen verläuft in positiver Polarität der Übergang umgekehrt. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass bereits bei 6.6 mV ein deutlicher Heizeffekt beobachtbar ist.

## 7.2.2. Quantenpunkte im Magnetfeld: Gequetschte Akzeptor-Zustände?

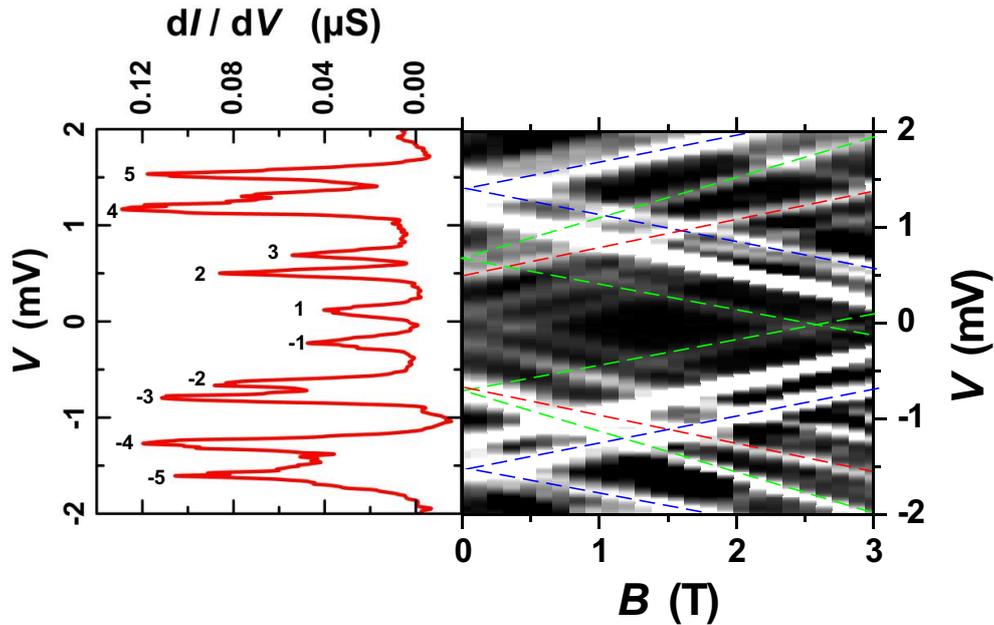
In diesem Abschnitt wird der Einfluss äußerer Magnetfelder auf den Tunneltransport im Niedrigstrom-Regime untersucht. Die beiden vorangegangenen Abschnitte haben gezeigt, dass die Stufen in der Strom-Spannungs-Kennlinie dem resonanten Tunneln freier Emitter-Löcher in diskrete Zustände in der Germaniumschicht entsprechen. Die Abbildung 7.25 zeigt einen Ausschnitt der ersten Ableitung der Strom-Spannungs-Charakteristik im Niedrigstrom-Regime unter Einwirkung eines äußeren Magnetfeldes. Die maximale Feldstärke beträgt 18 Tesla. Die Magnetfeldauflösung ist 0.1 Tesla. Dunkle Bereiche entsprechen einer niedrigen, helle einer hohen differentiellen Leitfähigkeit. Die Leitfähigkeitsmaxima bilden in den Graustufendarstellungen in Abbildung 7.25 die „weißen“ Linien. Abbildung 7.25 **(a)** zeigt die differentielle Leitfähigkeit als Funktion eines in der Wachstumsebene liegenden Magnetfeldes. Auswirkungen des Magnetfeldes auf die Leitfähigkeitsmaxima sind erst ab Magnetfeldstärken oberhalb von 10 Tesla festzustellen. Eine kubisch mit der Feldstärke zunehmende Aufspaltung ist bei  $\pm 10 \text{ mV}$  zu beobachten; siehe hierzu Abbildung 7.29. In Abbildung 7.25 **(b)** ist die Abhängigkeit der differentiel- len Leitfähigkeit von einem senkrecht zur Wachstumsebene und parallel zum Strom orientierten Magnetfeld zu sehen. Im Vergleich zur Situation von Abbildung 7.25 **(a)** ist ein deutlicher Unterschied festzustellen. Die Leitfähigkeitsmaxima spalten



**Abbildung 7.25.:** Graustufen-Graphen der differentiellen Leitfähigkeit als Funktion der angelegten Spannung und des äußeren Magnetfelds. **(a)** Das Magnetfeld ist parallel zur Wachstumsebene orientiert. Einige Linien zeigen eine geringe Aufspaltung von  $1.8 \pm 0.2$  mV bei 18 T. Für Magnetfelder unterhalb von 10 Tesla ist keine Steigung der Linien zu beobachten. Die Intensität der einzelnen Linien variiert. **(b)** Das Magnetfeld ist parallel zur Wachstumsrichtung orientiert. Viele der Linien aus **(a)** lassen sich Geraden zuordnen. Ebenfalls variiert die Intensität der Geraden. Die Steigungen der Geraden betragen  $\pm 0.33 \pm 0.01$  mV/T. Vergrößerungen der Bilder **(a)** und **(b)** sind in Abbildung 7.27 zu sehen. Weitere Ausschnitte, auch von anderen Dioden, befinden sich im Anhang.

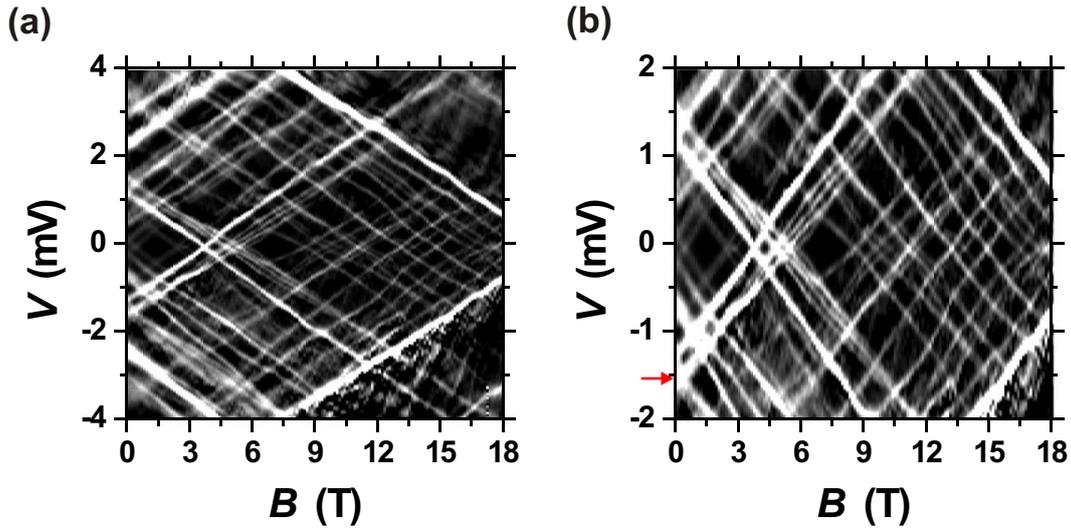
im Magnetfeld auf und folgen aufsteigenden beziehungsweise absteigenden Geraden. Eine detaillierte Betrachtung der Graustufendarstellung 7.25 **(b)** zeigt, dass es mehrere Aufspaltungen unterschiedlicher Größe gibt. Auf den ersten Blick ist eine grobe Aufspaltung der Leitfähigkeitsresonanzen zu beobachten. Sehr gut zu erkennen ist die Aufspaltung des Leitfähigkeitsmaximums bei 6.6 mV in Abbildung 7.25 **(b)**. Die Aufspaltung des Niveaus beträgt bei 18 Tesla zirka 13 mV. Eine Untersuchung der Aufspaltung der ersten fünf Leitfähigkeitsresonanzen belegt, dass sogar eine noch größere Aufspaltung existiert. In Abbildung 7.26 ist die magnetfeldabhängige Verschiebung beziehungsweise Aufspaltung der ersten fünf Resonanzen für beide Spannungspolaritäten dargestellt. Die Resonanzen  $(\pm 1)$ ,  $(\pm 4)$  und  $(\pm 5)$  zeigen die selbe Aufspaltung im Magnetfeld wie die Resonanz bei  $\pm 6.6$  mV. Die aufgespaltenen Niveaus verschieben im Magnetfeld ihre Position mit der Steigung  $\pm 0.35$  mV/T. Die Resonanz  $(\pm 3)$  besitzt eine größere Aufspaltung im Magnetfeld, ihre Niveaus haben eine Steigung  $\pm 0.43$  mV/T. Die Ursache der unterschiedlichen Steigungen ist noch ungeklärt. Möglicherweise resultiert sie aus einer unterschiedlichen Ankopplung der Zustände an die Zuleitungen. Die Kopplung an die Zuleitungen muss jedoch in beiden Spannungspolaritäten gleich sein, da im Graustufenbild die Steigung in beiden Polaritäten identisch ist. Es ist auch denkbar, dass die Aufspaltung eines angeregten Zustandes beobachtet wird.

Die Resonanz  $(\pm 2)$  zeigt keine Aufspaltung im Magnetfeld, erfährt jedoch die gleiche Verschiebung wie die Resonanzen  $(\pm 1)$ ,  $(\pm 4)$  und  $(\pm 5)$ . Warum keine Aufspaltung beobachtet werden kann, ist noch unklar. Möglicherweise verhindern elektro-



**Abbildung 7.26.:** Die linke Darstellung zeigt den Verlauf der ersten Ableitung ohne Magnetfeld, siehe Abbildung 7.21 (d). In der Graustufenarbeitskurve ist die Aufspaltung der Resonanzen im Magnetfeld zu beobachten. Die Resonanz ( $\pm 2$ ) zeigt keine Aufspaltung im Magnetfeld. Die Resonanz erfährt jedoch die gleiche Verschiebung im Magnetfeld, wie die in zwei Resonanzen aufspaltenden Resonanzen ( $\pm 1$ ), ( $\pm 4$ ) und ( $\pm 5$ ). Die Resonanz ( $\pm 3$ ) spaltet ebenfalls in zwei Niveaus auf; die Aufspaltung ist jedoch größer als bei den übrigen Niveaus. Die Steigung der roten beziehungsweise blauen Geraden beträgt  $\pm 0.36 \text{ mV/T}$ . Die grünen Geraden haben die Steigung  $\pm 0.43 \text{ mV/T}$ .

statische Wechselwirkungen die Besetzung des zweiten Transportkanals. Neben der bereits diskutierten „Grobstruktur“-Aufspaltung der Resonanzen, ist bei einigen Linien eine „Feinstruktur“-Aufspaltung zu sehen. In Abbildung 7.27 (a) beziehungsweise (b) ist eine solche „Feinstruktur“-Aufspaltung beim Leitfähigkeitsmaximum ( $\pm 5$ ) zu beobachten. Die im Nullfeld bei zirka  $\pm 1.5 \text{ mV}$  liegende Resonanz spaltet im Feld in vier Linien auf, die jedoch oberhalb von 9 Tesla wieder zu einer Linie zusammenlaufen. Die Aufspaltungen sind in Abbildung 7.28 aufgetragen. Möglicherweise ist die Resonanz ( $\pm 5$ ) eine Überlagerung von vier entarteten Zuständen; dies würde auch die hohe Intensität der Linie erklären. Für Spannungen im Bereich von  $\pm 1 \text{ mV}$  koppeln die aufgespaltenen Zustände unterschiedlich an die Zuleitungen, so dass sie differenziert wahrgenommen werden können. Bei höheren Spannungen überlagern sich die Zustände wieder und werden als eine Linie wahrgenommen. Das in Abbildung 7.25 zu beobachtende Verhalten ist charakteristisch für Ladungsträger mit nicht-parabolischer Dispersionsrelation. In einem parallel zum Strom und senkrecht zur Wachstumsebene orientierten Magnetfeld ist, ähnlich wie bei Ladungsträgersystemen mit parabolischer Dispersionsrelation, eine Zeeman-Aufspaltung proportional zur Feldstärke zu beobachten. Der Spin-Magnetfeld-Operator setzt sich aus einem isotropen und einem anisotropen Anteil zusammen



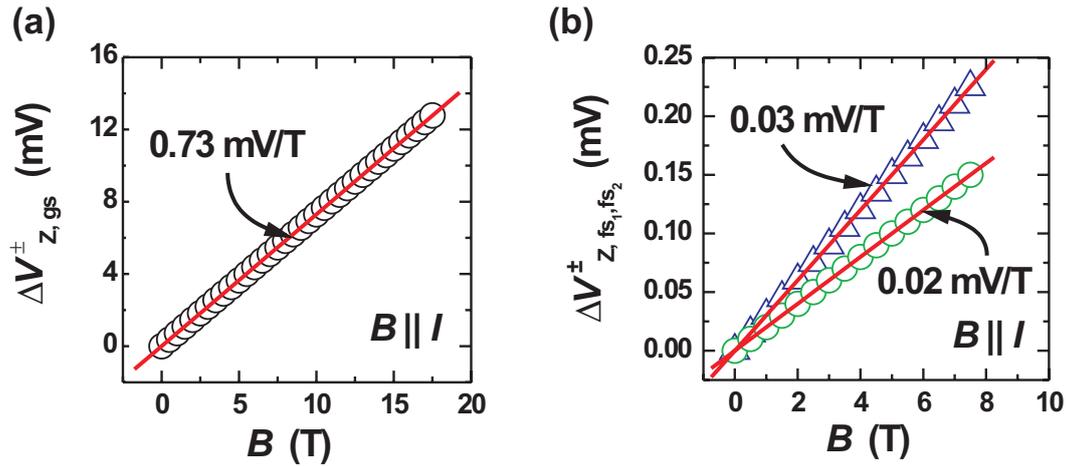
**Abbildung 7.27.:** Ausschnitt aus Abbildung 7.25 (b). Es ist eine Feinstruktur von geringerer Linienbreite zu erkennen. Beispielhaft ist der Verlauf einer Linie, die bei  $-1.5$  mV im Nullfeld startet (roter Pfeil). Bis zu 3 T ist eine intensive Linie mit der Steigung  $0.32$  mV/T zu beobachten. Von 3 T bis zirka 5 T spaltet die Linie in zwei Äste auf, die wiederum oberhalb von 5 T in weitere zwei Linien aufspalten. Bis zu 9.5 T verlaufen die vier Linien annähernd parallel. Für höhere Magnetfelder laufen die Linien wieder zu einer zusammen.

(siehe Gleichung (2.72),

$$H_Z = 2\kappa \mu_B \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} + 2q \mu_B \mathcal{J} \cdot \mathbf{B}, \quad (7.45)$$

mit  $\mathcal{J} = (J_x^3, J_y^3, J_z^3)$ . Der isotrope Anteil dominiert, da  $\kappa$  deutlich größer als  $q$  ist. Für eine Magnetfeldorientierung innerhalb der Wachstumsebene ist das Magnetfeldverhalten der Ladungsträger von ihrer Drehimpulsquantenzahl  $m$  abhängig. Für leichte Löcher ( $m \pm 1/2$ ) sollte weiterhin eine Aufspaltung entsprechend Gleichung (7.45) beobachtbar sein. Schwere Löcher mit ( $m \pm 3/2$ ) koppeln jedoch nicht an  $\kappa$  [35]. Der dominierende isotrope Anteil in der Zeeman-Aufspaltung entfällt. Vernachlässigt man den kleinen anisotropen Anteil, lässt sich festhalten, dass für schwere Löcher die Zeeman-Aufspaltung (linear in  $B$ ) für Magnetfelder in der Wachstumsebene unterdrückt ist [188, 189, 190, 191]. Störungstheoretische Betrachtungen<sup>7</sup> zeigen jedoch, dass für große Magnetfelder die Zeeman-Aufspaltung einen Beitrag proportional zu  $B^3$  erhält. Aus dem unterschiedlichen Verhalten bezüglich der Magnetfeldorientierungen ist davon auszugehen, dass die Leitfähigkeitsmaxima durch den Transport von schweren Löchern zu Stande gekommen sind. Für ein Magnetfeld senkrecht zur Wachstumsebene schieben die einzelnen Spinkanäle entsprechend ihres Spins zu höheren beziehungsweise niedrigeren Energien. Das bedeutet, im Magnetfeld ist ein Leitfähigkeitsmaximum eines Spinkanals, der in Resonanz mit der Fermi-Kante des Emitters gerät, bereits bei einer kleineren Vorspannung  $V_1$  zu beobachten, da er energetisch abgesenkt ist. Der zweite

<sup>7</sup>Taylor-Entwicklung von  $\Delta E_Z(B)$  mit höherer Ordnung in  $B$



**Abbildung 7.28.:** Spinaufspaltung in einem parallel zum Strom und senkrecht zur Wachstumsebene orientierten Magnetfeld. In Abbildung 7.25 (b) beziehungsweise Abbildung 7.27 lassen sich mindestens zwei Aufspaltungen unterschiedlicher Größe beobachten. Hierbei sind die Aufspaltungen in der negativen und positiven Spannungspolarität gleich. (a) Verlauf der „großen“ Aufspaltung, wie sie beispielsweise bei der Stromstufe für  $B = 0$  bei  $\pm 6.6$  mV zu beobachten ist. (b) „Kleine“ Aufspaltungen, wie sie z. B. in Abbildung 7.27 zu erkennen sind.

Spinkanal für Ladungsträger mit entgegengesetztem Spin ist im Magnetfeld energetisch angehoben. Es bedarf einer größeren Vorspannung  $V_2$ , um den Kanal mit der Fermi-Kante in Resonanz zu bringen. Aus dem Abstand der Leitfähigkeitsmaxima  $\Delta V_Z = |V_2 - V_1|$  lässt sich der effektive  $g$ -Faktor  $g_{|3/2|}^*$  ( $\Delta E_Z = g_{|m|}^* \mu_B B$ ) des Quantenpunktes ermitteln. Die Aufspaltung der Leitfähigkeitsmaxima für die Grob- und Feinstruktur ist in Abbildung 7.28 dargestellt. Es ist eindeutig eine lineare Aufspaltung im Magnetfeld zu beobachten. Vernachlässigt man den anisotropen Anteil in der Zeeman-Aufspaltung, so erhält man aus dem Gradienten der Aufspaltung unmittelbar den Betrag des effektiven  $g$ -Faktors  $g_{|3/2|}^*$

$$g_{|3/2|}^* = \frac{\alpha e}{\mu_B} \frac{d\Delta V_Z}{dB}. \quad (7.46)$$

Mit einem Konversionsfaktor  $\alpha = 1/2$  erhält man für die Grobstruktur-Aufspaltung mit einem Gradienten  $d\Delta V_{Z,gs}/dB = 0.73$  mV/T den effektiven  $g$ -Faktor  $g_{gs}^* = 6.3$ . Für die Feinstrukturaufspaltung mit einem Gradienten  $d\Delta V_{Z,fs1}/dB = 0.02$  mV/T erhält man einen  $g$ -Faktor  $g_{fs1}^* = 0.35$  beziehungsweise für den Gradienten  $d\Delta V_{Z,fs2}/dB = 0.03$  mV/T einen effektiven  $g$ -Faktor  $g_{fs2}^* = 0.52$ . Es ist noch darauf hinzuweisen, dass die Aufspaltung für beide Spannungspolaritäten exakt gleich ist. Dies ist erneut ein Beleg für die Symmetrie des Bandprofils innerhalb des gewählten Spannungsbereichs.

Die Vermutung, dass es sich bei den diskreten Zuständen um Störstellenzustände von in den Quantentopf diffundierten Bor-Akzeptoren handelt, ist nahe liegend, da die Heterostruktur keine Stoppschichten (spacer layer) enthält. Die Zeeman-

Aufspaltung von einzelnen Bor-Akzeptoren im Germanium-Volumenmaterial ist bis jetzt ausschließlich in optischen Experimenten [192, 193, 194, 195, 196] untersucht worden. Für flache Bor-Akzeptoren im Germanium ist für die D-Linie<sup>8</sup> bei einer Feldrichtung  $\mathbf{B} \parallel [0\ 0\ 1]$  ein effektiver  $g$ -Faktor von  $g_{\text{Ge(B)}}^* = 6.92$  [192, 197] beziehungsweise  $g_{\text{Ge(B)}}^* = 8.38$  [196] ermittelt worden. Die direkte Übertragbarkeit der Ergebnisse der optischen Experimente auf die resonante Tunnelspektroskopie ist unklar und fraglich, insbesondere, da die Untersuchungen an Volumenmaterialien durchgeführt worden. Dennoch sollen hier die Ergebnisse vergleichend genannt werden. Möglicherweise bieten sie ein Indiz dafür, dass es sich bei den im Tunneltransport beobachteten diskreten Zuständen um Bor-Akzeptoren im Germanium handelt.

Zur Klärung der Ursache für die Feinstruktur sind weitere Messungen nötig. Solange die Ursache für die Aufspaltung ungeklärt ist, ist auch unklar, ob es sich bei den aus der Aufspaltung ermittelten Werten tatsächlich um effektive  $g$ -Faktoren handelt. Die Werte sind jedoch hier der Vollständigkeit halber genannt.

Es soll nun auf die Zeeman-Aufspaltung schwerer Löcher für eine Magnetfeldorientierung in der Wachstumsebene eingegangen werden. Für eine solche Magnetfeldorientierung ist, wie bereits erwähnt, keine lineare Zeeman-Aufspaltung für schwere Löcher zu erwarten. Es ist jedoch eine kleine Aufspaltung zu beobachten, die kubisch im Magnetfeld anwächst<sup>9</sup>

$$\Delta E_Z^{\text{hh}}(B_{\parallel}) = g_{\parallel}^{\text{hh}}(\mu_B B_{\parallel})^3. \quad (7.48)$$

Aus dem Gradienten der Aufspaltung von  $3 \times 10^{-4} \text{ mV/T}^3$  erhält man unter Verwendung von Gleichung (7.48) den effektiven  $g_{\parallel}^{\text{hh}}$ -Faktor für eine Magnetfeldrichtung in der Wachstumsebene  $g_{\parallel}^{\text{hh}} \approx 3.9 \times 10^5$ .

Neben der Spinaufspaltung erfahren diskrete Energieniveaus im Magnetfeld eine weitere, so genannte diamagnetische Verschiebung. Dominiert die elektrostatische Quantisierung  $\omega_c \ll \omega_0$ , so wird die Grundzustandsenergie mit wachsendem Magnetfeld um den Betrag  $\Delta E_D = \hbar\omega_c/8\omega_0$  (Gleichung (3.72)) verschoben. Aus der Energieverschiebung lassen sich Aussagen über das elektrostatische Einschlusspotential treffen. Die elektronische Ausdehnung des nulldimensionalen Grundzustandes ist näherungsweise  $2a = 2\sqrt{2\hbar/m^*\omega_0}$ .

Die Abweichungen von der linearen Verschiebung der Stromstufen in Abbildung 7.25 liegen im Bereich der Halbwertsbreite der Leitfähigkeitsresonanz von zirka 0.3 mV. Das bedeutet, eine mögliche diamagnetische Verschiebung bei 18 Tesla ist kleiner als  $\alpha e \times 0.3 \text{ mV} = 0.15 \text{ meV}$ . Hieraus lässt sich eine obere Grenze für die

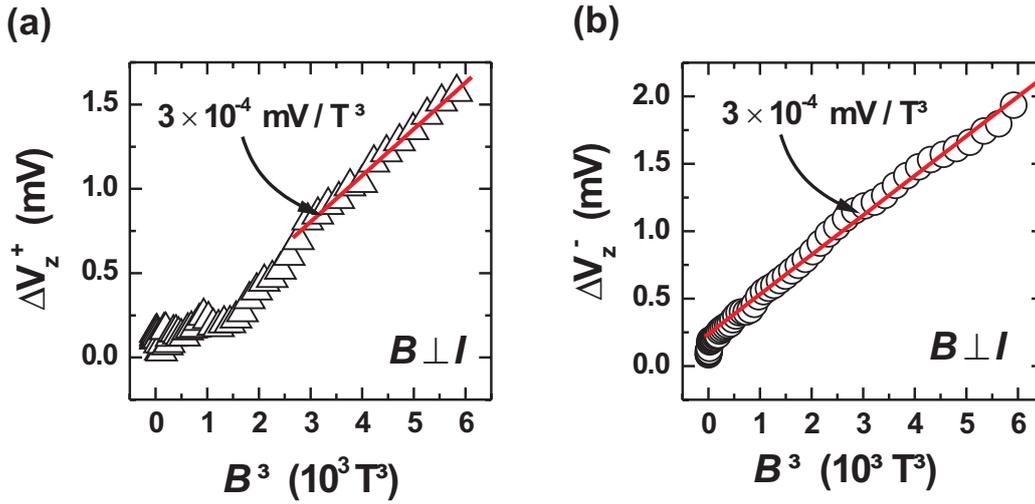
<sup>8</sup>Dipol-Übergang vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand

<sup>9</sup>

$$\Delta E_Z \propto 2 \left( \frac{L^2 m_0}{\pi^2 \hbar^2} \right)^2 \frac{(\mu_B B)^3}{|E_{\text{hh}} - E_{\text{lh}}|}, \quad (7.47)$$

Die Zeeman-Aufspaltung ist invers proportional zur Leicht-Loch-Schwer-Loch-Aufspaltung und somit Abhängig von der Quantentopfbreite  $L$  [35].

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen



**Abbildung 7.29.:** Spinaufspaltung für eine Magnetfeldorientierung parallel zur Wachstumsebene und senkrecht zum Strom. Auf Grund der starken verbreiterten Zustände (Abbildung 7.25 (a)) ist eine Aufspaltung kaum zu beobachten. Für Feldstärken oberhalb von 10 Tesla lässt sich für jede Polarität mindestens eine Aufspaltung verfolgen. Die Aufspaltung ist jeweils eine kubische Funktion des Magnetfelds. (a) Aufspaltung in der positiven Polarität. (b) Aufspaltung in der negativen Polarität.

Ausdehnung des Grundzustandes abschätzen,

$$\frac{\hbar\omega_c(B = 18 \text{ T})}{8\omega_0} = \frac{e^2 B^2 a^2}{8m^*} < 0.15 \text{ meV.} \quad (7.49)$$

$$\curvearrowright a_{\text{max}} < 2.5 \text{ nm.}$$

Eine wasserstoffähnliche Störstelle, die im Germanium-Volumenmaterial eingebettet ist, besitzt den effektiven Bohrradius<sup>10</sup>

$$a_{\text{B}}^* = \frac{\hbar^2 \epsilon_r}{e^2 m^*} = \frac{m_0}{m^*} \epsilon_r a_{\text{B}}, \quad (7.50)$$

mit  $a_{\text{B}} = \hbar^2/m_0 e^2 \approx 0.053 \text{ nm}$ . Ein schweres Loch ( $m_{\text{hh}} = 0.28 m_0$ ) im Grundzustand einer Störstelle im Germanium ( $\epsilon_{\text{Ge}} = 16.2$ ) besitzt demnach den effektiven Radius  $a_{\text{B}}^* \approx 3 \text{ nm}$  und ist für die Bedingung (7.49) zu groß. Berücksichtigt man, dass die Masse der schweren Löcher im Silizium-Emitter doppelt so groß ist wie im Germaniumquantenfilm, ist nicht auszuschließen, dass die Masse des Ladungsträgers in der Störstelle größer ist, als die angenommene Masse der schweren Löcher im Germanium-Volumenmaterial. Dies würde den effektiven Bohrradius reduzieren. Die Gleichung (7.50) berücksichtigt zudem nicht die Ausdehnung des Germaniumfilms. Gleichung (7.50) macht Aussagen über Störstellen im Volumenmaterial.

<sup>10</sup>Im Vergleich zum Wasserstoffproblem ist das Feld der Ladung um die statische Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  des Halbleiters vermindert. Dies lässt sich durch die Substitution  $e^2 \rightarrow e^2/\epsilon_r$  berücksichtigen. Zudem ist die freie Ladungsträgermasse durch die effektive Masse des Ladungsträgers im Halbleiter zu ersetzen,  $m_0 \rightarrow m^*$ .

Keldysh [198] und Bastard [199] konnten zeigen, dass die Veränderungen des effektiven Bohrradius beziehungsweise der effektiven Bindungsenergie<sup>11</sup> einer Störstelle, die in einer dünnen Halbleiterschicht eingebettet ist, nicht zu vernachlässigen sind. Keldysh untersuchte die Bindungsenergie von Störstellen in dünnen Halbleiterfilmen und Halbleiterübergittern, deren statische Dielektrizitätskonstante größer ist als die des Substrates beziehungsweise der Deckschicht. Unter der Voraussetzung, dass der effektive Bohrradius  $a_B^*$  der Störstelle im Volumenhalbleiter deutlich größer als die Quantentopfbreite  $L$  ist, konnte Keldysh folgende Abschätzung für den Bohrradius im Film machen:

$$a_f^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_f \hbar^2}{m^* e^2}} L = \frac{1}{2} \sqrt{a_B^* L} \quad \text{für} \quad a_B^* \gg L \gg (\epsilon_1 + \epsilon_2/2\epsilon_f)^2 a_B^*. \quad (7.53)$$

Hierbei ist  $\epsilon_f$  die statische Dielektrizitätskonstante des Films und  $\epsilon_1, \epsilon_2$  sind die statischen Dielektrizitätskonstanten des Substrats beziehungsweise der Deckschicht. Für die Näherung (7.53) ergibt sich ein effektiver Radius  $a_f^* = \sqrt{a_B^*/2} = 1.2 \text{ nm}$ . Ein Bor-Atom innerhalb eines dünnen Germaniumfilms mit dem Radius  $a_f^*$  würde also die Bedingung (7.49) erfüllen. Andererseits ist es fraglich, ob die Voraussetzung stark unterschiedlicher Dielektrizitätskonstanten erfüllt ist. Es gilt zwar  $\epsilon_{Si} < \epsilon_{Ge}$  ( $\epsilon_{Si} = 11.9, \epsilon_{Ge} = 16.2$ ), aber nicht  $\epsilon_{Si} \ll \epsilon_{Ge}$ .

Bastards Rechnungen umgingen die Beschränkungen stark unterschiedlicher Dielektrizitätskonstanten. Er berechnete mit Hilfe der Variationsrechnung (siehe Anhang A.2) die Bindungsenergie direkt aus dem Hamilton-Operator von wasserstoffähnlichen Störstellen, die in einem unendlich tiefen Quantentopf eingebettet waren. Er betrachtete die Bindungsenergie als Funktion der Topfbreite und der Position der Störstelle im Topf. Das wesentliche Resultat seiner Rechnungen ist die Zunahme der Bindungsenergie, wenn der Quantentopf schmaler wird. Bastard zeigte, dass im Grenzfall eines unendlich dünnen Quantentopfes die Bindungsenergie das Vierfache der effektiven Bindungsenergie der Störstelle im Volumenmaterial erreichen konnte,

$$\lim_{L \rightarrow 0} E_B(w) = 4 R_y^*. \quad (7.54)$$

Für den Spezialfall, dass die Störstelle in der Mitte des Quantentopfes sitzt und der Quantentopf die Ausdehnung des effektiven Bohrradius im Volumenmaterial hat, ergibt sich für die Bindungsenergie der einfache Ausdruck

$$E_B = 2.25 R_y^* \quad \text{für} \quad L/a_B^* = 1. \quad (7.55)$$

Für beliebige Topfbreiten und Störstellenpositionen lässt sich nur eine numerische Lösung finden. Aus Gleichung (7.55) folgt eine Reduzierung des effektiven

---

 11

$$E_B = R_y^* = \frac{m^*}{m_0} \frac{1}{\epsilon_r} R_y \quad (7.51)$$

$$= \frac{(e^2/\epsilon_r)}{2a_B^*}, \quad (7.52)$$

mit  $R_y = m_0 e^4 / 2\hbar^2 = 13.6 \text{ eV}$  der Bindungsenergie des Wasserstoff-Grundzustandes.

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen

Bohrradius im Volumenmaterial um  $4/9$ . Für eine Schwer-Loch-Störstelle im Germaniumfilm ergibt sich somit ein effektiver Radius von zirka  $a_{\text{t}}^* = 1.3$  nm. Es ist bemerkenswert, dass trotz unterschiedlicher Ansätze sowohl die Näherung von Keldysh als auch die Rechnung von Bastard fast die gleichen Werte für den Radius eines Störstellenpotenzials in einem schmalen Quantentopf liefern.

Bastard betonte zudem, dass das Einschlusspotenzial im Gegensatz zum Volumenmaterial zu einem Aufspalten der Störstellenzustände führt. Hierbei bestimmt die Position der Störstelle im Einschlusspotenzial die Stärke der Aufspaltung. Als eine charakteristische Größe führte er die *Störstellen-Zustandsdichte*

$$\varrho(E_{\text{B}}^i) = \frac{2}{L} \left| \frac{dz_i}{dE_{\text{B}}^i} \right| \quad (7.56)$$

in Abhängigkeit von der Bindungsenergie ein.  $z_i$  gibt die Position der Störstelle an. Einer Störstelle in der Mitte des Quantentopfes entspricht  $z_i = 0$ . In der Mitte des Topfes verschwindet  $dE_{\text{B}}^i/dz_i$  beziehungsweise nimmt sehr kleine Werte um das Zentrum herum an. Dies bedeutet, dass Störstellen um das Zentrum herum die gleiche Bindungsenergie besitzen. Für eine vorgegebene Energie stehen somit viele Niveaus zum Transport zur Verfügung. An den Rändern des Quantentopfes wird  $dE_{\text{B}}^i/dz_i$  sehr groß; daher sind bei einer bestimmten Energie deutlich weniger Störstellen vorzufinden.

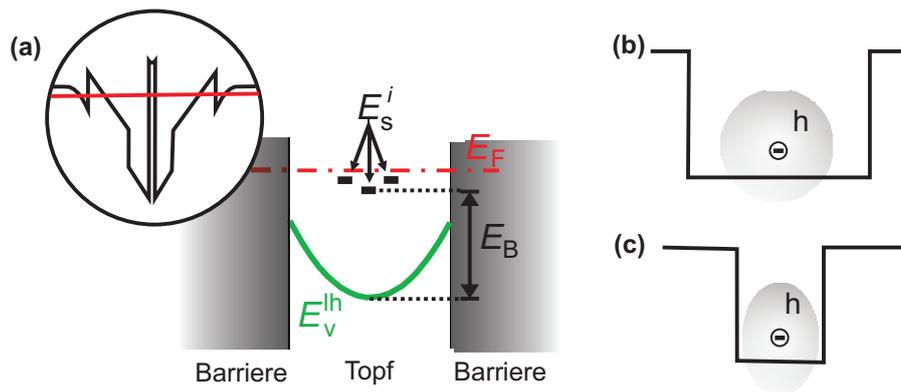
Bastards Rechnungen für einen unendlich tiefen Topf ergaben, dass die Bindungsenergie bei Reduzierung der Topfbreite kontinuierlich gegen den Wert  $4 R_{\text{y}}^*$  strebt. Rechnungen [200, 201, 202, 203, 204, 205, 206] mit endlich tiefen Potenzialtöpfen zeigten jedoch, dass die Bindungsenergie ein Maximum bei von Null verschiedener Quantentopfbreite besitzt. Im Wesentlichen bestätigen sich jedoch die Aussagen, die Bastard an einem unendlich tiefen Quantentopf machen konnte.

Das Verhalten deutet erneut auf Störstellen-Zustände hin. Es ist nahe liegend, den diskreten Zuständen Bor-Dotieratome zuzuschreiben, die aus der Zuleitungsschicht in den Germaniumfilm diffundiert sind.

### 7.2.3. Zusammenfassung

Im Spannungsbereich unterhalb von 10 mV waren in der Kennlinie einer Diode des Wafers S1324 mehrere Stromstufen zu beobachten. Die Stromstufen ließen sich dem Transport über nulldimensionale Zustände im Germaniumfilm zuordnen. Im Magnetfeld konnte keine diamagnetische Verschiebung beobachtet werden, so dass sich hieraus eine Obergrenze für die Ausdehnung der Zustände auf wenige Nanometer abschätzen ließ.

Aus dem Transportverhalten im Magnetfeld konnte ferner geschlossen werden, dass es sich bei den tunnelnden Ladungsträgern um schwere Löcher handeln musste: In einem parallel zum Strom und senkrecht zur Tunnelstruktur orientierten Magnetfeld ließ sich eine deutliche Zeeman-Aufspaltung mit einem effektiven  $g$ -Faktor des isotropen Anteils in der Größe von  $g_{\text{gs}}^* = g_{|3/2|}^* = 6.3$  beobachten. Hingegen konnte für ein Magnetfeld, das parallel zur Wachstumsebene orientiert war, nur eine sehr



**Abbildung 7.30.:** (a) Leicht-Loch Akzeptor-Zustände im Germaniumfilm. (b) Effektiver Bohrradius einer Störstelle in einem breiten Quantentopf. (c) Ein durch einen dünnen Quantentopf gestauchter effektiver Bohrradius.

kleine, kubische Aufspaltung beobachtet werden. Dieses Verhalten ist charakteristisch für den Transport schwerer Löcher in niederdimensionalen Systemen. Die experimentellen Untersuchungen ergaben eine Übereinstimmung von Bor-Akzeptoren in den Punkten:

1. Der gemessene  $g$ -Faktor liegt in der Größenordnung des aus optischen Messungen bestimmten Wertes des  $g$ -Faktors für Bor-Akzeptoren im Germanium.
2. Die Ausdehnung der gemessenen nulldimensionalen Zustände liegt in der Größenordnung von Bor-Zuständen in Quantentöpfen mit einer Breite, die der Schichtdicke des Germaniumfilmes in der untersuchten Heterostruktur entspricht.
3. Das Fehlen von Pufferschichten begünstigt eine Diffusion von Bor-Akzeptoren aus den hochdotierten Zuleitungen in die aktive Zone.

Diese Indizien unterstützen die Vermutung, dass es sich bei den beobachteten Zuständen um in die Germaniumschicht migrierte Bor-Akzeptoren handelt.

## 7. Silizium/Germanium-Quantentopfstrukturen

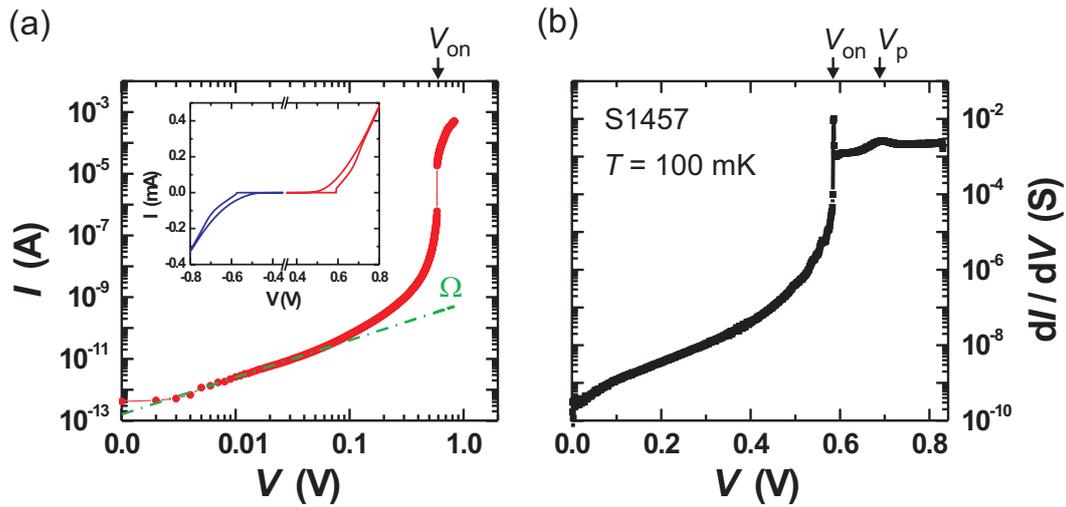
## 8. Silizium/Germanium-Quantenpunktstrukturen

In diesem Kapitel werden Dioden des Wafers S1457 diskutiert. Der Unterschied zum Wafer S1324 besteht in einem nominell 2 Monolagen dickeren Germaniumfilm. Mit einer Germaniumschichtdicke von 6.0 bis 6.5 Monolagen Germanium ist die kritische Schichtdicke, ab der plastische Relaxationsprozesse einsetzen, überschritten. Auf Grund einer Wachstumstemperatur von zirka 460°C haben sich in der Germaniumschicht Hut-Cluster-Quantenpunkte gebildet. Die Bildung der Quantenpunkte, also der Übergang vom glatten zweidimensionalen Wachstum zum dreidimensionalen Inselwachstum, konnte während des Wachstums durch RHEED-Spektroskopie beobachtet werden. Zudem wurden unbedeckte Strukturen gewachsen, die eine Oberflächenanalyse der relaxierten Germaniumschicht ermöglichen. In Abbildung 4.11 ist eine rastertunnelmikroskopische Aufnahme einer unbedeckten Struktur zu sehen. Charakteristische Parameter und Größen der Germanium-Hut-Cluster sind im Kapitel 4 zusammengefasst.

In Kapitel 7 ist in Abbildung 7.1 ein simuliertes Bandprofil in Wachstumsrichtung für den Wafer S1324 gezeigt worden. Entscheidend für die Berechnung ist der Verlauf des Einschlusspotenzials in Wachstumsrichtung. Für eine Berechnung des Bandprofils des Wafers S1457 müsste zusätzlich ein laterales Einschlusspotenzial für die Germaniumschicht berücksichtigt werden. Dies kann zu einer Änderung der Aufladung in der Germaniumschicht führen. Wie bereits in Kapitel 7 diskutiert wurde, führt die starke Aufladung der Germaniumschicht zu einer entscheidenden Bandverbiegung, die die Transporteigenschaften der Heterostruktur charakteristisch beeinflusst.

### 8.1. Instabilität im Transport

Die Abbildung 8.1 (a) zeigt die Strom-Spannungs-Charakteristik einer Diode des Wafers S1457 mit einem Kopfdurchmesser von 72  $\mu\text{m}$  in einer doppellogarithmischen Darstellung. Die zugehörige numerische erste Ableitung ist in Abbildung 8.1 (b) dargestellt. Die Kennlinie ist bei einer Umgebungstemperatur von 100 mK aufgenommen worden. Sie lässt sich in drei Transportregime einteilen: ein Niedrigstrom-Regime, ein Übergangsbereich und ein Hochstrom-Regime. Im Niedrigstrom-Regime ist bis zu einer Vorspannung von einigen zehn Millivolt ein lineares Strom-Spannungs-Verhalten zu beobachten. Der Strom in diesem Bereich liegt in der Größenordnung von 10 pA. Mit zunehmender Spannung wechselt das lineare Spannungsverhalten in einen exponentiellen Anstieg des Stroms als Funk-



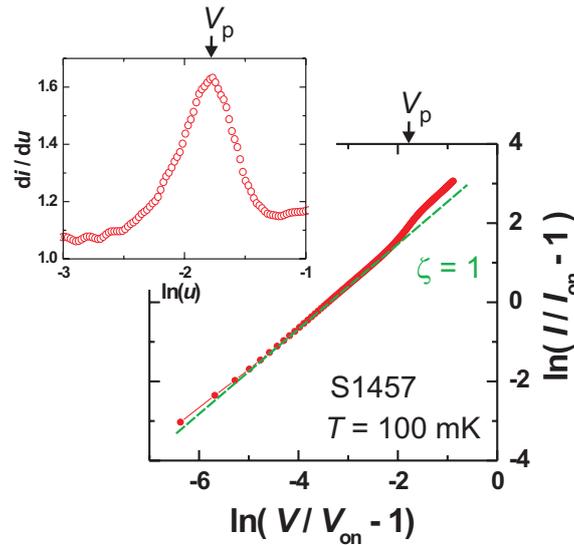
**Abbildung 8.1.:** (a) Doppellogarithmische Darstellung der Strom-Spannungs-Charakteristik einer Tunnel diode (Wafer S1457) mit einem nominellen Durchmesser von  $72 \mu\text{m}$ . Bis zu zirka 50 mV nimmt der Strom linear mit der Spannung zu. Oberhalb von 50 mV bis zirka 400 mV nimmt der Strom exponentiell mit der Spannung zu. Bei  $V_{on}$  ist ein charakteristischer Sprung in der Kennlinie zu beobachten. Das Innenbild zeigt das Hysterese-Verhalten der Kennlinie. (b) Verlauf der differentiellen Leitfähigkeit der Kennlinie aus (a). Deutlich ist der Sprung bei  $V_{on}$  sowie eine weitere Resonanz mit einem Maximum bei  $V_p$  zu erkennen.

tion der äußeren Spannung. Das Übergangs-Regime beginnt bei Strömen von einigen hundert Picoampere, wobei die Vorspannung im Bereich oberhalb von 400 mV liegt. Das Strom-Spannungs-Verhalten wechselt im Übergangsbereich von einem exponentiellen in ein über-exponentielles Verhalten. Bei einem Strom von zirka 200 nA ist eine sprunghafte Stromzunahme auf einige Mikroampere zu beobachten. Nach dem Erreichen des Hochstrom-Regimes ist ein Potenz-Verhalten,  $I \propto V^\zeta$  mit  $\zeta \approx 1$ , der Strom-Spannungs-Kennlinie zu beobachten. Charakteristisch für das Hochstrom-Regime ist die Existenz eines Leitfähigkeitsmaximums; siehe Abbildung 8.2.

In den folgenden Abschnitten werden die einzelnen Transportregime und zugehörigen Transportmechanismen diskutiert.

### 8.1.1. Niedrigstrom-Regime: Hopping Transport

Die Abbildung 8.3 (a) zeigt in einer doppellogarithmischen Darstellung neun Strom-Spannungs-Kennlinien einer Diode bei unterschiedlicher Umgebungstemperatur. Die Umgebungstemperatur wurde im Bereich von 50 mK bis 1 K variiert. Es ist eine deutliche Zunahme des Stroms bei steigender Temperatur zu beobachten. Das Temperaturverhalten des Stroms beziehungsweise der differentiellen Leitfähigkeit  $G = dI/dV$  wird im linearen Bereich (bei 10 mV) des Niedrigstrom-



**Abbildung 8.2.:** Transportregime nach dem Sprung. Doppellogarithmische Darstellung der auf den Sprung normierten Kennlinie. Das kleine Bild zeigt die Resonanz in der differentiellen Leitfähigkeit bei  $V_p$ . Im Wesentlichen nimmt der Strom im Hochstrom-Regime linear mit der Spannung zu.

Regime anhand der Variation der lokalen Aktivierungsenergie [96, 207]

$$w(T) = -\frac{d}{d(kT)^{-1}} \ln G \quad (8.1)$$

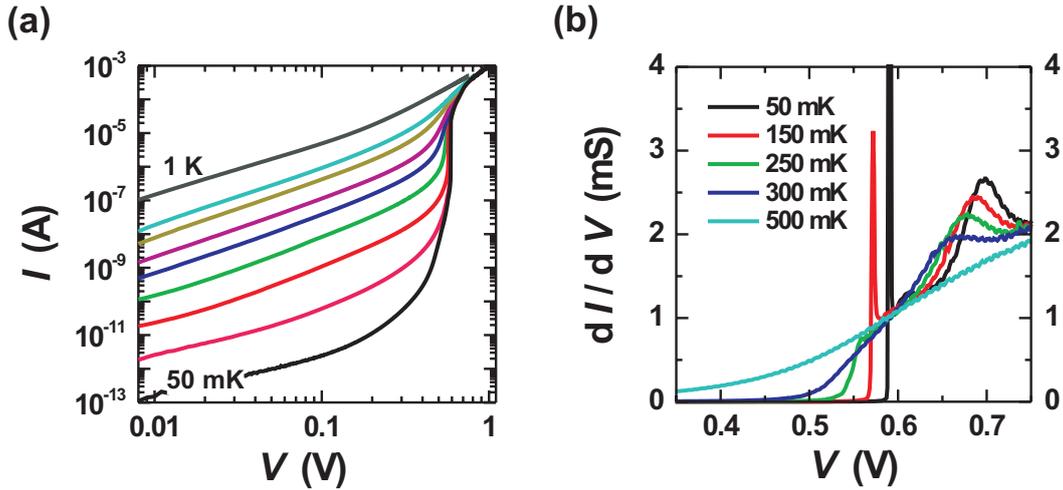
untersucht. Für ein Temperaturverhalten

$$G(T) = G_0 \exp \left[ -\left( \frac{kT_0}{kT} \right)^x \right] \quad (8.2)$$

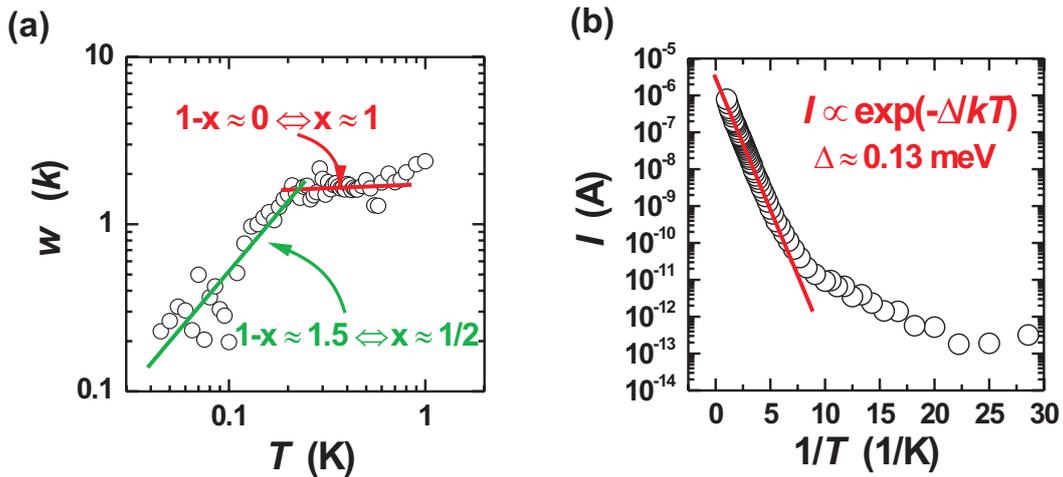
der differentiellen Leitfähigkeit zeigt die lokale Aktivierungsenergie das Verhalten  $w(T) = x(kT_0)^x (kT)^{1-x}$ . In der Temperaturanalyse der experimentellen Daten lässt sich aus Gründen der Einfachheit die Boltzmann-Konstante  $k = 1$  wählen, da hierdurch der gesuchte Exponent  $x$  und die charakteristische Temperatur  $T_0$  nicht beeinflusst werden. In einer Darstellung  $\log_{10} w(T)$  gegen  $\log_{10} T$  lassen sich aus dem Gradienten der Geraden und dem  $y$ -Achsenabschnitt  $A$  die gesuchten Parameter ablesen,

$$\log_{10} w(T) = A + (1 - x) \log_{10} T \quad \text{mit} \quad A = x \log_{10} T_0 + \log_{10} x. \quad (8.3)$$

Aus Gleichung (8.3) folgt für die charakteristische Temperatur  $T_0 = (10^A/x)^{1/x}$ . Am Verlauf der lokalen Aktivierungsenergie, Abbildung 8.4 (a), sind unmittelbar zwei Transportmechanismen zu erkennen. Oberhalb von 160 mK ist ein aktiviertes Transportverhalten zu beobachten. Die lokale Aktivierungsenergie hat ein Plateau erreicht. In einer Arrhenius-Darstellung, Abbildung 8.4 (b), zeigt der



**Abbildung 8.3.:** (a) Strom-Spannungs-Charakteristik und (b) differentielle Leitfähigkeit einer Tunnel diode (S1457) im Temperaturbereich von 50 mK bis 1 K. Zur besseren Übersicht wurde die differentielle Leitfähigkeit nur für ausgewählte Temperaturen dargestellt.



**Abbildung 8.4.:** (a) Doppellogarithmische Darstellung des Verlaufs der lokalen Aktivierungsenergie als Funktion der Temperatur. Die rote Gerade besitzt die Steigung  $(x - 1) = 0$ . Hieraus resultiert ein aktiviertes Transportverhalten  $I \propto \exp(-\Delta/kT)$  mit  $\Delta = 0.13$  meV. Für Temperaturen unterhalb von 160 mK ist ein Transportverhalten  $G \propto \exp(-(T_0/T)^{1/2})$  mit  $T_0 \approx 8.1$  K zu beobachten; siehe Abbildung 8.5 (a). (b) Arrhenius-Darstellung. Es ist ein aktiviertes Transportverhalten über fünf Größenordnungen im Strom zu erkennen.

Strom über fünf Größenordnungen ein einfach aktiviertes Transportverhalten,  $I \propto \exp(-\Delta/kT)$ . Aus der Arrhenius-Darstellung folgt unmittelbar eine Aktivierungsenergie  $\Delta = 0.13$  meV, auf deren physikalische Bedeutung später eingegangen wird. In Abbildung 8.6 (a) sind die Aktivierungsenergien von neunzehn getesteten Dioden als Funktion der Querschnittsfläche des Diodenkopfes aufgetragen. Die

Dioden wurden aus zwei unterschiedlichen Wafern und Positionen auf den Wafern präpariert. Aus den Untersuchungen folgt, dass im Wesentlichen nur eine leichte Schwankung der Aktivierungsenergie zu beobachten ist. Innerhalb der getesteten Größenordnung scheint die Querschnittsfläche keinen Einfluss auf die Aktivierungsenergie zu besitzen. Es ist jedoch eine leichte Tendenz zu beobachten, nach der die Aktivierungsenergie geringfügig mit der Anzahl der Monolagen und somit implizit mit steigender Flächendichte der Hut-Cluster zunimmt. Eine eindeutige Aussage fällt jedoch schwer, da die ermittelten Aktivierungsenergien sich nur geringfügig unterscheiden und eine zufällige Variation der Aktivierungsenergie nicht auszuschließen ist. Für eine endgültige Klärung sollten daher deutlich mehr Dioden getestet werden.

Im Temperaturbereich unterhalb 160 mK (s. Abbildung 8.5 (a)) ist ein Transportverhalten zu erkennen, das typisch ist für das Hüpfen der Ladungsträger mit variabler Sprunglänge, dem so genannten Variable-Range-Hopping<sup>1</sup> [95, 96]. Entsprechend beobachtet man ein Temperaturverhalten

$$G(T) = G_0 \exp \left[ - \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \right] \quad \text{mit} \quad T_0 = C \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r\xi} \quad (8.4)$$

des Stroms. Die charakteristische Temperatur hat den Wert  $T_0 = 8.1$  K. Aus der charakteristischen Temperatur ist die Lokalisierungslänge  $\xi$  mit der Kenntnis der spezifischen Dielektrizitätskonstanten und des numerischen Koeffizienten  $C$  zu berechnen. Der genaue Wert von  $C$  ergibt sich aus der probenspezifischen Lösung des Perkulationsproblems. Typischerweise liegt  $C$  in der Größenordnung von Eins; häufig ist  $C = 2.7$  [96, 97]. Für die ermittelte charakteristische Temperatur und  $\epsilon_r = 16.2$  folgt eine Lokalisierungslänge  $\xi = C \times 100$  nm. Nimmt man an, dass der Hopping-Prozess zwischen den Zuständen von Germanium-Quantenpunkten in der Querschnittsfläche stattfindet, beschreibt die Lokalisierungslänge, die Ausdehnung eines Quantenzustandes.

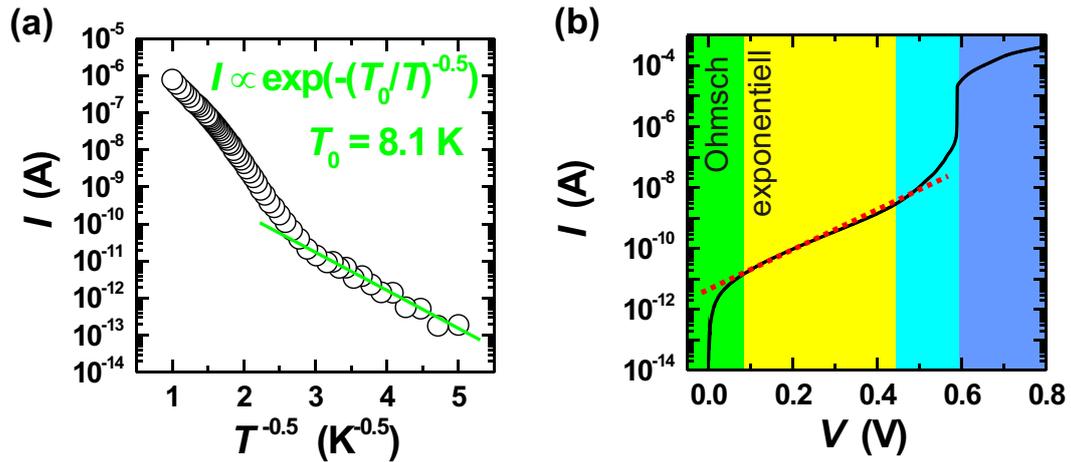
**Moderate elektrische Felder** Im Anschluss an das lineare Strom-Spannungsverhalten (bis zirka 80 mV) folgt eine exponentielle Zunahme des Stroms mit der angelegten Spannung; siehe Abbildung 8.5 (b). Bis zirka 450 mV zeigt die differenzielle Leitfähigkeit das Verhalten [98, 208, 209, 210]

$$G(T, F) = G(T) \exp \left( \gamma \frac{eF\lambda}{kT} \right) \quad \text{für} \quad eF\lambda > kT, \quad (8.5)$$

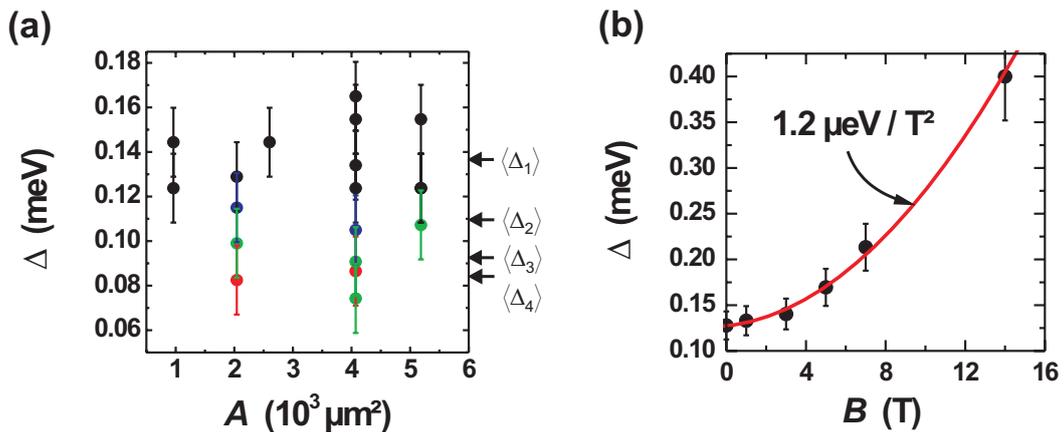
mit  $\lambda$  dem charakteristischen Hopping-Radius,  $\gamma = 0.17$  [98] und  $F = V/L_\Sigma$  dem elektrischen Feld zwischen den hochdotierten Silizium-Zuleitungen. Nominell beträgt die Länge  $L_\Sigma \approx 35$  nm, die sich aus der Germaniumschichtdicke (6.5 ML), der undotierten Silizium-Matrix ( $2 \times 5$  nm) und den Silizium-Germanium-Thermalisierungsschichten ( $2 \times 10$  nm) ergeben. Verarmungsschichten in den Silizium-Zuleitungen erhöhen jedoch die tatsächliche Länge von  $L_\Sigma$ . Aus

<sup>1</sup>Im Kapitel 3.4 sind die wesentlichen Merkmale des Hopping-Transports zusammengefasst.

## 8. Silizium/Germanium-Quantenpunktstrukturen



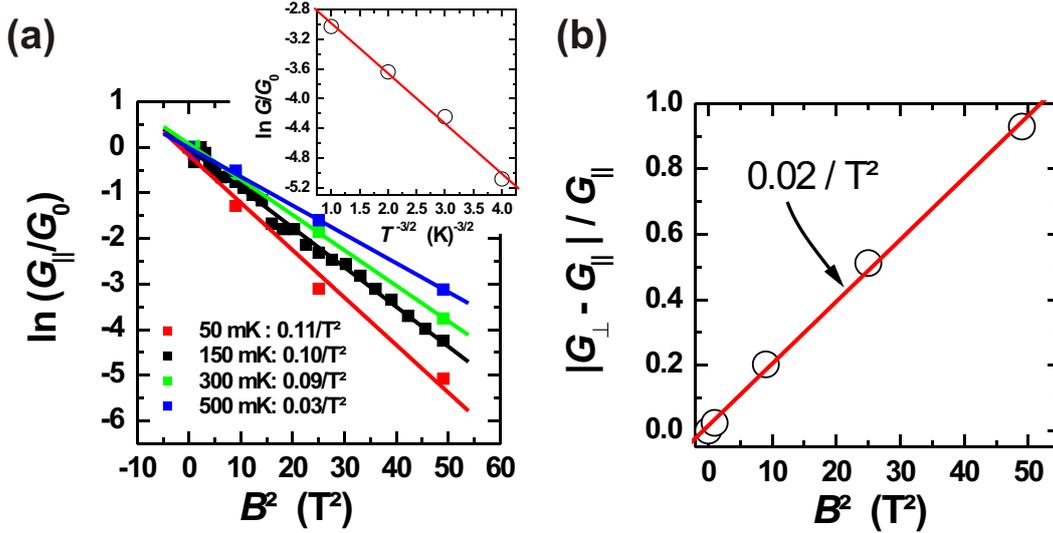
**Abbildung 8.5.:** (a) Für Temperaturen unterhalb von 160 mK ist ein Transportverhalten  $G \propto \exp(-(T_0/T)^{1/2})$  mit  $T_0 \approx 8.1$  K zu beobachten. (b) Semilogarithmische Darstellung der Strom-Spannungs-Charakteristik bei 80 mK. Im Spannungsbereich von 80 mV bis 450 mV zeigt die Kennlinie ein exponentielles Strom-Spannungs-Verhalten.



**Abbildung 8.6.:** (a) Aktivierungsenergie als Funktion der nominellen Querschnittsfläche der Dioden. Schwarze Kreise gehören zu Tunnelioden des Wafers S1457-R ( $\langle \Delta_1 \rangle \approx 0.14$  meV), blaue zum Wafer S1457-F ( $\langle \Delta_2 \rangle \approx 0.11$  meV), grüne zum Wafer S1456-F ( $\langle \Delta_3 \rangle \approx 0.09$  meV) und rote zum Wafer S1456-R ( $\langle \Delta_4 \rangle \approx 0.08$  meV). (b) Verlauf der Aktivierungsenergie im Magnetfeld.

den selbstkonsistenten Rechnungen für die Struktur S1324 lässt sich für kleine Spannungen die Länge der Verarmungsschicht auf zirka 5 nm bis 7 nm abschätzen, so dass für kleine Spannungen  $L_\Sigma \approx 50$  nm ist. Die maximalen Feldstärken des Niedrigstrom-Regimes liegen somit im Bereich von 80 kV/cm, wobei der lineare Transport von 2 kV/cm bis 16 kV/cm stattfindet.

Für ein System mit Coulomb-Lücke ist eine Temperaturabhängigkeit des Hopping-



**Abbildung 8.7.:** (a) Verhalten der differentiellen Leitfähigkeit im parallel zum Strom orientierten Magnetfeld. Zusätzlich sind die Veränderungen in der Temperatur zu sehen. (b) Anisotropie des Magnetfeldtransports für schwache Magnetfelder ( $\ell_B \gg \xi$ ).

Radius entsprechend [211]

$$\lambda(T) = \frac{\xi}{2} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8.6)$$

zu erwarten. Aus der Steigung der Kennlinie lässt sich unter Verwendung von Gleichung (8.5) und Gleichung (8.6) der Hopping-Radius beziehungsweise die Lokalisierungslänge  $\xi$  bestimmen. Für einen Wert  $\gamma = 0.17$  [98] resultiert jedoch eine deutlich zu geringe Lokalisierungslänge im Bereich weniger Angström ( $1 \text{ \AA}$ ). Möglicherweise ist die Annahme  $\gamma = 0.17$  für den beobachteten Transport nicht zutreffend und sollte entsprechend kleiner gewählt werden. Für die Ermittlung des expliziten Wertes von  $\gamma$  müsste das spezifische Perkulationsproblem gelöst werden. Dies ist Gegenstand momentaner Arbeiten. Sollte sich ein Wert  $\gamma \approx 0.001$  ergeben, erhielte man eine Lokalisierungslänge in der Größenordnung der lateralen Ausdehnung der Hut-Cluster Quantenpunkte.

**Magnetotransport** In Abbildung 8.6 (b) ist die Abhängigkeit der Aktivierungsenergie von einem äußeren Magnetfeld dargestellt. Die Magnetfeldorientierung ist parallel zum Strom. Die Aktivierungsenergie nimmt quadratisch mit dem Magnetfeld zu. Aus Abbildung 8.7 (a) geht hervor, dass die differentielle Leitfähigkeit durch ein äußeres Magnetfeld unterdrückt wird und das Verhalten [96, 97] zeigt:

$$G(B, T) = G_0 \exp(-b(T) B^2) \quad \text{mit} \quad b(T) = 0.0015 \frac{e^2 \xi^4}{\hbar^2} \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (8.7)$$

Aus den Steigungen von Abbildung 8.7 (a) ergibt sich eine Lokalisierungslänge im Bereich  $\xi = 40 \text{ nm}$ . Diese Ausdehnung passt erstaunlich gut mit der mittleren

## 8. Silizium/Germanium-Quantenpunktstrukturen

Ausdehnung von Hut-Cluster Quantenpunkten überein. Die Vermutung, dass der Transport zwischen den Zuleitungen über Hopping-Prozesse von Quantenpunkt-Zuständen innerhalb der Querschnittsfläche der Diode stattfindet wird hierdurch gestützt. Die Wirkung des Magnetfeldes besteht nun aus einer Reduzierung des Überlapps der Wellenfunktionen zwischen den einzelnen Zuständen.

In den zwei Standard-Magnetfeldorientierungen parallel und senkrecht zum Strom zeigt die Leitfähigkeit (siehe Abbildung 8.7 (b)) das Verhalten

$$\frac{G_{\perp}(B) - G_{\parallel}(B)}{G_{\parallel}(B)} = s \left( \frac{\xi}{\ell_B} \right)^4 \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \quad \text{mit} \quad s = \frac{5}{448}. \quad (8.8)$$

Aus der quadratischen Zunahme von  $0.02/T^2$  lässt sich erneut eine Aussage über die Lokalisierungslänge treffen. Für die Lokalisierungslänge ergibt sich ein Wert von  $\xi = 32$  nm. Dieser Wert liegt ebenfalls in der Größenordnung der Ausdehnung von Germanium-Quantenpunkten.

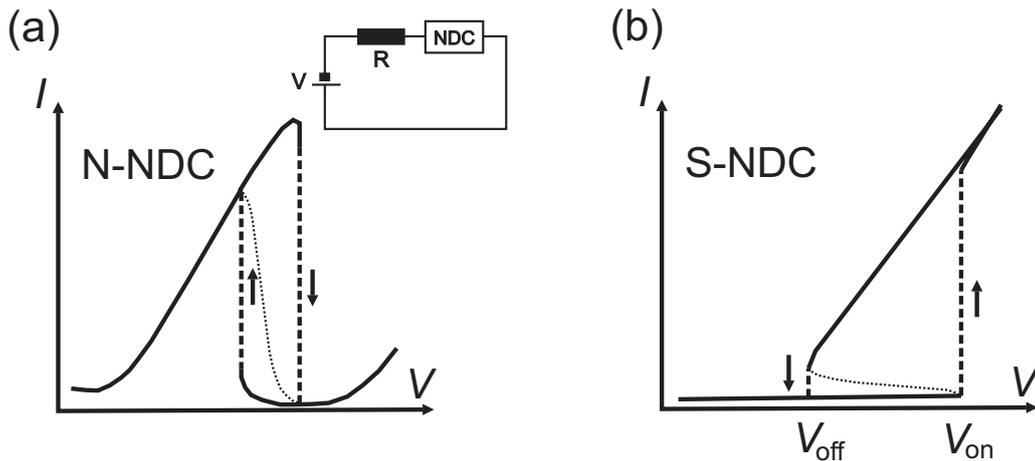
Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Transport im Niedrigstrom-Regime der Diode mit Germanium-Quantenpunkten in der aktiven Zone ein Hopping-Transport-Verhalten zeigt. Aus den charakteristischen Transportparametern ergeben sich Werte, die mit Quantenpunktgrößen übereinstimmen. Die Vermutung ist daher nahe liegend, dass ein Hopping-Transport über Germanium-Quantenpunkt-Zustände beobachtet wird. In Anlehnung an ein Modell von Neugebauer und Webb [212] ist das Temperaturverhalten der Probe wie folgt zu verstehen: Bei tiefen Temperaturen und kleinen Vorspannungen wird zuerst der Hopping-Transport über relativ „große“ Quantenpunkte beobachtet. „Groß“ bedeutet, dass die laterale Ausdehnung im Vergleich zur mittleren lateralen Ausdehnung deutlich erhöht ist. Diese Quantenpunkte sind zudem geringfügig höher als schmalere Quantenpunkte. Aus diesem Grund koppeln sie besser an die Zuleitungen und sind somit im Transport energetisch begünstigt. Die Anzahl dieser Quantenpunkte ist jedoch deutlich geringer als Quantenpunkte mit kleinerer lateraler Ausdehnung. Zudem sind sie weiter von gleich großen Quantenpunkten entfernt. Im Hopping-Transport sind daher die individuellen geometrischen Quantenpunkt-Dimensionen entscheidend [213, 214] und ein Transportverhalten  $I \propto \exp(-(T_0/T)^{0.5})$  wird beobachtet. Für höhere Temperaturen beziehungsweise größere elektrische Felder koppeln zunehmend Quantenpunkte mit einer kleineren lateralen Ausdehnung an die Zuleitungen. Ihre Ausdehnung weicht nur geringfügig von der mittleren lateralen Ausdehnung ab. Die Anzahl dieser Quantenpunkte ist deutlich höher als die der großen Quantenpunkte. Die Quantenpunkte liegen dichter zusammen und besitzen ähnliche geometrische Dimensionen. Der Hopping-Transport über diese vielen, gleichen Quantenpunkte zeigt ein einfach aktiviertes Temperaturverhalten [212],  $I \propto \exp(-\Delta/kT)$ . In der Interpretation von Neugebauer und Webb [212] entspricht der Aktivierungsenergie eine Ladeenergie  $\Delta \equiv E_{\text{ch}} = e^2/2C$  mit  $C$  der Gesamtkapazität eines Ladungsträgers im Quantenpunkt. Hiermit lässt sich die maximale laterale Ausdehnung der Quantenpunkte abschätzen. In erster Näherung besitzt ein Quantenpunkt mit dem Radius  $a$  die Kapazität  $C(a) = \pi\epsilon_0\epsilon_r a^2/(b_1 + b_2)$  zu den Zuleitungen.  $b_1, b_2$  sind

die Dicken der Barrieren. Für den Radius gilt somit die Beziehung

$$\frac{e^2}{2C(a)} = 0.13 \text{ meV} \quad (8.9)$$

$$\curvearrowright a \approx 70 \text{ nm}. \quad (8.10)$$

Diese einfache Betrachtung führt zu einer lateralen Ausdehnung der Quantenpunkte von 140 nm. Berücksichtigt man die Wechselwirkung der einzelnen geladenen Quantenpunkte untereinander, wird die Kapazität deutlich größer. Entsprechend erhält man in Gleichung (8.10) einen kleineren Radius für den Quantenpunkt. Unter Einbeziehung der Wechselwirkung mit vier nächsten Nachbarn halbiert sich in etwa der Radius des Quantenpunktes. Insgesamt ist festzuhalten, dass die mit dieser Methode bestimmte Quantenpunktgröße übereinstimmt mit den Größenangaben aus vorherigen Messungen. Dennoch sind die durch Transportmessungen bestimmten Werte für die laterale Ausdehnung um den Faktor 2 bis 3 größer als die Ausdehnungen, die an unbedeckten Quantenpunktstrukturen mit Hilfe von tunnelmikroskopischen Aufnahmen ermittelt wurden. Dies mag einerseits damit zusammenhängen, dass auf Grund der Bedeckung Interdiffusionsprozesse die Quantenpunkte verbreitern; andererseits führen auch thermische Belastungen der Probe zu Diffusionsprozessen, die eine Verbreiterung der Hut-Cluster-Quantenpunkte verursacht. U. Denker [114] konnte zeigen, dass durch Temperaturbelastungen der Probe oberhalb von 400°C die Hut-Cluster sich in größere pyramiden- beziehungsweise ellipsenförmige Quantenpunkte umwandeln. Die laterale Ausdehnung der Quantenpunkte liegt im Bereich von 70 nm bis 200 nm. Möglicherweise führen Temperaturbelastungen während der Prozessierung zu erheblichen Interdiffusionsprozessen oder zu einem Übergang der kleinen Hut-Cluster-Quantenpunkte zu größeren, die dann im Transport beobachtet werden.



**Abbildung 8.8.:** Strom-Spannungs-Kennlinien mit negativ differenzieller Leitfähigkeit (NDC). (a) N-förmige NDC; (b) S-förmige NDC. Innenbild. Schema eines Stromkreises, der zur Beobachtung von N- beziehungsweise S-förmigen Instabilitäten führt.

### 8.1.2. Übergangsbereich: Bistabilität

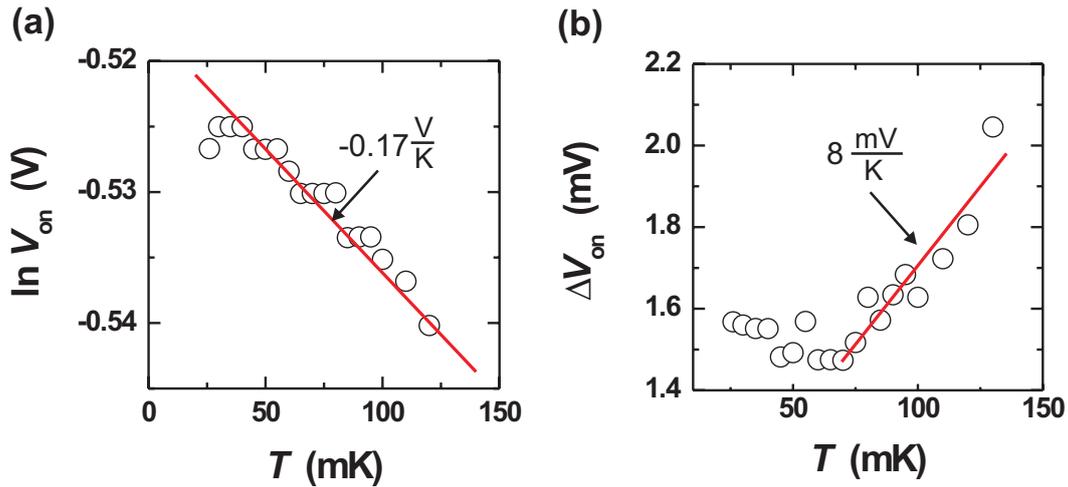
Dieser Abschnitt beschreibt den Übergangsbereich vom Niedrigstrom- in das Hochstrom-Regime. Charakteristisch für den Übergangsbereich (siehe Abbildung 8.1) ist eine sehr starke<sup>2</sup> Stromzunahme bei geringer Spannungserhöhung. Im Experiment ist bei Temperaturen unterhalb von 200 mK eine sprunghafte Stromerhöhung um zirka anderthalb Größenordnungen (von hundert Nanoampere auf einige Milliampere) festzustellen. Nach dem Stromsprung ab der Schwellwertspannung  $V_{on}$  findet der Transport im Hochstrom-Regime statt. Wird die äußere Spannung reduziert, so findet der Übergang vom Hochstrom-Regime in das Niedrigstrom-Regime bei einer kleineren Spannung  $V_{off} < V_{on}$  statt. Die Strom-Spannungs-Charakteristik zeigt somit eine Bistabilität (im Bereich  $V_{off} < V_{bi} < V_{on}$ ) in Form einer Hysteresekurve. Der instabile Bereich äußert sich in der Kennlinie durch eine negative differenzielle Leitfähigkeit - NDC (engl. **n**egative **d**ifferential **c**onductance).

Instabilitäten sind häufig in Kennlinien von Bauelementen mit negativ differenzieller Leitfähigkeit zu beobachten [215, 216, 217, 218, 219]. Je nachdem, ob es sich um eine spannungs- oder einer stromgesteuerte Instabilität handelt, ist der Kennlinienverlauf im entsprechenden Bereich N- oder S-förmig. Die N-förmige Kennlinie (siehe Abbildung 8.8 (a)) tritt beispielsweise beim resonanten Tunneln [66, 68, 69, 71] in Doppelbarrierenstrukturen auf. Sie resultiert aus der dynamischen Ladungsträgerakkumulation im Quantentopf. Die Hysteresenimmt mit der Asymmetrie der Tunnelstruktur zu und ist nur in Aufladungsrichtung<sup>3</sup> zu beobachten.

S-förmige Kennlinien (siehe Abbildung 8.8 (b)) sind typisch für Bauelemente

<sup>2</sup>größer als exponentiell

<sup>3</sup>Die Spannungspolarität ist so gewählt, dass die dickere Tunnelbarriere den Quantentopf vom Kollektor trennt.



**Abbildung 8.9.:** (a) Verlauf der Sprungposition  $V_{\text{on}}$  als Funktion der Temperatur. Die Sprungposition verschiebt sich mit steigender Temperatur zu niedrigeren Spannungen,  $V_{\text{on}} = V_{\text{on}}(0) \exp(-(T_{\Delta} + T)/T_{\Delta})$  mit  $V_{\text{on}}(0) = 596$  mV und  $T_{\Delta} \approx 6$  K. (b) Verlauf der Halbwertsbreite der mit dem Sprung korrespondierenden differentiellen Leitfähigkeitsresonanz. Unterhalb von 75 mK ist eine Änderung der Halbwertsbreite nicht messbar. Ab 75 mK nimmt die Halbwertsbreite linear mit der Temperatur zu;  $\Delta V_{\text{on}} \propto 8 \frac{\text{mV}}{\text{K}}$ .

mit einem Schaltverhalten vom hochohmigen zu einem niederohmigen Zustand bei Erreichen einer Schwellspannung. Bauelemente, in denen der Transport durch Raumladungen begrenzt ist (siehe Kapitel 3.5) zeigen ein entsprechendes Verhalten [104, 105, 220, 221, 222, 223]. Eine weitere Reihe von Bauelementen, die eine bistabile Kennlinie aufweisen und zwischen einem „on“- und einem „off“-Zustand schalten können, werden in der Familie der *Thyristoren* [103] zusammengefasst. Charakteristisch für Thyristoren ist eine lawinenartige Ladungsträgervervielfachung ab einer bestimmten Schwellspannung (Avalanche-Durchbruch [103]). Die Vervielfachung der Ladungsträger führt zu einem starken Aufheizen des Ladungsträgersystems [171, 172]. Eine spezielle Art der Thyristoren sind die *Diac* (engl. **d**iode **a**c switch)-Thyristoren. Ein Diac ist ein Bauelement, dessen symmetrischer Aufbau sich im einfachsten Fall aus drei Schichten unterschiedlicher Dotierung zusammensetzt, z. B.  $p - n - p$ . Durch den symmetrischen Aufbau kann der Diac sowohl in positiver als auch in negativer Spannungsrichtung als Schalter eingesetzt werden.

Die Eigenschaft, zwei stabile Zustände mit entweder niedrigem oder hohem Strom einnehmen zu können, macht die untersuchte Heterostruktur ebenfalls zu einem „Schalter“. Das Schaltverhalten der Heterostruktur ähnelt dem eines Diacs, wenngleich im Detail unterschiedliche Transportmechanismen stattfinden. Es ist hervorzuheben, dass das Schaltverhalten unabhängig von der Spannungspolung ist. Möglicherweise resultiert dieses Verhalten aus dem symmetrischen Aufbau der Heterostruktur.

Es soll nun allgemein der Schaltvorgang beschrieben werden. Ein mögliches Trans-

## 8. Silizium/Germanium-Quantenpunktstrukturen

portmodell wird im folgenden Abschnitt 8.1.3 gegeben. Die hier gewählte Formulierung ist durch Überlegungen von Burgess [224, 225] zu wärmeabhängigen Widerständen, so genannten Thermistoren<sup>4</sup>, motiviert. Im vorherigen Abschnitt ist gezeigt worden, dass die Heterostruktur ein einfach aktiviertes Leitfähigkeitsverhalten  $G = G_0 \exp(-\Delta/kT_{\text{eff}})$  besitzt. Unter Berücksichtigung von Gleichung (8.5) genügt der Strom der Relation  $I = \tilde{I}(V, T_{\text{eff}})$ . Die Ladungsträgertemperatur  $T_{\text{eff}}$  ergibt sich aus der (dissipativen) Leistung  $IV = P(T_{\text{eff}}) = Q$ , mit  $Q$  der erzeugten Wärmemenge. Aus dem totalen Potenzial von  $I = \tilde{I}(V, T_{\text{eff}})$  und  $P = V\tilde{I}(V, T_{\text{eff}})$  erhält man nach Division von  $dV$  und  $dT_{\text{eff}}$  den Ausdruck [219, 224]

$$\frac{dV}{dI} = R \frac{1-y}{x+y}, \quad (8.11)$$

für den differentiellen Widerstand. Die Variablen  $R$ ,  $x$  und  $y$  sind wie folgt definiert:

$$R = V/I, \quad x \equiv R (\partial \tilde{I} / \partial V)_{T_{\text{eff}}}, \quad y \equiv (V/U) (\partial \tilde{I} / \partial T_{\text{eff}})_V \quad (8.12)$$

und

$$U = \frac{dP}{dT_{\text{eff}}}. \quad (8.13)$$

Mit Gleichung (8.11) ist eine Formulierung mit Hilfe des differentiellen Widerstandes gewählt worden, anstatt der sonst üblichen Verwendung der differentiellen Leitfähigkeit. Dies geschieht, um eine mathematisch aufwändigere Betrachtung von Singularitäten in der Leitfähigkeit zu umgehen. An Gleichung (8.11) ist unmittelbar zu erkennen, dass der Übergang bei

$$y = 1 \quad (8.14)$$

$$\curvearrowright 1 = \left( \frac{\partial \tilde{I}}{\partial T_{\text{eff}}} \right)_V \frac{dT_{\text{eff}}}{dP} \quad (8.15)$$

stattfindet. Für größere Werte von  $y$  ist das System im negativ differentiellen Leitfähigkeits- beziehungsweise Widerstandsbereich. Um die Bedingung  $y = 1$  zu erfüllen, muss die Heterostruktur beziehungsweise der Strom eine geeignete Temperaturabhängigkeit

$$I = V G_0 \exp(-\Delta/kT) \quad \text{mit} \quad \Delta = kT_{\Delta} \quad (8.16)$$

besitzen. Für den expliziten Kennlinienverlauf ist es notwendig, die Beziehung zwischen  $P$  und  $T_{\text{eff}}$  zu kennen, so dass Heizeffekte im Strom berücksichtigt werden können. Häufig besteht zwischen der dissipativen Leistung und der Ladungsträgertemperatur ein linearer Zusammenhang

$$P = U(T_{\text{eff}} - T) \quad \text{für} \quad T_{\text{eff}} - T = \beta P. \quad (8.17)$$

Hierbei ist  $U = \beta^{-1}$  eine Konstante, die die Kopplung der Umgebungstemperatur an den Halbleiter beschreibt. Aus den Gleichungen (8.14) bis (8.17) ergibt sich die

<sup>4</sup>engl. thermal resistor = wärmeabhängiger Widerstand

Temperatur der Heterostruktur beim Schalten ( $y = 1$ ),

$$T_{\text{on}} = \frac{T_{\Delta}}{2} - \sqrt{\frac{T_{\Delta}^2}{4} - T_{\Delta}T}. \quad (8.18)$$

Hieraus erhält man die Bedingung  $T_{\Delta} > 4T$ . Die Leistung beim Übergang ist

$$P_{\text{on}} = \frac{1}{\beta} (T_{\text{on}} - T). \quad (8.19)$$

Mit zunehmender Temperatur wächst die Leistung im Übergangsbereich an. Dieses Verhalten ist charakteristisch. Die Einsatzspannung  $V_{\text{on}}$  ist durch  $P_{\text{on}} = V_{\text{on}}I_{\text{on}}$  bestimmt.  $V_{\text{on}}$  ist somit eine Funktion von  $T$ . Für den Fall  $T_{\Delta} \gg T$  lässt sich Gleichung (8.19) durch

$$P_{\text{on}} \cong \frac{1}{\beta} \frac{T^2}{T_{\Delta}} \quad (8.20)$$

annähern und die Leitfähigkeit am Schaltpunkt ist

$$\frac{I_{\text{on}}}{V_{\text{on}}} = G_{\text{on}} \cong G_0 \exp\left(1 + \frac{T}{T_{\Delta}}\right). \quad (8.21)$$

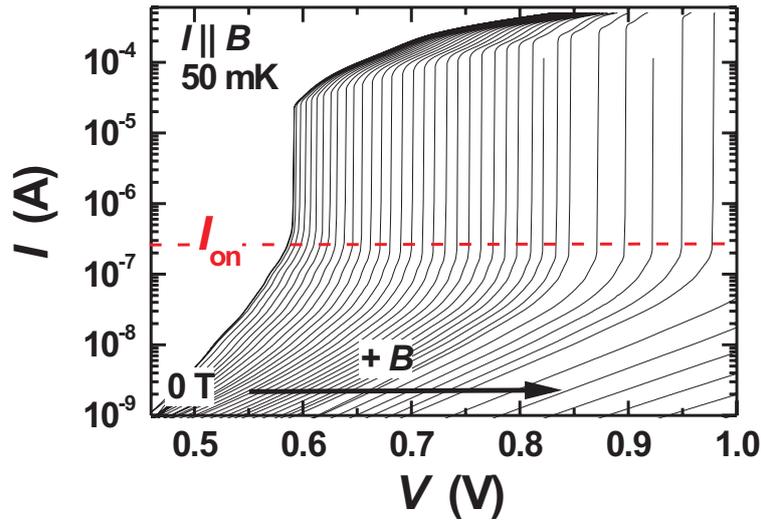
Das bedeutet, dass die Leitfähigkeit am Schaltpunkt um den Faktor  $\exp(1) \approx 2.72$  erhöht ist (bezogen auf  $G_0(T)$ ).

In Abbildung 8.9 **(a)** ist der Verlauf des Schaltpunktes  $V_{\text{on}}$  als Funktion der Temperatur in einer semilogarithmischen Darstellung aufgetragen. Mit Erhöhung der Temperatur wandert der Schaltpunkt zu kleineren Spannungen. Dieses Verhalten ist unmittelbar aus Gleichung (8.21) verständlich. Nach Gleichung (8.21) zeigt  $V_{\text{on}}$  das Verhalten

$$V_{\text{on}} = \frac{I_{\text{on}}}{G_0} \exp\left(-\frac{T_{\Delta} + T}{T_{\Delta}}\right). \quad (8.22)$$

Aus der Temperaturverschiebung von  $V_{\text{on}}$  (Abbildung 8.9 **(a)**) ergibt sich eine charakteristische Temperatur  $T_{\Delta} \approx 6$  K. Dieser Wert ist viermal so groß wie der Wert, der sich aus der Arrhenius-Darstellung ( $\Delta = 0.13$  meV  $\curvearrowright$   $T_{\Delta} = 1.5$  K) ergibt. Bedenkt man jedoch, dass die explizite Beziehung zwischen  $P$  und  $T_{\text{eff}}$  nicht bekannt ist, ist die Übereinstimmung der beiden Werte erstaunlich gut.

In Abbildung 8.9 **(b)** ist die Halbwertsbreite der mit dem Sprung korrespondierenden Resonanz in der ersten Ableitung als Funktion der Temperatur dargestellt. Ab zirka 75 mK ist eine Zunahme der Halbwertsbreite von 8 mV/K zu beobachten. Die Bestimmung eines Spannungs-Energie-Konversionsfaktors  $\alpha$  aus der Halbwertsbreite unter Verwendung von Gleichung (7.44) aus Kapitel 7.2.1 ist nicht möglich, da die Verbreiterung kein Abbild der Temperaturverbreiterung der Fermi-Funktion ist. Der explizite, funktionale Zusammenhang zwischen der Verbreiterung der Stufenkante und der Erhöhung der Temperatur ist noch ungeklärt und Gegenstand der momentanen Studien.



**Abbildung 8.10.:** Kennlinie als Funktion des Magnetfeldes. Der Sprung findet in der Umgebung von  $I_{\text{on}} \approx 200 \text{ nA}$  statt.

**Einfluss magnetischer Felder** Unter der Wirkung eines äußeren Magnetfeldes verschiebt sich der Schaltpunkt  $V_{\text{on}}$  zu höheren Spannungen. Für ein parallel zum Strom orientiertes Magnetfeld ist dieses Verhalten in Abbildung 8.10 zu beobachten. In der semilogarithmischen Darstellung, Abbildung 8.10, erkennt man weiterhin, dass der Strom am Schaltpunkt nahezu konstant ist ( $I_{\text{on}} \approx \text{const.}$ ) und in der Größenordnung von 200 nA liegt. Auf Grund der höheren Vorspannung am Schaltpunkt ist der Strom nach dem Sprung ins Hochstrom-Regime entsprechend größer. Dies ist in der linearen Darstellung Abbildung 8.11 zu beobachten. Im vorherigen Abschnitt ist gezeigt worden (Gleichung (8.5) und (8.7)), dass der Strom im Niedrigstrom-Regime das Verhalten

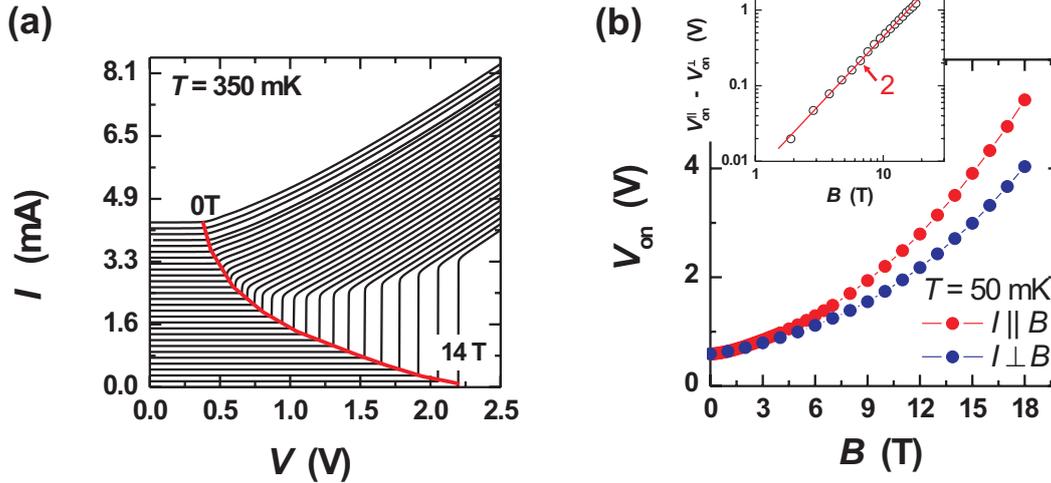
$$I(V, B) \propto \exp(a \cdot V - b \cdot B^2) \quad (8.23)$$

besitzt. Hieraus folgt unmittelbar die Abhängigkeit des Sprungpunktes  $V_{\text{on}}$  von einem äußeren Magnetfeld

$$\begin{aligned} I_{\text{on}} &\propto \exp(a \cdot V_{\text{on}} - b \cdot B^2) && \parallel \ln(\dots) \\ \ln I_{\text{on}} &\propto a \cdot V_{\text{on}} - b \cdot B^2 \\ \leadsto V_{\text{on}} &\propto \underbrace{\frac{1}{a} \ln I_{\text{on}}}_{\text{const.}} + \frac{b}{a} B^2 \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$V_{\text{on}} = \text{const.} + \tilde{\alpha} B^2.$$

In Abbildung 8.11 **(b)** ist die quadratische Verschiebung des Sprungpunktes  $V_{\text{on}}$  in einem äußeren Magnetfeld bis 18 Tesla zu sehen. Hierbei ist festzustellen, dass

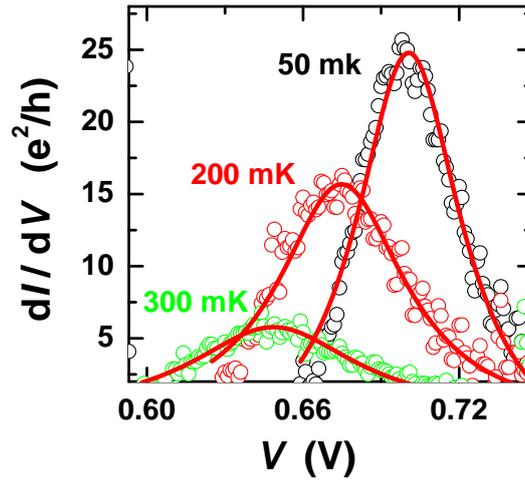


**Abbildung 8.11.:** (a) Strom-Spannungs-Charakteristik als Funktion des Magnetfeldes. (b) Verlauf des Sprungpunktes als Funktion des Magnetfeldes. Die rote Kurve entspricht dem Verlauf bei parallel zum Strom orientiertem Magnetfeld. Die blaue Kurve zeigt den Verlauf für ein Magnetfeld senkrecht zum Strom. Für die parallele Orientierung gilt:  $V_{\text{on}}^{\parallel} \propto 14 \frac{\text{mV}}{\text{T}^2} B^2$ . Im senkrechten Fall ist  $V_{\text{on}}^{\perp} \propto 10 \frac{\text{mV}}{\text{T}^2} B^2$ . Im Innenbild: Doppelloarithmische Darstellung der Differenz der beiden Sprungpunkte (senkrechte und parallele Magnetfeldorientierung) als Funktion des Magnetfeldes.  $V_{\text{on}}^{\parallel} - V_{\text{on}}^{\perp} \propto 4 \frac{\text{mV}}{\text{T}^2} B^2$

eine quadratische Verschiebung sowohl in einem parallel als auch einem senkrecht zum Strom orientierten Magnetfeld zu beobachten ist. Bei einer parallelen Magnetfeldorientierung ist jedoch die Verschiebung stärker. Der Vorfaktor  $\tilde{\alpha}$  setzt sich aus vielen Parametern, so beispielsweise der Lokalisierungslänge und dem Hopping-Radius zusammen. Die Verschiebung des Sprungpunktes ist eine Konsequenz der magnetfeldabhängigen Stromunterdrückung auf Grund des verminderten Überlapps der Wellenfunktionen zwischen den Quantenpunkt-Zuständen, über die der Hopping-Transport stattfindet. Die Abbildung 8.11 (b) zeigt eine weitere Transporteigenschaft: Da Hopping-Prozesse perkulativ sind, mitteln sich die Einflüsse einer Magnetfeldorientierung auf den Transport heraus. Daher wird ein annähernd gleiches Verhalten für eine Magnetfeldorientierung senkrecht beziehungsweise parallel zur Wachstumsebene beobachtet.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass auf Grund eines einfach aktivierten Transportverhaltens,  $I \propto \exp(-\Delta/kT)$ , eine Bistabilität in der Kennlinie zu beobachten ist. Es findet ein „Schalten“ zwischen einem Niedrigstrom- und einem Hochstrom-Regime statt. Die Schaltbedingung ist durch die Gleichung (8.14) gegeben. Durch die Erhöhung der Umgebungstemperatur ist die Gleichung (8.14) bereits bei geringeren elektrischen Feldern erfüllt. Gleichzeitig verliert der Übergang zwischen dem Niedrigstrom- und Hochstrom-Regime sein sprunghaftes Verhalten. Der Übergang verläuft mit Erhöhung der Temperatur „weicher“.

Ein äußeres Magnetfeld unterdrückt den Strom im Niedrigstrom-Regime. Hierdurch wird die Bedingung (8.14) erst für höhere elektrische Felder erfüllt. Eine quadra-



**Abbildung 8.12.:** Temperaturverhalten der Resonanz der differentiellen Leitfähigkeit bei  $V_p$ . Gezeigt ist der Verlauf für die Temperaturen 50 mK, 200 mK und 300 mK. Der Untergrund wurde abgezogen.

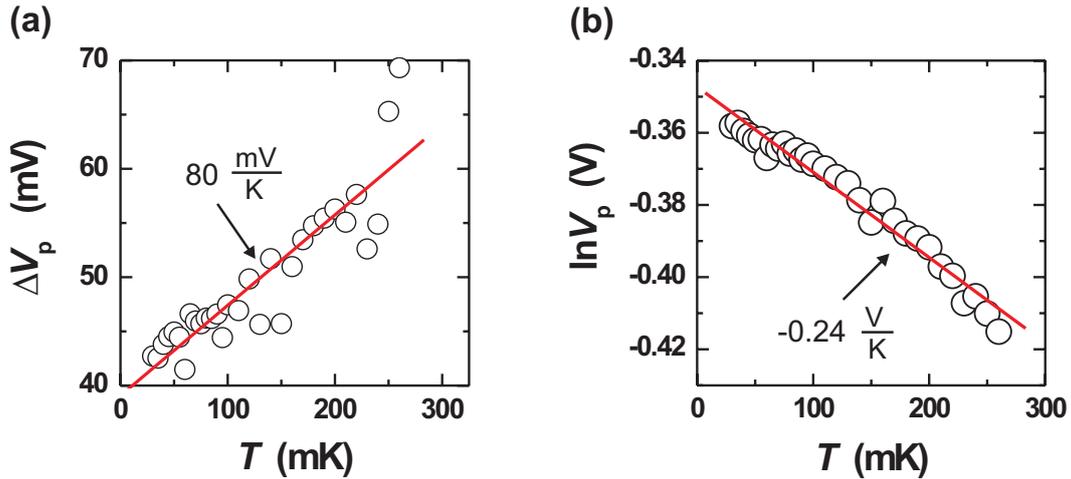
tische Verschiebung des Sprungpunktes als Funktion eines äußeren Magnetfeldes wird beobachtet.

### 8.1.3. Hochstrom-Regime: Filamentartiger Transport

In diesem Abschnitt wird der Transport nach dem Sprung in das Hochstrom-Regime diskutiert. Die wesentlichen Transporteigenschaften des Hochstrom-Regimes zeigt Abbildung 8.2. Nach dem „Schalten“ folgt der Strom der Relation

$$i \propto u^\zeta, \quad (8.25)$$

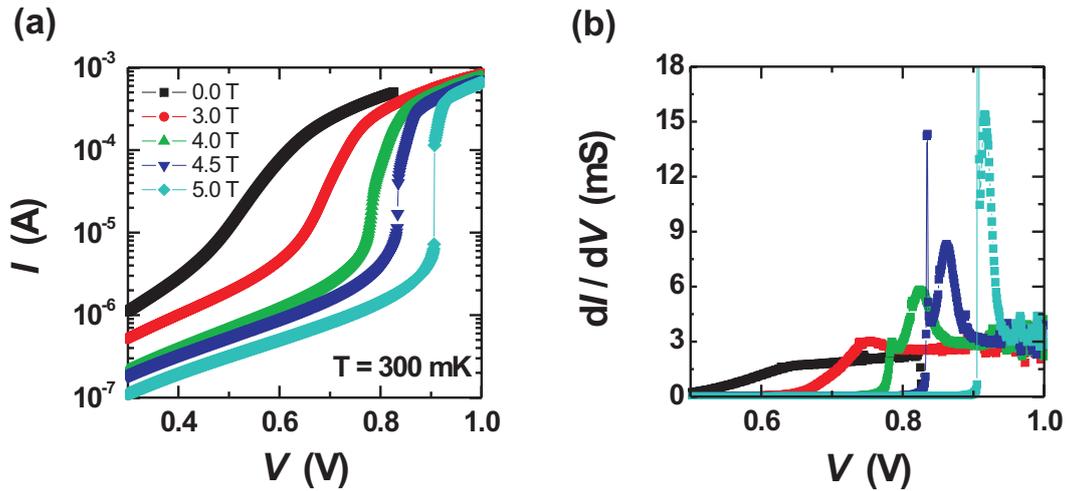
mit  $i = I/I_{\text{on}} - 1$  dem normierten Strom und  $u = V/V_{\text{on}} - 1$  der normierten Spannung. Der Exponent  $\zeta$  ist von der Größe  $\approx 1$ . In der ersten Ableitung der normierten differentiellen Leitfähigkeit  $g = di/du$  ist für Temperaturen  $T < 400$  mK an der Stelle  $V_p$  ein Leitfähigkeitsmaximum zu beobachten; siehe Innenbild von Abbildung 8.2. Die Resonanz zeigt eine starke Temperaturabhängigkeit. In Abbildung 8.12 ist der Verlauf der Resonanz für drei Umgebungstemperaturen 50 mK, 200 mK und 300 mK gezeigt. Durch Erhöhen der Temperatur nimmt die Halbwertsbreite der Resonanz zu und die gesamte Resonanz wird flacher. Die Halbwertsbreite als Funktion der Temperatur ist in Abbildung 8.13 (a) gezeigt. Die Halbwertsbreite  $\Delta V_p$  nimmt im Temperaturbereich unterhalb 300 mK linear zu und lässt sich durch die Gleichung beschreiben:  $\Delta V_p = \Delta V_p(0) + 80 \frac{\text{mV}}{\text{K}} T$ , mit  $\Delta V_p(0) = 38$  mV. Die Position des Resonanzmaximums wandert mit zunehmender Temperatur zu niedrigeren Spannungen, siehe Abbildung 8.13 (b). Unter der Voraussetzung, dass die beobachtete Resonanz ebenso wie die Resonanz bei  $V_{\text{on}}$  aus einen Schaltprozess resultiert, lässt sich die Verschiebung mit Gleichung (8.22) fiten:  $V_p \propto \exp(-T/T_\Delta^p)$  mit  $T_\Delta^p = 4.2$  K. Der, aus der Temperaturverschiebung von  $V_p$  ermittelte Wert der



**Abbildung 8.13.:** (a) Verlauf der Halbwertsbreite  $\Delta V_p$  als Funktion der Temperatur. Die Halbwertsbreite nimmt linear mit der Temperatur zu:  $\Delta V_p = \Delta V_p(0) + 0.08 \frac{\text{mV}}{\text{mK}} T$  mit  $\Delta V_p(0) = 38 \text{ mV}$ . (b) Peak-Position  $V_p$  als Funktion der Temperatur. Die Peak-Position schiebt mit steigender Temperatur zu niedrigeren Spannungen. Die Verschiebung lässt sich mit Gleichung (8.22) fiten:  $V_p \propto \exp(-T/T_\Delta^p)$  mit  $T_\Delta^p = 4.2 \text{ K}$ . Die Resonanz ist nur unterhalb von 400 mK zu beobachten.

charakteristischen Temperatur  $T_\Delta^p$  stimmt in der Größenordnung mit  $T_\Delta \approx 6 \text{ K}$  überein. Dies lässt die Vermutung zu, dass der in der Kennlinie gemessene Strom sich zusammensetzt aus Beiträgen einzelner Bereiche innerhalb der Querschnittsfläche der Diode. Bei  $V_{\text{on}}$  findet somit der Schaltprozess in einem dieser Bereiche statt und bei  $V_p$  in einem Weiteren. In einem äußeren Magnetfeld wird der Strom im Niedrigstrom-Regime unterdrückt. Dies führt mit zunehmender Magnetfeldstärke zu einem vertikalen Übergang zwischen den Transport-Regimen. Dieses Verhalten ist in Abbildung 8.14 (a) zu sehen. In Abbildung 8.14 (b) ist außerdem zu beobachten, dass durch die Zunahme der Feldstärke sowohl der Schaltpunkt  $V_{\text{on}}$  als auch das Resonanzmaximum  $V_p$  zu höheren Spannungen schiebt. Ferner reduziert das Magnetfeld die Resonanzbreite. Im vorherigen Abschnitt ist der funktionale Zusammenhang der Verschiebung des Schaltpunkts diskutiert worden.

Der Transport im Hochstrom-Regime lässt sich in einem Modell (Middleton und Wingreen [226]) des kollektiven Transports über eine Reihe von Quantenpunkten verstehen. In der Ebene der Quantenpunkte bildet sich in einer Reihe von Quantenpunkten ein kollektiver Zustand. Dieser leistet erst beim Erreichen der Schwellspannung einen Beitrag zum Strom (dynamisches Regime). Unterhalb der Schwellspannung ist der kollektive Transport blockiert (statisches Regime). Die Ladungsträger sind in den Quantenpunkten lokalisiert und bilden auf Grund der Coulomb-Wechselwirkung ein repulsives Potenzial (Coulomb-Blockade). Bei endlichen Temperaturen können jedoch Hopping-Transportprozesse, wie sie im Niedrigstrom-Regime beobachtet werden, stattfinden. Steht die Energie für die Aktivierung des kollektiven Transportprozesses zur Verfügung, findet der Übergang ins Hochstrom-Regime statt. Die benötigte Energie können die Ladungsträger durch eine Erhö-



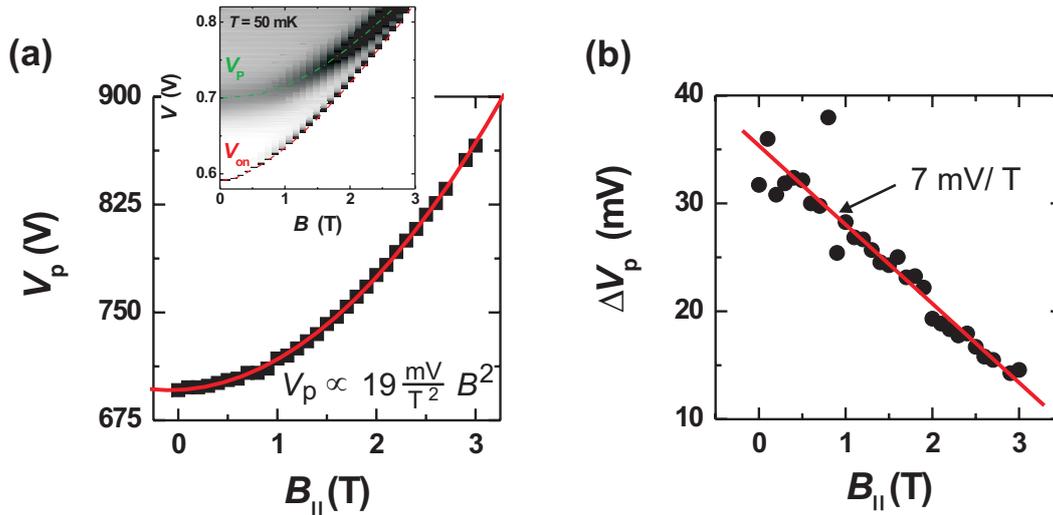
**Abbildung 8.14.:** (a) Ohne Magnetfeld ist in der Kennlinie kein Sprung zu beobachten, nur ein Übergang aus dem Niedrig- in das Hochstrom-Regime. Bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes wird der Übergang zwischen dem Niedrig- und Hochstrom-Regime zunehmend steiler. Bei 4.5 T ist ein deutlicher Sprung zu beobachten, der mit zunehmendem Magnetfeld größer wird. Ein weiterer Effekt ist, dass das Magnetfeld den Strom im Niedrigstrom-Regime unterdrückt. (b) Differenzielle Leitfähigkeit der Kurven aus (a). Deutlich ist die Entwicklung des Sprungs und der Resonanz bei  $V_p$  im Hochstrom-Regime zu beobachten. Hierbei verschiebt sich  $V_{on}$  im Magnetfeld stärker zu höheren Spannungen als  $V_p$ . Oberhalb von 5 T ist keine Resonanz bei  $V_p$  zu beobachten.

hung der Umgebungstemperatur oder durch dissipative Transportprozesse (höhere Spannung - größerer Strom - größerer dissipativer Beitrag,  $RI^2$ ) erhalten. In einer semiklassischen Betrachtung entspricht der Schaltprozess dem Abbau der Sperrschicht. Die einst „blockierten“ Transportkanäle sind nun geöffnet. Über diese fließt dann gleichzeitig der Strom. Möglicherweise ist der Transport filamentartig über die Querschnittsfläche verteilt, so dass der beschriebene Prozess in jedem Filament stattfindet, wobei der individuelle Schaltprozess von der Dimension des Filaments (geometrische Anordnung, Form und Anzahl der Quantenpunkte), abhängt. Die beobachtete Resonanz könnte dann ein Schaltprozess in einem weiteren stromtragenden Filament sein.

#### 8.1.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Transport in einer Diode des Wafers S1457 untersucht. Die Diode besitzt einen Durchmesser von  $72 \mu\text{m}$ .

Bei tiefen Temperaturen unterhalb von 1 K und Spannungen  $V < 100 \text{ mV}$  war in der Diode ein Hopping-Transportverhalten zu beobachten. Im Temperaturbereich von 50 mK bis 150 mK zeigte die Leitfähigkeit ein Variable-Range-Hopping Temperaturverhalten, das für Temperaturen oberhalb von 150 mK in ein einfach, aktiviertes Transportverhalten überging. Dieses Verhalten resultierte aus der Tatsa-

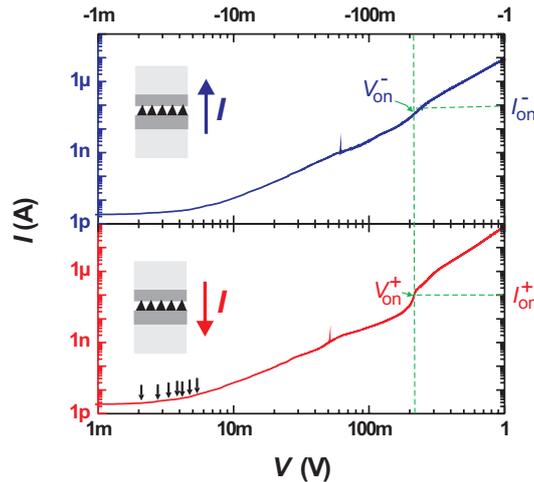


**Abbildung 8.15.:** (a) Verlauf der Peak-Position  $V_p$  als Funktion des Magnetfeldes,  $V_p \propto 19 \frac{\text{mV}}{\text{T}^2} B^2$ . Das Innenbild zeigt eine Graustufendarstellung der differentiellen Leitfähigkeit als Funktion der Spannung und des äußeren Magnetfeldes. Deutlich ist das Ineinanderlaufen von  $V_{\text{on}}$  und  $V_p$  mit zunehmendem Magnetfeld zu sehen. Oberhalb von 2 Tesla gilt die lineare Näherung  $V_{\text{on}} \propto 0.11 \frac{\text{V}}{\text{T}} B$  und  $V_p \propto 0.09 \frac{\text{V}}{\text{T}} B$ . (b) Die Halbwertsbreite der Resonanz nimmt linear mit dem Magnetfeld ab:  $\Delta V_p = 38 \text{ mV} - 7 \frac{\text{mV}}{\text{T}} B$ .

che, dass bei Temperaturen unterhalb von 150 mK und bei geringen elektrischen Feldern der elektrische Transport durch Hüpf-Prozesse über große, räumlich weit voneinander getrennte Quantenpunkte stattfand. Durch Erhöhen der Temperatur (oberhalb von 150 mK) dominierten den Transport Hüpf-Prozesse über kleinere, räumlich näher zusammen liegende Quantenpunkte, so dass ein einfach aktiviertes Transportverhalten beobachtet werden konnte. Die aus der Arrhenius-Darstellung der Leitfähigkeit ermittelte Aktivierungsenergie entsprach der gemittelten Ladeenergie der Quantenpunkte. Aus ihr ließ sich die Größe der am Transport beteiligten Quantenpunkte abschätzen. Unter Vernachlässigung einer möglichen Coulomb-Wechselwirkung der Quantenpunkte untereinander entsprach die Ladeenergie einem Quantenpunkt mit dem Radius von 70 nm. Auf Grund der Wachstumsbedingungen erwartete man Germanium Hut-Cluster-Quantenpunkte in der Probe. Es war bekannt, dass die Größenverteilung der Hut-Cluster normalverteilt ist, wobei der mittlere Radius in der Größe von 16 nm bis 20 nm lag. Die im Experiment beobachtbaren Quantenpunkte stammten somit aus dem Ausläufer der Normalverteilung. Andererseits war zu bedenken, dass die Größenverteilung an unbedeckten Strukturen ermittelt wurde. Die Bedeckung durch eine Silizium-Barriere konnte durch Diffusionsprozesse von Germanium in das Silizium zu einer Verbreiterung der Quantenpunkte führen. Alle diese Aspekte belegten, dass die ermittelte Ladeenergie durchaus plausibel war.

Ein weiteres Charakteristikum für den Transport in Dioden des Wafers S1457 war eine Bistabilität in der Kennlinie. Die Bistabilität war eine Konsequenz

## 8. Silizium/Germanium-Quantenpunktstrukturen



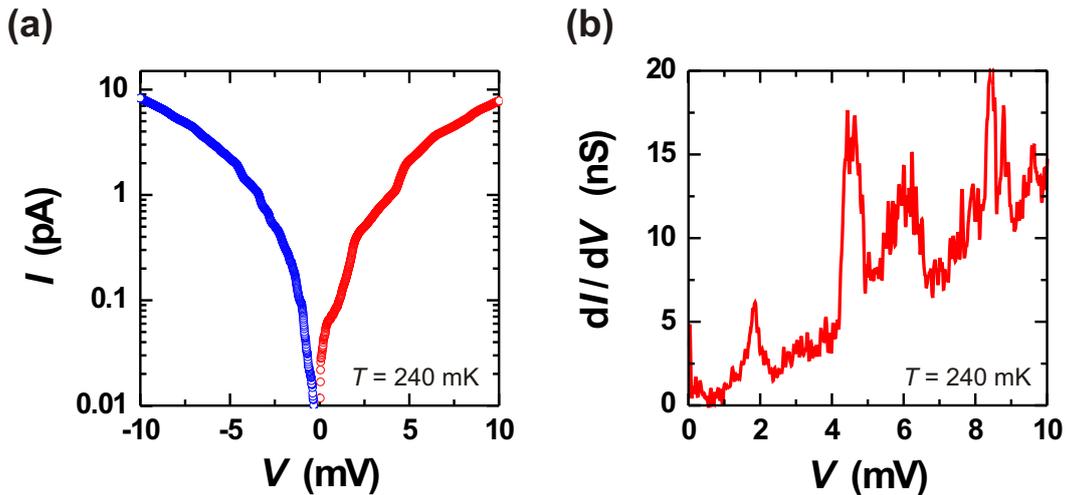
**Abbildung 8.16.:** Doppellogarithmische Darstellung der Strom-Spannungs-Charakteristik einer Tunnelodiode mit nominell  $1 \mu\text{m}$  Durchmesser. Es sind beide Spannungspolaritäten gezeigt. Für die negative Spannungspolarität ist auf Grund der logarithmischen Darstellung der Betrag des Stroms gewählt. Die Umgebungstemperatur beträgt  $240 \text{ mK}$ .

des einfach, aktivierten Transportverhaltens. Es fand ein Schalten zwischen einem Niedrigstrom- und Hochstrom-Regime statt. Im Niedrigstrom-Regime war der Transport durch die beschriebenen Hüpf-Prozesse dominiert. Im Hochstrom-Regime fand der Transport in einzelnen Filamenten, die innerhalb der Querschnittsfläche der Diode lagen, statt. Ein Filament bestand aus dem kollektiven Zusammenschluss nulldimensionaler Transportkanäle. In dieser Modellvorstellung entsprach dem Transport in einem Filament ein kollektiver Transport über eine Reihe von Quantenpunkten.

## 8.2. Fock-Darwin ähnliche Zustände

In diesem Abschnitt wird der Transport in Submikrometer-Dioden des Wafers S1457 diskutiert. Die Dioden besitzen eine quadratische Querschnittsfläche mit nominell  $1 \mu\text{m}$  Kantenlänge. Beim nasschemischen Ätzen reduziert sich jedoch der Diodendurchmesser auf Grund von Unterätz-Prozessen um einige hundert Nanometer, so dass der tatsächliche Diodendurchmesser, insbesondere im Bereich der aktiven Zone, kleiner als ein Mikrometer ist. Dies belegt beispielsweise eine elektronenmikroskopische Aufnahme einer freistehenden Submikrometer-Diode; siehe Abbildung 5.5.

Im Vergleich der Kennlinien der  $72 \mu\text{m}$  Durchmesser Diode (Abbildung 8.1) und der Submikrometer-Diode (Abbildung 8.16) ist festzustellen, dass der sprunghafte Übergang vom Niedrigstrom- in das Hochstrom-Regime in der Submikrometer-Diode bei geringerer Spannung ( $V_{\text{on}}^{1\mu\text{m}} = 210 \text{ mV} < V_{\text{on}}^{72\mu\text{m}} = 590 \text{ mV}$ ) stattfindet. Der Übergangstrom  $I_{\text{on}}^{1\mu\text{m}} \approx 100 \text{ nA}$  ist zirka halb so groß wie der Übergangstrom in der  $72 \mu\text{m}$ -Diode,  $I_{\text{on}}^{72\mu\text{m}} \approx 200 \text{ nA}$ . Dies lässt vermuten, dass die effektive La-

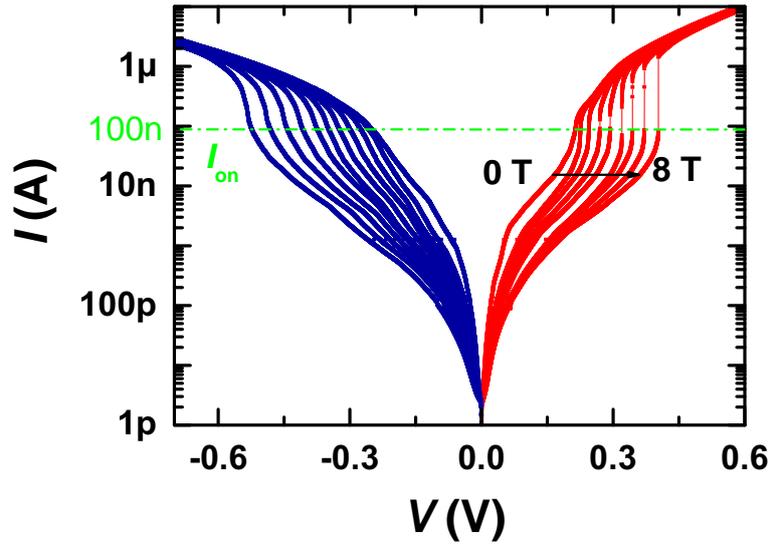


**Abbildung 8.17.:** (a) Semilogarithmische Darstellung der Kennlinie einer Tunneldiode mit  $1 \mu\text{m}$  Durchmesser. In beiden Spannungspolaritäten sind Stromstufen zu erkennen. (b) Differenzielle Leitfähigkeit der positiven Spannungspolarität. Deutlich sind mehrere Resonanzen, entsprechend der Stromstufen, zu erkennen.

dingsträgertemperatur in der kleineren Diode höher ist als in der  $72 \mu\text{m}$ -Diode. Die Ursache dafür könnte die höhere Leistungsdichte in der kleineren Diode sein. Durch die höhere effektive Temperatur ist dann die Schaltbedingung, Gleichung (8.14), bei kleinerer Vorspannung erfüllt.

Die Hochstrom-Regime der Submikrometer-Diode und der  $72 \mu\text{m}$ -Diode zeigen ein prinzipiell gleiches Transportverhalten,  $i \propto u^\zeta$  mit  $\zeta \approx 1$ . Es ist davon auszugehen, dass im Hochstrom-Regime beider Dioden derselbe Transportmechanismus stattfindet. Dieser ist im vorherigen Kapitel besprochen worden und soll hier nicht erneut diskutiert werden. Daher konzentrieren sich die folgenden Untersuchungen auf die Unterschiede im Niedrigstrom-Regime. Im Niedrigstrom-Regime der „größeren“ Diode zeigt der Strom bis zirka  $80 \text{ mV}$  ein lineares Strom-Spannungs-Verhalten, das in ein exponentielles übergeht. In der Submikrometer-Diode ist von Beginn an ein nicht-lineares Strom-Spannungs-Verhalten zu beobachten. Bis zum sprunghaften Übergang in das Hochstrom-Regime sind eine Vielzahl von Stromstufen unterschiedlicher Höhe und Breite in der Kennlinie zu sehen. In Abbildung 8.17 (a) ist der Betrag des Stroms als Funktion der Spannung in einer semilogarithmischen Auftragung für beide Spannungspolaritäten dargestellt. Wie zu erkennen ist, wächst der Strom im Bereich von  $10 \text{ mV}$  über drei Größenordnungen an. Aus diesem Grund sind die Strukturen in der Kennlinie besser in der Ableitung zu erkennen. Die Abbildung 8.17 (b) zeigt die numerische erste Ableitung für den positiven Spannungsast. An den Positionen der Stromstufen sind deutliche Leitfähigkeitsresonanzen zu beobachten. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die Leitfähigkeitsresonanzen zurückzuführen sind auf Tunnelprozesse von Löchern aus der Emitterzuleitung in nulldimensionale Germanium-Quantenzustände.

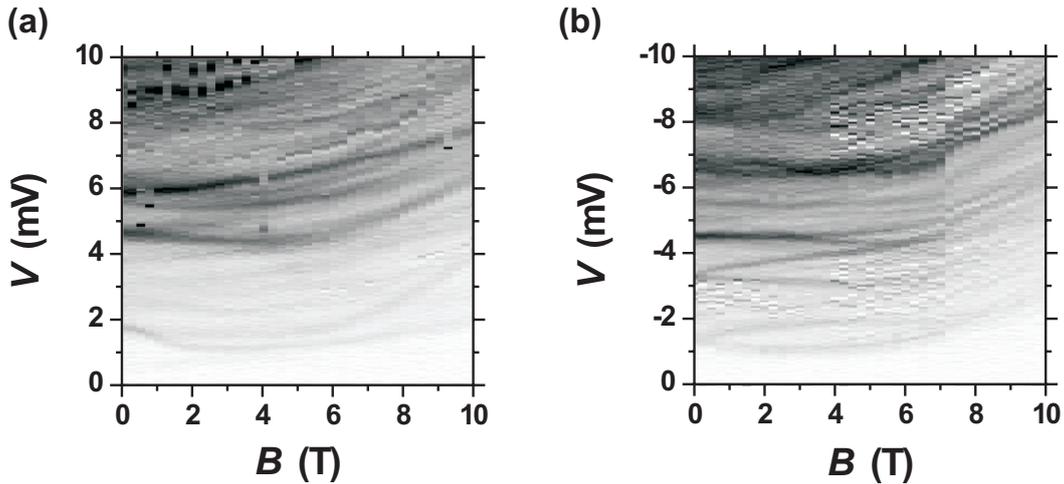
Bereits aus den Untersuchungen der  $72 \mu\text{m}$ -Diode ist bekannt, dass ein äußeres



**Abbildung 8.18.:** Semilogarithmische Darstellung der Kennlinie einer Tunnel diode mit  $1 \mu\text{m}$  Durchmesser bei einer Umgebungstemperatur von  $240 \text{ mK}$ . In  $1 \text{ T}$  Schritten wurde ein äußeres Magnetfeld bis zu  $8 \text{ T}$  erhöht. Der Sprung aus dem Niedrigstrom- in das Hochstrom-Regime geschieht bei zirka  $100 \text{ nA}$ . Deutlich ist zu erkennen, dass für die positive Spannungspolarität der Übergang steiler verläuft beziehungsweise der Sprung größer ist.

Magnetfeld den Strom im Niedrigstrom-Regime unterdrückt, so dass der Übergang in das Hochstrom-Regime sich mit einer quadratischen Abhängigkeit (Gleichung (8.24)) zu höheren Spannung verschiebt. Dieses Verhalten lässt sich in Abbildung 8.18 (siehe vergleichend Abbildung 8.10) beobachten. Die magnetfeldabhängige Verschiebung der Stromstufen des Niedrigstrom-Regimes sind in einer Graustufen-darstellung der differentiellen Leitfähigkeit in Abbildung 8.19 zu verfolgen. Wie bereits in Abbildung 8.17 (b) zu erkennen ist, erschwert der rasante Stromzuwachs des Untergrundstroms die Darstellung. Der Untergrundstrom erreicht bereits bei einer geringen Spannungserhöhung von  $2 \text{ mV}$  bis  $3 \text{ mV}$  die Größe der vorherigen Stromstufe. Eine differenzierte Darstellung der Resonanzverläufe im Bereich bis  $10 \text{ mV}$  ist daher sehr schwierig. In Abbildung 8.20 (b) sind die Positionen der Leitfähigkeitsmaxima für den positiven Spannungsast (Abbildung 8.19 (a) beziehungsweise Abbildung 8.20 (a)) skizziert. Um den Verlauf der Maxima im Bereich niedriger Vorspannungen bis  $4 \text{ mV}$  deutlicher beobachten zu können, ist dieser Spannungsbereich gesondert in Abbildung 8.20 (c) dargestellt. In Abbildung 8.20 (d) ist ein Fock-Darwin-Spektrum [30]

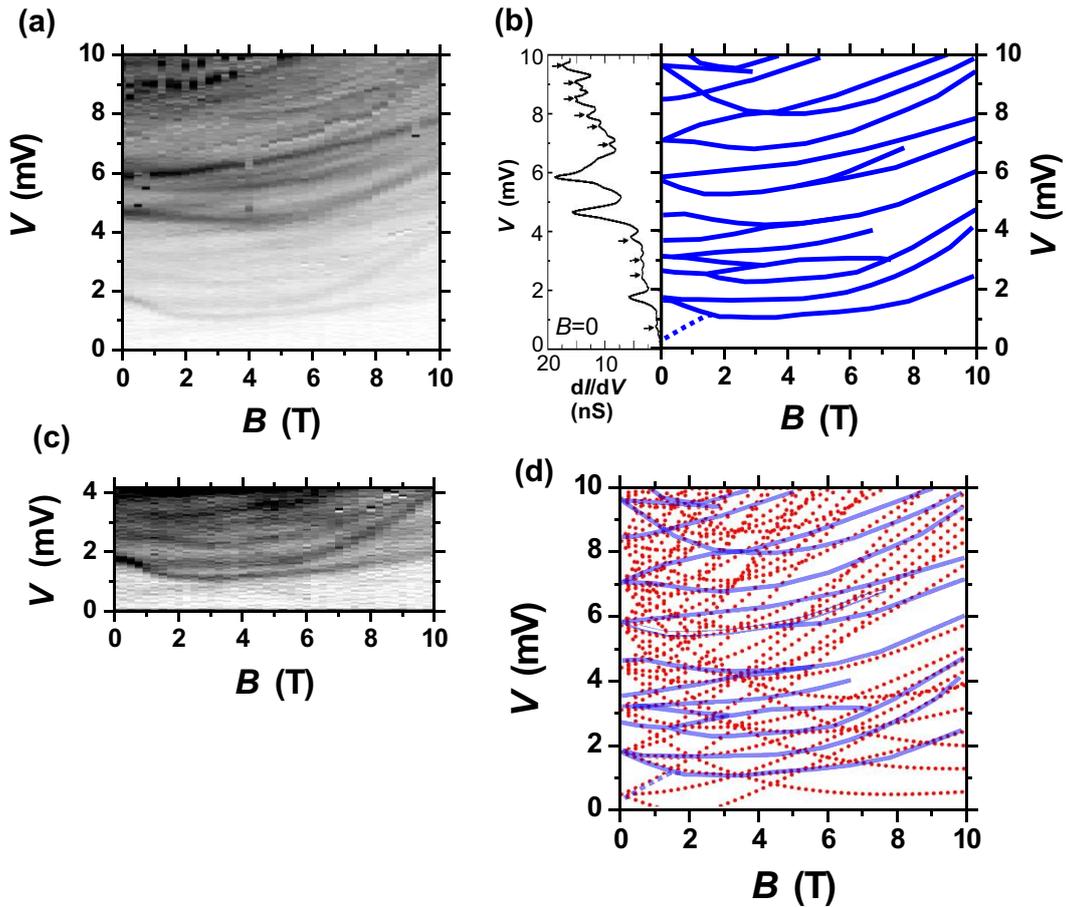
$$\begin{aligned}
 E_{n',m} &= (2n' + |m| + 1) \hbar\Omega + \frac{1}{2}m \hbar\omega_c & (8.26) \\
 n' &= 0, 1, 2, \dots, \\
 m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned}$$



**Abbildung 8.19.:** Graustufen-Graph der differentiellen Leitfähigkeit ( $T = 240$  mK) als Funktion der Spannung und des Magnetfeldes. (a) positive Spannungspolarität. (b) negative Spannungspolarität.

dem Verlauf der Leitfähigkeitsmaxima aus Abbildung 8.20 (b) unterlegt worden. Es zeigt sich, dass eine gute Übereinstimmung der Leitfähigkeitsmaxima mit einem Fock-Darwin-Spektrum für die Resonanzen im Spannungsbereich bis 6 mV erzielt wird. Auf Grund der energetisch dichtliegenden Fock-Darwin-Zustände ist der Abgleich für höhere Spannungen unübersichtlich. Die beste Übereinstimmung der experimentellen Daten erhält man für ein Fock-Darwin-Spektrum eines Teilchens mit der effektiven Masse  $m^* = 0.35 m_0$ , das sich in einem isotropen, parabolischen Potenzial mit dem Radius  $a \approx 50$  nm befindet. Für die Simulation ist ein Konversionsfaktor  $\alpha = 0.5$  angenommen worden. Diese Annahme ist für einen Spannungsbereich bis 10 mV gerechtfertigt, da für kleine Spannungen das Potenzialprofil annähernd symmetrisch verläuft und der Spannungsabfall über den Barrieren linear ist. Eine weitere entscheidende Beobachtung ist, dass für die optimale Übereinstimmung der Grundzustand (1s) und der erste angeregte Zustand (2p) im thermodynamischen Gleichgewicht besetzt sind. Entsprechend ist das Fock-Darwin-Spektrum auf der Energieskala verschoben worden. Ebenso ist erstaunlich, dass eine gute Übereinstimmung der Messdaten mit dem Einteilchenspektrum eines isotropen Einschlusspotenziales erreicht wird. Anisotropie-Effekte des Einschlusspotenziales [227] oder Einflüsse von Störstellenpotenzialen [228, 229] scheinen untergeordnete Einflüsse zu besitzen. Dies ist möglicherweise eine Konsequenz der großen Leicht-Loch-Schwer-Loch-Aufspaltung.

Es ist wahrscheinlich, dass das beobachtete Anregungsspektrum zu einem Germanium-Quantenpunkt gehört. Rasterkraftmikroskopische und tunnelmikroskopische Aufnahmen [112, 144, 147, 230] von unbedeckten Germanium Hut-Cluster Quantenpunktstrukturen ergaben, dass die mittlere laterale Ausdehnung der Quantenpunkte zirka 40 nm beträgt. Die Fluktuation  $w(L)$  in der lateralen Ausdeh-

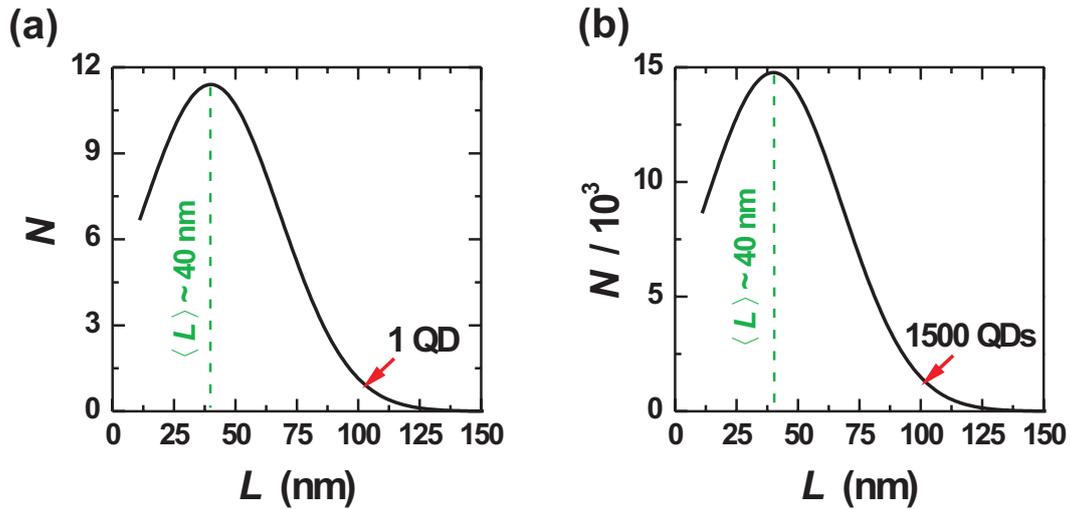


**Abbildung 8.20.:** (a) Graustufendarstellung der differentiellen Leitfähigkeit als Funktion der positiven Vorspannung und des äußeren Magnetfeldes. (b) Positionen der Leitfähigkeitsmaxima aus (a). Der linke Anhang zeigt den Verlauf der ersten Ableitung für  $B = 0$ . Kleine Pfeile markieren Leitfähigkeitsresonanzen. (c) Spannungsausschnitt aus (a) mit geänderter Auflösung, so dass die Leitfähigkeitsmaxima in diesem Ausschnitt deutlicher zu sehen sind. (d) Fock-Darwin-Spektrum eines Teilchens ( $m^* = 0.35 m_0$ ) im harmonischen Potenzial ( $a = 50$  nm). In Blau sind die Positionen der Leitfähigkeitsmaxima unterlegt.

nung ( $L = 2a$ ) der Quantenpunkte ist normalverteilt [112, 230]

$$w(L) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{L-\langle L \rangle}{\sigma}\right)^2}, \quad (8.27)$$

wobei die Standardabweichung  $\sigma$  stark vom Herstellungsverfahren abhängig ist. Pchelyakov *et al.* [230] geben Werte im Bereich von  $\sigma/\langle L \rangle \sim 50\% - 90\%$  an. Der in den Transportmessungen spektroskopierte Quantenpunkt besitzt einen Radius von 45 nm bis 50 nm entsprechend einer lateralen Ausdehnung von 90 nm bis 100 nm. Es handelt sich also um einen Quantenpunkt aus dem Ausläufer der Normalverteilung. Hut-Cluster Quantenpunkte sind metastabil und wandeln sich bei Temperaturen oberhalb von 400°C in größere pyramiden- beziehungsweise ellipsenförmige Quantenpunkte („Domes“, [114]) um. Bei der Diodenprozessierung



**Abbildung 8.21.:** Quantenpunkt-Verteilung. Anzahl der Quantenpunkte als Funktion der lateralen Ausdehnung der Quantenpunkte. (a) Submikrometer-Diode; (b) Diode mit 72  $\mu\text{m}$  Durchmesser.

ist darauf geachtet wurden, die Temperatur möglichst niedrig zu halten. Dennoch musste die Heterostruktur für den Einlegierprozess der elektrischen Kontakte auf eine Temperatur von 380°C erwärmt werden. Dies könnte lokal zur Bildung von „große“ Quantenpunkten geführt haben. Die Wahrscheinlichkeit, dass im Transport bevorzugt diese großen Quantenpunkte spektroskopiert werden ist hoch, da die größeren Quantenpunkte auch höher sind und somit die bedeckende Barrierenschicht dünner ist. Daher koppeln die größeren Quantenpunkte besser an die Zuleitungen an. Entsprechende Transportkanäle sind also bevorzugt.

Es soll nun die Frage geklärt werden, warum ein entsprechendes Quantenpunktspektrum nicht in einer 72  $\mu\text{m}$ -Diode gesehen werden kann. Der Grund hierfür ist, dass in der Querschnittsfläche einer 72  $\mu\text{m}$ -Diode sehr viele Quantenpunkte mit entsprechender lateraler Ausdehnung liegen. Der Transport kann also gleichzeitig über viele Quantenpunkte stattfinden. In der Kennlinie ist dann der individuelle Charakter eines Quantenpunktes nicht mehr zu beobachten. Durch die Reduzierung der Querschnittsfläche sinkt auch die Anzahl der entsprechenden Quantenpunkte, so dass nur wenige Transportkanäle zur Verfügung stehen. In der Kennlinie sind dann idealerweise die Zustände eines Quantenpunktes beobachtbar. Es soll nun die Anzahl der in Frage kommenden Quantenpunkte in der Querschnittsfläche der Submikrometer-Diode abgeschätzt werden. Unter Verwendung von Gleichung (8.27) und der Kenntnis der Diodenquerschnittsfläche  $A$  berechnet sich die Anzahl der Quantenpunkte mit entsprechender Ausdehnung zu

$$N = w(L) n_{\text{QD}} A, \quad (8.28)$$

mit  $n_{\text{QD}}$  der Flächendichte der Germanium Hut-Cluster Quantenpunkte. Aus rasterkraftmikroskopischen Aufnahmen ist für die untersuchte Struktur eine Flächendichte  $n_{\text{QD}} = 8 \times 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  bestimmt worden. In einer Diode mit einer Querschnittsfläche

## 8. Silizium/Germanium-Quantenpunktstrukturen

che von  $1 \mu\text{m}^2$  befindet sich nach Gleichung (8.28) im Mittel ein Quantenpunkt mit der Ausdehnung von 100 nm in der Querschnittsfläche. Hierbei ist eine Standardabweichung  $\sigma/\langle L \rangle \sim 70\%$  angenommen worden. Im Vergleich hierzu befinden sich zirka 1500 Quantenpunkte mit der selben Ausdehnung in einer Diode mit  $72 \mu\text{m}$  Durchmesser. Dies spricht für die oben aufgestellte Vermutung. In Abbildung 8.21 ist die Größenverteilung der Quantenpunkte für eine Diode mit  $1 \mu\text{m}^2$  (Abbildung 8.21 (a)) und  $1300 \mu\text{m}^2$  (Abbildung 8.21 (b)) Querschnittsfläche grafisch dargestellt.

### 8.2.1. Zusammenfassung

In Dioden mit Submikrometer-Durchmesser in der aktiven Zone wurde erstmalig das Anregungsspektrum eines Germanium-Quantenpunktes mit Hilfe der Tunnel-spektroskopie beobachtet. Die spektroskopierten Zustände ließen sich (erstaunlicherweise) gut durch Zustände eines isotropen, parabolischen Potentials annähern. Entsprechend wurde in einem äußeren Magnetfeld eine hohe Übereinstimmung mit einem Fock-Darwin-Spektrum festgestellt. Aus den Vergleichen der experimentellen Daten mit der Simulation eines Fock-Darwin-Spektrums ergab sich für den Oszillatorkradius eine Länge  $a \approx 50 \text{ nm}$ . Die effektive Ladungsträgermasse des Teilchens besaß den Wert  $m^* = 0.35 m_0$ .

Des Weiteren ergaben die Untersuchungen, dass erst Zustände oberhalb des 2s-Zustandes beobachtbar waren, da der Grundzustand und der erste angeregte Zustand unterhalb der Fermi-Kante lagen.

Aus der Normalverteilung der lateralen Quantenpunktausdehnung ließ sich die Anzahl der Quantenpunkte mit entsprechender Ausdehnung als Funktion der Querschnittsfläche der Diode ermitteln. Das Ergebnis belegte, dass sich in Submikrometer-Dioden im Mittel ein Quantenpunkt mit einer Ausdehnung von 100 nm in der Querschnittsfläche befand. Vergleichend lagen in der Querschnittsfläche einer  $72 \mu\text{m}$  Diode 1500 Quantenpunkte. Diese Betrachtung verdeutlichte, dass in Submikrometer-Dioden der Transport über einzelne Quantenpunktzustände betrachtet werden konnte, hingegen in Dioden größerer Querschnittsfläche nicht.

## 9. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der elektronische Transport in *p*-dotierten Silizium/Germanium-Quantentopf- und Quantenpunktstrukturen untersucht. Hierbei konnte das resonante Tunneln von Löchern über zwei- und nulldimensionale Zustände studiert werden.

Der aktive Bereich der untersuchten Heterostrukturen bestand im Wesentlichen aus zwei 10 nm breiten Silizium-Germanium-Quantentöpfen, die durch eine 10 nm dicke Silizium-Barriere getrennt waren. In der Mitte der Silizium-Barriere waren wenige Monolagen reines Germanium eingebettet. In Abhängigkeit von der eingebetteten Germaniumschicht ließen sich die gewachsenen Heterostrukturen in Quantentopf- beziehungsweise Quantenpunktstrukturen einteilen. In Quantentopfstrukturen lag die Dicke der Germaniumschicht unterhalb der kritischen Schichtdicke des Stranski-Krastanov-Phasenübergangs. Der in der Silizium-Barriere eingebettete Germaniumfilm war daher zwar glatt, jedoch auf Grund des gitterangepassten Wachstums biaxial verspannt.

Bei den Quantenpunktstrukturen wurde die kritische Schichtdicke überschritten, so dass sich auf Grund von plastischen Relaxationsprozessen dreidimensionale Germanium-Inseln selbstorganisiert gebildet haben. Die Inseln waren zirka 1 nm hoch und besaßen eine mittlere laterale Ausdehnung von 35 nm bis 40 nm.

Für die elektronischen Untersuchungen wurden die Heterostrukturen in Dioden mit Mikrometer und Submikrometer Durchmesser prozessiert. Die anschließenden Zwei-Punkt-Strom-Spannungs-Messungen wurden in Kryostatsystemen bei Temperaturen unterhalb 1 K durchgeführt. Für die Untersuchung in Magnetfeldern standen Kryostatsysteme zur Verfügung, die mit supraleitenden Magneten ausgestattet waren und Feldstärken bis zu 20 T erzeugen konnten.

Die Untersuchungen an den Quantentopfstrukturen ergaben, dass der resonante Tunnelstrom von schweren Löchern in Subbänder des Germaniumfilms von einem hohen, nicht-resonanten Stromanteil überlagert war. Hieraus resultierte ein geringes Peak-to-Valley-Ratio, so dass die typischen Tunnelstromresonanzen nur schwer zu beobachten waren. Für die Analyse war daher nicht die Betrachtung des Stromes, sondern der differentiellen Leitfähigkeit geeigneter. In der differentiellen Leitfähigkeit ließen sich zwei Resonanzen festzustellen. Die erste, schwach ausgeprägte Resonanz resultierte aus dem Tunnelprozess schwerer Löcher des Emitters in den Leicht-Loch Grundzustand des Germanium-Quantentopfes. Die zweite, deutlich ausgeprägtere Resonanz entsprach einem Tunnelprozess schwerer Löcher aus der Zuleitung in den ersten angeregten Schwer-Loch Zustand des Quantentopfes. Ferner zeigten die Untersuchungen, dass der Schwer-Loch Grundzustand des

## 9. Zusammenfassung und Ausblick

Quantentopfes unterhalb der Fermi-Kante lag und für den resonanten Tunneltransport nicht zur Verfügung stand. Mit Hilfe von temperaturabhängigen Messungen ließen sich Aussagen über den Spannungsabfall in der Barrierenstruktur treffen. Dies ermöglichte die Bestimmung eines Spannungs-Energie-Konversionsfaktors  $\alpha$ , mit dem sich die Spannungsskalen als Energieskalen interpretieren ließen. Mit dem Kenntnis des Konversionsfaktors ließen sich anschließend aus den Positionsänderungen der Leitfähigkeitsresonanzen im Magnetfeld die effektiven Massen der Löcher in den Quantentopf-Zuständen bestimmen. Die auf diese Weise ermittelten Werte der effektiven Massen waren konsistent mit Werten vergleichbarer Experimente.

Neben 3D-2D Tunnelprozessen wurden im Spannungsbereich vor dem Einsetzen von Tunnelprozessen über das erste Subband mehrere Stromstufen im Picoampere-Bereich beobachtet, die in der differentiellen Leitfähigkeit zu scharfen Resonanzen mit einer Halbwertsbreite von 0.15 - 0.3 mV führten. Die Stromstufen ließen sich Tunnelprozessen schwerer Löcher in nulldimensionale Zustände, die im Bereich der Germaniumschicht lagen, zuordnen. Entsprechend wurde in einem Magnetfeld, das senkrecht zur Wachstumsebene orientiert war, eine lineare Zeeman-Aufspaltung der Leitfähigkeitsresonanzen beobachtet. Für eine Magnetfeldorientierung parallel zur Wachstumsebene ließ sich, wie für schwere Löcher charakteristisch, keine lineare Aufspaltung beobachten; lediglich einige Resonanzen zeigten eine kleine kubische Aufspaltung. Es wurden einige Indizien für die Vermutung, dass es sich bei den beobachteten nulldimensionalen Zuständen um in die Germaniumschicht diffundierte Bor-Akzeptoren handelt, angeführt. Insbesondere der aus der linearen Zeeman-Aufspaltung ermittelte Wert des effektiven  $g$ -Faktors stützt diese Vermutung, da er mit dem durch optische Experimente bestimmten Wert des effektiven  $g$ -Faktors von Bor-Akzeptoren in Germanium gut übereinstimmte. Ein weiterer Indiz beruhte auf der Beobachtung, dass keine diamagnetische Verschiebung der Zustände bis zu Feldstärken von 18 T messbar war. Hieraus ließ sich eine Obergrenze für die Ausdehnung der nulldimensionalen Zustände abschätzen. Wurde die Dicke des Germaniumfilms bei der Berechnung des effektiven Bohrradius von in den Film migrierten Bor-Dotieratomen berücksichtigt, so erhielt man eine Ausdehnung der Zustände, die unterhalb dieser Obergrenze lag. Insgesamt ließen sich keine Argumente finden, die gegen Bor-Akzeptoren-Zustände als mögliche Kandidaten für die beobachteten nulldimensionalen Zustände sprachen. Sollte es sich tatsächlich bei den beobachteten Zuständen um Bor-Atome handeln, wären dies die ersten Messungen des effektiven  $g$ -Faktors von Bor-Akzeptoren in einem dünnen Germaniumfilm.

Charakteristisch für die Strom-Spannungs-Kennlinien der Quantenpunktstrukturen war das Auftreten eines instabilen Bereichs mit negativ differentieller Leitfähigkeit im Temperaturbereich unterhalb eines Kelvins. Beim Erreichen einer Schwellenspannung fand ein sprunghafter Übergang aus einem Niedrigstrom-Regime in ein Hochstrom-Regime statt. Hierbei hing die Kennlinienform im Niedrigstrom-Regime entschieden von der Querschnittsfläche der Diode ab. Bei Dioden mit einigen Mikrometern Durchmesser wurde ein Hopping-Transportverhalten beobachtet. Oberhalb von 160 mK zeigte die differentielle Leitfähigkeit ein einfach aktiviertes

Transportverhalten, das aus Hüpf-Prozessen zwischen Quantenpunkt-Zuständen innerhalb der Querschnittsfläche der Diode resultierte. Die korrespondierende Aktivierungsenergie entsprach hierbei der gemittelten Ladeenergie der Quantenpunkte. Die in der Kennlinie beobachtete Bistabilität konnte als eine unmittelbare Konsequenz des aktivierten Transportverhaltens angesehen werden. Stand den Löchern die Aktivierungsenergie, z. B. auf Grund thermischer Energie, zur Verfügung, wechselte das Transportverhalten vom Niedrigstrom- ins Hochstrom-Regime.

In Dioden mit Submikrometer Durchmesser wurde im Niedrigstrom-Regime ein anderes Transportverhalten als in den Dioden mit größerer Querschnittsfläche beobachtet. In den Submikrometer-Dioden konnte erstmalig das Anregungsspektrum eines einzelnen Germanium-Quantenpunktes unter Verwendung der Transportspektroskopie gemessen werden. Hierbei wurde bei den Untersuchungen im Magnetfeld eine gute Übereinstimmung der ersten vier Zustände mit einem Fock-Darwin-Spektrum festgestellt. Aus dem Vergleich der experimentellen Daten mit der Simulation ergab sich eine laterale Ausdehnung des Quantenpunktes von zirka 100 nm. Ferner ergaben die Untersuchungen, dass sowohl der Grundzustand als auch der erste angeregte Zustand des Quantenpunktes unterhalb der Fermi-Kante lagen und somit im resonanten Tunneltransport nicht beobachtet werden konnten.

Das Transportverhalten im Hochstrom-Regime war in den Mikro- und Submikrometer-Dioden vergleichbar und wurde auf den gleichen Transportmechanismus zurückgeführt: Im Hochstrom-Regime fand der Transport in einzelnen Filamenten innerhalb der Querschnittsfläche der Diode statt. Ein Filament bestand aus einer Reihe von Quantenpunkten, über die sich ein kollektiver Transportzustand ausgebildet hatte. Im Hochstrom-Regime war somit ein kollektiver Ladungstransport über eine Reihe von Quantenpunkten zu beobachten.

Die im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse eröffnen im Wesentlichen zwei Perspektiven für weitere Untersuchungen.

In Dioden der Quantentopfstruktur könnten Transportmessungen in gedrehten Magnetfeldern zur Klärung der Feinstrukturaufspaltung der diskreten Zustände beitragen. Zudem wäre durch die Prozessierung einer ringförmigen Steuerelektrode um die Mesa ein zusätzlicher Einfluss auf die diskreten Zustände möglich und hilfreich.

Bei Dioden der Quantenpunktstruktur wäre eine solche ringförmige Elektrode ebenfalls sehr hilfreich, da man so die Möglichkeit erhielte, die Querschnittsfläche elektrostatisch kontinuierlich zu reduzieren. Auf diese Weise ließe sich das Transportverhalten im Niedrigstrom-Regime als Funktion der kontinuierlich reduzierbaren Querschnittsfläche über mehrere Größenordnungen analysieren. Dies könnte zur Klärung der Frage beitragen, welche Mechanismen dafür verantwortlich sind, dass entweder ein Hopping-Transport oder ein resonanter Tunneltransport über einzelne Quantenpunktzustände beobachtet werden konnte.

## *9. Zusammenfassung und Ausblick*

# A. Anhang

## A.1. Transfer-Matrix-Methode

Mit der Transfer-Matrix-Methode lassen sich die Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten der Ladungsträger in einer Tunnelstruktur ermitteln. Der Transmissionskoeffizient  $T$  eines Teilchens mit der Energie  $E$  ist das Verhältnis von einlaufender zu auslaufender Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$T(E) = \frac{j_{\text{ein}}(E)}{j_{\text{aus}}(E)}. \quad (\text{A.1})$$

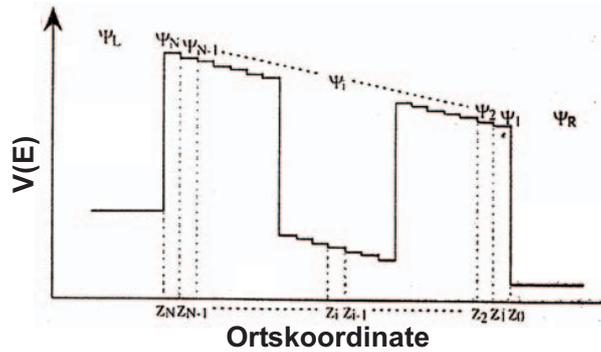
Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte in Tunnelrichtung ( $z$ -Richtung)  $j_z(E) = \hbar/m^* \text{Re}(\psi^* k_z \psi)$  resultiert aus den Lösungen der Schrödinger-Gleichung (A.2) der Heterostruktur. Wegen der Translationssymmetrie des Systems parallel zu den Grenzflächen lässt sich die Schrödinger-Gleichung in zwei linear unabhängige Differenzialgleichungen, entsprechend der lateralen und der Komponente in Wachstumsrichtung, also der Tunnelrichtung, separieren. Da die betrachteten Energien im Bereich der Bandkante liegen, lässt sich die Schrödinger-Gleichung in Wachstumsrichtung in Effektiv-Massen-Näherung unter Verwendung des eindimensionalen BenDaniel-Duke-Hamilton-Operators aufstellen:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{m^*(z)} \frac{d}{dz} + V(z) \right) \psi(z) = E\psi(z). \quad (\text{A.2})$$

Für das Tunnelproblem sind die Lösungen von (A.2) entscheidend. Da die Gleichung (A.2) eine gewöhnliche Differenzialgleichung ist, gelten für die Anschlussbedingungen ihrer Lösungen, dass sowohl die erste  $\psi(z)$  als auch die zweite Ableitung  $\frac{1}{m^*(z)}\psi'(z)$  stetig sein müssen. Für konstante Potenzialbereiche lassen sich als Lösungsansatz ebene Wellen  $\psi(z) = A \exp(ikz)$  wählen, wobei die Wellenzahlen folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} k &= \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^*(E - V)}, & (E \geq V) \\ &= \pm i\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^*(V - E)}, & (E < V). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Der letzte Ausdruck beschreibt den Fall, dass ein Ladungsträger sich in der verbotenen Zone aufhält.



**Abbildung A.1.:** Prinzip des Transfer-Matrix-Formalismus: Die Doppelbarrieren-Struktur wird durch viele kleine Sprungpotenziale zusammengesetzt [61].

### A.1.1. Berechnung der Transmissionskoeffizienten mit der Transfer-Matrix-Methode

Um die Eigenwertgleichung (A.2) zu lösen, kann der Potenzialverlauf  $V(z)$  durch stückweise konstante Potenzialabschnitte  $V_m(z)$  angenähert werden (siehe Abbildung A.1). Die Wellenfunktion im  $m$ -ten Abschnitt lässt sich dann als ebene Welle der Form

$$\psi_m(z) = A_m \exp(ik_m z) + B_m \exp(-ik_m z) \quad (\text{A.4})$$

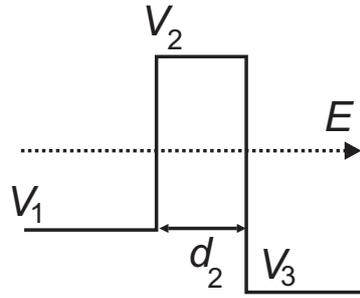
schreiben, wobei die komplexe Wellenzahl  $k_m$  die Bedingungen (A.3) erfüllen muss. Aus der Erhaltung der Wahrscheinlichkeitsstromdichte und der daraus resultierenden Stetigkeitsbedingungen können die Koeffizienten  $A_m$  und  $B_m$  durch Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \psi_m(z_{m+1}) &= \psi_{m+1}(z_{m+1}) \\ (1/m_m^*)(\partial_z \psi_m)|_{z=z_{m+1}} &= (1/m_{m+1}^*)(\partial_z \psi_{m+1})|_{z=z_{m+1}} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ermittelt werden. Das Gleichungssystem (A.5) lässt sich auch in Matrixschreibweise formulieren:

$$\begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \mathbf{a}_m = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{m+1} \\ B_{m+1} \end{pmatrix} = T_m \cdot \mathbf{a}_{m+1}. \quad (\text{A.6})$$

Die Matrix  $T$  heißt Transfer-Matrix oder kurz  $T$ -Matrix. Die Gleichung (A.6) zeigt, dass  $A_m$  und  $A_{m+1}$  die Koeffizienten von einlaufenden ebenen Wellen sind, d. h. sie gehören zu Teilchen, die sich aus dem negativen beziehungsweise positiven Unendlichen auf den Wirkungsbereich des Potentials zu bewegen. Dagegen sind  $B_m$  und  $B_{m+1}$  die zu auslaufenden Wellen gehörenden Koeffizienten; sie beschreiben also die Teilchen, die sich vom Potential entfernen, d. h. reflektierte oder transmittierte Teilchen. Mit Hilfe der  $T$ -Matrix lassen sich die Amplituden der Wellen auf der linken Potenzielseite in Abhängigkeit der Amplituden der Wellen auf der rechten Potenzielseite bestimmen. Wenn ein Potential ähnlich dem in Abbildung A.1 in eine Reihe von Teilpotenzialen zerlegt wird, kann man sich eine Eigenschaft der



**Abbildung A.2.:** Schematischer Verlauf einer Potenzialbarriere

$T$ -Matrix zugute machen. Die  $T$ -Matrix des gesamten Potentials ist das Produkt der  $T$ -Matrizen der Teilpotenziale:

$$T = \prod_m T_m. \quad (\text{A.7})$$

Wenn die Zerlegung eines Potentials fein genug gewählt wird, lässt es sich durch elementare Strukturen - konstante Potentiale und Sprungpotentiale - annähern. Man erhält dann die  $T$ -Matrix des gesamten Potentials als Produkt von  $T$ -Matrizen konstanter Potentiale und  $T$ -Matrizen von Potentialsprüngen. Die  $T$ -Matrix eines konstanten Potentials hat die einfache Form

$$T^{\text{const}} = \begin{pmatrix} \exp(-ikd) & 0 \\ 0 & \exp(+ikd) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Für reelle  $k$  Wellenzahlen erhält man eine Phasenverschiebung und bei imaginären Wellenzahlen eine Abschwächung der Welle. Die  $T$ -Matrix des Potentialsprungs erhält man direkt aus den Anschlussbedingungen (A.5) bei  $z = 0$

$$T^{\text{step}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{m_1 k_2}{m_2 k_1} & 1 - \frac{m_1 k_2}{m_2 k_1} \\ 1 - \frac{m_1 k_2}{m_2 k_1} & 1 + \frac{m_1 k_2}{m_2 k_1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

### Einfachbarriere

Am Beispiel der Einzelbarriere soll nun die Transfer-Matrix-Methode demonstriert werden. Abbildung A.2 zeigt den schematischen Verlauf einer Potenzialbarriere. Das Potential lässt sich in einen Potentialsprung von  $V_1$  nach  $V_2$ , den Barrierenbereich der Dicke  $d_2$  und einen erneuten Potentialsprung von  $V_2$  nach  $V_3$  einteilen. Für den ersten Übergang erhält man nach (A.9)

$$T_1^{\text{step}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{m_1 k_2}{m_2 k_1} & 1 - \frac{m_1 k_2}{m_2 k_1} \\ 1 - \frac{m_1 k_2}{m_2 k_1} & 1 + \frac{m_1 k_2}{m_2 k_1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Die  $T$ -Matrix des Barrierenbereichs ist nach (A.8)

$$T_2^{\text{const}} = \begin{pmatrix} \exp(-ik_2 d_2) & 0 \\ 0 & \exp(+ik_2 d_2) \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

## A. Anhang

und für den zweiten Sprung erhält man nach (A.9)

$$T_3^{\text{step}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{m_2 k_3}{m_3 k_2} & 1 - \frac{m_2 k_3}{m_3 k_2} \\ 1 - \frac{m_2 k_3}{m_3 k_2} & 1 + \frac{m_2 k_3}{m_3 k_2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

In der Praxis ist die Lage der Energieniveaus einer resonanten Tunnelbarriere so (siehe Abbildung A.2), dass die Wellenzahlen  $k_1$  und  $k_3$  reell sind und  $k_2 = i\kappa_2$  imaginär ist. Dann ist die  $T$ -Matrix  $T_2^{\text{const}}$  des konstanten Bereichs reell und für die beiden  $T$ -Matrizen der Sprungpotenziale  $T_1^{\text{step}}$  und  $T_3^{\text{step}}$  gilt:  $T_{12} = T_{11}^*$ , wobei  $(^*)$  komplex konjugiert bedeutet. Ist die Energie  $E$  des einfallenden Teilchens größer als  $V_2$ , dann ist  $k_2$  ebenfalls reell. In diesem Fall sind die  $T$ -Matrizen  $T_1^{\text{step}}$  und  $T_3^{\text{step}}$  der Sprungpotenziale reell und die  $T$ -Matrix  $T_2^{\text{const}}$  des konstanten Bereichs verursacht eine Phasenverschiebung. Für den Fall komplexer  $k_2 = i\kappa_2$  definiert man:

$$z_{12} = 1 + i \frac{m_1^* \kappa_2}{m_2^* \kappa_1} \quad z_{23} = 1 - i \frac{m_2^* \kappa_2}{m_3^* \kappa_1} \quad \xi = \exp(\kappa_2 d_2). \quad (\text{A.13})$$

Die  $T$ -Matrix der gesamten Barriere schreibt sich dann:

$$\begin{aligned} T^{\text{bs}} &= T_1^{\text{step}} \cdot T_2^{\text{const}} \cdot T_3^{\text{step}} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} z_{12} & z_{12}^* \\ z_{12}^* & z_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1/\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{23} & z_{23}^* \\ z_{23}^* & z_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi z_{12} z_{23} + \frac{1}{\xi} z_{12}^* z_{23}^* & \xi z_{12} z_{23}^* + \frac{1}{\xi} z_{12}^* z_{23} \\ \xi z_{12}^* z_{23} + \frac{1}{\xi} z_{12} z_{23}^* & \xi z_{12}^* z_{23}^* + \frac{1}{\xi} z_{12} z_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Wie man sieht gilt  $(T^{\text{bs}})_{22} = (T^{\text{bs}})_{11}^*$ ,  $(T^{\text{bs}})_{21} = (T^{\text{bs}})_{12}^*$ . Im Fall, dass  $k_2$  reell ist, lässt sich zur besseren Übersicht definieren

$$\xi_2 = \exp(k_2 d_2), \quad y_{ij} = \frac{m_i k_j}{m_j k_i}. \quad (\text{A.15})$$

Die  $T$ -Matrix der gesamten Barriere schreibt sich nun:

$$\begin{aligned} T^{\text{bs}} &= T_1^{\text{step}} \cdot T_2^{\text{const}} \cdot T_3^{\text{step}} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + y_{12} & 1 - y_{12} \\ 1 - y_{12} & 1 + y_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 & 0 \\ 0 & 1/\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + y_{12} & 1 - y_{12} \\ 1 - y_{12} & 1 + y_{12} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Für eine von links auf die Barriere zulaufende Welle ergeben sich folgende Transmissions- und Reflexionskoeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{Transmissionskoeffizient der Wellenfunktion } t^{\text{bs}} &= \left( \frac{B_2}{A_1} \right)_{A_2=0} \\ &= \frac{1}{T_{11}}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \text{Reflexionskoeffizient der Wellenfunktion } r^{\text{bs}} &= \left( \frac{B_1}{A_1} \right)_{A_2=0} \\ &= \frac{T_{21}}{T_{11}}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Eine von rechts einlaufende Welle hat die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{Transmissionskoeffizient der Wellenfunktion } t^{\text{bs}} &= \left( \frac{B_1}{A_2} \right)_{A_1=0} \\ &= T_{22} - \frac{T_{12}T_{21}}{T_{11}}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{aligned} \text{Reflexionskoeffizient der Wellenfunktion } r^{\text{bs}} &= \left( \frac{B_2}{A_2} \right)_{A_1=0} \\ &= -\frac{T_{12}}{T_{11}}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Es ist interessant, die Wahrscheinlichkeitsstromdichten der rechten und linken Seite zu vergleichen. Wenn das Teilchen von links auf das Potenzial trifft, dann ist  $A_2 = 0$ . Links der Barriere ist eine Wahrscheinlichkeitsstromdichte nach rechts

$$j_{l\rightarrow} = \frac{e\hbar}{m_1} k_1 |A_1|^2 = \frac{e\hbar}{m_1} k_1 |T_{11} B_2|^2 \quad (\text{A.21})$$

und eine nach links

$$j_{l\leftarrow} = \frac{e\hbar}{m_1} k_1 |B_1|^2 = \frac{e\hbar}{m_1} k_1 |T_{21} B_2|^2. \quad (\text{A.22})$$

Auf der rechten Seite der Barriere gilt

$$j_{r\rightarrow} = \frac{e\hbar}{m_3} k_3 |B_2|^2. \quad (\text{A.23})$$

Der Transmissionskoeffizient  $T$  der Barriere ist dann nach A.1

$$T^{\text{bs}} = \frac{j_{r\rightarrow}}{j_{l\rightarrow}} = \frac{m_1 k_3}{m_3 k_1} \cdot |t|^2 = \frac{m_1 k_3}{m_3 k_1} \cdot \frac{1}{|T_{11}|^2}, \quad (\text{A.24})$$

für den Reflexionskoeffizient  $R$  der Barriere erhält man

$$R^{\text{bs}} = \frac{j_{l\leftarrow}}{j_{l\rightarrow}} = |r|^2 = \frac{|T_{21}|^2}{|T_{11}|^2}. \quad (\text{A.25})$$

Für  $k_2 = i\kappa$  ist  $T^{\text{bs}}$  klein und  $R^{\text{bs}}$  fast 1, je größer  $\kappa_2 d_2$  ist. In diesem Fall dominieren die  $\xi$ -Terme in A.14 und es lässt sich eine Näherung für die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten der Wellenfunktion angeben:

$$t^{\text{bs}} \cong \frac{4}{\xi z_{12} z_{23}}, \quad r^{\text{bs}} \cong \frac{z_{12}^*}{z_{12}} \quad (\text{A.26})$$

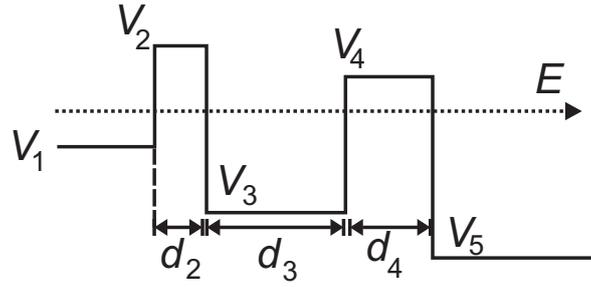


Abbildung A.3.: Schematischer Verlauf einer Doppelbarrieren-Struktur

und

$$t^{\text{bs}} \cong 4 \frac{(z_{12}^2 - z_{12}^{*2})(z_{23}^2 - z_{23}^{*2})}{\xi z_{23}}, \quad r^{\text{bs}} \cong -\frac{z_{23}^*}{z_{23}}, \quad (\text{A.27})$$

sodass  $T^{\text{bs}} \ll 1$  und  $R^{\text{bs}} \cong 1$  ist. Ist  $E$  größer als  $V_2$  wird  $R^{\text{bs}}$  klein und  $T^{\text{bs}}$  strebt gegen 1.

### Doppelbarriere

Abbildung A.3 zeigt einen schematischen Potenzialverlauf einer Doppelbarrierenstruktur. Es soll nun mit der Transfer-Matrix-Methode der Transmissions- und Reflexionskoeffizient einer Doppelbarrierenstruktur berechnet werden. Zwischen den einzelnen Amplituden der Wellen besteht folgende Beziehung:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = T_1^{\text{bs}} \cdot \begin{pmatrix} B_2 \\ A_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = T_2^{\text{const}} \cdot \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = T_3^{\text{bs}} \cdot \begin{pmatrix} B_4 \\ A_4 \end{pmatrix};$$

wobei  $T_1^{\text{bs}}$  die Form von (A.14) besitzt,  $T_3^{\text{bs}}$  hat ebenfalls die Form der  $T$ -Matrix einer Einfachbarriere wie (A.14), aber mit den Indizes 34 und 45 anstatt von 12 bzw. 23.  $T_2^{\text{const}}$  ist die  $T$ -Matrix eines konstanten Potenzials (vgl. (A.8)), jedoch mit dem Index 3 statt 2. Indem die drei  $T$ -Matrizen multipliziert werden, erhält man die Gesamt- $T$ -Matrix der Doppelbarriere

$$\begin{aligned} T^{\text{dbs}} &= T_1^{\text{bs}} \cdot T_2^{\text{const}} \cdot T_3^{\text{bs}} \\ &= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

mit

$$\begin{aligned} T_{11} &= \exp(-i\varphi)(T_{\text{bs}}^1)_{11}(T_{\text{bs}}^3)_{11} + \exp(+i\varphi)(T_{\text{bs}}^1)_{12}(T_{\text{bs}}^3)_{21}, \\ T_{12} &= \exp(-i\varphi)(T_{\text{bs}}^1)_{11}(T_{\text{bs}}^3)_{12} + \exp(+i\varphi)(T_{\text{bs}}^1)_{12}(T_{\text{bs}}^3)_{22}, \\ T_{21} &= \exp(-i\varphi)(T_{\text{bs}}^1)_{21}(T_{\text{bs}}^3)_{11} + \exp(+i\varphi)(T_{\text{bs}}^1)_{22}(T_{\text{bs}}^3)_{21}, \\ T_{22} &= \exp(-i\varphi)(T_{\text{bs}}^1)_{21}(T_{\text{bs}}^3)_{12} + \exp(+i\varphi)(T_{\text{bs}}^1)_{22}(T_{\text{bs}}^3)_{22} \end{aligned}$$

und

$$\varphi = k_3 d_3.$$

In Analogie zur Einfachbarriere erhält man den Transmissionskoeffizient der Welle als Inverses des ersten Matrixelementes der Gesamt- $T$ -Matrix

$$\begin{aligned} t^{\text{dbs}} &= \frac{1}{T_{11}} = \left( \exp(-i\varphi)(T_1^{\text{bs}})_{11}(T_3^{\text{bs}})_{11} \left( 1 + \exp(2i\varphi) \frac{(T_1^{\text{bs}})_{12}(T_3^{\text{bs}})_{21}}{(T_1^{\text{bs}})_{11}(T_3^{\text{bs}})_{11}} \right) \right)^{-1} \\ &= \exp(i\varphi) \frac{t_1^{\text{bs}} t_3^{\text{bs}}}{1 - \exp(2i\varphi) r_1^{\text{bs}} r_3^{\text{bs}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Die Gleichung (A.29) ist besser verständlich, wenn sie in einer Reihenentwicklung aufgeschrieben wird:

$$t^{\text{dbs}} = \frac{1}{T_{11}} = \exp(-i\varphi)(T_1^{\text{bs}})_{11}(T_3^{\text{bs}})_{11} (1 + y + y^2 + y^3 + \dots), \quad (\text{A.30})$$

mit  $y = \exp(2i\varphi) r_{T_1^{\text{bs}}}^{\text{bs}} r_{T_3^{\text{bs}}}^{\text{bs}}$ . Der  $y$ -Term beschreibt eine einmal hin- und herlaufende Welle,  $y^2$  entsprechend eine zweimal hin- und herlaufende Welle,  $y^3$  eine dreimal hin- und herlaufende Welle und entsprechend weiter. Die mehrfache Reflexion kann sich nun destruktiv oder konstruktiv überlagern; dies führt zu einer Resonanz in der Transmission. Für den Reflexionskoeffizient der Welle erhält man

$$\begin{aligned} r^{\text{dbs}} &= \frac{T_{21}}{T_{11}} = \frac{\exp(-i\varphi)(T_1^{\text{bs}})_{21}(T_3^{\text{bs}})_{11} + \exp(+i\varphi)(T_1^{\text{bs}})_{22}(T_3^{\text{bs}})_{21}}{\exp(-i\varphi)(T_1^{\text{bs}})_{11}(T_3^{\text{bs}})_{11} + \exp(+i\varphi)(T_1^{\text{bs}})_{12}(T_3^{\text{bs}})_{21}} \\ &= \frac{r_1^{\text{bs}} + \exp(2i\varphi)(t_1^{\text{bs}} t_1^{\text{bs}} - r_1^{\text{bs}} r_1^{\text{bs}}) r_3^{\text{bs}}}{1 - \exp(2i\varphi) r_1^{\text{bs}} r_3^{\text{bs}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Für die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten der Wahrscheinlichkeitsstromdichte findet man mit (A.29) bzw. (A.31) unter Verwendung von Gleichung (A.24) und (A.25):

$$T^{\text{dbs}} = \frac{m_1^* k_5}{m_5^* k_1} \cdot |t^{\text{dbs}}|^2 = \frac{T_1^{\text{bs}} T_3^{\text{bs}}}{1 + R_1^{\text{bs}} R_3^{\text{bs}} - 2\sqrt{R_1^{\text{bs}} R_3^{\text{bs}}} \cos \phi} \quad (\text{A.32})$$

$$R^{\text{dbs}} = |r^{\text{dbs}}|^2 = \frac{R_1^{\text{bs}} + R_3^{\text{bs}} - 2\sqrt{R_1^{\text{bs}} R_3^{\text{bs}}} \cos \phi}{1 + R_1^{\text{bs}} R_3^{\text{bs}} - 2\sqrt{R_1^{\text{bs}} R_3^{\text{bs}}} \cos \phi} \quad (\text{A.33})$$

mit

$$\begin{aligned} \phi &= 2\varphi + \arg(r_1^{\text{bs}}) + \arg(r_3^{\text{bs}}) \\ &= 2k_3 d_3 - \pi + \arg((T_1^{\text{bs}})_{12}/(T_1^{\text{bs}})_{11}) + \arg((T_1^{\text{bs}})_{21}/(T_3^{\text{bs}})_{11}). \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Hierbei wurden die Beziehungen (A.18) und (A.20) benutzt.  $\arg(\dots)$  liefert das Argument einer Funktion. Selbstverständlich ist die Bedingung  $R^{\text{dbs}} + T^{\text{dbs}} = 1$  erfüllt. Man sieht, dass  $T^{\text{dbs}}$  ein scharfes Maximum (Peak) besitzt, wenn  $\cos \phi = 1$ , oder  $\phi = 0, 2\pi, \dots$  ist. Mit den Definitionen (A.13) und den Näherungen (A.26) und (A.27) findet man bei Substitution in (A.34), dass

$$\phi \cong 2\varphi - \pi + 2 \arctan((m_2^* k_3)/(m_3^* \kappa_2)) + 2 \arctan((m_3^* \kappa_4)/(m_4^* k_3)).$$

## A. Anhang

Wenn  $\kappa_2$  und  $\kappa_4$  groß<sup>1</sup> sind, also bei  $2\varphi$ , liegt die Resonanz in der Transmission bei  $\varphi \cong n\pi$  bzw.  $k_3 d_3 = n\pi$ . Das sind die Eigenwerte eines Potenzialtopfes mit unendlich hohen Wänden und der Breite  $d_3$ . Anders ausgedrückt: Die Transmission ist maximal, wenn die Teilchen eine Einschussenergie nahe der diskreten Energieniveaus des Topfes besitzen. Wenn  $T_1^{\text{bs}}$  und  $T_3^{\text{bs}}$  klein sind, lässt sich die Transmission in der Resonanz nähern durch den Ausdruck

$$T^{\text{dbs}} = \frac{T_1^{\text{bs}} T_3^{\text{bs}}}{(1 - \sqrt{R_1^{\text{bs}} R_3^{\text{bs}}})^2} \cong \frac{4T_1^{\text{bs}} T_3^{\text{bs}}}{(T_1^{\text{bs}} + T_3^{\text{bs}})^2}. \quad (\text{A.35})$$

Sind  $T_1^{\text{bs}}$  und  $T_3^{\text{bs}}$  exakt gleich, ist  $T^{\text{dbs}} = 1$  und die Doppelbarrierenstruktur ist komplett durchlässig. Sind  $T_1^{\text{bs}}$  und  $T_3^{\text{bs}}$  nicht gleich, ist die Transmission stets kleiner als 1. Aus diesem Grund hat die Doppelbarrierenstruktur einen negativ differenziellen Widerstand. Erst für sehr hohe Temperaturen verschwindet diese Eigenschaft, da es stets Ladungsträger gibt, die eine Energie nahe der Resonanz haben und somit stets ein großer Strom bei allen angelegten Spannungen fließt. Wird die äußere Spannung an der Barrieren-Struktur erhöht, verkippt sich das Potenzialprofil. Das bewirkt, dass  $T_3^{\text{bs}}$  größer als  $T_1^{\text{bs}}$  wird. Aus der Näherung (A.35) kann man dann ableiten, dass in diesem Fall die Transmission in der Resonanz kleiner als 1 ist, d. h. die Verkipfung der Barrieren verursacht eine Abnahme des Stromes.

## A.2. Akzeptor im schmalen Quantentopf

In diesem Abschnitt soll kurz eine Methode zur Berechnung der Eigenwerte eines flachen Akzeptors, der sich in einem schmalen Quantentopf befindet, skizziert werden. Die betrachteten Zustände liegen im Valenzband, so dass der kinetische Anteil des Hamilton-Operators von der Form des Luttinger-Operators [37] ist:

$$H_L = \frac{1}{2m_0}(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2)\mathbf{p}^2 - \frac{\gamma_2}{m_0}(p_x^2 J_x^2 + p_y^2 J_y^2 + p_z^2 J_z^2) - \frac{2\gamma_3}{m_0}(\{p_x p_y\}\{J_x J_y\} + \{p_y p_z\}\{J_y J_z\} + \{p_z p_x\}\{J_z J_x\}), \quad (\text{A.36})$$

mit  $\{a, b\} = (ab + ba)/2$ . Dem Hamilton-Operator (A.36) wird nun das Quantentopfpotenzial hinzugefügt

$$H_{\text{QW}} = \begin{cases} 0 & \text{für } |z| < w/2 \\ \Phi & \text{für } |z| \geq w/2 \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

mit  $\Phi$  dem Bandkantensprung zwischen dem Barrieren- und dem Topfmaterial. Änderungen des Energiespektrums auf Grund einer Punktstörung, die durch ein Coulomb-Potenzial, also einem glatten langreichweitigen Störpotenzial, beschrieben werden, sind durch den Term

$$H_A = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon |\mathbf{r}|}, \quad (\text{A.38})$$

<sup>1</sup>Die Höhe der Barriere ist groß im Bezug auf die Einschussenergie des Teilchens.

berücksichtigt. Die räumliche Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten ist nach Hermanson [231, 232] modelliert

$$\epsilon^{-1}(\mathbf{r}) = (\epsilon_r \epsilon_0)^{-1} + (1 - (\epsilon_r \epsilon_0)^{-1}) \exp(-\mathbf{r}/\xi). \quad (\text{A.39})$$

Den Einfluss von Verspannungsfeldern berücksichtigt der Operator

$$\begin{aligned} H_s = a_v(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + \frac{2}{3} b[(J_x^2 - \frac{1}{3} J^2 \epsilon_{xx} + \text{z. P.})] \\ + \frac{4}{3} b'(\{J_x J_y\} \epsilon_{xy} + \text{z. P.}) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

mit  $a_v$ ,  $b$  und  $b'$  den Deformationspotenzialen des Volumenmaterials. »z. P.« steht für zylindrische Permutation von  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Der komplette Hamilton-Operator ist somit von der Form

$$H = H_L + H_{QW} + H_A + H_s + H_Z + H_F. \quad (\text{A.41})$$

$H_Z$  ist der Zeeman-Term (siehe Gleichung (2.71)) und durch  $H_F = eFz$  wird das elektrische Feld berücksichtigt.

Die Lösung ergibt sich mit Hilfe der Variationsrechnung:

$$E = \min_{\Psi} \left( \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \right) \quad (\text{A.42})$$

Geeignete Testfunktionen (eng. trial function) sind von der Form wasserstoffähnlicher Zustände (Besselfunktionen).

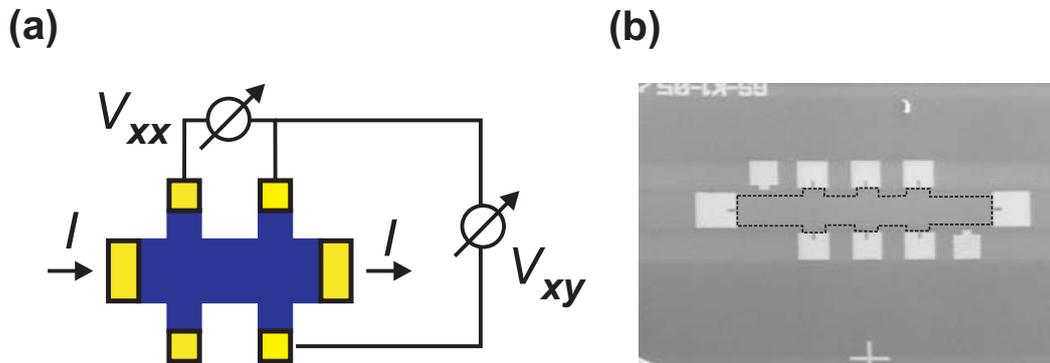
### A.3. Hall Messung

Zur Überprüfung der Ladungsträgerkonzentration in den hochdotierten Zuleitungen wurden bei einer Umgebungstemperatur von 30 mK Hall-Messungen [233] durchgeführt. Hierzu wurde ein „Hall-Bar“ (siehe Abbildung A.4) prozessiert. Durch 4-Punkt-Messungen [234] wurde die Hall-Konstante  $R_H \equiv R_{xy}$  aus der gemessenen Hall-Spannung  $V_{xy} = R_H IB/d$  bestimmt. Hierbei ist  $d$  die Dicke der Zuleitungsschicht. Aus der Hall-Konstante ergibt sich unmittelbar die Ladungsträgerkonzentration

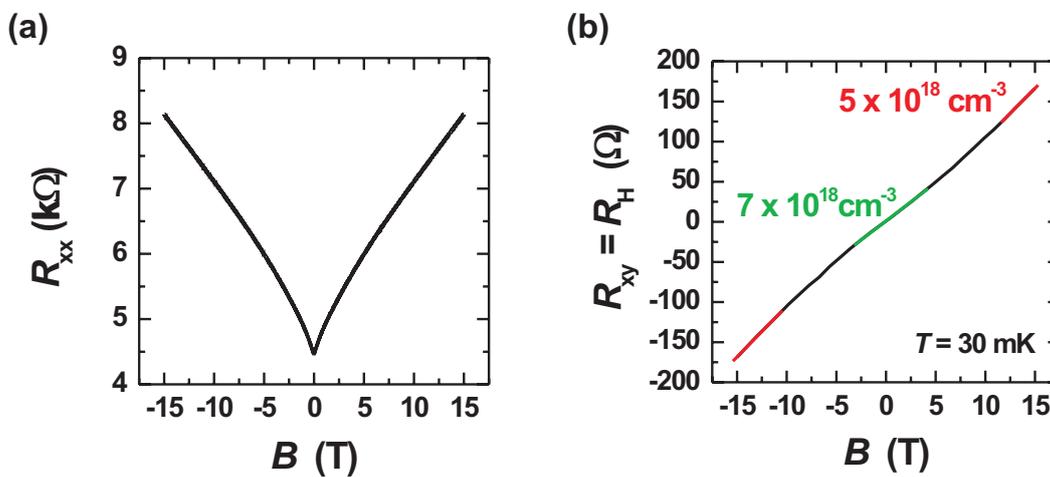
$$R_H = \frac{1}{ep}. \quad (\text{A.43})$$

Die Dicke der Zuleitungsschicht beträgt zirka 100 nm. Hieraus ergibt sich eine Ladungsträgerkonzentration bei kleinen Magnetfeldern  $p_{B < 3 \text{ T}} = 7 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . Bei Magnetfeldern oberhalb von 15 Tesla reduziert sich die Ladungsträgerkonzentration auf zirka  $p = 5 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .

Die nominelle Dotierung von  $p_{\text{nom.}} = 8 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  unterscheidet sich somit nur geringfügig von den bei 30 mK gemessenen Werten. Auf Grund der Höhe der Ladungsträgerkonzentration ist davon auszugehen, dass selbst bei 30 mK genügend Ladungsträger in den Zuleitungen für den Transport zur Verfügung stehen.



**Abbildung A.4.:** (a) Schema des Messaufbaus. (b) Rasterelektronenmikroskopische Aufnahme des Hall-Bars. Zur Verdeutlichung wurde der Hall-Bar durch gestrichelte Linien nachgezeichnet.



**Abbildung A.5.:** (a) Verlauf des Längswiderstandes als Funktion des Magnetfeldes. (b) Verlauf des Hall-Widerstandes als Funktion des Magnetfeldes

## A.4. Daten der untersuchten Proben

Bei den Experimenten zu dieser Arbeit wurden fünf verschiedene Heterostrukturen verwendet. Alle Parameter sind in der Tabelle A.1 aufgelistet.

Während des Wachstums wird auf die Möglichkeit, den Substratteller im Rezipi-

<b>Probe</b>	<b>Wafer (# ML)</b>	<b>Dioden- Querschnitt (<math>\mu\text{m}</math>)</b>
QW-M-V3	S1224 (4.5)	42, 120
QW-M-X3	S1224 (4.5)	35, 51, 72
QW-M-W5	S1224 (4.5)	1.4, 2.2, 5
QW-M-W6	S1224 (4.5)	1.4, 2.2, 5
QD-M-W4	S1323 (5.5)	35, 51, 72
QD-R-B1	S1456 (6.0)	35, 51, 72
QD-M-B2	S1456 (6.0)	35, 51, 72
QD-F-B3	S1456 (6.0)	35, 51, 72
QD-R-A1	S1457 (6.5)	35, 51, 72
QD-M-A2	S1457 (6.5)	35, 51, 72
QD-F-A3	S1457 (6.5)	35, 51, 72
QD-R-C1	S1457 (6.5)	0.5, 1, 2
QD-M-C2	S1457 (6.5)	0.5, 1, 2
QD-F-C3	S1457 (6.5)	0.5, 1, 2

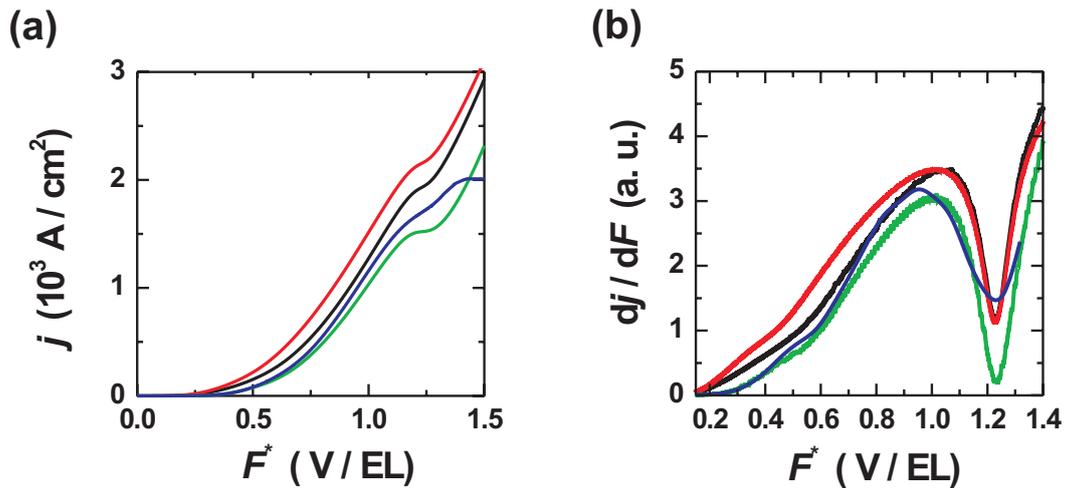
**Tabelle A.1.:** Übersicht der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Proben

enten rotieren zu lassen, verzichtet. Hierdurch wird ein Schichtdickengradient über den gesamten Wafer erzeugt. Der Schichtdickengradient resultiert aus der geometrischen Anordnung des Wafers zu den Effusionszellen. Mit dieser Methode lassen sich unterschiedlich dicke aktive Schichten auf einem Wafer herstellen. Die nominalen Schichtdicken beziehen sich stets auf die Mitte (M) des Wafers. Von der Mitte zu den beiden entgegengesetzten Rändern ist der Unterschied in der Schichtdicke zirka zwei Monolagen. Zur Prozessierung werden Teilstückchen aus allen Bereichen, der Mitte und den beiden Extremgebieten - minimale Bedeckung (R) und maximale Bedeckung (F) - entnommen.

## A.5. Bond-Parameter

REVERSE	WIRE CLAMP GAP ( $\mu\text{m}$ )
2-3	100
WIRE CLAMP FORCE(gm)	TEAR
80-100	5
TAIL	STATIC BOND FORCE (gm)
5	15
1st/2nd POWER	1st/2nd TIME
1-2	4
1st/2nd FORCE	1st/2nd FORCE (gm)
1-2	25-30
LOOP	Y SPEED
4	2
WORKHOLDER TEMPERATURE ( $^{\circ}\text{C}$ )	
150	
KINK HEIGHT	STEP BACK
2	1.5 - 2.5

**Tabelle A.2.:** Bond-Parameter



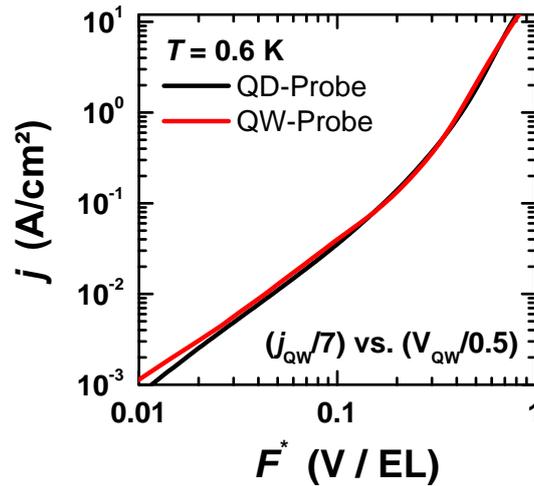
**Abbildung A.6.:** Normierung der Kennlinien: (a) Stromdichte vs. normierte Feldstärke. (b) Verlauf der ersten Ableitung

## A.6. Normierung der Kennlinien

Die Abbildung A.6 zeigt vier Kennlinien von unterschiedlichen Dioden des Wafers S1324. Der Wafer S1324 enthält einen maximal 4.5 Monolagen dicken Germaniumfilm und liegt damit unterhalb des kritischen Punktes, ab dem plastische Relaxationsprozesse einsetzen. Die Germaniumschicht ist somit pseudomorph verspannt. Für die Darstellung A.6 wurde der gemessene Strom durch die Querschnittsfläche der Diode dividiert. Die Stromdichten wurden dann als Funktion einer normierten Feldstärke aufgetragen. Als Referenz gilt die schwarze Kennlinie einer Diode mit einem Durchmesser von  $35 \mu\text{m}$ . Ihre Spannungswerte wurden durch die Einheitslänge dividiert. Bei den verbleibenden Kennlinien wurden die Spannungswerte durch Beträge dividiert, so dass sich eine möglichst gute Übereinstimmung der Kennlinien miteinander ergab. Hieraus ergaben sich folgende Zusammenhänge:

Kennlinie	Durchmesser der Querschnittsfläche ( $\mu\text{m}$ )	Spannungsquotient
schwarz	35	1
rot	45	0.972
blau	1.2	0.632
grün	1.4	0.578

Die grüne Kennlinie entspricht der Diode, die in Kapitel 7 diskutiert wurde. Der Strom fließt über Transportkanäle, die gut an die Zuleitungen ankoppeln, also Kanäle mit einem geringen Widerstand. In der Querschnittsfläche einer Diode gibt es Domänen auf Grund von Schichtdickenmodulationen, lokale Störstellenkonzentrationen, etc., die besser an die Zuleitungen ankoppeln. Je größer eine Querschnittsfläche ist, desto größer ist die Anzahl und Auswahl dieser transportbegünstigenden



**Abbildung A.7.:** Vergleich der Kennlinien einer Quantentopf- und Quantenpunkt-Probe.

Bereiche. In großen Dioden reicht daher eine geringere Feldstärke aus, um die gleiche Stromdichte zu tragen wie in einer Diode mit kleinerer Querschnittsfläche. In Abbildung A.7 sind vergleichend die Kennlinie einer Quantenpunkt-Probe (schwarz) und einer Quantentopf-Probe (rot) gezeigt. Der Durchmesser der Quantenpunkt-Probe liegt bei  $72 \mu\text{m}$  und  $35 \mu\text{m}$  bei der Quantentopf-Probe. Es zeigt sich, dass die Stromdichte in einer Quantenpunkt-Probe zirka 14% der Stromdichte einer Quantentopf-Probe bei der doppelten Spannung beziehungsweise der halben Feldstärke besitzt.

$$j_{\text{QD}} \approx 0.14 j_{\text{QW}} \quad \text{bei} \quad V_{\text{QW}} = V/0.5 \quad (\text{A.44})$$

## A.7. Konstanten

### A.7.1. Fundamentalkonstanten

Größe	Symbol	Zahlenwert	SI-Einheit
Vakuumllichtgeschwindigkeit	$c$	2.99792458	$10^8$ m/s
magnetische Feldkonstante	$\mu_0$	$4\pi$	$10^{-7}$ Vs/Am
elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0$	8.854188	$10^{-12}$ F/m
Plancksches Wirkungsquantum	$h$	6.6260755	$10^{-34}$ J s
		<b>4.1356692</b>	<b><math>10^{-15}</math> eV s</b>
	$\hbar = h/2\pi$	1.05457266	$10^{-34}$ J s
		<b>6.5821220</b>	<b><math>10^{-16}</math> eV s</b>
Elementarladung	$e$	1.60217733	$10^{-19}$ As
Ruhemasse des Elektrons	$m_0$ od. $m_e$	9.1093897	$10^{-31}$ kg
Bohr-Magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_0$	9.2740154	$10^{-24}$ J/T
		<b>5.7883826</b>	<b><math>10^{-5}</math> eV/T</b>
Boltzmann-Konstante	$k$	1.380658	$10^{-23}$ J K <sup>-1</sup>
		<b>8.617385(73)</b>	<b><math>10^{-5}</math> eV K<sup>-1</sup></b>

### A.7.2. Materialparameter von Silizium und Germanium

	$A$	$B$	$ C $	$m_{hh}^*/m_0$	$m_{lh}^*/m_0$	$m_{so}^*/m_0$		
Si	-4.26 (-4.38)	-0.63 (-1.00)	4.93 (4.80)	0.53	0.15	0.23		
Ge	-13.27 (-12.35)	-8.63 (-8.26)	12.4 (12.07)	0.28	0.04	0.09		
			$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\kappa$	$q$	
			Si 4.285	0.339	1.446	-0.42	0.01	
			Ge 13.38	4.24	5.69	3.41	0.06	
			$g_z^{hh}$	$g_z^{lh}$	$g_z^{so}$	$g_{  }^{hh}$	$g_{  }^{lh}$	$g_{  }^{so}$
Si	2.525	0.84	0.32	0	1.68	0.32		
Ge	-20.46	-6.82	-15.64	0	-13.64	-15.64		
							Si	Ge
Gitterkonstante (nm)							0.5431	0.5657
elastische Module $C_{11}, C_{12}$ (Mbar)							1.66,0.64	1.29,0.48
Poisson-Verhältnis in [001]-Richtung $\nu = C_{12}/(C_{11} + C_{12})$							0.278	0.273
dielektrische Konstante ( $\epsilon_r$ )							11.9	16.2
indirekte Bandlücke (eV)							1.11 ( $\Delta$ )	0.664 (L)
direkte Bandlücke (eV)							3.40	0.80
Spin-Bahn Aufspaltung (eV)							0.044	0.296
effektiver Landé $g$ -Faktor							s. Tab. 4.2	s. Tab. 4.2
Loch-Mobilität (cm <sup>2</sup> V <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> )							450	1900



# Literaturverzeichnis

- [1] Gordon Moore, *Cramming more components onto integrated circuits*, *Electronics* **38**, 5457 (1965). 1
- [2] Trans, Devoret, Thess, Smalley, Geerligs und Dekker, *Nature* **386**, 474 (1997). 2
- [3] I. N. Stranski und L. Krastanov, *Zur Theorie der orientierten Ausscheidung von Ionenkristallen aufeinander*, *Akad. Wiss. Lit. Mainz Math.-Natur. Kl.* **146**, 797 (1939). 3, 71, 127
- [4] J. Jagannathan, *A 4.2 ps ECL ring oscillator in a 285 GHz  $f_{\max}$  SiGe technology*, *IEEE Electron. Device Lett.* **23**, 541 (2002). 3
- [5] K. Washio, *A 0.2  $\mu\text{m}$  180 GHz  $f_{\max}$  6.7 ps ECL SOI/HRS self-aligned SEG SiGe HBT/CMOS technology for microwave and high-speed digital applications*, *IEEE Trans. Electron. Devices* **49**, 271 (2002). 3
- [6] J. Preskill, *Physics Today* **52**, 24 (1999). 3
- [7] L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven und G. Schön, *Mesoscopic Electron Transport* (Kluwer, Boston, 1997). 3
- [8] S. Datta und B. Das, *Appl. Phys. Lett.* **56**, 665 (1990). 3
- [9] F. Capasso, *Quantum electron devices* (Springer Verlag, Berlin, 1989). 3
- [10] H. Grabert und M. H. Devoret, *Single Charge Tunneling* (Plenum Press, New York, 1992). 3
- [11] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1981). 5
- [12] S. Petersen, A. E. Hansen, A. Kristensen, C. B. Sensen und P. E. Lindelof, *Observation of quantum asymmetry in an Aharonov-Bohm ring*, *Phys. Rev. B* **61**, 5457 (2000). 5, 31
- [13] R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach und R. B. Laibowitz, *Observation of  $h/e$  Aharonov-Bohm Oscillation in Normal-Metal Rings*, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2696 (1985). 5, 29

- [14] G. Bastard, J. A. Brum und R. Ferreira, *Superlattice band structure in the envelope function approximation*, Sol. State Phys. **44**, 229 (1991). 7
- [15] G. Bastard, *Superlattice band structure in the envelope function approximation*, Phys. Rev. B **24**, 5693 (1981). 7
- [16] G. Bastard, *Theoretical investigations of superlattice band structure in the envelope function approximation*, Phys. Rev. B **25**, 7584 (1982). 7
- [17] G. Baym, *Lectures on quantum mechanics* (Benjamin Cummings, 1969). 9, 32
- [18] E. Mandelung, *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers* (Springer, Berlin, 1957). 9, 10
- [19] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Quantenmechanik* (Verlag Harri Deutsch, 1990), Band Bd. 3. 10
- [20] S. Luryi, *Device Building Blocks in High Speed Semiconductor Devices ed. by S. M. Sze* (Wiley, NY, 1990). 10, 15
- [21] S. Datta, *Quantum Phenomena, Vol. VIII aus Modular Series on Solid State Devices* (Addison-Wesley, 1995, 1995). 10
- [22] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, 1995). 10, 35
- [23] E. O. Kane, *Band structure of indium antimonide*, J. Phys. Chem. Solids **1**, 249 (1957). 11
- [24] J. M. Luttinger, *Quantum Theory of Cyclotron Resonance in Semiconductors: General Theory*, Phys. Rev. **102**, 1030 (1956). 11
- [25] Peter Y. Yu und Manuel Cardona, *Fundamentals of Semiconductors* (Springer, 2001). 11, 13, 73, 74
- [26] C. Weisbuch und B. Vinter, *Quantum Semiconductor Structures - Fundamentals and Applications* (Academic Press, 1991). 13, 14
- [27] D. K. Ferry und S. M. Goodnick, *Transport in Nanostructures* (Cambridge University Press, 1997). 19, 20, 23
- [28] M. J. Kelly, *Low-Dimensional Semiconductors - Materials, Physics, Technology, Devices* (Oxford Press, 1995). 19, 23
- [29] Y. Imry, *Introduction to mesoscopic physics* (New York, NY [u.a.] : Oxford Univ. Press, 1997). 19, 25
- [30] V. Fock, Z. Phys. **47**, 446 (1928). 20, 22, 166
- [31] C. G. Darwin, Proc. Cambridge Philos. Soc. **27**, 86 (1930). 20

- [32] U. Rössler, in *Quantum Coherence in Mesoscopic Systems* (Plenum Press NY, 1991), Seiten 45–62. 20, 84
- [33] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu und F. Laloë, *Quantenmechanik* (de Gruyter, 1997). 20
- [34] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics* (Mass.[u.a.]: Addison-Wesley, 1995). 23
- [35] Roland Winkler, *Spin–Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems* (Springer, 2003). 24, 137, 139
- [36] J. M. Luttinger und W. Kohn, *Motion of Electrons and Holes in Perturbed Periodic Fields*, *Phys. Rev.* **97**, 869 (1954). 24
- [37] J. M. Luttinger, *Quantum Theory of Cyclotron Resonance in Semiconductors: General Theory*, *Phys. Rev.* **102**, 1030 (1955). 24, 182
- [38] J. C. Hensel und K. Suzuki, *Anisotropy of the g factor of free hole in Ge and conduction-band spin-orbit splitting*, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 838 (1969). 24
- [39] Karlheinz Seeger, *Semiconductor physics: an introduction* (Berlin [u.a.] : Springer, 2002). 25, 73
- [40] T. Dittrich, P. Hänggi, G. L. Ingold, B. Kramer, G. Schön und W. Zwerger, *Quantum Transport and Dissipation* (Wiley-VCH, 1998). 25, 53, 54
- [41] J. Shah, *Hot carriers in Semiconductor Nanostructures - Physics and Applications* (Academic Press, 1992). 25, 115
- [42] J. R. Barker, *The oscillatory structure of magnetophonon effect: I. Transverse configuration*, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **5**, 1657 (1972). 25
- [43] G. Bastard, *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures* (Wiley, 1990). 25
- [44] T. Ando und Y. Arakawa, *Mesoscopic Physics and Electronics* (Springer, Heidelberg, 1998). 26, 56
- [45] Semiklassische Transporttheorie auf der Basis der Boltzmann-Transport-Gleichung, *siehe z. B. Ashcroft und Mermin [100]*, . 29
- [46] J. T. Edwards und D. J. Thouless, *J. Phys. C* **5**, 807 (1972). 29
- [47] D. C. Licciardello und D. J. Thouless, *J. Phys. C* **8**, 4157 (1975). 29
- [48] D. J. Thouless, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1167 (1977). 29
- [49] Y. Aharonov und D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959). 29, 31

- [50] R. Landauer, IBM J. Res. Develop. **1**, 223 (1957). 29, 31
- [51] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel und C. T. Foxon, *Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas*, Phys. Rev. Lett. **60**, 848 (1988). 29, 31
- [52] A. Yacoby, M. Heiblum, D. Mahalu und H. Shtrikman, *A percolation treatment of high-field hopping transport*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4047 (1995). 31
- [53] M. Büttiker, Phys. Rev. B **33**, 3020 (1986). 31
- [54] C. B. Duke, *Tunneling in Solids* (Academic Press, 1969). 32, 43
- [55] E. O. Kane, *Tunneling Phenomena in Solids* (Plenum, New York, 1969). 32
- [56] L. L. Chang, L. Esaki und R. Tsu, *Resonant Tunneling in Semiconductor Double Barriers*, Appl. Phys. Lett. **24**, 593 (1974). 32
- [57] R. Tsu und L. Esaki, *Resonant tunneling in semiconductor double barriers*, Appl. Phys. Lett. **22**, 562 (1974). 32
- [58] B. Ricco und M. Y. Azbel, *Physics of resonant tunneling. The one-dimensional double-barrier case*, Phys. Rev. B **29**, 1970 (1994). 33
- [59] Serge Luryi, *Frequency limit of double-barrier resonant-tunneling oscillators*, Appl. Phys. Lett. **47**, 490 (1985). 33, 41
- [60] H. C. Liu und T. C. L. G. Sollner, *High-Frequency Resonant-Tunneling Devices*, Semiconductors and Semimetals **41**, 359 (1994). 35, 38, 42
- [61] H. Mizuta und T. Tanoue, *The Physics and Applications of Resonant Tunneling Diodes* (Cambridge University Press, 1992), Band 2. 35, 42, 176
- [62] Serge Luryi, *Coherent versus incoherent resonant tunneling and implication for fast devices*, Superlattices and Microstructures **5**, 375 (1989). 41
- [63] T. Weil und B. Vinter, *Equivalence between resonant tunneling and sequential tunneling in double-barrier diodes*, Appl. Phys. Lett. **50**, 1281 (1987). 41
- [64] M. Jonson und A. Grincwajg, *Effect of scattering on resonant and sequential tunneling in double barrier heterostructures*, Appl. Phys. Lett. **51**, 1729 (1987). 41, 105, 111
- [65] A. D. Stone und P. A. Lee, *Effect of Inelastic Processes on Resonant Tunneling in One Dimension*, Phys. Rev. Lett. **54**, 1196 (1985). 41, 105
- [66] V. J. Goldman, D. C. Tsui und J. E. Cunningham, *Observation of Intrinsic Bistability in Resonant Tunneling Structures*, Phys. Rev. Lett. **58**, 1256 (1987). 42, 154

- [67] M. Rahman und J. Davies, *Theory of intrinsic bistability in a resonant tunneling diode*, Semicond. Sci. Technol. **5**, 166 (1990). 42
- [68] F. W. Sheard und G. A. Toombs, *Space-charge buildup and bistability in resonant-tunneling double-barrier structures*, Appl. Phys. Lett. **52**, 1228 (1987). 42, 154
- [69] M. Cahay, M. McLennan und S. Datta, *Importance of space charge effects in resonant tunneling devices*, Appl. Phys. Lett. **50**, 612 (1987). 42, 154
- [70] P. A. Schulz und C. Tejedor, *Resonant tunneling through Landau levels in quantum wells in the presence of inelastic-scattering broadening*, Phys. Rev. Lett. **41**, 3053 (1989). 42
- [71] V. J. Goldman, D. C. Tsui und J. E. Cunningham, *Resonant tunneling in magnetic fields: Evidence for space charge buildup*, Phys. Rev. B **35**, 9387 (1987). 43, 154
- [72] C. E. T. G da Silva und E. E. Mendez, *Resonant tunneling via Landau levels in GaAs AlGaAs heterostructures*, Phys. Rev. B **38**, 3994 (1988). 43
- [73] A. Zaslavsky, D. C. Tsui und M. Santos, *Magnetotunneling in double-barrier heterostructures*, Phys. Rev. B **40**, 9829 (1989). 43
- [74] L. P. Kouwenhoven, D. G. Austing und S. Tarucha, *Few-electron quantum dots*, Rep. Prog. Phys. **64**, 701 (2001). 44
- [75] U. Meirav und E. B. Foxman, *Single-electron phenomena in semiconductors*, Semicond. Sci. Technol. **10**, 255 (1995). 47
- [76] H. W. Schumacher, U. F. Keyser, U. Zeitler, R. J. Haug und K. Eberl, *Nano-machining of mesoscopic electronic devices using an atomic force microscope*, Appl. Phys. Lett. **78**, 1107 (1999). 47
- [77] U. F. Keyser, H. W. Schumacher, U. Zeitler, R. J. Haug und K. Eberl, *Fabrication of single-electron transistor by current-controlled local oxidation of a two-dimensional electron system*, Appl. Phys. Lett. **76**, 457 (2000). 47
- [78] M. C. Rogge, C. Fühner, U. F. Keyser, R. J. Haug, M. Bichler, G. Abstreiter und W. Wegscheider, *Combined atomic force microscope and electron-beam lithography used for the fabrication of variable-coupling quantum dots*, Appl. Phys. Lett. **83**, 1163 (2003). 47
- [79] C. T. Black, C. B. Murray, R. L. Sandstrom und S. Sun, *Spin-Dependent Tunneling in Self-Assembled Cobalt-Nanocrystal Superlattices*, Science **290**, 1131 (2000). 47
- [80] Adrian Bachtold, *Electrical properties of single multiwalled carbon nanotubes*, Dissertation, Universität Basel, 1999. 47

- [81] D. C. Austing, T. Honda und S. Tarucha, *Semicond. Sci. Technol.* **11**, 388 (1996). 48
- [82] S. Tarucha, D. G. Austing, T. Honda, R. J. van der Haage und L. P. Kouwenhoven, *Shell Filling and Spin Effects in a Few Electron Quantum Dot*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3613 (1996). 48
- [83] John Lambe und R. C. Jaklevic, *Charge-Quantization studies using a Tunnel Capacitor*, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 1371 (1969). 49
- [84] R. I. Shekhter, *Sov. Phys. JETP* **36**, 747 (1973). 49
- [85] I. O. Kulik und R. I. Shekhter, *Sov. Phys. JETP* **41**, 308 (1975). 49
- [86] D. V. Averin und K. K. Likharev, in *SQUID'85: Superconducting Quantum Interference Devices and their Applications* (de Gruyter, Berlin, 1986). 49
- [87] C. W. J. Beenakker, *Theory of Coulomb-blockade oscillation in the conductance of a quantum dot*, *Phys. Rev. B* **44**, 1646 (1991). 49
- [88] P. L. McEuen, E. B. Foxman, U. Meirav, M. A. Kastner, Y. Meir und N. S. Wingreen, *Transport Spectroscopy of a Coulomb Island in the Quantum Hall Regime*, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1926 (1991). 49
- [89] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik* (Berlin [u.a.] : de Gruyter, 2002). 52
- [90] H. Mitter, *Elektrodynamik* (BI, Mannheim, 1990). 52
- [91] H. Schoeller, *Transport theory of interacting quantum dots*, Habilitation, 1997. 53
- [92] W. Apel (unpublished). 53, 54
- [93] C. W. J. Beenakker und H. van Houten, *Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures* (Solid State Physics, Vol. 44, New York, 1991). 55, 99
- [94] N. F. Mott, *Metal-insulator transitions* (London [u.a.] : Taylor & Francis, 1990). 57
- [95] M. Pollak und B. I. Shklovskii, *Hopping transport in solids* (North-Holland, Modern problems in condensed matter sciences ; 28, 1991). 57, 149
- [96] B. I. Shklovskii und A. L. Efros, *Electronic properties of doped semiconductors* (Springer series in solid-state sciences; 45, Berlin, 1984). 57, 58, 59, 60, 61, 147, 149, 151
- [97] H. Böttger und V. V. Bryksin, *Hopping Conduction in Solids* (VCH, Berlin, 1985). 58, 59, 149, 151

- [98] M. Pollak und I. Reiss, *A percolation treatment of high-field hopping transport*, J. Phys. C: Solid State Phys. **9**, 2339 (1976). 60, 149, 151
- [99] B. Cleve, B. Hartenstein und S. D. Baranovskii, *High-field hopping transport in band tails of disordered semiconductors*, Phys. Rev. B **51**, 16705 (1995). 60
- [100] N. W. Ashcroft und N. D. Mermin, *Solid State Physics* (New York: Harcourt College Publication, 2000). 62, 193
- [101] Harald Ibach und Hans Lüth, *Festkörperphysik: Einführung in die Grundlagen* (Berlin [u.a.] : Springer, 2002). 62
- [102] J. M. Ziman, *Principles of the Theory of Solids* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1972). 62
- [103] S. M. Sze, *Physics of semiconductor devices* (Wiley, New York, 1981). 64, 69, 79, 155
- [104] A. Rose, *Space-Charge-Limited currents in Solids*, Phys. Rev. **97**, 1538 (1955). 64, 155
- [105] M. A. Lampert, *Simplified Theory of space-charge-limited currents in an insulator with traps*, Phys. Rev. **103**, 1648 (1956). 64, 65, 155
- [106] M. A. Lampert und P. Mark, *Current injection in solids* (Academic Press, NY [u.a.], 1970). 64, 65, 66, 67
- [107] Ulrich Denker, Diplomarbeit, Universität Hannover, 1999. 70, 87, 95
- [108] F. C. Frank und J. H. van der Merwe, Proc. Roy. Soc. London A **198**, 205 (1949). 69
- [109] M. Vollmer und A. Weber, Zeitschrift für Physikalische Chemie **119**, 277 (1926). 69
- [110] F. Schäffler, *High-mobility Si and Ge structures*, Semicond. Sci. Technol. **12**, 1515 (1997). 72, 73, 76, 79, 80, 81, 127
- [111] Oliver G. Schmidt, *Fundamental Studies of Self-Assembled Nanostructures Based on the SiGeC and SiGe Material System*, Dissertation, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung Stuttgart, 1999. 72
- [112] B. Voigtländer, *Fundamental processes in Si/Si and Ge/Si epitaxy studied by scanning tunneling microscopy during growth*, Surf. Sci. Rep. **43**, 127 (2001). 72, 82, 83, 84, 167, 168
- [113] K. Brunner, *Si/Ge nanostructures*, Rep. Prog. Phys. **65**, 27 (2002). 72, 76, 78

- [114] Ulrich Denker, *Selbstorganisierte Germanium/Silizium Inseln: Wachstums-experimente und Modelle zur Interdiffusion*, Dissertation, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung Stuttgart, 2003. 72, 82, 84, 153, 168
- [115] R. F. Pierret, B. S. Bernake und K. Harutanian, *Semiconductor Device Fundamentals* (Addison-Wesley, 1996). 72
- [116] A. V. Nenashev, A. V. Dvurechenskii und A. F. Zinovieva, *Wave function and g factor of holes in Ge/Si quantum dots*, Phys. Rev. B **67**, 205301 (2003). 74
- [117] A. A. Kiselev, E. L. Ivchenko und U. Rössler, *Electron g factor in one- and zero-dimensional semiconductor nanostructures*, Phys. Rev. B **58**, 16353 (1998). 74
- [118] A. A. Kiselev, K. W. Kim und E. Yablonovitch, *In-plane light-hole g factor in strained cubic heterostructures*, Phys. Rev. B **64**, 125303 (2001). 74
- [119] J. P. Dismukes, L. Ekstrom und R. J. Paff, *Lattice Parameter + Density in Germanium-Silicon Alloys*, J. Phys. Chem. **68**, 3021 (1964). 76
- [120] J. M. Matthews und A. E. Blakeslee, *Defects in epitaxial multilayers I Misfit dislocations in layers*, J. Crystal Growth **27**, 118 (1974). 76, 77
- [121] J. M. Matthews und A. E. Blakeslee, *Defects in epitaxial multilayers III Preparation of almost perfect multilayers*, J. Crystal Growth **32**, 265 (1975). 76, 77
- [122] R. People und J. C. Bean, *Calculation of critical layer thickness versus lattice mismatch for GeSi/Si strained layer heterostructures*, Appl. Phys. Lett. **47**, 322 (1985). 77, 78
- [123] G. L. Bir und G. E. Pikus, *Symmetry and Strain-Induced Effects in Semiconductors* (Wiley, New York, 1974). 78, 85
- [124] J. C. People, *Silicon-based semiconductor heterostructures: column IV band-gap engineering*, Proc. IEEE **80**, 571 (1992). 78
- [125] R. People, *Physics and applications of Ge<sub>x</sub>Si<sub>1-x</sub>/Si strained-layer heterostructures*, IEEE J. Quantum Electron. **22**, 1696 (1986). 78, 127
- [126] C. G. van der Walle, *Band lineups and deformation potentials in the model-solid theory*, Phys. Rev. B **39**, 1871 (1989). 78
- [127] M. M. Rieger und P. Vogl, *Electronic-band parameters in strained Si<sub>1-x</sub>Ge<sub>x</sub> alloys on Si<sub>1-y</sub>Ge<sub>y</sub> substrates*, Phys. Rev. B **48**, 14276 (1993). 78, 81
- [128] A. M. Stoneham und S. C. Jain, *GeSi Strained Layers and their Applications* (Institut of Physics Publishing, Bristol, 1995). 78

- [129] G. Abstreiter, *Band Gaps and Light Emission in Si/SiGe Atomic Layer Structures*, Semiconductors and Semimetals **49**, 37 (1998). 79
- [130] D. J. Robbins, J. L. Gasper, A. G. Cullis und W. Y. Leong, *A model for heterogeneous growth of SiGe films from hydrides*, J. Appl. Phys. **69**, 3729 (1991). 79
- [131] M. L. W. Thewalt, D. A. Harrison, C. F. Reinhart, J. A. Wolk und H. Lafontaine, *Type II Band Alignment in  $Si_{1-x}Ge_x/Si(001)$  Quantum Wells: The Ubiquitous Type I Luminescence Results from Band Bending*, Phys. Rev. Lett. **79**, 269 (1997). 79
- [132] R. F. Pierret, *Advanced Semiconductor Fundamentals* (Addison-Wesley, 2002). 79
- [133] J. Poortmans, *Theoretical calculation and experimental evidence of the real and apparent bandgap narrowing due to heavy doping in p-type silicon and strained  $Si_{1-x}Ge_x$  layers*, Solid State Electronics **36**, 1763 (1993). 81
- [134] P. Ashburn, *SiGe Heterojunction Bipolar Transistor* (Wiley, 2003). 81
- [135] T. Manku und A. Nathan, *Effective mass for strained p-type  $Si_{1-x}Ge_x$* , J. Appl. Phys. **69**, 8414 (1991). 81
- [136] T. Manku und A. Nathan, *Energy band structure for strained p-type  $Si_{1-x}Ge_x$* , Phys. Rev. B **43**, 12634 (1991). 81
- [137] J. Poortmans, *Low temperature epitaxial growth of silicon and strained  $Si_{1-x}Ge_x$  layers and their application in bipolar transistors*, Dissertation, University of Leuven, 1993. 81
- [138] R. Winkler, M. Merkler, T. Darnhofer und U. Rössler, *Theory for the cyclotron resonance of holes in strained asymmetric Ge-SiGe quantum wells*, Phys. Rev. B **53**, 10858 (1996). 81
- [139] G. L. Bir, E. I. Butikov und G. E. Pikus, *Spin and combined resonance on acceptor centres in Ge and Si type crystals—I : Paramagnetic resonance in strained and unstrained crystals*, J. Phys. Chem. Solids **24**, 1467 (1963). 82
- [140] G. L. Bir, E. I. Butikov und G. E. Pikus, *Spin and combined resonance on acceptor centres in Ge and Si type crystals—II : The effect of the electrical field and relaxation time*, J. Phys. Chem. Solids **24**, 1467 (1975). 82
- [141] D. J. Eaglesham und M. Cerullo, *Dislocation-Free Stranski-Krastanov Growth of Ge on Si(100)*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1943 (1990). 82, 83
- [142] J. Drucker, *Coherent Islands and Microstructural Evolution*, Phys. Rev. B **48**, 18203 (1993). 82

- [143] G. Medeiros-Ribeiro, A. M. Bratkovski, T. I. Kamins, D. A. A. Ohlberg und R. S. Williams, *Shape transition of germanium nanocrystals on a silicon (001) surface from pyramids to domes*, Science **279**, 353 (1998). 82
- [144] M. Kästner und B. Voigtländer, *Kinetically self-limiting growth of Ge islands on Si(001)*, Phys. Rev. Lett. **82**, 2745 (1999). 82, 167
- [145] Y. W. Mo, D. E. Savage, B. S. Swartzentruber und M. G. Lagally, *Kinetic Pathway in Stranski-Krastanov Growth of Ge on Si(001)*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1020 (1990). 82
- [146] G. Costantini, C. Manzano und K. Kern (unpublished). 83
- [147] D. E. Jesson, M. Kästner und B. Voigtländer, *Direct observation of subcritical fluctuations during the formation of strained semiconductor islands*, Phys. Rev. Lett. **84**, 330 (2000). 82, 83, 167
- [148] A. V. Nenashev, A. V. Dvurechenskii und A. F. Zinovieva, *Wave functions and g factor of holes in Ge/Si Quantum Dots*, Phys. Rev. B **67**, 205301 (2003). 85, 86
- [149] A. V. Dvurechenskii und A. I. Yakimov, *Type-II Ge/Si Quantum Dots*, Semiconductors **35**, 1095 (2001). 84
- [150] J. H. Seok und J. Y. Kim, *Electronic structure and compositional interdiffusion in self-assembled Ge quantum dots on Si(001)*, Appl. Phys. Lett. **78**, 3124 (2001). 84
- [151] A. I. Yakimov, A. V. Dvurechenskii, N. P. Stepina, A. I. Nikiforov und A. V. Nenashev, *Contribution of Electron-Electron Interaction to the Optical Properties of Dense Arrays of Ge/Si Quantum Dots*, JETP **92**, 500 (2001). 84
- [152] O. Stier, M. Grundmann und D. Bimberg, *Electronic and optical properties of strained quantum dots modeled by 8-band k·p theory*, Phys. Rev. B **59**, 5688 (1999). 84
- [153] Geraint Owen, *Electron lithography for the fabrication of microelectronic devices*, Reports on Progress in Physics **48**, 795 (1985). 90
- [154] John L. Vossen, *Thin Film Processes II* (Academic Press, Boston, 1991). 93
- [155] Stephanus Büttgenbach, *Mikromechanik: Einführung in Technologie and Anwendung* (Teubner, Stuttgart, 1994). 93
- [156] L. Wolf, *Principles of Tunneling Spectroscopy* (Oxford University Press, New York, 1985). 99
- [157] S. Datta, *Electric Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, 1995), Band 3. 99

- [158] F. Pobell, *Matter and Methods at Low Temperatures* (Springer, Berlin, 1996). 101
- [159] Chr. Enss und S. Hunklinger, *Tieftemperaturphysik* (Springer, Berlin, 2000). 101
- [160] Die Rechnungen wurden von R. Winkler durchgeführt (unpublished). 103
- [161] L. V. Iogansen, *Errors in papers on resonant electron tunneling in finite superlattices*, Sov. Tech. Phys. Lett. **13**, 478 (1987). 107
- [162] B. Su, V. J. Goldman und J. E. Cunningham, *Single electron tunneling in nanometer scale double barrier heterostructure devices*, Phys. Rev. B **46**, 7644 (1992). 107
- [163] C. L. F. Ma, M. J. Deen und Hardy, *Excess currents due to trap-assisted tunneling in double barrier resonant tunneling diodes*, Can. J. Phys. **70**, 1005 (1992). 111
- [164] M. H. Weichold, S. S. Villareal und R. A. Lux, *Analysis of defect assisted tunneling based on low frequency noise measurements of resonant tunneling diode*, Solid State Electron. **32**, 1551 (1989). 111
- [165] M. H. Weichold und S. S. Villareal, Appl. Phys. Lett. **55**, 757 (1989). 111
- [166] D. Lippens, *Resonant tunneling double barrier heterostructures*, Microelectron. J. **24**, 763 (1993). 111
- [167] B. Jogai und K. L. Wang, *Dependence of tunneling current on structural variations of superlattice devices*, Appl. Phys. Lett. **46**, 167 (1985). 111
- [168] T. C. L. G. Sollner, *High Frequency Resonant Tunneling Devices*, Semiconductors and Semimetals, Vol. 41 **6**, 359 (1994). 111, 115
- [169] E. Wolak, K. L. Lear, P. M. Pitner, E. S. Hellman, G. G. Park, T. Weil, J. S. Harris und D. Thomas, *Elastic scattering centers in resonant tunneling diodes*, Appl. Phys. Lett. **53**, 201 (1988). 111
- [170] F. Chevoir und B. Vinter, *Calculation of photon-assisted tunneling and valley current in a double-barrier diode*, Appl. Phys. Lett. **55**, 1859 (1990). 111
- [171] E. A. Gutierrez, L. Deferm und G. Declerck, *Self-heating effects in silicon resistors operated at cryogenic ambient temperatures*, Solid-State Electronics **36**, 41 (1993). 111, 155
- [172] A. V. Gurevich und R. G. Mints, *Self-heating in normal metals and superconductors*, Rev. Mod. Phys. **59**, 941 (1987). 111, 155
- [173] A. A. Balandin und O. L. Lazarenkova, *Mechanism for thermoelectric figure-of-merit enhancement in regimented quantum dot superlattices*, Appl. Phys. Lett. **82**, 415 (2003). 111

- [174] A. Khitun, K. L. Wang und G. Chen, *Thermoelectric figure of merit enhancement in a quantum dot superlattice*, Nanotechnology **11**, 327 (2000). 111
- [175] G. Chen und A. Shakouri, *Heat Transfer in Nanostructures for Solid-State Energy Conversion*, Journal of Heat Transfer **124**, 242 (2002). 111
- [176] M. S. Dresselhaus, O. Rabin, M. R. Black und G. Dresselhaus, *Quantum wells and Quantum wires for Potential Thermoelectric Applications*, Semicond. Semimetals **71**, 1 (2001). 111
- [177] R. Landauer und Th. Martin, *Barrier interaction time in tunneling*, Rev. Mod. Phys. **66**, 217 (1994). 115
- [178] G. Schuberth, G. Abstreiter und E. Gornik, *Resonant tunneling of holes in Si/Si<sub>x</sub>Ge<sub>1-x</sub> quantum-well structures*, Phys. Rev. B **43**, 2280 (1991). 119, 121
- [179] C. G. van der Walle und R. M. Martin, *Theoretical study of band offsets at semiconductor interfaces*, Phys. Rev. B **35**, 8154 (1987). 127
- [180] A. Zrenner, L. V. Butov, M. Hagn, G. Abstreiter, G. Böhm und Weinmann, *Quantum Dots Formed by Interface Fluctuations in AlAs/GaAs Coupled Quantum Well Structures*, Phys. Rev. Lett. **72**, 3382 (1994). 127
- [181] J. Liu, A. Zaslavsky, C. D. Akyüz, B. R. Perkins und L. B. Freund, *Magneto-tunneling spectroscopic probe of quantization due to inhomogeneous strain in a Si/SiGe vertical quantum dot*, Phys. Rev. B **62**, R7731 (2000). 127
- [182] J. Liu, A. Zaslavsky, C. Aydin, B. R. Perkins und L. B. Freund, *Single-hole tunneling into strain-induced SiGe quantum ring*, Phys. Rev. B **66**, 161304 (2002). 127
- [183] M. W. Dellow, P. H. Beton, C. J. G. M. Langerak, T. J. Foster, P. C. Main, L. Eaves, M. Henini, S. P. Beaumont und C. D. W. Wilkinson, *Resonant Tunneling through the Bound States of a Single Donor Atom in a Quantum Well*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1754 (1992). 127
- [184] D. K. Ferry und S. M. Goodnick, *Transport in Nanostructures* (Cambridge University Press, 1997). 129
- [185] T. Schmidt, *Single-Electron Transport in Semiconductor Nanostructures: Artificial Atoms, Molecules and Local Density of States Fluctuation*, Dissertation, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung Stuttgart, 1997. 129
- [186] M. R. Deshpande, J. W. Sleight, M. A. Reed und R. G. Wheeler, *Spin Splitting of Single 0D Impurity States in Semiconductor Heterostructure Quantum Wells*, Phys. Rev. Lett. **76**, 1328 (1996). 129

- [187] B. Su, V. J. Goldman und J. E. Cunningham, *Single-electron tunneling in nanometer-scale double-barrier heterostructure devices*, Phys. Rev. B **46**, 7644 (1992). 130
- [188] H. W. van Kesteren, E. C. Cosman und W. A. J. A. van der Poel, *Fine structure of excitons in type-II GaAs/AlAs quantum wells*, Phys. Rev. B **41**, 5283 (1990). 137
- [189] G. Goldoni und A. Fasolino, *Hole states in quantum wells under high in-plane magnetic fields: Implications for resonant magnetotunneling spectroscopy*, Phys. Rev. B **48**, 4948 (1993). 137
- [190] P. Peyla, A. Wasiela, Y. Merle d'Aubigne, D. E. Ashenford und B. Lunn, *Anisotropy of the Zeeman effect in CdTe/Cd<sub>1-x</sub>MnxTe multiple quantum wells*, Phys. Rev. B **47**, 3783 (1993). 137
- [191] B. Kuhn-Heinrich, W. Ossau, E. Bangert, A. Waag und G. Landwehr, *Zeeman pattern of semimagnetic (CdMn)Te/(CdMg)Te quantum wells in inplane magnetic fields*, Solid State Commun. **91**, 413 (1994). 137
- [192] H. P. Soepangkat und P. Fisher, *Transverse Zeeman Effect of the Excitation Spectra of Boron and Thallium Impurities in Germanium*, Phys. Rev. B. **08**, 870 (1973). 139
- [193] R. L. Jones und P. Fischer, *Spectroscopic Study of the Deformation-Potential Constants of Group-III Acceptors in Germanium*, Phys. Rev. B **02**, 2016 (1970). 139
- [194] G. Feher, J. C. Hensel und E. A. Gere, *Paramagnetic Resonance Absorption from Acceptors in Silicon*, Phys. Rev. Lett. **05**, 306 (1960). 139
- [195] W. H. Kleiner und L. M. Roth, *Deformation Potential in Germanium from Optical Absorption Lines for Exciton Formation*, Phys. Rev. Lett. **02**, 334 (1959). 139
- [196] J. Broeckx, P. Clauws, K. van den Steen und J. Vennick, *Zeeman effect in the excitation spectra of shallow acceptors in germanium: experimental*, J. Phys. C: Solid State Phys. **12**, 4061 (1979). 139
- [197] Anadi K. Bhattacharjee und Sergio Rodriguez, *Group-Theoretical Study of the Zeeman Effect of Acceptors in Silicon and Germanium*, Phys. Rev. B **6**, 3836 (1972). 139
- [198] L. V. Keldysh, *Coulomb interaction in thin semiconductor and semimetal films*, JETP Lett. **29**, 658 (1979). 141
- [199] G. Bastard, *Hydrogenic impurity states in a quantum well: A simple model*, Phys. Rev. B **24**, 4714 (1981). 141

- [200] R. L. Greene und K. K. Bajaj, *Energy levels of hydrogenic impurity states in GaAs-Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As quantum well structures*, Solid State Commun. **45**, 825 (1983). 142
- [201] R. L. Greene und K. K. Bajaj, *Binding energies of wannier excitons in GaAs-Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As quantum well structures*, Solid State Commun. **45**, 831 (1983). 142
- [202] R. L. Greene und K. K. Bajaj, *Donor transition energies and their line strength in GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As quantum-well structures in the presence of a magnetic field applied parallel to the interfaces*, Phys. Rev. B **37**, 4604 (1988). 142
- [203] C. Mailhiot, Yia-Chung Chang und T. C. McGill, *Energy spectra of donors in GaAs-Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As quantum well structures in the effective-mass approximation*, Phys. Rev. B **26**, 4449 (1982). 142
- [204] W. T. Masselik, Yia-Chung Chang und H. Morkoc, *Binding energies of acceptors in GaAs-Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As quantum wells*, Phys. Rev. B **28**, 7373 (1983). 142
- [205] W. T. Masselik, Yia-Chung Chang und H. Morkoc, *Acceptor spectra of Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As-GaAs quantum wells in external fields: Electric, magnetic, and uniaxial stress*, Phys. Rev. B **28**, 5190 (1985). 142
- [206] L. E. Oliveira und L. M. Falicov, *Energy spectra of donors and acceptors in quantum-well structures: Effect of spatially dependent screening*, Phys. Rev. B **34**, 8676 (1986). 142
- [207] A. G. Zabrodskii und K. N. Gutakovskii, *Soviet Phys.-J. Exper. Theor. Phys.* **59**, 425 (1984). 147
- [208] R. M. Hill, *Philos. Mag.* **24**, 1307 (1971). 149
- [209] Ch. Gang, H. D. Koppen und H. M. Gijsman, *Temperature and electric field dependence of hopping transport in ion-implanted Si:As*, Solid Stat. Commun. **72**, 173 (1989). 149
- [210] C. E. Nebel, R. A. Street, N. M. Johnson und C. C. Tsai, *High-electric-field transport in Si:H. II Dark conductivity*, Solid Stat. Commun. **72**, 173 (1989). 149
- [211] J. Zhang, W. Cui, M. Juda, D. McCammon, R. L. Kelley, S. H. Moseley, C. K. Stahle und Szymkowiak, *Non-Ohmic effects in hopping conduction in doped silicon and germanium between 0.05 and 1 K*, Phys. Rev. B **57**, 4472 (1998). 151
- [212] C. A. Neugebauer und M. B. Webb, *Electrical Conduction Mechanism in Ultrathin, Evaporated Metal Films*, J. Appl. Phys. **33**, 74 (1961). 152

- [213] D. L. Peng, K. Sumiyama, S. Yamamuro, T. Hihara und T. J. Konno, *Characteristic tunnel-type conductivity and magnetoresistance in a CoO-coated monodisperse Co cluster assembly*, Appl. Phys. Lett **74**, 76 (1999). 152
- [214] P. Sheng, B. Abeles und Y. Arie, *Hopping Conductivity in Granular Metals*, Phys. Rev. Lett **31**, 44 (1973). 152
- [215] A. F. Volkov und Sh. M. Kogan, *Nonuniform current distribution in semiconductors with negative differential conductivity*, Sov. Phys. JETP **25**, 1095 (1967). 154
- [216] A. F. Volkov und Sh. M. Kogan, *Physical Phenomena in semiconductors with negative differential conductivity*, Sov. Phys. USPEKHI **11**, 881 (1968). 154
- [217] F. G. Bass, V. S. Bochkov und Yu. G. Gurevich, *Influence of sample size on the current-voltage characteristic in media with an ambiguous dependence of electron temperature on field strength*, Sov. Phys. JETP **31**, 972 (1970). 154
- [218] Sh. M. Kogan, *Current column in a semiconductor with S-shaped current voltage characteristic*, Sov. Phys. JETP **27**, 656 (1968). 154
- [219] J. L. Jackson und M. P. Shaw, *The form and stability of current-voltage characteristics for ideal thermal switching*, Appl. Phys. Lett. **25**, 666 (1974). 154, 156
- [220] D. Adler, H. K. Henisch und Sir Nevill Mott, *The mechanism of threshold switching in amorphous alloys*, Rev. Mod. Phys. **50**, 209 (1978). 155
- [221] Yu. N. Gartstein und P. S. Ramesh, *Hysteresis and self-sustained oscillations in space charge limited currents*, J. Appl. Phys. **83**, 2958 (1998). 155
- [222] K. L. Ashley und A. G. Milnes, *Double Injection in Deep-Lying Impurity Semiconductors*, J. Appl. Phys. **35**, 369 (1963). 155
- [223] B. G. Martin, *The effect of fixed space charge on space-charge-limited current injection in impurity-band-conduction semiconductors*, Solid-State Electronics **38**, 443 (1995). 155
- [224] R. E. Burgess, *The A.C. Admittance of Temperature-Dependent Circuit Elements*, Proc. Phys. Soc. **B68**, 766 (1955). 156
- [225] R. E. Burgess, *The Turnover Phenomenon in Thermistors and in Point-Contact Germanium Rectifiers*, Proc. Phys. Soc. **B68**, 908 (1955). 156
- [226] A. A. Middleton und Wingreen, *Collective transport in arrays of small metallic dots*, Phys. Rev. Lett. **71**, 3198 (1993). 161
- [227] A. V. Madhav und T. Chakraborty, *Electronic properties of anisotropic quantum dots in a magnetic field*, Phys. Rev. B **49**, 8163 (1994). 167

- [228] V. Halonen, P. Hyvönen, P. Pietiläinen und T. Chakraborty, *Effects of scattering centers on the energy spectrum of a quantum dot*, Phys. Rev. B **53**, 6971 (1995). 167
- [229] E. Räsänen, J. Könemann, R. J. Haug, M. J. Puska und R. M. Nieminen, *Impurity effects in quantum dots: Towards quantitative modeling*, Phys. Rev. B **70**, 115308 (2004). 167
- [230] O. P. Pchelyakov, Yu. B. Bolkhovityanov, A. V. Dvurechnenskii, L. V. Sokolov, A. I. Nikiforov, A. I. Yakimov und B. Voigtländer, *Silicon-Germanium Nanostructures with Quantum Dots: Formation Mechanisms and Electronic Properties*, Semiconductors **34**, 1229 (2000). 167, 168
- [231] J. Hermanson, *Exciton and Impurity States in Rare-Gas Solids*, Phys. Rev. **150**, 660 (1966). 183
- [232] J. S. Y. Wang und C. Kittel, *Muonium in Silicon and Germanium—a Deep Donor*, Phys. Rev. B **7**, 713 (1973). 183
- [233] E. H. Hall, *On a New Action of the Magnet on Electric Currents*, Am. J. Math. **2**, 287 (1879). 183
- [234] L. J. van der Pauw, *A Methode of Measuring Specific Resistivity and Hall Effect of Disc or Arbitrary Shape*, Philips Res. Rep. **13**, 1 (1958). 183

# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

$\alpha$ .....	Spannungs-Energie-Konversionsfaktor
$a$ .....	Oszillatordradius, Potenzialradius
$a_{\odot}, a_{\ominus}$ .....	Leiter-Operatoren
$a_{\text{B}}^*$ .....	effektiver Bohrradius
$a_{\text{f}}^*$ .....	Bohrradius einer Störstelle in einem dünnen Quantenfilm
$A^*$ .....	effektive Richardson-Konstante
$\mathbf{A}$ .....	Vektorpotenzial des Magnetfeldes
$b_i$ .....	Breite der $i$ ten Barriere
$B, \mathbf{B}$ .....	Magnetfeld
$C_i$ .....	Kapazität der $i$ ten Elektrode
$\delta V$ .....	Verschiebung der Resonanzposition
$\Delta E_{\text{c/v}}(z)$ .....	Banddiskontinuität, Bandkanten-Offset
$\Delta E_{\text{D}}$ .....	Diamagnetische Verschiebung
$\Delta E_{\text{hh}}$ .....	Aufspaltung des Schwer-Loch Bandes
$\Delta E_{\text{lh}}$ .....	Aufspaltung des Leicht-Loch Bandes
$\Delta E_{\text{v}}^{\text{av}}$ .....	mittlerer Valenzbandkantensprung
$\Delta E_{\text{Z}}$ .....	Zeeman-Aufspaltung
$\Delta I$ .....	Stromstufe
$\Delta p$ .....	Impulsunschärfe
$\Delta V$ .....	Halbwertsbreite der Resonanz
$\Delta x$ .....	Ortsunschärfe
$\Delta$ .....	Aktivierungsenergie
$d$ .....	Schichtdicke
$D_{\text{c/v}}$ .....	Zustandsdichte des Leitungs- bzw. Valenzbandes
$D_{\text{t}}$ .....	Zustandsdichte der Fallenzustände
$D_d(E)$ .....	Zustandsdichte eines $d$ -dimensionalen Ladungsträgersystems
$\mathfrak{D}$ .....	Diffusionskonstante
$\varepsilon$ .....	Energie-Eigenwert
$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_{\text{r}}$ .....	Dielektrizitätskonstante
$\epsilon_0$ .....	elektrische Feldkonstante
$\epsilon_{\text{r}}$ .....	spez. Dielektrizitätskonstante
$e$ .....	Elementarladung
$E$ .....	Energie

## Literaturverzeichnis

$E_B$ .....	Bindungsenergie
$E_{c/v}$ .....	Leitungsband- bzw. Valenzbandkante
$E_{ch}$ .....	Ladeenergie
$E_g$ .....	Bandlücke
$E_{hh}$ .....	Eigenenergien der schweren Löcher
$E_{lh}$ .....	Eigenenergien der leichten Löcher
$E_t$ .....	Eigenenergie einer Falle
$E_Z$ .....	Zeeman-Energie
$E_n$ .....	Energieeigenwert des $n$ -ten Subbandes
$E_{E,i}$ .....	Zustände im Emitter
$E_{w,i}$ .....	Zustände im Quantentopf
$E_{C,i}$ .....	Zustände im Kollektor
$f(E)$ .....	Verteilungsfunktion
$f_{FD}$ .....	Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion
$f_{kl}$ .....	Boltzmann-Verteilungsfunktion
$F$ .....	elektrisches Feld
$\mathbf{F}$ .....	Vektor des elektrischen Feldes
$\mathbf{F}_L$ .....	Lorentz-Kraft
$\gamma_{1,2,3}$ .....	Luttinger-Parameter
$\Gamma_s$ .....	Streurate
$\Gamma_i$ .....	Tunnelraten
$g^*$ .....	effektiver $g$ -Faktor
$G$ .....	Leitwert
$\hbar = h/2\pi$ .....	Planck-Konstante
$\hbar\omega_0$ .....	Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators
$H$ .....	Hamilton-Operator
$H_\Omega$ .....	Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators
$H_L$ .....	Luttinger-Hamilton-Operator
$H_{so}$ .....	Spin-Bahn-Operator
$H_z$ .....	vertikale Komponente des Hamilton-Operators
$I$ .....	Strom
$I_{on}$ .....	Strom beim Erreichen der Schwellspannung $V_{on}$
$i$ .....	normierter Strom
$j$ .....	Stromdichte
$\kappa$ .....	effektiver Loch- $g$ -Faktor des isotropen Anteils
$\mathbf{k}$ .....	Wellenvektor des Teilchens
$k \approx 0.086 \text{ meV/K}$ ....	Boltzmann-Konstante
$kT$ .....	thermische Energie
$k_F$ .....	Betrag des Fermi-Wellenvektors
$\lambda$ .....	Wellenlänge des Teilchens
$\lambda_F$ .....	Fermi-Wellenlänge
$l$ .....	Länge
$\ell$ .....	mittlere freie Weglänge
$\ell_\phi$ .....	Phasen-Kohärenz-Länge
$\ell_T$ .....	Thermische-Diffusions-Länge

$\ell_B$ .....	magnetische Länge
$L, L_i$ .....	Ausdehnung eines Körpers
$\mu_B$ .....	Bohr-Magneton
$\mu_i$ .....	chemisches Potenzial der $i$ ten Zuleitung
$\boldsymbol{\mu}_s$ .....	magnetisches Moment des Spins
$m$ .....	Drehimpulsquantenzahl
$m^*$ .....	effektive Masse
$m_z^*$ .....	effektive Ladungsträgermasse senkrecht zur Wachstumsebene
$m_{\parallel}^*$ .....	effektive Ladungsträgermasse in der Wachstumsebene
$m_0$ .....	Ruhemasse des Elektrons
$\nu$ .....	Frequenz der Materiewelle
$n$ .....	Hauptquantenzahl
$n_{\circlearrowleft}, n_{\circlearrowright}$ .....	Eigenwerte der Leiter-Operatoren
$n_L$ .....	Landau-Quantenzahl, Landau-Index
$n_{\text{QD}}$ .....	Flächendichte der Quantenpunkte
$n_t$ .....	Fallenkonzentration
$\omega_0$ .....	Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators
$\omega_c$ .....	Zyklotronfrequenz
$\Omega$ .....	dreidimensionales Volumen
$\varphi_n(z)$ .....	Eigenzustände beziehungsweise Subbänder im Einschlusspotenzial
$\psi$ .....	Wellenfunktion
$\Psi$ .....	Wellenfunktion
$\Phi_0$ .....	Potenzialtiefe beziehungsweise -höhe
$\Pi$ .....	Peltier-Koeffizient
$\mathbf{p}$ .....	Teilchenimpuls
$p_{s,i}$ .....	Besetzungswahrscheinlichkeit des $i$ ten Niveaus des $s$ ten Quantenpunktes
$p$ .....	Dotierkonzentration
$P = IV$ .....	dissipative Leistung
$p_F$ .....	Betrag des Fermi-Impulses
$Q$ .....	Wärmemenge
$q$ .....	effektiver Loch- $g$ -Faktor des anisotropen Anteils
$\varrho$ .....	Störstellen-Zustandsdichte
$\hat{\rho}$ .....	Dichtematrix
$r_c$ .....	Zyklotron-Radius
$r_m$ .....	optimaler Mott-Hopping-Radius
$R_y$ .....	Rydberg-Konstante
$R_y^*$ .....	effektive Rydberg-Konstante
$R_i$ .....	Widerstand
$R_H$ .....	Hall-Koeffizient
$\sigma_{x,y,z}$ .....	Pauli-Spin-Matrizen
$s$ .....	Strecke
$\mathbf{S}$ .....	Spin-Operator

## Literaturverzeichnis

$\mathcal{S}$ .....	Seebeck-Koeffizient
$\tau$ .....	Relaxationszeit, Halbwertszeit
$\tau_\phi$ .....	inelastische Streuzzeit
$\tau_s$ .....	Streuzeit
$\tau_T$ .....	Tunnelzeit
$T(E)$ .....	Transmissionskoeffizient
$T^{\text{bs}}$ .....	Transfermatrix einer Barriere
$T^{\text{dbs}}$ .....	Transfermatrix einer Doppelbarriere
$T_0$ .....	charakteristische Temperatur
$T_{\text{eff}}$ .....	effektive Ladungsträgertemperatur
$T_{\text{limit}}$ .....	maximale Temperatur, bei der resonantes Tunneln beobachtbar ist
$u$ .....	normierte Spannung
$\mathbf{v}_F$ .....	Fermi-Geschwindigkeit
$V$ .....	Spannung
$V(z)$ .....	Ladungsträgerpotenzial senkrecht zur Wachstumsebene
$V_{\pm 1}$ .....	erste Leitfähigkeitsresonanz im 3D-2D Tunneln; „+“ in pos. Polarität, „-“ in neg. Polarität
$V_{\pm 2}$ .....	zweite Leitfähigkeitsresonanz im 3D-2D Tunneln; „+“ in pos. Polarität, „-“ in neg. Polarität
$V_{D/A}(z)$ .....	elektrostatisches Potenzial der ionisierten Donatoren beziehungsweise Akzeptoren
$V_{\text{ex}}(z)$ .....	Wechselwirkungspotenzial der Ladungsträger
$V_{\text{on}}$ .....	Schwellspannung
$V_p$ .....	Peakposition im Hochstromregime
$V_{\text{TFL}}$ .....	Schaltpunkt im raumladungsbegrenzten Stromtransport
$V_v$ .....	Position des minimalen Valley-Stroms
$V_{s,i}$ .....	Positionen der Leitfähigkeitsresonanzen im 3D-0D Tunneln
$w(L)$ .....	Fluktuation der mittleren Inselgröße
$\xi$ .....	Lokalisierungslänge
0D .....	nulldimensional
1D .....	eindimensional
2D .....	zweidimensional
3D .....	dreidimensional
AFM .....	Rasterkraftmikroskop, engl. <b>atomic force microscope</b>
DBS .....	Doppelbarrierenstruktur
hh .....	schweres Loch
lh .....	leichtes Loch
MBE .....	Molekularstrahlepitaxie

ML .....	Monolage
NDC .....	negativ differenzielle Leitfähigkeit
NDR .....	negativ differenzieller Widerstand
QD .....	Quantenpunkt, engl. quantum dot
QW .....	Quantentopf, engl. quantum well
RHEED .....	Elektronenbeugung, engl. <b>reflection high energy electron diffraction</b>
RTD .....	Resonante Tunneldiode
SEM .....	Rasterelektronenmikroskop, engl. <b>scanning electron microscope</b>
SMU .....	Source-Measure Unit
so .....	spin-abgespaltenes Loch
STM .....	Rastertunnelmikroskop
TEM .....	Transmissionselektronenmikroskop
USV .....	Unterbrechungsfreie Stromversorgung
VRH .....	Variable-Range-Hopping



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die durch ihre Unterstützung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Prof. Dr. Rolf Haug danke ich für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe sowie für die Übertragung dieses Themas und sein beständiges Interesse an dieser Arbeit.

Priv.-Doz. Dr. Roland Winkler danke ich für die Übernahme des Korreferats ebenso wie für die Unterstützung mit theoretischen Rechnungen, Erklärungen und wertvollen Hinweisen zur speziellen Natur der Löcher.

Meinen Kollegen der Abteilung Nanostrukturen (*Adriana Hadzibrahimovic, Patrick Barthold, Jörg Michael Becker, Dr. Annelene Dethlefsen, Stefanie Döhrmann, Christian Fricke, Dr. Daniel Hägele, Dr. Frank Hohls, Dr. Jens Könemann, Thomas Lüdtke, Niels Maire, Claas Bierwisch, Alexander Mühle, Stefan Pfalz, Maximilian Rogge, Dr. Jörg Rudolph, Niels Ubbelohde, Dr. Fritz Schulze Wischeler, Dr. Genadiy Sukhodub, Dawid Kupidura, Tobias Paprotta, Dr. Thomas Schmidt, Michael Römer, Daniel Tutuc, Joachim Fritsche, Maik Krüger, Maik Begoin, Mathias Krüger, Dipankar Sarkar, Dr. Ulrich Denker, Matthias Paesler, Bernd Georg Huneke, Dr. Uli Zeitler, Dr. Jörn Regul, Dr. Ulrich Keyser, Dr. Claus Fühner, Dr. Andre Nauen, Philip Hullmann, Dr. Isabella Hapke-Wurst, Dr. Hans-Werner Schumacher, Dr. Peter König, Martin Monka, Andreas Kunz, Sebastian Borck, Christian Lenz, Gernot Krause und Benjamin Harke*) sei herzlich für das nette Arbeitsklima und die stetige Hilfsbereitschaft gedankt.

Dem „Vater“ der in dieser Arbeit untersuchten Heterostrukturen, Dr. Ulrich Denker, danke ich für die zahlreichen Diskussionen und die Beschaffung elektronisch schwer zugänglicher Aufsätze.

Jens Könemann, Dipankar Sarkar und Maximilian Rogge danke ich für die „Nächte“ im Hochfeld-Magnetlabor in Grenoble.

Jörg Michael Becker danke ich für so manches Gespräch von „Mann zu Mann.“

Sehr herzlich bedanke ich mich bei Klara Wernecke für die Organisation flüssigen Heliums und bei Yvonne Griep für die Unterstützung in bürokratischen Belangen.

Ich danke allen Angestellten der Feinmechanik-Werkstatt des Instituts für die schnelle und unkomplizierte Ausführung der Aufträge.

Bei meiner Familie, insbesondere bei meiner Freundin Nicole, bedanke ich mich für die unendliche Geduld und Verständnis bei langen Messphasen sowie während der Anfertigung dieser Arbeit.

**Institut für Festkörperphysik**

**Abteilung Nanostrukturen**

Universität Hannover



				
Rolf Haug	Klaus Führer	Thomas Schmidt	Adrijana Hadzibrahimovic	Christian Fricke
				
Michael Oestreich	Kai-Martin Haenel	Ulrich Denker	Gemadly Sukhodub	Maik Krüger
				
Yvonne Griep	Benjamin Harke	Hans-Werner Schumacher	Jens Körenmann	Tobias Nowitzki
				
Klara Wernecke	Jörg Rudolph	Stefanie Döhrmann	Andreas Kunz	Gefa Karabag
				
Ulrich Zeller	Joachim Fritsche	Jörg-Michael Becker	Dawid Kupidura	Ulrich Keyser
				
Frank Hohls	Daniel Hägele	Mathias Krüger	Christian Lenz	Maik Begoin
				
Isabella Hagge-Wurst	Stefan Platz	Alexander Mühle	Sebastian Borck	Philipp Hüllmann
				
Roland Winkler	Claas Blenwisch	Thomas Lüdke	Fritz Schulze Wischeiler	Niels Ubbelohde
				
Annelene Dethlefsen	Niels Maire	Patrick Barthold	Matthias Wick	Michael Römer
				
Jörn Regul	Dipankar Sarkar	Peter König	André Nauen	Daniel Tutuc
				
Gernot Krause	Maximilian Rogge			



Abbildung A.8.: Die „Nanos“: Es fehlen Martin Monka, Matthias Paesler, Vlad Antohe und Bernd Hunecke

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Diese Dissertation wurde nicht vorher als Diplomarbeit oder ähnliche Prüfungsarbeit verwendet.

Hannover, 04. April 2005

(Kai-Martin Haendel)