Über Indizes von Vektorfeldern und 1-Formen auf vollständigen Durchschnitten

Vom Fachbereich Mathematik der Universität
Hannover
zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Math. Oliver Klehn
geboren am 17. 10. 1973 in Hildesheim

2003

Referent:	Prof. Dr. W. Ebeling, Universität Hannover
Korreferent:	Prof. Dr. D. van Straten, Universität Mainz
Tag der Promotion:	19. 12. 2003

Zusammenfassung

Betrachtet man Vektorfelder auf isolierten Singularitäten vollständiger Durchschnitte, die eine isolierte Nullstelle besitzen, so kann man in dieser Situation eine Verallgemeinerung des Poincaré-Hopf-Index definieren, den sogenannten GSV-Index. Wir betrachten Vektorfelder auf Kurven und beweisen für den holomorphen Fall eine Formel, die den Index durch die Dimension einer bestimmten Algebra ausdrückt, falls das Vektorfeld in einer gewissen Weise deformierbar ist. Ferner beweisen wir für den reell analytischen Fall eine Signaturformel im Sinne von Eisenbud, Levine und Khimshiashvili für den Index, auch hier unter der Voraussetzung, daß das Vektorfeld in geeigneter Weise deformierbar ist.

Es wird außerdem eine Formel von Gómez-Mont für den Homologischen Index für Vektorfelder auf Hyperflächen verallgemeinert.

Ebeling und Gusein-Zade haben Indizes von 1-Formen auf isolierten Singularitäten vollständiger Durchschnitte definiert. Es wird eine Residuenformel für den Index aufgestellt, falls die Varietät zweidimensional ist.

Schlagwörter: Vektorfeld, 1-Form, Index, Singularität, vollständiger Durchschnitt, lokale Residuen, Bilinearform, Sockel

Abstract

If one considers vector fields on isolated singularities of complete intersections, that have an isolated zero one can define a generalization of the Poincaré-Hopf index in this situation, the so called GSV index. We consider vector fields on curves and prove in the holomorphic case a formula, expressing the index by the dimension of a certain algebra if the vector field is deformable in a certain sense. Further we prove in the real analytic case a signature formula in the sense of Eisenbud and Levine, under the condition that the vector field is deformable in a certain sense too.

We also generalize a formula of Gómez-Mont for the homological index for vector fields on hypersurfaces.

Ebeling and Gusein-Zade have defined indices of 1-forms on isolated complete intersection singularities. There is established a residue formula for the index if we consider twodimensional varieties.

Keywords: vector field, 1-form, index, singularity, complete intersection, local residues, bilinear form, socle

Einleitung

Es sei $g := (g_1, \dots, g_n)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz, d.h. $g_i(0) = 0$, und g_i ist kein Nullteiler in der Algebra $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(g_1, \dots, g_{i-1})$ für $i = 1, \dots, n$. Hierbei ist jedes g_i natürlich ein Element von $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, wobei dies wie allgemein üblich der Ring der um $0 \in \mathbb{C}^n$ konvergenten Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten ist. Äquivalent hierzu ist die Aussage, daß der entsprechende holomorphe Abbildungskeim $g\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ eine isolierte Nullstelle besitzt. Diese Tatsache gestattet es, den sogenannten Poincaré-Hopf-Index $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}^n,0}(g)$ von g zu definieren: Bezeichnen S_ϵ^{2n-1} und S^{2n-1} Sphären um den Ursprung mit den Radien ϵ und 1, so sei $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}^n,0}(g)$ der Grad der Abbildung $g/||g||\colon S_\epsilon^{2n-1} \to S^{2n-1}$, wobei die Sphären als Ränder der entsprechenden Kugeln orientiert seien. Die Dimension von $Q_g := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(g_1, \dots, g_n)$ als komplexer Vektorraum ist bekanntlich endlich, und man hat das klassische Resultat, daß der Index von g gerade diese Dimension ist. Man kann den Index allerdings auch noch mit Hilfe der sogenannten (lokalen) Grothendieck-Residuen berechnen:

Für ein $h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ definiert man das (lokale) Grothendieck-Residuum von h bzgl. g durch

$$\mathrm{res}^g_{\mathbb{C}^n,0}(h) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{h dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{g_1 \cdot \ldots \cdot g_n},$$

wobei Γ ein geeigneter reeller n-Zykel ist (wir werden das später präzisieren). In diesem Fall wird der Index auch durch das Residuum der Jacobideterminante von g gegeben.

Man kann auch die reelle Situation betrachten. Hierbei sei $\mathscr{E}_{\mathbb{R}^n,0}$ der Ring der reell analytischen Funktionskeime im Ursprung und $g^{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ ein endlicher reell analytischer Abbildungskeim in dem Sinne, daß die Algebra $Q_g^{\mathbb{R}} := \mathscr{E}_{\mathbb{R}^n,0}/I$ als Vektorraum endlichdimensional ist und wobei I das von den Komponenten von $g^{\mathbb{R}}$ erzeugte Ideal ist. Die Nullstelle von $g^{\mathbb{R}}$ ist dann isoliert und man definiert den Index von $g^{\mathbb{R}}$ völlig analog. Eisenbud und Levine haben in [8] und Khimshiashvili in [19] eine algebraische Formel für den Index von $g^{\mathbb{R}}$ bewiesen. Ist $l\colon Q_g^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine Linearform, die auf der Jacobideterminante von $g^{\mathbb{R}}$ positiv ist, so gilt

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{R}^n,0}(g^{\mathbb{R}}) = \text{Signatur} <,>_l .$$

Hierbei ist $<,>_l$ die von l induzierte Bilinearform, die durch $< h_1, h_2 >_l := l(h_1 \cdot h_2)$ definiert wird. Eisenbud, Levine und Khimshiashvili verallgemeinern dies sogar auf den Fall von C^∞-differenzierbaren Funktionskeimen. Hierauf wollen wir jedoch nicht weiter eingehen. Da die Vorgehensweise dieser Arbeit erläutert werden soll, wollen wir zunächst etwas über die Beweisstrategien der vorgestellten Sätze sagen.

Wir betrachten zunächst wieder den komplexen Fall und holomorphe Deformationen g_t von g. Die semilokale Algebra von g_t ist wie folgt definiert:

$$Q_{g_t} := \bigoplus_{\{g_t(p)=0\}} Q_{g_t,p},$$

wobei natürlich $Q_{g_0} = Q_g$ gilt und nur die gegen 0 strebenden Nullstellen betrachtet werden. Man weist dann nach, daß die komplexen Vektorraumdimensionen unter holomorphen Deformationen erhalten bleiben, d.h.

$$\dim_{\mathbb{C}} Q_g = \dim_{\mathbb{C}} Q_{g_t}.$$

Die Menge der semilokalen Algebren kann dann mit der Struktur eines holomorphen Vektorbündels versehen werden. Für den Index zeigt man dann den entsprechenden Erhaltungssatz

$$\operatorname{ind}_{\mathbb{C}^n,0}(g) = \sum_{\{g_t(p)=0\}} \operatorname{ind}_{\mathbb{C}^n,p}(g_t).$$

Mit Hilfe der Residuentheorie läßt sich außerdem der dritte Erhaltungssatz

$$\operatorname{res}^g_{\mathbb{C}^n,0}(J_g) = \lim_{t\to 0} \sum_{\{g_t(p)=0\}} \operatorname{res}^{g_t}_{\mathbb{C}^n,p}(J_{g_t})$$

beweisen, wobei J_{g_t} die Jacobideterminante von g_t ist. Damit genügt es, den Satz

$$\operatorname{ind}_{\mathbb{C}^n,0}(g) = \dim_{\mathbb{C}} Q_g = \operatorname{res}^g_{\mathbb{C}^n,0}(J_g)$$

für den Fall zu beweisen, daß g eine einfache Nullstelle besitzt, was leicht durchgeführt werden kann. Um sich dem Beweis des Eisenbud-Levine-Khimshiashvili-Theorems zu nähern, wird die komplexe Theorie wie folgt erweitert: Man überzeugt sich, daß das Residuum eine Linearform $\operatorname{res}\colon Q_g \to \mathbb{C}$ liefert, die sogenannte lokale Residuenform von g. Die Lokale Grothendieck-Dualität besagt nun, daß die induzierte Bilinearform $<,>_{\text{res}}$ nicht entartet ist. Damit folgt unmittelbar, daß Q_g einen eindimensionalen Sockel, der von J_g erzeugt wird, besitzt. Wir erinnern daran, daß der Sockel der Annulator des maximalen Ideals ist. Es folgt weiter, daß jede Bilinearform $<,>_l$ mit $l(J_g) \neq 0$ nicht entartet ist.

Betrachten wir den reellen Fall. Es sei also nun wieder $g^{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}^n,0) \to (\mathbb{R}^n,0)$ ein endlicher reell analytischer Abbildungskeim. Seine Komplexifizierung bezeichnen wir mit g. Ferner sei $g^{\mathbb{R}}_t$ eine reell analytische Deformation von $g^{\mathbb{R}}$. Dies liefert natürlich auch eine holomorphe Deformation von g. Ist $l\colon Q^{\mathbb{R}}_g \to \mathbb{R}$ eine Linearform mit $l(J_{g^{\mathbb{R}}}) > 0$ und $l_{t,p}\colon Q^{\mathbb{R}}_{g_t,p} \to \mathbb{R}$ eine Linearform mit $l_{t,p}(J_{g^{\mathbb{R}}_t}) > 0$ für alle Nullstellen p von g_t, so hat man den folgenden Erhaltungssatz für die Signaturen:

$$\text{Signatur} <,>_l = \sum_{\{g_t(p)=0\}} \text{Signatur} <,>_{l_{t,p}} .$$

Hieraus folgt dann letztlich das Eisenbud-Levine-Khimshiashvili-Theorem unter wesentlicher Ausnutzung, daß die Bilinearformen nicht entartet sind.

In dieser Arbeit wird wie folgt vorgegangen: Aguilar, Bonatti, Gómez-Mont, Seade und Verjovsky haben in den Artikeln [12], [3] und [1] sowohl für den holomorphen als auch für den reell analytischen Fall Indizes von Vektorfeldern auf isolierten Singularitäten von vollständigen Durchschnitten definiert. Diese Definitionen und diejenigen Resultate dazu, die explizit in dieser Arbeit benötigt werden, stellen wir im ersten Kapitel zusammen. Desweiteren wird dort die Definition des Index einer holomorphen 1-Form auf einer isolierten Singularität eines vollständigen Durchschnitts behandelt, die Ebeling und Gusein-Zade in [5] gegeben haben. Auch dazu werden die wichtigsten Resultate zusammengestellt. Da wir für die weiteren Untersuchungen die klassische Residuentheorie von Grothendieck benötigen, wird im ersten Kapitel auch an die wichtigsten Resultate hierzu erinnert.

Im zweiten Kapitel betrachten wir Vektorfelder tangential an isolierte Singularitäten vollständiger Durchschnitte. Wir betrachten eine Klasse von Vektorfeldern die holomorphe bzw. reell analytische Deformationen besitzen, die tangential zu den Milnorfasern sind. Dies gilt nicht für alle Vektorfelder, aber immerhin für eine große Klasse. Dazu wird zunächst eine komplexe Theorie entwickelt. Wir führen den Begriff der relativen Residuen ein, der eine Verallgemeinerung der klassischen Grothendieck-Residuen darstellt und zeigen, daß sich diese relativen Residuen wieder durch klassische Residuen ausdrücken lassen. Danach wird der Index des Vektorfeldes für den glatten Fall durch die Dimension einer Algebra ausgedrückt. Der entscheidende Punkt ist, daß diese Darstellung nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt, d.h. die Darstellung ist unabhängig davon, welcher maximale Minor der Jacobimatrix der den vollständigen Durchschnitt definierenden Abbildung nicht verschwindet. Dies wird für Vektorfelder auf Kurven mit Hilfe von Deformationen auf den singulären Fall verallgemeinert. Mit Hilfe der relativen Residuen definieren wir eine Linearform auf der Algebra, deren induzierte Bilinearform nicht entartet ist, woraus folgt, daß die Algebra einen eindimensionalen Sockel besitzt. Ein Satz von Lehmann, Soares und Suwa liefert schließlich die explizite Konstruktion eines erzeugenden Elementes dieses Sockels. Mit Hilfe dieser komplexen Theorie sind wir anschließend in der Lage, mit einer ähnlichen Strategie wie im klassischen Fall eine Signaturformel für den reellen Index aufzustellen.

Gómez-Mont hat in [9] eine algebraische Formel für den Index eines holomorphen Vektorfeldes tangential an eine isolierte Hyperflächensingularität gefunden, indem er gezeigt hat, daß sich der Index mit Hilfe der komplexen Vektorraumdimensionen von Homologieräumen eines Komplexes kählerscher Differentialformen ausdrücken läßt. Aus der Berechnung der Dimensionen gewinnt er die Formel. Dabei wird allerdings nicht nur vorausgesetzt, daß das Vektorfeld eine isolierte Nullstelle auf der Hyperfläche besitzt, sondern auch, daß das Vektorfeld eine isolierte Nullstelle in dem einbettenden Raum hat. Im dritten Kapitel werden die Methoden aus [9] dahingehend weiterentwickelt, daß die letztere Voraussetzung fallengelassen werden kann.

Ebeling und Gusein-Zade haben in [5] den Index von holomorphen 1-Formen auf isolierten Singularitäten vollständiger Durchschnitte definiert und gezeigt, daß sich dieser durch die Dimension einer analytischen Algebra ausdrücken läßt. Im 4. Kapitel wird für einen zweidimensionalen vollständigen Durchschnitt gezeigt, daß es für den Index auch eine Residuenformel gibt. Wesentliche Punkte sind auch hier zunächst die Betrachtung des glatten Falles und dort eine koordinatenunabhängige Darstellung. Die Verallgemeinerung auf den singulären Fall erhält man leicht mit Deformationstheorie. Es stellt sich allerdings heraus, daß die von Ebeling und Gusein-Zade eingeführte Algebra im allgemeinen keinen eindimensionalen Sockel besitzt, was die Ableitung von Erhaltungssätzen von Signaturen unter Deformationen im reell analytischen Fall schwierig macht, da auf den Algebren dann keine nicht entarteten von Linearformen induzierten Bilinearformen existieren können.

Aus Prioritätsgründen wurden die Kapitel 3 und 4, sowie die Abschnitte 2.1 und 2.2 bereits in zum Teil etwas verkürzter Form in [20] und [21] veröffentlicht. Der nach Meinung des Autors wichtigste Teil der Arbeit, der aus den Abschnitten 2.3 und 2.4 besteht, ist jedoch völlig neu.

An dieser Stelle möchte ich mich zuallererst bei meinem Doktorvater Prof. Dr. W. Ebeling für seine Unterstützung und viele Diskussionen bedanken. Er hat auch meine Beschäftigung mit diesem Themengebiet angeregt. Ich bedanke mich bei Prof. Dr. D. van Straten, der durch zahlreiche Argumente belegte, daß der ursprüngliche Beweisansatz von Theorem 2.3.7 nicht gelingen konnte. Auch Prof. Dr. S. M. Gusein-Zade danke ich für nützliche Hinweise während seines Besuches in Hannover. Nicht zu vergessen sind die Mitglieder der Arbeitsgruppe Algebraische und Komplexe Geometrie, insbesondere Dr. M. Friedland, Dr. M. Lönne und PD Dr. J. Spandaw, bei denen ich mich für die Diskussion kleinerer und größerer Probleme bedanke.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Residuensätze und die reelle Theorie

1.1.1 Klassische Grothendieck-Residuen

In diesem Abschnitt soll nun kurz die klassische Residuentheorie rekapituliert werden, wie man sie etwa in [2] oder [16] findet. Dazu nehmen wir wieder an, daß $g := (g_1, \dots, g_n)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz ist. Wir betrachten den reellen n-Zykel $\Gamma := \{|g_i| = \epsilon_i, i = 1, \dots, n\}$, wobei $\epsilon_i \in \mathbb{R}_{>0}$ klein genug gewählt sei, und dessen Orientierung durch die Bedingung $d(\arg g_1) \wedge \dots \wedge d(\arg g_n) \geq 0$ gegeben ist. Für ein beliebiges $h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ definiert man das Residuum von h bezüglich g durch

$$\operatorname{res}^g_{\mathbb{C}^n,0}(h) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{h dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{g_1 \cdot \ldots \cdot g_n}.$$

Gelegentlich, je nach Zweckmäßigkeit, verwenden wir hierfür auch die Notation

$$\operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0} \begin{bmatrix} h \\ g_1 \dots g_n \end{bmatrix}.$$

Bezeichnet I_g das von den Komponenten von g in $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ erzeugte Ideal und ist $Q_g := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}/I_g$, so hat man das folgende Resultat.

1.1.1 Lemma. $\operatorname{res}^g_{\mathbb{C}^n,0} \colon Q_g \to \mathbb{C}$ *definiert eine Linearform.*

Insbesondere verschwindet das Residuum also auf dem Ideal I_g. Ist $l \colon Q_g \to \mathbb{C}$ eine Linearform, so bezeichnen wir die von l induzierte Bilinearform mit $<,>_l$. Diese ist durch $< h_1, h_2 >_l := l(h_1 \cdot h_2)$ definiert. Der folgende Satz sagt einiges über die Struktur der Algebra Q_g aus.

1.1.2 Theorem (Lokale Dualität). *Die Bilinearform* $<,>_{\operatorname{res}^g_{\mathbb{C}^n,0}}$ *ist nicht entartet.*

Man kann nun einen der in diesen Zusammenhängen üblichen Schlüsse ziehen. Die Lokale Grothendieck-Dualität besagt nämlich, daß der Annulator des maximalen Ideals, der Sockel, von Q_g eindimensional ist, d.h. Q_g ist eine Gorenstein-Algebra. Wäre nämlich die Dimension größer, so gäbe es keine nicht entarteten von Linearformen induzierte Bilinearformen auf Q_g. Die Dualität kann also sofort dahingehend verallgemeinert werden, daß man sagen kann, daß jede Bilinearform, die von einer auf dem Sockel nicht verschwindenden Linearform induziert wird, nicht entartet ist. Bezeichnet man die Jacobideterminante von g mit J_g, so hat man das folgende Resultat für $\operatorname{ind}_{\mathbb{C}^n,0}(g)$ bzw. $\dim_{\mathbb{C}} Q_g$.

1.1.3 Satz. *Der Sockel von* Q_g *wird von* J_g *erzeugt, und es gilt*

$$\operatorname{res}^g_{\mathbb{C}^n,0}(J_g) = \dim_{\mathbb{C}} Q_g = \operatorname{ind}_{\mathbb{C}^n,0}(g).$$

Nützlich für die Berechnung von Residuen ist der folgende Satz.

1.1.4 Satz (Transformationsformel für Residuen). *Es sei* $g' := (g'_1, \dots, g'_n)$ *eine weitere reguläre* $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$*-Sequenz mit* $g'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j$*. Dann gilt*

$$\operatorname{res}^g_{\mathbb{C}^n,0}(h) = \operatorname{res}^{g'}_{\mathbb{C}^n,0}(h \det(a_{ij})).$$

Damit erhält man die folgende Berechnungsmöglichkeit für die Residuen: Da die komplexe Vektorraumdimension von Q_g endlich ist, kann man natürliche Zahlen $k_1, \dots k_n$ finden, so daß $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(z_1^{k_1}, \dots, z_n^{k_n}) \subset \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(g_1, \dots, g_n)$ gilt. Gilt also etwa $z_i^{k_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j$ und ist d der Koeffizient von $z_1^{k_1-1} \cdot \ldots \cdot z_n^{k_n-1}$ in der Potenzreihenentwicklung von $h \det(a_{ij})$, so gilt $\mathrm{res}^g_{\mathbb{C}^n,0}(h) = d$ nach der Cauchyschen Integralformel.

Abschließend soll noch ein Deformationssatz für die Residuen vorgestellt werden. Dazu sei g_t eine stetig variierende Familie holomorpher Abbildungskeime mit $g_0 = g$ und Entsprechendes gelte auch für h_t.

1.1.5 Lemma (Stetigkeitsprinzip).

$$\mathrm{res}^g_{\mathbb{C}^n,0}(h) = \lim_{t \to 0} \sum_{p_t \in g_t^{-1}(0)} \mathrm{res}^{g_t}_{\mathbb{C}^n,p_t}(h_t).$$

Hierbei wird natürlich nur über die Nullstellen p_t von g_t summiert, die gegen 0 streben.

1.1.2 Einige Resultate von Eisenbud, Levine und Khimshiashvili

Es sollen nun einige Resultate der Artikel [8] und [19], die wir im Verlauf der Arbeit zitieren werden, vorgestellt werden. Dazu sei $\mathscr{E}_{\mathbb{R}^n,0}$ der Ring der reell analytischen Funktionskeime auf $(\mathbb{R}^n, 0)$. Ferner sei $g^{\mathbb{R}} \colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ ein endlicher reell analytischer Abbildungskeim, dessen Komplexifizierung wir mit g bezeichnen. Dann besitzt g eine isolierte Nullstelle. Ist $I_{g^{\mathbb{R}}}$ das von den Komponenten von $g^{\mathbb{R}}$ in $\mathscr{E}_{\mathbb{R}^n,0}$ erzeugte Ideal, so setzen wir $Q_g^{\mathbb{R}} := \mathscr{E}_{\mathbb{R}^n,0}/I_{g^{\mathbb{R}}}$ und außerdem $J_{g^{\mathbb{R}}}$ für die Jacobideterminante. Es gilt natürlich $Q_g \cong Q^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und man das folgende berühmte Theorem.

1.1.6 Theorem (Eisenbud-Levine-Khimshiashvili). *Es sei $l \colon Q_g^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine Linearform mit $l(J_g^{\mathbb{R}}) > 0$. Dann gilt*

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{R}^n,0}(g^{\mathbb{R}}) = \mathrm{Signatur} <,>_l .$$

Abschließend wollen wir noch einen allgemeinen Signatursatz zitieren, der später benötigt wird und der in [8] nachgelesen werden kann.

1.1.7 Satz. *Ist Q eine kommutative lokale $\mathbb{R}$-Algebra mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, die als $\mathbb{R}$-Vektorraum endlichdimensional ist und ist $l \colon Q \to \mathbb{R}$ eine Linearform, so daß $<,>_l$ nicht entartet ist, und gilt $Q/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$, so verschwindet die Signatur von $<,>_l$.*

1.2 Indizes holomorpher Vektorfelder und 1-Formen

Die folgende Definition geht auf Ebeling und Gusein-Zade zurück, siehe [5]. Sei $(V, 0) := (\{f_1 = \cdots = f_q = 0\}, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts (ICIS) und $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dz_i$ der Keim einer holomorphen 1-Form auf $(\mathbb{C}^n, 0)$, die eine isolierte Nullstelle auf $(V, 0)$ besitzt. Wir wählen eine genügend kleine Sphäre S_δ um den Ursprung in $\mathbb{C}^n$, die V transversal schneidet, und betrachten den Umgebungsrand (Link) $K = V \cap S_\delta$ von V. Die 1-Formen $\omega, df_1, \dots, df_q$ sind für alle Punkte von K linear unabhängig, und wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung

$$(\omega, df_1, \dots, df_q) \colon K \to W_{q+1}(\mathbb{C}^n),$$

wobei $W_{q+1}(\mathbb{C}^n)$ die Mannigfaltigkeit der $(q+1)$-Beine, die Graßmannsche, in $\mathbb{C}^n$ sei. Da $W_{q+1}(\mathbb{C}^n)$ $(2n-2q-2)$-zusammenhängend ist, siehe etwa [17], gilt

$$H_{2n-2q-1}(W_{q+1}(\mathbb{C}^n)) \cong \pi_{2n-2q-1}(W_{q+1}(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{Z}.$$

Ist V keine Kurve, so gilt außerdem $H_{2n-2q-1}(K) \cong \mathbb{Z}$ und daher hat die Abbildung einen Grad, wobei K als Rand der komplexen Mannigfaltigkeit $V \setminus \{0\}$ orientiert sei. Der Index $\operatorname{ind}_{V,0} \omega$ von ω ist als der Grad dieser Abbildung definiert. Wenn V eine Kurve ist, so kann K mehrere Komponenten haben, wir summieren dann über die Grade auf den Komponenten, um den Index zu definieren.

Ist $X := \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ der Keim eines holomorphen Vektorfeldes auf $(\mathbb{C}^n, 0)$ tangential an V, etwa $Xf = Cf$, mit isolierter Nullstelle auf V, so definiert man den sogenannten GSV-Index $\operatorname{ind}_{V,0}(X)$ völlig analog, d.h. der Index ist der Grad der Abbildung

$$(X, \nabla f_1, \dots, \nabla f_q) \colon K \to W_{q+1}(\mathbb{C}^n),$$

wobei hier die komplexen Gradienten zu betrachten sind. Wir wollen einige der Resultate zusammenfassen, die sich in den im Literaturverzeichnis angegebenen Forschungsartikeln wiederfinden lassen.

Sei J das Ideal in $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, das von $f_1, \dots, f_q$ und den $(q+1)$-Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial z_n} \\ \omega_1 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Für einen regulären Wert $0 \neq \epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_q) \in \mathbb{C}^q$ von f genügend nahe 0 und eine kleine Kugel B_δ um den Ursprung in $\mathbb{C}^n$ definiert man $V_\epsilon := f^{-1}(\epsilon) \cap B_\delta$. V_ϵ ist dann transversal zu S_δ. Wir setzen $\mathcal{A} := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}/J$. Das folgende Resultat wird in [5] bewiesen.

1.2.1 Theorem (Ebeling, Gusein-Zade). *(i) Ist $(V,0)$ glatt, so ist $\operatorname{ind}_{V,0} \omega$ der gewöhnliche Poincaré-Hopf-Index.*
(ii) $\operatorname{ind}_{V,0} \omega$ ist die Summe der Poincaré-Hopf-Indizes von ω auf V_ϵ.
(iii) $\operatorname{ind}_{V,0} \omega = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$.

Nach einem linearen generischen Koordinatenwechsel kann man annehmen, daß $(f_1, \dots, f_q, X_1, \dots X_{n-q})$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz ist, und wir nehmen stets an, daß die Koordinaten in dieser Weise gewählt sind. Ist

$$\Sigma := \{f_1 = \dots = f_q = 0, |X_1| = \epsilon_1, \dots, |X_{n-q}| = \epsilon_{n-q}\}$$

ein kleiner reeller $(n-q)$-Zykel, dessen Orientierung durch

$$d(\arg X_1) \wedge \dots \wedge d(\arg X_{n-q}) \geq 0$$

gegeben ist und ist c_{n-q} der Koeffizient von t^{n-q} in der formalen Potenzreihenentwicklung von $\det(\mathbb{1} + tDX)/\det(\mathbb{1} + tC)$, so gilt der folgende Satz, der in [24] bewiesen wird.

1.2.2 Theorem (Lehmann, Soares, Suwa).

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-q}} \int_\Sigma \frac{c_{n-q} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n-q}}{X_1 \cdot \ldots \cdot X_{n-q}}$$

Wir werden Integrale dieser Form, also Integrale über Zykeln, die in einer Singularität liegen, später konsequent als Verallgemeinerungen der klassischen Residuen (Integrale über Zykeln in glatten Räumen) auffassen und sie dann als relative Residuen bezeichnen. Es wird sich zeigen, daß man die relativen Residuen durch klassische Residuen ausdrücken kann. Es sei noch erwähnt, daß der GSV-Index im glatten Fall natürlich der Poincaré-Hopf-Index ist und man einen Erhaltungssatz wie im Theorem von Ebeling und Gusein-Zade für den Index beweisen kann, falls das Vektorfeld geeignet deformierbar ist. Dies ist aber Thema des 2. Kapitels.

Wir verzichten an dieser Stelle auf die Darstellung weiterer bekannter Resultate und verweisen stattdessen auf das Literaturverzeichnis.

2 Vektorfelder auf vollständigen Durchschnitten

2.1 Relative und absolute Residuen

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie die schon beschriebenen relativen Residuen mit den klassischen (absoluten) Residuen zusammenhängen. Die Resultate sind in dem Artikel [20] des Autors veröffentlicht worden. Dazu sei wie üblich $(V,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ ein vollständiger Durchschnitt der Dimension $n-q$ mit isolierter Singularität und $(g_1,\dots,g_{n-q})$ eine reguläre $\mathscr{O}_{V,0}$-Sequenz, d.h. die Sequenz $(f_1,\dots,f_q,g_1,\dots,g_{n-q})$ ist eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz. Etwas allgemeiner wollen wir Integrale betrachten, deren Integranden Keime von kählerschen Differentialformen sind. Wir erinnern kurz an die Definition. Ist $\Omega^k_{\mathbb{C}^n,0}$ für $k=0,\dots,n$ der $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Modul der Keime holomorpher k-Formen auf $(\mathbb{C}^n,0)$, wobei natürlich $\Omega^0_{\mathbb{C}^n,0} = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ ist, so definiert man für $k=1,\dots,n$

$$\mathscr{R}^k_{\mathbb{C}^n,0} := \sum_{i=1}^{q} f_i \Omega^k_{\mathbb{C}^n,0} + \sum_{i=1}^{q} df_i \wedge \Omega^{k-1}_{\mathbb{C}^n,0}.$$

Dann ist der $\mathscr{O}_{V,0}$-Modul der Keime kählerscher k-Formen auf $(V,0)$ durch $\Omega^k_{V,0} := \Omega^k_{\mathbb{C}^n,0}/\mathscr{R}^k_{\mathbb{C}^n,0}$ definiert. Sind die reellen Hyperflächen $\{|g_i| = \delta_i\}$ für kleine δ_i in allgemeiner Lage, so sei

$$\Sigma := \{f_1 = \dots = f_q = 0, |g_i| := \delta_i, i = 1,\dots,n-q\}$$

der reelle $(n-q)$-Zykel, der durch die Bedingung $d(\arg g_1) \wedge \dots \wedge d(\arg g_{n-q}) \geq 0$ orientiert ist. Wir haben dann für jedes $\eta \in \Omega^{n-q}_{V,0}$ ein wohldefiniertes Integral

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n-q}} \int_\Sigma \frac{\eta}{g_1 \dots g_{n-q}},$$

das relative Residuum von η bezüglich g, das je nach Zweckmäßigkeit mit

$$\operatorname{res}_{V,0} \begin{bmatrix} \eta \\ g_1 \dots g_{n-q} \end{bmatrix}$$

oder $\operatorname{res}^g_{V,0}(\eta)$ bezeichnet wird. Um die Beziehung zwischen relativen und absoluten Residuen auszudrücken, wird der folgende Operator definiert:

$$\lambda \colon \Omega^{n-q}_{V,0} \to \mathscr{O}_{V,0},$$

wobei $\lambda(\eta) := h$ gelte und h durch die Bedingung

$$h dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n := \eta \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_q$$

festgelegt sei. Ziel dieses Abschnitts ist der folgende Satz.

2.1.1 Theorem.

$$\operatorname{res}_{V,0} \begin{bmatrix} \eta \\ g_1 \dots g_{n-q} \end{bmatrix} = \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0} \begin{bmatrix} \lambda(\eta) \\ g_1 \dots g_{n-q} f_1 \dots f_q \end{bmatrix}.$$

Zunächst soll ein einfaches Korollar gezogen werden, das besagt, daß die lokale Schnittmultiplizität m der Hyperflächen $f_1, \ldots, f_q$, $g_1, \ldots, g_{n-q}$ nicht nur als absolutes, sondern auch als relatives Residuum ausgedrückt werden kann.

2.1.2 Korollar.

$$m = \mathrm{res}^g_{V,0}(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{n-q})$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.1.3 und Theorem 2.1.1. □

Theorem 2.1.1 folgt leicht mit Hilfe des folgenden Lemmas. Wir setzen zur Abkürzung

$$DF := \det\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_q)}{\partial(z_{n-q+1}, \ldots, z_n)}\right).$$

2.1.3 Lemma.

$$\mathrm{res}_{V,0}\begin{bmatrix} h dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-q} \\ g_1 \cdots g_{n-q} \end{bmatrix} = \mathrm{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} h \cdot DF \\ g_1 \cdots g_{n-q} f_1 \cdots f_q \end{bmatrix}.$$

Beweis von Theorem 2.1.1. Ist $1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-q} \leq n$ und $1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n$ die Komplementärmenge, so betrachten wir die Permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-q & n-q+1 & \ldots & n \\ j_1 & \ldots & j_{n-q} & i_1 & \ldots & i_q \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten dann

$$\mathrm{res}_{V,0}\begin{bmatrix} h dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_{n-q}} \\ g_1 \cdots g_{n-q} \end{bmatrix} = \mathrm{sign}\,\sigma \cdot \mathrm{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} h \cdot \det\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_q)}{\partial(z_{i_1},\ldots,z_{i_q})}\right) \\ g_1 \cdots g_{n-q} f_1 \cdots f_q \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

unter Anwendung von Lemma 2.1.3, wobei man die durch σ gegebene Koordinatenpermutation und die gewöhnliche Integraltransformationsformel benutzt. Theorem 2.1.1 folgt dann aus Gleichung 2.1 mit Hilfe der Laplace-Entwicklung. □

Zunächst soll ein Spezialfall von Lemma 2.1.3 bewiesen werden. Wir definieren

$$F := (g_1, \ldots, g_{n-q}, f_1, \ldots, f_q).$$

2.1.4 Behauptung. *Lemma 2.1.3 gilt, falls* 0 *ein regulärer Wert von* F *ist.*

Für den Beweis benötigen wir ein paar zusätzliche Berechnungen.

2.1.5 Lemma. *Es sei* $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *die Zerlegung einer quadratischen Matrix in vier Blöcke, wobei* A *and* D *ebenfalls quadratisch seien und zusätzlich* A *invertierbar. Dann gilt*

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

Beweis. Dies ist eine einfache Übung. Da die Rechnung aber auch in [5] angestellt wurde, kann der Beweis dort nachgelesen werden. □

2.1.6 Lemma. *Ist* $H := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *eine invertierbare Matrix, deren Inverses durch* $H^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & I \end{pmatrix}$ *gegeben ist und sind* A *und* E *quadratische Matrizen mit gleicher Zeilenzahl, so gilt*

$$\det D = \det E \cdot \det H.$$

Beweis. Zunächst soll gezeigt werden, daß E genau dann invertierbar ist, wenn D invertierbar ist. Es gilt

$$1 = HH^{-1} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BI \\ CE + DG & CF + DI \end{pmatrix}.$$

Sei nun E invertierbar. Aus $CE + DG = 0$ folgt $-CF - DGE^{-1}F = 0$ und somit folgt unter Verwendung von $DI = \mathbb{1} - CF$

$$\det(\mathbb{1} - CF - DGE^{-1}F) = \det D \cdot \det(I - GE^{-1}F) = 1. \tag{2.2}$$

Daher ist auch D invertierbar. Die andere Implikation erhält man völlig analog hierzu, womit die Behauptung im Falle der Nicht-Invertierbarkeit von E folgt. Ist E invertierbar, so erhält man mit Lemma 2.1.5

$$\det H^{-1} = \det E \cdot \det(I - GE^{-1}F).$$

Nach Gleichung 2.2 gilt

$$\det H^{-1} = \det E \cdot \frac{1}{\det D}$$

und damit $\det D = \det E \cdot \det H$. □

Beweis von Behauptung 2.1.4. Wir stellen zunächst fest, daß V glatt und 0 auch ein regulärer Wert von $G := (g_1, \ldots, g_{n-q})|_V$ ist. Wir wählen neue Koordinaten $x := F(z)$ auf $(\mathbb{C}^n, 0)$ bzw. $x' := G(z)$ auf $(V, 0)$ und setzen $\tilde{F} := F^{-1}$ bzw. $\tilde{G} := G^{-1}$. Unter Benutzung der Integraltransformationsformel und der Cauchyschen Integralformel ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{V,0}\begin{bmatrix} h dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-q} \\ g_1 \cdots g_{n-q} \end{bmatrix} &= \frac{1}{(2\pi i)^{n-q}} \int_\Sigma \frac{h dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-q}}{g_1 \cdots g_{n-q}} \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^{n-q}} \int_T \frac{h(\tilde{G}) \det\left(\frac{\partial(\tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_{n-q})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-q})}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-q}}{x_1 \cdots x_{n-q}} \\
&= h(\tilde{G}(0)) \det\left(\frac{\partial(\tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_{n-q})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-q})}\right)(0) \\
&= h(0) \det\left(\frac{\partial(\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_{n-q})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-q})}\right)(0).
\end{aligned}$$

T ist hierbei der Torus

$$T := \{|x_i| = \delta_i,\ i = 1, \ldots, n-q\},$$

der mit der üblichen Orientierung versehen sei. Analog gilt

$$\operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} h \cdot DF \\ g_1 \cdots g_{n-q} f_1 \cdots f_q \end{bmatrix} = h(0) DF(0) \det\left(\frac{\partial(\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right)(0).$$

Die Gleichheit der Residuen folgt nun mit Lemma 2.1.6. □

Lemma 2.1.3 kann jetzt durch Zurückführung auf Behauptung 2.1.4 bewiesen werden.

Beweis von Lemma 2.1.3. Wir bezeichnen die lokale Multiplizität von F mit μ. Ist G wie oben definiert, so ist die Menge der regulären Werte von G dicht, und für diese $y = (y_1, \ldots, y_{n-q})$ gilt mit $g_y := (g_1 - y_1, \ldots, g_{n-q} - y_{n-q})$

$$\operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} h \cdot DF \\ g_1 \cdots g_{n-q} f_1 \cdots f_q \end{bmatrix} = \lim_{y \to 0} \sum_{i=1}^{\mu} \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n, p_i}\begin{bmatrix} h \cdot DF \\ g_{y,1} \cdots g_{y,n-q} f_1 \cdots f_q \end{bmatrix}.$$

Der Wert $(y,0)$ ist ein regulärer Wert von F, da das Urbild von y unter G aus genau μ einfachen Nullstellen von $G-y$ besteht, die auch die Urbilder von $(y,0)$ unter F sind, und sie daher auch die μ einfachen Nullstellen von $F-(y,0)$ sind. Nach Behauptung 2.1.4 gilt

$$\operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} h\cdot DF \\ g_1\dots g_{n-q}f_1\dots f_q\end{bmatrix} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{(2\pi i)^{n-q}}\int_{\Sigma_{y,\rho}}\frac{h dz_1\wedge\dots\wedge dz_{n-q}}{g_{y,1}\cdots g_{y,n-q}},$$

wobei

$$\Sigma_{y,\rho} := \{f_1=\dots=f_q=0,\ |g_{y,i}|=\rho_i, i=1,\dots,n-q\}$$

und ρ klein genug gewählt seien. $\Sigma_{y,\rho}$ zerfällt dann in μ Komponenten. Nun reicht es aus zu zeigen, daß $\Sigma_{y,\rho}$ homolog zu Σ in der Menge

$$V\setminus\Big(\bigcup_{i=1}^{n-q}\{g_i-y_i=0\}\cup\{0\}\Big)$$

ist, was für klein genug gewähltes y in gleicher Weise wie in [2, p.113] gemacht werden kann. □

2.2 Residuen holomorpher Vektorfelder

Wir behalten für den Rest des Kapitels die Notationen und Voraussetzungen aus Abschnitt 1.2 bei. Wir definieren die relativen und absoluten Residuen von Vektorfeldern tangential an V. Für beliebige $h\in\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ sei das absolute Residuum von X definiert durch

$$\operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(h) := \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} h \\ X_1\dots X_{n-q}f_1\dots f_q\end{bmatrix}$$

sowie das relative Residuum von X durch

$$\operatorname{res}^X_{V,0}(h) := \frac{1}{(2\pi i)^{n-q}}\int_{\Sigma}\frac{h dz_1\wedge\dots\wedge dz_{n-q}}{X_1\cdot\ldots\cdot X_{n-q}}.$$

Wir hatten $\operatorname{res}^X_{V,0}(h) = \operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(hDF)$ gezeigt. Also gilt zusammen mit dem Theorem von Lehmann, Soares und Suwa der folgende Satz.

2.2.1 Theorem. $\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(c_{n-q}DF)$.

Mit dem Theorem kann man dann auch praktisch die Indizes berechnen. Nützlich kann auch das folgende Lemma sein.

2.2.2 Lemma. *Ist zusätzlich $(X_1,\dots,X_n)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz, so gilt für alle $h\in\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$*

$$\operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(hDF) = \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} h\det C \\ X_1\dots X_n\end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir führen die Rechnung nur für $q=1$ aus und bemerken, daß in dem Beweis für beliebiges q dieselben mathematischen Schlüsse benutzt werden. Da die Rechnung aber sehr viel aufwendiger ist und da das Lemma in dieser Arbeit nur im Hyperflächenfall angewendet wird, beschränken wir uns auf $q=1$. Ist also $(X_1,\dots,X_n)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz, so gibt es ein $k\in\mathbb{N}$ mit $f^k\in\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(X_1,\dots,X_n)$ und somit ein $\beta\in\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ mit $f^k=\beta X_n \mod I_{n-1}$, wobei wir $I_{n-1} := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(X_1,\dots,X_{n-1})$ gesetzt haben. Also gilt nach der Transformationsformel für Residuen

$$\operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} hc \\ X_1\dots X_n\end{bmatrix} = \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} hc\beta \\ X_1\dots X_{n-1}f^k\end{bmatrix}.$$

Ähnlich folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(hDF) &= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} hDFf^k \\ X_1\dots X_{n-1}f^{k+1}\end{bmatrix} \\
&= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} hDF\beta X_n \\ X_1\dots X_{n-1}f^{k+1}\end{bmatrix} \\
&= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} hc\beta f \\ X_1\dots X_{n-1}f^{k+1}\end{bmatrix} \\
&= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} hc\beta \\ X_1\dots X_{n-1}f^{k}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

und dies zeigt die Behauptung. Im vorletzten Schritt haben wir

$$DFX_n = cf \mod I_{n-1}$$

benutzt. □

Wir wollen für den Hyperflächenfall c_{n-1} berechnen, welches ja der Koeffizient von t^{n-1} in der formalen Potenzreihenentwicklung von $\det(\mathbb{1}+tDX)/(1+tc)$ ist. Es gilt

$$\frac{1}{1+tc} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c^k t^k.$$

Für $i = 0,\dots,n$ seien $\sigma_i(DX)$ die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $p_{DX}(t)$ von DX, also

$$p_{DX}(t) = \det(DX - \mathbb{1}t) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_{n-i}(DX)t^i.$$

Man erhält damit

$$c_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k c^k \sigma_{n-k-1}(DX),$$

da

$$\det(\mathbb{1}+tDX) = \sum_{i=0}^{n}\sigma_i(DX)t^i$$

gilt. Damit ist der folgende Satz leicht zu beweisen.

2.2.3 Satz. *Sei $q = 1$. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(DF(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k c^k\sigma_{n-k-1}(DX))).$$

Ist zusätzlich $(X_1,\dots,X_n)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz, so gilt

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \operatorname{ind}_{\mathbb{C}^n,0}(X) - \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix}\det(DX - c\mathbb{1}) \\ X_1\dots X_n\end{bmatrix}.$$

Beweis. Wir müssen nur noch die zweite Aussage zeigen. Nach der ersten Aussage und Lemma 2.2.2 gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_{V,0}(X) &= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k c^{k+1}\sigma_{n-k-1}(DX) \\ X_1\dots X_n\end{bmatrix} \\
&= -\operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k c^{k}\sigma_{n-k}(DX) \\ X_1\dots X_n\end{bmatrix} \\
&= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix}\det DX \\ X_1\dots X_n\end{bmatrix} - \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix}\det(DX - c\mathbb{1}) \\ X_1\dots X_n\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Da für den klassischen Poincaré-Hopf-Index von X auf $(\mathbb{C}^n, 0)$ nach der klassischen Residuentheorie

$$\operatorname{ind}_{\mathbb{C}^n,0}(X) = \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} \det DX \\ X_1 \dots X_n \end{bmatrix}$$

gilt, folgt die Behauptung. □

Wir betrachten das folgende Beispiel.

$$D_k: \; f = x^2y + y^{k-1}, \; k \geq 4$$

und

$$X = (k-2)x^{m+1}\frac{\partial}{\partial x} + 2x^m y\frac{\partial}{\partial y}, \; m \geq 3.$$

Hier gilt $c = 2(k-1)x^m$. Außerdem gilt $c_1 = \sigma_1(DX) - c\sigma_0(DX)$, wobei $\sigma_0(DX) = 1$ und $\sigma_1(DX) = (m+1)(k-2)x^m + 2x^m$ ist. Damit folgt, daß

$$c_1\frac{\partial f}{\partial y} = (m-1)(k-2)(k-1)x^m y^{k-2} \bmod x^{m+1}$$

gilt. Also ergibt sich für den Index

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_{V,0}(X) &= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^2,0}\begin{bmatrix} (m-1)(k-1)(k-2)x^m y^{k-2} \\ (k-2)x^{m+1}f \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^2,0}\begin{bmatrix} (m-1)(k-1)x^m y^{k-2} \\ x^{m+1}f \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nun folgt außerdem

$$y^{(k-1)m} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}(x^2y)^{i-1}y^{(k-1)(m-1)}f + (-1)^m x^{m-1}y^m \cdot x^{m+1}$$

und damit $\operatorname{ind}_{V,0}(X) = (m-1)(k-1)$ nach der im ersten Kapitel bereitgestellten Berechnungsmöglichkeit für Residuen.

2.3 Eine algebraische Formel für den GSV-Index

Sei $\mathscr{B}_0 := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_1, \dots, f_q, X_1, \dots, X_{n-q})$. Es sei noch einmal daran erinnert, daß die Koordinaten so gewählt sind, daß $\mathscr{B}_0$ als komplexer Vektorraum endlichdimensional ist. Wir setzen außerdem noch $\mathscr{C}_0 := \mathscr{B}_0 / \operatorname{ann}_{\mathscr{B}_0}(DF)$.

2.3.1 Die glatte Situation

Wir wollen zunächst für einen glatten vollständigen Durchschnitt den Poincaré-Hopf-Index durch die Dimension einer Algebra ausdrücken. Dies soll so geschehen, daß die Definition der Algebra nicht davon abhängt, welcher maximale Minor der Jacobimatrix von f nicht verschwindet. Die Algebra wird $\mathscr{C}_0$ sein.

Seien $1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n$ beliebig aber fest und $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-q} \leq n$ das Komplement von $i_1, \dots, i_q$ in $\{1, \dots, n\}$. Ferner sei

$$DI := \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_q)}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_q})}\right)$$

und σ_I die Permutation

$$\sigma_I := \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-q & n-q+1 & \dots & n \\ j_1 & \dots & j_{n-q} & i_1 & \dots & i_q \end{pmatrix},$$

wobei I der Multiindex $I := (i_1, \dots, i_q)$ ist. Zuletzt setzen wir noch

$$\mathscr{B}_0^I := \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{(f_1, \dots, f_q, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-q}})}$$

und im Falle $DI(0) \neq 0$

$$\gamma_I := \frac{\text{sign } \sigma_I}{DI} \det \left(\frac{\partial(X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-q}}, f_1, \dots, f_q)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \right).$$

2.3.1 Lemma. *Sei $DI(0) \neq 0$. Dann gilt*

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{B}_0^I.$$

Beweis. Mit dem Satz über implizite Abbildungen ist es nicht schwer zu zeigen, daß $X|_V$ zu dem Vektorfeld

$$Y := X_{j_1} \circ \psi \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + X_{j_{n-q}} \circ \psi \frac{\partial}{\partial y_{n-q}}$$

auf $(\mathbb{C}^{n-q}, 0)$ korrespondiert, wobei $\psi \colon (\mathbb{C}^{n-q}, 0) \to (V, 0)$ eine geeignete biholomorphe Abbildung ist. Aus

$$\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{n-q},0}}{(X_{j_1} \circ \psi, \dots, X_{j_{n-q}} \circ \psi)} \cong \mathscr{B}_0^I$$

folgt die Behauptung. □

2.3.2 Lemma. *Sei $DI(0) \neq 0$. Dann gilt für jedes $h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$*

$$\operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(hDF) = \operatorname{sign} \sigma_I \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0} \left[\frac{hDI}{X_{j_1} \dots X_{j_{n-q}} f_1 \dots f_q} \right].$$

Beweis. Nach der Transformationsformel müssen wir zeigen, daß es eine Matrix A gibt mit

$$(X_1, \dots, X_{n-q}, f_1, \dots, f_q)^t = A(X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-q}}, f_1, \dots, f_q)^t$$

und $\det A = \text{sign } \sigma_I DF/DI$. Aus der Gleichung $Xf = Cf$ folgt zunächst

$$\begin{pmatrix} X_{i_1} \\ \vdots \\ X_{i_q} \end{pmatrix} = Cf - \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_q)}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_q})} \right)^{-1} \frac{\partial(f_1, \dots, f_q)}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_{n-q}})} \begin{pmatrix} X_{j_1} \\ \vdots \\ X_{j_{n-q}} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Sei nun etwa $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n-q\}$ und $i_{k+1}, \dots, i_q \in \{n-q+1, \dots, n\}$. Dann folgt $j_1, \dots, j_{n-q-k} \in \{1, \dots, n-q\}$ und $j_{n-q-k+1}, \dots, j_{n-q} \in \{n-q+1, \dots, n\}$. Für $k = 0$ folgt die Behauptung natürlich sofort. Mit Gleichung 2.3 erhält man eine Matrix B mit

$$(X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-q+k}}, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}, f_1, \dots, f_q)^t = B(X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-q}}, f_1, \dots, f_q)^t.$$

Ist $\sigma' \in S_{n-q}$ die Permutation mit

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-q+k & n-q+k+1 & \dots & n-q \\ j_1 & \dots & j_{n-q-k} & i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix},$$

so gilt $\det A = \text{sign } \sigma' \det B$. Die Determinante $\det B$ ist die Determinante des oberen rechten $(k \times k)$-Blocks der Matrix

$$- \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_q)}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_q})} \right)^{-1} \frac{\partial(f_1, \dots, f_q)}{\partial(z_{j_1}, \dots, z_{j_{n-q}})}.$$

Ist $d_{l,m}$ die Determinante der Matrix, die man erhält, indem man die l-te Spalte von

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{i_1},\dots,z_{i_q})}$$

durch die m-te Spalte von

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{j_1},\dots,z_{j_{n-q}})}$$

ersetzt und ist

$$D := (d_{l,m})_{l=1,\dots,k}^{m=n-q-k+1,\dots,n-q},$$

so müssen wir also nur noch

$$\det D = (DI)^{k-1} \det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{j_{n-q-k+1}},\dots,z_{j_{n-q}},z_{i_{k+1}},\dots,z_{i_q})}\right)$$

zeigen. Dies kann durch Induktion über k geschehen, wobei der Anfang $k=1$ offensichtlich ist. Der Induktionsschritt ist eine etwas lästige Rechnung, die an dieser Stelle nicht aufgeschrieben werden soll. □

2.3.3 Lemma. *Ist V glatt, so gilt*

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}_0.$$

Beweis. Sei $DI(0) \neq 0$. Nach Lemma 2.3.1 gilt

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{B}_0^I.$$

Wenn wir eine Klasse $[h] \in \mathscr{C}_0$ auf die Klasse $[h]'$ von h in $\mathscr{B}_0^I$ abbilden, so erhalten wir einen Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren, da nach Lemma 2.3.2 und der Lokalen Dualität das Folgende gilt:

$$\begin{aligned}
&[h] = 0 \quad \text{in } \mathscr{C}_0\\
\Longleftrightarrow\; & hDF \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(f_1,\dots,f_q,X_1,\dots,X_{n-q})\\
\Longleftrightarrow\; & \operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(ghDF) = 0 \quad \text{für alle } g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}\\
\Longleftrightarrow\; & \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} ghDI \\ X_{j_1}\dots X_{j_{n-q}} f_1 \dots f_q\end{bmatrix} = 0 \quad \text{für alle } g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}\\
\Longleftrightarrow\; & hDI \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(X_{j_1},\dots X_{j_{n-q}},f_1,\dots,f_q)\\
\Longleftrightarrow\; & [h]' = 0 \quad \text{in } \mathscr{B}_0^I
\end{aligned}$$

□

2.3.4 Lemma. *Ist $DI(0) \neq 0$, so gilt in $\mathscr{C}_0$ die Gleichung $c_{n-q} = \gamma_I$.*

Beweis. Nach der Transformationsformel für Residuen und Lemma 2.3.1 gilt

$$\operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(DF\gamma_I) = \operatorname{ind}_{V,0}(X)$$

und außerdem für $h \in \mathfrak{m}_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}$

$$\operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(DF\gamma_I h) = \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} h\det\left(\frac{\partial(X_{j_1},\dots,X_{j_{n-q}},f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}\right) \\ X_{j_1}\dots X_{j_{n-q}} f_1\dots f_q\end{bmatrix} = 0$$

und daher erzeugt $DF\gamma_I$ den eindimensionalen Sockel von $\mathscr{B}_0$. Nach Theorem 2.2.1 gilt weiterhin

$$\operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(DFc_{n-q}) = \operatorname{ind}_{V,0}(X),$$

also $DFc_{n-q} \neq 0$ in $\mathscr{B}_0$. Da V glatt ist, gibt es kleine Deformationen X_t von X tangential an V, so daß X_t für geeignete kleine t nur einfache Nullstellen p_i auf V in einer kleinen Umgebung des Ursprungs besitzt. Außerdem können wir annehmen, daß für diese Nullstellen $DI(p_i) \neq 0$ gilt. Für $h \in \mathfrak{m}_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(DFc_{n-q}h) &= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} \operatorname{sign}\sigma_I DIc_{n-q}h \\ X_{j_1}\dots X_{j_{n-q}} f_1 \dots f_q \end{bmatrix} \\ &= \lim_{t\to 0}\sum_i h(p_i)\operatorname{ind}_{V,p_i}(X_t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung folgt aus dem Stetigkeitsprinzip für Residuen, aus der Tatsache, daß die Algebren $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,p_i}/(X_{t,j_1},\dots,X_{t,j_{n-q}},f_1\dots,f_q)$ eindimensional sind und $\operatorname{sign}\sigma_I DIc_{n-q}(t)$ aufgrund der Transformationsformel eine Einheit in diesen Algebren ist. Also erzeugt auch $c_{n-q}DF$ den eindimensionalen Sockel von $\mathscr{B}_0$ und wegen $\operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(DFc_{n-q}) = \operatorname{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(DF\gamma_I)$ folgt $DF(c_{n-q}-\gamma_I)=0$ in $\mathscr{B}_0$ und daher $c_{n-q}=\gamma_I$ in $\mathscr{C}_0$. □

2.3.2 Verallgemeinerung auf die singuläre Situation

2.3.5 Definition. X heißt ein gutes Vektorfeld (bzgl. V), falls es eine holomorphe Deformation X_t von X gibt, so daß für alle $t \in \mathbb{C}^q$ genügend nahe bei 0 das Vektorfeld X_t tangential an die t-Faser V_t von f ist.

Für ein gutes Vektorfeld ist $\operatorname{ind}_{V,0}(X)$ die Summe der Indizes von X_t auf V_t, wobei über alle Nullstellen von X_t summiert wird, die gegen 0 streben. Dies folgt aus den entsprechenden im Literaturverzeichnis angegebenen Artikeln, kann hier aber mittels Theorem 2.2.1 und dem Stetigkeitsprinzip für Residuen auch direkt gesehen werden. Ist V glatt, so sind natürlich alle Vektorfelder tangential an V gut. Ist z.B. im Hyperflächenfall c in dem Ideal, daß von den Komponenten der partiellen Ableitungen von f erzeugt wird, so ist das Vektorfeld ebenfalls gut. Ist nämlich

$$c = \alpha_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + \alpha_n\frac{\partial f}{\partial z_n},$$

so setze man $X_{t,i} := X_i - t\alpha_i$. Dann gilt

$$X_t(f-t) = cf - \sum_{i=1}^n t\alpha_i\frac{\partial f}{\partial z_i} = c(f-t).$$

Dies läßt sich leicht zu einem hinreichenden Kriterium verallgemeinern.

2.3.6 Satz (Hinreichendes Kriterium für gute Vektorfelder). *Es seien alle Koeffizienten der Matrix C in dem Ideal enthalten, das von den maximalen Minoren der Jacobimatrix von f in $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ erzeugt wird. Dann ist X ein gutes Vektorfeld.*

Beweis. Wir zeigen sogar, daß es eine holomorphe Deformation X_t von X gibt, so daß $X_t(f-t) = C(f-t)$ gilt. Für $(i_1,\dots,i_q)\in\{1,\dots,n\}^q$ und $(j_1,\dots,j_{q-1})\in\{1,\dots,n\}^{q-1}$ definieren wir zunächst

$$f_{i_1,\dots,i_q} := \det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{i_1},\dots,z_{i_q})}\right) \text{ und } f^k_{j_1,\dots,j_{q-1}} := \det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,\hat{f}_k,\dots,f_q)}{\partial(z_{j_1},\dots,z_{j_{q-1}})}\right).$$

Ist $C=(c_{l,m})$, so sei etwa

$$c_{l,m} = \sum_{(i_1,\dots,i_q)\in\{1,\dots,n\}^q} c^{l,m}_{i_1,\dots,i_q} f_{i_1,\dots,i_q}.$$

Wir setzen nun für $k = 1, \dots, q-1$

$$\delta^{i,j}_{j_1,\dots,j_{q-1}} := \delta^{j_k,j}_{j_1,\dots,j_{k-1},i,j_{k+1},\dots,j_{q-1}} := \delta^{j}_{i,j_1,\dots,j_{q-1}}$$

und außerdem

$$\delta^{l}_{i_1,\dots,i_q} := -\sum_{m=1}^{q} \sum_{(i_1,\dots,i_q)\in\{1,\dots,n\}^q} c^{l,m}_{i_1,\dots,i_q} t_m.$$

Wir definieren die Deformation durch

$$X_{t,i} := X_i + \sum_{j=1}^{q} \sum_{(j_1,\dots,j_{q-1})\in\{1,\dots,n\}^{q-1}} \delta^{i,j}_{j_1,\dots,j_{q-1}} (-1)^{j+1} f^{j}_{j_1,\dots,j_{q-1}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial z_i} X_{t,i} &= \sum_{m=1}^{n} c_{l,m} f_m + \sum_{(i_1,\dots,i_q)\in\{1,\dots,n\}^q} \delta^{l}_{i_1,\dots,i_q} f_{i_1,\dots i_q} \\ &= \sum_{m=1}^{n} c_{l,m}(f_m - t_m).\end{aligned}$$

□

Das folgende Theorem ist der Hauptsatz dieses Abschnitts.

2.3.7 Theorem. *Sei X ein gutes Vektorfeld. Dann gilt*
(i) $\mathscr{C}_0$ hat einen eindimensionalen Sockel, der von c_{n-q} erzeugt wird.
(ii) $\mathrm{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}_0$ *für $q = n-1$.*

Das bedeutet, daß jede Linearform auf $\mathscr{C}_0$ mit $l(c_{n-q}) \neq 0$ eine nicht entartete Bilinearform $<,>_l$ induziert. Es wird sich zeigen, daß eine solche Linearform explizit durch $\mathrm{res}^X_{V,0}(\cdot)$ gegeben werden kann.

2.3.8 Lemma. $\mathrm{res}^X_{V,0}(\cdot)$ *definiert eine Linearform auf $\mathscr{C}_0$, so daß*

$$\mathrm{res}^X_{V,0}(hg) = 0 \text{ für alle } h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \Rightarrow g = 0 \text{ in } \mathscr{C}_0$$

gilt.

Beweis. Nach Lemma 2.1.3 gilt $\mathrm{res}^X_{V,0}(h) = \mathrm{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(hDF)$, was bedeutet, daß das Residuum $\mathrm{res}^X_{V,0}(\cdot)$ auf $\mathrm{ann}_{\mathscr{B}_0}(DF)$ verschwindet. Weiterhin impliziert $\mathrm{res}^X_{V,0}(hg) = 0$ für alle $h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, daß $\mathrm{res}^X_{\mathbb{C}^n,0}(hgDF) = 0$ für alle $h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ gilt. Die Lokale Dualität liefert nun

$$gDF \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(X_1, \dots, X_{n-q}, f_1, \dots, f_q)$$

und daher gilt $g \in \mathrm{ann}_{\mathscr{B}_0}(DF)$. □

Für $q = n-1$ bezeichnen wir mit m_i denjenigen Minor der Jacobimatrix von f, den man durch Streichen der i-ten Spalte erhält. Natürlich gilt $DF = m_1$. Es sei noch einmal daran erinnert, daß wir stets annehmen, daß die Koordinaten so gewählt sind, daß $(f_1, \dots, f_{n-1}, X_1)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz ist. Der Einfachheit halber nehmen wir außerdem $m_i(0) = 0$ für $i = 1, \dots, n$ an.

2.3.9 Lemma. *Es sei $q = n - 1$. Dann gilt:*
(i) $(f_1, \dots, f_{n-1}, DF)$ ist eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz.
(ii) Die Dimension von $\mathscr{C}_0$ hängt nicht von der Koordinatenwahl ab, vorausgesetzt, daß $(f_1, \dots, f_{n-1}, X_1)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz in jedem Koordinatensystem ist.
(iii) Nach linearen Koordinatenwechseln in $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^{n-1}$ kann man annehmen, daß $(f_1, \dots, f_{n-2}, DF, m_2)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz ist.

Beweis. (i) Alle Berechnungen werden in dem Ring $\mathscr{O}_{V,0} = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_1, \dots, f_{n-1})$ ausgeführt. Wir müssen zeigen, daß DF kein Nullteiler in diesem Ring ist. Durch Anwendung der Cramerschen Regel auf die Gleichung $Xf = Cf$ erhält man die Gleichungen
$$(-1)^i m_i X_1 = -DF X_i \tag{2.4}$$
für $i = 1, \dots, n$. Nun sei $gDF = 0$ in $\mathscr{O}_{V,0}$. Die Multiplikation mit X_i, Gleichung 2.4 und die Tatsache, daß X_1 kein Nullteiler in $\mathscr{O}_{V,0}$ ist, ergibt $gm_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Der Ring, den man durch Austeilen von $\mathscr{O}_{V,0}$ nach allen m_i erhält, ist artinsch, und daher gibt es komplexe Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, so daß $h := \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_n m_n$ kein Nullteiler in $\mathscr{O}_{V,0}$ ist. Andererseits gilt $gh = 0$ in $\mathscr{O}_{V,0}$ und daher $g = 0$ in $\mathscr{O}_{V,0}$.
(ii) Sei $\phi\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, $\phi(y) = z$, biholomorph und $\psi := \phi^{-1}$. Wir bezeichnen mit Y das in y-Koordinaten berechnete Vektorfeld und mit DF^y den in y-Koordinaten berechneten Minor. Standardberechnungen liefern
$$\begin{pmatrix} Y_1 \circ \psi \\ \vdots \\ Y_n \circ \psi \end{pmatrix} = \frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$
und
$$DF^y \circ \psi = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} (\det D\phi) \circ \psi \, \frac{\partial \psi_1}{\partial z_j} m_j.$$
Wir setzen $\mathscr{B}_0' := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(f_1, \dots, f_{n-1}, Y_1 \circ \psi)$ und $\mathscr{C}_0' := \mathscr{B}_0' / \operatorname{ann}_{\mathscr{B}_0'}(DF^y \circ \psi)$. Wir konstruieren einen Epimorphismus $\varphi\colon \mathscr{C}_0 \to \mathscr{C}_0'$. Für jedes $g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ bezeichnen wir ebenfalls mit g die Klassen von g in diesen Algebren und definieren $\varphi(g) := g$. Wieder werden alle Berechnungen in dem Ring $\mathscr{O}_{V,0}$ durchgeführt. Es soll gezeigt werden, daß φ wohldefiniert ist. Sei $gDF = \alpha X_1$. Multiplikation mit m_i, Gleichung 2.4 und die Tatsache, daß DF kein Nullteiler in $\mathscr{O}_{V,0}$ ist, liefern $gm_i = (-1)^{i+1} \alpha X_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt für jedes i
$$\begin{aligned} gDF^y \circ \psi &= (\det D\phi) \circ \psi \, \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \psi_1}{\partial z_i} g m_i \\ &= (\det D\phi) \circ \psi \, \sum_{i=1}^{n} \alpha X_i \frac{\partial \psi_1}{\partial z_i} \\ &= \alpha (\det D\phi) \circ \psi \; Y_1 \circ \psi. \end{aligned}$$
Dies zeigt, daß φ wohldefiniert ist. Die Surjektivität ist offensichtlich, und die andere Richtung folgt analog. Daher hängt $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}_0$ nicht von der Koordinatenwahl in $\mathbb{C}^n$ ab. Wenn man Koordinatenwechsel im Bildraum $\mathbb{C}^{n-1}$ betrachtet, so ist die Invarianz von $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}_0$ offensichtlich.
(iii) Nach einem allgemeinen linearen Koordinatenwechsel in $\mathbb{C}^{n-1}$, siehe [25], kann man annehmen, daß $(f_1, \dots, f_{n-2})$ einen ICIS definiert und die 1-Form df_{n-1} eine isolierte Nullstelle auf diesem ICIS besitzt. Nun zeigt Lemma 4.1.7, daß nach einem linearen Koordinatenwechsel in $\mathbb{C}^n$ $(f_1, \dots, f_{n-2}, DF, m_2)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz ist. □

Beweis von Theorem 2.3.7. (i) Lemma 2.3.8 besagt, daß das Residuum $\operatorname{res}_{V,0}^{X}(\cdot)$ eine nicht-entartete Bilinearform auf $\mathscr{C}_0$ induziert, was bedeutet, daß $\mathscr{C}_0$ einen eindimensionalen Sockel besitzt. Andererseits gilt $h \in \mathfrak{m}_{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}$

$$\operatorname{res}_{V,0}^{X}(hc_{n-q}) = \lim_{t\to 0}\sum_i h(p_i)\operatorname{ind}_{V_t,p_i}(X_t) = 0,$$

was bedeutet, daß c_{n-q} den Sockel erzeugt.
(ii) Nun sei $q = n-1$ und X_t eine gute Deformation von X: Für kleine Umgebungen U bzw. T der Ursprünge in $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^{n-1}$ betrachte man $Z \subset U \times T$ definiert durch

$$Z := \{f_{t,1} = \cdots = f_{t,n-1} = X_{t,1} = 0\},$$

wobei $f_{t,i} := f_i - t_i$ gesetzt wurde. Es sei $\pi\colon Z \to T$ die endliche Projektion. Wir definieren

$$\mathscr{B}_{t,p} := \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,p}}{(f_{t,1},\dots,f_{t,n-1},X_{t,1})},\quad \mathscr{B}_t := \bigoplus_{p\in\pi^{-1}(t)}\mathscr{B}_{t,p},\quad \mathscr{B} := \bigcup_{t\in T}\mathscr{B}_t.$$

$\mathscr{B}$ hat die natürliche Struktur eines holomorphen Vektorbündels über T, die durch die lokal freie Garbe $\pi_*\mathscr{O}_Z$ induziert wird. Ähnlich definieren wir

$$\mathscr{C}_{t,p} := \frac{\mathscr{B}_{t,p}}{\operatorname{ann}_{\mathscr{B}_{t,p}}(DF)},\quad \mathscr{C}_t := \bigoplus_{p\in\pi^{-1}(t)}\mathscr{C}_{t,p},\quad \mathscr{C} := \bigcup_{t\in T}\mathscr{C}_t.$$

Es soll gezeigt werden, daß $\mathscr{C}$ die natürliche Struktur eines holomorphen Vektorbündels vom Rang $\operatorname{ind}_{V,0}(X)$ über T hat.

Nach Lemma 2.3.9 (ii) können wir annehmen, daß die Koordinaten wie in Lemma 2.3.9 (iii) gewählt sind. Mittels π betrachten wir $\mathscr{O}_{Z,0}/(DF)$ als endlich erzeugten $\mathscr{O}_{T,0}$-Modul und behaupten, daß

$$\operatorname{depth}_{\mathscr{O}_{T,0}}\frac{\mathscr{O}_{Z,0}}{(DF)} = n-1$$

gilt. Für $k = 1,\dots,n-1$ sei

$$t_k g = 0 \ \text{ in } \ \frac{\mathscr{O}_{Z,0}}{(DF,t_1,\dots,t_{k-1})}.$$

Das bedeutet, daß es Repräsentanten gibt mit

$$t_k g = \alpha X_{t,1} \ \text{ in } \ \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n-1},0}}{(f_{t,1},\dots,f_{t,n-1},t_1,\dots,t_{k-1},DF)}.$$

Durch Anwendung der Cramerschen Regel auf die Tangentialgleichung $Xf = Cf$ erhält man

$$t_k g m_2 = 0 \ \text{ in } \ \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n-1},0}}{(f_{t,1},\dots,f_{t,n-1},t_1,\dots,t_{k-1},DF)}.$$

Nach Lemma 2.3.9 (i) und der Koordinatenwahl sind t_k und m_2 keine Nullteiler in der letzten Algebra, da $(f_{t,1},\dots,f_{t,n-1},t_1,\dots,t_{n-2},DF,m_2)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^{2n-1},0}$-Sequenz ist. Dies beweist die Behauptung.

Nach dem Syzygiensatz und der Auslander-Buchsbaum-Formel ist $\mathscr{O}_{Z,0}/(DF)$ ein freier $\mathscr{O}_{T,0}$-Modul. Es besteht eine exakte Sequenz von $\mathscr{O}_{T,0}$-Moduln

$$0 \to \frac{\mathscr{O}_{Z,0}}{\operatorname{ann}_{\mathscr{O}_{Z,0}}(DF)} \to \mathscr{O}_{Z,0} \to \frac{\mathscr{O}_{Z,0}}{(DF)} \to 0.$$

Das Tiefen-Lemma, siehe [18, 6.5.18], zeigt, daß

$$\operatorname{depth}_{\mathscr{O}_{T,0}} \frac{\mathscr{O}_{Z,0}}{\operatorname{ann}_{\mathscr{O}_{Z,0}}(DF)} = n-1$$

gilt, was wiederum nach dem Syzygiensatz und der Auslander-Buchsbaum-Formel bedeutet, daß $\mathscr{O}_{Z,0}/\operatorname{ann}_{\mathscr{O}_{Z,0}}(DF)$ ein freier $\mathscr{O}_{T,0}$-Modul ist. Wir haben gesehen, daß der kohärente $\mathscr{O}_T$-Modul

$$\mathscr{F} := \pi_*\mathscr{O}_Z/\operatorname{ann}_{\mathscr{O}_Z}(DF)$$

frei ist, falls T genügend klein gewählt ist. Nach [4] ist dies äquivalent zu der Aussage, daß die Funktion $\nu\colon T \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\nu(t) := \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{F}_t \otimes_{\mathscr{O}_{T,t}} \mathbb{C}$$

konstant ist. Nun erhält man aus der Exaktheit der Sequenz

$$0 \to \mathscr{F}_t \to (\pi_*\mathscr{O}_Z)_t \to (\pi_*\mathscr{O}_Z/(DF))_t \to 0$$

durch Tensorieren mit $\mathbb{C}$ die lange exakte Torsionssequenz

$$0 \to \mathscr{F}_t \otimes_{\mathscr{O}_{T,t}} \mathbb{C} \to \mathscr{B}_t \to \mathscr{B}_t/(DF) \to 0,$$

wobei benutzt wurde, daß $(\pi_*\mathscr{O}_Z/(DF))_t$ ein freier $\mathscr{O}_{T,t}$-Modul ist, was äquivalent, siehe [4], zur Aussage ist, daß

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathscr{O}_{T,t}}((\pi_*\mathscr{O}_Z/(DF))_t, \mathbb{C}) = 0$$

gilt. Da außerdem eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathscr{C}_t \to \mathscr{B}_t \to \mathscr{B}_t/(DF) \to 0$$

besteht, bedeutet dies, daß $\nu(t) = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}_t$ für alle $t \in T$ gilt. Nach Lemma 2.3.3 ist $\nu(t)$ die Summe der Poincaré-Hopf Indizes von X_t auf der t-Faser von f für $t \neq 0$, was $\operatorname{ind}_{V,0}(X)$ ist und daher gilt $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}_0 = \operatorname{ind}_{V,0}(X)$. Die Abbildung $\cdot DF\colon \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ zwischen Vektorbündeln hat konstanten Rang und liefert die natürliche Struktur eines holomorphen Vektorbündels für $\mathscr{C}$. □

2.3.3 Beispiele und Bemerkungen

Wir geben nun einige Beispiele für gute Vektorfelder auf Kurven. Man kann stets das äußere Produkt der Zeilen der Jacobimatrix von f betrachten. Auf diese Weise erhält man ein gutes Vektorfeld mit isolierter Nullstelle auf der Singularität, wobei die Matrix C trivial ist und der Index 0.

Ein Beispiel einer Familie nicht-trivialer guter Vektorfelder auf einer ebenen Kurve ist das schon vorher betrachtete Beispiel:

$$D_k: \ f = x^2y + y^{k-1}, \ k \geq 4$$

und

$$X = (k-2)x^{m+1}\frac{\partial}{\partial x} + 2x^m y\frac{\partial}{\partial y}, \ m \geq 3$$

mit $c = 2(k-1)x^m$. Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{ann}_{\mathscr{B}_0}(DF) \to \mathscr{B}_0 \xrightarrow{\cdot DF} \mathscr{B}_0 \to \frac{\mathscr{B}_0}{(DF)} \to 0$$

und daher

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{ann}_{\mathscr{B}_0}(DF) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{B}_0}{(DF)}.$$

Es ist leicht zu berechnen, daß $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{B}_0/(DF) = 2(k-1)$ und $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{B}_0 = (k-1)(m+1)$ gilt und daher $\operatorname{ind}_{V,0}(X) = (k-1)(m-1)$.

Ein Beispiel einer Familie guter Vektorfelder auf einer Raumkurve ist

$$f_1 := x^2 + y^2 + z^2 \ \ , f_2 := xy$$

mit

$$X := z^l(x-y)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) \ \ , l \geq 1.$$

Hier gilt

$$C = \begin{pmatrix} 2z^l(x-y) & 0 \\ 0 & 2z^l(x-y) \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist (f_1, f_2, X_3) eine reguläre Sequenz und wir müssen die Koordinaten permutieren. Das bedeutet, daß der Index durch die Dimension der Algebra gegeben wird, die man erhält, indem man $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^3,0}/(f_1, f_2, X_3)$ durch den Annulator von

$$\det \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

austeilt. Dadurch erhält man einen nicht-trivialen Index, den man mit Methoden der Computeralgebra berechnen kann.

Nun soll erklärt werden, warum Theorem 2.3.7 für beliebige vollständige Durchschnitte falsch ist. Wir betrachten den Spezialfall $n = 3$ und $q = 1$ und setzen $f_i := \partial f/\partial z_i$ für $i = 1, 2, 3$. Wir übernehmen die Notationen aus dem Beweis von Theorem 2.3.7 und betrachten den kohärenten $\mathscr{O}_T$-Modul $\pi_*\mathscr{O}_Z/(f_3)$, wobei T eine kleine Umgebung von 0 in $\mathbb{C}$ ist. Hier ist $Z := \{f_{t,1} = X_{t,1} = X_{t,2} = 0\} \subset U \times T$ und f, X_1, X_2 eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^3,0}$-Sequenz. Ist T genügend klein, so können wir annehmen, daß diese Garbe lokal frei über allen $t \neq 0$ ist. Offensichtlich ist t kein Nullteiler in $\mathscr{F}_0$ und daher erhält man wie in dem Beweis von 2.3.7 ein Erhaltungsgesetz, und es gilt

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{F}_0 \otimes_{\mathscr{O}_{T,0}} \mathbb{C}.$$

Weiterhin besteht eine exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^{\mathscr{O}_{T,0}}(\pi_*\mathscr{O}_{Z,0}/(f_3), \mathbb{C}) \to \mathscr{F}_0 \otimes_{\mathscr{O}_{T,0}} \mathbb{C} \to \mathscr{B}_0 \to \mathscr{B}_0/(f_3) \to 0$$

und dies bedeutet

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}_0 + \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Tor}_1^{\mathscr{O}_{T,0}}(\pi_*\mathscr{O}_{Z,0}/(f_3), \mathbb{C}).$$

Wir zeigen nun, daß $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Tor}_1^{\mathscr{O}_{T,0}}(\pi_*\mathscr{O}_{Z,0}/(f_3), \mathbb{C}) > 0$ gilt, falls die Hyperfläche nicht glatt ist, was äquivalent zur Aussage ist, daß t ein Nullteiler in $\mathscr{O}_{Z,0}/(f_3)$ ist. Wir setzen $\mathscr{O}_{4,0} := \mathbb{C}\{z_1, z_2, z_3, t\}$. Die Funktionen $(f - t, f_1, f_2, f_3)$ definieren eine isolierte Nullstelle in $(\mathbb{C}^4, 0)$ und liefern daher eine reguläre $\mathscr{O}_{4,0}$-Sequenz. Es gilt

$$f_1 X_{t,1} + f_2 X_{t,2} = 0$$

in dem Ring $\mathscr{O}_{4,0}/(f - t, f_3)$. Es folgt, daß $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{O}_{4,0}$ existieren mit $X_{t,1} = \gamma_1 f_2$ und $X_{t,2} = \gamma_2 f_1$ in $\mathscr{O}_{4,0}/(f - t, f_3)$. Einsetzen in die Tangentialgleichung zeigt, daß es ein $\gamma \in \mathscr{O}_{4,0}$ gibt, so daß $X_{t,1} = \gamma f_2$ und $X_{t,2} = -\gamma f_1$ in $\mathscr{O}_{4,0}/(f - t, f_3)$ gilt. Andererseits ist $\mathscr{O}_{Z,0}/(f_3, t)$ artinsch und daher ist $(f - t, \gamma, f_3, t)$ eine schwach reguläre $\mathscr{O}_{4,0}$-Sequenz. Das bedeutet, daß es eine exakte Sequenz

$$0 \to \frac{\mathscr{O}_{4,0}}{(f - t, f_1, f_2, f_3)} \xrightarrow{\cdot\gamma} \frac{\mathscr{O}_{4,0}}{(f - t, \gamma f_1, \gamma f_2, f_3)} \to \frac{\mathscr{O}_{4,0}}{(f - t, \gamma, f_3)} \to 0$$

gibt mit

$$\frac{\mathscr{O}_{4,0}}{(f-t,\gamma f_1,\gamma f_2,f_3)} \cong \frac{\mathscr{O}_{Z,0}}{(f_3)}.$$

Damit folgt $\operatorname{depth}_{\mathscr{O}_{T,0}} \mathscr{O}_{Z,0}/(f_3) = 0$: Für $\gamma(0) \neq 0$ ist das offensichtlich. Für $\gamma(0) = 0$ erhält man die Aussage durch die Anwendung des Tiefen-Lemmas mit

$$\operatorname{depth}_{\mathscr{O}_{T,0}} \frac{\mathscr{O}_{4,0}}{(f-t,f_1,f_2,f_3)} = 0$$

und

$$\operatorname{depth}_{\mathscr{O}_{T,0}} \frac{\mathscr{O}_{4,0}}{(f-t,\gamma,f_3)} = 1.$$

2.4 Eine Signaturformel

Nun sei

$$(V^{\mathbb{R}},0) := (\{f_1^{\mathbb{R}} = \cdots = f_q^{\mathbb{R}} = 0\},0) \subset (\mathbb{R}^n,0)$$

eine reell analytische Varietät der Dimension $n-q$. Seien V und f die Komplexifizierungen und ferner definiere f eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts der Dimension $n-q$. Weiterhin sei das reell analytische Vektorfeld $X^{\mathbb{R}}$ tangential an $(V_{\mathbb{R}},0)$ mit einer algebraisch isolierten Nullstelle auf $(V^{\mathbb{R}},0)$. Wie im vorherigen Abschnitt sei T eine kleine offene Kugel um den Ursprung in $\mathbb{C}^q$ und es sei $T^{\mathbb{R}}$ die entsprechende reelle Teilmenge in $\mathbb{R}^q$. Außerdem nehmen wir an, daß $X^{\mathbb{R}}$ im reell analytischen Sinne gut ist. Wir behalten die Notationen des vorherigen Abschnittes für sämtliche Komplexifizierungen bei und bezeichnen für reelles t die reelle Algebra assoziiert zu $\mathscr{C}_{t,p}$ mit $\mathscr{C}_{t,p}^{\mathbb{R}}$, falls $X^{\mathbb{R}}|_{V_t^{\mathbb{R}}}(p) = 0$ und $p \in \mathbb{R}^n$ gilt.

2.4.1 Die Signaturformel für den glatten Fall

2.4.1 Lemma. *Ist* $(V^{\mathbb{R}},0)$ *glatt und* $l\colon \mathscr{C}_0^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ *eine Linearform mit* $l(c_{n-q}) > 0$, *so gilt* $\operatorname{ind}_{V^{\mathbb{R}},0}(X^{\mathbb{R}}) = \operatorname{Signatur} <,>_l$.

Beweis. Sei $DI(0) \neq 0$. Mit dem Satz über implizite Abbildungen ist es nicht schwer zu zeigen, daß das Vektorfeld $X^{\mathbb{R}}|_{V^{\mathbb{R}}}$ mit

$$Y := X_{j_1}^{\mathbb{R}} \circ \psi \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + X_{j_{n-q}}^{\mathbb{R}} \circ \psi \frac{\partial}{\partial y_{n-q}},$$

korrespondiert, wobei $\psi\colon (\mathbb{R}^{n-q},0) \to (V^{\mathbb{R}},0)$ ein Diffeomorphismus mit $\psi_{j_k}(y) = y_{j_k}$ für $k = 1,\ldots,n-q$ ist. Zunächst gilt nach der Kettenregel wie üblich

$$\frac{\partial(\psi_{i_1},\ldots,\psi_{i_q})}{\partial(y_1,\ldots,y_{n-q})} = -\left(\frac{\partial(f_1^{\mathbb{R}},\ldots,f_q^{\mathbb{R}})}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_q})} \circ \psi\right)^{-1} \frac{\partial(f_1^{\mathbb{R}},\ldots,f_q^{\mathbb{R}})}{\partial(x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-q}})} \circ \psi.$$

Daraus folgt unter abermaliger Benutzung der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial(Y_1,\ldots,Y_{n-q})}{\partial(y_1,\ldots,y_{n-q})} &= \frac{\partial(X_{j_1}^{\mathbb{R}},\ldots,X_{j_{n-q}}^{\mathbb{R}})}{\partial(x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-q}})} \circ \psi \\ &\quad - \frac{\partial(X_{j_1}^{\mathbb{R}},\ldots,X_{j_{n-q}}^{\mathbb{R}})}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_q})} \circ \psi \left(\frac{\partial(f_1^{\mathbb{R}},\ldots,f_q^{\mathbb{R}})}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_q})} \circ \psi\right)^{-1} \frac{\partial(f_1^{\mathbb{R}},\ldots,f_q^{\mathbb{R}})}{\partial(x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-q}})} \circ \psi.\end{aligned}$$

Nun zeigt die Anwendung von Lemma 2.1.5, daß die Determinante der Jacobimatrix von Y durch $\gamma_I \circ \psi$ gegeben wird. Nach dem Eisenbud-Levine-Khimshiashvili-Theorem folgt nun, daß für jede Linearform

$$\varphi \colon \frac{\mathscr{E}_{\mathbb{R}^{n-q},0}}{(Y_1, \ldots, Y_{n-q})} \to \mathbb{R}$$

mit $\varphi(\gamma_I \circ \psi) > 0$ die Aussage $\mathrm{ind}_{V^{\mathbb{R}},0}(X) = $ Signatur $<,>_\varphi$ gilt. Mit Hilfe des durch ψ gegebenen Algebraisomorphismus folgt nun, daß für jede Linearform $\Phi \colon \mathscr{B}_0^{I\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(\gamma_I) > 0$ die Aussage $\mathrm{ind}_{V^{\mathbb{R}},0}(X) = $ Signatur $<,>_\Phi$ gilt und daher gilt das wegen des Algebraisomorphismus, der in Lemma 2.3.3 gegeben wird, auch für $\mathscr{C}_0^{\mathbb{R}}$, da dieser auch einen Isomorphismus der entsprechenden reellen Algebren liefert. Andererseits gilt in $\mathscr{C}_0$ die Gleichung $c_{n-q} = \gamma_I$, und diese Gleichung gilt natürlich auch in $\mathscr{C}_0^{\mathbb{R}}$. Damit folgt die Behauptung. □

2.4.2 Verallgemeinerung der Signaturformel

Wir wollen nun für den Fall singulärer Kurven einen Erhaltungssatz für die Signaturen beweisen und damit weitere Schlüsse ziehen.

2.4.2 Theorem. *Sei $q = n - 1$, $X^{\mathbb{R}}$ ein gutes Vektorfeld und $l \colon \mathscr{C}_0^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine Linearform mit $l(c_1) > 0$, und für einen regulären Wert $t \in T^{\mathbb{R}}$ von f und jedes p mit $X_t^{\mathbb{R}} | V_t^{\mathbb{R}}(p) = 0$ sei $l_{t,p} \colon \mathscr{C}_{t,p}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine Linearform mit $l_{t,p}(c_{t,p,1}) > 0$. Dann gilt*

$$\text{Signatur } <,>_l = \sum_{\{X_t^{\mathbb{R}} | V_t^{\mathbb{R}}(p) = 0\}} \text{Signatur } <,>_{l_{t,p}},$$

wobei sich die Summe über die gegen 0 strebenden Nullstellen erstreckt.

Beweis. Wir betrachten das Vektorbündel $\mathscr{C}$ aus dem Beweis von 2.3.7 über T und bezeichnen die komplexe Konjugation mit τ. Für jedes $t \in T^{\mathbb{R}}$ betrachten wir die invarianten Multikeime $h \in \mathscr{C}_t$, d.h. die Keime mit $\tau \circ h = h \circ \tau$. Wir bezeichnen die Menge dieser Multikeime mit $\mathscr{C}_t^{\mathbb{R}}$. Es gilt

$$\mathscr{C}_t^{\mathbb{R}} = (\oplus_k D_k) \oplus (\oplus_l E_l)\,, \tag{2.5}$$

wobei jede Komponente D_k zu einer Algebra $\mathscr{C}_{t,p_k}^{\mathbb{R}}$ für eine reelle Nullstelle p_k von $X|_V$ gehört und wobei jede Komponente

$$E_l = (\mathscr{C}_{t,q_l} \oplus \mathscr{C}_{t,\overline{q_l}})^{\mathbb{R}}$$

zu einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen gehört und $(\mathscr{C}_{t,q_l} \oplus \mathscr{C}_{t,\overline{q_l}})^{\mathbb{R}}$ die Teilmenge der invarianten Elemente von $(\mathscr{C}_{t,q_l} \oplus \mathscr{C}_{t,\overline{q_l}})$ ist, also Elemente der Form

$$h = \sum a_I z^I + \sum \overline{a_I} z^I.$$

Hierbei sind q_l bzw. $\overline{q_l}$ natürlich nicht reell. Ist μ die reelle Dimension von $\mathscr{C}_t^{\mathbb{R}}$, so ist μ gerade die Dimension $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{C}_0$. Die Menge $\mathscr{C}^{\mathbb{R}} := \cup_{t \in T^{\mathbb{R}}} \mathscr{C}_t^{\mathbb{R}}$ hat, falls T klein genug ist, die natürliche Struktur eines reell analytischen Vektorbündels vom Rang μ über $T^{\mathbb{R}}$. Wir können l reell analytisch zu einer Familie l_t fortsetzen and erhalten eine reell analytische Familie nicht entarteter Bilinearformen $<,>_{l_t}$. Wir haben Gleichung 2.5 als orthogonale Zerlegung. Wenn wir die Algebra E_l durch ihr maximales Ideal teilen, so erhalten wir die komplexen Zahlen, so daß E_l nach Satz 1.1.7 nichts zur Signatur beiträgt. Daher ist die Signatur $<,>_{l_t}$ die Summe der Signaturen von $<,>_{l_{t,p}}$, die als die Restriktionen auf die Komponenten D_k definiert sind. Andererseits gilt $l_{t,p}(c_{t,p,1}) > 0$ und daher haben wir die Behauptung mittels der Stetigkeit der Signaturen und des Eisenbud-Levine-Khimshiashvili-Theorems gezeigt, wenn wir einen festen regulären Wert $t \in T^{\mathbb{R}}$ von f wählen. □

2.4.3 Korollar. *Sei $q = n-1$, $X^{\mathbb{R}}$ ein gutes Vektorfeld und $l\colon \mathscr{C}_0^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine Linearform mit $l(c_1) > 0$. Dann zählt* Signatur $<,>_l$ *die Summe der Poincaré-Hopf-Indizes von $X_t^{\mathbb{R}}$ auf einer regulären Faser, wobei sich die Summe über diejenigen Nullstellen, die gegen* 0 *streben, erstreckt und $X_t^{\mathbb{R}}$ eine gute Deformation ist.*

Wir wollen noch einem Irrtum vorbeugen, dem zumindest der Autor kurzzeitig erlegen war. Ist $F_t := (f^{\mathbb{R}})^{-1}(t) \cap \overline{B_\delta}$, wobei B_δ eine genügend kleine Kugel um den Ursprung ist und t ein kleiner regulärer Wert von $f^{\mathbb{R}}$, so zählt die Summe der Poincaré-Hopf-Indizes in dem Korollar nicht die Eulercharakteristik von F_t. Denn man erinnere sich, daß in dem Satz von Poincaré-Hopf für Mannigfaltigkeiten mit Rand gefordert wird, daß die Vektorfelder in den Randpunkten nach außen zeigen müssen. Hier vergleiche man [26]. Wir wollen noch ein Beispiel betrachtenn und an diesem Beispiel Korollar 2.4.3 verifizieren.

Sei $f^{\mathbb{R}}(x,y) := x^2 - y^2$ und $X^{\mathbb{R}} := x^2\partial/\partial x + xy\partial/\partial y$. Eine gute Deformation wird durch

$$X_t^{\mathbb{R}} := (x^2 - t)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

mit $c_t = c = 2x$ gegeben. F_t besteht aus zwei Hyperbelzweigen, also $\chi(F_t) = 2$. Ist l aber eine Linearform wie in Theorem 2.4.2, so erhält man, wie man leicht nachrechnet, Signatur $<,>_l = 0$, also nicht die Eulercharakteristik. Sei nun $t = 1$ und $B_\delta := \{x^2 + y^2 = 3\}$ sowie $F := F_1$. $X^{\mathbb{R}}$ deformiert dann zu

$$\tilde{X}^{\mathbb{R}} := (x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}.$$

Die Randpunkte von F sind $P_1 = (\sqrt{2}, 1)$, $P_2 = (\sqrt{2}, -1)$, $P_3 = (-\sqrt{2}, -1)$ und $P_4 = (-\sqrt{2}, 1)$. In den Punkten P_1 und P_2 zeigt $\tilde{X}^{\mathbb{R}}$ nach außen, aber in den Punkten P_3 und P_4 nach innen, so daß also die Voraussetzungen des Theorems von Poincaré-Hopf verletzt sind. Aufgrund der Symmetrie des Problems (asymmetrisch sind nur die Richtungen von $\tilde{X}^{\mathbb{R}}$) gilt aber, daß die Summe der Indizes von $\tilde{X}^{\mathbb{R}}$ auf F verschwindet, also das, was Korollar 2.4.3 besagt. Das kann natürlich auch explizit berechnet werden: Die Nullstellen von $\tilde{X}^{\mathbb{R}}$ auf F sind $(-1, 0)$ und $(1, 0)$. Man kann beide Zweige mittels $\varphi_\pm(s) := (\pm\sqrt{1+s^2}, s)$ parametrisieren und $\tilde{X}^{\mathbb{R}}$ durch die Koordinate s ausdrücken. Man sieht sofort, daß der Index in $(-1, 0)$ den Wert -1 hat und den Wert 1 in $(1, 0)$.

Man kann in dieser Situation auch die sogenannten reellen GSV-Indizes einführen, auf deren Definition hier nicht eingegangen werden soll, da die Eigenschaften ohnehin wichtiger sind. Sie sind allerdings ganz ähnlich wie im komplexen Fall definiert. Man hat jedoch aus topologischen Gründen im dem Falle, daß $n - q$ gerade ist, nur einen $(\operatorname{mod} 2)$-Index. Der interessierte Leser möge in dem Artikel [1] nachschauen. Aus Theorem 2.10 dieses Artikels folgt jedoch, daß diese Indizes für gute Vektorfelder die Summe der Poincaré-Hopf-Indizes (bzw. die Summe der Poincaré-Hopf-Indizes $\operatorname{mod} 2$) auf F_t zählen. Man bezeichnet diese Indizes mit $\operatorname{ind}_{V^{\mathbb{R}},0}(X^{\mathbb{R}})$ im Falle $n - q$ ungerade und mit $\operatorname{ind}^2_{V^{\mathbb{R}},0}(X^{\mathbb{R}})$ für den $(\operatorname{mod} 2)$-Index im Falle $n - q$ gerade. Wir erhalten damit das folgende Korollar.

2.4.4 Korollar. *Sei $q = n - 1$, $X^{\mathbb{R}}$ ein gutes Vektorfeld und $l\colon \mathscr{C}_0^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine Linearform mit $l(c_1) > 0$. Dann gilt*

$$\text{Signatur} <,>_l = \operatorname{ind}_{V^{\mathbb{R}},0}(X^{\mathbb{R}}).$$

Wir bemerken noch, daß Gómez-Mont und Mardesić in den Artikeln [10] und [11] ähnliche Signaturformeln aufgestellt haben. Diese gelten für Vektorfelder auf Hyperflächensingularitäten die eine isolierte Nullstelle in dem einbettenden Raum besitzen. Die Algebren und die Bilinearformen dort sind völlig anders konstruiert.

3 Der Homologische Index

3.1 Definition des Homologischen Index

Es sei nun wieder wie üblich $(V,0) := (\{f_1 = \cdots = f_q = 0\}, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ der Keim eines vollständigen Durchschnitts der Dimension $n-q$ mit isolierter Singularität und $X := \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ der Keim eines holomorphen Vektorfeldes auf $(\mathbb{C}^n, 0)$ tangential an V mit isolierter Nullstelle auf V.

Definiert man wie üblich

$$X(dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k}) := \sum_{\nu=1}^{k} (-1)^{\nu-1} X_{i_\nu} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{dz_{i_\nu}} \wedge \cdots \wedge dz_{i_k},$$

so erhält man durch $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-lineare Fortsetzung und wegen $X^2 = 0$ einen Komplex

$$(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X)\colon 0 \to \Omega^n_{\mathbb{C}^n,0} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0} \xrightarrow{X} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to 0,$$

den sogenannten Koszul-Komplex von X. Außerdem gilt $X(\mathscr{R}^k_{\mathbb{C}^n,0}) \subset \mathscr{R}^{k-1}_{\mathbb{C}^n,0}$, so daß man zwei weitere Komplexe

$$(\Omega^*_{V,0}, X)\colon 0 \to \Omega^n_{V,0} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} \Omega^1_{V,0} \xrightarrow{X} \mathscr{O}_{V,0} \to 0$$

und

$$(\Omega_{V,0}, X)\colon 0 \to \Omega^{n-q}_{V,0} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} \Omega^1_{V,0} \xrightarrow{X} \mathscr{O}_{V,0} \to 0$$

erhält. Es soll nun erläutert werden, warum die komplexen Vektorraumdimensionen der zugehörigen Homologieräume endlich sind. Dazu sei B eine genügend kleine offene Kugel um den Ursprung in $\mathbb{C}^n$. V sei die Varietät, die durch die Komponenten von f in B definiert wird. Ferner sei

$$(\Omega_V, X)\colon 0 \to \Omega^{n-q}_V \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} \Omega^1_V \xrightarrow{X} \mathscr{O}_V \to 0$$

der zugehörige Komplex kohärenter $\mathscr{O}_V$-Garben. Die Garben sowie die zugehörigen Morphismen sind hier die Offensichtlichen. Da B so klein gewählt werden sollte, daß V außerhalb des Ursprungs nicht singulär ist, und X dort keine Nullstelle besitzt, ist der Halm des Komplexes über $p \neq 0$ exakt, da man lokale Koordinaten so wählen kann, daß der Halm gerade der Koszul-Komplex ist. Das bedeutet aber, daß der Träger der kohärenten Homologiegarben $\{0\}$ ist und daher folgt die Behauptung aus einem Standardsatz, siehe etwa [18] Theorem 6.2.12. Dann folgt auch sofort, daß die Homologieräume des größeren Komplexes endliche Dimension haben, da die Halme von $\Omega^{n-q+1}_V, \ldots, \Omega^n_V$ über $p \neq 0$ verschwinden. Daher kann man das Folgende definieren.

3.1.1 Definition. Der Homologische Index $\operatorname{ind}^{\hom}_{V,0}(X)$ sei definiert durch

$$\operatorname{ind}^{\hom}_{V,0}(X) := \chi(\Omega_{V,0}, X) = \sum_{i=0}^{n-q} (-1)^i h_i.$$

Hierbei ist natürlich $h_i := \dim_{\mathbb{C}} H_i(\Omega_{V,0}, X)$. Außerdem definieren wir noch $h_i^* := \dim_{\mathbb{C}} H_i(\Omega^*_{V,0}, X)$. Gomez-Mont hat in [9] das Folgende gezeigt.

3.1.2 Theorem (Gomez-Mont). *(i) Es existiert eine Konstante K mit*

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \operatorname{ind}^{\text{hom}}_{V,0}(X) + K,$$

wobei K von der Singularität aber nicht von dem Vektorfeld abhängt.
(ii) Im Hyperflächenfall $q = 1$ gilt $K = 0$.

Wir spezialisieren nun auf den Hyperflächenfall. Bis zum Ende dieses Kapitels sei daher $q = 1$ und $Xf = cf$. Ferner sei $\mathbb{B}$ die Algebra, die man erhält, indem man $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ nach dem Ideal austeilt, daß von den Komponenten des Vektorfeldes erzeugt wird. Mit $\mathbb{A}$ sei die Milnor-Algebra von f bezeichnet. Bekanntlich ist dies die Algebra, die man erhält, indem man $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ nach dem Ideal austeilt, das von den partiellen Ableitungen von f erzeugt wird. Es gilt das folgende Theorem.

3.1.3 Theorem (Gomez-Mont). *Hat X eine isolierte Nullstelle in $(\mathbb{C}^n, 0)$, so gilt*

$$h_0 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)}, \quad h_{n-1} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)}$$

und für $j = 1, \dots, n-2$ gilt $h_j = \lambda$, wobei

$$\lambda := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(c)} - \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{B}.$$

Das folgende Korollar erhält man leicht.

3.1.4 Korollar. *Hat X eine isolierte Nullstelle in $(\mathbb{C}^n, 0)$, so gilt*

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{B} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(c)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)}, \text{ falls } n \text{ ungerade}$$

und

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)}, \text{ falls } n \text{ gerade.}$$

3.2 Verallgemeinerung der algebraischen Formel für den Index

Unser Ziel ist es, die Ergebnisse für den Hyperflächenfall dahingehend zu verallgemeinern, daß die Voraussetzung, daß X eine isolierte Nullstelle auf $(\mathbb{C}^n, 0)$ hat, fallengelassen werden kann. Es sei noch bemerkt, daß die folgenden Resultate bereits in dem Artikel [21] des Autors aufgeschrieben worden sind. Wir nehmen an, daß die Koordinaten so gewählt sind, daß $X_1, \dots, X_{n-1}, f$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz ist. Außerdem setzen wir $\mathbb{B}' := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}/(X_1, \dots, X_{n-1})$. $\mathbb{B}'$ ist unendlichdimensional und $\mathbb{B}$ nicht mehr notwendigerweise endlichdimensional. Ziel ist das folgende Theorem.

3.2.1 Theorem. *Die komplexen Vektorraumdimensionen der Homologieräume des Komplexes $(\Omega^*_{V,0}, X)$ sind*

$$h_0^* = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)},$$

$$h_1^* = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(f)}{(c)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)}{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n) \cap \mathbb{B}'(f, \partial f/\partial z_n)},$$

$$h_2^* = \cdots = h_n^* = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{A}}(f)}{(c)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{A}}(c)}{(f)} =: \lambda.$$

Das in dem Theorem definierte λ stimmt mit dem oben definierten λ überein, falls das Vektorfeld eine isolierte Nullstelle in $(\mathbb{C}^n, 0)$ hat.

3.2.1 Hilfssätze

Die ersten Schritte sind leichte Verallgemeinerungen der Berechnungen in [9]. Wir betrachten den Komplex

$$(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X)\colon 0 \to \Omega^n_{\mathbb{C}^n,0} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{X} \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0} \xrightarrow{X} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to 0.$$

3.2.2 Lemma. *$H_j(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X) = 0$ für $j \geq 2$*
$H_1(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X) \cong \operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)$, $(h_1 dz_1 + \cdots + h_n dz_n \to h_n)$
$H_0(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X) \cong \mathbb{B}$.

Beweis. Dies folgt sofort aus der dualen Version von Corollary 17.12 in [7]. □

Die Multiplikation mit c liefert eine Abbildung von Komplexen

$$\cdot c\colon (\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X) \to (\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X).$$

Es sei $\mathcal{B}$ der Abbildungskegel dieser Abbildung, siehe [7]. Dann ist $\mathcal{B}$ gegeben durch

$$\mathcal{B}\colon 0 \leftarrow \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \oplus 0 \xleftarrow{\beta} \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \xleftarrow{\beta} \cdots \xleftarrow{\beta} \Omega^n_{\mathbb{C}^n,0} \oplus \Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^n,0} \xleftarrow{\beta} 0 \oplus \Omega^n_{\mathbb{C}^n,0} \xleftarrow{\beta} 0,$$

wobei

$$\beta(\omega,\eta) := \begin{pmatrix} X & (-1)^j c \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} X(\omega) + (-1)^j c\eta \\ X(\eta) \end{pmatrix}$$

und j der Grad von $(\omega,\eta) \in \Omega^j_{\mathbb{C}^n,0} \oplus \Omega^{j-1}_{\mathbb{C}^n,0}$ ist.

3.2.3 Lemma. *$H_k(\mathcal{B}) = 0$ für $k \geq 3$*
$H_2(\mathcal{B}) \cong \operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n) \cap \operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(c)$
$H_1(\mathcal{B}) \cong \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)}{c \cdot \operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)} \oplus \operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(c)$
$H_0(\mathcal{B}) \cong \frac{\mathbb{B}}{(c)}$.

Beweis. $H_0(\mathcal{B}) \cong \frac{\mathbb{B}}{(c)}$ ist offensichtlich. Wir haben eine exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & \\
0 & \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l] \arrow[d] & \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "X"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "X"'] & \Omega^n_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "X"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & \\
0 & \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \oplus 0 \arrow[l] \arrow[d] & \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "\beta"'] & \Omega^n_{\mathbb{C}^n,0} \oplus \Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d] & 0 \oplus \Omega^n_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "X"'] & \Omega^{n-1}_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "X"'] \arrow[d] & \Omega^n_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "X"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Aus der langen exakten Homologiesequenz schließt man $H_k(\mathcal{B}) = 0$ für $k \geq 3$, und der nicht-triviale Teil dieser Sequenz wird durch

$$0 \to H_2(\mathcal{B}) \xrightarrow{p_2} H_1(\Omega^*, X) \xrightarrow{\cdot c} H_1(\Omega^*, X) \xrightarrow{i_1} H_1(\mathcal{B}) \xrightarrow{p_2} \mathbb{B} \xrightarrow{\cdot c} \mathbb{B} \to \frac{\mathbb{B}}{(c)} \to 0$$

gegeben, wobei i_1 die Inklusion auf die erste Komponente und p_2 die Projektion auf die zweite Komponente ist. Nun folgt

$$H_2(\mathcal{B}) \cong \operatorname{Bild} p_2 = \operatorname{Ker} c \cong \operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n) \cap \operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(c)$$

nach Lemma 3.2.2 und dem Isomorphismus, der dort gegeben wird. Weiterhin gilt

$$H_1(\mathcal{B}) \cong \operatorname{Ker} p_2 \oplus \mathrm{Bild} p_2.$$

Wir haben damit $\mathrm{Bild} p_2 = \operatorname{Ker} c = \operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(c)$ und

$$\operatorname{Ker} p_2 = \mathrm{Bild} i_1 \cong \frac{H_1(\Omega^*, X)}{\operatorname{Ker} i_1} = \frac{H_1(\Omega^*, X)}{\mathrm{Bild} c} \cong \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)}{c \cdot \operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)}.$$

□

3.2.4 Lemma.

$$H_1(\Omega^*_{V,0}, X) \cong \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(f)}{(c)} \oplus \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)}{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n) \cap \mathbb{B}'(f, \partial f/\partial z_n)}$$

Beweis. Wir betrachten die exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 & \mathscr{R}^0_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l] & \mathscr{R}^1_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "X"'] & \cdots \arrow[l, "X"'] & \mathscr{R}^n_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "X"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l] \arrow[u, leftarrow] & \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "X"'] \arrow[u, leftarrow] & \cdots \arrow[l, "X"'] & \Omega^n_{\mathbb{C}^n,0} \arrow[l, "X"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
0 & \mathscr{O}_{V,0} \arrow[l] \arrow[u, leftarrow] \arrow[d] & \Omega^1_{V,0} \arrow[l, "X"'] \arrow[u, leftarrow] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "X"'] & \Omega^n_{V,0} \arrow[l, "X"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}.$$

Aus Lemma 3.2.2 erhält man den letzten Teil der langen exakten Homologiesequenz

$$0 \to H_2(\Omega^*_{V,0}, X) \xrightarrow{\delta_2} H_1(\mathscr{R}_{\mathbb{C}^n,0}, X) \xrightarrow{i_1} H_1(\Omega^*, X) \xrightarrow{p_1} H_1(\Omega^*_{V,0}, X) \xrightarrow{\delta_1}$$
$$\xrightarrow{\delta_1} H_0(\mathscr{R}_{\mathbb{C}^n,0}, X) \xrightarrow{i_0} \mathbb{B} \xrightarrow{p_0} \frac{\mathbb{B}}{(f)} \to 0,$$

wobei δ_1 and δ_2 die Verbindungshomomorphismen sind. Dies liefert

$$H_1(\Omega^*_{V,0}, X) \cong \operatorname{Ker} \delta_1 \oplus \mathrm{Bild}\delta_1.$$

Es gilt $\mathrm{Bild}\delta_1 = \operatorname{Ker} i_0$, $\mathscr{R}^0_{\mathbb{C}^n,0} = f\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ und $\mathscr{R}^1_{\mathbb{C}^n,0} = f\Omega^1 + df\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Für

$$\omega = f(h_1 dz_1 + \cdots + h_n dz_n) + hdf$$

bekommt man

$$X(\omega) = f(X_1 h_1 + \cdots + X_n h_n) + hcf$$

und daher gilt

$$\operatorname{Ker} i_0 = \frac{\{gf \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} : gf \in I_n\}}{fI_n + \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(cf)},$$

wobei $I_n := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(X_1, \ldots, X_n)$ gesetzt wurde. Andererseits liefert die Multiplikation mit f einen Isomorphismus

$$\cdot f \colon \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(f)}{(c)} \to \frac{\{gf \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} : gf \in I_n\}}{fI_n + \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(cf)}$$

und dies zeigt

$$\mathrm{Bild}\delta_1 \cong \frac{\mathrm{ann}_{\mathbb{B}}(f)}{(c)}.$$

Man betrachte nun $\operatorname{Ker}\delta_1$. Es gilt

$$\operatorname{Ker}\delta_1 = \mathrm{Bild}p_1 \cong \frac{H_1(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X)}{\operatorname{Ker}p_1} = \frac{H_1(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X)}{\mathrm{Bild}i_1}.$$

Wir haben einen Isomorphismus

$$\phi\colon H_1(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X) \to \mathrm{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n),$$

der durch $\phi(h_1dz_1 + \cdots + h_ndz_n) = h_n$ gegeben wird mit $X_1h_1 + \cdots + X_nh_n = 0$. Um

$$\operatorname{Ker}\delta_1 \cong \frac{\mathrm{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)}{\mathrm{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n) \cap \mathbb{B}'(f, \frac{\partial f}{\partial z_n})}$$

zu zeigen, muß

$$\phi \circ i_1(H_1(\mathscr{R}_{\mathbb{C}^n,0}, X)) = \mathrm{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n) \cap \mathbb{B}'(f, \frac{\partial f}{\partial z_n}).$$

gezeigt werden. „$\subseteq$“: Sei $\omega \in H_1(\mathscr{R}_{\mathbb{C}^n,0}, X)$, etwa $\omega = f(h_1dz_1 + \cdots + h_ndz_n) + hdf$ mit $X(\omega) = 0$. Dann gilt $f(X_1h_1 + \cdots + X_nh_n) + hcf = 0$. ω wird auf $fh_n + h\partial f/\partial z_n$ abgebildet. Modulo I_{n-1} gilt

$$(fh_n + h\frac{\partial f}{\partial z_n})X_n = fh_nX_n + hcf = 0$$

und dies beweist die Inklusion. Hier wurde $I_{n-1} := \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(X_1, \ldots, X_{n-1})$ gesetzt. „$\supseteq$“: Sei $h \in \mathrm{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n) \cap \mathbb{B}'(f, \partial f/\partial z_n)$ ein Repräsentant, etwa

$$hX_n = g_1X_1 + \cdots + g_{n-1}X_{n-1},$$

sowie $h = s_1f + s_2\partial f/\partial z_n$ mit $s_1, s_2 \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} s_1fX_n + s_2\frac{\partial f}{\partial z_n}X_n &= f(s_1X_n + s_2c) - s_2(\frac{\partial f}{\partial z_1}X_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_{n-1}}X_{n-1}) \\ &= g_1X_1 + \cdots + g_{n-1}X_{n-1} \end{aligned}$$

und daher ist $f(s_1X_n + s_2c)$ in I_{n-1} enthalten. Dies bedeutet, daß $s_1X_n + s_2c$ in I_{n-1} enthalten ist, da f kein Nullteiler in $\mathbb{B}'$ ist. Sei

$$s_1X_n + s_2c = l_1X_1 + \cdots + l_{n-1}X_{n-1}.$$

Dann gilt

$$g_1X_1 + \cdots + g_{n-1}X_{n-1} = fl_1X_1 + \cdots + fl_{n-1}X_{n-1} - s_2(\frac{\partial f}{\partial z_1}X_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_{n-1}}X_{n-1}).$$

Man setze

$$\omega := -(fl_1 - s_2\frac{\partial f}{\partial z_1})dz_1 - \cdots - (fl_{n-1} - s_2\frac{\partial f}{\partial z_{n-1}})dz_{n-1} + hdz_n.$$

Somit folgt

$$\omega = f(-l_1dz_1 - \cdots - l_{n-1}dz_{n-1} + s_1dz_n) + s_2 \cdot df \in \mathscr{R}^1_{\mathbb{C}^n,0}$$

und

$$\begin{aligned} X(\omega) &= f(-X_1l_1 - \cdots - X_{n-1}l_{n-1} + s_1X_n) + s_2cf \\ &= f(-s_1X_n - s_2c + s_1X_n) + s_2cf \\ &= 0 \end{aligned}$$

und daher $w \in H_1(\mathscr{R}_{\mathbb{C}^n,0}, X)$ mit $\phi \circ i_1(\omega) = h$. □

3.2.2 Der Doppelkomplex $\mathcal{G}$

Wir benutzen die Konstruktion aus [9]. Man betrachte den Doppelkomplex $\mathcal{G}$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & & 0 \arrow[d] & \mathscr{O}\oplus 0 \arrow[l] \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \arrow[l, "\beta"'] \\
 & & & \cdots & \mathscr{O}\oplus 0 \arrow[l] \arrow[d, "\alpha"] & \Omega^1\oplus\mathscr{O} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \arrow[l, "\beta"'] \\
 & & & \cdots & \Omega^1\oplus\mathscr{O} \arrow[l] \arrow[d, "\alpha"] & \Omega^2\oplus\Omega^1 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \arrow[l, "\beta"'] \\
 & & 0 \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \cdots \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \\
 & 0 \arrow[d] & \mathscr{O}\oplus 0 \arrow[l] \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \arrow[l, "\beta"'] & \Omega^{n-1}\oplus\Omega^{n-2} \arrow[l] \arrow[d, "\alpha"] & \Omega^n\oplus\Omega^{n-1} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \arrow[l, "\beta"'] \\
0 & \mathscr{O}\oplus 0 \arrow[l] \arrow[d, "f"] & \Omega^1\oplus\mathscr{O} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "\bar\alpha"] & \cdots \arrow[l, "\beta"'] & \Omega^n\oplus\Omega^{n-1} \arrow[l] \arrow[d, "\bar\alpha"] & 0\oplus\Omega^n \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d] & 0 \arrow[l, "\beta"'] \\
0 & \mathscr{O} \arrow[l] \arrow[d] & \Omega^1 \arrow[l, "X"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "X"'] & \Omega^n \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] & \\
 & 0 & 0 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

Aus typographischen Gründen wurden hier die Subskripten weggelassen. Wir meinen aber natürlich die Halme über dem Ursprung. Numerierung: $\mathcal{G}_{i,0} = \Omega^i_{\mathbb{C}^n,0}$, $\mathcal{G}_{i,1} = \Omega^i_{\mathbb{C}^n,0} \oplus \Omega^{i-1}_{\mathbb{C}^n,0} = \mathcal{G}_{i+k,1+k}$ für $k \geq 1$ und $\mathcal{G}_{i,j} = 0$ für $i < 0$ oder $j < 0$. Die Abbildungen sind $\bar{\alpha}(\omega, \eta) := \pm f\omega + df \wedge \eta$,

$$\alpha(\omega, \eta) := \begin{pmatrix} df & 0 \\ \pm f & df \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} df \wedge \omega \\ \pm f\omega + df \wedge \eta \end{pmatrix}$$

und

$$\beta(\omega, \eta) := \begin{pmatrix} X & \pm c \\ 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} X(\omega) \pm c\eta \\ X(\eta) \end{pmatrix}.$$

In [9] wurde gezeigt, daß

$$H_i(\mathrm{tot}\mathcal{G}) \cong H_i(\Omega^*_{V,0}, X) \textit{ für } 0 \leq i \leq n$$

und

$$\dim_{\mathbb{C}} H_i(\mathrm{tot}\mathcal{G}) = \lambda \textit{ für } i > n$$

gilt, wobei $\mathrm{tot}\mathcal{G}$ der totale Komplex von $\mathcal{G}$ ist und λ wie in in Theorem 3.2.1 definiert ist. Das Argument, das dort gegeben wird, benutzt an dieser Stelle nicht, daß $(X_1, \ldots, X_n)$ eine reguläre Sequenz ist. Die Homologieräume des totalen Komplexes können auch durch die Analyse der Spektralsequenz (E, d) von $\mathcal{G}$, die man erhält, indem man erst die β-Homologie und dann die α-Homologie nimmt, erhalten werden.

3.2.2.1 Die Spektralsequenz (E, d)

Wir wollen (E, d) analysieren. Man erhält die folgenden ${}^2E$-Terme mit Lemma 3.2.2 und Lemma 3.2.3:

$$\begin{aligned}
{}^2E_{0,0} &\cong \operatorname{Koker}\left(\frac{\mathbb{B}}{(c)} \xrightarrow{\cdot f} \mathbb{B}\right) \cong \frac{\mathbb{B}}{(f)} \\
{}^2E_{0,1} &\cong \operatorname{Ker}\left(\frac{\mathbb{B}}{(c)} \xrightarrow{\cdot f} \mathbb{B}\right) \cong \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(f)}{(c)} \\
{}^2E_{1,0} &\cong \operatorname{Koker}\Big(H_1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\bar{\alpha}} H_1(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X)\Big) \\
{}^2E_{1,1} &\cong \text{ Homologie } \left(\frac{\mathbb{B}}{(c)} \xrightarrow{\alpha} H_1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\bar{\alpha}} H_1(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X)\right) \\
{}^2E_{l+1,l} &\cong \operatorname{Koker}\Big(H_1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\alpha} H_2(\mathcal{B})\Big) \\
{}^2E_{l,l+1} &\cong \operatorname{Ker}\left(\frac{\mathbb{B}}{(c)} \xrightarrow{\alpha} H_1(\mathcal{B})\right) \\
{}^2E_{l+1,l+1} &\cong \text{ Homologie } \left(\frac{\mathbb{B}}{(c)} \xrightarrow{\alpha} H_1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\alpha} H_2(\mathcal{B})\right),
\end{aligned}$$

wobei $l \geq 1$ und alle anderen ${}^2E$-Terme trivial sind. Das Differential auf ${}^2E$ wird nun durch

$$d_2\colon {}^2E_{p+2,q-1} \to^2 E_{p,q}$$

gegeben. Daher ist die Spektralsequenz auf der zweiten Stufe entartet, und wir sind in der Lage, die totalen Homologien des Doppelkomplexes zu berechnen. Zunächst gilt

$$\operatorname{Ker}\Big(H_1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\bar{\alpha}} H_1(\Omega^*_{\mathbb{C}^n,0}, X)\Big) = \operatorname{Ker}\Big(H_1(\mathcal{B}) \xrightarrow{\alpha} H_2(\mathcal{B})\Big)$$

nach den Isomorphismen, die in Lemma 3.2.2 und Lemma 3.2.3 gegeben werden. Also gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} H_2(\operatorname{tot}\mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{C}} H_i(\operatorname{tot}\mathcal{G}) = \lambda$$

für gerade $i \geq 2$. Analog bekommt man

$$\dim_{\mathbb{C}} H_i(\operatorname{tot}\mathcal{G}) = \lambda$$

für ungerade $i \geq 3$. Unter Verwendung des Resultates über $H_i(\operatorname{tot}\mathcal{G})$ in [9], das oben angeführt wurde, und unter Benutzung von Lemma 3.2.4 für h_1^* folgt Theorem 3.2.1 unmittelbar.

3.2.3 Folgerungen

Wir erhalten nun die folgenden algebraischen Formeln für den Index.

3.2.5 Korollar. *Die folgenden Algebren sind endlichdimensional, und es gilt für gerades n*

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(f)}{(c)} - \dim_{\mathbb{C}} &\frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)}{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n) \cap \mathbb{B}'(f, \partial f/\partial z_n)} \\
&+ \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(c)} - \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{A}
\end{aligned}$$

und für ungerades n

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(f)}{(c)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n)}{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}'}(X_n) \cap \mathbb{B}'(f, \partial f/\partial z_n)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)}.$$

Beweis. Wir bemerken zunächst $\Omega^n_{V,0} \cong \frac{\mathbb{A}}{(f)}$ und somit erhält man

$$\begin{aligned} h_{n-1} &= h^*_{n-1} + \dim_{\mathbb{C}} X(\Omega^n_{V,0}) \\ &= h^*_{n-1} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)} - h^*_n. \end{aligned}$$

Nun folgt

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu h_i = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu h^*_i + (-1)^{n-1} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)},$$

und die Behauptung folgt für ungerades n. Für gerades n erhält man

$$\operatorname{ind}_{V,0}(X) = h^*_0 - h^*_1 - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{A}}(f)}{(c)}.$$

Da die Sequenz

$$0 \to \operatorname{ann}_{\mathbb{A}}(f) \to \mathbb{A} \xrightarrow{\cdot f} \mathbb{A} \to \frac{\mathbb{A}}{(f)} \to 0$$

exakt ist, folgt

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{A}}(f)}{(c)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(c)} - \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{A}$$

und das Korollar folgt. □

Falls $(X_1, \ldots, X_n)$ eine reguläre Sequenz ist, reduziert sich unsere Formel natürlich auf die Formel von Gomez-Mont und zwar in der folgenden Weise. Es gilt

$$\lambda = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(f)}{(c)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(c)}{(f)},$$

und wir erhalten für gerades n

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_{V,0}(X) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{A}}(f)}{(c)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(c)} - \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{A}(c) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{ann}_{\mathbb{B}}(f) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)}. \end{aligned}$$

Für ungerades n erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_{V,0}(X) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\operatorname{ann}_{\mathbb{A}}(f)}{(c)} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(f)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} + \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{A}(c) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(c)} + \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{A}. \end{aligned}$$

Es ist nicht schwer festzustellen, daß die Formeln von Gomez-Mont auch in dieser Weise geschrieben werden können. Wir wollen wieder unser Standardbeispiel betrachten. $D_k \colon f = x^2y + y^{k-1}$, $k \geq 4$.

$$X := (k-2)x^{m+1}\frac{\partial}{\partial x} + 2x^m y\frac{\partial}{\partial y}, \quad m \geq 3$$

mit $c = 2(k-1)x^m$. Wir haben ja schon $\mathrm{ind}_{V,0}(X) = (m-1)(k-1)$ berechnet. Wir wollen verifizieren, daß Korollar 3.2.5 denselben Wert liefert. Man berechnet leicht, z.B. mit Residuen, daß

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{(X_1, f)} = (k-1)(m+1)$$

gilt. Man betrachte das Monom $x^m y$ in $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{(x^{m+1}, x^2y+y^{k-1})}$. Dann sind die Monome $x^m y, \ldots, x^m y^{k-2}$ in dieser Algebra linear unabhängig, und es gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{B}}{(f)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{(X_1, f)} - k + 2 = m(k-1) + 1.$$

Wir behaupten nun

$$\{g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0} : gf \in (X_1, X_2)\} = \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(x^m).$$

Sei etwa

$$gf = d_1 x^{m+1} + d_2 x^m y.$$

Dann gilt

$$g(x^2y + y^{k-1}) - d_2 x^m y \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(x^{m+1})$$

und somit

$$g(x^2 + y^{k-2}) \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(x^m),$$

da y kein Nullteiler in $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{(x^{m+1})}$ ist. Das bedeutet $g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}(x^m)$, da $x^2 + y^{k-2}$ kein Nullteiler in $\frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{(x^m)}$ ist. Damit folgt

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathrm{ann}_{\mathbb{B}}(f)}{(c)} = 0.$$

Man stellt auch sofort fest, daß $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{A} = k$ und $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{A}}{(c)} = k$ gilt. Außerdem gilt $\mathrm{ann}_{\mathbb{B}}(X_2) = \mathbb{B}(x)$ und somit erhält man

$$\frac{\mathrm{ann}_{\mathbb{B}}(X_2)}{\mathrm{ann}_{\mathbb{B}}(X_2) \cap \mathbb{B}(f, \partial f/\partial y)} = \frac{\mathbb{B}(x)}{\mathbb{B}(x) \cap \mathbb{B}(f, \partial f/\partial y)} \cong \mathbb{A}'(x),$$

wobei $\mathbb{A}' := \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{(f, \partial f/\partial y)}$ gesetzt wurde. Eine Basis von $\mathbb{A}'$ wird durch

$$1, x, xy, \ldots, xy^{k-2}, y, \ldots, y^{k-2}$$

gegeben und daher gilt $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{A}'(x) = k$, da $y^{k-2} \sim x^2$ in $\mathbb{A}'$. Nun liefert Korollar 3.2.5 tatsächlich

$$\mathrm{ind}_{V,0}(X) = (m-1)(k-1).$$

4 1-Formen auf zweidimensionalen vollständigen Durchschnitten

Wir betrachten die Situation aus Abschnitt 1.2 und behalten die dort eingeführten Notationen bei. Also sei $(V,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ ein ICIS und $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dz_i$ der Keim einer holomorphen 1-Form auf $(\mathbb{C}^n,0)$ mit isolierter Nullstelle auf $(V,0)$ (verschwindet nicht auf den Tangentialräumen T_pV für $p \neq 0$ in einer kleinen Umgebung des Ursprungs). Die Resultate dieses Kapitels wurden bereits in [20] veröffentlicht.

4.1 Residuen holomorpher 1-Formen

Bevor wir uns auf den Fall $q = n-2$ beschränken, wollen wir einige Resultate für den glatten Fall in voller Allgemeinheit beweisen. Wir verwenden aus typographischen Gründen gelegentlich für quadratische Matrizen genauso wie für ihre Determinanten dieselbe Notation. Es geht dann aus dem Zusammenhang hervor, was gemeint ist.

4.1.1 Der glatte Fall

Für $1 \le j_1, \dots, j_{q+1} \le n$ setzen wir

$$m_{j_1,\dots,j_{q+1}} := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_{j_{q+1}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial z_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial z_{j_{q+1}}} \\ \omega_{j_1} & \cdots & \omega_{j_{q+1}} \end{vmatrix}.$$

Für $1 \le i \le n-q$ sei außerdem $\tilde{m}_i := m_{i,n-q+1,\dots,n}$. Sei J das wie vorher definierte Ideal und I das Ideal in $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, das durch $f_1, \dots, f_q$ und die Minoren $\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{n-q}$ erzeugt wird. Der Einfachheit halber nehmen wir außerdem an, daß alle maximalen Minoren im Ursprung verschwinden (sonst ist der Index 0).

4.1.1 Lemma. *Für $i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_{q+1} \in \{1, \dots, n\}$ gilt*

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{i_1},\dots,z_{i_q})} m_{j_1,\dots,j_{q+1}} = \sum_{l=1}^{q+1} (-1)^{l+1} \frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{j_1},\dots,\widehat{z_{j_l}},\dots,z_{j_{q+1}})} m_{j_l,i_1,\dots,i_q}.$$

Beweis. Die Entwicklung von $m_{j_1,\dots,j_{q+1}}$ und $m_{j_l,i_1,\dots,i_q}$ nach der letzten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{i_1},\dots,z_{i_q})} m_{j_1,\dots,j_{q+1}} &= \sum_{l=1}^{q+1} (-1)^{l+1} \frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{j_1},\dots,\widehat{z_{j_l}},\dots,z_{j_{q+1}})} \Big(m_{j_l,i_1,\dots,i_q} \\ &- \sum_{k=1}^{q} (-1)^{q+k} \omega_{i_k} \frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{j_l},z_{i_1},\dots,\widehat{z_{i_k}},\dots,z_{i_q})} \Big). \end{aligned}$$

Nun genügt es für ein beliebiges festes k,

$$\sum_{l=1}^{q+1} (-1)^l \frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{j_1},\dots,\widehat{z_{j_l}},\dots,z_{j_{q+1}})} \frac{\partial(f_1,\dots,f_q)}{\partial(z_{j_l},z_{i_1},\dots,\widehat{z_{i_k}},\dots,z_{i_q})} = 0$$

zu zeigen, was durch die Entwicklung der zweiten Determinante nach der ersten Spalte und anschließender Summation über l offensichtlich ist. □

4.1.2 Satz. *Für $DF(0) \neq 0$ gilt $I = J$.*

Beweis. Für $j_1, \dots, j_{q+1}$ erhält man aus Lemma 4.1.1 $DFm_{j_1,\dots,j_{q+1}} \in I$ und daher gilt $m_{j_1,\dots,j_{q+1}} \in I$, da DF eine Einheit ist. □

Aus der klassischen Residuentheorie erhält man sofort das folgende Korollar.

4.1.3 Korollar. *Es sei $DF(0) \neq 0$. Dann gilt*
(i) $(f_1, \dots, f_q, \tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{n-q})$ ist eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz und

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0} \begin{bmatrix} \det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_q,\tilde{m}_1,\dots,\tilde{m}_{n-q})}{\partial(z_1,\dots,z_n)}\right) \\ f_1 \dots f_q \tilde{m}_1 \dots \tilde{m}_{n-q} \end{bmatrix}.$$

(ii) $\operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0} \begin{bmatrix} \cdot \\ f_1 \dots f_q \tilde{m}_1 \dots \tilde{m}_{n-q} \end{bmatrix} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *definiert eine Linearform.*
(iii) Die induzierte Bilinearform auf $\mathcal{A}$ ist nicht entartet.

4.1.2 Der Index einer holomorphen 1-Form

Wir wollen zunächst das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren. Von nun an sei $q = n - 2$ und M_i diejenige Matrix, die man aus

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_{n-2}}{\partial z_n} \\ \omega_1 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}$$

erhält, indem man die i-te Spalte streicht, $m_i := \det(M_i)$ und $M := \left((-1)^i \frac{\partial m_i}{\partial z_j}\right)$. Es sei σ der Koeffizient von t^{n-2} im charakteristischen Polynom von M. Wir werden zeigen, daß es einen linearen Koordinatenwechsel (tatsächlich einen generischen) gibt, so daß (m_1, m_2) eine reguläre $\mathscr{O}_{V,0}$-Sequenz ist und nennen diese Koordinaten gute Koordinaten. Weiterhin definieren wir für $h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$

$$\operatorname{res}_{V,0} \begin{bmatrix} h \\ m_1 m_2 \end{bmatrix} := \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Sigma} \frac{h dz_1 \wedge dz_2}{m_1 m_2},$$

wobei $\Sigma := \{f_1 = \dots = f_{n-2} = 0, |m_1| = \delta_1, |m_2| = \delta_2\}$ so orientiert ist, daß $d(\arg m_1) \wedge d(\arg m_2) \geq 0$ gilt and wobei δ_1, δ_2 kleine reelle positive Zahlen sind. Wir beweisen das folgende Resultat:

4.1.4 Theorem. *In jedem System guter Koordinaten definiert*

$$\operatorname{res}_{V,0} \begin{bmatrix} \cdot \\ m_1 m_2 \end{bmatrix} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$$

eine Linearform mit

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = \operatorname{res}_{V,0} \begin{bmatrix} \sigma \\ m_1 m_2 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen noch für $l \neq k$

$$f_{l,k} := \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-2})}{\partial(z_1, \dots, \hat{z_l}, \dots, \hat{z_k}, \dots, z_n)}\right).$$

Wir beweisen zunächst eine Verfeinerung von Korollar 4.1.3, die wir zum Beweis des Hauptresultates benötigen.

4.1.5 Lemma. *Sei* $(V,0)$ *glatt und* m_1, m_2 *eine reguläre* $\mathscr{O}_{V,0}$*-Sequenz. Dann gilt*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0} \begin{bmatrix} DF \cdot \sigma \\ f_1 \dots f_{n-2} m_1 m_2 \end{bmatrix}.$$

Wir bemerken noch, daß nicht $DF(0) \neq 0$ angenommen wurde. Um die Behauptung zu beweisen, muß noch eine zusätzliche Rechnung angestellt werden.

4.1.6 Lemma. *Für* $j < k$ *gilt*

$$\det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_{n-2},m_j,m_k)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}\right) = -f_{j,k}\cdot\sigma \mod J.$$

Beweis. Laplace-Entwicklung liefert

$$\det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_{n-2},m_j,m_k)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}\right) = \sum_{1\le m<l\le n} (-1)^{m+l+1} f_{m,l} \det\left(\frac{\partial(m_j,m_k)}{\partial(z_m,z_l)}\right).$$

Nun genügt es mod J

$$f_{m,l}\det\left(\frac{\partial(m_j,m_k)}{\partial(z_m,z_l)}\right) = f_{j,k}\det\left(\frac{\partial(m_m,m_l)}{\partial(z_m,z_l)}\right)$$

zu zeigen. Der erste Fall ist $m, l < j$. Nach Lemma 4.1.1 gilt mod J

$$\begin{aligned} f_{m,l}\det\left(\frac{\partial(m_j,m_k)}{\partial(z_m,z_l)}\right) &= f_{m,j}\det\left(\frac{\partial(m_l,m_k)}{\partial(z_m,z_l)}\right) - f_{l,j}\det\left(\frac{\partial(m_m,m_k)}{\partial(z_m,z_l)}\right) \\ &= f_{m,k}\det\left(\frac{\partial(m_l,m_j)}{\partial(z_m,z_l)}\right) - f_{j,k}\det\left(\frac{\partial(m_l,m_m)}{\partial(z_m,z_l)}\right) \\ &- f_{l,k}\det\left(\frac{\partial(m_m,m_j)}{\partial(z_m,z_l)}\right) + f_{j,k}\det\left(\frac{\partial(m_m,m_l)}{\partial(z_m,z_l)}\right). \end{aligned}$$

Andererseits erhält man wieder mit Lemma 4.1.1 mod J

$$f_{m,l}\det\left(\frac{\partial(m_j,m_k)}{\partial(z_m,z_l)}\right) = f_{m,k}\det\left(\frac{\partial(m_j,m_l)}{\partial(z_m,z_l)}\right) - f_{l,k}\det\left(\frac{\partial(m_j,m_m)}{\partial(z_m,z_l)}\right).$$

Summiert man die beiden Gleichungen, so ist die Behauptung für diesen Fall gezeigt. Die anderen Fälle beweist man analog. □

Beweis von Lemma 4.1.5. Sei $k < l$ mit $f_{k,l}(0) \neq 0$. Nach einer trivialen Verallgemeinerung von Korollar 4.1.3 erhält man

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0} \begin{bmatrix} \det\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_{n-2},m_k,m_l)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}\right) \\ f_1 \dots f_{n-2} m_k m_l \end{bmatrix}.$$

Der erste und komplizierteste Fall ist $3 \le k$. Hier folgt mit Lemma 4.1.1

$$\begin{aligned} f_{k,l} m_1 &= -f_{1,k} m_l + f_{1,l} m_k \\ f_{k,l} m_2 &= -f_{2,k} m_l + f_{2,l} m_k. \end{aligned}$$

Weiterhin ist es nicht schwer zu zeigen, daß

$$f_{2,k} f_{1,l} - f_{1,k} f_{2,l} = -f_{k,l} DF$$

gilt und damit folgt nach der Transformationsformel für Residuen und Lemma 4.1.6

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} &= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\left[\frac{\frac{-DF}{f_{l,k}}\det\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-2},m_k,m_l)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)}\right)}{f_1\ldots f_{n-2}m_1m_2}\right]\\ &= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\left[\frac{DF\cdot\sigma}{f_1\ldots f_{n-2}m_1m_2}\right],\end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, daß das Produkt von DF und irgendeinem maximalen Minor in I enthalten ist. Die anderen Fälle beweist man auf ähnliche Weise. □

Wir verallgemeinern nun auf den singulären Fall.

4.1.7 Lemma. *Es existiert ein linearer Koordinatenwechsel, so daß m_1, m_2 eine reguläre $\mathscr{O}_{V,0}$-Sequenz ist.*

Beweis. Sei $\phi\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ biholomorph und $\phi(y) = z$ und sei $\psi := \phi^{-1}$. Wir bezeichnen durch m_i^y die in y-Koordinaten berechneten Minoren. Standardberechnungen liefern für $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}m_i^y &= \sum_{j=1}^{n}\det\left(\frac{\partial(\phi_1,\ldots,\hat{\phi}_j,\ldots,\phi_n)}{\partial(y_1,\ldots,\hat{y}_i,\ldots,y_n)}\right)m_j\circ\phi\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det D\phi\frac{\partial\psi_i}{\partial z_j}\circ\phi\cdot m_j\circ\phi.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Da $\mathscr{O}_{V,0}$ ein vollständiger Durchschnitt ist, existieren komplexe Zahlen

$$c_{11},\ldots,c_{1n},c_{21},\ldots,c_{2n},$$

so daß (g_1, g_2) eine reguläre $\mathscr{O}_{V,0}$-Sequenz ist, wobei $g_1 := \sum_{i=1}^n c_{1i}m_i$ und $g_2 := \sum_{i=1}^n c_{2i}m_i$ gesetzt wurde, und daher ist $\phi^*(f_1), \ldots, \phi^*(f_{n-2}), \phi^*(g_1), \phi^*(g_2)$ eine reguläre $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$-Sequenz. Zur Existenz der komplexen Zahlen verweisen wir auf Satz 11, Seite 115 in [13]. Der Satz ist, so wie er dasteht, falsch. Das Argument dort kann jedoch leicht berichtigt werden, so daß man die Existenz der komplexen Zahlen garantieren kann. Da die Vektoren $(c_{11}, \ldots, c_{1n})$ und $(c_{21}, \ldots, c_{2n})$ linear unabhängig sind, können wir sie zu einer quadratischen Matrix $C = (c_{ij})$ komplexer Zahlen ergänzen, so daß $\det C = 1$ gilt. Sei C' die Matrix mit den Einträgen $c'_{ij} := (-1)^{i+j}c_{ij}$. Dann gilt $\det C' = 1$ und daher definiert C' eine biholomorphe Abbildung. Nach Gleichung 4.1 genügt es nun $\phi := (C')^{-1}$ zu setzen, da $\phi^*(g_1) = m_1^y$ bzw. $\phi^*(g_2) = m_2^y$ gilt. □

Theorem 4.1.4 kann nun leicht bewiesen werden.

Beweis von Theorem 4.1.4. Da das Produkt von DF und einem beliebigen maximalen Minor m_i in I enthalten ist, definiert das Residuum nach Lemma 2.1.3 eine Linearform auf $\mathcal{A}$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{V,0}\left[\frac{\sigma}{m_1m_2}\right] &= \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\left[\frac{DF\sigma}{f_1\ldots f_{n-2}m_1m_2}\right]\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_i \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,p_i}\left[\frac{DF\sigma}{f_{\epsilon,1}\ldots f_{\epsilon,n-2}m_1m_2}\right],\end{aligned}$$

wobei $f_\epsilon := (f_1 - \epsilon_1, \ldots, f_{n-2} - \epsilon_{n-2})$ gesetzt wurde und wir über die Nullstellen von (m_1, m_2) auf der Faser V_ϵ summieren. Zunächst muß man sich fragen, ob (m_1, m_2)

eine Nullstelle p_i auf V_ϵ haben kann, wenn $\mathrm{ind}_{V_\epsilon, p_i}\,\omega = 0$ gilt. In diesem Fall sei etwa $f_{l,k}(p_i) \neq 0$ und dann gilt

$$\det\left(\frac{\partial(f_{\epsilon,1}, \ldots, f_{\epsilon,n-2}, m_l, m_k)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right) \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n, p_i}(f_{\epsilon,1}, \ldots, f_{\epsilon,n-2}, m_l, m_k),$$

da einer der Minoren m_l, m_k in p_i nicht verschwindet. Die Cramersche Regel und dieselbe Matrix-Transformation wie in dem Beweis von Lemma 4.1.5 zeigen, daß $DF\sigma \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n, p_i}(f_{\epsilon,1}, \ldots, f_{\epsilon,n-2}, m_1, m_2)$ gilt. Das bedeutet aber, daß das Residuum in solch einem Punkt p_i verschwindet. Daher ist nach Lemma 4.1.5 die obige Summe von Residuen die Summe der Indizes von ω auf der Faser V_ϵ, was dann $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$ nach dem Theorem von Ebeling und Gusein-Zade ist. □

Man kann nicht erwarten, daß die induzierte Bilinearform auf $\mathcal{A}$ nicht entartet ist, da $\mathcal{A}$ im allgemeinen keinen eindimensionalen Sockel hat und daher auf $\mathcal{A}$ keine nicht entarteten von einer Linearform induzierten Bilinearformen existieren können. Im nächsten Paragraphen gehen wir ins Detail.

4.1.3 Eigenschaften der Residuenform

Wir wollen zeigen, daß der Rang der induzierten Bilinearform $\beta := <,>_{\mathrm{res}_{V,0}}$ auf $\mathcal{A}$ nicht von der Wahl guter Koordinaten abhängt. Sei $\phi\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ biholomorph, $\psi := \phi^{-1}$ und $\phi(y) = z$. Mit m_i^y bezeichnen wir die in y-Koordinaten berechneten Minoren. Wir setzen noch

$$DF^y := \det\left(\frac{\partial(f_1 \circ \phi, \ldots, f_{n-2} \circ \phi)}{\partial(y_3, \ldots, y_n)}\right).$$

Um den Beweis zu führen, benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

4.1.8 Lemma. *Es seien (m_1, m_2) und $(m_1^y(\psi), m_2^y(\psi))$ reguläre $\mathscr{O}_{V,0}$-Sequenzen. Dann gilt für alle $h \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$*

$$\mathrm{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} hDF \\ f_1 \ldots f_{n-2} m_1 m_2 \end{bmatrix} = \mathrm{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} \det(D\phi)(\psi) h DF^y(\psi) \\ f_1 \ldots f_{n-2} m_1^y(\psi) m_2^y(\psi) \end{bmatrix}.$$

Beweis. Der erste Schritt besteht darin, die Behauptung für den Fall, daß $(V, 0)$ glatt ist, zu zeigen. Dazu sei $k < l$ mit $f_{k,l}(0) \neq 0$. In der gleichen Weise wie in dem Beweis von Lemma 4.1.5 erhält man

$$\mathrm{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} hDF \\ f_1 \ldots f_{n-2} m_1 m_2 \end{bmatrix} = \mathrm{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} h f_{k,l} \\ f_1 \ldots f_{n-2} m_k m_l \end{bmatrix}.$$

Lemma 4.1.1 zeigt nun

$$f_{k,l} m_j = \begin{cases} -f_{j,k} m_l + f_{j,l} m_k & \text{for } j < k \\ f_{j,k} m_l + f_{j,l} m_k & \text{for } k < j < l \\ f_{j,k} m_l - f_{j,l} m_k & \text{for } l < j. \end{cases}$$

Damit und mit Gleichung 4.1 folgt

$$\begin{aligned} f_{k,l}m_1^y(\psi) &= \det(D\phi)(\psi)m_k\Big(\sum_{j=1}^{l-1}(-1)^{j+1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z_j}f_{j,l} + \sum_{j=l+1}^{n}(-1)^j\frac{\partial\psi_1}{\partial z_j}f_{j,l}\Big) \\ &+ \det(D\phi)(\psi)m_l\Big(\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\frac{\partial\psi_1}{\partial z_j}f_{j,k} + \sum_{j=k+1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z_j}f_{j,k}\Big) \\ f_{k,l}m_2^y(\psi) &= \det(D\phi)(\psi)m_k\Big(\sum_{j=1}^{l-1}(-1)^j\frac{\partial\psi_2}{\partial z_j}f_{j,l} + \sum_{j=l+1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\partial\psi_2}{\partial z_j}f_{j,l}\Big) \\ &+ \det(D\phi)(\psi)m_l\Big(\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\frac{\partial\psi_2}{\partial z_j}f_{j,k} + \sum_{j=k+1}^{n}(-1)^j\frac{\partial\psi_2}{\partial z_j}f_{j,k}\Big). \end{aligned}$$

Daher existiert eine Matrix A mit

$$\begin{pmatrix} f_{k,l}m_1^y(\psi) \\ f_{k,l}m_2^y(\psi) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} m_k \\ m_l \end{pmatrix}.$$

Unter Benutzung der Formel

$$f_{i,l}f_{j,k} = \pm f_{k,l}f_{i,j} \pm f_{j,l}f_{i,k},$$

wobei i, l, j, k paarweise disjunkt sind und die Vorzeichen von der Lage der Indizes abhängen, ist es nicht schwer,

$$\begin{aligned} \det A &= \det(D\phi)^2(\psi)f_{k,l}\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j+1}\det\left(\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(z_i,z_j)}\right)f_{i,j} \\ &= \det(D\phi)(\psi)f_{k,l}DF^y(\psi) \end{aligned}$$

zu berechnen. Die Anwendung der Transformationsformel für Residuen liefert den Beweis für den glatten Fall. Für die Verallgemeinerung auf den singulären Fall muß

$$\sum_i \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,p_i}\left[\begin{matrix} hDF \\ f_{\epsilon,1}\dots f_{\epsilon,n-2}m_1m_2 \end{matrix}\right] = \sum_j \operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,q_j}\left[\begin{matrix} \det(D\phi)(\psi)hDF^y(\psi) \\ f_{\epsilon,1}\dots f_{\epsilon,n-2}m_1^y(\psi)m_2^y(\psi) \end{matrix}\right]$$

gezeigt werden, wobei sich die erste Summe über die Nullstellen von $g_1 := (m_1, m_2)$ auf der Faser V_ϵ und die zweite über die Nullstellen von $g_2 := (m_1^y(\psi), m_2^y(\psi))$ auf V_ϵ erstreckt. Die Residuen sind in solchen Punkten gleich, die gemeinsame Nullstellen von g_1 und g_2 sind. Sei p_i eine Nullstelle von g_1 mit $g_2(p_i) \neq 0$. Dann gilt $\operatorname{ind}_{V_\epsilon,p_i}\omega = 0$. Gilt $f_{l,k}(p_i) \neq 0$ so auch $hf_{k,l} \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,p_i}(f_{\epsilon,1},\dots,f_{\epsilon,n-2},m_1,m_2)$. Dieselbe Transformation wie zu Beginn des Beweises und Anwendung der Cramerschen Regel zeigen

$$hDF \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,p_i}(f_{\epsilon,1},\dots,f_{\epsilon,n-2},m_1,m_2).$$

Daher verschwindet das Residuum in solch einem Punkt. Ähnlich argumentiert man für eine Nullstelle q_j von g_2 mit $g_1(q_j) \neq 0$. Da die obigen Summen der Residuen also gleich sind, liefert die Grenzwertbildung $\epsilon \to 0$ die Gleichheit der Residuen im Ursprung. □

Wir nehmen an, daß die gewählten Koordinaten, genauso wie die y-Koordinaten, gute Koordinaten sind. Wir setzen

$$\mathcal{B} := \frac{\mathscr{O}_{V,0}}{(m_1,m_2)},\ \ \mathcal{C} := \frac{\mathcal{B}}{\operatorname{ann}_{\mathcal{B}}(DF)}.$$

Da $\mathcal{B}(m_3,\dots,m_n) \subset \mathrm{ann}_{\mathcal{B}}(DF)$ gilt, folgt $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} \le \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}$, und das relative Residuum definiert eine Linearform auf $\mathcal{C}$, deren induzierte Bilinearform auf $\mathcal{C}$ nicht entartet ist, da

$$\mathrm{res}_{V,0}\begin{bmatrix} hg \\ m_1m_2 \end{bmatrix} = 0 \text{ für alle } g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$$

impliziert, daß

$$\mathrm{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} hDFg \\ f_1\dots f_{n-2}m_1m_2 \end{bmatrix} = 0 \text{ für alle } g \in \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$$

gilt. Die Lokale Dualität liefert $hDF \in I$ und daher $h \in \mathrm{ann}_{\mathcal{B}}(DF)$. Das bedeutet, daß $\mathcal{C}$ einen eindimensionalen Sockel $\mathrm{soc}\,\mathcal{C}$ besitzt. Dieser wird durch die Klasse von σ erzeugt: Es sei $g(0) = 0$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{V,0}\begin{bmatrix} g\sigma \\ m_1m_2 \end{bmatrix} &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_i \mathrm{res}_{\mathbb{C}^n,p_i}\begin{bmatrix} gDF\sigma \\ f_{\epsilon,1}\dots f_{\epsilon,n-2}m_1m_2 \end{bmatrix} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_i g(p_i)\,\mathrm{ind}_{V_\epsilon,p_i}\,\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit $\sigma \in \mathrm{soc}\,\mathcal{C}$. Weiterhin gilt $\mathrm{rang}\,\beta = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}$, und wir folgern

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{soc}\,\mathcal{A} \le \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} + 1.$$

Nun soll gezeigt werden, daß $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}$ nicht von der Wahl guter Koordinaten abhängt. Es besteht eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{ann}_{\mathcal{B}}(DF) \to \mathcal{B} \stackrel{\cdot DF}{\to} \mathcal{B} \to \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}(DF)} \to 0$$

und daher gilt $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}(DF)$. Sei

$$\mathcal{B}' := \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{(f_1(\phi),\dots,f_{n-2}(\phi),m_1^y,m_2^y)}.$$

Wir müssen $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}(DF) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}'(DF^y)$ zeigen. Da

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}'(DF^y) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{B}''(DF^y(\psi))$$

mit

$$\mathcal{B}'' := \frac{\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}}{(f_1,\dots,f_{n-2},m_1^y(\psi),m_2^y(\psi))},$$

genügt es nun, einen Vektorraumisomorphismus

$$\varphi\colon \mathcal{B}(DF) \to \mathcal{B}''(DF^y \circ \psi)$$

zu konstruieren. Wir setzen $\varphi(gDF) := gDF^y(\psi)$. Nun zeigen Lemma 4.1.8 und die lokale Dualität, daß

$$g \in \mathrm{ann}_{\mathcal{B}}(DF) \Longleftrightarrow g \in \mathrm{ann}_{\mathcal{B}''}(DF^y(\psi))$$

gilt, was bedeutet, daß φ wohldefiniert und bijektiv ist. Wir fassen zusammen:

4.1.9 Satz. *(i) Das relative Residuum induziert eine nicht entartete Bilinearform auf $\mathcal{C}$.*
(ii) Der eindimensionale Sockel von $\mathcal{C}$ wird von σ erzeugt.
(iii) Die Dimension von $\mathcal{C}$ hängt nicht von der Wahl guter Koordinaten ab.
(iv) Für den Rang gilt $\mathrm{rang}\,\beta = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C}$, insbesondere ist β nicht entartet und σ erzeugt den eindimensionalen Sockel von $\mathcal{A}$, falls V glatt ist.
(v) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{soc}\,\mathcal{A} \le \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{C} + 1$.

4.2 Bemerkungen

1-Formen auf Kurvensingularitäten Wir haben hier nur einen maximalen Minor m und daher ist die Algebra $\mathcal{A}$ ein vollständiger Durchschnitt. Die Residuentheorie kann direkt angewendet werden, so daß wir eine nicht entartete Bilinearform auf $\mathcal{A}$ erhalten. Aber die Dimension von $\mathcal{A}$ kann auch durch ein relatives Residuum ausgedrückt werden. Es gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{dm}{m}$$

nach Korollar 2.1.2.

Verallgemeinerung auf allgemeine Dimensionen Man muß sich fragen, wie die Resultate für ein beliebiges q zu verallgemeinern sind. Das Problem besteht darin, daß es im allgemeinen keinen Koordinatenwechsel gibt, so daß $(\tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_{n-q})$ eine reguläre $\mathscr{O}_{V,0}$-Sequenz ist und daher existieren die Residuen nicht. Sei $n > 2q+1$. Wir nehmen an, daß $(f_1, \ldots, f_q, \tilde{m}_1, \ldots, \tilde{m}_{n-q})$ eine isolierte Nullstelle definiert. Man betrachte die $(q+1)$ maximalen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-q+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial z_{n-q+1}} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial z_n} \\ \omega_{n-q+1} & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}.$$

Das Verschwinden dieser Minoren im Ursprung würde implizieren, daß $2q+1$ Gleichungen eine isolierte Nullstelle definieren, was nicht möglich ist. Ist einer dieser Minoren eine Einheit in $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, so ist $\mathcal{A}$ ein vollständiger Durchschnitt.

Linearformen auf Räumen kählerscher Formen Es scheint auch natürlich zu sein, Linearformen auf dem Vektorraum $\Omega^{n-q}_{V,0}/\omega \wedge \Omega^{n-q-1}_{V,0}$ zu betrachten, da dessen Dimension auch der Index $\operatorname{ind}_{V,0} \omega$ ist: Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T\Omega^{n-q}_{V,0} \longrightarrow \frac{\Omega^{n-q}_{V,0}}{\omega \wedge \Omega^{n-q-1}_{V,0}} \xrightarrow{\lambda} \frac{J'}{J} \longrightarrow 0$$

mit $\dim_{\mathbb{C}} T\Omega^{n-q}_{V,0} = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}/J'$, wobei $T\Omega^{n-q}_{V,0}$ der Torsionsuntermodul ist und J' das Ideal in $\mathscr{O}_{\mathbb{C}^n,0}$, das von den Komponenten von f und den maximalen Minoren der Jacobimatrix von f erzeugt wird. Details dieser Argumentation können in [15] gefunden werden. Wenn wir eine reguläre $\mathscr{O}_{V,0}$-Sequenz $(g_1, \ldots, g_{n-q})$ haben und das Residuum $\operatorname{res}_{V,0}\begin{bmatrix} \cdot \\ g_1 \ldots g_{n-q} \end{bmatrix}$ auf $\omega \wedge \Omega^{n-q-1}_{V,0}$ verschwindet, so verschwindet das absolute Residuum $\operatorname{res}_{\mathbb{C}^n,0}\begin{bmatrix} \cdot \\ g_1 \ldots g_{n-q} f_1 \ldots f_q \end{bmatrix}$ auf J, da $m_{j_1,\ldots,j_{q+1}} \in \lambda(\omega \wedge \Omega^{n-q-1}_{V,0})$ für jeden Minor gilt.

Literaturverzeichnis

[1] M. A. Aguilar, J. A. Seade and A. Verjovsky: Indices of vector fields and topological invariants of real analytic singularities. J. reine angew. Math. **504,** (1998) 159-176

[2] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko: Singularities of Differentiable Maps. I. Birkhäuser-Verlag, Basel, 1985

[3] Ch. Bonatti and X. Gómez-Mont: The index of a holomorphic vector field on a singular variety I. Asterisque **222,** (1994) 9-35

[4] A. Douady: Flatness and Privilege. L'Enseignement Mathématique **14,** (1968) 47-74

[5] W. Ebeling and S.M. Gusein-Zade: Indices of 1-forms on an isolated complete intersection singularity. arXiv:math.AG/0105242, erscheint in Mosc. Math. J.

[6] W. Ebeling and S.M. Gusein-Zade: On the index of an vector field at an isolated singularity. The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997), 141-152, Fields Inst. Commun., **24,** Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[7] D. Eisenbud: Commutative Algebra. With a View Toward Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlag, New York, 1995

[8] D. Eisenbud and H. I. Levine: An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ. Annals of Mathematics **106,** (1977) 19-44

[9] X. Gómez-Mont: An algebraic formula for the index of a vector field on a hypersurface with an isolated singularity. J. of Alg. Geom. **7,** (1998) 731-752

[10] X. Gómez-Mont and P. Mardesić: Index of a Vector Field Tangent to an Odd-Dimensional Hypersurface and the Signature of the Relative Hessian. Functional Analysis and Its Applications **33,** No. 1 (1999) 1-10

[11] X. Gómez-Mont and P. Mardesić: The index of a vector field tangent to a hypersurface and the signature of the relative Jacobian determinant. Ann. Inst. Fourier **47,** 5 (1997) 1523-1539

[12] X. Gómez-Mont, J. Seade, and A. Verjowsky: The index of a holomorphic flow with an isolated singularity. Math. Ann. **291,** (1991) 737-751

[13] H. Grauert und R. Remmert: Analytische Stellenalgebren. Springer-Verlag, Berlin, etc. 1971

[14] H. Grauert and R. Remmert: Coherent Analytic Sheaves. Springer-Verlag, Berlin, etc. 1984

[15] G.-M. Greuel: Der Gauß-Manin Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten. Math. Ann. **214,** (1975) 235-266

[16] Ph. Griffiths and J. Harris: Principles of Algebraic Geometry. J. Wiley and Sons, New York, 1978

[17] D. Husemoller: Fibre bundles. Second edition. Graduate Texts in Math. 20, Springer-Verlag, Berlin etc. 1975

[18] Th. de Jong and G. Pfister: Local Analytic Geometry. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2000

[19] G. N. Khimshiashvili: On the local degree of a smooth map. Comm. Akad. Sci. Georgian SSR. **85,** no. 2, (1977) 309-311

[20] O. Klehn: Local residues of holomorphic 1-forms on an isolated surface singularity. manuscripta math. **109,** (2002) 93-108

[21] O. Klehn: On the index of a vector field tangent to a hypersurface with non-isolated zero in the embedding space. Math. Nachr. **260,** (2003) 48-57

[22] D. Lehmann and T. Suwa: Residues of holomorphic vector fields relative to singular invariant subvarieties. J. Differential Geometry **42,** (1995) 165-192

[23] D. Lehmann and T. Suwa: Residues of holomorphic vector fields on singular varieties. Ecuaciones Diferenciales Singularidades, ed. J. Mozo Fernandes, Universidad de Valladolid (1997) 159-182

[24] D. Lehmann, M. Soares, and T. Suwa: On the index of a holomorphic vector field tangent to a singular variety. Bol. Soc. Bras. Mat. **26,** (1995) 183-199

[25] E. J. N. Looijenga: Isolated Singular Points on Complete Intersections. London Mathematical Society Lecture Note Series 77, Cambridge University Press 1984

[26] John W. Milnor: Topology from the Differentiable Viewpoint. University Press of Virginia, 1965

[27] J.A. Seade and T. Suwa: A residue formula for the index of a holomorphic flow. Math. Ann. **304,** (1996) 621-634

[28] Z. Szafraniec: A Formula for the Euler Characteristic of a Real Algebraic Manifold. manuscripta math. **85,** (1994) 345-360

[29] Z. Szafraniec: On the Euler Characteristic of Complex Algebraic Varieties. Math. Ann. **280,** (1988) 177-183

[30] Z. Szafraniec: On topological invariants of real analytic singularities. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **130,** (2001) 13-24

[31] Z. Szafraniec: Topological degree and quadratic forms. Journal of Pure and Applied Algebra **141,** (1999) 299-314