

Phasenfluktuationen in Bose-Einstein-Kondensaten

Vom Fachbereich Physik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Phys. Dirk Hellweg
geboren am 04.09.1972 in Halle (Westfalen)

2003

Referent: Prof. Dr. W. Ertmer
Koreferent: Prof. Dr. M. Lewenstein
Tag der Promotion: 23. Juli 2003

Zusammenfassung

Bose-Einstein-Kondensate verdünnter atomarer Gase stellen fundamentale, makroskopische Quantensysteme dar, die wesentlich durch ihre Kohärenzeigenschaften geprägt sind. Viele der faszinierenden Effekte, wie beispielsweise die Superfluidität, quantisierte Vortices und die Interferenz unabhängiger Kondensate, sind eng mit der makroskopischen Phase verknüpft. Ebenso basieren vielversprechende Anwendungen wie der Atomlaser auf der Nutzung von Bose-Einstein-Kondensaten als Quelle kohärenter Materiewellen.

Zentrales Thema dieser Arbeit sind die Kohärenzeigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten. Die vorgenommenen Messungen untersuchen insbesondere die Abhängigkeit der Phasenkohärenz von der Fallengeometrie und beantworten damit Fragestellungen bezüglich des Einflusses der Dimensionalität auf die Eigenschaften der Bose-Einstein-Kondensate. Für die umfangreiche Charakterisierung der Kohärenzeigenschaften wurde die bestehende Apparatur zur Erzeugung von ^{87}Rb -Kondensaten systematisch optimiert und zur Realisierung stark elongierter Fallenpotenziale erweitert.

Im Rahmen dieser Arbeit ist es erstmals gelungen, räumliche und zeitliche Fluktuationen der Phase von Bose-Einstein-Kondensaten nachzuweisen und zu zeigen, dass Bose-Einstein-Kondensate nicht notwendigerweise global kohärent sind. Zur systematischen Untersuchung der Phasenfluktuationen wurden zwei Methoden entwickelt, die auf der Expansionsdynamik und der Interferenz der Kondensate beruhen.

Durch Beobachtung der Expansionsdynamik konnte gezeigt werden, dass sich Phasenfluktuationen in gefangenen Bose-Einstein-Kondensaten in Dichtemodulationen ballistisch expandierter Kondensate niederschlagen. Mit dieser Methode ist die Abhängigkeit der Fluktuationen von den experimentellen Parametern beobachtet und analysiert worden. Darüber hinaus wurde die Unterdrückung von Dichtefluktuationen in gefangenen Bose-Einstein-Kondensaten, auf der die theoretische Beschreibung der Phasenfluktuationen beruht, experimentell bestätigt.

Ein weiterer Schwerpunkt war die interferometrische Untersuchung der Kohärenzeigenschaften. Es wurde eine neuartige Methode entwickelt, die in vielerlei Hinsicht analog zu den Experimenten von Hanbury-Brown und Twiss ist und auf der Analyse der Intensitätskorrelationen im Interferenzmuster zweier räumlich verschobener Kopien eines Bose-Einstein-Kondensates basiert. Mit dieser Methode ist es erstmals gelungen, die Korrelationsfunktion phasenfluktuerender Kondensate zu messen.

Die erzielten Ergebnisse stellen einen Beitrag zum Verständnis der Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten dar und sind für die Anwendung elongierter Kondensate überaus relevant.

Schlagwörter: Bose-Einstein-Kondensation, Kohärenz, Atominterferometrie

Abstract

Bose-Einstein condensates of dilute atomic gases constitute fundamental macroscopic quantum systems which are characterized by their coherence properties. Many of the fascinating effects like superfluidity, quantized vortices and the interference of independent condensates are closely related to their macroscopic phase. Similarly most promising applications, like the atom laser, rely on the use of Bose-Einstein condensates as source of coherent matter waves.

This thesis investigates the phase coherence properties of Bose-Einstein condensates. In particular, the dependence of the phase coherence on the trap geometry is experimentally examined. These measurements answer fundamental questions concerning the influence of dimensionality on the properties of Bose-Einstein condensates. To characterize the coherence properties in detail the apparatus for the production of ^{87}Rb condensates was systematically optimized and extended to realize highly elongated trapping potentials.

Using such trapping potentials, spatial and temporal fluctuations of the phase of Bose-Einstein condensates were observed for the first time and it was shown that Bose-Einstein condensates are not always globally phase coherent. To systematically analyze the phase fluctuations two methods based on the expansion dynamics and the interference of Bose-Einstein condensates were developed.

By observing the expansion dynamics it was shown that phase fluctuations in trapped Bose-Einstein condensates transfer into density modulations of ballistically expanded condensates. An analysis of these modulations allowed for a comparison with theoretical results, confirming the expected dependence on the experimental parameters. Furthermore, the suppression of density modulations in trapped Bose-Einstein condensates, which is at the basis of the theoretical description of phase fluctuations, was confirmed.

Another major topic was the interferometric investigation of the coherence properties. A new interferometric method was developed which is in many respects analogous to the experiments of Hanbury-Brown and Twiss and is based on the analysis of intensity correlations in the interference pattern of two spatially displaced copies of a Bose-Einstein condensate. Using this method the correlation function of phase-fluctuating condensates was measured for the first time.

The results contribute to the understanding of the properties of Bose-Einstein condensates and are highly relevant for the application of elongated condensates.

Keywords: Bose-Einstein Condensation, Coherence, Atom Interferometry

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Bose-Einstein-Kondensation	7
2.1	Theoretische Grundlagen	7
2.1.1	Bose-Einstein-Kondensation in idealen Gasen	7
2.1.2	Bose-Einstein-Kondensation in schwach wechselwirkenden Gasen	11
2.1.3	Ballistische Expansion von Kondensaten im Thomas-Fermi-Regime	17
2.2	Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten	18
2.3	Manipulation von Bose-Einstein-Kondensaten	25
2.3.1	Optische Dipolpotenziale	26
2.3.2	Bragg-Beugung	26
3	Theoretische Beschreibung der Phasenfluktuationen	33
3.1	Grundlagen	33
3.2	Korrelationsfunktionen	35
3.2.1	Korrelationsfunktion erster Ordnung	35
3.2.2	Korrelationsfunktionen höherer Ordnung	39
3.3	Numerische Simulation	43
3.4	Ballistische Expansion	43
4	Optimierung der Apparatur zur Beobachtung von Phasenfluktuationen	53
4.1	Erzeugung stark elongierter Fallenpotenziale	53
4.1.1	Optischer Wellenleiter	54
4.1.2	Reduktion des axialen Einschlusses	55
4.2	Kondensation im magnetisch schwächer gefangenen Grundzustand	59
4.3	Verbesserung der Detektion	62
5	Experimentelle Untersuchung von Phasenfluktuationen	73
5.1	Bestimmung von Ensembleparametern	74
5.1.1	Absorptionsaufnahmen	75

5.1.2	Abbildungsmaßstab	78
5.1.3	Fallenfrequenzen	80
5.1.4	Dichteverteilung, Temperatur und Teilchenzahlen	85
5.2	Untersuchung der ballistisch expandierten Dichteverteilung	89
5.2.1	Nachweis von Phasenfluktuationen	90
5.2.2	Abhängigkeit von den experimentellen Parametern	93
5.2.3	Ortsabhängige Messung der Fluktuationen in der axial dekomprimierten Magnetfalle	98
5.2.4	Expansionsdynamik	103
5.2.5	Unterdrückung von Dichtefluktuationen	105
5.2.6	Beobachtung der Phasenfluktuationen während der Ent- stehung des BECs	108
5.3	Interferometrische Messungen	111
5.3.1	Interferometrieschema	111
5.3.2	Entwicklung der Wellenfunktion während der Interfero- metriesequenz	116
5.3.3	Kontrastinterferometrie	121
5.3.4	Intensitätskorrelationen	123
6	Ausblick	143
A	Lasersystem	145
B	Linienstärken	149
	Literaturverzeichnis	151

EINLEITUNG

Mit der Bose-Einstein-Kondensation in verdünnten atomaren Gasen, die erstmals 1995 gelang [1, 2, 3], wurde ein fundamentaler quantenstatistischer Effekt experimentell zugänglich gemacht. Damit eröffnete sich ein neues Forschungsfeld, das aufgrund der außergewöhnlichen Eigenschaften der Bose-Einstein-Kondensate sowohl die Untersuchung grundlegender quantenmechanischer Fragestellungen erlaubt als auch ganz neue Anwendungsperspektiven bietet. Die Bose-Einstein-Kondensation wurde schon 1925 von Einstein vorausgesagt¹ [5]. Inspiriert von de-Broglie's Konzept der Materiewellen übertrug Einstein dabei von N. Bose vorgenommene Betrachtungen [6] zur Photonstatistik auf ideale atomare Gase. Er zeigte, dass unterhalb einer kritischen Temperatur ein Großteil der Atome in nur einen Quantenzustand, den Grundzustand des Systems, übergeht, d.h. „kondensiert“. Die erste Anwendung fand diese Theorie im Jahr 1938 bei der Erklärung der Superfluidität von ^4He durch London [7]. Er führte auch das bis heute verwendete Konzept einer makroskopischen Wellenfunktion ein. Inspiriert durch die Eigenschaften flüssigen Heliums wurde in den folgenden Jahren ein großer Teil der theoretischen Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation in homogenen Systemen durch eine Reihe bedeutender Arbeiten von u.a. Tisza [8], Landau [9], Bogoliubov [10] und Pitaevskii [11] gelegt. Da ^4He eine Flüssigkeit ist, ist sein Verhalten durch Wechselwirkungen dominiert. Dies hat zur Folge, dass sich selbst für Temperaturen weit unterhalb der Übergangstemperatur nur etwa 10% der Atome im Kondensatanteil befinden. Daher war ein wesentliches Ziel die Realisierung einer „reinen Form“ der Bose-Einstein-Kondensation in schwach wechselwirkenden atomaren Gasen, ohne die Komplikationen der relativ starken Wechselwirkungen einer Flüssigkeit.

¹Einsteins Veröffentlichung erschien vor der Entwicklung der Quantenmechanik und vor der Unterscheidung zwischen Bosonen und Fermionen. Eine ausführlichere Betrachtung der historischen Entwicklung befindet sich in [4].

Als aussichtsreichster Kandidat galt lange Zeit spinpolarisierter Wasserstoff², da er als einziges Element am Temperaturnullpunkt gasförmig bleibt [15, 16]. Es hat sich jedoch gezeigt, dass Molekülbildung auch für viele andere verdünnte atomare Gase kein ernsthaftes Hindernis darstellt, da sie häufig erheblich langsamer abläuft als die zur Kondensation benötigte Zeit.

In einem vereinfachten Bild sind Atome als Wellenpakete der Ausdehnung ihrer thermischen de-Broglie-Wellenlänge beschreibbar. Die Bedingung zur Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation ist, dass sich die atomaren Wellenpakete maßgeblich überlappen. Diese Bedingung stellt jedoch in verdünnten atomaren Gasen sehr hohe experimentelle Anforderungen, da sie extrem niedrige Temperaturen, typischerweise im Nanokelvin-Bereich erfordert. Um dieses zu erreichen, bedurfte es der Entwicklung neuer Methoden der Atomphysik: der Laserkühlung, der Speicherung kalter neutraler Atome und der evaporativen Kühlung. Die Laserkühlung wurde sehr erfolgreich für Alkali-Atome angewandt und ermöglichte die Präparation kalter, atomarer Ensembles im μK -Bereich und das Fangen dieser Atome in der 1987 demonstrierten magneto-optischen Falle [17]. Zur weiteren Erhöhung der Phasenraumdichte wird das lasergekühlte Ensemble zumeist in ein konservatives magnetisches oder optisches Potenzial geladen und die energiereichsten Atome werden sukzessive aus dem Fallenpotenzial entfernt. Diese evaporative Kühlung verringert die Gleichgewichtstemperatur des Systems und wird bis zum Erreichen der Kondensationstemperatur fortgesetzt.

Seit der erstmaligen Realisierung im Jahr 1995 mit Alkali-Atomen hat sich die Bose-Einstein-Kondensation nahezu explosionsartig zu einem eigenständigen Forschungsgebiet mit vielfältigen Verbindungen zu verschiedensten Bereichen der Physik entwickelt. Die Anzahl der mittlerweile etwa 40 Experimente zur Bose-Einstein-Kondensation und der experimentellen und theoretischen Veröffentlichungen ist auch weiterhin steigend. Ebenso ist absehbar, dass die Zahl der kondensierten Elemente weiterhin ansteigen und durch die unterschiedlichen atomaren Eigenschaften die experimentellen Möglichkeiten erweitern wird. Insbesondere Erdalkali-Atome und Edelgase, deren Kondensation im metastabilen Zustand vor kurzem für Helium gelungen ist [18, 19], bieten vielversprechende, neue Perspektiven. Die Erdalkali-Atome besitzen sehr schmale Dipol-verbotene Übergänge und sind damit aussichtsreiche Kandidaten für Präzisionsmessungen basierend auf Bose-Einstein-Kondensaten. Die Edelgase bieten aufgrund der hohen Energie des metastabilen Zustandes neuartige Detektionsmöglichkeiten

²Das Erreichen der Bose-Einstein-Kondensation in Wasserstoff [12] ist trotz der intensiven Arbeiten seit etwa 1980 [13, 14] erst 1998 gelungen. Zu den Gründen zählen die ungünstige atomare Übergangsfrequenz von 121 nm, die die Verwendung kryogener Kühlmethode erfordert, und schwierige Stoßeigenschaften. Die dort entwickelten Techniken, insbesondere die evaporative Kühlung, haben aber wesentliche Voraussetzungen für die deutlich zuvor erreichte Kondensation der Alkali-Atome geschaffen.

und eröffnen damit Perspektiven für detaillierte Untersuchungen der Quantenstatistik.

Das enorme Interesse an der Bose-Einstein-Kondensation begründet sich durch die einzigartigen Eigenschaften dieser Quantengase. Das Kondensat kann durch die vielfache Besetzung der Wellenfunktion eines einzigen Quantenzustandes beschrieben werden, dessen Ausdehnung mehrere $100\ \mu\text{m}$ betragen kann. Es handelt sich also um ein sehr reines, gezielt manipulierbares makroskopisches Quantenobjekt, bei dem eine Kontrolle über die Bewegung und Position der Atome erlangt wird, die nur durch die Heisenbergsche Unschärferelation begrenzt ist. Zudem kann der Betrag der Wellenfunktion, der die atomare Dichteverteilung beschreibt, optisch abgebildet werden und liefert experimentelle Signale hohen Informationsgehalts.

Schon heute ist abzusehen, dass Bose-Einstein-Kondensate den Ausgangspunkt für viele Anwendungen und weiterführende Experimente darstellen werden. Die (Photonen-)Optik wurde durch den Laser als Quelle kollimierter, kohärenter Strahlung revolutioniert. Daher stößt der sogenannte Atomlaser, bei dem Bose-Einstein-Kondensate als Quelle kohärenter Materiewellen genutzt werden, auf großes Interesse. Durch die Auskopplung von Atomen aus einem Bose-Einstein-Kondensat ist es bereits gelungen, gepulst [20, 21] und für eine kurze Zeit kontinuierlich [22] kohärente Materiewellen zu extrahieren. Diese Entwicklungen eröffnen ein neues Gebiet der Atomoptik, die kohärente Atomoptik, die die Entwicklung kohärenzerhaltender optischer Elemente wie Spiegel [23], Strahlteiler und Linsen erfordert. Als weitere Anwendung wird die Verwendung von Bose-Einstein-Kondensaten für Präzisionsmessungen diskutiert [24]. So wurde gezeigt, dass im Gegensatz zu konventionellen Atomquellen mit Bose-Einstein-Kondensaten prinzipiell eine quantenlimitierte Messgenauigkeit erreicht werden kann [25]. Darüber hinaus können evaporativ gekühlte bosonische Atomwolken zum sympathetischen Kühlen [26] anderer Spezies genutzt werden. Mit dieser Methode ist es beispielsweise gelungen, quantenentartete atomare Fermigase herzustellen [27, 28, 29], die Grund zur Hoffnung geben, den BCS-Übergang in atomaren Fermigasen beobachten zu können. Der Einsatz optischer Gitter eröffnet ausgehend von Bose-Einstein-Kondensaten das neue Forschungsgebiet stark-wechselwirkender atomarer Gittergase. Insbesondere mit dem kürzlich demonstrierten MOTT-Isolator-Übergang [30, 31] können Fock-Zustände mit einer genau definierten Atomzahl pro Gitterplatz erzeugt werden. Diese Entwicklungen bieten Perspektiven für die Quanteninformationsverarbeitung [32], die Quantenchemie und die Erzeugung molekularer Bose-Einstein-Kondensate [33].

Den wesentlichen Unterschied zu thermischen Atomverteilungen bilden die Kohärenzeigenschaften der Bose-Einstein-Kondensate. Auf diesen basieren viele der möglichen Anwendungen und ein beträchtlicher Teil der faszinierenden Eigenschaften der Kondensate. Hierzu gehören die Superfluidität, quantisierte Vor-

tices [34, 35], Interferenzeffekte und der Josephson-Effekt [36, 37]. Daher stand die Phasenkohärenz schnell im Zentrum des experimentellen Interesses und wurde für dreidimensionale Kondensate durch interferometrische [38, 39] und spektroskopische [40] Messungen für Temperaturen weit unterhalb der Kondensationstemperatur und selbst für höhere Temperaturen durch Radiofrequenz-Auskopplung [41] bestätigt. Von großem Interesse in diesem Zusammenhang sind niederdimensionale Quantengase [42, 29], in denen die atomare Bewegung in eine oder zwei Raumrichtungen auf die Nullpunktsoszillation beschränkt ist, da sich ihre Eigenschaften qualitativ von dreidimensionalen Systemen unterscheiden. Es wurde insbesondere vorausgesagt, dass eindimensionale [43] und auch sehr elongierte, dreidimensionale Kondensate [44] starke räumliche und zeitliche Fluktuationen der Phase zeigen. Die Kohärenzeigenschaften sind daher dramatisch verändert und resultieren in einer Verringerung der Phasenkohärenzlänge, die erheblich kleiner als die Kondensatlänge sein kann. Solche Kondensate werden als Quasikondensate bezeichnet.

Ziel dieser Arbeit war es, die Kohärenzeigenschaften elongierter Bose-Einstein-Kondensate zu untersuchen. Besonderes Interesse galt dabei der Fragestellung der Existenz von Phasenfluktuationen und der Untersuchung des Einflusses der Fallengeometrie auf die Kohärenzeigenschaften. Da viele Bose-Einstein-Kondensate in elongierten Fallen erzeugt werden und besonders der kürzlich demonstrierte Einsatz von Mikrochips [45, 46] die Möglichkeit extrem elongierter Potentiale bietet, ist diese Fragestellung sowohl für das konzeptionelle Verständnis der Bose-Einstein-Kondensation als auch für viele Anwendungen relevant.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 wird zunächst ein kurzer Überblick über die theoretischen Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation gegeben. Darüber hinaus wird auf die experimentelle Erzeugung und die für die interferometrischen Messungen verwendete Manipulation von Bose-Einstein-Kondensaten mithilfe der Bragg-Beugung eingegangen.

In Kapitel 3 wird die theoretische Beschreibung der Phasenfluktuationen erläutert. Insbesondere wird eine analytische Theorie der Expansion phasenfluktuerender Kondensate gegeben und die Berechnung der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung vorgestellt, die für die interferometrische Messung der räumlichen Korrelationen benötigt wurde. Es sei an dieser Stelle betont, dass sich trotz ihrer getrennten Darstellung die theoretischen Arbeiten und die experimentellen Messungen mehrmals wechselseitig befruchtet haben.

Um möglichst geeignete Bedingungen zur Untersuchung der Phasenfluktuationen zu schaffen, wurde die bestehende BEC-Apparatur optimiert. Diese Arbeiten werden in Kapitel 4 beschrieben und beinhalten insbesondere die Erzeugung stark elongierter Fallenpotentiale, die Kondensation im magnetisch schwächer gefangenen $F = 1$ Zustand und die Verbesserung der Detektion.

Kapitel 5 stellt die experimentellen Untersuchungen der Phasenfluktuationen vor. Zunächst wird die Transformation von Phasenfluktuationen in Streifen in der Dichteverteilung ballistisch expandierter Kondensate gezeigt und die Messungen, mit denen der erstmalige Nachweis der Phasenfluktuationen und deren umfangreiche Charakterisierung gelang [47, 48], werden erläutert. Darüber hinaus wird die Unterdrückung von Dichtefluktuationen in gefangenen phasenfluktuierten Kondensaten, auf der die theoretische Beschreibung basiert, experimentell bestätigt [49]. Schließlich wird eine neuartige interferometrische Methode demonstriert, die ähnlich dem Experiment von Hanbury-Brown und Twiss [50, 51] auf Intensitätskorrelationen beruht. Mit dieser Methode ist es erstmals gelungen, die Korrelationsfunktion phasenfluktuiertender Kondensate zu messen [52, 53].

BOSE-EINSTEIN-KONDENSATION

2.1 Theoretische Grundlagen

Am dramatischsten zeigt sich der Unterschied zwischen Bosonen und Fermionen bei tiefen Temperaturen. Während zwei identische Fermionen sich nicht im gleichen Zustand befinden können („Pauli-Prinzip“), ist für Bosonen die Übergangswahrscheinlichkeit in schon besetzte Zustände erhöht. Die Besetzungsstatistik ist im thermodynamischen Gleichgewicht durch die Bose-Einstein-Statistik gegeben. Diese Statistik hat zur Folge, dass unterhalb einer kritischen Temperatur T_c eine plötzlich einsetzende makroskopische Besetzung des Grundzustandes des bosonischen Systems eintritt, die sogenannte Bose-Einstein-Kondensation. Die Bose-Einstein-Kondensation ist somit ein rein quantenstatistischer Effekt, der schon 1925 [6, 54, 5] für ideale, d.h. nicht wechselwirkende Gase vorausgesagt wurde. Eine Wechselwirkung zwischen den Bosonen ist nur indirekt zum Erreichen des thermodynamischen Gleichgewichts erforderlich. Die in den Experimenten verwendeten atomaren Gase sind nicht ideal, sondern schwach wechselwirkend. Da die thermodynamischen Größen wie Kondensationstemperatur und Anteil der kondensierten Atome jedoch nicht durch die Wechselwirkungen dominiert sind, werden zunächst einige qualitative Eigenschaften und der Einfluss der Dimensionalität des Systems anhand der Theorie idealer Bosegase erläutert. Andere Eigenschaften wie die Grundzustandswellenfunktion und das dynamische Verhalten der Bose-Einstein-Kondensate (BECs) sind wesentlich durch die Wechselwirkung beeinflusst und werden im Anschluss behandelt.

2.1.1 Bose-Einstein-Kondensation in idealen Gasen

Für die Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten sind insbesondere die Kondensationstemperatur T_c und der Anteil der kondensierten Atome relevant. Diese thermodynamischen Größen lassen sich am einfachsten unter Verwendung der

großkanonischen Beschreibung erhalten [55]. Das chemische Potenzial μ und die Temperatur T sind dabei freie Parameter, die die Teilchenzahl und Energie des Systems bestimmen. Die mittlere Besetzungszahl $N(\epsilon_i)$ eines Zustandes i mit der Energie ϵ_i ist im thermodynamischen Gleichgewicht durch die Bose-Einstein-Statistik gegeben:

$$N(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/k_B T} - 1} \quad (2.1)$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist. Das chemische Potenzial ist durch die Randbedingung

$$\sum_{i=0}^{\infty} N(\epsilon_i) = N \quad (2.2)$$

festgelegt, wobei N die Anzahl der gefangenen Atome ist. Gl. (2.1) und (2.2) beschreiben im Prinzip die statistischen Eigenschaften des Systems und damit auch die Bose-Einstein-Kondensation vollständig. Die hierzu erforderliche quantitative Bestimmung des chemischen Potenzials als Funktion der Temperatur und Teilchenzahl ist jedoch nicht trivial.

Im Folgenden wird zunächst der BEC-Phasenübergang im thermodynamischen Grenzfall $N \rightarrow \infty$ behandelt. Für hohe Temperaturen ist die mittlere Besetzungszahl jedes Niveaus klein. Das chemische Potenzial ist also viel kleiner als die Energie ϵ_0 des niederenergetischsten Zustands. Wenn die Temperatur verringert wird, steigt das chemische Potenzial, da die Gesamtteilchenzahl konstant bleibt. Das chemische Potenzial kann jedoch nicht größer als ϵ_0 werden, da sonst die Besetzungszahl des niederenergetischsten Zustands negativ würde. Die maximale mittlere Besetzung jedes angeregten Zustandes beträgt also

$$N^{\max}(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \epsilon_0)/k_B T} - 1}. \quad (2.3)$$

Die Anzahl der Atome in angeregten Zuständen ist demnach durch

$$N_{\text{th}} = \sum_{i=1}^{\infty} N^{\max}(\epsilon_i) \quad (2.4)$$

begrenzt. Alle Atome, die über diese Zahl hinausgehen, müssen den Grundzustand besetzen: $N_0 = N - N_{\text{th}}$. Die Besetzung des Grundzustandes divergiert für $\mu \rightarrow \epsilon_0$, wird also makroskopisch, d.h. die Bose-Einstein-Kondensation setzt ein.

Um die Kondensationstemperatur und den Einfluss der Dimensionalität zu bestimmen, wird meist die diskrete Niveaustuktur durch eine kontinuierliche Zustandsdichte $g(\epsilon)$ genähert, die Summen also durch Integrale ersetzt. Dieser Ansatz ist möglich, wenn der Energieabstand der Zustände im Vergleich zur thermischen Energie vernachlässigbar ist. Wird auch noch die Nullpunktsenergie vernachlässigt, also $\epsilon_0 = 0$, dann ist die Anzahl der Atome in angeregten

Zuständen gegeben durch

$$N_{\text{th}} = \int_0^\infty g(\epsilon)N(\epsilon)d\epsilon. \quad (2.5)$$

Es lässt sich leicht zeigen [56], dass in harmonischen d-dimensionalen Fallenpotenzialen

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^d \omega_i^2 r_i^2 \quad (2.6)$$

mit Fallenfrequenzen ω_i die Zustandsdichte durch

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^{d-1}}{(d-1)! \prod_{i=1}^d \hbar \omega_i} \quad (2.7)$$

gegeben ist. Für ein homogenes Kondensat in einem Kastenpotenzial ist hingegen $g(\epsilon) \propto \epsilon^{d/2-1}$. In beiden Fällen ist die Zustandsdichte als Potenz der Energie darstellbar: $g(\epsilon) = C_\alpha \epsilon^{\alpha-1}$. Für Temperaturen unterhalb der Kondensationstemperatur ist $\mu = 0$, so dass die Anzahl der nicht kondensierten Atome dann durch

$$N_{\text{th}} = \int_0^\infty g(\epsilon) \frac{1}{e^{\epsilon/k_B T} - 1} d\epsilon = C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) (k_B T)^\alpha \quad (2.8)$$

gegeben ist. Hierbei ist $\Gamma(\alpha)$ die Gamma-Funktion und $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}$ die Riemannsche Zeta-Funktion. Die Kondensationstemperatur erhält man durch die Bedingung $N_0 = 0$, d.h. Anwenden von Gl. (2.8) mit $N = N_{\text{th}}$:

$$k_B T_c = \frac{N^{1/\alpha}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)]^{1/\alpha}}. \quad (2.9)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in Gl. (2.8) erhält man den Anteil der kondensierten Atome:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^\alpha. \quad (2.10)$$

Für $\alpha \leq 1$ divergieren das Integral in Gl. (2.8) und die Zeta-Funktion, d.h. es kann keine Bose-Einstein-Kondensation geben. Für ein 3-dimensionales harmonisches Potenzial ist nach Gl. (2.7) $\alpha = 3$ und $C_3 = 1/(2\hbar^3 \bar{\omega}^3)$ [56], wobei $\bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3}$ das geometrische Mittel der Fallenfrequenzen ist. Damit ist die Kondensationstemperatur

$$k_B T_c = \frac{\hbar \bar{\omega} N^{1/3}}{[\zeta(3)]^{1/3}} = 0.94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3}. \quad (2.11)$$

Hier zeigt sich eine allgemeine Regel: je stärker der Einschluss, desto höher die Kondensationstemperatur.

Eine anschauliche Interpretation der Bose-Einstein-Kondensation kann durch Betrachtung der Phasenraumdicke erlangt werden. Hierzu wird für 3-dimensionale Gase mithilfe einer semiklassischen Beschreibung, die für $k_B T \gg \hbar \omega_i$ gültig ist, die Dichteverteilung der thermischen Atome bestimmt [57, 58]:

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}) = \frac{g_{3/2}(z(\mathbf{r}))}{\lambda_T^3}. \quad (2.12)$$

Die Funktion $g_{3/2}$ ist durch $g_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^j$ gegeben, $\lambda_T = (2\pi\hbar^2/mkT)^{1/2}$ ist die thermische de-Broglie-Wellenlänge und $z(\mathbf{r}) = \exp[(\mu - V(\mathbf{r}))/k_B T]$. Das chemische Potenzial kann wiederum nicht größer als das Potenzialminimum werden und die maximale Besetzung der angeregten Zustände ist limitiert durch $\mu = V_{\text{min}}$, also $z = 1$. Damit setzt die Bose-Einstein-Kondensation bei einer Phasenraumdicke

$$\rho_{\text{ps}} \equiv n(\mathbf{r})\lambda_T^3 = g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) = 2.612 \quad (2.13)$$

ein, unabhängig von der speziellen Form des Fallenpotenzials. Die Bedingung zum Erreichen der Bose-Einstein-Kondensation ist also eine hinreichend große Phasenraumdicke. Für die Berechnung wurde $k_B T \gg \hbar \omega_i$ angenommen, d.h. die Bose-Einstein-Kondensation ist nicht einfach ein thermischer Effekt, der eintritt, wenn die thermische Energie geringer als der Abstand der Energieniveaus ist, sondern es handelt sich um einen rein quantenstatistischen Effekt. Nach Gl. (2.13) tritt die Bose-Einstein-Kondensation dann auf, wenn der mittlere Teilchenabstand $n^{1/3}$ die Größe der thermischen de-Broglie-Wellenlänge erreicht. Dann beginnen sich die Wellenpakete der Teilchen maßgeblich zu überlappen und die quantenstatistischen Effekte gewinnen an Bedeutung. Diese qualitative Anschauung ist in Abb. 2.1 grafisch dargestellt.

Von großem Interesse sind die Eigenschaften niederdimensionaler Bose-Einstein-Kondensate, in denen die atomare Bewegung in ein oder zwei Raumrichtungen auf die Nullpunktsoszillation beschränkt ist. Für ein homogenes Gas ist in 1D $\alpha = 1/2$, in 2D $\alpha = 1$. In beiden Fällen divergiert das Integral in Gl. (2.8), d.h. es gibt keinen makroskopisch besetzten Zustand, kein Bose-Einstein-Kondensat. Es sei bemerkt, dass dieses Ergebnis in Übereinstimmung mit dem Mermin-Wagner-Hohenberg-Theorem [59, 60] ist. Dieses Theorem besagt, dass es in homogenen Bosegasen in 1D für beliebige Temperaturen und in 2D für $T \neq 0$ keine langreichweitige Ordnung geben kann.

Harmonisch gefangene Bosegase verhalten sich allerdings qualitativ anders. Für sie ist nach Gl. (2.7) in 1D $\alpha = 1$ und in 2D $\alpha = 2$. Während es in harmonisch gefangenen 2D-Bosegasen Bose-Einstein-Kondensation geben kann, sollte dieses nach den obigen Ausführungen für 1D-Bosegase nicht möglich sein. Es zeigt sich jedoch bei Verzicht auf den thermodynamischen Grenzfall und die Annäherung der diskreten Niveaustuktur durch eine kontinuierliche Zustandsdichte, dass auch in diesem Fall eine Bose-Einstein-Kondensation erfolgen kann [61].

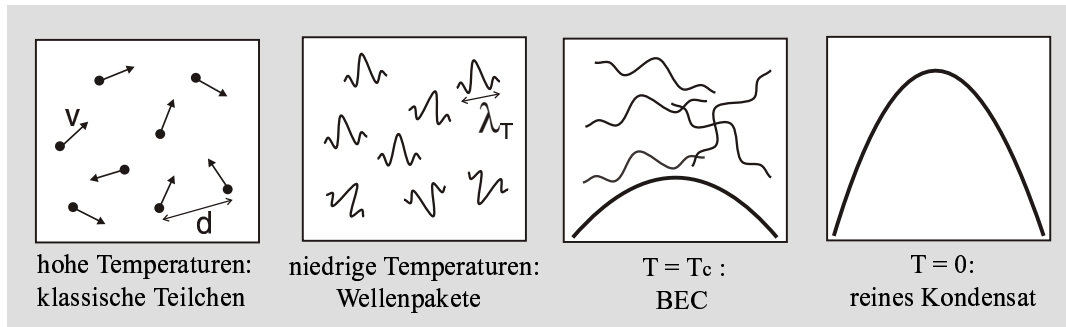


Abbildung 2.1: Qualitative Darstellung des BEC-Phasenüberganges: Für hohe Temperaturen verhalten sich die Teilchen klassisch. Sie können also als Massenpunkte, die sich mit einer wohldefinierten Geschwindigkeit bewegen, angesehen werden. Für niedrigere Temperaturen wird die durch die Heisenbergsche Unschärferelation gegebene Ortsunschärfe relevant. Diese ist durch die thermische de-Broglie-Wellenlänge $\lambda_T \propto 1/\sqrt{T}$ gegeben und die Teilchen sind durch Wellenpakete der Größe λ_T zu beschreiben. Wenn die Temperatur so niedrig ist, dass sich die Wellenpakete maßgeblich überlappen, setzt die Bose-Einstein-Kondensation ein. Wird die Temperatur weiter abgesenkt, gehen alle Teilchen in denselben Quantenzustand, den Grundzustand des Systems über. Das System kann jetzt durch eine einzige kohärente Materiewelle beschrieben werden.

Ursache für das Versagen der obigen Betrachtung ist, dass die Nullpunktsenergie des harmonischen Oszillators eine Untergrenze für die möglichen Energien darstellt, eine Integration also nicht von $\epsilon = 0$ erfolgen sollte.

Durch die Weiterentwicklung der Fallentechnik ist es möglich geworden, niederdimensionale Bose-Einstein-Kondensate, insbesondere 1-dimensionale Kondensate [42, 29], herzustellen. Wenn $\hbar\omega_\rho \gg \mu, k_B T$, entspricht die Kondensatwellenfunktion in radialer Richtung der radialen Grundzustandswellenfunktion der Falle. Es findet in dieser Richtung also keine Dynamik statt, d.h. die radialen Freiheitsgrade sind „ausgefroren“, das System verhält sich kinematisch 1-dimensional. Wie in dieser Arbeit gezeigt wird, sind die Eigenschaften solcher und sehr elongierter 3-dimensionaler Kondensate wesentlich durch Phasenfluktuationen geprägt, die Kondensate also nicht notwendigerweise kohärent. Diese Untersuchungen zeigen auch, wie es bei Verringerung des axialen Einschlusses, also Annäherung an ein homogenes System, zu dem durch das Mermin-Wagner-Hohenberg-Theorem vorausgesagten Verlust der langreichweitigen Ordnung kommt.

2.1.2 Bose-Einstein-Kondensation in schwach wechselwirkenden Gasen

Unter Vernachlässigung der Wechselwirkungen kann ein qualitatives Verständnis der Bose-Einstein-Kondensation erlangt werden und die thermodynamischen

Größen können recht gut beschrieben werden. Zum Verständnis der Eigenschaften der Bose-Einstein-Kondensate sind jedoch die Wechselwirkungen sehr wesentlich. Sie führen u.a. zu einem nichtlinearen Verhalten der BECs, das für das Auftreten vieler aus der nichtlinearen Optik bekannter Effekte wie beispielsweise Solitonen [62, 63] und Vier-Wellen-Mischung [64] verantwortlich ist. In diesem Kapitel wird die Beschreibung des Kondensats durch eine nichtlineare Schrödingergleichung, der Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE), und einer wichtigen Näherung, der Thomas-Fermi-Näherung, eingeführt. Darüber hinaus werden die Auswirkungen der Wechselwirkung auf die thermodynamischen Größen diskutiert.

Gross-Pitaevskii-Gleichung

Ausgangspunkt ist der Hamiltonoperator \hat{H} in zweiter Quantisierung für ein System von N Bosonen in einem externen Potenzial V_{ext} unter Berücksichtigung der atomaren Zwei-Körper-Wechselwirkungen über das Potenzial $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ [65]:

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}^\dagger \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi} d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}^\dagger V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\psi}' \hat{\psi} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}. \quad (2.14)$$

Hierbei sind $\hat{\psi}^\dagger = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$ und $\hat{\psi} = \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ die Operatoren im Heisenbergbild zur Erzeugung und Vernichtung eines Bosons am Ort \mathbf{r} . Der erste Term stellt die kinetische Energie dar, der zweite die potenzielle Energie im externen Fallenpotenzial und der dritte Term beinhaltet die Kopplung der Atome über Zwei-Körper-Wechselwirkungen. Die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für den Operator $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ lautet mit dem Hamiltonoperator Gl. (2.14) [65]:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\delta \hat{H}(\mathbf{r}, t)}{\delta \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)} \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Im Falle der Bose-Einstein-Kondensation können zwei wesentliche Vereinfachungen vorgenommen werden. Erstens kann die Wechselwirkung kalter, atomarer Gase durch s-Wellenstreuung beschrieben werden [66] und das Wechselwirkungspotenzial V kann durch das Pseudopotenzial

$$V_\delta = g\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (2.16)$$

ersetzt werden, wobei $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ die Dirac'sche Delta-Funktion ist. Die atomare Wechselwirkung ist also komplett durch den Parameter $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ bestimmt, der durch die s-Wellen-Streulänge a charakterisiert ist. Zweitens ist die Besetzung des Grundzustands des Systems sehr hoch und die Erzeugung oder

Vernichtung eines einzelnen Bosons in diesem Zustand ändert die physikalische Situation nicht wesentlich. Deshalb kann in der verallgemeinerten Bogoliubov-Beschreibung [65, 10] der atomare Feldoperator als Summe seines Erwartungswertes und eines Operators $\hat{\theta}$, der die Fluktuationen enthält und klein gegenüber $\hat{\psi}$ ist, geschrieben werden:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \approx \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \rangle + \hat{\theta}(\mathbf{r}, t). \quad (2.17)$$

In niedrigster Ordnung kann der Feldoperator also durch eine komplexe Funktion, die Kondensatwellenfunktion $\psi \equiv \langle \hat{\psi} \rangle$ ersetzt werden. Damit erhält man aus Gl. (2.15) die Gross-Pitaevskii-Gleichung [67, 68]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

Die Gross-Pitaevskii-Gleichung ist eine nichtlineare Schrödingergleichung. Durch Vernachlässigung von $\hat{\theta}$ in Gl. (2.17) werden alle Korrelationen zwischen den Teilchen vernachlässigt und die nichtlineare Wechselwirkung wird durch ein Potenzial, das durch die mittlere Dichte gegeben ist („mean-field“), beschrieben. Die Gross-Pitaevskii-Gleichung beschreibt für den hier relevanten Fall der verdünnten Gase, in dem der Teilchenabstand weit größer ist als die Reichweite der atomaren Wechselwirkungen, in sehr guter Näherung die Zeitentwicklung der Kondensatwellenfunktion.

Als komplexe Funktion kann die Wellenfunktion als

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{i\phi(\mathbf{r}, t)} \quad (2.19)$$

geschrieben werden, wobei $n(\mathbf{r}, t)$ die Dichteverteilung und $\phi(\mathbf{r}, t)$ die Phase des Kondensats ist. Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte einer Wellenfunktion ist allgemein durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (2.20)$$

gegeben [69]. Der Gradient der Phase ist für die Dynamik des Bose-Einstein-Kondensats sehr wesentlich, da er das über $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ definierte Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.21)$$

festlegt.

Wenn sich das System im Grundzustand befindet, ist die Zeitentwicklung von ψ durch $\psi \propto \exp[-i\mu t/\hbar]$ gegeben, wobei μ das chemische Potenzial ist [56]. Daher kann in diesem Fall der Separationsansatz $\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) \exp[-i\mu t/\hbar]$ gemacht werden. Setzt man diesen Ansatz in Gl. (2.18) ein, erhält man die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\varphi(\mathbf{r})|^2 \right] \varphi(\mathbf{r}) = \mu \varphi(\mathbf{r}), \quad (2.22)$$

die den Grundzustand des Systems beschreibt. Diese Gleichung ist eine nichtlineare Schrödingergleichung, in der das chemische Potenzial die Rolle des Energieeigenwertes übernimmt. Der erste Term entspricht der kinetischen Energie („Quantendruck“), die durch die Krümmung der Wellenfunktion gegeben ist, der zweite Term der potenziellen Energie im Fallenpotenzial und der dritte Term der Wechselwirkungsenergie auf ein Atom im effektiven Potenzial der umgebenden Atomwolke mit der Dichteverteilung $n(\mathbf{r}) = |\varphi(\mathbf{r})|^2$. Das chemische Potenzial ist der Unterschied der Grundzustandsenergien für N und $N - 1$ Teilchen, also $\mu = \partial E / \partial N$ für große N . Es ist damit die Energie, die aufgebracht werden muss, um dem Kondensat ein Teilchen hinzuzufügen. Wesentlichen Einfluss auf die Eigenschaften des Kondensats hat die Streulänge a , da sie die Wechselwirkungen parametrisiert. Eine negative Streulänge bedeutet attraktive Wechselwirkung, eine positive bedeutet repulsive Wechselwirkung. Im Falle negativer Streulänge, wie sie beispielsweise in $^7\text{Lithium}$ [70] oder $^{85}\text{Rubidium}$ [71] vorkommt, wirkt der Wechselwirkungsterm destabilisierend. Wird dieser Term zu groß, kommt es zum Kollaps des Kondensats, einer sogenannten „Bosenova“ [72]. Für attraktive Wechselwirkungen ist das Kondensat demnach nur für geringe Teilchenzahlen stabil. Eine positive Streulänge hingegen vergrößert das Kondensat gegenüber dem 1-Teilchen-Grundzustand des harmonischen Fallenpotenzials, der die Größe eines wechselwirkungsfreien Kondensats angibt. Für die in dieser Arbeit durchgeführten Experimente ist die Kondensatgröße typischerweise um einen Faktor in der Größenordnung von 50 durch die Wechselwirkungen vergrößert, d.h. die Kondensatwellenfunktion ist erheblich durch Wechselwirkungen beeinflusst. Mithilfe magnetischer Felder ist es durch Ausnutzen sogenannter Feshbach-Resonanzen möglich, die Streulänge zu variieren [73, 71, 74].

Thomas-Fermi-Näherung

Die Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung ist nicht trivial und nur in Spezialfällen analytisch exakt möglich. In dem experimentell besonders relevanten Fall repulsiver Wechselwirkung und genügend großer Teilchenzahlen, so dass $Na/a_{\text{ho}} \gg 1$, kann für die Berechnung des Grundzustandes die kinetische Energie vernachlässigt werden. Hierbei ist $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega}$ die Größe des 1-Teilchen-Grundzustandes des harmonischen Fallenpotenzials. Diese Näherung heißt Thomas-Fermi-Näherung und vereinfacht die Berechnung der Grundzustandseigenschaften des Kondensats erheblich. Damit wird die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.22) zu

$$\left[V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\varphi(\mathbf{r})|^2 \right] \varphi(\mathbf{r}) = \mu\varphi(\mathbf{r}), \quad (2.23)$$

so dass

$$n(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})^2 = \begin{cases} \frac{\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{g} & \text{für } \mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Das Dichteprofil entspricht demnach dem invertierten Potenzial, also für harmonische Fallen einer invertierten Parabel, die sich bis zu den durch $V_{\text{ext}}(R_i) = \mu$ definierten Radien erstreckt. Auf die Atome wirkt das Fallenpotenzial V_{ext} und das mean-field-Potenzial $V_{\text{mf}} = gn(\mathbf{r})$ der übrigen Atome. Die Atomverteilung stellt sich im Grundzustand so ein, dass die Atome sich insgesamt in einem flachen Potenzial $V_{\text{eff}} = V_{\text{ext}} + V_{\text{mf}} = \mu$ befinden. Nach Gl. (2.24) ist die halbe Kondensatgröße durch

$$R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}} \quad (2.25)$$

gegeben. Das Aspektverhältnis des gefangenen Kondensats entspricht demnach dem umgekehrten Verhältnis der Fallenfrequenzen:

$$\frac{R_i}{R_j} = \frac{\omega_j}{\omega_i}. \quad (2.26)$$

Aus der Normierungsbedingung $\int n(\mathbf{r})d\mathbf{r} = N$ erhält man mit Gl. (2.24) das chemische Potenzial

$$\mu = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left(\frac{15Na}{\bar{a}_{\text{ho}}} \right)^{2/5}, \quad (2.27)$$

wobei $\bar{\omega} = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$ das geometrische Mittel der Fallenfrequenzen ist und \bar{a}_{ho} das geometrische Mittel der Grundzustandsgrößen des Fallenpotenzials. Im Spezialfall einer zylindersymmetrischen Falle erhält man für die Dichteverteilung

$$n(\rho, x) = \begin{cases} n_c \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{x^2}{L^2} \right) & \text{für } \mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.28)$$

mit der zentralen Dichte $n_c = \frac{\mu}{g} = \frac{15}{8\pi} \frac{N}{LR^2}$. Hierbei spezifizieren R und L die radiale und axiale Kondensatgröße nach Gl. (2.25).

Beim Ausschalten der Magnetfalle wird die mean-field-Energie freigesetzt, d.h. in kinetische Energie umgewandelt. Sie berechnet sich durch Integrieren von $gn(\mathbf{r})$ über die Dichteverteilung Gl. (2.24):

$$\frac{E_{\text{mf}}}{N} = \frac{2}{7}\mu. \quad (2.29)$$

Für den Fall repulsiver Wechselwirkungen und experimentell üblicher Teilchenzahlen wird der Grundzustand 3-dimensionaler Kondensate hervorragend durch die Thomas-Fermi-Näherung beschrieben und eine Verwendung der erheblich schwieriger zu berechnenden zeitunabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung erübrigt sich für die meisten Anwendungsfälle. Ein Unterschied ergibt sich an dem Rand des Kondensats. Die Thomas-Fermi-Dichteverteilung ist eine invertierte Parabel und hat am Kondensatrand einen scharfen Knick, d.h. ist dort nicht differenzierbar. Da abrupte Krümmungen der Wellenfunktion gleichbedeutend

mit einer hohen kinetischen Energie sind, wird die Dichteverteilung am Rand des Kondensats auf einer Größenordnung der Ausheillänge geglättet.¹

Es sei darauf hingewiesen, dass beim Übergang zu niederdimensionalen Geometrien die Bedingung $Na/a_{\text{ho}} \gg 1$ in einer oder zwei Raumrichtungen nicht erfüllt ist, da sich die Wellenfunktion in diesen Raumrichtungen dann der des Grundzustandes des harmonischen Oszillators annähert. Die kinetische Energie ist dann nicht vernachlässigbar und die Thomas-Fermi-Beschreibung nicht uneingeschränkt anwendbar. So kann beispielsweise die in eine Raumrichtung freigesetzte Energie, im Gegensatz zur Vorhersage durch die Thomas-Fermi-Beschreibung, die kinetischen Energie des Grundzustands des harmonischen Oszillators nicht unterschreiten [42].

Einfluss der Wechselwirkungen auf die thermodynamischen Größen

Während beispielsweise die Größe des Kondensats und die Anregungen durch die Wechselwirkungen dominiert sind, ist ihr Einfluss auf die thermodynamischen Größen vergleichsweise gering. Ein quantitativer Vergleich mit experimentellen Daten erfordert jedoch die Berücksichtigung dieses Einflusses.

Der Effekt der Wechselwirkungen lässt sich qualitativ wie folgt verstehen: Die Bose-Einstein-Kondensation setzt ein, wenn die Phasenraumdichte im Zentrum der Falle den kritischen Wert von 2.6 überschreitet. Repulsive Wechselwirkungen bewirken eine Vergrößerung der Atomverteilung und damit eine Dichteverringern im Vergleich zum nicht wechselwirkenden Gas. Dies führt zu einer Verringerung der Kondensationstemperatur und des Anteils kondensierter Atome, der quantitativ durch

$$\frac{N_0}{N} = \left[1 - \left(\frac{T}{T_c^{(0)}} \right)^3 \right] - \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \eta \left(\frac{T}{T_c^{(0)}} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c^{(0)}} \right)^3 \right]^{2/5} - \frac{3\bar{\omega}\zeta(2)N^{-1/3}}{2\omega_{\text{ho}}(\zeta(3))^{2/3}} \left(\frac{T}{T_c^{(0)}} \right)^2 \quad (2.30)$$

gegeben ist [75], wobei $T_c^{(0)}$ die Kondensationstemperatur des idealen Gases ist und $\bar{\omega}$ und ω_{ho} das geometrische und arithmetische Mittel der Fallenfrequenzen sind. Der Term in den eckigen Klammern beschreibt den Kondensatanteil des idealen Gases nach Gl. (2.10). Der Effekt der Wechselwirkungen wird durch das chemische Potenzial in Einheiten der Kondensationstemperatur $\eta = \mu/(k_B T_c^{(0)})$ parametrisiert und ist durch den vorletzten Term beschrieben. Der letzte Term berücksichtigt die endliche Größe des Systems. Der Einfluss dieses Terms ist in den in dieser Arbeit beschriebenen Experimenten geringer als der der Wechselwirkungen.

¹Die Ausheillänge ist die charakteristische Distanz, über die Störungen in der Dichteverteilung, die z.B. durch externe Randbedingungen hervorgerufen werden können, geglättet werden. Sie ergibt sich aus einem Gleichgewicht von kinetischer Energie und Wechselwirkungsenergie und liegt für die hier vorgestellten Experimente typischerweise unter einem Mikrometer.

2.1.3 Ballistische Expansion von Kondensaten im Thomas-Fermi-Regime

Eine quantitative Beschreibung der ballistischen Expansion von Bose-Einstein-Kondensaten ist von großer Bedeutung, da die meisten Messungen mit ballistisch expandierten Kondensaten durchgeführt werden. Für die in dieser Arbeit vorgenommenen Messungen ist die ballistische Expansion aus drei Gründen wichtig. Erstens wurden Phasenfluktuationen in BECs über das Entstehen von Dichtemodulationen in der ballistischen Expansion nachgewiesen. Zweitens wurde die Unterdrückung von Dichtefluktuationen in gefangenen Kondensaten über die Größe der expandierten Kondensate verifiziert und drittens ist die Phasenentwicklung während der Expansion für interferometrische Messungen von Bedeutung. Ausgangspunkt der Beschreibung der Expansion phasenfluktuierender Kondensate (siehe Kapitel 3.4) ist der experimentell wichtige Fall der Expansion von BECs im Thomas-Fermi-Regime, der an dieser Stelle beschrieben werden soll.

Qualitativ kann die beobachtete Expansion wie folgt verstanden werden: Im Thomas-Fermi-Regime ist die kinetische Energie eines gefangenen BECs vernachlässigbar gegenüber dessen mean-field-Wechselwirkung, die die Abstoßung der Atome widerspiegelt. Nach Abschalten der Falle wird die mean-field-Energie in kinetische Energie umgesetzt. Das mean-field-Potenzial ist entsprechend der parabolischen Dichteverteilung quadratisch. Dadurch bildet sich eine quadratische Phase heraus, deren Gradient der Geschwindigkeitsverteilung entspricht. In anisotropen Kondensaten ist dieser Gradient entlang der kurzen Achse des Kondensats größer als entlang der langen Achse, so dass eine anisotrope Expansion erfolgt. Deshalb expandieren elongierte Kondensate hauptsächlich in radialer Richtung.

Quantitativ kann die Evolution der Wellenfunktion in zeitabhängigen harmonischen Potenzialen durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.18) beschrieben werden, wobei $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \rightarrow V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^3 \omega_i^2(t) r_i^2$. Es wurde gezeigt, dass die Dichteverteilung eines Kondensats im Thomas-Fermi-Regime sich unter diesen Bedingungen selbstähnlich verhält [76, 77]:

$$\psi(r_1, r_2, r_3, t) = \frac{\psi(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, t=0)}{\sqrt{b_1(t)b_2(t)b_3(t)}} e^{i\frac{m}{2\hbar} \sum_i r_i^2 \frac{\dot{b}_i(t)}{b_i(t)}} e^{-i\frac{\mu}{\hbar} \int^t \frac{dt'}{b_1(t')b_2(t')b_3(t')}}}, \quad (2.31)$$

wobei $\tilde{r}_i = r_i/b_i(t)$ die reskalierten Koordinaten sind. Der erste Phasenfaktor spiegelt die erwartete lineare Geschwindigkeitsverteilung

$$v_i(\mathbf{r}, t) = r_i \frac{\dot{b}_i(t)}{b_i(t)} \quad (2.32)$$

wider, der zweite die Entwicklung der globalen Phase aufgrund der mean-field-

Energie. Damit ergibt sich eine Dichteverteilung

$$n(r_1, r_2, r_3, t) = \frac{n(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3, t = 0)}{b_1(t)b_2(t)b_3(t)}, \quad (2.33)$$

deren Form sich nicht ändert, sondern nur deren Größe. Die gesamte Dynamik ist in den drei Skalierungsparametern $b_i(t)$ enthalten, die durch drei gekoppelte Differenzialgleichungen gegeben sind:

$$\ddot{b}_i = \frac{\omega_i^2(0)}{b_i b_1 b_2 b_3} - \omega_i^2(t) b_i. \quad (2.34)$$

Die Anfangsbedingungen sind $b_i(0) = 1$ und $\dot{b}_i(0) = 0$, da das Kondensat anfangs in Ruhe ist.

Die ballistische Expansion entspricht dem Spezialfall, dass die Fallenfrequenzen in kurzer Zeit von ihrem ursprünglichen Wert auf 0 verringert werden. Für elongierte Kondensate mit Aspektverhältnis $\lambda = \omega_\rho/\omega_x$ können die Differenzialgleichungen (2.34) in Potenzen des kleinen Parameters $\epsilon = 1/\lambda$ gelöst werden. In niedrigster relevanter Ordnung von ϵ erhält man [76, 77]

$$\begin{aligned} b_\rho(\tau) &= \sqrt{1 + \tau^2} \\ b_x(\tau) &= 1 + \epsilon^2 \left(\tau \arctan \tau - \ln \sqrt{1 + \tau^2} \right), \end{aligned} \quad (2.35)$$

wobei $\tau = \omega_\rho(0)t$ ist. Für sehr elongierte Kondensate bleibt demnach die axiale Größe während der ballistischen Expansion nahezu unverändert, fast die gesamte Energie wird in radialer Richtung freigesetzt. Zeitliches Differenzieren von Gl. (2.35) ergibt

$$\dot{b}_x(t) = \frac{\omega_x^2}{\omega_\rho} \arctan(\omega_\rho t). \quad (2.36)$$

Nach Abbau der mean-field-Energie findet keine Beschleunigung mehr statt und die Wolke expandiert mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Für Fallzeiten $t \gg 1/\omega_\rho$ ist die axiale Expansionsgeschwindigkeit elongierter Kondensate gegeben durch

$$v_x(\mathbf{r}, t) = x \frac{\dot{b}_x(t)}{b_x(t)} \approx x \dot{b}_x(t) \approx x \frac{\omega_x^2 \pi}{\omega_\rho 2}. \quad (2.37)$$

2.2 Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten

Die Bedingung zur Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation ist das Erreichen einer Phasenraumdichte in der Größenordnung von 1 (Gl. (2.13)), d.h. es müssen entsprechend kalte und dichte Atomwolken erzeugt werden. In diesem Abschnitt sollen die hierzu verwendeten Verfahren anhand der für die vorliegende Arbeit eingesetzten Apparatur kurz erläutert werden. Eine ausführliche

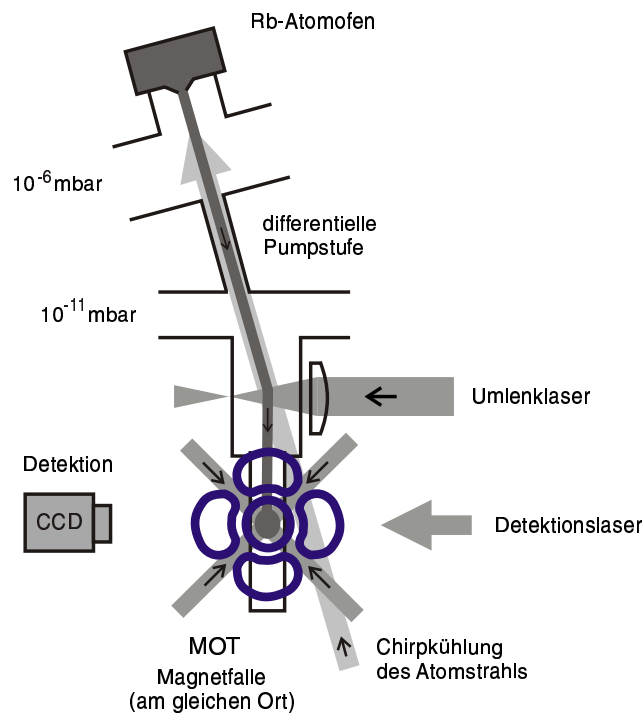


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Apparatur.

Darstellung dieser Apparatur findet sich in [78] und [79]. Abbildung 2.2 zeigt den schematischen Aufbau der Apparatur.

Ausgangspunkt des Experimentes ist ein als Atomquelle dienender Rubidium-Atomofen, der mit einer Temperatur von 420 Kelvin betrieben wird und in dem eine Phasenraumdichte von $\sim 10^{-15}$ vorliegt. Um die Bose-Einstein-Kondensation zu erreichen, ist also eine Phasenraumdichteerhöhung um viele Größenordnungen notwendig, die durch eine Kombination verschiedener Kühl- und Speicherverfahren erreicht wird. Hierzu werden die folgenden Schritte durchgeführt:

1. Bremsen des Atomstrahls durch Chirp-Kühlung
2. Umlenken des langsamen Anteils des Atomstrahls
3. Fangen der Atome in einer magneto-optischen Falle (MOT)
4. Räumliche Komprimierung der MOT
5. Optische Melasse
6. Umpumpen in den gewünschten Hyperfeinzustand
7. Umladen in eine Magnetfalle

8. Radiale Komprimierung der Magnetfalle

9. Evaporatives Kühlen

Diese Sequenz dauert abhängig vom Hyperfein-Grundzustand, in dem das Kondensat erzeugt wird, etwa 30 s oder 1 min. Die Detektion erfolgt zumeist destruktiv, so dass eine Messserie aus einer vielfachen identischen Wiederholung dieser Sequenz besteht.

Bose-Einstein-Kondensate wurden bisher vor allem mit Alkali-Atomen erzeugt, aber auch in metastabilen Zuständen von Edelgasen. In dem hier beschriebenen Experiment wurde ^{87}Rb gewählt, da es günstige Voraussetzungen sowohl zur Laserkühlung als auch zur evaporativen Kühlung bietet.² Abbildung 2.3 zeigt das Termschema des für die Laserkühlung relevanten Überganges. Es gibt einen für die Laserkühlung günstigen geschlossenen Übergang vom $F=2$ Niveau des Grundzustandes in das $F'=3$ Niveau des angeregten Zustandes. Auf diesem Übergang findet die Laserkühlung und die Detektion statt. Durch nichtresonante Anregung in die anderen F' -Niveaus können durch spontane Emission mit geringer Wahrscheinlichkeit auch Übergänge in den $F=1$ Grundzustand stattfinden. Um eine Ansammlung der Atome in diesem Niveau zu verhindern, wird zusätzlich zum Kühllaser ein Rückpumplaser benötigt. Die zur Kühlung von Rubidium-Atomen benötigte Laserfrequenz liegt mit 780 nm in einem Bereich, in dem sowohl kommerzielle Festkörperlaser als auch Laserdioden zur Verfügung stehen. Der Kühllaser ist in dem hier beschriebenen Aufbau durch einen Titan-Saphir-Festkörperlaser mit einer Ausgangsleistung von 1.5 W realisiert, der Rückpumplaser durch einen Master-Slave Diodenlaseraufbau (siehe Anhang A). Im Folgenden sollen die einzelnen experimentellen Schritte zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten kurz erläutert werden. Eine umfassendere Darstellung der physikalischen Prinzipien findet sich z.B. in [80, 81], Details der experimentellen Implementierung sind vor allem in [78] dargestellt.

Laserkühlung

Die Laserkühlung hat sich zu einem essentiellen Werkzeug der Atomphysik entwickelt. Sie ermöglicht die Bewegung von Atomen innerhalb von Sekundenbruchteilen nahezu zum Stillstand zu bringen und so die atomaren Gase effizient zu kühlen und darüber hinaus in der magneto-optischen Falle zu fangen. Sie liefert damit einen ausgezeichneten Ausgangspunkt für weiterführende Experimente, wie beispielsweise die Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten.

Die Verringerung der atomaren Geschwindigkeit mit der Laserkühlung beruht auf dem Impulsübertrag bei der Absorption und Emission von Photonen.

²Das Isotop ^{85}Rb verfügt über dieselben günstigen Eigenschaften bezüglich der Laserkühlung und hat den Vorteil, dass es in natürlichem Rubidium mit 72% am häufigsten vorkommt. Seine Stoßeigenschaften erschweren jedoch die Kondensation.

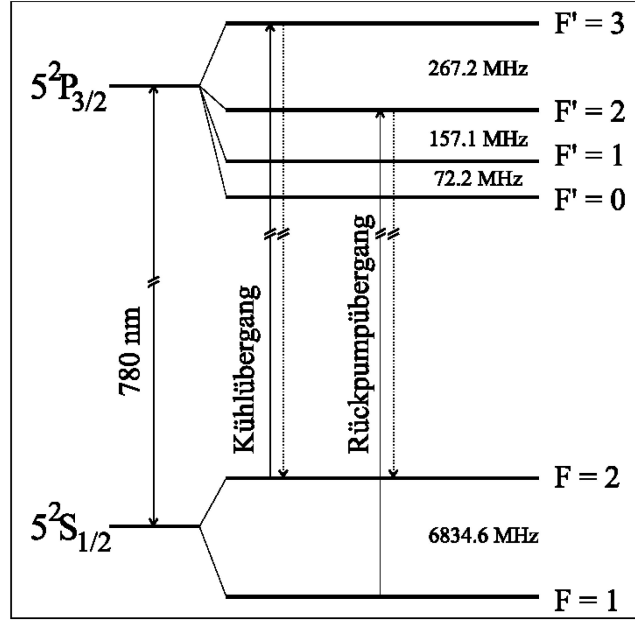


Abbildung 2.3: Ausschnitt aus dem Termschema von ^{87}Rb . Gezeigt ist die Hyperfeinstruktur des für die Laserkühlung relevanten $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ Überganges.

Der übertragene Impuls ist dabei $\hbar\mathbf{k}$, wobei $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ der Betrag des Wellenvektors ist und λ die Wellenlänge des Lichts. Während die spontane Emission isotrop ist, im Mittel also kein Impulsübertrag stattfindet, ist die Richtung des Impulsübertrages bei der Absorption durch die Richtung des Laserstrahls vorgegeben. Der auf ein Atom übertragene Impuls entspricht, über viele Absorptions-Emissions-Zyklen gemittelt, der Anzahl der absorbierten Photonen multipliziert mit dem Impuls $\hbar\mathbf{k}$. Die auf ein Zwei-Niveau-Atom in einem Lichtfeld der Intensität I im Mittel wirkende Kraft („Spontankraft“) ist [82]

$$\mathbf{F} = \hbar\mathbf{k}\Gamma_{\text{sc}} = \hbar\mathbf{k}\frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + I/I_{\text{sat}} + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (2.38)$$

mit

$$\delta = \delta_0 - \mathbf{k}\mathbf{v} - E_{\text{Zeeman}}/\hbar \quad (2.39)$$

wobei Γ_{sc} die Photonenstreurrate, $I_{\text{sat}} = \pi\hbar c/3\lambda^3\tau$ die Sättigungsintensität, $\Gamma = 1/\tau$ die Linienbreite des atomaren Überganges, τ dessen Lebensdauer, und δ_0 die Verstimmung des Lasers gegenüber dem ungestörten atomaren Übergang ist. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} der Atome führt zu einer Dopplerverschiebung $\mathbf{k}\mathbf{v}$, Magnetfelder führen über den Zeeman-Effekt zu einer Energieverschiebung der Niveaus. Die Rate der Impulsüberträge ist durch die Lebensdauer des angeregten Zustandes begrenzt, so dass sich für ^{87}Rb eine Maximalbeschleunigung

von

$$a_{\max} = \hbar |\mathbf{k}| \frac{\Gamma}{2m} = 1 \times 10^5 \text{ m/s}^2 \quad (2.40)$$

ergibt. Obwohl der Impulsübertrag eines Photons vergleichsweise gering ist, lassen sich durch die hohe Zahl der gestreuten Photonen sehr hohe Beschleunigungen erreichen.

Für das Abbremsen eines thermischen Atomstrahles sind damit Bremsstrecken von 1 Meter und kürzer möglich. Die Spontankraft Gl. (2.38) ist bei gegebener Intensität maximal, wenn die atomaren Übergänge resonant angeregt werden, also $\delta = 0$ ist. Gl. (2.39) legt zwei Möglichkeiten nahe, um die durch das Abbremsen der Atome bedingte Änderung der Dopplerverschiebung zu kompensieren: Veränderung des Magnetfeldes („Zeeman-Slower“) oder Veränderung der Laserfrequenz („Chirp-Slower“). In unserer Apparatur werden der Laserfrequenz mit einem elektro-optischen Modulator Seitenbänder aufgeprägt, deren Frequenz in einer linearen Rampe über einige 100 MHz durchgeföhren wird [78, 83] (siehe auch Anhang A). Die Zeit, die die Atome zum Durchlaufen der Bremsstrecke benötigen, beträgt wenige Millisekunden, so dass durch periodische Wiederholung der Rampe ein quasikontinuierlicher Atomfluss entsteht. Der Atomstrahl durchläuft dabei eine differenzielle Pumpstufe, die zum Erreichen des für lange Speicherzeiten in der Magnetfalle benötigten UHV-Vakuums von $\sim 10^{-11}$ mbar benötigt wird. Das Vakuum sorgt für eine thermische Isolation des ~ 100 nK kalten BECs von der ~ 300 K warmen Umgebung. Um die schnellen, mit der magneto-optischen Falle nicht fangbaren Atome nicht in den BEC-Bereich vordringen zu lassen, wird der gebremste Atomstrahl um einen Winkel von ca. 14° umgelenkt. Die Umlenkung basiert auf dem Impulsübertrag eines durch eine Zylinderlinse fokussierten Laserstrahls [84]. Die umgelenkten Atome werden dann in einer MOT [17] gefangen. Die MOT beruht auf der Spontankraft Gl. (2.38) in Kombination mit einem inhomogenen Magnetfeld, das eine lokale Zeeman-Verschiebung und damit eine ortsabhängige Kraft bewirkt. Sie wird in dem hier beschriebenen Experiment durch 6 unabhängige, zirkular polarisierte Laserstrahlen realisiert. Innerhalb einer typischen Ladedauer von 10 bis 15 Sekunden werden in der MOT $5 \dots 10 \times 10^8$ Atome bei einer Phasenraumdichte von 10^{-6} bis 10^{-7} gesammelt. Anschließend wird die MOT innerhalb von 50 ms durch Erhöhung des Magnetfeldgradienten komprimiert. Dadurch wird zum einen erreicht, dass im Zusammenspiel mit der nachfolgenden, 1 ms lang durchgeföhren Polarisationsgradientenkühlung in der optischen Melasse [80, 85] die Phasenraumdichte um etwa zwei Größenordnungen erhöht wird, zum anderen wird eine modenangepasste Umladung in die Magnetfalle erleichtert.

Magnetische Speicherung der Atome

Die Magnetfalle ermöglicht, die zuvor lasergekühlten Atome mit starkem räumlichem Einschluss zu speichern und schafft günstige Bedingungen für die evapo-

rative Kühlung.

Die magnetische Speicherung basiert auf der Wechselwirkung des magnetischen Momentes μ der Atome mit dem Fallenmagnetfeld \mathbf{B} . Die Wechselwirkungsenergie ist durch $E_{\text{Zeeman}}(\mathbf{r}) = -\mu\mathbf{B}(\mathbf{r})$ gegeben. Wenn die Larmorfrequenz $\omega_L = g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}|/\hbar$ groß gegen die relative zeitliche Änderung des Magnetfeldes ist, d.h. für

$$\omega_L \gg \left| \frac{\dot{\mathbf{B}}}{\mathbf{B}} \right|, \quad (2.41)$$

kann das magnetische Moment des Atoms der Magnetfeldorientierung adiabatisch folgen, wobei g_F den Landé-Faktor des Hyperfeinniveaus $|F, m_F\rangle$ und μ_B das Bohrsche Magneton bezeichnet. Dann gilt für kleine magnetische Feldstärken

$$U_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \equiv E_{\text{Zeeman}}(\mathbf{r}) = g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}(\mathbf{r})|. \quad (2.42)$$

Für die beiden Hyperfein-Grundzustände von $^{87}\text{Rubidium}$ ist der Landé-Faktor

$$g_{F=1} = -g_{F=2} = -\frac{1}{2}. \quad (2.43)$$

Da es nicht möglich ist, statische Magnetfeldmaxima im freien Raum zu erzeugen, ist eine statische magnetische Speicherung nur für Atome in Zuständen mit $g_F m_F > 0$ möglich.

Nach der Melassenkühlung ist die Besetzung aller m_F -Untersubzustände gleich groß. Wird beispielsweise im $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Zustand kondensiert, befindet sich nur 1/5 der Atome in diesem Zustand. Daher wird ein Führungsfeld in Richtung der Magnetfallenachse angelegt und die Atome werden mit zirkular polarisiertem Licht für eine Dauer von $700 \mu\text{s}$ auf dem $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ Übergang in den $m_F = 2$ Untersubzustand umgepumpt. Damit lassen sich etwa 50% der Atome im gewünschten Zustand fangen. Beim Umladen in die Magnetfalle ist es wichtig, dass sich die Phasenraumdichte nicht wesentlich verringert, also ein modenangepasster Transfer stattfindet (siehe auch Kapitel 4.2). Um dies zu gewährleisten, werden die Atome zunächst in ein nahezu rundes Fallenpotenzial mit Fallenfrequenzen von ca. 14 Hz geladen. Anschließend wird die Magnetfalle adiabatisch in radialer Richtung innerhalb von 1.25 Sekunden komprimiert, um durch eine hohe Dichte gute Voraussetzungen für die evaporative Kühlung zu schaffen. Die verwendete Magnetfalle ist eine statische Magnetfalle des Ioffe-Prichard Typs [86, 87, 88] und wurde im sogenannten Kleeblatt-Design konzipiert [89, 90, 91]. Sie erzeugt ein zylindersymmetrisches Magnetfeld und erreicht nach der radialen Komprimierung typischerweise Fallenfrequenzen von $\omega_x = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 400 \text{ Hz}$ für Atome im $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Zustand. Die in dieser Falle erzeugten Kondensate sind also zigarrenförmig.

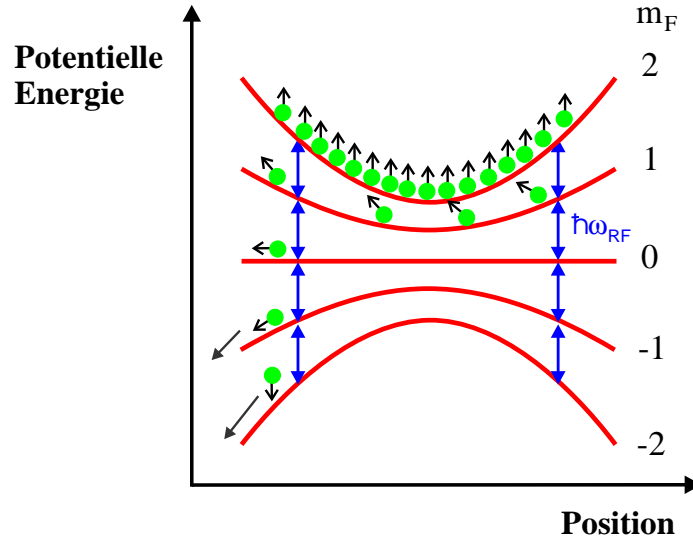


Abbildung 2.4: Prinzip der Radiofrequenz-Evaporation. Im Zentrum der Magnetfalle sind die Energieniveaus der fünf magnetischen Unterzustände des $F = 2$ Grundzustandes entsprechend des Magnetfeldes parabolisch. Durch Einstrahlen einer Radiofrequenz werden Übergänge in andere m_F -Zustände an Orten induziert, an denen die Radiofrequenz dem Energieabstand der verschiedenen m_F -Niveaus entspricht. Dadurch können die energiereichsten Atome aus der Falle entfernt und so eine Kühlung der Atomwolke erreicht werden.

Evaporative Kühlung

Mit der Laserkühlung wird zwar eine Erhöhung der Phasenraumdichte über viele Größenordnungen erreicht, aber zum Erreichen der Bose-Einstein-Kondensation ist eine weitere Phasenraumdichteerhöhung notwendig. Diese wird durch evaporative Kühlung erreicht. Hierbei werden die wärmsten Atome aus der Falle entfernt, um so die mittlere Energie der Teilchen und damit die Gleichgewichtstemperatur zu senken. Bisher gibt es kein Experiment, das zur Erzeugung von BECs ohne evaporative Kühlung auskommt. Die evaporative Kühlung wird in der Literatur eingehend diskutiert [92, 93, 94], an dieser Stelle wird deren Prinzip nur qualitativ erläutert.

In dem beschriebenen Experiment erfolgt die Evaporation mithilfe eines in die Fallenregion eingestrahlten Radiofrequenzfeldes. Dadurch werden Übergänge in andere m_F -Zustände an Orten mit

$$|g_F \mu_B B(\mathbf{r})| = \hbar \omega_{RF} \quad (2.44)$$

induziert und damit die Atome in nicht gefangene Zustände überführt (siehe Abb. 2.4). Die RF-Frequenz wird so eingestellt, dass nur Atome aus dem

äußersten Bereich der Atomwolke entfernt werden. Dadurch werden nur die energiereichsten Atome entfernt, da nur sie diese Bereiche hoher potenzieller Energie erreichen. Die restlichen Atome in der Falle rethermalisieren, so dass sich eine Temperaturverringering ergibt. Durch die sinkende Temperatur würde sich bei fester Radiofrequenz die Evaporationsrate immer weiter verringern. Deshalb wird die Radiofrequenz entsprechend der Energieverteilung der Atome immer weiter abgesenkt. Die Geschwindigkeit, mit der die Evaporation durchgeführt werden kann, ist durch die zur Rethermalisierung benötigte Zeit bestimmt. Die Rethermalisierung erfolgt durch elastische Zwei-Körper-Stöße. Die Stoßrate ist proportional zur Dichte, zur mittleren Relativgeschwindigkeit der Teilchen und zum Streuquerschnitt, der quadratisch von der Streulänge abhängt. Um eine schnelle Evaporation zu erreichen, ist also ein starker räumlicher Einschluss und eine große Streulänge wünschenswert.

Der bei der Evaporation maximal einsetzbaren Dichte sind jedoch durch dichteabhängige Verlustprozesse Grenzen gesetzt. So kann in verdünnten atomaren Gasen die Energie des Systems durch Molekülbildung verringert werden, d.h. diese Gase sind metastabil. Da aufgrund der Energie- und Impulserhaltung dabei die Beteiligung mindestens dreier Teilchen erforderlich ist, ist diese Verlustrate proportional zum Quadrat der Dichte. Des Weiteren kann es durch Wechselwirkung der magnetischen Momente zweier Atome zu einer Änderung der magnetischen Quantenzahl und somit zu einem Atomverlust, dessen Rate proportional zur Dichte ist, kommen. Diese Verlustprozesse bewirken zusätzlich zum Teilchenverlust eine Temperaturerhöhung, da sie bevorzugt die kältesten Atome, die sich vorwiegend im zentralen Bereich hoher Dichte befinden, aus der Falle entfernen. Ein Verlustprozess, der nicht von der Dichte der Atomwolke abhängt, sind Stöße mit dem Hintergrundgas. Um die dadurch entstehenden Verluste gering zu halten, ist ein gutes Ultrahochvakuum, typischerweise im Bereich von 10^{-11} mbar erforderlich.

2.3 Manipulation von Bose-Einstein-Kondensaten

Um komplexere Experimente mit Bose-Einstein-Kondensaten durchführen zu können, ist deren gezielte Manipulation von entscheidender Bedeutung. Es wurde eine Vielzahl von Verfahren demonstriert, die beispielsweise auf der Wechselwirkung mit Magnetfeldern, Licht, Mikrowellen oder Gravitation beruhen. Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente wurden insbesondere die Bragg-Beugung und optische Dipolpotenziale eingesetzt.

2.3.1 Optische Dipolpotenziale

Optische Dipolpotenziale haben sich mittlerweile zu einem Standardwerkzeug in BEC-Experimenten entwickelt. Sie sind sehr flexibel mit Lasern erzeugbar und mit akusto-optischen oder elektro-optischen Modulatoren auf sehr kurzen Zeitskalen im sub- μs -Bereich variierbar. An dieser Stelle wird nur eine sehr knappe Einführung gegeben, für ausführlichere Betrachtungen sei auf entsprechende Übersichtsartikel verwiesen [95, 96].

Klassisch betrachtet induziert das Lichtfeld des Lasers ein atomares Dipolmoment. Dieses Dipolmoment wechselwirkt wiederum mit dem elektrischen Feld des Lasers, die Wechselwirkungsenergie ist das optische Dipolpotenzial. Die quantenmechanische Betrachtung erfolgt mithilfe des dressed-atom-Modells [97] und liefert folgendes Ergebnis für das optische Dipolpotenzial [98]

$$U_{\text{DP}}(\mathbf{r}) = - \sum_i \frac{\hbar \Omega_i^2(\mathbf{r})}{4} \left(\frac{1}{\omega_i - \omega_L} + \frac{1}{\omega_i + \omega_L} \right), \quad (2.45)$$

wobei ω_L die Laserfrequenz ist. Die Summation erstreckt sich über alle atomaren Niveaus mit Übergangsfrequenzen ω_i und resonanten Rabi-Frequenzen

$$\Omega_i^2(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma_i^2 I(\mathbf{r})}{2 I_{\text{sat},i}}. \quad (2.46)$$

Die Dipolkraft ergibt sich als Gradient des Dipolpotenzials und kommt daher durch Verwendung räumlich variierender Lichtintensitäten zustande. Diese Kraft kann als Resultat der kohärenten Umverteilung von Photonen zwischen verschiedenen Moden des Strahlungsfeldes durch stimulierte Raman-Prozesse beschrieben werden.

Die atomaren Übergangsfrequenzen von ^{87}Rb liegen bei 420, 780 und 795 nm. Häufig liegt die Laserfrequenz hinreichend nah bei einem dieser Übergänge, so dass alle übrigen vernachlässigt werden können und $\omega_i - \omega_L \ll \omega_i + \omega_L$. Dann kann der Term mit $\omega_i + \omega_L$ in Gl. (2.45) vernachlässigt werden („rotating wave approximation“). In diesem Fall ist das Dipolpotenzial umgekehrt proportional zur Verstimmung $\delta = \omega_i - \omega_L$. Aus Gl. (2.45) geht hervor, dass ein blauverstimmttes Lichtfeld abstoßend und ein rotverstimmttes anziehend wirkt. Ein inkohärenter, unerwünschter Prozess ist die Absorption von Photonen mit anschließender spontaner Emission. Die Rate dieses Prozesses fällt nach Gl. (2.38) mit $1/\delta^2$ ab, so dass sich durch Wahl einer hinreichend großen Verstimmung starke Dipolkräfte bei vernachlässigbarer spontaner Emission erzeugen lassen.

2.3.2 Bragg-Beugung

So wie Licht an einem Materiegitter gebeugt werden kann, können auch Atome an einem Gitter aus Licht gebeugt werden. Zwei entgegengerichtete Laserstrahlen bilden beispielsweise eine stehende Welle, die mit den Atomen über ihr

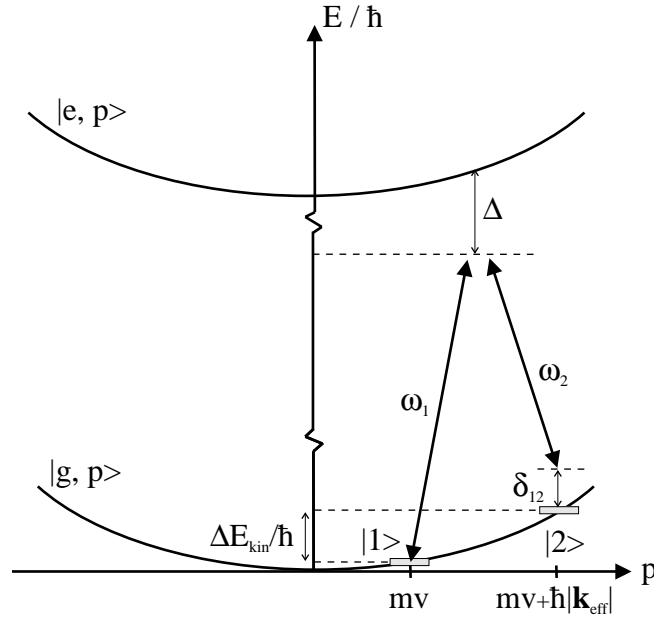


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung der Bragg-Beugung.

periodisches Dipolpotenzial wechselwirkt. Die Beugung an einem solchen Gitter lässt sich am einfachsten mit der Absorption und stimulierten Emission von Photonen erklären. Abbildung 2.5 stellt die Bragg-Beugung schematisch dar. Es ist ein 2-Photonen-Prozess, bei dem aus einem der Laserstrahlen ein Photon absorbiert und in den anderen stimuliert emittiert wird. Bei der Bragg-Beugung geht das Atom wieder in den ursprünglichen internen Zustand über. Wird der interne Zustand gewechselt, heißt der Prozess Raman-Beugung. Da keine spontane Emission stattfindet, ist die Bragg-Beugung ein kohärenter Prozess, der die Phase der Atome in kontrollierter Weise beeinflusst. Die Resonanzbedingung ist durch die Impuls- und Energieerhaltung bestimmt. Auf das Atom wird jeweils der Photonenrückstoß bei Absorption und stimulierter Emission übertragen: $\Delta p = \hbar|\mathbf{k}_{\text{eff}}| = \hbar|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|$. Bei gegenläufigen Laserstrahlen beträgt der Impulsübertrag $\Delta p = 2\hbar k$.³ Damit ist eine Änderung der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = p^2/2m$ verbunden. Diese Energiedifferenz muss dadurch kompensiert werden, dass das absorbierte Photon eine andere Energie als das emittierte Photon hat. Die Frequenzen der beiden Laserstrahlen sind daher so gegeneinander zu verstimmen, dass Energie- und Impulserhaltung erfüllt sind:

$$\omega_{\text{res}}^{(n)}(\mathbf{v}) = \frac{\Delta E_{\text{kin}}}{\hbar} = \mathbf{v}\mathbf{k}_{\text{eff}} + \frac{n\hbar|\mathbf{k}_{\text{eff}}|^2}{2m}, \quad (2.47)$$

³Wenn die beiden Laserstrahlen gegeneinander verstimmt sind, ist der Betrag der Wellenvektoren nicht identisch. Da bei der Bragg-Beugung typischerweise Verstimmungen im Bereich von einigen kHz bei Laserfrequenzen im THz-Bereich notwendig sind, ist jedoch $|\mathbf{k}_1| \approx |\mathbf{k}_2|$.

wobei \mathbf{v} die Anfangsgeschwindigkeit der Atome ist. Die Gleichung gibt die Resonanzbedingung für einen Bragg-Beugungsprozess n -ter Ordnung an. Hierbei werden n Photonen aus einem Strahl absorbiert und n Photonen in den anderen Strahl stimuliert emittiert. Der Impulsübertrag ist dabei $\Delta p = n\hbar|\mathbf{k}_{\text{eff}}|$. Die Verstimmung δ_{12} gegenüber der Zwei-Photonen-Resonanz ist

$$\delta_{12} = \omega_1 - \omega_2 - \omega_{\text{res}}^{(n)}(\mathbf{v}). \quad (2.48)$$

Die Resonanzbedingung hängt nach Gl. (2.47) von der Geschwindigkeit der Atome ab. Deshalb kann die Bragg-Beugung geschwindigkeitsselektiv eingesetzt werden und zur Spektroskopie genutzt werden [40, 99]. Die Geschwindigkeitsselektivität kann durch die Pulsdauer der Bragg-Laser eingestellt werden. Nach der Energie-Zeit-Unschärferelation ist die minimale Energiebreite durch die Wechselwirkungszeit limitiert. Ein kurzer Puls hat deswegen notwendigerweise ein breites Frequenzspektrum und ist nur wenig geschwindigkeitsselektiv. Mathematisch erhält man das Frequenzspektrum durch Fouriertransformation der zeitlichen Pulsform. Für die in dieser Arbeit vorgestellten Experimente wurde eine rechteckige Pulsform verwendet, d.h. die Bragg-Strahlen wurden für eine Zeit t_B mit konstanter Intensität eingeschaltet. In diesem Fall erhält man folgendes Spektrum für die Differenzfrequenz der Bragg-Strahlen:

$$I(\omega) = I_0 \frac{\sin^2((\omega - \delta\omega)t_B/2)}{((\omega - \delta\omega)t_B/2)^2}, \quad (2.49)$$

wobei $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ die Frequenzdifferenz der beiden Bragg-Laserstrahlen ist. Die Frequenzbreite (FWHM) dieser Funktion beträgt $\Delta\nu = 0.9/t_B$. Damit lassen sich verschiedene Regime unterscheiden. Zunächst sieht man an Gl. (2.47), dass die Resonanzbedingungen der verschiedenen Bragg-Beugungsordnungen äquidistant mit einem Frequenzabstand $\delta\omega_{\text{res}} = \omega_{\text{res}}^{(1)}(0)$ liegen. Für $2\pi\Delta\nu > \delta\omega_{\text{res}}$ findet eine Beugung in mehrere Beugungsordnungen statt [Abb. 2.6 a)]. Dieses Regime wird Kapitza-Dirac oder auch Raman-Nath-Regime genannt und entspricht der Beugung an einem dünnen Gitter. Im umgekehrten Fall $2\pi\Delta\nu < \delta\omega_{\text{res}}$, dem Bragg-Regime, gibt es nur eine Beugungsordnung. Fast alle Messungen in dieser Arbeit sind in diesem Regime vorgenommen worden, so dass im Folgenden nur das Bragg-Regime betrachtet wird. Ist die Frequenzbreite $\Delta\nu$ kleiner als die durch die interne Geschwindigkeitsverteilung der Atome bedingte Verteilung der Resonanzfrequenz, werden nur bestimmte Geschwindigkeitskomponenten gebeugt [Abb. 2.6 c)]. Durch Scannen der Relativfrequenz der Bragg-Laser kann so ein Impulsspektrum aufgenommen werden. Ist jedoch die Frequenzbreite deutlich größer als die zur internen Geschwindigkeitsverteilung gehörende Frequenzverteilung, ist der Beugungsprozess nicht geschwindigkeitsselektiv und kann als Strahlteiler [Abb. 2.6 b)] oder Spiegel [Abb. 2.6 unteres Bild in d)] verwendet werden. Auf diese Weise können Interferometergeometrien, wie die in

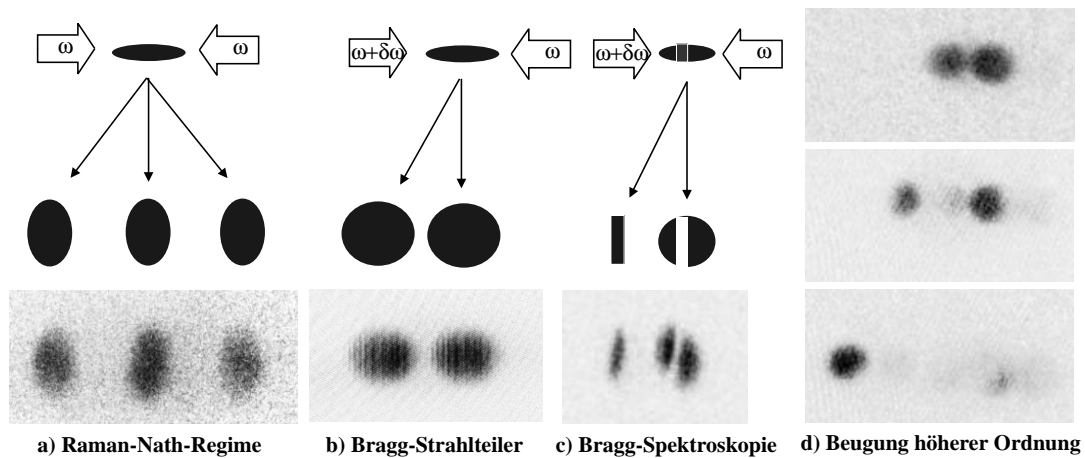


Abbildung 2.6: Verschiedene Regime der Bragg-Beugung. Die in a) bis c) dargestellten Regime unterscheiden sich durch die Pulsdauer t_B der Bragg-Pulse und die dadurch bedingte Breite $\Delta\nu$ des Spektrums der Relativfrequenz. Der Frequenzabstand der verschiedenen Beugungsordnungen beträgt für $^{87}\text{Rubidium}$ bei $\lambda = 780 \text{ nm}$ 15 kHz . a) $t_B = 5 \mu\text{s}$, $\Delta\nu = 180 \text{ kHz}$, b) $t_B = 100 \mu\text{s}$, $\Delta\nu = 9 \text{ kHz}$, gezeigt ist ein $\pi/2$ -Puls, c) $t_B = 2 \text{ ms}$, $\Delta\nu = 450 \text{ Hz}$. In d) ist die Bragg-Beugung erster (oben), zweiter (Mitte) und dritter (unten) Ordnung gezeigt. Die Pulsdauer beträgt $125 \mu\text{s}$, die Differenzfrequenz der Bragg-Laser entspricht dem erwarteten Frequenzabstand der Beugungsordnungen und ist von oben nach unten 20 kHz , 35 kHz und 50 kHz . Die Zunahme des Impulsübertrages mit steigender Beugungsordnung ist ersichtlich.

dieser Arbeit zur Messung der Korrelationsfunktion phasenfluktuierender Kondensate verwendet, realisiert werden.

Bei der Bragg-Beugung werden zwei Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ durch die Laserstrahlung miteinander gekoppelt. Dies ist das Lehrbuchbeispiel des Rabi-Problems, d.h. es treten Rabi-Oszillationen auf (Abb. 2.7). Zunächst befinden sich alle Atome im Ursprungszustand $|1\rangle$, und mit zunehmender Einstrahldauer wird der Anteil der Atome im mit $p = p_0 + n\hbar|\mathbf{k}_{\text{eff}}|$ bewegten Zustand $|2\rangle$ erhöht, bis sich alle Atome in diesem Zustand befinden. Wird die Einstrahldauer weiter erhöht, verringert sich die Population im bewegten Zustand, bis sich wieder alle Atome im Ursprungszustand befinden und der Zyklus von vorne beginnt. Die Frequenz, mit der dieser Zyklus durchlaufen wird, heißt Rabi-Frequenz Ω_{eff} . Sie ist durch die Höhe des Dipolpotenzials der Laserstrahlung gegeben, d.h. über die Intensität und Verstimmung Δ der Bragg-Laser bezüglich der atomaren Resonanz einstellbar. Für die Bragg-Beugung 1. Ordnung gilt [100]

$$\Omega_{\text{eff}} = \frac{\Omega^{(1)}\Omega^{(2)}}{2\Delta}, \quad (2.50)$$

wobei die resonanten Rabi-Frequenzen $\Omega^{(1,2)}$ für den Übergang vom Grundzustand zum elektronisch angeregten Niveau die Linienbreite und die Laserintensität beinhalten und durch Gl. (2.46) gegeben sind. Das Aufspaltungsverhältnis kann daher beliebig über die Pulsdauer, die Intensität und Verstimmung Δ eingestellt werden. Bei der Wahl der Verstimmung ist zu beachten, dass spontane Prozesse nach Gl. (2.38) gering gehalten werden. Bei Pulsen, die als 50% Strahlteiler wirken, hat die Rabi-Oszillation 1/4 des Zyklus durchlaufen. Diese Pulse heißen dementsprechend $\pi/2$ -Pulse. Pulse, die als Spiegel wirken, d.h. alle Atome in den Zustand $|2\rangle$ übertragen, heißen π -Pulse.

Die gerade gegebene Beschreibung des vollständigen Populationstransfers mit der Frequenz Ω_{eff} gilt nur für den experimentell zumeist angestrebten Fall einer geringen Verstimmung der Relativfrequenz von der Zwei-Photonen-Resonanz, d.h. für $\delta_{12} \ll \Omega_{\text{eff}}$. Ansonsten findet ein unvollständiger Populations-transfer mit der Frequenz $\Omega'_r = \sqrt{\Omega_{\text{eff}}^2 + \delta_{12}^2}$ statt. Befinden sich ursprünglich alle Atome im Zustand $|1\rangle$, wird maximal ein Anteil von $(\Omega_{\text{eff}}/\Omega'_r)^2$ in den Zustand $|2\rangle$ transferiert.

Entwicklung der Phase bei der Bragg-Beugung

Werden Bragg-Pulse für interferometrische Messungen eingesetzt, ist nicht nur das Aufspaltungsverhältnis, sondern auch der Einfluss der Bragg-Beugung auf die Phase der Atomwolke wesentlich. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in [101], hier werden nur die Grundprinzipien erläutert und die wesentlichen Resultate gegeben.

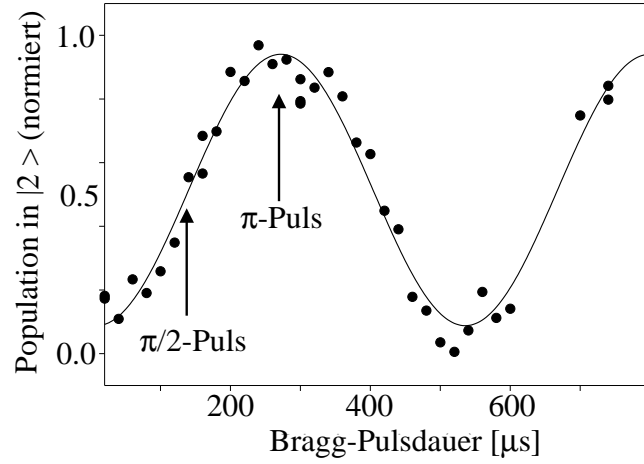


Abbildung 2.7: Rabi-Oszillationen: Die relative Besetzung der Zustände $|1\rangle$ (hier nicht dargestellt) und $|2\rangle$ oszilliert als Funktion der Einstrahlzeit der Bragg-Pulse. Je nach gewählter Pulsdauer kann die Bragg-Beugung als Strahlteiler ($\pi/2$ -Puls) oder als Spiegel (π -Puls) eingesetzt werden.

Die betrachtete Situation ist, dass zwei Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ durch das optische Dipolpotenzial eines Bragg-Pulses gekoppelt sind. Der Puls ist ein Rechteckpuls der Zeitdauer t_B , der zur Zeit t_0 eingestrahlt wird. Der ursprüngliche Zustand des Systems ist im Allgemeinen eine Überlagerung der beiden Zustände

$$|\psi(t)\rangle = a_1(t)|1\rangle + a_2(t)|2\rangle. \quad (2.51)$$

Es ist bequem, die Phasenentwicklung aufgrund der Energien $E_{1,2} = \hbar\omega_{1,2}$ der ungestörten Zustände zu separieren

$$\begin{aligned} a_1(t) &= c_1(t)e^{-i\omega_1 t} \\ a_2(t) &= c_2(t)e^{-i\omega_2 t}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

so dass die Koeffizienten c_i vor und nach dem Bragg-Puls zeitlich konstant sind. Nach dem Bragg-Puls sind die Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} c_1(t_0 + t_B) &= e^{-i(\Omega_1^{AC} + \Omega_2^{AC})t_B/2} e^{i\delta_{12}t_B/2} \\ &\times \left[c_1(t_0) \cos\left(\frac{\Omega_r' t_B}{2}\right) - ic_2(t_0) e^{i(\delta_{12}t_0 + \phi_{\text{eff}})} \sin\left(\frac{\Omega_r' t_B}{2}\right) \right] \\ c_2(t_0 + t_B) &= e^{-i(\Omega_1^{AC} + \Omega_2^{AC})t_B/2} e^{-i\delta_{12}t_B/2} \\ &\times \left[c_2(t_0) \cos\left(\frac{\Omega_r' t_B}{2}\right) - ic_1(t_0) e^{-i(\delta_{12}t_0 + \phi_{\text{eff}})} \sin\left(\frac{\Omega_r' t_B}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

gegeben [101]. Hierbei sind $\Omega_i^{AC} = \frac{|\Omega^{(i)}|^2}{4\Delta}$ die AC-Stark-Shifts durch die beiden einzelnen Laserstrahlen und $\phi_{\text{eff}} = \phi_1 - \phi_2$, wobei ϕ_1 und ϕ_2 die Phasen der beiden Laserstrahlen sind. In Gl. (2.53) wurde der Einfachheit halber angenommen, dass nahe der Zwei-Photonen-Resonanz gearbeitet wird, also ein vollständiger Populationstransfer möglich ist. Ein $\pi/2$ -Puls ist durch $\Omega'_r t_B = \pi/2$ definiert. Es lässt sich mit Gl. (2.53) einfach verifizieren, dass ein solcher Puls 50% der Population von Zustand $|1\rangle$ nach Zustand $|2\rangle$ transferiert und umgekehrt, also als Strahlteiler wirkt. Ebenso ist direkt nachrechenbar, dass ein π -Puls einen vollständigen Populationstransfer bewirkt und demnach als Spiegel agiert.

THEORETISCHE BESCHREIBUNG DER PHASENFLUKTUATIONEN

Phasenfluktuationen im Gleichgewichtszustand von Bose-Einstein-Kondensaten wurden zunächst für 1-dimensionale Bosegase [43] und wenig später auch für elongierte, aber dennoch 3-dimensionale Kondensate vorausgesagt [44]. Im Rahmen dieser Arbeit konnten sie erstmals beobachtet werden [47, 48]. Ausgehend von der Vorhersage und dem Nachweis der Existenz von Phasenfluktuationen wurden auch in Paris [102] und Amsterdam [103] mit komplementären Methoden phasenfluktuierte Kondensate untersucht, und es wurden diverse weiterführende theoretische Arbeiten durchgeführt [104, 105, 106, 107].

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die theoretischen Grundlagen der Beschreibung von Phasenfluktuationen in elongierten 3-dimensionalen Kondensaten, im folgenden Kapitel werden die experimentellen Untersuchungen dargestellt. Diese inhaltliche Trennung soll nicht darüber hinwegtäuschen, dass bei der Erforschung der Phasenfluktuationen Theorie und Experiment eng miteinander verknüpft waren und die experimentellen Ergebnisse mehrfach eine Weiterentwicklung der Theorie erforderten. So wurde bei den Experimenten u.a. festgestellt, dass die Phasenfluktuationen im gefangenen Kondensat zur Entstehung von Dichtemodulationen in der ballistischen Expansion führen. Des Weiteren hat die interferometrische Messung der räumlichen Korrelationen eine Berechnung der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung erfordert, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurde.

3.1 Grundlagen

Die Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten hängen wesentlich von deren Dimensionalität ab. In isotropen bzw. dreidimensionalen Fällen sind Fluk-

tuationen der Phase und der Dichte im thermodynamischen Gleichgewicht nur in einem schmalen Temperaturintervall nahe der BEC-Übergangstemperatur T_c von Bedeutung. Außerhalb dieser Region ist das Kondensat kohärent. Es ist durch die makroskopische Besetzung des Grundzustandes des Vielteilchensystems gekennzeichnet und kann durch eine makroskopische Wellenfunktion charakterisiert werden.

Diese Beschreibung trifft jedoch nicht auf niederdimensionale Kondensate zu. Solche Kondensate zeigen im Vergleich zum gewöhnlichen 3D-Regime qualitativ verschiedene Eigenschaften, die insbesondere durch Phasenfluktuationen gekennzeichnet sind. Ursache der Phasenfluktuationen ist die thermische Anregung der niederenergetischen Moden des BEC. Die Beschreibung der statistischen Eigenschaften dieser Kondensate erfordert die Verwendung von Feldoperatoren oder die Einführung von Zufallsvariablen in der Wellenfunktion. Die statistische Natur zeigt sich darin, dass einzelne Realisierungen selbst unter identischen Bedingungen nicht voraussagbar sind und daher Ensemblemittelwerte zu betrachten sind.

Mithilfe energetischer Betrachtungen können qualitativ einige Eigenschaften phasenfluktuierender Kondensate verstanden werden. Die Energien, die radiale Anregungen erfordern, skalieren mit $\hbar\omega_r$, die der axialen Anregungen mit $\hbar\omega_x$. Die thermischen Anregungen in stark elongierten Potenzialen sind daher weitestgehend durch die niederenergetischen axialen Moden geprägt. Da deren Wellenlänge größer ist als die radiale Kondensatgröße, haben diese Anregungen einen 1-dimensionalen Charakter. Daher verhalten sich stark elongierte 3-dimensionale BECs bezüglich ihrer Phasenkohärenzeigenschaften qualitativ analog zu 1-dimensionalen Kondensaten. Im Gegensatz zu den Fluktuationen der Phase sind Dichtefluktuationen unterdrückt [44, 49, 102]. Ursache ist, dass sie aufgrund der nichtlinearen Abstoßung Energien in der Größenordnung des chemischen Potenzials erfordern, d.h. weit höhere Energien als zum Anregen von Phasenfluktuationen erforderlich sind.

Aufgrund der Unterdrückung von Dichtefluktuationen kann der atomare Feldoperator als

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} \exp(i\hat{\phi}(\mathbf{r})) \quad (3.1)$$

geschrieben werden [44], wobei $\hat{\phi}(\mathbf{r})$ der Operator der Phase ist. Dieser setzt sich aus Beiträgen der verschiedenen Anregungen zusammen [108]

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = [4n_0(\mathbf{r})]^{-1/2} \sum_{j=1}^{\infty} f_j^+(\mathbf{r}) \hat{a}_j + h.c., \quad (3.2)$$

wobei \hat{a}_j der Vernichtungsoperator für Anregungen der Mode j ist. Die Wellenfunktionen $f_j^+ = u_j + v_j$ und Energien ϵ_j dieser Moden können mithilfe der Bogoliubov-de-Gennes-Gleichungen berechnet werden [109]. Für die niederenergetischen axialen Moden elongierter 3D-Kondensate im Thomas-Fermi-Regime

erhält man ein Energiespektrum [110]

$$\epsilon_j = \hbar\omega_x \sqrt{j(j+3)}/4 \quad (3.3)$$

und Wellenfunktionen

$$f_j^+(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)gn_0(\mathbf{r})}{4\pi(j+1)R^2L\epsilon_j}} P_j^{(1,1)}\left(\frac{x}{L}\right), \quad (3.4)$$

wobei $P_j^{(1,1)}$ Jacobi-Polynome sind und R, L die Thomas-Fermi-Größen des Kondensats darstellen. Damit wird der Phasenoperator (3.2) zu

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)g}{4\pi(j+1)R^2L\epsilon_j}} P_j^{(1,1)}\left(\frac{x}{L}\right) \frac{(\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)}{2}, \quad (3.5)$$

Der 1-dimensionale Charakter dieser Moden spiegelt sich darin wider, dass der Phasenoperator unabhängig von der radialen Koordinate ist.

3.2 Korrelationsfunktionen

Die Kohärenzeigenschaften der Kondensate werden durch ihre Korrelationsfunktionen beschrieben. Ihre zentrale Bedeutung ergibt sich dadurch, dass die meisten Eigenschaften und Experimente mithilfe der Korrelationsfunktionen beschrieben werden können. So können beispielsweise so verschiedene Größen wie der Interferenzkontrast [111, 41, 39], die Release-Energie [112] und die 3-Körper-Verlustrate [113] durch Korrelationsfunktionen ausgedrückt werden.

3.2.1 Korrelationsfunktion erster Ordnung

Als Resultat der Phasenfluktuationen kann die Phasenbeziehung der Kondensatwellenfunktion an zwei Positionen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 mit steigendem Abstand zunehmend schlechter vorausgesagt werden, d.h. die Phasen sind immer weniger korreliert. Dieses Verhalten wird durch die Korrelationsfunktion erster Ordnung quantifiziert, die somit beispielsweise den Kontrast in Interferenzexperimenten angibt. Die Berechnung dieser Funktion ergibt insbesondere die Abhängigkeit der Phasenfluktuationen von den experimentellen Parametern.

Die normierte Korrelationsfunktion erster Ordnung ist definiert durch [111]

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}(\mathbf{r}_2) \rangle}{\sqrt{\langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_2) \rangle}}, \quad (3.6)$$

wobei die gewinkelten Klammern den Ensemblemittelwert darstellen. Durch Einsetzen des Feldoperators des Kondensats Gl. (3.1) erhält man

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \exp[-i(\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}_1) - \hat{\phi}(\mathbf{r}_2))] \rangle = \langle \exp[-i\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)] \rangle, \quad (3.7)$$

wobei $\langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle = n_0(\mathbf{r})$ und $\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \hat{\phi}(\mathbf{r}_1) - \hat{\phi}(\mathbf{r}_2)$. Hierbei wurde verwendet, dass der Phasenoperator hermitesch ist, also $\hat{\phi}^\dagger(\mathbf{r}) = \hat{\phi}(\mathbf{r})$, und $\hat{\phi}(\mathbf{r}_1)$ und $\hat{\phi}(\mathbf{r}_2)$ kommutieren. Die normierte Korrelationsfunktion erster Ordnung kann Werte zwischen -1 und +1 annehmen und drückt die Phasenkohärenz des BECs aus: So ist $g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1$, wenn die Phasen an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 bei jeder Realisierung identisch sind, d.h. perfekte Kohärenz vorliegt; $g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$, wenn die Phasen an den beiden Positionen unkorreliert sind, d.h. keine Kohärenz vorhanden ist. Da die Phasendifferenz sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, gilt für den Ensemblemittelwert $\langle \delta\hat{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle = 0$. Daher werden die statistischen Eigenschaften durch die quadratische Abweichung des Phasenoperators beschrieben. Unter Verwendung von Gl. (3.7) erhält man in niedrigster nicht verschwindender Ordnung von $\delta\hat{\phi}$

$$g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp \{ -\langle [\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]^2 \rangle / 2 \}. \quad (3.8)$$

Die Besetzung der Anregungsmoden f_j^+ für ein Ensemble im thermodynamischen Gleichgewicht folgt der Bose-Einstein-Statistik. Für die niederenergetischen Moden elongierter Kondensate gilt selbst für Temperaturen T weit unterhalb von T_C , $k_B T \gg \hbar\omega_z$, so dass $N_j = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle_T \simeq k_B T / \epsilon_j$. Damit lassen sich unter Verwendung von Gl. (3.5) und (3.8) die mittleren quadratischen Fluktuationen und damit die Korrelationsfunktion erster Ordnung explizit angeben:

$$\langle [\delta\hat{\phi}(x_1, x_2)]^2 \rangle_T = \delta_L^2 f^{(1)}(x_1/L, x_2/L), \quad (3.9)$$

mit

$$\delta_L^2 = \frac{32\mu k_B T}{15N_0(\hbar\omega_z)^2} \quad (3.10)$$

und

$$f^{(1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+2)(2j+3)}{j(j+1)(j+3)} \left[P_j^{(1,1)}(\tilde{x}_1) - P_j^{(1,1)}(\tilde{x}_2) \right]^2. \quad (3.11)$$

Es sei angemerkt, dass aufgrund des eindimensionalen Charakters der Phasenfluktuationen die normierte Korrelationsfunktion nicht von den radialen Koordinaten abhängt. Während δ_L^2 die Abhängigkeit der Phasenfluktuationen von den experimentellen Parametern enthält, beinhaltet die Funktion $f^{(1)}$ die räumliche Abhängigkeit, d.h. die räumliche Struktur der Anregungen. In der Nähe des Kondensatzentrums ($|x_1|, |x_2| \ll L$) läßt sich $f^{(1)}$ und damit die Korrelationsfunktion durch einen vereinfachten Ausdruck beschreiben [44]:

$$f^{(1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|. \quad (3.12)$$

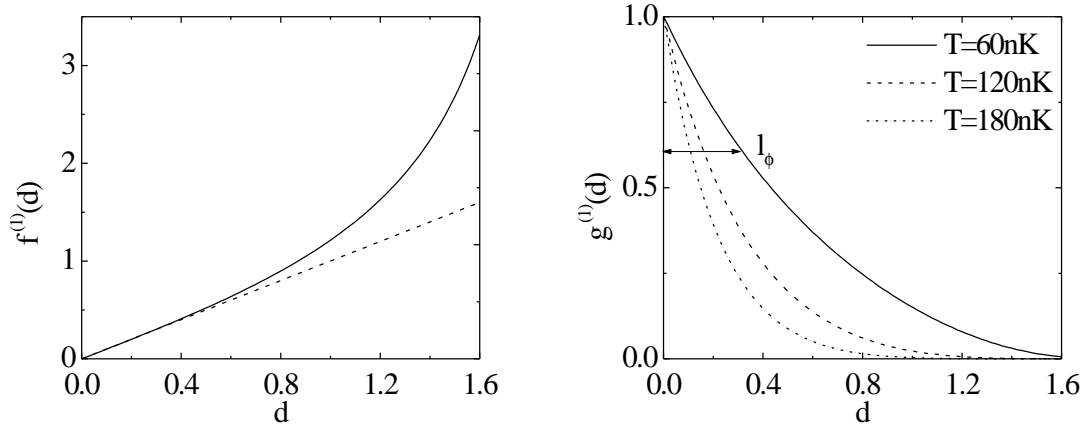


Abbildung 3.1: Links: Numerische Berechnung (durchgezogene Linie) und analytische Näherung mit Gl. (3.12) (gestrichelte Linie) der Funktion $f^{(1)}(d) = f^{(1)}(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. Rechts: Korrelationsfunktion erster Ordnung für verschiedene Temperaturen. Für $T = 60 \text{ nK}$ ist exemplarisch die Phasenkohärenzlänge eingezeichnet. Alle Kurven wurden mit $N_0 = 10^5$, $\omega_x = 2\pi \times 3.4 \text{ Hz}$ und $\omega_r = 2\pi \times 380 \text{ Hz}$ unter Verwendung von Gl. (3.11) berechnet.

und

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \exp\{-\delta_L^2 |x_1 - x_2| / 2L\}. \quad (3.13)$$

Dieses Ergebnis legt die Definition der Phasenkohärenzlänge

$$l_\phi = \frac{L_\phi}{L} = \frac{1}{\delta_L^2} = \frac{15N_0(\hbar\omega_x)^2}{32\mu k_B T} \quad (3.14)$$

als die charakteristische Distanz, über die die Korrelationsfunktion erster Ordnung auf ihren $1/\sqrt{e}$ Wert abfällt, nahe. Hierbei ist l_ϕ die Phasenkohärenzlänge in Einheiten der Kondensatlänge und L_ϕ die absolute Phasenkohärenzlänge. Falls $L_\phi \ll L$ kann das System gut durch die local-density-Näherung beschrieben werden und so der Gültigkeitsbereich der Näherungsformel Gl. (3.12) erweitert werden [114]:

$$f^{(1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \frac{|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|}{[1 - (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2)^2/4]^2}. \quad (3.15)$$

Abbildung 3.1 vergleicht die numerisch berechnete und analytisch genäherte Funktion $f^{(1)}$. Für $\tilde{x} < 0.4$ ist $g^{(1)}$ gut durch die analytische Näherung beschrieben. In der Abbildung ist auch die (numerisch berechnete) normierte Korrelationsfunktion erster Ordnung für verschiedene Temperaturen dargestellt. Erwartungsgemäß gehen die Phasenkohärenzen mit zunehmender Distanz verloren. Da thermische Anregungen Ursache der Phasenfluktuationen sind, nimmt die

Phasenkohärenzlänge mit wachsender Temperatur ab. Durch Einsetzen des chemischen Potentials Gl. (2.27) erhält man die Abhängigkeiten von den experimentellen Parametern:

$$l_\phi \propto \frac{N_0^{3/5}}{T} \left(\frac{\omega_x^2}{\omega_r} \right)^{4/5}. \quad (3.16)$$

Die Phasenfluktuationen hängen stark von der Fallengeometrie ab. Je elongierter das Kondensat ist, desto ausgeprägter sind die Fluktuationen. In sehr elongierten Geometrien kann nur weit unterhalb der Kondensationstemperatur T_c ein phasenkohärentes Kondensat erreicht werden. Dies erschwert die Erzeugung solcher Kondensate und damit deren Nutzung als Quellen kohärenter Materiewellen. Des Weiteren zeigt die Zunahme der Phasenfluktuationen bei Reduzierung des axialen Einschlusses qualitativ, wie der Übergang zu dem Lehrbuchbeispiel der eindimensionalen homogenen Systeme zustande kommt. Wie in Kapitel 2 erläutert, kann es in diesen Systemen entsprechend des Mermin-Wagner-Hohenberg-Theorems aufgrund der starken Besetzung niederenergetischer Zustände selbst für $T \rightarrow 0$ kein Kondensat mit langreichweitiger Kohärenz geben.

Impulsspektrum

Die Orts- und Impulsraumdarstellung eines Zustandes sind in der Quantenmechanik durch Fouriertransformation miteinander verknüpft, d.h. durch Fouriertransformation der Wellenfunktion im Ortsraum erhält man die Wellenfunktion im Impulsraum. Hiervon ausgehend lässt sich leicht zeigen, dass die Impulsverteilung \mathcal{P} die Fouriertransformierte (\mathcal{FT}) der integrierten Korrelationsfunktion erster Ordnung $G(\mathbf{r}_a) \equiv \int d^3r \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_a) \rangle$ ist [115]. Um den Einfluss von Phasenfluktuationen auf das Impulsspektrum zu verstehen, wird hier der vereinfachte, in der Nähe des Kondensatzentrums gültige Ausdruck (3.13) für die Korrelationsfunktion verwendet. Für die axiale Impulsverteilung erhält man dann

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(p_x) &= \mathcal{FT} \left[\exp^{-\frac{|x_a|}{2L_\phi}} \int d^3r \sqrt{n_0(\mathbf{r}) n_0(\mathbf{r} + \mathbf{r}_a)} \right] \\ &= \mathcal{FT} \left[\exp^{-\frac{|x_a|}{2L_\phi}} \right] \star \mathcal{FT} \left[\langle \sqrt{n_0(\mathbf{r}) n_0(\mathbf{r} + \mathbf{r}_a)} \rangle_r \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei x_a die x-Komponente von \mathbf{r}_a ist. Die Impulsverteilungsfunktion ist also die Faltung der Fouriertransformierten der Dichteverteilung und einer Exponentialfunktion. Die Breite der Exponentialfunktion ist durch die Phasenkohärenzlänge gegeben, die der Fouriertransformation dieser Funktion ist dementsprechend umgekehrt proportional zu L_ϕ . In Abwesenheit von Phasenfluktuationen ist die Impulsverteilung durch die Größe des Kondensats gegeben, d.h. Heisenberglimitiert [40]. Im Regime der Quasikondensate wird die Impulsverteilung durch

die Phasenkohärenzlänge dominiert, also die Impulsbreite wesentlich verbreitert, so dass das Kondensat nicht mehr Heisenberg-limitiert ist. Darauf wurde im Rahmen dieser Arbeit erstmals hingewiesen und die Möglichkeit der Bragg-Spektroskopie zur Untersuchung der Phasenfluktuationen aufgezeigt [48]. Eine quantitativere Analyse im Rahmen der local-density-Näherung, die auch die ballistische Expansion berücksichtigt, findet sich in [114].

Während in dieser Arbeit zumeist räumliche Fluktuationen der Phase betrachtet werden, beschäftigt sich die Optik vorwiegend mit zeitlichen Phasenfluktuationen. Der Zusammenhang zwischen räumlicher Korrelationsfunktion und Impulsspektrum ist analog zu dem aus der Optik bekannten Wiener-Khinchine-Theorem, das den Zusammenhang zwischen zeitlicher Korrelationsfunktion und Frequenzspektrum beschreibt. Hier lässt sich das Frequenzspektrum durch Fouriertransformation der zeitlichen Korrelationsfunktion erster Ordnung berechnen. Dies bedeutet insbesondere, dass es nicht möglich ist, zwei Lichtquellen mit identischem Spektrum anhand der Korrelationsfunktion erster Ordnung zu unterscheiden. So kann eine Messung der Korrelationen erster Ordnung nicht zwischen Laserlicht und entsprechend spektral gefiltertem Licht einer thermischen Quelle unterscheiden. Hierzu bedarf es der Messung von Korrelationsfunktionen höherer Ordnung.

3.2.2 Korrelationsfunktionen höherer Ordnung

Ähnlich wie Laser sind ideale Bose-Einstein-Kondensate nicht nur kohärent in erster Ordnung, sondern auch in höheren Ordnungen. Dies bedeutet insbesondere, dass sie keine Dichtefluktuationen zeigen. Im Gegensatz dazu zeigen thermische Atom- bzw. Lichtquellen einen sogenannten Bunching-Effekt. Hier ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Atome gleichzeitig am gleichen Ort vorzufinden, gegenüber dem von der mittleren Dichte erwarteten Wert erhöht, d.h. die Atome neigen dazu „zusammenzuklumpen“. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch die Intensitätskorrelationsfunktion, also durch die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung beschrieben.

Die theoretische Beschreibung der Phasenfluktuationen basiert auf der Unterdrückung von Dichtefluktuationen. Daher werden Effekte wie das Bunching a priori durch die Theorie ausgeschlossen. Im Folgenden wird u.a. gezeigt, dass sich durch diesen Ansatz [Gl. (3.1) und (3.5)] alle Korrelationsfunktionen höherer Ordnung als Produkt von Korrelationsfunktionen erster Ordnung ausdrücken lassen, sie also keine zusätzlichen Informationen enthalten. Insbesondere die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung ist aber dennoch von Bedeutung, da

1. mit ihrer Hilfe die theoretisch erwartete Unterdrückung von Dichtefluktuationen überprüft werden kann.
2. ihre Verwendung zur interferometrischen Messung der Phasenkorrelatio-

nen experimentell vorteilhaft ist.

Die normierte Korrelationsfunktion zweiter Ordnung ist durch

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \frac{\langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_3) \hat{\psi}(\mathbf{r}_4) \rangle}{\sqrt{\prod_{i=1}^4 \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{\psi}(\mathbf{r}_i) \rangle}}, \quad (3.18)$$

definiert. Sie enthält die räumliche Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ als Spezialfall. Die Berechnung erfolgt analog zu der der Korrelationsfunktion erster Ordnung. Man erhält

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \exp \left\{ -\langle [\delta^{(2)} \hat{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)]^2 \rangle / 2 \right\} \quad (3.19)$$

mit $\delta^{(2)} \hat{\phi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \hat{\phi}(\mathbf{r}_1) + \hat{\phi}(\mathbf{r}_2) - \hat{\phi}(\mathbf{r}_3) - \hat{\phi}(\mathbf{r}_4)$. Für ein Ensemble im thermodynamischen Gleichgewicht gilt

$$\langle [\delta^{(2)} \hat{\phi}(x_1, x_2, x_3, x_4)]^2 \rangle_T = \delta_L^2 f^{(2)}(x_1/L, x_2/L, x_3/L, x_4/L) \quad (3.20)$$

mit

$$f^{(2)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+2)(2j+3)}{j(j+3)(j+1)} \times \left[P_j^{(1,1)}(\tilde{x}_1) + P_j^{(1,1)}(\tilde{x}_2) - P_j^{(1,1)}(\tilde{x}_3) - P_j^{(1,1)}(\tilde{x}_4) \right]^2. \quad (3.21)$$

Wie bei der Korrelationsfunktion erster Ordnung beinhaltet auch hier δ_L^2 alle experimentellen Parameter, während $f^{(2)}$ die funktionale Form der Phasenfluktuationen enthält. Die Unterdrückung der Dichtefluktuationen, die a priori durch den Ansatz Gl. (3.1) vorgenommen wurde, drückt sich durch $g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 1$ aus. Es lässt sich direkt nachrechnen, dass sich $f^{(2)}$ durch die Funktion erster Ordnung $f^{(1)}$ ausdrücken lässt:

$$f^{(2)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4) = \begin{aligned} & f^{(1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) + f^{(1)}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_4) \\ & - f^{(1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - f^{(1)}(\tilde{x}_3, \tilde{x}_4) \\ & + f^{(1)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_4) + f^{(1)}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die für die Funktion $f^{(1)}$ erarbeiteten analytischen Näherungen Gl. (3.12) und (3.15) lassen sich daher auch direkt für $f^{(2)}$ anwenden. Abbildung 3.2 zeigt die numerisch berechnete Funktion $f^{(2)}$ verglichen mit den beiden analytischen Näherungen. Die in der Abbildung gewählten Positionen entsprechen dem für die Interferometrie relevanten Fall. Hierbei werden zwei Kopien des Kondensats mit einem räumlichen Versatz d überlagert und die Intensitätskorrelationen im Interferometriesignal $I(x)$ werden an zwei symmetrischen Positionen im Abstand s ausgewertet. $f^{(2)}(s)$ ist eine monoton steigende Funktion; für $s = 0$ ist die

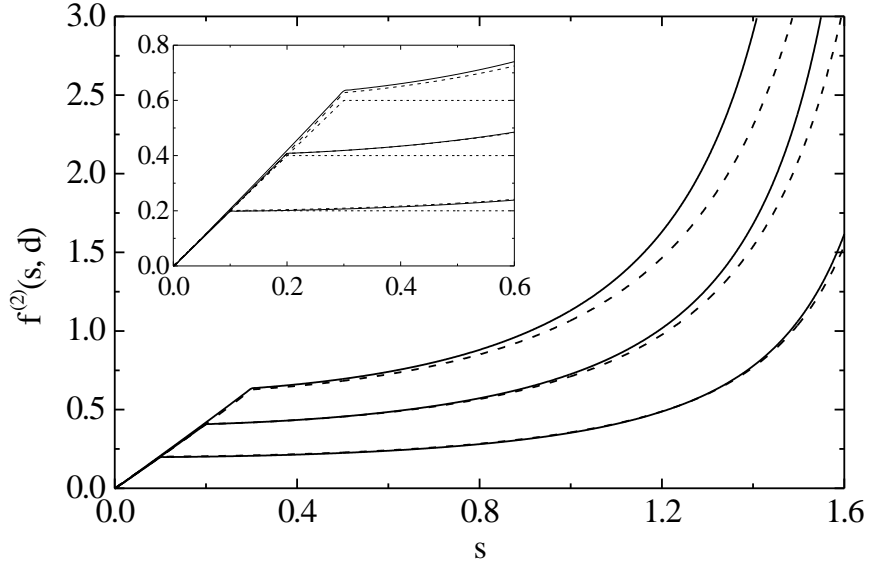


Abbildung 3.2: Numerische Berechnung (durchgezogene Linie) der Funktion $f^{(2)}(s, d) \equiv f^{(2)}(\frac{-s-d}{2}, \frac{s+d}{2}, \frac{s-d}{2}, \frac{-s+d}{2})$ verglichen mit der analytischen Näherung unter Verwendung der local-density-Näherung Gl. (3.15) (gestrichelte Linie) und der nur nahe des Kondensatzentrums gültigen Näherung Gl. (3.12) (gepunktete Linie, nur in der inneren Abbildung dargestellt). Die innere Abbildung ist eine Ausschnittsvergrößerung des Bereichs kleiner Abstände s . Die drei Kurven gehören jeweils zu $d = 0.1$, $d = 0.2$ und $d = 0.3$ (von unten nach oben).

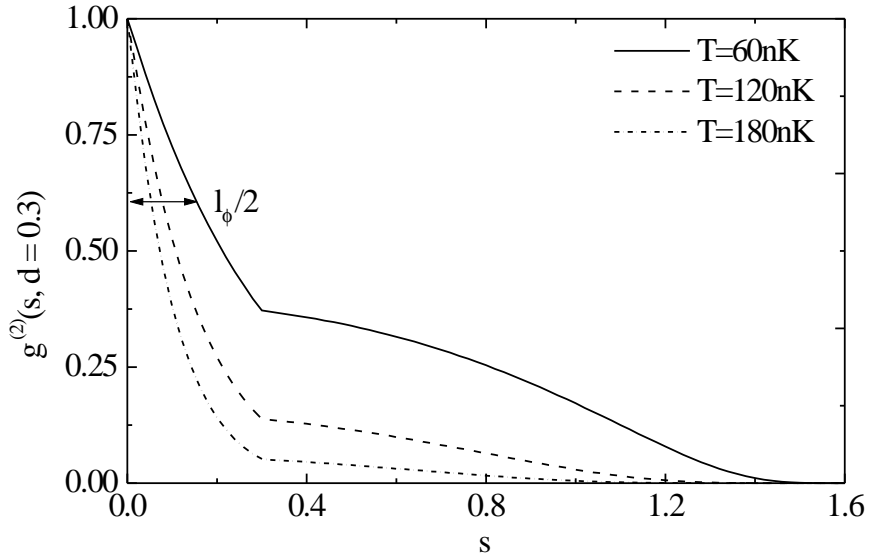


Abbildung 3.3: Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für verschiedene Temperaturen. Für $T = 60 \text{ nK}$ ist exemplarisch die Phasekohärenzlänge eingezeichnet. Alle Kurven wurden mit $N_0 = 10^5$, $\omega_x = 2\pi \times 3.4 \text{ Hz}$ und $\omega_r = 2\pi \times 380 \text{ Hz}$ berechnet.

Phasendifferenz $\delta^{(2)} = 0$, so dass $f^{(2)}(0) = 0$. Dies bringt zum Ausdruck, dass die Intensitäten $I(x + s/2)$ und $I(x - s/2)$ im Interferometriesignal mit steigendem Abstand s immer weniger korreliert sind. $f^{(2)}$ steigt bis zum Abstand $s = d$ zunächst linear mit der Steigung $2s$ an, geht dann in ein Plateau über und steigt zum Rand des Kondensats wieder an.

Unter Verwendung von Gl. (3.22) lässt sich die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für die hier betrachteten phasenfluktuiierenden Kondensate mit unterdrückten Dichtefluktuationen als Produkt der Korrelationsfunktion erster Ordnung ausdrücken:

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) &= \exp\left\{-\frac{\delta_L^2}{2} f^{(2)}(x_1/L, x_2/L, x_3/L, x_4/L)\right\} \\ &= \frac{g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)g^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4)g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4)g^{(1)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{g^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)g^{(1)}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die räumlichen Korrelationsfunktionen erster und zweiter Ordnung beinhalten also dieselbe Information, d.h. aus der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung kann die der ersten Ordnung berechnet werden und umgekehrt. Abbildung 3.3 zeigt die Funktion $g^{(2)}$ für die experimentellen Parameter, die in Abb. 3.1 für $g^{(1)}$ verwendet wurden. Wie bei der Korrelationsfunktion erster Ordnung kann die Phasenkohärenzlänge aus der Breite der Funktion ermittelt werden.

Die Berechnung für die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung lässt sich verallgemeinern, um einen allgemeingültigen Ausdruck für die Korrelationsfunktion N -ter Ordnung

$$g^{(N)}(\{\mathbf{r}_i\}_{i=1,\dots,2N}) = \frac{\langle \prod_{i=1}^N \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_i) \prod_{i=N+1}^{2N} \hat{\psi}(\mathbf{r}_i) \rangle}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2N} \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}_i) \hat{\psi}(\mathbf{r}_i) \rangle}} \quad (3.24)$$

zu erlangen. Das Ergebnis für ein Ensemble im thermodynamischen Gleichgewicht lautet:

$$g^{(N)}(\{\mathbf{r}_i\}_{i=1,\dots,2N}) = \exp\left\{-\frac{\delta_L^2}{2} f^{(N)}(\{x_i/L\}_{i=1,\dots,2N})\right\} \quad (3.25)$$

mit

$$f^{(N)}(\{\tilde{x}_i\}_{i=1,\dots,2N}) = \sum_{1 \leq l < m \leq 2N} \mathcal{P}^{\{l,m\}} f^{(1)}(\tilde{x}_l, \tilde{x}_m), \quad (3.26)$$

wobei für die Koeffizienten

$$\mathcal{P}^{\{l,m\}} = \begin{cases} +1 & \text{if } l \leq N < m \\ -1 & \text{if } l, m \leq N \text{ or } l, m > N \end{cases} \quad (3.27)$$

gilt. Mit dem Ansatz Gl. (3.1) und Gl. (3.5) können also auch Korrelationsfunktionen höherer Ordnung durch die Korrelationsfunktion erster Ordnung ausgedrückt werden.

3.3 Numerische Simulation

Um die Phasenfluktuationen numerisch zu simulieren, können die Operatoren \hat{a}_j und \hat{a}_j^\dagger in Gl. (3.5) durch Zufallsvariablen α_j und α_j^* ersetzt werden, die die statistischen Eigenschaften der Operatoren besitzen: Einen verschwindenden Erwartungswert $\langle \alpha_j \rangle = 0$ und Besetzungszahlen $\langle |\alpha_j|^2 \rangle = N_j$ entsprechend der Bose-Einstein-Statistik $N_j = [\exp(\epsilon_j/k_B T) - 1]^{-1}$. Mit diesen Zufallsvariablen wird die Phase des Kondensats zu $\phi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x)$ mit

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{(j+2)(2j+3)g}{4\pi(j+1)R^2 L \epsilon_j}} P_j^{(1,1)}\left(\frac{x}{L}\right) \frac{(\alpha_j + \alpha_j^*)}{2}, \quad (3.28)$$

d.h. für die Phase ist nur der Realteil der Zufallsvariablen relevant: $\frac{(\alpha_j + \alpha_j^*)}{2} = \text{Re}(\alpha_j)$. Es lässt sich direkt nachrechnen, dass mit

$$\frac{(\alpha_j + \alpha_j^*)}{2} = \sqrt{\frac{N_j}{2}} r, \quad (3.29)$$

wobei r standardnormalverteilt ist, die gewünschten statistischen Eigenschaften erreicht werden. Abbildung 3.4 zeigt typische simulierte Phasenverteilungen für verschiedene radiale Fallenfrequenzen. Es zeigt sich deutlich, dass mit zunehmendem Aspektverhältnis $\lambda = \omega_\rho/\omega_x$ die Phasenfluktuationen zunehmen. Während für $\lambda = 10$ die Phasenfluktuationen weitgehend unterdrückt sind, fluktuiert die Phase für $\lambda = 1000$ um mehr als 2π . Hier ist in phasensensitiven Experimenten also ein dramatischer Einfluss der Phasenfluktuationen zu erwarten. Es wurde durch wiederholte Simulation in einem weiten Parameterbereich überprüft, dass die Simulation die nahe des Fallenzentrums analytisch erwarteten Korrelationseigenschaften Gl. (3.13) reproduziert.

Die so simulierten Phasenverteilungen können benutzt werden, um beispielsweise das Entstehen von Streifen in der ballistisch expandierten Dichteverteilung oder die interferometrischen Experimente mit phasenfluktuiierenden BECs zu simulieren. Beides erfordert ein quantitatives Verständnis der Evolution der Wellenfunktion bei der ballistischen Expansion.

3.4 Ballistische Expansion

Die Beobachtung von temperatur- und fallengeometrieabhängigen Streifen in der ballistisch expandierten Dichteverteilung von BECs hat gezeigt, dass Phasenfluktuationen im gefangenen Kondensat zu Dichtemodulationen in der ballistischen Expansion führen [47, 48]. Diese Dichtemodulationen sind ein direktes Maß für die Phasenfluktuationen im gefangenen Kondensat und können qualitativ wie folgt verstanden werden: Die Phasenfluktuationen resultieren in

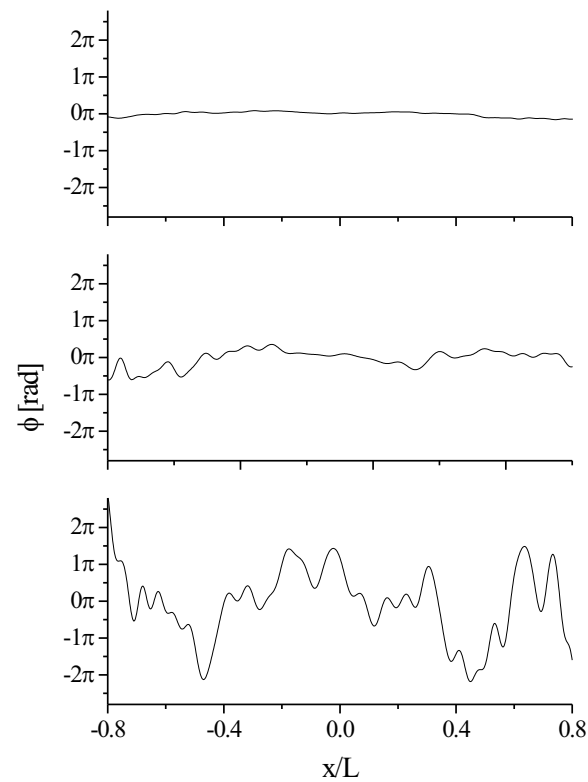


Abbildung 3.4: *Simulierte Phasenverteilungen für verschiedene Aspektverhältnisse der Falle: $\lambda = 10$ (oben), $\lambda = 100$ (Mitte) und $\lambda = 1000$ (unten). Für alle Kurven ist $\omega_x = 2\pi \times 14$ Hz, $T = 0.6T_c$ und $N_0 = 2 \times 10^5$.*

einer räumlich variierenden Phasenverteilung (siehe z.B. Abb. 3.4). Die dadurch gegebenen Phasengradienten sind über Gl. (2.21) mit einer superfluiden axialen Geschwindigkeitsverteilung verknüpft. Im gefangenen Kondensat sind Dichtemodulationen unterdrückt, da diese aufgrund der nichtlinearen mean-field-Wechselwirkung Energien in der Größenordnung des chemischen Potentials erfordern. Bei der ballistischen Expansion jedoch verringert sich die Dichte und damit die mean-field-Wechselwirkung schnell, so dass das axiale Geschwindigkeitsfeld in Modulationen der Dichteverteilung konvertiert werden kann. Insbesondere für interferometrische Messungen ist auch die Entwicklung der Phasenverteilung relevant. Durch die mean-field-Wechselwirkung sind Phasen- und Dichteverteilung miteinander verknüpft: eine höhere Dichte führt zu einem größeren mean-field-Potenzial und damit zu einer schnelleren Phasenentwicklung.

Um einen quantitativen Vergleich der theoretischen Voraussage mit den in dieser Arbeit vorgestellten experimentellen Daten zu ermöglichen, wurden sowohl numerische Simulationen der Expansionsdynamik durchgeführt als auch eine analytische Beschreibung entwickelt. Die numerische Simulation wurde von der Gruppe von M. Lewenstein und L. Santos durchgeführt, die analytische Beschreibung wurde von diesen Wissenschaftlern in Zusammenarbeit mit der Gruppe von G. V. Shlyapnikov entwickelt.

Quantitativ lässt sich die Evolution der Wellenfunktion während der ballistischen Expansion mit der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.18) beschreiben. Bei der numerischen Simulation wird zunächst das Grundzustands-Dichteprofil ermittelt, indem eine Probefunktion¹ eine imaginäre Zeitentwicklung durchläuft, bis ein stationärer Zustand erreicht wird. Auf diesen Zustand wird dann eine simulierte Phasenverteilung (siehe Abschnitt 3.3) aufgeprägt und die Entwicklung der so erlangten Wellenfunktion während der Expansion wird numerisch berechnet. Ein Beispiel für eine numerische simulierte Dichteverteilung ist in Abb. 3.5 dargestellt.

Ausgangspunkt der analytischen Beschreibung ist die selbstähnliche Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung für ein expandierendes Kondensat im Thomas-Fermi-Regime (siehe Kapitel 2.1.3). Da hier nur sehr elongierte Kondensate betrachtet werden, kann das Kondensat in axialer Richtung lokal als homogen angesehen werden, also die local-density-Näherung angewandt werden. Dann ist die Entwicklung der Wellenfunktion während der Expansion beschrieben durch

$$\psi(\rho, x, t) = \frac{\kappa(\tilde{\rho}, x, \tilde{t})}{b_\rho(t)} e^{i \frac{m b_\rho}{2 \hbar b_\rho} \rho^2} e^{-i \frac{\mu \tilde{t}}{\hbar}}, \quad (3.30)$$

wobei $(m \dot{b}_\rho / 2 \hbar b_\rho) \rho^2$ die sich bei der Expansion ausbildende quadratische Phase ist, $b_\rho^2(t) = 1 + \omega_\rho^2 t^2$ der Skalierungskoeffizient, $\tilde{t} = \int^t dt' / b_\rho(t')^2$ die reskalierte Zeit und $\tilde{\rho} = \rho / b_\rho(t)$ die reskalierte radiale Koordinate. Das Problem liegt

¹Hier wurde eine Thomas-Fermi-Dichteverteilung verwendet.

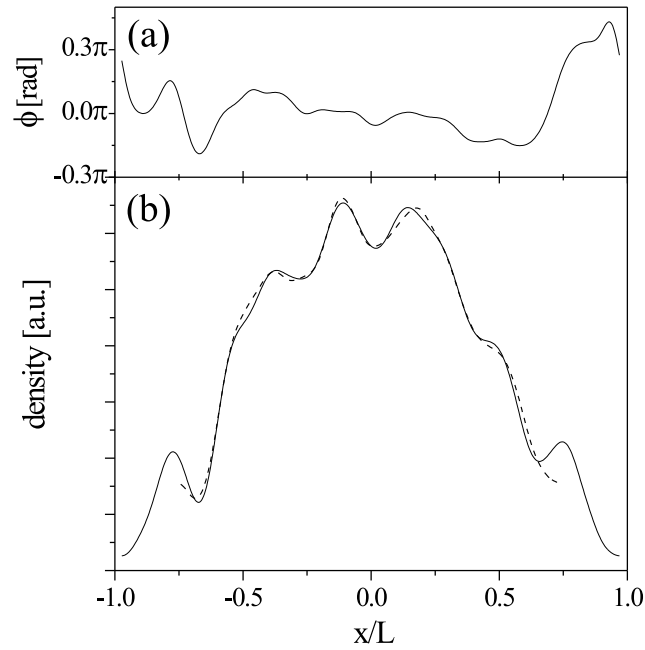


Abbildung 3.5: (a) Typische simulierte Phasenverteilung für $\omega_x = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$, $\omega_p = 2\pi \times 508 \text{ Hz}$, $N_0 = 2 \times 10^5$ und $T = 0.5T_c$. (b) Vergleich des mit der numerischen Simulation der Gross-Pitaevskii-Gleichung (durchgezogene Linie) und der analytischen Theorie (gestrichelte Linie) berechneten Dichteprofiles nach 25 ms Flugzeit. Beiden Berechnungen liegt die in (a) dargestellte Phasenverteilung zu Grunde und es wurde eine experimentelle Auflösung von $\sigma = 3 \mu\text{m}$ berücksichtigt.

nun also in der Berechnung der Wellenfunktion $\kappa(\tilde{\rho}, x, \tilde{t})$. Durch Einsetzen von $\psi(\rho, x, t)$ aus Gl. (3.30) in die Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.18) erhält man eine Gross-Pitaevskii-Gleichung für $\kappa(\tilde{\rho}, x, \tilde{t})$:

$$i\hbar \frac{\partial \kappa}{\partial \tilde{t}} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\rho}^2} + \frac{m\omega_\rho^2}{2} \tilde{\rho}^2 + g|\kappa|^2 - \frac{\hbar^2 b_\rho^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu \right] \kappa. \quad (3.31)$$

Zur Lösung dieser Gleichung wird, ähnlich wie bei der Berechnung von Anregungsmoden in BECs, ein störungstheoretischer Ansatz gemacht. Die komplexe Funktion $\kappa = \sqrt{n} \exp(i\phi)$ wird durch ihren Betrag $n = n_0 + \delta n$ und ihre Phase ausgedrückt, wobei die Abweichungen δn der Dichte und ϕ der Phase vom Grundzustand n_0 , $\phi_0 = 0$ als kleine Parameter angenommen werden. Hierbei macht man sich zunutze, dass der Grundzustand $\kappa_0 = \sqrt{n_0}$ Lösung der zeitunabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\rho}^2} + \frac{m\omega_\rho^2}{2} \tilde{\rho}^2 + g|\kappa_0|^2 - \mu \right] \kappa_0 = 0 \quad (3.32)$$

ist und sucht nach Näherungslösungen in erster Ordnung von δn und ϕ . Durch Einsetzen von $\kappa = \sqrt{n_0 + \delta n} \exp(i\phi) \simeq \kappa_0(1 + \delta n/2n_0 + i\phi)$ in die Gross-Pitaevskii-Gleichung (3.31) und Vernachlässigen aller Terme höherer Ordnung in δn und ϕ („Linearisieren der Gross-Pitaevskii-Gleichung“) erhält man ein Paar gekoppelter Differenzialgleichungen für die Dichte und die Phase:

$$\dot{\delta n} = \frac{\hat{\xi}\phi}{b_\rho^2(t)} - \frac{\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (n_0\phi), \quad (3.33)$$

$$n_0\dot{\phi} = -\frac{\hat{\xi}(\delta n/n_0)}{4b_\rho^2(t)} + \frac{\hbar}{4m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta n) - \frac{gn_0}{\hbar b_\rho^2(t)} (\delta n), \quad (3.34)$$

mit $\hat{\xi} = -(\hbar/m)[n_0 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\rho}^2} + (\partial n_0/\partial \tilde{\rho})\partial/\partial \tilde{\rho}]$. Durch zeitliches Ableiten von Gl. (3.33) und Einsetzen von Gl. (3.34) erhält man

$$\ddot{\delta n} - \frac{gn_0}{mb_\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta n + \frac{\hbar^2}{4m^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \delta n = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\hat{\xi}\phi}{b_\rho^2} \right) + \frac{\hbar}{4b_\rho^2 m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\xi} \frac{\delta n}{n_0}. \quad (3.35)$$

Im Thomas-Fermi-Regime $\mu \gg \hbar\omega_\rho$ kann der letzte Term auf der rechten Seite der Gleichung vernachlässigt werden. Aufgrund des 1-dimensionalen Charakters der Phasenfluktuationen ist vor allem die Dichteverteilung in axialer Richtung von Interesse. Daher wird im Folgenden die radial integrierte Dichteverteilung $n_I = n_{0I} + \delta n_I$ betrachtet. Die radiale Integration nach der in [110] beschriebenen Methode liefert

$$\ddot{\delta n}_I - \frac{\mu}{2mb_\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta n_I + \frac{\hbar^2}{4m^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \delta n_I = 0. \quad (3.36)$$

Die Phasenfluktuationen entstehen durch thermische Anregung der Eigenmoden des Systems. Die Eigenmoden in der local-density-Näherung, d.h. die Eigenmoden des homogenen Systems, sind ebene Wellen der Form $\delta n_k \propto e^{ikx}$. Anwenden von Gl. (3.36) auf diese Bogoliubov-Moden liefert

$$\hbar^2 \delta \ddot{n}_k + \epsilon_k^2(t) \delta n_k = 0 \quad (3.37)$$

mit dem Bogoliubov-Spektrum

$$\epsilon_k(t) = \sqrt{\frac{\mu \hbar^2 k^2}{2mb_\rho^2} + \frac{\hbar^4 k^4}{4m^2}}. \quad (3.38)$$

Für kurze Expansionszeiten $\omega_\rho t \lesssim 1$ ist der Phononen-Teil des Spektrums dominierend, also $\epsilon_k(t) \simeq \sqrt{\frac{\mu \hbar^2 k^2}{2mb_\rho^2}}$. Die Differenzialgleichung (3.36) kann dann mit hypergeometrischen Funktionen gelöst werden. Für größere Zeiten hingegen dominiert der freie-Teilchen-Charakter, d.h. $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, und die Differenzialgleichung kann mit Bessel-Funktionen gelöst werden. Diese beiden Regionen können durch Verwendung der asymptotischen Entwicklungen der hypergeometrischen Funktionen und der Bessel-Funktionen ineinander überführt werden. Damit lautet der analytische Ausdruck für die radial integrierten Dichtemodulationen nach einer Expansionszeit t

$$\frac{\delta n_I(x)}{n_{I0}(x)} = 2 \sum_j (\omega_\rho t)^{-(\epsilon_j/\hbar\omega_\rho)^2} \sin \left[\frac{\epsilon_j^2 t}{\hbar\mu(1-\tilde{x}^2)} \right] \phi_j(x), \quad (3.39)$$

wobei $\phi_j(x)$ der Beitrag der j -ten Mode zur Phase (3.28) bzw. (3.5) ist und $\tilde{x} = \frac{x}{L}$. Dieser Ausdruck ist gültig für Expansionszeiten $\mu/\hbar\omega_x^2 \gg t \gg \mu/\hbar\omega_\rho^2$ und moderate Dichtemodulationen, da er aus einem störungstheoretischen Ansatz hervorgeht. Durch Vergleich mit der numerischen Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung wurde dieser Ausdruck für viele simulierte Phasenmuster und experimentelle Parameter überprüft (Abb. 3.5). Gleichung (3.39) zeigt insbesondere, dass die in der ballistischen Expansion beobachteten Dichtemodulationen ein direktes Maß für die Phasenfluktuationen des gefangenen Kondensats sind.

Zur kompletten Kenntnis der Evolution der Wellenfunktion und für die interferometrischen Experimente ist auch die Berechnung der Phasenentwicklung notwendig. Diese kann unter Verwendung der Dichteentwicklung (3.39) aus Gl. (3.34) berechnet werden. Im Thomas-Fermi-Regime ist der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung vernachlässigbar, so dass sich

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi = \left[\frac{1}{8\lambda^2 \eta} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\eta}{2b_\rho^2(\tau)} \right] \frac{\delta n_I(x)}{n_{I0}(x)} \quad (3.40)$$

ergibt, wobei $\tau = \omega_\rho t$ und $\zeta = \mu/\hbar\omega_\rho$. Damit lässt sich durch Integration die Phase als Funktion der expandierten Dichteverteilung (3.39) ausdrücken:

$$\begin{aligned}\phi(\tilde{x}, \tau) &= \phi(\tilde{x}, 0) + \frac{1}{8\lambda^2\zeta} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left[\int_0^\tau \frac{\delta n_I(\tilde{x}, \tau')}{n_{I0}(\tilde{x}, \tau')} d\tau' \right] \\ &- \frac{\zeta}{2} \int_0^\tau \frac{1}{b_\rho^2(\tau')} \frac{\delta n_I(\tilde{x}, \tau')}{n_{I0}(\tilde{x}, \tau')} d\tau'.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Im Falle hoher Aspektverhältnisse und hinreichend kurzer Expansionszeit kommt der dominierende Beitrag von Moden mit $\tau \ll \lambda^2\zeta/[j(j+3)/4]$ und $j(j+3)/4\lambda^2 \ll 1$. Durch Einsetzen der expliziten Form der Dichteverteilung und der ursprünglichen Phase kann dann ein in der Umgebung des Fallenzentrums gültiger, analytischer Ausdruck für die Phasenentwicklung angegeben werden:

$$\phi(\tilde{x}, \tau) \simeq \sum_j \left\{ 1 - \frac{1}{2} \arctan(\tau) \frac{j(j+3)}{4\lambda^2} \right\} \phi_j(\tilde{x}, 0). \quad (3.42)$$

Der erste Term in Klammern ist die ursprüngliche Phasenverteilung, der zweite ist die durch die ballistische Expansion bedingte Abweichung.

Mittelwerte

Die Phasenfluktuationen führen in der ballistischen Expansion zu Streifen in der Dichteverteilung, die bei bekannter Phasenverteilung deterministisch voraussagbar ist. Aufgrund der statistischen Natur der Phasenfluktuationen variiert die Phasenverteilung jedoch unvorhersagbar von Realisierung zu Realisierung, die Besetzungsstatistik folgt aber der Bose-Einstein-Statistik. Daher ist zum Vergleich mit der Theorie auf statistische Größen wie Standardabweichung oder Varianz zurückzugreifen. Unter Verwendung von Gl. (3.39) und der Bose-Einstein-Statistik für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in Gl. (3.5) bzw. die Zufallsvariablen in Gl. (3.28) erhält man einen geschlossenen Ausdruck für die Varianz der Dichteverteilung

$$\left\langle \left(\frac{\delta n_I(x, t)}{n_{I0}(x, t)} \right)^2 \right\rangle = \frac{T}{T_\phi} C(N_0, \omega_\rho, \omega_x, x, t)^2, \quad (3.43)$$

wobei

$$\begin{aligned}C(N_0, \omega_\rho, \omega_x, x, t)^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{(j+3/2)^2}{4\alpha(1-(x/L)^2)} \right) e^{-\left(\frac{\omega_x}{\omega_\rho}\right)^2 \frac{(j+3/2)^2}{2} \ln(2\omega_\rho t)} \\ &\times \left(\frac{(j+2)(2j+3)}{j(j+1)(j+3)} \right) \left(P_j^{(1,1)} \left(\frac{x}{L} \right) \right)^2,\end{aligned}\quad (3.44)$$

mit $\alpha = \mu/\hbar\omega_x^2 t$. Hierbei wurde $\langle(\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)(\hat{a}_{j'} + \hat{a}_{j'}^\dagger)\rangle/4 = N_j\delta_{jj'}/2$ berücksichtigt und T_ϕ ist die charakteristische Temperatur, bei der die Phasenkohärenzlänge Gl. (3.14) die Kondensatlänge L erreicht.

Gl. (3.43) zeigt, dass die Dichtemodulationen in der ballistischen Expansion proportional zur Temperatur steigen. Um die Abhängigkeiten von den übrigen experimentellen Parametern besser zu verstehen, lässt sich durch Verwendung des quasiklassischen Mittelwertes für die Jacobi-Polynome $(P_j^{(1,1)}(x))^2 \simeq 4(1-x^2)^{-3/2}/\pi j$ und Annäherung der Summe über j durch ein Integral, für den zentrumsnahen Bereich ($x \approx 0$) ein Näherungsausdruck angeben:

$$\sigma^2 \equiv \left\langle \left(\frac{\delta n_I(0, t)}{n_{I0}(0, t)} \right)^2 \right\rangle \approx \frac{T}{\lambda T_\phi} \sqrt{\frac{\ln \tau}{\pi}} \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar\omega_\rho \tau}{\mu \ln \tau} \right)^2}} - \sqrt{2} \right). \quad (3.45)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass diese Näherung geringfügig zu große Werte liefert; für die in dieser Arbeit verwendeten Parameter typischerweise $\sim 10\%$. Für die Grenzfälle $y \equiv \hbar\omega_\rho \tau / (\mu \ln \tau) \ll 1$ und $y \gg 1$ können bei Vernachlässigung des relativ langsam variierenden Logarithmus einfache Proportionalitäten angegeben werden:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\propto T \frac{\omega_\rho^{11/5} t^2}{N_0^{7/5} \omega_x^{7/5}} \quad \text{für } y \ll 1 \\ \sigma^2 &\propto T \frac{\omega_\rho^{3/5} \sqrt{t}}{N_0^{4/5} \omega_x^{4/5}} \quad \text{für } y \gg 1 \end{aligned} \quad (3.46)$$

In dem experimentell relevanten Bereich ist y jedoch in der Größenordnung von 1, so dass hier das Verhalten zwischen den beiden Grenzfällen liegt. Abbildung 3.6 zeigt die Abhängigkeit von den experimentellen Parametern für typische experimentelle Bedingungen. Es ist ersichtlich, dass die Dichtemodulationen σ^2 in diesem Parameterbereich ungefähr proportional zur Expansionszeit t und radialen Fallenfrequenz ω_ρ , sowie umgekehrt proportional zur Anzahl der kondensierten Atome N_0 und axialen Fallenfrequenz ω_x sind.

Um einen quantitativen Vergleich der von Gl. (3.44) vorausgesagten Dichtemodulationen mit den experimentellen Daten zu ermöglichen, muss die begrenzte experimentelle Auflösung berücksichtigt werden. Dies kann einfach durch Ersetzen von $P_j^{(1,1)}$ durch die mit einer Auflösungsfunktion $\zeta(x) = e^{-x^2/\sigma^2}/\sqrt{\pi}\sigma$ gefalteten Jacobi-Polynome geschehen, wobei σ die experimentelle Auflösung charakterisiert.

Für die meisten Anwendungen sind Phasenfluktuationen ein unerwünschter Effekt, aber es gibt auch Fälle, in denen sie von praktischem Nutzen sein können. So kann es bei kalten Temperaturen und geringen Dichten vorkommen, dass die thermische Wolke kaum sichtbar und somit eine Temperaturbestimmung über

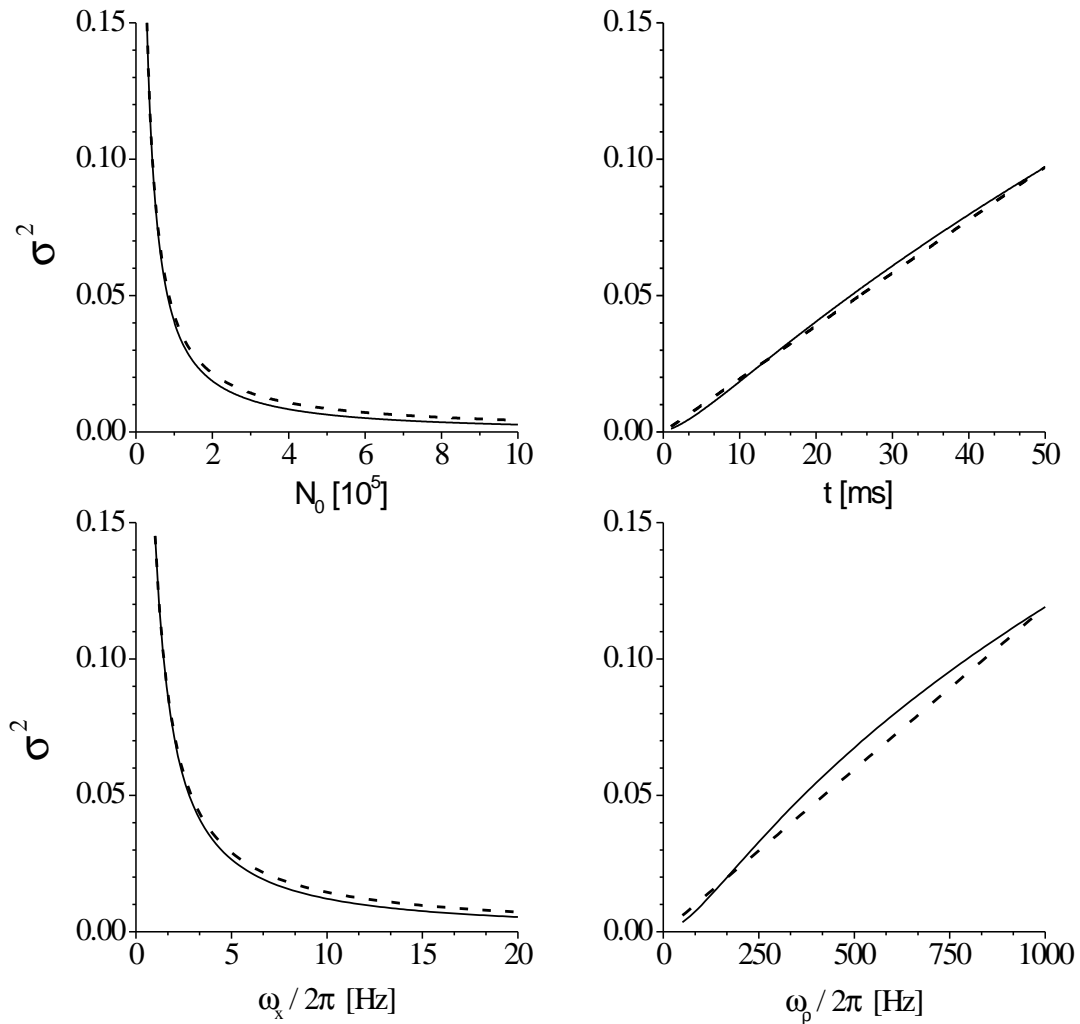


Abbildung 3.6: *Abhängigkeit der Dichtemodulationen von den experimentellen Parametern. Es wird jeweils ein Parameter variiert, die übrigen Parameter sind $T = 150 \text{ nK}$, $N_0 = 1 \times 10^5$, $t = 20 \text{ ms}$, $\omega_p = 2\pi \times 300 \text{ Hz}$ und $\omega_x = 2\pi \times 3.4 \text{ Hz}$. Die durchgezogenen Linien sind jeweils die mit Gl. (3.43) errechneten Dichtemodulationen. Zum Vergleich sind Geraden bzw. Hyperbeln ($1/x$) eingezeichnet (gestrichelte Linien).*

die thermische Verteilung nicht möglich ist. Da Gl. (3.43) eine direkte Beziehung zwischen den Dichtemodulationen und der Temperatur liefert, kann sie in solchen Fällen für sehr elongierte BECs zur Temperaturbestimmung herangezogen werden. Ein Nachteil dieser Methode ist, dass zur hinreichend genauen Bestimmung der Varianz mehrere Messungen unter identischen Bedingungen notwendig sind.

OPTIMIERUNG DER APPARATUR ZUR BEOBACHTUNG VON PHASENFLUKTUATIONEN

Um möglichst geeignete Bedingungen zur Untersuchung von Phasenfluktuationen zu schaffen, wurde die bestehende Apparatur zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten (siehe Kapitel 2.2) optimiert und die experimentellen Möglichkeiten erweitert. Ein Schwerpunkt lag dabei auf der Erzeugung stark elongierter BECs, in denen Phasenfluktuationen besonders signifikant auftreten. Hierbei wurden Kondensate mit einer Länge von bis zu $400\ \mu\text{m}$ und einem Aspektverhältnis von über 100 erzielt. Bei vielen der in dieser Arbeit beschriebenen Messungen hat bei der ballistischen Expansion der Kondensate deren radiale Größe ähnliche Ausmaße erreicht, so dass makroskopisch große Quantenobjekte entstanden, deren Größe mit bloßem Auge erkennbar wäre. Dadurch ist jedoch die atomare Dichte deutlich reduziert, insbesondere wenn die Wellenfunktion noch durch interferometrische Untersuchungen aufgespalten wird. Um auch unter diesen Bedingungen eine quantitative Bestimmung der Ensembleparameter zu ermöglichen, wurde das Detektionssystem verbessert. Darüber hinaus wurden Kondensate im magnetisch schwächer gefangenen $F=1$ Zustand erzeugt, da diese Vorteile bei der Untersuchung der Phasenfluktuationen bieten.

4.1 Erzeugung stark elongierter Fallenpotenziale

Da Phasenfluktuationen besonders signifikant in stark elongierten Potenzialen auftreten, war es für den Nachweis und die systematische Untersuchung der Phasenfluktuationen wesentlich, solche Potenziale experimentell zu realisieren. Hierzu wurden zwei verschiedene Ansätze verfolgt:

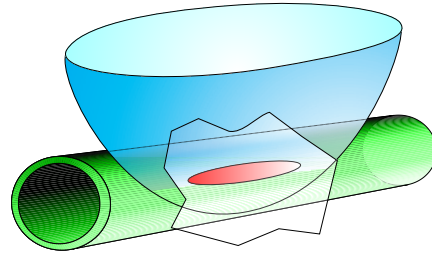


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der Hybridfalle. Die Atome befinden sich im Zentrum der Überlagerung des magnetischen Fallenpotenzials und des optischen Dipolpotenzials des Wellenleiters.

- Erhöhung des radialen Einschlusses mit einem optischen Wellenleiter.
- Verringerung des axialen Einschlusses durch Modifizierung der Magnetfallenbeschaltung.

Der erstmalige Nachweis von Phasenfluktuationen gelang mithilfe des Wellenleiters. Da jedoch der axiale Einschluss für die Beobachtung der Phasenfluktuationen wesentlicher als der radiale Einschluss ist und die experimentelle Handhabbarkeit bei ausschließlicher Verwendung eines magnetischen Potentials erleichtert ist, wurde für die neueren Messungen eine modifizierte Magnetfallenbeschaltung eingeführt.

4.1.1 Optischer Wellenleiter

Der optische Wellenleiter wird durch ein holografisch erzeugtes röhrenförmiges Laguerre-Gauß'sches Lichtfeld realisiert. Die verwendete Wellenlänge von 532 nm stellt sicher, dass trotz der eingesetzten Leistung in der Größenordnung von 1 Watt spontane Prozesse vernachlässigbar sind. Die Intensitätsverteilung der verwendeten LG_{01} Laguerre-Gauß-Mode hat ein Minimum im Zentrum und verläuft in dessen Nähe harmonisch. Durch das abstoßende blauerstimmte Dipolpotential können die Atome im Zentrum der Intensitätsverteilung gefangen werden. Entlang der Achse des Laserstrahles findet kein Einschluss der Atome statt, so dass dieses Potential als Wellenleiter eingesetzt werden kann. Eine ausführlichere Darstellung des Wellenleiters findet sich in [116].

Für die Untersuchungen der Phasenfluktuationen wurde es zur Erhöhung des radialen Einschlusses genutzt. Dazu wurde die Laguerre-Gauß-Mode auf die in der Magnetfalle gefangenen Atome fokussiert. Dadurch wirkt, wie in Abb. 4.1 skizziert, auf die Atome sowohl das optische Dipolpotential als auch das Potential der Magnetfalle. Während der axiale Einschluss durch das Dipolpotential nicht beeinflusst ist, kann die radiale Fallenfrequenz deutlich erhöht werden. Die Erzeugung von BECs in dieser „Hybridfalle“ konnte demonstriert werden [117].

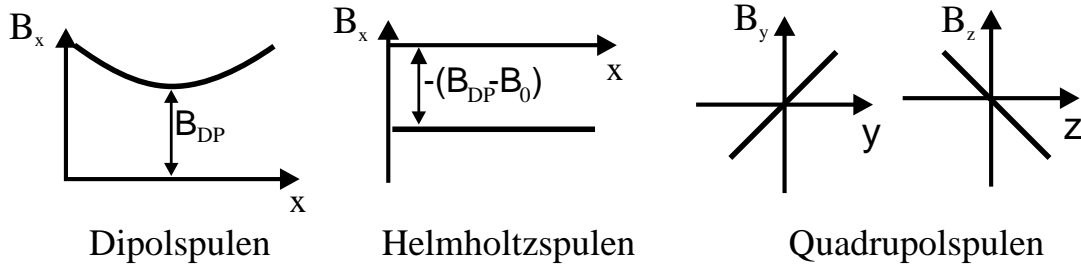


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Magnetfelder der verschiedenen Spulenpaare in einer Kleeblatt-Falle.

4.1.2 Reduktion des axialen Einschlusses

Die verwendete Magnetfalle ist eine Ioffe-Pritchard-Falle [86, 87, 88], die im sogenannten Kleeblatt-Design [89] aufgebaut wurde. Hierbei werden drei Spulenarrangements verwendet: die Quadrupolspulen erzeugen im Fallenzentrum ein zweidimensionales Quadrupolfeld mit hohem Gradienten B'_ρ , die Dipolspulen sorgen durch die axiale Magnetfeldkrümmung B''_x für einen axialen Einschluss und die Helmholtzspulen kompensieren weitgehend das Offsetfeld der Dipolspulen und stellen damit das resultierende Offsetfeld B_0 ein (siehe Abb. 4.2). Das Magnetfeld nahe des Fallenzentrums ist somit durch die drei Parameter B'_ρ , B''_x und B_0 charakterisiert, die durch die Spulenpaare unabhängig voneinander eingestellt werden können. Zusätzlich zu dieser Grundkonfiguration dient ein Paar positionierbarer Spulen der mechanischen Feinjustage des Offsetfeldes. Entsprechend des Aufbaus der Magnetfalle ergibt sich ein zylindersymmetrischer Potenzialverlauf, der nahe des Fallenzentrums durch ein harmonisches Potenzial beschrieben ist:

$$U = \frac{g_F m_F \mu_B}{2} (B'_\rho \rho^2 + B''_x x^2), \quad (4.1)$$

wobei die radiale Krümmung des Magnetfeldes durch

$$B''_\rho = \frac{B'^2_\rho}{B_0} - \frac{B''_x}{2} \quad (4.2)$$

gegeben ist. Bei einem Strom von 280 A durch die Spulen sind für die verwendete Magnetfalle $B'_\rho = 221 \text{ G/cm}$ und $B''_x = 121 \text{ G/cm}^2$. Die Fallenfrequenzen ergeben sich als Funktion der Magnetfeldkrümmungen durch

$$\omega_{\rho,x} = \sqrt{\frac{g_F m_F \mu_B B''_{\rho,x}}{m}}. \quad (4.3)$$

Abbildung 4.3 zeigt die elektrische Verschaltung der verschiedenen Spulenpaare der Magnetfalle. Mithilfe der Mosfetbank 1 kann der Strom durch die

Helmholtzspulen geregelt werden und so über das Offsetfeld die radiale Fallenfrequenz eingestellt werden. Dies ist zum modenangepassten Umladen der Atome in die Magnetfalle und deren anschließende radiale Kompression notwendig. In der ursprünglichen Beschaltung wurden die Dipol- und Quadrupolspulen immer mit maximalem Strom betrieben, d.h. es wurde mit maximalem axialem Einschluss gearbeitet.

Um den axialen Einschluss bei unveränderter radialer Fallenfrequenz verringern zu können, wurde eine zusätzliche Mosfetbank (MFB3) eingebaut. Dadurch kann der Strom durch die Dipol- und Helmholtzspulen gezielt verringert werden. Um ein Heizen der Atome durch Fluktuationen in der Steuerspannung der Mosfetbänke zu verhindern, wird die Evaporation bei voll gesperrten oder voll durchgeschalteten Mosfetbänken durchgeführt. Deshalb wurde zur Mosfetbank 3 ein mechanisch einstellbarer Widerstand R_3 in Reihe geschaltet, der den Stromfluss durch die Dipol- und Helmholtzspulen bei voll durchgeschalteter Mosfetbank bestimmt.

Bei einer Absenkung des axialen Fallenpotenzials sind folgende Punkte zu berücksichtigen:

- Jede Veränderung des Fallenpotenzials muss adiabatisch erfolgen, um ein Heizen der Atome zu verhindern. Je geringer die axiale Fallenfrequenz ist, umso langsamer müssen nach Gl. (2.41) Änderungen des Potentials erfolgen.
- Eine Verringerung des axialen Einschlusses verringert die Dichte der Atomwolke. Daher muss die Geschwindigkeit der Evaporation verringert werden.
- Aufgrund einer leichten Asymmetrie beim Einbau der Spulen steht der durch die Quadrupolspulen erzeugte Magnetfeldgradient nicht exakt senkrecht zur Achse der Dipolspulen. Dadurch ist das Potentialminimum geringfügig bezüglich des Zentrums des Dipolfeldes verschoben. Diese Verschiebung wird umso größer, desto geringer der axiale Einschluss ist.

Die axiale Fallenfrequenz kann aus diesen Gründen nicht beliebig abgesenkt werden und es wurde eine Verringerung der Fallenfrequenz um einen Faktor ≈ 3 auf 3.4 Hz gewählt. Da das Magnetfeld der Spulen proportional zum Strom ist, erfordert dies nach Gl. (4.3) eine Absenkung des Stromes durch die Dipol- und Helmholtzspulen um einen Faktor von ca. 9. Die angestrebte Fallenkonfiguration mit einer axialen Frequenz von 3.4 Hz wird bei einem Stromfluss von 36 A durch die Dipol- und Helmholtzspulen erreicht. Bei einem Ausgangsstrom des Netzgerätes von 280 A wird dieser Wert bei einem Reihenwiderstand der Mosfetbank 3 und des Widerstandes R_3 von $R = 7.58 \text{ m}\Omega$ erreicht. Da der Widerstand der voll durchgeschalteten Mosfetbank $R_{\text{MFB3}} = 2.24 \text{ m}\Omega$ beträgt, muss hierzu ein Widerstand von $R_3 = 5.34 \text{ m}\Omega$ gewählt werden. Zur Realisierung

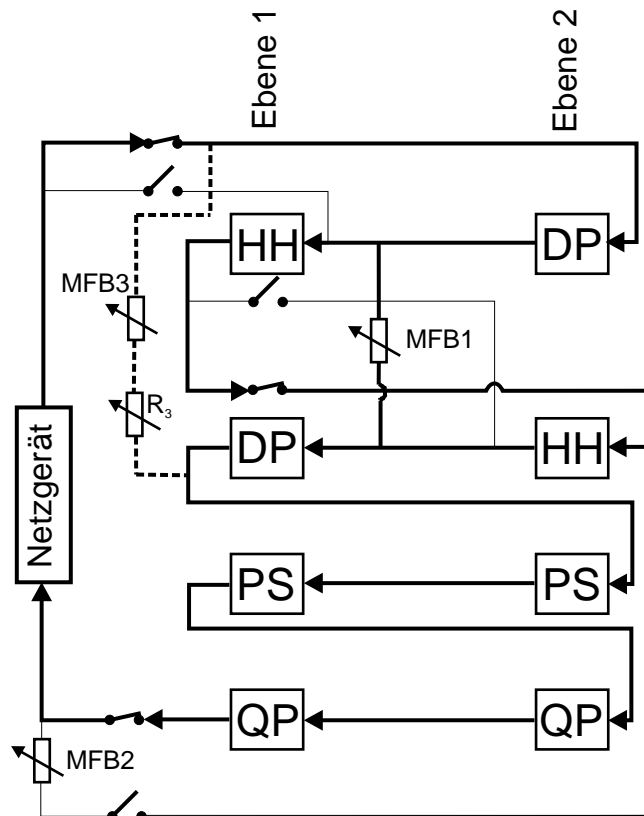


Abbildung 4.3: Elektrische Verschaltung der Magnetfalle. Die Spulen der Magnetfalle werden zusätzlich zur Erzeugung des Magnetfeldes für die MOT genutzt. Die dünn gezeichneten Verbindungen sind nur im MOT-Betrieb stromdurchflossen. Durch Einbau einer weiteren Mosfetbank (MFB3) und eines mechanisch einstellbaren Widerstandes (R_3) wurde die Möglichkeit geschaffen, die axiale Fallenfrequenz zu verringern.

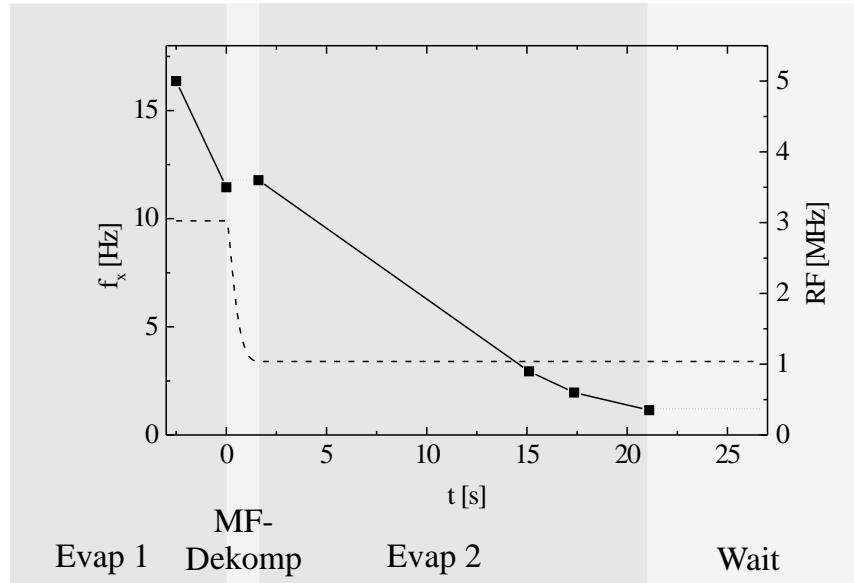


Abbildung 4.4: Zur Erzeugung von BECs in der axial dekomprimierten Magnetfalle wird eine zweistufige Evaporationsrampe verwendet. Zunächst wird mit maximalem axialem Einschluss evaporiert, dann wird die axiale Fallenfrequenz (gestrichelte Linie) abgesenkt und die Evaporation (durchgezogene Linie) wird in der axial dekomprimierten Fallenkonfiguration fortgesetzt. Während der Dekomprimierung und nach Erzeugen der BECs wird die Radiofrequenz bei etwas höherer Frequenz und geringerer Leistung weiterhin eingestrahlt („RF-Shielding“, gepunktete Linie), um Atome, die durch inelastische Stöße aufgeheizt sind, unverzüglich aus der Magnetfalle zu entfernen.

dieses Widerstandes wurde ein Edelstahlrohr mit einem Außendurchmesser von 2 cm, einer Länge von 1.10 m und einem Widerstand von $6.7 \text{ m}\Omega/\text{m}$ gewählt. Der Abstand der Stromabnehmer auf dem Edelstahlrohr ist beliebig einstellbar, so dass eine mechanische Einstellbarkeit des Widerstandes R_3 möglich ist. Um eine Erhitzung (und damit auch leichte Änderung des Widerstandes) durch die abfallende Leistung von $P = R_3 I_3^2 \approx 320 \text{ W}$ zu verhindern, wird das Rohr durch Wasserdurchfluss gekühlt.

Die experimentelle Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten in diesem Fallenpotenzial ist in Abb. 4.4 schematisch dargestellt. Es wurde eine zweistufige Evaporationssequenz entwickelt, in der zunächst mit maximalem axialem Einschluss evaporiert wird, dann die Falle axial dekomprimiert und der letzte Teil der Evaporationsrampe in der endgültigen Fallenkonfiguration durchgeführt wird. Die Position des Magnetfallenminimums verschiebt sich dabei um knapp 5 mm. Zur Realisierung der adiabatischen Dekompression wurde eine Rampe der Form einer sich mit sinkenden Fallenfrequenzen verlangsamenden halben Periode einer Kosinus-Funktion gewählt (siehe Abb. 4.5). Zur Realisierung ei-

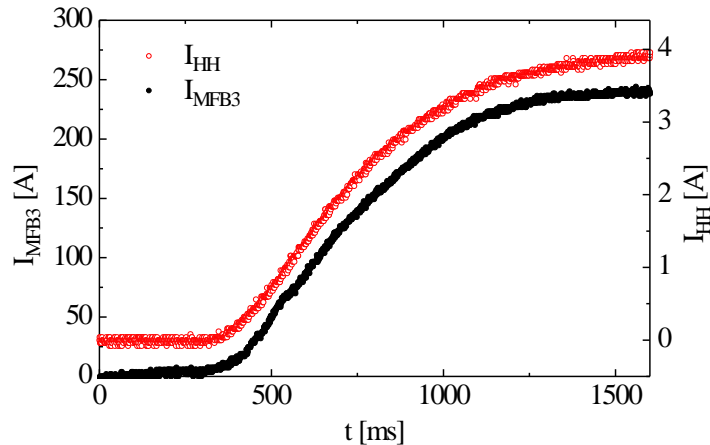


Abbildung 4.5: Um das Offsetfeld konstant zu halten, müssen die Rampen des Stroms durch die Mosfetbank und durch die externen Helmholtzspulen parallel zueinander verlaufen. Die Helmholtzspulen erzeugen ein Magnetfeld von 0.55 G/A. Die Verlangsamung der Rampenform trägt der sich verringernden axialen Fallenfrequenz Rechnung.

ner gegebenen Kurvenform ist das stark nichtlineare Schaltverhalten der Mosfetbank zu berücksichtigen. Unter Verwendung der Eichkurve der Mosfetbank wird vom Messrechner die entsprechende Steuerspannung berechnet und über eine Analogausgangskarte (National Instruments AT-AO-6/10) an die Basis der Mosfets angelegt.

Durch die Verringerung des Stromes durch die Dipol- und Helmholtzspulen sinkt das Offsetfeld B_0 . Um dieses Absinken zu kompensieren, wird ein zusätzliches externes Helmholtz-Spulenpaar eingesetzt. Das zugehörige Netzgerät (Heinzinger PTN 32-10) wird über den Messrechner entsprechend des durch die Mosfetbank 3 fließenden Stroms gesteuert (siehe Abb. 4.5), da das Offsetfeld linear mit diesem Strom sinkt. Diese rechnergesteuerte Kontrolle des Offsetfeldes bietet die Möglichkeit, die radiale Fallenfrequenz bequem zu verändern und erlaubt beispielsweise auch die gezielte Anregung von Schwingungsmoden des Kondensats. Die Messung der Fallenfrequenzen in dieser Fallengeometrie ist in Kapitel 5.1.3 dargestellt.

4.2 Kondensation im magnetisch schwächer gefangenen Grundzustand

⁸⁷Rubidium besitzt drei magnetisch fangbare Hyperfein-Grundzustände, den $|F = 2, m_F = 2\rangle$, den $|F = 2, m_F = 1\rangle$ und den $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand (siehe Kapitel 2.2). Bis Ende 2001 sind mit dem experimentellen Aufbau, wie in Kapitel 2.2 beschrieben, ausschließlich BECs im $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Zustand erzeugt

worden. Die Bose-Einstein-Kondensation im anderen Hyperfein-Grundzustand ist jedoch zur Beobachtung von Phasenfluktuationen vorteilhaft und erweitert insgesamt die experimentellen Möglichkeiten.

Das magnetische Fallenpotenzial ist für die $|m_F| = 1$ Zustände um einen Faktor zwei geringer als für den $m_F=2$ Zustand. Die Fallenfrequenzen sind daher um einen Faktor $\sqrt{2}$ geringer. Die magnetisch schwächer gefangenen Zustände zeigen bei ansonsten gleichen Parametern nach Gl. (3.16) stärkere Phasenfluktuationen sowie erleichtern deren optische Beobachtung durch eine erhöhte Kondensatgröße. Durch die erhöhte Größe ist die axiale Expansion nach dem Ausschalten der Magnetfalle langsamer und die damit verbundene Phase geringer. Der $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand ist gegenüber dem $|F = 2, m_F = 1\rangle$ Zustand experimentell besser zugänglich, da er als äußerstes m_F -Niveau problemlos durch optisches Pumpen bevölkert werden kann.

Die experimentellen Schritte zur Erzeugung von Kondensaten im $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand sind bis zum Ende der Melassenphase mit denen in Kapitel 2.2 beschriebenen identisch. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich die Atome im $F=2$ Zustand, so dass vor Einschalten der Magnetfalle möglichst viele Atome im gewünschten $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand präpariert werden müssen. Dazu werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Die Laserstrahlung in der optischen Melassenphase wird für zusätzliche $300 \mu\text{s}$ mit ausgeschalteter Rückpumpstrahlung eingestrahlt. Dadurch sammeln sich die Atome im $F=1$ Zustand, ohne zusätzlich geheizt zu werden.
2. Zum optischen Pumpen der Atome im $F=1$ Zustand in den $m_F = -1$ Unterzustand wird ein σ^- -polarisierter Laser auf dem $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$ Übergang für $300 \mu\text{s}$ eingestrahlt. Hierbei wird ein magnetisches Führungsfeld von ca. 1 G in Richtung der Magnetfallenachse verwendet. Um noch im $F=2$ Zustand verbliebene Atome bei gleichzeitigem optischem Pumpen in den $F=1$ Zustand zu überführen, wird zusätzlich σ^- -polarisiertes Licht auf dem $|F = 2, F' = 2\rangle$ Übergang eingestrahlt. Von hier aus beträgt das Verzweigungsverhältnis in die beiden Hyperfein-Grundzustände 50% (siehe Anhang B). Diese Umpumpstrahlung bleibt weitere $700 \mu\text{s}$ angeschaltet.
3. Nun befinden sich fast alle der $5 \dots 10 \times 10^8$ Atome im $F=1$ Zustand, aber es können bis zu 0.1% der Atome im $F=2$ Zustand verblieben sein. Selbst dieser geringe Anteil ist bei der Evaporation problematisch, da im thermischen Gleichgewicht Atome im $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Zustand im magnetischen Fallenpotenzial nicht so weit nach außen vordringen wie die $F=1$ Atome. Dadurch werden fast ausschließlich Atome im $F=1$ Zustand evaporiert und dienen damit als Kühlmittel für die $F=2$ Atome. Deshalb werden

nach Einschalten der Magnetfalle die MOT-Strahlen für 1 ms eingeschaltet, so dass die $F=2$ Atome herausgeheizt werden.

Um die Phasenraumdicke beim Umladen in die Magnetfalle zu erhalten, ist ein modenangepasster Transfer notwendig. Ist der räumliche Einschluss der Magnetfalle bezüglich des lasergekühlten Ensembles zu schwach, wird die Dichte der Atomwolke verringert. Ist hingegen der räumliche Einschluss zu stark, wird den Atomen zu viel potenzielle Energie zugeführt und damit die Temperatur erhöht. Deshalb müssen beim Umladen die Fallenfrequenzen der Magnetfalle an die Größe und Temperatur des lasergekühlten Ensembles angepasst sein. Dieses wird durch Anpassung der radialen Fallenfrequenz durch entsprechende Wahl des Offsetfeldes B_0 mit der Mosfetbank 1 (siehe Abb. 4.3) gewährleistet. Die Parameter des lasergekühlten Ensembles erfordern eine radiale Fallenfrequenz von ca. 14 Hz. Dies wird für den $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand bei Betrieb des Magnetfallennetzgeräts mit 280 A erreicht, wenn durch die Helmholtzspulen ein Strom von 210 A fließt. Die entsprechende Steuerspannung der Mosfetbank beträgt 7.8 V. Um hinreichend hohe Stoßraten für eine zügige Evaporation zu erreichen, wird die Magnetfalle anschließend durch Herunterfahren des Stromes durch die Mosfetbank 1 innerhalb von 1.25 s adiabatisch auf ca. 280 Hz radial komprimiert. Abbildung 4.6 zeigt, dass die Temperatur der Atome in der komprimierten Magnetfalle 350 bis 400 μK und die Lebensdauer etwa 90 Sekunden beträgt.¹

Die Evaporation erfolgt mithilfe eines Signalgenerators, der es erlaubt, digitale lineare „Sweeps“ zu programmieren (Rohde & Schwarz SMG). Die Evaporationssequenz besteht aus der Aneinanderreihung mehrerer solcher Sweeps, wobei nacheinander jedes Teilstück einzeln auf Erreichen einer möglichst hohen Phasenraumdicke optimiert wird [78]. Abbildung 4.7 vergleicht derart optimierte Evaporationsrampen für die beiden Hyperfein-Grundzustände. Die Radiofrequenz wird in beiden Fällen näherungsweise exponentiell verringert. Es ist ersichtlich, dass der schwächere magnetische Einschluss des $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustandes verglichen mit dem $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Zustand eine langsamere Evaporation erfordert.² Da die Zeitdauer der Rampe auch für die Kondensate im $F=1$ Zustand kürzer als die Lebensdauer der Atome in der Magnetfalle ist, führt die langsamere Evaporation zu keiner signifikanten Verringerung der Teilchenzahl. Weiterhin zeigt Abb. 4.7, dass die Startfrequenz der Evaporationsrampe mit 44 kHz für die Erzeugung von Kondensaten im $F=1$ Zustand doppelt so hoch ist wie für die im $F=2$ Zustand. Dies erklärt sich dadurch, dass bei Evaporation aus dem $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Zustand zwei Radiofrequenz-Photonen benötigt werden, um in den ungefangenen $m_F=0$ Zustand zu gelangen, da die Atome zunächst in den $m_F=1$ Zustand übergehen (siehe Abb. 2.4). Bei gegebener Potenzialhöhe E_{cut}

¹Diese Lebensdauer ist aufgrund der vergleichsweise geringen Dichte durch Stöße mit dem Hintergrundgas begrenzt.

²Die Streulängen beider Zustände sind nahezu identisch [118].

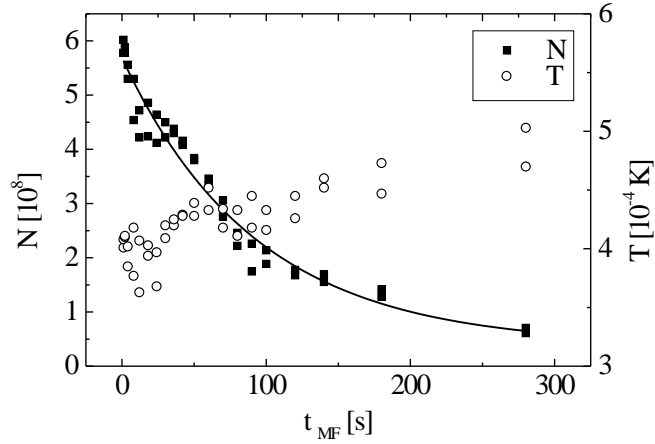


Abbildung 4.6: Lebensdauer der Atome in der Magnetfalle. Dargestellt ist die Teilchenzahl und Temperatur der Atome im $|F=1, m_F=-1\rangle$ Zustand nach Umladen in die Magnetfalle und radialer Kompression auf $\omega_\rho = 2\pi \times 280 \text{ Hz}$ ($\omega_x = 2\pi \times 9.9 \text{ Hz}$). Die durchgezogene Linie ist ein Fit mit einer exponentiell abklingenden Funktion. Die $1/e$ Lebensdauer beträgt 93 s.

der Radiofrequenz-Auskopplung werden in diesem Fall nur Photonen der Energie $E_{\text{cut}}/2$ benötigt. Die Startfrequenz von $\nu_{\text{RF}} = 44 \text{ kHz}$ liegt mit $h\nu_{\text{RF}} = 6k_B T$ in dem aus der Temperatur von $350 \mu\text{K}$ erwarteten Bereich [119]. Abbildung 4.8 zeigt für beide Evaporationsrampen die Phasenraumdicke im Vergleich zur Teilchenzahl in doppelt logarithmischer Darstellung. Beide Rampen verhalten sich nahezu identisch, und der größte Teil der Evaporation verläuft auf einer Geraden der Steigung 2.2. Pro Größenordnung, die die Atomzahl abnimmt, werden gut zwei Größenordnungen an Phasenraumdicke gewonnen.

Da auch für die Detektion der $F=1$ Kondensate ein geschlossener Übergang vorteilhaft ist, erfolgt sie weiterhin auf dem $|F=2\rangle \rightarrow |F'=3\rangle$ Kühlübergang. Daher werden die Atome kurz vor der Detektion mit dem Rückpumplaser in den $F=2$ Zustand gepumpt.

4.3 Verbesserung der Detektion

Da alle experimentellen Daten durch die optische Abbildung der Bose-Einstein-Kondensate gewonnen werden, ist das Detektionssystem für alle Messungen von großer Bedeutung. Insbesondere die Abbildung von Atomwolken geringer Dichte erfordert ein hohes Signal/Rausch-Verhältnis der Absorptionbilder. Die Abbildung solcher Atomwolken ist insbesondere für die Untersuchung von Phasenfluktuationen sehr relevant, da hierfür sehr lange Kondensate mit einer Länge von bis zu $400 \mu\text{m}$ hergestellt wurden. Vor allem die interferometrischen Messungen erfordern zudem eine ballistische Expansionszeit, die hinreichend groß ist, um

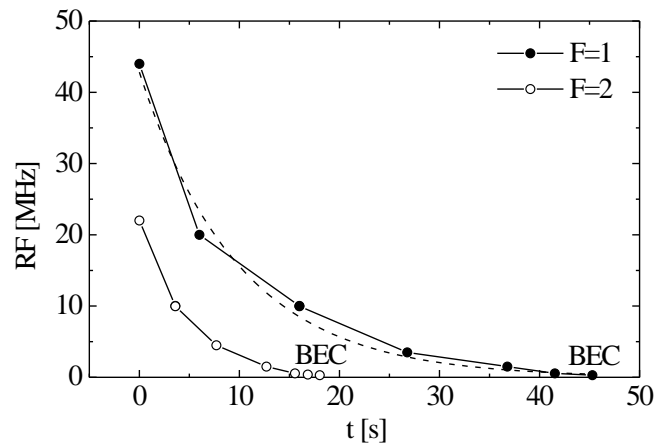


Abbildung 4.7: Vergleich der Evaporationsrampen für Kondensation im $F=1$ und $F=2$ Zustand. Die einzelnen Rampenstücke wurden nacheinander einzeln optimiert. Zum optischen Vergleich ist für die $F=1$ Kurve eine gefittete abfallende Exponentialfunktion eingezeichnet (gestrichelte Linie).

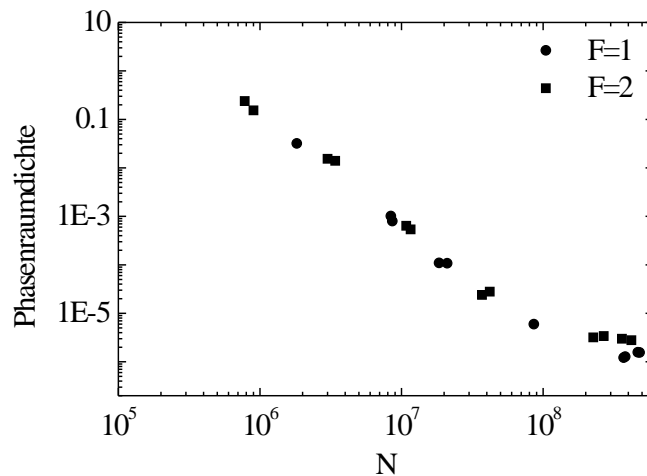


Abbildung 4.8: Erhöhung der Phasenraumdicke bei der Evaporation. Die Kurven für beide Hyperfein-Grundzustände verlaufen nahezu identisch. Die Atomzahl verringert sich bei der Evaporation um ca. 3 Größenordnungen, die Phasenraumdicke steigt dagegen um 6 Größenordnungen. Bei den dargestellten Kurven tritt die Bose-Einstein-Kondensation bei einigen 10^5 Teilchen ein; durch weitere Optimierung des Experimentes wurde die Teilchenzahl beim Phasenübergang um einen Faktor 10 gegenüber dieser Messung erhöht.

eine räumliche Trennung der beiden Interferometerausgänge herzustellen. Nach dieser Fallzeit von typischerweise 37 ms erreicht die radiale Größe des Kondensats etwa seine axiale Ausdehnung. Auf diese Weise entsteht in jedem Interferometerausgang ein makroskopisch großes Quantenobjekt, dessen Größe mit dem bloßen Auge wahrnehmbar wäre. Da es zur Untersuchung der Phasenfluktuationen nicht wünschenswert ist und technisch zudem aufwendig wäre, die Zahl der kondensierten Atome zu erhöhen, entstehen so Atomwolken sehr niedriger Dichte. Da die Phasenfluktuationen durch thermische Anregung bedingt sind, ist zudem eine verlässliche Temperaturbestimmung notwendig. Daher muss auch die thermische Wolke, die in der Expansion eine wesentlich geringere Dichte als das Kondensat aufweist, auf den Absorptionenaufnahmen gut sichtbar sein. Um solche Messungen zu ermöglichen und auch für zukünftige Projekte die experimentellen Möglichkeiten zu verbessern, wurde das Abbildungssystem umgebaut und eine neue CCD-Kamera eingesetzt.

Signal/Rausch-Verhältnis

Mit Phasenkontrast-, Dunkelfeld und Absorptionenaufnahmen wurden verschiedene Abbildungstechniken für Bose-Einstein-Kondensate demonstriert. In dieser Arbeit wurden die Bose-Einstein-Kondensate ausschließlich durch Absorptionenaufnahmen abgebildet, da diese Technik das größte Signal für Atomwolken geringer Dichte erzielt. Hierbei wird das Kondensat mit resonantem oder nahresonantem Licht beleuchtet. Je höher die atomare Dichte ist, desto größer ist die Absorption. Dieser „Schattenwurf“ der Atome wird dann auf den Chip einer CCD-Kamera abgebildet. Das Kamerabild unterliegt dabei den folgenden Rauschquellen:

- Poissonrauschen der Photoelektronen.
- Erzeugung thermischer Elektronen während der Belichtungs- und Auslesezeit.
- Ausleserauschen der Kamera.

Die Zahl der auf einem Pixel erzeugten Elektronen, der Photoelektronen, folgt der Poisson-Statistik. Wenn im Mittel $\langle N \rangle$ Elektronen erzeugt werden, schwankt ihre Zahl um $\sqrt{\langle N \rangle}$ (Standardabweichung). Zusätzlich zu dieser physikalisch bedingten Rauschquelle treten noch unerwünschte technisch bedingte Rauschquellen auf. So können nicht nur durch die Detektion von Photonen, sondern auch durch thermische Anregung Elektronen erzeugt werden. Um diese Prozesse zu unterdrücken, werden hochwertige Kameras gekühlt. Eine weitere Rauschquelle ist das Rauschen des Ausleseverstärkers, das von der Auslesegeschwindigkeit und der technischen Qualität des Verstärkers abhängt. Für Absorptionenaufnahmen von Bose-Einstein-Kondensaten ist jedoch die Zahl der detektierten

Photonen in der Regel so hoch, dass als Rauschquelle die Poisson-Statistik bei weitem dominiert. Zusätzlich zu diesen Rauschquellen werden die Absorptionbilder durch Störungen, die durch das optische Abbildungssystem bedingt sind, beeinflusst. So können insbesondere Interferenzstrukturen auftreten, die durch die nicht perfekte Entspiegelung von optischen Elementen, wie beispielsweise Vakuumfenstern, hervorgerufen werden.

Das Signal/Rausch-Verhältnis gibt die mittlere Zahl der detektierten Photonen im Verhältnis zu den Photonenzahlschwankungen an und beträgt bei der Poisson-Statistik $\sqrt{\langle N \rangle}$. Daher ist eine hohe Zahl detektierter Photonen vorteilhaft. Die Zahl der detektierten Photonen pro Pixel ist durch

$$\langle N \rangle = \frac{IAtQ}{h\nu} \quad (4.4)$$

gegeben, wobei I die Intensität des Detektionslasers am Ort der Atome, A die auf einen Pixel abgebildete Fläche, t die Belichtungszeit und Q die Quanteneffizienz des Abbildungssystems einschließlich Kamera ist. Die sinnvoll zu verwendende Intensität ist durch die Sättigungsintensität limitiert, A und t sind durch die angestrebte optische Auflösung begrenzt. Da also die Anzahl der absorbierten Photonen physikalisch limitiert ist, ist eine effiziente Detektion, d.h. eine hohe Quanteneffizienz des Abbildungssystems, wesentlich. Das Signal/Rausch-Verhältnis ist proportional zu \sqrt{Q} und begrenzt die minimal detektierbare Dichte. Wenn die Absorption der Atome so gering ist, dass sie die Zahl der erzeugten Fotoelektronen um weniger als die Schwankungsbreite $\sqrt{\langle N \rangle}$ reduziert, ist die Atomverteilung kaum sichtbar.

Die ursprünglich verwendete Kamera (Princeton Instruments ICCD-576) ist eine bildverstärkte CCD-Kamera, die für den Einsatz bei sehr niedrigen Beleuchtungsintensitäten geeignet ist, aber für Absorptionsaufnahmen nicht optimal ist. Ihre Quanteneffizienz beträgt nur etwa 10%. Eine weitere Einschränkung ist, dass bei sinnvollen Verstärkungsfaktoren des Bildverstärkers zur Vermeidung von Sättigungseffekten die Anzahl der pro Pixel detektierbaren Photonen auf etwa 600 begrenzt ist. Um eine gute optische Auflösung zu erzielen und trotz der relativ geringen Pixelzahl von 576×384 eine vernünftige Flexibilität zu gewährleisten, wurden für das Abbildungssystem ein Mikroskopobjektiv (Mitotoyo M Plan Apo 5x) und ein Foto-Zoomobjektiv verwendet. Dieses Abbildungssystem hatte bei 780 nm eine Transmission von etwa 20%, so dass die Quanteneffizienz der Detektion insgesamt etwa 2% betrug.

Um das erreichbare Signal/Rausch-Verhältnis und damit die minimal detektierbare Dichte wesentlich zu verbessern, wurde eine neue CCD-Kamera (Roper Scientific, Typ: Sensys3200ME) ohne Bildverstärker zur Detektion eingesetzt. Die Anzahl der detektierbaren Photonen stellt mit einer Full-Well-Capacity von gut 100000 Elektronen keine Limitierung dar. Es wurde vor Einbau der Kamera in das Experiment überprüft, dass die spezifizierete Quanteneffizienz von 60%

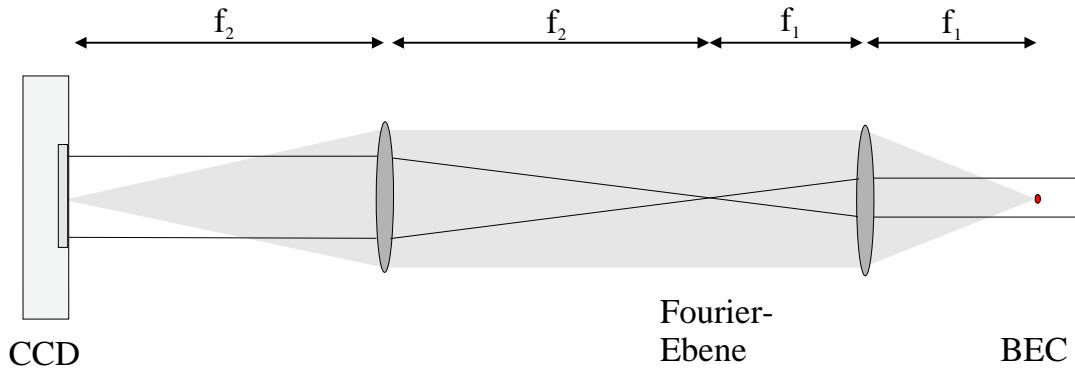


Abbildung 4.9: Schematische Darstellung des Detektionssystems. Die Ebene des BECs wird teleskopisch auf den CCD-Chip abgebildet. Die durchgezogenen Linien stellen den Verlauf des Detektionslaserstrahles dar. Durch Einbringen einer Phasenplatte in die Fourierebene besteht die Möglichkeit zu Phasenkontrastmessungen. Zwischen den Linsen ist ein zusätzlicher, nicht eingezeichneter Umlenkspiegel vorhanden.

bei 780 nm erreicht wird und bei gleichmäßiger Beleuchtung das Rauschen der Poissonstatistik folgt. Die für einen „front-illuminated“ Chip sehr hohe Quanteneffizienz wird durch die Verwendung von Mikrolinsen, die integrativer Bestandteil jedes Pixels sind, erreicht. Die hohe Anzahl von 2184×1472 Pixeln einer Größe von $6.8 \times 6.8 \mu\text{m}$ ist zur Abbildung der BECs bei Ausnutzung der maximalen Auflösung der Abbildungsoptik nicht zwingend erforderlich, ermöglicht aber einen flexiblen Einsatz der Kamera auch ohne Zoom-Objektiv und mechanische Änderungen des Strahlenganges. Durch den großen Chip kann ein weiter Bereich verschiedener Fallzeiten (bei dem eingesetzten Abbildungssystem $t_{\text{TOF}} = 0 \dots 30 \text{ ms}$) ohne Repositionierung der Kamera aufgenommen werden. Die Ausleserate beträgt 1.4 MHz, der Auslesebereich kann beliebig über die Software eingestellt werden. Die Kamera wird mit 12 Bit pro Pixel ausgelesen, drei verschiedene Konversionsfaktoren des Ausleseverstärkers sind einstellbar. Die Diskretisierung mit 12 Bit ist bei allen hier vorgestellten Messungen im Vergleich zum Poissonrauschen irrelevant. Das Ausleserauschen ist mit etwa 10 Elektronen und der Dunkelstrom mit 1 Elektron pro Sekunde für Absorptionenaufnahmen von Bose-Einstein-Kondensaten vernachlässigbar.

Um die Möglichkeiten der neuen Kamera auszunutzen, wurde ein Abbildungssystem mit hoher Transmission aufgebaut. Das in Abb. 4.9 skizzierte System besteht nur aus zwei achromatischen Linsen sowie einem Umlenkspiegel und bildet die BEC-Ebene teleskopisch auf den Kamerachip ab. Der Umlenkspiegel ist aus räumlichen Gründen notwendig. Er wurde so beschichtet, dass er für $\lambda = 532 \text{ nm}$ transparent ist und für $\lambda = 780 \text{ nm}$ eine Reflektivität von etwa 80% besitzt. Dadurch besteht die Möglichkeit, durch die Detektionsoptik einen grünen Laserstrahl (Coherent Verdi V10) einzukoppeln, um so das BEC mit optischen Dipolpotenzialen beeinflussen zu können. Die Brennwei-

ten der Linsen sind $f_1 = 100 \text{ mm}$ und $f_2 = 300 \text{ mm}$, ihr Durchmesser beträgt 40 mm . Die Vergrößerung von $1 : 3$ wurde gewählt, da dann die Pixelgröße die optische Auflösung nicht einschränkt, der auf den CCD-Chip abgebildete Bereich aber dennoch komfortabel groß ist. Der auf einen Pixel abgebildete Bereich beträgt $2.267 \mu\text{m}$, der Sichtbereich des Abbildungssystems deckt damit $4.95 \text{ mm} \times 3.34 \text{ mm}$ ab. Während einer Belichtungszeit von $50 \mu\text{s}$ werden typischerweise etwa 2000 Photonen pro Pixel detektiert, so dass das Poissonrauschen das Ausleserauschen deutlich übersteigt.

Es sei angemerkt, dass die Verwendung einer geringeren Vergrößerung zwar das Signal pro Pixel steigert, damit jedoch kein Informationsgewinn verbunden ist, solange technische Rauschquellen vernachlässigbar sind. Werden beispielsweise Bilder mit der halben Vergrößerung aufgenommen, hat jeder Pixel das 4-fache Signal, d.h. ein doppelt so hohes Signal/Rausch-Verhältnis. Da die Summe mehrerer Poissonverteilungen mit Erwartungswert $\langle N_i \rangle$ wiederum eine Poissonverteilung mit Erwartungswert $\langle N \rangle = \sum_i \langle N_i \rangle$ ist, wird durch nachträgliches Summieren benachbarter Pixel („Softwarebinning“) auf dem stärker vergrößernden Bild dasselbe Signal/Rausch-Verhältnis pro abgebildeter Fläche erreicht.

Auflösung und Tiefenschärfe

Die maximal erreichbare Auflösung ist durch die numerische Apertur NA des Abbildungssystems limitiert. Bei Absorptionsaufnahmen wird im Gegensatz zur Fluoreszenzdetektion die Signalstärke nicht durch die numerische Apertur bestimmt. Da eine gute Auflösung gleichbedeutend mit einer geringen Tiefenschärfe ist, ist nicht in allen Fällen eine Maximierung der Auflösung wünschenswert.

Die Intensitätsverteilung der Abbildung einer punktförmigen Strahlungsquelle heißt Punktbildfunktion. Die Breite dieser Verteilung ergibt die experimentelle Auflösung. Im Falle einer beugungsbegrenzten Abbildung hat sie eine volle Halbwertsbreite (FWHM) von

$$\Delta r = 0.51 \frac{\lambda}{\text{NA}}. \quad (4.5)$$

Damit ist eine Tiefenschärfe (FWHM) von [120]

$$\Delta z \approx 1.7 \frac{\lambda}{\text{NA}^2} \quad (4.6)$$

verbunden. Diese Auflösung wird jedoch von einfachen Linsensystemen für hohe numerische Aperturen nicht erreicht, da Linsenfehler, wie beispielsweise sphärische Aberration, die Auflösung begrenzen. Gute Mikroskopobjektive erreichen jedoch nahezu die beugungsbegrenzte Auflösung.³

³Sie sind zumeist aber nicht speziell für 780 nm entspiegelt, so dass interne Reflexionen an den einzelnen Linsen zu einer Verringerung der Transmission und zu störenden Interferenzstrukturen führen.

Die verwendeten Linsen haben einen freien Durchmesser von etwa $2r_L = 35$ mm. Bei einem Abstand von $d_L = 100$ mm der ersten Linse von der Position des Kondensats ergibt sich eine numerische Apertur von

$$\text{NA} = \sin \frac{\alpha}{2} \approx 0.17, \quad (4.7)$$

wobei $\alpha = 2 \arctan(r_L/d_L)$ der volle Öffnungswinkel der Abbildungsoptik ist. Bei beugungsbegrenzter Abbildung würde sich bei einer Auflösung $\Delta r = 2.3 \mu\text{m}$ eine Tiefenschärfe $\Delta z = 45 \mu\text{m}$ ergeben, die geringer als die typische Kondensatgröße bei den in dieser Arbeit vorgestellten Messungen ist. Da es sich mit zwei Achromaten um ein einfaches Linsensystem handelt, ist zu erwarten, dass sowohl Δr als auch Δz größer als bei einer beugungsbegrenzten Abbildung sind.

Zur Bestimmung der tatsächlichen experimentellen Auflösung und zum Scharfstellen des Abbildungssystems wird ein Objekt, das möglichst kleiner als diese Auflösung ist, abgebildet. Für diese Messung wurden in der axial dekomprimierten Magnetfalle gefangene BECs verwendet, da deren radiale Größe mit einem Thomas-Fermi-Radius von $1.44 \mu\text{m}$ die erwartete Auflösung unterschreitet.⁴ Da sich das gemessene Bild aus der Faltung der Punktbildfunktion mit der Objektstruktur ergibt, ist das gemessene Signal in diesem Fall durch die Punktbildfunktion dominiert und weitgehend unabhängig von der abgebildeten Struktur. Zum Scharfstellen des Systems kann die $f = 300$ mm Linse (siehe Abb. 4.9) mithilfe eines Verschiebetisches positioniert werden.

Typische Absorptionsbilder und aus deren zentralem Bereich extrahierte Profile sind in Abb. 4.10 für verschiedene Linsenpositionen gezeigt. Insbesondere bei schlechter Scharfstellung sind die gemessenen Profile, die näherungsweise der Punktbildfunktion entsprechen, bei weitem nicht gaußförmig. Sie zeigen in den Randbereichen Beugungsstrukturen, d.h. einen Wechsel zwischen Minima und Maxima. Eine leichte Asymmetrie der Beugungsstrukturen tritt auf, wenn das BEC sich nicht genau auf der optischen Achse des Abbildungssystems befindet. Der Gaußfit mit $\exp(-x^2/\sigma^2)$ liefert im Falle guter Scharfstellung des Abbildungssystems $\sigma = 4.59 \mu\text{m}$. Unter Berücksichtigung der Kondensatgröße ergibt sich für die Punktbildfunktion $\sigma = 4.42 \mu\text{m}$. Die Auflösung (FWHM) beträgt damit $\Delta r = 1.67\sigma = 7.38 \mu\text{m}$. Dies lässt eine Tiefenschärfe (FWHM) von etwa $\Delta z \approx 500 \mu\text{m}$ erwarten. Abbildung 4.11 zeigt die mit einem Gaußfit charakterisierte Breite der gemessenen Profile in Abhängigkeit der Linsenposition. Der systematische Kurvenverlauf demonstriert die Eignung dieser Methode zum Scharfstellen der Detektionsoptik.

⁴Da für sehr hohe optische Dichten fast keine Transmission stattfindet, ist deren Messung ungenau. Daher wurde nur ein geringer Teil der Atome der $F=1$ Kondensate vor der Detektion in den detektierten $F=2$ Zustand gepumpt.

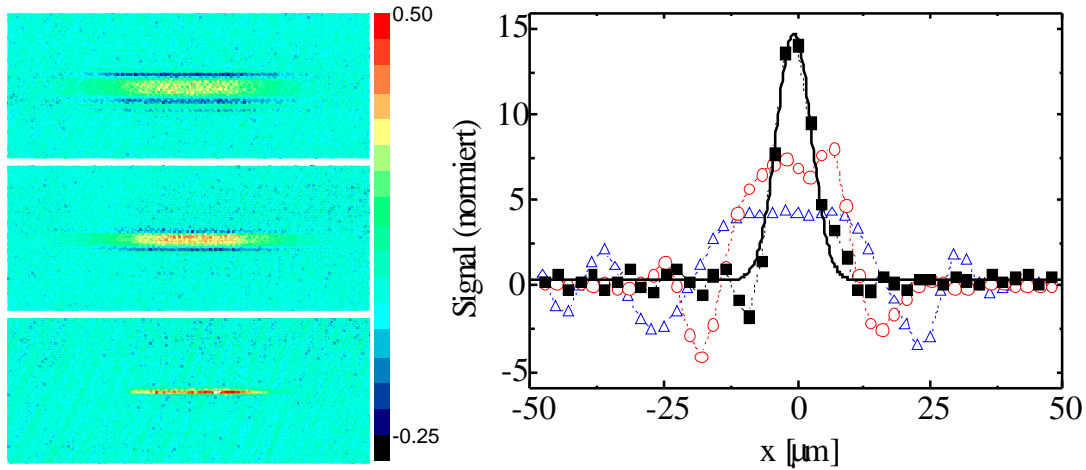


Abbildung 4.10: Absorptionbilder (links) und zugehörige Profile (rechts) magnetisch gefangener Kondensate zum Bestimmen der optischen Auflösung und Scharfstellen der Detektionsoptik. Die Position der $f = 300$ mm-Linse war von oben nach unten: -5.5 mm (Dreiecke), -2.5 mm (Kreise) und 0 mm (Quadrate). Die durchgezogene Linie ist ein Gaußfit mit einer Breite von $\sigma = 4.59$ μm .

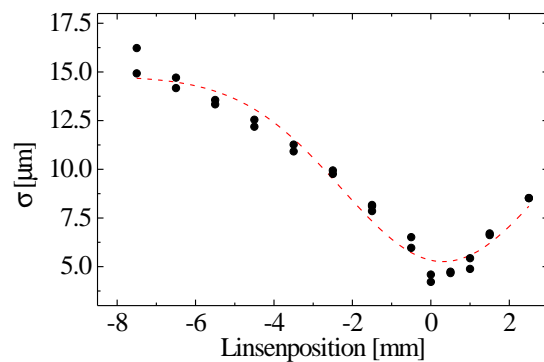


Abbildung 4.11: Zum Scharfstellen der Detektionsoptik werden an die gemessenen Profile (Abb. 4.10) Gaußfunktionen angefitet. Die Breite σ der Fitfunktion ist in Abhängigkeit der Position der $f = 300$ mm-Linse dargestellt. Die gestrichelte Linie in Form einer Gaußfunktion dient der grafischen Orientierung.

Wahl der Belichtungszeit

Eine lange Belichtungszeit erhöht die Anzahl der detektierten Photonen und verbessert damit das Signal/Rausch-Verhältnis. Die Belichtungszeit ist jedoch durch die optische Auflösung, die erzielt werden soll, limitiert. Zum einen bewegt sich das Kondensat während der Belichtung aufgrund seiner Eigenbewegung, beispielsweise durch den freien Fall, zum anderen induzieren die Photonenrückstöße bei Absorption und Emission eine gerichtete Bewegung und eine Diffusion der Atomverteilung.

Die Anzahl der pro Atom absorbierten Photonen beträgt nach Gl. (2.38)

$$N_{\text{sc}} = \Gamma_{\text{sc}} t_D = \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + I/I_{\text{sat}} + 4\delta^2/\Gamma^2} t_D, \quad (4.8)$$

wobei t_D die Belichtungszeit ist. Die Absorptionen verursachen eine Bewegung der Atomwolke um

$$s = \frac{1}{2} v_{\text{rec}} N_{\text{sc}} t_D, \quad (4.9)$$

wobei $v_{\text{rec}} = \hbar k/m = 5.87 \mu\text{m}/\text{ms}$ die Rückstoßgeschwindigkeit ist. Durch die spontane Emission findet eine Ortsdiffusion um [98]

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{N_{\text{sc}}}{3}} v_{\text{rec}} t_D \quad (4.10)$$

statt. Für die Messungen mit der neuen Kamera wurde zumeist eine Belichtungszeit von $t_D = 50 \mu\text{s}$ gewählt. Bei resonanter Detektion und einer Detektionsintensität von $I = 0.25 I_{\text{sat}}$ absorbiert dabei jedes Atom etwa $N_{\text{sc}} = 185$ Photonen. Die sich dadurch ergebende Bewegung des Kondensats um $s \approx 27 \mu\text{m}$ liegt innerhalb der Tiefenschärfe des Abbildungssystems und die Ortsdiffusion von $x_{\text{rms}} \approx 2.3 \mu\text{m}$ führt zu keiner wesentlichen Verschlechterung der Auflösung. Bei einer Fallzeit von 20 ms bewegt sich das Kondensat um etwa $10 \mu\text{m}$ in radialer Richtung, so dass die Auflösung in dieser Richtung etwas reduziert ist. Da die Phasenfluktuationen jedoch zu axialen Strukturen führen, ist dieser Effekt für solche Messungen nicht störend.

Eichung der Detektionsintensität

Für die Bestimmung der Teilchenzahl aus den Absorptionen ist die Intensität des Detektionslaserstrahls relevant. Diese kann am verlässlichsten direkt aus den Bildern gewonnen werden, wenn zuvor das Detektionssystem geeicht wurde. Hierzu muss der Umrechnungsfaktor $c_{\text{conv}} = S/I$ zwischen gemessenen counts S und Intensität I des Detektionslaserstrahles am Ort des BECs ermittelt werden. Zu diesem Zweck wird durch räumliche Filterung mit einem Pinhole ein gaußförmiges Strahlprofil des Detektionsstrahles der Form

$$I = I_{\text{Max}} e^{-\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}} \quad (4.11)$$

hergestellt. Für ein solches Strahlprofil sind die Intensität im Zentrum und die Leistung P durch

$$I_{\text{Max}} = \frac{P}{\pi\sigma_1\sigma_2}, \quad (4.12)$$

verknüpft. Dieses Strahlprofil wird mit dem zuvor scharfgestellten und im Maßstab geeichten Detektionssystem aufgenommen. Durch Fit einer Gaußfunktion an das Kamerabild werden sowohl die Größen σ_1 und σ_2 als auch die Anzahl der counts S_{Max} im Zentrum der Gaußfunktion ermittelt. Durch Berechnen der Intensität mit Gl. (4.12) erhält man direkt den Umrechnungsfaktor c_{conv} . Unter Verwendung des oben beschriebenen Abbildungssystems und einem Kamera Gain-Parameter von 2 wurde so ein Umrechnungsfaktor von

$$c_{\text{conv}} = \frac{S_{\text{Max}}}{I_{\text{Max}}} = 3.119 \times 10^5 \left[\frac{\text{counts m}^2}{\text{Ws}} \right] t_D = \frac{5.206 t_D}{I_{\text{Sat}}^{(0)}} \left[\frac{\text{counts}}{\mu\text{s}} \right] \quad (4.13)$$

ermittelt. Die eckigen Klammern enthalten die Einheiten und $I_{\text{Sat}}^{(0)} = 1.669\text{mW/cm}^2$ ist die Sättigungsintensität des $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_F = 3\rangle$ Übergangs [121]. Die Belichtungszeit t_D ist separat aufgeführt, da das gemessene Signal bei gegebener Beleuchtungsintensität proportional zu t_D ist.

EXPERIMENTELLE UNTERSUCHUNG VON PHASENFLUKTUATIONEN

Die Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten sind wesentlich durch ihre Kohärenzeigenschaften geprägt, die einen fundamentalen Unterschied zu thermischen Atomverteilungen darstellen. Daher stand die Kohärenz schnell im Zentrum experimenteller Untersuchungen und wurde für dreidimensionale Kondensate mit interferometrischen [38, 39, 41] und spektroskopischen [40] Methoden bestätigt.

Im Rahmen dieser Arbeit konnte erstmals nachgewiesen werden, dass BECs nicht notwendigerweise kohärent sind, sondern in elongierten Kondensaten räumliche und zeitliche Fluktuationen der Phase auftreten [47, 48]. Bei den Messungen wurde festgestellt, dass die Phasenfluktuationen in gefangenen Kondensaten, deren Existenz kurz zuvor vorhergesagt wurde [44], zur Entstehung von Dichtemodulationen in der ballistischen Expansion führen. Die Analyse dieser Dichtemodulationen ermöglichte die umfangreiche Charakterisierung der Phasenfluktuationen und einen Vergleich mit den theoretischen Resultaten. Es wurde gezeigt, dass die Phasenfluktuationen mit steigender Temperatur und Elongiertheit der Falle zunehmen, und die theoretisch erwarteten Abhängigkeiten von den experimentellen Parametern wurden bestätigt. Diese Ergebnisse haben zur Folge, dass in sehr elongierten Geometrien, wie sie beispielsweise durch den Einsatz von Mikrochips [45, 46] möglich sind, die Erzeugung phasenkohärenter Bose-Einstein-Kondensate wesentlich erschwert ist. Daher sind insbesondere bei der Nutzung von BECs für Atomlaser und interferometrische Messungen die Fallengeometrie und die Phasenkohärenz wesentliche Aspekte, die im Design derartiger Experimente zu berücksichtigen sind.

Eine wesentliche theoretische Voraussage ist, dass trotz erheblicher Phasenfluktuationen in stark elongierten Kondensaten deren Dichte nicht signifikant

fluktuiert. Diese Voraussage konnte durch Messung der Release-Energie verifiziert werden [49] und wurde vor kurzem ebenfalls durch Messungen in der Gruppe von A. Aspect bestätigt [102]. Da die Phase eine sehr grundlegende Eigenschaft von Bose-Einstein-Kondensaten ist, wirken sich Phasenfluktuationen auf viele experimentell relevante Größen aus, die zu deren Charakterisierung genutzt werden können. Im Rahmen dieser Arbeit wurde erstmals darauf hingewiesen [48], dass Bragg-Spektroskopie zur Messung der Phasenkorrelationen verwendet werden kann, da die Impulsverteilung die Fourier-Transformierte der Korrelationsfunktion erster Ordnung ist (siehe Kapitel 3.2.1). Mit dieser Methode konnte in der Gruppe von A. Aspect der Einfluss von Phasenfluktuationen auf das Impulsspektrum beobachtet werden [102]. Eine weitere Möglichkeit zur Beobachtung von Phasenfluktuationen, die in Amsterdam demonstriert wurde [103], ist die Fokussierung des Kondensats in der ballistischen Expansion durch Anregung von Quadrupoloszillationen. Ähnlich wie bei einem optischen Laser resultiert eine schlechte Modenqualität in einer erhöhten Fokusgröße. Durch Messen der Fokusgröße kann die Phasenkohärenzlänge bestimmt werden.

Die direkteste Methode, die Phasenkohärenzeigenschaften zu untersuchen, ist jedoch die Phasen von verschiedenen Regionen des Kondensats interferometrisch miteinander zu vergleichen. Zu diesem Zweck wurde in dieser Arbeit ein auf Bragg-Beugung basierendes Interferometrieschema eingesetzt, das es erlaubt, zwei Kopien des ursprünglichen Kondensats mit einem räumlichen Versatz miteinander interferieren zu lassen. Es wurde dabei eine für den Bereich lasergekühlter Atome neue Methode entwickelt, die auf der Analyse der Intensitätskorrelationen im Interferenzmuster beruht. Diese Methode ist in vielerlei Hinsicht analog zu dem Stellarinterferometer-Experiment von Hanbury-Brown und Twiss [50, 51] und ist der Messung des Interferometriecontrastes aufgrund ihrer intrinsischen Unempfindlichkeit gegenüber Fluktuationen der durch das Interferometer aufgeprägten Phase überlegen. Mit diesem Verfahren ist es erstmals gelungen, die räumliche Korrelationsfunktion phasenfluktuierender Kondensate zu vermessen.

In diesem Kapitel werden die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Messungen an phasenfluktuierenden Kondensaten zusammengefasst. Dabei werden zunächst die Messungen, die auf der Transformation von Phasenfluktuationen in Dichtemodulationen während der ballistischen Expansion basieren, vorgestellt. Den letzten Teil des Kapitels nehmen dann die interferometrischen Messungen ein. Zuerst wird jedoch auf die Bestimmung der Ensembleparameter eingegangen, da dies eine Voraussetzung für quantitative Messungen darstellt.

5.1 Bestimmung von Ensembleparametern

Voraussetzung für das systematische Studium der Phasenfluktuationen ist die Bestimmung der Ensembleparameter. Die relevanten experimentellen Größen

sind, wie beispielsweise aus Gl. (3.16) hervorgeht, die Fallenfrequenzen, Temperatur und Anzahl der kondensierten Atome.

5.1.1 Absorptionenaufnahmen

In diesem Kapitel wird erläutert, wie aus der optischen Abbildung des Ensembles die atomare Dichteverteilung ermittelt wird. Aus diesen Dichteverteilungen werden in den meisten Experimenten alle Daten über die Bose-Einstein-Kondensate gewonnen. Für technische Aspekte der Detektion sei auf Kapitel 4.3 verwiesen.

Bei Absorptionenaufnahmen wird das Kondensat mit einem kollimierten Laserstrahl beleuchtet. Die Absorption der Atome resultiert in einer Verringerung der Anzahl der detektierten Photonen. Dieser Schattenwurf wird auf den CCD-Chip abgebildet und kann zur Bestimmung der atomaren Dichte herangezogen werden.

Nach Absorption eines Photons wird von den Atomen spontan ein Photon emittiert. Die spontane Emission findet jedoch in alle Raumwinkel mit gleicher Wahrscheinlichkeit statt, so dass nur ein Bruchteil dieser Photonen detektiert wird. Der von der Detektionsoptik abgedeckte Raumwinkel beträgt πNA^2 und ist in der Regel klein gegen den vollen Raumwinkel 4π . Bei einer numerischen Apertur von 0.15 werden demnach nur etwa 0.5% der spontan emittierten Photonen von der Detektionsoptik erfasst.¹ Daher werden im Folgenden zur Analyse der Absorptionenaufnahmen die spontan emittierten Photonen nicht berücksichtigt.

Die von einem Atom gestreute Leistung ist nach Gl. (2.38)

$$P_{\text{Atom}} = \hbar\omega_L \Gamma_{\text{sc}} = \hbar\omega_L \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_{\text{sat}}}{1 + I/I_{\text{sat}} + 4\delta^2/\Gamma^2}. \quad (5.1)$$

Die Änderung der Intensität des (in z -Richtung verlaufenden) Detektionsstrahles beim Durchlaufen des atomaren Mediums der Dichte n ist daher

$$dI = -\hbar\omega_L \Gamma_{\text{sc}} n dz. \quad (5.2)$$

Definiert man

$$\sigma(I) = \sigma_0 \frac{1}{1 + I/I_{\text{sat}} + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (5.3)$$

mit $\sigma_0 = \frac{\Gamma\hbar\omega_L}{2I_{\text{sat}}}$, schreibt sich Gl. (5.2) als

$$dI = -\sigma(I) I n dz. \quad (5.4)$$

¹Aus diesem Grunde sind für die meisten BEC-Experimente Absorptionenaufnahmen einer Fluoreszenzdetektion überlegen.

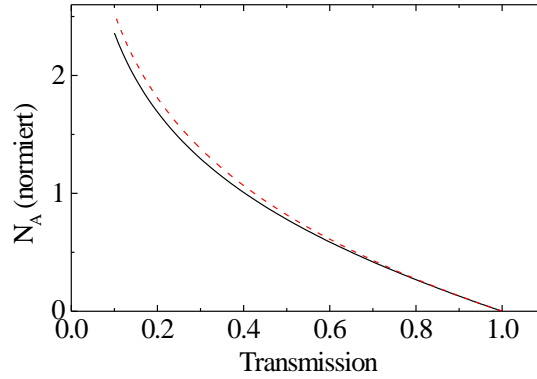


Abbildung 5.1: Vergleich der Teilchenzahlbestimmung mit [Gl. (5.7), gestrichelte Linie] und ohne [Gl. (5.6), durchgezogene Linie] Berücksichtigung einer Änderung des Streuquerschnitts σ durch fortlaufende Abschwächung des Detektionslichtes. Die jeweils extrahierten Teilchenzahlen sind in Abhängigkeit der Transmission t dargestellt, d.h. $I = t * I_0$. Die Kurven sind für $I_0 = 0.25I_{\text{sat}}$, resonanter Detektion ($\delta = 0$) und $A = \sigma_0$ berechnet.

Im Falle geringer Detektionsintensitäten $I/I_{\text{sat}} \ll 1 + 4\delta^2/\Gamma^2$ ist σ näherungsweise konstant und die Differenzialgleichung lässt sich durch eine einfache Exponentialfunktion

$$I = I_0 e^{-\sigma \int n dz} = I_0 e^{-D} \quad (5.5)$$

lösen, wobei $D = \ln(I_0/I)$ die optische Dichte ist. Die Größe $\tilde{n} = \int n dz$ heißt Säulendichte. Damit ist die Anzahl der auf einen Pixel abgebildeten Atome

$$N_A = \tilde{n}A = \frac{A}{\sigma} \ln\left(\frac{I_0}{I}\right), \quad (5.6)$$

wobei A die auf einen Pixel abgebildete Fläche ist. Ist die Detektionsintensität nicht klein, so muss die Änderung von σ durch die Abschwächung des Detektionslichts beim Durchlaufen des atomaren Mediums berücksichtigt werden und man erhält

$$N_A = \frac{A}{\sigma_0} \left(\left[1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2} \right] \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) + \frac{I_0 - I}{I_{\text{sat}}} \right). \quad (5.7)$$

Die Gesamtteilchenzahl erhält man jeweils durch Summation über alle Pixel. Die Abweichung von Gl. (5.6) von der wirklichen Teilchenzahl ist für geringe Detektionsintensitäten $I_0 \ll I_{\text{sat}}$ vernachlässigbar und nimmt mit steigender Detektionsintensität zu. Abbildung 5.1 vergleicht die mit Gl. (5.6) und Gl. (5.7) extrahierten Teilchenzahlen für eine typische Detektionsintensität von $I_0 = 0.25I_{\text{sat}}$. Wie erwartet ist die Abweichung für geringe optische Dichten, d.h. geringe Absorption, marginal und steigt mit zunehmender Absorption.

Bei der Detektion ist die Polarisation des Detektionslaserstrahles wesentlich, da sie die Sättigungsintensität beeinflusst. In dieser Arbeit wurde die

Detektion entweder mit zirkular polarisiertem oder linear polarisiertem Licht durchgeführt. Über die Auswahlregeln werden die zur Absorption beitragenden Übergänge bestimmt. Abbildung B.1 zeigt, dass der geschlossene Kühlübergang $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightarrow |F = 3, m_F = 3\rangle$ die größte Linienstärke besitzt und daher zu der größtmöglichen Absorption führt. Um auf diesem Übergang zu detektieren, wird ein Führungsfeld in Richtung des Detektionslaserstrahles angelegt und mit zirkular polarisiertem Licht detektiert. Da typischerweise über 100 Absorptionen pro Atom stattfinden, ist die Anfangsverteilung auf die verschiedenen m_F -Unterniveaus nicht entscheidend, weil sich nach wenigen Absorptions-Emissionszyklen fast alle Atome in dem äußeren m_F Zustand befinden. Die Sättigungsintensität² für diesen Übergang ist [121] $I_{\text{sat}}^{(0)} = 1.669(2) \text{ mW/cm}^2$ und der ungesättigte Absorptionsquerschnitt ist $\sigma_0 = 2.9 \times 10^{-9} \text{ cm}^2$. Wird mit linear polarisiertem Licht detektiert, tragen mehrere Übergänge zum Signal bei. Die effektive Linienstärke ist durch das Mittel der Linienstärken der m_F Zustände, gewichtet mit deren Besetzung, gegeben. Für eine statistische Mischung der m_F Zustände erhält man $I_{\text{sat}} = I_{\text{sat}}^{(0)}/0.47$, für lineare Polarisation parallel zur Quantisierungsachse (π -polarisiertes Licht) erhöht sich durch optisches Pumpen die Besetzung in den inneren m_F -Niveaus und man erhält [122] $I_{\text{sat}} = I_{\text{sat}}^{(0)}/0.54$.

Zur Detektion eines Bose-Einstein-Kondensats werden experimentell drei Bilder aufgenommen: ein Bild mit Atomen (Bild A), eines ohne Atome (Bild B) und ein Dunkelbild (Bild C). Auch ohne die Beleuchtung des Kamerachips ist beispielsweise aufgrund thermisch erzeugter Elektronen oder kleiner Offsets des Ausleseverstärkers das ausgelesene Signal nicht genau Null. Diese Effekte werden durch Abzug des Dunkelbildes von Bild A und B berücksichtigt. Die zum Bestimmen der atomaren Dichteverteilung mit Gl. (5.7) bzw. Gl. (5.6) benötigten Intensitäten I und I_0 erhält man durch

$$\begin{aligned} I &= (A - C)/c_{\text{conv}} \\ I_0 &= (B - C)/c_{\text{conv}}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Hierbei sind A, B und C die counts in den jeweiligen Bildern und c_{conv} ist der bei der Eichung des Detektionssystems (Abschnitt 4.3) erläuterte Umrechnungsfaktor von den gemessenen counts in die entsprechenden Intensitäten.

In Abb. 5.2 ist exemplarisch die optische Dichte

$$D = \ln \left(\frac{B - C}{A - C} \right) \quad (5.9)$$

zweier Bose-Einstein-Kondensate abgebildet. Eine bimodale Dichteverteilung, in deren Zentrum sich das Kondensat befindet, ist klar erkennbar. Bei Verringerung der Temperatur durch Absenken der Evaporationsendfrequenz ist deutlich

²In der Literatur werden zwei sich um einen Faktor 2 unterscheidende Definitionen der Sättigungsintensität verwendet. Hier wird $\frac{I}{I_{\text{sat}}} = \frac{2\Omega^2}{\Gamma^2}$ verwendet, wobei Ω die Rabi-Frequenz des jeweiligen Überganges ist.

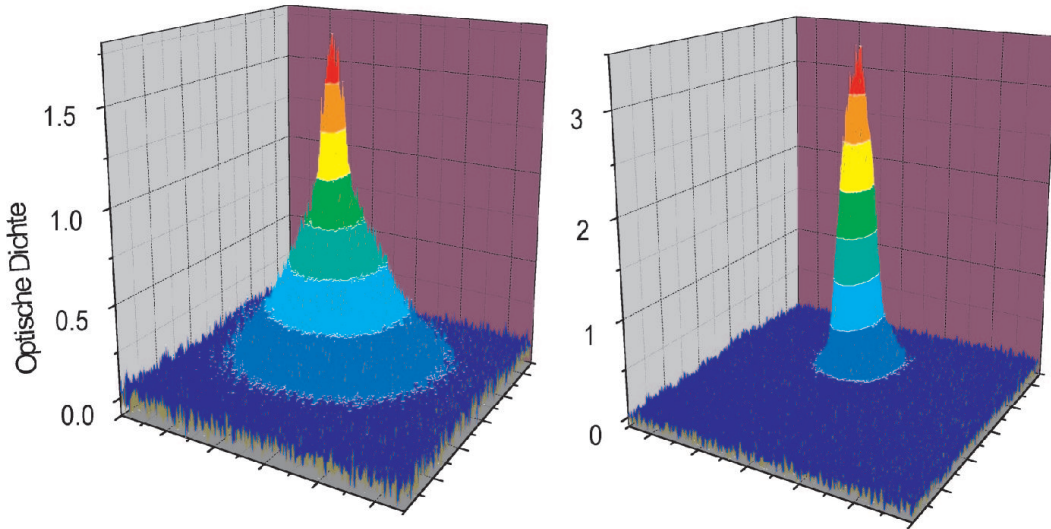


Abbildung 5.2: Absorptionsbilder von Bose-Einstein-Kondensaten. Der dargestellte Ausschnitt umfasst jeweils 1.25×1.25 mm. Die Bilder zeigen $F=1$ Kondensate, die in einer Magnetfalle mit $\omega_\rho = 2\pi \times 280$ Hz und $\omega_x = 2\pi \times 9.9$ Hz hergestellt wurden, nach einer Fallzeit von 29 ms. Linkes Bild: $T = 556$ nK, rechtes Bild: $T = 288$ nK.

eine Verringerung des Anteils der thermischen Atome und der Breite der thermischen Verteilung zu sehen. Aus derartigen Bildern kann, wie in Abschnitt 5.1.4 detailliert erläutert wird, der Anteil der kondensierten Atome und die Temperatur ermittelt werden.

Die mit Gl. (5.7) bzw. Gl. (5.6) vorgenommene Atomzahlbestimmung lässt sich durch Bestimmung des Anteils der kondensierten Atome in Abhängigkeit der Temperatur kontrollieren. Abbildung 5.3 vergleicht eine experimentelle Messung mit dem theoretisch erwarteten Verlauf Gl. (2.30). Sollte die Umrechnung von gemessener Absorption in Atomzahlen beispielsweise aufgrund der Verwendung einer unzutreffenden Sättigungsintensität fehlerhaft sein, ist davon weder die relative Größe N_0/N noch die Temperaturbestimmung betroffen. Da aber die Kondensationstemperatur $T_c^{(0)} \propto N^{1/3}$ von dieser Umrechnung abhängt, wäre die gemessene Kurve gegenüber der Theoriekurve verschoben. Die exzellente Übereinstimmung in Abb. 5.3 ist also eine Bestätigung für die Berechnung der Atomzahlen.

5.1.2 Abbildungsmaßstab

Zur Bestimmung der Temperatur und Atomzahl ist die Kenntnis des Abbildungsmaßstabs wesentlich. Dieser lässt sich experimentell vergleichsweise einfach aus dem freien Fall von Bose-Einstein-Kondensaten bestimmen. Beim freien Fall ist die Position y des BECs durch $y - y_0 = \frac{1}{2}gt^2$ gegeben, wobei t die Fallzeit

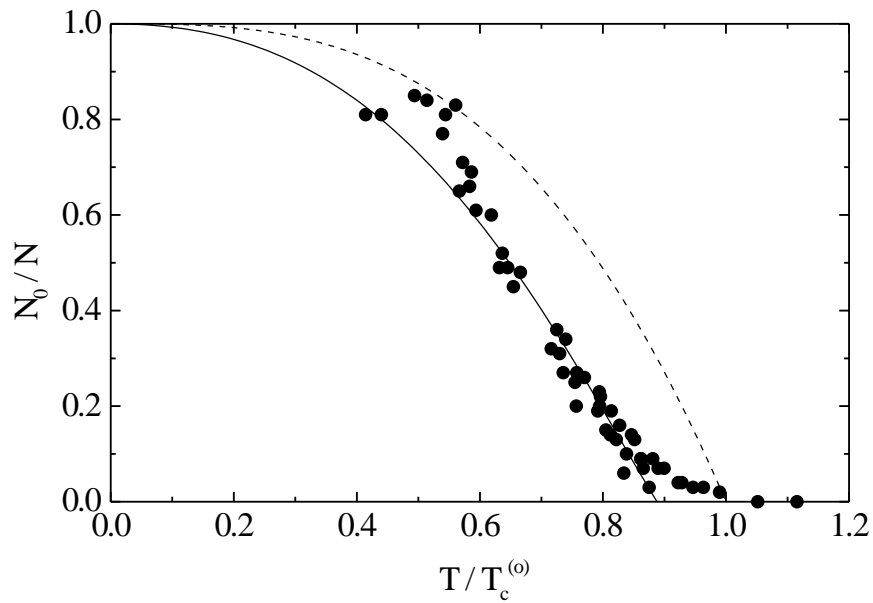


Abbildung 5.3: Anteil der kondensierten Atome in Abhängigkeit der Temperatur. Die gestrichelte Kurve zeigt den theoretischen Verlauf Gl. (2.10) für ein ideales Gas, die durchgezogene Kurve Gl. (2.30) berücksichtigt die Wechselwirkungen. Es ist zu beachten, dass die Kondensationstemperatur $T_c^{(0)}$ des idealen Gases nicht konstant ist, sondern von der Anzahl der Atome in der jeweiligen Realisierung abhängt. Die Temperaturen in dieser Messung erstreckten sich von etwa 150 bis 600 nK, die Maximalzahl kondensierter Atome betrug 3.6×10^5 . Die Daten wurden mit $F=1$ Kondensaten nach einer Flugzeit von 22 ms, Fallenfrequenzen von $\omega_x = 2\pi \times 9.9$ Hz und $\omega_\rho = 2\pi \times 298$ Hz und linearer Polarisierung des resonanten Detektionslaserstrahles aufgenommen.

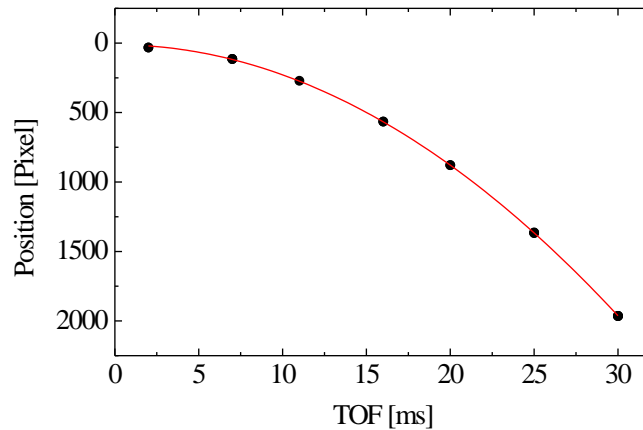


Abbildung 5.4: Zur Bestimmung des Abbildungsmaßstabs wird die Position der BECs auf dem Kamerachip in Abhängigkeit von der Fallzeit gemessen. Zu jeder Fallzeit sind zwei Messungen durchgeführt worden, die aufgrund der guten Reproduzierbarkeit nicht getrennt wahrnehmbar sind. Die durchgezogene Linie ist ein Parabelfit an die Messpunkte.

nach dem Ausschalten der Magnetfalle, y_0 die Ursprungsposition des gefangenen Kondensats und g die Erdbeschleunigung ist. Die Raumrichtung y ist durch die Richtung der Erdbeschleunigung definiert. Um den Abbildungsmaßstab zu bestimmen, wird die Position der BECs auf dem Kamerachip in Abhängigkeit von der Fallzeit t bestimmt. Eine typische Messung zeigt Abb. 5.4. Die erwartete Fallparabel ist deutlich erkennbar. Die gefittete Parabel liefert in diesem Fall einen Maßstab von $2.263 \pm 0.003 \mu\text{m}/\text{Pixel}$. Die Unsicherheit in der Maßstabsbestimmung ist für alle in dieser Arbeit vorgestellten Messungen vernachlässigbar. Die optische Abbildung erfolgt teleskopisch mit Linsen der Brennweiten $f = 100 \text{ mm}$ und $f = 300 \text{ mm}$. Daher wird eine Vergrößerung von $1 : 3$ erwartet. Da die Pixelgröße der Kamera $6.8 \mu\text{m}$ beträgt, entspricht der gemessene Maßstab einer Vergrößerung von $1 : 3.005$.

5.1.3 Fallenfrequenzen

Die Fallenfrequenzen sind wesentlich für viele Eigenschaften der Bose-Einstein-Kondensate. Insbesondere hängen die Phasenfluktuationen stark vom Aspektverhältnis der Falle ab.

Die Fallenfrequenzen können beispielsweise durch Anregung von Schwerpunktsoszillationen des Kondensats („Dipolschwingungen“) gemessen werden. Um solche Schwingungen anzuregen, sind verschiedene Methoden zum Einsatz gekommen:

- Impulsübertrag von $2\hbar k$ auf die gefangenen Atome mit Bragg-Beugung.

- Modulation des Magnetfallenstromes.
- Modulation des Offsetfeldes B_0 durch die externen Helmholtzspulen zur Erdmagnetfeldkompensation.
- Schnelles Ausführen der in Kapitel 4.1.2 beschriebenen Dekompressionsrampe.
- Kurzzeitiges Ausschalten des Laserlichtes in der Hybridfalle.

Um die Oszillation aufzunehmen wurde nach Anregung der Schwingung die Wartezeit in der Falle variiert und die Schwerpunktsposition des Kondensats ermittelt. Die Schwingungsamplituden der gefangenen Kondensate sind vor allem in radialer Richtung häufig sehr klein. Daher wurden die Kondensate in der ballistischen Expansion detektiert. Dies hat den Vorteil, dass durch Wahl einer geeigneten Flugzeit die Amplitude der beobachteten Schwerpunktsbewegung eingestellt werden kann.

Abbildung 5.5 zeigt zwei Messungen der axialen Fallenfrequenz in der axial dekomprimierten Magnetfalle. In beiden Fällen ist klar erkennbar, dass die gemessenen Kondensatpositionen sinusförmig oszillieren. Die Fallenfrequenz wird durch Fit der Datenpunkte mit einer exponentiell gedämpften Sinusfunktion bestimmt. Die Anregung der Oszillation erfolgte im linken Graphen durch schnelles Ausführen der Dekompressionsrampe, im rechten durch Modulation des Gesamtstromes.³ Hierzu wurde das entsprechende Netzgerät (EMI Typ: ESS30-500) über den Messrechner gesteuert. Damit eine sinusförmige Modulation möglich ist, muss ein durchschnittlicher Strom etwas unterhalb des maximalen Stromes, den das Netzgerät erlaubt, gewählt werden.⁴ Nach Gl. (4.3) skalieren die Fallenfrequenzen mit $\omega^{(1)}/\omega^{(2)} = \sqrt{I^{(1)}/I^{(2)}}$. Aus der bei einem Strom von $I_{\text{supply}} = 274 \text{ A}$ gemessenen Frequenz von 3.33 Hz ergibt sich eine Frequenz von 3.37 Hz bei der üblicherweise verwendeten Stromstärke von 280 A.

Um die radiale Fallenfrequenz in der axial dekomprimierten Magnetfalle zu messen, wurde wiederum die Methode der Strommodulation um einen Mittelwert von $I_{\text{supply}} = 274 \text{ A}$ angewendet, diesmal mit einer Modulationsfrequenz von 370 Hz. In Abb. 5.6 sind exemplarisch Bilder gezeigt, die nach verschiedenen Wartezeiten nach Beendigung der Modulation aufgenommen wurden. Überraschenderweise zeigen die Bilder für längere Wartezeiten eine Schräglage oder sogar eine stark gebogene Form. Die Ursache hierfür lässt sich ermitteln, indem

³Damit eine effektive Anregung der Dipolschwingung erfolgt, sollte die Modulationsfrequenz in der Nähe der Fallenfrequenz liegen.

⁴Die maximale Stromstärke, die in diesem Experiment verwendet werden kann, ist nicht durch die Strombegrenzung des Netzgerätes, sondern durch seine Spannungsbegrenzung auf etwa 280 A begrenzt.

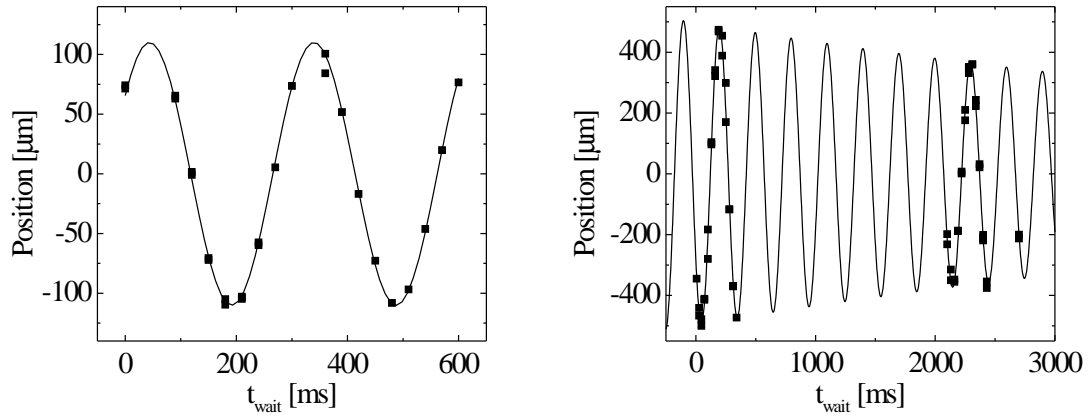


Abbildung 5.5: Messung der axialen Fallenfrequenz für $F=1$ Kondensate in der axial dekomprimierten Magnetfalle. Die Punkte sind jeweils die Messwerte, die durchgezogene Linie ist ein Fit der Messwerte mit einer exponentiell gedämpften Sinusfunktion. Links: Anregung durch schnelles Ausführen der Dekompressionsrampe, $I_{\text{supply}} = 280 \text{ A}$, $t_{\text{TOF}} = 30 \text{ ms}$, $f_{\text{Fit}} = 3.38 \pm 0.01 \text{ Hz}$. Rechts: Anregung durch Modulation des Gesamtstromes, $I_{\text{supply}} = 274 \text{ A}$, $t_{\text{TOF}} = 19.2 \text{ ms}$, $f_{\text{Fit}} = 3.334 \pm 0.002 \text{ Hz}$. Beide Messungen sind konsistent zueinander.

die radiale Schwingung für jede axiale Position getrennt ausgewertet wird. Dieses ist in dem mittleren und unteren Graphen geschehen, in denen die Positionen des linken Teils des BECs mit denen des rechten Teils verglichen werden. Die Schwingung des linken Teils hinkt der des rechten etwas hinterher, mit steigendem Abstand für längere Wartezeiten, d.h. sie hat eine geringfügig niedrigere Frequenz. Da die beiden Enden der gut $300 \mu\text{m}$ langen Kondensate nicht exakt derselben radialen Fallenfrequenz ausgesetzt sind, dephasieren sie nach vielen Schwingungen und führen so zu den beobachteten Bildern. Die Abhängigkeit der radialen Fallenfrequenz von der axialen Position ist in Abb. 5.7 dargestellt. Die Abweichung von der mittleren Frequenz $\omega_\rho = 2\pi \times 364.7 \pm 0.2 \text{ Hz}$ beträgt nahe den Kondensatenden ungefähr 1%. Diese Unterschiede sind für die in dieser Arbeit vorgestellten Messungen irrelevant, deren eindeutige Identifikation demonstriert jedoch die Leistungsfähigkeit der Messmethode. Durch Skalierung ergibt sich, dass die radiale Fallenfrequenz bei einer Stromstärke von 280 A $\omega_\rho = 2\pi \times 368.7 \text{ Hz}$ beträgt.

Alternativ zum Anregen kollektiver Schwingungen von BECs kann das Heizen thermischer Atomverteilungen als Funktion einer eingestrahnten Frequenz beobachtet werden. Eine solche Messung, durchgeführt mit thermischen Atomen in der Magnetfalle, ist in Abb. 5.8 dargestellt. Zum Einstrahlen des elektromagnetischen Feldes wurde eine externen Spule verwendet. Der Energieabstand der radialen Schwingungszustände $\hbar\omega_\rho$ ist durch die Fallenfrequenz gegeben. Wenn die Frequenz des eingestrahnten Feldes dieser Frequenz entspricht, kann eine resonante Anregung erfolgen. Dadurch wird die Atomwolke geheizt. Damit

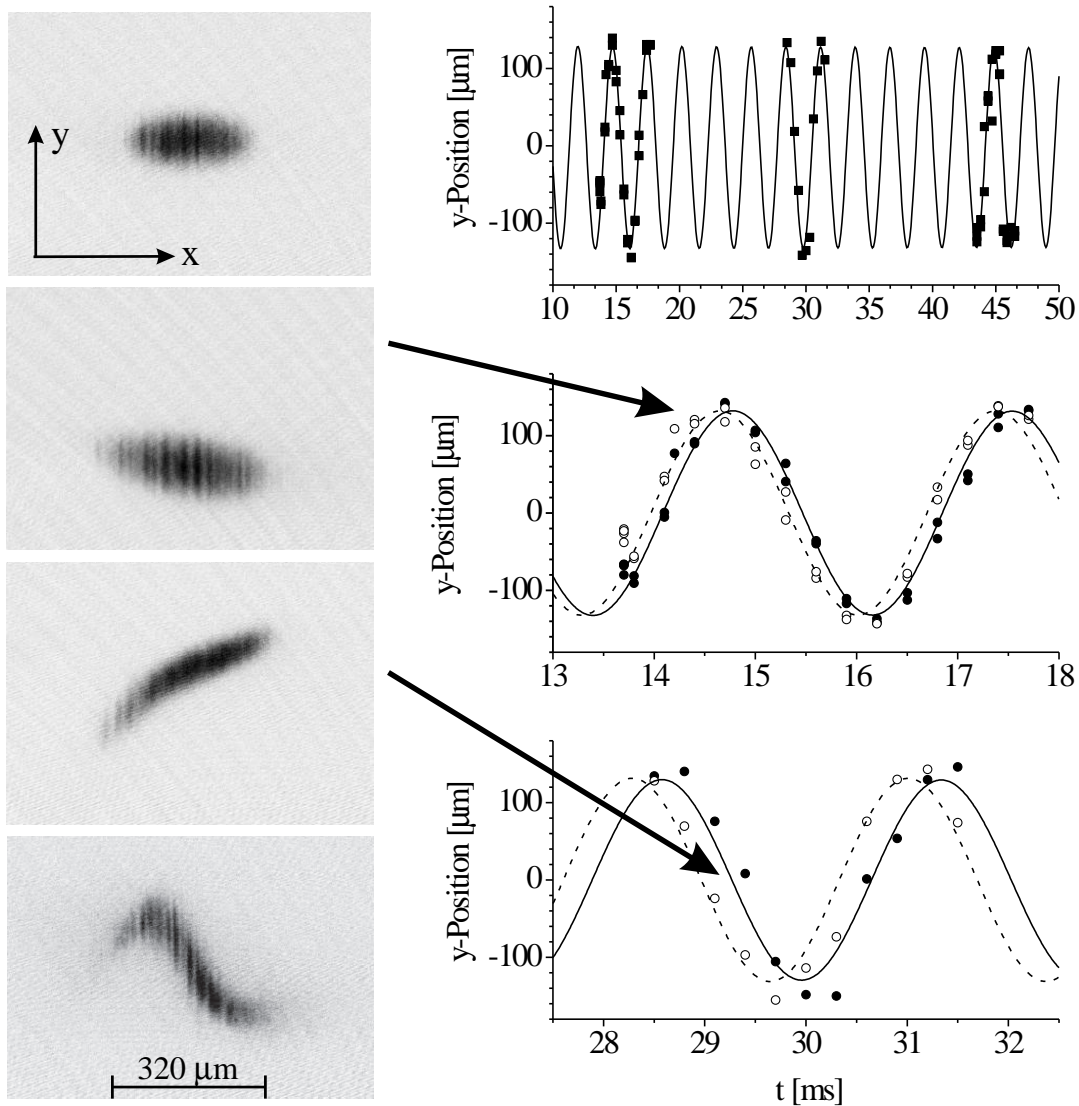


Abbildung 5.6: Messung der radialen Fallenfrequenz für $F=1$ Kondensate in der axial dekomprimierten Magnetfalle bei einem Offsetfeld von $B_0 = 0.29$ G. Die Fallzeit betrug $t_{TOF} = 19.2$ ms. Das obere Bild wurde ohne Modulation, die anderen Bilder wurden von oben nach unten nach $t_{wait} = 14.4, 29.4$ und 114.1 ms aufgenommen. Oberer Graph: Schwingung der axial integrierten Dichteverteilung. Mittlerer und unterer Graph: getrennte Auswertung der Schwingung für verschiedene Positionen auf der Kondensatachse; offene Punkte: $x = -110 \mu\text{m}$ (linke Kondensatseite), volle Punkte: $x = +110 \mu\text{m}$ (rechte Kondensatseite). Die Linien sind Fits der Messpunkte mit exponentiell gedämpften Sinusfunktionen, die jeweils nicht nur den dargestellten Bereich, sondern alle im oberen Graphen dargestellten Wartezeiten berücksichtigen.

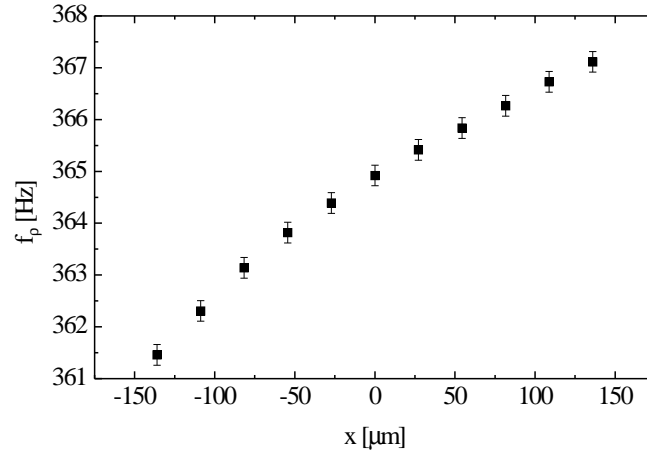


Abbildung 5.7: *Abhängigkeit der radialen Fallenfrequenz in der axial dekomprimierten Magnetfalle von der axialen Position. Der Messung liegen die in Abb. 5.6 dargestellten Daten zu Grunde. Die dargestellten Frequenzen wurden jeweils durch Fit einer exponentiell gedämpften Sinusfunktion an diese Daten bestimmt.*

dieses Heizen über Atomverluste detektierbar ist, wird das effektive Fallenpotential durch Setzen eines „RF-Messers“, d.h. Einstrahlen einer Radiofrequenz, begrenzt.

Im Gegensatz zur axialen Frequenz hängt die radiale Frequenz nach Gl. (4.2) und Gl. (4.3) vom Offsetfeld B_0 ab. Das Offsetfeld kann experimentell mithilfe der Radiofrequenz-Auskopplung ermittelt werden. Bei der Evaporation wird die Radiofrequenz fortlaufend abgesenkt, d.h. die Energie der ausgekoppelten Atome wird immer weiter verringert. Erreicht die Radiofrequenz $h\nu_{\text{RF}}$ dabei den Fallenboden⁵ $B_0 g_F \mu_B$, werden selbst die niederenergetischsten Atome ausgekoppelt. Die Radiofrequenz, ab der keine Atome nach der Evaporation übrig bleiben, ist daher ein direktes Maß für das Offsetfeld B_0 . Für ⁸⁷Rubidium gilt

$$B_0 = \frac{\nu_{\text{RF}}}{703\text{kHz/G}}. \quad (5.10)$$

Mithilfe von Gl. (4.2) und Gl. (4.3) kann mit dem so gemessenen Offsetfeld die erwartete radiale Fallenfrequenz berechnet werden. In allen Fällen ergab sich eine gute Übereinstimmung mit der direkt gemessenen Frequenz. Das Offsetfeld ergibt sich durch die Differenz der Felder der Dipol- und Helmholtzspulen. Kleine mechanische Änderungen der Spulen, beispielsweise bedingt durch Temperaturschwankungen, können zu merklichen Änderungen des Offsetfeldes führen. Die Genauigkeit, mit der die radiale Fallenfrequenz bekannt ist, ist nicht nur durch die Genauigkeit der Frequenzmessung bestimmt, sondern auch durch die

⁵Als Fallenboden wird der Energieabstand der verschiedenen m_F -Niveaus im Fallenzentrum bezeichnet.

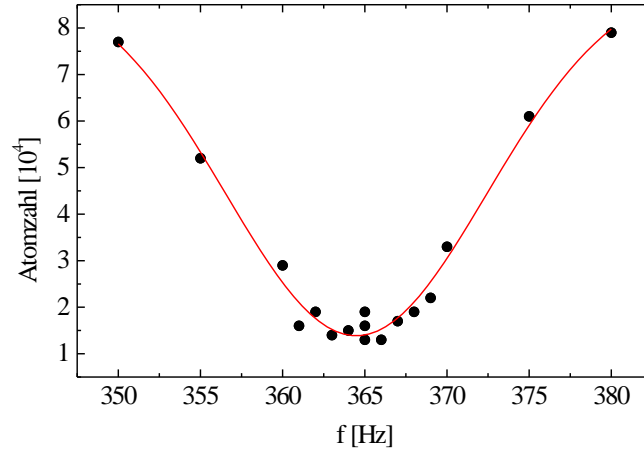


Abbildung 5.8: Messung der radialen Fallenfrequenz für Atome im $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Zustand in der Magnetfalle mit einem Offsetfeld von $B_0 = 0.59$ G und einer axialen Frequenz von 14 Hz. Die durchgezogene Linie ist ein Fit einer Gaußfunktion an die Messdaten. Die gemessene Frequenz beträgt 364.5 ± 0.2 Hz.

Genauigkeit, mit der das Offsetfeld bei der eigentlichen Messung kontrolliert werden kann.

5.1.4 Dichteverteilung, Temperatur und Teilchenzahlen

Insbesondere bei der Untersuchung temperaturabhängiger Effekte ist eine verlässliche Temperaturbestimmung Voraussetzung. Wird ein System bosonischer Atome unter die Kondensationstemperatur T_c gekühlt, kondensiert ein Teil der Atome. Es bildet sich eine bimodale Dichteverteilung, in dessen Zentrum sich das Bose-Einstein-Kondensat befindet (Abb. 5.2). Die nicht kondensierten Atome, die sogenannte thermische Wolke, kann zur Temperaturbestimmung genutzt werden. Ihre Dichteverteilung ist unter Verwendung der semiklassischen Näherung für ideale Gase nach Gl. (2.12) durch

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda_T^3} g_{3/2} \left(\exp \left\{ \left[\mu - \frac{m}{2} \sum_{i=1}^3 x_i^2 \omega_i^2 \right] / k_B T \right\} \right) \quad (5.11)$$

gegeben. Aus Gl. (5.11) folgt für die Dichteverteilung nach einer Flugzeit t nach Abschalten der Falle [98]

$$n_{\text{th}}(\mathbf{r}, t) = n_0 g_{3/2} \left(\exp \left\{ \frac{1}{k_B T} \left[\mu - \frac{m}{2} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \left(\frac{\omega_i^2}{1 + \omega_i^2 t^2} \right) \right) \right] \right\} \right), \quad (5.12)$$

mit $n_0 = \frac{1}{\lambda_T^3} \prod_{i=1}^3 (1 + \omega_i^2 t^2)^{-1/2}$. Sobald ihre Ursprungsgröße vernachlässigbar ist, also für große Fallzeiten $t \gg \omega_i$, wird die thermische Wolke rund, d.h. expan-

diert im Gegensatz zum Kondensat isotrop.⁶ Die Ursache ist, dass die thermische Atomverteilung in jeder Bewegungsrichtung dieselbe kinetische Energie besitzt. Gl. (5.12) zeigt, dass die Ausdehnung der thermischen Wolke durch ihre Temperatur bestimmt ist und demnach zur Temperaturbestimmung genutzt werden kann.

Bei Absorptionenaufnahmen wird die entlang der Achse des Abbildungssystems integrierte Dichteverteilung, die sogenannte Säulendichte, gemessen. Integration der Dichteverteilung Gl. (5.12) liefert

$$n_{\text{th}}^{(2\text{D})}(\rho, x, t) = \frac{n_{\text{th}}^{(2\text{D})}(0)}{g_2(1)} g_2 \left(\exp \left\{ \frac{\mu}{k_B T} - \frac{\rho^2}{\delta \rho^2} - \frac{x^2}{\delta x^2} \right\} \right) \quad (5.13)$$

mit

$$\delta x_i^2 = \frac{k_B T}{\frac{1}{2} m \frac{\omega_i^2}{1 + \omega_i^2 t^2}} \quad (5.14)$$

und der zentralen Dichte $n_{\text{th}}^{(2\text{D})}(0) = n_0 g_2(1) \delta \rho \sqrt{\pi}$. Hierbei wurde davon ausgegangen, dass die Achse des Detektionssystems das Kondensat in radialer Richtung durchläuft. Radiale Integration der Thomas-Fermi-Dichteverteilung für den Kondensatanteil Gl. (2.24) liefert

$$n_c^{(2\text{D})}(\rho, x, t) = n_c^{(2\text{D})}(0) \max \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{x^2}{L^2}, 0 \right)^{3/2} \quad (5.15)$$

mit $n_c^{(2\text{D})}(0) = \frac{4}{3} R \frac{\mu}{g}$.

Zum Bestimmen der Teilchenzahlen und Temperaturen wird daher folgende Verteilung an die gemessenen 2-dimensionalen Dichteverteilungen (siehe auch [98]) angefitet:

$$\begin{aligned} n(\rho, x) &= a_c \max \left(1 - \frac{(\rho - \rho_0)^2}{R^2} - \frac{(x - x_0)^2}{L^2}, 0 \right)^{3/2} \\ &+ \frac{a_{\text{th}}}{g_2(1)} g_2 \left(\exp \left\{ -\frac{(\rho - \rho_0)^2}{\delta \rho^2} - \frac{(x - x_0)^2}{\delta x^2} \right\} \right) + c. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Die Fitfunktion trägt der beobachteten bimodalen Struktur Rechnung und vernachlässigt den Einfluss des chemischen Potentials auf die thermische Verteilung. Die Fitparameter sind das Zentrum (ρ_0, x_0) der Atomverteilung sowie die

⁶Die hier vorgestellten Gleichungen vernachlässigen den Effekt der Wechselwirkungen auf die Dichteverteilungen der thermischen Atome und sind daher nicht gültig für thermische Wolken im hydrodynamischen Regime, in dem die mittlere freie Weglänge klein gegen die Kondensatlänge ist. In diesem Fall ist die Expansion der thermischen Wolke nicht isotrop [103]. Ebenso wird die gegenseitige Beeinflussung der Dichteverteilungen der thermischen Wolke und des Kondensatanteils vernachlässigt.

Amplituden (a_c, a_{th}) und Ausdehnungen ($R, L, \delta\rho, \delta x$) der Dichteverteilungen der thermischen Wolke und des Kondensats. Der Hintergrundoffset c wird gefittet, ist aber in der Regel aufgrund der guten Stabilität des Detektionslasers vernachlässigbar. Abbildung 5.9 (b) und (c) vergleicht die gemessene Dichteverteilung mit der Fitfunktion Gl. (5.16). Die der Fitfunktion zu Grunde liegende bimodale Dichteverteilung ist auch in den Messdaten deutlich sichtbar. Die Fitfunktion geht von einer Thomas-Fermi-Dichteverteilung für das Kondensat aus und berücksichtigt daher nicht die axialen Dichtemodulationen im Kondensatanteil, die durch Phasenfluktuationen bedingt sind. Die ansonsten exzellente Übereinstimmung bestätigt die Verwendung der Fitfunktion und zeigt insbesondere, dass ein solcher Fit zur Temperaturbestimmung herangezogen werden kann.

Da typischerweise die radiale Größe der thermischen Wolke zum Zeitpunkt der Detektion ein Vielfaches der Ursprungsgröße beträgt, wird die Temperatur mit der gemessenen radialen Größe $\delta\rho$ durch Gl. (5.14) ermittelt. Die Teilchenzahlen sind durch das Volumen unter den zweidimensionalen Dichteverteilungen gegeben. Sie lassen sich aus den Fitparametern mit

$$\begin{aligned} N_{\text{th}} &= \frac{g_3(1)}{g_2(1)} \pi a_{\text{th}} \delta x \delta \rho \\ N_0 &= \frac{2}{5} \pi a_c R L \end{aligned} \quad (5.17)$$

berechnen.

Aufgrund der Phasenfluktuationen bilden sich während der ballistischen Expansion Streifen in radialer Richtung des Kondensats. Zur Quantifizierung der Dichtemodulationen werden die gemessenen 2-dimensionalen Dichteverteilungen in radialer Richtung integriert. Die Integration der Dichteverteilungen Gl. (5.13) und Gl. (5.15) liefert

$$n_{\text{th}}^{(1D)}(x, t) = \frac{n_{\text{th}}^{(1D)}(0)}{g_{5/2}(1)} g_{5/2} \left(\exp \left\{ -\frac{x^2}{\delta x^2} \right\} \right) \quad (5.18)$$

$$n_c^{(1D)}(x, t) = n_c^{(1D)}(0) \max \left(1 - \frac{x^2}{L^2}, 0 \right)^2 \quad (5.19)$$

mit den zentralen Dichten $n_{\text{th}}^{(1D)}(0) = \pi g_{5/2}(1) n_0 \delta \rho^2$ und $n_c^{(1D)}(0) = \frac{\pi}{2} R^2 \frac{\mu}{g}$. Hierbei wurde in Gl. (5.18) das chemische Potenzial bereits vernachlässigt. Abb. 5.9 (d) zeigt die in radialer Richtung summierte Dichteverteilung und einen Fit mit der Summe aus Gl. (5.18) und Gl. (5.19). Auch hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Aufgrund der größeren Ausdehnung der thermischen Wolke im Vergleich zum Kondensat ist hier die Amplitude des thermischen Anteils im Vergleich zur Kondensatamplitude höher als in der zweidimensionalen Verteilung [Abb. 5.9 (b)].

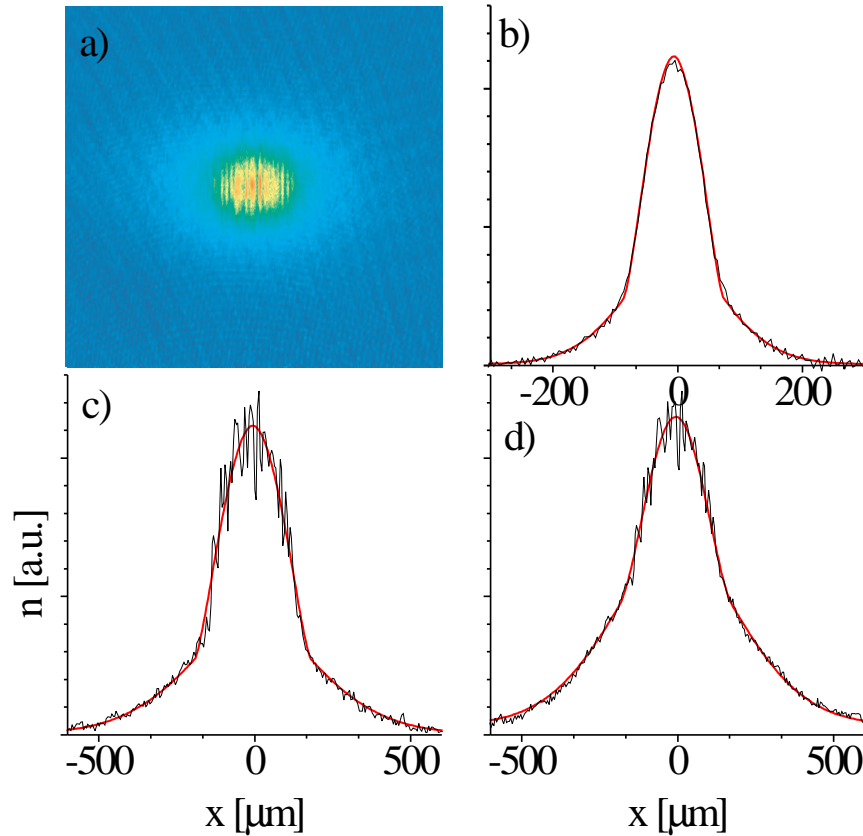


Abbildung 5.9: *Absorptionsaufnahme und Dichteprofile eines Bose-Einstein-Kondensats. Die Profile zeigen einen Schnitt durch die Dichteverteilung in radialer (b) und axialer (c) Richtung sowie die radial integrierte axiale Verteilung (d). Die dünne Linie ist die gemessene Dichteverteilung, die dicke Linie ein Fit mit der theoretisch erwarteten Verteilung. Im Absorptionsbild und in (c) und (d) sind die durch Phasenfluktuationen bedingten Dichtemodulationen im BEC-Anteil deutlich sichtbar. Die Temperatur beträgt 209 nK, die Fallenfrequenzen $\omega_\rho = 2\pi \times 370$ Hz und $\omega_x = 2\pi \times 3.4$ Hz, das Kondensat enthält $N_0 = 1.5 \times 10^5$ kondensierte Atome bei einer Gesamtzahl von 7×10^5 Atomen, aufgenommen nach einer Fallzeit von 19.2 ms.*

5.2 Untersuchung der ballistisch expandierten Dichteverteilung

Der erste Nachweis und viele der hier vorgestellten Messungen zur Charakterisierung von Phasenfluktuationen beruhen auf der Transformation von Phasenfluktuationen in Dichtemodulationen während der ballistischen Expansion. Insbesondere konnte durch Analyse der expandierten Dichteverteilung die theoretisch erwartete Abhängigkeit von den experimentellen Parametern bestätigt werden. Des Weiteren konnte gezeigt werden, dass auch im sogenannten Quasikondensat-Regime, das durch starke Phasenfluktuationen geprägt ist, Dichtefluktuationen für gefangene Kondensate unterdrückt sind. Da die meisten Messungen mit ballistisch expandierten Kondensaten durchgeführt werden, ist ein Verständnis der Expansion phasenfluktuierender Kondensate für Untersuchungen an stark elongierten BECs äußerst relevant.

Für die in diesem Abschnitt vorgestellten Messungen wurde eine Vielzahl von Fallenkonfigurationen eingesetzt, um den Einfluss des räumlichen Einschlusses auf die Phasenkohärenz gezielt zu untersuchen. Der erste Teil der Radiofrequenz-Evaporation wird für alle Experimente in der Grundkonfiguration der Magnetfalle mit einem Aspektverhältnis λ von 20 bis 30 durchgeführt. Die axiale Fallenfrequenz beträgt in dieser Konfiguration $\omega_x = 2\pi \times 14$ Hz für Kondensate im $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Zustand und $\omega_x = 2\pi \times 9.9$ Hz für Kondensate im $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand. Für die Charakterisierung der Phasenfluktuationen wurde für einige Messungen von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, die radiale Fallenfrequenz durch Überlagerung eines blauverstimmten Dipolpotenzials auf $\omega_\rho = 2\pi \times 508$ Hz bzw. $\omega_\rho = 2\pi \times 714$ Hz zu erhöhen (siehe Kapitel 4.1.1). Für weiterführende Messungen, die mit BECs im $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand durchgeführt wurden, ist die axiale Fallenfrequenz, wie in Kapitel 4.1.2 erläutert, auf $\omega_x = 2\pi \times 3.38$ Hz reduziert worden. In allen Fällen erfolgte der letzte Teil der Evaporation und damit die Kondensation in der endgültigen Fallenkonfiguration. Eine Ausnahme bilden die Messungen mit einem Aspektverhältnis $\lambda = 10$, für die zunächst in der Grundkonfiguration der Magnetfalle kondensiert wurde und anschließend die radiale Fallenfrequenz durch Erhöhung des Offsetfeldes adiabatisch verringert wurde. Für alle Messungen (außer dem Studium der Kondensatentstehung) wurde nach Erzeugung der Kondensate eine Wartezeit von mindestens 1 Sekunde eingefügt, um sicherzustellen, dass sich die Atomverteilung im thermodynamischen Gleichgewichtszustand befindet.⁷ Die untersuchten Kondensate sind (stark) elongiert, aber kinematisch nicht 1-dimensional. Für die meisten der vorgestellten Messungen beträgt das Verhältnis von chemischem Potenzial zur radialen Fallenfrequenz $\mu/(\hbar\omega_\rho) = 3 \dots 10$.

⁷Durch Messung der Dynamik des Kondensatwachstums (siehe Kapitel 5.2.6) wurde überprüft, dass diese Zeit zum Erreichen des thermodynamischen Gleichgewichts ausreicht.

5.2.1 Nachweis von Phasenfluktuationen

Der Nachweis von Phasenfluktuationen basierte auf der zum damaligen Zeitpunkt überraschenden Beobachtung, dass Streifen in der Dichteverteilung ballistisch expandierter Kondensate auftreten. Abbildung 5.10 zeigt beispielhafte Absorptionenaufnahmen expandierter Kondensate für verschiedene Temperaturen und Aspektverhältnisse der Falle. Die Achse der zylindersymmetrischen Kondensate liegt in horizontaler Richtung. Zum Zeitpunkt der Detektion übertrifft die radiale Größe bereits deutlich die axiale Größe der Kondensate, d.h. die anisotrope Expansion ist deutlich erkennbar. Die dargestellten radial integrierten Dichteprofile spiegeln die parabolische Dichteverteilung der Kondensate wider. Bemerkenswerterweise zeigen sich in einigen Fällen deutliche Streifen in der Dichteverteilung. Diese Streifen treten umso stärker hervor, je höher die Temperatur (untere Zeile in Abb. 5.10), je größer das Aspektverhältnis der Falle [Abb. 5.10 (c)] und je geringer die Zahl der kondensierten Atome ist. Da Phasenfluktuationen durch thermische Anregung niederenergetischer axialer Moden des Kondensats hervorgerufen werden, ist die Temperatur- und Fallengeometrieabhängigkeit bereits ein starkes Indiz dafür, dass die Streifen durch Phasenfluktuationen verursacht werden. Des Weiteren sind die Streifen für kurze Expansionszeiten nicht beobachtbar, sondern treten mit zunehmender Expansionszeit stärker hervor (Abb. 5.11), d.h. sie entstehen erst während der ballistischen Expansion. Die beobachteten Strukturen in der Dichteverteilung unterscheiden sich aufgrund der statistischen Natur der Phasenfluktuationen selbst bei identischer Präparation der Kondensate von Realisierung zu Realisierung. In Abb. 5.11 ist für $T \approx 400$ nK der Anteil der thermischen Wolke für eine Expansionszeit $t = 10$ ms in der Absorptionenaufnahme und für $t = 29.3$ ms im Profil zu erkennen.

Bevor die Abhängigkeiten von den experimentellen Parametern quantitativ untersucht werden, soll zunächst qualitativ erklärt werden, wie Phasenfluktuationen Streifen in der Dichteverteilung hervorrufen können. Da die lokale Geschwindigkeit in einem Bose-Einstein-Kondensat proportional zum Gradienten der Phase ist, sind Phasenfluktuationen mit axialen Geschwindigkeitsfeldern verknüpft.⁸ Im Gleichgewichtszustand ist die Dichteverteilung gefangener Kondensate jedoch nahezu unbeeinflusst von den Phasenfluktuationen, weil die nichtlineare mean-field-Wechselwirkung Dichtefluktuationen unterdrückt. Nach dem Abschalten der Falle aber nimmt die mean-field-Wechselwirkung aufgrund der Dichteverringerng schnell ab, so dass sich die axialen Geschwindigkeitsfelder in der Dichteverteilung niederschlagen. Dieser Vorgang ist in Abb. 5.12 skizziert. In Abwesenheit der mean-field-Wechselwirkung verhält sich ein Kondensat mit einer räumlich variierenden Phase analog zu einem Laserstrahl, dem mit einer Phasenplatte ein entsprechendes Phasenprofil aufgeprägt wurde. Ähn-

⁸Diese Geschwindigkeitsfelder können beispielsweise mit Bragg-Spektroskopie vermessen werden.

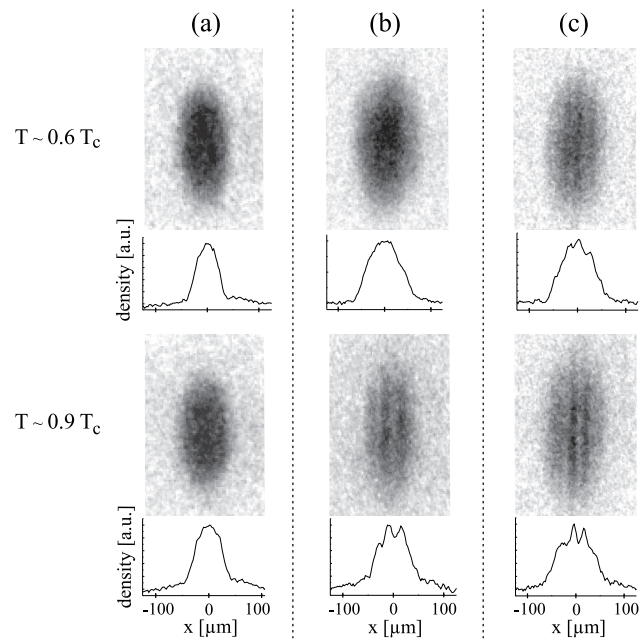


Abbildung 5.10: Absorptionaufnahmen und zugehörige radial integrierte Dichteprofile von Bose-Einstein-Kondensaten nach einer Expansionszeit von 25 ms. Gezeigt sind exemplarische Bilder für verschiedene Temperaturen der Atomwolken und mehrere Aspektverhältnisse der Falle [$\lambda = 10(a), 26(b), 51(c)$]. Die axiale Fallenfrequenz betrug jeweils $\omega_x = 2\pi \times 14$ Hz.

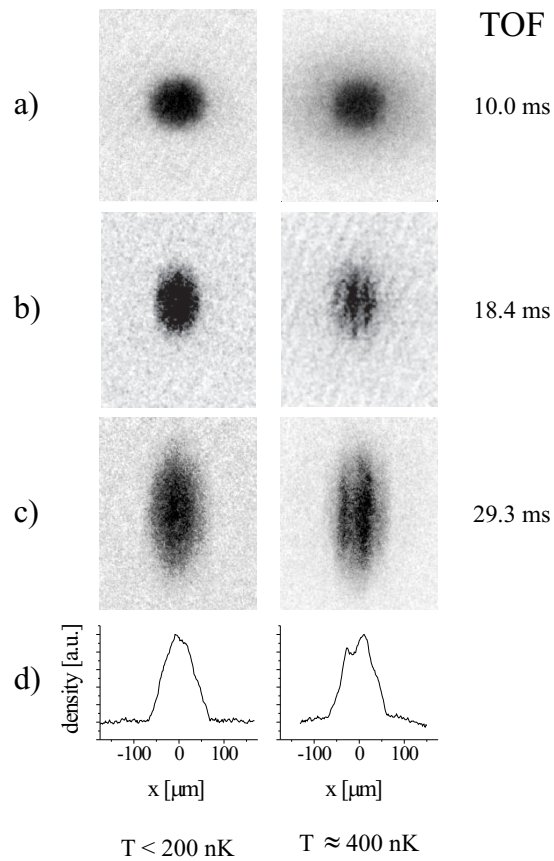


Abbildung 5.11: (a)-(c): Absorptionaufnahmen für verschiedene Expansionszeiten (TOF) und Temperaturen, mit $\omega_x = 2\pi \times 14$ Hz und $\omega_p = 2\pi \times 365$ Hz. (d): radial integrierte Dichteprofile für die in (c) dargestellten Kondensate.

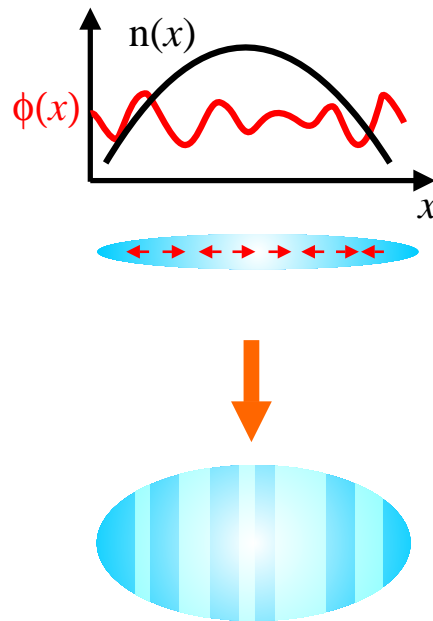


Abbildung 5.12: Vereinfachte Darstellung der Transformation der axialen Geschwindigkeitsfelder in Dichtemodulationen.

lich wie sich im Fernfeld eines solchen Laserstrahls Beugungseffekte zeigen, treten im Fall phasenfluktuerender Kondensate in der ballistischen Expansion Streifen in der Dichteverteilung auf.

5.2.2 Abhängigkeit von den experimentellen Parametern

Im vorherigen Abschnitt wurde erläutert, dass die Abhängigkeit der auftretenden Streifen von den experimentellen Parametern qualitativ dem für Phasenfluktuationen erwarteten Verhalten entspricht. In diesem Abschnitt soll eine quantitative Analyse der Abhängigkeiten von den experimentellen Parametern durchgeführt werden. Hierzu wird insbesondere ein Vergleich mit der in Kapitel 3.4 dargestellten Theorie der Expansion phasenfluktuerender Kondensate vorgenommen.

Für die quantitative Analyse war es wesentlich, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem die Ausprägtheit der Dichtemodulationen spezifiziert werden kann und das einen Vergleich mit der theoretischen Voraussage gestattet. Abbildung 5.13 stellt grafisch die Messung der Dichtemodulationen dar. Der Kondensatanteil folgt im Mittel der Thomas-Fermi-Dichteverteilung, die man für ein Kondensat in Abwesenheit von Phasenfluktuationen erhält, zeigt aber deutliche Schwankungen um diese Verteilung herum. Um diese Abweichungen zu quantifizieren, werden die radial integrierten Dichteverteilungen mit einer bimodalen Funktion, bestehend aus einem Thomas-Fermi-Profil entsprechend Gl. (5.19)

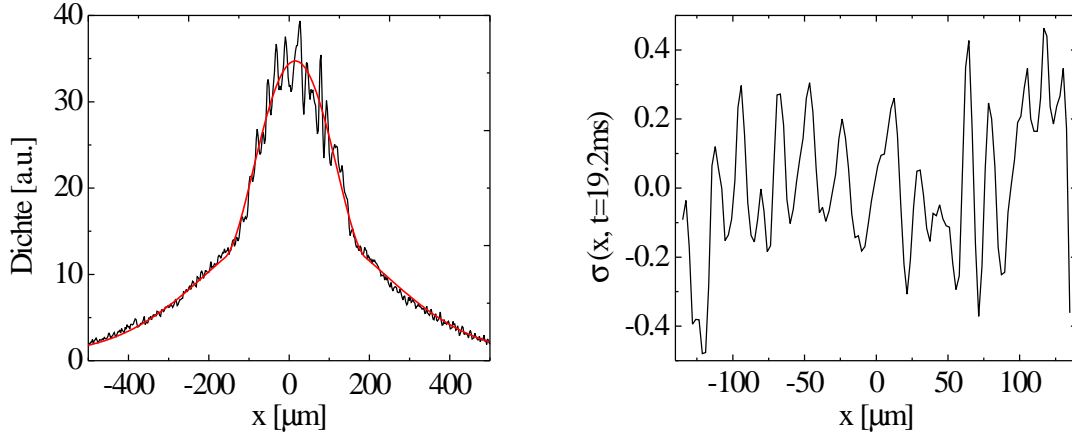


Abbildung 5.13: Quantifizierung der Dichtemodulationen. Links: Exemplarisches Dichteprofil und zugehöriger bimodaler Fit. Rechts: Abweichung des gemessenen Dichteprofiles vom Fit, normiert auf die gefittete Dichteverteilung des Kondensats. Dargestellt ist der Bereich $-0.8L < x < 0.8L$. Die experimentellen Parameter sind: $T = 250$ nK, $N_0 = 6.3 \times 10^4$, $\omega_x = 2\pi \times 3.38$ Hz und $\omega_\rho = 2\pi \times 370$ Hz, die Expansionszeit beträgt $t = 19.2$ ms.

für das BEC und einer Bose-verstärkten Gaußverteilung Gl. (5.18) für die thermische Wolke, gefittet. Die Standardabweichung σ_{BEC} der gemessenen Profile von der gefitteten Kurve wird als Maß für die Dichtemodulationen verwendet. In Abb. 5.13 ist die Differenz $\delta n_I(x, t)$ dieser beiden Kurven, normiert auf die gefittete Kondensat-Dichteverteilung $n_{I0}(x, t)$ dargestellt. Die Standardabweichung wird im zentralen BEC-Bereich betrachtet:

$$\sigma_{\text{BEC}} = \sqrt{\int_{\text{BEC}} (\sigma(x, t))^2 dx} \quad \text{mit} \quad \sigma(x, t) = \frac{\delta n_I(x, t)}{n_{I0}(x, t)}. \quad (5.20)$$

Soweit nicht anders spezifiziert, werden die Dichtemodulationen im Bereich $-0.5L < x < 0.5L$ ausgewertet. Für das in Abb. 5.13 dargestellte Beispiel ist $\sigma_{\text{BEC}} = 0.17$. Das für mehrere Messungen mit identisch präparierten Kondensaten gemessene mittlere σ_{BEC} erlaubt einen Vergleich mit den theoretisch erwarteten Dichtemodulationen Gl. (3.43).

Um einen möglichst umfassenden Vergleich mit der Theorie zu ermöglichen, wurden für eine Vielzahl von Temperaturen, Teilchenzahlen und Aspektverhältnisse die Dichtemodulationen in der ballistischen Expansion ausgewertet. Die Temperatur und Teilchenzahl sind experimentell nicht unabhängig voneinander, da mit sinkender Temperatur das Verhältnis von kondensierten zu nicht kondensierten Atomen ansteigt (siehe z.B. Abb. 5.3). Abbildung 5.14 zeigt die Zahl der kondensierten Atome bei diesen Messungen als Funktion der Temperatur. Die Strukturen in der Dichteverteilung sind dann detektierbar, wenn die Abweichungen vom Fit im ausgewerteten Bereich $\delta_{\text{BEC}} \equiv \sqrt{\int_{\text{BEC}} [\delta n_I(x, t)]^2 dx}$ größer

als das Hintergrundrauschen sind. Dieses wird ermittelt, indem die Abweichung der gemessenen Dichte vom Fit im Bereich der thermischen Wolke außerhalb des BEC-Anteils bestimmt wird: $\delta_T \equiv \sqrt{\int_T [\delta n_I(x, t)]^2 dx}$. Zur Integration wurde in der Auswertung der Bereich $-1.4L < x < -1.1L$ und $1.1L < x < 1.4L$ herangezogen. In Abb. 5.14 ist zusätzlich die Verteilung der Kondensate mit detektierbaren Dichtemodulationen ($\delta_{\text{BEC}} > 2\delta_T$) eingezeichnet. Es ist deutlich erkennbar, dass der Anteil der Kondensate mit detektierbaren Strukturen mit steigendem Aspektverhältnis zunimmt. Während für den schwächsten radialen Einschluß $\lambda = 10$ keine signifikanten Strukturen außerhalb der nahen Umgebung der kritischen Temperatur beobachtet werden, sind für den stärksten radialen Einschluß $\lambda = 51$ in einem großen Temperaturbereich Dichtemodulationen erkennbar. Ebenso nehmen die detektierten Strukturen für hohe Temperaturen und eine geringe Zahl kondensierter Atome zu. Qualitativ zeigt sich also die für Phasenfluktuationen erwartete Abhängigkeit von den experimentellen Parametern. Des Weiteren ist keine klare Übergangslinie zwischen den Bereichen detektierbarer und nicht detektierbarer Phasenfluktuationen zu erkennen, sondern der Übergang zwischen diesen beiden Regimen erfolgt in einem recht breiten Bereich. Dies spiegelt die statistische Natur der Phasenfluktuationen wider. Da die Ursache der Fluktuationen thermische Anregungen sind, können durch Temperaturverringerung die Phasenfluktuationen unter jede beliebige Detektionsempfindlichkeit reduziert werden. Nach Gl. (3.16) erfordert dies jedoch für sehr elongierte Fallen extrem niedrige Temperaturen bei einer hohen Anzahl kondensierter Atome und erschwert damit die experimentelle Erzeugung solcher BECs.

Physikalisch relevant ist nicht das technisch bedingte Rauschniveau δ_T , sondern die gemessenen Dichtemodulationen σ_{BEC} . Diese sind in Abb. 5.15 für vier verschiedene Aspektverhältnisse in Abhängigkeit der Temperatur dargestellt. Wie in Kapitel 3.4 erläutert, werden die Phasenfluktuationen des gefangenen Kondensats deterministisch in Modulationen der Dichteverteilung transformiert, so dass σ_{BEC} ein Maß für die Phasenfluktuationen zum Zeitpunkt des Ausschaltens der Falle darstellt. Da die Phase sowohl räumlich als auch zeitlich fluktuiert, können Dichteverteilungen identisch präparierter Kondensate erheblich unterschiedlich aussehen. Die relativ große Streuung der Datenpunkte spiegelt diese statistischen Schwankungen wider. Für alle Fallengeometrien erstrecken sich die Datenpunkte bis zu Temperaturen nahe der Übergangstemperatur $T \approx 0.9T_c$. Da T_c mit zunehmendem Einschluss steigt, erreichen die Datenpunkte für die größeren Aspektverhältnisse höhere Temperaturen. Es ist klar erkennbar, dass im Durchschnitt die Phasenfluktuationen kontinuierlich mit sinkenden Temperaturen abnehmen. Diese Abnahme ist sowohl durch die Reduzierung thermischer Anregungen als auch die Zunahme der Zahl kondensierter Atome (siehe Abb. 5.14) bedingt. Die kontinuierliche Abnahme zeigt, dass es keinen plötzlichen Phasenübergang zwischen phasenfluktuiierenden „Quasikondensaten“ und

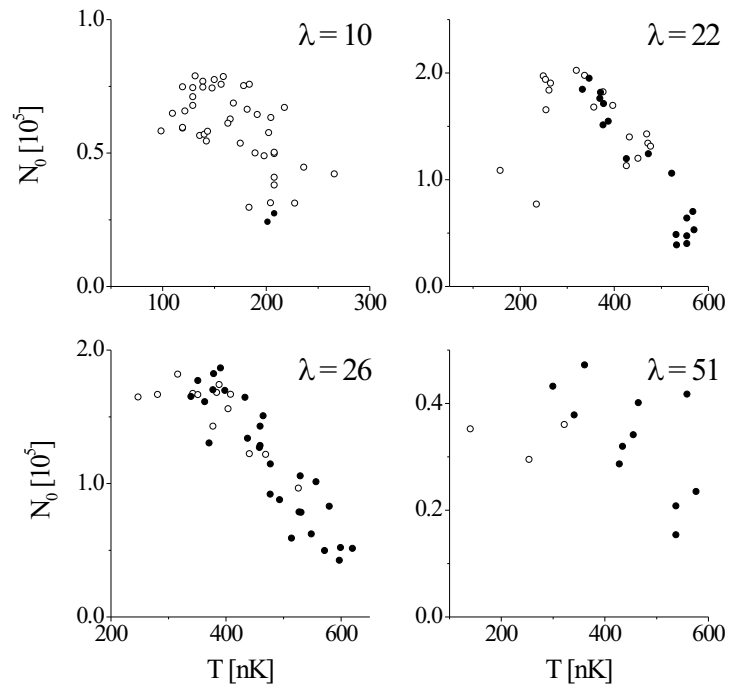


Abbildung 5.14: Zahl kondensierter Atome in Abhängigkeit der Temperatur bei den Abb. 5.15 und Abb. 5.16 zu Grunde liegenden Messungen. Eingezeichnet ist auch die Verteilung von Kondensaten mit detektierten Phasenfluktuationen. Weiße Punkte symbolisieren die Abwesenheit detektierbarer Strukturen ($\delta_{\text{BEC}} < 1.5\delta_T$), schwarze Punkte das Vorhandensein signifikanter Strukturen ($\delta_{\text{BEC}} > 2\delta_T$). Die axiale Fallenfrequenz beträgt für alle Messungen $\omega_x = 2\pi \times 14$ Hz, die Expansionszeit $t = 25$ ms.

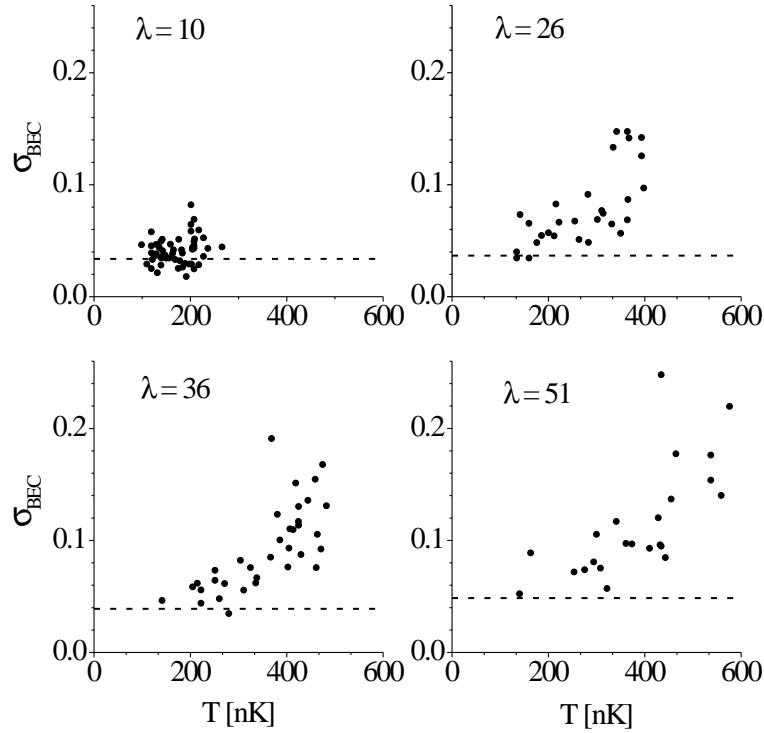


Abbildung 5.15: Gemessene Dichtemodulationen in Abhängigkeit der Temperatur für vier verschiedene Aspektverhältnisse. Die gestrichelte Linie repräsentiert das technische Rauschniveau.

phasenkohärenten BECs gibt, sondern dass es sich um eine kontinuierliche Veränderung der Phasenkohärenzeigenschaften handelt.

Um einen direkten Vergleich mit den theoretisch erwarteten Dichtemodulationen zu erhalten, wurden die gemessenen Abweichungen $\sigma_{\text{BEC}}^{(i)}$ über viele Realisierungen $i = 1 \dots N$ mit nahezu identischen Temperaturen und Teilchenzahlen gemittelt:

$$\overline{\sigma_{\text{BEC}}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (\sigma_{\text{BEC}}^{(i)})^2}. \quad (5.21)$$

In Abb. 5.16 werden die Messwerte den mit Gl. (3.43) berechneten Werten gegenübergestellt. Bei der Berechnung wird, wie in Kapitel 3.4 erläutert, die begrenzte experimentelle Auflösung berücksichtigt. Die Datenpunkte liegen sehr gut auf einer Geraden, d.h. die gemessenen Dichtemodulationen zeigen dieselbe Abhängigkeit von experimentellen Parametern wie die theoretische Berechnung. Die Messungen liefern daher eine Bestätigung für die erwartete Parameterabhängigkeit der Phasenfluktuationen. Die gemessenen Modulationen sind jedoch um ca. einen Faktor 2 geringer als die theoretisch vorausgesagten. Mögliche Ursachen für diese Diskrepanz sind Unsicherheiten in der optischen Auflösung von $3 \mu\text{m}$ (Mitotoyo M Plan Apo 5x-Objektiv) oder eine leichte Verkippung des

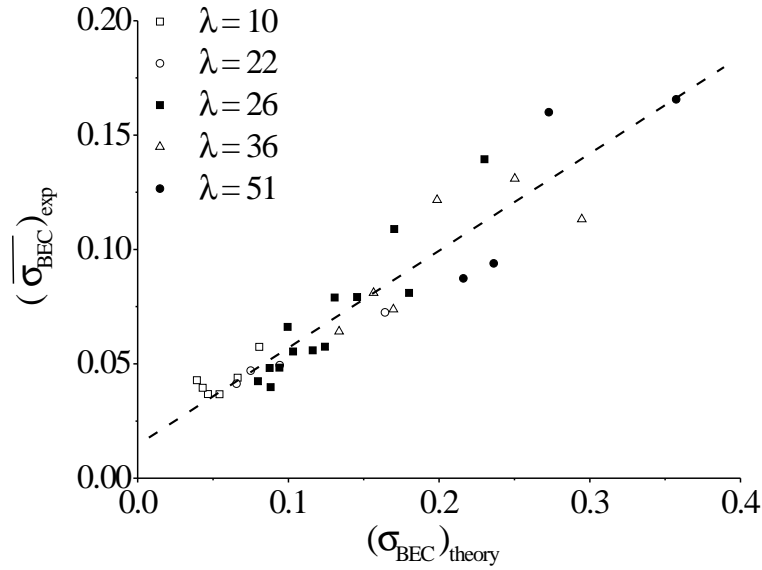


Abbildung 5.16: Gemessene mittlere Standardabweichung $(\overline{\sigma_{\text{BEC}}})_{\text{exp}}$ verglichen mit der theoretisch erwarteten $(\sigma_{\text{BEC}})_{\text{theory}}$. Die gestrichelte Linie ist ein Fit an die Datenpunkte.

Detektionslaserstrahles bezüglich der radialen Streifen. Diese systematischen Unsicherheiten wurden bei der im nächsten Abschnitt vorgestellten Messung deutlich reduziert. In diesem Fall ergibt sich auch eine quantitative Übereinstimmung von Theorie und Experiment.

5.2.3 Ortsabhängige Messung der Fluktuationen in der axial dekomprimierten Magnetfalle

Mit den vorgestellten Messungen konnten die erwarteten Abhängigkeiten von den experimentellen Parametern bestätigt werden. In diesem Abschnitt wird durch Eichung der experimentellen Parameter, insbesondere der optischen Auflösung, gezeigt, dass Theorie und Experiment innerhalb der systematischen Unsicherheiten der Parameterbestimmung auch quantitativ übereinstimmen. Da die Längenskala der Dichtemodulationen durch die Kondensatlänge gegeben ist, sind für Messungen, die auf der axial dekomprimierten Magnetfalle basieren, aufgrund der 3- bis 4-fach erhöhten Kondensatlänge erheblich mehr Strukturen zu erkennen. Dies wird beispielsweise durch Vergleich der Profile in Abb. 5.10 und 5.13 deutlich. Die verbesserte Auflösung im Vergleich zur typischen Strukturgröße verringert die Empfindlichkeit der Messung auf die experimentelle Auflösung und ermöglicht darüber hinaus, die Ortsabhängigkeit der Phasenfluktuationen zu untersuchen. Es wird gezeigt, dass diese Fluktuationen in Übereinstimmung mit dem theoretisch erwarteten Verhalten mit wachsender Distanz vom Kon-

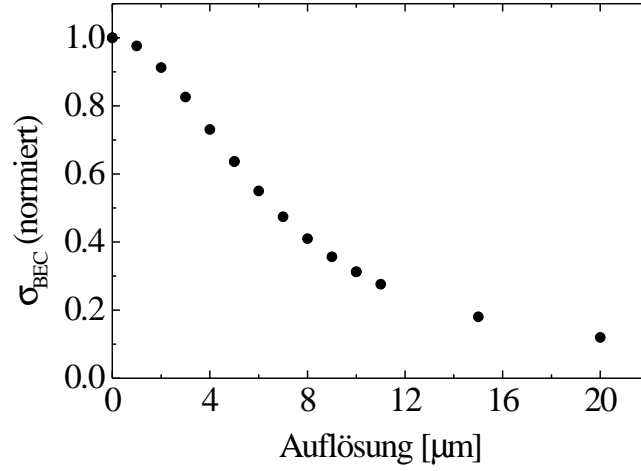


Abbildung 5.17: Berechnung des Einflusses der experimentellen Auflösung auf die beobachteten Dichtemodulationen. Die Berechnung erfolgte für $N_0 = 5 \times 10^4$, $\omega_x = 2\pi \times 3.4 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 370 \text{ Hz}$.

densatzentrum zunehmen.

Experimentelle Auflösung

Da die Dichtemodulationen Strukturen enthalten, die kleiner als die experimentelle Auflösung des Abbildungssystems sind, spielt diese bei der Messung der Dichtemodulationen eine wesentliche Rolle. Die Auflösung kann in der theoretischen Berechnung durch Faltung der Jacobi-Polynome in (Gl. 3.44) mit der entsprechenden Auflösungsfunktion (Punktbildfunktion) berücksichtigt werden. Abbildung 5.17 zeigt die mit einer gaußförmigen Auflösungsfunktion $\zeta(x) = e^{-x^2/\sigma^2}/\sqrt{\pi}\sigma$ berechneten Dichtemodulationen als Funktion der Auflösung σ für die in diesem Abschnitt vorliegenden experimentellen Parameter. Die deutliche Abnahme der beobachteten Dichtemodulationen mit steigendem σ demonstriert, dass zum quantitativen Vergleich zwischen Experiment und Theorie eine Eichung der tatsächlich vorliegenden Auflösung notwendig ist. Für die Messungen in diesem Abschnitt wurde das in Abschnitt 4.3 erläuterte Abbildungssystem verwendet, dessen Eichung unmittelbar vor diesen Messungen vorgenommen wurde und eine Auflösung von $\sigma = 4.42 \mu\text{m}$ ergeben hat.

Die Messungen wurden mit ballistisch expandierten Kondensaten nach einer Fallzeit von 19.2 ms durchgeführt. Die entsprechende Fallstrecke beträgt etwa 2 mm. Da das Abbildungssystem auf gefangene Kondensate fokussiert wurde, ist explizit überprüft worden, dass sich das Kondensat zum Zeitpunkt der Detektion in der Ebene der schärfsten Abbildung befindet. Hierzu wurden die Phasenfluktuationen selbst herangezogen. Da sich das gemessene Profil M aus der Faltung der echten Dichteverteilung E mit der Auflösungsfunktion R ergibt, gilt für die

Fouriertransformierten dieser Funktionen

$$\tilde{M} = \tilde{E} \tilde{R}. \quad (5.22)$$

Eine Funktion, die im Ortsraum schmal ist, ist im Fourierraum breit, und umgekehrt. Im Falle einer hohen Auflösung (kleines σ) ergibt sich also eine breite Funktion \tilde{R} . Die echte Dichteverteilung ist nicht bekannt, da sie aus den Phasenfluktuationen resultiert, aber der Erwartungswert der Dichteverteilung bzw. seiner Fouriertransformierten kann berechnet werden. Da E und R unabhängig sind, erhält man aus Gl. (5.22)

$$|\tilde{R}|^2 = \frac{\langle |\tilde{M}|^2 \rangle}{\langle |\tilde{E}|^2 \rangle}. \quad (5.23)$$

Für E wird die Theorie der Phasenfluktuationen verwendet, so dass $\langle |\tilde{E}|^2 \rangle$ durch numerische Simulation (siehe Kapitel 3.3) ermittelt werden kann. Demzufolge kann das Betragsquadrat der Fouriertransformierten der Auflösungsfunktion aus den Messdaten errechnet werden. Aus der in Kapitel 4.3 vorgenommenen Eichmessung sind die Auflösungsfunktionen für verschieden gute Fokussierungen des Abbildungssystems bekannt. Abbildung 5.18 vergleicht die aus der Auflösungsfunktion direkt berechneten $|\tilde{R}|^2$ mit den aus den Messdaten rekonstruierten Funktionen. Im Falle schlechter Fokussierung erhält man eine strukturierte Funktion, die mehrere Extrema besitzt. Dies spiegelt wider, dass die Auflösungsfunktion in diesem Fall nicht gaußförmig ist, sondern mehrere Minima und Maxima besitzt. Im Falle guter Fokussierung ist $|\tilde{R}|^2$ wesentlich glatter und das Hauptmaximum ist erheblich breiter. Dies bringt zum Ausdruck, dass die zugehörige Auflösungsfunktion weniger strukturiert ist und im Ortsraum erheblicher schmaler ist, d.h. eine bessere Auflösung bietet. Durch Analyse der gemessenen Dichteprofile ist es also durch Vergleich mit der Eichmessung möglich, auf die entsprechende experimentelle Auflösung zurückzuschließen. So kann ausgeschlossen werden, dass die Kondensate während ihres freien Falls die Ebene der schärfsten Abbildung verlassen⁹.

Vergleich von Experiment und Theorie

Abbildung 5.19 zeigt für verschiedene Temperaturen gemessene Dichtemodulationen. Die Berechnung der erwarteten Dichtemodulationen wird für die Teilchenzahl und Temperatur jeder Realisierung einzeln vorgenommen und erfolgt mit Gl. (3.43) unter Berücksichtigung der experimentellen Auflösung. Die systematischen Unsicherheiten in der Bestimmung der experimentellen Parameter

⁹Zusätzlich wurde überprüft, dass bei Dejustage des Abbildungssystems die beobachteten Dichtemodulationen sich im Durchschnitt reduzieren. Es sei erwähnt, dass aufgrund der starken Strukturierung der Auflösungsfunktion die beobachteten Dichtemodulationen erheblich weniger abnehmen als dies für eine Gaußfunktion (Abb. 5.17) der Fall wäre.

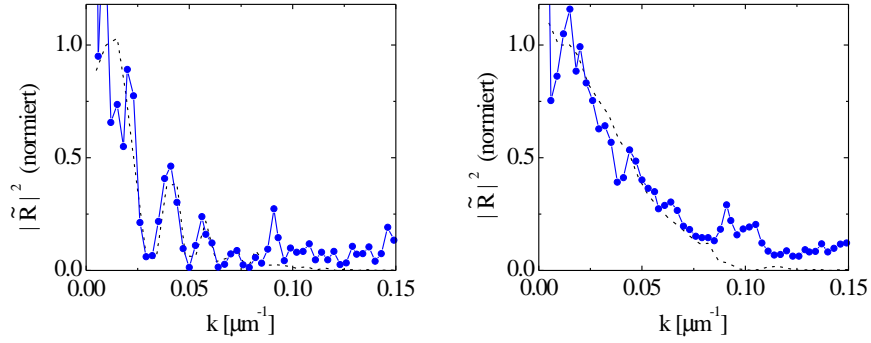


Abbildung 5.18: Vergleich der aus den Messungen mit phasenfluktuiierenden Kondensaten bestimmten Auflösungsfunktionen (Datenpunkte) mit den entsprechenden Auflösungsfunktionen aus der Eichmessung (gestrichelte Linie) im Fourierraum. Die gute Übereinstimmung zeigt, dass durch Analyse der gemessenen Dichteprofile auf die experimentelle Auflösung zurückgeschlossen werden kann. Links: bei schlechter Fokussierung des Abbildungssystems, Rechts: bei guter Fokussierung.

pflanzen sich in der Berechnung fort und ergeben insgesamt eine systematische Unsicherheit von etwa 30%, wobei allein die Hälfte dieses Fehlers aus der Unsicherheit der Teilchenzahlbestimmung von 30% herrührt. Alle gemessenen Datenpunkte sind im Rahmen der Unsicherheiten mit den theoretisch vorausgesagten konsistent. Insbesondere kann ausgeschlossen werden, dass Theorie und Experiment sich um einen die systematische Unsicherheit überschreitenden Faktor unterscheiden. Die Übereinstimmung ist für niedrige Temperaturen sehr gut, für höhere Temperaturen dagegen nimmt der Abstand zwischen gemessenen und berechneten Werten systematisch zu. Ein möglicher Grund ist, dass für diese Temperaturen aufgrund der starken Elongiertheit der Falle die Phasenfluktuationen und Dichtemodulationen sehr groß sind. Die Theorie der ballistischen Expansion basiert auf der Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung (3.31) durch einen störungstheoretischen Ansatz. Hierbei werden die Abweichungen von der Thomas-Fermi-Dichteverteilung in erster Ordnung behandelt, d.h. implizit als klein betrachtet. Dies führt z.B. dazu, dass bei Veränderung der entsprechenden experimentellen Parameter die von Gl. (3.43) vorausgesagten Dichtemodulationen unbegrenzt wachsen können. Ein solches Verhalten ist jedoch nicht realistisch, da die Dichte nicht negativ werden kann. Für die wärmste Temperatur in Abb. 5.19 beträgt die erwartete normierte Standardabweichung unter Berücksichtigung der experimentellen Auflösung $\sigma_{\text{BEC}} = 0.43$. Wie Abb. 5.17 zu entnehmen ist, betragen die Dichtemodulationen im BEC dann $\sigma_{\text{BEC}}^{(0)} = 0.43/0.63 = 0.68$. Dies entspricht in etwa der Standardabweichung einer zwischen 0 und 2 sinusförmig oszillierenden Dichteverteilung, d.h. die Abweichung von der Thomas-Fermi-Dichteverteilung ist in diesem Fall keineswegs klein.

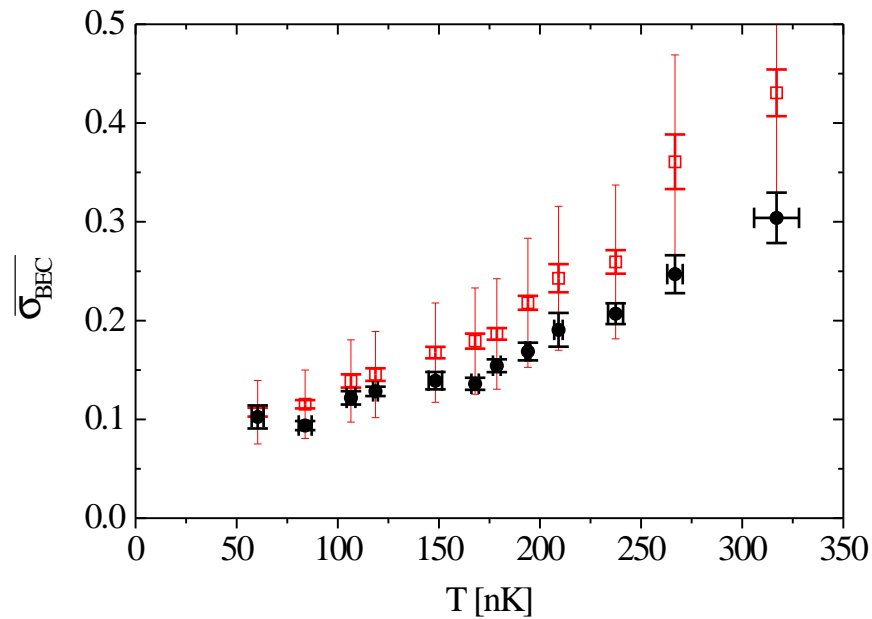


Abbildung 5.19: Gemessene (Kreise) und theoretisch erwartete (Quadrate) Dichtemodulationen in Abhängigkeit der Temperatur. Die Messungen wurden mit $\omega_p = 2\pi \times 370$ Hz und $\omega_x = 2\pi \times 3.38$ Hz nach einer Expansionszeit von 19.2 ms vorgenommen. Das berechnete σ_{BEC} berücksichtigt die experimentelle Auflösung, die systematischen Unsicherheiten (dünne Fehlerbalken) resultieren aus den Fehlern in der Bestimmung der experimentellen Parameter. Die übrigen Fehlerbalken geben die statistische Unsicherheit an. Jeder Datenpunkt basiert auf etwa 8 Realisierungen.

Ortsabhängigkeit

Im Randbereich der Bose-Einstein-Kondensate ist ihre Dichte gegenüber dem zentralen Bereich verringert. Es wird erwartet, dass die Phasenfluktuationen mit zunehmendem Abstand vom Kondensatzentrum zunehmen. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich diese Zunahme der Phasenfluktuationen in der ballistisch expandierten Dichteverteilung beobachten lässt.

Aufgrund ihrer großen Länge von 300 bis 400 μm eignen sich für diese Messungen besonders in der axial dekomprimierten Magnetfalle hergestellte Kondensate. Abbildung 5.20 zeigt eine ortsabhängige Auswertung der beobachteten Dichtemodulationen. Hierzu wurden die Kondensate in 7 Bereiche eingeteilt, in denen die Dichtemodulationen getrennt bestimmt wurden. Es ist klar ersichtlich, dass die Modulationen mit größer werdendem Abstand vom Kondensatzentrum zunächst leicht zunehmen und in Randnähe stark ansteigen. Die theoretisch erwarteten Dichtemodulationen werden durch Gl. (3.43) und (3.44) beschrieben. Um die erwartete Ortsabhängigkeit zu bestimmen, wurde $C(N_0, \omega_\rho, \omega_x, x, t)$ für die experimentellen Parameter der Messung berechnet. Dieser Wert ist proportional zur Standardabweichung σ_{BEC} . Um einen Vergleich mit der experimentell gemessenen Ortsabhängigkeit vorzunehmen, wurde daher $\alpha C(N_0, \omega_\rho, \omega_x, x, t)$ aufgetragen, wobei α so gewählt wurde, dass die Kurve mit dem ersten Datenpunkt übereinstimmt. Der Verlauf der Kurve entspricht in etwa $1/[1 - (x/L)^2]$ und resultiert aus dem entsprechenden Term in der Sinusfunktion von Gl. (3.44). Die Übereinstimmung mit den Messwerten ist in allen Datenpunkten ausgezeichnet, so dass die Zunahme der Dichtemodulationen zum Rand des Kondensats quantitativ bestätigt werden kann. Da die Dichtemodulationen im ballistisch expandierten Kondensat aus den Phasenfluktuationen des gefangenen Kondensats resultieren, stellt diese Messung indirekt auch eine Bestätigung für die erwartete Abhängigkeit der Phasenfluktuationen von der Position im Kondensat dar.

5.2.4 Expansionsdynamik

Im vorherigen Abschnitt wurden die Dichtemodulationen von Kondensaten nach einer festen Expansionszeit systematisch untersucht. In diesem Abschnitt wird die Entstehung der Dichtemodulationen während der ballistischen Expansion, d.h. die Expansionsdynamik phasenfluktuerender Kondensate betrachtet. Die Theorie der Expansion phasenfluktuerender Kondensate wurde in der Gruppe von L. Santos und M. Lewenstein zusammen mit der Gruppe von G.V. Shlyapnikov entwickelt. Da alle Bose-Einstein-Kondensate in stark elongierten Fallen mehr oder weniger ausgeprägte Phasenfluktuationen zeigen und für die Mehrzahl der Messungen ballistisch expandierte Kondensate verwendet werden, ist eine experimentelle Überprüfung der vorausgesagten Expansionsdynamik sehr wesentlich.

Für diese Untersuchungen wurden Kondensate im $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zu-

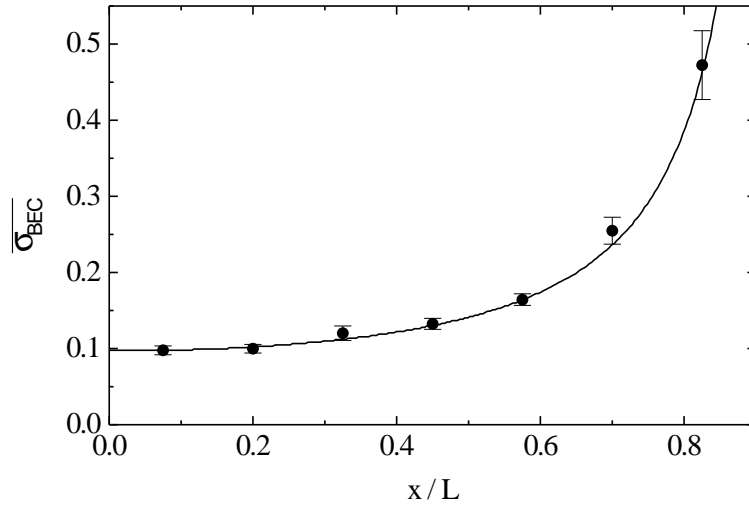


Abbildung 5.20: Ortsabhängigkeit der Dichtemodulationen. Der Messung liegen die für Abbildung 5.19 verwendeten Realisierungen mit $T < 130 \text{ nK}$ zu Grunde, die Fehlerbalken geben die statistische Unsicherheit der aus 35 Realisierungen bestehenden Messung an. Die Linie zeigt den nach Gl. (3.44) theoretisch erwarteten Verlauf.

stand in der axial dekomprimierten Magnetfalle mit $\omega_x = 2\pi \times 3.38 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 370 \text{ Hz}$ mit möglichst identischen Ensembleparametern präpariert. Bei den Messungen betrug die Zahl der kondensierten Atome etwa $N_0 \approx 7 \times 10^4$ und die Temperatur $T \approx 0.6T_c$. Unter diesen experimentellen Bedingungen ist die Phasenkohärenzlänge deutlich kleiner als die Kondensatgröße: $L_\phi/2L \approx 1/12$. Abbildung 5.21 zeigt nach verschiedenen Expansionszeiten t aufgenommene Dichteverteilungen. Die Detektion erfolgte im Falle der längeren Expansionszeiten mit resonanten Absorptionenaufnahmen, da diese für geringe Dichten das beste Signal/Rausch-Verhältnis bieten. Für kurze Zeiten wurde der Detektionslaser um 4 bzw. 6 GHz von der atomaren Resonanz verstimmt, um zu verhindern, dass sehr hohe optische Dichten die Sichtbarkeit der Dichtemodulationen beeinflussen. Während für $t = 4.6 \text{ ms}$ und $t = 9.6 \text{ ms}$ kaum Streifen in den Dichteverteilungen zu beobachten sind, treten für die längeren Expansionszeiten beträchtliche Dichtemodulationen auf. Dies zeigt, dass die Dichtemodulationen nicht von Anfang an vorhanden sind, sondern sich erwartungsgemäß erst während der Expansion herausbilden.

Nach den Ausführungen in Kapitel 3.4 (Abb. 3.6) wird erwartet, dass die Varianz σ_{BEC}^2 der Dichteverteilung in etwa linear mit der Expansionszeit zunimmt. Dieses Verhalten zeigt sich tatsächlich in den Daten, die im rechten Teil der Abbildung 5.21 in Abhängigkeit der Expansionszeit dargestellt sind. Um einen Vergleich mit den theoretisch erwarteten Dichtemodulationen vorzunehmen, wurden die Temperaturen und Teilchenzahlen für jede gemessene Dichteverteilung einzeln bestimmt. Für jede Realisierung wurden dann mit Gl. (3.43)

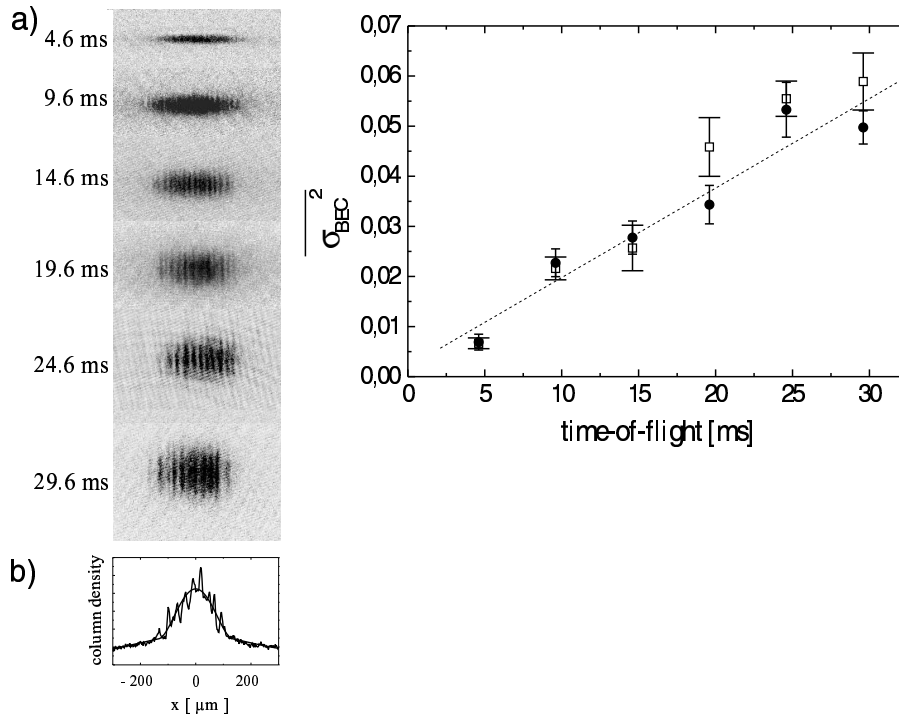


Abbildung 5.21: (a): Typische Dichteverteilungen nach verschiedenen Expansionszeiten. Aufgrund der destruktiven Detektion zeigt jedes Bild ein anderes Kondensat. (b): Radial integriertes Dichteprofil des untersten Bildes verglichen mit dem bimodalen Fit. Rechter Graph: gemessene (geschlossene Kreise) und theoretisch erwartete (offene Quadrate) Dichtemodulationen als Funktion der Expansionszeit. Die Linie ist ein Fit an die gemessenen Daten. Jeder Datenpunkt ist der Mittelwert aus etwa 15 Realisierungen, die Fehlerbalken stellen den statistischen Fehler dar.

die erwarteten Varianzen σ_{BEC}^2 berechnet und ihr Mittelwert (offene Quadrate) wurde mit dem Mittelwert der gemessenen Modulationen (geschlossene Kreise) verglichen. Die eingezeichneten Fehlerbalken in den gemessenen Werten stellen die statistische Unsicherheit berechnet aus der Streuung der Messwerte dar. Die statistischen Fehler in den berechneten Werten resultieren aus der Streuung der experimentellen Parameter. Die gute Übereinstimmung der gemessenen Werte mit den vorausgesagten Werten ist eine Bestätigung für die Theorie der ballistischen Expansion phasenfluktuierender Kondensate.

5.2.5 Unterdrückung von Dichtefluktuationen

Die theoretische Beschreibung von Phasenfluktuationen beruht auf der Voraussetzung [43, 44], dass Dichtefluktuationen für gefangene Bose-Einstein-Kondensate unterdrückt sind. Diese Voraussetzung ist für dreidimensionale BECs experimentell bestätigt [112]. Der Fragestellung, ob dies auch für stark

phasenfluktuierende Kondensate gilt, wird in diesem Abschnitt nachgegangen.

Die physikalische Ursache für die Unterdrückung von Dichtemodulationen ist, dass die Anregung von Dichteschwankungen Energien in der Größenordnung des chemischen Potentials erfordert, d.h. weit höhere Energien als zum Anregen von Phasenfluktuationen erforderlich sind. Deren Energiespektrum ist durch die niederenergetischen axialen Moden des Kondensats gegeben, dessen Größenordnung durch $\hbar\omega_x$ gegeben ist.¹⁰ Die im vorherigen Abschnitt gezeigten Messungen belegen klar, dass die beobachteten Dichtemodulationen für kurze Expansionszeiten verschwinden, d.h. im gefangenen Kondensat unterdrückt sind. Dies schließt jedoch nicht das Vorhandensein von Dichtefluktuationen auf einer Längenskala unterhalb der experimentellen Auflösung aus. So zeigen beispielsweise thermische Atomwolken den sogenannten Bunching-Effekt. Wenn ein Atom an einer Position \mathbf{r} detektiert wird, ist die Wahrscheinlichkeit, ein weiteres Atom dort vorzufinden, um einen Faktor 2 im Vergleich zu dem durch die mittlere Dichte erwarteten Wert erhöht. Diese Wahrscheinlichkeit wird durch die Intensitätskorrelationsfunktion

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv g^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (5.24)$$

an der Stelle $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ ausgedrückt. In Abwesenheit von Dichtefluktuationen ist $g^{(2)}(0) = 1$. Für thermische Atomverteilungen gilt demnach $g^{(2)}(0) = 2$.

Dieser Wert der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung kann durch Messung der in der ballistischen Expansion freigesetzten Energie, der sogenannten Release-Energie bestimmt werden [112]. Die Messung basiert darauf, dass Dichtefluktuationen aufgrund der nichtlinearen mean-field-Wechselwirkung zu einer Erhöhung der Wechselwirkungsenergie führen würden. Die Wechselwirkungsenergie $U \equiv \langle \hat{U} \rangle$ ist gegeben durch

$$\langle \hat{U} \rangle = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \int \langle \hat{n}^2(\mathbf{r}) \rangle d^3r = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} g^{(2)}(0) \int \langle \hat{n}(\mathbf{r}) \rangle^2 d^3r. \quad (5.25)$$

Im Thomas-Fermi-Regime ist die kinetische Energie des gefangenen Kondensats vernachlässigbar gegenüber der Wechselwirkungsenergie. Diese Wechselwirkungsenergie wird nach Ausschalten der Falle in kinetische Energie umgesetzt und führt daher zu einer Expansion der Atomwolke. Sie kann also durch Messung der Größe ballistisch expandierter Kondensate bestimmt werden. Abbildung 5.22 zeigt eine solche Messung der axialen und radialen Größe, die nach einer Fallzeit von 27 ms vorgenommen wurde. Bei dieser Messung wurde die Zahl der kondensierten Atome um mehr als eine Größenordnung variiert. Es ist deutlich zu sehen, dass erwartungsgemäß sowohl die radiale als auch die axiale Größe mit steigender Teilchenzahl zunehmen. Zum Vergleich sind die von der Gross-Pitaevskii-Gleichung erwarteten Größen eingezeichnet. Diese entsprechen in guter Näherung den von Gl. (2.35) für die ballistische Expansion von

¹⁰Für die meisten in dieser Arbeit vorgestellten Messungen ist $\mu/(\hbar\omega_x) \sim 100 \dots 500$.

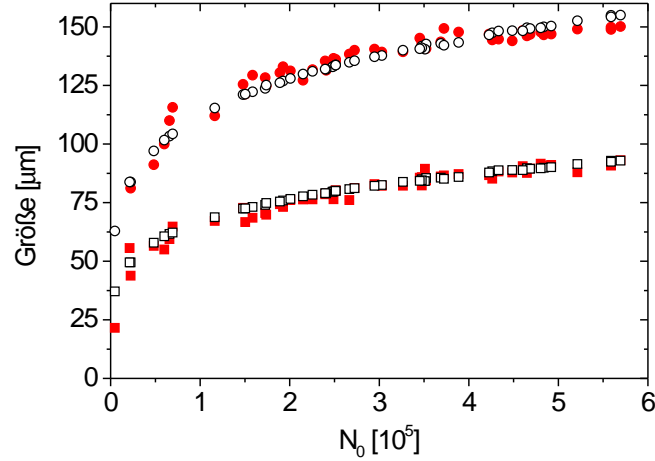


Abbildung 5.22: Vergleich der gemessenen (geschlossene Symbole) und unter der Annahme $g^{(2)}(0) = 1$ berechneten (offene Symbole) radialen (Kreise) und axialen (Quadrate) Kondensatgröße. Die Messungen wurden nach einer Fallzeit von 27 ms mit Kondensaten im $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand und Fallenfrequenzen von $\omega_x = 2\pi \times 9.9$ Hz und $\omega_x = 2\pi \times 298$ Hz durchgeführt.

Kondensaten im Thomas-Fermi-Regime gegebenen Werten. Aufgrund der Vernachlässigung der Grundzustandsenergie des radialen Fallenpotenzials ist die so berechnete radiale Größe um ca. 2.7% kleiner als die mit der Gross-Pitaevskii-Gleichung errechnete. Sowohl für die axiale als auch für die radiale Größe zeigt sich eine exzellente Übereinstimmung der gemessenen und der theoretisch erwarteten Größe. Da die Gross-Pitaevskii-Gleichung bzw. die Thomas-Fermi-Näherung implizit $g^{(2)}(0) = 1$ annehmen, bekräftigt diese Übereinstimmung bereits die Unterdrückung von Dichtefluktuationen. Es sei erwähnt, dass selbst radial symmetrische Dichtefluktuationen sowohl zu einer Vergrößerung des gefangenen Kondensats in axialer und radialer Richtung führen würden als auch zu einer Erhöhung der kinetischen Energie der ballistisch expandierenden Kondensate in beiden Richtungen.

Nach Gl. (5.25) berechnet sich

$$g^{(2)}(0) = \frac{U_{\text{exp}}}{U_{\text{theo}}} \quad (5.26)$$

als das Verhältnis der gemessenen Release-Energie zu der unter der Annahme von $g^{(2)}(0) = 1$ berechneten Wechselwirkungsenergie, die im Thomas-Fermi-Regime durch $U_{\text{theo}} = 2/7\mu N$ gegeben ist, wobei das chemische Potenzial mit Gl. (2.27) berechnet werden kann. Diese Berechnung von $g^{(2)}(0)$ setzt voraus, dass die in den Phasenfluktuationen gespeicherte Energie im Vergleich zur Wechselwirkungsenergie vernachlässigbar ist. Diese Energie kann mithilfe des Energiespektrums Gl. (3.3) der niederenergetischen axialen Moden und der Bose-Einstein-Besetzungsstatistik dieser Moden berechnet werden. Als Beispiel sei

angeführt, dass für $T = 400$ nK und $N_0 = 2 \times 10^5$ mit den vorliegenden Fallenfrequenzen die Energie in den Phasenfluktuationen etwa 0.6% der Wechselwirkungsenergie beträgt. Bei der ballistischen Expansion fließen nur etwa 0.27% der Wechselwirkungsenergie in die axiale Expansion, so dass die Release-Energie im Wesentlichen durch die radiale Expansion gegeben ist. Die gemessene Dichteverteilung in radialer Richtung ist parabelförmig und die radiale Größe der gefangenen Kondensate von gut $2 \mu\text{m}$ ist klein im Vergleich zur radialen Größe der ballistisch expandierten Kondensate von gut $100 \mu\text{m}$. Unter diesen Voraussetzungen ist die mit der radialen Expansion freigesetzte Energie

$$U_{\text{exp}} = \frac{1}{7} m \left(\frac{R}{t} \right)^2 N, \quad (5.27)$$

wobei R die gemessene radiale Größe ist (Radius der Parabel).¹¹ Abbildung 5.23 zeigt die mit Gl. (5.26) bestimmten Werte von $g^{(2)}(0)$. Im gesamten Temperaturbereich ist $g^{(2)}(0) \approx 1$ und spiegelt damit die gute Übereinstimmung der gemessenen und der unter Annahme von $g^{(2)}(0) = 1$ berechneten Kondensatgrößen wider. Der größte Beitrag zu den eingezeichneten systematischen Unsicherheiten resultiert aus dem systematischen Fehler bei der Teilchenzahlbestimmung von 30%. Zum Vergleich ist in der Abbildung die aus den experimentellen Parametern berechnete Phasenkohärenzlänge eingezeichnet. Mit steigender Temperatur nimmt die Phasenkohärenzlänge deutlich ab und unterschreitet die Kondensatlänge wesentlich. Der Übergang in den sogenannten Quasikondensat-Bereich wird also von der Messung erfasst. Dennoch sind die gemessenen Werte der Intensitätskorrelationsfunktion $g^{(2)}(0)$ nicht temperaturabhängig. Die Messungen geben eine obere Grenze für die Dichtefluktuationen in phasenfluktuiierenden Kondensaten und sind konsistent mit der erwarteten Unterdrückung von Dichtemodulationen. Sie grenzen die verwendeten Atomwolken klar von thermischen Atomwolken ab, die aufgrund des Bunching-Effektes Dichtefluktuationen auf kleinen Längenskalen zeigen und für die $g^{(2)}(0) = 2$ gilt.

5.2.6 Beobachtung der Phasenfluktuationen während der Entstehung des BECs

Die theoretische Beschreibung der Phasenfluktuationen basiert auf einer der Bose-Einstein-Statistik folgenden Besetzung der niederenergetischen axialen Moden des Kondensats und setzt damit voraus, dass sich das atomare Ensemble im thermischen Gleichgewicht befindet. In allen bisher vorgestellten Messungen wurde daher durch Einfügen einer Wartezeit sichergestellt, dass das thermische Gleichgewicht erreicht ist. In diesem Kapitel dagegen wird das atomare Ensemb-

¹¹Die Vergrößerung der gemessenen Kondensatgrößen durch die Bewegung des Kondensats während der Detektion ist in dieser Messung vernachlässigbar.

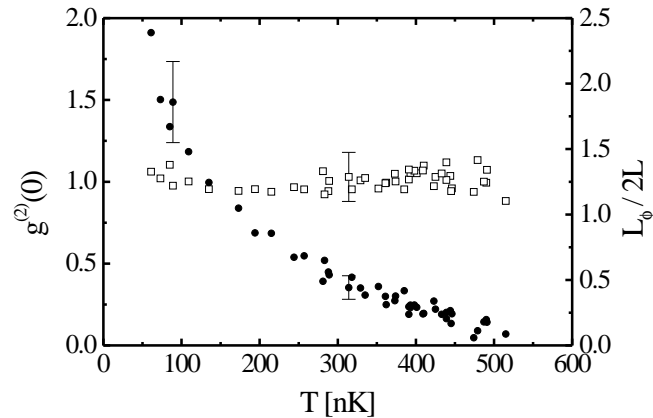


Abbildung 5.23: Offene Quadrate: Messung von $g^{(2)}(0)$ als Funktion der Temperatur für phasenfluktierende Kondensate. Geschlossene Kreise: Phasenkohärenzlänge, berechnet aus den experimentellen Parametern jedes Kondensats. Die Fehlerbalken geben die systematische Unsicherheit der Messung an. Die Messungen basieren auf den in Abb. 5.22 gezeigten Daten.

le gezielt in einem Nicht-Gleichgewichtszustand präpariert und die Phasenfluktuationen beim Entstehungsprozess der Bose-Einstein-Kondensate werden untersucht.

Für diese Untersuchungen werden thermische Wolken kurz oberhalb der Kondensationstemperatur präpariert, indem die Radiofrequenz-Evaporationsrampe kurz vor Erreichen des Phasenüberganges beendet wird. Anschließend werden durch schnelles Absenken der Radiofrequenz innerhalb von 5 ms die Atome hoher potenzieller Energie aus der Magnetfalle entfernt, d.h. die durchschnittliche Energie der Atome wird plötzlich verringert. Dadurch befindet sich das atomare Ensemble in einem Nicht-Gleichgewichtszustand und strebt durch rethermalisierende Stöße seinem neuen Gleichgewichtszustand entgegen, dessen Temperatur unterhalb der Kondensationstemperatur liegt. Nach Beenden der schnellen Radiofrequenz-Rampe wird dem System eine variable Thermalisierungszeit in der Magnetfalle eingeräumt, bevor die Atome durch resonante Absorptionen der ballistisch expandierten Verteilung detektiert werden. Durch Variieren der Thermalisierungszeit kann das Entstehen des Bose-Einstein-Kondensats beobachtet werden. Die Dynamik des Wachstumsprozesses des Kondensatanteils wurde beispielsweise von Gruppen in Boston [123] und München [124] detailliert untersucht. Das Hauptinteresse an dieser Stelle gilt daher der Dynamik der Phasenfluktuationen beim Wachsen des Kondensats.

Durch Anfitzen einer bimodalen Verteilung nach Gl. (5.16) wird für jede Realisierung die Temperatur und die Zahl der kondensierten Atome bestimmt. Zusätzlich werden die Dichtemodulationen, wie in Abschnitt 5.2.2 beschrieben, gemessen. Dadurch kann die Dynamik der Phasenfluktuationen simultan zum

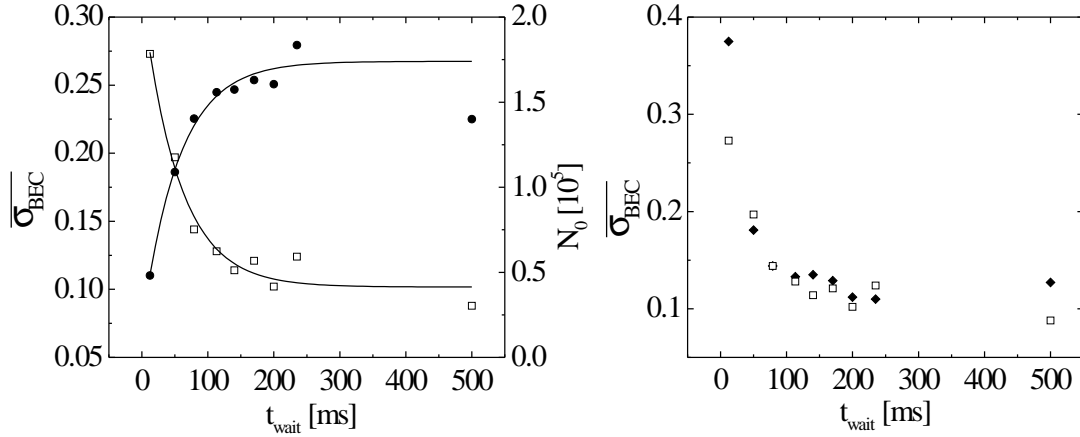


Abbildung 5.24: Links: Anzahl kondensierter Atome (geschlossene Kreise) und gemessene Dichtemodulationen σ_{BEC} (offene Quadrate) in Abhängigkeit der Thermalisierungszeit nach der schnellen RF-Evaporation. Die durchgezogenen Linien sind Fits an die Datenpunkte mit einer exponentiell abfallenden Funktion. Rechts: Vergleich der gemessenen mit den für einen Gleichgewichtszustand theoretisch erwarteten Dichtemodulationen (geschlossene Rauten). Die Messungen wurden mit $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Kondensaten in einer Falle mit $\omega_x = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 380 \text{ Hz}$ durchgeführt.

Kondensatwachstum beobachtet werden. Abbildung 5.24 zeigt, dass am Anfang des Kondensatwachstums die Phasenfluktuationen zunächst wesentlich größer als im Gleichgewichtszustand sind. Mit Zunahme der Zahl kondensierter Atome nehmen die Phasenfluktuationen kontinuierlich ab und streben auf ihren Gleichgewichtswert zu. Die Zeitkonstanten des Fits an die Datenpunkte betragen $55.6 \pm 9.7 \text{ ms}$ für die Teilchenzahl und $55.5 \pm 9.7 \text{ ms}$ für die Phasenfluktuationen. Die Messung zeigt demzufolge, dass die Phasenfluktuationen auf derselben Zeitskala ihrem Gleichgewichtszustand zustreben wie der Anteil der kondensierten Atome.

Da durch die schnelle Evaporationsrampe gezielt eine nicht-thermische Verteilung präpariert wird, ist eine Temperaturdefinition für diese Verteilung problematisch. Aus dem bimodalen Fit kann jedoch die Breite der thermischen Verteilung nach der ballistischen Expansion ermittelt werden. Wenn dieser Breite wie üblich eine Temperatur zugeordnet wird, können die theoretisch vorausgesagten Dichtemodulationen für ein Ensemble im thermischen Gleichgewicht berechnet werden. Abbildung 5.24 vergleicht die so berechneten Dichtemodulationen mit den gemessenen Modulationen. Interessanterweise zeigt sich, dass die Messwerte für diese Messungen gut durch die für Kondensate im thermischen Gleichgewicht entwickelte Theorie beschrieben werden können.

5.3 Interferometrische Messungen

Die bisher vorgestellten Messungen beruhen auf der Umwandlung von Phasenfluktuationen in Dichtemodulationen während der ballistischen Expansion der Bose-Einstein-Kondensate. Dieser vergleichsweise komplizierte Mechanismus ist experimentell sehr relevant, da die meisten Messungen mit BECs an ballistisch expandierten Kondensaten vorgenommen werden. Die direkteste Methode, Phasenkohärenzeigenschaften zu messen, ist jedoch die Phasen an verschiedenen Orten des Kondensats interferometrisch miteinander zu vergleichen. Zu diesem Zweck wurde ein Interferometrieschema eingesetzt, das es erlaubt, zwei Kopien eines Kondensats mit einem einstellbaren räumlichen Versatz miteinander zu interferieren. Durch Variation des räumlichen Versatzes oder Analyse des Interferenzmusters können die Phasenkohärenzeigenschaften bestimmt werden, d.h. es kann die Korrelationsfunktion erster bzw. zweiter Ordnung vermessen werden. Insbesondere wurde eine Methode entwickelt, die auf der Analyse räumlicher Intensitätskorrelationen basiert und in vielerlei Hinsicht analog zu dem Stellarinterferometer-Experiment von Hanbury-Brown und Twiss [50, 51] ist. Ähnlich wie dieses Interferometer dem Michelson-Stellarinterferometer aufgrund seiner Unempfindlichkeit bezüglich atmosphärischer Fluktuationen überlegen war, ist die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Methode [52, 53] unempfindlich bezüglich Fluktuationen der vom Interferometer aufgeprägten Phase. Mit dieser für den Bereich lasergekühlter Atome neuen Methode konnte erstmals die Korrelationsfunktion und damit auch die Phasenkohärenzlänge phasenfluktuerender Kondensate bestimmt werden.

5.3.1 Interferometrieschema

Das Interferometrieschema (Abb. 5.25) wird mithilfe zweier Strahlteiler realisiert, die auf der in Kapitel 2.3.2 vorgestellten Bragg-Beugung basieren. Durch Wahl der Zeit Δt zwischen den Pulsen kann der räumliche Versatz d der interferierenden Kopien des Kondensats eingestellt werden.

Die $\pi/2$ -Bragg-Pulse werden durch zwei entgegengesetzte, in Richtung der Kondensatachse propagierende Laserstrahlen realisiert. Der erste Bragg-Puls wird nach einer Expansionszeit von 2 ms eingestrahlt. Die Dichteverringern, die durch die Expansion erzielt wird, ist erforderlich, um den Einfluss des mean-fields auf die Interferometrie zu reduzieren und eine Streuung der Bragg-beugten Atome mit den nicht gebeugten Atomen weitestgehend zu verhindern (siehe Abb. 5.26). Bei der Bragg-Beugung werden zwei Bewegungszustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ miteinander gekoppelt, der innere Zustand der Atome bleibt unverändert. Auf den Bragg-beugten Anteil $|2\rangle$ wird dabei bei der Absorption und stimulierten Emission jeweils der Photonenimpuls übertragen, also insgesamt $\Delta p = 2\hbar k$. Der gebeugte Teil entfernt sich daher von dem ungebeugten Teil mit

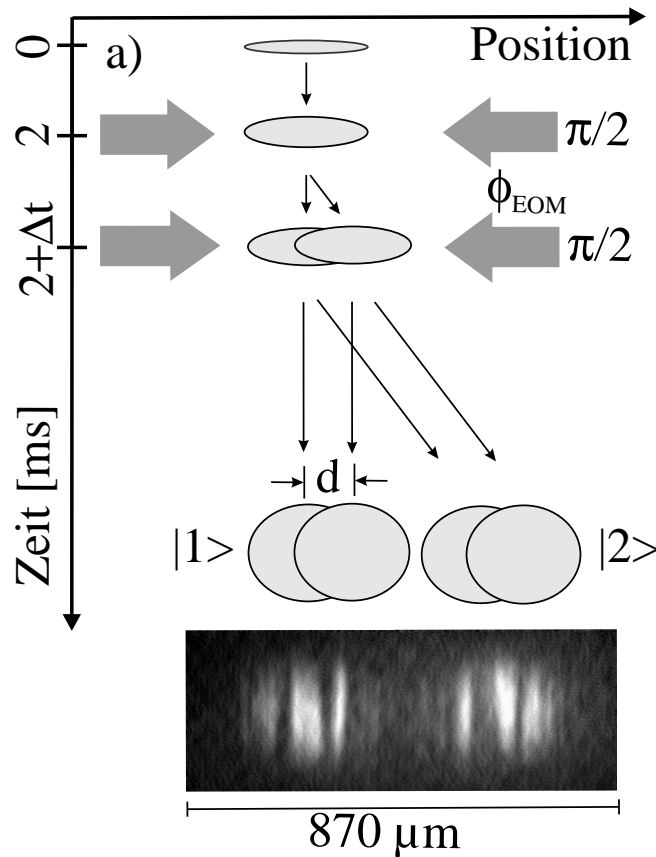


Abbildung 5.25: Das Interferometer wird durch zwei $\pi/2$ -Bragg-Pulse realisiert. Der räumliche Versatz d kann durch die Zeit Δt zwischen den Pulsen eingestellt werden. Die Phase eines der Bragg-Strahlen kann zwischen den Pulsen durch Verwendung eines elektro-optischen Modulators variiert werden. Das exemplarische Interferenzbild stammt von einem Kondensat mit einer Temperatur von 175 nK und einer Teilchenzahl $N_0 \approx 2.6 \times 10^5$ und besitzt damit eine Kohärenzlänge von $45 \mu\text{m}$. Der Versatz beträgt $d = 47 \mu\text{m}$.

einer Relativgeschwindigkeit von $\Delta v = 2v_{\text{rec}}$, wobei die Rückstoßgeschwindigkeit $v_{\text{rec}} = \hbar k/m$ ist. Der zweite Bragg-Puls hat die Funktion, die beiden Zustände wieder zu mischen und so die beiden Pfade miteinander zu interferieren. Da das Interferometer asymmetrisch ist, interferieren in jedem der beiden Interferometerausgänge die Wellenpakete mit einem räumlichen Versatz d . Dieser Versatz ist durch die Distanz $d = \Delta v \Delta t = 2v_{\text{rec}} \Delta t$ gegeben, die die gebeugten Atome in der Zeit Δt zwischen den Bragg-Pulsen zurücklegen. Aus technischen Gründen wurde ein Teil der Messungen mit Laserstrahlung auf der D1-Linie bei $\lambda = 795 \text{ nm}$ ($v_{\text{rec}} = 5.76 \mu\text{m/ms}$) durchgeführt, ein anderer auf der D2-Linie bei $\lambda = 780 \text{ nm}$ ($v_{\text{rec}} = 5.87 \mu\text{m/ms}$). Die Verstimmung von der atomaren Resonanz wurde mit $\Delta = 2.6 \text{ GHz}$ bzw. $\Delta = 5.6 \text{ GHz}$ so groß gewählt, dass spontane Streuprozesse vernachlässigbar sind. Die Frequenzdifferenz der beiden Laser wurde auf die Bragg-Resonanzbedingung eingestellt und betrug 16 kHz . Bei der Wahl der Pulsdauer ist zu beachten, dass sie nach Gl. (2.49) die Breite des Frequenzspektrums festlegt. Ist die spektrale Breite größer als der Frequenzabstand der verschiedenen Beugungsordnungen, findet signifikante Beugung in andere Beugungsordnungen statt (Raman-Nath-Regime); ist sie hingegen geringer als die interne Geschwindigkeitsverteilung des BECs, werden nur bestimmte Geschwindigkeitskomponenten gebeugt. Es wurde eine Pulsdauer von $100 \mu\text{s}$ gewählt, da sie hinreichend lang ist, um Beugung in andere Beugungsordnungen zu unterdrücken, aber dennoch kurz genug, um nicht selektiv bezüglich der Geschwindigkeitsverteilung des Kondensats zu sein. Wie in Kapitel 3.2.1 erläutert wird, ist die Impulsverteilung eines Kondensats durch die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion erster Ordnung gegeben. Ihre Breite ist im Quasikondensat-Regime proportional zur Phasenkohärenzlänge L_ϕ , d.h. die Breite der Impulsverteilung umgekehrt proportional zu L_ϕ . Quantitativ gilt für die volle Halbwertsbreite [114] $\Delta p = 1.34\hbar/L_\phi$. Dies bedingt nach Gl. (2.47) eine Verteilung der Resonanzfrequenz der Breite

$$\Delta\omega_{\text{res}} = 2.68 \frac{\hbar k}{mL_\phi} \quad (5.28)$$

In den hier vorgestellten Messungen lagen die Phasenkohärenzlängen zumeist im Bereich von 10 bis $100 \mu\text{m}$. Damit ergibt sich eine maximale Breite der Resonanzfrequenzverteilung von $\Delta\omega_{\text{res}}/(2\pi) \approx 250 \text{ Hz}$, die wesentlich geringer ist als die durch die Pulsdauer bedingte Frequenzbreite der Bragg-Laser von $\Delta\nu \approx 9 \text{ kHz}$. Abbildung 5.27 verdeutlicht grafisch, dass bei einer Pulsdauer von $100 \mu\text{s}$ keine Geschwindigkeitsselektivität zu erwarten ist. Die Abbildung zeigt ebenfalls, dass keine maßgebliche Beugung in andere Beugungsordnungen stattfindet. Bei der Resonanzfrequenz der -1 . Ordnung, die etwa 30 kHz von der $+1$. Ordnung entfernt liegt, liegt die spektrale Intensität um einen Faktor von ca. 10^6 unter ihrem Maximalwert und ist damit vernachlässigbar. Bei der 2 . Ordnung beträgt die spektrale Intensität etwa 5% des Maximalwertes. Da es

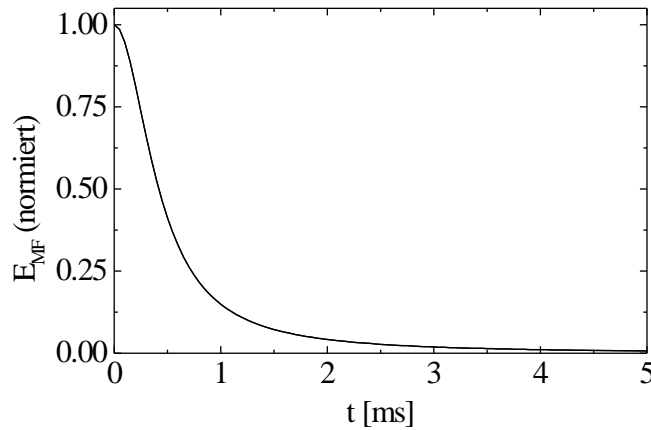


Abbildung 5.26: Die Verringerung der Dichte in der ballistischen Expansion geht einher mit einem Abbau der mean-field-Energie. Nach 2 ms sind etwa 95% der mean-field-Energie abgebaut, d.h. in kinetische Energie umgesetzt. Die Kurve wurde mithilfe der selbstähnlichen Expansion eines Kondensats im Thomas-Fermi-Regime mit Gl. (2.35) für $\omega_x = 2\pi \times 3.4 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 380 \text{ Hz}$ berechnet.

sich bei der Beugung 2. Ordnung jedoch um einen 4-Photonen-Prozess handelt, sind für diesen Prozess deutlich höhere Leistungen als für die Beugung erster Ordnung erforderlich.

Für die interferometrischen Messungen wird ein elektro-optischer Modulator (Linos LM0202) eingesetzt, mit dem die relative Phase zwischen den Kopien des Kondensats variiert werden kann. Er besteht aus vier doppelbrechenden KD*P Kristallen, deren Brechungsindex und damit optische Dicke durch Anlegen einer äußeren Spannung geändert werden kann. Der Modulator befindet sich im Strahlengang eines der Bragg-Laserstrahlen und ist so justiert, dass die Polarisation des Laserlichtes parallel zur optischen Achse der Kristalle verläuft, also die Polarisation nicht gedreht wird. Durch Wahl der äußeren Spannung kann somit die Phasenverzögerung des Laserstrahles eingestellt und zwischen den beiden Bragg-Pulsen verändert werden. Zur Eichung wurde der Modulator so justiert, dass seine optische Achse bezüglich der Polarisation des Laserlichtes verdreht ist und somit die Polarisation in Abhängigkeit der Steuerspannung gedreht wird. Die Polarisationsdrehung wurde mit einem Polarisator gemessen. Die in Abb. 5.28 gezeigte Eichkurve zeigt die erwartete sinusförmige Modulation der transmittierten Leistung. Die in Kapitel 5.3.3 dargestellten Messungen zur Kontrastinterferometrie bestätigen die gemessene Eichkurve.

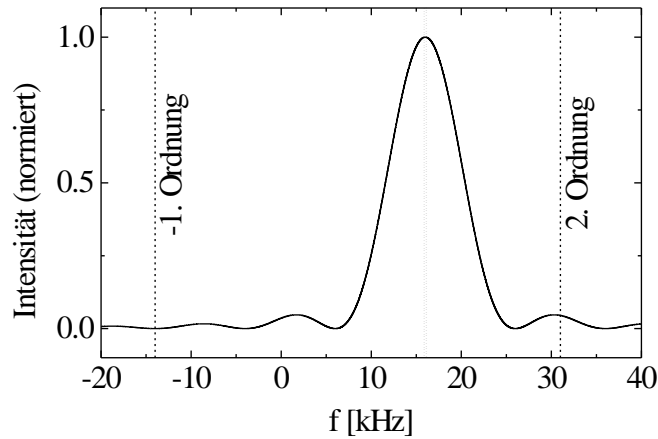


Abbildung 5.27: Spektrum der Differenzfrequenz für eine Pulsdauer von $100 \mu\text{s}$. Das Zentrum der Verteilung entspricht der Resonanzfrequenz für eine Beugung 1. Ordnung, die gestrichelten Linien zeigen die Resonanzfrequenzen für die $-1.$ und $2.$ Ordnung. Die gepunkteten Linien kennzeichnen die Frequenzbreite eines phasenfluktuierenden Kondensats mit einer Phasenkohärenzlänge von $10 \mu\text{m}$.

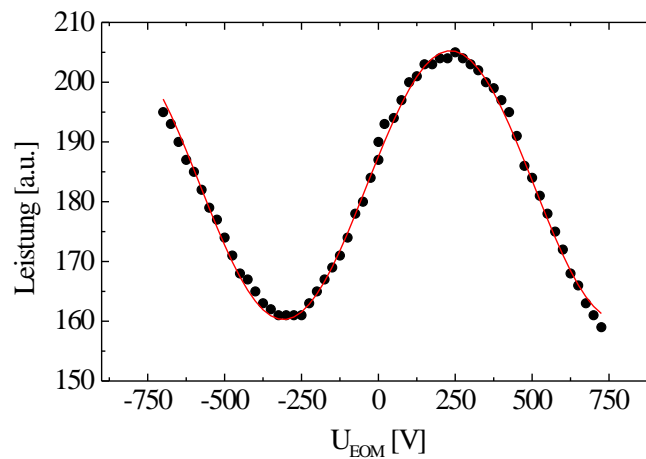


Abbildung 5.28: Eichung des elektro-optischen Modulators. Dargestellt ist die durch einen Polarisator transmittierte Lichtleistung in Abhängigkeit der Steuerspannung des Modulators. Die durchgezogene Linie ist ein Fit einer Sinusfunktion an die Datenpunkte. Eine volle Periode, d.h. eine Phasenänderung von 2π entspricht einer Änderung in der Steuerspannung von 1086 V .

5.3.2 Entwicklung der Wellenfunktion während der Interferometriesequenz

Die Pulsdauer der als Strahlteiler eingesetzten Bragg-Pulse ist so gewählt, dass die Bragg-Beugung nicht geschwindigkeitsselektiv ist. Des Weiteren ist das gesamte atomare Ensemble derselben Intensität ausgesetzt, so dass die Bragg-Beugung nicht ortsabhängig ist. Durch Impulsübertrag auf die gebeugten Atome sorgen die Strahlteilerpulse für den gewünschten räumlichen Versatz und prägen dem Kondensat globale, d.h. nicht ortsabhängige Phasen auf. Da die Phasenfluktuationen durch die Anregung axialer Moden bedingt sind und die Bragg-Beugung ebenfalls in axialer Richtung stattfindet, sind die Interferometriemuster radial symmetrisch. Deshalb werden zur Bestimmung der Phasenkohärenzeigenschaften die radial integrierten Dichteverteilungen verwendet, so dass hier eine eindimensionale Beschreibung ausreichend ist. Im Folgenden wird die Wellenfunktion und Intensität an den beiden Interferometerausgängen berechnet. Das Ergebnis bildet die Grundlage für die Extraktion der Korrelationsfunktion aus den experimentellen Daten.

Die Expansionsdynamik ist durch die in Kapitel 3.4 beschriebene Entwicklung der Dichte- und Phasenverteilung und durch die mean-field-Wechselwirkung der Atome bestimmt. Sie wird durch

$$\hat{\psi}^{\pm}(x, t) = \sqrt{\hat{n}_I(x, t)} e^{i\hat{\phi}^{\pm}(x, t)} \quad (5.29)$$

beschrieben. Hierbei ist die Dichteverteilung durch $\hat{n}_I(x, t) = n(x) + \hat{\delta}n_I(x)$ gegeben, wobei $n(x)$ die ballistisch expandierte Thomas-Fermi-Dichteverteilung ist und $\hat{\delta}n_I(x)$ die durch Gl. (3.39) beschriebenen Dichtemodulationen darstellt. Der Phasenoperator in Gl. (5.29) enthält die durch Gl. (3.41) gegebene fluktuierende Phase $\hat{\phi}(x, t)$ und den Einfluss des mean-field-Potenzials auf die Phasenentwicklung:

$$\hat{\phi}^{\pm}(x, t) = \hat{\phi}(x, t) \pm \beta x + \alpha(t)x^2 - \gamma(t). \quad (5.30)$$

Der räumlich konstante Term $\gamma(t)$ beschreibt die Phasenentwicklung aufgrund des chemischen Potentials, der lineare Term ist durch die mean-field-Abstoßung der gebeugten und ungebeugten Atomwolke bedingt und der quadratische Term resultiert aus der axialen Expansion. Aufgrund der stark elongierten Falle expandiert das Kondensat vorwiegend in radialer Richtung, so dass für typische Expansionszeiten die axiale Größe nur um ca. 1% zunimmt. Die damit verbundene quadratische Phase ist dennoch für die interferometrischen Experimente wesentlich und ist nach Gl. (2.31) durch

$$\alpha(t) = \frac{m \dot{b}_x(t)}{2\hbar b_x(t)} \quad (5.31)$$

gegeben. Nach Abbau der mean-field-Energie ist $\alpha(t)$ konstant. Für elongierte Kondensate gilt nach Gl. (2.37) und (2.21) für Fallzeiten $t \gg 1/\omega_\rho$

$$\alpha \approx \frac{m \omega_x^2 \pi}{2\hbar \omega_\rho^2}. \quad (5.32)$$

Aufgrund der mean-field-Wechselwirkung stoßen sich die Bragg-gebeugte und die nicht gebeugte Atomwolke voneinander ab. Dieser Effekt wird durch einen linearen Phasenterm [125]

$$\beta = \frac{m \delta v}{2\hbar}, \quad (5.33)$$

der proportional zur relativen Abstoßungsgeschwindigkeit δv der interferierenden Kondensate ist, beschrieben. Es sei angemerkt (siehe Kapitel 5.3.4), dass diese Abstoßungsgeschwindigkeit so gering ist, dass ihr Einfluss auf den räumlichen Versatz d zu vernachlässigen ist.

In jedem Ausgang des Interferometers überlagern sich zwei räumlich versetzte Kopien des Kondensats. Der Feldoperator des Kondensats zum Zeitpunkt t der Detektion im Ausgang |1) des Interferometers ist durch

$$\hat{\psi}^{(1)}(x, d, t) = c^{(1)} \hat{\psi}^+ \left(x - \frac{d}{2}, t \right) + c^{(2)} \hat{\psi}^- \left(x + \frac{d}{2}, t \right) \quad (5.34)$$

gegeben (siehe Abb. 5.25) und der im Ausgang |2) durch

$$\hat{\psi}^{(2)}(x', d, t) = c^{(3)} \hat{\psi}^+ \left(x - \frac{d}{2}, t \right) + c^{(4)} \hat{\psi}^- \left(x + \frac{d}{2}, t \right). \quad (5.35)$$

Hierbei wurde der Ursprung der x-Achse in die Mitte der beiden sich überlagernden Kopien im Interferometerausgang |1) gelegt und $x' = x + x_2$ berücksichtigt die räumliche Trennung x_2 der beiden Interferometerausgänge. Die Amplituden $c^{(i)}$ enthalten die durch die Bragg-Beugung aufgeprägte globale Phase und lassen sich durch sukzessive Verwendung von Gl. (2.53) berechnen.

Vor dem ersten Bragg-Puls zum Zeitpunkt t_1 sind alle Atome im ungebeugten Zustand, d.h. $c_1(t_1) = 1$ und $c_2(t_1) = 0$. Einsetzen dieser Koeffizienten in Gl. (2.53) und Verwendung der Bedingung für einen $\pi/2$ -Puls $\Omega_r t_B = \pi/2$ liefert

$$\begin{aligned} c_1(t_1 + t_B) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\Omega_1^{AC} + \Omega_2^{AC})t_B/2} e^{i\delta_{12}t_B/2} \\ c_2(t_1 + t_B) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i(\Omega_1^{AC} + \Omega_2^{AC})t_B/2} e^{-i\delta_{12}t_B/2} e^{-i(\delta_{12}t_1 + \phi_{\text{eff}}(t_1))}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Entwicklung des beim ersten Puls nicht gebeugten Teils beim Einstrahlen des zweiten $\pi/2$ -Pulses zur Zeit t_2 erhält man durch Verwenden von Gl. (2.53)

mit $c_1(t_2) = c_1(t_1 + t_B)$ und $c_2(t_2) = 0$:

$$\begin{aligned} c^{(1)} &= c_1(t_2 + t_B) = \frac{1}{2} e^{-i(\Omega_1^{AC} + \Omega_2^{AC})t_B} e^{i\delta_{12}t_B} \\ c^{(3)} &= c_2(t_2 + t_B) = -\frac{i}{2} e^{-i(\Omega_1^{AC} + \Omega_2^{AC})t_B} e^{-i(\delta_{12}t_2 + \phi_{\text{eff}}(t_2))}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Analog ist der beim ersten Puls gebeugte Teil durch $c_1(t_2) = 0$ und $c_2(t_2) = c_2(t_1 + t_B)$ definiert:

$$\begin{aligned} c^{(2)} &= c_1(t_2 + t_B) = -\frac{1}{2} e^{-i(\Omega_1^{AC} + \Omega_2^{AC})t_B} e^{i(\delta_{12}(t_2 - t_1) + \phi_{\text{eff}}(t_2) - \phi_{\text{eff}}(t_1))} \\ c^{(4)} &= c_2(t_2 + t_B) = -\frac{i}{2} e^{-i(\Omega_1^{AC} + \Omega_2^{AC})t_B} e^{-i\delta_{12}t_B} e^{-i(\delta_{12}t_1 + \phi_{\text{eff}}(t_1))}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Damit gilt für den Feldoperator in den Ausgängen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ des Interferometers

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(2)}(x', d, t) &= -\frac{i}{2} e^{-i(\Omega_1^{AC} + \Omega_2^{AC})t_B} \left[e^{-i(\delta_{12}t_2 + \phi_{\text{eff}}(t_2))} \hat{\psi}^+ \left(x - \frac{d}{2}, t \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\delta_{12}t_B} e^{-i(\delta_{12}t_1 + \phi_{\text{eff}}(t_1))} \hat{\psi}^- \left(x + \frac{d}{2}, t \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{i\phi_0} \left[\hat{\psi}^+ \left(x - \frac{d}{2}, t \right) + e^{i(\delta_{12}(\Delta t - t_B) + \delta\phi_{\text{eff}})} \hat{\psi}^- \left(x + \frac{d}{2}, t \right) \right] \\ \hat{\psi}^{(1)}(x, d, t) &= \frac{1}{2} e^{i\phi'_0} \left[\hat{\psi}^+ \left(x - \frac{d}{2}, t \right) - e^{i(\delta_{12}(\Delta t - t_B) + \delta\phi_{\text{eff}})} \hat{\psi}^- \left(x + \frac{d}{2}, t \right) \right], \end{aligned} \quad (5.39)$$

wobei $\Delta t = t_2 - t_1$ und $\delta\phi_{\text{eff}} = \phi_{\text{eff}}(t_2) - \phi_{\text{eff}}(t_1)$. Detektiert wird die Dichteverteilung $\hat{I}(x, d, t) = \hat{\psi}^\dagger(x, d, t) \hat{\psi}(x, d, t)$, so dass die Phase ϕ_0 , die sich durch Vergleich der beiden Ausdrücke für $\hat{\psi}^{(2)}$ definiert, irrelevant ist. Ähnliches gilt für ϕ'_0 . Die durch das Interferometer aufgeprägte Phasendifferenz ist

$$\phi_{\text{rel}} = \delta_{12}(\Delta t - t_B) + \delta\phi_{\text{eff}}. \quad (5.40)$$

Sie hängt von der Verstimmung δ_{12} der Bragg-Laserstrahlen von der Bragg-Resonanz und der Änderung $\delta\phi_{\text{eff}}$ ihrer relativen Phase zwischen den beiden Bragg-Pulsen ab. Um $\delta\phi_{\text{eff}}$ kontrollieren zu können, wurde in den Strahlengang eines der Bragg-Laserstrahlen ein elektro-optischer Modulator eingebaut.

Für die weitere analytische Berechnung des Interferometriesignals wird die Evolution der Phasen- und Dichteverteilung während der ballistischen Expansion vernachlässigt. Der Feldoperator an den Interferometerausgängen ist dann durch

$$\hat{\psi}^{(2)}(x', d) = \frac{1}{2} e^{i\phi_0} \left[\sqrt{n(x - \frac{d}{2})} e^{i\hat{\phi}^+(x - \frac{d}{2})} + \sqrt{n(x + \frac{d}{2})} e^{i\hat{\phi}^-(x + \frac{d}{2})} e^{i\phi_{\text{rel}}} \right]$$

$$\hat{\psi}^{(1)}(x, d) = \frac{1}{2} e^{i\phi_0} \left[\sqrt{n(x - \frac{d}{2})} e^{i\hat{\phi}^+(x - \frac{d}{2})} - \sqrt{n(x + \frac{d}{2})} e^{i\hat{\phi}^-(x + \frac{d}{2})} e^{i\phi_{\text{rel}}} \right] \quad (5.41)$$

gegeben, wobei

$$\hat{\phi}^\pm(x) = \hat{\phi}(x) \pm \beta x + \alpha x^2. \quad (5.42)$$

Hierbei ist $\hat{\phi}(x)$ durch Gl. (3.5) gegeben und der räumlich konstante Phasenterm $\gamma(t)$ aus Gl. (5.30) ist für die interferierenden Atomwolken identisch und wurde daher in ϕ_0 bzw. ϕ_0' absorbiert; $n(x)$ ist die expandierte Thomas-Fermi-Dichteverteilung.

Diese Vernachlässigung der Evolution der Phasen- und Dichteverteilung erleichtert die Analyse wesentlich und liefert eine exzellente Beschreibung der interferometrischen Messungen. Dies lässt sich wie folgt verstehen: Mit der theoretischen Beschreibung der Expansion phasenfluktuierender Kondensate kann die erwartete Änderung der Phase bei der Expansion berechnet werden. Hierzu wird wie in Kapitel 3.3 beschrieben die Phasenverteilung mit Zufallsvariablen simuliert. Aus dieser Phasenverteilung erhält man unter Verwendung von Gl. (3.39) die Dichteverteilung in der ballistischen Expansion, die durch numerisches Berechnen von Gl. (3.41) die entsprechende Phasenverteilung liefert. Durch vielfaches Wiederholen dieser Simulation kann die Standardabweichung von der ursprünglichen Phasenverteilung ermittelt werden. Sie ist für alle in den interferometrischen Messungen verwendeten experimentellen Parameter kleiner als $\pi/10$ und rechtfertigt damit die Vernachlässigung der Phasenevolution. Die bei der Expansion phasenfluktuierender Kondensate entstehenden Dichtemodulationen zeichnen sich durch wesentlich kleinere Strukturen als die beobachteten Interferenzmuster aus. Da sie diese Muster überlagern, aber die Struktur des Musters kaum beeinflussen, wird kein wesentlicher Einfluss auf die Messung der Korrelationsfunktionen erwartet. Dieses qualitative Argument wird durch Vergleich einer numerischen Simulation, die die Entwicklung der Phasen- und Dichteverteilung berücksichtigt, mit dem analytischen Resultat in Kapitel 5.3.4 verifiziert.

Dichteverteilung

Detektiert wird nicht die Wellenfunktion, sondern die Dichteverteilung in den Ausgängen des Interferometers. Diese wird durch den Operator $\hat{I} = \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}$ beschrieben und lautet:

$$\begin{aligned} \hat{I}^{(2)}(x', d) &= \frac{1}{2} \left\{ n'(x) + \frac{1}{2} n''(x) \left(e^{i(\hat{\phi}^+(x - \frac{d}{2}) - \hat{\phi}^-(x + \frac{d}{2}) - \phi_{\text{rel}})} + \text{h.c.} \right) \right\} \\ \hat{I}^{(1)}(x, d) &= \frac{1}{2} \left\{ n'(x) - \frac{1}{2} n''(x) \left(e^{i(\hat{\phi}^+(x - \frac{d}{2}) - \hat{\phi}^-(x + \frac{d}{2}) - \phi_{\text{rel}})} + \text{h.c.} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

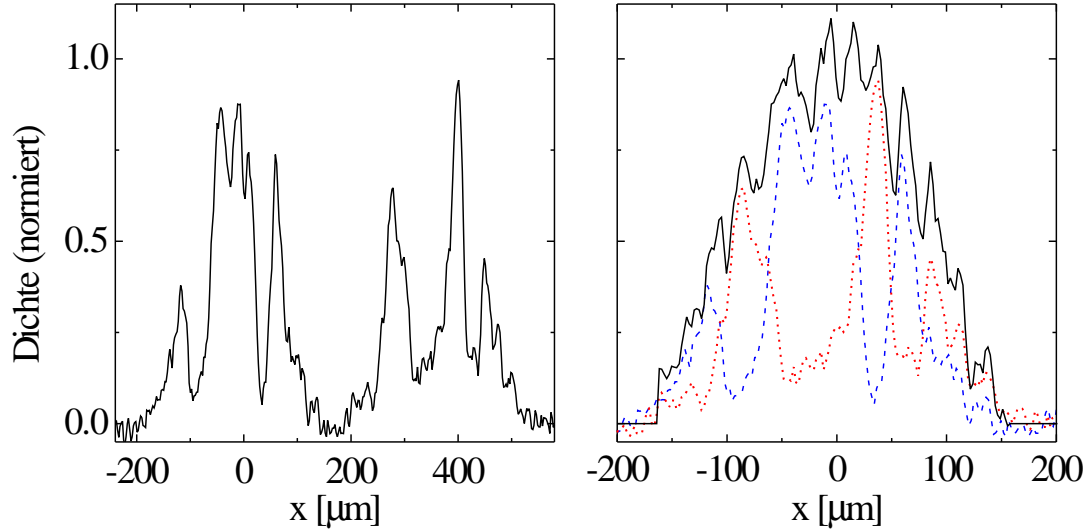


Abbildung 5.29: Links: Exemplarisches Dichteprofil in beiden Ausgängen des Interferometers. Rechts: Direkter Vergleich der beiden Ausgänge. Das Dichteprofil im rechten Ausgang wurde um die räumliche Trennung x_2 der Interferometerausgänge verschoben. Die durchgezogene Linie ist die Summe der Dichten in beiden Ausgängen. Die experimentellen Parameter sind: $d = 47 \mu\text{m}$, $N_0 = 2.6 \times 10^5$, $T = 175 \text{ nK}$, $\omega_p = 2\pi \times 300 \text{ Hz}$, $\omega_x = 2\pi \times 3.38 \text{ Hz}$.

mit

$$n'(x) = \frac{1}{2} \left[n\left(x - \frac{d}{2}\right) + n\left(x + \frac{d}{2}\right) \right]$$

$$n''(x) = \sqrt{n\left(x - \frac{d}{2}\right)n\left(x + \frac{d}{2}\right)}. \quad (5.44)$$

Falls der räumliche Versatz deutlich kleiner als die Kondensatgröße ist, gilt $n'(x) = n''(x) = n(x)$. Nach Gl. (5.43) ist das gemessene Interferenzmuster durch die Phasenverteilung im ursprünglichen Kondensat und eine durch das Interferometer aufgeprägte globale Phase bestimmt und ermöglicht daher, die Phasenkohärenzeigenschaften zu vermessen. Das unterschiedliche Vorzeichen des Interferenzterms bringt zum Ausdruck, dass beide Interferometerausgänge komplementär sind (Abb. 5.29). Die Summe der Dichte in beiden Ausgängen ist immer die Dichteverteilung, die sich ohne Interferenz ergeben würde. Die verbleibenden Streifen in der summierten Dichteverteilung in Abb. 5.29 sind die aus den Phasenfluktuationen in der Expansion entstehenden Dichtemodulationen.

Da beide Interferometerausgänge komplementär sind, wird zur Berechnung des Interferometriesignals nur der Ausgang $|2\rangle$ des Interferometers verwendet: $\hat{I}(x, d) \equiv \hat{I}^{(2)}(x', d)$. Unter Verwendung von Gl. (5.43) und

$$\hat{\phi}^+\left(x - \frac{d}{2}\right) - \hat{\phi}^-\left(x + \frac{d}{2}\right) = \hat{\phi}\left(x - \frac{d}{2}\right) - \hat{\phi}\left(x + \frac{d}{2}\right) - 2(\alpha d - \beta)x \quad (5.45)$$

lässt sich die Dichteverteilung berechnen:

$$\hat{I}(x, d) = \frac{1}{2} \left\{ n'(x) + n''(x) \cos[2(\alpha d - \beta)x + \phi_{\text{rel}} + \hat{\phi}(x + \frac{d}{2}) - \hat{\phi}(x - \frac{d}{2})] \right\}. \quad (5.46)$$

Die mean-field bedingte Expansion und Abstoßung der gebeugten und ungebeugten Atome führen zu dem in x linearen Phasenterm. Dieser verursacht bei Abwesenheit von Phasenfluktuationen regelmäßige Streifen in der Dichteverteilung, die durch den Kosinus-Term beschrieben werden. Da zur Durchführung der Experimente eine sehr elongierte Fallenkonfiguration realisiert wurde und beim Start der Interferometriesequenz der Großteil der mean-field-Energie abgebaut ist, treten in diesen Experimenten nur wenige mean-field bedingte Streifen auf. Aus Gl. (5.46) ist ersichtlich, dass die Anzahl dieser Streifen mit steigendem Versatz d wächst. Für $d = 23.5 \mu\text{m}$ ($\Delta t = 2 \text{ ms}$) beträgt die Streifenperiode typischerweise etwa $1.7L$, d.h. es sind insgesamt nur 1 bis 2 dieser Streifen sichtbar (siehe auch Kapitel 5.3.4). Phasenfluktuationen führen jedoch zu einem zufälligen, nicht vorhersagbaren Beitrag zur Phase des Kosinus-Terms und dadurch zu einem unregelmäßigen Streifenmuster, wie es beispielsweise in Abb. 5.29 zu sehen ist.

Unter Verwendung von Gl. (5.46) und

$$\langle e^{i(\hat{\phi}(x-\frac{d}{2})-\hat{\phi}(x+\frac{d}{2}))} \rangle = \langle e^{-i(\hat{\phi}^\dagger(x-\frac{d}{2})-\hat{\phi}^\dagger(x+\frac{d}{2}))} \rangle = g^{(1)}(x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}). \quad (5.47)$$

lässt sich der Erwartungswert der Dichteverteilung berechnen:

$$\langle \hat{I}(x, d) \rangle = \frac{1}{2} \left\{ n'(x) + n''(x) \cos[2(\alpha d - \beta)x + \phi_{\text{rel}}] g^{(1)}(x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}) \right\}. \quad (5.48)$$

Dieses Ergebnis legt eine Messung der Korrelationsfunktion erster Ordnung über die im Mittel gemessene Dichteverteilung nahe.

5.3.3 Kontrastinterferometrie

Durch Verwendung des elektro-optischen Modulators kann die Phasendifferenz ϕ_{rel} der sich überlagernden Kopien des Kondensats variiert werden. Aus Gl. (5.48) geht hervor, dass für eine gegebene Position x die Population als Funktion der aufgeprägten Phasendifferenz zwischen den Ausgängen des Interferometers oszilliert. Der Kontrast dieser Oszillation ist die Korrelationsfunktion erster Ordnung und kann daher zum Messen der Phasenkohärenzeigenschaften herangezogen werden. Diese Methode hat jedoch den Nachteil, dass sie sehr empfindlich gegenüber Fluktuationen der durch das Interferometer aufgeprägten Phase ist.

Zum Messen der Interferenzkontrastes wird der Anteil der Atome P in einem Ausgang des Interferometers in einem Bereich, der klein gegen die räumliche Änderung des Interferometriemusters ist, bestimmt. Für die hier vorgestellten Messungen wurde der Bereich $-0.1L < x < 0.1L$ gewählt.¹² Nach Gl. (5.40) hängt ϕ_{rel} von der Änderung $\delta\phi_{\text{eff}}$ der relativen Phase der beiden Bragg-Laserstrahlen zwischen den beiden Pulsen ab. Diese kann durch den elektro-optischen Modulator, der in den Strahlengang eines der Bragg-Laserstrahlen eingebaut ist, variiert werden. Abbildung 5.30 zeigt die Population P im Interferometerausgang $|2\rangle$ als Funktion der an dem elektro-optischen Modulator eingestellten Phasendifferenz. Der Kontrast („die Sichtbarkeit“) der gemessenen Oszillation liefert nach Gl. (5.48) den Funktionswert $g^{(1)}(d) \equiv g^{(1)}(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$. Die Korrelationsfunktion erster Ordnung kann also zumindest prinzipiell durch Variation des Versatzes d gemessen werden. Abbildung 5.30 zeigt, dass während für einen geringen Versatz d eine deutliche sinusförmige Oszillation hohen Kontrastes sichtbar ist, die Oszillation für größere Versätze immer mehr auswäscht. Für große d ist die Phase nahezu zufällig, die Phasendifferenz $\phi(x - \frac{d}{2}) - \phi(x + \frac{d}{2}) + \phi_{\text{rel}}$ ist nicht vorhersagbar. Es sei darauf hingewiesen, dass dennoch der Kontrast in den Interferenzbildern für einzelne Realisierungen groß ist, d.h. Populationen P nahe 1 oder 0 treten weiterhin auf. Da der Phasenunterschied zufällig ist, tritt eine große Streuung der Messwerte auf und der Kontrast der Oszillation der durchschnittlich gemessenen Population nimmt deutlich ab. Die Abnahme dieses Kontrastes hat zwei Ursachen:

- Die Phasendifferenz $\phi(x - \frac{d}{2}) - \phi(x + \frac{d}{2})$ variiert aufgrund von Phasenfluktuationen.
- Die durch das Interferometer aufgeprägte Phase ϕ_{rel} fluktuiert.

Wenn der zweite Punkt gegenüber dem ersten vernachlässigbar ist, ist die Abnahme des Kontrastes der in Abb. 5.30 gezeigten Oszillation mit steigendem Versatz d nach Gl. (5.48) ein direktes Maß für die Korrelationsfunktion erster Ordnung.

Die Phasendifferenz $\delta\phi_{\text{eff}} = \phi_{\text{EOM}}$ kann mit dem elektro-optischen Modulator präzise und reproduzierbar eingestellt werden. Die Hauptursache für Fluktuationen in ϕ_{rel} sind minimale Schwankungen in der Schwerpunktsbewegung der Kondensate nach dem Ausschalten der Magnetfalle. Da die Bragg-Resonanzfrequenz nach Gl. (2.47) geschwindigkeitsabhängig ist, ändert sich dadurch die Verstimmung δ_{12} . Bei einer Breite der Geschwindigkeitsverteilung der Schwerpunktsbewegung Δv ergibt sich eine Verteilung der Resonanzfrequenz der Breite $\Delta\delta_{12} = 2k\Delta v$. Dies führt nach Gl. (5.40) zu Schwankungen in der aufgeprägten Phase von $\Delta\phi_{\text{rel}} = \Delta\delta_{12}(\Delta t - t_B)$. Um die Bedeutung dieses Effektes für die Messungen abzuschätzen, wurden Messserien mit kalten BECs

¹²Für alle x in diesem Bereich gilt: $g^{(1)}(x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}) \approx g^{(1)}(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2})$.

hoher Teilchenzahl durchgeführt. In diesen Messungen verschwindet der Interferometrikontrast nach einer Zeit Δt von 2 bis 3 ms, obwohl der zugehörige Versatz wesentlich geringer als die Kohärenzlänge der BECs ist. Eine solche Kontrastverringerng kann schon durch sehr kleine Geschwindigkeitsschwankungen hervorgerufen werden. So verursacht eine Geschwindigkeitsbreite von $\Delta v = 0.04 \mu\text{m/ms}$ Phasenschwankungen von $\Delta\phi_{\text{rel}} = \pi/2$ für $\Delta t = 2.3 \text{ ms}$. Diese Geschwindigkeitsbreite von $6.8 \times 10^{-3} v_{\text{rec}}$ führt nach einer Fallzeit von 30 ms zu einer kaum detektierbaren Positionsänderung von $\Delta x = 1.2 \mu\text{m}$. Solch minimale Geschwindigkeitsänderungen sorgen für eine Verteilung der Resonanzfrequenz der Breite $\Delta\delta_{12} = 644 \text{ Hz}$. Da die Relativfrequenz der Bragg-Laser für einen $100 \mu\text{s}$ -Puls eine fourierlimitierte Breite von $\Delta\omega_{\text{res}} = 57 \text{ kHz}$ besitzt, haben die Geschwindigkeitsschwankungen keinen merklichen Einfluss auf die Beugungseffizienz, führen aber dennoch zu signifikanten Schwankungen in der durch das Interferometer aufgeprägten Phase.¹³

Die Kontrastinterferometrie ermöglicht also prinzipiell die Messung der Korrelationsfunktion erster Ordnung, ist aber sehr empfindlich gegenüber Fluktuationen der aufgeprägten Phase. Tatsächlich ist der Einfluss dieser Fluktuationen in unseren Messungen vergleichbar dem der Phasenfluktuationen, so dass eine verlässliche Messung der Korrelationsfunktion mit dieser Methode schwierig ist. Deshalb wurde im Rahmen dieser Arbeit eine neue Methode entwickelt, die der Kontrastinterferometrie aufgrund ihrer Unempfindlichkeit gegenüber Fluktuationen in ϕ_{rel} überlegen ist.

5.3.4 Intensitätskorrelationen

Eine Messung der Phasenkohärenzeigenschaften ist, wie im vorigen Abschnitt erläutert wurde, mit der vielleicht nahe liegendsten Methode der Kontrastinterferometrie möglich. Diese Methode hat jedoch den gravierenden Nachteil, dass sie sehr empfindlich gegenüber Fluktuationen der durch das Interferometer aufgeprägten Phase ist. Diese Fluktuationen führen selbst in Abwesenheit von Phasenfluktuationen zu nicht vorhersagbaren Schwankungen der gemessenen Population („Intensität“). Ausgehend von der Beobachtung, dass sich die Phasenkohärenzeigenschaften nicht nur in der gemessenen Intensität, sondern auch in der Struktur des Interferenzmusters niederschlagen, wurde eine Methode entwickelt, die auf der Analyse von Intensitätskorrelationen beruht. Diese Methode ist in vielerlei Hinsicht analog zu dem Stellarinterferometer-Experiment von Hanbury-Brown und Twiss [50, 51], das im Gegensatz zum Michelson-Interferometer unempfindlich bezüglich atmosphärischer Fluktuationen ist. Ein

¹³In den hier vorgestellten Messungen wird eine vergleichsweise große Zeit Δt benötigt, um einen hinreichenden Versatz d zu erreichen. Daher sind diese Messungen im Vergleich zu der in [125] durchgeführten Autokorrelationsmessung mit Bose-Einstein-Kondensaten wesentlich empfindlicher bezüglich Geschwindigkeitsschwankungen.

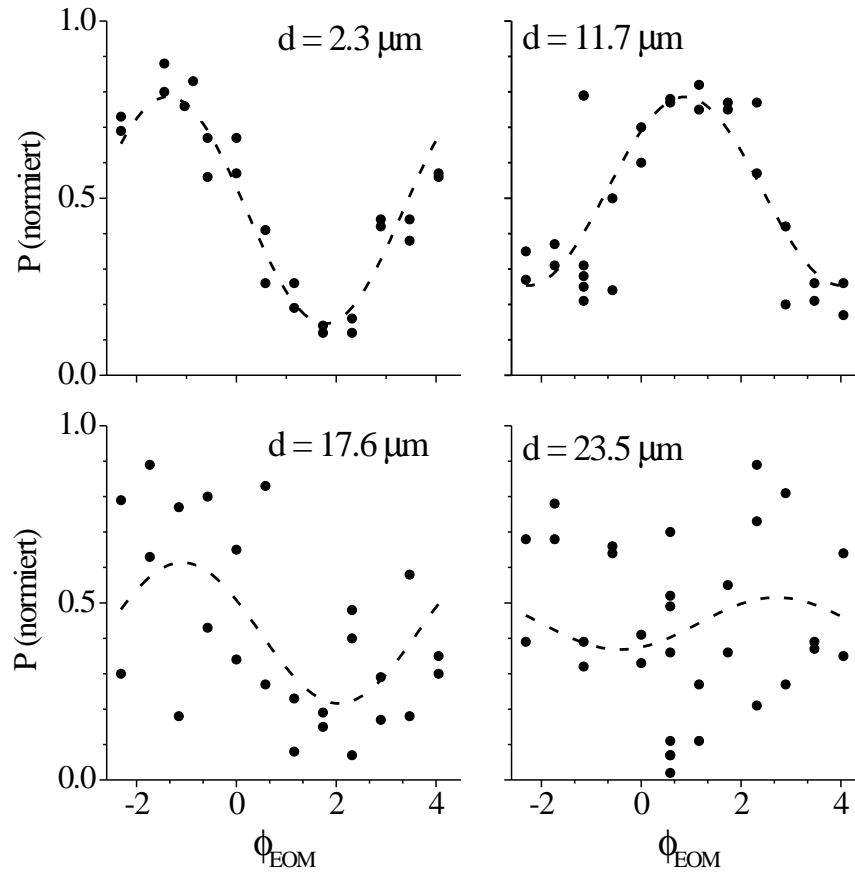


Abbildung 5.30: Population im Interferometerausgang $|2\rangle$ im Bereich $-0.1L < x < 0.1L$ als Funktion der am elektro-optischen Modulator eingestellten Phasendifferenz ϕ_{EOM} . Dargestellt sind die Daten zu vier unterschiedlichen Versätzen d ; die gestrichelte Linie ist jeweils ein Sinus-Fit an die gemessenen Populationen. Dieser Fit spiegelt die Oszillation der durchschnittlich gemessenen Population als Funktion von ϕ_{EOM} wider. Die Änderung der Position des Maximums ist durch eine leichte Verstimmung von der Bragg-Resonanz von wenigen 100 Hz bedingt. Die experimentellen Parameter sind: $\omega_\rho = 2\pi \times 300$ Hz, $\omega_x = 2\pi \times 3.38$ Hz, $N_0 \approx 2.8 \times 10^5$ und $T \approx 175$ nK.

wesentlicher Vorteil gegenüber der Kontrastinterferometrie ist die intrinsische Unempfindlichkeit der entwickelten Methode bezüglich der durch das Interferometer aufgeprägten Phase. Mit der Messung der Intensitätskorrelationen im Interferenzmuster ist es im Rahmen dieser Arbeit erstmals gelungen, die Korrelationsfunktion phasenfluktuierender Kondensate zu messen und daraus die Phasenkohärenzlänge zu bestimmen.

Dieses Unterkapitel enthält zentrale Ergebnisse dieser Arbeit und ist aufgrund seiner Länge in einige Abschnitte unterteilt. Zunächst wird anhand beispielhafter Interferenzmuster und durch Vergleich mit dem Hanbury-Brown-Twiss Stellarinterferometer die Nutzung von Intensitätskorrelationen qualitativ erläutert und motiviert. Dann wird die eingesetzte Methode quantitativ diskutiert und gezeigt, dass eine Messung der Intensitätskorrelationen im Interferenzmuster einer Messung der räumlichen Korrelationsfunktion zweiter Ordnung des Kondensats entspricht. Schließlich werden die experimentellen Ergebnisse vorgestellt, gefolgt von einer Betrachtung der Messgenauigkeit und einer numerischen Simulation, die die eingesetzten Näherungen rechtfertigt.

Qualitative Beobachtungen

Bevor eine quantitative Analyse der Intensitätskorrelationen vorgenommen wird, wird in diesem Abschnitt zunächst auf das qualitative Verhalten der Interferenzmuster eingegangen. Dieses motiviert den Nutzen von Intensitätskorrelationen zur Bestimmung der Phasenkohärenzeigenschaften.

Hierbei wird zunächst der Einfluss der mean-field bedingten Phase vernachlässigt. Dies ist dadurch gerechtfertigt, dass für die meisten der hier vorgestellten Messungen die Phasenfluktuationen dominierend sind, d.h. die Phasenkohärenzlänge wesentlich kleiner als die Periode $\pi/(\alpha d - \beta)$ des mean-field-Terms ist. Für die quantitative Auswertung ist jedoch der Effekt der durch die mean-field-Expansion und Abstoßung bedingten Phase zu berücksichtigen.

Abbildung 5.31 zeigt typische experimentelle Dichteprofile in einem Interferometerausgang. Diese Profile werden durch Integration der Absorptionenaufnahmen in radialer Richtung und Abzug der Verteilung der thermischen Atome gewonnen. Wenn der Versatz d zwischen den Kopien des Kondensats wesentlich kleiner als die Phasenkohärenzlänge ist (Abb. 5.31 a), überlagern sich Regionen des Kondensats mit nahezu identischen Phasen und das resultierende Interferenzmuster zeigt keine Interferenzstrukturen hohen Kontrastes. Das Muster ist vergleichsweise glatt und die Schwankungen in der Dichteverteilung resultieren im Wesentlichen aus den in der ballistischen Expansion entstehenden Dichtemodulationen. Falls d hingegen größer als die Phasenkohärenzlänge ist, überlagern sich Regionen mit deutlich unterschiedlichen Phasen und das resultierende Interferenzmuster zeigt Minima und Maxima hohen Kontrastes (Abb. 5.31 b). Die Unregelmäßigkeit des Interferenzmusters spiegelt den statistischen Charak-

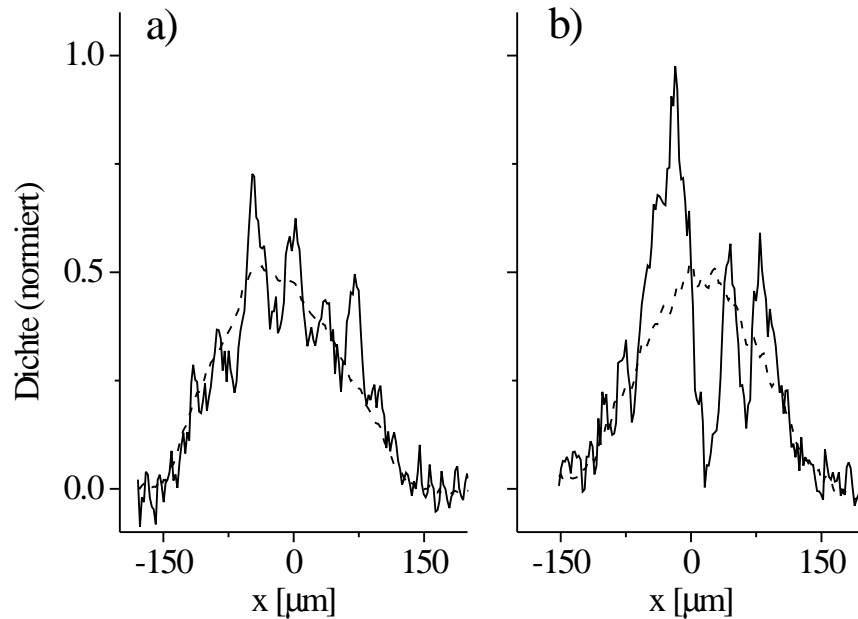


Abbildung 5.31: Exemplarische Dichteprofile für Kondensate mit einer berechneten Phasenkohärenzlänge von $25\ \mu\text{m}$. In (a) ist der Versatz $d = 7\ \mu\text{m}$ erheblich kleiner als die Phasenkohärenzlänge, in (b) ist $d = 35\ \mu\text{m}$ größer als L_ϕ . Die gestrichelte Linie zeigt das Mittel über etwa 25 Realisierungen, die mit unterschiedlichen durch das Interferometer aufgeprägten Phasen aufgenommen wurden.

ter der Phasenfluktuationen wider. In beiden Fällen liefert das Mittel über viele Realisierungen und relative Phasen ϕ_{rel} das gleiche glatte Profil in beiden Ausgängen des Interferometers. Daher enthält die im Mittel gemessene Dichte bei signifikanten Fluktuationen der relativen Phase keine Informationen über die Phasenkohärenzeigenschaften. Solche Fluktuationen beeinflussen jedoch nicht die Struktur der Interferenzmuster, da die aufgeprägte Phase ϕ_{rel} nicht ortsabhängig ist. Kurz ausgedrückt: Die gemessenen Intensitäten (=Dichten) hängen von der durch das Interferometer aufgeprägten Phase ab, nicht aber die Korrelationen zwischen den Intensitäten. Die Struktur des Interferenzmusters unterscheidet sich, wie anhand von Abb. 5.31 erläutert, qualitativ für die Fälle $d < L_\phi$ und $d > L_\phi$ und enthält demnach Informationen über die Phasenkohärenzeigenschaften. Je kleiner L_ϕ im Vergleich zum Versatz d ist, desto strukturierter ist das Interferenzmuster infolge der Phasenfluktuationen, d.h. umso kleiner ist der Bereich, in dem die gemessene Dichte sich nur wenig ändert.

Dieser Zusammenhang wird durch Abb. 5.32 grafisch verdeutlicht. Zum Erstellen dieser Abbildung wurden Interferenzmuster herangezogen, die im zentralen Bereich ein Maximum besitzen. Die Maxima wurden übereinandergeschoben und anschließend die Interferenzmuster summiert. Die summierte Dichteverteilung zeigt eine deutliche Spitze auf einem breiten Hintergrund, der in etwa der

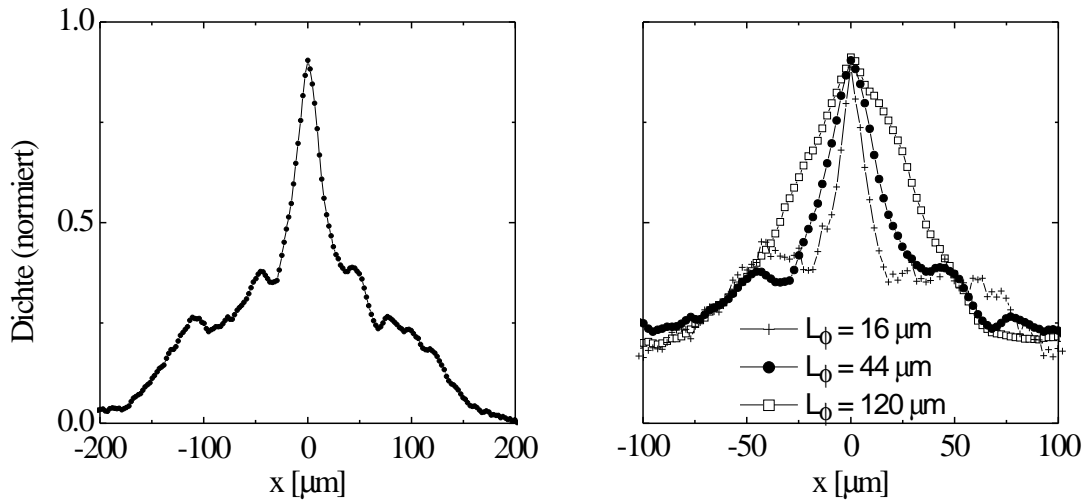


Abbildung 5.32: Grafische Visualisierung der Intensitätskorrelationen in den Interferenzmustern. Dargestellt ist das summierte Dichteprofil von Interferenzmustern, deren Maxima übereinandergelegt wurden. Rechts: Zentraler Bereich des summierten Dichteprofiles in einem Interferometerausgang, die angegebenen Phasenkohärenzlängen sind nach Gl. (3.14) aus den experimentellen Parametern berechnet. Links: Für die mittlere Kurve ist der gesamte Interferometerausgang gezeigt.

Dichteverteilung des ursprünglichen Kondensats entspricht. Die Breite dieser Spitze stellt den Bereich dar, über den die gemessene Dichte sich im Mittel nur wenig ändert, d.h. die Dichten im Interferometriemuster korreliert sind. Die im rechten Graphen gezeigten Kurven unterscheiden sich hauptsächlich durch die Zahl der kondensierten Atome: 6.1×10^4 (+), 2.6×10^5 (●) und 5.6×10^5 (□). Die aus den experimentellen Parametern berechnete Phasenkohärenzlänge wächst also in dieser Reihenfolge. Die Abbildung zeigt klar, dass die Breite des Peaks mit steigender Kohärenzlänge zunimmt. Dies veranschaulicht, dass es möglich sein sollte, durch geeignete Analyse der Intensitätskorrelationen die Phasenkohärenzlänge zu bestimmen.

Analogie mit dem Hanbury-Brown-Twiss Stellarinterferometer

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit war die interferometrische Messung der Korrelationsfunktion phasenfluktuierender Bose-Einstein-Kondensate. Die Messung von Korrelationsfunktionen und Interferometriexperimente sind intensiv studierte Problemstellungen der Quantenoptik mit Photonen. Viele physikalische Konzepte und Definitionen sind dort äquivalent zu den in dieser Arbeit beschriebenen, die Notation ist jedoch teilweise etwas unterschiedlich. Der atomare Feldoperator $\hat{\psi}$ entspricht in der Photonoptik dem Operator des elektrischen Feldes \hat{E} . Die Dichteverteilung des Kondensats entspricht der Lichtintensität. Mit diesen Ersetzungen ist die Definition der Korrelationsfunktionen identisch.

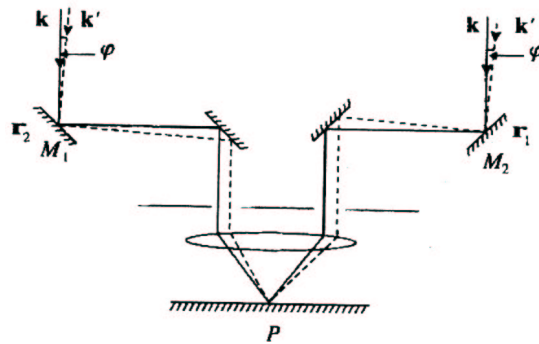


Abbildung 5.33: Schematische Darstellung des Michelson-Interferometers. Das Sternenlicht wird von zwei Spiegeln M_1 und M_2 aufgenommen und auf einem Foto-detektor am Ort P zur Interferenz gebracht. Die Darstellung ist aus [111] übernommen.

Ein frühes Problem der Astronomie war die Bestimmung von Sterndurchmessern. Da die optische Auflösung nicht für die direkte Beobachtung der Durchmesser ausreichte, wurden interferometrische Methoden angewandt. Diese basieren auf der Bestimmung der transversalen Kohärenzlänge des Sternenlichtes, die ein direktes Maß für die Winkelverteilung des Lichtes ist und daher bei bekanntem Abstand den Sterndurchmesser liefert.

Eines der bekanntesten Messinstrumente ist das Michelson-Stellarinterferometer, dessen Aufbau in Abb. 5.33 skizziert ist. Das mit zwei Spiegeln M_1 und M_2 aufgesammelte Licht wird auf einem Fotodetektor am Ort P zur Interferenz gebracht. In der Ebene P bilden sich Interferenzstreifen, deren Kontrast von der Kohärenz des Lichtfeldes an den Orten der beiden Spiegel abhängt. Wird der Abstand der beiden Spiegel immer weiter erhöht, reduziert sich der Interferenzkontrast. Dadurch wird die Korrelationsfunktion erster Ordnung und die transversale Kohärenzlänge des Sternenlichtes gemessen. Die Methode ist konzeptionell der in Kapitel 5.3.3 vorgestellten Messung des Interferenzkontrastes ähnlich. Der Spiegelabstand im Michelson-Interferometer nimmt dabei die Rolle des räumlichen Versatzes der interferierenden Kondensate ein. Die Messung der Korrelationsfunktion erster Ordnung wird in beiden Fällen durch die Empfindlichkeit dieses Schemas auf unkontrollierbare Fluktuationen der relativen Phase beider Interferometerarme erschwert. Im Fall der Messung mit Bose-Einstein-Kondensaten können diese durch Schwankungen in der Schwerpunktsbewegung der Kondensate bedingt sein, beim Stellarinterferometer werden sie durch atmosphärische Störungen, sogenannte atmosphärische Szintillationen verursacht. Durch die atmosphärischen Störungen bewegt sich das Interferenzmuster, so dass es auf Zeitskalen kleiner als die Zeitkonstanten dieser Störungen ausgelesen werden muss. Dadurch war der Nutzen dieses Interferometertypes auf ausgesprochen helle Sterne limitiert.

Das Problem der Empfindlichkeit auf die atmosphärischen Störungen wur-

de in einem vielbeachteten Experiment [50, 51] von Hanbury-Brown und Twiss durch die Verwendung von Intensitätskorrelationen gelöst. Ihr Interferometer (Abb. 5.34) bestand aus zwei Suchscheinwerferspiegeln, in deren Brennpunkten sich Fotodetektoren befanden. Die Korrelationen $I_1 \cdot I_2$ der gemessenen Intensitäten wurden elektronisch bestimmt und deren AC-Teil als Funktion des Abstandes der beiden Detektoren ausgewertet. Das Lichtfeld des Sterns, das mithilfe der beiden Suchscheinwerferspiegel untersucht wird, resultiert aus der Überlagerung des Lichtes aller Elementaremitter des Sterns und ist daher schnellen Fluktuationen unterworfen. Diese Fluktuationen sind innerhalb eines durch die transversale Kohärenzlänge gegebenen Bereiches korreliert. Abbildung 5.35 zeigt die von Hanbury-Brown und Twiss vorgenommene Messung des Durchmessers von Sirius. Es ist ersichtlich, dass die Intensitätskorrelationen mit zunehmendem Abstand der Detektoren abnehmen. Die Distanz, über die die Korrelationen abnehmen, ist die transversale Kohärenzlänge des Lichtes und somit ein Maß für den Sterndurchmesser. In unseren Experimenten dient das Bragg-Interferometer dazu, die von verschiedenen Positionen des Kondensats stammenden Materiewellen zu überlagern. Die Messung der Intensitätskorrelationen des Interferometriemusters liefert die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung. Die Distanz, über die die Korrelationen abnehmen, ist durch die Phasenkohärenzlänge des Kondensats bestimmt. Anstelle der Verwendung von nur zwei Detektoren wie beim Stellarinterferometer wird die Dichteverteilung auf eine Matrix vieler Detektoren, den CCD-Chip abgebildet (siehe Abb. 5.34). Eine mechanische Variation des Detektorabstandes ist damit überflüssig. Abbildung 5.35 zeigt eine Messung der Phasenkohärenzlänge von Bose-Einstein-Kondensaten. Die Messung wurde für experimentelle Parameter vorgenommen, bei denen der Einfluss der mean-field bedingten Phase vergleichsweise gering ist. Nicht nur die verwendete Methode, sondern auch der qualitative Verlauf der Intensitätskorrelationen sind dem Hanbury-Brown-Twiss Stellarinterferometer-Experiment ähnlich. Eine quantitative Analyse solcher Kurven wird im nächsten Kapitel vorgenommen.

Messung der Korrelationsfunktion: Methode

In diesem Abschnitt wird die zur Messung der Korrelationsfunktion entwickelte Methode quantitativ erläutert. Es wird gezeigt, dass die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}$ durch eine Messung der Intensitätskorrelationen im Interferometriesignal bestimmt werden kann und so der experimentellen Beobachtung zugänglich ist.

In Analogie zur Definition des Korrelationskoeffizienten wird eine normierte Intensitätskorrelationsfunktion definiert:

$$\gamma_f^{(2)}(x_1, x_2, d) = \frac{\langle (\hat{I}_1 - \langle \hat{I}_1 \rangle_{T,\phi})(\hat{I}_2 - \langle \hat{I}_2 \rangle_{T,\phi}) \rangle_{T,\phi}}{\sqrt{\langle (\hat{I}_1 - \langle \hat{I}_1 \rangle_{T,\phi})^2 \rangle_{T,\phi}} \sqrt{\langle (\hat{I}_2 - \langle \hat{I}_2 \rangle_{T,\phi})^2 \rangle_{T,\phi}}}, \quad (5.49)$$

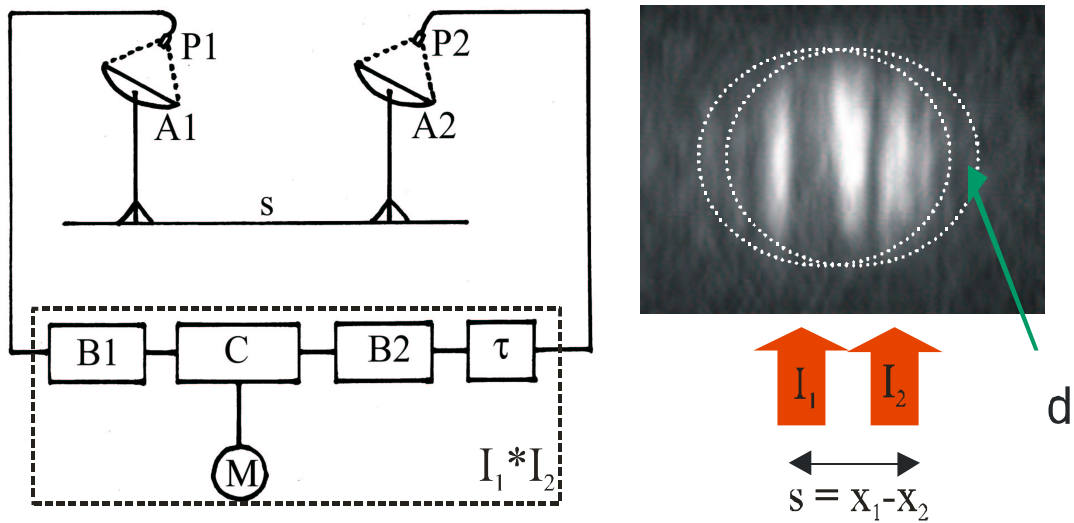


Abbildung 5.34: Schematische Darstellung der Intensitätskorrelationsmessung. Links: Hanbury-Brown-Twiss Stellarinterferometer. Das von den Spiegeln A_1 und A_2 aufgesammelte Licht wird durch die Fotodetektoren P_1 und P_2 detektiert. Die Elektronik (B_i : Verstärker, C : Multiplizierer, M : Integrierer, τ : Kabeldelay zum Abgleichen der elektronischen Laufzeiten) dient der Berechnung der Intensitätskorrelationen. Die Darstellung ist aus [111] übernommen. Rechts: Messung der Intensitätskorrelationen im Interferenzmuster phasenfluktuierender BECs.

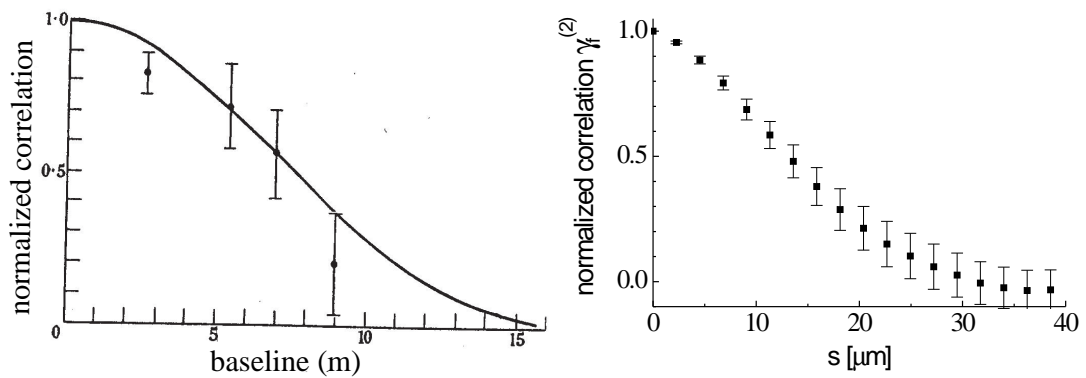


Abbildung 5.35: Intensitätskorrelationen als Funktion des Detektorabstandes. Links: Messpunkte für Sirius verglichen mit dem aus der theoretisch bekannten Größe berechneten Verlauf, übernommen aus [126]. Rechts: Messpunkte und statistischer Fehler für stark phasenfluktuiierende Kondensate. Da allen Datenpunkten dieselben Realisierungen zu Grunde liegen, sind benachbarte Punkte nicht unabhängig.

wobei $\hat{I}_{1,2} = \hat{I}(x_{1,2}, d)$. Die Mittelung wird hier über ein Ensemble im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T und über alle Phasen ϕ_{rel} vorgenommen und durch $\langle \dots \rangle_{T,\phi}$ symbolisiert. Ähnlich wie beim Experiment von Hanbury-Brown und Twiss werden die Abweichungen von der im Mittel gemessenen Intensität betrachtet. Die Intensitätskorrelationsfunktion $\gamma_f^{(2)}$ nimmt Werte zwischen +1 (perfekte Korrelation) und -1 (perfekte Antikorrelation) an. Falls \hat{I}_1 und \hat{I}_2 unkorreliert sind, ist $\gamma_f^{(2)} = 0$.

Es soll zunächst erläutert werden, wie diese Intensitätskorrelationsfunktion für phasenfluktuierende Bose-Einstein-Kondensate berechnet werden kann. Im Zähler von Gl. (5.49) steht die Kovarianz der Intensitäten \hat{I}_1 und \hat{I}_2 , im Nenner stehen jeweils die Standardabweichungen dieser Größen. Nach den aus der Statistik bekannten Rechenregeln (siehe z.B. [127]) gilt

$$\gamma_f^{(2)}(x_1, x_2, d) = \frac{\langle \hat{I}_1 \hat{I}_2 \rangle_{T,\phi} - \langle \hat{I}_1 \rangle_{T,\phi} \langle \hat{I}_2 \rangle_{T,\phi}}{\sqrt{\langle (\hat{I}_1)^2 \rangle_{T,\phi} - \langle \hat{I}_1 \rangle_{T,\phi}^2} \sqrt{\langle (\hat{I}_2)^2 \rangle_{T,\phi} - \langle \hat{I}_2 \rangle_{T,\phi}^2}}. \quad (5.50)$$

Bei Mittelung über alle relativen Phasen ergibt sich nach Gl. (5.48) das triviale Ergebnis

$$\langle \hat{I}_{1,2} \rangle_{T,\phi} = \frac{1}{2} n'(x_{1,2}). \quad (5.51)$$

Dieses Ergebnis spiegelt die in Kapitel 5.3.3 getroffene Feststellung wider, dass sich bei Mittelung über alle relativen Phasen aus dem Erwartungswert der Intensität keine Aussagen über Phasenfluktuationen gewinnen lassen. Die Intensitätskorrelationen $\hat{I}_1 \cdot \hat{I}_2$ enthalten vier Feldoperatoren. Ihr Ensemblemittelwert lässt sich durch Verwendung von Gl. (5.43) bzw. Gl. (5.46) berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \hat{I}_1 \hat{I}_2 \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ [n'''(x_1, x_2)]^2 \right. \\ &\quad + n''(x_1) n'(x_2) \cos[2(\alpha d - \beta)x_1 + \phi_{\text{rel}}] g^{(1)}\left(x_1 - \frac{d}{2}, x_1 + \frac{d}{2}\right) \\ &\quad + n''(x_2) n'(x_1) \cos[2(\alpha d - \beta)x_2 + \phi_{\text{rel}}] g^{(1)}\left(x_2 - \frac{d}{2}, x_2 + \frac{d}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} n''(x_1) n''(x_2) \left[\cos[2(\alpha d - \beta)(x_1 - x_2)] g^{(2)}\left(x_1 - \frac{d}{2}, x_2 + \frac{d}{2}, x_2 - \frac{d}{2}, x_1 + \frac{d}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos[2(\alpha d - \beta)(x_1 + x_2) + 2\phi_{\text{rel}}] g^{(2)}\left(x_1 - \frac{d}{2}, x_2 - \frac{d}{2}, x_2 + \frac{d}{2}, x_1 + \frac{d}{2}\right) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.52)$$

mit

$$\begin{aligned} n'''(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left[n\left(x_1 - \frac{d}{2}\right) n\left(x_2 - \frac{d}{2}\right) + n\left(x_1 + \frac{d}{2}\right) n\left(x_2 + \frac{d}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + n\left(x_1 + \frac{d}{2}\right) n\left(x_2 - \frac{d}{2}\right) + n\left(x_1 - \frac{d}{2}\right) n\left(x_2 + \frac{d}{2}\right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Falls der räumliche Versatz d wesentlich kleiner als die Kondensatgröße ist, gilt $n'(x) = n''(x) = n'''(x) = n(x)$ (siehe auch Gl. (5.44)). Die Mittelung über alle relativen Phasen ergibt

$$\langle \hat{I}_1 \hat{I}_2 \rangle_{T,\phi} = \frac{1}{4} \left\{ [n'''(x)]^2 + \frac{1}{2} n''(x_1) n''(x_2) \cos[2(\alpha d - \beta)(x_1 - x_2)] g^{(2)}\left(x_1 - \frac{d}{2}, x_2 + \frac{d}{2}, x_2 - \frac{d}{2}, x_1 + \frac{d}{2}\right) \right\}. \quad (5.54)$$

Erwartungsgemäß verschwinden für $\langle \hat{I}_1 \hat{I}_2 \rangle_{T,\phi}$ bei der Mittelung über ϕ_{rel} im Gegensatz zu $\langle \hat{I}_{1,2} \rangle_{T,\phi}$ nicht alle Interferenzterme. Dies bringt zum Ausdruck, dass aus den Intensitätskorrelationen selbst bei einer stark fluktuierenden durch das Interferometer aufgeprägten Phase die Phasenkorrelationen extrahiert werden können. Durch Einsetzen in Gl. (5.50) erhält man für die normierte Intensitätskorrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \gamma_f^{(2)}(x_1, x_2, d) &= \cos[2(\alpha d - \beta)(x_1 - x_2)] g^{(2)}\left(x_1 - \frac{d}{2}, x_2 + \frac{d}{2}, x_2 - \frac{d}{2}, x_1 + \frac{d}{2}\right) \\ &= \cos[2(\alpha d - \beta)(x_1 - x_2)] \exp \left[-\frac{1}{2l_\phi} f^{(2)}\left(x_1 - \frac{d}{2}, x_2 + \frac{d}{2}, x_2 - \frac{d}{2}, x_1 + \frac{d}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Sie ist ein Produkt zweier Beiträge: Eines Kosinus-Terms, der aus der mean-field bedingten Expansion und Abstoßung resultiert und eines exponentiell abfallenden Terms, der den Einfluss der Phasenfluktuationen enthält. Die Zerfallskonstante dieses Terms ist die Phasenkohärenzlänge. Insbesondere zeigt Gl. (5.55), dass eine Messung von $\gamma^{(2)}$ einer Messung der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung entspricht. Der Einfachheit halber wurde in den hier präsentierten Rechnungen die Verwendung von $\pi/2$ -Pulsen, also einer Bragg-Beugungseffizienz von 50% angenommen. Es sei erwähnt, dass die normierte Intensitätskorrelationsfunktion unabhängig von der Beugungseffizienz ist. Die Verwendung von $\pi/2$ -Pulsen ist experimentell jedoch vorteilhaft, da sich dann im Interferometriemuster der maximale Kontrast ergibt und so das bestmögliche Signal/Rausch-Verhältnis erreicht wird.

Messung der Korrelationsfunktion: experimentelle Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird die soeben vorgestellte Methode zur Messung der räumlichen Korrelationsfunktion phasenfluktuierender Kondensate eingesetzt. Durch Vergleich der Messdaten mit der theoretisch erwarteten Korrelationsfunktion zweiter Ordnung, die im Rahmen dieser Arbeit berechnet wurde, kann deren funktionaler Verlauf überprüft und die Phasenkohärenzlänge extrahiert werden. Ein Vergleich der so gemessenen Phasenkohärenzlänge mit der theoretisch vorausgesagten zeigt eine sehr gute Übereinstimmung.

Die Messung von $\gamma^{(2)}$ wird folgendermaßen vorgenommen: Zunächst werden, wie in Kapitel 4 beschrieben, Bose-Einstein-Kondensate im $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Hyperfein-Grundzustand in der axial dekomprimierten Magnetfalle erzeugt. Die entsprechende axiale Fallenfrequenz beträgt $\omega_x = 2\pi \times 3.38$ Hz, die radiale Frequenz wurde zwischen $\omega_\rho = 2\pi \times 300$ Hz und $\omega_\rho = 2\pi \times 380$ Hz gewählt. Durch Wahl der Evaporationsrampe wurde die Zahl der kondensierten Atome N_0 zwischen 4×10^4 und 6×10^5 , die Temperatur zwischen 60 nK und 240 nK variiert. Um Gleichgewichtsbedingungen zu erreichen, wurde eine Wartezeit von typischerweise 4 Sekunden nach Erzeugung der Kondensate eingeführt. Um während dieser Zeit durch Stoßprozesse erzeugte heiße Atome aus der Falle zu entfernen, wurde eine Radiofrequenz einige kHz über der Evaporationsendfrequenz eingestrahlt („RF-Shielding“). Für eine gegebene Fallenkonfiguration, Evaporationsrampe und festen Versatz d , wird eine Serie von Messungen aufgenommen, bei denen die relative Phase der Bragg-Strahlen mit dem elektro-optischen Modulator zwischen den Pulsen in kleinen Schritten zwischen 0 und 2π variiert wird. Dadurch wird sichergestellt, dass die globale Phase ϕ_{rel} alle Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt. Die experimentelle Bestimmung der normierten Intensitätskorrelationsfunktion erfolgt anhand von Gl. (5.49). Zunächst werden die Ensemblemittelwerte $\langle I(x) \rangle_{T,\phi}$ durch Mittelung aller in einer Serie aufgenommenen Interferenzmuster $I(x)$ bestimmt. Hieraus ergibt sich $I(x) - \langle \hat{I}(x) \rangle_{T,\phi}$ für jede Realisierung, so dass $\gamma^{(2)}$ nach Gl. (5.49) berechnet werden kann. Um die Analyse zu vereinfachen, werden die Intensitätskorrelationen an symmetrischen Positionen bezüglich des Zentrums des Interferenzmusters ausgewertet, so dass $x_1 = -x_2 = s/2$. Dann kann $\gamma^{(2)}(s, d) \equiv \gamma^{(2)}(-s/2, s/2, d)$ für einen gegebenen Versatz d als Funktion des Abstandes s ausgedrückt werden.

Typische so gemessene Intensitätskorrelationsfunktionen sind in Abb. 5.36 und 5.37 gezeigt. Zur quantitativen Analyse werden die gemessenen Kurven mit der theoretischen Funktion Gl. (5.55) gefittet. Der Fit enthält nur zwei freie Parameter: Die Frequenz des Kosinus und die Phasenkohärenzlänge l_ϕ . Die exzellente Übereinstimmung der gemessenen Daten mit der erwarteten funktionalen Form ist in allen Fällen sichtbar. Insbesondere für größeren Versatz ($d > 20 \mu\text{m}$) ist der Funktionsverlauf eines gedämpften Kosinus erkennbar. Die in Abb. 5.36 dargestellten Kurven wurden mit nahezu identischen Teilchenzahlen, Temperaturen und Fallenfrequenzen aufgenommen, so dass die Abbildung exemplarisch das Verhalten der Intensitätskorrelationsfunktion in Abhängigkeit des Versatzes d zeigt. Erwartungsgemäß fallen die Kurven mit steigendem Versatz d schneller ab, d.h. die Frequenz der Oszillation nimmt zu. Bei $d = 23.5 \mu\text{m}$ ist eindeutig ein Minimum sichtbar, durch dessen Position die Frequenz des Kosinustermes in Gl. (5.55) definiert ist. In Abb. 5.37 wurden bei festem Versatz d die experimentellen Parameter variiert. Die dargestellten Kurven unterscheiden sich hauptsächlich durch die Anzahl der kondensierten Atome: 4.4×10^4 (●), 2.9×10^5 (+) und 5.0×10^5 (□). Auch hier ist außer für die kleinste Atomzahl klar ein Minimum

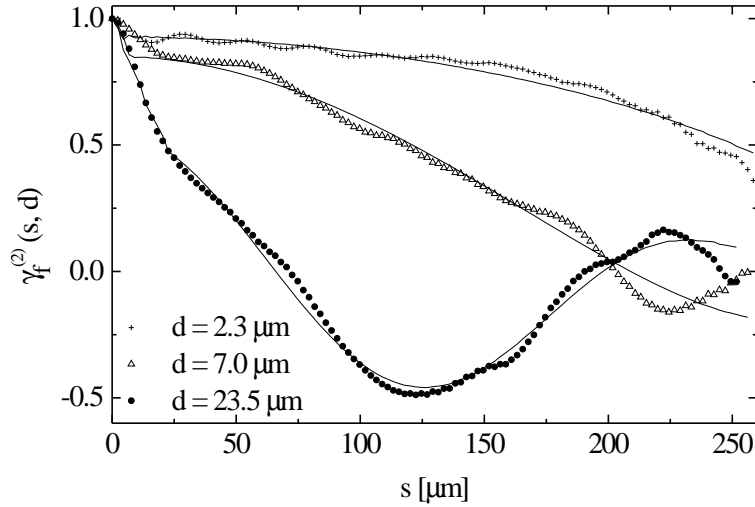


Abbildung 5.36: *Abhängigkeit der Intensitätskorrelationsfunktion vom Versatz d . Alle Kurven wurden mit identisch präparierten Kondensaten aufgenommen: $N_0 = 3 \times 10^5$, $T = 175$ nK, $\omega_x = 2\pi \times 3.38$ Hz und $\omega_\rho = 2\pi \times 300$ Hz. Die Kurven basieren jeweils auf etwa 25 Realisierungen und sind bis zu $s = 1.4L$ gezeichnet. Benachbarte Punkte sind nicht unabhängig, da sie auf denselben experimentellen Realisierungen beruhen. Die durchgezogene Linie ist ein Fit mit der theoretisch erwarteten Funktion Gl. (5.55).*

erkennbar, das eindeutig die Frequenz des Kosinusters festlegt. Die Dämpfung dieser Oszillation liefert die Phasenkohärenzlänge. Wie nach Gl. (3.16) erwartet, nimmt die Dämpfung mit sinkendem N_0 zu. Da für die kleinste Teilchenzahl keine Oszillation mehr sichtbar ist, lässt sich auf eine signifikante Verringerung der Phasenkohärenzlänge schließen.

Um einen möglichst umfassenden Vergleich zwischen Experiment und Theorie zu ermöglichen, wurden Messungen, ähnlich den in Abb. 5.37 gezeigten, für eine Vielzahl von Atomzahlen und Temperaturen durchgeführt. Die gemessene Phasenkohärenzlänge ergibt sich jeweils aus der Dämpfung der gemessenen Intensitätskorrelationsfunktionen. Die theoretisch erwartete Phasenkohärenzlänge wird aus den gemessenen experimentellen Parametern mit Gl. (3.14) berechnet. Die hierzu benötigten Teilchenzahlen und Temperaturen werden für jede Realisierung aus den Absorptionaufnahmen bestimmt und die Fallenfrequenzen sind durch vorherige Eichmessungen bekannt. Abbildung 5.38 zeigt die sehr gute Übereinstimmung der gemessenen und theoretisch vorausgesagten Phasenkohärenzlänge. Die Phasenkohärenzlänge ist eine Eigenschaft des Kondensats, so dass der gemessene Wert unabhängig vom räumlichen Versatz d sein sollte. Um dieses zu überprüfen, wurden Messungen mit verschiedenen d durchgeführt. Abbildung 5.38 bestätigt, dass die gemessene Phasenkohärenzlänge nicht von diesem Parameter abhängt. In allen Fällen war die Phasenkohärenzlänge we-

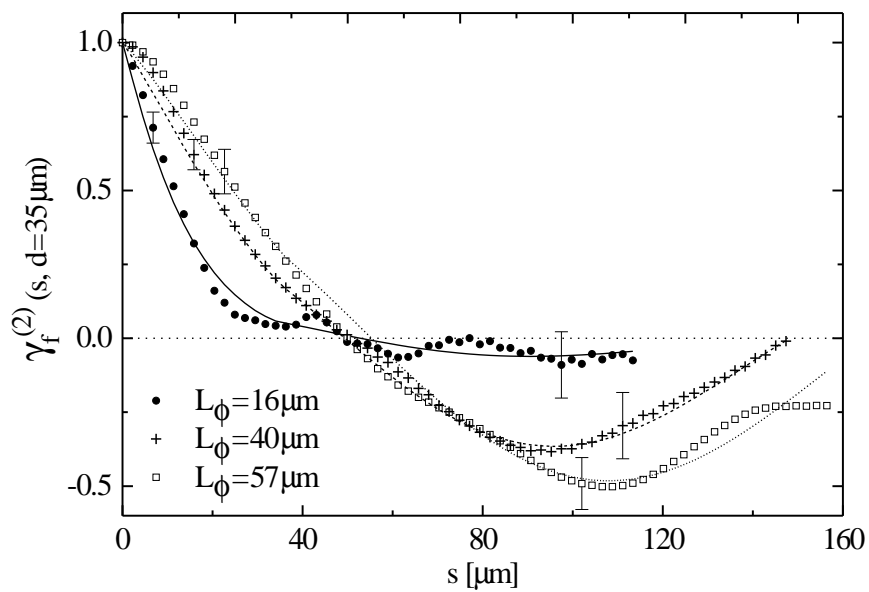


Abbildung 5.37: Intensitätskorrelationsfunktion für verschiedene Phasenkohärenzlängen L_ϕ . Dargestellt sind gemessene Korrelationsfunktionen (Punkte) jeweils im Vergleich mit der gefitteten theoretischen Funktion entsprechend Gl. (5.55) (Linien). Die Kurven basieren jeweils auf etwa 25 Realisierungen und sind bis zu $s = 0.8L$ gezeichnet. Benachbarte Punkte sind nicht unabhängig, da sie auf denselben experimentellen Realisierungen beruhen. Die exemplarisch eingezeichneten Fehlerbalken zeigen die statistische Unsicherheit.

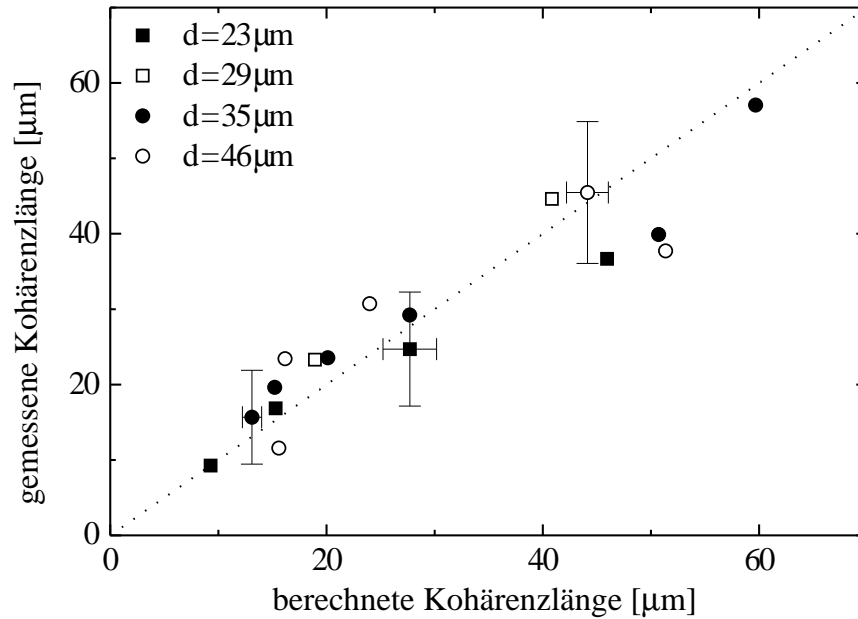


Abbildung 5.38: Gemessene Phasenkohärenzlänge im Vergleich zur theoretisch erwarteten (Gl. (3.14)). Die gepunktete Linie $f(x) = x$ dient der grafischen Orientierung. Die Fehlerbalken stellen den statistischen Fehler dar. Die systematische Unsicherheit beträgt 23% für die berechnete und liegt in der Größenordnung von 10% (genauerer siehe Text) für die gemessene Phasenkohärenzlänge.

sentlich kleiner als die Länge des Kondensats, die zwischen $280 \mu\text{m}$ und $420 \mu\text{m}$ betrug, so dass die Messungen im sogenannten Quasikondensat-Regime durchgeführt wurden.

Nach Gl. (5.55) ist die erwartete Oszillationsfrequenz durch $(\alpha d - \beta)/\pi$ gegeben, wobei α die mean-field-Expansion und β die mean-field bedingte Abstoßung der verschiedenen Kopien des Kondensats beschreibt. Die gefitteten Oszillationsfrequenzen sind in Abb. 5.39 für alle Datensätze mit $N_0 > 10^5$ dargestellt.¹⁴ Erwartungsgemäß steigt die gemessene Frequenz mit dem Versatz d . Die Berechnung der erwarteten Oszillationsfrequenz ist jedoch aufwendig, da das mean-field-Potenzial aller Kopien des Kondensats und der thermischen Wolke zu berücksichtigen ist. Zur näherungsweisen Berechnung der Frequenz wurde ausgehend von den Dichteverteilungen der einzelnen Komponenten das zugehörige mean-field-Potenzial ermittelt. Hierzu wird die Dichteverteilung des Kondensats durch die selbstähnliche Expansion (Kapitel 2.1.3) beschrieben, und die der thermischen Wolke hängt nach Gl. (5.14) von der Temperatur ab. Der Einfachheit halber wird der Einfluss des Kondensats auf die thermische Verteilung vernachlässigt. Das auf eine Kopie wirkende mean-field-Potenzial der

¹⁴Für die kleineren Kondensate ist die Dämpfung so stark, dass kaum eine Oszillation sichtbar ist und die gefitteten Frequenzen daher größeren Streuungen unterliegen.

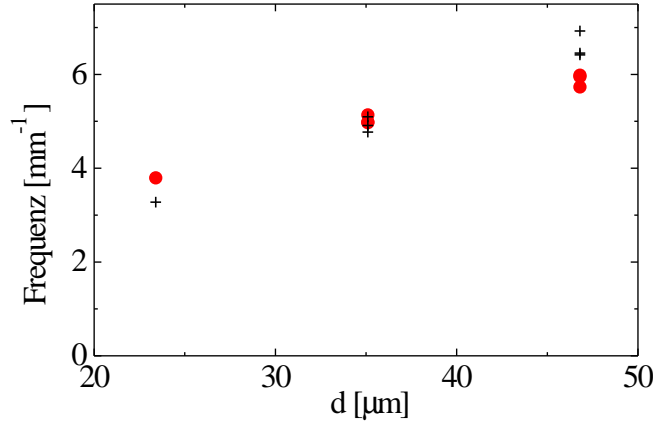


Abbildung 5.39: Frequenz der Oszillation der Intensitätskorrelationsfunktion in Abhängigkeit vom Versatz d . Die gemessene Frequenz (Kreise) ist mit der numerisch berechneten $(\alpha d - \beta)/\pi$ (Kreuze) verglichen.

anderen Komponenten ist durch $2gn(\mathbf{r})$ gegeben, das der eigenen Komponente¹⁵ durch $gn(\mathbf{r})$. Die Phasenentwicklung durch das mean-field-Potenzial kann dann numerisch berechnet werden¹⁶:

$$\phi_{\text{MF}}(x, t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t E_{\text{MF}}(t') dt'. \quad (5.56)$$

Aus dieser näherungsweise Berechnung der Phase ϕ_{MF} werden die Oszillationsfrequenzen ermittelt. Sie werden in Abb. 5.39 mit den gemessenen verglichen. Es ist ersichtlich, dass sich die gemessenen Frequenzen in guter Übereinstimmung mit den erwarteten befinden. Es sei angemerkt, dass die nach Gl. (5.33) aus dem linearen Phasenterm errechenbare Abstoßungsgeschwindigkeit so gering ist, dass sie keinen merklichen Einfluss auf die Schwerpunktsbewegung der Kondensate hat. Ihr Einfluss auf den Versatz d ist kleiner als $0.1 \mu\text{m}$.

Messgenauigkeit

Die Messung der Intensitätskorrelationsfunktionen unterliegt statistischen und systematischen Unsicherheiten. Der statistische Fehler ergibt sich aus der Streuung der Datenpunkte. Da die Intensitätskorrelationsfunktion Gl. (5.55) eine Mittelung über die relative Phase ϕ_{rel} voraussetzt, werden aus einer Messserie zufällig Realisierungen ausgewählt mit der Randbedingung, dass jede Gruppe von Realisierungen verschiedene durch den elektro-optischen Modulator aufgeprägte Phasen enthält. Mit jeder dieser Gruppen wird die Intensitätskorre-

¹⁵Die Abwesenheit des Faktors 2 in der mean-field-Energie spiegelt wider, dass es in der Wechselwirkung zweier Atome im selben Quantenzustand keinen Austauschterm gibt [128].

¹⁶Die durch die selbstähnliche Expansion bedingte quadratische Phase wird in dieser Berechnung nicht vorausgesetzt, sondern sie ergibt sich als Resultat der Rechnung.

lationsfunktion ermittelt. Die Streuung, genauer die Standardabweichung, der derart bestimmten Korrelationsfunktionen liefert den statistischen Fehler, der in den in Abb. 5.37 gezeigten Kurven an exemplarischen Punkten eingezeichnet ist. Aus jeder dieser Korrelationsfunktionen wird durch Fit mit der theoretischen Funktion Gl. (5.55) die Phasenkohärenzlänge ermittelt. Aus der Streuung der gefitteten Phasenkohärenzlängen ergibt sich der statistische Fehler¹⁷ für die Messung von L_ϕ . Der statistische Fehler für die berechnete Phasenkohärenzlänge resultiert aus der Streuung der Teilchenzahlen und Temperaturen in einer Messserie und ist in Abb. 5.38 exemplarisch eingezeichnet.

In die Berechnung der theoretisch erwarteten Phasenkohärenzlänge gehen die Unsicherheiten in der Bestimmung der relevanten experimentellen Parameter, d.h. Teilchenzahl, Temperatur und Fallenfrequenzen, ein. Die systematische Unsicherheit ergibt sich demnach aus der Fortpflanzung der Fehler dieser Parameter bei der Berechnung von L_ϕ . Den größten Beitrag liefert die Unsicherheit in der Teilchenzahlbestimmung. Diese Unsicherheit kann zum einen aus der Unsicherheit der Detektionslaserparameter, insbesondere der Frequenz und Intensität, und zum anderen durch Vergleich des gemessenen Anteils kondensierter Atome mit dem theoretisch bekannten Verlauf (siehe Abb. 5.3) ermittelt werden. Beide Methoden liefern für die hier vorgestellten Messungen eine relative Unsicherheit von 30%. Die Messung der Fallenfrequenzen ist sehr präzise und liefert Unsicherheiten im Promille-Bereich (siehe Kapitel 5.1.3), die im Vergleich zu den übrigen Fehlerquellen vernachlässigbar sind. Im Gegensatz zur axialen Fallenfrequenz hängt die radiale Fallenfrequenz jedoch vom Fallenboden B_0 ab. Daher ist die Unsicherheit der radialen Frequenz nicht durch die Genauigkeit der zugehörigen Eichmessung bestimmt, sondern durch die Genauigkeit, mit der der Fallenboden kontrolliert werden kann. Daraus ergibt sich eine obere Abschätzung von $\Delta\omega_\rho = 2\pi \times 20$ Hz. Systematische Fehler in der Temperaturbestimmung ergeben sich durch Unsicherheiten in der Maßstabsbestimmung und der radialen Fallenfrequenz (siehe Gl. (5.14)). Die Unsicherheiten im Abbildungsmaßstab liegen, wie in Kapitel 5.1.2 erläutert, im Promille-Bereich und sind daher vernachlässigbar. Da die verwendete Fallzeit ein Vielfaches der inversen radialen Fallenfrequenz beträgt, typischerweise $t \approx 70/\omega_\rho$, ist der Einfluss der Unsicherheit der radialen Fallenfrequenz auf die Temperaturbestimmung ebenfalls vernachlässigbar. Aus der Fehlerfortpflanzung der relevanten Beiträge ergibt sich als Abschätzung für die relative systematische Unsicherheit nach Gl. (3.16)

$$\frac{\Delta L_\phi}{L_\phi} \approx \frac{3}{5} \frac{\Delta N_0}{N_0} + \frac{4}{5} \frac{\Delta\omega_\rho}{\omega_\rho} \approx 23\%. \quad (5.57)$$

Da sich die Intensitätskorrelationsfunktionen auf einer Längenskala ändern,

¹⁷Es wurde überprüft, dass die Standardabweichung mit $\approx 1/\sqrt{N}$ abfällt, wobei N die Anzahl der in einer Gruppe enthaltenen zufällig ausgewählten Realisierungen ist.

die deutlich größer als die optische Auflösung ist, ist das endliche Auflösungsvermögen der Abbildungsoptik keine wesentliche Fehlerquelle bei dieser Messung.

Bei der Berechnung von Gl. (5.55) wurde angenommen, dass die Oszillationsfrequenz $(\alpha d - \beta)/\pi$ konstant während einer Messserie ist. Eine mögliche Fehlerquelle bei der Messung der Phasenkohärenzlänge sind Schwankungen in dieser Frequenz, die beispielsweise aus Schwankungen der Teilchenzahl und damit Änderungen der mean-field-Abstoßung resultieren können. In diesem Fall würden selbst in Abwesenheit von Phasenfluktuationen Interferenzmuster mit etwas unterschiedlicher Streifenperiode zu einer Messserie beitragen. Als Resultat wäre der Kontrast der Oszillation der Intensitätskorrelationsfunktion reduziert und die Phasenkohärenzlänge würde systematisch unterschätzt. Um eine obere Abschätzung für diesen Effekt zu erhalten, wurden die Schwankungen im Streifenabstand experimentell gemessen. Der gemessene Streifenabstand variiert sowohl durch Phasenfluktuationen als auch durch mögliche Schwankungen des mean-field Terms. Da der Einfluss der Phasenfluktuationen umso geringer wird, desto größer die Phasenkohärenzlänge der Kondensate ist, wurde zu diesem Zweck eine Messserie mit sehr kalten und großen Kondensaten aufgenommen ($L_\phi = 122 \mu\text{m}$). Die dort gemessenen Schwankungen in der Streifenperiode bilden eine obere Abschätzung für die Unsicherheit in der mean-field bedingten Phase. Der Einfluss dieser Schwankungen auf die gemessene Intensitätskorrelationsfunktion kann numerisch berechnet werden, indem Gl. (5.55) über die entsprechende Verteilung der Kosinus-Frequenzen integriert wird. Abbildung 5.40 vergleicht die Intensitätskorrelationsfunktionen mit und ohne Berücksichtigung der maximalen Schwankungen. Durch Anpassen von Gl. (5.55) an die über die Verteilung der Kosinus-Frequenzen integrierten Funktion kann der maximale aus dieser Fehlerquelle resultierende Fehler ΔL_ϕ abgeschätzt werden. Für die drei Datenpunkte in Abb. 5.38, für die der statistische Fehler eingezeichnet ist, gilt: $L_\phi = 45 \mu\text{m}$, $d = 46 \mu\text{m}$, $\Delta L_\phi/L_\phi = 15.6\%$; $L_\phi = 25 \mu\text{m}$, $d = 23 \mu\text{m}$, $\Delta L_\phi/L_\phi = 16.2\%$ und $L_\phi = 16 \mu\text{m}$, $d = 35 \mu\text{m}$, $\Delta L_\phi/L_\phi = 4.0\%$. Um den Einfluss des Versatzes deutlich zu machen, sei erwähnt, dass für $L_\phi = 25 \mu\text{m}$, $d = 46 \mu\text{m}$ der maximale Fehler nur $\Delta L_\phi/L_\phi = 6.6\%$ beträgt. Diese Betrachtung zeigt, dass diese Fehlerquelle umso größer wird, desto kleiner der Versatz d im Verhältnis zur Phasenkohärenzlänge ist. Dies ist intuitiv verständlich, da für $d \ll L_\phi$ der Einfluss der Phasenfluktuationen auf das Interferenzmuster gering ist. Daher sollte für die Messung der Kohärenzlänge ein Versatz in der Größenordnung des erwarteten L_ϕ gewählt werden.

Numerische Simulation

Bei der analytischen Berechnung der Intensitätskorrelationen wurde die Entwicklung der Phasenfluktuationen während der ballistischen Expansion vernachlässigt. Diese Entwicklung führt zu einer Veränderung der ursprünglichen Pha-

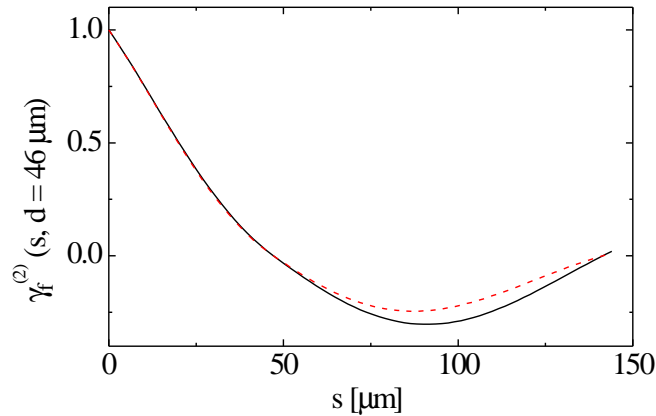


Abbildung 5.40: Abschätzung des Einflusses von Schwankungen in der mean-field bedingten Frequenz der Interferenzstreifen. Die durchgezogene Kurve wurde nach Gl. (5.55) ohne Berücksichtigung eventueller Schwankungen berechnet, die gestrichelte Kurve schätzt den maximalen Einfluss solcher Schwankungen ab. Erwartungsgemäß wird das Minimum der Oszillation etwas ausgewaschen. Die zu Grunde liegenden Parameter sind $L_\phi = 45 \mu\text{m}$, $d = 46 \mu\text{m}$.

senverteilung und zum Entstehen von Dichtemodulationen. Bereits in Kapitel 5.3.2 wurde gezeigt, dass die Änderung der Phasenverteilung für die verwendeten experimentellen Parameter gering ist. Um den Einfluss der Dichtemodulationen auf die Messungen zu untersuchen, wurde die Interferometriesequenz numerisch simuliert.

Das Simulationsprogramm beruht auf der in Kapitel 3.3 beschriebenen Simulation der Phasenfluktuationen mit Zufallsvariablen und auf der in Kapitel 3.4 dargestellten analytischen Beschreibung der ballistischen Expansion phasenfluktuierender Kondensate. Das Programm beinhaltet die folgenden Schritte:

1. Erzeugung der zufälligen Koeffizienten α_j entsprechend der Bose-Einstein-Statistik.
2. Berechnung der ursprünglichen Phase des Kondensats mit Gl. (3.28).
3. Berechnung der Dichtemodulationen des ballistisch expandierten Kondensats mit Gl. (3.39).
4. Berechnung der Phasenverteilung des ballistisch expandierten Kondensats mit Gl. (3.41). Der Beitrag des mean-fields zur Phase wird mit den zuvor näherungsweise berechneten Koeffizienten α und β durch Gl. (5.42) berücksichtigt.
5. Berechnung der Wellenfunktion in den Ausgängen des Interferometers entsprechend Gl. (5.41). Das Interferenzmuster ist das Betragsquadrat der Wellenfunktion.

Um die statistischen Eigenschaften zu erfassen, wurde die Simulation jeweils 1000-fach wiederholt, wobei die aufgeprägte globale Phase in kleinen Schritten zwischen 0 und 2π variiert wurde. Die derart erzeugten 1000 Interferenzmuster wurden analog zu den experimentell gemessenen ausgewertet. In Abb. 5.41 ist eine Simulation mit den experimentell gemessenen Datenpunkten verglichen. Da die gemessene Intensitätskorrelationsfunktion auf nur 29 Realisierungen basiert, unterliegt sie größeren Schwankungen als die Simulation. Dennoch stimmen die gemessene und die simulierte Funktion gut überein. Beide zeigen deutlich das Verhalten einer gedämpften Kosinusschwingung. Zusätzlich ist ein Fit der analytischen Funktion Gl. (5.55) an die gemessenen Datenpunkte eingezeichnet. Außer für sehr große Abstände $s > L = 200 \mu\text{m}$ stimmt die Simulation exzellent mit der analytischen Funktion überein. Dies demonstriert, dass das Entstehen von Dichtemodulationen in der ballistischen Expansion für die Messung der Intensitätskorrelationsfunktion vernachlässigt werden kann und rechtfertigt die Verwendung von Gl. (5.55) für die Bestimmung der Phasenkorrelationseigenschaften. Die geringfügigen Unterschiede der Simulation und der gefitteten Funktion für $s < L$ resultieren aus einer minimalen Abweichung der gefitteten Frequenz und Phasenkohärenzlänge von der berechneten. Die gefittete Phasenkohärenzlänge beträgt $L_\phi^{\text{Fit}} = 57 \pm 10 \mu\text{m}$ im Vergleich zu der aus den experimentellen Parametern berechneten $L_\phi^{\text{th}} = 58 \pm 2 \mu\text{m}$, wobei die angegebenen Fehler die statistische Unsicherheit bezeichnen. Aus Gl. (5.55) ist ersichtlich, dass die gemessene Intensitätskorrelationsfunktion das Produkt einer Kosinus-Funktion und der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung des ursprünglichen Kondensats ist. Die Fitfunktion ohne den Kosinus-Term ist somit mit $g^{(2)}$ identisch und ist in Abb. 5.41 als gestrichelte Linie eingezeichnet. Die Abbildung veranschaulicht, dass die Korrelationsfunktion die Einhüllende der Oszillation ist. Die Phasenkohärenzlänge lässt sich sofort grafisch als der doppelte Abstand des Wertes s , bei dem $g^{(2)}$ auf $1/\sqrt{e}$ abfällt, ablesen.

Um einen direkten Vergleich zwischen der analytischen Funktion und der Simulation zu erlangen, wurde für mehrere Parametersätze die nach Gl. (5.55) berechnete Funktion der mit diesen Parametern simulierten Funktion gegenübergestellt. In allen Fällen zeigte sich eine sehr gute Übereinstimmung, die demonstriert, dass alle gemessenen Intensitätskorrelationsfunktionen durch das Entstehen von Dichtemodulationen oder die Veränderung der Phasenverteilung während der ballistischen Expansion unbeeinflusst sind. Abbildung 5.42 zeigt exemplarisch einen solchen Vergleich.

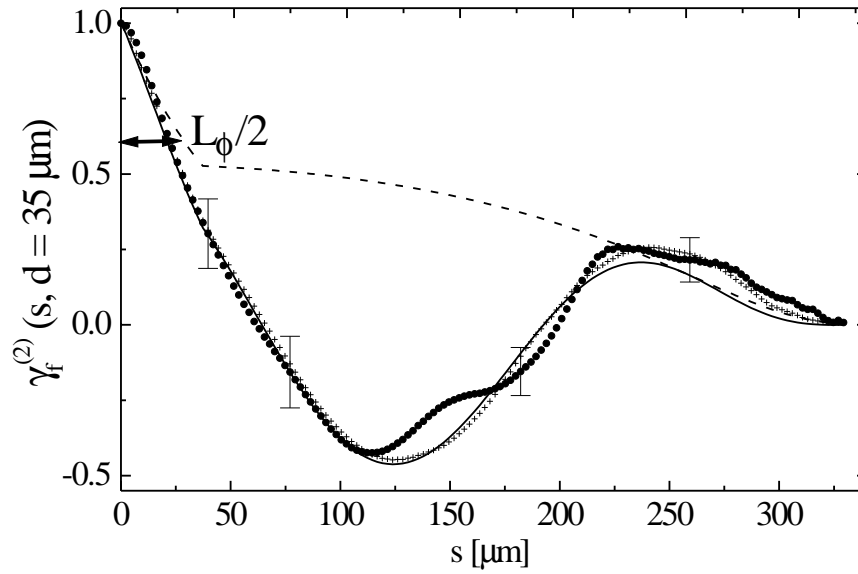


Abbildung 5.41: Vergleich der gemessenen (Kreise) mit der numerisch simulierten (Kreuze) Intensitätskorrelationsfunktion. Die durchgezogene Linie ist ein Fit der analytischen Funktion Gl. (5.55) an die gemessenen Datenpunkte. Die Fitfunktion beinhaltet die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung $g^{(2)}\left(\frac{-s-d}{2}, \frac{s+d}{2}, \frac{s-d}{2}, \frac{-s+d}{2}\right)$, die als gestrichelte Linie eingezeichnet ist. Die Fehlerbalken zeigen die statistische Unsicherheit der Messwerte, die experimentellen Parameter sind $N_0 = 5.0 \times 10^5$, $T = 216$ nK, $\omega_x = 2\pi \times 3.38$ Hz, $\omega_p = 2\pi \times 300$ Hz und $d = 35 \mu\text{m}$. Der Messung liegen 29 Realisierungen, aufgenommen nach einer Expansionszeit von 37 ms zu Grunde.

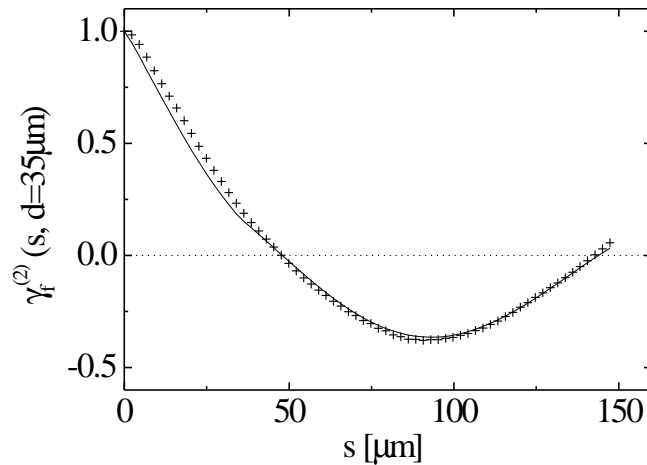


Abbildung 5.42: Vergleich der analytischen Funktion Gl. (5.55) mit der numerisch simulierten Intensitätskorrelationsfunktion. Die Simulation berücksichtigt im Gegensatz zur analytischen Funktion die Entstehung von Dichtemodulationen während der ballistischen Expansion. Beiden Funktionen liegen die experimentellen Parameter der zu $L_\phi = 40 \mu\text{m}$ gehörenden Kurve aus Abb. 5.37 zu Grunde.

AUSBLICK

Bose-Einstein-Kondensate sind die Basis für vielversprechende Anwendungen und Untersuchungen fundamental neuer Quantensysteme. Das Verständnis insbesondere ihrer Kohärenzeigenschaften ist daher von substanzieller Bedeutung. Die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse haben zum Verständnis entarteter Quantengase in elongierten und niederdimensionalen Geometrien beigetragen. Diese Erkenntnisse und die Erweiterung der experimentellen Möglichkeiten legen wichtige Grundsteine für weiterführende Untersuchungen niederdimensionaler Quantengase.

Eine experimentell noch unbeantwortete Fragestellung ist der Einfluss der Dimensionalität auf die Anregungszustände von Bose-Einstein-Kondensaten. Es wurde bereits theoretisch gezeigt, dass sich die Frequenz der Quadrupol-schwingung beim Übergang von dreidimensionalen zu kinematisch eindimensionalen BECs ändert [129]. Die Untersuchung dieses Übergangsbereiches erfordert sehr elongierte Fallenpotenziale, so dass sich hierfür die axial dekomprimierte Magnetfallenkonfiguration eignet. Da insbesondere für geringe Teilchenzahlen das kinematisch eindimensionale Regime erreicht werden kann, ist das deutlich verbesserte Signal/Rausch-Verhältnis des neuen Detektionssystems wesentlich. Ebenso können diese Messungen von der Realisierung von BECs im $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand profitieren, da dieser über eine um mindestens 2 Größenordnungen geringere inelastische Zwei-Körper-Stoßrate als der $|F = 2, m_F = 2\rangle$ Zustand verfügt [130, 113] und so längere Beobachtungszeiten der Schwingung ermöglicht.

Durch den Einsatz optischer Gitter bietet sich ausgehend von Bose-Einstein-Kondensaten die Möglichkeit, stark korrelierte atomare Gittergase zu erzeugen. Dieses neue Gebiet ist durch seine inhärente Interdisziplinarität charakterisiert, da zur Beschreibung dieser Systeme Konzepte aus der Atom- und Molekülphysik, der Quantenoptik und der Festkörperphysik notwendig sind. Stark korrelierte Systeme unterscheiden sich wesentlich von Bose-Einstein-Kondensaten

schwach wechselwirkender Gase. Sie können nicht von mean-field-Theorien beschrieben werden, d.h. die Wellenfunktion kann nicht als Produkt der Wellenfunktionen der einzelnen Teilchen ausgedrückt werden. Dieser fundamentale Unterschied in der Beschreibung stark korrelierter Systeme geht einher mit grundlegend verschiedenen Eigenschaften im Vergleich zu schwach wechselwirkenden Systemen, die sich beispielsweise in einer dramatischen Veränderung der Quantenstatistik manifestieren [31, 131, 30]. Darüber hinaus bieten stark wechselwirkende Systeme in der Atom- und Molekülphysik faszinierende Kontroll- und Manipulationsmöglichkeiten, die in anderen stark korrelierten Systemen, wie z.B. Festkörpersystemen, nicht möglich sind.

Ein Schwerpunkt intensiver experimenteller Bemühungen ist der Einsatz zweidimensionaler optischer Gitter, um eindimensionale Quantengase im sogenannten Tonks-Regime zu realisieren und zu untersuchen. Wenn der radiale Einschluss des Gases so stark wird, dass die Ausdehnung der Grundzustandswellenfunktion die Größenordnung der Streulänge erreicht, geht das System in ein Gas undurchdringbarer Bosonen über, das sogenannte Tonks-Gas. Dies hat zur Folge, dass das bosonische Gas fermionische Dichteigenschaften annimmt. Die Untersuchung dieses faszinierenden, bisher nicht realisierten Systems, kann die bestehende Kompetenz beim Studium niederdimensionaler Quantengase auf ein ganz neues Regime ausweiten.

Eine der meistdiskutierten Anwendungen von Bose-Einstein-Kondensaten sind Atomlaser, deren charakteristischer Unterschied zu thermischen Atomstrahlen ihre Kohärenzeigenschaften sind. In einem neu geplanten Experiment unserer Arbeitsgruppe sollen Untersuchungen zur Realisierung kontinuierlicher Atomlaser durchgeführt werden. In die Konzeption dieses Experimentes werden die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse zur Kohärenz von Bose-Einstein-Kondensaten einfließen.

Es sind auch weiterhin interessante Entwicklungen auf dem Gebiet ultrakalter Quantengase zu erwarten. Die Ergebnisse dieser Arbeit haben einen Beitrag zum Verständnis dieser Systeme geliefert.

LASERSYSTEM

Kern des in Abb. A.1 gezeigten Lasersystems sind ein Titan:Saphir-Laser, der die Strahlung auf dem Kühlübergang zur Verfügung stellt, und ein Master-Slave Diodenlasersystem für die Rückpumpstrahlung. Dieser Teil des Lasersystems wurde größtenteils von S. Burger und K. Bongs aufgebaut. Zusätzlich wurde ein separater Detektionslaser und ein Lasersystem zur Manipulation der Bose-Einstein-Kondensate mit Bragg-Beugung [132] aufgebaut.

Der Titan:Saphir-Laser und die diodenbasierten Masterlaser werden durch dopplerfreie Sättigungsspektroskopie auf atomare Rubidium-Übergänge stabilisiert. Tabelle A.1 zeigt die Übergänge, die zur Stabilisierung der jeweiligen Laser verwendet werden. Zu beachten ist, dass die zur Spektroskopie verwendete Strahlung teilweise schon mit einem akusto-optischem Modulator um $-f_{\text{AOM}}$ frequenzverschoben ist. Beispielsweise wird der Titan:Saphir-Laser so geregelt, dass diese frequenzverschobene Strahlung auf dem Crossover zwischen den $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ und $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ Übergängen liegt. Die Ausgangsfrequenz des Titan:Saphir-Lasers ist demnach um f_{AOM} höher als die zum Crossover gehörende Frequenz.

Die Strahlteilung geschieht jeweils mit Polarisationsstrahlteilerwürfeln und die Feinabstimmung der Frequenz auf den jeweiligen Anwendungszweck wird mithilfe akusto-optischer Modulatoren (AOM) und einem elektro-optischen

Laser	Spektroskopieübergang
Kühlaser (Ti:Sa)	Crossover $ F = 2\rangle \rightarrow F' = 2\rangle$, $ F = 2\rangle \rightarrow F' = 3\rangle$
Rückpumlaser	Crossover $ F = 1\rangle \rightarrow F' = 1\rangle$, $ F = 1\rangle \rightarrow F' = 2\rangle$
Detektionslaser	Crossover $ F = 2\rangle \rightarrow F' = 2\rangle$, $ F = 2\rangle \rightarrow F' = 3\rangle$

Tabelle A.1: Zur Stabilisierung der Laser verwendete Übergänge.

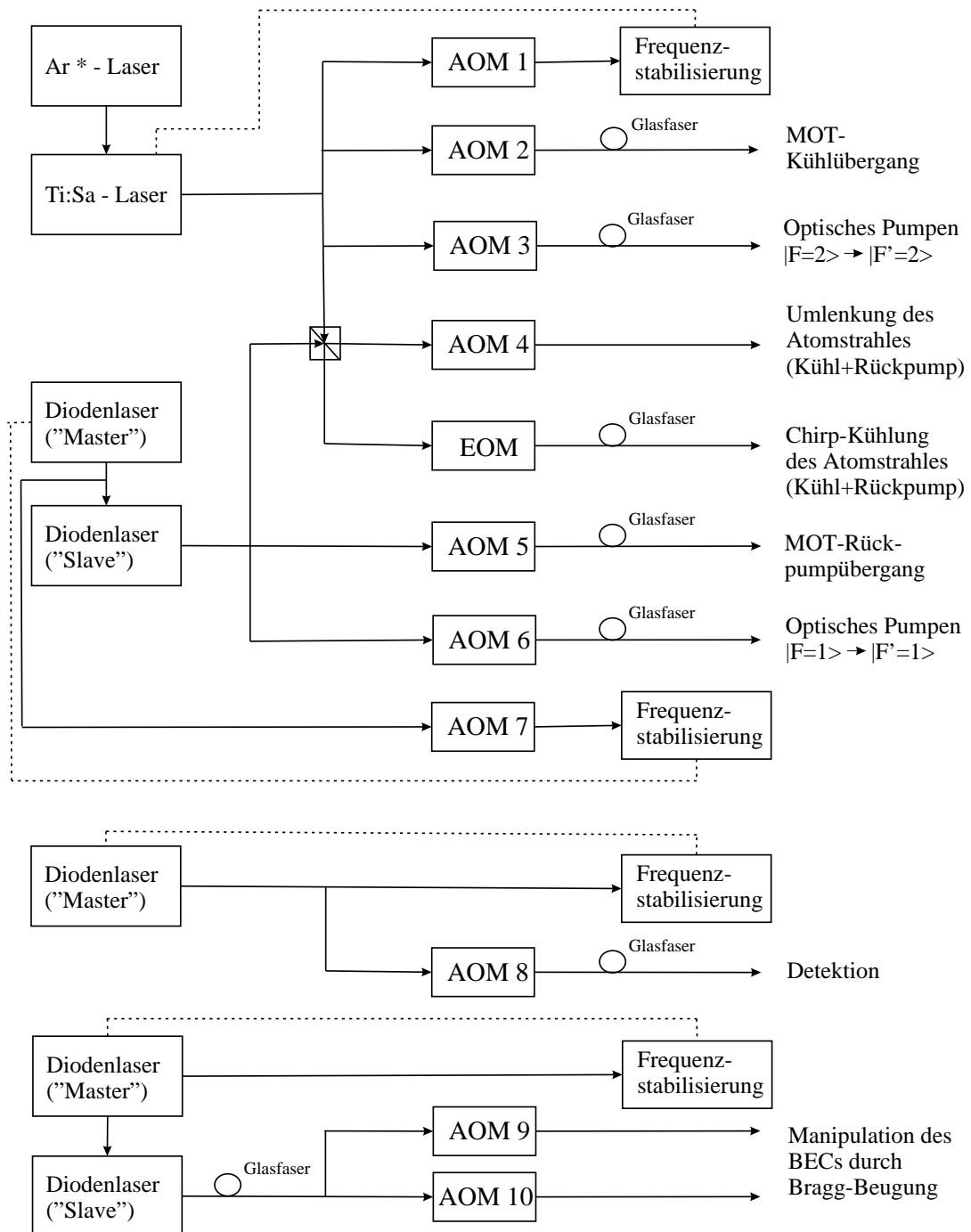


Abbildung A.1: Schematische Darstellung des Lasersystems.

AOM	Frequenz [MHz]	Ordnung	Doppelpass
1	127.6	-1	x
2 (MOT)	68.6	-1	x
2 (Melasse)	83.8	-1	x
3	194.4	-1	x
4	135.0	-1	
5	126.5	-1	
6	283.6	-1	
7	205.0	-1	
8	66.8	+1	x

Tabelle A.2: Frequenzen der zur Laserkühlung und Detektion eingesetzten akustooptischen Modulatoren (Nummerierung entsprechend Abb. A.1). Für die Detektion ist die Frequenz für resonantes Detektionslicht angegeben.

Strahlengang	Leistung [mW]
MOT-Kühl	220
MOT-Rückpump	4
Chirp-Kühl	90
Chirp-Rückpump	4
Optisches Pumpen	0.1
Detektion	0.4

Tabelle A.3: Typische Laserleistungen am Ausgang der Fasern der jeweiligen Strahlengänge. Die Leistungen des optischen Pumpens sind für den $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 1\rangle$ und den $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$ Strahlengang identisch und beziehen sich auf die Erzeugung von Kondensaten im $F=1$ Zustand.

Modulator (EOM) vorgenommen. Tabelle A.2 zeigt die im Experiment verwendeten AOM-Frequenzen. Ein beträchtlicher Teil der AOMs wird im Doppelpass durchlaufen, so dass in diesem Fall die Frequenzverschiebung $2 \times f_{\text{AOM}}$ ist.

Zur Chirp-Kühlung werden der entsprechenden Strahlung Seitenbänder aufgeprägt, deren Frequenz in einer linearen Rampe um etwa 500 MHz variiert („gechirpt“) wird. Abbildung A.2 zeigt den zeitlichen Rampenverlauf und die nahezu optimale Effizienz der Seitenbanderzeugung.

Bis auf die zur Umlenkung des Atomstrahles eingesetzte Laserstrahlung werden alle Strahlengänge mithilfe optischer Fasern an den Lasertisch, der die Vakuumapparatur trägt, herangeführt. Typische, hinter den Faserenden gemessene Laserleistungen sind in Tabelle A.3 aufgeführt.

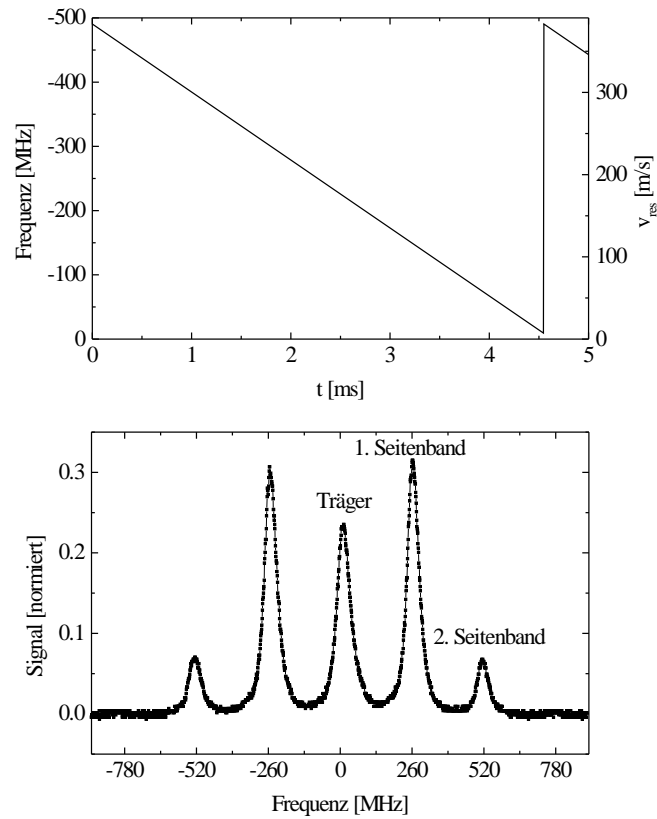


Abbildung A.2: Oben: Zur Chirpkühlung verwendete Rampe des EOMs. Die Frequenz der Seitenbänder und die Geschwindigkeit der dazu resonanten Atome sind in Abhängigkeit der Zeit dargestellt. Unten: Träger und Seitenbänder bei einer EOM-Frequenz von etwa 260 MHz. Das Spektrum wurde mit einer Fabry-Perot-Cavity aufgenommen.

ANHANG B

LINIENSTÄRKEN

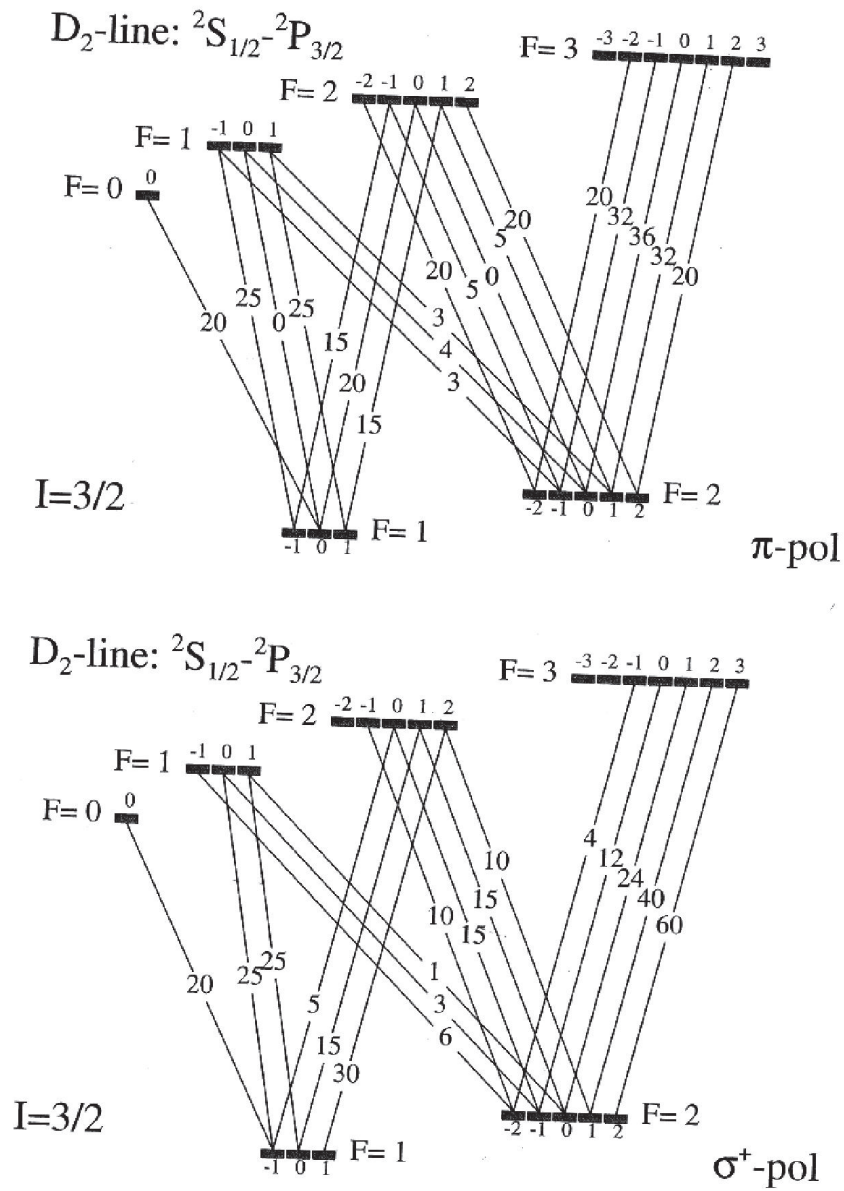


Abbildung B.1: Linienstärken des 780 nm-Überganges von ${}^{87}\text{Rubidium}$ für linear π -polarisiertes und zirkular polarisiertes Licht, entnommen aus [81].

Literaturverzeichnis

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(0):198, July 1995.
- [2] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75(22):3969, November 1995.
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 75(9):1687, August 1995. *ibid.* **79**, 1170 (1997).
- [4] A. Griffin. A brief history of our understanding of BEC: From Bose to Beliaev. In M. Inguscio, S. Stringari, and C.E. Wieman, editors, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, page 1. IOS Press, 1999.
- [5] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung. *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1925:3, January 1925.
- [6] S. N. Bose. *Z. Phys.*, 26:178, January 1924.
- [7] F. London. The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy. *Nature*, 141(3571):643, April 1938.
- [8] L. J. Tisza. *J. Phys. Radium*, 1:350, 1940.
- [9] L. D. Landau. *J. Phys. USSR*, 5:71, 1941.
- [10] N. N. Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys. USSR*, 11(1):23, 1947.
- [11] L. P. Pitaevskii. The problem of the form of the spectrum of elementary excitations of liquid helium II. *Sov. Phys. JETP*, 12:155, 1960.

- [12] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, and T. J. Greytak. Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 81(18):3811, November 1998.
- [13] I. F. Silvera and J. T. M. Walraven. Stabilization of atomic hydrogen at low temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 44(3):164, January 1980.
- [14] R. W. Cline, D. A. Smith, T. J. Greytak, and D. Kleppner. Magnetic confinement of spin-polarized atomic hydrogen. *Phys. Rev. Lett.*, 45:2117, 1980.
- [15] C. E. Hecht. The possible superfluid behaviour of hydrogen atom gases and liquids. *Physica*, 25(10):1159, October 1959.
- [16] W. C. Stwalley and L.H. Nosanow. Possible new quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 36(15):910, April 1976.
- [17] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 59(23):2631, December 1987.
- [18] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook, and A. Aspect. A Bose-Einstein condensate of metastable atoms. *Science*, 292:461, 2001.
- [19] F. Pereira Dos Santos, J. Leonard, J. Wang, C. J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C. S. Unnikrishnan, M. Leduc, and C. Cohen-Tannoudji. Bose-Einstein condensation of metastable helium. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3459, 2001.
- [20] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle. Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 78(4):582, January 1997.
- [21] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, 283:1706, March 1999.
- [22] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger. Atom laser with a cw output coupler. *Phys. Rev. Lett.*, 82(15):3008, April 1999.
- [23] K. Bongs, S. Burger, G. Birkl, K. Sengstock, W. Ertmer, K. Rzążewski, A. Sanpera, and M. Lewenstein. Coherent evolution of bouncing Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 83(18):3577, November 1999.

- [24] S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic, and D. E. Pritchard. Contrast interferometry using Bose-Einstein condensates to measure h/m and α . *Phys. Rev. Lett.*, 89:140401, 2002.
- [25] P. Bouyer and M.A. Kasevich. Heisenberg-limited spectroscopy with degenerate Bose-Einstein gases. *Phys. Rev. A*, 56(2):R1083, August 1997.
- [26] C. J. Myatt, E. A. Burt, R. W. Ghrist, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Production of two overlapping Bose-Einstein condensates by sympathetic cooling. *Phys. Rev. Lett.*, 78(4):586, January 1997.
- [27] B. DeMarco and D.S. Jin. Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas. *Science*, 285(5434):1703, September 1999.
- [28] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. B. Partridge, and R. G. Hulet. Observation of Fermi pressure in a gas of trapped atoms. *Science*, 291(5513):2570, March 2001.
- [29] F. Schreck, L. Khaykovich, K.L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, and C. Salomon. Quasipure Bose-Einstein condensate immersed in a Fermi sea. *Phys. Rev. Lett.*, 87(8):080403, August 2001.
- [30] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller. Cold bosonic atoms in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 81(0):3108, 1998.
- [31] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415:39, January 2002.
- [32] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch, and I. Bloch. Coherent transport of neutral atoms in spin-dependent optical lattice potentials. *Phys. Rev. Lett.*, 91(1):010407, 2003.
- [33] D. Jaksch, V. Venturi, J. I. Cirac, C. J. Williams, and P. Zoller. Creation of a molecular condensate by dynamically melting a mott insulator. *Phys. Rev. Lett.*, 89(0):040402, 2002.
- [34] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Vortices in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 83(13):2498, September 1999.
- [35] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard. Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 84(5):806, January 2000.
- [36] B. P. Anderson and M. A. Kasevich. Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays. *Science*, 282:1686, November 1998.

- [37] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, and M. Inguscio. Magnetic confinement of spin-polarized atomic hydrogen. *Science*, 293:843, 2001.
- [38] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of interference between two Bose-Einstein condensates. *Science*, 275(0):637, January 1997.
- [39] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, M. Trippenbach, Y. B. Band, M. Edwards, M. R. Doery, P. S. Julienne, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. Measurement of the coherence of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 83(16):3112, October 1999.
- [40] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. Bragg spectroscopy of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 82(23):4569, June 1999.
- [41] I. Bloch, T. W. Hänsch, and T. Esslinger. Measurement of the spatial coherence of a trapped Bose gas at the phase transition. *Nature*, 403(6766):166, January 2000.
- [42] A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. P. Rosenband, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. Realization of Bose-Einstein condensates in lower dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 87:130402, 2001.
- [43] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. Regimes of quantum degeneracy in trapped 1d gases. *Phys. Rev. Lett.*, 85(18):3745, October 2000.
- [44] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. Phase-fluctuating 3d Bose-Einstein condensates in elongated traps. *Phys. Rev. Lett.*, 87:050404, 2001.
- [45] W. Hänsel, P. Hommelhoff, T. W. Hänsch, and J. Reichel. Bose-Einstein condensation on a microelectronic chip. *Nature*, 413:498, 2001.
- [46] H. Ott, J. Fortagh, G. Schlotterbeck, A. Grossmann, and C. Zimmermann. Bose-Einstein condensation in a surface microtrap. *Phys. Rev. Lett.*, 87:230401, 2001.
- [47] S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, and M. Lewenstein. Observation of phase fluctuations in elongated Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 87:160406, 2001.

- [48] D. Hellweg, S. Dettmer, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, and M. Lewenstein. Phase fluctuations in Bose-Einstein condensates. *Appl. Phys. B*, 73:781, 2001.
- [49] H. Kreutzmann, A. Sanpera, L. Santos, M. Lewenstein, D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, J. J. Arlt, and W. Ertmer. Characterization and control of phase fluctuations in elongated Bose-Einstein condensates. *Appl. Phys. B*, 76:165, 2003.
- [50] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. Correlations between photons in two coherent beams of light. *Nature*, 177:27, January 1956.
- [51] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. *Nature*, 178:1046, 1956.
- [52] D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, W. Ertmer, and J. Arlt. Measurement of the spatial correlation function of phase fluctuating Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 91(1):010406, 2003.
- [53] L. Cacciapuoti, D. Hellweg, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, W. Ertmer, and J. Arlt. Second order correlation function of a phase fluctuating Bose-Einstein condensate. *submitted to Phys. Rev. A*, 2003.
- [54] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Erste Abhandlung. *Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1924:261, January 1924.
- [55] K. Huang. *Statistical Mechanics*. Wiley, 1987.
- [56] C. J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [57] V. V. Goldman, I. F. Silvera, and A. J. Leggett. Atomic hydrogen in an inhomogeneous magnetic field: Density profile and Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. B*, 24(5):2870, September 1981.
- [58] D. A. Huse and E. D. Siggia. The density distribution of a weakly interacting Bose gas in an external potential. *J. Low Temp. Phys.*, 48:137, 1982.
- [59] N. D. Mermin and H. Wagner. *Phys. Rev. Lett.*, 22:1133, 1966.
- [60] P. C. Hohenberg. *Phys. Rev.*, 158:383, 1967.
- [61] W. Ketterle and N. J. van Druten. Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions. *Phys. Rev. A*, 54(1):656, July 1996.

- [62] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G.V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein. Dark solitons in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 83(25):5198, December 1999.
- [63] J. Denschlag, J.E. Simsarian, D.L. Feder, Charles W. Clark, L.A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E.W. Hagley, K. Helmerson, W.P. Reinhardt, S.L. Rolston, B.I. Schneider, and W.D. Phillips. Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate. *Science*, 287:97, January 2000.
- [64] L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, M. Trippenbach, Y. Band, P. S. Julienne, J. E. Simsarian, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. Four-wave mixing with matter waves. *Nature*, 398(6724):218, March 1999.
- [65] L. P. Pitaevskii. Trapped Bose-Einstein condensed gas: mean-field approximation and beyond. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. E. Wieman, editors, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, page 287. IOS Press, 1999.
- [66] D. J. Heinzen. Ultracold atomic interactions. In M. Inguscio, S. Stringari, and C.E. Wieman, editors, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, page 351. IOS Press, 1999.
- [67] E. P. Gross. *Nuovo Cimento*, 20:454, 1961.
- [68] L. P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13(2):451, August 1961.
- [69] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [70] C. C. Bradley, C. A. Sackett, and R. G. Hulet. Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Phys. Rev. Lett.*, 78(6):985, February 1997.
- [71] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Stable ^{85}Rb Bose-Einstein condensates with widely tunable interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 85(9):1795, August 2000.
- [72] J. L. Roberts, N. R. Claussen, S. L. Cornish, E. A. Donley, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Controlled collapse of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 86(19):4211, May 2001.
- [73] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 392(0):151, March 1998.

- [74] V. Vuletić, A. J. Kerman, C. Chin, and S. Chu. Observation of low-field feshbach resonances in collisions of cesium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 82(7):1406, February 1999.
- [75] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71(3):463, April 1999.
- [76] Y. Castin and R. Dum. Bose-Einstein condensates in time-dependent traps. *Phys. Rev. Lett.*, 77(27):5315, December 1996.
- [77] Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov. Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential. *Phys. Rev. A*, 54:1753(R), 1996.
- [78] K. Bongs. *Atomoptische Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten*. Doktorarbeit, Universität Hannover, 1999.
- [79] S. Burger. *Erzeugung und Untersuchung dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten*. Doktorarbeit, Universität Hannover, 2000.
- [80] C. Cohen-Tannoudji. Atomic motion in laser light. In J. M. Raimond J. Dalibard and J. Zinn-Justin, editors, *Fundamental Systems in Quantum Optics*. Elsevier Science Publishers B. V., 1992.
- [81] H. J. Metcalf and P. van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer-Verlag, 1999.
- [82] V. S. Letokhov and V. G. Minogin. *Phys. Rep.*, 71:1, 1981.
- [83] W. Ertmer, R. Blatt, J.L. Hall, and M. Zhu. Laser manipulation of atomic beam velocities: Demonstration of stopped atoms and velocity reversal. *Phys. Rev. Lett.*, 54(10):996, March 1985.
- [84] J. Nellessen, J.-H. Müller, K. Sengstock, and W. Ertmer. Large-angle beam deflection of a laser-cooled sodium beam. *JOSA B*, 9:2149, 1989.
- [85] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical-models. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6(11):2023, November 1989.
- [86] Y. Gott, M. S. Ioffe, and V. Tel’Kovskii. *Nucl. Fusion 192 Suppl.*, 3:1045, 1962.
- [87] D. E. Pritchard. Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 51(15):1336, October 1983.

- [88] V. S. Bagnato, G. P. Lafyatis, A. G. Martin, E. L. Raab, R. N. Ahmad-Bitar, and D. E. Pritchard. Continuous stopping and trapping of neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 58(21):2194, May 1987.
- [89] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, 77(3):416, July 1996.
- [90] M. Roemer. *Konzeption und Aufbau einer magnetischen Falle für die Erzeugung eines kohärenten Ensembles von Rubidiumatomen*. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1997.
- [91] T. Südmeyer. *Präparation kalter atomarer Ensembles für die Bose-Einstein Kondensation*. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1998.
- [92] W. Ketterle and N.J. van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 37(0):181, 1996.
- [93] O. J. Luiten, M. W. Reynolds, and J. T. M. Walraven. Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas. *Phys. Rev. A*, 53(1):381, January 1996.
- [94] H. Wu, E. Arimondo, and C. J. Foot. Dynamics of evaporative cooling for Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. A*, 56(1):560, July 1997.
- [95] R. Grimm, M. Weidemüller, and Yu. B. Ovchinnikov. Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 95:95, 2000.
- [96] C. S. Adams, M. Siegel, and J. Mlynek. Atom optics. *Phys. Rep.*, 240:143, 1994.
- [97] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: The dipole force revisited. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2:1707, 1985.
- [98] W. Ketterle, D.S. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. In M. Inguscio, S. Stringari, and C.E. Wieman, editors, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, page 67. IOS Press, 1999.
- [99] K. Bongs, S. Burger, D. Hellweg, M. Kottke, S. Dettmer, T. Rinkleff, L. Cacciapuoti, J. Arlt, K. Sengstock, and W. Ertmer. Spectroscopy of dark soliton states in Bose-Einstein condensates. *J. Opt. B*, 5:124, 2003.

- [100] Y. Torii, Y. Suzuki, M. Kozuma, T. Sugiura, and T. Kuga. Mach-zehnder bragg interferometer for a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 61:041602(R), 2000.
- [101] B. Young, M. Kasevich, and S. Chu. Precision atom interferometry with light pulses. In P. R. Berman, editor, *Atom Interferometry*, page 363. Academic Press, 1997.
- [102] S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect. Momentum spectroscopy of 1d phase fluctuations in Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 91(1):010405, 2003.
- [103] I. Shvarchuck, Ch. Buggle, D. S. Petrov, K. Dieckmann, M. Zielonkowski, M. Kemmann, T. G. Tiecke, W. von Klitzing, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven. Bose-Einstein condensation into nonequilibrium states studied by condensate focusing. *Phys. Rev. Lett.*, 89(27):270404, December 2002.
- [104] C. Mora and Y. Castin. Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates. *Phys. Rev. A*, 67:053615, 2003.
- [105] J. O. Andersen, U. Al Khawaja, and H. T. C. Stoof. Phase fluctuations in atomic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 88(7):070407, February 2002.
- [106] U. Al Khawaja, J. O. Andersen, N. P. Proukakis, and H. T. C. Stoof. Low dimensional bose gases. *Phys. Rev. A*, 66:013615, February 2002.
- [107] D. L. Luxat and A. Griffin. Dynamic correlation functions in one-dimensional quasicondensates. *Phys. Rev. A*, 67:043603, 2003.
- [108] S. I. Shevchenko. *Sov. J. Low Temp. Phys.*, 18:223, 1992.
- [109] D. S. Petrov. *Bose-Einstein Condensation in Low-Dimensional Trapped Gases*. Doktorarbeit, FOM Institute AMOLF, 2003.
- [110] S. Stringari. Dynamics of Bose-Einstein condensed gases in highly deformed traps. *Phys. Rev. A*, 58(3):2385, September 1998.
- [111] M. O. Scully and M. S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [112] W. Ketterle and Hans-Joachim Miesner. Coherence properties of Bose-Einstein condensates and atom lasers. *Phys. Rev. A*, 56(4):3291, October 1997.

- [113] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, and C. E. Wieman. Coherence, correlations, and collisions: What one learns about Bose-Einstein condensates from their decay. *Phys. Rev. Lett.*, 79(3):337, July 1997.
- [114] F. Gerbier, S. Richard, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect. Momentum distribution and correlation function of quasicondensates in elongated traps. *Phys. Rev. A*, 67:051602, 2003.
- [115] C. Cohen-Tannoudji and C. Robillard. *C. R. Acad. Sci. Paris.*, t.2 series IV:445, 2001.
- [116] S. Dettmer. *Experimentelle Untersuchungen zum Einsatz von Bose-Einstein Kondensaten in der hochauflösenden Interferometrie*. Doktorarbeit, Universität Hannover, 2003.
- [117] K. Bongs, S. Burger, S. Dettmer, D. Hellweg, J. Arlt, W. Ertmer, and K. Sengstock. Waveguide for Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 63:R031602, 2001.
- [118] E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar. Interisotope determination of ultracold rubidium interactions from three high-precision experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 88:093201, 2002.
- [119] J. Arlt. *Experiments on Bose-Einstein Condensation*. Phd thesis, University of Oxford, 2000.
- [120] J. B. Pawley. *Handbook of biological confocal microscopy*. Plenum Press, 2nd edition, 1995.
- [121] Eine Zusammenstellung der optischen Eigenschaften von ^{87}Rb findet sich in D. A. Steck. Rubidium 87 D line data. <http://steck.us/alkalidata>, 2001.
- [122] B. Gao. Effects of zeeman degeneracy on the steady-state properties of an atom interacting with a nearresonant laser field: Analytic results. *Phys. Rev. A*, 48:2443, 1993.
- [123] H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, M.R. Andrews, D.S. Durfee, S. Inouye, and W. Ketterle. Bosonic stimulation in the formation of a Bose-Einstein condensate. *Science*, 279(0):1005, February 1998.
- [124] M. Köhl, M. J. Davis, C. W. Gardiner, T. W. Hänsch, and T. Esslinger. Growth of Bose-Einstein condensates from thermal vapor. *Phys. Rev. Lett.*, 88:080402, 2002.

-
- [125] J. E. Simsarian, J. Denschlag, Mark Edwards, Charles W. Clark, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips. Imaging the phase of an evolving Bose-Einstein condensate wave function. *Phys. Rev. Lett.*, 85(10):2040, September 2000.
- [126] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. *Proc. Roy. Soc. A*, 248:222, 1958.
- [127] U. Krengel. *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg, 1988.
- [128] A. J. Leggett. Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts. *Rev. Mod. Phys.*, 73:307, 2001.
- [129] C. Menotti and S. Stringari. Collective oscillations of a one-dimensional trapped Bose-Einstein gas. *Phys. Rev. A*, 66:043610, 2002.
- [130] H. M. J. M Boesten, A. Moerdijk, and B.J. Verhaar. Dipolar decay in two recent Bose-Einstein condensation experiments. *Phys. Rev. A*, 54(1):R29, July 1996.
- [131] C. Orzel, A. K. Tuchman, M. L. Fenselau, M. Yasuda, and M. A. Kasevich. Squeezed states in a Bose-Einstein condensate. *Science*, 291:2386, 2001.
- [132] T. Rinkleff. *Bragg-Beugung an Bose-Einstein Kondensaten*. Diplomarbeit, Universität Hannover, 2000.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Wolfgang Ertmer, danke ich für die Möglichkeit, auf einem sehr faszinierenden Gebiet der Physik mit guter experimenteller Ausstattung in einem hochmotivierten Umfeld promovieren zu können. Ich danke ihm für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die persönliche Förderung durch Teilnahme an Sommerschulen und Konferenzen.

Herrn Prof. Dr. Lewenstein danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferates und für die ausgezeichnete Zusammenarbeit mit ihm und seiner Arbeitsgruppe, die wesentlich zum Erfolg vieler Projekte des BEC-Experimentes beigetragen hat.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Klaus Sengstock und Prof. Dr. Jan Arlt, die durch ihren engagierten Einsatz, ihre Ideen und Anregungen sowie intensive Diskussionen entscheidend zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Großen Anteil an den hier dargestellten Arbeiten hat das gesamte BEC-Team. Bei Dr. Kai Bongs und Dr. Sven Burger bedanke ich mich für die nette Einführung in das BEC-Experiment. Bei Dr. Stefanie Dettmer und Dr. Luigi Cacciapuoti bedanke ich mich für die angenehme und konstruktive Zusammenarbeit in vielen „Messnächten“, bei den derzeitigen Doktoranden Markus Kottke und Thomas Schulte für ihre Mithilfe bei den interferometrischen Messungen sowie bei Dr. Pasi Ryytty, Thomas Rinkleff, Sascha Drenkelforth, Holger Schmaljohann und Michael Erhard für vielfältige Unterstützung.

Stellvertretend für die gesamte Arbeitsgruppe von Wolfgang Ertmer bedanke ich mich für die gute Arbeitsatmosphäre und auch einige private Aktivitäten bei Dr. Martin Zinner, Christian Jentsch, Tanja Mehlstäubler, Tobias Müller, Dr. Albane Douillet, Dr. Jochen Keupp, Peter Spoden, Priv. Doz. Gerhard Birkl, Dr. Ernst M. Rasel, Nils Rehbein, Rainer Dumke, Tobias Müther und Michael Volk.

Die umfangreiche Zusammenarbeit mit der theoretischen Quantenoptikgruppe von Prof. Dr. Lewenstein war sehr befruchtend für diese Arbeit. Hierfür danke ich Priv. Doz. Anna Sanpera, Helge Kreutzmann und insbesondere Dr. Luis Santos.

Diese Arbeit wurde durch die Hilfe zahlreicher Mitarbeiter des Institutes sehr erleichtert. Stellvertretend für alle bedanke ich mich bei Herrn Dr. Rudolf Gaul, Frau Faber, Frau Pfennig, Frau Hünitzsch und Herrn Heidekrüger.

Vor allem danke ich meinen Eltern und meinem Bruder für die Unterstützung aller erdenklichen Art.

Lebenslauf

Persönliche Daten

04.09.1972 geboren in Halle (Westfalen) als Sohn von Gerhard Hellweg und Elsbeth Hellweg, geb. Kramme

Schulbildung

1979 - 83 Grundschule in Steinhagen-Amshausen
1983 - 92 Gymnasium der Friedrich-von-Bodenschwingh-Schulen in Bielefeld
1992 Abitur

07/92 - 09/93 Zivildienst

Studium

10/93 Aufnahme des Physikstudiums an der Universität Bielefeld
09/95 Vordiplom in Mathematik
10/95 Vordiplom in Physik
10/96 - 07/97 Fortsetzung des Physikstudiums an der Oxford University
10/97 Fortsetzung des Physikstudiums an der Universität Bielefeld
12/99 Abschluss des Studiums, Diplom in Physik
Titel der Diplomarbeit: „Dispersionskompensation und Charakterisierung von Femtosekundenpulsen in der 2-Photonen-Laserscanningmikroskopie“
seit 11/99 Doktorarbeit am Institut für Quantenoptik
in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. W. Ertmer
Thema: „Phasenfluktuationen in Bose-Einstein-Kondensaten“