

Aktive Schwingungsreduktion an einem elastischen Fahrweg unter bewegter Masse

Vom Fachbereich Maschinenbau
der Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Hanno Reckmann

geb. am 21. November 1969 in Flensburg

2002

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. K. Popp

2. Referent: Prof. Dr.-Ing. W. Gerth

Tag der Promotion: 16. Mai 2002

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität Hannover. Das Projekt wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) finanziell unterstützt.

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Popp ganz herzlich für die Betreuung, die Unterstützung und das Ermöglichen dieser Arbeit, wozu auch das besonders angenehme Arbeitsklima unter seiner Führung beitrug.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Gerth vom Institut für Regelungstechnik danke ich für die Übernahme des Korreferates und Prof. Dr.-Ing. G. Poll für den Vorsitz der Prüfungskommission.

Weiterhin bedanke ich mich bei allen Kollegen des Instituts, die mich bei allen Arten von Fragen und Problemen unterstützt und somit zu einem außergewöhnlich guten Arbeitsklima beigetragen haben. Insbesondere danke ich Martin Ruskowski für die elektrotechnische Unterstützung und Holger Kruse und Lars Panning für die fachliche Beratung und das Korrekturlesen.

Nicht zu vergessen seien die Arbeiten meines Vorgängers Thomas Frischgesell, der mir einen funktionsfähigen Versuchsstand hinterlassen hat sowie die Studien- und Diplomarbeiten der Studenten, die zu dieser Arbeit beigetragen haben. Dabei möchte ich Hendrik Gerth besonders für die Ideen und Diskussionen während seiner Diplomarbeit danken.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Daja, die mich einerseits beim Korrekturlesen unterstützt hat und mir andererseits zusammen mit unseren Kindern Jarik und Joris genügend Zeit zum Gelingen der Arbeit gelassen hat.

Die gedruckte Version dieser Arbeit ist im VDI Verlag als Fortschritt-Berichte VDI Reihe 11 Schwingungstechnik Nr. 309 erschienen.

Hannover, im Juni 2002

The image shows a handwritten signature in black ink. The signature is written in a cursive style and reads "Hanno Reckmann". The first name "Hanno" is written in a larger, more prominent script, while "Reckmann" follows in a similar but slightly smaller cursive hand.

Inhaltsverzeichnis

Notation	VII
1 Einleitung	1
1.1 Aufgabenstellung und Ziel	1
1.2 Stand des Wissens	4
1.3 Abgrenzung der Arbeit	6
1.4 Gliederung der Arbeit	7
2 Versuchsaufbau	8
2.1 Mechanischer Aufbau	8
2.1.1 Linearführungssystem mit bewegter Last	8
2.1.2 Unterstützungsmechanismen	10
2.2 Aktoren	12
2.2.1 Antrieb der bewegten Last	12
2.2.2 Linearaktoren	13
2.3 Sensoren	14
2.3.1 Ortsfeste Durchsenkungs- und Kraftmessung	14
2.3.2 Messung der horizontalen Lastposition	14
2.3.3 Messung der vertikalen Lastposition	14
2.4 Regelungsumgebung	19
3 Modellbildung	21
3.1 FE-Modellierung des Fahrwegs mit bewegter Masse	21
3.2 Modellierung der Unterstützungsmechanismen	24
3.3 Modellreduktion	26
3.3.1 Modale Transformation	26
3.3.2 Beschreibung im Zustandsraum	28
3.4 Diskretisierung des Differenzialgleichungssystems	29
3.5 Das KALMAN-Filter als Beobachter	30
3.5.1 Berechnung des KALMAN-Filters	33
3.5.2 Verwendung des KALMAN-Filters am Versuchsstand	33
3.5.3 Fehlerabschätzung für das KALMAN-Filter	36
3.6 Untersuchung des unregulierten Systems	36

3.6.1	Einfache Überfahrten mit konstanter Geschwindigkeit	37
3.6.2	Einfache beschleunigte Überfahrten	39
3.6.3	Mehrfache Überfahrten	49
4	Regelung	55
4.1	Vorsteuerung und Regelung nach FRISCHGESELL	56
4.2	Adaptive Systeme	57
4.2.1	Adaptive Steuerung	58
4.2.2	Regelung mit adaptiver Führungsgröße	59
4.3	Optimale zeitdiskrete Reglerauslegung	62
4.3.1	Berechnung des Rückführgesetzes aus der HAMILTON-Gleichung . . .	62
4.3.2	Numerische Näherung	65
4.3.3	Wahl der Gewichtungsmatrizen für unterschiedliche Regelungsziele . .	69
4.3.4	Deutung von Regel- und Steuerterm	70
4.4	Stabilität	72
5	Ergebnisse	73
5.1	Ergebnisse der adaptiven Systeme	73
5.1.1	Ergebnisse der adaptiven Steuerung	73
5.1.2	Ergebnisse der Regelung mit adaptiver Führungsgröße	75
5.1.3	Vergleich der Ergebnisse der adaptiven Systeme	77
5.2	Ergebnisse der optimalen zeitdiskreten Regelung	79
5.2.1	Verschiedene Stelleingriffe	79
5.2.2	Verschiedene Regelungsziele	91
5.2.3	Verschiedene Anregungsmechanismen	96
5.2.4	Parametersensitivität	100
5.3	Vergleich der Regelungsansätze	101
6	Zusammenfassung	104
A	Anhang	106
A.1	Berechnung der Reglerückführung nach KALMAN	106
	Literatur	109

Notation

Wegen der großen Anzahl von Formelzeichen werden selten benutzte Formelzeichen im Text erläutert und hier nur die häufiger verwendeten aufgeführt. Einige Formelzeichen werden in unterschiedlichen Abschnitten für verschiedene Größen benutzt. Matrizen und Vektoren sind in **Fettdruck** dargestellt.

Lateinische Formelzeichen

<i>A</i>	Systemmatrix
<i>B</i>	Eingangsmatrix oder Steuermatrix
<i>C</i>	Ausgangsmatrix oder Messmatrix
<i>c</i>	Federsteifigkeit
<i>D</i>	Dämpfungsmatrix
<i>EI</i>	Biegesteifigkeit des elastischen Fahrwegs
<i>E</i>	Einheitsmatrix
<i>e</i>	Fehler
<i>F</i>	Kraft
<i>f</i>	Frequenz, Funktion
<i>f_a</i>	Vektor der äußeren Kräfte
<i>f_s</i>	Vektor der Stellkräfte
<i>g</i>	Erdbeschleunigung
<i>h</i>	Matrix der HERMITE-Polynome
<i>I</i>	Strom
<i>J</i>	Massenträgheitsmoment, Gütekriterium
<i>K</i>	Steifigkeitsmatrix, Rückführmatrix
<i>ℓ</i>	Länge, Länge des elastischen Fahrwegs
<i>M</i>	Massenmatrix
<i>M</i>	Drehmoment
<i>m</i>	Masse der bewegten Last
<i>q</i>	Generalisierte Koordinate
<i>Q</i>	Wichtungsmatrix
<i>R</i>	Wichtungsmatrix
<i>s</i>	Vektor des Einflusses der Gewichtskräfte
<i>T</i>	Zeitpunkte, Zeitdauern
<i>T_ℓ</i>	Überfahrzeit
<i>t</i>	Zeit
<i>U</i>	Spannung
<i>u</i>	Steuervektor
<i>V</i>	Modalmatrix

\mathbf{v}	Eigenvektor, Systemstörung
$v_m = \dot{x}_m$	Geschwindigkeit der bewegten Masse
\bar{v}_m	Mittlere Geschwindigkeit der bewegten Masse
w	Durchsenkung
W	Energie
$w(x_m)$	Lastwegkurve
\mathbf{x}	Zustandsvektor
x	Koordinate in Balkenlängsrichtung
z	Modale Koordinate

Griechische Formelzeichen

α	Geschwindigkeitsmaß
δ	DIRAC-Funktion
Δ	Differenz, Abweichung
λ	LAGRANGE-Multiplikatoren
ω	Eigenkreisfrequenz
$\rho A, \mu$	Massenbelegung des elastischen Fahrwegs
ξ	Elementkoordinate

Abkürzungen und Indizes

\mathcal{L}	LAPLACE-Transformation
$(\)' = \frac{d(\)}{dx}$	Ableitung nach dem Ort
$(\)\dot{\ } = \frac{d(\)}{dt}$	Ableitung nach der Zeit
$(\hat{\ })$	Schätzwerte, rekursive Werte, Amplituden
Akt	Aktor
B	Balken
e	Element
ers	Ersatzgrößen
KF	KALMAN-Filter
m	bewegte Masse
St	Stoßfunktion, Stützbalken
Sp	Sprungfunktion
k	Zeitdiskreter Zeitschrittzähler
i, j, k, n, p	Zählvariablen

Kurzfassung

Unterschiedliche elastische Strukturen wie z.B. Handhabungsgeräte oder Brücken werden durch bewegte Lasten insbesondere bei beschleunigten oder sich wiederholenden Bewegungsvorgängen zu Schwingungen angeregt, die sich negativ auf die Präzision bzw. die Lebensdauer auswirken. Das Ziel dieser Arbeit ist, solche Schwingungen durch Regelung zu reduzieren.

Um die reale Anwendbarkeit der entwickelten Methoden zu zeigen, werden diese neben der Simulation auch an einem Modellversuchsstand getestet. Durch unterschiedliche Unterstützungsmechanismen können Stellgrößen in den Fahrweg eingeleitet werden. Zur Überprüfung des Regelergebnisses wird die vertikale Abweichung der Last von einer Referenzgeraden gemessen.

Für Simulationen des Bewegungsverhaltens und für den Entwurf von Regelungen wird mit der Methode der finiten Elemente ein mathematisches Modell entwickelt, welches durch eine modale Transformation auf die signifikanten Moden reduziert wird. Das passive System zeigt bei beschleunigten Bewegungen mit Start-Stopp-Vorgängen auf dem Fahrweg sowie für mehrfache Überfahrten dominante Resonanzen bei Anregung der ersten Eigenfrequenz. Den größten Einfluss auf die Schwingungsamplituden des Balkens hat jedoch die mittlere Überfahrgeschwindigkeit.

Zur aktiven Schwingungsreduzierung können unterschiedliche Regelungsstrategien eingesetzt werden. Eine adaptive Steuerung, die auf einem statischen Modell basiert, lässt sich für kleine Überfahrgeschwindigkeiten sinnvoll einsetzen. Für größere Geschwindigkeiten zeigt eine Zustandsregelung, der eine adaptive Führungsgröße vorgegeben wird, bessere Ergebnisse.

Bei der Berechnung einer optimalen zeitdiskreten Regelung unter Verwendung der HAMILTON-Funktion lassen sich auch deterministische Störungen berücksichtigen. Mit diesem Verfahren ist es weiterhin möglich, verschiedene Regelungsziele wie die Minimierung der Durchsenkung an der Massenposition oder der maximalen Balkendurchsenkung zu verfolgen.

Ein energetischer Vergleich von Stellmechanismen ergibt das beste Nutzen-Aufwand-Verhältnis für eine einzelne Stellkraft in der Mitte des elastischen Fahrwegs. Da die Systemdynamik des unregulierten Systems im geregelten Fall nur eine untergeordnete Rolle spielt, können auch Regler eingesetzt werden, bei deren Auslegung die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Last nur näherungsweise berücksichtigt wird. Eine Sensitivitätsanalyse der Regelung belegt z.B. eine geringe Abhängigkeit der Regelgüte von der Lastgeschwindigkeit. Andere Parameter wie die Fahrzeugmasse oder -position beeinflussen die Regelgüte wesentlich stärker, so dass diese sehr genau identifiziert werden müssen. Durch die Experimente an der Versuchsanlage werden die Simulationsergebnisse bestätigt und die reale Anwendbarkeit der entwickelten Methoden demonstriert.

Stichworte: Regelung, adaptiv, Optimierung

Abstract

In recent years lightweight structures became increasingly important in engineering. Due to the low weight and the lack of structural damping, a fast motion or a high speed maneuver on such a flexible system often leads to uncontrolled vibrations with high amplitudes and deflections. Examples for such structures are long span bridges, lightweight handling devices or space structures. The aim of this thesis is the active reduction of vibrations and deflections by control.

For the validation of the theoretical mathematical model and the simulation results an elastic beam under a moving load is investigated experimentally. Different supporting mechanisms are used to generate control forces. To verify the effect of control the vertical displacement at the mass position can be measured by a particular measurement device.

To simulate the system behaviour and to design a controller a mathematical model is derived using the finite-element method. This model is reduced to the significant modes by a modal transformation. The passive system shows for accelerated movements with starts and stops on the beam and for several passages resonances when the first eigen frequency is excited. Although, the main influence on the vibration amplitudes is the mean passing velocity.

In this thesis different control strategies are analyzed to reduce oscillations. An adaptive open-loop controller which is based on a static model is suitable for low load velocities. At higher velocities a state controller with an adaptive set-value shows better results than the open-loop controller.

The optimal discrete time control law is calculated by solving the Hamiltonian to minimize a performance index with the systems equation of motion as a constraint. The algorithm allows to consider deterministic disturbances. Furthermore it is possible to choose different control aims like a minimum deflection at the mass position or a total minimum deflection of the beam.

A comparison of the control input energy of different control inputs results in the best effort-result ratio for a single force in midspan of the beam. Since the uncontrolled system dynamic is neglectable in the closed-control case controller which are designed for an approximated or mean velocity can be applied. An analysis of the sensitivity of the controller to parameter variations shows for example a minor dependence of the control result on the velocity of the moving mass. Other parameters such as the mass of the vehicle or its position have a much bigger effect. These parameters have to be identified as exact as possible. The numerical results of the control strategies are compared with experimental data and show good agreement.

Keywords: control, adaptive, optimization

1 Einleitung

1.1 Aufgabenstellung und Ziel

Elastische Strukturen, die sich unter der Wirkung bewegter Lasten verformen, sind in vielen technischen Bereichen vorhanden. Bauwerke werden beispielsweise immer schlanker und leichter konstruiert, damit werden sie jedoch anfälliger für Schwingungsprobleme. Wird bei Brücken durch Materialeinsparung das Gewicht verringert, sind größere Spannweiten möglich. Bild 1.1 (a) zeigt die Skizze einer Eisenbahnbrücke. Hier wird durch Unterzüge die nicht selbst tragende Fahrbahn unterstützt. Für noch größere Spannweiten werden Brücken als Hängebrücken ausgeführt, wie z.B. die Brücke über den Großen Belt zwischen den dänischen Inseln Fünen und Seeland (1998) mit einer Spannweite von 1624 m und die Akashi Kaikyo Brücke in Japan (1998) mit 1991 m. In Planung ist eine Brücke in Italien, welche Calabrien mit Sizilien verbinden soll mit einer Spannweite von 3300 m; eine Ansicht ist in Bild 1.1 (b) skizziert. Durch immer größere Fahrzeugströme und Fahrzeuggeschwindigkeiten sowie Windkräfte werden solche schlanken Brücken zunehmend zu Schwingungen angeregt.

Im Bereich des Maschinenbaus werden zur Produktivitätssteigerung bei Robotern und Handhabungsautomaten, wie z.B. in Bild 1.2, die Bewegungsgeschwindigkeiten erhöht. Eine Möglichkeit dafür ist, die Struktur leichter auszuführen, so dass auch hier der Trend zu Leichtbausystemen geht. Die höheren Geschwindigkeiten bringen eine größere dynamische Belastung mit sich, womit die durch den Leichtbau weniger steifen Strukturen leichter zu Schwingungen angeregt werden. Des Weiteren vergrößern sich die statischen Verformungen der Struktur durch die Lasten.

Auch in der Raumfahrttechnik werden, wie z.B. in der Internationalen Raumstation in Bild

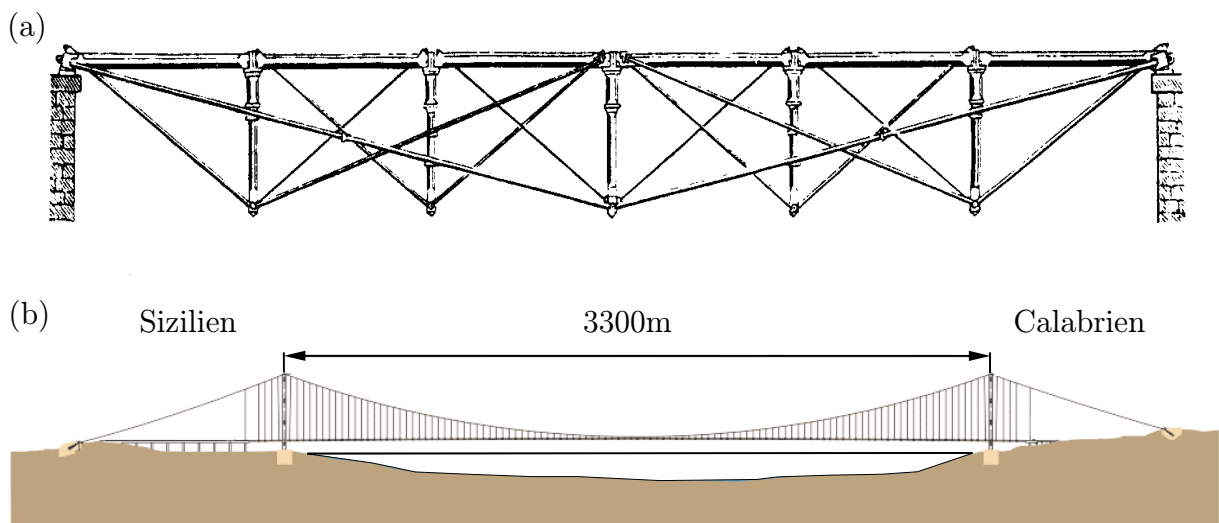


Bild 1.1: Brückenkonstruktionen in Leichtbauweise: (a) Fink-Truss 1871 (aus [36]); (b) geplante Hängebrücke über die Straße von Messina.

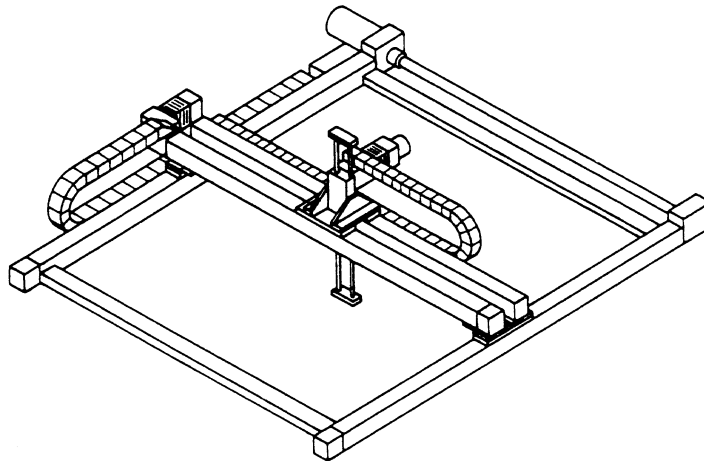


Bild 1.2: Skizze eines Handhabungsautomaten mit zwei vertikalen zueinander senkrechten, bewegten Achsen.

1.3, lange schlanke Fachwerkbalken als Verbindungselemente für die einzelnen Komponenten der Anlage eingesetzt. Auf Grund der geringen Gravitation im Weltraum sind Verformungen durch Gewichtskräfte nur klein. Bei Transportvorgängen entlang dieses Balkens werden durch Beschleunigungs- und Bremsvorgänge jedoch Schwingungen in dem System angeregt.

Ein Nachteil von leichteren, dafür aber weniger steifen Strukturen besteht also darin, dass diese durch hohe dynamische Belastungen zu Schwingungen mit größeren Amplituden angeregt werden. In der Handhabungstechnik bedeutet dieses eine Verringerung der Präzision. Im Bauwesen und in der Raumfahrttechnik wird das Material höher belastet, was sich auf die Sicherheit auswirkt.

Um solche Schwingungen und damit deren Auswirkungen zu reduzieren, ist es nötig, die Struktur zu dämpfen. Dieses ist insbesondere bei Stahlkonstruktionen wichtig, da diese eine sehr geringe Strukturdämpfung aufweisen. Eine Möglichkeit dazu ist der Einbau passiver Dämpfungssysteme. Diese entziehen durch Energiedissipation dem System Energie und verkleinern damit die Schwingungsamplituden. Eine andere weit verbreitete Möglichkeit ist die zusätzliche passive Versteifung des Systems z. B. durch Unterstützungsmechanismen wie in Bild 1.1 der Unterzug bzw. die Abspannung der Hängebrücke. Passive Maßnahmen haben den Vorteil, dass sie im Gegensatz zu aktiven Systemen einfacher aufgebaut sind und keine Energie von außen zugeführt werden muss. Ein wesentlicher Nachteil von passiven Schwingungsdämpfungsmaßnahmen ist, dass sie für quasistatische und nichtperiodische Vorgänge nicht geeignet sind. Die Anregung elastischer Strukturen durch bewegte Lasten ist jedoch hauptsächlich ein nichtperiodischer Vorgang.

Neben diesen passiven werden zunehmend auch aktive Maßnahmen eingesetzt, die auch für nichtperiodische Anregungsvorgänge geeignet sind, um Schwingungen und Verformungen von Systemen zu reduzieren. Aktive Systeme sind aufgrund ihres Aufbaus aus Mess-, Informationsverarbeitungs- und Antriebskomponenten flexibler und leistungstärker als pas-

sive Systeme. Mit aktiven Systemen ist es z.B. möglich, bestimmte Sollwerte für Verformungen vorzugeben. Nachteile aktiver Systeme sind der Energieverbrauch und die erhöhte Anforderung an die Sicherheit. So können aktive Systeme zum einen instabil werden, zum anderen muss das Gesamtsystem auch beim Ausfall der aktiven Komponente sicher sein.

Die Regelung elastischer Strukturen unter bewegten Lasten weist einige Besonderheiten auf, welche in der Modellierung und der Regelung berücksichtigt werden müssen. Zum einen handelt es sich bei elastischen Fahrwegen um Systeme mit verteilten Massen und Steifigkeiten aufgrund der schlanken Struktur. Bei der Überfahrt der bewegten Masse ändert sich die Massenverteilung des Systems. Bedingt durch die Konstruktion, die in den meisten Anwendungsfällen eine inertielle Abstützung an den Lagern des elastischen Fahrwegs fordert, müssen die Reaktionskräfte der Stellgrößen an diesen eingeleitet werden. Bei Brücken über Flüsse ist es wünschenswert zusätzlich zu den Lagern an den Rändern keine weiteren Stützpfeiler in den Fluss bauen zu müssen. Zum anderen ist durch den diskreten Stelleingriff mit Unterstützungsmechanismen der Ort der Stellgrößeneinleitung zumeist ein anderer als der Ort, an dem das System durch die bewegte Masse angeregt wird.

In Anbetracht der Problemstellung ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit die theoretische

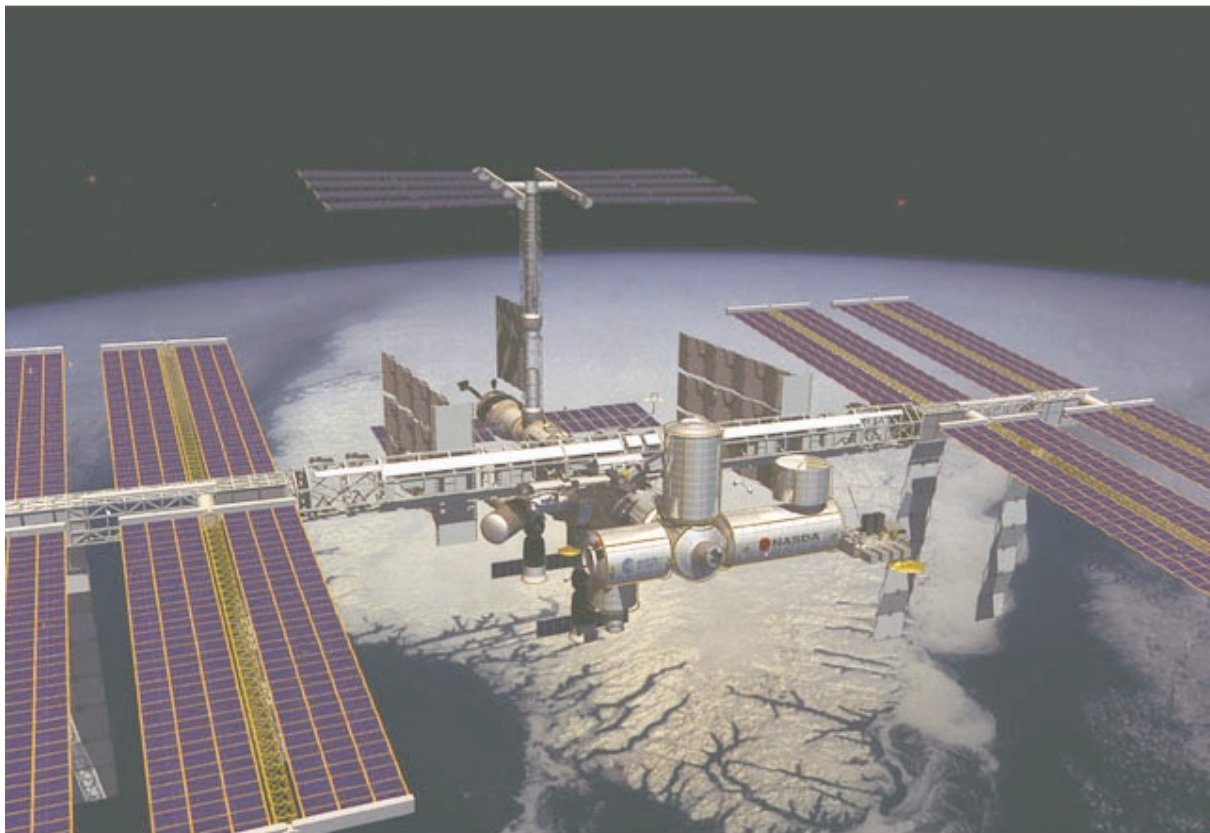


Bild 1.3: Computersimulation der NASA, die eine zukünftige Ausbaustufe der Internationalen Raumstation (ISS) mit der Erde im Hintergrund zeigt.

und experimentelle Untersuchung von Methoden zur Schwingungsreduzierung durch aktive Regelung an einem elastischen Fahrweg, der durch eine bewegte Masse angeregt wird.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, Methoden für die Auswahl und Auslegung von Stellmechanismen und Regelungen für einen elastischen Fahrweg zu entwickeln. Des Weiteren soll die Anwendbarkeit dieser Methoden an einem Versuchsstand gezeigt werden. Dazu wird als Regelungsziel einerseits eine Überfahrt einer Last mit möglichst geringen Abweichungen von der Horizontalen verfolgt, welche Vorteile in der Handhabungstechnik bringen. Andererseits sollen die Schwingungen des gesamten Fahrwegs minimiert werden. Dieses bedeutet eine allgemeine Schwingungsreduzierung, die insbesondere im Brückenbau zu einer Verringerung der Materialbelastung führt.

1.2 **Stand des Wissens**

Eine gute Übersicht über den Stand des Wissens bei Strukturen unter wandernden Lasten wird bei FRISCHGESELL [19] gegeben. Dabei lassen sich die Komponenten einer aktiv geregelten Fahrwegstruktur getrennt betrachten.

Die ersten Veröffentlichungen zum Verhalten von Brückenstrukturen unter wandernden Lasten stammen aus dem Jahre 1849 von WILLIS und STOKES. Das untersuchte Modell besteht aus einem masselosen Balken, welcher durch eine vertikale Einzelkraft mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit angeregt wird. Neben diesem Modell wird von FRÝBA [21] unter anderen auch der massebehaftete Balken unter einer konstanten Einzelkraft untersucht. Die mathematisch aufwendigere analytische Berechnung des massebehafteten Balkens mit einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Masse, die direkt an den Fahrweg angekoppelt ist, wurde von SCHALLENKAMP [43] durchgeführt.

Insbesondere im Schienenverkehr oder in der Magnetschwebetechnik werden eine große Anzahl verschiedener Fahrzeugtypen verwendet. Daher bezieht sich eine Vielzahl von Untersuchungen auf verschiedene Fahrzeugmodelle auf dem elastischen Fahrweg, siehe z. B. KORTÜM [24] und POPP [37], [38].

Die analytische Berechnung des Bewegungsverhaltens ist nur für einfache Systeme direkt möglich. Sobald zusätzliche Steifigkeiten oder Massen dem System zugeführt werden, müssen Näherungen oder numerische Integrationsverfahren angewendet werden. Soll das System aktiv durch Regelung beeinflusst werden oder wird die Masse nicht mehr mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist eine analytische Lösung nicht möglich.

Als Alternative zur analytischen Beschreibung des Bewegungsverhaltens werden bei FRISCHGESELL [19] und anderen OLSSON [34], [35], VENANCIO [50], LEE [25] Näherungen durch die Methode der finiten Elemente (FE) untersucht. Mit dieser Methode lässt sich einerseits das System aus Fahrweg mit beliebig bewegter Masse als auch Zusatzmassen und Zusatzsteifigkeiten, welche durch einen Unterstützungsmechanismus hervorgerufen werden, modellieren.

Die Systemordnung solcher FE-Modelle ist in der Regel sehr hoch, so dass die Simulation durch numerische Integration sehr rechenzeitintensiv wird. Für den Entwurf von Regelungen, die auf echtzeitfähigen Rechnersystemen implementiert werden, ist eine Reduktion der Systemordnung nötig. In der Arbeit von FRISCHGESELL [19] wird gezeigt, dass zur Reduktion der Systemordnung auf die wesentlichen Freiheitsgrade die modale Transformation angewendet werden kann. Für den von ihm untersuchten Modellversuchsstand, der auch in dieser Arbeit weiterverwendet wird, reicht es, die vier signifikanten Moden in der Simulation zu berücksichtigen.

Modale Beschreibungen von elastischen Strukturen und die Minimierung modaler Amplituden zur Schwingungsreduzierung wird zu einem großen Teil in der Raumfahrttechnik angewendet. Eine Übersicht zu diesem Bereich wird bei RAO et al. [39] gegeben.

Für die aktive Schwingungsbeeinflussung von Brückenstrukturen gibt es eine ganze Reihe von Arbeiten, welche sich mit verschiedenen Unterstützungsmechanismen auf der Basis unterschiedlicher konstruktiver Lösungen beschäftigen. Untersucht werden dabei elektrische und hydraulische Aktoren zum Aufbringen der Stellkräfte. Die von der Anregung unabhängige Schwingungsreduzierung an Brückenstrukturen wird in ABDEL [1], [2] und ROORDA [40] beschrieben.

Brückenstrukturen, die durch eine wandernde Kraft zu Schwingungen angeregt bzw. durch die Gewichtskraft der Last verformt werden, sind der Untersuchungsgegenstand bei SOONG und NATKE [46]. Hier wird das System im Zustandsraum beschrieben und eine optimale Regelung auf Basis eines RICCATI-Entwurfes berechnet. Des Weiteren wird ein Fall untersucht, bei dem durch den Unterzug eingeleitete Kräfte die Position verändern.

DOMKE [11] hat das Verfahren der aktiven Verformungskontrolle (AVK) zur Vermeidung von Spannungen und damit Verformungen in Brückenstrukturen entwickelt. Dabei werden die Stellglieder an einem Seiltragwerk abgestützt. STRECK [47] und VORBRUEGGEN [51] wenden in ihren Arbeiten dieses Verfahren auf einen Modellbalken unter einer langsam bewegten Last an. STRECK beschäftigt sich hauptsächlich mit Stabilitätsproblemen der AVK bei wachsenden Überfahrgeschwindigkeiten, welche durch Zeitverzögerungen in dem Regelkreis verursacht werden. Er verwendet einen P-Regler zur Reduzierung der Mittendurchbiegung des Balkens. Die Untersuchungen von VORBRUEGGEN konzentrieren sich auf eine Minimierung des Energiebedarfs bei der AVK. Zur Reduzierung der Mittendurchbiegung des Balkens setzt VORBRUEGGEN konstruktionsbedingt ein spezielles Regelprogramm ein. Im quasistatischen Fall mit Lastgeschwindigkeiten von weniger als 0.1 m/s erreicht er Verringerungen der Mittendurchsenkung von 95%. Für Lastgeschwindigkeiten oberhalb 1 m/s werden die Mittendurchsenkungen jedoch kaum noch verringert; sie sind mit AVK sogar größer.

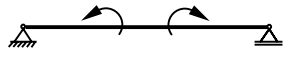
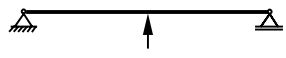
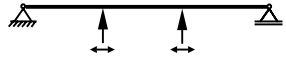


In der Arbeit von FRISCHGESELL [19] werden Steuerungen und einfache Regelungen für die Anregung mit konstanten Massengeschwindigkeiten untersucht. Der Versuchsstand besteht aus einem Balken mit einem Unterzug, der eine Kraft und ein Moment in Balkenmitte

einleitet. Das Ziel ist die Minimierung der Durchsenkung an der Massenposition, wozu unter anderem ein PI-Regler eingesetzt wird. Wie auch bei VORBRUEGGEN [51] steigen hier die maximalen Durchsenkungen mit der Massengeschwindigkeit an. Durch Einsatz einer statischen Vorsteuerung werden bei Massengeschwindigkeiten bis 10 m/s die maximalen Durchsenkungen um ca. 90% verringert. Mit Hilfe eines überlagerten PI-Regler können die Durchsenkungen noch weiter gesenkt werden. Mit einer Zustandsregelung mit einem Beobachter lässt sich bei Massengeschwindigkeiten bis 10 m/s die Durchsenkung an der Massenposition nur um ca. 80% verringern. Sie hat, verglichen mit der statischen Vorsteuerung, keine Vorteile. In Tabelle 1.1 werden die Methoden zur Schwingungsbeeinflussung von Brückenstrukturen zusammengefasst.

1.3 Abgrenzung der Arbeit

Im geregelten Fall werden in der Mehrzahl der in Abschnitt 1.2 dargestellten Arbeiten langsame Überfahrgeschwindigkeiten der Last betrachtet. In dieser Arbeit wird das geregelte System wie auch bei FRISCHGESELL [19] für hohe Massengeschwindigkeiten untersucht. Wei-

Tabelle 1.1: Übersicht über Regelungsansätze zur Schwingungsbeeinflussung von Brückenstrukturen.

Arbeit	Regelung	Stelleingriff
Allgemeine Reduzierung der Schwingungsamplituden		
ABDEL-ROHMANN und LEIPHOLZ [1]	Zustandsregelung mit Polvorgabe	
ABDEL-ROHMANN und NAFEH [2]	direkte Geschwindigkeitsrückführung (D-Regler)	
ROORDA [40]	P-Regler	
Reduzierung der Schwingungsamplituden und Durchsenkungen aufgrund bewegter Last/Masse		
SOONG und NATKE [46]	Zustandsregelung mit RICCATI Entwurf	
DOMKE [11]	aktive Verformungskontrolle (AVK)	
STRECK [47]	AVK mit P-Regler	
VORBRUEGGEN [51]	AVK mit speziellem Regelprogramm	
FRISCHGESELL [19]	statische Vorsteuerung, PI-Regler, Zustandsregler mit Polvorgabe	

terhin werden beschleunigte Bewegungen sowie mehrfache sich wiederholende Überfahrten des aktiven und passiven Systems analysiert. Dabei sind Anregungsfälle, die zu einer besonders großen Strukturbelastung führen, von besonderem Interesse.

Bei der Regelung werden zum einen Regler mit adaptiven Komponenten auf das System von elastischem Fahrweg mit bewegter Masse angewendet. Zum anderen werden optimale Regler berechnet, die im Entwurf das zeitveränderliche Systemverhalten berücksichtigen.

Des Weiteren soll der Vergleich unterschiedlicher Unterstütsmechanismen für den Fahrweg deren Vor- und Nachteile aufzeigen.

1.4 Gliederung der Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich in vier Hauptteile:

- Versuchsaufbau,
- Modellbildung,
- Regelung,
- Ergebnisse.

Zunächst wird der Versuchsaufbau beschrieben. Zur Validierung theoretisch numerischer Ergebnisse ist ein Versuchsaufbau erforderlich, an dem experimentelle Daten zum Vergleich gewonnen werden können. Sein mechanischer Aufbau, die verwendete Aktorik und Sensorik sowie die Soft- und Hardware werden in Kapitel 2 vorgestellt. Insbesondere das Messsystem zur Bestimmung der Durchsenkung an der Massenposition wird ausführlich erläutert, da es sich um eine Eigenentwicklung mit einem hohen Anspruch an die Genauigkeit handelt.

In das Systemmodell gehen die identifizierten Parameter der Versuchsanlage ein. Es wird deshalb im Anschluss an die Versuchsanlage in Kapitel 3 beschrieben. Das Systemmodell wird neben der Berechnung und Auslegung von Regelungen auch zur Simulation des Bewegungsverhaltens verwendet. Ein Vergleich zwischen Messungen und Simulationen zeigt, wie gut das unregelte System nachgebildet wird. Zur Bereitstellung der Systemzustände für Zustandsregelungen an der Versuchsanlage wird das Systemmodell in einem KALMAN-Filter als Beobachter eingesetzt, welches ebenso in diesem Kapitel hergeleitet wird.

In Kapitel 4 folgt die Berechnung und Auslegung von Regelungen im Zustandsraum anhand des Modells. Bei der Regelung wird zunächst auf Vorarbeiten eingegangen. Anschließend werden eine adaptive Regelungsstrategie untersucht und ein optimaler Reglerentwurf vorgestellt.

Die Ergebnisse der Regelungen werden in Kapitel 5 dargestellt. Dabei werden die Auswirkungen unterschiedlicher Stellmechanismen, Anregungen und Regelungsziele einander zur Auswertung direkt gegenübergestellt.

2 Versuchsaufbau

Zum Abgleich der theoretischen Modelle und zur Überprüfung der Anwendbarkeit der Regelungen wird der im Folgenden beschriebene Versuchsaufbau verwendet. Dieser Versuchsaufbau ist ein mechatronisches System, das sich in die Komponenten mechanischer Aufbau, Aktoren, Sensoren sowie Regelungsumgebung gliedern lässt. Bild 2.1 zeigt eine Skizze des Gesamtsystems. In Bild 2.2 ist ein Foto, welches einen Ausschnitt des Versuchsaufbaus aus einem seitlichen Blickwinkel zeigt, abgebildet und in Bild 2.3 ein Foto des Wagens mit dem Messsystem, welches in Abschnitt 2.3.3 beschrieben wird.

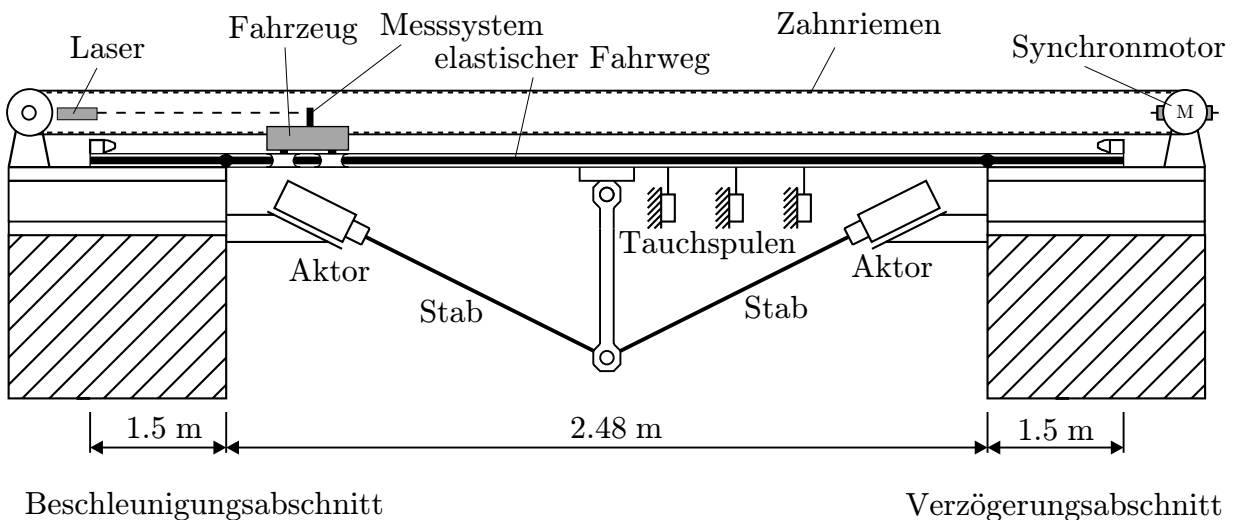


Bild 2.1: Skizze des Versuchsaufbaus zur Untersuchung elastischer Strukturen, angeregt durch bewegte Massen.

2.1 Mechanischer Aufbau

2.1.1 Linearführungssystem mit bewegter Last

Der Fahrweg besteht aus drei Teilstrecken. Der Beschleunigungsabschnitt und der Verzögerungsabschnitt sind fest mit dem Fundament (Masse 3.5 t) verbunden. Dazwischen befindet sich der elastische Abschnitt des Fahrwegs mit einer Länge von ca. 2.5 m. Dieser ist beidseitig gelenkig gelagert (Festlager links und Loslager rechts). Das Linearführungssystem besteht aus einem handelsüblichen Linearführungsprofil der Firma INA (LFS 52F) als Fahrweg und einem Laufwagen (LFL 52SF) mit Zusatzgewichten, welcher die bewegte Masse darstellt. Bei dem Linearführungsprofil wird angenommen, dass der elastische Teil des Fahrwegs gerade ist, d.h. dass er im unbelasteten Zustand keine Krümmung aufweist. In dem Linearführungsprofil sind seitlich in einen Aluminiumtraggkörper Stahlstangen mit Kreisquerschnitt eingepresst, auf denen die Laufrollen des Wagens abrollen. Das Spiel zwischen Profil und Laufrollen wird

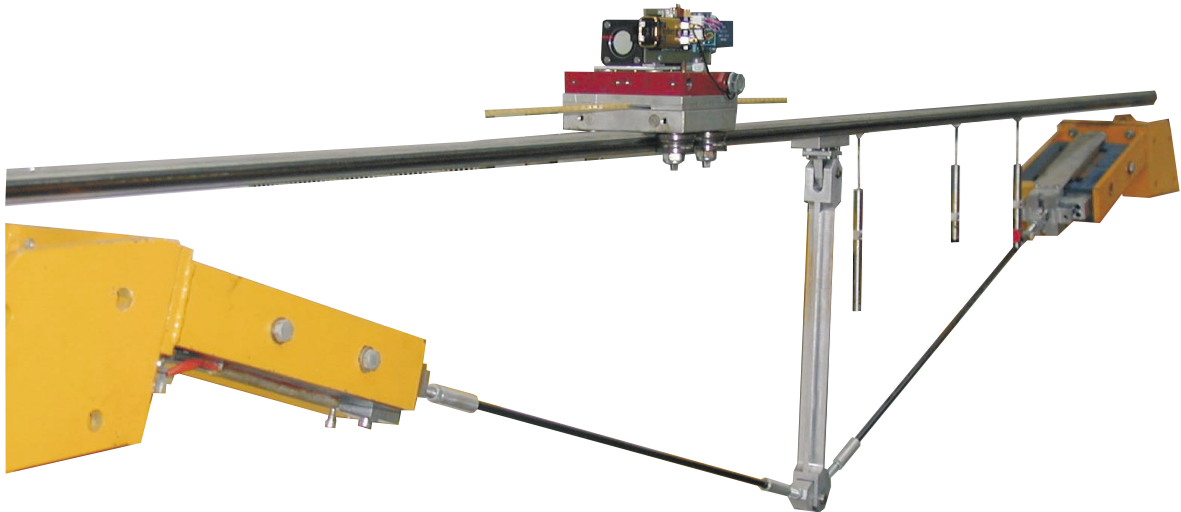


Bild 2.2: Ausschnitt aus einem Foto des Versuchsstands (seitliche Perspektive) mit dem Linearführungssystem und einem Unterstüztungsmechanismus.

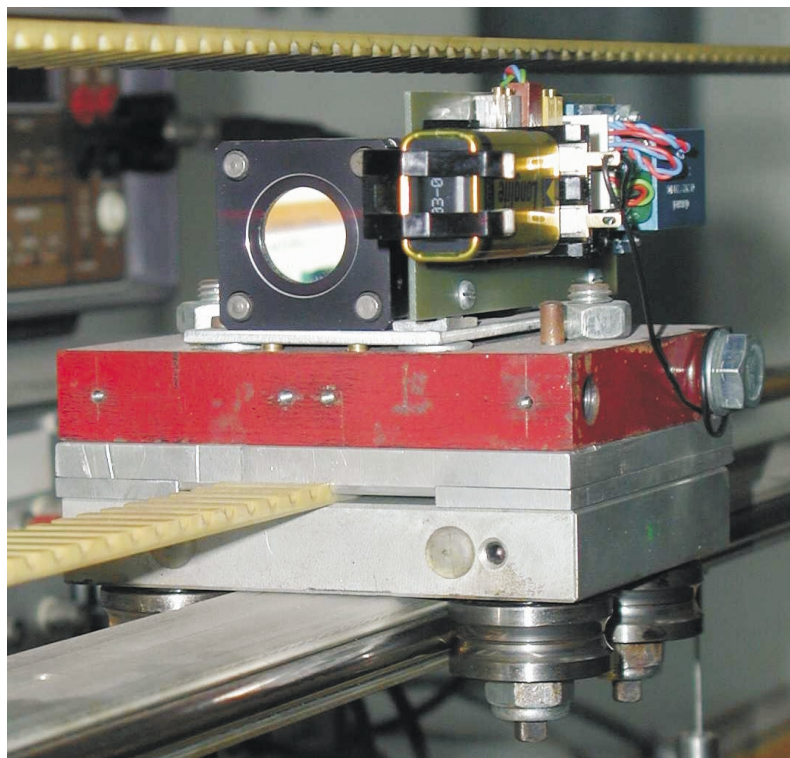


Bild 2.3: Foto des Laufwagens mit aufgebautem Messsystem.

über Exzenter so eingestellt, dass es ca. $30 \mu\text{m}$ beträgt. Das Spiel ist einerseits klein genug, um eine genaue Führung zu gewährleisten, andererseits ist es ausreichend groß, so dass die Führung leichtgängig ist und somit hohe Massengeschwindigkeiten zulässt und dass die un stetigen Übergänge von dem Beschleunigungsabschnitt zum elastischen Teil und von dort zum Verzögerungsabschnitt nicht zu Beschädigungen der Laufrollen führen.

Die Kenngrößen des elastischen Fahrwegs mit bewegter Masse sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Das Flächenträgheitsmoment ist den Herstellerangaben entnommen, die anderen Kenngrößen wurden messtechnisch bestimmt.

Tabelle 2.1: Kenngrößen des elastischen Fahrwegs.

Massenbelegung ρA	[kg/m]	3.077
E-Modul E	[N/m ²]	$0.779 \cdot 10^{11}$
Flächenträgheitsmoment I_{yy}	[m ⁴]	$0.199 \cdot 10^{-7}$
Länge ℓ	[m]	2.483
Max. Verfahrgeschwindigkeit v_{\max}	[m/s]	10
Masse m der bewegten Last	[kg]	3.9

2.1.2 Unterstützungsmechanismen

Unterhalb des elastischen Fahrwegs nach Bild 2.1 können verschiedene Unterstützungsmechanismen verwendet werden, um die Kräfte der Linearaktoren in die gewünschten Stellgrößen umzuformen. Dabei soll nach Möglichkeit eine inertielle Abstützung der Unterstützungsmechanismen an den Balkenenden eingehalten werden. Folgende Konfigurationen sind für diesen Versuchsaufbau möglich (vgl. Bild 2.4):

- a) eine Kraft in Balkenmitte,
- b) eine Kraft und ein Moment in Balkenmitte,
- c) zwei Momente an den Balkenenden,
- d) eine Kraft in Balkenmitte und ein Moment an einem der Balkenenden.

Die Unterstützungsmechanismen sind wie in Bild 2.4 dargestellt modular aufgebaut. Sie bestehen aus den Elementen Stützbalken, Streben, und Linearaktoren (siehe Abschnitt 2.2.2). Die Linearaktoren generieren Kräfte, die über Streben in die Stützbalken eingeleitet werden. Die Streben haben die Funktion von Pendelstützen, da sie beidseitig gelenkig mit den angrenzenden Elementen verbunden sind. Es gibt zwei Arten von Stützbalken. Eine Art ist gelenkig mit dem Fahrweg verbunden und kann somit nur eine Kraft übertragen. Die andere Art ist biegesteif mit dem Fahrweg verbunden und überträgt so eine Kraft und ein Moment. Der gelenkig mit dem Fahrweg verbundene Stützbalken kann wahlweise auch mit je einem Stützbalken für ein Moment an dem jeweiligen Balkenende kombiniert werden. Die Stützbalken für Momente an den Balkenenden sind derart mit den Linearaktoren verbunden, dass nur ein Moment und eine Horizontalkraft übertragen wird. Zur Entlastung der Linearaktoren kann

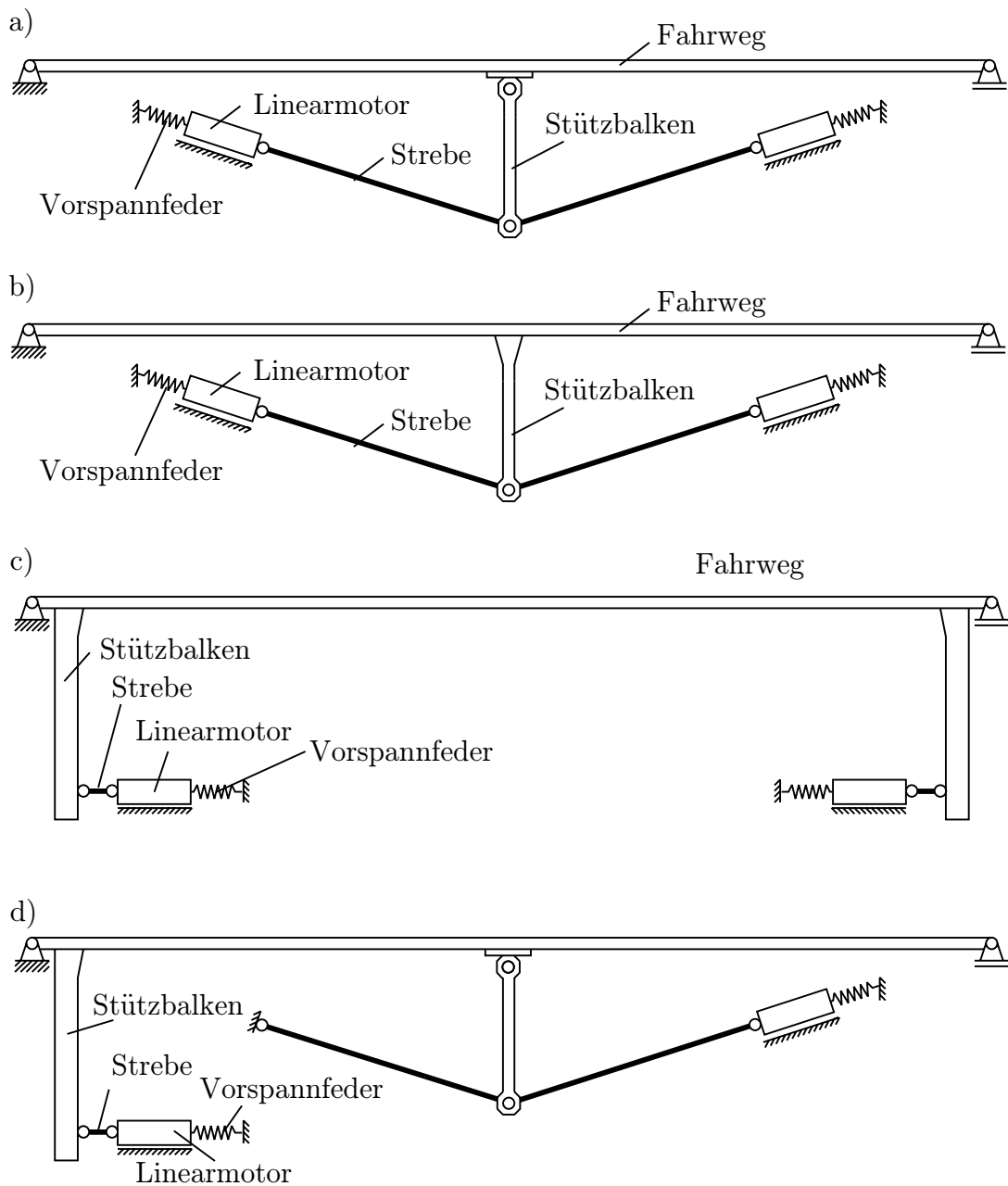


Bild 2.4: Skizzen der möglichen Unterstützungsmechanismen: a) eine Kraft in Balkenmitte, b) eine Kraft und ein Moment in Balkenmitte, c) zwei Momente an den Balkenenden, d) eine Kraft in Balkenmitte und ein Moment an einem der Balkenenden.

das System über Vorspannfedern, die sich zwischen dem Fundament und den Linearaktoren befinden, vorgespannt werden. Auf diese Weise müssen die näherungsweise konstanten Kräfte, welche durch Vorspannen der Federn bewirkt werden, nicht durch einen konstanten Strom in den Linearaktoren aufgebracht werden. Die Federn müssen sehr weich sein, da die Linearaktoren bei einer Verschiebung Δw_{Akt_i} zusätzlich die Federkräfte $F_i = c_t \Delta w_{Akt_i}$ aufbringen müssen. Es werden Federn mit einer Federsteifigkeit von $c_t = 4100 \text{ N/m}$ verwendet.

2.2 Aktoren

2.2.1 Antrieb der bewegten Last

Der Antrieb der bewegten Last erfolgt über einen Zahnriementrieb, der von einem Synchronmotor der Firma Consysta Automation ($n_{\max} = 3000 \text{ min}^{-1}$, $M_{\max} = 44 \text{ Nm}$, $I_{\max} = 56 \text{ A}$) angetrieben wird. Die Leistung reicht aus, um die 3.9 kg schwere Masse innerhalb der Beschleunigungsstrecke auf 10 m/s zu beschleunigen und sie nach Verlassen des elastischen Teils des Fahrwegs wieder abzubremesen.

Gesteuert wird der Motor über ein Motorkontrollgerät (digiVEC DAC28) des gleichen Herstellers. Dieses Gerät besteht aus einem Drehstrom-Umrichter und eine Positions- sowie einer Drehzahlregelung, welche den motoreigenen Resolver zur Positionsbestimmung benutzen. Für konstante Geschwindigkeiten der Masse auf dem elastischen Fahrweg wird der Positionsregler eingesetzt. Für beschleunigte Bewegungen der Masse wird der Drehzahlregler verwendet, dem eine Führungsgröße für die Drehzahl vorgegeben wird. Zusätzlich ist ein Lageregler zugeschaltet, der die Positionsfehler verringert. Eine Sicherheitsabfrage bewirkt, dass bei zu großen Geschwindigkeits- oder Lageabweichungen die Geschwindigkeit der Masse

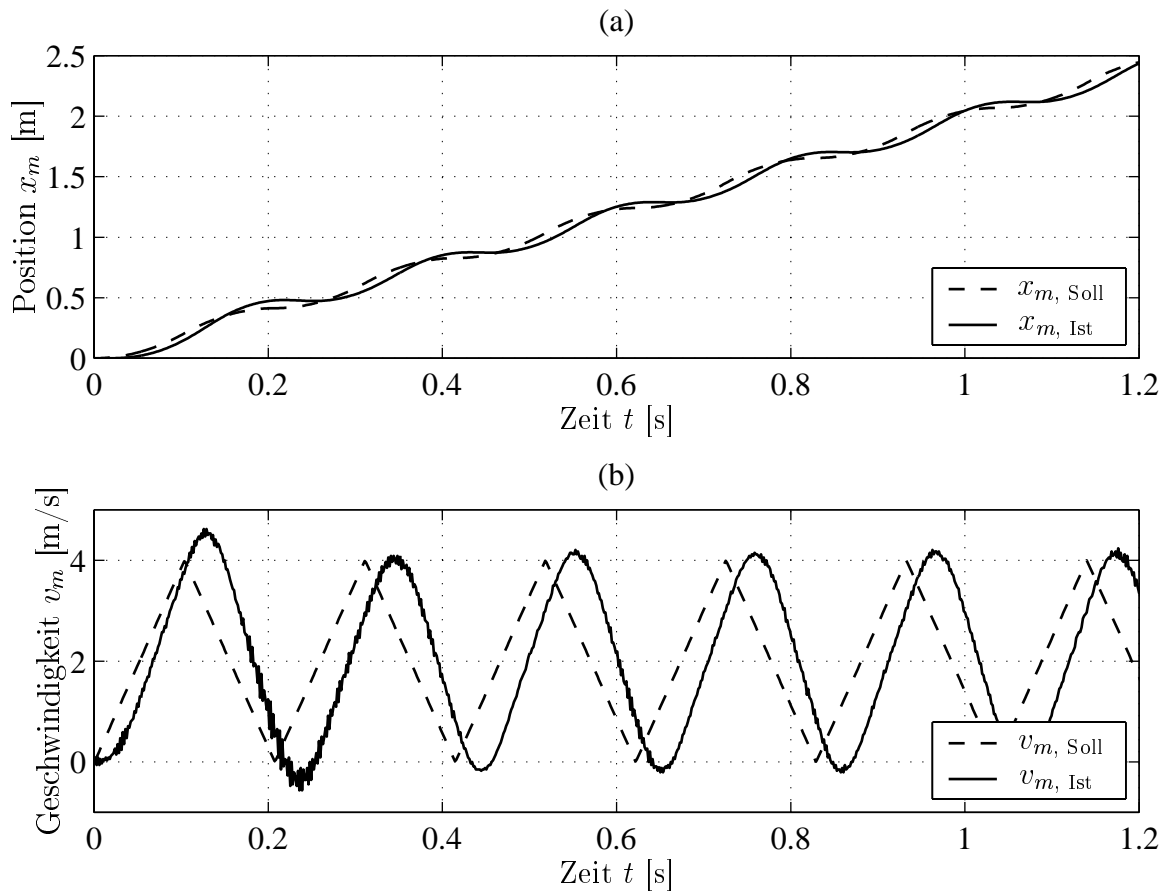


Bild 2.5: Soll-Ist-Vergleich einer beschleunigten Bewegung mit sechs Start-Stopp-Vorgängen auf dem Fahrweg.

sofort auf Null gebremst wird. Die Geschwindigkeitsabweichungen sind kleiner als 2 m/s und die Positionsfehler kleiner als 0.3 m. Bild 2.5 enthält Soll-Ist-Vergleiche der Positionen und Geschwindigkeiten einer beschleunigten Bewegung. Die relativ großen Abweichungen sind in diesem Fall darin begründet, dass das Motorsystem an seiner Leistungsgrenze betrieben wird. Bei diesen großen Abweichungen ist es sinnvoll, beim Vergleich von Messungen mit Simulationen in der Simulation die gemessenen Geschwindigkeiten und Positionen über der Zeit zu verwenden.

2.2.2 Linearaktoren

Die in der Arbeit von FRISCHGESELL [19] beschriebenen Linearaktoren werden in dieser Arbeit mit Modifikationen weiter benutzt. Das Arbeitsprinzip basiert auf der Lorenzkraft. Wird eine Spule in einem durch Permanentmagnete erzeugten Magnetfeld bewegt, so wirkt auf diese eine Kraft. Die Konstruktion der Linearaktoren wurde so verändert, dass anstelle von drei Gleitlagern zur Führung der Spule Linearwälzlager mit Kugelumlauf verwendet werden. Bei dieser Konstruktion ist der gemessene Haftreibungskoeffizient $\mu_0 < 0.01$, so dass von einem linearen Systemverhalten der Linearaktoren ausgegangen werden kann.

Die Linearaktoren werden von getakteten Stromstellern gespeist, welche am Institut für Mechanik entwickelt wurden. Die Dynamik der Stromsteller ist ausreichend schnell, so dass sie in dem Gesamtsystem aus Linearaktor und Stromsteller nicht gesondert berücksichtigt werden muss. Der gemessene Frequenzgang des Gesamtsystems aus Linearaktor und Stromsteller ist in Bild 2.6 dargestellt. Die Frequenzgangmessung erfolgt über die Korrelationsfunktion orthogonaler Testsignale (vgl. [32]). Der Frequenzgang zeigt, dass in dem Bereich bis 50 Hz, in

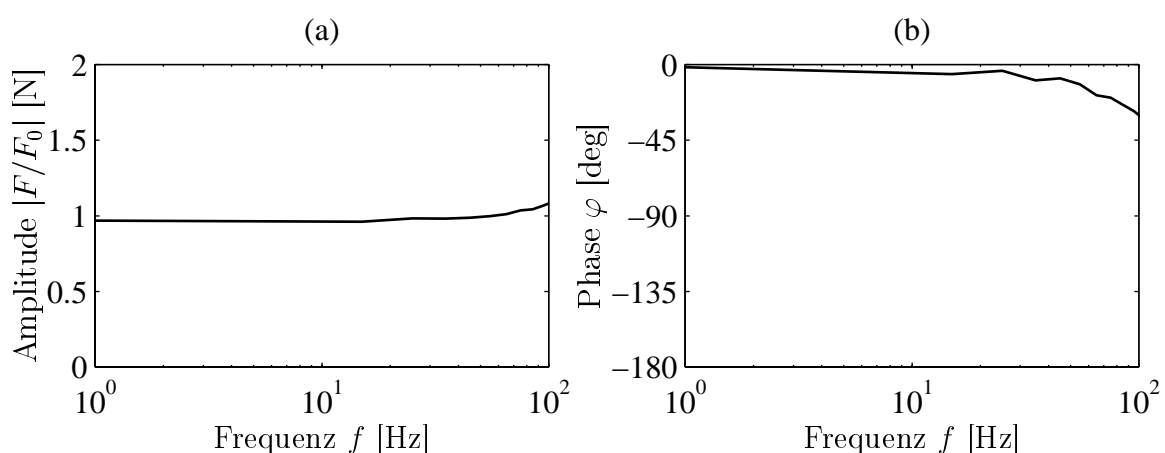


Bild 2.6: Gemessener Frequenzgang der Linearaktoren: a) Amplitudenverlauf, b) Phasenverlauf.

dem die ersten drei Eigenfrequenzen des Fahrwegs mit Unterstützungsmechanismus liegen, der Amplitudenverlauf nahezu konstant und die Phasenverschiebung kleiner als 20° ist. Die Linearaktoren können deshalb linear modelliert werden.

Tabelle 2.2: Wichtige Kenngrößen der Linearaktoren.

Bewegliche Masse m_{Akt}	[kg]	0.919
Maximale Stellkraft F_{\max} bei $I_{Sp,max}$	[N]	255.5
Maximaler Spulenstrom $I_{Sp,max}$	[A]	7.0
Statischer Übertragungsfaktor k_{stat}	[N/A]	36.5

Die Kräfte der Linearaktoren sind über den statischen Kraft-Strom-Übertragungsfaktor k_{stat} proportional zu dem Strom, der die Spulen durchfließt. Daher werden die Kräfte der Linearaktoren durch die Stromregler auch geregelt. Die wichtigsten Kenngrößen der Linearaktoren sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

2.3 Sensoren

2.3.1 Ortsfeste Durchsenkungs- und Kraftmessung

Die ortsfeste Messung der Durchsenkung des elastischen Fahrwegs erfolgt mit Hilfe von Tauchspulen der Firma Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH (Typ W10K) mit einem Messweg von ± 10 mm. Das Ausgangssignal wird mittels eines Trägerfrequenzmessverstärkers (HBM KWS 3073) aufbereitet, sowie mit 2 kHz tiefpassgefiltert. Weiterhin besteht die Möglichkeit, Kräfte, welche in Balkenmitte eingeleitet werden, mit einer DMS Kraftmesszelle der Firma Sensotec (Messbereich: ± 500 N) zu ermitteln. Die Kraftmesszelle wird ebenfalls an einen Trägerfrequenzmessverstärker angeschlossen.

2.3.2 Messung der horizontalen Lastposition

Die Position der Masse auf dem elastischen Fahrweg wird mit einem Inkrementalgeber der Firma Heidenhain (Typ ROD 426B.011) bestimmt. Die Signale des Inkrementalgebers werden mit der Inkrementalgeberkarte DS3001 der Firma dSPACE verarbeitet. Die Auflösung für die Positionsbestimmung beträgt $5 \cdot 10^{-5}$ m. Aus den Positionen wird durch einmalige Differentiation die Geschwindigkeit der Masse berechnet.

2.3.3 Messung der vertikalen Lastposition

Um die Effektivität der Steuerungen und Regelungen des elastischen Fahrwegs beurteilen zu können, wird die Lastwegkurve $w(x_m)$ gemessen. Dafür steht kein handelsübliches Messsystem zur Verfügung, so dass eine Eigenentwicklung nötig war. FRISCHGESELL [19] verwendet ein System, welches die vertikale Lastposition relativ zu einer Referenzblende mittels Lichtschranken misst. Der Fehler dieses Messsystems ist mit ca. ± 0.15 mm für eine Regelung

dieses Systems, welche die Durchsenkung in den Bereich von ± 0.1 mm senken soll, jedoch zu groß. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit ein ähnliches Messsystem entwickelt, das folgende Anforderungen erfüllt:

- Messbereich ± 5 mm,
- absoluter Fehler $\leq 30 \mu\text{m}$ im Positionsbereich ± 2 mm.

Prinzip des Messsystems

Um den Messfehler eines Messsystems zur Durchsenkungsmessung zu verringern, muss eine Referenz gewählt werden, welche selbst nur geringe Ungenauigkeiten aufweist. Zu diesem Zweck wird auf ein Lasermessprinzip zurückgegriffen, welches in Bild 2.7 skizziert ist. Das Lasermesssystem besteht aus drei Teilen. Als Laserstrahlquelle dient ein Diodenlaser mit 633 nm Wellenlänge und einer Leistung von 1 mW. Der Strahl wird durch eine Optik in horizontaler Richtung aufgeweitet. Der Laserstrahl bildet somit eine Ebene, die näherungsweise parallel zum Fahrweg verläuft. Ein Detektor mit einem PSD¹-Element ist auf dem Fahrzeug montiert und misst den relativen Abstand zwischen dem Intensitätsschwerpunkt der Laserstrahlebene in vertikaler Richtung und dem Fahrzeug. Um äußere Strahlungseinflüsse wie z.B. Tageslicht zu reduzieren, ist der Detektor mit einem schmalbandigen Filter (Durchlassbereich 633 nm ± 10 nm) ausgestattet.

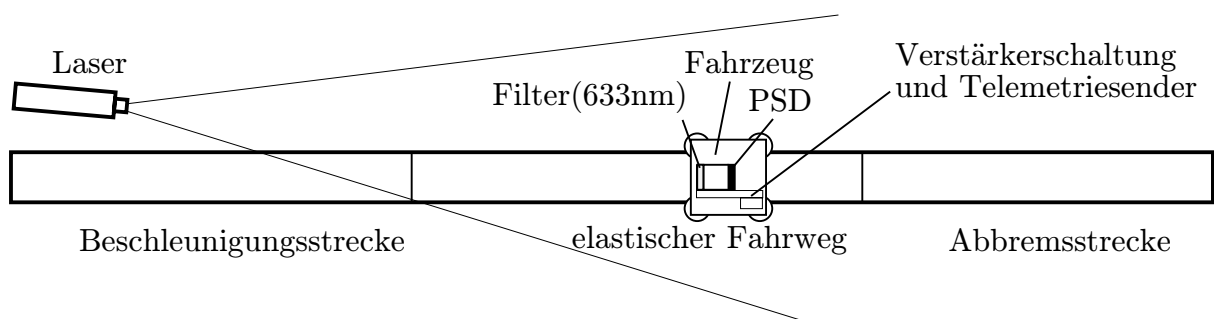


Bild 2.7: Aufbau Lasermesssystem (Draufsicht).

Signalübertragung und Auswertung

Das PSD-Element wird mit einer stabilisierten Spannung $U = 5$ V in Sperrichtung gepolt. Die sich ergebenden Diodenströme werden zunächst in Spannungen gewandelt und anschließend verstärkt, wobei die Verstärkungsfaktoren für beide Kanäle über Potentiometer so eingestellt werden, dass die Pegel bei Vollausschlag ± 200 mV nicht überschreiten.

Die Datenübertragung vom Detektor auf der bewegten Masse zum Prozessrechner erfolgt mit einem Telemetriesystem der Firma datatel Telemetrie Elektronik GmbH. Der Einsatz

¹PSD = Position Sensing Device

des Telemetriesystems ist notwendig, da bei beschleunigten Bewegungen durch eine Datenübertragung mittels eines Kabels zu große Fehler durch die Dynamik des Kabels verursacht werden. Auf der bewegten Masse ist der Sender (Typ dt202/301 DC), der mit einer Batteriespannung von 9 V versorgt wird und auch die 5 V Spannung für das PSD-Element liefert, montiert. Der Sender überträgt Daten in zwei Datenkanälen über ein HF-Signal an den Empfänger (Typ dt221). Die Eingangsspannungssignale mit einem Pegel von ± 200 mV werden durch das Telemetriesystem auf einen Pegel von ± 10 V verstärkt, siehe auch [9].

Die Größen zur Berechnung der vertikalen Position w_{PSD} sind die den Photoströmen proportionalen Spannungen U_1 und U_2 nach der Signalübertragung sowie die Länge L des PSD-Elements. Nach [12] ergibt sich folgende nichtlineare Gleichung

$$w_{PSD} = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2} \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow w_{PSD} \in [-L/2, L/2]. \quad (2.1)$$

Bild 2.8 zeigt die nach Gl. (2.1) aus den Spannungssignalen berechnete vertikale Verschiebung w_{PSD} über der vertikalen Verschiebung w_t , welche durch eine Tauchspule an drei Positionen x des elastischen Fahrwegs gemessen wird. Der Zusammenhang zwischen der mit einer Tauchspule gemessenen vertikalen Verschiebung w_t und der berechneten vertikalen Verschiebung w_{PSD} ist nichtlinear, weil zum einen Gl. (2.1) nur eine Näherung darstellt, und zum anderen nichtlineare Effekte auftreten, wenn der Laserstrahl in die Nähe der Ränder des PSD-Elementes kommt. Der Zusammenhang zwischen w_t und w_{PSD} ist im für Durchsenkungsmessungen relevanten Bereich von ± 4 mm jedoch nicht von der Position x abhängig. Die Durchsenkungsmessung ist unabhängig von der Position x , da in Gleichung 2.1 die Differenz der Spannungen auf die Summe der Spannungen, was der Gesamtintensität entspricht, bezogen wird.

Die so berechnete nichtlineare Kennlinie muss zur Auswertung der Messungen im Rechner nachgebildet werden. Dazu wird die Funktion $w_t(w_{PSD})$ durch ein Polynom zweiter Ordnung

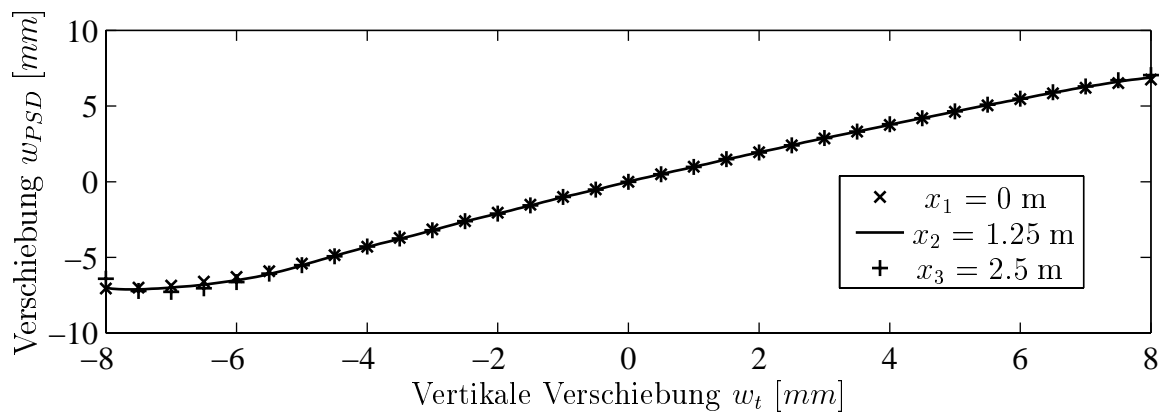


Bild 2.8: Berechnete vertikale Verschiebung des PSD-Systems w_{PSD} über der Verschiebung in vertikaler Richtung w_t gemessen mit einer Tauchspule an den Positionen x des elastischen Fahrwegs.

angenähert. Die Regressionsparameter a_0 , a_1 und a_2 des Polynoms werden mit einem Least-Squares-Verfahren aus den Messwerten für w_t und w_{PSD} gewonnen. Anschließend ergeben sich ausreichend genaue Näherungen \hat{w}_t für w_t nach

$$\hat{w}_t = a_2 w_{PSD}^2 + a_1 w_{PSD} + a_0. \quad (2.2)$$

Bild 2.9 (a) zeigt die Differenz $w_{PSD} - w_t$ und $w_{PSD} - \hat{w}_t$ über der gemessenen vertikalen Verschiebung w_t . Der nach der Kompensation der nichtlinearen Kennlinie bleibende Messfehler $e_{PSD} = \hat{w}_t - w_t$ ist in Bild 2.9 (b) über der gemessenen vertikalen Verschiebung w_t dargestellt. Der bleibende Fehler e_{PSD} nach der Korrektur durch die Regression ist im Bereich ± 4 mm der vertikalen Verschiebung < 0.02 mm und im Bereich ± 3 mm sogar < 0.01 mm.

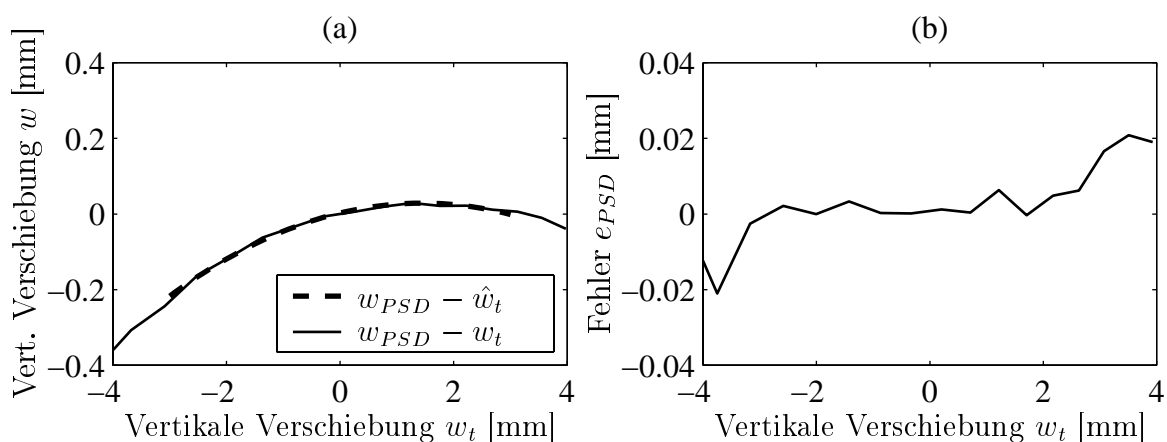


Bild 2.9: Differenz $w_{PSD} - w_t$ und $w_{PSD} - \hat{w}_t$ (a) und Positionsfehler e_{PSD} (b) über der gemessenen vertikalen Verschiebung w_t .

Da die Lasergerade und die Fahrweggerade nicht exakt parallel zueinander ausgerichtet werden können, wird eine Korrektur der Differenz zwischen den Geraden berechnet, siehe Bild 2.10. Es ergibt sich eine Korrekturfunktion in Abhängigkeit von der Massenposition x_m . Auf Grund der unstetigen Übergänge an den Gelenken des Fahrwegs können die Offsets w_1 und w_2 zwischen Lasergerade und Fahrweggerade an den Positionen $x_m = 0$ sowie $x_m = \ell$ nicht bestimmt werden, sondern sind um den Weg $\Delta x = 0.05$ m von den Lagern des Balkens entfernt. Für den Abstand der Lager gilt wegen $\gamma \ll 1$: $\ell \cos \gamma \approx \ell$. Die Ausgleichsfunktion $f_A(x_m)$ lautet damit

$$f_A(x_m) = w_1 + \frac{w_2 - w_1}{\ell + 2\Delta x} \Delta x + \frac{w_2 - w_1}{\ell + 2\Delta x} x_m. \quad (2.3)$$

Die mit dem Messsystem gemessene Durchsenkung an der Massenposition ergibt sich aus

$$w(x_m) = \hat{w}_t + f_A(x_m). \quad (2.4)$$

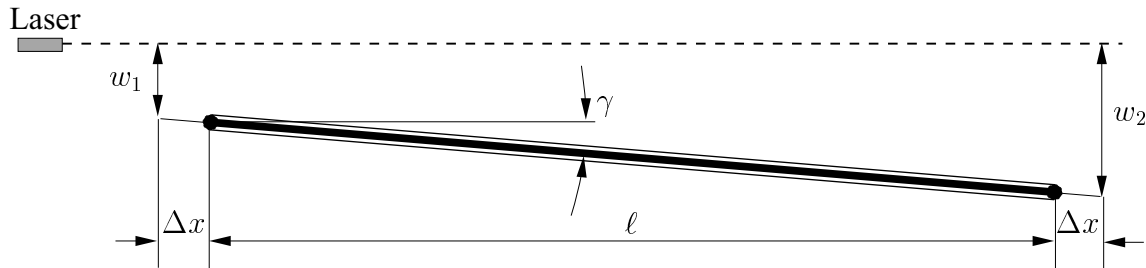


Bild 2.10: Parallelitätsfehler zwischen Lasergerade und Fahrweggerade (Seitenansicht).

Fehlerabschätzung

Zur Fehlerabschätzung des PSD-Messsystems werden verschiedene Einflussfaktoren und deren Auswirkung auf die Genauigkeit des Messsystems untersucht.

Mechanische Einflüsse lassen sich nicht feststellen. Da die Optik und der Laser fest mit dem Fundament verbunden sind, müsste für Schwingungen das gesamte Fundament angeregt werden. Auf Grund der großen Masse des Fundamentes entstehen im praktischen Versuchsbetrieb keine messbaren Schwingungen. Bei der Bewegung des auf dem Fahrzeug montierten Detektors entstehen Luftströmungen. Diese beeinflussen jedoch nicht den Laserstrahl; dies wird durch einen Test mit in den Strahlengang geblasener Pressluft belegt.

Umgebungseinflüsse ergeben sich sowohl durch die Temperaturdrift der elektrischen Bauteile, als auch durch Dichteunterschiede in der Luft, hervorgerufen durch externe Wärmequellen wie z.B. der Sonnenstrahlung. Dies bewirkt des Weiteren eine Veränderung der Tageslichtverhältnisse am Versuchsstand. Werden die Umgebungsbedingungen jedoch während einer Messreihe konstant gehalten und regelmäßig Kalibrierungen durch Vergleiche mit einer Tauchspule durchgeführt sowie Wärmequellen von dem Versuchsstand ferngehalten, kann der Fehler durch Drift mit $\pm 10 \mu\text{m}$ angegeben werden.

Allen Messwerten ist Prozessrauschen überlagert, das auch elektrische Störungen anderer Geräte des Versuchsstandes enthält. Eine starke Störquelle ist der Motor und dessen Umrichter. Zur Verringerung dieser Störungen werden die Spannungssignale U_1 und U_2 durch ein digitales Filter mit einer Eckfrequenz von $f_g = 60 \text{ Hz}$ gefiltert. Das restliche Rauschen hat eine maximale Streubreite im Durchsenkungssignal von $\pm 10 \mu\text{m}$.

Weitere Fehler ergeben sich durch Laserlichteffekte wie Interferenzerscheinungen des Laserstrahls. Die Interferenzerscheinungen bewirken ein den PSD-Spannungen überlagertes, sinusförmiges Störsignal. Die nichtlineare Signalauswertung nach Gleichung 2.1 wird zwar kompensiert, der bleibende Positionsfehler nach der Korrektur durch die Regression ist im Bereich $w = \pm 3 \text{ mm}$ jedoch noch $e_{PSD} \pm 10 \mu\text{m}$. Brechung und Reflexion des Laserlichts am Filter haben keinen messbaren Einfluss. Reflexionen vermindern nur die Laserlichtintensität, Brechungen heben sich bei dem dünnen Filter durch die Übergänge Luft \rightarrow Filter sowie Filter \rightarrow Luft wieder auf. Die Einflussfaktoren sind in Tabelle 2.3 zusammengefasst. Der Absolut-

Tabelle 2.3: Zusammenstellung der untersuchten Einflussfaktoren auf die Genauigkeit des PSD-Messsystems

Einflussfaktor	Fehler $e_{w,\max}$	Bemerkung
Schwingungen von Laser und Optik	nicht messbar	
Temperaturdrift der elektrischen Bauteile	$\pm 10 \mu\text{m}$	konstante Umgebungsbedingungen; regelmäßige Kalibrierung
Dichteunterschiede in der Luft	nicht messbar	keine Wärmequellen in der Strahlnähe
Streu und Tageslicht	nicht messbar	Tageslichtfilter
Brechung und Reflexion am Filter	nicht messbar	
Nichtlinearität und Interferenz des Laserlichts	$\pm 10 \mu\text{m}$	nach Kennlinienkorrektur im Bereich $w(x_m) = \pm 3 \text{ mm}$
Prozessrauschen	$\pm 10 \mu\text{m}$	nach digitalem Filter

fehler des PSD-Messsystems liegt bei $\pm 30 \mu\text{m}$ für einen Durchsenkungsbereich $w = \pm 3 \text{ mm}$. Das Messsystem deckt den Bereich von $w = \pm 5 \text{ mm}$ ab, außerhalb des Bereiches von $\pm 3 \text{ mm}$ werden die Fehler jedoch größer.

2.4 Regelungsumgebung

Die Software für die Versuchsdurchführung und die Simulationen stammt aus zwei Softwarepaketen. Zur Simulation sowie der Regelung und Steuerung des Versuchsstands und seiner Komponenten wird die Software Matlab [28] der Firma The Math Works Inc. eingesetzt. Zu dem Programmpaket von Matlab gehören auch folgende in dieser Arbeit verwendete Toolboxes: Simulink [44], Control System Toolbox [8], Signalprocessing Toolbox [45] und Real Time Workshop [41]. Für die Anbindung des Prozessrechners sowie die Datenaufnahme und Parametrierung werden die Programme Cockpit [13], Trace [16], MLib [14] sowie das Real-Time Interface [15] der Firma dSPACE verwendet. Als Compiler wird der C/C++ Compiler [7] der Firma Borland eingesetzt. Bild 2.11 zeigt das Zusammenspiel der einzelnen Komponenten.

Steuerungen und Regelungen werden unter Matlab/Simulink erstellt. Simulink-Modelle bestehen zum einen aus Standardblöcken wie Addierern, Integrierern und Differenzierern, als auch aus selbst definierten Blöcken. Diese Blöcke, so genannte „S-Functions“, können in Matlab oder C/C++ in einer speziellen prozeduralen Form programmiert werden. Der Real Time Workshop besteht hauptsächlich aus einem C-Code Generator. Dieser erzeugt, sofern möglich, aus dem Simulink Modell lauffähigen C-Code und startet das Real-Time Interface. Dieses führt einen Echtzeittest durch und lädt das compilierte Programm auf ein digitales dSPACE Signal Prozessor Board (DSP).

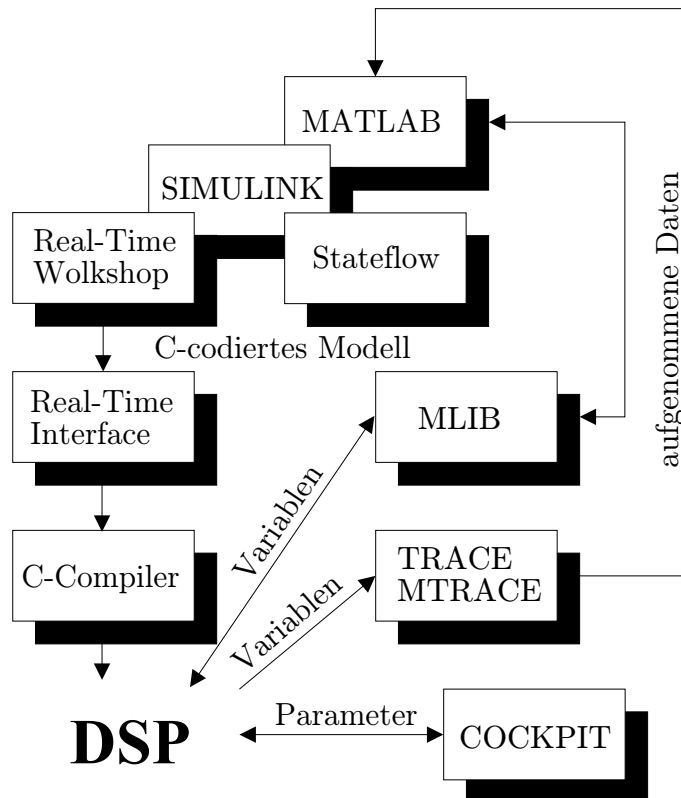


Bild 2.11: Entwicklungsumgebung von The Math Works und dSPACE [15]

Die Programme Trace und Cockpit, sowie MLib dienen dazu, auf Variablen und Felder der Echtzeitanwendung zuzugreifen. Cockpit ist eine Instrumententafel zur Ein- und Ausgabe von Einzelwerten. Trace wird zur Messgrößenaufnahme in Form von Zeitreihen verwendet. Diese Messgrößen können in den Matlab Workspace zur Weiterverarbeitung übertragen werden. Mit MLib können einzelne Speicherzellen des Prozessrechners über das dSPACE PHS-Bus-Interface gelesen und beschrieben werden.

Matlab und Simulink laufen auf einem PC (P200 64MB, Microsoft NT4) als Hostrechner. Zur Steuerung des Versuchsstandes und zur Regelung des elastischen Fahrwegs wird ein Prozessrechner der Firma dSPACE GmbH verwendet. Die Prozessorkarte ist mit einem TMS320C40 Signalprozessor der Firma Texas Instruments und zwei Megabyte Speicher bestückt. Über den speziellen PHS-Bus sind eine AD-Wandlerkarte (32 Kanäle, 16 Bit), eine DA-Wandlerkarte (5 Kanäle, 12 Bit) und eine Inkrementalgeberkarte (5 Kanäle, 24 Bit) für Messsignalaufnahmen und Stellsignalgenerierungen mit der Prozessorkarte verbunden. Die Kommunikation mit dem Host-PC wird über eine Ethernetkarte mit einem 386SX Prozessor abgewickelt.

Mit dieser Regelungsumgebung lassen sich in einfacher Weise unterschiedliche Steuerungen und Regelungen für die Versuchsanlage realisieren.

3 Modellbildung

Das dynamische Verhalten des elastischen Fahrwegs unter bewegter Last kann mathematisch sowohl analytisch als auch räumlich diskretisiert mit Hilfe eines FE-Modells beschrieben werden. Beide Verfahren werden von FRISCHGESELL [19] vorgestellt. Der zur Steuerung und Regelung eingesetzte Unterstützungsmechanismus lässt sich jedoch nur mit großem Aufwand in einem analytischen Modell implementieren, da bei veränderlichen Stellgrößen zu jedem Zeitschritt eine neue Lösung des Systems berechnet werden muss. Außerdem sind nach FRISCHGESELL keine auf dem Balken in horizontaler Richtung beschleunigte Massen möglich. Diese Nachteile der analytischen Beschreibung treten bei der Methode der Finiten Elemente nicht auf. Ein zusätzlicher Vorteil der FE-Modellierung ist, dass ein solches Modell gut für die Erweiterung auf komplexe Strukturen eingesetzt werden kann. Aus diesen Gründen erfolgt die Modellierung auf der Basis einer FE-Beschreibung. Das generierte Modell wird auch zur Reglerauslegung verwendet.

3.1 FE-Modellierung des Fahrwegs mit bewegter Masse

Der elastische Fahrweg wird als beidseitig gelenkig gelagerter Balken mit konstanter Massenverteilung ρA und konstanter Biegesteifigkeit EI zunächst ohne Unterstützungsmechanismus betrachtet. Bild 3.1 zeigt den Balken mit der horizontalen Koordinate x und den vertikalen Verschiebungen $w(x, t)$ sowie der vertikalen Verschiebung $w(x_m, t)$ an der Massenposition x_m . Die vertikalen Verschiebungen sind von der horizontalen aus nach unten positiv definiert.

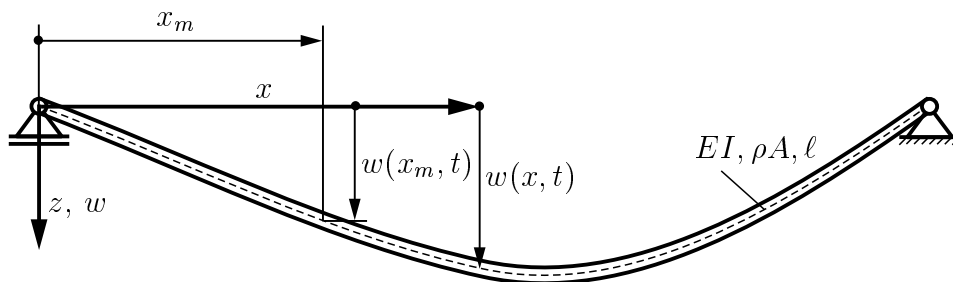


Bild 3.1: Elastischer Fahrweg mit bewegter Last und Koordinaten

Das Schwingungsverhalten des Balkens mit der bewegten Masse wird analytisch durch eine partielle Differenzialgleichung vierter Ordnung beschrieben,

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = F(x_m, t). \quad (3.1)$$

Die geometrischen Randbedingungen sind in diesem Fall

$$w(0, t) = 0, \quad w(\ell, t) = 0. \quad (3.2)$$

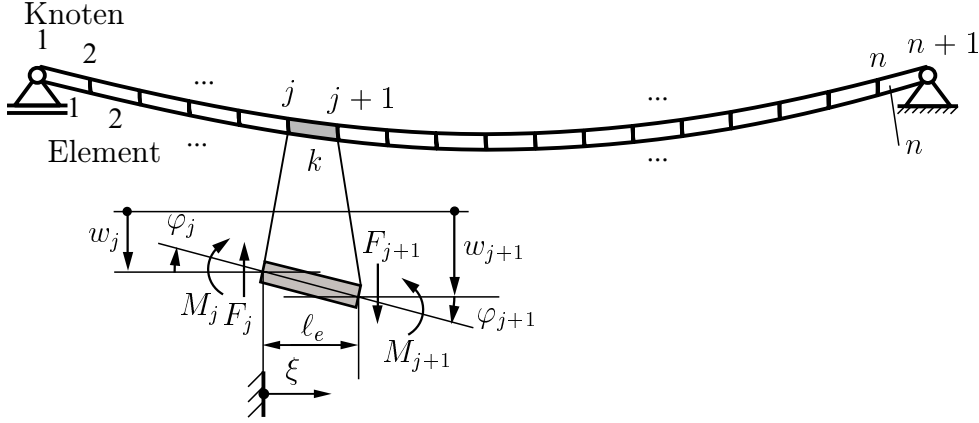


Bild 3.2: Elastischer Fahrweg zerteilt in n Balkenelemente.

Beanspruchungen in Längsrichtung werden nicht betrachtet. Der Balken kann somit in n gleiche 2-Knoten-Bernoulli-Euler-Balkenelemente der Länge ℓ_e aufgeteilt werden. Das Aufstellen einer Bewegungsgleichung mit solchen Elementen wird in GASCH/KNOTHE [22] beschrieben. Bild 3.2 zeigt den Balken zerteilt in n Balkenelemente. Jeder der insgesamt $n + 1$ Knoten hat zwei Freiheitsgrade: Einen translatorischen in vertikaler Richtung beschrieben durch die Koordinate w_j und einen rotatorischen beschrieben durch die Koordinate $\varphi_j = w'_j = \frac{dw_j}{dx}$. Die Knotenverschiebungen eines Elementes werden in dem Elementverschiebungsvektor \mathbf{w}_j zwischen den Knoten j und $j + 1$ zusammengefasst als

$$\mathbf{w}_j = [w_j \quad \varphi_j \quad w_{j+1} \quad \varphi_{j+1}]^T. \quad (3.3)$$

Der Verschiebungszustand innerhalb eines Elementes wird durch Ansatzfunktionen approximiert. Dazu werden kubische Polynome, so genannte HERMITE-Interpolationspolynome, verwendet. Mit der lokalen Elementkoordinate $\xi = \frac{x}{\ell_e}$ wird der Vektor der Ansatzfunktionen zu

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ -\xi^2 + \xi^3 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Die vertikalen Verschiebungen innerhalb eines Elementes des Fahrwegs können mit den Gleichungen (3.3) und (3.4) nach

$$w(x_j) = \mathbf{h}^T \mathbf{w}_j \quad \text{mit} \quad (j-1)\ell_e \leq x_j \leq j\ell_e, \quad (3.5)$$

berechnet werden. Mit dem Vektor der Ansatzfunktionen können die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e und die Elementmassenmatrix \mathbf{M}_e berechnet werden:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^1 \frac{EI}{\ell_e^3} \mathbf{h}'' \mathbf{h}'^T d\xi = \frac{EI}{\ell_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell_e & -12 & 6\ell_e \\ 6\ell_e & 4\ell_e^2 & -6\ell_e & 2\ell_e^2 \\ -12 & -6\ell_e & 12 & -6\ell_e \\ 6\ell_e & 2\ell_e^2 & -6\ell_e & 4\ell_e^2 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_0^1 \rho A \ell_e \mathbf{h} \mathbf{h}^T d\xi = \frac{\rho A \ell_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 \ell_e & 54 & -13 \ell_e \\ 22 \ell_e & 4 \ell_e^2 & 13 \ell_e & -3 \ell_e^2 \\ 54 & 13 \ell_e & 156 & -22 \ell_e \\ -13 \ell_e & -3 \ell_e^2 & -22 \ell_e & 4 \ell_e^2 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Die Elementmatrizen werden zur Gesamtsteifigkeitsmatrix des Balkens \mathbf{K}_B und zur Gesamt-massenmatrix des Balkens \mathbf{M}_B zusammengefügt, so dass sich die Elementmatrizen an den gemeinsamen Knoten überlappen. Sowohl \mathbf{K}_B als auch \mathbf{M}_B sind symmetrische, schwach besetzte Matrizen. Für die weitere Systembeschreibung wird eine Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_B eingeführt, in der die Strukturdämpfung des Balkens nicht berücksichtigt wird. Durch die bewegte Masse entstehen jedoch Dämpfungsanteile.

Alle Knotenverschiebungen und -verdrehungen werden in dem Vektor der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}(t)$ wie folgt zusammengefasst:

$$\mathbf{q}(t) = [w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2, \dots, w_n, \varphi_n, w_{n+1}, \varphi_{n+1}]^T. \quad (3.8)$$

Die Randbedingungen des beidseitig gelenkig gelagerten Balkens erfordern, dass $w_1 = w_{n+1} = 0$ erfüllt ist. Die Bewegungsgleichung stellt damit ein System aus gewöhnlichen Differenzialgleichungen dar,

$$\mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}_B \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_B \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_a(t). \quad (3.9)$$

Die rechte Seite von Gl. (3.9) besteht aus den äußeren Kräften, die auf das System wirken,

$$\mathbf{f}_a(t) = \mathbf{M}_B \mathbf{g} + m \mathbf{g} \big|_{x=x_m(t)} - m \ddot{\mathbf{q}}(t) \big|_{x=x_m(t), \dot{x}=\dot{x}_m(t), \ddot{x}=\ddot{x}_m(t)} + \mathbf{f}_s(t). \quad (3.10)$$

Der Einfluss der Gewichtskraft des Balkens berechnet sich dabei aus dem Matrizenprodukt der Massenmatrix \mathbf{M}_B und einem Vektor $\mathbf{g} = [g, 0, g, \dots, g, 0]^T$, der die Fallbeschleunigung g für jeden Knoten enthält. Ein Einfluss von Momenten wird durch die Nullen im Vektor \mathbf{g} ausgeblendet. Weiterhin wird durch $m \mathbf{g} \big|_{x=x_m(t)}$ in Gl. (3.10) der Einfluss der bewegten Masse m auf den Fahrweg infolge von Eigengewicht berücksichtigt. Die vertikale Beschleunigung $\ddot{\mathbf{q}}$ der bewegten Masse in Gl. (3.10) berechnet sich dabei wie folgt

$$\ddot{\mathbf{q}}(x_m, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{q}(x_m, t)}{\partial t^2} + 2\dot{x}_m \frac{\partial^2 \mathbf{q}(x_m, t)}{\partial x \partial t} + \dot{x}_m^2 \frac{\partial^2 \mathbf{q}(x_m, t)}{\partial x^2} + \ddot{x}_m \frac{\partial \mathbf{q}(x_m, t)}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Die vertikale Beschleunigung an der Massenposition ist abhängig von der Geschwindigkeit \dot{x}_m und der Beschleunigung \ddot{x}_m der bewegten Masse. Die Ableitungen des Vektors \mathbf{q} nach dem Ort werden gebildet, indem der Vektor durch differenzierbare Funktionen, z.B. Polynome mit den Vektorelementen als Stützstellen, ersetzt wird. Der Term $\mathbf{f}_s(t)$ in Gl. (3.10) enthält Kräfte und/oder Momente, die über den jeweiligen Unterstütmungsmechanismus auf den Fahrweg aufgebracht werden.

Da die bewegte Masse direkt mit dem Fahrweg verbunden ist, ergeben sich mit Gl. (3.11) zusätzliche Terme für die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix. Die Anteile durch die

Masse, die sich am diskreten Ort x_m zwischen zwei Knoten an der Stelle ξ_m befindet, müssen wie bei einem Balkenelement mit den Elementmatrizen als Matrix definiert werden. Somit wird dieser Anteil auf die Randknoten des aktuellen Balkenelementes verteilt. Die Wirkung der Masse an dem diskreten Ort ξ_m wird durch die Dirac-Funktion $\delta(\xi - \xi_m)$ beschrieben. Für den Anteil der bewegten Masse ergibt sich folgende Elementmassenmatrix

$$\mathbf{M}_m = \ell_e \int_0^1 \mathbf{h} m \delta(\xi - \xi_m) \mathbf{h}^T d\xi. \quad (3.12)$$

Der Anteil für die Massenmatrix \mathbf{M}_m muss zusammen mit den Anteilen für die Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix in den entsprechenden Gesamtmatrizen eingefügt werden.

3.2 Modellierung der Unterstüztungsmechanismen

Zur Modellierung des Gesamtsystems aus elastischem Balken und Unterstüztungsmechanismus muss zu den Gesamtmatrizen des Balkens ($\mathbf{M}_B, \mathbf{D}_B, \mathbf{K}_B$) der entsprechende Anteil des Unterstüztungsmechanismus addiert werden. Die Modellierung der Unterstüztungsmechanismen wird zunächst am Beispiel des Modells mit Stützbalken in Fahrwegmitte beschrieben. Die Kenngrößen aller Modelle werden dann in einer gemeinsamen Tabellen zusammengefasst.

Für die in Abschnitt 2.1.2 (Bild 2.4 (a) und Bild 2.4 (b)) skizzierten Unterstüztungsmechanismen zeigt Bild 3.3 a) ein mechanisches Modell und b) ein vereinfachtes Ersatzmodell. Die

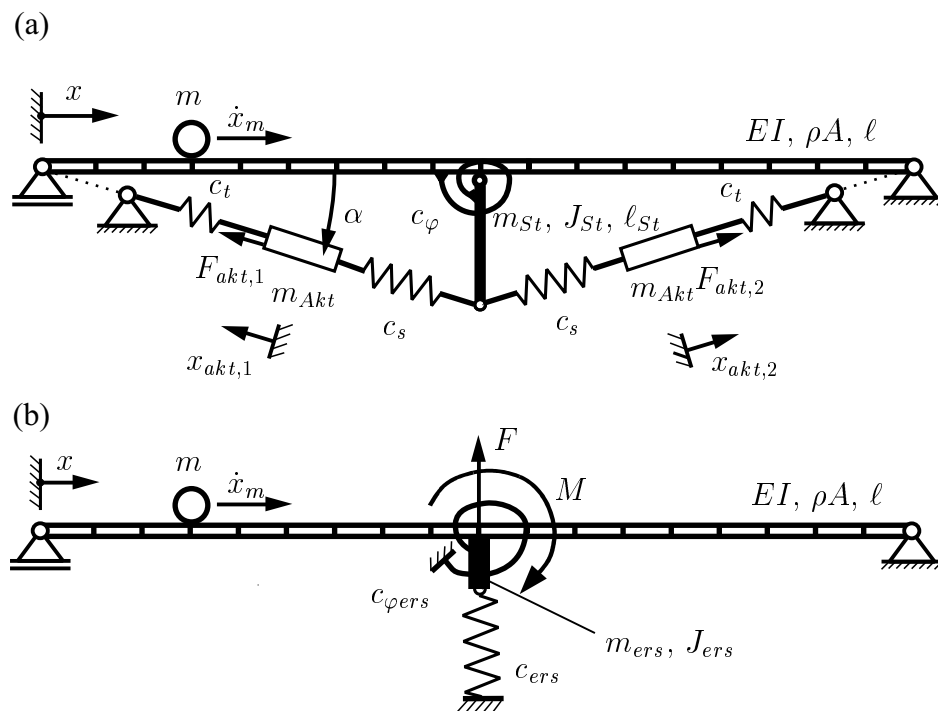


Bild 3.3: (a) Mechanisches Modell des Systems, (b) Ersatzmodell des Unterstüztungsmechanismus.

Drehfedersteifigkeit c_φ des Stützbalkens und die Federsteifigkeiten c_s der Stäbe sind gegenüber der Federsteifigkeit c_t der Vorspannfedern so groß, dass Stützbalken und Stäbe als starr modelliert werden können. Da die Verformungen in dem System klein sind, kann der Winkel α zwischen den Stäben und der Horizontalen näherungsweise als konstant angenommen werden. Die Masse m_{Akt} setzt sich aus der beweglichen Masse eines Aktors und der Masse des mit dem Aktor verbundenen Stabs zusammen. Der Stützbalken hat die Länge ℓ_{St} , die Masse m_{St} und das Massenträgheitsmoment J_{St} um den Mittelknoten des Balkens. Aus der Geometrie ergibt sich der Winkel $\alpha \approx 0.312$ rad. Das Modell des Unterstützungsmechanismus lässt sich nach Bild 3.3 b) auf ein vereinfachtes Modell mit einer Gesamtmasse und Gesamtsteifigkeit reduzieren. Die Gesamtmasse und -steifigkeit für Bewegungen in vertikaler Richtung ergeben sich zu

$$m_{ers} = 2m_{Akt} \sin(\alpha) + m_{St}, \quad c_{ers} = 2c_t \sin(\alpha). \quad (3.13)$$

Aus dem Momentengleichgewicht um den Balkenmittelpunkt berechnen sich die folgenden Ersatzgrößen

$$J_{ers} = 2m_{Akt}\ell_{St}^2 \cos^2(\alpha) + J_{St}, \quad c_{\varphi ers} = 2c_t \ell_{St}^2 \cos^2(\alpha). \quad (3.14)$$

Die Aktorkräfte, die zur Erzeugung der Stellgrößen F und M benötigt werden, berechnen sich anhand der Geometrie des Unterstützungsmechanismus zu

$$F_{akt,j} = \frac{F}{2 \sin(\alpha)} + \frac{M}{2 \ell_{St} \cos(\alpha)} + c_t x_{akt,j}; \quad j = 1, 2 \quad . \quad (3.15)$$

Die Kräfte durch die Längenänderung der Vorspannfedern sind dabei berücksichtigt. Für Zugkräfte der Aktoren kann die Maximalkraft der Aktoren aufgebracht werden. Druckkräfte können nur bis zu einer Kraft von maximal 50 N von den Stäben übertragen werden, was der experimentell bestimmten Knickkraft entspricht.

Bei dem Unterstützungsmechanismus, der durch die gelenkige Anbindung an den Balken nur eine Kraft in Balkenmitte zulässt ($M = 0$), wird das Ersatzmassenträgheitsmoment und die Ersatzdrehsteifigkeit zu Null. Die auf den Mittelknoten des Balken bezogenen Systemparameter des Unterstützungsmechanismus können zu den Matrixelementen des Mittelknotens der Matrizen \mathbf{M}_B und \mathbf{K}_B addiert werden. Bei dieser Modellierung des Unterstützungsmechanismus ändert sich die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems nicht. Für die Gesamtmassen- und die Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt sich:

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{M}_B + \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & m_{ers} & & \\ & & J_{ers} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \right], \quad \mathbf{K} = \left[\mathbf{K}_B + \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & c_{ers} & & \\ & & c_{\varphi ers} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \right]. \quad (3.16)$$

Die Bewegungsdifferenzialgleichung des Gesamtsystems aus Balken mit bewegter Masse und Unterstützungsmechanismus lautet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_a(t). \quad (3.17)$$

Die Kenngrößen der experimentell eingesetzten Unterstützungsmechanismen sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Die nur in der Simulation untersuchten Modelle mit zwei bzw. drei Stellkräften werden in Tabelle 3.2 nur skizziert. Zum Zweck der Vergleichbarkeit untereinander sind die Trägheiten und Steifigkeiten zu Null gesetzt.

3.3 Modellreduktion

Der elastische Fahrweg als kontinuierlicher Balken hat unendlich viele Freiheitsgrade. Durch die Diskretisierung mit Finiten Elementen wird die Systemordnung des FE-Modells auf $2(n + 1)$ Freiheitsgrade beschränkt. Das Differenzialgleichungssystem 3.17 kann durch numerische Integration gelöst werden, wobei der Rechenaufwand durch die immer noch hohe Anzahl von Freiheitsgraden groß ist und das System in dieser Form schlecht konditioniert ist ($\text{cond}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) \approx 10^8$). Aus diesen Gründen muss die Ordnung weiter reduziert werden. Da das Systemverhalten bei Anregung durch die bewegte Masse hauptsächlich von den niederfrequenten Moden bestimmt wird, können als weitere Vereinfachung die höheren Moden vernachlässigt werden. Simulationsergebnisse mit dem FE-Modell zeigen, dass es ausreicht, drei Moden bei 25 Knoten zu berücksichtigen, um eine gute Näherung des Systemverhaltens zu erreichen (vgl. Abschnitt 3.6).

3.3.1 Modale Transformation

Die modale Transformation ist ein Reduktionsverfahren, das mit einer Teilmenge von Eigenvektoren des ursprünglichen Modells ein reduziertes Modell erstellt. Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren wird für das System aus Balken mit Unterstützungsmechanismus für die feste Massenposition $x_m = 0$ durchgeführt. Die Eigenvektoren \mathbf{v}_i des Eigenwertproblems

$$(-\omega_i^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

für $i = 1, 2, \dots, p$ werden in der Modalmatrix

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p] \quad (3.19)$$

zusammengefasst. Sie beschreiben mit Berücksichtigung der Randbedingungen (beidseitig gelenkig gelagert) die Eigenfunktionen an diskreten Punkten durch die Verschiebung und Verdrehung der Knoten des Modells. Für die p niedrigsten berücksichtigten Moden des Systems hat die Modalmatrix demnach die Dimension $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times p}$. Mit der Modalmatrix \mathbf{V} werden die Lagekoordinaten $\mathbf{q}(x, t)$ auf die Modalkoordinaten $\mathbf{z}(t)$ transformiert,

$$\mathbf{q}(x, t) = \mathbf{V}(x) \mathbf{z}(t). \quad (3.20)$$

Tabelle 3.1: Kenngrößen der in der Simulation und experimentell eingesetzten Unterstützungsmechanismen.

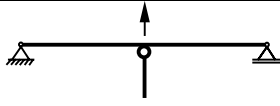

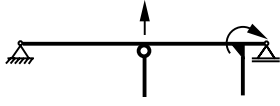
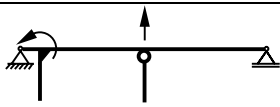
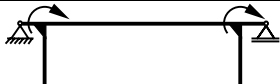
Modell F mit Kraft in Balkenmitte		
Ersatzträgheitsmoment J_{ers}	[kg m ²]	0
Ersatzmasse m_{ers}	[kg]	1.328
Vertikale Ersatzsteifigkeit c_{ers}	[N/m]	$2.578 \cdot 10^3$
Ersatzdrehsteifigkeit $c_{\varphi ers}$	[Nm]	0
Modell FM mit Kraft und Moment in Balkenmitte		
Ersatzträgheitsmoment J_{ers}	[kg m ²]	0.342
Ersatzmasse m_{ers}	[kg]	1.428
Vertikale Ersatzsteifigkeit c_{ers}	[N/m]	$5.370 \cdot 10^4$
Ersatzdrehsteifigkeit $c_{\varphi ers}$	[Nm]	$1.272 \cdot 10^3$
Modell F—M mit Kraft in Balkenmitte und Moment am rechten Rand		
Ersatzträgheitsmoment $J_{ers,mi}$	[kg m ²]	0
Ersatzmasse $m_{ers,mi}$	[kg]	0.950
Vertikale Ersatzsteifigkeit $c_{ers,mi}$	[N/m]	$1.274 \cdot 10^3$
Ersatzdrehsteifigkeit $c_{\varphi ers,mi}$	[Nm]	0
Ersatzträgheitsmoment $J_{ers,re}$	[kg m ²]	0.211
Ersatzmasse $m_{ers,re}$	[kg]	0.937
Vertikale Ersatzsteifigkeit $c_{ers,re}$	[N/m]	0
Ersatzdrehsteifigkeit $c_{\varphi ers,re}$	[Nm]	$0.510 \cdot 10^3$
Modell M—F mit Kraft in Balkenmitte und Moment am linken Rand (siehe Modell F—M)		
Modell M—M mit Momenten an den Lagern des Balkens		
Ersatzträgheitsmoment J_{ers}	[kg m ²]	0.211
Ersatzmasse m_{ers}	[kg]	0.937
Vertikale Ersatzsteifigkeit c_{ers}	[N/m]	0
Ersatzdrehsteifigkeit $c_{\varphi ers}$	[Nm]	$0.510 \cdot 10^3$

Tabelle 3.2: Unterstützungsmechanismen, die nur in der Simulation verwendet werden.

Modell F—F mit zwei Kräften	
Modell F—F—F mit drei Kräften	

Wird die Modaltransformation (Gl. (3.20)) auf die Bewegungsgleichung 3.17 angewendet und von links die Matrix \mathbf{V}^T multipliziert, so ergibt sich

$$\underbrace{\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}}_{\mathbf{E}} \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V} \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{z}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{g} + \mathbf{V}^T m_m \mathbf{g} \Big|_{x=x_m(t)} \quad (3.21)$$

$$- \mathbf{V}^T m_m \frac{\partial^2 \mathbf{V} \mathbf{z}(t)}{\partial t^2} \Big|_{x=x_m(t), \dot{x}_m=\dot{x}_m(t)} + \mathbf{V}^T \mathbf{f}_s(t)$$

mit

$$\frac{\partial^2 \mathbf{V} \mathbf{z}(t)}{\partial t^2} = \mathbf{V} \ddot{\mathbf{z}}(t) + 2\dot{x}_m \mathbf{V}' \dot{\mathbf{z}}(t) + (\dot{x}_m^2 \mathbf{V}'' + \ddot{x}_m \mathbf{V}') \mathbf{z}(t). \quad (3.22)$$

Die Eigenvektoren in der Modalmatrix werden hierbei zunächst derart normiert, dass das Produkt $\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$ die Einheitsmatrix \mathbf{E} ergibt. Die modale Dämpfung des Gesamtsystems aus Balken und Unterstützungsmechanismus $\mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^T$ wird experimentell bestimmt. Die Matrizen \mathbf{V}' und \mathbf{V}'' lassen sich näherungsweise bestimmen, indem die Eigenvektoren in Eigenfunktionen umgewandelt werden. Letztere werden durch Splinefunktionen approximiert, wobei die Elemente der Modalmatrix \mathbf{V} die Stützpunkte liefern. Durch ein- bzw. zweimaliges Differenzieren der Eigenfunktionen nach der Ortskoordinate x und anschließender Diskretisierung an den Knoten des FE-Modells ergeben sich \mathbf{V}' und \mathbf{V}'' .

3.3.2 Beschreibung im Zustandsraum

Für den Entwurf von Steuerungen und Regelungen, sowie zur Simulation des Systems wird die Beschreibung im Zustandsraum benötigt. Dazu wird Gl. (3.21) nach $\ddot{\mathbf{z}}$ aufgelöst:

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) = \underbrace{\left[\mathbf{E} + m_m \mathbf{V}^T \mathbf{V} \Big|_{x_m(t)} \right]^{-1}}_{\mathbf{M}^*} \cdot \left[- \underbrace{\left(\mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V} + 2m_m \dot{x}_m \mathbf{V}^T \mathbf{V}' \Big|_{x_m(t)} \right)}_{\mathbf{D}^*} \dot{\mathbf{z}}(t) \right. \\ \left. - \underbrace{\left(\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} + m_m \dot{x}_m^2 \mathbf{V}^T \mathbf{V}'' \Big|_{x_m(t)} + m_m \ddot{x}_m \mathbf{V}^T \mathbf{V}' \Big|_{x_m(t)} \right)}_{\mathbf{K}^*} \mathbf{z}(t) \right. \\ \left. + \mathbf{V}^T \left(\mathbf{M} \mathbf{g} + m_m \mathbf{g} \Big|_{x_m(t)} \right) + \mathbf{V}^T \mathbf{f}_s(t) \Big|_{x_m} \right]. \quad (3.23)$$

Als Zustände werden die modalen Verschiebungen und Geschwindigkeiten verwendet. Die Differenzialgleichung zweiter Ordnung 3.23 wird in die Zustandsraumdarstellung, ein Differenzialgleichungssystem erster Ordnung umgeformt:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{*-1} \mathbf{K}^* & -\mathbf{M}^{*-1} \mathbf{D}^* \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{V}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \left(\mathbf{M} \mathbf{g} + m_m \mathbf{g} \big|_{x=x_m(t)} + \mathbf{f}_s(t) \right) \\
 &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \underbrace{\mathbf{B}(t) \mathbf{f}_s(t)}_{\mathbf{u}(t)} + \underbrace{\mathbf{B}(t) \left(\mathbf{M} \mathbf{g} + m_m \mathbf{g} \big|_{x=x_m(t)} \right)}_{\mathbf{s}(t)}. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Die Matrizen \mathbf{M}^* , \mathbf{D}^* und \mathbf{K}^* sind symmetrisch und setzen sich jeweils aus einem Balkenanteil und einem Anteil der bewegten Masse zusammen. In Gl. (3.24) ist \mathbf{A} die zeitabhängige Systemmatrix und \mathbf{B} die zeitabhängige Steuermatrix des Systems. Der Eingangsvektor wird mit \mathbf{u} , der Einfluss der Gewichtskräfte mit \mathbf{s} bezeichnet. Mit dieser Beschreibung des Systems im Zustandsraum kann das System durch numerische Integration simuliert werden, und es können Steuerungen und Regelungen für das System ausgelegt werden.

3.4 Diskretisierung des Differenzialgleichungssystems

Für eine zeitdiskrete Beschreibung des Systems muss die Systemdifferenzialgleichung in Zustandsraumdarstellung nach Gl. (3.24)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{s}(t) \quad (3.25)$$

in eine Differenzengleichung der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{s}_k \quad (3.26)$$

überführt werden. Dies erfolgt durch Lösen der kontinuierlichen Systemdifferenzialgleichung Gl. (3.25). Da es sich um ein lineares System handelt, lässt sich durch Superposition eine exakte Diskretisierung des Systems ermitteln. Die Eigenbewegung des Systems beschreibt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t). \quad (3.27)$$

Durch Integration im Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ für verschiedene Anfangswerte \mathbf{x}_{k_j} ergeben sich die Endwerte \mathbf{x}_{k+1_j} . Werden $n = \dim(\mathbf{A})$ linear unabhängige Einheitsvektoren \mathbf{x}_{k_j} gewählt, so lässt sich aus dem entstehenden Gleichungssystem der Form $\mathbf{x}_{k+1_j} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k_j}$ die diskrete Systemmatrix \mathbf{A}_k berechnen. In gleicher Weise werden die zeitdiskreten Matrizen \mathbf{B}_k

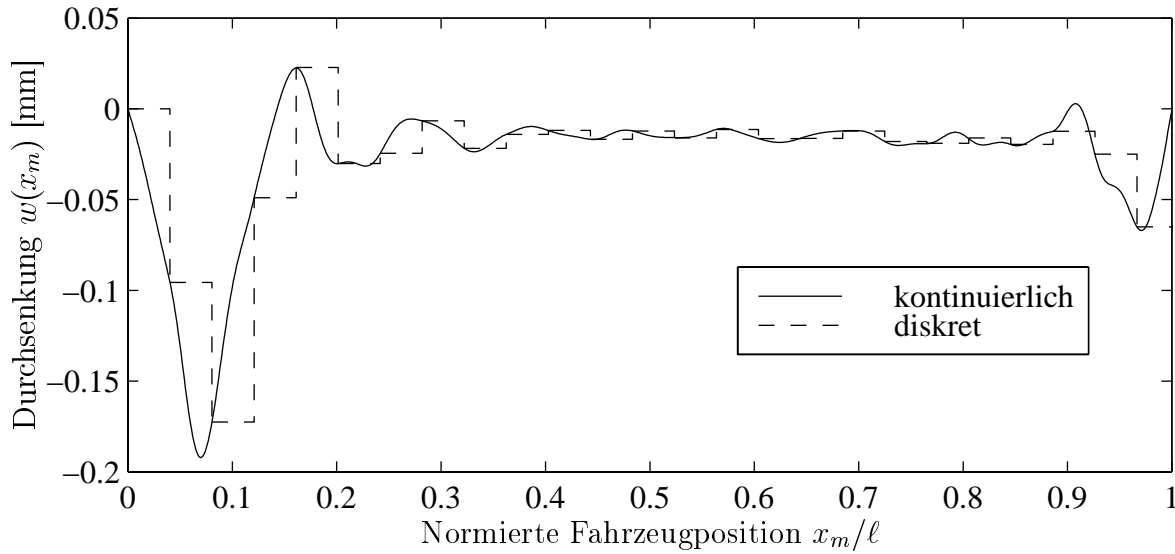


Bild 3.4: Durchsenkung an der Massenposition $w(x_m)$ des kontinuierlichen und des zeitdiskreten geregelten Systems mit Stellkraft in Balkenmitte in der Simulation (Abtastzeit $\Delta T = 20$ ms, Massengeschwindigkeit $v_m = 5$ m/s).

und \mathbf{s}_k berechnet. Bei dieser Methode der Diskretisierung des Systems stimmen die Ergebnisse des kontinuierlichen und des zeitdiskreten Systems bei gleichem Integrationsverfahren an den Abtastschritten, wie in Bild 3.4 zu sehen ist, exakt überein. Hier wird das zeitdiskrete System mit einem zeitdiskreten optimalen Regler bei einer geringen Abtastfrequenz (Abtastzeit $\Delta T = 20$ ms) geregelt. Das kontinuierliche System wird in der Simulation mit derselben Stellgröße beaufschlagt wie das diskrete System.

Die Abtastzeiten werden so gewählt, dass der vorhandene Speicherplatz auf dem Prozessrechner optimal genutzt wird. Entsprechend der mittleren Überfahrgeschwindigkeit \bar{v}_m werden die Abtastzeiten nach Tabelle 3.3 gewählt.

3.5 Das KALMAN-Filter als Beobachter

Bei der Zustandsregelung werden Systemzustände zurückgeführt. In Simulationen werden diese Zustände zumeist direkt einem Simulationsmodell entnommen. Die Systemzustände können in experimentellen Regelungen oft nicht gemessen werden, weswegen die benötigten Systemzustände durch einen Beobachter geschätzt werden müssen. Da die experimentellen Regelungen auf einem digitalen Prozessrechner erfolgen, wird in dieser Arbeit ein zeitdiskre-

Tabelle 3.3: Wahl der Abtastzeiten.

Mittlere Geschwindigkeit \bar{v}_m [m/s]	1	2.5	5	7.5	10
Abtastzeit ΔT [ms]	7.5	3	1.5	1	0.75

tes KALMAN-Filter als Beobachter verwendet, vgl. LUDYK [27]. Der Aufbau des KALMAN-Filter ist in Bild 3.5 als Blockschaltbild dargestellt. Die Matrizen und Vektoren mit dem Index k sind zeitvariant. Für das zu beobachtende System, das als Eingänge den Störterm \mathbf{s}_k und den Stellvektor \mathbf{u}_k und als Ausgang den Messvektor \mathbf{y}_k (hier Durchsenkungen) aufweist, sind die unbekannt Zustände \mathbf{x}_k zu schätzen. Zum einen sind dem System Systemstörungen \mathbf{v}_k und zum anderen Messstörungen \mathbf{n}_k überlagert. Ein Beispiel für Messstörungen ist das Verstärkerrauschen der analogen Messverstärker. Dagegen stellt der Vektor \mathbf{v}_k eine stochastische Unsicherheit der Systemmodellierung dar. Für diese Störungen werden folgende Annahmen getroffen:

Die Erwartungswerte der Störungen sind Null,

$$E\{\mathbf{v}_k\} = E\{\mathbf{n}_k\} = \mathbf{0}, \quad (3.28)$$

die Störungen sind stochastisch unabhängig,

$$E\{\mathbf{v}_k \mathbf{n}_j^T\} = \mathbf{0}, \quad (3.29)$$

die Kovarianzmatrizen sind bekannt,

$$E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\} = \mathbf{Q}_k \quad (3.30)$$

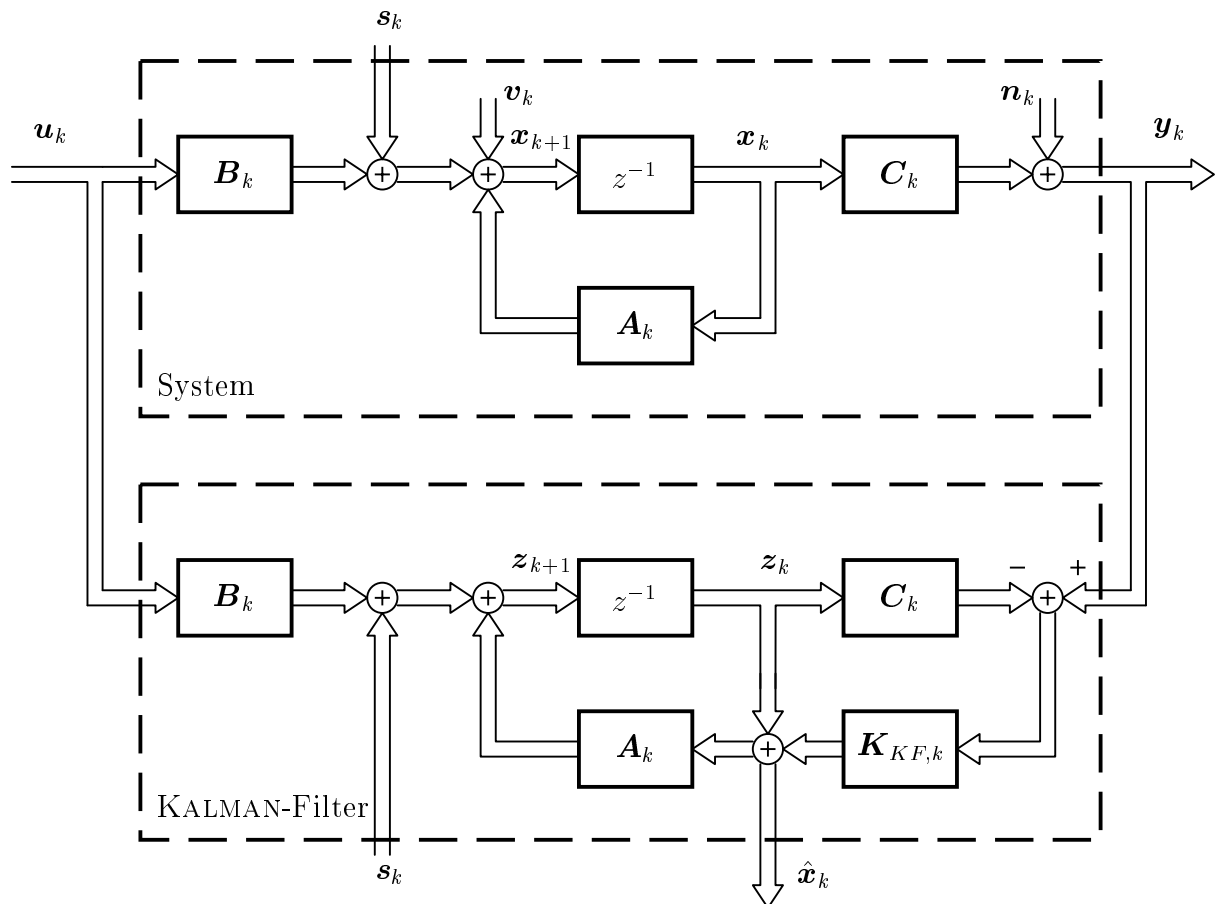


Bild 3.5: Blockschaltbild mit KALMAN-Filter.

$$E\{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^T\} = \mathbf{R}_k. \quad (3.31)$$

Im KALMAN-Filter wird das System durch das Modell mit der Systemmatrix \mathbf{A}_k , der Eingangsmatrix \mathbf{B}_k und der Ausgangsmatrix \mathbf{C}_k nachgebildet. Die KALMAN-Verstärkung $\mathbf{K}_{KF,k}$ wird so berechnet, dass die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \quad (3.32)$$

minimiert wird. Der Entwurf des KALMAN-Filters für das hier untersuchte System, welches Gravitationseinflüsse als Systemeigenschaft hat (Gl. (4.9)), lässt sich dabei auf den Entwurf für das lineare System

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (3.33)$$

zurückführen, da der Schätzfehler unabhängig von den Gravitationseinflüssen ist.

Beobachtet werden die Durchsenkungen des Balkens, die sich aus den Zuständen des Systems mit dem Störanteil der Messung zu

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k \quad (3.34)$$

ergeben. Die Systemgleichung des gestörten Systems ist

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k. \quad (3.35)$$

Mit dem Vorhersagevektor für den Systemzustand

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{s}_{k-1} \quad (3.36)$$

wird der geschätzte Systemzustandsvektor zu

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{z}_k + \mathbf{K}_{KF,k} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{z}_k). \quad (3.37)$$

Entsprechend Gl. (3.32) mit Gl. (3.37) und Gl. (3.26) wird der Schätzfehler nach

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_k &= (\mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{C}_k - \mathbf{E}) \cdot \\ &\quad (\mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{s}_{k-1} - \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{s}_{k-1} - \mathbf{v}_{k-1}) \\ &\quad - \mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{n}_k \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{C}_k) \mathbf{A}_{k-1} \tilde{\mathbf{x}}_{k-1} + (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{C}_k) \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{n}_k. \end{aligned} \quad (3.38)$$

berechnet. Da sich der Term \mathbf{s}_{k-1} heraushebt, ist der Schätzfehler unabhängig von den Gravitationseinflüssen. Der Schätzfehler wird beispielsweise in LUDYK [27] und FÖLLINGER [17] hergeleitet und für die Berechnung des KALMAN-Filters im nächsten Abschnitt eingesetzt.

3.5.1 Berechnung des KALMAN-Filters

Das Ziel bei der Berechnung des KALMAN-Filters ist, die Kovarianz des Schätzfehlers zu minimieren. Dazu ist die KALMAN-Verstärkung $\mathbf{K}_{KF,k}$ so zu berechnen, dass die quadratische Form $\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{P}_k \boldsymbol{\gamma}_k$ der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_k = E\{\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T\} \quad (3.39)$$

für beliebige vorher festzulegende Vektoren $\boldsymbol{\gamma}_k$ minimal wird. Beispielsweise wird die Varianz für den Fehler der geschätzten Durchsenkung an der Massenposition an jedem Punkt des Balkens minimal, wenn $\boldsymbol{\gamma}_k = \mathbf{C}_k^T$ gewählt wird,

$$\begin{aligned} V\{\tilde{y}_k\} &= E\{\tilde{y}_k^2\} = E\{(\hat{y}_k - y_k)^2\} = E\{\mathbf{C}_k^T (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k) (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{C}_k\} \\ &= \mathbf{C}_k^T E\{\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T\} \mathbf{C}_k = \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{C}_k. \end{aligned}$$

Mit dem Störvektor

$$\mathbf{r}_{k-1} = (\mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{C}_k - \mathbf{E}) \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{n}_k \quad (3.40)$$

ergibt sich die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers zu

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{C}_k) (\mathbf{A}_{k-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1}) (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{C}_k)^T + \mathbf{K}_{KF,k} \mathbf{R}_k \mathbf{K}_{KF,k}^T. \quad (3.41)$$

Die quadratische Form $\boldsymbol{\gamma}_k^T \mathbf{P}_k \boldsymbol{\gamma}_k$ der Kovarianzmatrix wird minimal, wenn die KALMAN-Verstärkung zu

$$\mathbf{K}_{KF,k} = \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k^T)^{-1}. \quad (3.42)$$

mit \mathbf{M}_k gemäß der Matrix-RICCATI-Differenzgleichung

$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{Q}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{M}_k \mathbf{A}_k^T - \mathbf{A}_k \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k^T (\mathbf{R}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{M}_k \mathbf{C}_k^T)^{-1} \mathbf{C}_k \mathbf{M}_k \mathbf{A}_k^T \quad (3.43)$$

und dem Startwert $\mathbf{M}_0 = E\{\tilde{\mathbf{x}}_0 \tilde{\mathbf{x}}_0^T\}$ gewählt wird.

3.5.2 Verwendung des KALMAN-Filters am Versuchsstand

Weitere Eingangsgrößen des KALMAN-Filters sind neben den Stellgrößen in dem Stellvektor \mathbf{u}_k die Durchsenkungen an drei wegfesten Positionen w_{t_1} am Ort $x = 1.34$ m, w_{t_2} am Ort $x = 1.64$ m und w_{t_3} am Ort $x = 1.87$ m. Alle werden durch Tauchspulen gemessen. Diese Größen reichen aus, um mit dem KALMAN-Filter die Zustände \mathbf{x}_k zu schätzen.

Im Versuchsbetrieb hat sich herausgestellt, dass der Fehler des Beobachters in Bezug auf die Durchsenkung an der Massenposition kleiner wird, wenn zusätzlich zu den Verschiebungen an den festen Messstellen die durch einen Tiefpassdifferenzierer berechneten vertikalen Geschwindigkeiten als Eingangsgrößen des KALMAN-Filters zugefügt werden. Damit erhält es mehr Information, da neben den aktuellen Durchsenkungswerten auch Altwerte berücksichtigt werden. Modellfehler können mit dieser Zusatzinformation besser korrigiert werden.

Bei einem exakteren Systemmodell für das KALMAN-Filter wären durch die zusätzliche Geschwindigkeitsrückführung keine besseren Ergebnisse zu erwarten.

Der verwendete Tiefpassdifferenzierer wird durch die Differenzengleichung

$$y_k = \frac{1}{T + \tau} [\tau y_{k-1} + x_k - x_{k-1}] \quad (3.44)$$

beschrieben, wobei y_k Ausgangs- und x_k Eingangswerte sind. Der Differenzierer entspricht einem kontinuierlichen DT₁-System. Mit dem Parameter τ wird die Glättung des differenzierten Signals eingestellt. Dabei erweist sich die Wahl von $\tau = 10$ ms als günstig. In diesem Fall liegt nur die dominante erste Eigenfrequenz des mechanischen Systems unterhalb der Grenzfrequenz des Differenzierers. D.h. die höhere Frequenzen werden durch den Tiefpass-effekt des Differenzierers reduziert.

Das mit der Masse mitbewegte Messsystem (siehe Abschnitt 2.3.3) wird zur Bestimmung des Beobachterfehlers an einer nicht im Beobachter zurückgeführten Größe verwendet. Versuche, bei denen zusätzlich zu den wegfesten Durchsenkungen und Geschwindigkeiten die Durchsenkung und vertikale Balkengeschwindigkeit an der Massenposition zurückgeführt wird, ergeben jedoch, dass der Beobachter instabil wird, wenn sich die bewegte Masse an den Positionen der wegfesten Durchsenkungsmessung befindet. Aus diesem Grund wird die Einbeziehung der Durchsenkung an der Massenposition nicht weiter verfolgt.

Die Kovarianzmatrizen der Messsignale lassen sich durch die Untersuchung des Verstärker-rauschens des Trägerfrequenzverstärkers für die Tauchspulen bestimmen. Die Systemstörung dagegen ist unbekannt und lässt sich nicht abschätzen. Weiterhin wären durch Modellfehler systematische Fehler in der Modellbeschreibung möglich. In FÖLLINGER [17] wird vorgeschlagen, die Kovarianzmatrizen \mathbf{Q}_k und \mathbf{R}_k als Gewichtsmatrizen vorzugeben. Durch die geeignete Wahl dieser Gewichtsmatrizen könnten so auch Modellfehler ausgeglichen werden.

Durch das Verhältnis zwischen den Matrizen \mathbf{R}_k und \mathbf{Q}_k wird festgelegt, wie stark das Filter die beobachteten Zustände auf Grund der anliegenden Messwerte korrigiert. Sind die Messwerte z.B. stark gestört, die Systemstörung dagegen weitgehend vernachlässigbar, wird die Varianz des Beobachtungsfehlers dadurch minimiert, dass der Beobachter im wesentlichen mit dem in ihm enthaltenen Systemmodell arbeitet und die aktuellen Messwerte dafür weniger gewichtet.

Die Auslegung des KALMAN-Filters erfolgt in der Simulation mit dem System aus Beobachter und Regler (siehe Abschnitt 4.3). Im Experiment werden Messwerte für die Durchsenkungen und die Stellkraft des Modells F aufgenommen. Die Kovarianzmatrizen \mathbf{R}_k und \mathbf{Q}_k werden so bestimmt, dass der Fehler zwischen gemessenen und rekonstruierten Werten minimal wird. Für die $[2m \times 2m] = [6 \times 6]$ Kovarianzmatrizen bei $m = 3$ Moden ergeben sich für

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 10 \cdot \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 100 \cdot \mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_k = 50 \cdot \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{E}$$

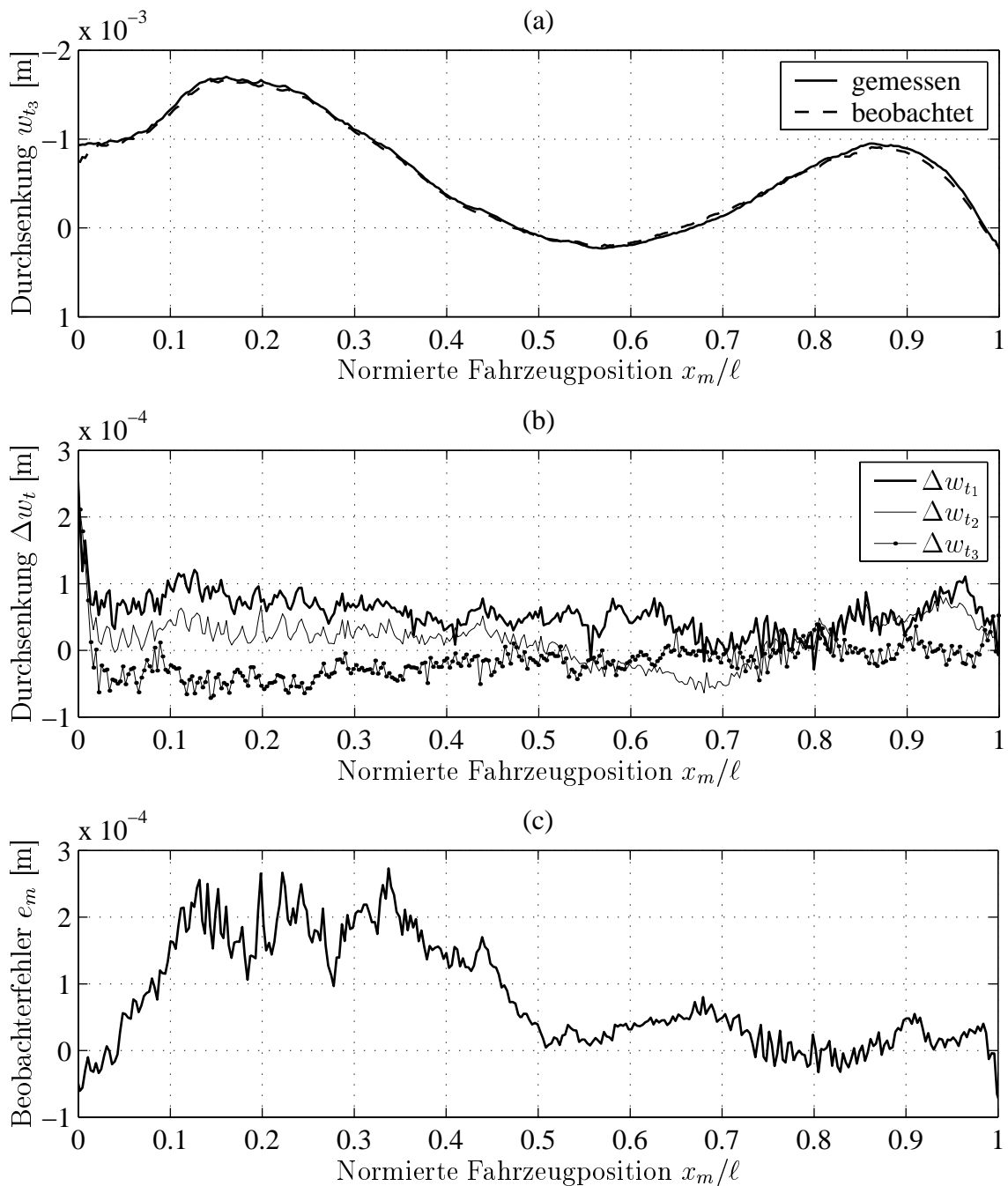


Bild 3.6: Vergleich zwischen Messung und vom Beobachter rekonstruierten Signalen: (a) Durchsenkungen w_{t_3} ; (b) Differenzen $\Delta w_{t_1} - \Delta w_{t_3}$ zwischen gemessenen und rekonstruierten Signalen an den Tauchspulen; (c) Beobachterfehler e_m als Differenz von gemessener und vom Beobachter rekonstruierter Durchsenkung $w(x_m)$ an der Massenposition.

bei den gemessenen und beobachteten Tauchspulensignalen sowie der gemessenen und beobachteten Lastwegkurve die kleinsten Abweichungen. Als Beispiel ist ein Vergleich zwischen gemessenen und vom Beobachter rekonstruierten Größen für eine geregelte Überfahrt mit einer konstanten Massengeschwindigkeit $\dot{x}_m = 5$ m/s in Bild 3.6 gezeigt.

3.5.3 Fehlerabschätzung für das KALMAN-Filter

Bei der Schätzung der Systemzustände können keine Fehler angegeben werden, da in diesem System die Zustände nicht direkt gemessen werden können. Anstelle der Zustände muss deshalb die Qualität des Beobachters auf andere Weise beurteilt werden. Hierzu wird die gemessene und rekonstruierte Durchsenkung an der Massenposition w_m verglichen, die selbst nicht im Beobachter zurückgeführt wird. Sie ist in Bild 3.6 (c) dargestellt. Die Abweichungen an den Messstellen $\Delta w_{t_1} - \Delta w_{t_3}$ können 3.6 (b) entnommen werden. Da die Abweichungen zwischen den Tauchspulenmessungen und den Beobachtungen über die Rückführmatrix zurückgeführt, d.h. geregelt werden, stimmen diese Kurven bei funktionierendem Beobachter nach dem Einschwingen bis auf einen Fehler von ± 0.1 mm überein.

Der Vergleich der gemessenen und der aus den beobachteten Zuständen rekonstruierten Lastwegkurve gibt darüber Aufschluss, wie gut Modell und Realität übereinstimmen. In der ersten Balkenhälfte zeigt sich dabei eine maximale Abweichung zwischen gemessener und rekonstruierter Durchsenkung an der Massenposition von 0.2 mm und ± 0.1 mm in der zweiten Balkenhälfte. Ein Grund für die größeren Abweichungen in der ersten Balkenhälfte könnte sein, dass sich die Messstellen alle in der zweiten Balkenhälfte befinden. Weiterhin ist dem Beobachterfehler der Durchsenkung an der Massenposition eine stochastische Komponente überlagert. Auch die Differenz der gemessenen und beobachteten Werte für die Verschiebung am Ort der Tauchspulen weist deutliches Rauschen auf. Dieses wird durch die Wahl kleiner Kovarianzmatrizen für die Ableitungen der Durchsenkungen gegenüber den Kovarianzmatrizen der Durchsenkungen an den Messstellen verursacht. Durch diese Wahl werden die Messsignale verstärkt gewichtet.

Der Einfluss von Rauschen auf das System aus Beobachter und Regler wird durch den Vergleich des gestörten mit dem ungestörten System in der Simulation ermittelt. Die Tauchspulensignale $w_{t_1} \dots w_{t_3}$ werden dazu mit Rauschsignalen von $\pm 50 \mu\text{m}$ Amplitude gestört. Diese Störampplitude ist größer als die am Versuchsstand gemessene Störampplitude. Die Abweichungen in der Durchsenkung an der Massenposition für das gestörte und ungestörte System ist dabei mit weniger als $\pm 50 \mu\text{m}$ in der gleichen Größenordnung wie die Störampplitude.

3.6 Untersuchung des unregulierten Systems

Die Untersuchung des unregulierten Systems wird in drei Anregungsarten unterteilt: einfache Überfahrten mit konstanter Geschwindigkeit, einfache beschleunigte Überfahrten und mehrfache Überfahrten. Jeder dieser Unterabschnitte ist wiederum untergliedert in die Simulation der Lastwegkurven, die Bestimmung ungünstiger Anregungsverhältnisse und einen Vergleich zwischen Messung und Simulation.

3.6.1 Einfache Überfahrten mit konstanter Geschwindigkeit

Simulation der Lastwegkurven

Einfache Überfahrten mit konstanten Geschwindigkeiten hat FRISCHGESELL [19] für verschiedene Lastfälle und Systeme untersucht. Dort wird ein Vergleich der Lastwegkurven für bewegte Last und bewegte Kraft durchgeführt. Des Weiteren wird das Verhalten des Balkens ohne Unterstüztungsmechanismus sowie mit einem passiven Unterstüztungsmechanismus bei verschiedenen Vorspannungen betrachtet.

Die in dieser Arbeit verwendeten aktiven Unterstüztungsmechanismen verändern das System durch ihre unterschiedlichen Massen und Steifigkeiten. Der Einfluss auf die Lastwegkurven ist gering, so dass hier beispielhaft das System für eine Stellkraft in Fahrwegmitte (Modell F) ausgewählt wird. Die Vorspannung wird so gewählt, dass die Durchsenkung in Fahrwegmitte zu Null wird ($w(x = \ell/2) = 0$), wenn sich die Masse nicht auf dem Fahrweg befindet ($x_m = 0$).

In Bild 3.7 ist über der konstanten Massengeschwindigkeit $v_m = \dot{x}_m$ die maximale Durchsenkung $|w(x_m)|_{\max}$ an der Massenposition und die maximale Durchsenkung des Balkens $|w(x, t)|_{\max}$ dargestellt. Zur Vergleichsmöglichkeit mit den Ergebnissen von FRISCHGESELL ist zusätzlich eine zweite Abszisse abgebildet, die in dem Geschwindigkeitsmaß α skaliert ist. Bis zu einer Geschwindigkeit von $v_m = 5$ m/s sind die Durchsenkungen näherungsweise konstant. Bis zu einer Geschwindigkeit von $v_m = 10$ m/s ist die maximale Durchsenkung an der Massenposition auch die maximale Durchsenkung des Balkens, darüber hinaus sind die maximalen Durchsenkungen des Balkens größer als die an der Massenposition. Für beide

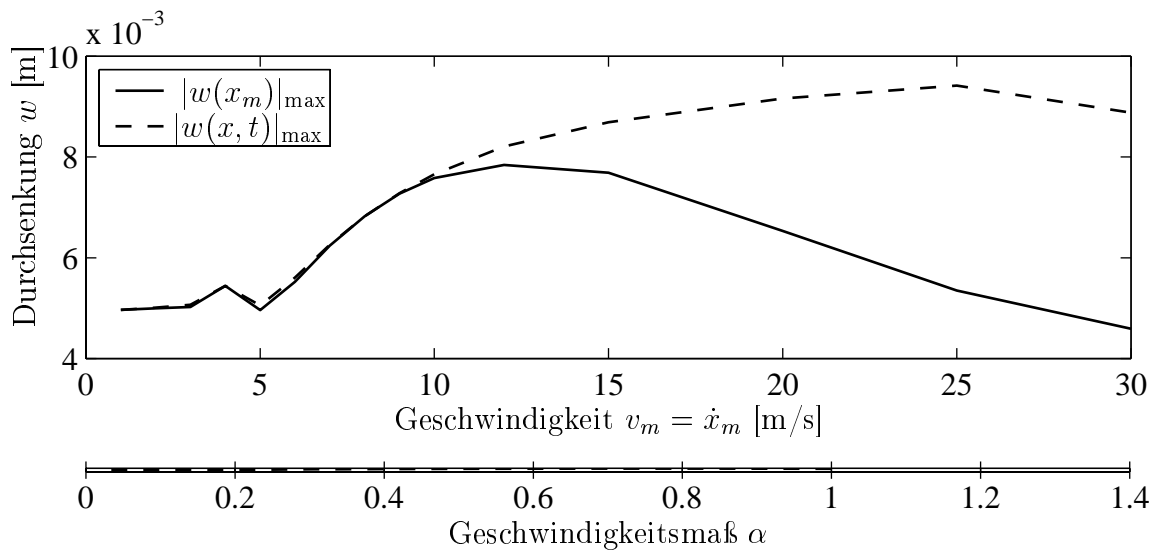


Bild 3.7: Simulationsergebnisse für die maximale Durchsenkung $|w(x_m)|_{\max}$ an der Massenposition und der maximalen Durchsenkung des Balkens $|w(x, t)|_{\max}$ über der konstanten Massengeschwindigkeiten $v_m = \dot{x}_m$ und dem Geschwindigkeitsmaß α nach Gl. (3.45).

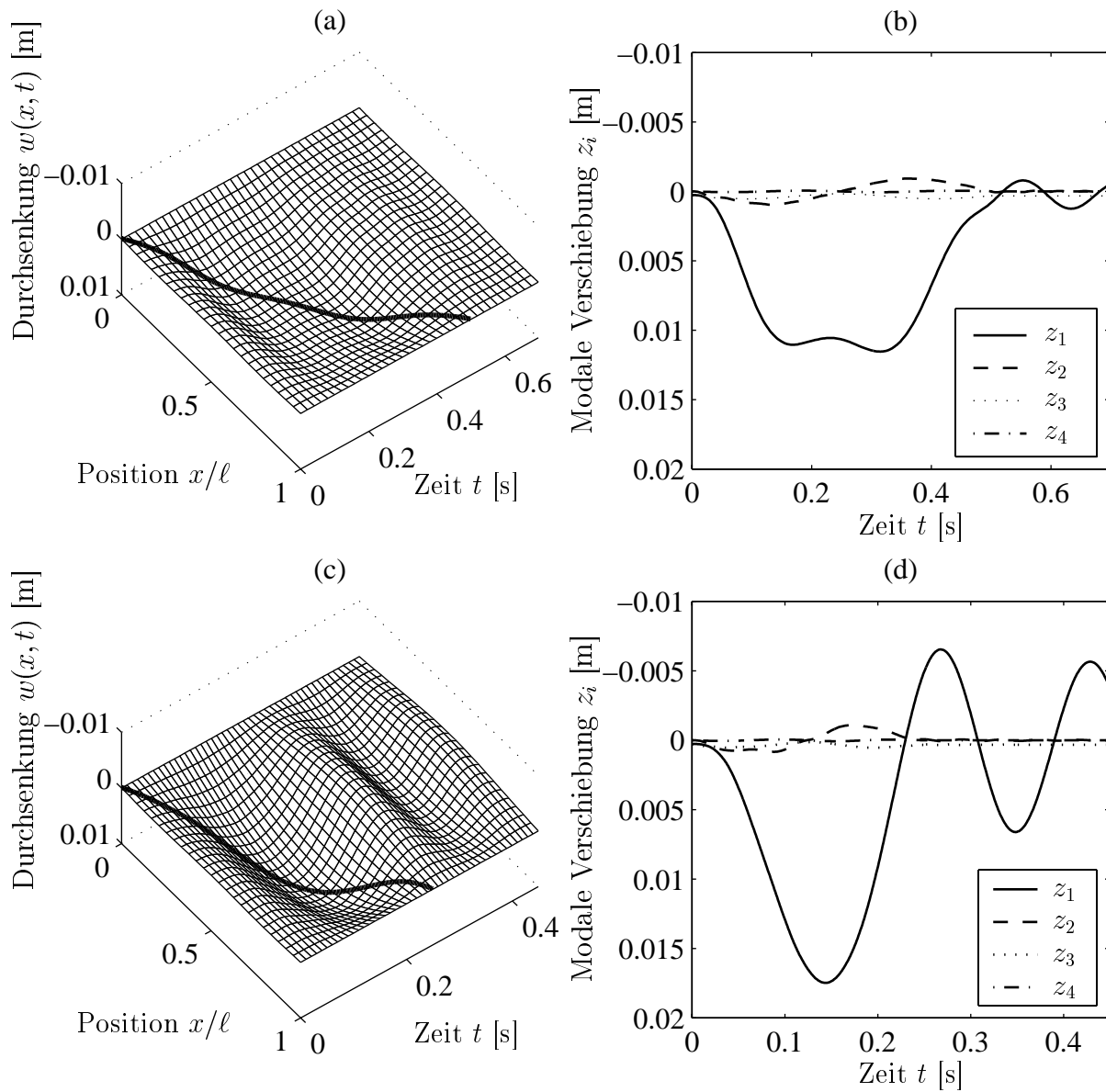


Bild 3.8: Simulierte Durchsenkungen $w(x, t)$ und die zugehörigen modalen Verschiebungen $z_1 \dots z_4$ für (a), (b) $v_m = 5 \text{ m/s}$; (c), (d) $v_m = 10 \text{ m/s}$.

Durchsenkungen ergeben sich Maxima, die im Folgenden erläutert werden.

Zum Vergleich der Lastwegkurven des passiven Systems mit denen des aktiv geregelten Systems zeigt Bild 3.8 simulierte Durchsenkungen $w(x, t)$ für zwei konstante Überfahrge-
 schwindigkeiten $v_m = 5 \text{ m/s}$ und $v_m = 10 \text{ m/s}$ und die zugehörigen modalen Verschiebungen für vier Moden $z_1 \dots z_4$. Die dreidimensionalen Darstellungen zeigen den gesamten Balken ($0 \leq x \leq \ell$) zu verschiedenen Zeiten. Die fett gedruckte Linie stellt die Lastwegkurve an der Massenposition dar. Bei den zugehörigen modalen Verschiebungen, die über der Zeit aufgetragen sind, fällt auf, dass die modalen Verschiebungen des ersten Modus dominieren. Sie sind z.B. im Maximum um mehr als das 10-fache größer als die modalen Verschiebungen des zweiten Modus. Nach FRISCHGESELL haben die Moden höherer Ordnung erst bei Ge-

schwindigkeiten über der ersten kritischen Geschwindigkeit eine Bedeutung. Die Werte der modalen Verschiebungen beginnen auf Grund der Anfangsauslenkung des Balkens durch sein Eigengewicht und die Vorspannung durch den Unterstützungsmechanismus nicht bei Null.

Bestimmung ungünstiger Anregungsfälle

Die Untersuchung ungünstiger Anregungsfälle wurde für konstante Geschwindigkeiten bei einfacher Überfahrt bereits von FRISCHGESELL [19] durchgeführt. Nach dessen Analyse sind die ersten beiden kritischen Geschwindigkeiten von entscheidender Bedeutung. Die kritische Geschwindigkeit kann aus dem dimensionslosen Geschwindigkeitsmaß nach POPP [37] mit

$$\alpha = \frac{\pi \dot{x}_m / \ell}{\omega_1} = \frac{\dot{x}_m \ell}{\pi} \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (3.45)$$

berechnet werden. Dabei ist ω_1 die erste Balkeneigenkreisfrequenz. Höhere Eigenfrequenzen haben auf den betrachteten Geschwindigkeitsbereich keinen Einfluss. Bei der ersten kritischen Geschwindigkeit für $\alpha = 0.5$ treten maximale Verschiebungen an der Massenposition $w(x_m)$ auf. Bei der zweiten kritischen Geschwindigkeit, $\alpha = 1$, werden die maximalen Verschiebungen des Balkens $w(x)$ an einer anderen Stelle als der Massenposition maximal. Das Maximum der Durchsenkung an der Massenposition liegt mit $|w(x_m)|_{\max} \approx 7.9$ mm bei $v_m \approx 12$ m/s ($\alpha \approx 0.55$) und das Maximum der Balkendurchsenkung mit $|w(x, t)|_{\max} \approx 9.5$ mm bei $v_m \approx 25$ m/s ($\alpha \approx 1.2$), vgl. Bild 3.7. Die Maxima der Untersuchung von FRISCHGESELL liegen bei kleineren Werten für das Geschwindigkeitsmaß α . Der Unterschied ist dem Einfluss des Unterstützungsmechanismus zuzuschreiben, der in dem Modell von FRISCHGESELL nicht enthalten ist. Weiterhin konnte festgestellt werden, dass die Anfangsbedingungen, wie in diesem Fall die statische Anfangsdurchsenkung des Balkens, einen wesentlichen Einfluss auf die Lastwegkurven haben.

Vergleich Messung-Simulation

Der Vergleich der Simulationsdaten mit den Messwerten für die Durchsenkung an der Massenposition ist in Bild 3.9 für Überfahrten mit verschiedenen konstanten Geschwindigkeiten ($v_m = 1$ m/s, $v_m = 5$ m/s, und $v_m = 10$ m/s) dargestellt. Dabei betragen die Abweichungen weniger als 0.5 mm zwischen Messung und Simulation. Bekannte Gründe für die Abweichungen sind Modellfehler und die nicht exakt bestimmte Vorspannung und Anfangsverformung des Fahrwegs.

3.6.2 Einfache beschleunigte Überfahrten

Bei beschleunigten Überfahrten sollen aus der großen Vielfalt möglicher beschleunigter Bewegungen diejenigen ermittelt werden, die zu besonders großen Schwingungsamplituden oder besonders großen Durchsenkungen führen. Diese belasten die Struktur besonders stark.

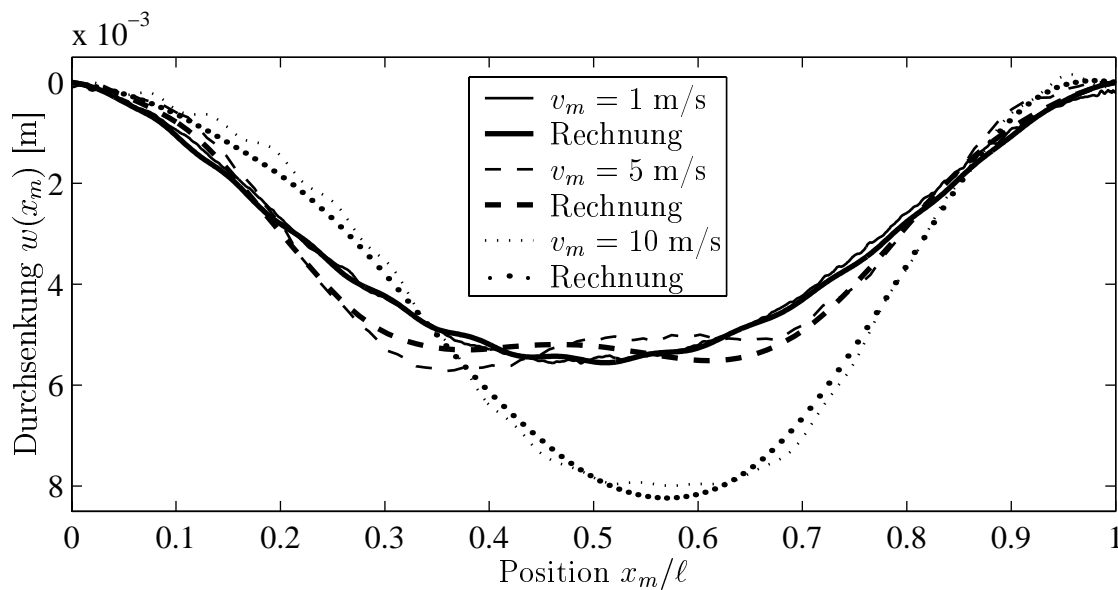


Bild 3.9: Vergleich zwischen Messung und Rechnung für konstante Massengeschwindigkeiten $v_m = \dot{x}_p$.

Simulation der Lastwegkurven

Bei der Simulation einfacher beschleunigter Überfahrten werden Anregungsfälle mit unterschiedlichen Anzahlen von Start-Stopp-Vorgängen untersucht. Dabei sollen die Beträge für Beschleunigung und Verzögerung gleich sein. Bild 3.10 zeigt beispielhaft die kinematischen Diagramme für einen bzw. sechs Start-Stopp-Vorgänge. Bei einem Start-Stopp-Vorgang wird von $x = 0$ bis zur Balkenmitte beschleunigt und dann wieder abgebremst, so dass die Masse bei $x = \ell$ zum Stehen kommt. In dem zweiten Beispiel liegen sechs Start-Stopp-Vorgänge zwischen $x = 0$ und $x = \ell$. Die Überfahrzeit ist für beide Fälle $T_\ell = 1$ s. Mit der Zeit T_ℓ ist auch die maximale und die mittlere Geschwindigkeit festgelegt.

Die notwendigen Beschleunigungen zum Erreichen der Geschwindigkeitsverläufe unterscheiden sich, wobei die Beschleunigung mit der Zahl der Start-Stopp-Vorgänge zunimmt. Die Bilder 3.10 (g) und (h) zeigen die zugehörige Lastwegkurve. Bei einem Start-Stopp-Vorgang ist die Lastwegkurve ähnlich der einer konstanten Geschwindigkeit von z. B. $\dot{x}_m = 1$ m/s. Bei sechs Start-Stopp-Vorgängen wird das System zu starken Schwingungen angeregt. Zur Verdeutlichung der Schwingungen sind in Bild 3.11 simulierte Durchsenkungen $w(x, t)$ und die zugehörigen modalen Verschiebungen $z_1 \dots z_4$ abgebildet. Es zeigt sich, dass besonders der erste Mode zu Schwingungen angeregt wird.

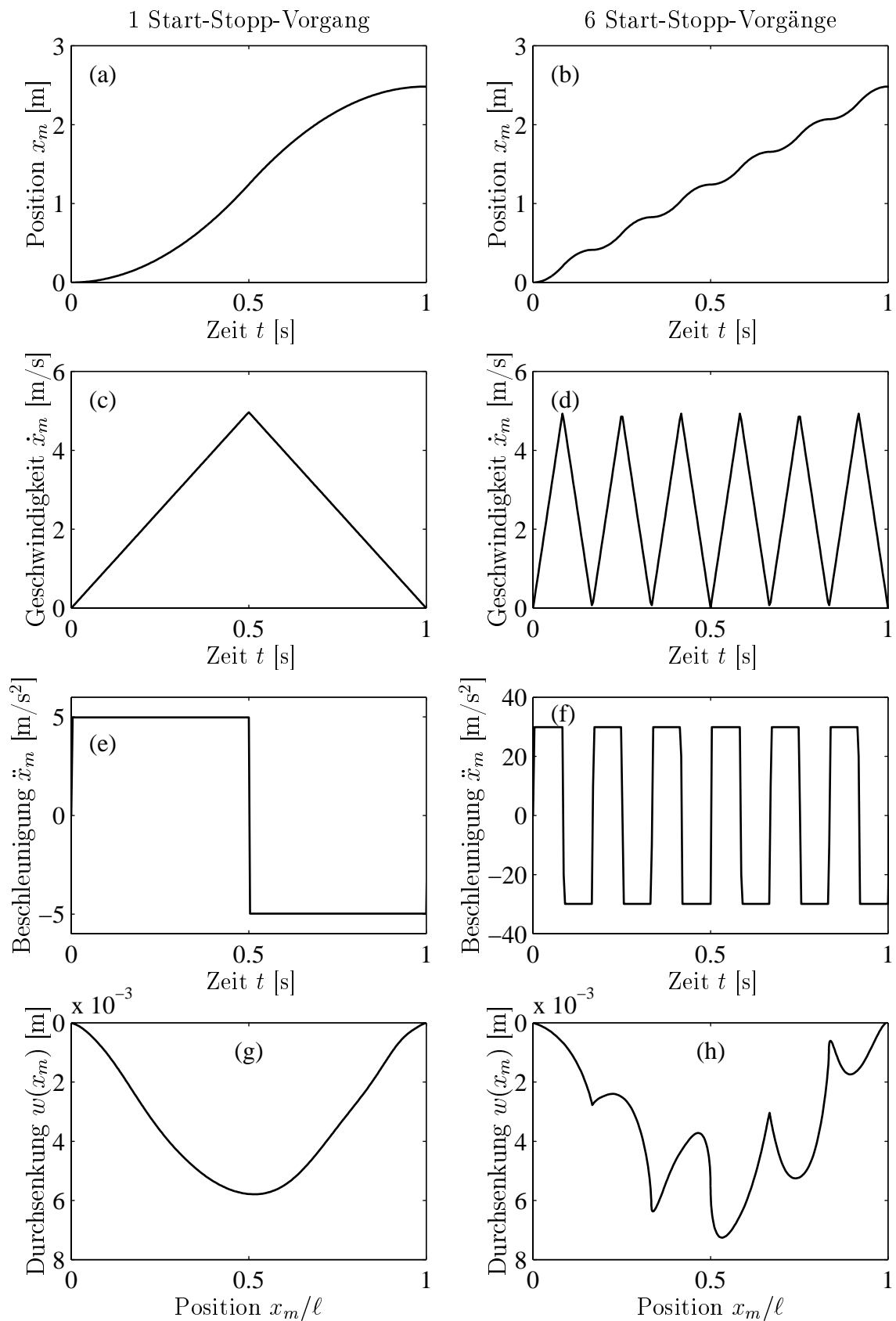


Bild 3.10: Kinematische Diagramme und Lastwegkurven für Überfahrten mit einem (a, c, e, g) bzw. sechs (b, d, f, h) Start-Stopp-Vorgängen.

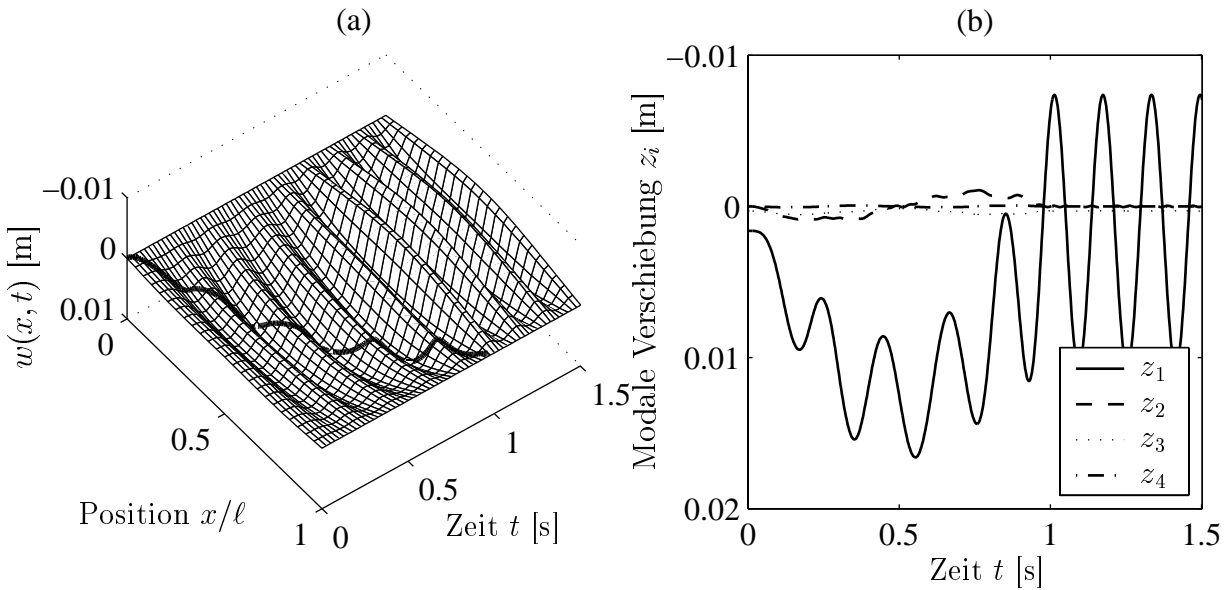


Bild 3.11: Simulierte Durchsenkungen $w(x, t)$ (a) und die zugehörigen modalen Verschiebungen $z_1 \dots z_4$ (b) bei einer Überfahrdauer von $T_\ell = 1$ s und sechs Start-Stopp-Vorgängen.

Die Abhängigkeit der simulierten Schwingungsamplituden von den Parametern Überfahrzeit T_ℓ und Start-Stopp-Zahl n ist in Bild 3.12 dargestellt. Es wird zwischen der Überfahrt $t < T_\ell$ ((a) und (b)) und dem Ausschwingvorgang ((c) und (d)) unterschieden. Weiterhin ist in Diagramm (e) für $n = 6$ die maximale Balkendurchsenkung während der Überfahrt über der Überfahrzeit T_ℓ und der entsprechenden mittleren Geschwindigkeit \bar{v}_m aufgetragen. Die Diagramme (a-d) zeigen einen Resonanzstrahl vom Ursprung aus, welcher der ersten Eigenfrequenz von ca. 6 Hz zuzuordnen ist. Durch die Anregung der ersten Eigenfrequenz können diese Resonanzüberhöhungen erklärt werden. Weiterhin ergeben sich Schwingungen mit den größten Amplituden bei schnellen Überfahrten mit kurzer Überfahrzeit. Die Ursache für die großen Amplituden ist, dass bei kurzen Überfahrzeiten die mittlere Geschwindigkeit \bar{v}_m so weit ansteigt, dass verglichen mit der Überfahrt bei konstanter Geschwindigkeit die zweite kritische Geschwindigkeit erreicht wird. Die Maximalamplituden sind dabei näherungsweise unabhängig von der Anzahl der Start-Stopp-Vorgänge.

Bestimmung ungünstiger Anregungsfälle

Die ungünstigen Anregungsfälle können anhand eines einfachen Modells erklärt werden. Es stellt sich die Frage, für welche Anzahl n von Beschleunigungs- und Bremsvorgängen und für welche Überfahrzeit T_ℓ ein Maximum an Energie, welches proportional zum Quadrat der Schwingungsamplitude des Balkens ist, in das System eingeleitet wird. Dazu wird der Anregungsmechanismus analytisch nachgebildet. Ein erster Ansatz ist die Anregung durch eine Folge von Kräften, modelliert durch DIRAC-Funktionen an den Orten auf dem elastischen, ungedämpften Fahrweg, an denen die Masse eine maximale Geschwindigkeit hat. Ein zweiter Ansatz ist die Nachbildung der Anregung durch Sprungfunktionen.

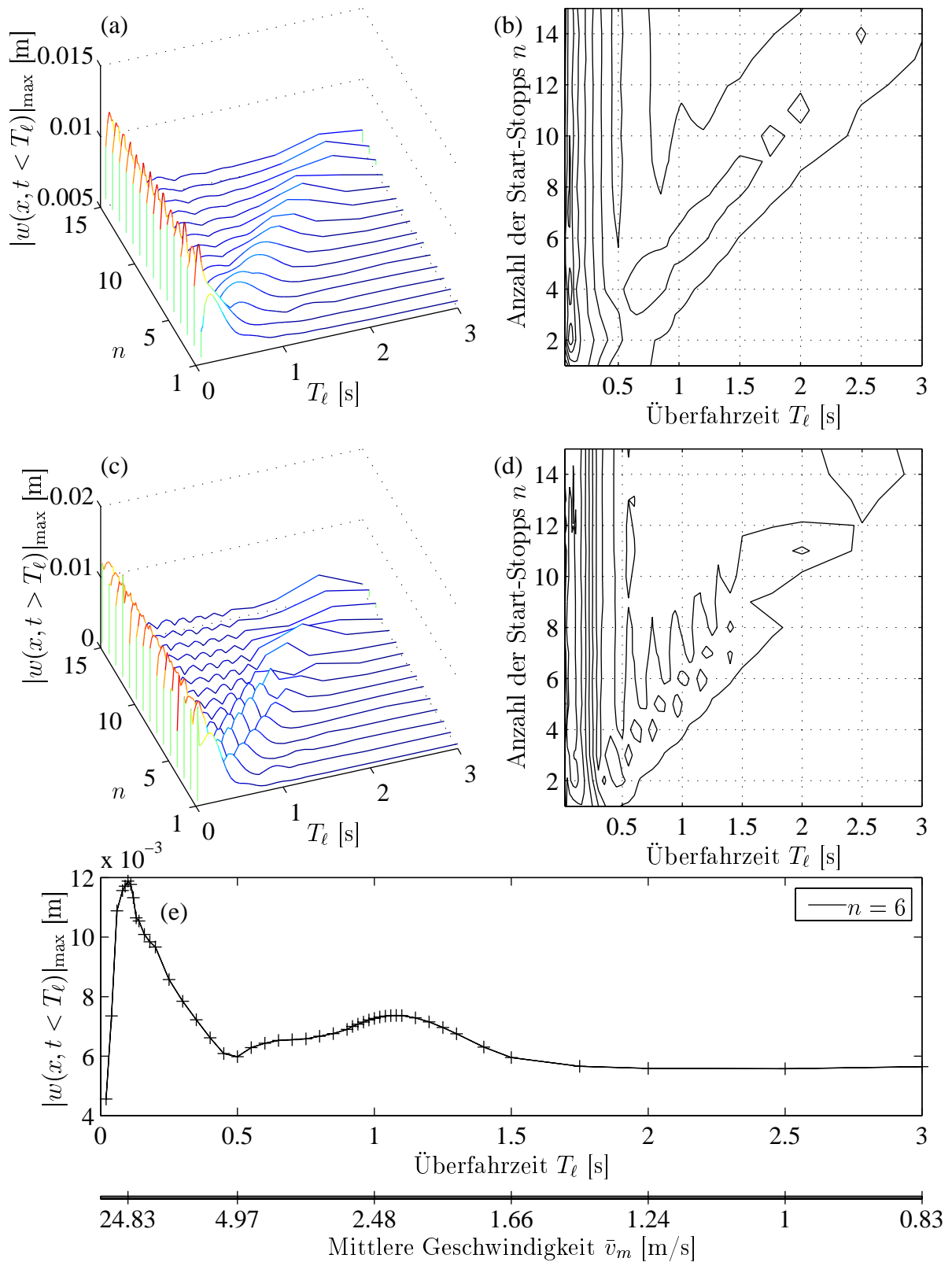


Bild 3.12: Simulierte maximale Balkendurchsenkungen bei Variation der Überfahrzeit T_ℓ und der Start-Stopp-Zahl n für die Überfahrt $t < T_\ell$, (a, b, e) und den Ausschwingvorgang, $t > T_\ell$, (c, d): (a, c) Wasserfalldiagramm, (b, d) Höhenliniendiagramm, (e) Schnitt für $n = 6$.

Für die Anregung werden diese Orte und Zeitpunkte der maximale Geschwindigkeit gewählt, da die Struktur insbesondere durch die dynamischen Wirkungen der bewegten Masse zu Schwingungen angeregt wird. In Bild 3.13 ist ein Beispiel für eine Überfahrt mit drei Start-Stopp-Vorgängen und den zugehörigen Anregungsimpulsen dargestellt.

Die Bewegungsgleichung des Balkens bei der Nachbildung der Anregung durch DIRAC-Funktionen ist gleich der partiellen Differentialgleichung des Balkens mit den Stoßfunktionen auf der rechten Seite

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = P_0 \sum_{i=1}^n \delta(x - x_i) \delta(t - T_i). \quad (3.46)$$

Der Balken wird ungedämpft modelliert, um ein möglichst einfaches Modell zu erhalten. Dabei ist P_0 der Anregungsimpuls in den n Beschleunigungs- und Bremsmanövern. Die Anregungsimpulse werden sowohl örtlich als auch zeitlich durch DIRAC-Funktionen modelliert. Die Orte x_i sind die Orte, an denen die Masse ihre maximale Geschwindigkeit hat; T_i sind die zugehörigen Zeitpunkte. Der Ort x_i kann als Bruchteil der Balkenlänge ℓ und die Zeit als Bruchteil der Überfahrzeit T_ℓ ausgedrückt werden

$$x_i = \frac{2i - 1}{2n} \ell; \quad T_i = \frac{2i - 1}{2n} T_\ell. \quad (3.47)$$

Die Zeit T_ℓ wird dabei in n Teile geteilt, wobei die Zeitpunkte T_i die „zeitliche Mitte“ eines Teiles sind; gleiches gilt für den Ort x_i . Mit dem Separationsansatz

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x) \cdot f_j(t), \quad w_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{\ell}\right), \quad (3.48)$$

der die Eigenfunktionen $w_j(x)$ verwendet, ergibt sich für die einzelnen Moden die Zeitfunk-

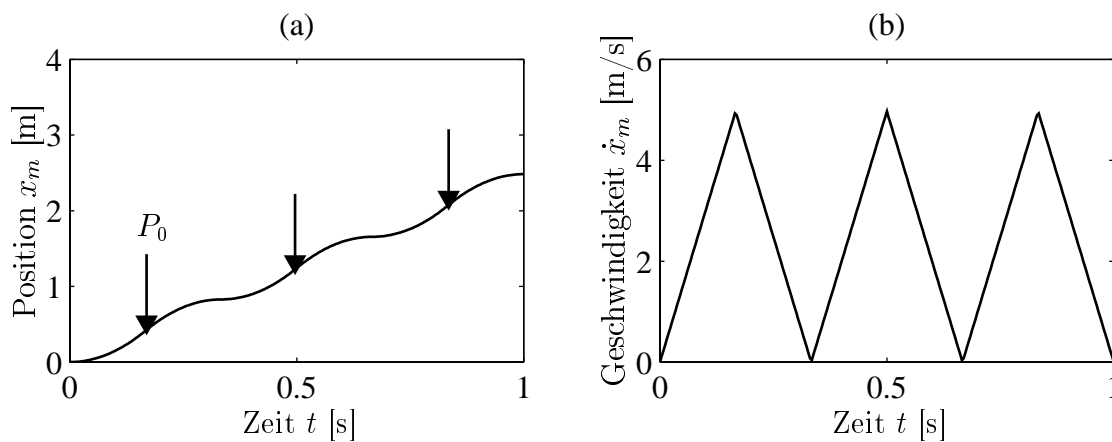


Bild 3.13: Kinematische Diagramme für eine Überfahrt mit drei Start-Stopp-Vorgängen: (a) Position der Masse über der Zeit mit eingezeichneten Anregungsimpulsen; (b) Geschwindigkeit der bewegten Masse über der Zeit.

tion als Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned}\ddot{f}_j + \omega_j^2 f_j &= \frac{2P_0}{\mu\ell} \cdot \sum_{i=1}^n \int_0^\ell w_j(x) \delta(x - x_i) \delta(t - T_i) dx \\ &= \frac{2P_0}{\mu\ell} \cdot \sum_{i=1}^n w_j(x_i) \delta(t - T_i).\end{aligned}\quad (3.49)$$

Die Impulsantwort $f_{j, st}$ aus Gl. (3.49) im Zeitbereich kann z.B. durch Anwenden der LAPLACE-Transformation unter Verwendung des Verschiebungssatzes berechnet werden (siehe z.B. [29]). Es gilt allgemein für ein System zweiter Ordnung mit Impulsanregung zur Zeit T die Transformation in den Bildbereich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\ddot{f} + \omega^2 f = \delta(t - T)\} \\ \Leftrightarrow s^2 f(s) + \omega^2 f(s) = e^{-Ts} \cdot 1 \\ \Leftrightarrow f(s) = \frac{e^{-Ts}}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}\quad (3.50)$$

Die Rücktransformierte in den Originalbereich lautet

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = f(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - T)).\quad (3.51)$$

Diese Transformation ergibt angewandt auf Gl. (3.49),

$$f_{j, st}(t, n, T_\ell) = \frac{2P_0}{\mu\ell\omega_j} \cdot \sum_{i=1}^n w_j(x_i) \sin[\omega_j(t - T_i)].\quad (3.52)$$

Damit wird Gl. (3.52) zu

$$f_{j, st}(t, n, T_\ell) = \frac{2P_0}{\mu\ell\omega_j} \cdot \sum_{i=1}^n w_j \left(\frac{2i-1}{2n} \ell \right) \sin \left[\omega_j \left(t - \frac{2i-1}{2n} T_\ell \right) \right].\quad (3.53)$$

Die Schwingungsamplitude für $t > T_\ell$ ergibt sich unter Anwendung der Additionstheoreme für harmonische Funktionen,

$$\begin{aligned}\hat{f}_{j, st}(n, T_\ell) &= \frac{2P_0}{\mu\ell\omega_j} \cdot \left[\left[\sum_{i=1}^n w_j \left(\frac{i}{n+1} \ell \right) \cos \left(\omega_j \frac{2i-1}{2n} T_\ell \right) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^n w_j \left(\frac{i}{n+1} \ell \right) \sin \left(\omega_j \frac{2i-1}{2n} T_\ell \right) \right]^2 \right]^{1/2}.\end{aligned}\quad (3.54)$$

Wird die Anregung der Struktur durch Rechteckimpulse angenähert, so setzt sich die rechte Seite von Gl. (3.46) aus einer Folge von Sprungfunktionen $1(t)$ folgendermaßen zusammen,

$$F_{Sp}(t, x) = F_0 \sum_{i=1}^n [1(t - T_i + T_h/2) - 1(t - T_i - T_h/2)] \delta(x - x_i).\quad (3.55)$$

Der zeitliche Abstand zwischen Hin- und Rücksprung beträgt T_h , wobei die Sprünge in gleichem Abstand $T_h/2$ von der Zeit T_i stattfinden.

Für die Sprungantwortamplitude $\hat{f}_{j, sp}$ der Balkendifferenzialgleichung für einen Mode folgt

$$\begin{aligned} \hat{f}_{j, sp}(n, T_\ell, T_h) &= \frac{2F_0}{\mu\ell\omega_j^2} \cdot \left[\left[\sum_{i=1}^n w_j \left(\frac{i}{n+1} \ell \right) [\cos(\omega_j(T_i + T_h/2)) - \cos(\omega_j(T_i - T_h/2))] \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^n w_j \left(\frac{i}{n+1} \ell \right) [\sin(\omega_j(T_i + T_h/2)) - \sin(\omega_j(T_i - T_h/2))] \right]^2 \right]^{1/2}. \quad (3.56) \end{aligned}$$

Bei der Analyse von Gl. (3.56) zeigt sich, dass die Sprungantwortamplitude von der Rechteckbreite T_h abhängig ist. Für feste Werte von T_h ergibt sich ein qualitativ gleiches Ergebnis bei einer Variation von der Anzahl der Stopps n und der Überfahrzeit T_ℓ wie bei der Impulsantwortamplitude nach Gl. (3.54). In Bild 3.14 ist für den ersten Mode bei $\omega_1 = 12\pi$ 1/s die modale Sprungantwortamplitude $\hat{f}_{1, sp}(n, T_\ell, T_h)$ für $T_h = \pi/100$ s dargestellt.

Mit der Zahl der Rechteckimpulse steigt die Schwingungsamplitude an (siehe Bild 3.14 (a)). Dies bedeutet, dass mehr Energie in das System eingebracht wird. Die Antwortamplitude wird maximal, wenn die Eigenfrequenz des Systems angeregt wird. Das ist hier bei $T_\ell = 1$ s der Fall, wo mit $n = 6$ Rechteckimpulsen in einer Sekunde angeregt wird, vgl. Diagramm (c). Zusätzlich ergeben sich weitere Maxima in zeitlich ganzzahligen Abständen $p \cdot T_\ell$ vom ersten Maxima, da dann zwischen den einzelnen Rechteckimpulsen p vollständige Schwingungen des Balkens liegen. Die Minima entstehen durch Auslöschung, wenn zwei aufeinander folgende Rechteckimpulse sich gegenseitig aufheben. Dieser Effekt kommt ab $n = 2$ zum Tragen. Für sehr kurze Überfahrten $T_\ell \rightarrow 0$ ergeben sich maximale Antwortamplituden, da die Rechteckimpulse annähernd gleichzeitig aufgebracht werden, so dass die Antwortamplituden aufaddiert werden. Bild 3.14 (b) kann entnommen werden, dass die Amplitudenmaxima auf Halbgeraden liegen, die durch den Punkt ($n = 0$; $T_\ell = 0$ s) gehen. Die Lage wird analytisch durch

$$\cos\left(\frac{\omega_1 T_\ell}{n}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\omega_1 T_\ell}{n} = 2k\pi \quad \text{mit} \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.57)$$

beschrieben. Für $k = 1$ wird z.B. die erste Eigenfrequenz des Balkens direkt angeregt und für $k = 2$ wird die Eigenzeit mit einer zusätzlichen Balkeneigenschwingungsdauer Rechteckimpulsabstand getroffen.

Wird die Rechteckimpulsdauer T_h nicht konstant gewählt, sondern als $T_h = T_\ell/n$, so teilt sich die Überfahrtdauer zu gleichen Teilen auf die Impulse auf. In diesem Sonderfall wirken die Impulse wie ein einziger Impuls der Dauer T_ℓ . Die Maxima der Antwortamplitude sind dann unabhängig von der Start-Stopp-Zahl alle gleich.

Für Aussagen über die Qualität des einfacheren analytischen Modells wird dieses mit der Simulation des Modells nach Gl. (3.24) überprüft. Der Vergleich der Näherungsberechnung

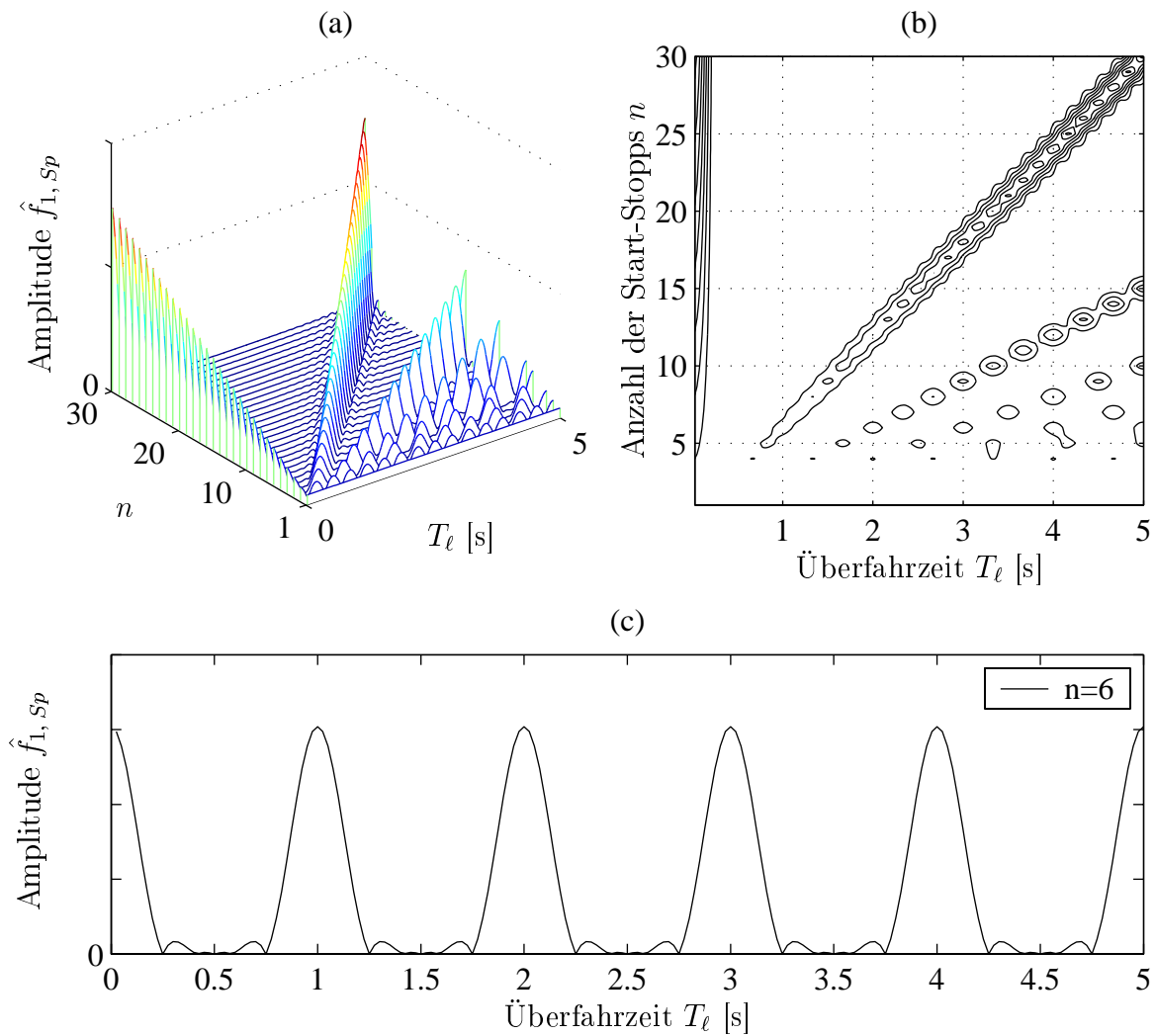


Bild 3.14: Berechnung der modalen Sprungantwortamplitude $\hat{f}_{1,sp}(n, T_\ell, T_h)$ für den ersten Mode mit $T_h = \pi/100$: (a) Wasserfalldiagramm, (b) Höhenliniendiagramm, (c) Schnitt für $n = 6$.

durch Rechteckimpulse dargestellt in Bild 3.14 mit der Simulation des Ausschwingvorgangs dargestellt in Bild 3.12 zeigt ein qualitativ ähnliches Verhalten bei der Variation der Überfahrzeit T_ℓ und der Start-Stopp-Zahl n . In beiden Diagrammen tritt die Resonanz bei Anregung der ersten Eigenfrequenz auf. In der Simulation lassen sich jedoch die Amplitudenmaxima für Anregungen mit einer Balkeneigenschwingung bzw. mehreren Balkeneigenschwingungen Rechteckimpulsabstand nicht nachweisen. Eine mögliche Ursache hierfür ist die große Überfahrzeit T_ℓ , bei welcher sich der Balken quasistatisch verhält. Ein weiterer Unterschied der Modelle ist, dass die Amplituden in der Simulation nicht linear mit der Zahl der Start-Stopp-Vorgänge ansteigen, sondern nahezu konstant sind. Das bedeutet, dass in der Simulation die Überfahrzeit einen wesentlich größeren Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Fahrwegs als die Anzahl der Start-Stopp-Vorgänge hat. In der Simulation zeigt sich, dass für kurze Überfahrzeiten die mittlere Geschwindigkeit \bar{v}_m so weit ansteigt, dass,

verglichen mit der Überfahrt bei konstanter Geschwindigkeit, die erste bzw. zweite kritische Geschwindigkeit erreicht und überschritten wird. Auch bei der Näherungsberechnung sind die Ausschwingamplituden für kurze Überfahrzeiten vergrößert, haben aber eine andere Ursache. Bei der Näherung durch Rechteckimpulse wirken diese bei kleinem T_ℓ wie ein Rechteckimpuls mit größerer Energie. Die Näherung durch das einfache Modell eignet sich demnach nur für qualitative Aussagen über Resonanzen mit der ersten Eigenfrequenz bei Variation der Überfahrzeit T_ℓ und der Start-Stopp-Zahl n , nicht aber für quantitative Aussagen.

Vergleich Messung-Simulation

Bei den einfachen beschleunigten Überfahrten stimmen Simulation mit dem Modell nach Abschnitt 3.1 und Messung für langsame Bewegungen (z.B. die Durchsenkung an der Massenposition für einen Start-Stopp Vorgang in $T_\ell = 1$ s) gut überein (Bild 3.15 (a)). Schnelle Beschleunigungsvorgänge ergeben jedoch größere Fehler in den Durchsenkungen, wie in Bild 3.15 (b) für sechs Start-Stopp-Vorgänge in $T_\ell = 1.2$ s dargestellt ist. Dies ist auf den Einfluss des Zahnriemens bei hohen Beschleunigungen und großen Durchsenkungen zurückzuführen.

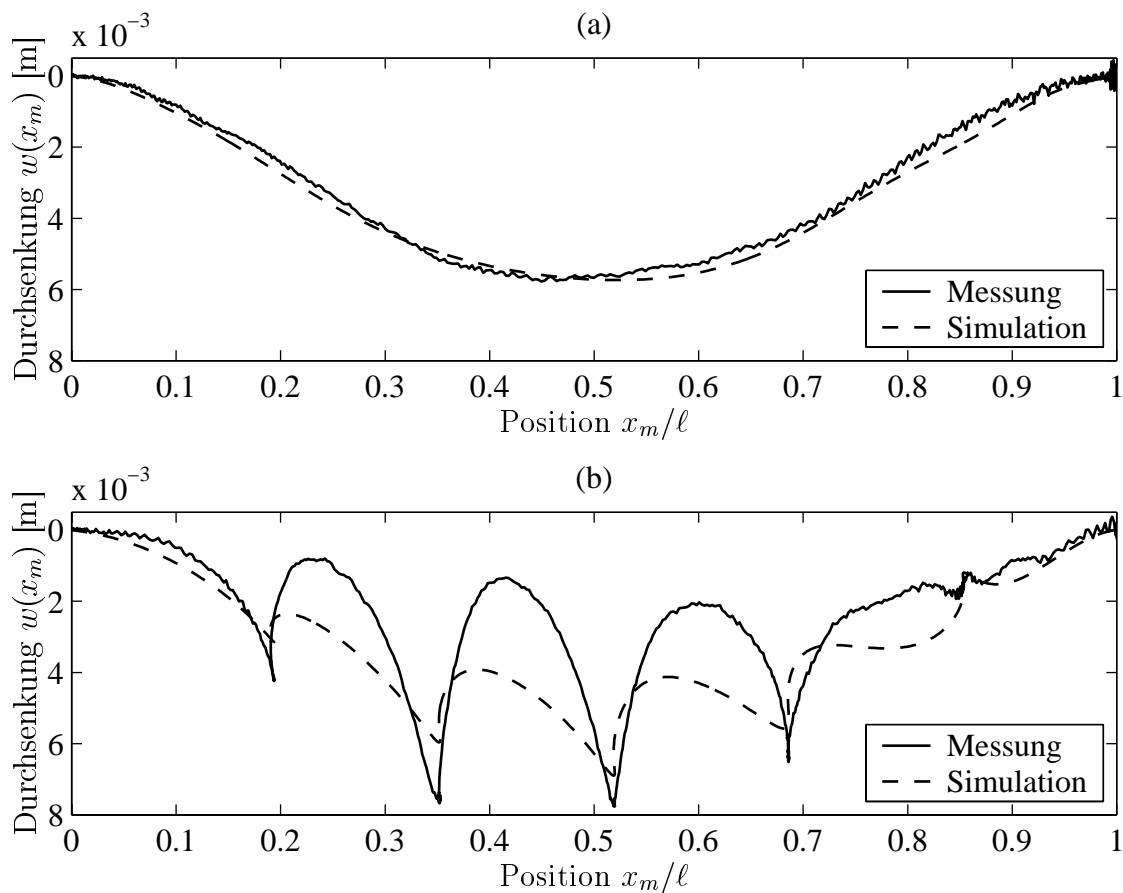


Bild 3.15: Vergleich zwischen Messung und Simulation für eine beschleunigte Überfahrt (a) mit einem Start-Stopp-Vorgang $n = 1$ in $T_\ell = 1$ s und (b) mit sechs Start-Stopp-Vorgängen $n = 6$ in $T_\ell = 1.2$ s.

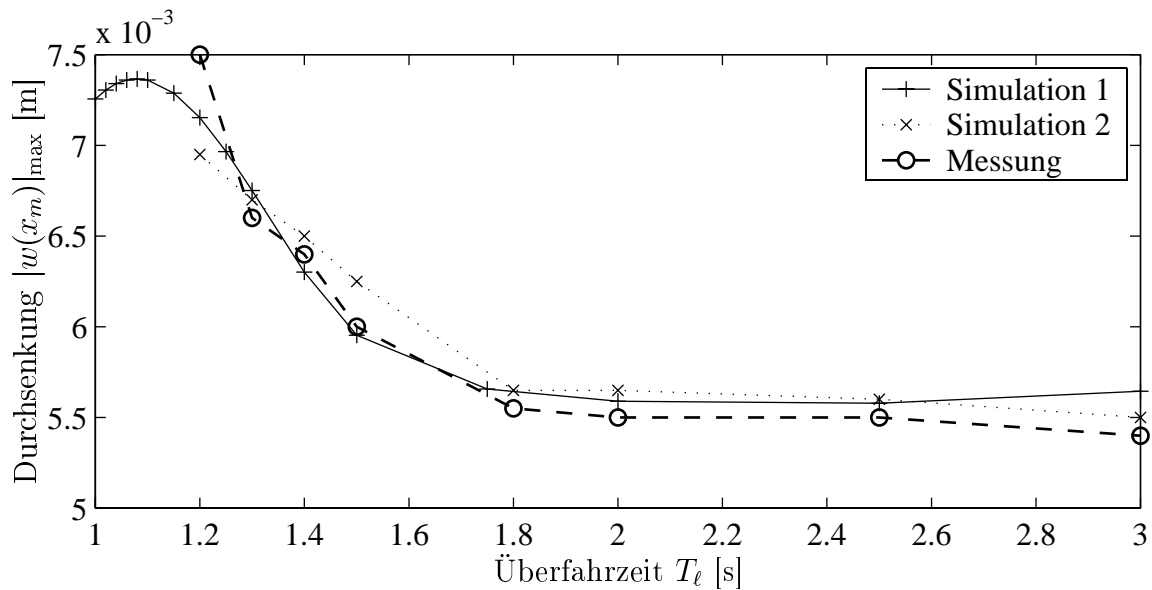


Bild 3.16: Vergleich zwischen Messung und Simulation für eine beschleunigte Überfahrt mit $n = 6$ Start-Stopp-Vorgängen. Dabei ist „Simulation 1“ die Simulation mit dem vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil (vgl. Bild 3.12) und „Simulation 2“ die Simulation mit den gemessenen Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufen.

ren. Durch den Zahnriemen werden zusätzliche Kräfte in Vertikalrichtung an der bewegten Masse in das System eingebracht. Je größer die Beschleunigung ist, desto größer werden auch die Fehler in den Durchsenkungen. Dies wird in Bild 3.16 deutlich, wo ein Vergleich zwischen Messung und Simulation für eine beschleunigte Überfahrt mit $n = 6$ Start-Stopp-Vorgängen bei verschiedenen Überfahrzeiten T_ℓ dargestellt ist. Zum einen wird mit dem vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil simuliert und zum anderen mit den gemessenen Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufen der zugehörigen Versuche. In den Simulationen ergeben sich Unterschiede aufgrund der Soll-Ist-Differenzen der Bewegungsgrößen der bewegten Masse (vgl. Bild 2.5). Die Beträge der maximalen Durchsenkungen an der Massenposition stimmen für Überfahrzeiten $T_\ell \geq 1.8$ s gut überein. Bei sechs Start-Stopp-Vorgängen in $T_\ell = 2$ s sind die Fehler bei der Durchsenkung an der Massenposition zwischen Messung und Rechnung in der gleichen Größenordnung wie bei den Überfahrten mit konstanter Geschwindigkeit. Bei schnelleren Überfahrten werden die Differenzen zwischen Messung und Rechnungen größer. Bemerkenswert ist die gute Übereinstimmung der Position der Spitzen der girlandenförmigen Lastwegkurve in Messung und Simulation, vgl. Bild 3.15 (b).

3.6.3 Mehrfache Überfahrten

Auch bei mehrfachen Überfahrten müssen aus der großen Anzahl möglicher Anregungsfälle diejenigen ausgewählt werden, die zu einer besonders starken Anfachung von Schwingungen führen. Ein Anwendungsbeispiel ist die Anregung von Brücken durch die mehrfache Über-

fahrt einer Masse mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung. In der Handhabungstechnik ist ein beispielhafter Fall die wechselnde Überfahrt von einem Ende des Fahrwegs zum anderen Ende mit Wartezeiten, in denen das Fahrzeug an den Fahrwegrändern steht und sich nicht bewegt. Einen Ausschnitt der kinematischen Diagramme für solche mehrfachen Überfahrten ist in Bild 3.17 zu sehen. In Diagramm (d) sind für ein Modell der Anregung Rechteckimpulse über der Zeit skizziert.

Simulation der Lastwegkurven

Bei der Simulation mehrfacher Überfahrten durch Zeitschrittintegration wird der Anregungsfall gemäß Bild 3.17 betrachtet. Die bewegte Masse überquert mit einem Start-Stopp Vorgang den elastischen Fahrweg in der Zeit T_ℓ . An den Randpunkten steht die Masse während der Wartezeit T_W , in welcher der Balken freie Schwingungen ausführt. Bild 3.18 zeigt beispielhaft die Einschwingvorgänge der maximalen Balkendurchsenkung $|w(x, i)|_{\max}$ aufgetragen über der Überfahrt i für zwei verschiedene Wartezeiten. Ab ca. $i = 20$ kann das System als eingeschwingen angenommen werden. Je nach Anregungsfall durch T_ℓ und T_W unterscheiden sich die Einschwingvorgänge.

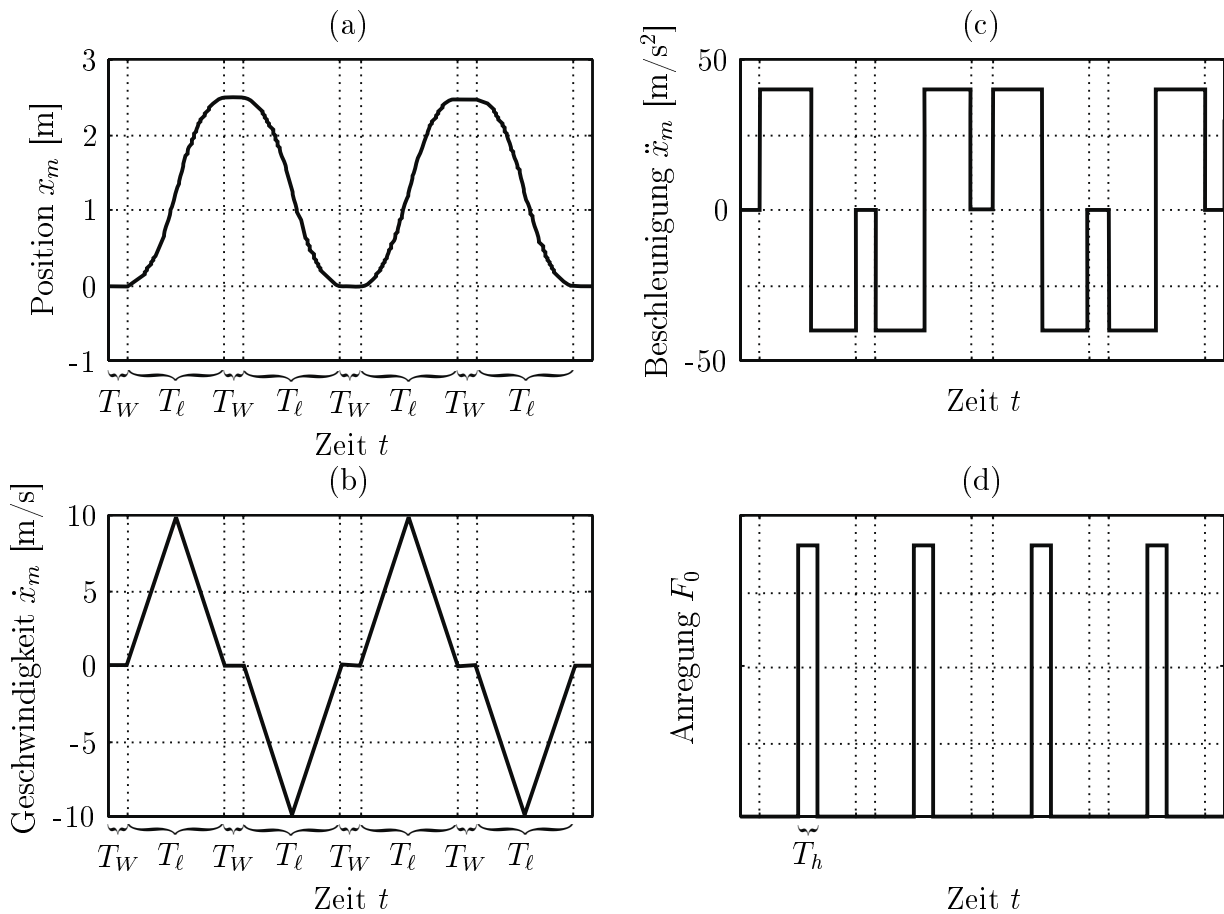


Bild 3.17: Ausschnitt der kinematischen Diagramme für mehrfache Überfahrten mit $T_\ell = 0.5$ s und $T_W = 0.1$ s: (a) Position x_m ; (b) Geschwindigkeit \dot{x}_m und (c) Beschleunigung \ddot{x}_m ; (d) Näherung der Anregung durch Rechteckimpulse.

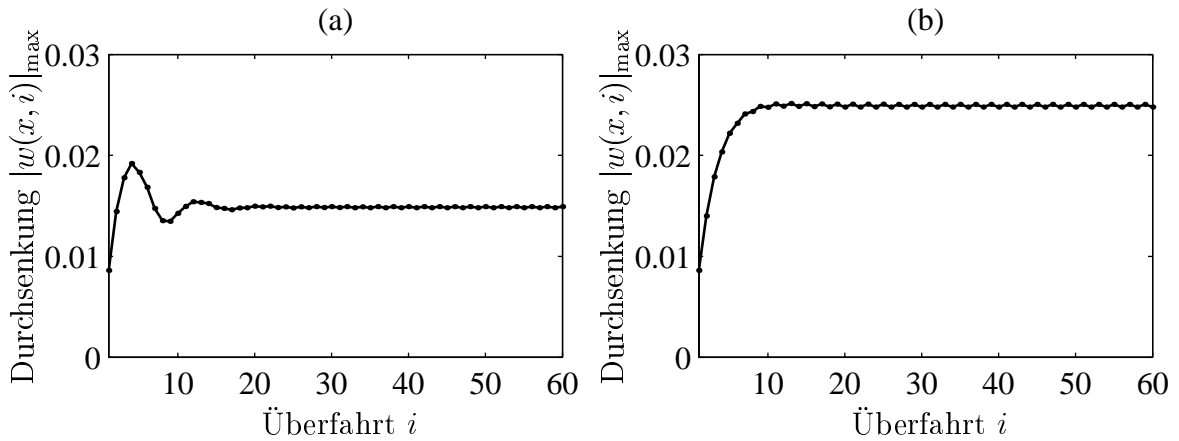


Bild 3.18: Simulierte maximale Balkendurchsenkungen der Überfahrt i bei einem Start-Stopp Vorgang für (a) $T_\ell = 0.2$ s und $T_W = 0.005$ s; (b) $T_\ell = 0.2$ s und $T_W = 0.15$ s.

In Bild 3.19 sind die Simulationsergebnisse mehrfacher Überfahrten bei Variation der Überfahrzeit T_ℓ und der Wartezeit T_W an den Randpunkten dargestellt. In Diagramm (a) ist die maximale Balkendurchsenkung $|w(x, i = 50)|_{\max}$ als Näherung für den eingeschwungenen Zustand über der Wartezeit und der Überfahrzeit aufgetragen. Bild 3.19 (c) stellt einen Schnitt für $T_\ell = 0.2$ s dar. Mit sinkendem T_ℓ steigt die mittlere Geschwindigkeit der Masse während der Überfahrt an. Damit einher geht eine Vergrößerung der maximalen Balkendurchsenkung im eingeschwungenen Zustand. Für bestimmte Kombinationen von T_ℓ und T_W ergeben sich Maxima, die auf Geraden liegen, wie in Bild 3.19 (b) zu erkennen ist. Es gilt

$$T_\ell + T_W = k \cdot T_E; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.58)$$

vgl. Gl. (3.66). Die hier bestimmte Eigenzeit von $T_E = 0.17$ s ist ca. 6% größer als die Periodendauer $T_E = 0.16$ s, die dem Kehrwert der ersten Eigenfrequenz des elastischen Fahrwegs ohne die bewegte Masse entspricht. Die Abweichung entsteht durch den Anteil der bewegten Masse, durch den die Eigenzeit des Systems verändert wird. Durch eine schrittweise Vergrößerung der bewegten Masse in der Simulation vergrößert sich auch die Eigenzeit. Wird die bewegte Masse durch eine bewegte Gewichtskraft ersetzt, stimmen Eigenzeit und Periodendauer überein. Der Abfall der Resonanzamplituden, der in Bild 3.19 (c) zu erkennen ist, wird im Folgenden erklärt. Weitere Resonanzen ergeben sich für ganzzahlige Vielfache k der Eigenzeit.

Bestimmung ungünstiger Anregungsfälle

Für wiederholte Überfahrten gibt es ein einfaches Modell, welches sehr ähnlich zu dem in Abschnitt 3.6.2 für beschleunigte Überfahrten mit mehreren Start-Stopp Vorgängen ist. In dem Modell wird die Wirkung der bewegten Masse durch eine unendliche Anzahl von Rechteckimpulsen der Breite T_h (siehe Bild 3.17) angenähert, die auf die Mitte des Fahrwegs wirken. Damit werden sowohl mehrfache Überfahrten mit einem Start-Stopp-Vorgang als auch mehrfache Überfahrten mit konstanter Geschwindigkeit nachgebildet. Die Zeitdauer T^* zwischen

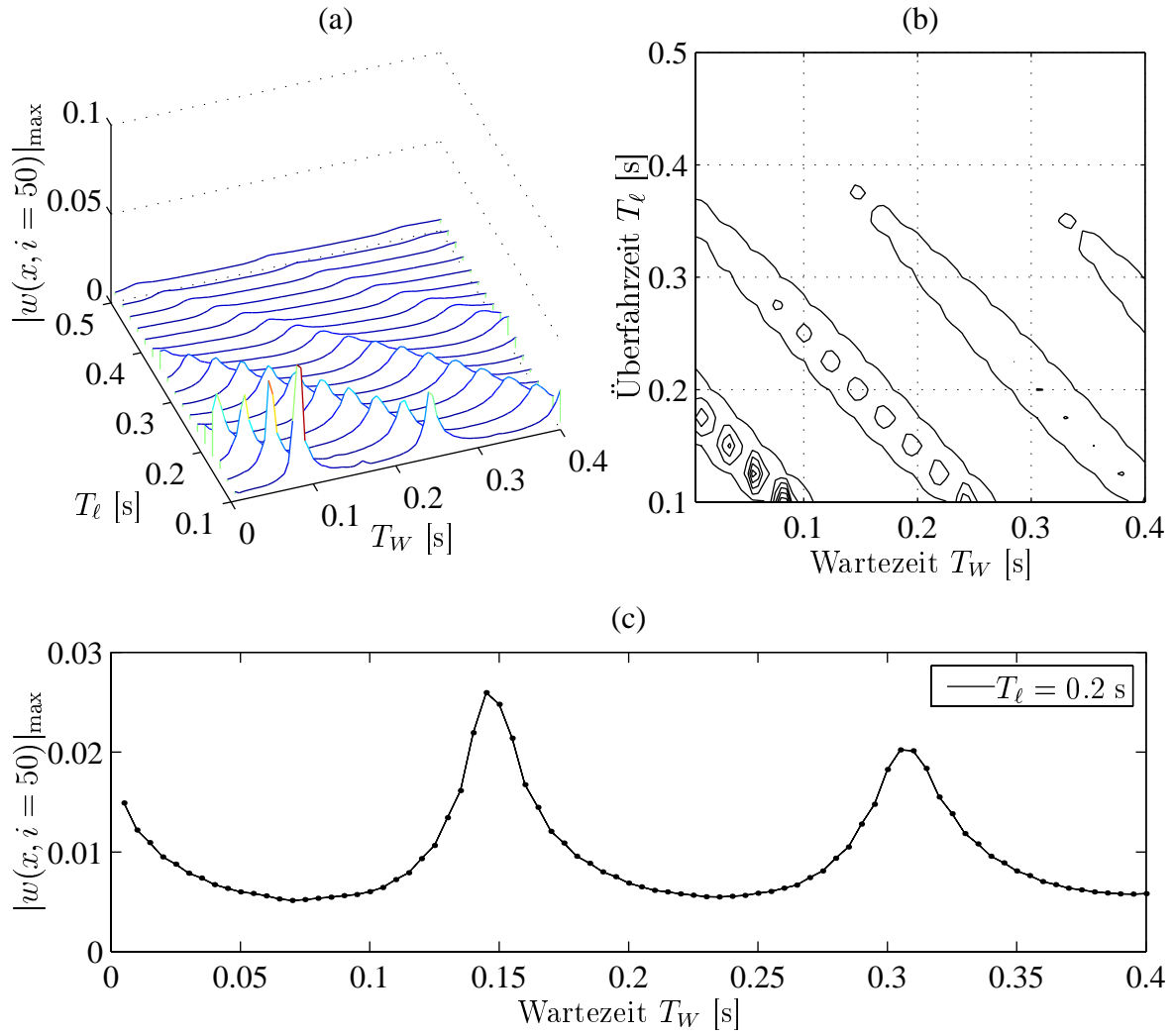


Bild 3.19: Simulierte maximale Balkendurchsenkungen bei Variation der Überfahrzeit T_ℓ und der Wartezeit T_W bei einem Start-Stopp Vorgang für die Überfahrt $i = 50$ (eingeschwungener Zustand): (a) Wasserfalldiagramm, (b) Höhenliniendiagramm, (c) Schnitt für $T_\ell = 0.2$ s.

zwei Rechteckimpulsen berechnet sich als Summe aus der Überfahrzeit T_ℓ der Masse und der Wartezeit T_W an einem der Balkenlager

$$T^* = T_\ell + T_W . \quad (3.59)$$

Mit dem modalen Ansatz nach Gl. (3.48) ergibt sich für jeden Mode j

$$\begin{aligned} \ddot{f}_j + \omega_j^2 f_j &= \frac{2F_0}{\mu\ell} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^\ell w_j(x) \delta(x - \ell/2) [1(t - k \cdot T^* + T_h/2) - 1(t - k \cdot T^* - T_h/2)] dx \\ &= \frac{2F_0}{\mu\ell} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_j(\ell/2) [1(t - k \cdot T^* + T_h/2) - 1(t - k \cdot T^* - T_h/2)] . \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die unendliche Folge von Rechteckimpulsen lässt sich in eine FOURIER-Reihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [1(t - k \cdot T^* + T_h/2) - 1(t - k \cdot T^* - T_h/2)] \quad (3.61)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi T_h}{T^*}\right) \cdot \cos\left(\frac{k2\pi}{T^*}t\right) \quad (3.62)$$

umrechnen. Für ein festes Verhältnis von Impulsdauer T_h zu T^* mit $T_h \ll T^*$ nimmt die Anregungsamplitude der einzelnen Frequenzanteile für steigendes k zunächst wegen des Terms $\frac{2}{k\pi}$ ab. Bei Rechteckimpulsen in Balkenmitte wird $w_j(\ell/2) = 1$, so dass sich für Gl. (3.60)

$$\ddot{f}_j + \omega_j^2 f_j = \frac{2F_0}{\mu\ell} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi T_h}{T^*}\right) \cdot \cos\left(\frac{k2\pi}{T^*}t\right) \quad (3.63)$$

ergibt. Die Schwingungsantwortamplituden der einzelnen Frequenzanteile k für den eingeschwungenen Zustand sind

$$\hat{f}_{j,k} = \frac{2F_0}{\mu\ell} \cdot \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi T_h}{T^*}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\pi k}{T^* \omega_j}}} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \infty. \quad (3.64)$$

Die Schwingungsantwortamplitude wird aufgrund fehlender Dämpfung im Resonanzfall $\omega_j = k \cdot \frac{2\pi}{T^*}$ unendlich groß. Das bedeutet, dass für

$$\omega_j = k \frac{2\pi}{T^*}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.65)$$

$$\Leftrightarrow k \cdot T_E = T_\ell + T_W, \quad (3.66)$$

Resonanzen zu erwarten sind. Wenn die Eigenzeit T_E des Systems gleich einem Vielfachen k der Anregungsdauer $T_\ell + T_W$ ist, wird das System zu Schwingungen mit maximaler Amplitude angeregt. Dieser Effekt kann für die erste Eigenfrequenz des Systems bei der Simulation mehrfacher Überfahrten beobachtet werden, vgl. Bild 3.19. Somit lässt sich dieses einfache Modell für die qualitative Bestimmung ungünstiger Anregungsfälle verwenden.

Vergleich Messung-Simulation

Für wiederholte beschleunigte Überfahrten mit einem Start-Stopp Vorgang ist in Bild 3.20 ein Vergleich zwischen Messung und Simulation der maximalen Balkendurchsenkung des eingeschwungenen Zustandes für verschiedene Wartezeiten T_W dargestellt. Die Überfahrzeit ist $T_\ell = 0.5$ s, da dies die schnellste mögliche Überfahrzeit für einen Start-Stopp Vorgang an der Versuchsanlage ist. Die maximale Balkenabweichung kann nicht direkt gemessen werden und muss über die inverse Messmatrix \mathbf{C}^{-1} (vgl. Abschnitt 3.5, Gl. (3.34)) aus den Tauchspulsignalen rekonstruiert werden. Da die Messmatrix aufgrund ihrer Kondition schwer invertierbar ist, weichen die simulierten und rekonstruierten Werte für die maximale Balkendurchsenkung $|w(x, t)|_{\max}$ voneinander ab. Messung und Simulation stimmen dabei qualitativ überein. Der Effekt, dass bei bestimmten Wartezeiten die erste Eigenschwingung des Systems angeregt

wird kann auch experimentell nachgewiesen werden. Die Resonanzüberhöhungen sind in der Messung jedoch um $\Delta T_w = 0.03$ s verschoben. Die Ursache für diese Verschiebung liegt in dem Folgefehler der Geschwindigkeitsregelung der Massengeschwindigkeit. Die Abstände der Maximalwerte sind jedoch sowohl für Messung als auch Simulation mit $T_E = 0.17$ s identisch. Auch der Abfall der Resonanzüberhöhungen mit wachsender Wartezeit wird bestätigt.

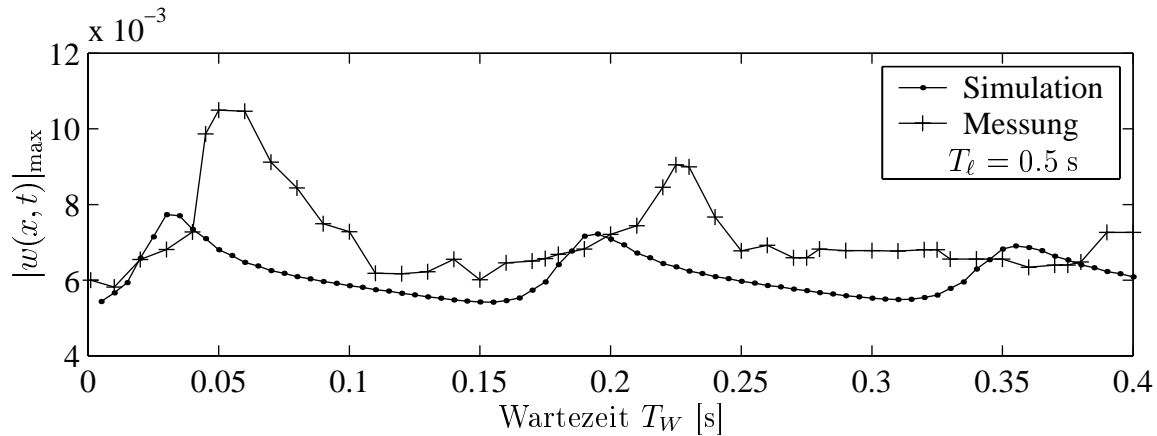


Bild 3.20: Vergleich zwischen Messung und Simulation für mehrfache beschleunigte Überfahrten mit einem Start-Stopp Vorgang in $T_\ell = 0.5$ s, bei verschiedenen Wartezeiten T_W am rechten und linken Balkenrand.

Insgesamt wird das verwendete Modell durch den Vergleich von Simulationenwerten mit Messwerten für den unregulierten Fall als ausreichend genaues Modell für das System bestätigt. Größere Abweichungen zwischen Messung und Simulation ergeben sich bei großen Durchsenkungen in Verbindung mit großen Beschleunigungen durch den Einfluss des Zahnriemens im Antrieb der Masse. Im regulierten Fall sind die Durchsenkungen jedoch um mehr als 90% kleiner, so dass dieser Effekt bei dem regulierten System auch kleinere Fehler verursacht.

4 Regelung

Das primäre Ziel der Beeinflussung des elastischen Fahrwegs unter bewegten Lasten durch Regelung in dieser Arbeit ist die Minimierung der Durchsenkung an der Lastposition,

$$|w(x_m)| \rightarrow \text{Min.} \quad (4.1)$$

Ein weiteres Ziel ist die Reduzierung der maximalen Balkendurchsenkung,

$$|w(x, t)| \rightarrow \text{Min.} \quad (4.2)$$

Diese Ziele können mit unterschiedlichen Regelungsstrategien und verschiedenen Unterstützungsmechanismen erreicht werden. Dabei können die Kriterien 4.1 und 4.2 in der Regel nicht gleichzeitig erreicht werden.

Bei FRISCHGESELL [19] wurden hauptsächlich Steuerungen untersucht. Die dort vorgestellten Regelungen konnten die Durchsenkung an der Massenposition nur unzureichend verringern wie in Abschnitt 4.1 kurz erläutert wird.

Anschließend werden zwei Ansätze verfolgt, um die Regelungsziele zu erreichen. Der erste Ansatz, welcher in Abschnitt 4.2 beschrieben wird, ist ein adaptiver Ansatz zur Minimierung der Durchsenkung an der Massenposition nach Gl. (4.1), in dem ein einfaches Systemmodell für eine Steuerung und eine Regelung verwendet wird. Durch einen adaptiven Algorithmus wird versucht, Modellfehler auszugleichen und auf Störungen zu reagieren.

Der zweite Ansatz, welcher in Abschnitt 4.3 erläutert wird, ist eine optimale Regelung, bei der ein Rückführgesetz zur Minimierung eines Gütemaßes ermittelt wird. Dazu wird die analytische Lösung für die optimale Regelung eines linearen zeitdiskreten Systems bei einem quadratischen Gütemaß angewendet. Diese Lösung wird aus der HAMILTON-Gleichung mit der Systemgleichung 3.26 als Nebenbedingung bestimmt. Durch den Störterm in der Systemgleichung wird die Gewichtskraft des Fahrwegs und der bewegten Masse in dem Reglerentwurf berücksichtigt. Bei der numerischen Berechnung des Rückführgesetzes zeigen sich jedoch Schwierigkeiten bezüglich der numerischen Stabilität. Aus diesem Grund wird im Anhang A.1 ein Verfahren nach KALMAN vorgestellt, mit dem das Rückführgesetz für das ungestörte System berechnet wird. Mit diesem Rückführgesetz wird dann in Abschnitt 4.3.2 eine Näherungslösung für das Rückführgesetz aus der HAMILTON-Gleichung berechnet. Durch die richtige Wahl der Gewichtsmatrizen im Gütekriterium gelingt es, sowohl die Durchsenkung unter der Last als auch die maximale Balkendurchsenkung zu minimieren, was in Abschnitt 4.3.3 dargestellt wird.

Die Berechnung der optimalen Regler erfolgt zeitdiskret, da an der Versuchsanlage ein Prozessrechner eingesetzt wird, der prinzipbedingt alle Signale zeitdiskret verarbeitet. So werden z. B. alle Stellausgänge des Prozessrechners mit der Abtastzeit aktualisiert. Ein Vorteil der

zeitdiskreten Systemmodellierung und Reglerberechnung ist, dass das System durch Differenzgleichungen anstelle von Differenzialgleichungen im zeitkontinuierlichen Fall beschrieben wird. Im zeitkontinuierlichen Fall müsste zur Berechnung eines optimalen Reglers eine Matrix-RICCATI-Differenzialgleichung gelöst werden. Im zeitdiskreten Fall existiert ein rekursives Bildungsgesetz für die Reglermatrizen.

Ein anderer möglicher Ansatz für eine optimale Steuerung oder Regelung ist die Anwendung der dynamischen Programmierung nach BELLMAN [4]. Dazu werden der Zustands- und der Stellraum quantisiert. Anschließend wird ein Suchalgorithmus gestartet, welcher für jeden relevanten Systemzustand aus der Menge der möglichen Stellvektoren denjenigen auswählt, der ein vorher festgelegtes Gütekriterium am besten erfüllt. Nach dem Optimalitätsprinzip von BELLMAN ist es erforderlich, die Folge von Stellvektoren zeitlich rückwärtsschreitend zu bestimmen. Dadurch wächst der Aufwand für die Suche linear mit der Anzahl der Zeitschritte. Ansonsten würde der Suchaufwand bei zeitlich vorwärts schreitender Suche exponentiell ansteigen. Die Vorteile des Verfahrens sind, dass Beschränkungen im Zustands- und Stellraum berücksichtigt werden können und dass ein beliebiges Gütekriterium verwendet werden kann. Der Nachteil ist, dass durch eine hohe Systemordnung n (bei $m = 3$ Moden ergibt sich $n = 6$) die Berechnung sehr zeitaufwendig und speicherplatzintensiv ist. Das Verfahren lässt sich zwar prinzipiell bezüglich Zeitaufwand und Speicherplatzbedarf optimieren, Versuche zeigen jedoch, dass es sich für die Bestimmung einer Steuerung oder Regelung des elastischen Fahrwegs nicht eignet. Daher wird dieser Ansatz in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

4.1 Vorsteuerung und Regelung nach FRISCHGESELL

In der Arbeit von FRISCHGESELL [19] werden neben rein passiven Versteifungen Vorsteuerungen und einfache Regelungsansätze vorgestellt. Als Regelungsziele sind bei FRISCHGESELL zum einen wie in dieser Arbeit die maximale Durchsenkung des elastischen Fahrwegs an der Massenposition (siehe 4.1) und zum anderen die quadratische Regelfläche

$$J = \int_0^{\ell} w(x_m)^2 dx_m, \quad (4.3)$$

welche dimensionslos angegeben wird, zu minimieren. Bild 4.1 zeigt die gemessenen Regel- und Steuerergebnisse von Frischgesell im Vergleich zu dem unregulierten System ohne Unterstütsmechanismus. Bereits die Vorspannung durch den Unterstütsmechanismus senkt die maximale Durchsenkung an der Massenposition auf ca. ein Zehntel der Durchsenkung des nicht unterstüts Systems. Die besten Ergebnisse zur Reduzierung der Durchsenkung an der Massenposition erreicht FRISCHGESELL durch eine Kombination aus statischer Vorsteuerung und PI-Regler. Die statische Vorsteuerung kompensiert durch eine vorab berechnete Zeitfunktion für Kraft und Moment die Last statisch. Der PI-Regler führt die

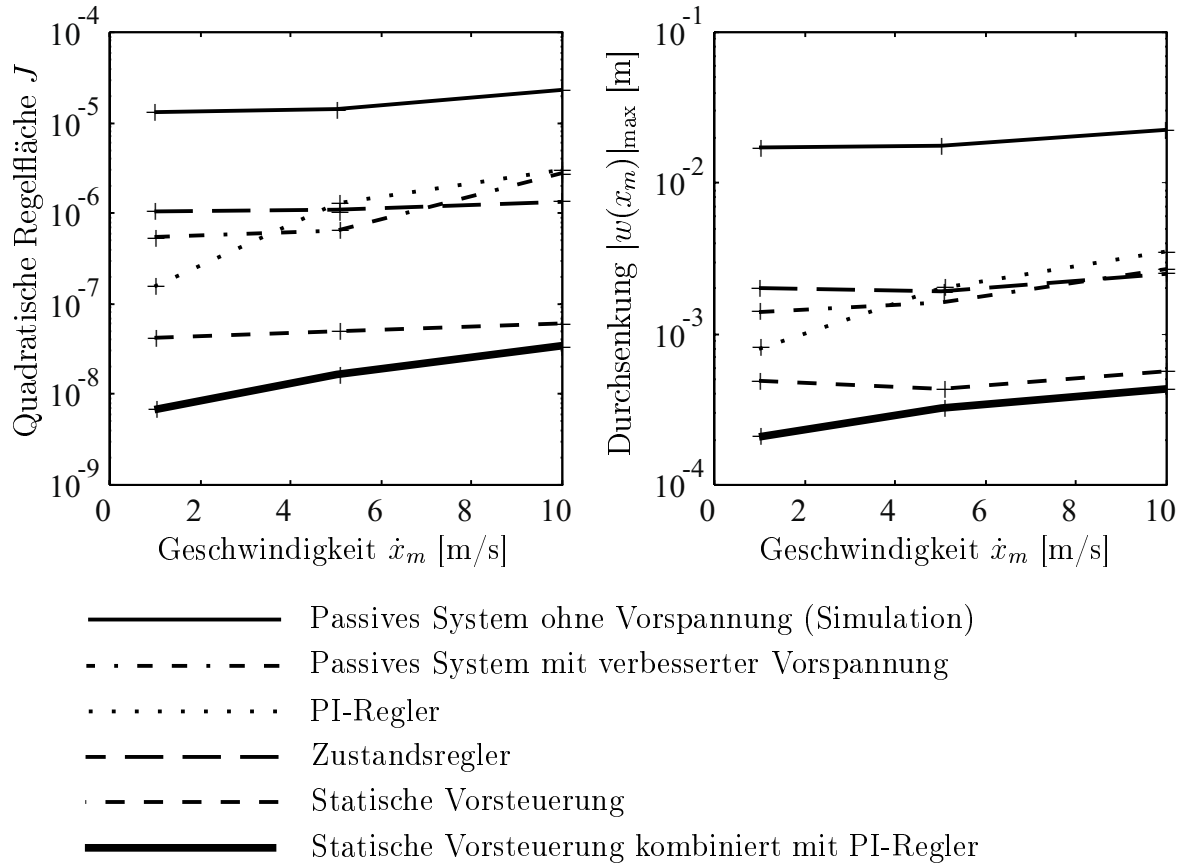


Bild 4.1: Gemessene Regel- und Steuerergebnisse von Frischgesell [19] für die konstanten Massengeschwindigkeiten $v_m = \dot{x}_m = 1; 5; 10$ m/s (+).

Durchsenkung an der Massenposition zurück. Die maximalen Durchsenkungen liegen so im Bereich von $|w(x_m)|_{\max} = 0.3 \dots 0.5$ mm.

Der von Frischgesell eingeführte Zustandsregler mit LUENBERGER-Beobachter liefert bei Messungen keine zufriedenstellenden Ergebnisse. In der Simulation wird die maximale Durchsenkung an der Massenposition lediglich auf ca. 1.1 mm gesenkt, welches einer Reduzierung gegenüber dem unregulierten System um 80% entspricht. Dieser Wert wird in [42] auch experimentell bestätigt. Es zeigt sich, dass die Genauigkeit des verwendeten LUENBERGER-Beobachters nicht ausreicht, um die Systemzustände für eine Regelung zu rekonstruieren. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit das in Abschnitt 3.5 beschriebene KALMAN-Filter verwendet.

4.2 Adaptive Systeme

In diesem Abschnitt wird die Möglichkeit untersucht, mit einem sehr einfachen Modell und einem zusätzlichen adaptiven Algorithmus das Ziel einer minimalen Durchsenkung an der Massenposition zu erreichen. Ein adaptives System ist nach WELLER [52] ein System, bei dem das Systemverhalten bei einer Anfangsunbestimmtheit und/oder langsamer Zeitvarianz der

Umgebung schrittweise optimiert wird. Adaptive Systeme müssen sich auf diese Veränderung einstellen, wobei eine Anpassung zeitverzögert eintritt. Aus diesem Grund wird bei sich „schnell“ verändernden Systemen das Adaptionsziel nicht erreicht. Es ist daher zu klären, ab wann der elastische Fahrweg sich „schnell“ verändert. Im Folgenden wird sowohl eine adaptive Steuerung als auch eine Regelung mit adaptiver Führungsgröße untersucht. Weitere Arbeiten, in denen die Beschreibung und Auslegung adaptiver Systeme untersucht wird, sind z.B. [23], [33] und [49].

4.2.1 Adaptive Steuerung

Das Prinzip einer adaptiven Steuerung besteht darin, iterativ aus nacheinander durchgeführten Fahrzyklen eine Steuerfunktion zu generieren. Ein Fahrzyklus ist hier die einfache Überfahrt der Masse mit konstanter Geschwindigkeit. Zur Erzeugung der Steuerfunktion wird nach jedem Fahrzyklus eine Korrekturfunktion ermittelt, welche die bisherige Steuerfunktion verändert. Diese Korrekturfunktion wird mit einem sehr einfachen Systemmodell berechnet. Das Verfahren wird an dem in Bild 4.2 dargestellten Blockschaltbild erläutert. Das System wird durch eine Kraft in Balkenmitte als Stellgröße gesteuert. Die Eingangsgrößen für die adaptive Steuerung sind die Durchsenkungswerte unter der bewegten Masse. Der Regler gibt die Steuerkraft auf das System. Diese Steuerkraft ist bei der ersten Überfahrt für jede Position x_m Null: $F(x_m) = 0$. Während der Überfahrt wird die Durchsenkungskurve an der Massenposition gespeichert. Da das Ziel ist, diese Durchsenkungen zu minimieren, ist die Durchsenkungskurve $w(x_m)$ gleich der Fehlerkurve, die zu korrigieren ist. Aus der Durchsenkungskurve wird nach dem einfachen statischen Modell eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens mit einer Kraft in Balkenmitte die Stellkraft berechnet. Ein Beispiel für eine Position x_m ist in Bild 4.3 zu sehen. Die Durchsenkung $w(x_m)$ an der Position x_m wird durch die entgegengesetzte Durchsenkung infolge der Stellkraft $\Delta F(x_m)$ im statischen Fall kompensiert.

Die Fahrzeugmasse und die Gewichtskraft des Balkens werden dabei nicht berücksichtigt, um das Adaptionsverfahren flexibel für verschieden Fahrzeugmassen zu halten. Dadurch

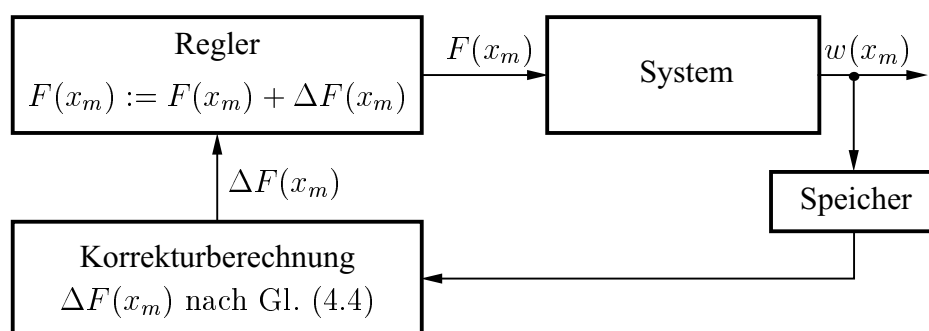


Bild 4.2: Blockschaltbild der adaptiven Steuerung.

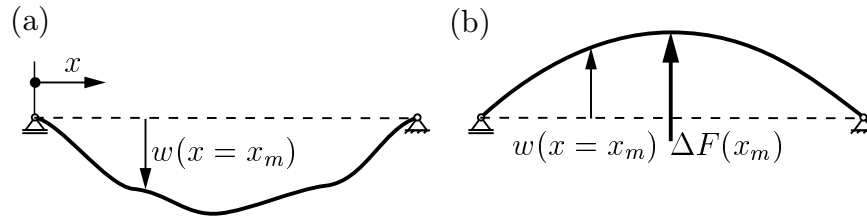


Bild 4.3: (a) Durchsenkung $w(x = x_m)$ an der Position x_m ; (b) entgegengesetzte Durchsenkung $w(x = x_m)$ durch die Stellkraft $\Delta F(x_m)$ in Balkenmitte.

wird zu Beginn des Verfahrens ein Fehler, der auf die Fahrzeugmasse zurückzuführen ist, in Kauf genommen. Die Berechnung für die Kompensation der statischen Durchsenkung an der Massenposition erfolgt durch die Korrekturkraft

$$\begin{aligned} \Delta F(x_m) &= \frac{16w(x_m)EI}{\ell^3 \left(\frac{x_m}{\ell} - \frac{4x_m^3}{3\ell^3} \right)}; & \frac{\ell}{50} \leq x_m \leq \frac{\ell}{2}, \\ \Delta F(x_m) &= \frac{16w(x_m)EI}{\ell^3 \left(\frac{\ell-x_m}{\ell} - \frac{4(\ell-x_m)^3}{3\ell^3} \right)}; & \frac{\ell}{2} \leq x_m \leq \ell \left(1 - \frac{1}{50} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

An den Randpositionen $x_m = 0$ und $x_m = \ell$ ist die Funktion $\Delta F(x_m)$ nicht definiert, in der Nähe dieser Positionen nimmt sie sehr große Werte an. Deshalb sind Randpositionen im Definitionsbereich von Gl. (4.4) ausgenommen. Die so berechnete Korrekturkraft wird geglättet und im Regler für den nächsten Fahrzyklus zu der Stellkraft des vorherigen Fahrzyklus addiert. Die Glättung ist notwendig, damit Störungen und Schwingungen insbesondere mit der ersten Eigenfrequenz nicht angeregt werden. Zum Glätten wird der berechnete Korrekturkraftverlauf $\Delta F(x_m)$ über dem Ort durch ein Polynom 4. Ordnung ersetzt, welches den Korrekturkraftverlauf annähert und an den Randpositionen $x_m = 0$ und $x_m = \ell$ den Wert Null hat.

4.2.2 Regelung mit adaptiver Führungsgröße

Da die adaptive Steuerung nicht auf dynamische Effekte während einer Überfahrt reagieren kann, ist sie für hohe Überfahrgeschwindigkeiten nicht geeignet. Deshalb wird ein Zustandsregler eingesetzt, um auf diese Effekte während einer Überfahrt reagieren zu können (siehe Bild 4.4). Die konstante Reglerückführmatrix \mathbf{K}_R lässt sich z.B. mit dem Verfahren der Polvorgabe ermitteln (vgl. [19], [20]). Die Polvorgabe wird dazu auf das zeitinvariante Systemmodell für den Balken mit dem Unterzug ohne die bewegte Masse aus Abschnitt 3.1 angewendet. Kräfte durch das Eigengewicht des Balkens und die Gewichtskraft der bewegten Last sind dabei nicht modelliert und wirken als Störungen. Durch eine Stellkraft in Balkenmitte ist der zweite Mode nicht beeinflussbar, weil sich hier ein Schwingungsknoten befindet. Daher werden nur der erste und dritte Mode zurückgeführt. Die günstigsten Pole

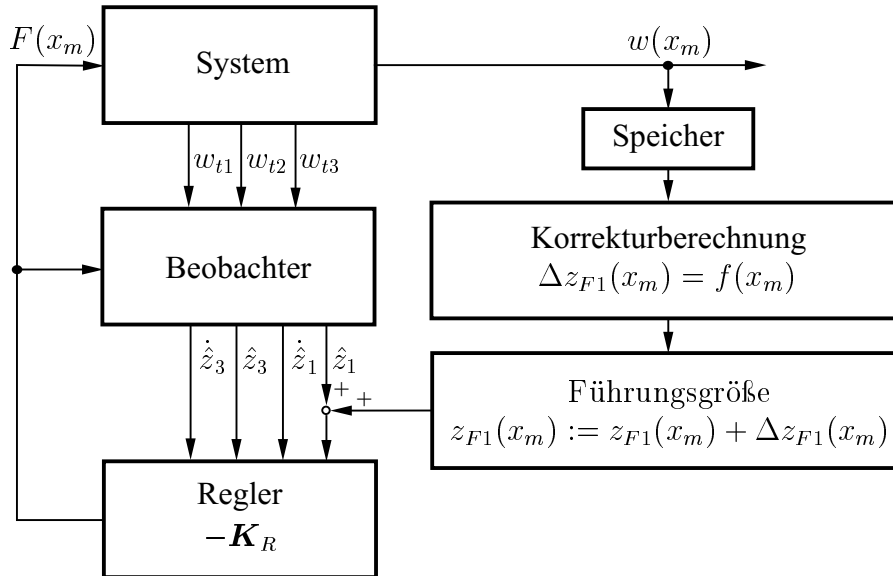


Bild 4.4: Blockdiagramm der Regelung mit adaptiver Führungsgröße.

werden sowohl durch Simulation als auch experimentell ermittelt. Dabei sollen die Pole möglichst weit links in der negativen s-Halbebene liegen, um eine große Reglerverstärkung und dadurch schnelles Einschwingen zu erhalten. Des Weiteren muss bei der Polwahl die Stabilität des Gesamtsystems gewährleistet sein. Die ermittelten Pole sind für den ersten Mode $-75 \pm 36i \text{ s}^{-1}$ und für den dritten Mode $-50 \pm 282i \text{ s}^{-1}$. Da die Zustände des Systems an der Versuchsanlage nicht direkt gemessen werden können, sind die geschätzten Zustandsgrößen $\hat{z}_1, \dot{\hat{z}}_1, \hat{z}_3, \dot{\hat{z}}_3$ mit dem in Abschnitt 3.5 beschriebenen KALMAN-Filter zu ermitteln.

Ähnlich wie bei der adaptiven Steuerung wird nach jedem Fahrzyklus die Durchsenkungskurve gespeichert und eine Führungsgrößenkorrektur $\Delta z_{F1}(x_m)$ ermittelt. Die Führungsgröße $z_{F1}(x_m)$ setzt sich dabei aus der Führungsgröße der vorhergehenden Überfahrt und dem Korrekturterm zusammen. Die Summe wird dann zur modalen Verschiebung des ersten Modes addiert, welche den größten Anteil der Balkenbewegung beschreibt. Die Führungsgröße $z_{F1}(x_m)$ bewirkt eine mit $-\mathbf{K}_R(1,1)$ verstärkte zusätzliche Kraft $\Delta F(x_m)$, welche wiederum die Durchsenkung $w(x_m)$ und damit auch $\hat{z}_1(x_m)$ verringert. Das schrittweise Aufsummieren der Führungsgrößenkorrekturen nach jeder Überfahrt i entspricht integrierendem Systemverhalten in einem kontinuierlichen System. Diese Art der adaptiven Führungsgröße kann als ein diskreter I-Regler mit der Schrittweite i angesehen werden.

Im nächsten Schritt werden zwei Korrekturfunktionen $f_i(x_m)$, $i = 1, 2$, bestimmt, welche die modale Verschiebung des ersten Modes verringern. Dazu werden im Folgenden zwei Ansätze betrachtet. Untersuchungen der Zustände und der Lastwegkurven ergeben, dass der Zeitverlauf der modalen Verschiebung des ersten Modes z_1 der Lastwegkurve $w(x_m)$ ähnelt. Bild 4.5 zeigt eine unregelte Überfahrt mit $v_m = 5 \text{ m/s}$. Über der normierten Position sind die modale Verschiebung $z_1(x_m)$, die Lastwegkurve $w(x_m)$ und eine Näherung für die

Lastwegkurve

$$w_{M1} = z_1(x_m) \cdot v_1(x_m) \quad (4.5)$$

aufgetragen, wobei $v_1(x_m)$ der Wert eines Splines ist, der durch die Stützstellen der Elemente des Eigenvektors \mathbf{v}_1 gelegt ist. Die Näherung stimmt dabei gut mit der Lastwegkurve überein, so dass die erste Korrekturfunktion als

$$f_1(x_m) = w(x_m) \cdot v_1^{-1}(x_m) \quad (4.6)$$

gewählt wird. Da $v_1^{-1}(x_m)$ an den Randpositionen $x_m = 0$ und $x_m = \ell$ nicht definiert ist und in der Nähe dieser Positionen große Werte annimmt, wird $v_1 = 0.1$ für $0 \leq x < 0.1\ell$ und $0.9\ell < x \leq \ell$ gesetzt, um den Maximalwert von $v_1^{-1}(x_m)$ zu begrenzen. Mit dieser Veränderung von v_1 konvergiert der Adaptionsvorgang.

Eine weitere, wesentlich gröbere Näherung, ist eine zweite Korrekturfunktion

$$f_2(x_m) = w(x_m), \quad (4.7)$$

bei welcher die Durchsenkungskurve gleich der Korrekturfunktion ist. Da

$$w(x_m) < w(x_m) \cdot v_1^{-1}(x_m) \quad (4.8)$$

gilt, wird mit $f_1(x_m)$ die Führungsgröße stärker verändert, was einer größeren Verstärkung des diskreten I-Reglers entspricht. Damit ist das Erreichen eines Minimums der Durchsenkungen mit weniger Iterationsschritten zu erwarten.

Zur Vermeidung hochfrequenter Störungen in der Führungsgröße wird diese durch einen Medianfilter geglättet. Das bedeutet, dass jeder Wert der Führungsgröße durch den Mittelwert von 20 gleichgewichteten benachbarten Werten ersetzt wird.

Die Korrekturfunktionen sind nicht so ausgelegt, dass die Durchsenkungen in einem Iterationsschritt vollständig kompensiert werden. Statt dessen werden durch die schrittweisen Korrekturen der Führungsgröße die Durchsenkungen sukzessive verringert.

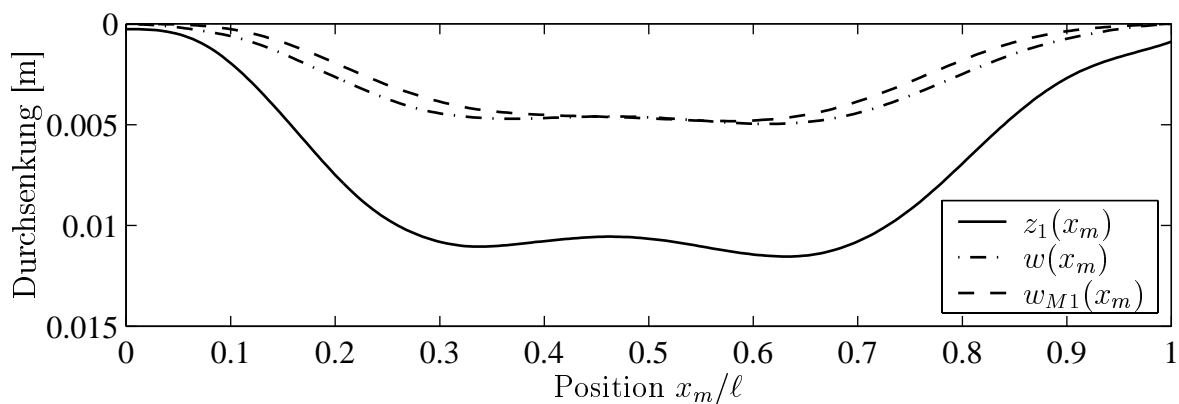


Bild 4.5: Vergleich zwischen modaler Verschiebung des ersten Modes $z_1(x_m)$, Lastwegkurve $w(x_m)$ und aus der modalen Verschiebung des ersten Modes rekonstruierter Lastwegkurve $w_{M1}(x_m) = z_1(x_m) \cdot v_1(x_m)$.

4.3 Optimale zeitdiskrete Reglerauslegung

Die bei FRISCHGESELL et al. [18], [19], [20] untersuchten Regelungen haben gemeinsam, dass die Gewichtskräfte vom Balken und der bewegten Masse nicht in der Reglerauslegung berücksichtigt werden und somit als Störungen auf das System wirken. Bei der optimalen Reglerauslegung durch Lösen der HAMILTON-Gleichung für zeitdiskrete Systeme ist die Berücksichtigung dieser Störungsgrößen möglich.

4.3.1 Berechnung des Rückführgesetzes aus der HAMILTON-Gleichung

Die Gewichtskräfte von Balken und Fahrzeug sind rein deterministisch und im Voraus bekannt. Um diese in den Reglerentwurf einzuschließen, wird die Zustandsgleichung in der Form Gl. (3.26),

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{s}_k, \quad (4.9)$$

der Reglerauslegung zugrunde gelegt. Das zu minimierende Gütefunktional ist das quadratische Gütekriterium in der Form

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k]. \quad (4.10)$$

Mit dem Term $\mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N$ wird der Endzustand, durch die Summe werden alle anderen vorherigen Zustände und der Stellenenergieverbrauch in dem Gütekriterium berücksichtigt. Die Wichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} müssen positiv semidefinit bzw. positiv definit² gewählt werden, damit die quadratischen Matrizenterme nicht negativ werden. Zur Minimierung des Gütekriteriums aus Gl. (4.10) ist eine Folge von Steuervektoren $[\hat{\mathbf{u}}_k]$ gesucht, welche die Folge der Zustände $[\hat{\mathbf{x}}_{k+1}]$ bewirkt und gleichzeitig die Systemdifferenzgleichung (4.9) als Nebenbedingung erfüllt. Das Variationsproblem der Minimierung des Gütefunktionals mit Nebenbedingungen wird mit der HAMILTON-Funktion und der Einführung von LAGRANGE-Multiplikatoren gelöst. Die Herleitung der HAMILTON-Funktion wird z.B. in LUDYK [27] beschrieben. Dazu wird zu Gl. (4.10) die Systemdifferenzgleichung in Nullform als

$$\lambda_{k+1}^T \underbrace{(\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{s}_k - \mathbf{x}_{k+1})}_{=0} = 0 \quad (4.11)$$

hinzugefügt und es ergibt sich das modifizierte Gütekriterium

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N \\ &+ \sum_{k=k_0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k) + \lambda_{k+1}^T (\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{s}_k - \mathbf{x}_{k+1}) \right], \quad (4.12) \end{aligned}$$

²Die Matrix \mathbf{R} muss positiv definit sein, da im anderen Fall Stellgrößen nicht im Gütekriterium berücksichtigt werden und damit unbeschränkt wären.

wobei für $k = 0$ die Abkürzung k_0 eingeführt wird. Mit der HAMILTON-Funktion

$$H(k) = H(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, k) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k) + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T (\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{s}_k) \quad (4.13)$$

wird Gl. (4.12), wenn der Anfangswert der HAMILTON-Funktion $H(k_0)$ gesondert betrachtet wird, zu

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N - \boldsymbol{\lambda}_N^T \mathbf{x}_N + H(\mathbf{x}_{k_0}, \mathbf{u}_{k_0}, \boldsymbol{\lambda}_{k_0+1}, k_0) \\ &+ \sum_{k=k_0+1}^{N-1} [H(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, k) - \boldsymbol{\lambda}_k^T \mathbf{x}_k^T]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Durch bilden des totalen Differenzials von Gl. (4.14)

$$\begin{aligned} d\bar{J} &= \left(\frac{\partial \frac{1}{2} \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N}{\partial \mathbf{x}_N} - \boldsymbol{\lambda}_N \right)^T d\mathbf{x}_N + \left(\frac{\partial H(k_0)}{\partial \mathbf{x}_{k_0}} \right)^T d\mathbf{x}_{k_0} + \left(\frac{\partial H(k_0)}{\partial \mathbf{u}_{k_0}} \right)^T d\mathbf{u}_{k_0} \\ &+ \sum_{k=k_0+1}^{N-1} \left[\left(\frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{x}_k} - \boldsymbol{\lambda}_k \right)^T d\mathbf{x}_k + \left(\frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}_k} \right)^T d\mathbf{u}_k \right] \\ &+ \sum_{k=k_0+1}^{N-1} \left(\frac{\partial H(k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}} - \mathbf{x}_{k+1} \right)^T d\boldsymbol{\lambda}_{k+1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

ergeben sich drei notwendige Bedingungen dafür, dass \bar{J} minimal wird:

$$\frac{\partial H(k)}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{k+1}} = \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{s}_k, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{x}_k} = \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial H(k)}{\partial \mathbf{u}_k} = \mathbf{0} = \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}. \quad (4.18)$$

Aus den unbekannten Randbedingungen, dem Endzustand \mathbf{x}_N und dem als unbekannt angenommenen Anfangszustand \mathbf{x}_{k_0} folgen aus Gl. (4.15) zwei weitere Forderungen für ein Minimum:

$$\mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N = \boldsymbol{\lambda}_N, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial H(k_0)}{\partial \mathbf{x}_{k_0}} = \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

Gl. (4.19) berücksichtigt, dass der Endzustand des Systems, d.h. die Verformung des Balkens in dem Moment, in dem die Masse den Balken verlässt, nicht bekannt ist. Ohne Vorgabe einer Anfangsbedingung ergibt sich ein Rückführgesetz der Form

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{r}_k, \quad (4.21)$$

welches im Folgenden hergeleitet wird.

Durch Eliminieren von \mathbf{u}_k in Gl. (4.16) mit Hilfe von Gl. (4.18) ergeben sich zwei Matrixdifferenzgleichungen in \mathbf{x} und $\boldsymbol{\lambda}$. Diese lauten in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k^{-1} & \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \\ \mathbf{Q}_k \mathbf{A}_k^{-1} & \mathbf{Q}_k \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T + \mathbf{A}_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{s}_k \\ -\mathbf{Q}_k \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{s}_k \end{bmatrix}.$$

Abgekürzt schreibt sich die Matrixgleichung als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k & \mathbf{N}_k \\ \mathbf{O}_k & \mathbf{P}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_k \\ \boldsymbol{\zeta}_k \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Wird aus dem Gleichungssystem (4.22) $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ bestimmt, sowie die Endbedingung (4.19) in dem Bildungsgesetz berücksichtigt, ergibt sich bei dem ersten rückwärtsgerichteten Zeitschritt für den Zeitpunkt $N - 1$, wenn bei $k = N$ begonnen wird

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{N-1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{N-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{N-1} & \mathbf{N}_{N-1} \\ \mathbf{O}_{N-1} & \mathbf{P}_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{N-1} \\ \boldsymbol{\zeta}_{N-1} \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{N-1} & \hat{\mathbf{N}}_{N-1} \\ \hat{\mathbf{O}}_{N-1} & \hat{\mathbf{P}}_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{N-1} \\ \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{N-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Für einen weiteren rückwärtsgerichteten Zeitschritt $k = N - 1$ zu dem Zeitpunkt $N - 2$ gilt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{N-2} \\ \boldsymbol{\lambda}_{N-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{N-2} \hat{\mathbf{L}}_{N-1} + \mathbf{N}_{N-2} \hat{\mathbf{O}}_{N-1} & \mathbf{L}_{N-2} \hat{\mathbf{N}}_{N-1} + \mathbf{N}_{N-2} \hat{\mathbf{P}}_{N-1} \\ \mathbf{O}_{N-1} \hat{\mathbf{L}}_{N-1} + \mathbf{P}_{N-2} \hat{\mathbf{O}}_{N-1} & \mathbf{O}_{N-2} \hat{\mathbf{N}}_{N-1} + \mathbf{P}_{N-2} \hat{\mathbf{P}}_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_N \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{N-2} + \mathbf{N}_{N-2} \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{N-1} + \mathbf{L}_{N-2} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{N-1} \\ \boldsymbol{\zeta}_{N-2} + \mathbf{P}_{N-2} \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{N-1} + \mathbf{O}_{N-2} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{N-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$:= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{N-2} & \hat{\mathbf{N}}_{N-2} \\ \hat{\mathbf{O}}_{N-2} & \hat{\mathbf{P}}_{N-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{N-2} \\ \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{N-2} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Das allgemeine rekursive Bildungsgesetz für den Zeitschritt k vom Endzeitpunkt N aus ist demnach

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_k & \hat{\mathbf{N}}_k \\ \hat{\mathbf{O}}_k & \hat{\mathbf{P}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N \\ \boldsymbol{\lambda}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k \\ \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

wobei die rekursiven Matrizen durch $(\hat{\cdot})$ gekennzeichnet werden. Durch einen Koeffizientenvergleich der Gln. (4.24) und (4.25) ergeben sich die rekursiven Bildungsgesetze für einen rückwärtsgerichteten Zeitschritt

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}_{k-1} &= \mathbf{L}_{k-1} \hat{\mathbf{L}}_k + \mathbf{N}_{k-1} \hat{\mathbf{O}}_k, \\ \hat{\mathbf{N}}_{k-1} &= \mathbf{N}_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_k + \mathbf{L}_{k-1} \hat{\mathbf{N}}_k, \\ \hat{\mathbf{O}}_{k-1} &= \mathbf{O}_{k-1} \hat{\mathbf{L}}_k + \mathbf{P}_{k-1} \hat{\mathbf{O}}_k, \\ \hat{\mathbf{P}}_{k-1} &= \mathbf{P}_{k-1} \hat{\mathbf{P}}_k + \mathbf{O}_{k-1} \hat{\mathbf{N}}_k, \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k-1} &= \mathbf{L}_{k-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k + \mathbf{N}_{k-1} \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k + \boldsymbol{\xi}_{k-1}, \\ \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{k-1} &= \mathbf{O}_{k-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k + \mathbf{P}_{k-1} \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k + \boldsymbol{\zeta}_{k-1}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aus diesen Bildungsgesetzen und der Eliminierung des Endwertes \mathbf{x}_N in Gl. (4.26) folgt unter Berücksichtigung der Endbedingung Gl. (4.19)

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \left[\hat{\mathbf{O}}_k + \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{Q}_N \right] \left[\hat{\mathbf{L}}_k + \hat{\mathbf{N}}_k \mathbf{Q}_N \right]^{-1} \mathbf{x}_k - \left[\hat{\mathbf{O}}_k + \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{Q}_N \right] \left[\hat{\mathbf{L}}_k + \hat{\mathbf{N}}_k \mathbf{Q}_N \right]^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k + \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k. \quad (4.28)$$

Nach der Umstellung von Gl. (4.18) nach \mathbf{u}_k ,

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \quad (4.29)$$

wird ein Zusammenhang der Form $\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \mathbf{g}^*(\mathbf{x}_k)$ benötigt, um das Regelgesetz der Form $\mathbf{u}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ zu erhalten. Hierzu wird 4.17 verwendet, so dass sich abschließend

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= -\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{A}_k^T)^{-1} \left[\left[\hat{\mathbf{O}}_k + \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{Q}_N \right] \left[\hat{\mathbf{L}}_k + \hat{\mathbf{N}}_k \mathbf{Q}_N \right]^{-1} - \mathbf{Q}_k \right] \mathbf{x}_k \\ &\quad - \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{A}_k^T)^{-1} \left[- \left[\hat{\mathbf{O}}_k + \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{Q}_N \right] \left[\hat{\mathbf{L}}_k + \hat{\mathbf{N}}_k \mathbf{Q}_N \right]^{-1} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k + \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \right] \\ &:= -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{r}_k \end{aligned} \quad (4.30)$$

ergibt.

Das Rückführgesetz setzt sich aus einem Steuerterm $-\mathbf{r}_k$ und einem Regelterm $-\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k$, der die Zustände zurückführt, zusammen. Der Steuerterm entsteht durch die Berücksichtigung der Gewichtskraft \mathbf{s}_k von Balken und Fahrzeug in der Systemgleichung, die in $\hat{\boldsymbol{\xi}}_k$ und $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k$ enthalten ist.

Die Besonderheit dieses Regelgesetzes ist, dass nicht nur der gegenwärtige, sondern alle zu erwartenden zukünftigen Systemzustände in die Berechnung der gegenwärtigen Stellgrößen eingehen. Auch im Fall eines zeitinvarianten Systems würde sich dabei ein zeitvariantes Regelgesetz ergeben. Die Lösung wird, entsprechend dem Optimalitätsprinzip von BELLMAN, wie bei der dynamischen Programmierung zeitlich rückwärtsschreitend bestimmt.

Bei der numerischen Berechnung des Rückführgesetzes zeigen sich Schwierigkeiten bezüglich der numerischen Stabilität. Die Matrix $\left[\hat{\mathbf{L}}_k + \hat{\mathbf{N}}_k \mathbf{Q}_N \right]$ in Gl. (4.30) lässt sich zwar invertieren, jedoch ist sie schlecht konditioniert, so dass die bei der Invertierung auftretenden Rechenfehler das Berechnungsverfahren divergieren lassen. Durch die Näherung, welche im folgenden Abschnitt beschrieben ist, kann dennoch das Regelgesetz berechnet werden.

4.3.2 Numerische Näherung

Die Rückführmatrix \mathbf{K}_k , mit der die Zustände \mathbf{x}_k zurückgeführt werden, ist unabhängig von dem Störterm \mathbf{s}_k . Die Berechnung eines optimalen Rückführgesetzes für das zeitdiskrete System des Fahrwegs mit bewegter Masse ohne die Gewichtskräfte in dem Störterm \mathbf{s}_k ,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k, \quad (4.31)$$

kann numerisch stabil mit einem Verfahren nach KALMAN durchgeführt werden. Die Herleitung der Rückführmatrix \mathbf{K}_k mit diesem Verfahren ist im Anhang A.1 dargestellt. Nach Gl. (4.30) gilt

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{A}_k^T)^{-1} \left[\left[\hat{\mathbf{O}}_k + \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{Q}_N \right] \left[\hat{\mathbf{L}}_k + \hat{\mathbf{N}}_k \mathbf{Q}_N \right]^{-1} - \mathbf{Q}_k \right]. \quad (4.32)$$

Damit kann das Regelgesetz (Gl. (4.30)) zu

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k + \underbrace{\left[\mathbf{K}_k + \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{A}_k^T)^{-1} \mathbf{Q}_k \right] \hat{\boldsymbol{\xi}}_k}_{\mathbf{T}_1} - \underbrace{\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{A}_k^T)^{-1} \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k}_{\mathbf{T}_2} \quad (4.33)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\mathbf{r}_k}$

umgeformt werden. Für den Steueranteil $\mathbf{r}_k = \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2$ divergiert das rekursive Berechnungsverfahren weiterhin, da die Elemente der Matrizen \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 sehr groß ($> 10^{40}$) werden. Deren Differenz ist jedoch nur von der Größenordnung 10^2 . Durch die endliche Stellenanzahl bei der numerischen Berechnung mit dem Programm Matlab, das mit 16 Dezimalstellen arbeitet, lassen sich Differenzen der Werte für die Elemente der Matrizen \mathbf{T}_1 und $\mathbf{T}_2 > 10^{13}$ nicht mehr ausreichend genau berechnen.

Untersuchungen der Matrizen \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 zeigen, dass die Störungen $\hat{\boldsymbol{\xi}}_k$ und $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k$, welche vom aktuellen Berechnungszeitpunkt aus weit in der Zukunft liegen, für die großen Werte von \mathbf{T}_1 und \mathbf{T}_2 verantwortlich sind. Der Einfluss dieser weit in der Zukunft liegenden Störungen ist aber für das aktuelle Systemverhalten nur von untergeordneter Bedeutung. Um den Einfluss der zukünftigen Störungen zu begrenzen, lassen sich die rekursiven Bildungsgesetze zur Bestimmung der Störanteile $\hat{\boldsymbol{\xi}}_k$ und $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k$ durch Summen ersetzen, welche die zukünftigen Störanteile enthalten:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_k = \sum_{j=k}^N \mathbf{Y}_j^k \boldsymbol{\xi}_j, \quad (4.34)$$

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k = \sum_{j=k}^N \mathbf{X}_j^k \boldsymbol{\xi}_j. \quad (4.35)$$

Werden die Summen dann nicht von j bis zum Endzeitschritt N sondern nur für eine bestimmte Anzahl Zeitschritte gebildet, so werden die zukünftigen Störanteile für die Berechnung der aktuellen Störung zum Zeitschritt j nicht berücksichtigt. Die Bildungsgesetze für $\hat{\boldsymbol{\xi}}_k$ und $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k$, Gln. (4.27), lassen sich wie für $\hat{\boldsymbol{\xi}}_k$ beispielhaft gezeigt folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\xi}}_k &= \mathbf{L}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_{k+1} + \mathbf{N}_k \hat{\boldsymbol{\zeta}}_{k+1} + \boldsymbol{\xi}_k \\ &= \mathbf{L}_k \sum_{j=k+1}^N [\mathbf{Y}_j^{k+1} \boldsymbol{\xi}_j] + \mathbf{N}_k \sum_{j=k+1}^N [\mathbf{X}_j^{k+1} \boldsymbol{\xi}_j] + \boldsymbol{\xi}_k \\ &= \sum_{j=k+1}^N [\mathbf{L}_k \mathbf{Y}_j^{k+1} + \mathbf{N}_k \mathbf{X}_j^{k+1}] \boldsymbol{\xi}_j + \boldsymbol{\xi}_k \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$:= \sum_{j=k}^N \mathbf{Y}_j^k \boldsymbol{\xi}_j.$$

Die rekursiven Bildungsgesetze für die Summenmatrizen \mathbf{Y}_j^{k-1} und \mathbf{X}_j^{k-1} können durch einen Koeffizientenvergleich der letzten beiden Zeilen von Gl. (4.36) ermittelt werden. Es ergibt sich

$$\mathbf{Y}_j^{k-1} = \begin{cases} \mathbf{E} & \text{für } j = k - 1 \\ \mathbf{L}_k \mathbf{Y}_j^k + \mathbf{N}_k \mathbf{X}_j^k & \text{für } j = k \dots N \end{cases} \quad (4.37)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} . Unter Ausnutzung der Beziehung $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k = \mathbf{Q}_k \hat{\boldsymbol{\xi}}_k$ wird das Bildungsgesetz für \mathbf{X}_j^{k-1} zu

$$\mathbf{X}_j^{k-1} = \begin{cases} \mathbf{Q}_{k-1} & \text{für } j = k - 1 \\ \mathbf{O}_k \mathbf{Y}_j^k + \mathbf{P}_k \mathbf{X}_j^k & \text{für } j = k \dots N \end{cases}. \quad (4.38)$$

Diese Gln. (4.37) und (4.38) können in Gl. (4.33) eingesetzt werden, so dass sich

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k - \sum_{j=k}^{N^*} \left[\mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{B}_k^T (\mathbf{A}_k^T)^{-1} [\mathbf{X}_j^k - \mathbf{Q}_k \mathbf{Y}_j^k] - \mathbf{K}_k \right] \boldsymbol{\xi}_k \quad (4.39)$$

ergibt. Die Einflüsse der weit in der Zukunft liegenden Störungen lässt sich unterdrücken, indem für die Summe ein Abbruchkriterium definiert wird:

$$N^* = \min(N, k + n_{Gr}). \quad (4.40)$$

Das bedeutet, dass Störungen, die weiter als eine Grenzzahl n_{Gr} Zeitschritte in der Zukunft liegen nicht in der Berechnung berücksichtigt werden. Folgen weniger als n_{Gr} Zeitschritte auf den Zeitschritt der Berechnung, werden alle zukünftigen Zeitschritte bis zum Endzeitschritt N berücksichtigt.

Für die Wahl der Grenzzahl von Zeitschritten werden zwei Anforderungen berücksichtigt. Zum einen wird n_{Gr} hinreichend klein gewählt, damit keine numerischen Probleme bei der Berechnung des Steueranteils \mathbf{r}_k auftreten. Zum anderen wird n_{Gr} so groß gewählt, dass die Abweichungen durch die Näherung zu der optimalen Lösung möglichst klein sind. Die numerische Instabilität tritt für unterschiedliche Systeme sowie unterschiedliche Gewichtungen der Abweichungen der Masse und des Fahrwegs von der Solltrajektorie nach einer unterschiedlichen Grenzzahl von Zeitschritten auf. Bei einer stärkeren Gewichtung der Abweichung von der Solltrajektorie bei sonst gleichen Systemparametern muss die Grenzzahl beispielsweise kleiner gewählt werden, um eine numerische Instabilität zu vermeiden. Als Beispiel ist für eine Überfahrt mit konstanter Geschwindigkeit $v_m = 5 \text{ m/s}$ bei dem Unterstützungsmechanismus mit einer Stellkraft in Balkenmitte der Einfluss von n_{Gr} in Bild 4.6 dargestellt. Die Gewichtungsmatrizen für den Stellenergieverbrauch sind dabei

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 10^{-12} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

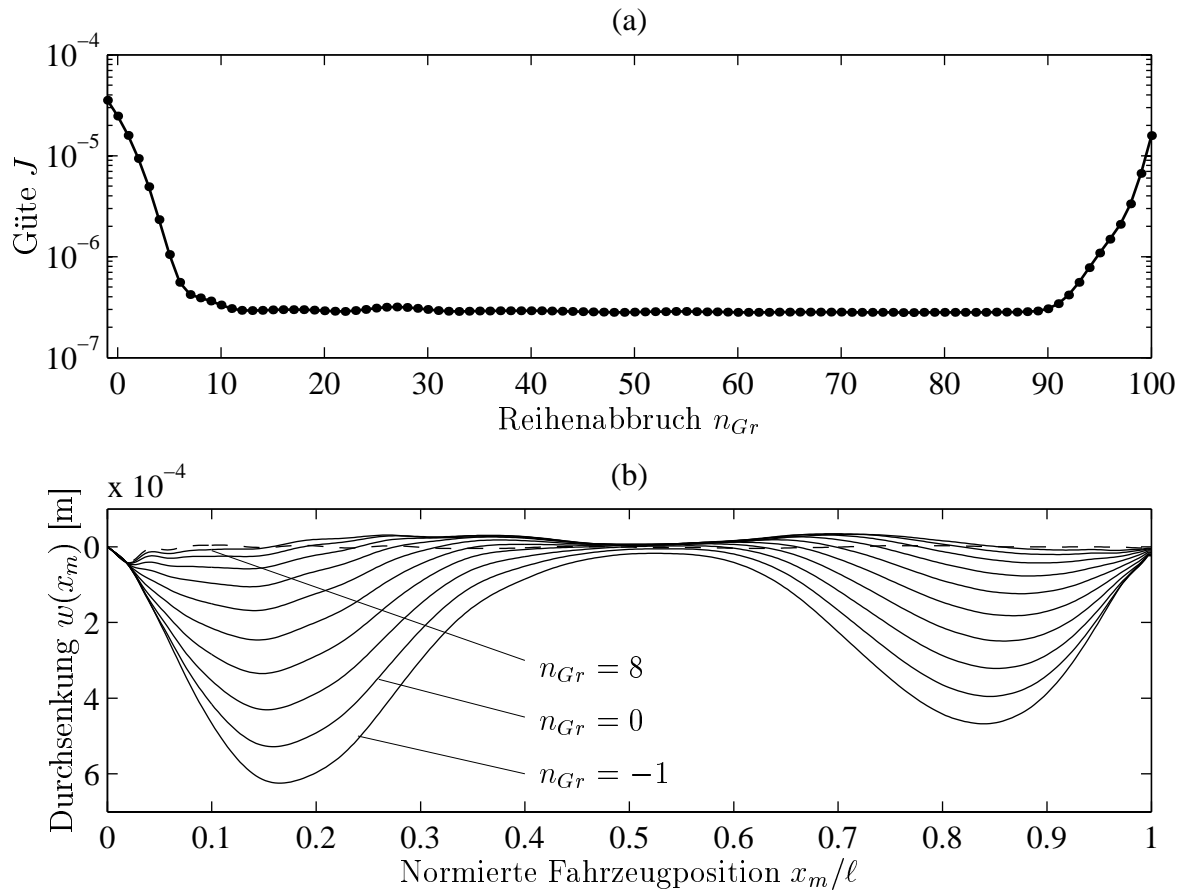


Bild 4.6: Untersuchung des Einflusses von n_{Gr} : (a) Gütekriterium nach Gl. (4.10) über dem Reihenabbruchwert n_{Gr} und (b) Durchsenkung an der Massenposition $w(x_m)$ für $n_{Gr} = [-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ mit kleiner werdender Durchsenkung und für $n_{Gr} = 50$ (gestrichelt).

Die Gewichtsmatrizen \mathbf{Q}_k werden wie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben, so bestimmt, dass die Durchsenkung an der Massenposition minimiert wird. Bild 4.6(a) zeigt über der Grenzzahl von Zeitschritten den Wert J für das Gütekriterium nach Gl. (4.10). Für $n_{Gr} = -1$ wird die Summe in Gl. (4.39) nicht berechnet, so dass nur das im Anhang A.1 berechnete Rückföhrgesetz angewendet wird. Mit wachsender Grenzzahl nimmt der Gütewert J zunächst ab und ist für Werte von $10 < n_{Gr} < 90$ näherungsweise konstant. Für Werte von $n_{Gr} > 90$ steigt der Wert der Güte J wieder an, da die beschriebenen numerischen Probleme auftauchen. Für die Berechnung des optimalen Steueranteils in den Untersuchungen dieser Arbeit wird $n_{Gr} = 50$ gewählt. Damit wird einerseits sichergestellt, dass die Lösung nahe am Optimum ist, andererseits werden die numerischen Probleme bei allen in dieser Arbeit berechneten Reglern vermieden.

In Bild 4.6(b) werden für ausgewählte Werte von n_{Gr} die Durchsenkungen an der Massenposition dargestellt. Steigt die Grenzzahl n_{Gr} , nimmt $w(x_m)$ ab und konvergiert gegen einen Grenzwert. Dieser ist für $n_{Gr} = 50$ gestrichelt dargestellt.

4.3.3 Wahl der Gewichtungsmatrizen für unterschiedliche Regelungsziele

Entsprechend der Wahl der Gewichtungsmatrizen \mathbf{R}_k und \mathbf{Q}_k können verschiedene Regelungsziele verfolgt werden. Für Handhabungsautomaten und Roboter ist beispielsweise eine präzise Führung der bewegten Teile nötig. Damit stellt sich die Forderung nach einer möglichst geringen Abweichung von der Solltrajektorie. Bei dem elastischen Fahrweg mit der bewegten Masse bedeutet dies, dass bei einer Überfahrt die vertikale Abweichung der Massenposition von der Horizontalen minimiert werden soll. Für andere Strukturen wie z.B. Brücken lassen sich durch einen aktiven Stelleingriff die Belastung der Struktur verringern, indem die Schwingungsamplituden reduziert werden.

Das Ziel einer Minimierung der Abweichung der vertikalen Lastposition $w(x_m)$ von der Horizontalen kann durch die Wahl der Wichtungsmatrix \mathbf{Q}_k für die modalen Verschiebungen und modalen Geschwindigkeiten des Systems erreicht werden. Dazu wird die Matrix \mathbf{Q}_k zu

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}_k \quad \text{aus} \quad w(x_m)|_k = \mathbf{c}_k^T \mathbf{x}_k \quad (4.42)$$

bestimmt. Damit ergibt die quadratische Form

$$\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^T \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^T \mathbf{x}_k = (\mathbf{c}_k^T \mathbf{x}_k)^T \mathbf{c}_k^T \mathbf{x}_k = w(x_m)|_k^2 \quad (4.43)$$

das Quadrat der Durchsenkung an der Massenposition.

Zur Minimierung der Schwingungsamplituden einer Struktur sind bei einem modalen Modell die Amplituden der einzelnen Moden zu minimieren. Dazu muss die Wichtungsmatrix \mathbf{Q}_k als Diagonalmatrix gewählt werden.

Es lassen sich auch Kombinationen aus verschiedenen Kriterien überlagern. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in Abschnitt 5.2.2 dargestellt.

Die Gewichtungsmatrix \mathbf{R}_k für den Energieverbrauch der Stellgrößen ist eine quadratische Matrix mit einer Dimension³, welcher der Anzahl der Stellgrößen entspricht.

Da die Stellgrößen nicht gekoppelt sind, werden nur die Diagonalelemente der Gewichtungsmatrix für den Energieverbrauch besetzt. Große Diagonalelemente der Matrix \mathbf{R}_k bewirken, dass der Regler den Energieverbrauch dieser Stellgrößen stärker gewichtet und damit größere Regelabweichungen zulässt. Kleine Diagonalelemente in \mathbf{R}_k bewirken dagegen, dass bei der Berechnung des Reglers der Verbrauch weniger „bestraft“ wird und die Regelabweichungen gewichtet mit \mathbf{Q}_k kleiner werden. Zu beachten ist also das Verhältnis der Matrizen \mathbf{Q}_k zu \mathbf{R}_k und die Verhältnisse der Matrizenelemente untereinander, um das gewünschte Regelungsziel zu erreichen.

³Bei einer Stellgröße hätte \mathbf{R}_k die Dimension eins und wäre damit ein Skalar. Aus programmiertechnischen Gründen muss die Gewichtungsmatrix \mathbf{R}_k aber mindestens die Dimension zwei haben. Um eine einzelne Stellgröße zu realisieren (Modell F) wird ein System mit zwei Stellgrößen modelliert, wobei die nicht betrachtete Stellgröße so gewichtet wird, dass ihr Anteil an der Stellenergie gegen Null geht, z.B. durch Wahl großer Werte für $\mathbf{R}_k(2, 2)$ gegenüber $\mathbf{R}_k(1, 1)$.

4.3.4 Deutung von Regel- und Steuerterm

Bei dem Entwurf des optimalen Regelgesetzes mittels der HAMILTON-Funktion werden die Gewichtskraft des Balkens und die Gewichtskraft der bewegten Masse als Systemeigenschaften berücksichtigt. Das damit berechnete Rückführgesetz setzt sich aus einem Steueranteil $-\mathbf{r}_k$ und einem Regelanteil $-\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k$ zusammen. Bild 4.7 zeigt die einzelnen Anteile von Steuerterm $-\mathbf{r}_k$ und Regelterm $-\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k$ sowie den sich daraus ergebenden Gesamtkraftverlauf und die Durchsenkung an der Massenposition für drei verschiedene Gewichtsmatrizen

$$\mathbf{R}_{k_1} = \begin{bmatrix} 10^{-12} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{k_2} = \begin{bmatrix} 10^{-11} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{k_3} = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

für den Energieverbrauch der Konfiguration mit einer Stellkraft in Balkenmitte. Der Steueranteil bewirkt eine positive und der Regelanteil eine zumeist negative Stellkraft. Der sich durch Überlagerung ergebende Gesamtkraftverlauf ist vom Gütekriterium näherungsweise unabhängig. Nur beim Auffahren der Masse auf den Balken bzw. beim Verlassen reagieren die Regler mit geringer Verbrauchsgewichtung mit größeren Kraftschwankungen.

Das entgegengesetzte Wirken von Steuer- und Regelanteil lässt sich damit erklären, dass eine größere Steifigkeit des Systems durch eine größere Reglerverstärkung möglich wird. Setzt sich die Regelabweichung w aus einem erwarteten x_e und einem kleinen nicht vorhersagbarem Anteil Δx nach

$$w = x_e - \Delta x \quad (4.45)$$

zusammen, so können die bekannten Gewichtskräfte von Fahrweg und bewegter Masse in x_e berücksichtigt werden. Das Rückführgesetz des Regelanteils wird zu

$$u_R = K_R w \quad (4.46)$$

berechnet und das Rückführgesetz des Steueranteils zu

$$u_S = -K_S x_e. \quad (4.47)$$

Für das gesamte Rückführgesetz ergibt sich damit

$$\begin{aligned} u &= u_R + u_S \\ &= (K_R - K_S)x_e + K_R \Delta x. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die erwartete Regelabweichung x_e wird mit der gegeneinander gerichteten Summe der Verstärkungen $(K_R - K_S)$ zurückgeführt, wohingegen der kleine nicht vorhersagbare Anteil Δx mit der größeren Verstärkung K_R zurückgeführt wird. Die größere Verstärkung bedeutet in diesem System eine größere Steifigkeit.

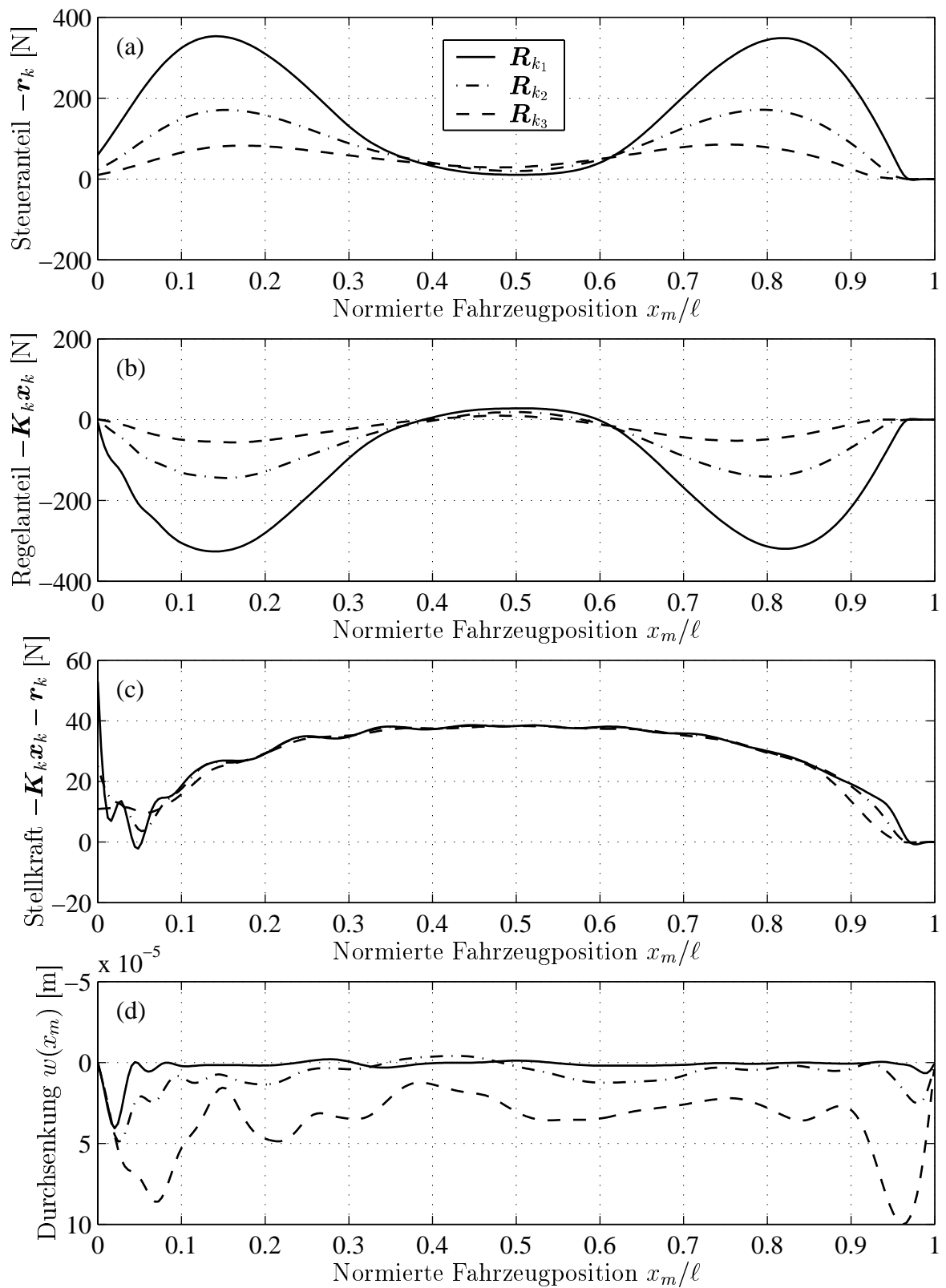


Bild 4.7: (a) Steueranteil $-\mathbf{r}_k$, (b) Regelanteil $-\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k$, (c) Stellkraft $-\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{r}_k$, (d) Durchsenkung $w(x_m)$ für die Verbrauchsmatrizen \mathbf{R}_{k_i} (siehe Gln. 4.44); Legende gilt für Diagramme (a)-(d) bei einer Geschwindigkeit von $v_m = 5$ m/s.

4.4 Stabilität

Die optimale Regelung mit dem Rückführgesetz aus der HAMILTON-Funktion ist aufgrund der optimalen Berechnung stabil. In einem Regelkreis, bei dem die Zustandsgrößen mit dem in Abschnitt 3.5 beschriebene KALMAN-Filter geschätzt werden, kann dennoch ein instabiles Verhalten auftreten. Eine Ursache hierfür ist der Tiefpassdifferenzierer zur Ermittlung der vertikalen Fahrweggeschwindigkeiten an den Tauchspulpositionen.

Der Nachweis der Stabilität für zeitdiskrete zeitvariante Systeme wäre sehr aufwendig, weswegen auf BAUER et al. [3] und THIEMANN et al. [48] verwiesen wird, die Verfahren für diesen Nachweis entwickelt haben. Dort wird auch auf einen vereinfachten Nachweis hingewiesen, der eine „langsame“ Veränderung der Parameter voraussetzt. Bei diesem Nachweis der „eingefrorenen Pole“ wird das System als zeitinvariant für jeden Zeitschritt angenommen und die Pole des geschlossenen Regelkreises werden berechnet. Für eine beschleunigte Bewegung mit $n = 6$ Start-Stopp-Vorgängen in $T_\ell = 1$ s ist ein Ausschnitt des Einheitskreises mit der einen Hälfte der konjugiert komplexen Pole in Bild 4.8 dargestellt. Sowohl für die exakte Reglerauslegung als auch für die Näherungsregelung (vgl. hierzu Abschnitt 5.2.3) mit einem Regler, der für eine konstante Geschwindigkeit von $v_m = 2.5$ m/s ausgelegt ist, liegen alle Pole innerhalb des Einheitskreises. Damit ist das System asymptotisch stabil.

Bei Experimenten an der Versuchsanlage mit Beobachter und Regelung liegt die Stabilitätsgrenze niedriger als in der Simulation. Das bedeutet, dass der Energieverbrauch nicht so stark gewichtet werden kann wie in der Simulation. Die Ursachen liegen in Ungenauigkeiten bei der Modellierung des Gesamtsystems. Es werden beispielsweise keine Zeitverzögerungen in den gemessenen Größen sowie den Stellgrößen durch die Aktoren berücksichtigt, durch welche das geregelte System jedoch schneller instabil wird.

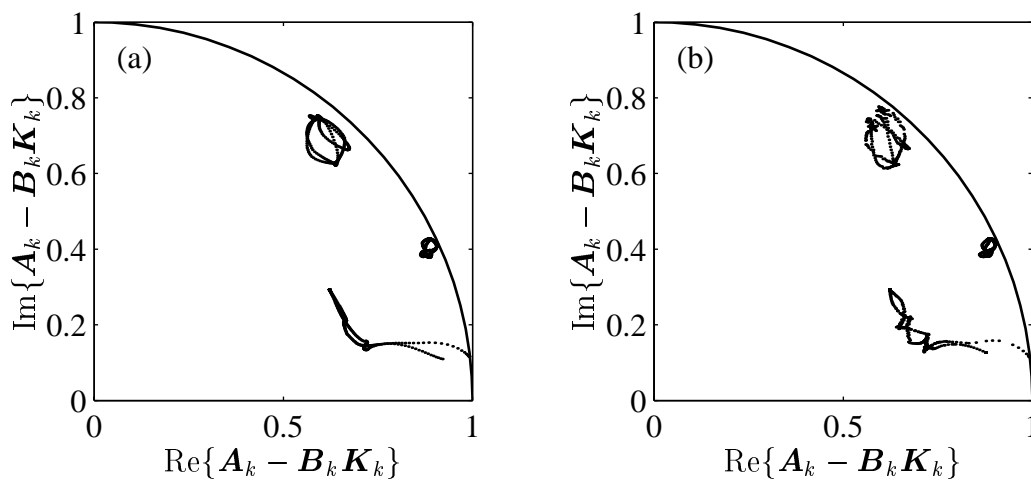


Bild 4.8: Ausschnitt des Einheitskreises (1. Quadrant) mit den Polen des geschlossenen Regelkreises bei Regelung mit der Gewichtungsmatrix \mathbf{R}_{k_2} bei $n = 6$ Start-Stopp-Vorgängen in $T_\ell = 1$ s für (a) exakte und (b) genäherte Regelung.

5 Ergebnisse

Im Folgenden werden die im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen gewonnenen Ergebnisse dargestellt und bewertet. Die Ergebnisse sind zum einen durch Simulationen mit MATLAB/SIMULINK gewonnene numerische, zum anderen an der Versuchsanlage gewonnene experimentelle Daten. Die in diesem Kapitel beschriebenen Untersuchungen beziehen sich auf die Wirkungen der in Kapitel 4 vorgestellten Regelungen auf das System des elastischen Fahrwegs mit einer bewegten Masse.

5.1 Ergebnisse der adaptiven Systeme

5.1.1 Ergebnisse der adaptiven Steuerung

Die adaptive Steuerung nach Abschnitt 4.2.1 wird für das System mit Unterzug und einer Stellkraft in Balkenmitte untersucht. Die Anregung erfolgt durch eine Masse, die mit konstanter Geschwindigkeit den Balken überquert.

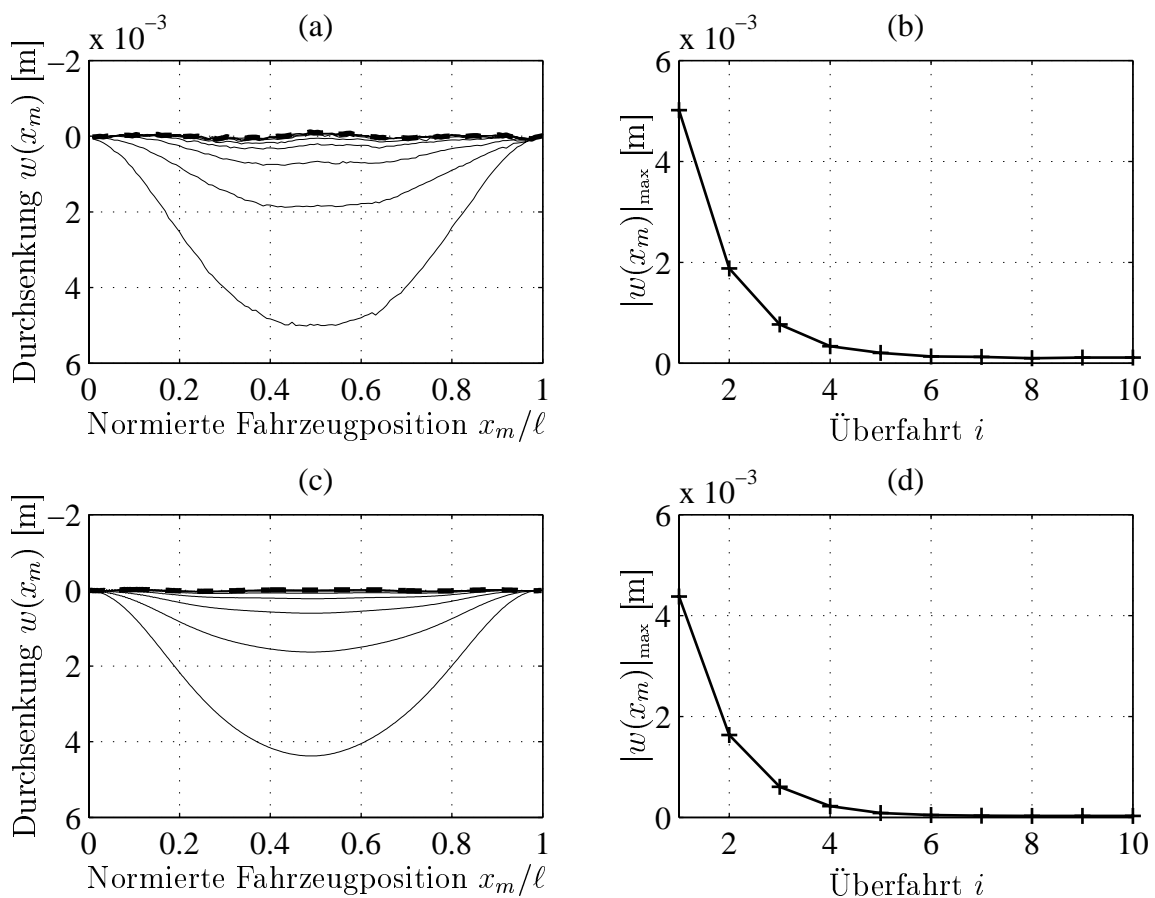


Bild 5.1: Messergebnisse (a), (b) und Simulationsergebnisse (c), (d) der adaptiven Steuerung für eine Massengeschwindigkeit $v_m = 0.1$ m/s und 10 Überfahrten. Die letzte Überfahrt in (a) und (c) ist gestrichelt dargestellt.

Die experimentell und durch Simulation ermittelten Daten für die Geschwindigkeit $v_m = 0.1$ m/s sind in Bild 5.1 und die Daten für die Geschwindigkeit $v_m = 5$ m/s sind in Bild 5.2 dargestellt. Die Simulationsergebnisse und experimentellen Ergebnisse stimmen sehr gut überein.

Bild 5.1 (a) und Bild 5.2 (a) geben die gemessenen Durchsenkungskurven an der Massenposition $w(x_m)$ für 10 Fahrzyklen wieder. Der letzte Fahrzyklus $i = 10$ ist dabei gestrichelt hervorgehoben.

Mit steigendem Fahrzyklus werden die Durchsenkungen kleiner und konvergieren gegen eine Durchsenkungskurve, die sich nur noch auf Grund von z.B. Messstörungen und geringfügig unterschiedlichen Anfangsbedingungen von der vorherigen unterscheidet.

In Bild 5.1 (b), (d) und Bild 5.2 (b), (d) ist über dem Fahrzyklus i die maximale Durchsenkung $|w(x_m)|_{\max}$ an der Position der bewegten Masse dargestellt. Für beide Geschwindigkeiten nimmt $|w(x_m)|_{\max}$ mit den ersten 4 Fahrzyklen stark ab, um dann gegen einen Grenzwert zu konvergieren. Bei $v_m = 5$ m/s ist dieser Grenzwert höher als bei $v_m = 0.1$ m/s. Diese

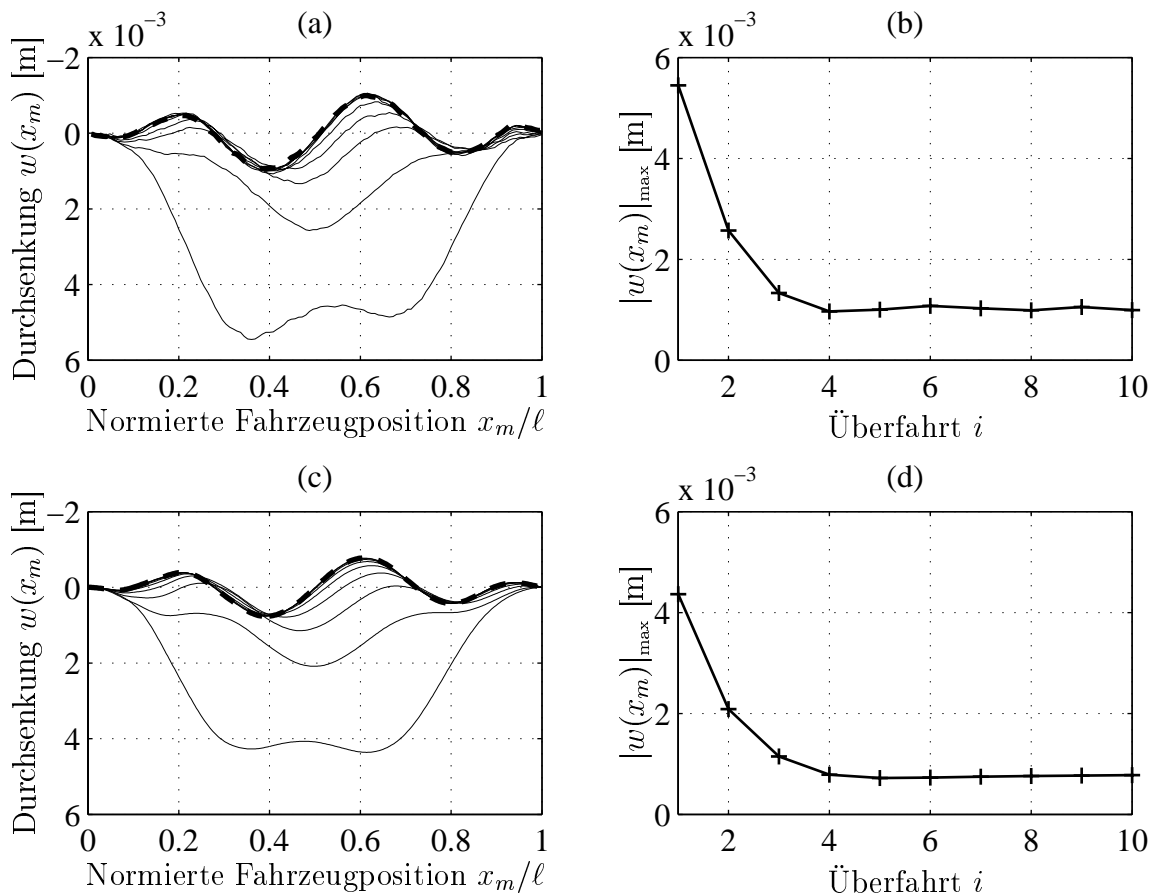


Bild 5.2: Messergebnisse (a), (b) und Simulationsergebnisse (c), (d) der adaptiven Steuerung für eine Massengeschwindigkeit $v_m = 5$ m/s und 10 Überfahrten. Die letzte Überfahrt in (a) und (c) ist gestrichelt dargestellt.

bleibende Abweichung ist zum einen auf die nicht berücksichtigte Systemdynamik zurückzuführen. Zum anderen bewirkt die Glättung des Kraftverlaufs, dass die Kraftkorrekturen ΔF für $i > 4$ bei $v_m = 5$ m/s verändert werden. Die Glättung ist aber notwendig, da das Verfahren ohne sie für $v_m = 5$ m/s nicht konvergiert. Für größere Geschwindigkeiten als $v_m = 5$ m/s konvergiert das Verfahren trotz Glättung nicht mehr sicher.

5.1.2 Ergebnisse der Regelung mit adaptiver Führungsgröße

Die Regelung mit adaptiver Führungsgröße nach Abschnitt 4.2.2 wird zum einen für die Korrekturfunktionen $f_1(x_m)$ und $f_2(x_m)$ auf das gleiche System wie im vorigen Abschnitt angewendet. Zum anderen wird auch beispielhaft der Anregungsfall einer beschleunigt bewegten Masse untersucht.

In Bild 5.3 sind die experimentell ermittelten Daten für die konstante Geschwindigkeit $v_m = 5$ m/s mit der Korrekturfunktion $f_1(x_m) = w(x_m) \cdot v_1^{-1}(x_m)$ dargestellt. Sie stimmen gut mit den Simulationsergebnissen überein. Bild 5.3 (a) und (c) geben die gemessenen

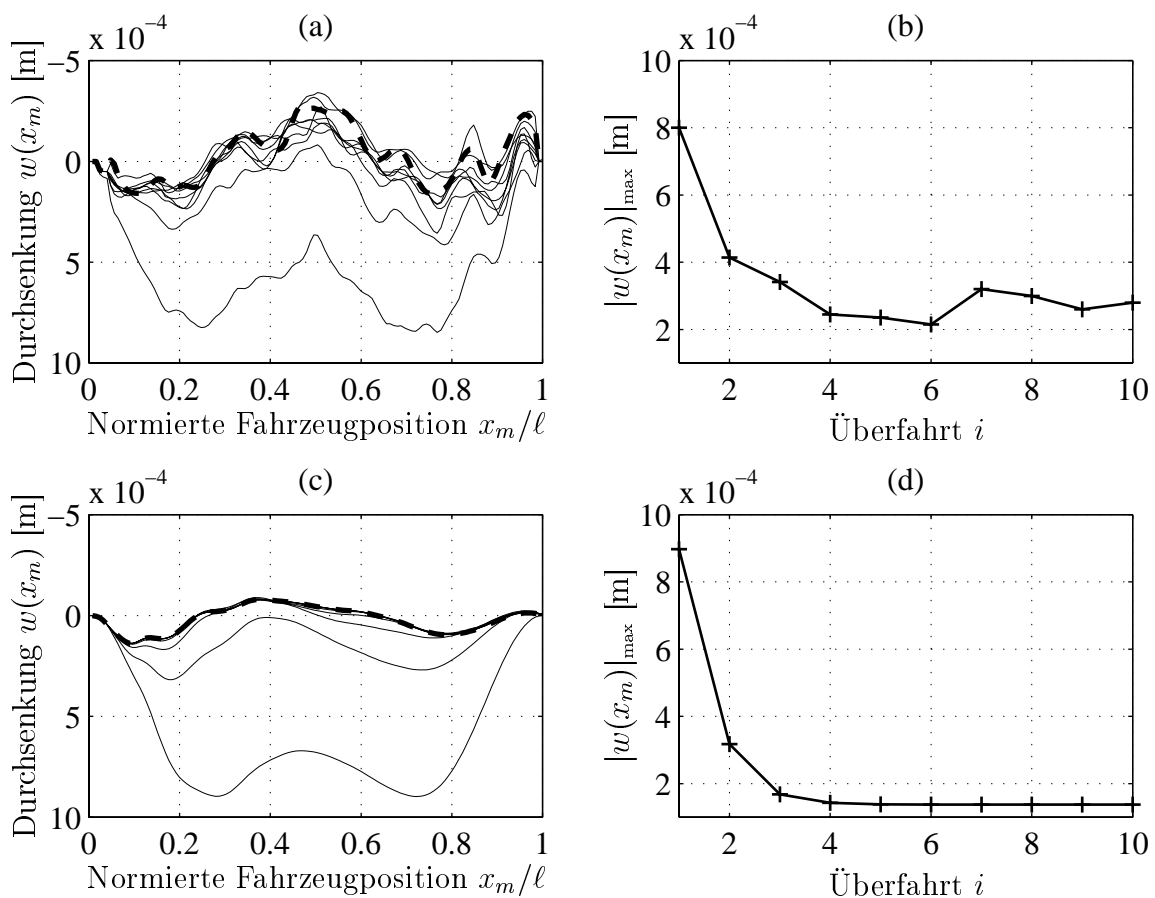


Bild 5.3: Messergebnisse (a), (b) und Simulationsergebnisse (c), (d) der Regelung mit adaptiver Führungsgröße mit Korrekturfunktion $f_1(x_m)$ für eine konstante Massengeschwindigkeit $v_m = 5$ m/s und 10 Überfahrten.

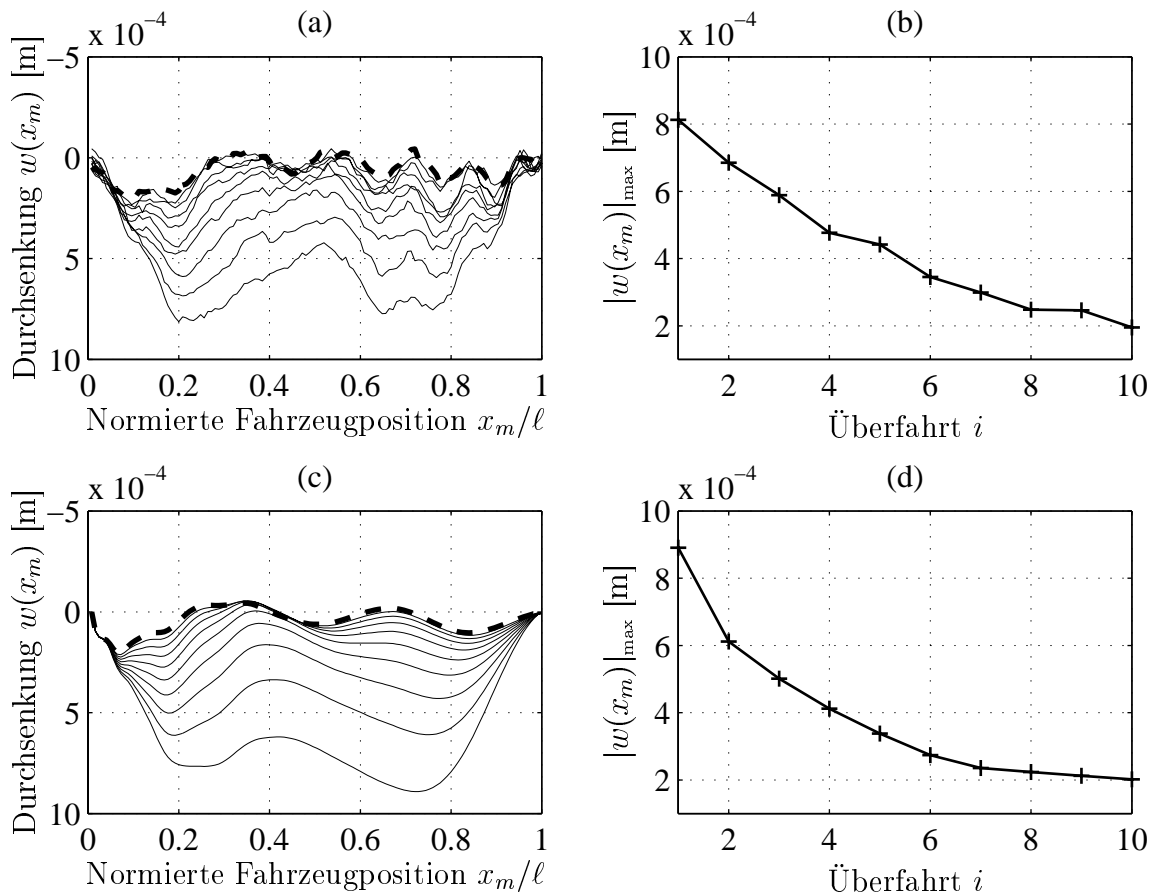


Bild 5.4: Messergebnisse (a), (b) und Simulationsergebnisse (c), (d) der Regelung mit adaptiver Führungsgröße mit Korrekturfunktion $f_2(x_m)$ für eine konstante Massengeschwindigkeit $v_m = 5$ m/s und 10 Überfahrten.

Durchsenkungskurven an der Massenposition für 10 Fahrzyklen wieder. Mit steigendem Fahrzyklus werden die Durchsenkungen kleiner und konvergieren wie bei der adaptiven Steuerung in Abschnitt 5.1.1 gegen die Durchsenkungskurve für $i = 10$.

In Bild 5.3 (b) und (d) ist über dem Fahrzyklus i die maximale Durchsenkung an der Position der bewegten Masse $|w(x_m)|_{\max}$ dargestellt. Für Experiment und Simulation nimmt $|w(x_m)|_{\max}$ stetig ab und konvergiert gegen einen Wert von $|w(x_m)|_{\max} \approx 0.2$ mm.

Bild 5.4 zeigt das gleiche System und Adaptionsverfahren für die gröbere Näherung $f_2(x_m) = w(x_m)$. Die unterschiedlichen Korrekturfunktionen bewirken jeweils eine Reduktion von $|w(x_m)|_{\max}$ auf ≈ 0.2 mm. Wie schon in Abschnitt 4.2.2 vermutet, konvergiert die Regelung mit der Korrekturfunktion $f_1(x_m)$ für die Führungsgröße schneller als die mit der Korrekturfunktion $f_2(x_m)$.

Das Verfahren der Regelung mit adaptiver Führungsgröße lässt sich auch auf beschleunigte Bewegungen der Masse auf dem elastischen Fahrweg anwenden. Dies wird anhand der Messergebnisse für eine Überfahrt mit $n = 6$ Start-Stopp-Vorgängen bei einer Überfahrzeit von $T_\ell = 1.1$ s in Bild 5.5 gezeigt. Der Betrag der maximalen Durchsenkung an der

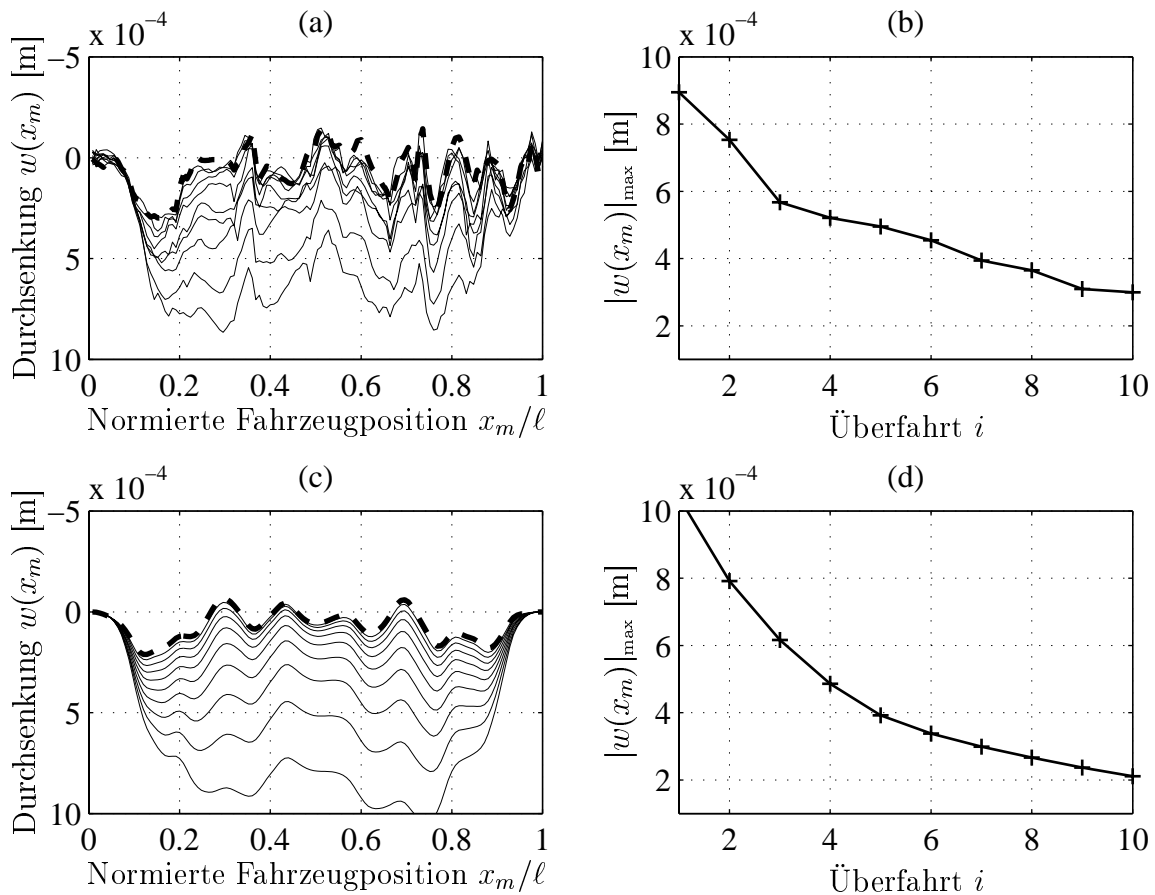


Bild 5.5: Mess- und Simulationsergebnisse der adaptiven Regelung mit der Korrekturfunktion $f_2(x_m)$ für eine mittlere Massengeschwindigkeit $\bar{v}_m \approx 2.5$ m/s bei sechs Start-Stopp-Vorgängen in $T_\ell = 1.1$ s und 10 Überfahrten.

Massenposition konvergiert mit der Korrekturfunktion $f_2(x_m)$ gegen $|w(x_m)|_{\max} \approx 0.3$ mm.

Bei sechs Start-Stopp-Vorgängen in einer Überfahrzeit von $T_\ell = 1.1$ s liegt die Anregungsfrequenz nahe an der ersten Eigenfrequenz des Systems von ca. 6 Hz. Dies ist ein ungünstiger Anregungsfall (vgl. Abschnitt 3.6.2). Der Regler führt zu insgesamt geringeren Durchsenkungen verglichen mit dem unregulierten System, bei denen die Resonanzen des unregulierten Systems nur noch in abgeschwächter Form auftreten. Die restlichen überlagerten Schwingungen hervorgerufen durch die Start-Stopp-Vorgänge haben eine Amplitude von lediglich 0.2 mm.

5.1.3 Vergleich der Ergebnisse der adaptiven Systeme

In Bild 5.6 ist ein Vergleich von adaptiver Steuerung und Regelung mit adaptiver Führungsgröße für die Überfahrt mit konstanter Massengeschwindigkeit dargestellt. In Bild 5.6 (a) ist die maximale Durchsenkung an der Massenposition für den Fahrzyklus $i = 10$ über der Massengeschwindigkeit v_m für die adaptive Steuerung aufgetragen. Bild 5.6 (b) zeigt die gleichen

Größen bei Regelung mit adaptiver Führungsgröße und der Korrekturfunktion $f_1(x_m)$ und Bild 5.6 (c) für die Korrekturfunktion $f_2(x_m)$.

Für die adaptive Steuerung und die Regelung mit adaptiver Führungsgröße wächst die maximale Durchsenkung an der Massenposition $|w(x_m)|_{\max}$ für steigende Geschwindigkeit v_m der Masse an. Bei der Steuerung ist die Zunahme der Durchsenkung an der Massenposition jedoch stärker als bei der Regelung. Für sehr kleine Geschwindigkeiten von $v_m = 0.1$ m/s bzw. $v_m = 1$ m/s sind die maximalen Durchsenkungen in der Messung im Bereich $|w(x_m)|_{\max} < \pm 0.12$ mm. Bei größeren Geschwindigkeiten nehmen die dynamischen Effekte zu, was zu größeren Durchsenkungen führt. Die Erklärung hierfür liegt in dem Modell der statischen Kompensation, das der adaptiven Steuerung zugrunde liegt und auf dynamische Effekte nicht reagieren kann. Eine weitere Folge ist, dass das Verfahren bei Geschwindigkeiten über $v_m = 5$ m/s nicht sicher konvergiert. Die Regelung mit adaptiver Führungsgröße dagegen basiert auf dem Systemmodell, welches in Abschnitt 3.1 beschrieben wurde. Hier werden dynamische Effekte des Systems ohne bewegte Masse durch die Regelung berücksichtigt. Dies erklärt die geringeren Durchsenkungen bei Geschwindigkeiten größer als $v_m = 2.5$ m/s.

Die maximalen Durchsenkungen an der Massenposition sind für Regelungen mit einer adaptiven Führungsgröße und der Korrekturfunktion $f_1(x_m)$ im Experiment größer als die der Regelung mit $f_2(x_m)$. Dabei konvergiert die Regelung mit $f_1(x_m)$ schneller, jedoch werden Störungen höher verstärkt. In der Simulation sind für Massengeschwindigkeiten $v_m < 5$ m/s die Durchsenkungen für $f_1(x_m)$ kleiner als bei $f_2(x_m)$, da in der Simulation keine Störungen berücksichtigt werden. Demnach ist es oft günstiger, die Adaption mit einer geringeren Verstärkung als durch $f_2(x_m)$ durchzuführen, um Störungen nicht zu verstärken. Das Konvergenzverhalten der Regelung mit adaptiver Führungsgröße hängt auch von der Art der

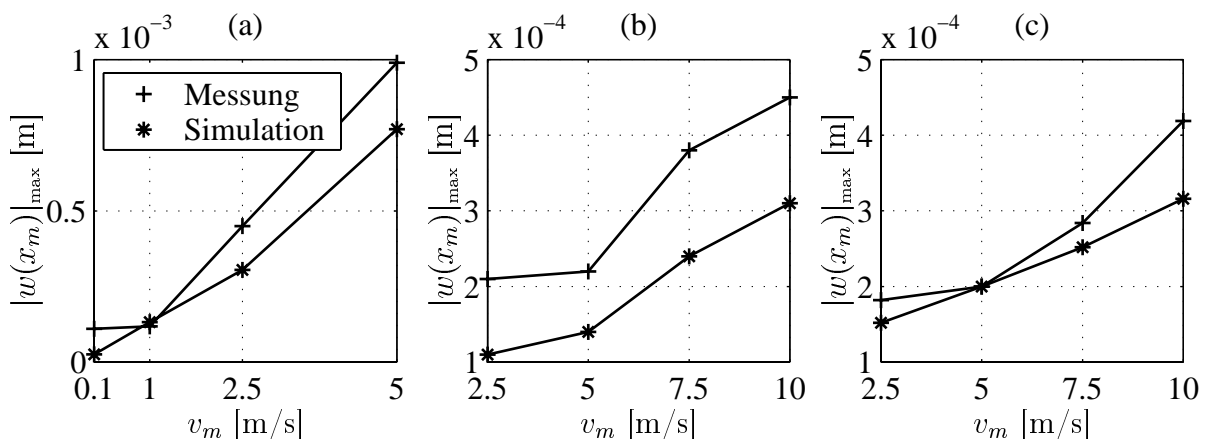


Bild 5.6: Maximale Durchsenkung unter der Last für verschiedene konstante Massengeschwindigkeiten nach $i = 10$ Fahrzyklen aus Experimenten und Simulationen: (a) adaptive Steuerung, (b) Regelung mit Korrekturfunktion $f_1(x_m)$, (c) Regelung mit Korrekturfunktion $f_2(x_m)$. Die Achsen der Diagramme (a) und (b), (c) sind unterschiedlich skaliert!

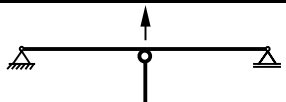
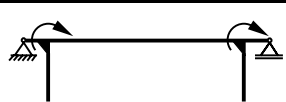
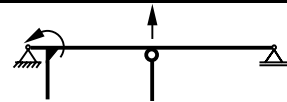
Glättung ab, wobei hierzu nur angemerkt werden kann, dass mit steigender Massengeschwindigkeit stärker geglättet werden muss.

5.2 Ergebnisse der optimalen zeitdiskreten Regelung

5.2.1 Verschiedene Stelleingriffe

In diesem Abschnitt wird untersucht, inwiefern verschiedene Stellmechanismen geeignet sind, das Regelungsziel einer minimalen Durchsenkung an der Massenposition bei konstanter Massengeschwindigkeit und einfacher Überfahrt zu erreichen. Für den Vergleich zwischen Simulation und Messung wird die Wichtungsmatrix \mathbf{R}_k für den Energieverbrauch so bestimmt, dass bei der Messung der Stabilitätsrand der Regelung erreicht wird. Die sich dabei ergebenden Wichtungsmatrizen für die beispielhaft im Experiment untersuchten Unterstützungsmechanismen Modell F, M—M und M—F sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Tabelle 5.1: Wichtungsmatrizen der Unterstützungsmechanismen für Messung und Simulation

Modell F	Modell M—M	Modell M—F
		
$\mathbf{R}_{k_4} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-11} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{R}_{k_5} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-9} & 0 \\ 0 & 5 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}$	$\mathbf{R}_{k_5} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-9} & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}$
Wichtungsmatrizen \mathbf{Q}_k siehe Abschnitt 4.3.3 Gl. (4.42).		

Die Ergebnisse der Überfahrten für die Geschwindigkeiten $v_m = 1$ m/s, $v_m = 2.5$ m/s, $v_m = 5$ m/s, $v_m = 7.5$ m/s und $v_m = 10$ m/s sind in Bild 5.7 für das Modell F, in Bild 5.8 für das Modell M—M und in Bild 5.9 für das Modell M—F dargestellt.

Die besten Ergebnisse bezüglich der Verringerung der Durchsenkung an der Massenposition ergeben sich mit dem Modell F. Der Energieverbrauch der Stellgrößen mit $\mathbf{R}_{k_4}(1, 1) = 5 \cdot 10^{-11}$ für die Stellkraft in Balkenmitte kann in diesem Modell gegenüber der Regelabweichung aus Stabilitätsgründen weniger bestraft werden als in den anderen Modellen. Die maximalen Abweichungen von der Sollkurve $w(x_m) = 0$ betragen in der Messung für alle untersuchten Geschwindigkeiten weniger als $2 \cdot 10^{-4}$ m. Für die Geschwindigkeiten $v_m = 2.5$ m/s und $v_m = 5$ m/s sogar weniger als $1 \cdot 10^{-4}$ m. Die Durchsenkungen an der Massenposition in der Simulation sind für alle Geschwindigkeiten geringer als die der Messungen. Es ergeben sich Abweichungen zwischen Messung und Simulation, die in der Größenordnung der maximalen Abweichungen von der Sollkurve liegen. Diese Abweichungen ergeben sich zum einen durch die Genauigkeit der verwendeten Messsysteme und zum anderen durch Modellfehler.

Die Modellfehler wirken sich sowohl bei der Berechnung der Reglermatrizen als auch im Beobachter aus.

Mit dem Modell M—M lassen sich die maximalen Durchsenkungen an der Massenposition in der Messung und der Simulation auf weniger als $6 \cdot 10^{-4}$ m für alle Geschwindigkeiten verringern. Für $v_m = 5$ m/s ergeben sich die besten Werte mit weniger als $4 \cdot 10^{-4}$ m. Diese Maximalwerte für die Durchsenkung an der Massenposition sind größer als die Maximalwerte der Durchsenkung an der Massenposition des Modells F. Eine Ursache für die Unterschiede der Modelle F und M—M liegt in der unterschiedlichen Gewichtung des Energieverbrauchs. Beim Modell M—M wird in der Messung der Stabilitätsrand schneller erreicht, so dass der Energieverbrauch der Stellgrößen gegenüber der Regelabweichung stärker bestraft werden muss als bei Modell F. Simulationen mit einer Wichtung des Stellenergieverbrauchs $\mathbf{R}_k(1,1) = \mathbf{R}_k(2,2) = 10^{-10}$ führen bei dem Modell M—M auf Abweichungen von der Sollkurve in der gleichen Größenordnung wie mit Modell F. Bei den Geschwindigkeiten $v_m = 7.5$ m/s und $v_m = 10$ m/s sind der gemessenen Lastwegkurve Schwingungen mit einer Frequenz von ca. 85 Hz überlagert, welche durch den Regler am Stabilitätsrand verursacht werden. Auch beim Modell M—M liegen die Abweichungen zwischen Messung und Simulation, welche durch Mess- und Modellfehler bedingt sind, bei weniger als $2 \cdot 10^{-4}$ m.

Durch Regelung mit dem Modell M—F werden die Durchsenkungen an der Massenposition in der Messung und der Simulation auf weniger als $6 \cdot 10^{-4}$ m für alle Geschwindigkeiten verringert. Die besten Ergebnisse erhält man auch bei diesem Modell für $v_m = 5$ m/s mit Durchsenkungen an der Massenposition von weniger als $4 \cdot 10^{-4}$ m. Dabei fällt auf, dass durch das Moment am linken Rand die Durchsenkungen in der ersten Balkenhälfte geringer sind als in der zweiten Balkenhälfte. Bei dem Modell M—F sind die Abweichungen der gemessenen und simulierten Durchsenkung an der Massenposition mit teilweise $3 \cdot 10^{-4}$ m größer als bei den anderen Modellen.

Das auch im Experiment untersuchte, hier aber nicht dargestellte Modell F—M (vgl. Tabelle 3.1) zeigt die gleichen Ergebnisse bezüglich der maximalen Durchsenkung an der Massenposition wie das Modell M—F. Wie bei dem Modell M—F sind die Abweichungen von der Lastwegkurve von der Sollkurve bei dem Modell F—M in der Balkenhälfte geringer, in der das Moment angreift, d.h. in diesem Fall der rechten Balkenhälfte.

Werden die Modelle F, M—M und M—F bei der Messung verglichen, so zeigt sich, dass die Stabilitätsgrenze bei den Modellen M—M und M—F gegenüber dem Modell F schon bei einer stärkeren Bestrafung des Energieverbrauchs erreicht wird. Einer der Unterschiede, die diesen Effekt verursachen könnten, ist, dass in den Modellen M—M und M—F Momente als Stellgröße verwendet werden. Der andere Unterschied ist, dass das Modell F im Gegensatz zu den übrigen Modellen nur eine Stellgröße im Gegensatz zu zwei Stellgrößen verwendet. Es handelt sich um einen Effekt, der nur bei Messungen an der Versuchsanlage auftritt, da bei einem Vergleich der Modelle in der Simulation ein solcher Effekt bezüglich der Stabilität nicht festzustellen ist.

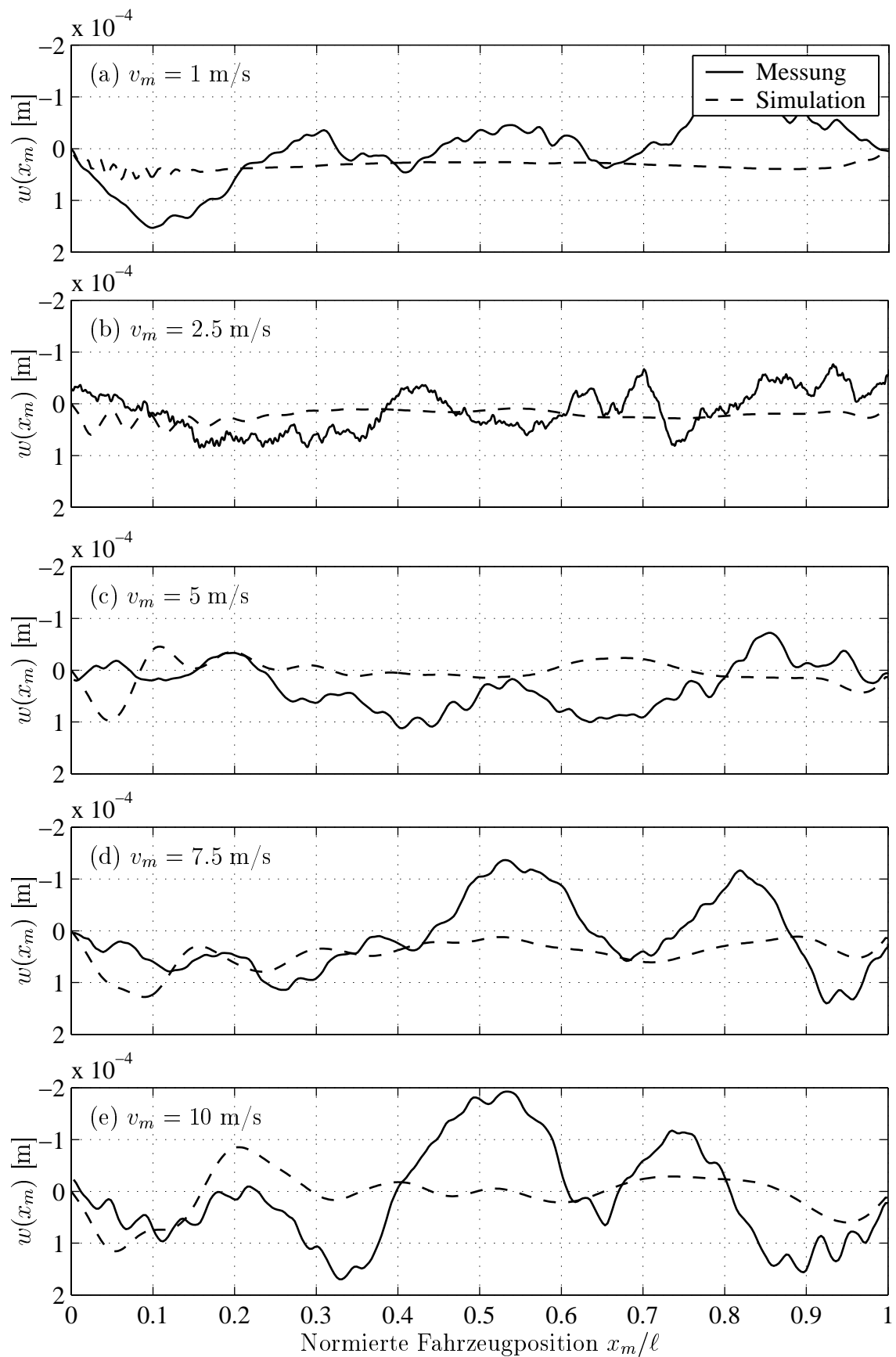


Bild 5.7: Gemessene Durchsenkung an der Massenposition über der normierten Fahrzeugposition mit dem Unterzug Modell F für die Wichtungsmatrix \mathbf{R}_{k_4} .

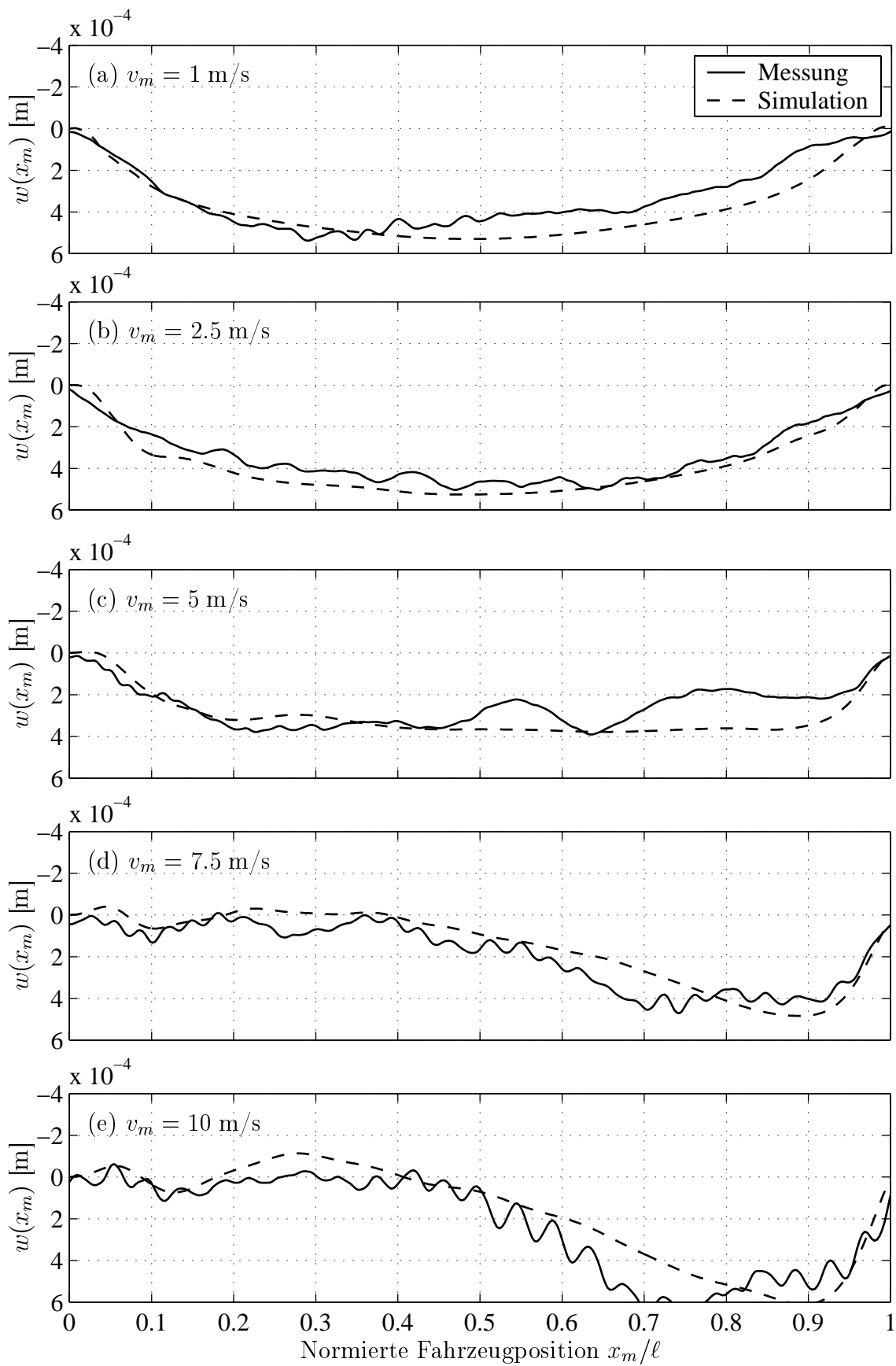


Bild 5.8: Gemessene Durchsenkung an der Massenposition über der normierten Fahrzeugposition mit dem Unterzug Modell M—M für die Wichtungsmatrix \mathbf{R}_{k_5} .

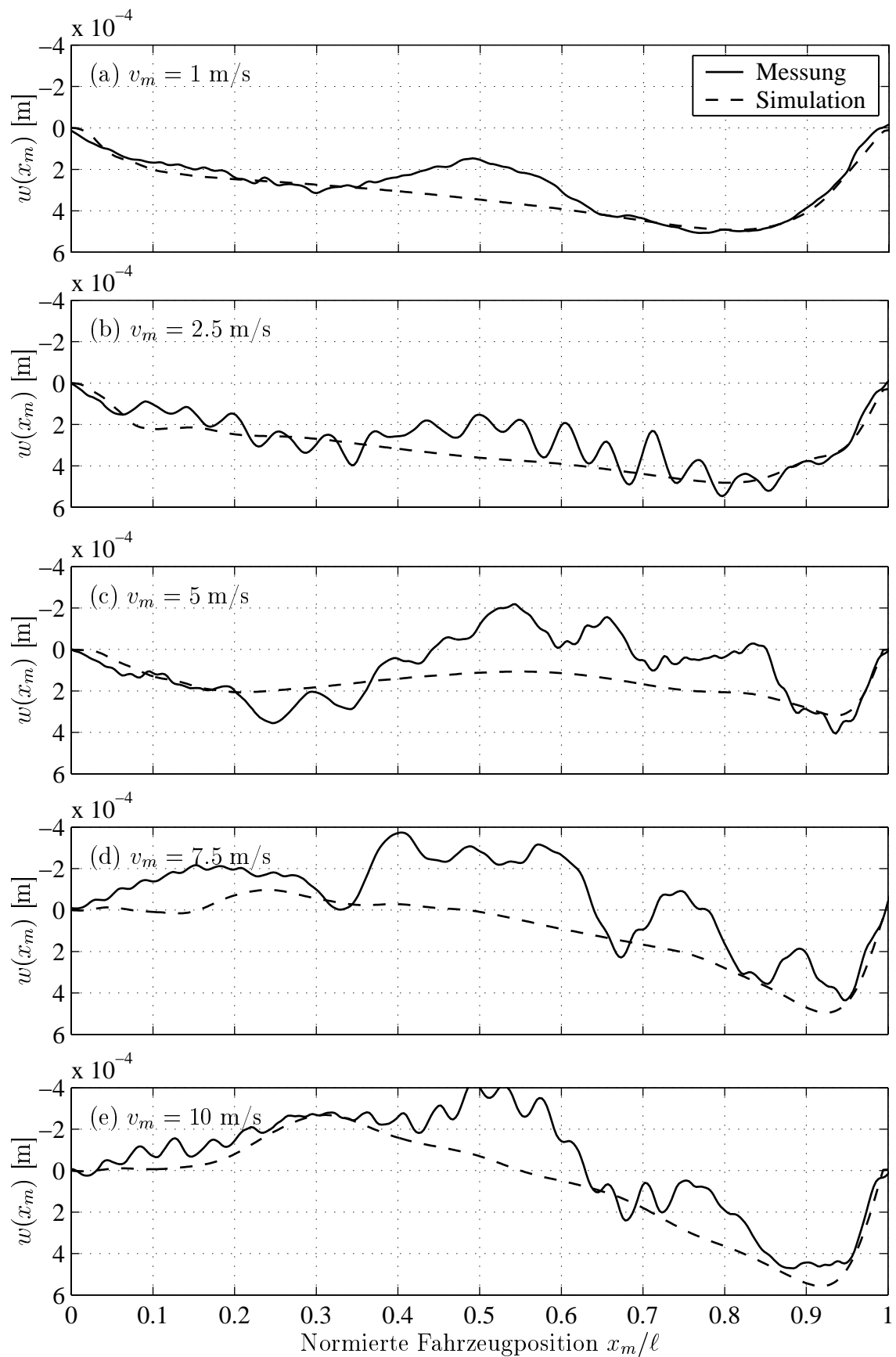


Bild 5.9: Gemessene Durchsenkung an der Massenposition über der normierten Fahrzeugposition mit dem Unterzug Modell M—F für die Wichtungsmatrix \mathbf{R}_{k_5} .

Es stellt sich allgemein die Frage, wie sich verschiedene Unterstützungsmechanismen miteinander sinnvoll vergleichen lassen. Zu diesem Zweck werden alle in dieser Arbeit verwendeten Unterstützungsmechanismen (siehe Abschnitt 2.1.2) in der Simulation untersucht. Um den Einfluss der Massen und Steifigkeiten der Unterstützungsmechanismen, die hauptsächlich von der jeweiligen Konstruktion abhängen, zu vermeiden, werden diese zu Null gesetzt. Es wirken somit je nach Modell Kräfte und/oder Momente auf den reinen elastischen Balken nach Gl. (3.9). Eine Vorspannung durch die Stellgrößen wird derart aufgebracht, dass der Fahrweg in Balkenmitte die Durchsenkung $w(x = \ell/2) = 0$ hat.

Damit die Modelle untereinander vergleichbar werden, wird die Stellenergie berechnet. Damit lassen sich auch Stellkräfte mit Stellmomenten vergleichen. Zum einen wird durch die Stellgrößen Energie in das System eingebracht, zum anderen wird dem System Energie, z.B. durch Abbremsvorgänge, entzogen. Für die nachfolgenden Untersuchungen wird nur die in das System eingebrachte Energie W^+ betrachtet. Diese berechnet sich für Kräfte $F(x)$ an der festen Position x am Balken zu

$$dW_F^+ = \begin{cases} F(x) dw(x) & \text{für } F(x) \cdot dw(x) \geq 0 \\ 0 & \text{für } F(x) \cdot dw(x) < 0 \end{cases}, \quad (5.1)$$

$$W_F^+ = \int_0^T dW_F^+ \quad (5.2)$$

und für Momente $M(x)$ an der festen Position x zu

$$dW_M^+ = \begin{cases} M(x) d\varphi(x) & \text{für } M(x) \cdot d\varphi(x) \geq 0 \\ 0 & \text{für } M(x) \cdot d\varphi(x) < 0 \end{cases}, \quad (5.3)$$

$$W_M^+ = \int_0^T dW_M^+, \quad (5.4)$$

wobei $\varphi(x)$ die Querschnittsverdrehung und $w(x)$ die vertikale Verschiebung des Balkens an der Angriffsstelle x des Momentes bzw. der Kraft beschreibt.

Werden die einzelnen Stellgrößen eines Modells untereinander gleich gewichtet und die Wichtung des Energieverbrauchs gegenüber der Regelabweichung variiert, so ergeben sich die in Tabelle 5.2 angegebenen Wichtungsmatrizen für den Energieverbrauch in Abhängigkeit von der Anzahl der Stellgrößen. Für das Modell F ist dabei zu beachten, dass es sich im vorliegenden Rechenprogramm um ein System mit zwei Stellgrößen handelt, jedoch die nicht betrachtete Stellgröße gegenüber der Kraft in Balkenmitte schwach gewichtet ist, und deren Einfluss somit vernachlässigt werden kann. Zum Vergleich der unterschiedlichen Modelle wird in Bild 5.10 (a) über der in das System eingebrachten Energie W^+ der maximale Betrag der Durchsenkung an der Massenposition $|w(x_m)|_{\max}$ doppelt logarithmisch und in Bild 5.10 (b) der maximale Betrag der Balkendurchsenkung $|w(x, t)|_{\max}$ für verschiedene Wichtungsmatrizen nach Tabelle 5.2 aufgetragen. Die konstante Überfahrungs geschwindigkeit für diese Untersuchung ist $v_m = 5 \text{ m/s}$.

Tabelle 5.2: Wichtungsmatrizen der Unterstützungsmechanismen für den Vergleich des Stellenergieverbrauchs

Eine Stellgröße	Zwei Stellgrößen	Drei Stellgrößen
Modell F	FM, F—F, M—M, M—F	Modell F—F—F
$\mathbf{R}_{k_{S1}} = \begin{bmatrix} 10^{-p} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{R}_{k_{S2}} = \begin{bmatrix} 10^{-p} & 0 \\ 0 & 10^{-p} \end{bmatrix}$	$\mathbf{R}_{k_{S3}} = \begin{bmatrix} 10^{-p} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-p} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-p} \end{bmatrix}$
$p \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$		
Wichtungsmatrizen \mathbf{Q}_k siehe Abschnitt 4.3.3 Gl. (4.42).		

Entsprechend der Wichtung des Energieverbrauchs wächst dieser mit dem Variationsparameter p an, da mit steigendem p der Energieverbrauch weniger bestraft wird gegenüber den Regelabweichungen. Mit dem höheren Stellenergieeintrag in das System werden die maximalen Durchsenkungen an der Massenposition für alle Unterstützungsmechanismen stetig gesenkt. Zum Vergleich wird untersucht, welcher Stellenergieeintrag für eine maximale Durchsenkung an der Massenposition von $|w(x_m)|_{\max} = 10^{-4}$ m benötigt wird. Tabelle 5.3 enthält die Modelle sortiert nach dem Stellenergieeintrag.

Tabelle 5.3: Modelle der Unterstützungsmechanismen, sortiert nach Stellenergieeintrag

Stellenergieeintrag W^+ [J]	0.030	0.039	0.050	0.0630	0.070	0.075	0.11
Modell	F—F	F—F—F	F—M	FM	F	M—M	M—F

Der geringste Stellenergieeintrag $W^+ = 0.030$ J wird mit dem Modell F—F erreicht. Darauf folgt das Modell F—F—F mit $W^+ = 0.039$ J. Das Modell F benötigt für die gleiche maximale Durchsenkung an der Massenposition einen Stellenergieeintrag von $W^+ = 0.070$ J. Die Modelle, die nur Stellkräfte verwenden, werden im Folgenden noch gesondert verglichen. Das Modell M—M mit zwei Momenten als Stellgrößen benötigt mit $W^+ = 0.075$ J deutlich mehr Stellenergie als z.B. das Modell F—F mit zwei Stellkräften. Die Modelle M—F mit $W^+ = 0.11$ J und F—M mit $W^+ = 0.050$ J unterscheiden sich im Stellenergieeintrag um den Faktor 2. Ein Grund für diesen Unterschied könnte die unsymmetrische Belastung des elastischen Fahrwegs durch die von $x = 0$ nach $x = \ell$ den Balken überquerende Masse sein. Bei einer Geschwindigkeit von $v_m > 5$ m/s ist die Durchsenkung an der Massenposition des unregulierten Systems in der ersten Balkenhälfte kleiner als in der zweiten Balkenhälfte. Um den Durchsenkungen an der Massenposition in der zweiten Balkenhälfte entgegenzuwirken, ist das Moment an der Position $x = \ell$ besser geeignet, da es sich örtlich dichter an der bewegten Masse bei den größeren Durchsenkungen befindet. Die Modelle F und FM unterscheiden sich in dieser Untersuchung nur wenig voneinander ($\Delta W^+ = 0.005$ J). Die Ursache

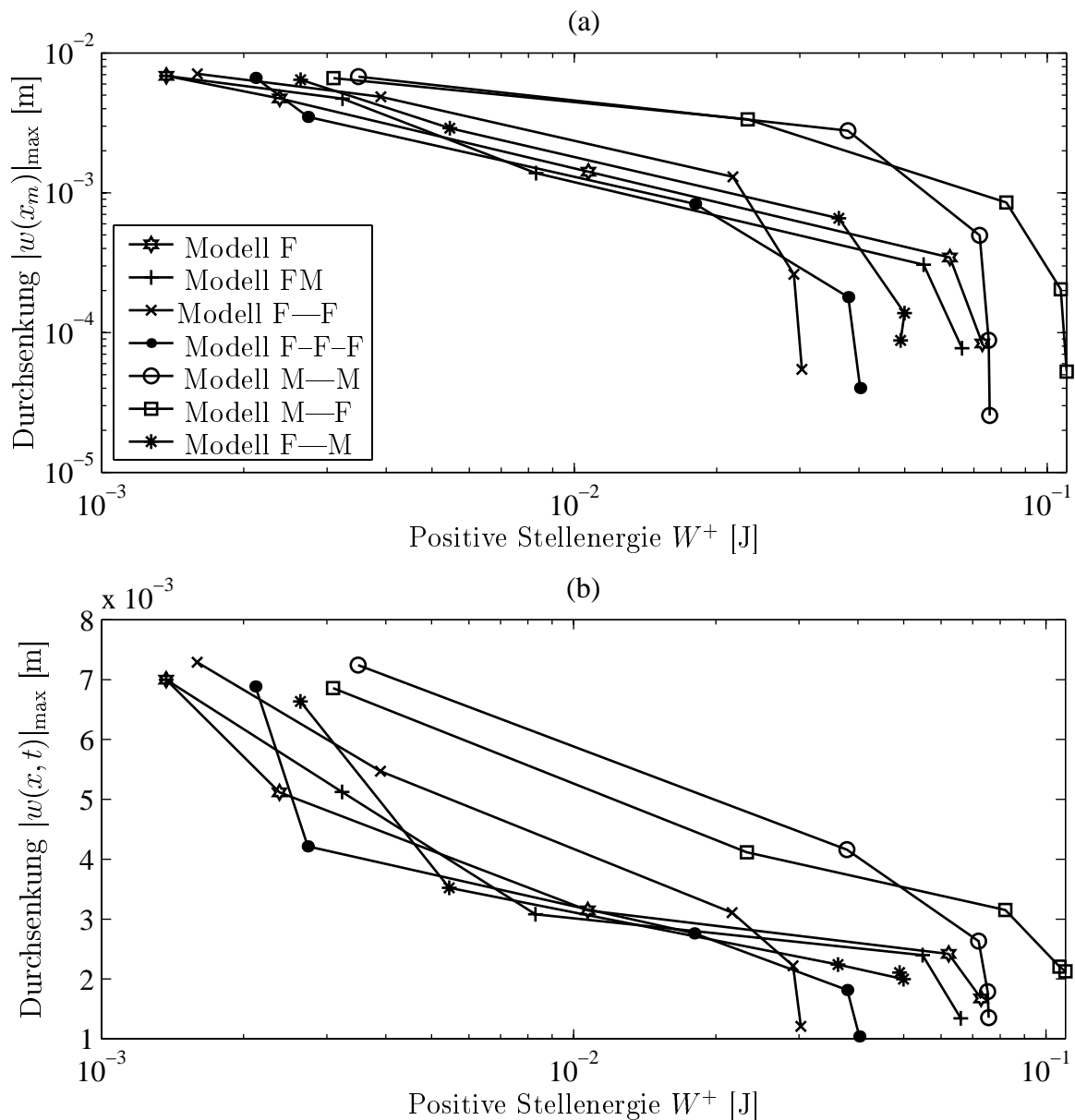


Bild 5.10: Simulierter (a) maximaler Betrag $|w(x_m)|_{\max}$ der Durchsenkung an der Massenposition, (b) maximaler Betrag $|w(x, t)|_{\max}$ der Balkendurchsenkung für verschiedene Stellmechanismen (siehe Legende) in Abhängigkeit des Energieverbrauchs.

liegt darin, dass sich diese Modelle nur in der Wichtung des Stellmomentes in Balkenmitte unterscheiden. Das Modell FM wird weiter unten (siehe Bild 5.11) noch genauer untersucht.

Für die maximalen Durchsenkungen $|w(x, t)|_{\max}$ des Balkens in Bild 5.10 (b) sind die Ergebnisse vergleichbar mit denen der maximalen Durchsenkung $|w(x_m)|_{\max}$ an der Massenposition. Bei einer maximalen Durchsenkung des Balkens von $|w(x, t)|_{\max} = 2 \cdot 10^{-3}$ m ergibt sich die gleiche Reihenfolge wie für die Ordnung der Modelle nach dem Stellenergieeintrag.

In einer weiteren Untersuchung wird die maximale Leistung, die ein Unterstützungsmechanismus aufbringen muss, verglichen. Es ergibt sich die gleiche Reihenfolge bezüglich der

maximalen Stelleistungen wie beim Stelleneeintrag in Tabelle 5.3.

Das Zusammenspiel von zwei Stellgrößen in einem Modell wird am Beispiel des Modells FM gezeigt. In Bild 5.11 ist der simulierte maximale Betrag $|w(x_m)|_{\max}$ der Durchsenkung an der Massenposition über dem Stelleneeintrag für verschiedene Wichtungen des Energieverbrauchs der Stellkraft in Balkenmitte (siehe Legende) dargestellt. Dabei wird die Wichtung $\mathbf{R}_k(2, 2)$ des Energieverbrauchs des Stellmomentes durch $\mathbf{R}_k(2, 2) = 10^{-p}$ mit $p = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ variiert.

Es ist zu beobachten, dass mit einer sinkenden Bestrafung des Energieverbrauchs für die Stellkraft die maximalen Durchsenkungen an der Massenposition abnehmen. Sie liegen bei einer Wichtung von $\mathbf{R}_k(1, 1) = 10^{-10}$ beispielsweise bei $|w(x_m)|_{\max} < 10^{-4}$ m. Durch die Wichtung des Energieverbrauchs für das Stellmoment in der Weise, dass dessen Energieverbrauch weniger bestraft wird (steigender Parameter p), wird gegenüber der Stellkraft die maximale Durchsenkung an der Massenposition nur wenig beeinflusst. Dabei steigt aber der Stelleneeintrag stark an, bei $\mathbf{R}_k(1, 1) = 10^{-8}$ ca. um den Faktor 100. Dabei verringert sich die maximale Durchsenkung an der Massenposition aber nur von $1.05 \cdot 10^{-3}$ m um $0.4 \cdot 10^{-3}$ m. Weiterhin fällt auf, dass mit sinkender Bestrafung des Energieverbrauchs der Stellkraft der Einfluss der Wichtung des Momentes abnimmt. Bei einer Wichtung von $\mathbf{R}_k(1, 1) = 10^{-10}$ beispielsweise hat das Moment praktisch keinen Einfluss mehr auf die Durchsenkung und den Stelleneeintrag.

Diese Ergebnisse lassen sich damit erklären, dass die Bewegungen des Systems vom ersten

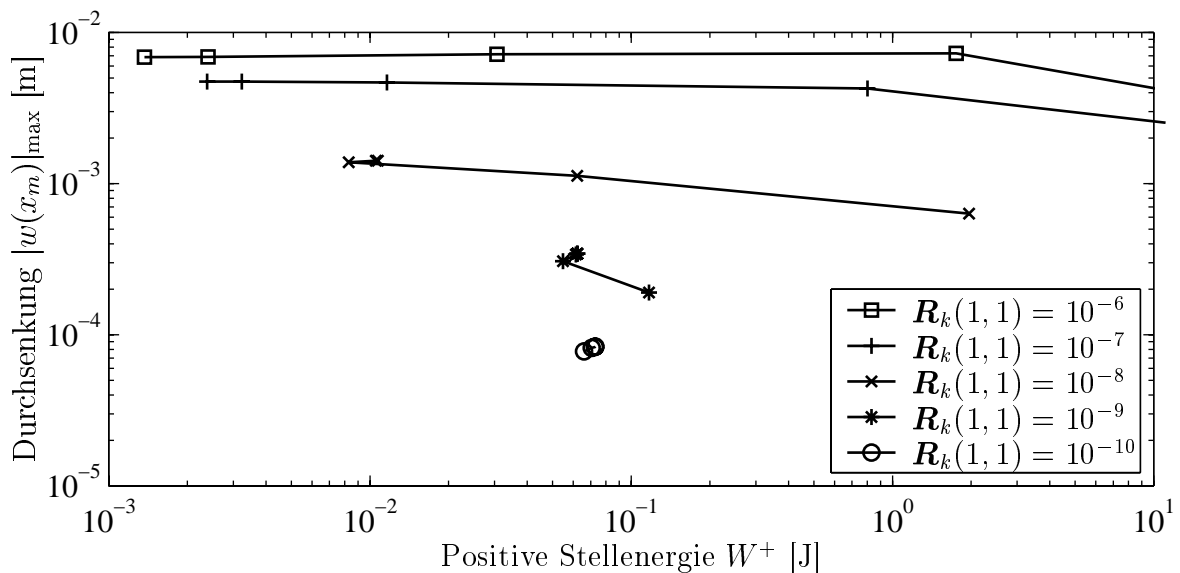


Bild 5.11: Simulierter maximaler Betrag der Durchsenkung an der Massenposition $|w(x_m)|_{\max}$ für den Unterzug Modell FM und Wichtung des Energieverbrauchs der Stellkraft in Balkenmitte (siehe Legende) bei Variation der Wichtung des Energieverbrauchs des Momentes in Balkenmitte $\mathbf{R}_k(2, 2) = 10^{-p}$ für $p = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Mode dominiert werden (vgl. Abschnitt 3.6.1 für den unregulierten Fall). Durch ein Moment in Balkenmitte kann der erste Mode aber aufgrund schlechter Steuerbarkeit nur schwach beeinflusst werden. Dafür ist eine Kraft in Balkenmitte, wenn nur eine Stellgröße betrachtet wird, am Besten geeignet. Aus diesem Grund ist das Modell F dem Modell FM vorzuziehen, zumal der konstruktive Aufwand bei der Umsetzung des Modells F geringer ist.

Speziellere Aussagen über die Auswahl und die Optimierung der Positionen für Stellkräfte oder Stellmomente zur Regelung des elastischen Fahrwegs konnten nicht gefunden werden. Ein Versuch nach MÜLLER [30] und [31], die Steuerbarkeitsmaße des Systems bei Variation von Stellorten zu untersuchen zeigte nicht, inwieweit ein Unterstützungsmechanismus geeignet ist, das Regelungsziel einer minimalen Durchsenkung an der Massenposition zu verbessern.

Zur Untersuchung des Einflusses der Anzahl der Stellgrößen auf das Regelergebnis werden die Modelle F, F—F und F—F—F (siehe Bild 5.12 und 5.13) miteinander verglichen. In Bild 5.12 ist die simulierte Durchsenkung $w(x, t)$ des Balkens und die Durchsenkung $w(x_m)$ an der Massenposition (dicke Linie) über der Zeit t für Überfahrten mit konstanter Massengeschwindigkeit $v_m = 5$ m/s für die Unterzüge (a) Modell F ($\mathbf{R}_{k_{S1}}$), (b) Modell F—F ($\mathbf{R}_{k_{S2}}$) und (c) Modell F—F—F ($\mathbf{R}_{k_{S3}}$) für $p = 10$ dargestellt. Für die Durchsenkungen an der Massenposition ergeben sich für alle drei Modelle Durchsenkungen $|w(x_m)|_{\max} < 10^{-4}$ m. An anderen Positionen x weist der Fahrweg jedoch weit größere Abweichungen von der Horizontalen auf. Dies zeigt sich durch die zwei 'Berge' in den jeweiligen Diagrammen. Die maximalen Abweichungen von der Horizontalen sind mit $|w(x, t)|_{\max} = 17 \cdot 10^{-4}$ m beim Modell F wesentlich größer als die maximalen Durchsenkungen an der Massenposition. Diese Unterschiede in den Durchsenkungen werden in Abschnitt 5.2.2 genauer untersucht.

In Bild 5.13 ist ein Vergleich der Modelle F, F—F und F—F—F bezüglich der simulierten Durchsenkung an der Massenposition $w(x_m)$, der maximalen Beträge der Balkendurchsenkung $|w(x, t)|_{\max}$ und die Stellkräfte über der normierten Fahrzeugposition x_m/ℓ aufgetragen. Die maximalen Durchsenkungen an der Massenposition nehmen mit zunehmender Zahl von Stellkräften ab. Die Beträge der maximalen Balkendurchsenkungen verlaufen an den Stellen unstetig (Knicke), an denen die maximale Balkendurchsenkung zur betragsmäßig größeren minimalen Balkendurchsenkung das Vorzeichen wechselt bzw. umgekehrt.

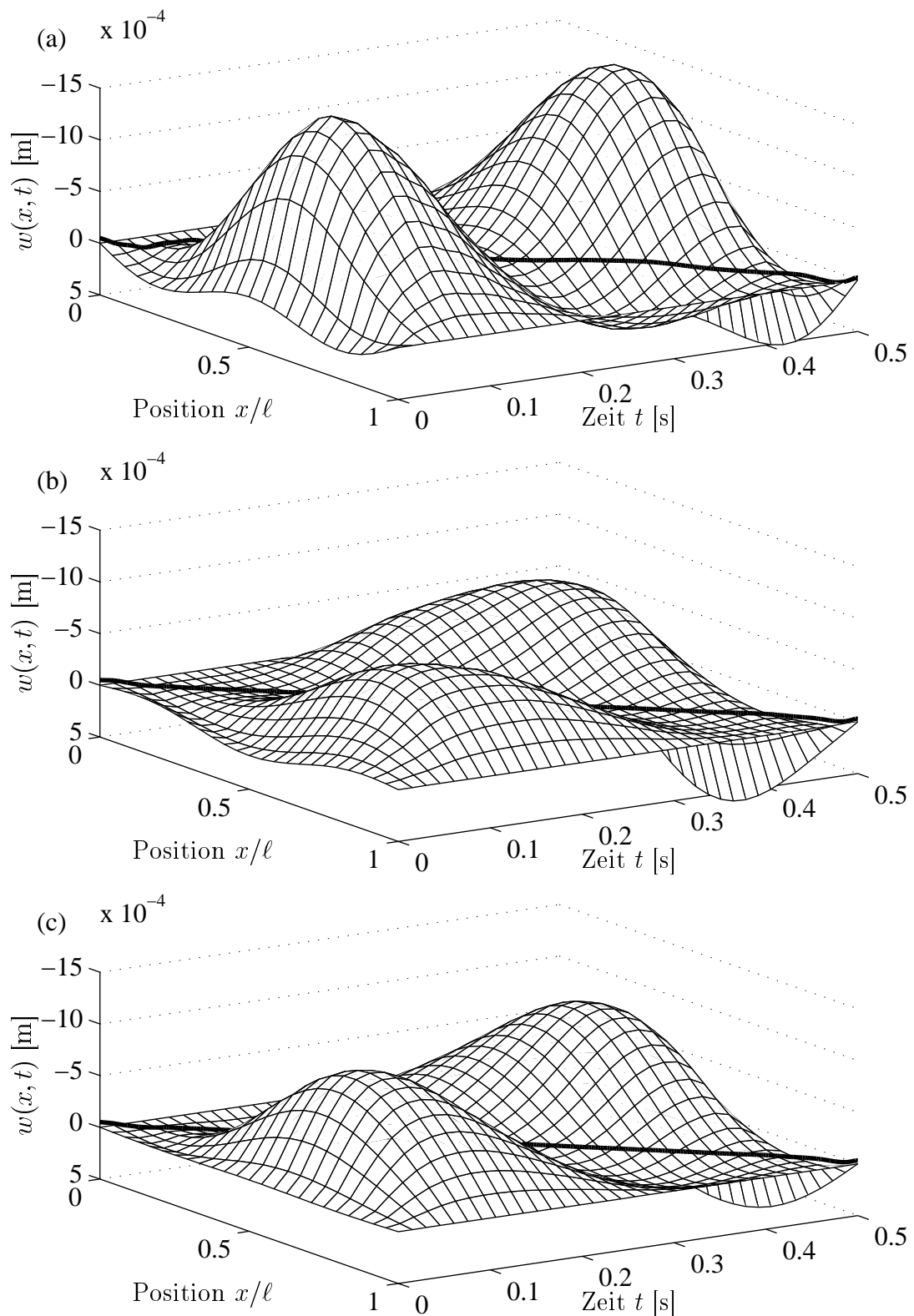


Bild 5.12: Simulierte Durchsenkungen $w(x, t)$ des Balkens und die Durchsenkung $w(x_m)$ an der Massenposition über der Zeit t für Überfahrten mit konstanter Massengeschwindigkeit $v_m = 5$ m/s für die Unterstützungsmechanismen (a) Modell F ($\mathbf{R}_{k_{S1}}$), (b) Modell F—F ($\mathbf{R}_{k_{S2}}$) (c) Modell F—F—F ($\mathbf{R}_{k_{S3}}$) für $p = 10$.

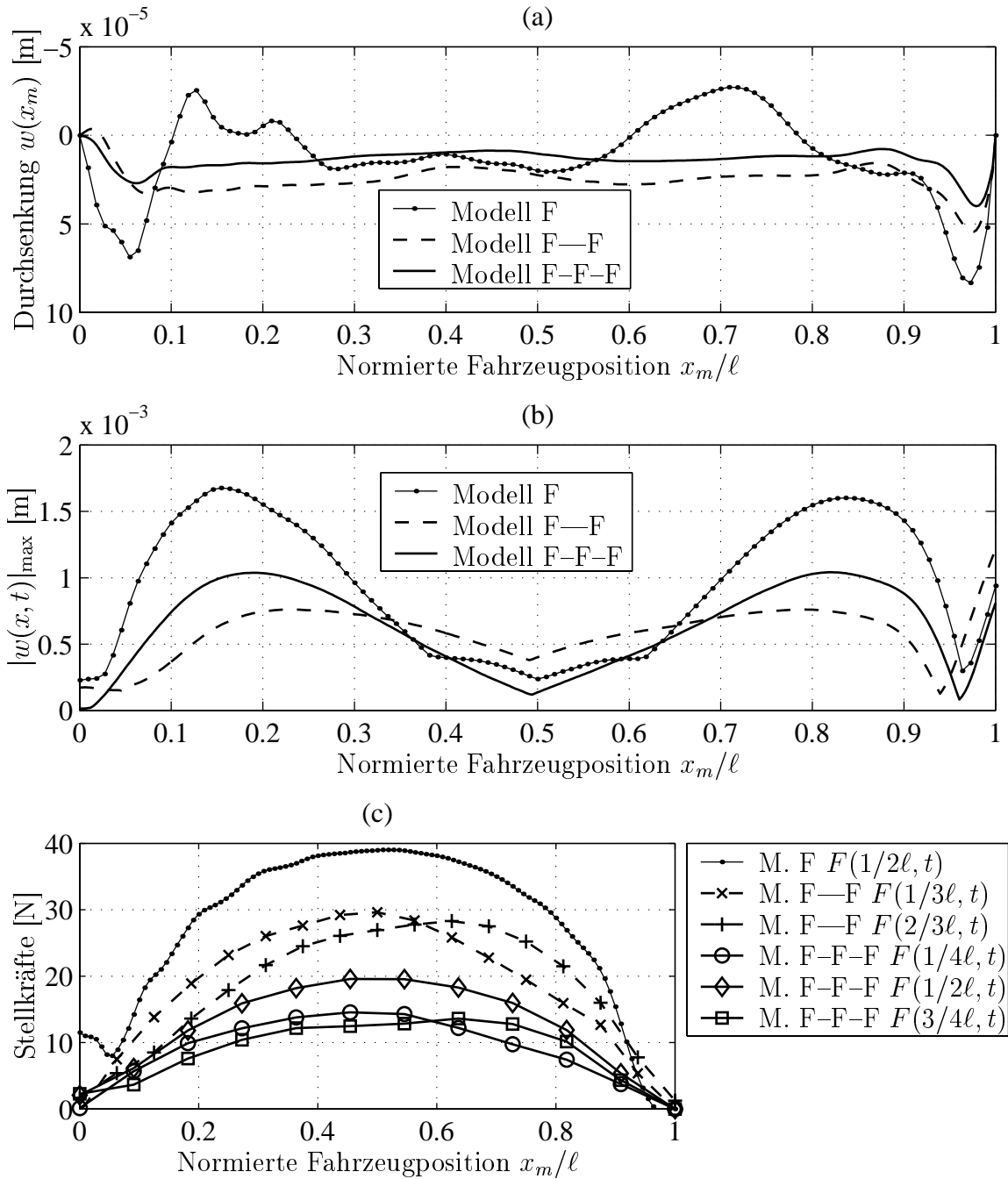


Bild 5.13: Simulierte Durchsenkung $w(x_m)$ an der Massenposition (a), maximaler Betrag der Balkendurchsenkung $|w(x, t)|_{\max}$ (b) und Stellkräfte (c) über der normierten Fahrzeugposition x_m/ℓ für Überfahrten mit konstanter Massengeschwindigkeit $v_m = 5$ m/s für die Unterstützungsmechanismen Modell F ($\mathbf{R}_{k_{S1}}$), Modell F—F ($\mathbf{R}_{k_{S2}}$) und Modell F—F—F ($\mathbf{R}_{k_{S3}}$) für $p = 10$.

Bei den Stellkräften in Diagramm (c) aus Bild 5.13 nehmen die maximalen Stellkräfte mit der Anzahl der Stellkräfte ab. Bei Regelung mit dem Unterstützungsmechanismus Modell F—F ist die Stellkraft $F(1/3\ell, t)$ größer als die Stellkraft $F(2/3\ell, t)$, wenn sich die Masse in der ersten Balkenhälfte befindet. Überschreitet die Masse die Position $x_m/\ell = 0.56$, so dreht sich das Verhältnis der Stellkräfte um. Für das Modell F—F—F gilt für die Stellkräfte $F(1/4\ell, t)$ und $F(3/4\ell, t)$ ähnliches wie bei dem Modell F—F. Hierbei übernimmt jedoch die Stellkraft $F(1/2\ell, t)$ des Modells F—F—F einen Anteil, der von der Form dem Verlauf der Kraft des Modells F ähnelt.

Für die Konstruktion von Stellmechanismen für aktiv geregelte Fahrwege ergeben sich folgende Hinweise:

- Stellkräfte sind Stellmomenten vorzuziehen, da durch die Regelung mit Stellkräften weniger Stellenergie in das System eingetragen wird.
- Bei Stellmomenten wird ein Stützbalken nicht nur durch Normalkräfte belastet, sondern auch auf Biegung, was eine wesentlich massivere Bauweise erfordert. Außerdem muss eine biegesteife Anbindung an den Fahrweg realisiert werden. Damit sind Stellmomente besonders für Leichtbausysteme ungeeignet.
- Mit der Zahl der Stellkräfte nimmt der konstruktive Aufwand zu, jedoch sind die maximalen Stellkräfte kleiner.

5.2.2 Verschiedene Regelungsziele

Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt, wo nur die Durchsenkung an der Stelle der bewegten Masse im Gütefunktional berücksichtigt wird, soll in diesem Abschnitt zusätzlich die Durchsenkung des gesamten Balkens berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck muss die Wichtungsmatrix für die Durchsenkung \mathbf{Q}_k verändert werden. Die Berücksichtigung des Energieverbrauchs mit

$$\mathbf{R}_{k_6} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

für das Modell F bleibt dabei unverändert. Der Energieverbrauch wird durch \mathbf{R}_{k_6} relativ schwach gewichtet, damit das Gesamtsystem für die untersuchten Wichtungsmatrizen \mathbf{Q}_k im Experiment stabil ist und somit ein Vergleich zwischen Messung und Simulation möglich ist. Für das Modell M—M wird die Verbrauchsmatrix \mathbf{R}_{k_5} (siehe Tabelle 5.1) verwendet.

Für die Gewichtung der Durchsenkung unter der bewegten Masse wird die Matrix \mathbf{Q}_k als $\mathbf{Q}_k = \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^T$ berechnet (vgl. Abschnitt 4.3.3). Die Matrix \mathbf{Q}_k hat bei m betrachteten Moden die Dimension $2m \times 2m$ und ist nur an den Positionen $[1 \dots m, 1 \dots m]$ besetzt. Bei der hier gegebenen Modellierung gilt $m = 3$. Aufgrund der bewegten Last ist die Matrix \mathbf{c} und

damit auch \mathbf{Q}_k positions- und damit zeitabhängig. Zur ausschließlichen Berücksichtigung der Durchsenkung des Balkens muss die Wichtungsmatrix \mathbf{Q}_k an den Positionen $[1 \dots m, 1 \dots m]$ mit einer Diagonalmatrix der Dimension m besetzt sein. Die Elemente der Diagonalmatrix gewichten die modale Verschiebung jeweils eines Modes.

Soll die Matrix \mathbf{Q}_k verändert werden, so dass sowohl die Durchsenkung unter der Last, als auch die Durchsenkung des Balkens minimiert wird, müssen die Diagonalelemente gegenüber den Nebendiagonalelementen vergrößert werden. In einer ersten Untersuchung werden nur die Hauptdiagonalelemente der Matrix \mathbf{Q}_k erhöht und die Nebendiagonalelemente konstant gelassen. Es ergibt sich die Wichtungsmatrix

$$\mathbf{Q}_{1_k}(\alpha_D) = \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^T + \alpha_D \begin{bmatrix} 0.05 & & & & \\ & 0.05 & & & \\ & & 0.05 & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

mit dem Faktor α_D , der die Diagonalelemente verstärkt. Der Nachteil dieser Art der Variation der Gewichtungsmatrix \mathbf{Q}_{1_k} ist, dass die Gewichtung zwischen \mathbf{R}_k und \mathbf{Q}_{1_k} verändert wird. Das Verhältnis verschiebt sich so, dass die Durchsenkungen mit größerem Faktor α_D stärker gewichtet werden als der Verbrauch.

Um die Ergebnisse mit den verschiedenen Wichtungsmatrizen \mathbf{Q}_k besser vergleichen zu können, wird eine weitere Wichtungsmatrix \mathbf{Q}_{2_k}

$$\mathbf{Q}_{2_k}(\alpha_D) = \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^T (1 - \alpha_D) + \alpha_D \begin{bmatrix} K' & & & & \\ & K' & & & \\ & & K' & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

untersucht. Der Wert K' berechnet sich bei N Abtastschritten und m Moden zu

$$K' = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mathbf{c}_k \mathbf{c}_k^T(i, j)}{Nm}. \quad (5.8)$$

Durch diese Variation der Wichtungsmatrix bleibt das Verhältnis aus \mathbf{R}_k und \mathbf{Q}_{2_k} im Mittel konstant. Damit lässt sich für $\alpha_D = 0$ nur die Durchsenkung an der Massenposition und für $\alpha_D = 1$ nur die Gesamtdurchsenkung des Balkens berücksichtigen.

In Bild 5.14 sind die Ergebnisse der Variation der Wichtungsmatrizen \mathbf{Q}_{1_k} und \mathbf{Q}_{2_k} für das Modell F des Unterstützungsmechanismus und in Bild 5.15 für das Modell M—M jeweils

für eine konstante Massengeschwindigkeit von $v_m = 5$ m/s dargestellt. Im Einzelnen zeigt Diagramm (a) die simulierten maximalen Durchsenkungen bei Verwendung der Wichtungsmatrix \mathbf{Q}_{1_k} über dem Faktor α_D . In Diagramm (b) sind die simulierten Durchsenkungen und einige Messwerte über dem Wichtungsfaktor α_D aufgetragen. Für die Diagramme (c) - (f) wird die Wichtungsmatrix \mathbf{Q}_{2_k} verwendet. Das Diagramm (c) zeigt für $\alpha_D = 0$ die Lastwegkurve $w(x_m)$ und die Kurve der maximalen Beträge $|w(x, t)|_{\max}$ der Durchsenkungen des Balken über der normierten Fahrzeugposition, Diagramm (d) die gleichen Größen für $\alpha_D = 0.55$. Diagramm (e) ist die dreidimensionale Darstellung der Balkendurchsenkung $w(x, t)$ über der Zeit für $\alpha_D = 0$ (vgl. Diagramm (c)); Diagramm (f) ist die gleiche dreidimensionale Darstellung für $\alpha_D = 0.55$ (vgl. Diagramm (d)). In den Diagrammen (e) und (f) ist die Lastwegkurve durch eine dicke durchgezogene Linie dargestellt. Die maximale bzw. die betragsmäßig größere minimale Balkendurchsenkung sind für einige Zeitpunkte durch fette Punkte markiert.

In Bild 5.14 (b) für das Modell F des Unterstützungsmechanismus und in Bild 5.15 (b) für das Modell M—M stimmen die simulierte und die gemessene Durchsenkung an der Massenposition $|w(x_m)|_{\max}$ gut überein. Die maximale Balkenabweichung kann nicht direkt gemessen werden, sondern muss über die inverse Messmatrix \mathbf{C}_k^{-1} (vgl. Abschnitt 3.5 Gl. (3.34)) aus den Tauchspulsignalen rekonstruiert werden. Da die Messmatrix aufgrund ihrer Kondition schwer invertierbar ist, weichen die simulierten und rekonstruierten Werte für die maximale Balkendurchsenkung $|w(x, t)|_{\max}$ voneinander ab. Sowohl bei der Simulation als auch bei der Messung nimmt die Balkendurchsenkung mit steigendem Faktor α_D ab.

Für beide Wichtungsmatrizen \mathbf{Q}_{1_k} und \mathbf{Q}_{2_k} verringert sich die maximale Durchsenkung des Balkens mit stärkerer Gewichtung durch den Faktor α_D , wobei die maximale Durchsenkung an der Massenposition ansteigt. Bei einer reinen Gewichtung der betragsmäßig maximalen Gesamtdurchsenkung mit $\alpha_D = 1$ für \mathbf{Q}_{2_k} ist bei beiden Unterstützungsmechanismen die maximale Durchsenkung gleich der maximalen Durchsenkung unter der Last. Dies wird mit dem Modell F schon bei $\alpha_D = 0.55$ erreicht. Für die Wichtungsmatrix \mathbf{Q}_{1_k} sind allgemein gültige Aussagen schwieriger, da das Verhältnis von \mathbf{R}_k und \mathbf{Q}_{1_k} mit steigendem Faktor α_D verändert wird, so dass die Durchsenkungen insgesamt stärker gewichtet werden.

Bei der ausschließlichen Gewichtung der Durchsenkung unter der Masse mit $\alpha_D = 0$ in den Diagrammen (c) und (e) der Bilder 5.14 und 5.15 ist für beide Modelle des Unterstützungsmechanismus die Durchsenkung an der Massenposition wesentlich kleiner als der maximale Betrag der Balkendurchsenkung. Insbesondere steigt der maximale Betrag der Balkendurchsenkung im Bereich $x_m/\ell = 0.9 \dots x_m/\ell = 1$ stark an, bevor die Masse den Fahrweg verlässt. Eine Erklärung für diese große Balkendurchsenkung ist die ausschließliche Wichtung der Durchsenkung an der Massenposition. Diese wird aufgrund der Randbedingungen zum Balkenende hin Null. Da im Gütefunktional bei der Reglerauslegung auch der Energieverbrauch berücksichtigt wird, kann bei dessen Minimierung Energie eingespart werden, indem die Stellgrößen zum Balkenende hin praktisch abgeschaltet werden (vgl. Bild 5.13 (c) Modell F).

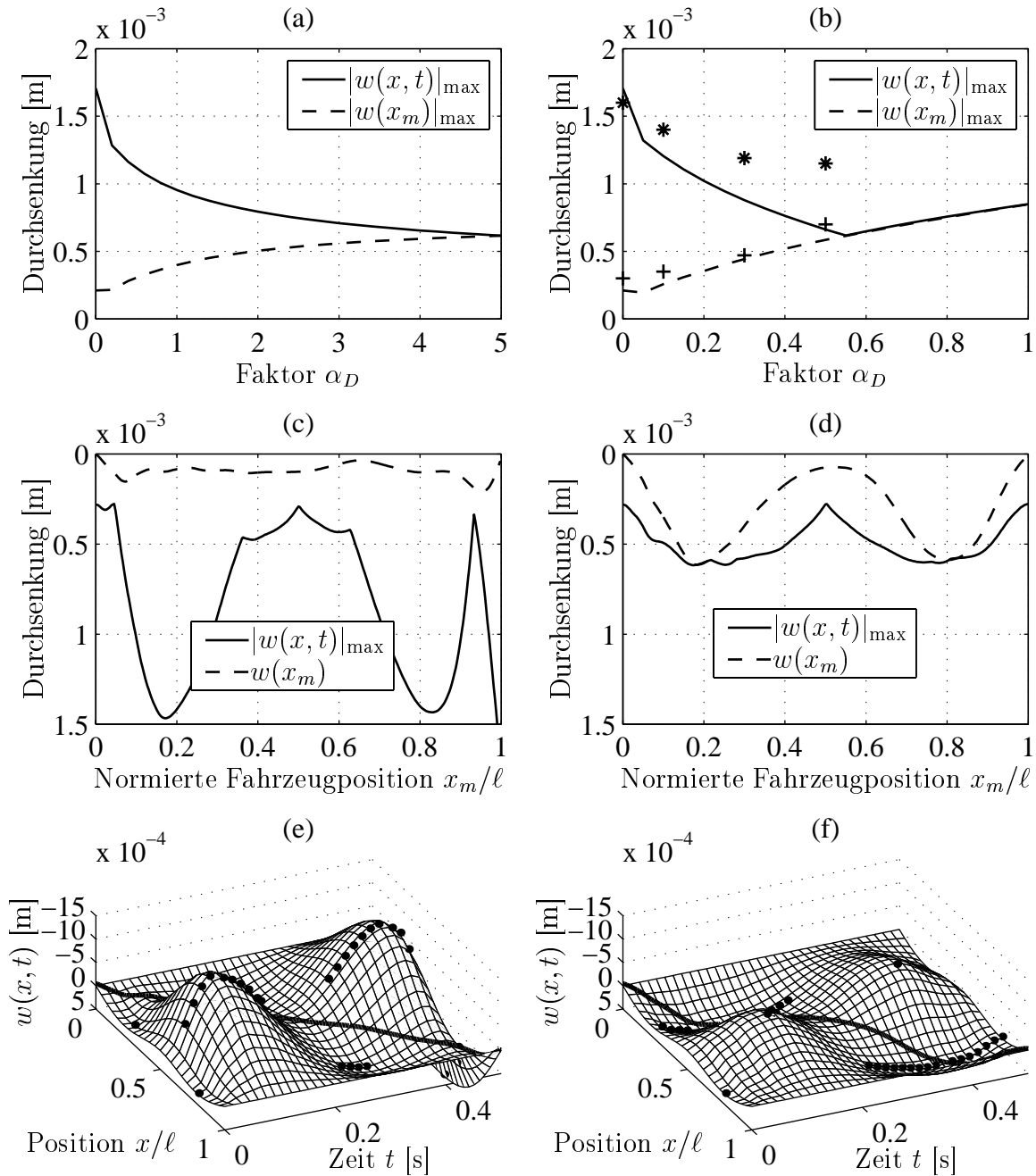


Bild 5.14: Darstellung der maximalen Durchsenkungen über dem Wichtungsfaktor α_D (a) mit der Wichtungsmatrix Q_{1_k} , (b) mit der Wichtungsmatrix Q_{2_k} , (c) und (e) Durchsenkungen für Q_{2_k} und $\alpha_D = 0$, (d) und (f) für Q_{2_k} und $\alpha_D = 0.55$. Simulationen sind durch Linien dargestellt (siehe Legenden); Messwerte sind in Diagramm (b) für $|w(x, t)|_{\max}$ durch (+) und aus Messwerten rekonstruierte Werte $|w(x_m)|_{\max}$ durch (*) dargestellt für $v_m = 5$ m/s und das Modell F.

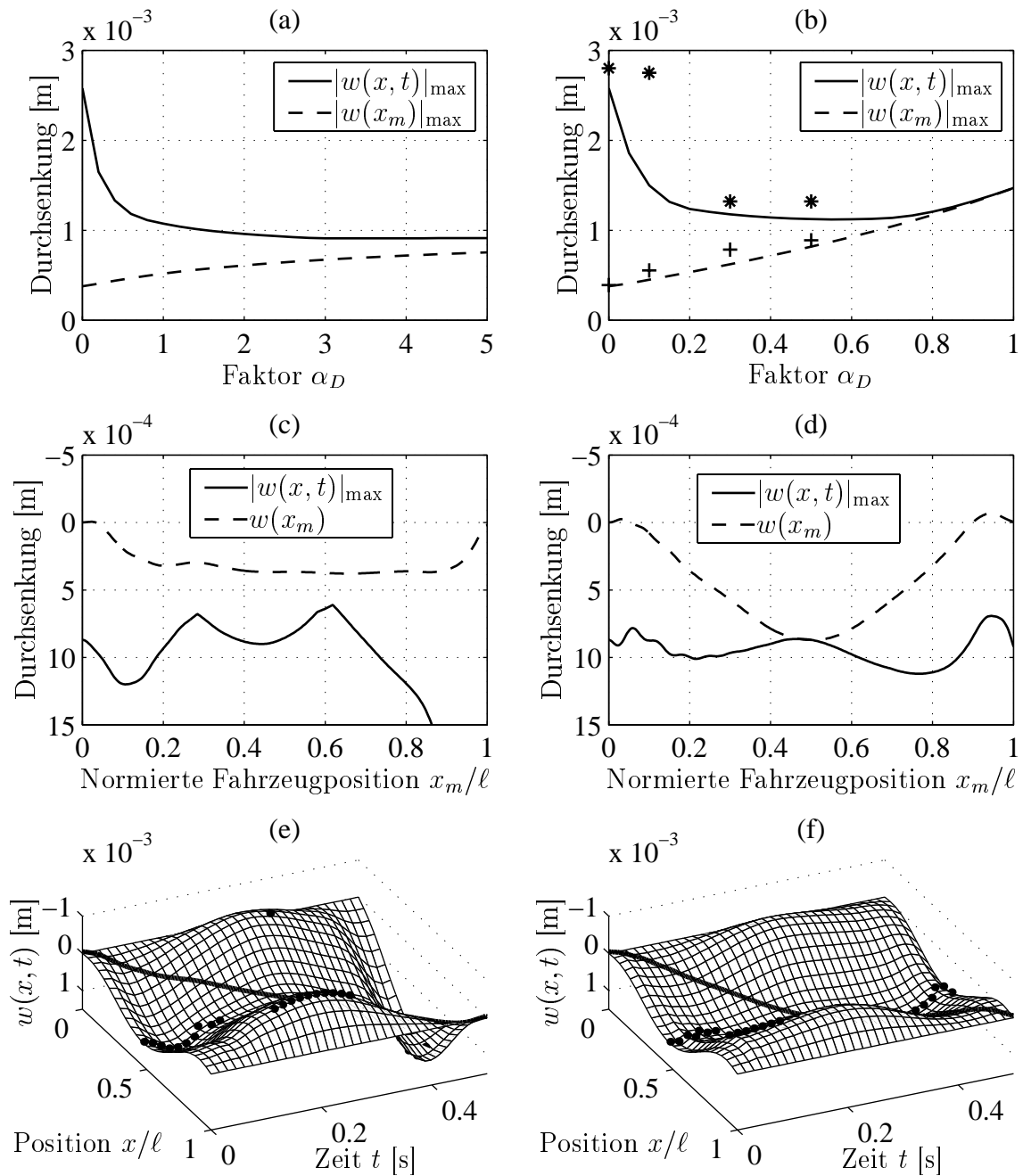


Bild 5.15: Darstellung der maximalen Durchsenkungen über dem Wichtungsfaktor α_D (a) mit der Wichtungsmatrix Q_{1_k} , (b) mit der Wichtungsmatrix Q_{2_k} , (c) und (e) Durchsenkungen für Q_{2_k} und $\alpha_D = 0$, (d) und (f) für Q_{2_k} und $\alpha_D = 0.55$. Simulationswerte sind durch Linien dargestellt (siehe Legenden); Messwerte sind in Diagramm (b) für $|w(x, t)|_{\max}$ durch (+) und aus Messwerten rekonstruierte Werte $|w(x_m)|_{\max}$ durch (*) dargestellt für $v_m = 5$ m/s und das Modell M—M.

Durch die zusätzliche Berücksichtigung der Balkengesamtverformung in der Wichtungsmatrix mit $\alpha_D = 0.55$ in den Diagrammen (d) und (f) wird der maximale Betrag der Balkendurchsenkung kleiner, wobei die Durchsenkung an der Massenposition ansteigt, so dass die maximalen Werte beider Durchsenkungen in der gleichen Größenordnung liegen. Der starke Abfall der Balkendurchsenkung bevor die bewegte Masse den Balken verlässt, tritt nicht mehr auf.

In den Diagrammen (c) und (d) des Modells F (siehe Bild 5.14) fällt weiterhin auf, dass die Durchsenkungskurven in dem Mittelbereich zwischen $x_m/\ell = 0.4$ und $x_m/\ell = 0.6$ einen näherungsweise gleichen Verlauf haben und damit unabhängig von dem Wichtungsparameter α_D sind. Dies ist auf die günstige Position des Stelleingriffs in Balkenmitte zurückzuführen.

Weitere Untersuchungen bei konstanten Geschwindigkeiten $v_m = 1$ m/s und $v_m = 10$ m/s zeigen, dass mit steigender Geschwindigkeit die maximale Durchsenkung des Balkens bei wachsendem Faktor α_D langsamer sinkt. Die Durchsenkung an der Massenposition verändert sich bei der Variation der Massengeschwindigkeit nur geringfügig.

Die wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung sind, dass der maximale Betrag der Durchsenkung des Balkens durch eine stärkere Berücksichtigung in der Wichtungsmatrix \mathbf{Q}_k gesenkt werden kann, ohne dass sich die maximale Durchsenkung an der Massenposition wesentlich erhöht.

5.2.3 Verschiedene Anregungsmechanismen

Die in dieser Arbeit untersuchten Anregungsmechanismen sind einfache Überfahrten mit konstanter Geschwindigkeit, einfache beschleunigte Überfahrten mit einer unterschiedlichen Anzahl von Start-Stopp Vorgängen sowie mehrfache beschleunigte Überfahrten. Der Fall der einfachen Überfahrten mit konstanter Massengeschwindigkeit ist in den vorherigen Abschnitten diskutiert worden. Die beschleunigten Bewegungen werden in diesem Abschnitt an dem Modell F untersucht.

Bei einfachen beschleunigten Überfahrten mit optimaler Regelung ergeben sich keine wesentlich anderen Resultate wie bei den Überfahrten mit konstanter Geschwindigkeit. In Bild 5.16 wird ein Vergleich einer Überfahrt mit konstanter Geschwindigkeit mit verschiedenen beschleunigten Überfahrten mit n Start-Stopp-Vorgängen bei gleicher Überfahrzeit $T_\ell = 1$ s gezeigt. Die Durchsenkungen an der Massenposition liegen bei der Wichtung des Energieverbrauchs mit \mathbf{R}_{k_2} für alle Fälle in dem Bereich von $|w(x_m)|_{\max} < 0.1$ mm. Sie unterscheiden sich nur durch kleine überlagerte Schwingungen, welche durch die Start-Stopp-Vorgänge hervorgerufen werden.

Da der genaue Bewegungsverlauf für das Regelergebnis nicht entscheidend zu sein scheint, wird eine Näherungslösung untersucht, bei der unterschiedliche Bewegungsverläufe mit einem näherungsweise ausgelegten Regler geregelt werden. Dieser näherungsweise ausgelegte

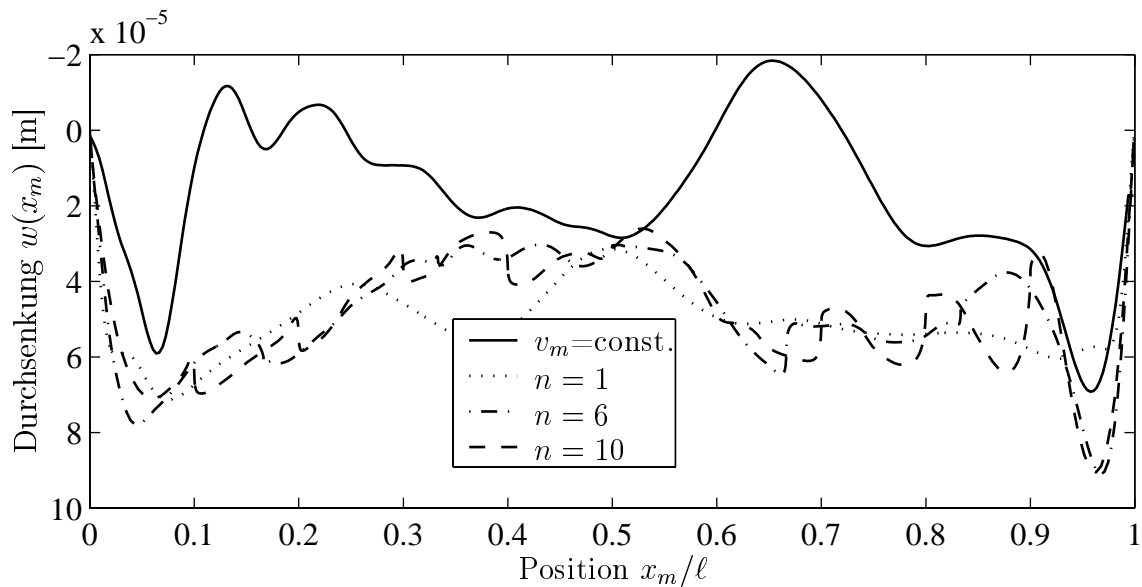


Bild 5.16: Vergleich zwischen Simulationen für geregelte beschleunigte Bewegungen mit der Gewichtungsmatrix für den Energieverbrauch von \mathbf{R}_{k_2} bei einer Überfahrzeit von $T_\ell = 1$ s.

Regler ist der Regler, der für die konstante Geschwindigkeit von $v_m = 2.5$ m/s berechnet wird, welche der mittleren Geschwindigkeit der beschleunigten Bewegungen für $T_\ell = 1$ s entspricht. Die Reglermatrizen werden nun nicht zeitlich fortschreitend, sondern der jeweiligen Massenposition zugeordnet aufgeschaltet. Damit ist der Regler unabhängig von dem Bewegungsverlauf und der Überfahrzeit. Bei dem Vergleich in Bild 5.17 von der Durchsenkung

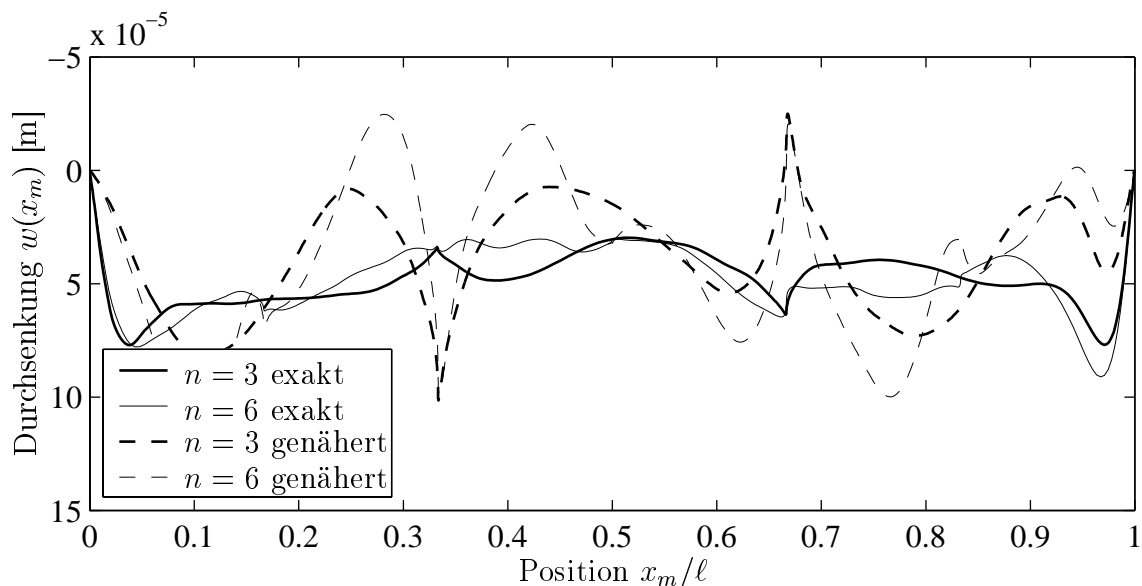


Bild 5.17: Vergleich zwischen Simulationen für geregelte beschleunigte Bewegungen mit der Gewichtungsmatrix \mathbf{R}_{k_2} bei einer Überfahrzeit von $T_\ell = 1$ s für exakte und genäherte optimale Regelung.

an der Massenposition für die exakt berechneten optimalen Regler mit den Ergebnissen der Näherung zeigen sich Abweichungen, jedoch bleiben die Durchsenkungen im Bereich $|w(x_m)|_{\max} < 0.11$ mm.

In Bild 5.18 werden maximale Durchsenkungen bei Anwendung des für $v_m = 5$ m/s ausgelegte Regler auf Überfahrten mit verschiedenen Start-Stopp Vorgängen und unterschiedlichen Überfahrzeiten gezeigt. Die dreidimensionale Darstellung der maximalen Durchsenkung an der Massenposition $|w(x_m)|_{\max}$ bzw. die Draufsicht zeigen, dass $|w(x_m)|_{\max}$ nahezu unabhängig von der Anzahl der Start-Stopp Vorgänge ist. Bei der Variation der Überfahrzeit verändert sich $|w(x_m)|_{\max}$ für Überfahrzeiten $T_\ell > 0.5$ s nur wenig und kann mit $|w(x_m)|_{\max} \approx 0.2$ mm nach oben abgeschätzt werden. Für kurze Überfahrzeiten und damit größere mittlere Geschwindigkeiten nimmt $|w(x_m)|_{\max}$ zu, wobei sich das Maximum mit

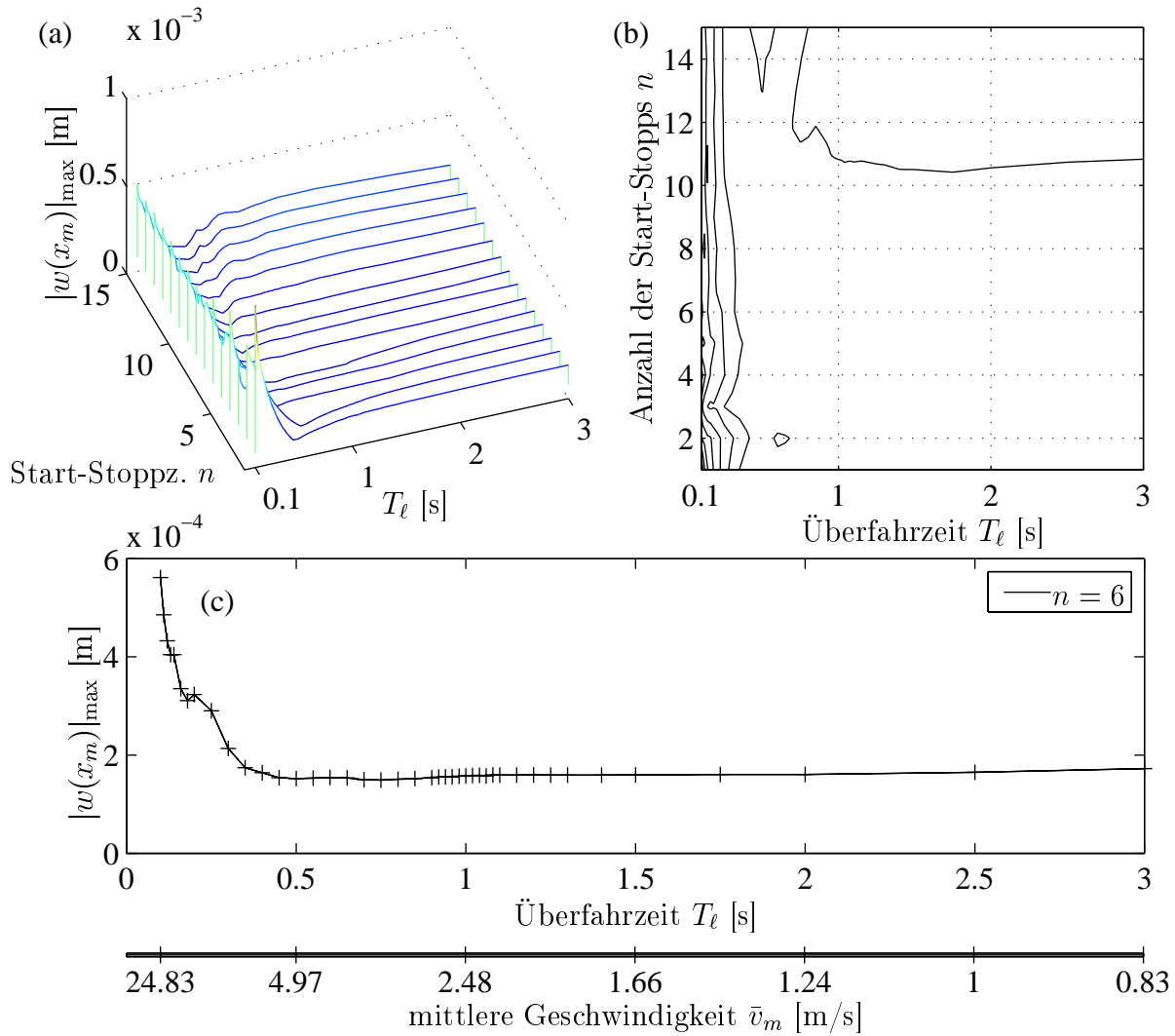


Bild 5.18: Simulierte maximale Durchsenkung an der Massenposition bei Variation der Überfahrzeit T_ℓ und der Start-Stoppzahl n (a) Wasserfalldiagramm, (b) Höhenliniendiagramm, (c) Schnitt für $n = 6$.

0.58 mm ungefähr bei der zweiten kritischen Geschwindigkeit ($\alpha \approx 1$, vgl. Gl. (3.45)) des Systems befindet.

Sofern das System geregelt wird, spielt die Eigendynamik des unregulierten Systems gegenüber der Reglerdynamik keine Rolle mehr. Der Resonanzeffekt durch die Anregung der ersten Eigenschwingung des Systems bei sechs Start-Stopp Vorgängen in $T_\ell = 1$ s ist beispielsweise nicht mehr nachweisbar. Zum Vergleich kann Bild 3.12 herangezogen werden. Die Durchsenkung an der Massenposition mit der maximalen Balkendurchsenkung sind korreliert.

Bei mehrfachen sich wiederholenden beschleunigten Überfahrten mit Regelung können die Reglermatrizen nicht für alle Zeitpunkte berechnet werden. Aufgrund der sich wiederholenden Bewegungen bietet es sich aber an, als Näherung Regler für einfache Überfahrten zu verwenden, die für jede einzelne Überfahrt der sich wiederholenden Bewegung aufgeschaltet werden. Dies ist sinnvoll, da das System für jede Überfahrt gleich ist und für jede neue Überfahrt neue Anfangsbedingungen gelten. Dies führt dazu, dass sich die mehrfachen Überfahrten im geregelten Fall nicht von den einfachen Überfahrten unterscheiden.

Die Resonanzeffekte, die in dem passiven System beobachtet werden können, sind im geregelten Fall wie auch bei den einfachen Überfahrten nicht mehr nachweisbar.

Die Anwendbarkeit der optimalen Regelung auf einzelne und mehrfache beschleunigte Überfahrten am Versuchsstand wird in Bild 5.19 und Bild 5.20 gezeigt. Die Messergebnisse sind auf Grund von Messstörungen geglättet dargestellt. Für die einfachen beschleunigten Überfahrten mit $n = 3$ bzw. $n = 6$ Start-Stopp-Vorgängen liegen die maximalen Durchsenkungen $|w(x_m)|_{\max}$ im Bereich von ± 0.4 mm für den exakt berechneten und den genäherten Regler, welcher für $v_m = 2.5$ m/s ausgelegt ist. Die Durchsenkungen an der Massenposition sind bei beschleunigten Bewegungen größer als bei Überfahrten mit konstanter Geschwindigkeit, da durch den Zahnriemenantrieb der Masse bei hohen Beschleunigungen zusätzliche Störkräfte auf das System wirken. Außerdem befindet sich das geregelte System am Stabilitätsrand,

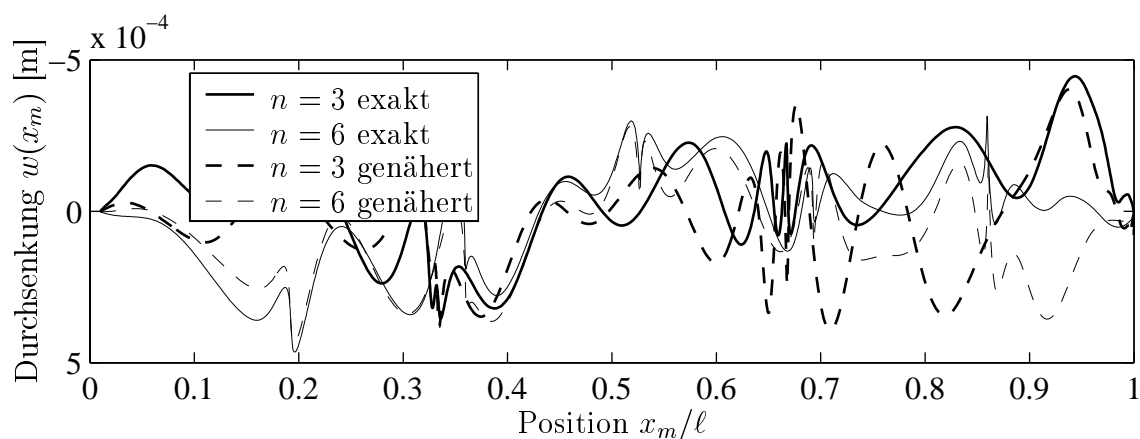


Bild 5.19: Messergebnisse für geregelte beschleunigte Bewegungen mit der Gewichtungsmatrix \mathbf{R}_{k_1} bei einer Überfahrzeit von $T_\ell = 1.1$ s für exakte und genäherte Regelung.

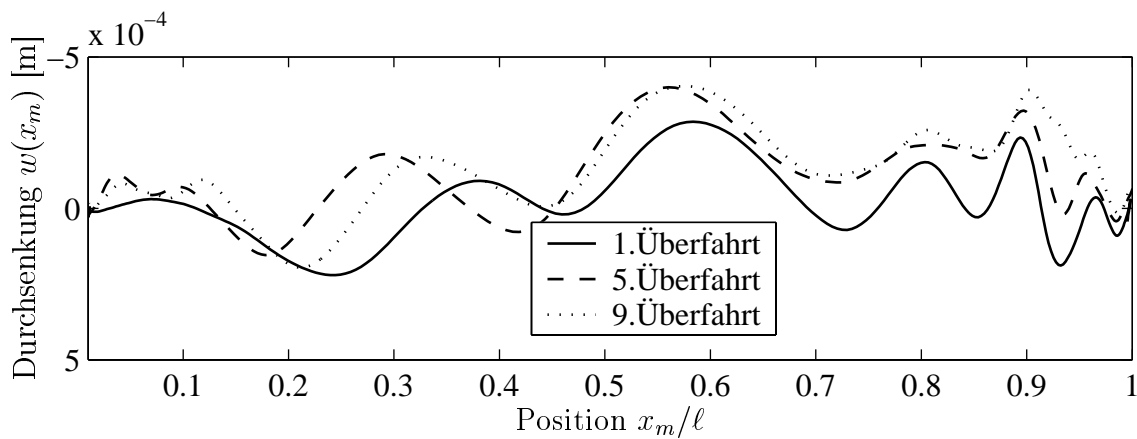


Bild 5.20: Messergebnisse für geregelte beschleunigte mehrfache Bewegungen mit der Gewichtungsmatrix \mathbf{R}_{k_1} bei einer Überfahrzeit von $T_\ell = 0.5$ s und einem Start-Stopp-Vorgang mit einer Wartezeit $T_W = 0.05$ s.

wodurch der Fahrweg an den Stoppstellen zu Dauerschwingungen angeregt wird. Bei einem Start-Stopp-Vorgang in $T_\ell = 0.5$ s sind diese Störkräfte geringer, was sich in einer Senkung der maximalen Durchsenkung $|w(x_m)|_{\max} < 0.3$ mm für die erste Überfahrt (siehe Bild 5.20) zeigt. Dieser Wert liegt damit in der Größenordnung der geregelten Überfahrt mit der konstanten Geschwindigkeit $v_m = 10$ m/s.

Bei mehrfachen Überfahrten weisen die Durchsenkungskurven einen qualitativ ähnlichen Verlauf auf. In Bild 5.20 sind zum Vergleich die Lastwegkurven der ersten, fünften und neunten Überfahrt für $T_\ell = 0.5$ s und $T_W = 0.05$ s dargestellt. Die maximalen Durchsenkungen $|w(x_m)|_{\max}$ bewegen sich dabei in einem Bereich von ± 0.4 mm, was einer Reduzierung der maximalen Durchsenkung von mehr als 95% gegenüber dem unregulierten Fall bedeutet. Für die Rückfahrten ergeben sich jeweils größere Durchsenkungen, da der Beobachter und der Regler hardwarebedingt nur für eine Fahrtrichtung ausgelegt werden können. Eine Veränderung der Wartezeiten hat keinen Einfluss auf die Ergebnisse.

5.2.4 Parametersensitivität

Die in Abschnitt 5.2.3 diskutierten Untersuchungen haben gezeigt, dass die optimale Regelung robust gegenüber Variationen der mittleren Überfahrgeschwindigkeit sowie des Geschwindigkeitsprofils ist. In diesem Abschnitt wird die Parametersensitivität der optimalen Regelung gegenüber den wichtigsten Parametern des Systems behandelt. Dazu wird eine Überfahrt mit konstanter Geschwindigkeit $v_m = 5$ m/s bei dem Modell F betrachtet und jeweils ein Parameter wie in Tabelle 5.4 angegeben verändert. Da die einzelnen Parameter eine unterschiedliche Sensitivität aufweisen, werden unterschiedliche Abweichungen vom Nominalwert untersucht. Bewertet wird die Parametersensitivität anhand der Abweichungen der maximalen Balkendurchsenkung an der Massenposition, verglichen mit dem exakt

Tabelle 5.4: Parametersensitivität der optimalen Regelung bei Überfahrt mit konstanter Geschwindigkeit $v_m = 5$ m/s und Wichtung des Energieverbrauchs nach \mathbf{R}_{k_3} für das Modell F.

Parameter	Nominalwert	Abweichung	Veränderung $\Delta w(x_m) _{\max}$	Verweis
Massengeschwindigkeit v_m	5 m/s	$\pm 40\%$	50%	Bild 5.21 (a)
Biegesteifigkeit EI	1550 Nm ²	$\pm 20\%$	225%	Bild 5.21 (b)
Massenposition x_m	0-2.483 m	$\pm 4\%$	325%	Bild 5.21 (c)
Fahrzeugmasse m	3.9 kg	$\pm 20\%$	175%	Bild 5.21 (d)
Mod. Dämpfung $\mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}(1, 1)$	1.7 Ns/m	+1000%	20%	Bild 5.21 (e)
Vorspannung F_{Vor}	59 N	$\pm 20\%$	175%	Bild 5.21 (f)

für das Nominalsystem ausgelegten Regler mit einer Wichtung des Energieverbrauchs nach \mathbf{R}_{k_3} (siehe Gl. (4.44) für das Modell F). Die zugehörigen Lastwegkurven sind in Bild 5.21 dargestellt.

Die untersuchten Parameter haben einen unterschiedlich starken Einfluss auf die Lastwegkurven des Systems. Neben den Parametern des Unterstützungsmechanismus, die hier nicht dargestellt werden, bewirkt eine Veränderung der Dämpfung des unregulierten Systems nur eine geringe Veränderung der Lastwegkurven. Dies wird bei der modalen Dämpfung des ersten Modes deutlich. Einen größeren aber im Vergleich immer noch geringen Einfluss hat die Veränderung der Massengeschwindigkeit (siehe auch Abschnitt 5.2.3). Den größten Einfluss auf das geregelte System haben Positionsfehler. Positionsfehler von 4% oder 0.1 m bewirken Vergrößerungen $\Delta|w(x_m)|_{\max}$ von 325%. Damit steigt $|w(x_m)|_{\max}$ von weniger als 0.1 mm auf über 0.3 mm an. Fehler in der Bestimmung der Biegesteifigkeit wirken sich vor allem an denjenigen Stellen des Balken aus, wo dieser nicht durch ein Lager oder die Stellkraft unterstützt wird. Die Variation der Vorspannung F_{Vor} in Balkenmitte durch die Vorspannfedern (vgl. Bild 2.4) bewirkt einen fast konstanten Offset und damit eine Parallelverschiebung der Lastwegkurve. Der maximale Fehler durch eine falsche Fahrzeugmasse ist in der Größenordnung des Fehlers durch die Variation der Vorspannung.

5.3 Vergleich der Regelungsansätze

Zum Vergleich der Ergebnisse für verschiedene Steuerungen und Regelungen werden die an der Versuchsanlage erreichbaren Durchsenkungen $|w(x_m)|_{\max}$ an der Massenposition betrachtet. Zusätzlich zu den in dieser Arbeit untersuchten Regelungsmethoden werden noch zwei Methoden, die FRISCHGESELL [19] untersucht hat, einbezogen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.5 für zwei konstante Massengeschwindigkeiten $v_m = 5$ m/s und $v_m = 10$ m/s zusammengefasst. Die Reduktion ist die Verringerung der Durchsenkung bezogen auf den

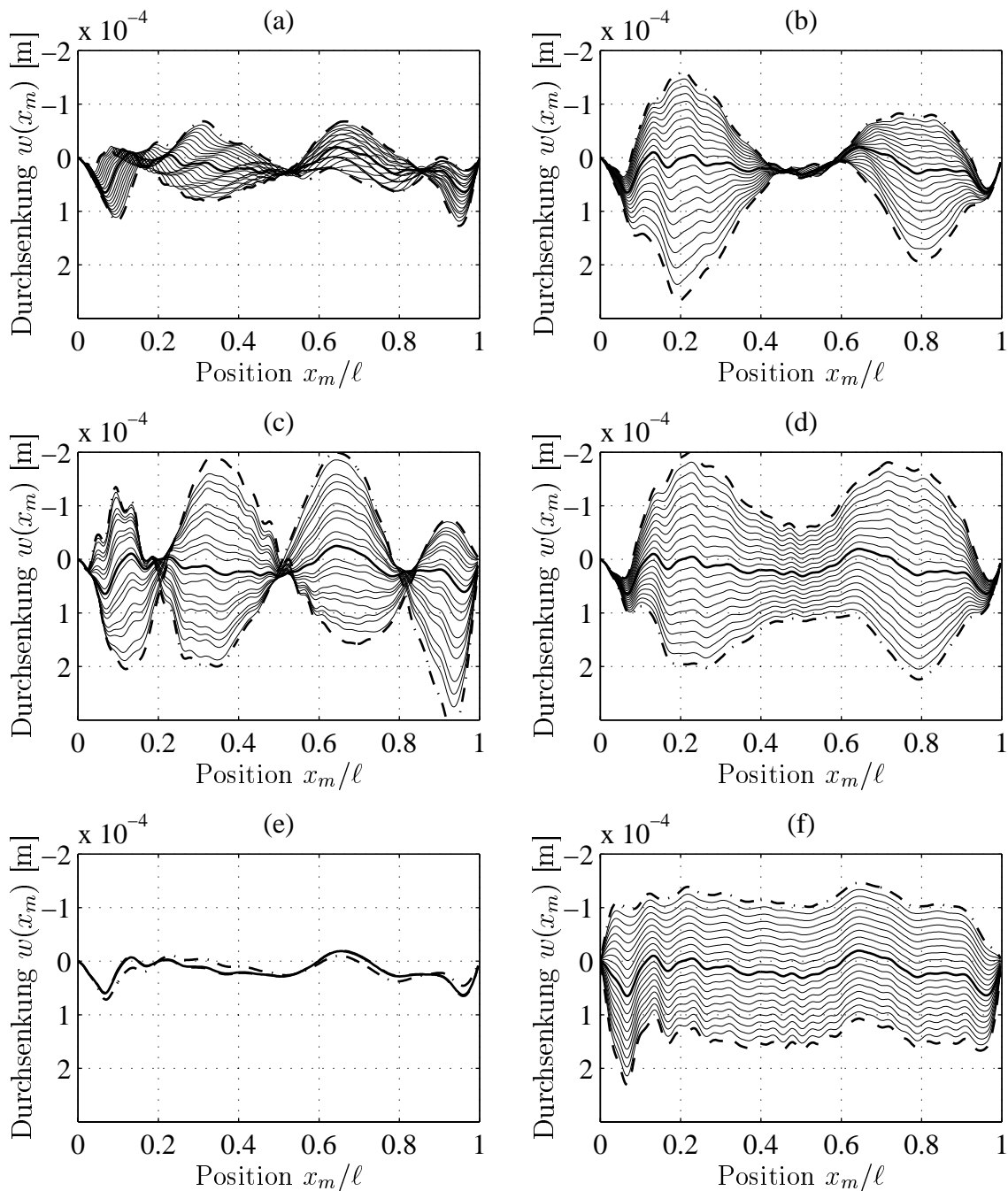


Bild 5.21: Parametersensitivität nach Tabelle 5.4 einer geregelten Überfahrt mit $v_m = 5$ m/s und \mathbf{R}_{k_3} für: (a) die Massengeschwindigkeit v_m ; (b) die Biegesteifigkeit EI ; (c) die Massenposition x_m ; (d) die Fahrzeugmasse m ; (e) die mod. Dämpfung $\mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}(1, 1)$; (f) die Vorspannung F_{Vor} . (Nicht veränderte Parameter sind fett durchgezogen, maximale sind strichpunktiert, minimale gestrichelt dargestellt.)

ungeregelten Fall für die jeweilige Geschwindigkeit. Die Systeme sind dabei so vorgespannt, dass die Durchsenkung in Balkenmitte im unbelasteten Fall Null ist.

Mit allen hier dargestellten Methoden lassen sich die Durchsenkungen an der Massenposition deutlich senken. Schon die reinen Steuerungen, die optimale nach FRISCHGESELL und

Tabelle 5.5: Vergleich der Messergebnisse für die maximale Durchsenkung an der Massenposition mit verschiedenen Regelungsmethoden.

Regelungsmethode	Modell	$v_m = 5 \text{ m/s}$		$v_m = 10 \text{ m/s}$	
		$ w(x_m) _{\max}$ [mm]	Reduk- tion	$ w(x_m) _{\max}$ [mm]	Reduk- tion
Ungeregelt	F	5.5	—	8.0	—
Optimale Steuerung nach FRISCHGESELL	FM	0.5	91%	0.6	93%
Zustandsregelung nach FRISCHGESELL	FM	1.1	80%	1.2	85%
Zustandsregelung mit KALMAN Filter	F	0.8	85%	1.0	88%
Adaptive Steuerung	F	1.0	82%	—	—
Zustandsregelung mit adaptiver Führungsgröße	F	0.2	96%	0.4	95%
Optimale Regelung	F	0.15	97%	0.2	98%

die adaptive Steuerung, senken die Durchsenkungen im Vergleich zum unregulierten Fall für eine Massengeschwindigkeit von $v_m = 5 \text{ m/s}$ um mehr als 80%. Dies gilt bei der optimalen Steuerung auch für $v_m = 10 \text{ m/s}$. Damit sind die Ergebnisse dieser Steuerung besser als die Ergebnisse der reinen Zustandsregler. Um die maximale Durchsenkungen an der Massenposition weiter zu verringern, müssen die Methoden der Zustandsregelung mit adaptiver Führungsgröße oder die optimale Regelung angewendet werden. Mit diesen Methoden lassen sich Reduktionen der maximalen Durchsenkungen an der Massenposition von bis zu 98% erreichen.

Die einzelnen Methoden haben jedoch Vor- und Nachteile. Alle Methoden haben gemeinsam den Nachteil, dass für sie die Position der bewegten Masse möglichst exakt bekannt sein muss. Bei allen Methoden außer der adaptiven Steuerung muss zusätzlich auch die Fahrzeugmasse bestimmt werden. Dem Vorteil der optimalen Steuerung nach Frischgesell, dass es keine Stabilitätsprobleme gibt, steht entgegen, dass die Durchsenkungen durch die Regelung mit adaptiver Führungsgröße oder die optimale Regelung weiter verringert werden. Der Vorteil der Regelung mit adaptiver Führungsgröße ist das zugrunde liegende relativ einfache Systemmodell im Vergleich zur optimalen Regelung. Dafür ist experimenteller Aufwand für den Adaptionsvorgang nötig. Die optimale Regelung dagegen benötigt bei der Berechnung viel Rechenzeit (P200, 64MB; $v_m = 5 \text{ m/s}$, 3 Moden, 330 Zeitschritte: $\approx 1 \text{ h}$).

6 Zusammenfassung

Elastische Strukturen werden durch bewegte Lasten insbesondere bei beschleunigten oder sich wiederholenden Bewegungsvorgängen zu Schwingungen angeregt. In dieser Arbeit wird die aktive Schwingungsbeeinflussung durch Regelung solcher Strukturen untersucht.

Zur experimentellen Untersuchung der Schwingungsreduzierung wird ein Versuchsaufbau verwendet, der aus einer Linearführung als elastischer Fahrweg besteht, auf der eine Masse mit verschiedenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bewegt wird. Durch verschiedene Unterstützungsmechanismen können unterschiedliche Stellgrößen in den Fahrweg eingeleitet werden. Zur Bestimmung der Lastwegkurve wird mit einem selbstentwickelten Messsystem die vertikale Abweichung der Massenposition von einem Laserstrahl als horizontale Referenzgerade bestimmt. Somit können die theoretisch entwickelten Methoden zur Schwingungsreduzierung auf ihre praktische Anwendbarkeit hin getestet werden.

Ein mathematisches Modell dieses Systems wird sowohl für die Simulation des Bewegungsverhaltens als auch für den Entwurf von Regelungen benötigt. Dieses Modell wird mit der Methode der finiten Elemente entwickelt, da auf diese Weise auch komplexe Strukturen und die bewegte Masse modelliert werden können. Trotz der Diskretisierung durch finite Elemente ist die Anzahl der Freiheitsgrade und damit die Systemordnung noch zu groß, um das System mit vertretbarem Aufwand zu simulieren und Regler auszulegen. Zur Reduzierung der Ordnung wird eine modale Transformation angewendet, durch welche nur noch die signifikanten Moden betrachtet werden. Simulationen und Vergleiche mit Messungen zeigen, dass für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, die an der Versuchsanlage möglich sind, eine Modellierung mit drei Moden ausreicht. Das Modell ist durch die bewegte Masse zeitvariant. Untersuchungen einfacher beschleunigter Bewegungen mit unterschiedlichen Geschwindigkeitsprofilen zeigen, dass bei der Anregung der ersten Eigenschwingung Resonanzeffekte mit vergrößerten Amplituden auftreten. Bei mehrfachen Überfahrten führt auch die Anregung in der Eigenfrequenz bzw. eines ganzzahligen Vielfachen dieser zu Resonanzeffekten. Den größten Einfluss auf die Schwingungsamplituden des Balkens hat jedoch die mittlere Überfahrgeschwindigkeit. Bei Erreichen einer kritischen Geschwindigkeit werden die Schwingungsamplituden maximal.

Zur aktiven Beeinflussung des Systems werden zwei Regelungsstrategien untersucht. Die eine Strategie basiert auf einem einfachen Modell und verwendet adaptive Methoden, um das Regelungsziel einer horizontalen Überfahrt zu erreichen. Die andere Regelungsstrategie ist eine optimale zeitdiskrete Regelung, die aus der HAMILTON-Funktion des Systemmodells berechnet wird.

Eine adaptive Steuerung, die mit einem statischen Systemmodell und einem Adaptionalgorithmus die Durchsenkung an der Massenposition verringert, lässt sich nur für geringe Massengeschwindigkeiten von weniger als 1 m/s sinnvoll einsetzen. Für diesen quasistatischen

Fall können die Durchsenkungen an der Massenposition im Vergleich zum unregulierten Fall um mehr als 97% gesenkt werden. Für größere Massengeschwindigkeiten und dabei auch beschleunigte Bewegungen zeigt eine Regelung, der eine adaptive Führungsgröße vorgegeben wird, Vorteile. Mit dieser Regelung lassen sich für konstante Geschwindigkeiten bis 10 m/s und beschleunigte Bewegungen, bei der das System in Resonanz angeregt wird, die maximale Durchsenkung an der Massenposition um mehr als 90% des unregulierten Falles senken.

Bei der Berechnung der optimalen zeitdiskreten Regelung mittels der HAMILTON-Funktion lassen sich Störungen, wie sie von den Gewichtskraftanteilen des Balkens und der bewegten Masse hervorgerufen werden, berücksichtigen. Dieses resultiert neben dem Regelterm, welcher die Systemzustände zurückführt, in einem zusätzlichen Steuerterm. Aufgrund der zeitlich rückwärts schreitenden Berechnung sind zukünftige Auswirkungen gegenwärtiger Regeleinriffe im Regler enthalten. Durch die Wahl der Gewichtungsmatrizen in dem Gütekriterium lassen sich verschiedene Regelungsziele verfolgen. Es ist zum einen möglich, allein die Durchsenkung an der Massenposition zu minimieren. Zum anderen kann auch die gesamte Durchsenkung des Fahrwegs minimiert bzw. eine Mischung aus beiden Zielen verfolgt werden. Bei dem energetischen Vergleich verschiedener Stellmechanismen zeigt sich, dass Stellkräfte günstiger als Stellmomente sind. Das beste Nutzen-Aufwand-Verhältnis ergibt sich für eine einzelne Stellkraft in der Mitte des elastischen Fahrwegs. Wird mit diesem Stellmechanismus das Regelungsziel einer minimalen Durchsenkung an der Massenposition für konstante Massengeschwindigkeiten verfolgt, so ergeben sich Verringerungen der Durchsenkungen an der Massenposition um mehr als 97% im Vergleich zum unregulierten System. Dabei entstehen allerdings größere Abweichungen an anderen Stellen des Balkens. Durch eine Veränderung der Gewichtungen in dem Gütekriterium lässt sich jedoch gleichzeitig auch die maximale Durchsenkung der Struktur senken.

Die Untersuchung unterschiedlicher Anregungen durch einfache beschleunigte sowie mehrfache beschleunigte Überfahrten zeigen, dass die Systemdynamik des unregulierten Systems im regulierten Fall keine Auswirkung auf das Regelergebnis hat. Dies ermöglicht den Einsatz von Reglern, die den Bewegungsverlauf nur näherungsweise berücksichtigen. So kann ein Regler, der für eine konstante Geschwindigkeit ausgelegt ist, auch für verschiedene beschleunigte Bewegungen verwendet werden. Sensitivitätsuntersuchungen der Regelung ergeben z.B. eine geringe Abhängigkeit der Regelgüte von der Massengeschwindigkeit, dagegen aber eine starke Abhängigkeit der Regelgüte von den Parametern Fahrzeugmasse oder Fahrzeugposition. Dies bedeutet bei Anwendungen, dass solche sensitiven Parameter möglichst genau, eventuell kontinuierlich identifiziert oder gemessen werden müssen.

Die experimentellen Arbeiten belegen die reale Anwendbarkeit der entwickelten Methoden zur aktiven Schwingungsreduzierung. Die aktive Schwingungsreduzierung bietet dabei Möglichkeiten, insbesondere bei hochdynamischen Bewegungsvorgängen einer Masse auf einem elastischen Fahrweg, die Durchsenkungen und Schwingungen zu reduzieren, wie es mit passiven Maßnahmen nicht möglich wäre.

A Anhang

A.1 Berechnung der Reglerückführung nach KALMAN

Wird die Gewichtskraft des Fahrwegs und der bewegten Masse als externe Störung betrachtet, lässt sich für den Fall eines quadratischen Gütemaßes und eines unbeschränkten Steuervektors eine analytische Lösung für eine optimale Regelung eines linearen zeitdiskreten Systems bestimmen. Die Herleitung des optimalen Rückführgesetzes geht auf R. E. Kalman zurück und ist auch in [26] für den Fall eines zeitvarianten, zeitdiskreten Systems enthalten. Eine weitere Anwendung dieses Entwurfes ist für ein lineares, zeitinvariantes Eingrößensystem mit beschränktem Steuervektor in [10] beschrieben. Simulationen zeigen jedoch, dass der Stellbereich der Aktoren ausreicht.

Für die Berechnung eines optimalen Rückführgesetzes nach KALMAN wird das zeitdiskrete System des elastischen Fahrwegs mit bewegter Masse ohne die Gewichtskräfte in dem Störterm \mathbf{s}_k betrachtet

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1). \quad (\text{A.1})$$

Das zu minimierende quadratische Gütemaß ist die Summe zweier Ausdrücke aufsummiert über allen Zeitschritten N

$$J = \sum_{k=0}^N [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k]. \quad (\text{A.2})$$

Die Anfangsgewichtungsmatrix für die modale Verschiebung wird zu $\mathbf{Q}_0 \equiv \mathbf{0}$ gewählt, da der Anfangszustand \mathbf{x}_0 für $k = 0$ nicht durch \mathbf{u}_0 und alle anderen \mathbf{u}_k beeinflusst wird. Die Gewichtungsmatrix für den Energieverbrauch des letzten Stelleingriffs wird ebenfalls als $\mathbf{R}_N \equiv \mathbf{0}$ gewählt, weil der Steuervektor \mathbf{u}_N nur den Zustand \mathbf{x}_{N+1} beeinflusst, der außerhalb des betrachteten Zeitintervalls liegt.

Der Steuervektor \mathbf{u}_k beeinflusst für $k = 0, \dots, N - 1$ bei einem kausalen System alle Zustände $\mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_N$, nicht jedoch die vorangegangenen Zustände $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$. Die Forderung nach einem Minimum von J kann daher in die Forderung nach partiellen Minima überführt werden

$$J = J_{min} = \min_{\mathbf{u}_0} \min_{\mathbf{u}_1} \min_{\mathbf{u}_2} \cdots \min_{\mathbf{u}_{N-1}} \sum_{k=0}^N [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k]. \quad (\text{A.3})$$

Mit der Wahl der Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_0 \equiv \mathbf{0}$ und $\mathbf{R}_N \equiv \mathbf{0}$ kann Gl. (A.3) zu

$$\begin{aligned} J_{min} &= \min_{\mathbf{u}_0} [\mathbf{u}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1 \\ &+ \min_{\mathbf{u}_1} [\mathbf{u}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_2 + \cdots \\ &+ \min_{\mathbf{u}_k} [\mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \cdots \\ &+ \min_{\mathbf{u}_{N-1}} [\mathbf{u}_{N-1}^T \mathbf{R}_{N-1} \mathbf{u}_{N-1} + \mathbf{x}_N^T \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N] \cdots] \cdots] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

umgeformt werden. Um die Folge von Steuervektoren \mathbf{u}_k zu finden, für die das Gütemaß minimal wird, muss dieses so umgeformt werden, dass ein rekursives Gütemaß entsteht. Wird das verallgemeinerte Gütemaß

$$J^*(\mathbf{x}_k, N) = \sum_{j=k}^{N-1} [\mathbf{x}_{j+1}^T \mathbf{Q}_{j+1} \mathbf{x}_{j+1} + \mathbf{u}_j^T \mathbf{R}_j \mathbf{u}_j], \quad (\text{A.5})$$

welches sich für den Zustand \mathbf{x}_k auf Grund der Steuervektoren $\mathbf{u}_k \dots \mathbf{u}_{N-1}$ und der Folgezustände $\mathbf{x}_{k+1} \dots \mathbf{x}_N$ einstellt, verwendet, ergibt sich für Gl. (A.4)

$$\begin{aligned} J_{min} &= \min_{\mathbf{u}_0} [\mathbf{u}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1 + \min_{\mathbf{u}_1} [\mathbf{u}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_2 + \dots \\ &\quad + \min_{\mathbf{u}_k} [\mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + J^*(\mathbf{x}_{k+1}, N)] \dots]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Existiert eine positiv semidefinite Matrix \mathbf{J}_{k+1} , die mit dem quadrierten Zustand \mathbf{x}_{k+1} multipliziert wird, so dass für das verallgemeinerte Gütemaß

$$J^*(\mathbf{x}_{k+1}, N) = \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{J}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} \quad (\text{A.7})$$

folgt, ist sie auch positiv semidefinit, da das Gütekriterium für alle \mathbf{x}_k positive Werte annimmt, solange alle \mathbf{Q}_k positiv semidefinit und \mathbf{R}_k positiv definit sind, vgl. Abschnitt 4.3.1. Unter Verwendung von Gl. (A.7) und der Systemgleichung (A.1) kann Gl. (A.6) zu

$$\begin{aligned} J_{min} &= \min_{\mathbf{u}_0} [\mathbf{u}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1 + \min_{\mathbf{u}_1} [\mathbf{u}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_2 + \dots \\ &\quad + \min_{\mathbf{u}_k} [\mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{x}_{k+1}^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{x}_{k+1}] \dots]] \\ &= \min_{\mathbf{u}_0} [\mathbf{u}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1 + \min_{\mathbf{u}_1} [\mathbf{u}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_2 + \dots \\ &\quad + \min_{\mathbf{u}_k} [\mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{u}_k + (\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k)^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) (\mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k)] \dots]] \\ &= \min_{\mathbf{u}_0} [\mathbf{u}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1 + \min_{\mathbf{u}_1} [\mathbf{u}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_2 + \dots \\ &\quad + \min_{\mathbf{u}_k} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{A}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T [\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k] \mathbf{u}_k \\ &\quad + \mathbf{x}_k^T \mathbf{A}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k] \dots]]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

umgeformt werden.

Für den Entwurf einer Zustandsregelung werden die Zustände des Systems über eine Rückführ- oder Reglermatrix auf den Eingang des Systems nach

$$\mathbf{u}_k^* = -\mathbf{K}_k \mathbf{x}_k \quad (\text{A.9})$$

zurückgeführt. Im Falle eines von den Systemzuständen unabhängigen Steuervektors handelt es sich um eine reine Steuerung.

Ziel ist es jetzt, Gl. (A.8) so umzuformen, dass ein rekursives Bildungsgesetz für die Matrix \mathbf{K}_k bestimmt werden kann. Dazu müssen in Gl. (A.8) \mathbf{x}_k bzw. \mathbf{x}_k^T in denjenigen Termen, die auch \mathbf{u}_k bzw. \mathbf{u}_k^T enthalten, ersetzt werden. Dies ist möglich, wenn für \mathbf{K}_k

$$[\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k] \mathbf{K}_k = \mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k \quad (\text{A.10})$$

gilt. Wird Gl. (A.10) von rechts mit \mathbf{x}_k multipliziert und das Rückführgesetz für \mathbf{K}_k in die linke Seite eingesetzt, so folgt

$$\mathbf{B}_k^T(\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1})\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k = -[\mathbf{B}_k^T(\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1})\mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k]\mathbf{u}_k^* \quad (\text{A.11})$$

bzw. bei Transposition

$$\mathbf{x}_k^T \mathbf{A}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1}^T + \mathbf{J}_{k+1}^T) \mathbf{B}_k = -\mathbf{u}_k^{*T} [\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1}^T + \mathbf{J}_{k+1}^T) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k^T]. \quad (\text{A.12})$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie von \mathbf{Q}_{k+1} , \mathbf{R}_k und \mathbf{J}_{k+1} lassen sich \mathbf{x}_k bzw. \mathbf{x}_k^T in Gleichung A.8 eliminieren:

$$\begin{aligned} J_{min} &= \min_{\mathbf{u}_0} [\mathbf{u}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1 + \min_{\mathbf{u}_1} [\mathbf{u}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_2 + \dots \\ &\quad + \min_{\mathbf{u}_k} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{A}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k \\ &\quad \quad + [\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k^*]^T [\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k] [\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k^*] \\ &\quad \quad - \mathbf{u}_k^{*T} [\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k] \mathbf{u}_k^*] \dots]. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Da der Term $[\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k]$ positiv semidefinit ist, ist auch für alle $[\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k^*]$

$$[\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k^*]^T [\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k] [\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k^*] \geq 0 \quad (\text{A.14})$$

positiv semidefinit. Gl. (A.13) wird damit nur minimal, wenn die Steuervektoren \mathbf{u}_k gleich den Steuervektoren \mathbf{u}_k^* aus dem Rückführgesetz gewählt werden. Damit stellt Gl. (A.8) das optimale Regelungsgesetz dar. Für die Bestimmungsgleichung der Matrix \mathbf{J}_{k+1} wird $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k^*$ in Gl. (A.13) eingesetzt. Mit dem Rückführgesetz Gl. (A.9) für \mathbf{u}_k^* und Ausklammern von \mathbf{x}_k ergibt sich

$$\begin{aligned} J_{min} &= \min_{\mathbf{u}_0} [\mathbf{u}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1 + \min_{\mathbf{u}_1} [\mathbf{u}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_2 + \dots \\ &\quad + \min_{\mathbf{u}_k} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{A}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k \\ &\quad \quad - \mathbf{u}_k^{*T} [\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k] \mathbf{u}_k^*] \dots] \\ &= \min_{\mathbf{u}_0} [\mathbf{u}_0^T \mathbf{R}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}_1 + \min_{\mathbf{u}_1} [\mathbf{u}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}_2^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}_2 + \dots \\ &\quad \quad + \min_{\mathbf{u}_k} [\mathbf{x}_k^T \{ \mathbf{A}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k^T [\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k] \mathbf{K}_k \} \mathbf{x}_k] \dots]]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Der Inhalt der geschweiften Klammer muss nach der Definition in Gl. (A.7) gleich der Matrix \mathbf{J}_k sein. Somit lautet unter Verwendung von Gl. (A.10) das rekursive Bildungsgesetz für \mathbf{J}_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k &= \mathbf{A}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k^T [\mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{B}_k + \mathbf{R}_k] \mathbf{K}_k \\ &= \mathbf{A}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k - \mathbf{K}_k^T \mathbf{B}_k^T (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k \\ &= (\mathbf{A}_k^T - \mathbf{K}_k^T \mathbf{B}_k^T) (\mathbf{Q}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1}) \mathbf{A}_k. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Bei der Berechnung von \mathbf{J}_k und \mathbf{K}_k wird zunächst ein \mathbf{J}_N vorgegeben. Abhängig von den Anforderungen kann $\mathbf{J}_N = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{J}_N = \mathbf{S}$ mit einer positiv semidefiniten Matrix \mathbf{S} gewählt werden. Die Matrix \mathbf{S} gewichtet den Endzustand \mathbf{x}_N gemäß $J(\mathbf{x}_N, N) = \mathbf{x}_N^T \mathbf{S} \mathbf{x}_N$ gesondert. Anschließend wird mit Gl. (A.10) die optimale Rückführmatrix \mathbf{K}_{N-1} und mit Hilfe dieser die Matrix \mathbf{J}_{N-1} bestimmt.

Literatur

- [1] M. Abdel-Rohman, H. H. Leipholz, Structural control by PoleAssignment Method. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 104 Nr. EM5, S. 1159–1175, 1978.
- [2] M. Abdel-Rohman, A. H. Nayfeh, Active Control of Nonlinear Oscillations in Bridges. *Journal of Engineering Mechanics*, Bd. 113 Nr. 3, S. 335–348, 1987.
- [3] P. H. Bauer, K. Premaratne, J. Durán, A Necessary and Sufficient Condition for Robust Asymptotic Stability of Time-Variant Discrete Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Bd. 38 Nr. 9, S. 1427–1430, 1993.
- [4] R. E. Bellman, *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [5] R. Bogacz, K. Popp, S. Imielowski, H. Reckmann, Active and Passive Approach to Control of Guideway Subject to a Travelling Inertial Load. *SMART-98 NATO Advanced Research Workshop, Pultusk, Poland, June 16-19 1998*.
- [6] R. Bogacz, S. Imielowski, K. Popp, Dynamics of an Active and Passive Controlled Guideway Structure under a Moving Load. *ASME Summer Conference, Virginia Tech, June 27-30 1999*.
- [7] Borland International, Inc., *Borland C++ Benutzerhandbuch Version 5*. Scotts Valley, California, 1996.
- [8] The Math Works Inc., *Control System Toolbox User's Guide*. Natick, Mass., 1997.
- [9] Telemetrie Elektronik GmbH, *Bedienungsanleitung zu 2K0/3226*. Langenhagen, 2000.
- [10] G. W. Deley, G. F. Franklin, Optimal bounded control of linear sampled data systems with quadratic loss. *Journal of Basic Engineering (Transactions of the ASME)*, Vol. **87**, S. 349–363, 1965.
- [11] H. Domke, G. Sedlacek, Ortung und Identifizierung von Tragwerksschäden mit Hilfe der aktiven Verformungskontrolle bei quasistatischen und dynamischen Belastungen. *VDI Fortschrittsberichte Reihe 3, Nr. 603, 1986*.
- [12] A. Donges, R. Noll, *Lasermesstechnik*. Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1993.
- [13] dSPACE GmbH, *Cockpit-DSP Interface Library, Cockpit User's Guide*. Paderborn, 1997.
- [14] dSPACE GmbH, *MLIB-DSP Interface Library, MLIB User's Guide*. Paderborn, 1997.
- [15] dSPACE GmbH, *Real Time Interface to Simulink, RTI1003 User's Guide*. Paderborn, 1997.

- [16] dSPACE GmbH, *Trace-DSP Interface Library, Trace User's Guide*. Paderborn, 1997.
- [17] O. Föllinger, *Regelungstechnik*. Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1992.
- [18] T. Frischgesell, K. Popp and H. Reckmann, Modellierung und Regelung eines Handhabungsautomaten. *VDI Bericht 1315*, S. 349–363, 1997.
- [19] T. Frischgesell, Modellierung und Regelung eines elastischen Fahrwegs. *VDI Fortschrittsberichte Reihe 11, Nr. 248*, 1997.
- [20] T. Frischgesell, K. Popp, H. Reckmann and O. Schütte, Regelung eines elastischen Fahrwegs unter Verwendung eines variablen Beobachters. *Technische Mechanik, Heft 18(1)*, 1998, S. 45–55.
- [21] L. Frýba, *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*. Noordhoff Int. Publ., Groningen, 1972.
- [22] R. Gasch and K. Knothe, *Strukturodynamik: Kontinua und ihre Diskretisierung*. Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [23] V. Hahn, Direkte adaptive Regelstrategien für die diskrete Regelung von Mehrkörpersystemen. *Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1983*.
- [24] W. Kortüm, D. N. Wormley, Dynamic interactions Between Travelling Vehicles and Guideway Systems. *Vehicle System Dynamics*, Bd. 10, S. 285–317, 1981.
- [25] H. P. Lee, On the Dynamic Behaviour of a Beam with Accelerating Mass. *Archiv of Applied Mechanics*, Bd. 65, S. 564–571, 1995.
- [26] L. Lapidus, R. Luus, *Optimal Control of Engineering Process*. Blaisdell Publishing Company Watham Massachusetts Toronto London, 1967.
- [27] G. Ludyk, *Theoretische Regelungstechnik 2: Zustandsrekonstruktion, optimale und nichtlineare Regelsysteme*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1995.
- [28] The Math Works Inc., *Using Matlab Version 5*. Natick, Mass., 1997.
- [29] L. Merz, H. Jaschek *Grundkurs der Regelungstechnik*. Oldenbourg Verlag, München 1993.
- [30] P. C. Müller, Über die stetigen, linearen Mehrgrößensysteme mit zeitvariablen und konstanten Eingangsgrößen. *Regelungstechnik und Prozeßverarbeitung*, Heft 8, 18. Jahrg., S. 351–354, 1970.
- [31] P. C. Müller, Analysis and Optimization of Certain Qualities of Controllability and Observability for Linear Dynamical Systems. *Automatica*, Vol. 8, pp. 237–246, Pergamon Press, 1972.

- [32] H. G. Natke, *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Heidelberg, 1983.
- [33] Y. Y. Nazaruddin, Adaptive Regelung von Ein- und Mehrgrößensystemen auf Basis der Zustandsraumdarstellung. *Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1983*.
- [34] M. Olsson, Finite Element, Modal Coordinate Analysis of Structures Subjected to Moving Loads. *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 99 Nr. 1, S. 1–12, 1985.
- [35] M. Olsson, On the Fundamental Moving Load Problem. *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 145 Nr. 2, S. 299–307, 1991.
- [36] T. F. Peters, *The Development of Long-Span-Bridge Building*. ETH Zürich, 1981.
- [37] K. Popp, Beiträge zur Dynamik von Magnetschwebefahrzeugen auf geständerten Fahrwegen. *VDI Fortschrittsberichte Reihe 12, Nr. 35, 1979*.
- [38] K. Popp, W. Schiehlen, *Fahrzeugdynamik*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [39] S. S. Rao, T. S. Pan, Modeling, Control and Design of Flexible Structures: A Survey. *Applied Mechanics Review*, Bd. 43 Nr. 5, S. 99–117, 1990.
- [40] J. Roorda, Experiments in Feedback Control of Structures. *Proceedings of the IUTAM Symp. on Structural Control*, University of Waterloo, Ontario, Canada, June 4-7, S. 629-661, 1979.
- [41] The Math Works Inc., *Real-Time Workshop User's guide*. Natick, Mass., 1997.
- [42] H. Reckmann, K. Popp, Optimal control of an elastic guideway under a moving mass. *MOVIC'98* **2**, S. 589–594, 1998.
- [43] A. Schallenkamp, Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten. *Ingenieur-Archiv*, Bd. 8, S. 182–198, 1937.
- [44] The Math Works Inc., *Using Simulink Version 2*. Natick, Mass., 1997.
- [45] The Math Works Inc., *Signal Processing Toolbox User's Guide*. Natick, Mass., 1997.
- [46] T.T. Soong, H.G. Natke, From Active Control To Active Structures. *VDI - Schwingungstagung*, 1988.
- [47] D. Streck, Instabilitäten des geregelten Verhaltens aktiver unterspannter Biegetragwerke bei wachsenden Lastüberfahrgeschwindigkeiten. Diss. RWTH Aachen, 1989.
- [48] A. Thiemann, K. Premaratne, P. H. Bauer, Regions of Global Asymptotic Stability in Coefficient-Space for Linear Time-Variant Discrete-Time Systems. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Bd. 3, S. 403–406, 1999.

- [49] H. Unbehauen, *Regelungstechnik III: Identifikation, Adaption, Optimierung*. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1988.
- [50] F. Venancio Filho, Finite Element Analysis of Structures Under Moving Loads. *The Shock and Vibration Digest*, Bd. 10 Nr. 8, S. 27–35, 1978.
- [51] J. Vorbrüggen, Ein neues System zur Minimierung des Energiebedarfs bei der aktiven Verformungskontrolle. Diss. RWTH Aachen, 1999.
- [52] W. Weller, *Lernende Steuerungen* R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1985.

Unveröffentlichte Studien- und Diplomarbeiten:

- [53] H. Gerth, *Dynamische Programmierung zur optimalen Steuerung und Regelung eines elastischen Fahrwegs*. Diplomarbeit D7-248, Institut für Mechanik, Universität Hannover, 1998.
- [54] K. Von Hammel, *Auslegung von Aktoren zur Regelung eines elastischen Fahrwegs*. Diplomarbeit D7-256, Institut für Mechanik, Universität Hannover, 1998.
- [55] A. Oechtering, *Methoden zur adaptiven Regelung eines elastischen Fahrwegs*. Studienarbeit D6-516, Institut für Mechanik, Universität Hannover, 1999.
- [56] F. Gutzeit, *Untersuchung von beschleunigten Bewegungen auf einem geregelten elastischen Fahrweg*. Studienarbeit D6-542, Institut für Mechanik, Universität Hannover, 2001.
- [57] M. Neubauer, *Optimierung des Stellenergiebedarfs eines geregelten elastischen Fahrwegs*. Studienarbeit D6-546, Institut für Mechanik, Universität Hannover, 2002.

Lebenslauf

Name: Hanno Reckmann

Geburtsdatum: 21.11.1969

Geburtsort: Flensburg

Familienstand: verheiratet, 2 Kinder

Ehefrau: Daja Reddingius-Reckmann

Eltern: Hans-Joachim Reckmann
Marga Reckmann, geb. Holz

Schulbildung: Aug. 1976 – Jul. 1980 Grundschule Munkbrarup
Aug. 1980 – Mai 1989 Gymnasium Goetheschule Flensburg
Abschluss: Allgemeine Hochschulreife

Wehrdienst: Jan. 1990 – Dez. 1991 Marine

Studium: Okt. 1991 – Jul. 1996 Studium des Maschinenbaus
an der Universität Hannover
Schwerpunkte: Mechanik, Messtechnik,
Informatik, Konstruktionstechnik
Abschluss: Diplom

Berufstätigkeit: seit Sep. 1996 wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Institut für Mechanik
der Universität Hannover