

# **Der Plateau-Übergang im Quanten-Hall-Effekt: Experimente zur Temperatur- und Frequenzabhängigkeit**

Vom  
Fachbereich Physik der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
- Dr. rer. nat. -  
genehmigte Dissertation  
von

Dipl. Phys. Frank Hohls  
geboren am 14. Juni 1970 in Celle

Hannover, 2000

Referent: Prof. Dr. R. J. Haug  
Korreferent: Priv.-Doz. Dr. W. Apel  
Tag der Promotion: 29.06.2000  
Veröffentlichung: November 2000

# Abstract

The discovery of the quantum Hall effect (QHE) by Klaus von Klitzing in 1980 opened a rich and large field of research. The remarkable characteristic of the QHE is a quantized Hall conductivity  $\sigma_{xy}$  of a two-dimensional electron system (2DES) in high magnetic fields to exact integer multiples of  $e^2/h$  independent of sample details. Today it is widely accepted that the understanding of this phenomenon is strongly related to a disorder driven localization-delocalization transition of the 2DES. The plateau transition between different quantized values of  $\sigma_{xy}$  is interpreted by scaling theory as a quantum critical phase transition governed by a diverging localization length  $\xi \propto \delta E^{-\gamma}$ , where  $\delta E$  is the distance of the Fermi energy to a critical point and  $\gamma$  the universal scaling exponent. The common experimental approach uses a measurement of the transition width, e.g. determined by the half width  $\Delta$  of the Shubnikov-de Haas maxima in the longitudinal conductivity  $\sigma_{xx}$ , as function of sample width  $w$ , temperature  $T$ , voltage  $U$  or frequency  $f$ . Scaling behaviour manifests itself in power laws  $\Delta \propto T^\kappa$ ,  $U^a$ ,  $w^{-\gamma}$  and  $f^c$ .

In this thesis the plateau transition in the QHE was examined by experiments on the temperature ( $T = 30 \dots 800$  mK), voltage and frequency ( $f = 0 \dots 6$  GHz) dependence of the longitudinal conductivity  $\sigma_{xx}$ , addressing a number of different issues:

Very sensitive temperature and voltage dependent measurements of the conductivity  $\sigma_{xx}$  at temperatures down to  $T \leq 50$  mK, covering a conductivity range  $10^{-8} \cdot e^2/h < \sigma_{xx} < e^2/h$ , are used for tests of scaling behaviour far into the plateau. At low conductivities  $\sigma_{xx} \ll e^2/h$  the dominant transport mechanism is variable-range hopping (VRH). It is shown that even in this regime at filling factor differences up to  $\delta\nu = |\nu - \nu_c| \approx 0.3$  from the critical point  $\nu_c$  scaling behaviour can be observed. Therefore the critical regime extends far into the quantum Hall plateau and covers large parts of the filling factor range.

The second topic addressed is the conductivity right at the critical point. There are strong theoretical arguments for a universal critical conductivity  $\sigma_c$ , but most experiments deviate from this. Ruzin ascribed this to macroscopic carrier density inhomogeneities and proposed a theoretical model. In this work the prediction of this model is tested experimentally. Major predictions like temperature dependence are in agreement with my experiments, although there are deviations e.g. in the expected filling factor dependence. Therefore the experiment confirms the major idea of carrier inhomogeneities as cause of non-universality, though the theoretical model cannot explain all experimental findings.

The third part of this thesis studies fluctuations of the conductivity for small samples. It is shown that the conductivity fluctuations near the critical point of the quantum Hall plateau transition behave in the same way as conductance fluctuations of a 2DES at zero magnetic fields. Within the plateau transition the 2DES acts like a metal. The temperature dependence of the fluctuations is shown to be governed by the thermal length  $L_T = \sqrt{\hbar D/k_B T}$ , which is smaller than the phase coherence length governing the width of the plateau transition. This result also explains, why the saturation of the transition width at low temperatures and small samples is observable and not masked by conductance fluctuations.

The fourth and central issue of this thesis is the frequency dependence of the conductivity, derived from reflection measurements on a Corbino geometry. There have been very few experimental works on frequency scaling, and they yielded contradictory results. While measurements of Engel *et al.* are compatible with scaling  $\Delta \propto f^c$  with the theoretical expected exponent  $c = 0.43$ , the results of Balaban *et al.* contradict scaling. In this work a new experimental technique for high frequency measurements was realized and a more sophisticated scaling analysis was incorporated, taking into account both frequency and temperature, which cannot be neglected at moderate frequencies. The measured frequency dependence of the conductivity and the width  $\Delta$  of the plateau transition are found to be compatible with scaling, but result into a scaling exponent  $c \approx 0.6$ , significantly larger than expected from theory.

Though the analysis of the width of the plateau transition is a powerful tool, it is still an indirect method. The frequency dependent measurement also allows a direct determination of the localization length  $\xi$  for filling factors, at which the high frequency conductivity is governed by VRH. Polyakov and Shklovskii derived an analytical form for the frequency dependence of  $\sigma_{xx}$  in this regime, which is used in this work to deduce  $\xi$  from my data. The resulting lengths serve as a test for scaling behaviour far into the plateau. The experiment agrees with  $\xi \propto \delta\nu^{-\gamma}$ ,  $\gamma = 2.3$  from theory, as far as  $\delta\nu \approx 0.3$  from the critical point. This affirms the results of the temperature dependent measurements gained in the first part of this thesis.

Apart from the scaling analysis it is also of great interest, how the critical conductivity  $\sigma_c(f, \nu_c)$  at high frequencies depends on frequency and filling factor. My experiments show an insensibility on these parameter as predicted by scaling theory, but the critical value deviates with  $\sigma_c = 0.18 e^2/h$  from the proposed universal value  $0.5 e^2/h$ . This can be explained by the previous stated model of Ruzin *et al.* and agrees with the results of the second part of this work.

**Keywords: quantum hall effect, plateau transition, scaling**

**Schlagwörter: Quanten-Hall-Effekt, Plateau-Übergang, Skalierung**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES</b>	<b>11</b>
2.1. Erzeugung zweidimensionaler Elektronensysteme . . . . .	11
2.1.1. Heterostrukturen . . . . .	13
2.1.2. Zweidimensionalität durch Quantisierung . . . . .	15
2.2. Charakterisierung durch elektrischen Transport . . . . .	15
2.2.1. Drude-Leitfähigkeit und Einstein-Relation . . . . .	15
2.2.2. Streumechanismen . . . . .	17
2.3. Quanten-Hall-Effekt . . . . .	19
2.3.1. Landau-Quantisierung . . . . .	22
2.3.2. Shubnikov-de Haas-Oszillationen . . . . .	24
2.3.3. Quanten-Hall-Plateaus durch Lokalisierung . . . . .	26
2.3.4. Wert der Quantisierung . . . . .	28
2.3.5. Zustandsdichte im Quanten-Hall-Effekt . . . . .	30
<b>3. Lokalisierung und Skalierung</b>	<b>33</b>
3.1. Skalierungstheorie der Lokalisierung . . . . .	33
3.1.1. Lokalisierung und Skalierungsfunktion nicht wechselwirkender Elektronen . . . . .	33
3.1.2. Metall-Isolator-Phasenübergang . . . . .	36
3.1.3. Temperatur im Skalierungsbild . . . . .	38
3.2. Lokalisierung und Skalierungstheorie im QHE . . . . .	39
3.2.1. Lokalisierung im Magnetfeld . . . . .	39
3.2.2. Skalierungstheorie im QHE . . . . .	42
3.2.3. Numerische Resultate . . . . .	44
3.2.4. Begrenzte Systeme und dynamische Skalierung . . . . .	45
3.3. Skalierungsbild im experimentellen Test . . . . .	48
3.3.1. Temperaturskalierung . . . . .	48
3.3.2. Größenskalierung . . . . .	51
3.3.3. Stromskalierung . . . . .	52
3.3.4. Frequenzskalierung . . . . .	53
3.4. Zusammenfassung . . . . .	54

<b>4. Proben und experimentelle Techniken</b>	<b>57</b>
4.1. Verwendete Proben . . . . .	57
4.2. Corbino-Geometrie . . . . .	59
4.3. Tiefe Temperaturen . . . . .	61
4.3.1. Kryostat und Temperaturmessung . . . . .	61
4.3.2. Elektronische Temperatur – DC-Messung . . . . .	62
4.3.3. Hochfrequenz im Entmischungskryostaten . . . . .	62
<b>5. Skalierung im Hopping-Regime</b>	<b>67</b>
5.1. Breitenskalierung in niederbeweglichen Proben . . . . .	67
5.2. Mechanismus der Leitfähigkeit im lokalisierten Regime . . . . .	70
5.2.1. Variable-range hopping im QHE . . . . .	72
5.3. Transportexperimente im lokalisierten Bereich . . . . .	73
5.3.1. Messung kleiner Leitfähigkeiten . . . . .	75
5.3.2. Skalierungsverhalten im VRH-Regime . . . . .	77
5.3.3. Asymmetrie im variable range hopping . . . . .	83
5.3.4. Hopping durch elektrische Felder . . . . .	84
5.3.5. Proben mit anderen Unordnungspotentialen . . . . .	87
5.3.6. Interpretation der Asymmetrie des Plateau-Übergangs . . . . .	90
5.4. Zusammenfassung . . . . .	92
<b>6. Kritische Leitfähigkeiten</b>	<b>95</b>
6.1. Pro Universalität . . . . .	95
6.2. Modell zur Wirkung makroskopischer Unordnung . . . . .	97
6.3. Experimenteller Test der Unordnungseffekte . . . . .	103
6.3.1. Skalierung der Maxima der Leitfähigkeit . . . . .	104
6.3.2. Einfluss des Füllfaktors . . . . .	107
6.3.3. Sättigung des Leitwerts . . . . .	110
6.3.4. Einfluss der Geometrie . . . . .	113
6.4. Zusammenfassung . . . . .	115
<b>7. Fluktuationen im Plateau-Übergang</b>	<b>117</b>
7.1. Theorie der Fluktuationen . . . . .	117
7.1.1. Leitwertfluktuationen im diffusiven metallischen Transport . . . . .	118
7.1.2. Phasenkohärenz im QHE . . . . .	122
7.2. Fluktuationen im QHE . . . . .	124
7.2.1. Vergleich der Temperaturabhängigkeit von Breite und Fluktua- tionsamplitude . . . . .	125
7.2.2. Amplitude der Leitwertfluktuationen . . . . .	128
7.2.3. Analyse der Spektraldichte . . . . .	130
7.3. Zusammenfassung . . . . .	133

<b>8. Frequenzabhängigkeit im QHE</b>	<b>135</b>
8.1. Messung der Frequenzabhängigkeit . . . . .	135
8.1.1. Kalibrierung . . . . .	138
8.2. DC-Charakterisierung und Skalierungsverhalten . . . . .	142
8.3. Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit im Plateau-Übergang . . . . .	145
8.3.1. Kontaktwiderstand kontra Inhomogenitäten . . . . .	149
8.3.2. Kritische Leitfähigkeiten bei hohen Frequenzen . . . . .	152
8.3.3. Temperaturabhängigkeit bei hohen Frequenzen . . . . .	153
8.3.4. Skalierungsverhalten der Halbwertsbreite . . . . .	155
8.3.5. Test linearer Abhängigkeit der Halbwertsbreite . . . . .	157
8.4. Frequenzabhängiges variable-range hopping . . . . .	158
8.4.1. Theorie . . . . .	159
8.4.2. Leitfähigkeit im Plateau – Beurteilung der Kalibrierung . . . . .	159
8.4.3. Lokalisierungslänge im VRH-Regime . . . . .	161
8.5. Zusammenfassung . . . . .	166
<b>9. Zusammenfassung</b>	<b>169</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>173</b>
A.1. Skalierungsverhalten im isolierenden Bereich . . . . .	173
A.2. Bemerkungen zur Mittelung . . . . .	178
A.3. Einfluss der Mittelung auf die Fluktuationsamplitude . . . . .	179
A.4. Kapazitive Kopplung in Corbino-Geometrie . . . . .	181
A.5. Leistungsabhängigkeit für Probe P254 . . . . .	183
A.6. Imaginärteil der Frequenzabhängigkeit . . . . .	184
A.7. Imaginärteil und variable range hopping . . . . .	186
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>187</b>
<b>Symbole und Abkürzungen</b>	<b>197</b>



# 1. Einleitung

Die Entdeckung des Quanten-Hall-Effektes (QHE) durch Klaus v. Klitzing vor zwanzig Jahren [1] eröffnete ein reiches neues Forschungsfeld von Quanteneffekten in hohen Magnetfeldern, dessen Bedeutung inzwischen durch zwei Nobelpreise gewürdigt wurde. So wurde K. v. Klitzing bereits im Jahr 1985 für seine bahnbrechende Entdeckung ausgezeichnet. Im Jahr 1998 folgte die Verleihung des Preises an D. C. Tsui, H. L. Störmer und R. B. Laughlin für die Entdeckung [2] und Erklärung [3] des fraktionierten Quanten-Hall-Effektes.

Der Quanten-Hall-Effekt tritt in zweidimensionalen Elektronensystemen (2DES) in hohen Magnetfeldern ( $B > 1$  T) auf. Seinen Namen trägt er nach seiner Auswirkung auf den Hall-Widerstand, der durch den Quotienten  $R_{xy} = U_H/I$  des Stromes  $I$  und der senkrecht zum Stromfluss gemessenen Spannung  $U_H$  definiert ist. Edwin Hall fand 1879 [4], dass eine solche, zum Magnetfeld proportionale und zur Ladungsträgerkonzentration reziproke, Spannung auftritt. Die Entdeckung von v. Klitzing war, dass der Hall-Widerstand in einem Metall-Oxid-Silizium-Feldeffekttransistor bei Variation der Ladungsträgerkonzentration  $n_e$  abweichend vom erwarteten Verhalten  $R_{xy} \propto 1/n_e$  Stufen aufweist, deren Werte durch  $R_{xy} = R_K/n$  bestimmt sind. Dabei ist  $n$  eine ganze Zahl ist, und die v. Klitzing-Konstante hat den Wert  $R_K = h/e^2 = 25812,807 \Omega$ .

In der Folge dieser Entdeckung zeigte sich, dass es sich um ein generelles Phänomen zweidimensionaler Elektronensysteme handelt und die Werte der Stufen nicht von der Realisierung des 2DES abhängen, es muss nur von einer ausreichenden Qualität sein, wobei als Kennzeichen für diese Qualität ein möglichst kleiner Widerstand bei  $B = 0$  verwendet werden kann. Auf der Suche nach einem Elektronensystem von möglichst hoher Qualität konzentrierte sich die Forschung schnell auf so genannte Heterostrukturen auf Basis der III-V-Halbleiter Galliumarsenid (GaAs) und Aluminiumarsenid (AlAs). Mit diesen lassen sich zweidimensionale Elektronensysteme besonders hoher Qualität erzeugen, die auch Basis der Entdeckung des fraktionierten Quanten-Hall-Effekts waren, bei dem an die Stelle von  $n$  eine rationale Zahl  $\nu = p/q$  tritt.

Der Quanten-Hall-Effekt findet seit 1990 seine Anwendung in der Darstellung des Widerstandes im SI-Einheitensystem und löste den bis dahin benutzten, mechanisch extrem aufwendigen und gleichzeitig mit größerem Fehler verbundenen Thompson-Lampard-Kreuzkondensator ab. Die Darstellung der Einheiten mit der gleichen großen Präzision in allen Ländern ist eine Grundvoraussetzung für den globalisierten Austausch von Produkten und die verteilte Produktion in der modernen Industriegesellschaft.

## 1. Einleitung

Bald nach von Klitzings Entdeckung wurde die Lokalisierung von Elektronen als entscheidendes Konzept für das Verständnis des QHE erkannt. Die Lokalisierung ist nicht nur der Schlüssel zur Erklärung der quantisierten Werte der Plateaus im Hall-Widerstand, sondern spielt auch eine entscheidende Rolle für den Übergang zwischen verschiedenen Plateaus. Dieser ist dadurch bestimmt, dass die Lokalisierung für bestimmte kritische Magnetfelder aufgehoben wird. Der Übergang von lokalisierten zu nicht lokalisierten Elektronen zeigt Parallelen zum Metall-Isolator-Übergang der klassischen Skalierungstheorie. Khmel'nitskii [5] und Pruisken [6] übertrugen die Vorstellungen des klassischen Skalierungsbildes auf den QHE.

H. P. Wei *et al.* [7] führten die ersten quantitativen Analysen der Temperaturabhängigkeit des Plateau-Übergangs durch und fanden für die Breite des Übergangsbereiches eine Beziehung  $\Delta B \propto T^\kappa$ . Diese wurde von A. M. M. Pruisken [6] als Nachweis eines kritischen Phänomens analog zum Metall-Isolator-Übergang mit universellem Exponenten  $\kappa \approx 0,43$  interpretiert.

Der Plateau-Übergang wurde in der Folge dieses Experiments in verschiedenen Materialien (z. B. [8]), in Abhängigkeit von der Probengröße [9], der Frequenz [10, 11] und dem Strom [12] untersucht. Dabei zeigte sich, insbesondere die Universalität betreffend, kein einheitliches Bild. Es ist unklar, ob experimentell beobachtete Abweichungen vom universell postulierten Exponenten [8] grundsätzlicher Natur oder nur auf den experimentell zugänglichen Parameterbereich zurückzuführen sind. Auch gibt es grundsätzliche Zweifel an der kritischen Natur des Plateau-Übergangs [11].

In dieser Arbeit sollen verschiedene Aspekte des Übergangs zwischen benachbarten Quanten-Hall-Plateaus experimentell untersucht werden. Die Gliederung ist wie folgt:

Für den nicht mit diesem Gebiet der Physik vertrauten Leser wird im Kapitel 2 eine Einführung in die Erzeugung und Charakterisierung eines zweidimensionalen Elektronensystems und das Verständnis des Quanten-Hall-Effekts gegeben. Hierbei ist die Behandlung auf den ganzzahligen QHE beschränkt, da nur dieser im Experiment untersucht wird.

Im Kapitel 3 wird zunächst eine Einführung in die herkömmliche Skalierungstheorie der Leitfähigkeit ohne Magnetfeld gegeben. Diese dient als Ausgangspunkt für die Skalierungstheorie im Quanten-Hall-Regime. In diesem Teil wird auch das Konzept der Lokalisierung und die Folgerungen aus einem kritischen Verhalten der Lokalisierungslänge dargestellt. Den Abschluss des Kapitels bildet ein Überblick über die bisherigen relevanten Experimente.

Die verwendeten Proben sowie einige experimentelle Grundlagen werden in Kapitel 4 behandelt, soweit die Informationen nicht in den folgenden Kapiteln im Zusammenhang mit der Präsentation der Ergebnisse der Experimente gegeben werden.

Den ersten Schwerpunkt bildet Kapitel 5, in dem die Leitfähigkeit am Rande der Hall-Plateaus untersucht wird. In diesem Bereich zeigt die Leitfähigkeit eine starke Temperaturabhängigkeit und wird durch so genanntes *variable-range hopping* (VRH) bestimmt. Mit Hilfe der Theorie des VRH kann die Lokalisierung der Elektronen aus der Leitfähigkeit bestimmt und die Abhängigkeit vom Magnetfeld untersucht werden. Für diese Experimente werden Proben benutzt, die kein universelles Verhalten des

Plateau-Übergangs zeigen.

Das folgende Kapitel 6 untersucht eine noch nicht genannte Konsequenz der Skalierungstheorie: Die Leitfähigkeit am kritischen Punkt des Plateau-Übergangs sollte demnach für verschiedene Plateaus und auch für verschiedene Proben immer den gleichen universellen Wert zeigen. Insbesondere letzterem widerspricht das Experiment. Hierzu haben Ruzin *et al.* [13] eine Begründung vorgeschlagen, deren experimentelle Prüfung in diesem Kapitel vorgestellt wird.

In kleinen Proben treten Fluktuationen der Leitfähigkeit auf. Sie enthalten Informationen über mikroskopische Längenskalen und führen außerdem in Verbindung mit der Skalierungstheorie zu interessanten Konsequenzen. Insbesondere zeigt sich, dass es zwei relevante Längenskalen gibt, von denen eine die Fluktuation und die andere das Skalierungsverhalten bestimmen. Die Untersuchung der Fluktuationen ist in Kapitel 7 zu finden.

Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit ist die Analyse der Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit im Plateau-Übergang. Bisher gibt es erst zwei experimentelle Aussagen zur Frage des Skalierungsverhaltens mit der Frequenz [10, 11], die einander widersprechen, so dass dringender Bedarf an weiteren Experimenten besteht. Im Kapitel 8 werden die Ergebnisse der in dieser Arbeit hierzu durchgeführten Messungen ausführlich dargestellt und analysiert.



## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

Der Quanten-Hall-Effekt ist ein universelles Phänomen von auf zwei Dimensionen reduzierten Ladungsträgern in hohen Magnetfeldern. Dieser Effekt stellt eine Modifizierung des bereits 1879 von Hall [4] entdeckten Phänomens dar, dass im senkrecht angelegten Magnetfeld  $B$  bei Fluss eines elektrischen Stromes  $I$  eine Spannung  $U_H$  senkrecht zur Stromrichtung entsteht. Dieser kann der Hall-Widerstand mit der Definition  $R_{xy} = U_H/I$  zugeordnet werden, für den Hall die Beziehung  $R_{xy} \propto B$  fand.

In einem zweidimensionalen System nimmt dieser Widerstand für größere Magnetfeldbereiche Werte  $R_{xy} = h/(ne^2)$  an, wobei  $n$  eine ganze Zahl ist. Die wesentliche Voraussetzung für die Entdeckung dieses Quanten-Hall-Effekt (QHE) genannten Phänomens durch v. Klitzing im Jahr 1980 [1] war, ein solches zweidimensionales System mit einer ausreichend hohen Beweglichkeit zu erzeugen.

Elektronensysteme in Festkörpern sind zunächst frei in allen drei Raumrichtungen. Die rasche Expansion der Halbleitertechnologie nach der Erfindung des Transistors führte zu technologischen Fortschritten, die ab den 60er Jahren einen Einschluss der Elektronen auf zunächst zwei, später auch auf eine oder „null“ Dimensionen ermöglichten, was die Beobachtung und Anwendung einer Fülle neuer Phänomene, die auf der reduzierten Dimensionalität beruhen, zur Folge hatte.

Im Folgenden werden zunächst die Erzeugung und einige grundsätzliche Eigenschaften von in zwei Dimensionen eingeschlossenen Elektronen, zweidimensionales Elektronensystem (2DES) genannt, dargestellt. Über diese kurze Darstellung hinausgehende Informationen sind z.B. in [14, 15] zu finden. Im zweiten Abschnitt werden die klassischen elektrischen Transporteigenschaften dargestellt. Hier wird auch der klassische Hall-Effekt vorgestellt. Der abschließende dritte Abschnitt gibt eine Einführung in den Quanten-Hall-Effekt und verwandte Phänomene.

### 2.1. Erzeugung zweidimensionaler Elektronensysteme

Eine Möglichkeit des Einschlusses von Elektronen bezüglich einer Dimension sind Potentiale an der Oberfläche kondensierter Materie (Festkörper, Flüssigkeiten), besonders schön mit Elektronen auf flüssigem Helium realisiert [16, 17]. Die technologisch interessantere Möglichkeit ist die Realisierung eines 2DES an der Grenzfläche zweier Festkörper. Dies wurde zunächst im Si-MOSFET (*metal oxide semiconductor field effect transistor*) realisiert [18]. Hierbei wird auf p-dotiertem Silizium eine isolierende Schicht Siliziumoxid (durch thermische Oxidation des Siliziums) und auf dieses

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

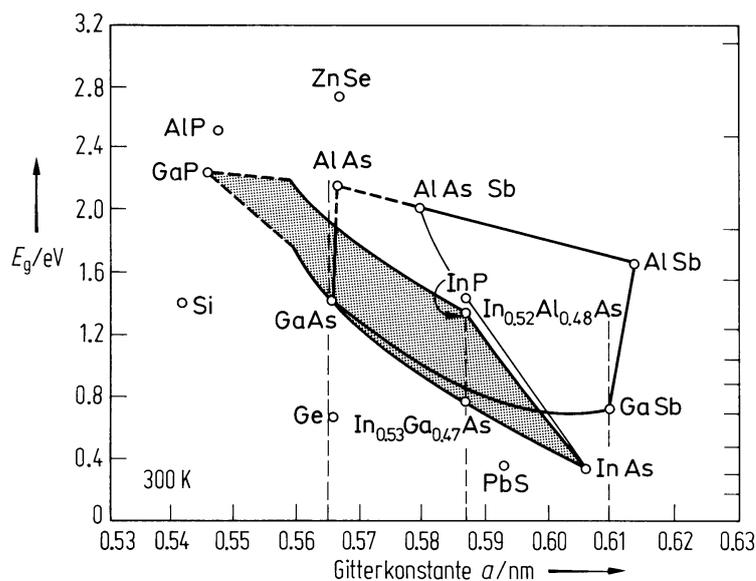


Abbildung 2.1.: Bandabstand  $E_g$  und Gitterkonstante  $a$  verschiedener Halbleiter; Linien zeigen verschiedene ternäre (drei Elemente) und quaternäre (vier Elemente) Legierungen an. Mögliche Kombinationen für Heterübergänge liegen nahe einer senkrechten Linie (nach [19]).

Oxid eine Metallisierung aufgebracht. Durch Anlegen einer positiven Spannung wird das Leitungsband im Silizium unter die Fermienergie gezogen, und es bildet sich ein dreieckiger Potentialtopf direkt an der Grenze zum Oxid, in dem sich die Elektronen sammeln.

Neue Systeme entstanden durch Kombination verschiedener Halbleitersysteme. Die Kombination der Elementarhalbleiter Silizium und Germanium erweist sich für die Erzeugung eines 2DES von höchster Beweglichkeit als problematisch, da sich die atomaren Abstände in ihren Gittern stark unterscheiden (vgl. Abbildung 2.1), so dass sich beim Aufwachsen an der Grenzschicht zwischen den Halbleitern Versetzungen und Fehler bilden, die die Bewegung der Elektronen entlang dieser Grenzschicht behindern und die Eigenschaften des 2DES verschlechtern. Jedoch sind auch bei diesem System Fortschritte gelungen.

Ein reiches Feld von Anwendungen hat jedoch inzwischen die Kombination verschiedener Halbleiter gefunden, die aus Elementen der III. und V. bzw. der II. und VI. Hauptgruppe zusammengesetzt werden. Durch Kombination von drei oder vier Elementen zu ternären oder quaternären Halbleitern ist es möglich, die für die Anwendung wichtigen Parameter Gitterkonstante und Bandlücke in einem weiten Umfang zu variieren. In Abbildung 2.1 sind diese Parameter für eine Anzahl aus zwei Elementen bestehende Halbleiter durch Punkte gekennzeichnet. Die eingezeichneten Linien entsprechen einer Auswahl der Möglichkeiten, Bandlücke und Gitterkonstante durch ternäre Verbindungen zu wählen. Die graue Fläche zeigt eine geringe Auswahl der Möglichkeiten quaternärer Verbindungen.

Geeignet ausgewählte Verbindungen, deren Gitterkonstante sich nur wenig un-

terscheidet, können schichtweise mit nahezu perfekter Kristallstruktur aufgewachsen werden. Mit Hilfe dieser Heterostrukturen lassen sich zweidimensionale Elektronengase hoher Qualität erzeugen.

### 2.1.1. Heterostrukturen

Zu dem Modellsystem zweidimensionaler Elektronensysteme hat sich die Kombination der Halbleiter GaAs, AlAs und die ternäre Legierung  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  aus der III-V-Gruppe entwickelt. In diesem Halbleiter lässt sich die Bandlücke durch Variation von  $0 < x < 1$  stufenlos zwischen den Werten von GaAs und AlGaAs einstellen. Die Gitterkonstanten von GaAs und AlAs sind nahezu identisch. Ein weiteres System mit Gitteranpassung ist die Kombination InP,  $\text{In}_{0,53}\text{Ga}_{0,47}\text{As}$  und  $\text{In}_{0,52}\text{Al}_{0,48}\text{As}$ . Bandlücke und Gitterkonstante verschiedener Halbleiter sind in Abbildung 2.1 abgebildet. Mittels Molekularstrahlepitaxie (MBE) lassen sich diese Materialien praktisch ohne Gitterfehler auf einzelne Atomlagen genau aufeinander aufwachsen. Durch die unterschiedlichen Bandlücken der Materialien (1.4 eV für GaAs und 2.2 eV für AlAs) bildet sich an der Grenzfläche im Leitungsband und im Valenzband ein Bandkantensprung, dessen Höhe durch den Aluminium-Anteil eingestellt werden kann. Auch kann durch eine graduelle Variation des Aluminium-Anteils im  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  ein kontinuierlicher Potentialverlauf erzeugt werden. Mit diesem System kann also in Wachstumsrichtung ein (nahezu) beliebiger Potentialverlauf erzeugt werden (*band gap engineering*).

Bettet man eine dünne (10 nm) Schicht GaAs zwischen zwei AlGaAs Schichten, so entsteht in Wachstumsrichtung ein Rechteckpotential im Leitungsband. Werden durch Dotierung der AlGaAs-Schichten Elektronen zur Verfügung gestellt, sammeln sich diese im Potentialtopf und sind so in Wachstumsrichtung lokalisiert. Diese Schicht von Elektronen bilden ein 2DES. Da sich die Elektronen in undotiertem GaAs aufhalten und die Grenzflächen zum AlGaAs und damit die Wände des Potentials atomar glatt sind, werden die Elektronen bei ihrer Bewegung in den verbleibenden zwei Raumrichtungen kaum gestreut und erlangen eine hohe Beweglichkeit.

Die hohe Beweglichkeit prädestiniert solche Strukturen für elektrische Anwendungen. Sie bilden die Basis für HEMTs (*high electron mobility transistor*), die als Verstärker in Satellitenempfängern und mobilen Kommunikationsgeräten (Handy) zum Einsatz kommen.

Noch weniger Streuzentren und damit eine noch höhere Beweglichkeit lassen sich durch modulationsdotierte Heterostrukturen erreichen [20]. In Abbildung 2.2 ist eine solche Struktur dargestellt. Auf ein (meist (100) orientiertes) GaAs-Substrat wird zunächst eine hier nicht eingezeichnete GaAs/AlGaAs-Pufferschicht aufgewachsen, die Verunreinigungen des Substrats einschließt und anfängliche Oberflächendefekte ausgleicht. Anschließend wird eine dicke Schicht nominell undotiertes (tatsächlich durch Kohlenstoff aus dem Restgas<sup>1</sup> schwach p-dotiertes) GaAs aufgewachsen, die am Ende eine nahezu perfekte Kristallstruktur und eine atomar glatte Oberfläche aufweist. Es folgt eine nominell undotierte Schicht  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ , wobei der typische Al-Gehalt etwa

<sup>1</sup>und dies trotz eines Vakuums mit Druck  $p < 10^{-11}$  mbar

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

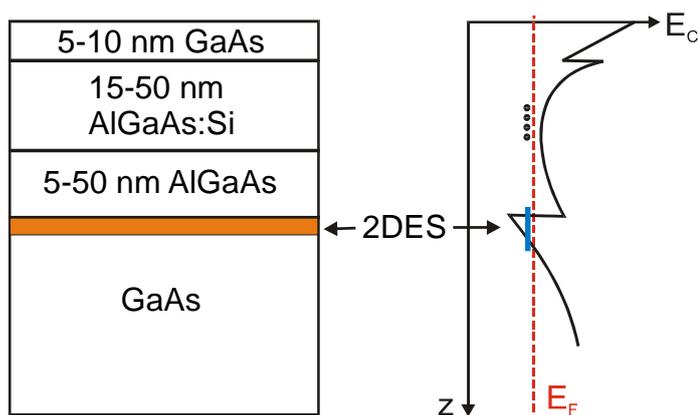


Abbildung 2.2.: Links: Typischer Aufbau einer modulationsdotierten GaAs/AlGaAs-Heterostruktur, aufgewachsen von unten nach oben; rechts: Schematischer Verlauf der Leitungsbandkante mit Fermienergie, Position der Dotierniveaus und Energie des 2DES im Potentialtopf

$x=30\%$  beträgt. Der Aluminium-Anteil ergibt sich aus der Forderung, dass einerseits  $x$  und damit der Unterschied in den Bandlücken möglichst groß sein soll, andererseits mit steigendem Aluminium-Anteil das X-Minimum abgesenkt wird und  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  für  $x > 0,45$  ein indirekter Halbleiter ist. Es folgt eine mit Silizium n-dotierte Schicht AlGaAs, die Elektronen zur Verfügung stellt. Die Oberfläche wird durch eine GaAs-Schicht geschützt, da sonst der Sauerstoff der Luft das AlGaAs oxidiert.

Der Bandkantenverlauf, der sich in dieser Struktur einstellt, ist rechts in Abbildung 2.2 dargestellt. Der Verlauf wird durch die Fixpunkte der Fermienergie bestimmt: An der Oberfläche ist die Fermienergie in der Mitte der Bandlücke fixiert. Die Si-Donatoren werden nur zu einem geringen Teil ionisiert, so dass im dotierten AlGaAs die Fermienergie zwischen den Donatorniveaus und der Leitungsbandkante liegt. Die von den ionisierten Donatoren zur Verfügung gestellten Elektronen sammeln sich im GaAs an der Grenzfläche zur undotierten AlGaAs-Barriere und bilden mit den positiven Donatorionen ein Dipolfeld aus. Da die Fermienergie im GaAs wieder eine Position in der Bandlücke zwischen den p-Donatorniveaus und dem Valenzband einnehmen möchte, steigt die Leitungsbandkante mit zunehmendem Abstand zur Grenzfläche relativ zur Fermienergie an. Es bildet sich also ein dreiecksförmiger Potentialtopf aus. Die Höhe der Fermienergie im Potentialtopf, damit verbunden die Anzahl der Elektronen (typisch einige  $10^{15}/\text{m}^2$ ) und auch die Steigung des Potentialtopfes, wird durch die Dicke und die Hintergrunddotierung der nominell undotierten AlGaAs-Barriere (5-50 nm) sowie die Dotierkonzentration im gewollt dotierten Bereich bestimmt. Die typische Breite des Potentialtopfes und entsprechend die Dicke des 2DES an der Fermienergie beträgt 5-20 nm. Wie zweidimensional dies ist, wird im folgenden Abschnitt erläutert.

Alle im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Proben entsprechen von ihrem grundlegenden Aufbau dieser modulationsdotierten GaAs/AlGaAs-Heterostruktur. Die untersuchten Konzepte treffen jedoch auf jedes zweidimensionale elektronische System zu.

### 2.1.2. Zweidimensionalität durch Quantisierung

Für eine korrekte Beschreibung des Elektronensystems muss die zeitunabhängige Schrödingergleichung gelöst werden, die sich in einen Anteil in Wachstumsrichtung (im Folgenden  $z$ ) und einen Anteil in der  $x$ - $y$ -Ebene separieren lässt:

$$\hat{H}\Psi(x, y, z) = (\hat{H}_{xy} + \hat{H}_z)\Psi_{xy}(x, y)\Psi(z) = (E_{xy} + E_z)\Psi_{xy}(x, y)\Psi_z(z). \quad (2.1)$$

Für die  $z$ -Komponenten gilt also eine eindimensionale Schrödingergleichung, die als Lösung für einen Potentialtopf  $V(z)$  diskrete Energieeigenwerte aufweist.

$$\hat{H}_z\Psi_z = E_z^i\Psi_z. \quad (2.2)$$

Alle Lösungen zu einem Energieeigenwert  $E_z^i$  der eindimensionalen Schrödingergleichung in  $z$  werden zu einem Subband zusammengefasst. Ein Elektronensystem ist nur dann im strengen Sinne zweidimensional, wenn nur das unterste Subband besetzt ist, also das System in  $z$ -Richtung durch nur eine Wellenfunktion und eine Energie beschrieben ist.

Aufgrund der hohen Potentialbarriere klingt die Wellenfunktion der Elektronen in  $z$ -Richtung im AlGaAs schnell ab, so dass die Elektronen nur die Eigenschaften des reinen GaAs aufweisen. Ohne Magnetfeld und in der Näherung eines isotropen parabolischen Bandminimums, das in GaAs durch eine isotrope effektive Masse  $m^* = 0.067m_e$  ( $m_e$  freie Elektronenmasse) berücksichtigt wird, ergibt sich in der  $x$ - $y$ -Ebene die Dispersionsrelation eines freien Elektronengases:

$$E(x, y) = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2). \quad (2.3)$$

Die zweidimensionale Zustandsdichte ist unter Berücksichtigung der Spin-Entartung:

$$N(E) = \frac{g_s m^*}{2\pi\hbar^2}. \quad (2.4)$$

Dies ergibt die Bedingung  $n_e < N(E)(E_z^1 - E_z^0)$  an die Elektronenkonzentration, um zweidimensionales Verhalten zu beobachten.

## 2.2. Charakterisierung durch elektrischen Transport

### 2.2.1. Drude-Leitfähigkeit und Einstein-Relation

Im Experiment werden die elektrischen Transporteigenschaften des zweidimensionalen Elektronensystems untersucht. Die später benötigten Transportgrößen werden nun kurz anhand der klassischen Drude-Theorie [21] eingeführt. In linearer Näherung für kleine Stromdichten  $\vec{j}$  und elektrische Felder  $\vec{F}$  gilt unter der Annahme von Isotropie:

$$\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{F} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} = \hat{\rho}^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (2.5)$$

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

$\hat{\sigma}$  ist der Leitfähigkeitstensor und  $\hat{\rho}$  der dazu inverse Widerstandstensor. In der Drude-Theorie ohne Magnetfeld ergibt sich

$$\sigma_{xx} = en_e\mu_e = \frac{1}{\rho_{xx}}, \quad \mu_e = e\tau/m^*. \quad (2.6)$$

Die Beweglichkeit  $\mu_e$  bestimmt die Driftgeschwindigkeit  $v_{\text{drift}} = -\mu_e F$  im elektrischen Feld und ergibt sich aus der mittleren Zeit  $\tau$  zwischen zwei Stößen des Elektrons mit der atomaren Umgebung.

Für den später noch wichtigen Fall einer nicht konstanten Zustandsdichte  $N(E)$  wird die Leitfähigkeit durch die Einstein-Relation mit den Eigenschaften des Elektronensystems bei der Fermienergie  $E_F$  verknüpft:

$$\sigma_{xx} = e^2 N(E_F) D. \quad (2.7)$$

Die Diffusionskonstante  $D$  ist durch die Fermigeschwindigkeit  $v_F$  und die Streuzzeit bestimmt. In zwei Dimensionen gilt:

$$D = \frac{1}{2} v_F^2 \tau = \frac{l^2}{2\tau}. \quad (2.8)$$

Die Größe  $l = v_F \tau$  heißt freie Weglänge. Sie gibt den mittleren Weg eines Elektrons zwischen zwei Stößen an. Für ein freies Elektronengas gilt

$$v_F^2 = \frac{2}{m^*} E_F = \frac{2}{m^*} \frac{n_e}{N(E)}, \quad (2.9)$$

so dass in diesem Fall die Drude-Relation (Gleichung 2.6) folgt. Diese kann nun auch in einer etwas anderen Schreibweise aufgestellt werden (hier für  $g_s = 2$ ):

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2}{h} k_F l. \quad (2.10)$$

Hierbei ist  $e^2/h$  die natürliche Einheit der Leitfähigkeit und  $k_F l$  eine dimensionslose Zahl, die quantenmechanisch interpretiert die Anzahl der Schwingungsperioden der elektronischen Wellenfunktion zwischen zwei Stößen angibt.

Ein zum 2DES senkrechtes Magnetfeld führt wie auch in dünnen dreidimensionalen Leitern zu einem elektrischen Feld senkrecht zum Strom. Dies ist der bereits 1879 von Hall [4] entdeckte und nach ihm benannte Hall-Effekt. In einer Probe in Hall-Geometrie (Abbildung 2.3) lassen sich beide Komponenten des Widerstandes gleichzeitig messen:

$$\rho_{xx} = \frac{U_{xx} b}{I l}, \quad \rho_{xy} = \frac{U_{xy}}{I}. \quad (2.11)$$

Während der klassische Längswiderstand im Magnetfeld unverändert bleibt, ist der Hall-Widerstand  $\rho_{xy}$  proportional zum Magnetfeld:

$$\rho_{xy} = \frac{B}{en_e}, \quad \rho_{xx}(B) = \rho_{xx}(B=0) = \frac{m^*}{e^2 n_e \tau}. \quad (2.12)$$

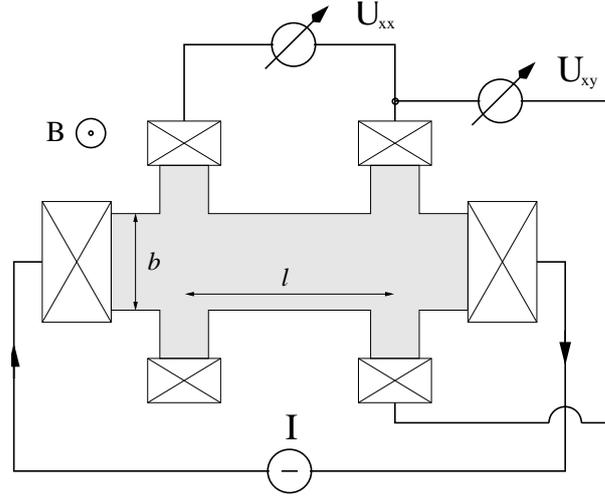


Abbildung 2.3.: Messaufbau in Hall-Geometrie: Der graue Bereich entspricht dem 2DES, die Rechtecke sind Kontakte. Es wird ein Strom  $I$  aufgeprägt und der Spannungsabfall parallel ( $U_{xx}$ ) und senkrecht ( $U_{xy}$ ) zur Stromrichtung gemessen.

Ohne Streuung ( $\tau \rightarrow \infty$ ) bewegen sich die Elektronen auf Kreisbahnen mit Zyklotronradius  $r_c = v_F/\omega_c$  und Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*}. \quad (2.13)$$

Mit Hilfe dieser Größe lassen sich die Leitfähigkeiten im Magnetfeld folgendermaßen schreiben:

$$\sigma_{xx} = \frac{e^2 n_e \tau}{m^* (1 + (\omega_c \tau)^2)}, \quad \sigma_{xy} = \frac{-e^2 n_e \tau}{m^* (1 + (\omega_c \tau)^2)} \omega_c \tau. \quad (2.14)$$

Die diagonale Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} \propto 1/(\omega_c \tau)^2$  im starken Magnetfeld ( $\omega_c \tau \gg 1$ ) lässt sich mit Hilfe der Einstein-Relation anschaulich verstehen: Ein Elektron mit Geschwindigkeit  $v_F$  wird durch das Magnetfeld auf einen Zyklotronorbit mit Radius  $r_c = v_F/\omega_c$  gezwungen. Ein Stoß führt dazu, dass sich seine Richtung zum Stoßzeitpunkt verändert und es eine Kreisbewegung um einen neuen Mittelpunkt ausführt. Dieser liegt im Mittel etwa einen Zyklotronradius  $r_c$  vom ursprünglichen Mittelpunkt entfernt. Dies führt zu einem Driftkoeffizienten von

$$D(B) = \frac{r_c^2}{2\tau} = \frac{v_F^2}{2\tau\omega_c^2} = \frac{D(B=0)}{(\omega_c \tau)^2}. \quad (2.15)$$

### 2.2.2. Streumechanismen

Der Parameter Streuzzeit  $\tau$  in der Drude-Theorie verbirgt eine ganze Anzahl verschiedener mikroskopischer Prozesse. Sind diese jeweils durch ein Streuzzeit  $\tau_i$  charakterisiert, so gilt nach der Matthiesen-Regel [22]

$$\frac{1}{\tau} \geq \sum_i \frac{1}{\tau_i}. \quad (2.16)$$

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

Unterscheidbar werden die verschiedenen Streumechanismen durch ihre unterschiedliche Temperaturabhängigkeit, wobei in verschiedenen 2DES jeweils nur eine Auswahl der Prozesse eine Rolle spielt. Hier soll nur eine kurze Übersicht gegeben werden:

- Streuung an **optischen Phononen** bestimmt die Streuzeit mit  $\tau^{-1} \propto T^4$  für Temperaturen  $T > 100$  K.
- **Deformationspotentiale und piezoelektrische Streuung** an akustischen Phononen bestimmen die Beweglichkeit zunächst für  $T < 100$  K. Die Temperaturabhängigkeit der Streuung am Deformationspotential ist  $\tau^{-1} \propto T^4$ . Für die piezoelektrische Kopplung gilt  $\tau^{-1} \propto T^2$ , so dass dieser Prozess die dominierende Wirkung von Phononen bei tiefen Temperaturen ist. Da auch diese Streuzeit mit sinkender Temperatur zunimmt, wird zu tiefsten Temperaturen die Beweglichkeit durch einen der folgenden nahezu temperaturunabhängigen Prozesse bestimmt.
- **Grenzflächenrauhigkeiten** sind bei tiefen Temperaturen im Si-MOSFET durch die Si/SiO<sub>2</sub>-Grenze der dominierende Mechanismus, sind jedoch für AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen mit nur einem besetzten Subband nahezu vernachlässigbar [23].
- **Legierungsstreuung** tritt in Legierungen verschiedener III-V-Halbleiter wie Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As oder In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As auf. Durch die statistische Besetzung der IIIwertigen Gitterplätze mit Ga oder Al bzw. mit Ga oder In und das unterschiedliche Potential der verschiedenen Atome entsteht ein schwaches Zufallspotential, an dem Elektronen gestreut werden können. Während sich im AlGaAs/GaAs-Heterosystem die Elektronen fast nur im GaAs aufhalten und dieser Mechanismus nur eine geringe Rolle spielt, bildet sich in der InGaAs/InP-Heterostruktur das Elektronengas in der Legierung aus, so dass dieser Streumechanismus bei tiefen Temperaturen dominiert.
- Coulombstreuung an **ionisierten Störstellen** begrenzt die Beweglichkeit von hochwertigen AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen. Zum einen ist dies auf Fremdatome im nominell undotierten GaAs und AlGaAs zurückzuführen. Dies sind meist Kohlenstoffatome aus dem Restgas, die Arsen-Gitterplätze besetzen, so die schwache Hintergrund-p-Dotierung verursachen und durch Aufnahme eines Elektrons negativ geladen sind. Diese Streuer befinden sich also auch mitten im zweidimensionalen Elektronensystem und streuen daher sehr effektiv. Hochmobile Proben zeichnen sich also durch eine sehr geringe Konzentration dieser Fehlstellen aus. Zum anderen sind die positiv geladenen Silizium-Dotieratome, die die Elektronen für das 2DES zur Verfügung stellen, immer vorhanden. In einer modulationsdotierten Heterostruktur, wie sie in Abbildung 2.2 dargestellt ist, können diese Dotieratome jedoch über 50 nm vom 2DES entfernt eingebracht werden. Die Coulombstreuung ist entsprechend schwächer. Die trotzdem verbleibende Streuung an diesen entfernten Ionen begrenzt die Beweglichkeit in höchstbeweglichen Proben (*remote impurity scattering*).

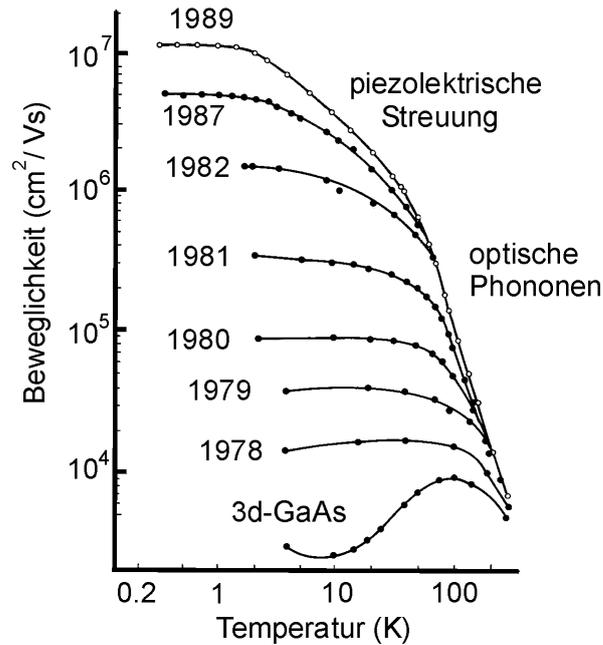


Abbildung 2.4.: Entwicklung der Beweglichkeit  $\mu_e$  der Elektronen für modulationsdotierte AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen (aus [15]).

Die in AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen dominierenden langreichweitigen Streuprozesse sind anisotrop, das heißt, dass die möglichen Richtungen des Geschwindigkeitsvektors nach dem Streueignis nicht gleich wahrscheinlich sind. Insbesondere ist die Vorwärtsstreuung stärker gewichtet, das Elektron behält also mit einer hohen Wahrscheinlichkeit seine Richtung bei. Ein Streuprozess ohne Richtungsänderung hat jedoch auf die Leitfähigkeit keinen Einfluss. Die Gesamtrate der Streuprozesse  $\Gamma = 1/\tau$  ist somit höher als die Rate  $\Gamma_T = 1/\tau_T$  der für den elektronischen Transport relevanten Streueignisse. Das Verhältnis von  $\Gamma/\Gamma_T$  kann in hochbeweglichen Proben über 100 liegen.

## 2.3. Quanten-Hall-Effekt

Bereits 1930 wurden von Shubnikov und de Haas [24] Oszillationen im Magnetowiderstand (der Abhängigkeit des Widerstandes vom Magnetfeld) von dünnen Metallen beobachtet. Solche Oszillationen werden heute nach ihren Entdeckern Shubnikov-de Haas-Oszillationen genannt. Im zweidimensionalen Elektronensystem im Si-MOSFET traten noch viel deutlichere Oszillationen auf [18], die mit Hilfe der selbstkonsistenten Bornschen Näherung gut verstanden wurden [25]. Gleichzeitig wurden auch Abweichungen des Hall-Widerstandes vom klassischen linearen Verhalten mit dem Magnetfeld beobachtet.

Mit besseren Proben und höheren Magnetfeldern gelang K. v. Klitzing schließlich 1980 die Entdeckung, dass in hohen Magnetfeldern Stufen im Hall-Widerstand auf-

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

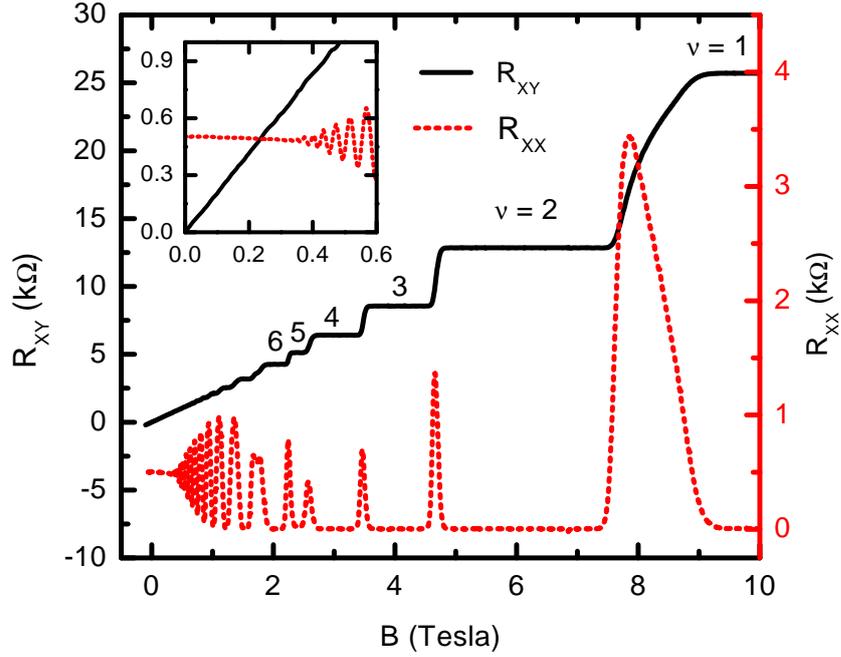


Abbildung 2.5.: Messung des Längs- ( $R_{xx}$ ) und Hall-Widerstandes ( $R_{xy}$ ) in Hall-Geometrie für eine AlGaAs/GaAs-Heterostruktur mit  $n_e = 3,0 \cdot 10^{15}/\text{m}^2$  und  $\mu_e = 10 \text{ m}^2/\text{Vs}$  in Abhängigkeit vom Magnetfeld; kleines Bild: Ausschnitt zeigt für kleine Magnetfelder klassisches Drude-Verhalten von Längs- und Hall-Widerstand ( $T = 0,1 \text{ K}$ ).

treten, die bei Widerstandswerten liegen, die sich durch folgende einfache Gleichung beschreiben lassen:

$$R_{xy} = \frac{1}{n} R_K, \quad R_K = \frac{h}{e^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Der Effekt wird als Quanten-Hall-Effekt (QHE) und die Größe  $R_K$  als von Klitzing-Konstante bezeichnet. Für diese Entdeckung erhielt v. Klitzing 1985 den Nobelpreis.

Weitere Experimente zeigten, dass die einzige Voraussetzung für die Beobachtung des QHE ein zweidimensionales Elektronengas von ausreichender Qualität ist. Bis heute wurde er in einer großen Anzahl unterschiedlicher Materialsysteme gefunden.

In Abbildung 2.5 ist eine Messung des Längs- und Hall-Widerstandes für ein 2DES auf Basis einer AlGaAs/GaAs-Heterostruktur dargestellt. Die Widerstände zeigen für kleine Magnetfelder klassisches Verhalten. Für hohe Magnetfelder zeigen sich die Shubnikov-de Haas-Oszillationen im Längswiderstand  $R_{xx}$  und die so genannten Quanten-Hall-Plateaus im Hall-Widerstand  $R_{xy}$ .

Die von Klitzing-Konstante ist mit einer Genauigkeit besser als  $10^{-9}$  unabhängig von Probenbreite [26], Quantenzahl  $n$  [27] und Material [28] (Vergleich Si-MOSFET und AlGaAs/GaAs-Heterostruktur) reproduzierbar. Sie lässt sich direkt mit einer anderen Naturkonstante in Verbindung bringen: Eine fundamentale Rolle in der Quantenelektrodynamik spielt die Feinstrukturkonstante  $\alpha$ , die sich ebenfalls auf  $h$  und  $e$

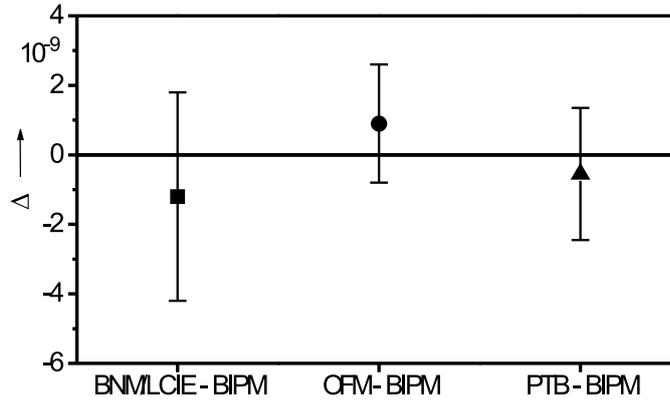


Abbildung 2.6.: Jeweils paarweiser Vergleich eines transportablen QHE-Messaufbaus des Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) mit dem Laboratoire Central des Industries-Électriques (LCIE) in Frankreich [29], dem Office Fédéral de Métrologie (OFM) in der Schweiz [30] und der Physikalisch Technischen Bundesanstalt (PTB) in Deutschland [31] anhand der Vermessung eines  $100 \Omega$ -Widerstandes (nach [32]).

zurückführen lässt:

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\mu_0 c} \frac{h}{e^2}. \quad (2.18)$$

Die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  und die Lichtgeschwindigkeit  $c$  sind im SI-Maßsystem festgelegte Zahlenwerte, so dass die Feinstrukturkonstante, experimentell gewonnen aus dem anomalen magnetischen Moment des Elektrons, in einen Wert von  $R_K$  umgerechnet werden kann. Die Werte stimmen innerhalb der absoluten Messunsicherheit des Quanten-Hall-Widerstandes ( $5 \cdot 10^{-8}$ ) miteinander überein. Die absolute Messunsicherheit ist größer als die relative Reproduzierbarkeit des QHE, da hier der im Hall-Plateau gemessene Widerstand zunächst auf die herkömmliche Definition des Einheitensystems zurückgeführt werden muss, das keine genauere Wiedergabe eines Widerstandes erlaubt.

Aufgrund der Reproduzierbarkeit wurde 1988 eine Empfehlung beschlossen, das Widerstandsnormale, also die Darstellung des Widerstandes durch die verschiedenen Staatsinstitute (z. B. die Physikalisch Technische Bundesanstalt in Deutschland), ab dem 1.1.1990 durch den Quanten-Hall-Effekt darzustellen. Dazu wurde die von Klitzing-Konstante für metrologische Anwendungen auf

$$R_{K-90} = \frac{h}{e^2} = 25812,807 \Omega \quad (2.19)$$

festgelegt. Dieser Wert ist nach heutiger Erkenntnis nur um wenige  $10^{-8}$  zu klein. Die Reproduzierbarkeit des Widerstandsnormales wurde mit dieser Festlegung um einen Faktor 1000 gegenüber vorherigen Methoden verbessert. Abbildung 2.6 zeigt, dass sich das Widerstandsnormale mit einer Genauigkeit von  $10^{-9}$  darstellen, also an verschiedenen Orten in verschiedenen Aufbauten reproduzieren lässt.

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

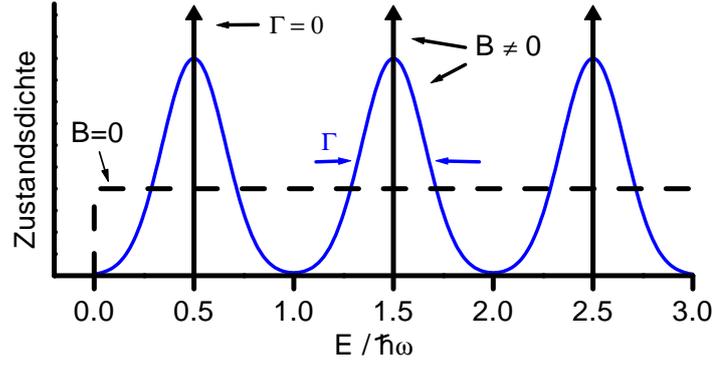


Abbildung 2.7.: Zustandsdichte eines 2DES mit und ohne Magnetfeld. Mit Magnetfeld ergeben sich im streufreien Fall  $\Gamma = \hbar/\tau = 0$  diskrete hoch entartete Energieniveaus. Mit Streuung werden die Niveaus verbreitert.

### 2.3.1. Landau-Quantisierung

Der Einfluss eines statischen Magnetfeldes senkrecht zum 2DES auf die Elektronen lässt sich quantenmechanisch durch die Einführung des Vektorpotentials  $\vec{A}$  in den Hamiltonoperator  $\hat{H}$  berücksichtigen. Bei Vernachlässigung des Spins und der Streuung ergibt die Rechnung (siehe z. B. [33]) für ein zweidimensionales Elektronengas quantisierte Energieniveaus (Landau 1930 [34], Fock 1928 [35]):

$$E_i = \hbar\omega_c \left( i + \frac{1}{2} \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

Die resultierenden Energieniveaus werden Landau-Niveaus und  $n$  Landau-Quantenzahl genannt.  $\omega_c = eB/m^*$  ist die schon aus Gleichung 2.13 bekannte Zyklotronfrequenz mit der effektiven Masse  $m^*$ . Die energieunabhängige Zustandsdichte entsprechend Gleichung 2.4 wird durch das Magnetfeld in eine Summe von Deltafunktionen

$$N(E) = N_L \sum_n \delta(E - E_n) \quad (2.21)$$

umgewandelt (Abbildung 2.7). Die Anzahl der Zustände bleibt beim Einschalten des Magnetfeldes gleich: Wird das Magnetfeld von  $B = 0$  auf ein Magnetfeld  $B$  mit entsprechendem Abstand der Energieniveaus  $\hbar\omega_c$  erhöht, so werden die Zustände aus jeweils einem Energieintervall  $\hbar\omega$  bei  $B = 0$  in eines der Landau-Niveaus umverteilt. Die Anzahl der Zustände je Energieniveau und Flächeneinheit ergibt sich damit zu

$$N_L = N_{B=0} \hbar\omega_c = g_s n_L \quad \text{mit} \quad n_L = \frac{eB}{h}. \quad (2.22)$$

Die Größe  $\phi_0 = h/e$  entspricht gerade einem Flussquant, der natürlichen Einheit des magnetischen Flusses in der Quantenmechanik, direkt beobachtbar im Aharonov-Bohm-Effekt [36]. Somit nimmt jedes Landau-Niveau gerade so viele Elektronen auf

(multipliziert mit dem Spinfreiheitsgrad  $g_s = 2$ ), wie es  $n_L$  Flussquanten gibt. Die Anzahl der gefüllten Landauniveaus  $n$  ergibt sich zu

$$n = \frac{n_e}{N_L}. \quad (2.23)$$

Zählt man die Spinfreiheitsgrade je Landau-Niveau einzeln, so ergibt sich die Definition des Füllfaktors:

$$\nu = \frac{n_e}{n_L} = \frac{n_e \hbar}{eB}. \quad (2.24)$$

Mit dieser Größe lässt sich der klassische Hall-Effekt neu schreiben:

$$R_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{\hbar}{e^2} = \frac{1}{\nu} R_K. \quad (2.25)$$

Für ganzzahlige Füllfaktoren entspricht der quantisierte also genau dem klassischen Hall-Widerstand.

Neben der Zyklotronfrequenz findet sich auch für den klassischen Zyklotronradius  $r_c$  eine Bedeutung in der Quantenmechanik. Der klassische Radius des untersten Landau-Niveaus ist die natürliche Längeneinheit der Ortswellenfunktion  $\Psi(x, y)$  und wird als magnetische Länge  $l_B$  bezeichnet. Im Landau-Niveau mit Quantenzahl  $n$  gilt:

$$r_c = l_B \sqrt{2n+1} \quad \text{mit} \quad l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} = 26 \text{ nm} \sqrt{\frac{1 \text{ T}}{B}}. \quad (2.26)$$

Die Verknüpfung mit der Fläche eines Flussquanten  $\Phi_0/B = 2\pi l_B^2$  zeigt die Verbindung zwischen Entartungsgrad eines Landau-Niveaus und Ausdehnung der elektronischen Wellenfunktion im Ortsraum.

Noch nicht berücksichtigt ist das elektrostatische Zufallspotential  $V(x, y)$ , das in der klassischen Beschreibung (Abschnitt 2.2) des elektrischen Transports durch die Streuzeit  $\tau$  berücksichtigt wird. Die Quellen des Zufallspotentials wurden im Abschnitt 2.2.2 erläutert. Ist  $d$  die Korrelationslänge des Potentials, so können die Unordnungspotentiale in kurzreichweitig ( $d \ll l_B$ ) und langreichweitig ( $d \gg l_B$ ) eingeteilt werden. Kurzreichweitig ist z. B. Legierungsstreuung oder Grenzflächenstreuung. Das durch ionisierte Störstellen und Donatoren verursachte Potential ist hingegen langreichweitig. Die Streuung führt zu einer Verbreiterung der Energieniveaus. Dies ist schematisch mit einer Halbwertsbreite  $\Gamma$  der Energieniveaus in Abbildung 2.7 dargestellt.

## Spinaufspaltung

Bisher wurde der Spin nur durch den Entartungsfaktor  $g_s$  berücksichtigt. Ein Magnetfeld führt jedoch durch den Zeemaneffekt zu einer Aufhebung der Entartung, so dass die Landau-Niveaus aufspalten:

$$E_{n,s} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + m_s g^* \mu_B B. \quad (2.27)$$

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

Die Magnetquantenzahl  $m_s$  des Spins nimmt die Werte  $+\frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2}$  an.  $\mu_B$  ist das Bohr-Magneton. Der effektive Landé'sche  $g$ -Faktor  $g^*$  weicht im Festkörper stark vom Wert  $g \approx 2.001$  des freien Elektrons ab. Für das dreidimensionale Elektronengas in GaAs ergeben Elektronenspin-Resonanzexperimente  $g^* = -0.44$ . Ursache für den effektiven  $g$ -Faktor ist die Spin-Bahn-Kopplung.

Der Füllfaktor  $\nu$  nach Gleichung 2.24 zählt nun korrekt die Anzahl der besetzten Energieniveaus. Allerdings beträgt das Verhältnis von Spin- und Landau-Aufspaltung im zum 2DES senkrechten Magnetfeld berechnet mit  $g^* = -0.44$  und

$$\frac{\Delta E_{\text{Zeemann}}}{\Delta E_{\text{Landau}}} = \frac{|g^*| \mu_B B}{\hbar \omega_c} = \frac{|g^*| m^*}{2 m} \quad (2.28)$$

nur etwa 1,3%. Die Spinaufspaltung der Landau-Niveaus sollte also nur beobachtbar sein, wenn die Verbreiterung der Landau-Niveaus  $\Gamma$  entsprechend klein ist. Bei kleinen Magnetfeldern und hohen Füllfaktoren sind auch nur Quanten-Hall-Plateaus für gerade Füllfaktoren zu beobachten. Für hohe Magnetfelder und damit niedrige Füllfaktoren zeigt sich jedoch eine deutliche Aufspaltung, zu erkennen an den Minima bzw. Plateaus für ungerade Füllfaktoren  $\nu$ . In Abbildung 2.5 sind diese Plateaus ab Füllfaktor  $\nu = 5$  zu erkennen. Das Plateau bei  $\nu = 7$  ist noch gerade angedeutet, und für noch höhere ungerade Füllfaktoren ist kein Anzeichen eines Plateaus mehr zu erkennen.

Ursache für die Sichtbarkeit der Plateaus im hohen Magnetfeld ist die Austauschwechselwirkung, die zu einer (oszillatorischen) Abhängigkeit des effektiven  $g$ -Faktors vom Füllfaktor mit deutlicher Erhöhung für ungerade Füllfaktoren führt [37]. Die Stärke der Austauschwechselwirkung hängt vom Grad der Polarisierung ab. Diese Polarisierung rührt daher, dass beim Auffüllen eines neuen Landau-Niveaus zunächst nur die eine Spin-Richtung besetzt wird und somit ungepaarte Spins vorhanden sind. Der relative Anteil dieser ungepaarten Spins ist umso höher, je weniger schon komplett besetzte Landau-Niveaus vorhanden sind, in denen beide Spinniveaus gleich besetzt sind. Damit ist die Polarisierung bei einem kleinen ungeraden Füllfaktor höher als für einen großen Füllfaktor. Es folgt eine höhere Austauschenergie und damit ein höherer effektiver  $g$ -Faktor.

### 2.3.2. Shubnikov-de Haas-Oszillationen

In einer zur Einführung der klassischen Gesamtstreuzeit  $\tau$  analogen Näherung führt die Streuung durch die Energieunschärfe zu einer Verbreiterung der Energieniveaus um  $\Gamma = \hbar/\tau$  (Abbildung 2.7). Unter der Annahme einer gaußförmigen Verbreiterung ergibt sich für die Zustandsdichte:

$$N(E) = N_L \sum_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{E - E_i}{\Gamma} \right)^2 \right]. \quad (2.29)$$

Die Auswirkung der Landau-Quantisierung auf den Magnetowiderstand ist nun mit Hilfe der Einstein-Beziehung (Gleichung 2.7) zu verstehen. Im Magnetfeld gilt mit

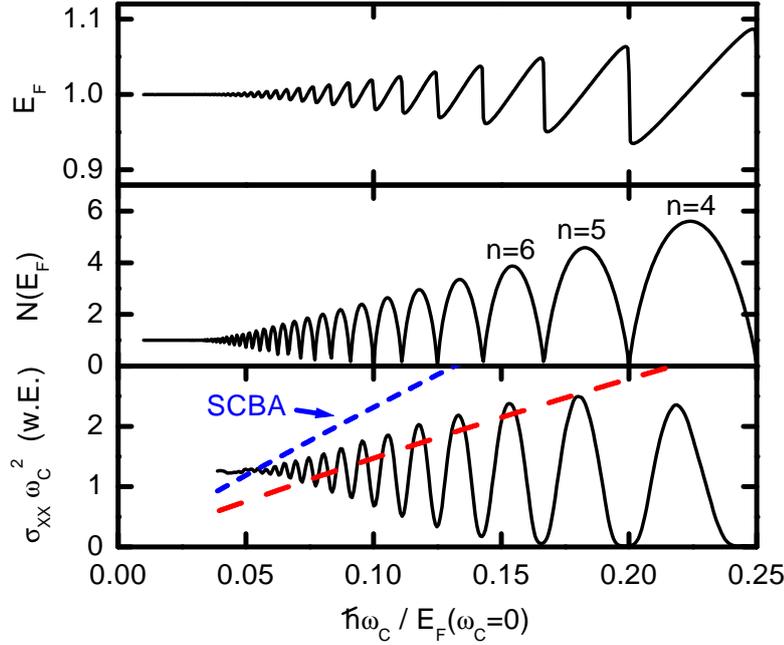


Abbildung 2.8.: **Oben und Mitte:** Abhängigkeit der Fermienergie  $E_F$  und der Zustandsdichte an der Fermienergie  $N(E_F)$  vom Magnetfeld (ausgedrückt durch die Zyklotronfrequenz  $\omega_c = eB/m^*$ ) für eine gaußförmige Verbreiterung  $\Gamma = 0.016 E_F$  der Landau-Niveaus.

**Unten:** Leitfähigkeit der AlGaAs/GaAs-Heterostruktur aus Abbildung 2.5 mit gleichem  $\Gamma \propto \hbar/\tau$ . Die Geraden zeigen die erwartete Magnetfeldabhängigkeit der maximalen Leitfähigkeiten aus Energieunschärfe bzw. SCBA (siehe Text).

Gleichungen 2.7 und 2.15

$$D \propto \omega_c^{-2} \Rightarrow \sigma_{xx} = e^2 D N(E_F) \propto \frac{D(E_F)}{\omega_c^2} \quad \text{für } \omega_c \tau \gg 1. \quad (2.30)$$

Die Fermienergie ergibt sich durch Auffüllen der Zustandsdichte  $N(E)$  mit der vorgegebenen Anzahl  $n_e$  der Elektronen. Dies führt zu einer Magnetfeldabhängigkeit der Fermienergie und der Zustandsdichte. Dies ist in Abbildung 2.8 für eine gaußförmig verbreiterte Zustandsdichte dargestellt. Die Oszillationen der Zustandsdichte  $N(E_F)$  mit einer Periode  $\propto 1/B$  führen entsprechend der Einsteinrelation (Gleichung 2.7) mit  $\sigma_{xx} \propto D(E)$  zu einer Oszillation von Leitfähigkeit und Widerstand, den Shubnikov-de Haas-Oszillation.

Leitfähigkeitsmaxima  $\sigma_{xx,\text{peak}}^n$  treten auf, wenn die Fermienergie in der Mitte des höchsten gefüllten Landau-Niveaus mit Quantenzahl  $n$  liegt. In dem einfachen oben beschriebenen Bild gilt bei geringem Überlapp der Landau-Niveaus mit Gleichung 2.7, 2.15 und 2.29 sowie  $n_L = g/(2\pi l_B^2)$

$$\sigma_{xx,\text{peak}}^n = e^2 D N(E_F) = \frac{g_s}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^2}{h} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.31)$$

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

Für kurzreichweitige Streuprozesse berechnete Ando die Maximalwerte in selbstkonsistenter Born-Approximation (SCBA) [25]:

$$\sigma_{xx,\text{peak}}^n = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{h} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.32)$$

In Abbildung 2.8 sind die erwarteten maximalen Leitfähigkeiten nach Energieunschärfe bzw. SCBA im Vergleich zur Messung in einer GaAs/AlGaAs-Heterostruktur eingezeichnet. Die bessere qualitative Übereinstimmung der Messung mit der einfachen Energieunschärfe-Abschätzung zeigt, dass die Annahme von kurzreichweitigen Streuprozessen in diesen Heterostrukturen nicht mehr gerechtfertigt ist. Es liegt stattdessen eine Dominanz langreichweitiger Streuprozesse vor, für die es für eine große Anzahl  $n$  gefüllter Landau-Niveaus keine zuverlässige theoretische Behandlung gibt. Die einfache Betrachtung der Zustandsdichte ergibt jedoch eine annehmbare erste Näherung für die maximalen Leitfähigkeiten.

### 2.3.3. Quanten-Hall-Plateaus durch Lokalisierung

Die Oszillationen der Zustandsdichte im Magnetfeld erklären das Auftreten von Oszillationen des Magnetowiderstandes  $\rho_{xx}$  bzw. der Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$ . Für die Erklärung der Plateaus im Hall-Widerstand  $\rho_{xy}$  und das gleichzeitige Verschwinden der diagonalen Leitfähigkeit und damit auch des Längswiderstandes muss eine zusätzliche Annahme getroffen werden: Ein Teil der Zustände ist im starken Magnetfeld bei tiefen Temperaturen lokalisiert und trägt nicht zur elektrischen Leitfähigkeit bei. Konzept und Ursache der Lokalisierung werden im Folgenden Kapitel ausführlich dargestellt. An dieser Stelle soll zunächst eine ad hoc Einteilung in lokalisierte und ausgedehnte Zustände entsprechend der Abbildung 2.9 vorgenommen werden. Nur die ausgedehnten Zustände können einen Strom tragen.

Die diagonale Leitfähigkeit ist nach Gleichung 2.7 durch die Zustandsdichte an der Fermienergie bestimmt. Dies wird nun auf die ausgedehnten Zustände eingeschränkt. Deren Zustandsdichte ist aber, wie in Abbildung 2.9 gezeigt, nur um die Zentren der Energieniveaus von 0 verschieden. Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} \neq 0$  tritt auf, wenn die Fermienergie im Zentrum eines Energieniveaus liegt, der Füllfaktor also halbzahlig ( $\nu = i + \frac{1}{2}$ ) ist. Dazwischen, in einem breiten Bereich um ganzzahlige Füllfaktoren  $\nu = i$ , ist die Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} = 0$  (siehe Abbildung 2.10). Der Füllfaktor bzw. die Position der Fermienergie wird durch alle Zustände, lokalisierte und ausgedehnte, bestimmt.

Trotz Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} = 0$  fließt im Magnetfeld ein Strom, da  $\sigma_{xy} \neq 0$  ist. Der Strom  $\vec{j}$  fließt in der Probe senkrecht zum elektrischen Feld  $\vec{F}$ . Dieser Strom ist dissipationsfrei, da er senkrecht zum elektrischen Feld fließt. Für die dissipierte Leistungsdichte gilt:

$$P = \vec{j} \vec{F} = \sigma_{xx} \left| \vec{F} \right|^2 = \rho_{xx} \left| \vec{j} \right|^2. \quad (2.33)$$

Getragen wird dieser Strom  $I = \sigma_{xy} U_H$  durch die ausgedehnten Zustände unterhalb der Fermienergie. Mit den von v. Klitzing gefundenen quantisierten Widerstandswerten

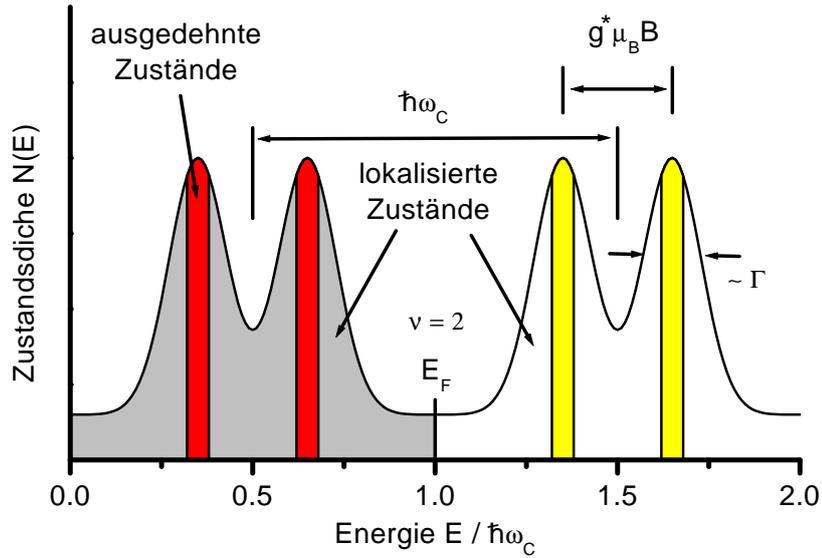


Abbildung 2.9.: Schematische Darstellung der Zustandsdichte des zweidimensionalen Elektronengases im Magnetfeld. Die eingezeichnete Position der Fermienergie  $E_F$  entspricht einem Füllfaktor  $\nu = 2$ . Die Zustände unterhalb der Fermienergie  $E_F$  sind besetzt. Nur die Zustände im Zentrum der verbreiterten Energieniveaus sind ausgedehnt.

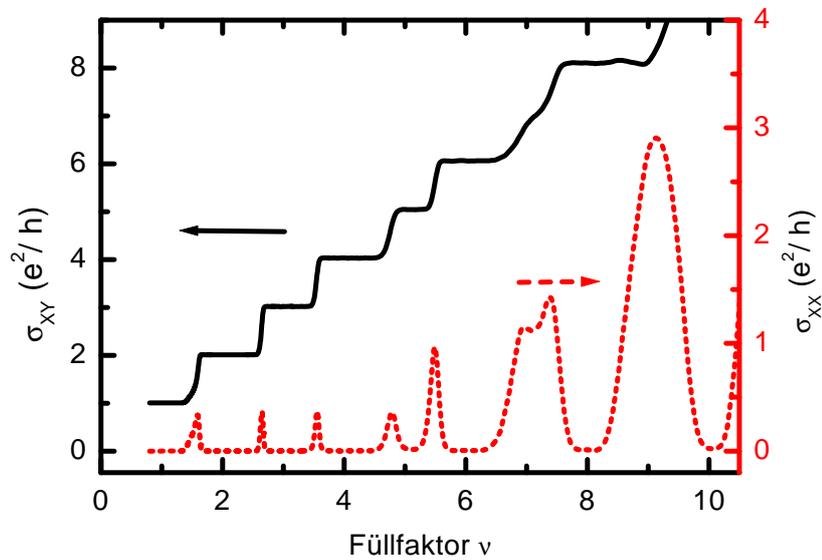


Abbildung 2.10.: Leitfähigkeiten  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{xy}$ , durch Tensorinversion aus den Widerstandsdaten in Abbildung 2.5 gewonnen. Der Füllfaktor  $\nu$  ergibt sich aus dem angelegten Magnetfeld und der Ladungsträgerkonzentration. (Probe 41012c,  $n_e = 3.0 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ ,  $\mu_e = 10 \text{ m}^2/\text{Vs}$ ,  $T = 0, 1 \text{ K}$ )

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

nach Gleichung 2.17 gilt:

$$\sigma_{xy} = \text{int}(\nu) \frac{e^2}{h} \Leftrightarrow I = \text{int}(\nu) \frac{e^2}{h} U_H, \quad (2.34)$$

wobei  $\text{int}(\nu)$  die nächste natürliche Zahl zu  $\nu$  ist. Der Quanten-Hall-Effekt ist also dadurch gekennzeichnet, dass die ausgedehnten Zustände jedes Energieniveaus unterhalb der Fermienergie unabhängig vom Magnetfeld jeweils den gleichen Beitrag  $(e^2/h)F_H$  zur Stromdichte  $j$  liefern ( $F_H$  ist das elektrische Feld senkrecht zum Strom, also der Beitrag der Hall-Spannung  $U_H$ ).

In Abbildung 2.10 ist die aus den in Hall-Geometrie gemessenen Widerständen  $\rho_{xx}$  und  $\rho_{xy}$  berechnete Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass die Leitfähigkeit um einen ganzzahligen Füllfaktor herum einen quantisierten Wert entsprechend Gleichung 2.34 annimmt.

### 2.3.4. Wert der Quantisierung

Es existiert noch keine geschlossene analytische Theorie, die diese Quantisierung der Leitfähigkeit  $\sigma_{xy} = ne^2/h$  erklären kann. Es haben sich jedoch zwei Modellvorstellungen entwickelt. Die eine begründet die quantisierten Werte in den Hall-Plateaus durch Eichargumente, die andere basiert auf der elektronischen Struktur am Rand des in jeder Probe endlich ausgedehnten 2DES. Beide Modelle sollen hier kurz vorgestellt werden.

### Laughlin-Gedankenexperiment

Bereits 1981 entwickelte Laughlin eine auf Eichargumenten beruhende und damit sehr allgemeine Theorie [38]. In einem Gedankenexperiment (Abbildung 2.11) fließt ein dissipationsfreier Strom ( $\sigma_{xx} = 0$ ) auf einem Zylinder, den ein magnetischer Fluss  $\Phi$  durchdringt. Zur Änderung des magnetischen Flusses um  $\Delta\Phi$  muss eine elektrische Energie  $\Delta E = I\Delta\Phi$  aufgebracht werden. Dies geschieht durch Verschiebung einer Ladung  $q_1$  im elektrischen Feld  $U/l$  von einem Zylinderrand zum anderen, was einem Energiegewinn  $\Delta E = q_1 U$  entspricht. Somit gilt:

$$\Delta E = I\Delta\Phi = q_1 U. \quad (2.35)$$

Gleichzeitig führt die Änderung des magnetischen Flusses zu einer Änderung der Wellenfunktion. Eine Rechnung in Landau-Eichung zeigt, dass die Wellenfunktion nach Änderung des Flusses um ein Flussquant ( $\Delta\Phi = \Phi_0 = h/e$ ) wieder dem Ausgangszustand entspricht, nur dass sich die Positionen aller Elektronen derart entlang der Zylinderachse verschoben haben, dass durch jeden geschlossenen Kreis um den Zylinder genau eine ganze Zahl  $n$  Elektronen und damit eine Ladung  $q_2 = ne$  verschoben wurde.

Im Gleichgewicht muss nun  $q_1 = q_2$  gelten, da sich sonst eine zusätzliche Ladung an den Enden des Zylinders aufbauen würde und somit  $U$  nicht konstant bliebe, womit

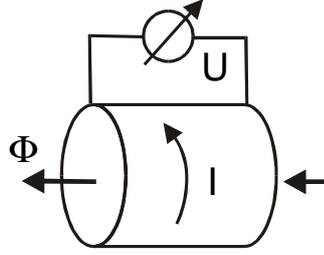


Abbildung 2.11.: Gedankenexperiment nach Laughlin

wiederum kein Plateau im Hall-Widerstand gegeben wäre. Mit  $q = q_1 = q_2$  und Gleichung 2.35 folgt

$$I\Phi_0 = I\frac{h}{e} = qU = neU \Leftrightarrow I = n\frac{e^2}{h}U. \quad (2.36)$$

Dies ist die gewünschte Beziehung, jedoch abgeleitet auf einer topologischen Fläche, die nicht dem Experiment entspricht. Halperin gelang es, das Argument auf eine Corbino-Geometrie zu übertragen [39]. Allerdings werden auch in dieser Geometrie Annahmen gemacht (Einteilung der Geometrie in perfekte und ungeordnete Bereiche, der magnetische Fluss durchdringt nur einen bestimmten Bereich in der Mitte der Probe), die im realen Experiment so nicht erfüllt sind.

## Quantisierung durch Randkanäle

Ein anderer Zugang ist das Randkanalmodell. Ein ausführlicher Überblick über dieses Modell und seine experimentellen Evidenzen wird in [40] gegeben, hier soll nur eine kurze Einführung gegeben werden. Das Modell bezieht den in einer realen Probe immer vorhandenen Rand des zweidimensionalen Elektronensystems ein. Dort werden die Landau-Niveaus nach oben gebogen und durchstoßen die Fermienergie. Es ergibt sich so für jedes Landau-Energieniveau ein Zustand an der Fermienergie, der senkrecht zum Probenrand eine nur geringe typische Breite der Größenordnung  $w \sim 1 \mu\text{m}$  hat, sich jedoch entlang des kompletten Probenrandes ausdehnt. Dieser Zustand hat daher eindimensionale Eigenschaften. Für jedes Energieniveau ergibt sich so ein eindimensionaler Zustand, im Folgenden Randkanal genannt. Die Randkanäle sind voneinander durch einen schmalen isolierenden Bereich getrennt, der durch das „abtauchende“ Energieniveau gebildet wird (siehe Abbildung 2.12). Für den Strom durch einen eindimensionalen Zustand ohne Streuung ergibt die Landauer-Formel [41] folgende einfache Beziehung [42] ( $\Delta\mu = eU$  ist das chemische Potential):

$$I_{1d} = ev_F N_{1d}(E_F)\Delta\mu = ev_F \frac{1}{2\pi\hbar v_F} eU = \frac{e^2}{h}U. \quad (2.37)$$

Jeder Randkanal trägt diesen Strom in Hall-Geometrie (Abbildung 2.3) von einem Stromkontakt zum anderen. Die Spannung  $U$ , die den Strom durch die Hall-Geometrie

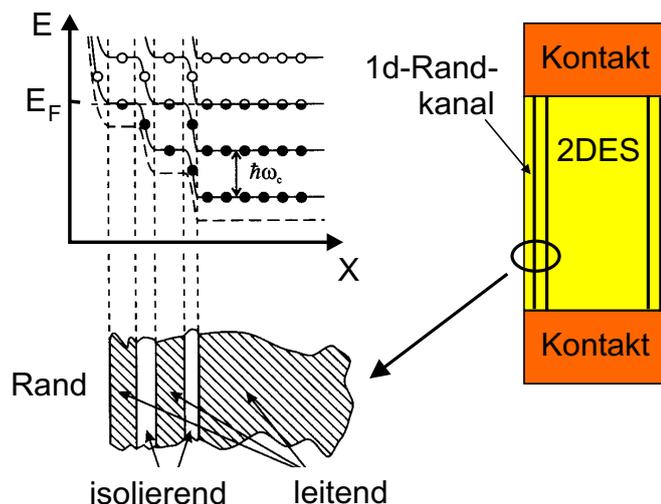


Abbildung 2.12.: Die elektronische Struktur am Rand einer Probe im Magnetfeld entsteht durch Hochbiegen der Landau-Niveaus und Umverteilung der Elektronen in einen energetisch günstigen Zustand. Die leitenden Streifen am Rand bilden eindimensionale Zustände, die so genannten Randkanäle.

treibt, fällt dabei nur am Übergang vom 1d-Randkanal in den 3d-Kontakt ab. Das Potential der Kontakte auf der einen Probenseite gleicht also dem des einen Stromkontaktes, das auf der anderen Probenseite dem des anderen. Zwischen den beiden Stromkontakten fällt also gerade die Hall-Spannung  $U = U_H$  ab. Aufsummiert über die  $\text{int}(\nu)$  Randkanäle, die sich für Füllfaktor  $\nu$  bilden, fließt ein Gesamtstrom entsprechend Gleichung 2.34.

Das Randkanalbild ergibt auf natürliche Weise den quantisierten Hall-Effekt. Es ist jedoch unklar, wie es insbesondere die Situation in großen Proben bei hohen Strömen erklären kann. So skaliert der kritische Strom  $I_C$ , bis zu dem quantisierte Plateaus auftreten, linear mit der Probenbreite und nimmt für große Proben mit Breiten von einigen Millimetern Werte von  $I_C > 1$  mA an.

### 2.3.5. Zustandsdichte im Quanten-Hall-Effekt

Die thermodynamische Zustandsdichte  $N(E)$  aller Zustände, lokalisierter und ausgedehnter, bestimmt die Position der Fermienergie. Die Leitfähigkeit wird jedoch nur durch die ausgedehnten Zustände bestimmt. Aus der Messung der Leitfähigkeit kann also keine Erkenntnis über die gesamte Zustandsdichte  $N(E)$  gewonnen werden.

Es existieren jedoch messbare Größen, die abhängig von der gesamten Zustandsdichte sind. Diese wurden zur Bestimmung der thermodynamischen Zustandsdichte des 2DES verwendet.

Eine dieser Messgrößen ist die spezifische Wärme des zweidimensionalen Elektronengases, die von Gornik *et al.* [43] für geschichtete 2DES in einer Mehrschicht-AlGaAs/GaAs-Heterostruktur gemessen wurde. Die Schichtung erhöht das Signal um

Gruppe	$n_e$ $\left(\frac{10^{15}}{\text{m}^{-2}}\right)$	$\mu_e$ $\left(\frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}\right)$	$\hbar/\tau_t$ (meV)	$\Gamma$ (meV)	$y$	$\frac{N(\text{Plateau})}{N(\text{Peak})}$ @ 5 T
Gornik	6,3	4	0,4	1,8	0,25	0,3
	7,7	8	0,2	1	0,2	0,1
Eisenstein	5,4	8	0,2	$\sqrt{\frac{B}{1\text{T}}}$	-	0,3
Stahl	3,5	55	0,03	$\sim 0,5$	0,07	-

Tabelle 2.1.: Zustandsdichte im Plateau.

die Anzahl der Ebenen, um ein ausreichendes Signal-Rausch-Verhältnis zu erreichen. Die Messergebnisse lassen sich am besten durch gaußförmig verbreiterte Energieniveaus mit einem zusätzlichen konstanten Hintergrund erklären:

$$N(E) = yN_{B=0} + (1 - y)n_L \sum_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma_i} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{E - E_i}{\Gamma_i}\right)^2\right]. \quad (2.38)$$

$y$  ist der Anteil an Zuständen, die den unerwarteten flachen Hintergrund bilden.  $\Gamma_i$  wird als konstant angenommen und ergibt größere Werte als aus der Beweglichkeit erwartet.

Eine andere Methode wurde von Eisenstein *et al.* [44] verwendet. Diese Gruppe bestimmte die Magnetisierung des 2DES sowohl in Multi-Schicht-Systemen als auch in einer Ein-Schicht-Heterostruktur. Sie fanden eine Zustandsdichte, die durch eine magnetfeldabhängige Verbreiterung  $\Gamma_i \propto \sqrt{B}$  gekennzeichnet ist. Diese Breite ist in ihren Experimenten so groß, dass durch den Überlapp benachbarter Landau-Niveaus auch in den Plateaus die Zustandsdichte immer noch 30% ihres maximalen Wertes hat. Neuere Messungen der Magnetisierung [45] in hochbeweglichen Proben ( $\mu_e > 100 \text{ m}^2/\text{Vs}$ ) zeigen, dass in diesen nur noch wenige Prozent der gesamten Zustandsdichte im Plateau liegt.

Eine weitere Messmethode ist die Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit. Für Temperaturen  $T > 1 \text{ K}$  können auch lokalisierte Zustände durch aktivierten Transport einen Beitrag zur Leitfähigkeit leisten. Dies haben z. B. Stahl *et al.* [46] benutzt, um die Zustandsdichte in der Energielücke zwischen den Landau-Niveaus zu bestimmen.

Die Ergebnisse der verschiedenen Messungen sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst: Die Größe  $\tau_t = \mu_e m^*/e$  ist die aus der Beweglichkeit bestimmte für den Transport relevante Streuzzeit. Der Vergleich von  $\hbar/\tau_t$  mit  $\Gamma = \hbar/\tau$  zeigt, dass, wie schon in Abschnitt 2.2.2 erwähnt, die für die Energieverbreiterung relevante totale Streurrate deutlich höher ist.

Die Verbreiterung der Energieniveaus ist  $\Gamma > 1 \text{ meV}$  für Proben mit Beweglichkeit  $\mu_e \lesssim 10 \text{ m}^2/\text{Vs}$ , wie sie in dieser Arbeit mehrheitlich verwendet werden. Auch bei Proben mit hoher Beweglichkeit und damit relativ geringer Energieverbreiterung

## 2. Quanten-Hall-Effekt und 2DES

existiert noch ein annähernd konstanter Hintergrund von Zuständen, dessen Anteil an der gesamten Zustandsdichte hier mit  $y$  bezeichnet ist.

In vielen Fällen ist das Verhältnis der minimalen zur maximalen Zustandsdichte interessanter, das in der letzten Spalte der Tabelle abzulesen ist.

# 3. Lokalisierung und Skalierung

Grundsätzliche Überlegungen zur Lokalisierung von elektronischen Wellenfunktionen in Festkörpern durch Unordnungspotentiale wurden zuerst von Anderson 1958 [47] angestellt. Eine ganze Reihe von Autoren entwickelte diese Vorstellungen zu einer Theorie ungeordneter, nicht wechselwirkender Elektronensysteme in verschiedenen Dimensionen fort, die eine qualitative und quantitative Beschreibung einer Reihe von Eigenschaften des elektronischen Transports ermöglicht. Ein guter Überblick hierüber wurde von Lee und Ramakrishnan gegeben [48].

Das Magnetfeld wird in dieser Theorie nur durch Störungstheorie berücksichtigt, so dass sich diese Beschreibung nicht unverändert auf das Quanten-Hall-Regime anwenden lässt. Das Konzept der Lokalisierung und der Skalierungstheorie lässt sich jedoch erfolgreich übertragen und eine Analogie zum Metall-Isolator-Übergang in drei Dimensionen finden.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels gibt eine kurze Einführung in die Skalierungstheorie ohne Magnetfeld.

Im zweiten Abschnitt wird die Skalierungstheorie auf den Fall quantisierender Magnetfelder übertragen und die Konsequenzen eines quantenkritischen Phasenübergangs zwischen Quanten-Hall-Plateaus dargestellt. Außerdem werden analytische und numerische Resultate zum kritischen Exponenten vorgestellt. Zum Schluss dieses theoretischen Abschnittes wird der Einfluss der Frequenz und der Temperatur dargestellt.

Im letzten Abschnitt werden die bisherigen experimentellen Resultate referiert und mit den Vorhersagen der Skalierungstheorie verglichen.

## 3.1. Skalierungstheorie der Lokalisierung

### 3.1.1. Lokalisierung und Skalierungsfunktion nicht wechselwirkender Elektronen

Die Beschreibung der Leitfähigkeit in der klassischen Drude-Theorie beruht auf freien Elektronen, die nach einer mittleren freien Weglänge  $l = v_F \tau$  an Störungen des Festkörpers streuen und sich wie ein Gas diffusiv ausbreiten. Die freie Beweglichkeit der Elektronen beruht darauf, dass die elektronischen Wellenfunktionen durch die regelmäßige Struktur des Atomgitters Blochwellen  $\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$  bilden. Die Amplituden  $u_{\vec{k}}(\vec{r})$  haben die Periodizität des Atomgitters. Die Elektronen bewegen sich also analog einer freien Materiewelle, wobei sich die Eigenschaften des Festkörpers nur

### 3. Lokalisierung und Skalierung

noch in der Energiedispersion  $E(\vec{k})$  widerspiegeln.

Werden die Störungen des Gitters aber sehr zahlreich, z. B. durch eine große Anzahl von Fremdatomen, so gilt die Periodizität des Gitters immer weniger. Dies erschwert die Bildung von Blochwellen, die auf der Delokalisierung von Elektronen durch Überlagerung der atomaren Eigenzustände immer gleicher Energie basiert. Variieren diese Energien durch Störungen und Defekte um  $\Delta E$ , so wird es für eine große Variation  $\Delta E$  immer unwahrscheinlicher, dass die Ein-Elektron-Wellenfunktionen genug Überlapp mit einer anderen Wellenfunktion ähnlicher Energie haben. Die Unordnung kann also die Ausbildung einer über den ganzen Festkörper delokalisierten Wellenfunktion unterbinden, die Elektronen werden lokalisiert. Für ein bei  $\vec{r}_0$  lokalisiertes Elektron ergibt sich eine exponentiell abfallende Aufenthaltswahrscheinlichkeit mit zunehmender Entfernung:

$$|\Psi(\vec{r})|^2 \propto \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{\xi}\right). \quad (3.1)$$

Die Lokalisierungslänge  $\xi$  ist die typische Ausdehnung der Wellenfunktion und hängt vom Unordnungspotential und von der Energie des Zustands ab. Veranschaulicht man sich die Unordnung durch Bildung von zufälligen Potentialtöpfen oder -mulden, so reichen Zustände höherer Energie weiter aus den Töpfen heraus, haben einen stärkeren Überlapp mit benachbarten Zuständen, hybridisieren und erreichen so eine größere Ausdehnung  $\xi$  bzw. werden ganz delokalisiert.

Auch schwache Unordnung kann bereits zu einer Lokalisierung der Wellenfunktion führen. So konnten Mott und Twose [49] zeigen, dass bereits eine beliebig schwache Unordnung in einer Dimension (bei unendlicher Ausdehnung) zur Lokalisierung aller Zustände führt.

In elektrischen Transportmessungen wird der Leitwert  $G = I/U$  gemessen. Für die weiteren Diskussionen soll der dimensionslose Leitwert

$$g = G \frac{h}{e^2} \quad (3.2)$$

verwendet werden. Nicht zu verwechseln ist der Leitwert mit der mikroskopischen Leitfähigkeit  $\sigma$ . Im Regime klassischen Transports  $\sigma = n_e e^2 \tau / m^* = n_e e^2 l / \hbar k_F$  in großen, nicht lokalisierten Systemen  $L \gg l$  gilt das ohmsche Gesetz in  $d$  Dimensionen:

$$G(L) = \sigma L^{d-2}. \quad (3.3)$$

Hier fällt auch bereits der besondere Fall für zwei Dimensionen auf, in dem der Leitwert in klassischer Theorie unabhängig von der Systemgröße ist.

Für lokalisierte Elektronensysteme kann die intrinsische Größe  $\sigma$  für den Fall  $\xi \gg l$  zwar lokal definiert werden. In großen Systemen  $L \gg \xi$  kann elektrischer Transport aber nur durch quantenmechanische Tunnelprozesse zwischen lokalisierten Bereichen stattfinden. Der Leitwert folgt in diesem Fall nicht mit Gleichung 3.3 aus einer mikroskopischen Leitfähigkeit, sondern wird exponentiell klein:

$$g(L) \propto \exp\left(-\frac{L}{\xi}\right). \quad (3.4)$$

Die Skalierungstheorie beschäftigt sich nun mit der Frage, ob sich aus dem Leitwert  $g(L)$  eines endlichen Systems auf sein Verhalten – ohmsche Leitfähigkeit oder exponentielle Lokalisierung – im Grenzwert  $L \rightarrow \infty$  schließen lässt. Eine Konstruktion hierzu ist die Zusammensetzung eines Systems der Größe  $(2L)^d$  aus  $2^d$  Bausteinen der Größe  $L^d$  [50]. Sind die Zustände in den  $L^d$ -Blöcken bereits lokalisiert, bestimmt durch einen niedrigen Leitwert  $g(L)$ , so werden die Zustände der einzelnen Blöcke wenig miteinander wechselwirken, der Gesamtleitwert nimmt im Vergleich zu den einzelnen Bausteinen ab. Ist der Leitwert der Einzelblöcke hoch, sind die Zustände über eine Länge  $L$  ausgedehnt und empfindlich auf die Randbedingung auf den Flächen der  $L^d$ -Blöcke. Das Zusammenfügen führt zu einer starken Wechselwirkung und Delokalisierung und damit einem hohen Leitwert im neuen Block. Der Leitwert der neuen Probe  $g(2L)$  wird also durch den Leitwert  $g(L)$  der Bausteine bestimmt.

In einem verfeinerten Argument von Abrahams *et al.* [51] wird die Funktion

$$\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L} = \frac{L}{g} \frac{dg}{dL} \quad (3.5)$$

definiert und postuliert, dass sie nur von  $g$  abhängt. Als Rechtfertigung dient, dass diese Funktion sowohl im stark lokalisierten als auch im schwach lokalisierten Regime eine einfache Form annimmt. Für kleine Leitwerte, also lokalisierten Transport, gilt mit Gleichung 3.4

$$\beta(g) = \ln \left( \frac{g}{g_d} \right) < 0 \quad (g \ll 1). \quad (3.6)$$

Der Parameter  $g_d$  ist probenabhängig und von der Größenordnung 1. Im ohmschen Bereich folgt mit Gleichung 3.3

$$\beta(g) = d - 2 \quad (g \gg 1). \quad (3.7)$$

Für schwache Unordnung ( $k_F l \gg 1 \Leftrightarrow g \gg 1$ ) können quantenmechanische Korrekturen bestimmt werden, die zur so genannten schwachen Lokalisierung führen. Ohne Magnetfeld gilt dann

$$\beta(g) = (d - 2) - \frac{a}{g} \quad (g \gg 1), \quad (3.8)$$

wobei  $a$  eine von  $d$  abhängige Konstante ist. Unter der Annahme einer kontinuierlichen und monotonen Funktion ergibt sich ein Bild entsprechend Abbildung 3.1. Das Verhalten einer Probe im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  ist damit durch den Leitwert  $g(L)$  eines endlichen Stückes bestimmt. Für  $\beta(g(L)) < 0$  bewegt sich die Probe auf der  $\beta$ -Kurve nach links zu lokalisiertem und damit exponentiell isolierendem Verhalten, hingegen führt  $\beta(g(L)) > 0$  bei zunehmender Systemgröße zu einem zunehmenden Leitwert und damit ohmschen bzw. metallischen Verhalten.

Für Dimensionen  $d \leq 2$  gilt nach diesem Bild generell  $\beta(g) < 0$  und damit immer Lokalisierung aller Zustände für ausreichend große Systeme. Für  $d = 2$  gilt im Fall schwacher Lokalisierung

$$g(L) = k_F l - \frac{2}{\pi} \ln \left( \frac{L}{l} \right). \quad (3.9)$$

### 3. Lokalisierung und Skalierung

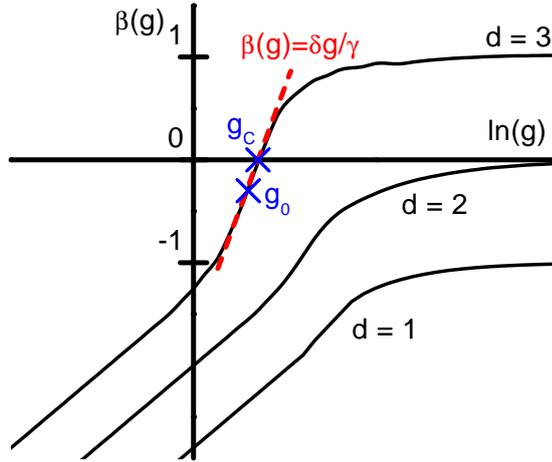


Abbildung 3.1.: Schematischer Verlauf der  $\beta(g)$ -Funktion in Abhängigkeit von  $\ln(g)$  in verschiedenen Dimensionen. Für  $d = 3$  wechselt sie bei  $g = g_c$  das Vorzeichen.

Das 2DES kann nun bei einer Systemgröße  $L = \xi$  als lokalisiert betrachtet werden, wenn der Korrekturterm von gleicher Größe wie der klassische Leitwert  $k_F l$  ist. Es folgt

$$\xi \approx l \exp\left(\frac{\pi}{2} k_F l\right). \quad (3.10)$$

Für  $k_F l \gg 1$  wird die Lokalisierungslänge also exponentiell groß und somit im realen Experiment mit  $T > 0$  nur für Proben mit geringer freier Weglänge zu beobachten sein.

#### 3.1.2. Metall-Isolator-Phasenübergang

Nur für  $d = 3$  ist in diesem Modell wechselwirkungsfreier, ungeordneter Elektronen „echtes“ metallisches Verhalten möglich [48]. Über Metall oder Isolator entscheidet  $g > g_c$  oder  $g < g_c$ , wobei  $g_c$  durch  $\beta(g_c) = 0$  definiert wird und ein instabiler Fixpunkt der Kurve ist. Dieser Punkt wird Fixpunkt genannt, weil eine Probe, die für eine Größe  $L$  den Wert  $g_c$  hat, diesen Wert durch  $\beta(g_c) = 0$  auch bei Veränderung der Länge nicht ändert. Der Punkt ist instabil, weil eine beliebig kleine Abweichung von  $g_c$  bereits dazu führt, dass die Probe mit zunehmender Systemgröße  $L$  von diesem Punkt wegstrebt.

Der Leitwert in einer Probe vorgegebener Unordnung ist eine Funktion der Fermienergie. Der kritische Punkt  $\beta(g_c) = 0$  wird für einen bestimmten Wert der Fermienergie  $E_F = E_c$  realisiert. Höhere oder niedrigere Fermienergie durch mehr oder weniger Elektronen führt für  $L \rightarrow \infty$  zu metallischem ( $g \rightarrow k_F l$ ) oder isolierendem ( $g \rightarrow 0$ ) Verhalten.

Für kleine Abweichungen der Fermienergie  $E_F$  von  $E_c$  kann der Leitwert  $g_0$  auf mikroskopischer Größenskala  $L \approx l$  linearisiert werden:

$$g_0(E_F) \approx g(E_c) + (E_F - E_c)g' \Leftrightarrow (g_0 - g_c) \approx (E_F - E_c)g'. \quad (3.11)$$

Für eine kleine Umgebung von  $g_c$  gilt für  $\beta(g)$ :

$$\beta(g) \approx \frac{1}{\gamma} \left( \frac{g - g_c}{g_c} \right) = \frac{\delta g}{\gamma} \quad (\delta g \ll 1). \quad (3.12)$$

Die Größe  $1/\gamma$  ist die Steigung in dieser linearen Näherung,  $\delta g$  wird durch den zweiten Teil der Gleichung definiert.

Integration der Funktion  $\beta = d \ln g / d \ln L$  ausgehend von  $g = g_0$  für eine Systemgröße  $L$  von der Größe der freien Weglänge  $l$  zu großer Systemgröße  $L \gg l$  ergibt

$$\begin{aligned} \ln L - \ln l &= \int_{\ln l}^{\ln L} d \ln L' = \int_{\ln g_0}^{\ln g} \frac{1}{\beta} d \ln g' \approx \int_{\ln g_0}^{\ln g} \frac{\gamma}{\delta g} d \ln g' \\ &\approx \gamma \int_{|\delta g_0|}^{|\delta g|} \frac{1}{u} du = \gamma \ln \delta g - \gamma \ln \delta g_0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dabei wurde  $u = |\delta g'| \approx \ln g' - \ln g_c$  substituiert. Für den Grenzbereich der linearen Näherung  $|\delta g| \sim 1$  folgt  $\ln |\delta g| \sim 0$  und die Gleichung kann nach der Systemgröße  $L$  aufgelöst werden. Diese Systemgröße für  $\delta g \sim 1$  kann mit der Korrelationslänge  $\xi_{\text{corr}}$  identifiziert werden:

$$\xi_{\text{corr}} = L(\delta g = 1) \approx l |\delta g_0|^{-\gamma} \propto |E_F - E_c|^{-\gamma}. \quad (3.14)$$

Diese Größe kann nun wie folgt motiviert werden: Für  $\delta g > 0$  entspricht  $\delta g \sim 1$  dem Übergang zu  $\beta \sim 1$ . Für  $L > \xi_{\text{corr}}$  ändert sich also  $\beta$  nur noch wenig, es ist das Regime ohmscher Leitfähigkeit  $g = \sigma L$  mit nur schwachen Quanten-Korrekturen zu  $\sigma$ .

Für  $\delta g < 0$  ist  $|\delta g| \sim 1$  der Übergang zum stark lokalisierten Regime mit  $g \ll g_c \sim 1$ . Dieser Übergang findet statt, wenn die Systemgröße  $L$  die Lokalisierungslänge  $\xi$  überschreitet. Im isolierenden Bereich entspricht also die Korrelationslänge  $\xi_{\text{corr}}$  der bereits eingeführten Lokalisierungslänge. Berücksichtigt man noch die Grenzen der Näherungen mit einem numerischen Faktor  $C_{\text{loc}}$  der Größenordnung 1, so gilt

$$\xi = C_{\text{loc}} l |\delta g_0|^{-\gamma} \propto |E_F - E_c|^{-\gamma}. \quad (3.15)$$

Das so abgeleitete divergente Verhalten einer Korrelations- bzw. Lokalisierungslänge in der Nähe eines kritischen Punktes  $g_c$  (bzw.  $E_c$ ) zusammen mit dem kontinuierlichen Verlauf der  $\beta$ -Funktion mit dem Parameter  $g$  ist das typische Verhalten eines kontinuierlichen Phasenüberganges 2. Ordnung. Durch eine kleine kontinuierliche Änderung eines mikroskopischen Leitwerts  $g_0$  um  $g_c$  bzw. der Fermienergie  $E_F$  um  $E_c$  wird das System von einer im Grenzwert  $L \rightarrow \infty$  definierten metallischen Phase in eine isolierende oder umgekehrt transferiert. Der Exponent  $\gamma$  wird kritischer Exponent genannt.

Ein Ein-Parameter-Skalierungsverhalten liegt vor, wenn sich Größen als Funktion von

$$y = L/\xi \quad (3.16)$$

schreiben lassen. Im lokalisierten Regime lässt sich direkt  $g \propto \exp(-y)$  und  $\beta \propto -y$  ablesen. Im metallischen Bereich lässt sich die Leitfähigkeit in  $\sigma = g_c/\xi$  für  $L > \xi$

### 3. Lokalisierung und Skalierung

mit der Korrelationslänge  $\xi = C_m l |\delta g_0|^{-\gamma}$  umschreiben, wobei  $C_m$  eine (von  $C_{loc}$  verschiedene) Konstante der Größenordnung eins ist. Damit folgt  $g \propto y$ . Für  $L > \xi$  folgt das ungeordnete Elektronensystem in 3d also einem Ein-Parameter-Skalierungsverhalten.

#### 3.1.3. Temperatur im Skalierungsbild

Im Experiment ist zwangsläufig die Temperatur  $T \neq 0$ . Dies führt nach einer typischen Zeit  $\tau_\phi$  zu Phasenkohärenz zerstörenden Prozessen. Die Phasenkohärenzzeit  $\tau_\phi \propto T^{-p}$  zeigt eine Temperaturabhängigkeit, die durch einen vom Streuprozess abhängenden Exponenten  $p$  charakterisiert ist. Die wichtigsten Prozesse sind bei hohen Temperaturen Streuung an optischen ( $p = 4$ ) oder akustischen ( $p = 2$ ) Phononen oder auch bei tiefster Temperatur Wechselwirkungen zwischen Elektronen ( $p = 1$ ). Bei ausreichend tiefen Temperaturen gilt für die Phasenkohärenzzeit  $\tau_\phi \gg \tau$ , so dass ein Elektron diffusiv, also unter vielfacher elastischer Streuung, eine Strecke

$$L_\Phi = \sqrt{D\tau_\phi} \propto T^{-p/2} \quad (3.17)$$

zurücklegt. Für eine Systemgröße  $L > L_\Phi$  zerfällt die Probe also in phasenkohärente Teilstücke der Größe  $L_\Phi$ . Die Skalierungsargumente gelten nur für  $L < L_\Phi$ . Der Leitwert einer großen Probe ergibt sich damit zu

$$g(L, T) = g(L_\Phi) \left( \frac{L}{L_\Phi} \right)^{d-2} = \sigma(T) L^{d-2}, \quad L \gg L_\Phi. \quad (3.18)$$

Statt einer Skalierung des Leitwerts mit der Systemgröße misst das Experiment also ein Skalierungsverhalten einer temperaturabhängigen Leitfähigkeit  $\sigma$ .

Die verallgemeinerte Skalierungsform des Leitwerts ist eine Funktion

$$g = g \left( \frac{L}{\xi}, \frac{L_\Phi}{\xi}, \frac{L}{L_\Phi}, \dots \right). \quad (3.19)$$

Die ... stehen für die mögliche Einführung weiterer Längen in das System, z. B. durch den Wellenvektor  $k$  ( $L_k \propto 1/k$ ) oder die Frequenz  $\omega$  ( $L_\omega \propto \omega^{1/z}$ ).  $z$  wird dynamischer Exponent genannt, sein Wert ist zunächst unbekannt.

Im realen Experiment gilt (bei Gleichstrom-Messung, also  $\omega = 0$  und  $k = 0$ ) für makroskopische Proben  $L \gg L_\Phi$ . Im Experiment zum Metall-Isolator-Übergang ist also die Leitfähigkeit die interessante Messgröße, da sie für  $L \gg L_\Phi$  unabhängig von der Systemgröße  $L$  wird, und es wird ihr Skalierungsverhalten mit der Temperatur untersucht:

$$\sigma = \sigma \left( T, \frac{L_\Phi}{\xi} \right) = \sigma_c(T) f(\delta \cdot T^{-\kappa}). \quad (3.20)$$

Dabei ist  $\delta$  der Abstand zum kritischen Punkt (der Ladungsträgerkonzentration, Unordnung, Verspannung, ...) und  $\kappa = p/2\gamma$  der kritische Exponent bezüglich der Temperatur. Der Vorfaktor  $\sigma_c(T)$  verursacht eine verbleibende Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit am kritischen Punkt, und diese macht die Problematik des Experiments aus. Wenn sich  $\sigma_c(T)$  nicht identifizieren lässt, kann auch das kritische Verhalten für  $T \rightarrow 0$  nicht sicher bestimmt werden.

## Metall-Isolator-Übergang in 2d bei $B=0$ ?

Anzumerken ist noch, dass aktuelle Experimente auch auf metallisches Verhalten in zweidimensionalen Systemen und damit die Existenz echter ausgedehnter Zustände im Grenzfall  $T \rightarrow 0$  und  $L \rightarrow \infty$  hindeuten. Erste experimentelle Hinweise von Kravchenko *et al.* [52] für einen Metall-Isolator-Phasenübergang eines zweidimensionalen Elektronensystems im Si-MOSFET wurden zunächst ablehnend aufgenommen. Weitere Experimente für 2DES im Si-MOSFET [53, 54] und SiGe-Heterostrukturen [55] und für zweidimensionale Lochgase in AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen [56] wurden als Nachweis eines Metall-Isolator-Phasenüberganges in zweidimensionalen Systemen angeführt. Dem Widerspruch zu den obigen Aussagen der Skalierungstheorie wechselwirkungsfreier Elektronen (oder allgemeiner Ladungsträger) wird mit der Bedeutung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung gerade im Grenzfall  $T \rightarrow 0$  begegnet.

Es bleibt jedoch die Schwierigkeit, aus Daten für  $T > 0$  auf das  $T \rightarrow 0$  Verhalten zu schließen. Wenn der Vorfaktor  $\sigma_c(T)$  in Gleichung 3.20 nur eine schwache Temperaturabhängigkeit aufweist, dann kann die Existenz einer Skalierungsfunktion  $\sigma = f(\delta \cdot T^{-\kappa})$  als Nachweis des kritischen Verhaltens gelten. Allerdings wird auch dies z.B. von Altshuler und Maslov [57] als sicheres Kriterium angezweifelt. Sie stellten ein theoretisches Modell auf, das ohne kritisches Verhalten für  $T \rightarrow 0$  Skalierungsverhalten in  $T$  aufweist und nach obigem Kriterium so kritisches Verhalten vorspiegelt.

Die Situation für  $d = 2$  ist also noch nicht geklärt und weiterhin Gegenstand intensiver Diskussion. Es fehlt ein sicherer experimenteller Nachweis, der die theoretischen Einwände entkräften könnte.

## 3.2. Lokalisierung und Skalierungstheorie im QHE

In Kapitel 2 wurde zur Erklärung des Quanten-Hall-Effektes in zweidimensionalen Elektronensystemen ad hoc die Existenz lokalisierter und ausgedehnter Zustände in verschiedenen Bereichen der verbreiterten Landau-Niveaus postuliert. Die eigentliche Überraschung lag hierbei in der Existenz von ausgedehnten Zuständen auch für  $T = 0$  und  $L \rightarrow \infty$ , da die Theorie ungeordneter Elektronensysteme (Abschnitt 3.1.1) in zwei Dimensionen die (exponentiell schwache) Lokalisierung aller Zustände vorhersagt. Im Magnetfeld wird durch Symmetriebrechung zwar der führende Term der schwachen Lokalisierung aufgehoben, aber der nächste Term der Störungsrechnung  $\beta \propto -g^2$  führt ebenfalls zu, wenn auch noch schwächerer, Lokalisierung. Es gibt bisher auch noch keinen theoretischen Ansatz, der diese ausgedehnten Zustände streng ableiten könnte. Sie müssen als Postulat in die bisherigen Ansätze einer Theorie eingeführt werden. Es gibt jedoch Argumente [58], dass es für  $T = 0, L \rightarrow \infty$  genau einen ausgedehnten Zustand je (spinaufgespaltenes) Landau-Niveau gibt.

### 3.2.1. Lokalisierung im Magnetfeld

Die Lokalisierung der Mehrheit der Zustände ist im hohen Magnetfeld viel stärker als durch schwache Lokalisierung. Allerdings ist die Störungsrechnung für den Bereich

### 3. Lokalisierung und Skalierung

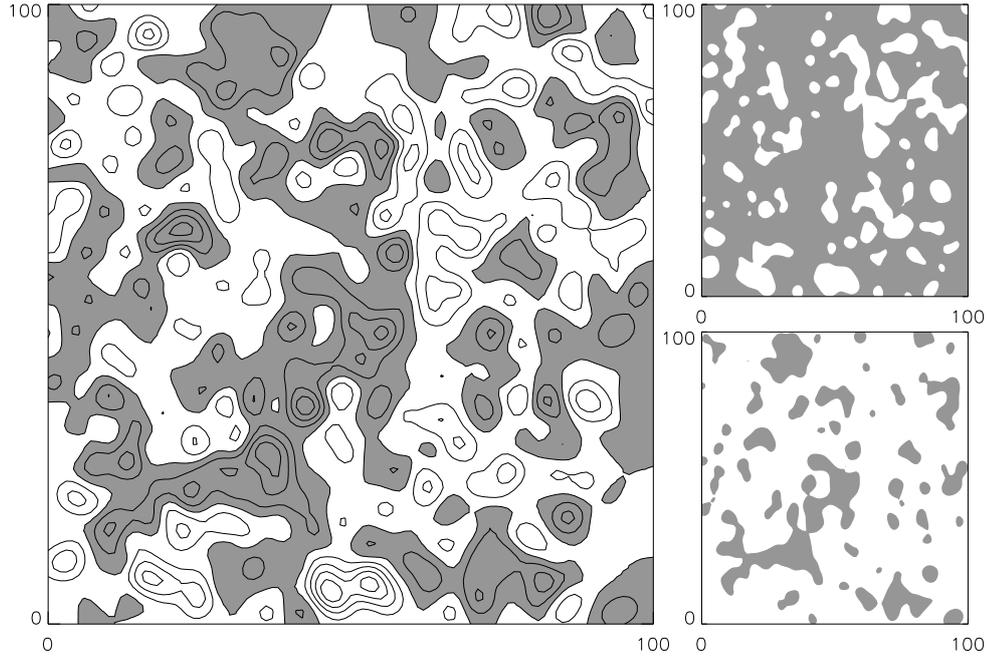


Abbildung 3.2.: Potentiallandschaft, erzeugt durch 500 Gauß-Funktionen mit gleicher Höhe  $E_0$  und Halbwertsbreite ( $r_B = 2l_B$ ) an zufälligem Ort mit zufälligem Vorzeichen. Mit Elektronen gefüllte Bereiche sind grau. Im großen Bild links ist  $E_F = 0$ , rechts oben  $E_F = E_0/2$  und rechts unten  $E_F = -E_0/2$ .

kleiner Magnetfelder auch nicht übertragbar. Hier soll nur ein semiklassisches Argument für die Lokalisierung im hohen Magnetfeld dargestellt werden. Eine ausführliche Darstellung und Klassifizierung von Unordnungseffekten ist in [59] nachzulesen.

Die natürliche Längeneinheit im hohen Magnetfeld ist die magnetische Länge  $l_B = \sqrt{\hbar/eB} = 26 \text{ nm} (1 \text{ T}/B)^{1/2}$ , die der Ausdehnung der elektronischen Wellenfunktion eines Elektrons im untersten Landau-Niveau entspricht. Diese ist etwa von der Größe des klassischen Zyklotronradius  $r_c = \hbar k_F/eB$  für ein besetztes Landau-Niveau.

Das für die Lokalisierung verantwortliche Zufallspotential lässt sich in zwei Gruppen einteilen: Ist  $d$  die typische Längenskala der Potentialvariation (mathematisch die Korrelationslänge des Potentials), so wird langreichweitige ( $d \gg l_B$ ) und kurzreichweitige ( $d \leq l_B$ ) Unordnung unterschieden.

Kurzreichweitige starke Unordnung ( $\Delta V > \hbar\omega_c$ ) in der gesamten Probe führt genauso wie ohne Magnetfeld zu starker Lokalisierung und unterdrückt auch die Existenz ausgedehnter Zustände und damit den Quanten-Hall-Effekt. Anschaulich führt eine solche Unordnung dazu, dass das Elektron seinen Zyklotronorbit genau um so eine „Spitze“ des Unordnungspotentials ausführt und dadurch fixiert ist. Dieser Fall ist für diese Arbeit nicht von Interesse.

Kurzreichweitige Unordnung mit geringer Stärke ( $\Delta V < \hbar\omega_c$ ) führt zu einer schwächeren Lokalisierung: Sie bewirkt eine Energieverbreiterung der möglichen Ein-Elektron-Wellenfunktion. Räumlich benachbarte Ein-Elektron-Wellenfunktionen sind energetisch nicht mehr entartet. Wie im Abschnitt 3.1.1 erläutert, führt dies zu einer gerin-

geren Kopplung der Wellenfunktionen (da die Kopplungsstärke sich wie  $1/\Delta E$  verhält). Diese Kopplung ist jedoch für ausgedehnte Wellenfunktionen nötig.

Im Zusammenhang mit der Zustandsdichte eines verbreiterten Landau-Niveaus können aus diesem Argument direkt weitere qualitative Schlüsse gezogen werden: In der Mitte des Landau-Niveaus hat  $D(E)$  ein Maximum. Bei dieser Energie existieren also die meisten Zustände, und die Wahrscheinlichkeit, dass sich mehrere Ein-Elektron-Zustände gleicher Energie in räumlicher Nähe befinden und hybridisieren können, ist groß. Es bilden sich also eher weiter ausgedehnte Zustände, charakterisiert durch ein große Ausdehnung  $\xi$ . In den „Füßen“ der Verteilung hat  $D(E)$  jedoch einen kleinen Wert. Ein Ein-Elektron-Zustand dieser Energie wird also kaum einen Nachbarn ähnlicher Energie finden. So können sich nur Zustände geringer Ausdehnung  $\xi$  bilden. Die Lokalisierungslänge  $\xi(E)$  fällt also vom Bandzentrum  $E_c$  aus sowohl zu höheren als auch zu niedrigeren Energien ab.

Langreichweitige „sanfte“ Potentiale entsprechen lokal der klassischen Situation eines frei driftenden Elektrons im elektrischen und magnetischen Feld, wobei hier das elektrische Feld durch den Gradienten  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  des Potentials  $V$  erzeugt wird. Das Elektron bewegt sich senkrecht zum elektrischen Feld, also entlang der Äquipotentiallinien von  $V$ . Diese sind in der Potentiallandschaft aber mehrheitlich geschlossen, die Elektronen also durch Maxima oder Minima des Potentials gebunden.

Diese Argumentation gilt nun im starken Magnetfeld nicht direkt für die Bahn des Elektrons, die durch eine schnelle Kreisbewegung mit Frequenz  $\omega_c$  auf einem Radius  $r_c \approx l_B \ll d$  charakterisiert ist, sondern für die Driftbewegung des Mittelpunktes dieser Zyklotronbahn. In der Quantenmechanik entsprechen diesen Bahnen Wellenfunktionen, die entlang solcher Äquipotentiallinien ausgedehnt sind. In einer gleichmäßigen Verteilung von Potentialminima und -maxima ist ihre Ausdehnung im Zentrum des Landau-Niveaus mit einer mittleren Energie  $E_c$  am größten. Je weiter die Energie von diesem Zentrum entfernt liegt, desto kleiner ist der Radius des „Gipfels“ und damit die Ausdehnung der Zustände. Für das einfache Modell von attraktiven und repulsiven Streuern gleicher Anzahl und Stärke mit gaußförmigem Potential ist dies in Abbildung 3.2 veranschaulicht:

Nur Zustände entsprechend der Äquipotentiallinie an der Fermienergie  $E_F$ , also der Grenze zwischen grau und weiß, tragen zu  $\sigma_{xx}$  bei. Im linken Bild ist ein Zustand vertikal über den dargestellten Bereich ausgedehnt, die Leitfähigkeit einer solchen Probe ist also  $\sigma_{xx} > 0$ . In den beiden rechten Bildern sind die Äquipotentiallinien und damit die Bahnen der Elektronen bei der Fermienergie geschlossen, es kann kein Strom von einem Rand zum anderen getragen werden.

Die Frage nach der größten Ausdehnung einer durch eine Potentiallinie eingeschlossenen Fläche ist ein klassisches Perkolationsproblem [60]. Für die maximale Ausdehnung  $\xi$  gilt

$$\xi = |E - E_c|^{\gamma_p}. \quad (3.21)$$

Das Perkolationsproblem zeigt kritisches Verhalten mit einer Energie  $E_c$ , bei der es also eine unendlich ausgedehnte Äquipotentiallinie gibt, und kritischem Exponenten  $\gamma_p$ , für den in zwei Dimensionen  $\gamma_p = 4/3$  gilt [61].

### 3.2.2. Skalierungstheorie im QHE

Die Existenz mindestens eines ausgedehnten Zustandes in der Mitte eines jeden Landau-Niveaus bei einer bestimmten Energie  $E_c$  inmitten von lokalisierten Zuständen deutet auf ein kritisches Verhalten im Grenzfall  $T = 0$  und  $L \rightarrow \infty$  hin. Anders als in der Diskussion der Skalierungstheorie in Abschnitt 3.1.1, in der das Magnetfeld nur als Störung auftrat, müssen nun zwei Leitfähigkeitskomponenten  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{xy}$  betrachtet werden (zur Erinnerung: In zwei Dimensionen gilt  $g = \sigma$ ), es sind also zwei  $\beta$ -Funktionen nötig. Pruisken entwickelte eine Feldtheorie des QHE im Rahmen der so genannten nichtlinearen  $\sigma$ -Theorie (die z.B. die Berechnung der Korrektur durch schwache Lokalisierung in Gleichung 3.8 erlaubt) durch Hinzufügen eines topologischen Terms [62]. Im Rahmen dieser Theorie konnte er folgende Ausdrücke ableiten [63]:

$$\begin{aligned}\beta_{xx} &= \frac{d\tilde{\sigma}_{xx}}{d \ln L} = \frac{-1}{2\pi^2\tilde{\sigma}_{xx}} - \tilde{\sigma}_{xx} D e^{-2\pi\tilde{\sigma}_{xx}} \cos(2\pi\tilde{\sigma}_{xy}), \\ \beta_{xy} &= \frac{d\tilde{\sigma}_{xy}}{d \ln L} = -\tilde{\sigma}_{xx} D e^{-2\pi\tilde{\sigma}_{xx}} \sin(2\pi\tilde{\sigma}_{xy}).\end{aligned}\quad (3.22)$$

Hierbei ist  $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} h/e^2$  die dimensionslose Leitfähigkeit.  $D$  ist eine unbekannte Konstante, deren Wert nicht theoretisch abgeleitet werden kann.

Die Fixpunkte dieser Gleichung sind durch  $\beta_{\alpha\beta} = 0$  definiert. Am Fixpunkt ändern sich die Leitfähigkeiten nicht bei Änderung der Systemgröße  $L$ . Für  $\beta_{xy} = 0$  ergeben sich sofort die Lösungen  $\sigma_{xy} = n/2$  als Nullstellen des Sinus. Für  $\sigma_{xy} = n$  ist  $\beta_{xx} = 0$  nur durch  $\sigma_{xx} = 0$  erfüllbar. Diese Kombination ist nun gerade charakteristisch für das Quanten-Hall-Plateau. Für  $\sigma_{xy} = n + \frac{1}{2}$  haben die beiden Terme in  $\beta_{xx}$  entgegengesetzte Vorzeichen, so dass es eine Lösung  $\sigma_c \neq 0$  gibt. Für alle anderen Werte von  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{xy}$  bei gegebener Systemgröße  $L$  streben die Leitfähigkeiten einem der Fixpunkte zu, wobei der Punkt  $\sigma_{xx} = \sigma_c$  nur für  $\sigma_{xy} = n + \frac{1}{2}$  erreicht wird. Bereits geringste Abweichungen führen zu dem  $\sigma_{xy} = n$ -Fixpunkt.

Die Theorie führt zu dem schon von Khmel'nitskii postulierten Renormierungsgruppen-Flussdiagramm [5], das in Abbildung 3.3 dargestellt ist. Anders als in Abbildung 3.1, wo die  $\beta$ -Funktion in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit dargestellt ist, sind in diesem Diagramm die für diesen Fall zwei  $\beta$ -Funktionen nur implizit enthalten. Eine Probe der Größe  $L$  bei einem Magnetfeld  $B$  wird in diesem Diagramm durch einen Punkt in der durch die zwei Leitfähigkeitskomponenten gebildeten Ebene charakterisiert. Durch die  $\beta$ -Funktionen ist nun definiert, „wohin“ sich dieser Punkt bei einer Änderung der Größe  $L$  bewegt. Dies ist durch die Pfeile in dem Diagramm dargestellt, wobei die Pfeilrichtung einem wachsenden  $L$  entspricht. Das Verhalten der Probe im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  kann nun einfach abgelesen werden, indem der Pfeil, exakt ausgedrückt der Renormalisierungsgruppen-Fluss, bis zu seinem Ende verfolgt wird. Alle Flusslinien Enden für  $L \rightarrow \infty$  in einem der aus den  $\beta$ -Funktionen abgeleiteten Fixpunkte. Die Fixpunkte entsprechend den QHE-Plateaus mit ganzzahligem  $\sigma_{xy}$  werden stabile Fixpunkte genannt, da alle Flusslinien der Umgebung in ihnen enden. Die Fixpunkte bei  $\sigma_{xy} = n + 1/2$  zeigen ein Sattelpunktverhalten und sind nur Ziel des geradlinigen Flusses bei  $\sigma_{xy} = n + 1/2$ .

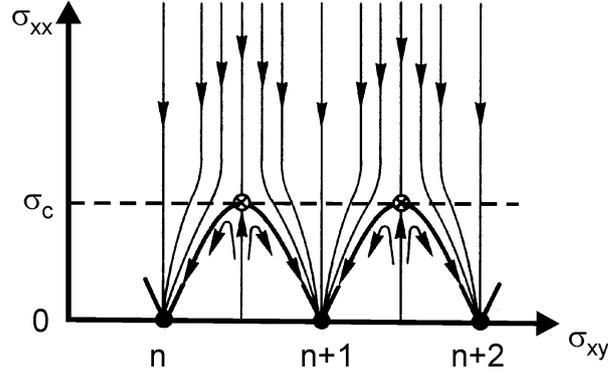


Abbildung 3.3.: Renormierungsgruppen-Flussdiagramm nach Khmel'nitskii [5].  $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) = (0, n)$  sind stabile Fixpunkte, während  $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) = (\sigma_c, n + \frac{1}{2})$  gegenüber kleinsten Abweichungen  $\delta\sigma_{xy}$  instabil ist und kritisches Verhalten zeigt.

Theorie und Flussdiagramm lassen somit kritisches Verhalten erwarten. Für eine Fermienergie  $E_F = E_c$  in der Mitte eines Landau-Niveaus ist genau  $\sigma_{xy} = n + \frac{1}{2}$ , und das System strebt für  $L \rightarrow \infty$  dem instabilen Fixpunkt  $(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}) = (\sigma_c, n + \frac{1}{2})$  zu, es gibt einen ausgedehnten Zustand an der Fermienergie. Für eine kleinste Abweichung von dieser kritischen Energie  $E_c$  sind im Grenzübergang alle Zustände lokalisiert, das System ist im Quanten-Hall-Plateau. Für die Lokalisierungslänge gilt wieder

$$\xi \propto |\delta\sigma_{xy}|^{-\gamma} \propto |E - E_c|^{-\gamma} = |\delta E|^{-\gamma}. \quad (3.23)$$

Leider ist es noch nicht gelungen, mit Hilfe der nichtlinearen  $\sigma$ -Theorie quantitative Aussagen zu machen, weder über den kritischen Leitwert  $\sigma_c$ , noch über den kritischen Exponenten  $\gamma$ . Die Theorie kann daher nur als Motivation des beschriebenen qualitativen Bildes dienen. Es gibt aber auch noch keine allgemein akzeptierte analytische Theorie, die dies ermöglichen würde. Für das semiklassische Bild der Lokalisierung, das im Abschnitt 3.2 für die Wirkung langreichweitiger Unordnung vorgestellt wurde, argumentierten Mil'nikov und Sokolov [64], dass das klassische Perkolationsbild durch Tunnelprozesse zwischen durch Sattelpunkte getrennten lokalisierten Zuständen ergänzt werden kann. Dies führt mit dem klassischen Perkolationsexponenten  $\gamma_p = 3/3$  auf den kritischen Exponenten

$$\gamma = \gamma_p + 1 = \frac{7}{3}. \quad (3.24)$$

Eine Aussage der  $\sigma$ -Theorie sollte noch hervorgehoben werden: Die Theorie ist periodisch in  $\sigma_{xy}$ . Im Übergang  $\sigma_{xy} \rightarrow \sigma_{xy} \pm 1$  bleiben alle Größen identisch. Dies ist insbesondere für die Maxima in  $\sigma_{xx}$  im Widerspruch zur Vorhersage von Ando (vgl. Abschnitt 2.3.2, Gleichung 2.32). Pruisken postuliert außerdem, dass der kritische Exponent  $\gamma$  und die kritische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}^c$  universell sind, also nicht von den Parametern und der Realisierung des 2DES abhängen. Die Universalität der kritischen Leitfähigkeit wird durch Argumente von Fisher [65, 66] gestützt.

### 3.2.3. Numerische Resultate

Ein Weg, zu theoretischen Aussagen über kritische Exponenten zu kommen, ist die numerische Bestimmung von Lokalisierungslänge und Leitfähigkeit. In der Numerik ist trivial  $T = 0$ , kritisches Verhalten und Skalenverhalten sollten also nachweisbar sein. Einen ausführlichen Überblick über numerische Methoden und die Interpretation ihrer Ergebnisse wurde von Huckestein [67] gegeben. Die von Huckestein verwendete Methode [68] soll hier kurz angedeutet werden, da ihr Ergebnis für den kritischen Exponenten  $\gamma = 2.35 \pm 0.03 \approx 7/3$  allgemein als zuverlässiger Wert anerkannt ist. Hierbei ist zu betonen, dass zuverlässige Ergebnisse bisher nur für ein besetztes Landau-Niveau ohne Spinartung bestimmt wurden. Die Komplikationen für mehrere besetzte Landau-Niveaus führen zu einer großen Variation des Exponenten mit ebenso großen Fehlerbalken. Außerdem wird in allen Ansätzen die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen untereinander nicht berücksichtigt.

Es ist aufgrund begrenzter Rechenleistung immer nötig, sich auf ein begrenztes Gebiet zu beschränken. Gesucht ist jedoch das Verhalten für  $L \rightarrow \infty$ . Außerdem muss das Problem auf ein diskretes Gitter übertragen werden. Die natürliche Gitterweite im Quanten-Hall-System ist die magnetische Länge  $l_B$ . Die von Huckestein berechnete Geometrie ist ein Streifen, dessen eine Ausdehnung so groß ist ( $L_y = 2,5 \cdot 10^5 l_B$ ), dass sie als Realisierung von  $L \rightarrow \infty$  angesehen werden kann. Die Breite  $W$  des Streifens wird von 1 bis 321 variiert, wobei periodische Randbedingungen die Ausbildung von Randkanälen verhindern. Als Potential wird ein Zufallspotential gaußförmiger Streuer mit Ausdehnung  $r_B$  verwendet, wobei Huckestein nur den Unterschied  $r_B = 0$ , also  $\delta$ -Streuer und  $r_B = 1(l_B)$  untersucht (und keinen findet). Für diese Streifen wird nun für verschiedene Energien  $E$  mit  $|E - E_c| < \Gamma$  die Lokalisierungslänge  $\lambda_W(E)$  berechnet.  $\Gamma$  ist die symmetrische Verbreiterung der Zustandsdichte  $N(E)$  um  $E_c$ . Um nun von der Lokalisierungslänge  $\lambda_W$  des endlichen Systems zu  $\xi$  im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  zu kommen, während dieser Grenzübergang auch für  $W = 321$  noch nicht erreicht ist, wird folgendes Skalierungsgesetz angenommen:

$$\lambda_W(E) = W \Lambda \left( \frac{W}{\xi(E)} \right), \quad \xi = \xi_0 \left| \frac{E - E_c}{\Gamma_\sigma} \right|^{-\gamma}. \quad (3.25)$$

$\Lambda$  ist eine Funktion, deren Grenzfälle wie folgt motiviert werden können: Für kleine  $W \ll \xi$  ergibt sich direkt  $\lambda_W \sim W$ , da hier die Systemgröße  $W$  die einzige relevante Länge ist, also  $\Lambda(x) \sim 1$ . Für  $W \gg \xi$  ist per Definition  $\lambda_W = \xi$  und somit  $\Lambda = 1/x$ . Die numerischen Daten lassen sich nun für einen großen Bereich der  $W$ - $E$ -Parameterenebene für eine geeignete Wahl von  $\gamma$  auf eine Kurve  $\Lambda(W/\xi)$  reskalieren, was als numerischer Beweis des Ein-Parameter-Skalenverhaltens mit einer am kritischen Punkt  $E_c$  divergierenden Lokalisierungslänge gilt. Geeignete Definitionen der optimalen Reskalierung ergeben den kritischen Exponenten

$$\gamma = 2,35 \pm 0,03 \quad (3.26)$$

in erstaunlicher Übereinstimmung mit dem semiklassischen Perkolationsexponenten  $\gamma = 7/3$ .

In einer Arbeit von Mieck [69] unter Verwendung ähnlicher numerischer Methoden wurde ein kompatibler Wert  $\gamma = 2,3 \pm 0,08$  gefunden. Hier wurde dieses Ergebnis bis zu  $r_B = 4l_B$  geprüft. Dies entspricht bei  $B \approx 7$  T gaußförmigen Streuern mit 40 nm Ausdehnung.

Weitere Methoden ergaben mit diesem Ergebnis kompatible Werte. So erhielten Huo und Bhatt (Chern number [70])  $\gamma = 2,4 \pm 0,1$ , Ando (Transmission durch ungeordnetes System mit idealen Zuleitungen [71])  $\gamma = 2,2 \pm 0,1$ , Lee *et al.* (Chalker-Coddington Netzwerk mit Quanten-Tunneln [72])  $\gamma = 2,4 \pm 0,2$  und Sinova *et al.* (Liouville-Zugang [73])  $\gamma = 2,33 \pm 0,05$ . Auch unter Berücksichtigung von Wechselwirkung (Huckestein *et al.* [74]) bleibt dieses Ergebnis für den kritischen Exponenten stabil.

Ein Teil der numerischen Modelle erlaubt auch eine Bestimmung der Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}^c$ . So bestimmten Chalker *et al.*  $\sigma_{xx}^c = 0,45$  [75] und Huo *et al.* mit verbesserter Numerik  $\sigma_{xx}^c = 0,5$  [76] für verschiedene Korrelationslängen des Potentials und auch für asymmetrische Potentiale. Weitere numerische Bestimmungen bestätigen diesen Wert [77, 78, 79].

Aus theoretischer Sicht bleibt es interessant, eine analytische Ableitung dieser Ergebnisse zu finden und die Invarianz des kritischen Exponenten gegenüber Wechselwirkung zu verstehen. Kritisches Verhalten im Plateau-Übergang mit universellem Exponenten  $\gamma \approx 2,35$  und universeller kritischer Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}^c = 0,5$  wird theoretisch als bewiesen angesehen.

### 3.2.4. Begrenzte Systeme und dynamische Skalierung

Ein begrenztes System ist zunächst durch eine endliche Größe  $L$  der Probe in der Numerik und auch im Experiment gegeben. Dies war zusammen mit dem Verhalten im Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  Inhalt der Skalierungsfunktion. Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, führt dies zu einer Skalierungsform der Lokalisierungslänge  $\lambda(L) = L\Lambda(L/\xi)$  des endlichen Systems. Dies führt (für  $L \gg l$  mit der mikroskopischen Längenskala  $l$ ) auch zu einer Skalierungsform der Leitfähigkeiten (die Indizes  $xx$  und  $xy$  sind weggelassen, die Gleichung hat für beide Leitfähigkeitskomponenten die gleiche Form):

$$\sigma(L, \xi) = \sigma_c \tilde{f}_L \left( \frac{L}{\lambda_L} \right) = \sigma_c \tilde{f}_L \left( \Lambda^{-1} \left( \frac{L}{\xi} \right) \right) = \sigma_c f_L \left( \frac{L}{\xi} \right). \quad (3.27)$$

Die Funktion  $f_L$  hat für die Komponente  $\sigma_{xx}$  die Grenzfälle  $f_L(x) = 1$  für  $x \ll 1$  und  $f_L(x) \propto \exp(-x)$  für  $x \gg 1$ .

Im Folgenden soll dargestellt werden, wie das Skalierungsverhalten von Temperatur  $T$ , Wellenvektor  $k$  und Frequenz  $\omega$  abgeleitet werden kann. Es wird  $L \gg L_{T,k,\omega}$  angenommen, wobei  $L_{T,k,\omega}$  eine Übersetzung von  $T$ ,  $k$  oder  $\omega$  in eine effektive Länge ist. Damit gilt  $L \rightarrow \infty$ .

Die Rolle des Wellenvektors ist einfach, es gilt direkt  $L_k \sim 1/k$ , so dass sich ein Skalierungsverhalten  $\sigma = \sigma_c f_k ((k\xi)^{-1})$  ergibt.

Um die Frequenz zu berücksichtigen, muss die Quantennatur des hier untersuchten Phasenüberganges zwischen den Plateaus  $\sigma_{xy} = n$  und  $n + 1$  berücksichtigt werden.

### 3. Lokalisierung und Skalierung

Mit der Quantennatur ist nicht gemeint, dass die Quantenmechanik nötig ist, um das System als solches zu beschreiben, sondern es charakterisiert die Art des Phasenüberganges.

Der hier beschriebene Metall-Isolator-Übergang ist für  $T = 0$  ein Phasenübergang zweiter Ordnung. Die Temperatur  $T = 0$  unterscheidet den Quanten-Phasenübergang vom klassischen Phasenübergang, für den die Temperatur  $T > 0$  der entscheidende Parameter ist. Im Plateau-Übergang im QHE wird das System nicht von der Temperatur, sondern der Änderung der Fermienergie  $E_F$  gegenüber einer kritischen Energie  $E_c$  durch den Phasenübergang getrieben. Das kritische Verhalten wird durch die Reaktion auf Fluktuationen bestimmt, die im Gegensatz zum klassischen Phasenübergang nicht thermischer sondern quantenmechanischer Natur sind. Eine ausführliche Darstellung des quantenmechanischen Phasenüberganges ist z.B. bei Sondhi *et al.* [80] nachzulesen.

Im quantenmechanischen Phasenübergang tritt neben der Korrelations- bzw. Lokalisierungslänge  $\xi \propto |\delta|^{-\gamma}$  ( $\delta = E - E_c$ ) auch eine Korrelationszeit

$$\xi_\tau = \hbar/\Delta \quad (3.28)$$

auf, die mit einer im kritischen Punkt verschwindenden Energielücke  $\Delta$  assoziiert ist. Die Korrelationszeit divergiert durch  $\Delta \rightarrow 0$  ebenfalls am kritischen Punkt, und es gilt:

$$\xi_\tau \propto |\delta|^{-z\gamma} \propto \xi^z, \quad \Delta \propto \xi^{-z}. \quad (3.29)$$

Der Exponent  $z$  wird dynamischer Skalierungsexponent genannt und stellt die Verbindung zwischen der Anregungslücke  $\Delta$  im Transport und der Lokalisierungslänge  $\xi$  her.

Mit  $\xi_\tau$  ist nun die Zeitskala des Systems gefunden, so dass nun das Skalierungsverhalten der Frequenz bestimmt ist:

$$\sigma = \sigma_c f_\omega ((\omega \xi_\tau)^{-1}) = \sigma_c \tilde{f}_\omega ((\omega \xi^z)^{-1}). \quad (3.30)$$

Für nicht untereinander wechselwirkende Elektronen ergibt die Theorie  $z = 2$  [75]. Dies wird auch in numerischen Untersuchungen des frequenzabhängigen Skalierungsverhaltens gefunden. Die Situation mit Wechselwirkung ist hingegen analytisch weniger klar. Polyakov identifiziert für  $\delta \neq 0$  eine Aktivierungsbarriere durch Coulomb-Ladeenergie  $U_c \sim \varepsilon \varepsilon_0 e^2 / \xi$  [81]. Dies führt zu  $z = 1$ . Den gleichen Effekt hat die Einführung der Coulomb-Wechselwirkung in das Chalker-Coddington-Perkolationsmodell [72]. Denselben Wert erlangten auch Huckestein *et al.* für numerische Bestimmung der Frequenzabhängigkeit unter Berücksichtigung der Wechselwirkung [74].

Die Temperatur  $T$  kann in diesem Bild nun ebenfalls als Zeit aufgefasst werden. Hierbei wird von Sondhi *et al.* [80] entsprechend der Energie-Unschärferelation eine Zeit  $\tau_T \sim \hbar/k_B T$  eingeführt. Mit der zugehörigen Länge

$$L_T \propto \tau^{1/z_T} \propto T^{-1/z_T} \quad (3.31)$$

folgt das Skalierungsgesetz

$$\sigma = \sigma_c f'_T \left( \frac{\tau_T}{\xi_\tau} \right) = \sigma_c f_T \left( \frac{L_T}{\xi} \right) = \sigma_c \tilde{f}_T \left( (T\xi_\tau^z)^{-1} \right). \quad (3.32)$$

Der Übergang zwischen „metallischem“ und isolierendem Verhalten wird durch  $x = L_T/\xi \sim 1$  bzw.  $x' = \tau_T/\xi_\tau = \Delta/k_B T \sim 1$  charakterisiert. Die wenig intuitive Definition einer Zeit entspricht so einem direkten Vergleich der Aktivierungsbarriere mit der thermischen Energie.  $x < 1$  entspricht der Überwindung der Barriere durch thermische Energie und „metallischer“ Leitfähigkeit.

Der dynamische Exponent  $z_T$  der Temperatur wurde mit einem  $T$  verziert, um klar zu machen, dass keine Sicherheit über  $z = z_T$  besteht. So wurde in einer neuen Arbeit [82] zur Wirkung von kurzreichweitiger Wechselwirkung der Elektronen ein Unterschied in den Exponenten gefunden ( $z_T = 1, 2, z = 2$ ).

Eine anschauliche Interpretation der Rolle der Temperatur wurde in Abschnitt 3.1.3 dargestellt. Hier wird die Systemgröße  $L$  für  $L \gg L_\Phi$  durch die Phasenkohärenzlänge  $L_\Phi \propto T^{-p/2}$  ersetzt. Dies führt zu einer Identifikation  $z_T = 2/p$ . Um die Experimente in diesem Bild zu interpretieren (vgl. nächsten Abschnitt), muss der Exponent  $p$  einen Wechsel von  $p = 1$  bei  $B = 0$  (theoretisch und experimentell gut bestätigt) nach  $p = 2$  im QHE vollziehen. Brandes *et al.* zeigten [83, 84], dass der Exponent  $p$  für Elektron-Phonon-Streuung im Quanten-Hall-Regime Werte  $p = 2 - 2, 2$  annimmt. Sie finden jedoch für die Elektron-Elektron-Streuung wiederum  $p = 1$ , so dass im Grenzwert  $T \rightarrow 0$  Elektron-Elektron-Streuung dominiert. Dies führt jedoch wieder zu einem Widerspruch zum Experiment, der nur gelöst werden kann, falls Elektron-Elektron-Wechselwirkung die Phase nicht zerstört.

Polyakov hingegen argumentiert [81], dass die Phasenkohärenzlänge den Exponenten  $p = 1$  beibehält, jedoch nur direkt am kritischen Punkt ( $\delta = 0, \sigma_{xy} = n + \frac{1}{2}$ ) das Verhalten der Probe bestimmt, während das Skalierungsverhalten für  $\delta \neq 0$  durch die oben erwähnte Coulomb-Aktivierungsbarriere  $\Delta E \propto 1/\xi$  bestimmt wird.

Auch das elektrische Feld  $F$  kann dynamisches Skalierungsverhalten hervorrufen. Dazu muss die zugehörige Länge  $L_F$  identifiziert werden: Zunächst ist durch die zugehörige Zeit  $\tau_F \propto L_F^{z_F}$  eine charakteristische Energie der Fluktuation  $\hbar/\tau_F \propto \hbar L_F^{-z_F}$  definiert. Diese kann mit der gewonnenen Energie  $eFL_F$  bei Diffusion über die Länge  $L_F$  identifiziert werden. Es folgt

$$eFL_F \propto \hbar L_F^{-z_F} \Rightarrow L_F \propto F^{-1/(1+z_F)}. \quad (3.33)$$

Wenn diese Länge kürzer ist als alle anderen Längen (oder Zeiten) des Systems, so folgt die Skalierungsform

$$\sigma = \sigma_c f \left( \frac{L_F}{\xi} \right) = \sigma_c \tilde{f} \left( F\xi^{z_F+1} \right). \quad (3.34)$$

Für den Übergangspunkt von lokalisiertem zu metallischem Verhalten ( $x = L_F/\xi \sim 1$ ) haben Polyakov *et al.* [85] diese Beziehung mit  $z_F = z_T = 1$  abgeleitet. Die Ableitung basiert auf einem „variable range hopping“-Mechanismus der Leitfähigkeit, die Anwendbarkeit auf den Übergangsbereich ist experimentell nicht geklärt.

### 3. Lokalisierung und Skalierung

Wei *et al.* [12] interpretierten nahe am kritischen Punkt analog zu dünnen Metallfilmen [86] die effektive Temperatur als die Energie  $k_B T_e \sim eFL_{\text{in}}$  mit  $L_{\text{in}} \propto T_e^{-p/2}$ , die Elektronen beim diffusiven Transport zwischen zwei inelastischen Stößen (in denen diese Energie an Phononen weitergegeben wird) aufnehmen. Dies führt mit der Identifikation  $z_F = z_T = p/2$  ebenfalls auf diese Skalierungsform.

## 3.3. Skalierungsbild im experimentellen Test

### 3.3.1. Temperaturskalierung

Nach ersten qualitativen Versuchen zur Bestimmung des vorhergesagten Flussdiagrammes in der  $\sigma_{xy}$ - $\sigma_{xx}$ -Ebene [87] führten Wei *et al.* 1988 [7] den ersten ernsthaften Test auf kritisches Verhalten durch Messung der Temperaturabhängigkeit für ein zweidimensionales Elektronensystem in einer InGaAs/InP-Heterostruktur durch. Die Messungen wurden an Proben in Hall-Geometrie ausgeführt, so dass die direkte Messgröße die Komponenten des Widerstandstensors  $\rho_{xx}$  und  $\rho_{xy}$  waren. Ein Skalierungsverhalten der Leitfähigkeitskomponenten entsprechend Gleichung 3.32 führt direkt auch zu einer Skalierungsform der Widerstände:

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta}^c f\left(\frac{L_{\text{eff}}}{\xi}\right) = \rho_{\alpha\beta}^c \tilde{f}_{\alpha\beta}(\delta \cdot T^{-\kappa}), \quad \delta \propto E - E_c \propto B - B_c. \quad (3.35)$$

Die einfachste Methode zur Überprüfung von Skalierungsverhalten ist die Bestimmung der Halbwertsbreite  $\Delta B_{1/2}$  der Maxima in  $\rho_{xx}$ . Damit wird gerade der Übergangspunkt von lokalisiertem ( $L_{\text{eff}} > \xi$ ) zu „metallischem“ ( $L_{\text{eff}} < \xi$ ) Verhalten bestimmt. Im Falle eines kritischen Skalierungsverhaltens gilt für die Breite

$$\Delta B \propto T^\kappa. \quad (3.36)$$

Nahe dem kritischen Punkt kann Gleichung 3.35 in eine Potenzreihe von  $\tilde{x} = \delta \cdot T^\kappa$  entwickelt werden:

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta}^c \left(1 + a_{\alpha\beta}^{(1)}(\delta \cdot T^\kappa) + a_{\alpha\beta}^{(2)}(\delta \cdot T^\kappa)^2 + \dots\right), \quad a_{xx}^{(1)} = 0. \quad (3.37)$$

Dies führt zur Erwartung von Potenzgesetzen für die Ableitungen am kritischen Punkt

$$\frac{d^n \rho_{\alpha\beta}}{dB^n}(\delta \rightarrow 0) \propto T^{-n\kappa}. \quad (3.38)$$

Abbildung 3.4 zeigt schematisch den beschriebenen Effekt einer effektiven Systemgröße  $L_{\text{eff}}$ , die in diesem Fall durch die Temperatur mit  $L_{\text{eff}} = L_T \propto T^{-1/z_T}$  gegeben ist. Die Lokalisierungslänge  $\xi \propto |E - E_c|^\gamma$  divergiert bei Annäherung an den kritischen Punkt  $E_c$  in der Mitte des Landau-Niveaus, hier repräsentiert durch die stark verbreiterte Zustandsdichte  $N(E)$ . Ein Zustand bei Energie  $E$  ist lokalisiert, wenn die Lokalisierungslänge  $\xi$  kleiner als die effektive Systemgröße  $L_{\text{eff}}$  ist. Liegt also die

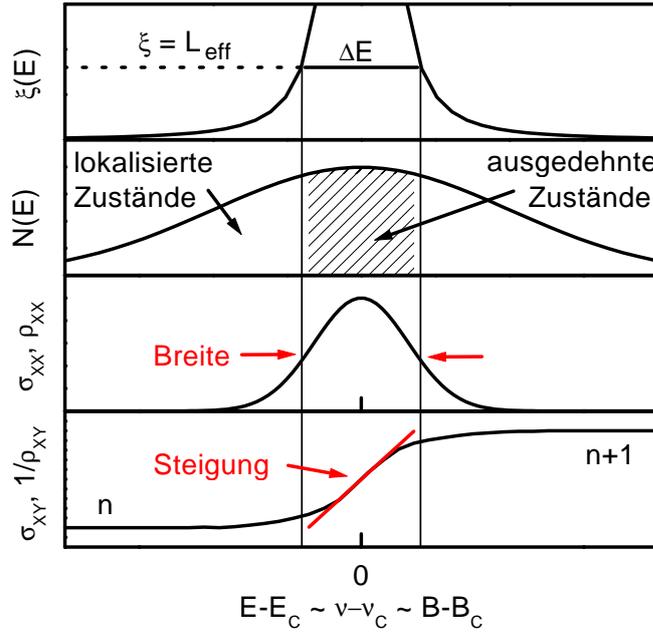


Abbildung 3.4.: Die Breite des SdH-Maximums spiegelt die energetische Breite  $\Delta E$  um  $E_c$  wieder, innerhalb derer durch endliche effektive Probengröße  $L_{\text{eff}} < \xi(E)$  Zustände delokalisiert sind und zum elektrischen Transport beitragen können.

Fermienergie  $E_F$  bei einer solchen Energie, so ist die longitudinale Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  (und damit auch der Widerstand  $\rho_{xx}$ ) exponentiell klein und die Hall-Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  (bzw. der Hall-Widerstand  $\rho_{xy}$ ) quantisiert.

In der Nähe des kritischen Punktes jedoch wird die Lokalisierungslänge  $\xi(E)$  größer als die effektive Systemgröße  $L_{\text{eff}}$ . Damit sind an der Fermienergie ausgedehnte Zustände vorhanden, die zur Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  beitragen. Es folgt ein endliches  $\rho_{xx}$  und nicht quantisierte  $\sigma_{xy}$  und  $\rho_{xy}$ . Die energetische Breite  $\Delta E$  dieses Bereiches ausgedehnter Zustände wird damit direkt durch die Breite des Maximums in  $\sigma_{xx}$  bzw.  $\sigma_{xy}$  repräsentiert. Da der Übergang zwischen den quantisierten Werten von  $\sigma_{xy}$  bzw.  $\rho_{xy}$  sich ebenfalls über diese Breite hinzieht, ist die maximale Steigung proportional zum Kehrwert von  $\Delta E$ . Die Breite  $\Delta E$  wiederum wird durch die Bedingung  $L_{\text{eff}} = \xi(E) \propto |E - E_c|^{-\gamma}$  bestimmt, womit  $\Delta E \propto L_{\text{eff}}^{-1/\gamma}$  folgt. Mit  $E - E_c \propto \nu - \nu_c \propto B_c - B$  und  $L_{\text{eff}} \propto T^{-1/z_T}$  folgen so anschaulich die Gleichungen 3.36 und 3.38 mit  $\kappa = 1/\gamma z_T$ .

Wei *et al.* fanden kritisches Verhalten sowohl für  $\Delta B$  als auch für die Ableitungen  $(d^n \rho_{\alpha\beta}/dB^n)_{\text{max}}$  in InGaAs/InP-Proben verschiedener Beweglichkeit und Ladungsträgerkonzentration mit einem für diese Proben universellen Exponenten  $\kappa = 0,42 \pm 0,04$ , unabhängig von Probe und betrachtetem Übergang  $\sigma_{xy} = n \rightarrow n + 1$  [7, 88]. Der kritische Exponent  $\kappa = 1/z_T \gamma$  bzw.  $\kappa = 2/p\gamma$  ermöglicht zunächst noch keine unabhängige Bestimmung des kritischen Exponenten der Lokalisierung  $\gamma$  ohne Annahmen über  $z_T$  bzw.  $p$ . Mit dem sowohl numerisch als auch experimentell (im folgenden Abschnitt) gewonnenen Exponenten  $\gamma \approx 2,3$  ergibt sich  $z_T = 1$  bzw.  $p = 2$ .

Für GaAlAs/GaAs-Heterostrukturen [8, 89, 90, 91, 92] zeigt sich hingegen ein

### 3. Lokalisierung und Skalierung

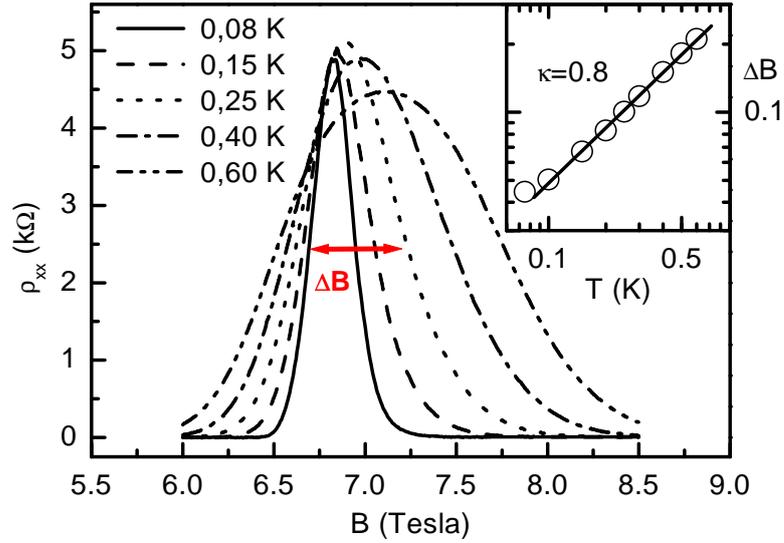


Abbildung 3.5.: Widerstand  $\rho_{xx}$  der AlGaAs/GaAs-Probe 6047Be mit  $n_e = 2,1 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  und  $\mu_e = 2 \text{ m}^2/\text{Vs}$  im Übergang von Plateau  $\nu = 2$  nach  $\nu = 1$  bei verschiedenen Temperaturen.

Kleines Bild: Die Halbwertsbreite zeigt Skalierungsverhalten  $\Delta B \propto T^\kappa$  mit  $\kappa = 0,8$ .

komplizierteres Bild. Skalierungsverhalten ist hier nur für Temperaturen  $T \leq 1 \text{ K}$  zu beobachten, in einigen Proben sogar nur für  $T < 0,4 \text{ K}$ . Eine Anpassung der Skalierungsgleichungen entsprechend Gleichung 3.36 und 3.38 führt zu einem nicht universellen Exponenten  $\kappa = 0,4 - 0,8$ , der außer von der Probe auch vom gewählten Übergang  $\sigma_{xy} = n \rightarrow n + 1$  abhängt. Abbildung 3.5 zeigt die Auswertung der Halbwertsbreite für eine Probe mit einem nicht universellen Exponenten  $\kappa$ . Von einigen Gruppen wird dieses Verhalten mit der langreichweitigen Natur des Unordnungspotentials in AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen begründet. So argumentieren Wei *et al.* [91], dass ihre Daten den „richtigen“ Exponenten ergeben, wenn nur das Skalierungsverhalten unterhalb einer Übergangstemperatur  $T_1$  berücksichtigt wird.

Allerdings zeigen auch Messungen für Si-MOSFETs stark variierende Exponenten  $\kappa = 0,2 - 0,9$  [93, 94, 89]. Als dominierender Streuprozess im Si-MOSFET wird allgemein Grenzflächenstreuung am  $\text{SiO}_2$  angenommen, also ein kurzreichweitiger Prozess. Hier müsste also noch ein anderer Effekt eine zusätzliche Temperaturskala  $T_2$  einfügen, unterhalb derer universelles Verhalten zu erwarten wäre.

Die Daten von Koch *et al.* [8] zeigen auch eine Systematik, dass Proben niedrigerer Beweglichkeit für niedrige Füllfaktoren einen größeren Wert für  $\kappa$  aufweisen, während Proben mit  $\mu_e > 20 \text{ m}^2/\text{Vs}$   $\kappa = 0,43$  zeigen. Dies ist kompatibel mit [92], [90] hingegen finden  $\kappa = 0,64$  bei  $\mu_e = 45 \text{ m}^2/\text{Vs}$ . Im Rahmen der Erklärungsversuche mittels langreichweitigem Unordnungspotential fällt hier der Widerspruch auf, dass die niederbeweglichen Proben von Koch *et al.* durch Dotierung mit Beryllium und Silizium direkt im Bereich des 2DES präpariert wurden. Sie sollten also kurzreichweitiger

Natur sein als hochbewegliche Heterostrukturen, in denen entfernte Dotieratome die Streuung dominieren.

Ein Modell von Kagalovsky *et al.* [95] argumentiert mit einer Übergangstemperatur  $T_1 \approx 0,2$  K, die mit Wei *et al.* kompatibel ist. Allerdings zeigen die Messungen von Koch *et al.* [8] nicht universelles Skalierungsverhalten mit der Temperatur über einen Bereich  $T = 0,04 - 1$  K. Dies kann theoretisch in das Skalierungsbild durch die Dominanz so genannter irrelevanter Längen mit zugehörigen irrelevanten Exponenten [67] eingeführt werden, diese sind jedoch nicht identifiziert.

Eine weitere mögliche Interpretation ist, dass in dem untersuchten Temperaturbereich Elektron-Phonon-Prozesse durch Deformationspotentiale dominieren. Für diese zeigte Brandes *et al.* [83, 84]  $p = 4$ . Allerdings sollte die Streurrate durch piezoelektrische Kopplung nach ihren theoretischen Abschätzungen die Elektron-Phonon-Wechselwirkung für  $T \lesssim 1$  K dominieren. Für diesen Prozess ergibt sich der schon benannte Wert  $p = 2,0 - 2,2$ .

Die experimentelle Situation der Temperaturskalierung am kritischen Punkt, insbesondere die Frage des universellen Exponenten  $\kappa$ , ist also unklar, solange nicht für die abweichenden Proben quantitativ begründet werden kann, welche anderen Effekte (z. B. höhere Exponenten  $p > 2$  der inelastischen Streurrate oder Tunneln über flache Sattelpunkte) bei realisierbaren Temperaturen über das universelle Verhalten dominieren.

### 3.3.2. Größenskalierung

Im Rahmen der Temperaturskalierung ist es unbefriedigend, dass sich der kritische Exponent der Lokalisierungslänge  $\nu$  und der dynamische (Temperatur-) Exponent  $z_T$  nicht trennen lassen, sondern nur die kombinierte Größe  $\kappa = 1/\gamma z_T$  bestimmt wird. Koch *et al.* führten daher ein Experiment zur direkten Bestimmung von  $\gamma$  durch Größenskalierung durch [9, 96]. In Proben geringer Größe  $L \sim 10 \mu\text{m}$  wird die durch die Temperatur definierte Länge  $L \propto T^{-z_T}$  bei tiefster experimenteller Temperatur ( $T \sim 25$  mK) größer als die Systemgröße  $L$ . Damit ist nun  $T=0$ -Skalierungsverhalten entsprechend Gleichung 3.27 zu erwarten. Für die Halbwertsbreite des Maximums in  $\rho_{xx}$  ( $\sigma_{xx}$ ) und die Steigung  $d\rho_{xy}/dB$  am kritischen Punkt folgt

$$\Delta B \propto L^{-1/\gamma}, \quad \frac{d\rho_{xy}}{dB} \propto L^{1/\gamma}. \quad (3.39)$$

Koch *et al.* führten dieses Experiment für zwei Proben und verschiedene Plateau-Übergänge durch, die nicht universelle Temperaturexponenten  $\kappa = 0,63 - 0,74$  zeigen. Das Experiment ergab Skalierungsverhalten für  $L = 10 \dots 64 \mu\text{m}$  mit universellem Exponenten

$$\gamma = 2,3 \pm 0,1. \quad (3.40)$$

Aus den Exponenten  $\gamma$  und  $\kappa$  lässt sich nun auch  $z_T$  bestimmen. Koch *et al.* führten das nicht universelle Verhalten mit der Temperatur auf ein entsprechendes Verhalten des Exponenten  $z_T = 2/p$  zurück. Allerdings muss darauf hingewiesen werden, dass

### 3. Lokalisierung und Skalierung

Probe	$n_e$ ( $10^{15}\text{m}^{-2}$ )	$\mu_e$ ( $\text{m}^2/\text{Vs}$ )	Übergang	$\Delta B$ (T)	$\xi_0$ (nm)	$\xi_0/l_B$
6047 bel.	4	5,8	1 $\rightarrow$ 2	0,54	10	1,5
			2 $\rightarrow$ 3	0,09	0,6	0,06
			3 $\rightarrow$ 4	0,08	1	0,08
41012 bel.	4,9	15	2 $\rightarrow$ 3	0,15	1,3	0,14
			3 $\rightarrow$ 4	0,07	0,5	0,05
			4 $\rightarrow$ 5	0,05	0,4	0,03
			5 $\rightarrow$ 6	0,03	0,2	0,015

Tabelle 3.1.: Abschätzung des Vorfaktors  $\xi_0$  in der Skalierungsform der Lokalisierungslänge  $\xi = \xi_0 |\delta\nu|^{-\gamma}$  aus der Halbwertsbreite von  $64 \mu\text{m}$  breiten Proben (siehe Text).

hierbei der Exponent  $\gamma$  für Temperaturen  $T < 0,05 \text{ K}$  bestimmt wurde, während der Exponent  $\kappa$  den Bereich  $T = 0,05 - 1 \text{ K}$  widerspiegelt.

Die direkte Messung der Größenabhängigkeit ermöglicht auch eine Abschätzung der absoluten Werte der Lokalisierungslänge: Die Halbwertsbreite  $\Delta B$  charakterisiert gerade den Übergang vom „metallischen“ zum isolierenden Verhalten, es gilt  $x = L/\xi \sim 1$ . Also folgt  $\xi(B + \Delta B/2) = C_L L$ , wobei  $C_L$  ein Faktor mit Größenordnung 1 ist. Aus den Daten für  $\Delta B$  und  $n_e$  aus [97] kann nun der Vorfaktor  $\xi_0$  in

$$\xi = \xi_0 \cdot |\Delta\nu|^{-\gamma}, \quad \Delta\nu = \nu - \nu_c \quad (3.41)$$

bestimmt werden. Diese Form bietet sich an, da hier der Vorfaktor direkt die Dimension einer Länge hat und  $\nu$  im Experiment der natürliche dimensionslose Parameter des Phasenüberganges ist. Die Werte für beide Proben und die verschiedenen Übergänge sind in Tabelle 3.1 dargestellt. Auffällig ist der Unterschied zwischen unterstem ( $\nu < 2$ ) und höheren Landau-Niveaus. Während im untersten Landau-Niveau  $\xi_0 \sim l_B$  gilt ( $l_B = \sqrt{\hbar/eB} \approx 7 \text{ nm}$  für diesen Übergang), ist  $\xi_0/l_B \leq 0,1$  für höhere Füllfaktoren. Für kurzreichweitige Streuer ergibt die Numerik [67]  $\xi \sim l_B$  für  $|E - E_F| = \Gamma \Rightarrow \Delta\nu = 0,5$  und damit  $\xi_0 \approx 0,2 \cdot l_B$ .

#### 3.3.3. Stromskalierung

In der bisherigen Diskussion wurde angenommen, dass die Leitfähigkeiten bzw. Widerstände unabhängig von Spannung und Strom sind. Dies wurde in den Messungen dadurch gewährleistet, dass der Strom soweit abgesenkt wurde (typisch  $I \leq 0,1 - 1 \text{ nA}$  in Hall-Geometrie), dass keine Änderung der Widerstände bei Änderung des Stromes zu beobachten ist. Wird der Strom deutlich erhöht, so werden die Maxima in  $\rho_{xx}$  breiter und die Steigung  $d\rho_{xy}/dB$  kleiner. Wei *et al.* stellten fest [12], dass es in ihren InGaAs/InP-Proben in der Abhängigkeit vom Strom ein Potenzgesetz der Form

$$\frac{d\rho_{xy}}{dB}(B_c) \propto I^{-b} \quad (3.42)$$

gibt. Der Exponent  $b = 0,23 \pm 0,02$  hat etwa den halben Wert des Exponenten der Temperaturskalierung  $\kappa \approx 0,42$ . Sie schlossen, dass der Strom eine effektive Temperatur  $T_e$  definiert mit

$$T_e \propto I^a, \quad a = 0,5 \pm 0,05. \quad (3.43)$$

Statt der Betrachtung der Skalierungsform des Stromes kann die effektive Temperatur auch aus Vergleich zwischen Temperaturabhängigkeit und Stromabhängigkeit bestimmt werden. Dies führt auch für Messungen in AlGaAs/GaAs-Proben, die einen nicht universellen Exponenten  $\kappa$  aufweisen ([90] mit  $\kappa = 0,65$ , [98] mit  $\kappa = 0,6$ ) oder bezüglich der Temperatur kein Skalierungsverhalten aufweisen ([99]), zu einer Beziehung entsprechend 3.43 mit  $a = 0,5$ . Zum Vergleich mit der Theorie (Abschnitt 3.2.4) kann nun in Hall-Geometrie das elektrische Hall-Feld  $F_H \approx \sigma_{xy}I$  mit dem dortigen elektrischen Feld  $F$  identifiziert werden. Aus Gleichung 3.32 und 3.34 folgt unter der Annahme  $z = z_T = z_F$

$$a = 2/(2 + p) = z/(1 + z) \Rightarrow z \approx 1. \quad (3.44)$$

Diese Interpretation führt also zu einem universellem dynamischen Exponenten  $z = 1$ , der experimentell für  $T > 0,1$  K sowohl in InGaAs/InP- als auch in GaAlAs/GaAs-Proben gefunden wird. Damit wird aber das nicht universelle Verhalten des Exponenten  $\kappa$  auf ein nicht universelles Verhalten der Lokalisierungslänge  $\xi$  oder die Dominanz einer irrelevanten Länge  $\xi_{\text{irr}}$  zurückgeführt. Es ist jedoch unklar, wie dies mit den Messungen von Koch *et al.* in Übereinstimmung zu bringen ist, deren Proben universelles Verhalten der Größenskalierung mit kritischem Exponenten  $\gamma = 2,3$  für Temperaturen  $T \leq 0,1$  K und gleichzeitig nicht universelle Temperaturskalierung mit  $\kappa \geq 0,6$  für  $T > 60$  mK zeigen.

### 3.3.4. Frequenzskalierung

Ein experimenteller Test der Frequenzabhängigkeit kämpft mit der Schwierigkeit, dass nach Abschnitt 3.2.4 reine Frequenzeffekte nur für  $\hbar\omega \gg k_B T$  zu finden sind. Das Experiment muss sich mit  $\hbar\omega > k_B T$  zufrieden geben, und selbst dies erfordert bei einer Temperatur  $T = 0,1$  K Frequenzen  $f = \omega/2\pi > 2$  GHz. Gleichzeitig ist eine Messung des Widerstandstensors in normaler Geometrie für Frequenzen  $f > 1$  MHz nicht möglich. Eine frequenzabhängige Messung muss also einen anderen Weg finden, um die Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(f)$  zu bestimmen und auf Skalierungsverhalten zu überprüfen.

Engel *et al.* haben ein Experiment mit einer planaren Hochfrequenzleitung auf der Oberfläche einer AlGaAs/GaAs-Heterostruktur mit Beweglichkeit  $\mu_e = 4 \text{ m}^2/\text{Vs}$  und  $n_e = 4,2 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  durchgeführt. Die Leitung zeigt eine von der Leitfähigkeit des unter ihr liegenden 2DES abhängige Transmission. Somit kann die Leitfähigkeit in Abhängigkeit von Frequenz (in diesem Experiment bis  $f = 14$  GHz) und Magnetfeld bestimmt werden. Engel *et al.* [10] finden für die Halbwertsbreite der spinaufgelösten  $\sigma_{xx}$ -Maxima

$$\Delta B \propto \omega^c, \quad c = 0,41 \pm 0,04. \quad (3.45)$$

Dies ist mit  $\gamma \approx 2,3$  und  $z \approx 1$  kompatibel.

### 3. Lokalisierung und Skalierung

Die einzige andere Messung in diesem Frequenz- und Temperaturbereich wurde von Balaban *et al.* [11] durchgeführt. Sie messen die Geschwindigkeit und Dämpfung von Randmagnetoplasmonen am Rand einer zu einem Rechteck geätzten AlGaAs/GaAs-Heterostruktur mit  $\mu_e = 3 \text{ m}^2/\text{Vs}$  und  $n_e = 1,4 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Aus diesen Daten lässt sich ebenfalls mit Hilfe der Theorie der Randmagnetoplasmonen auf die Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  zurückschließen. Sie findet ein Verhalten, das sich besser durch

$$\Delta B = b_0 + b_1 \cdot \omega \quad (3.46)$$

beschreiben lässt. Auch in der Temperaturabhängigkeit der Halbwertsbreite findet sie ein solches lineares Gesetz der Halbwertsbreite. Diese Messung spricht also gegen ein universelles kritisches Verhalten des Plateau-Übergangs.

Als dritte Gruppe führten Kuchar *et al.* [100] Messungen der Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  für Frequenzen im Mikrowellenbereich durch. Hierbei wird eine große Probe unter die Öffnung eines Mikrowellen-Hohlleiters gebracht und die Reflexion in Abhängigkeit vom Magnetfeld gemessen. Mit dieser Methode sind hohe Frequenzen erreichbar (bisherige Messungen:  $f = 35 - 60 \text{ GHz}$ ). Da für verschiedene Frequenzen verschiedene Generatoren, Hohlleiter und sonstige Komponenten nötig sind, liegen bisher nicht genug Messungen vor, um hier sicher ein Skalierungsverhalten zu prüfen.

Die experimentelle Prüfung des Skalierungsverhaltens mit der Frequenz bedarf angesichts dieser widersprüchlichen Ergebnisse also dringend weiterer Experimente.

## 3.4. Zusammenfassung

Die Skalierungstheorie interpretiert den Übergang zwischen benachbarten Quanten-Hall-Plateaus bei  $T = 0$  als Quanten-Phasenübergang zweiter Ordnung. Gekennzeichnet ist dies durch ein kritisches Verhalten: Die Lokalisierungslänge  $\xi$ , also die Ausdehnung der elektronischen Zustände des 2DES im hohen Magnetfeld, divergiert in der Nähe einer kritischen Energie  $E_c$  in Form eines Potenzgesetzes  $\xi \propto |E - E_c|^{-\gamma}$  mit universellem kritischem Exponenten  $\gamma$ . Die Hall-Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  nimmt am kritischen Punkt, also bei  $E = E_c$ , einen Wert genau zwischen den benachbarten Plateauwerten an, und die diagonale Leitfähigkeit hat einen kritischen Wert  $\sigma_{xx} = \sigma_c$ .

Für  $T = 0$  und  $L \rightarrow \infty$  ist der Plateau-Übergang bei  $E = E_c$  ein singulärer Punkt: Für kleinste Abweichungen  $\delta E$  ist bereits  $\sigma_{xx} = 0$ , und  $\sigma_{xy}$  nimmt einen der Plateau-Werte an. Bei einer endlichen Systemgröße  $L$  werden die Leitfähigkeiten jedoch Funktionen des Parameters  $L/\xi$ . Diese Abhängigkeit wird als Skalierungsverhalten der Leitfähigkeiten bezeichnet. Der Plateau-Übergang hat nun eine endliche Breite  $\Delta E$  mit  $\sigma_{xx} \sim \sigma_c$  für  $L/\xi(E) \lesssim 1$ . Die numerische Berechnung dieser Abhängigkeit von der Systemgröße ergibt für den kritischen Exponenten  $\gamma = 2,35$ .

Im Experiment wird meist nicht die Energie sondern das Magnetfeld  $B$  bzw. der Füllfaktor  $\nu$  variiert. In der Nähe des kritischen Punktes  $E_c$ , dem ein kritischer Füllfaktor  $\nu_c$  zugeordnet ist, gilt jedoch  $E - E_c \propto \nu - \nu_c$  und somit  $\xi \propto |\nu - \nu_c|^{-\gamma}$ . Eine experimentelle Untersuchung der Breite  $\Delta\nu(L)$  des Plateau-Übergangs in Funktion

von der Probengröße ergibt  $\Delta\nu \propto L^{-1/\gamma}$  mit  $\gamma = 2, 3 \pm 0, 1$  und bestätigt somit die numerischen Resultate.

Bei einem Quanten-Phasenübergang zweiter Ordnung gibt es neben der Lokalisierungslänge  $\xi$  auch eine Korrelationszeit  $\xi_\tau$ , die mit der Korrelationslänge durch  $\xi_\tau \propto \xi^z$  verbunden ist, wobei  $z$  der dynamische Exponent ist. Eine Frequenz  $\omega > 0$  führt zu einem Skalierungsverhalten mit dem Parameter  $\omega\xi_\tau$ . Dies sollte durch eine endliche Breite des Plateau-Übergangs von  $\Delta E \propto \Delta\nu \propto \omega^{1/z\gamma}$  zu beobachten sein. Dies wird durch numerische Simulationen bestätigt. Die zwei durchgeführten Experimente zeigen widersprüchliches Verhalten: Eines bestätigt das Verhalten mit  $z \approx 1$  bei Annahme von  $\gamma = 2, 35$ , das andere findet kein Skalierungsverhalten.

Eine endliche Temperatur  $T$  kann analog zu einer endlichen Systemgröße  $L$  durch eine effektive Systemgröße  $L_{\text{eff}} \propto T^{-1/z_T}$  verstanden werden. Dies führt wieder zu einem Skalierungsverhalten  $\Delta\nu \propto T^\kappa$  mit  $\kappa = 1/z_T\gamma$ . Theoretische Argumente führen zu einem universell erwarteten  $z_T$  und damit auch  $\kappa$ . Das Experiment bestätigt zwar ein Skalierungsverhalten der Breite des Plateau-Übergangs, findet aber einen systemabhängigen und damit nicht universellen Exponenten  $\kappa$ , der für ein universelles  $\gamma$  auf ein nicht universelles  $z_T$  schließen lässt. Dem widersprechen jedoch Experimente zur Stromabhängigkeit, die durch  $z_T \approx 1$  interpretiert werden.

Es gibt also vielfältige Hinweise auf ein Skalierungsverhalten der Breite des Plateau-Übergangs, jedoch ist die Universalität experimentell nicht bestätigt. Außerdem scheinen einige Experimente dem Skalierungsverhalten zu widersprechen, was aber auf den realisierten Parameterbereich zurückzuführen sein könnte. Streng genommen gilt das kritische Verhalten nur bei  $T = 0$  in einer kleinen Umgebung von  $E_c$ . Die Theorie kann noch keine Voraussagen machen, wie klein die Temperatur und wie nah der untersuchte Bereich dem kritischen Punkt sein muss.



# 4. Proben und experimentelle Techniken

## 4.1. Verwendete Proben

Alle verwendeten Proben entsprechen in ihrer Grundstruktur der in Abschnitt 2.1.1 vorgestellten modulationsdotierten Heterostruktur mit einer Schichtfolge von GaAs und  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ . Bei dieser Heterostruktur bildet sich ein zweidimensionales Elektronensystem (2DES) im GaAs an der Grenzfläche zum AlGaAs.

Für die Untersuchung der Skalierungseigenschaften ist es wünschenswert, zum einen Proben mit geringer Beweglichkeit zu untersuchen, um einen schmalen Übergangsbereich zwischen den Quanten-Hall-Plateaus zu erreichen. Zum anderen soll auch der Einfluss verschiedener Unordnungspotentiale untersucht werden.

Der Großteil der verwendeten Proben basiert daher auf einer leichten Modifikation beim Wachstum der Heterostrukturen: Während des Wachstums wurden auch außerhalb der Dotierschicht zusätzliche Dotieratome im Heteroübergang in der Nähe des 2DES eingebracht, die als Streuer wirken und somit ein zusätzliches Unordnungspotential erzeugen.

Hierbei finden zwei Techniken Anwendung: Zum einen kann das Wachstum der GaAs-Schicht, in der sich das 2DES ausbildet, kurz vor dem Heteroübergang von GaAs zu AlGaAs unterbrochen und eine weniger als eine Monolage dicke Schicht Silizium

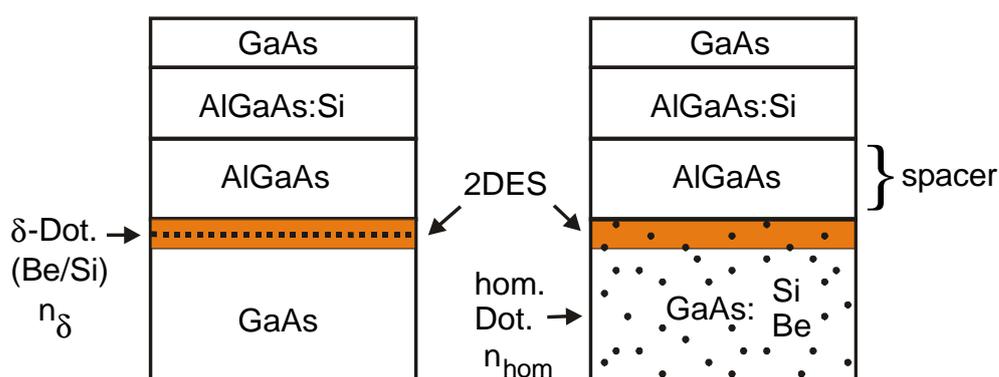


Abbildung 4.1.: Links:  $\delta$ -Dotierung im Bereich des 2DES. Rechts: Homogene schwache Dotierung des gesamten GaAs-Bereiches.

#### 4. Proben und experimentelle Techniken

Probe	<i>spacer</i> (nm)	zusätzliche Dotierung	$n_\delta$ ( $\frac{10^{14}}{\text{m}^2}$ )	$n_e$ ( $\frac{10^{15}}{\text{m}^2}$ )	$\mu_e$ ( $\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$ )
P1851	40	-	-	1,9	200
P254	15	-	-	3,2	35
P107	10	-	-	4,4	38
P6047	23,3	$\delta$ -Be	2,0	2,1	2
P6047 bel.	23,3	$\delta$ -Be	2,0	4,0	6
P41012	21,3	$\delta$ -Si	0,3	3,0	10
P41012 bel.	21,3	$\delta$ -Si	0,3	4,5	15
P41010	21,3	$\delta$ -Si	2,0	3,2	4
			$n_{\text{hom}}$ ( $\frac{10^{21}}{\text{m}^3}$ )		
P6323	23	hom. Be	1,0	2,4	12
P6323 bel.	23	hom. Be	1,0	4,5	25
P6125	25	hom. Si	5,0	3,2	10
P6125 bel.	25	hom. Si	5,0	4,3	12

Tabelle 4.1.: Parameter der verwendeten Proben

(Si) oder Beryllium (Be) eingefügt werden, bevor das Wachstum der Heterostruktur in üblicher Weise fortgesetzt wird [101]. Die so erzeugte Dotierkonzentration wird in Wachstumsrichtung ( $z$ ) durch eine  $\delta$ -Funktion beschrieben

$$n_{\text{dot}}(\vec{r}) = n_\delta \cdot \delta(z - z_0) \quad (4.1)$$

und hat daher den Namen  $\delta$ -Dotierung. In Abbildung 4.1 im linken Teil ist die Position der  $\delta$ -Dotierschicht dargestellt. Die Dotieratome sind durch ihre Position inmitten des 2DES sehr effektive Streuer. Gleichzeitig ist der Beitrag zum Unordnungspotential durch jeden Streuer gleich, und nur die statistische Verteilung führt zur Unordnung.

Die zweite Möglichkeit ist eine schwache homogene Dotierung des gesamten GaAs-Bereiches, wie im rechten Teil von Abbildung 4.1 dargestellt ist. In diesem Fall ist das Streupotential vom Abstand des einzelnen Dotieratoms vom 2DES abhängig. Das erzeugte Unordnungspotential ist also qualitativ von anderer Form: Es gibt einige sehr starke Streuzentren durch Dotieratome direkt im Bereich des 2DES und eine große Abstufung schwächerer, entfernter (und dadurch langreichweitiger) Streuzentren.

Die unterschiedlichen Dotieratome führen zu unterschiedlichen Potentialen: Während Silizium ein Elektron abgibt und danach durch seine positive Ladung attraktiv wirkt, nimmt Beryllium ein Elektron auf und ist damit repulsiv.

In Tabelle 4.1 sind die Parameter der verwendeten Proben aufgeführt. Die Spalte *spacer* gibt die Dicke der undotierten  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -Schicht an. Von dieser Dicke hängt die Reichweite des Potentials der ionisierten Dotieratome in der darüber liegenden

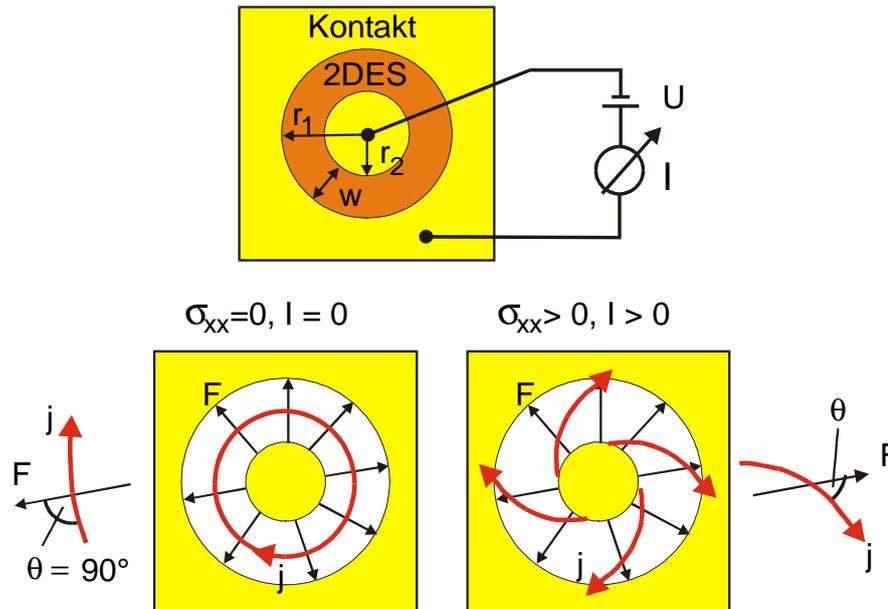


Abbildung 4.2.: Oben: Aufbau einer Corbino-Geometrie mit Beschaltung. Unten links: Feldlinien des elektrischen Feldes  $\vec{F}$  und Stromdichte  $\vec{j}$  im QHE-Plateau ( $\sigma_{xx} = 0$ ). Unten rechts: Wie unten links, jedoch im Plateau-Übergang mit  $\sigma_{xx} > 0$

Dotierschicht ab. Die Ergänzung „bel.“ zum Probenamen bedeutet, dass dies die Parameter der Probe nach Beleuchten im abgekühlten Zustand sind. Die Spalte „zusätzliche Dotierung“ gibt an, ob die Probe eine zusätzliche Dotierung des Heteroüberganges in der Nähe des 2DES besitzt, und wenn ja, welcher Art diese Dotierung ist.  $n_\delta$  ist die zweidimensionale Konzentration der zusätzlichen Dotieratome bei Verwendung einer  $\delta$ -Dotierschicht und  $n_{\text{hom}}$  die Konzentration bei einer homogenen Hintergrunddotierung.  $n_e$  bezeichnet die Ladungsträgerkonzentration und  $\mu_e$  die Beweglichkeit der Elektronen, die durch Messung in Hall-Geometrie bestimmt wurden.

Die Ladungsträgerdichte kann in den einzelnen Kapiteln für dieselbe Probe leicht abweichen, da bei verschiedenen Abkühlzyklen eine Variation von einigen % möglich ist.

## 4.2. Corbino-Geometrie

Die meist gebräuchlichste Geometrie zur Untersuchung der elektrischen Transporteigenschaften eines zweidimensionalen Elektronensystems ist die bereits in Abschnitt 2.2 vorgestellte Hall-Geometrie. In dieser Arbeit werden jedoch im Wesentlichen Proben in Corbino-Geometrie untersucht.

Das Prinzip einer Messung in Corbino-Geometrie ist in Abbildung 4.2, oberes Teilbild, dargestellt. Die Geometrie ist radialsymmetrisch, das Magnetfeld wird zur Untersuchung des QHE senkrecht, also entlang der Achse, angelegt. Der innere und äußere Bereich besteht aus einem ohmschen Kontakt zum 2DES, der Bereich da-

#### 4. Proben und experimentelle Techniken

zwischen wird durch das 2DES gebildet. Die Herstellung ist denkbar einfach: Auf ein Stück der Heterostruktur wird in einem photolithographischen Schritt ein Gold-Germanium-Eutektikum, Nickel und eine abschließende Goldschicht aufgebracht und durch anschließendes Legieren der ohmsche Kontakt erzeugt.

Der äußere Strom  $I$ , der aus einer zwischen Außen- und Innenkontakt angelegten Spannung  $U$  entsprechend dem Schaltbild in Abbildung 4.2 resultiert, hängt nur von der diagonalen Leitfähigkeitskomponente  $\sigma_{xx}$  ab. Es gilt

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\sigma_{xx}}{A_0}, \quad A_0 = \frac{\ln \frac{r_1}{r_2}}{2\pi}. \quad (4.2)$$

Der Geometriefaktor  $A_0$  ermöglicht unter Annahme einer homogenen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  in der gesamten Probe die Umrechnung des gemessenen Leitwerts in die Leitfähigkeit. Für inhomogene Elektronensysteme und auch für sehr große elektrische Felder gilt die Beziehung für  $A_0$  in der obigen Gleichung nicht mehr.

Für die Stromdichte in der Probe muss auch die Leitfähigkeitskomponente  $\sigma_{xy}$  berücksichtigt werden: Im Quanten-Hall-Plateau, gekennzeichnet durch  $\sigma_{xx} = 0$ , wird kein äußerer Strom gemessen. Eine angelegte Spannung führt jedoch durch das erzeugte elektrische Feld  $\vec{F}$  zu einem Strom  $j_H = \sigma_{xy}F$ , der senkrecht zum elektrischen Feld dissipationlos ( $\vec{j} \cdot \vec{F} = 0$ ) immer im Kreis fließt. Dieser Strom kann im Aufbau entsprechend Abbildung 4.2 nicht direkt gemessen werden. Er führt jedoch zu einem magnetischen Moment, das z. B. in [102] zur Messung dieses Stromes verwendet wurde.

Für  $\sigma_{xx} > 0$  hingegen fließt im Messaufbau entsprechend Abbildung 4.2 ein äußerer Strom, der Leitwert  $G$  der Probe ist  $G > 0$ . Im zweidimensionalen Elektronensystem fließt ein Strom  $\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{F}$  auf einer logarithmischen Spirale. Seine eine Komponente  $\vec{j}_H \perp \vec{F}$  mit  $j_H = \sigma_{xy}F$  fließt dabei weiterhin dissipationlos im Kreis. Die andere Komponente  $\vec{j}_L \parallel \vec{F}$  mit  $j_L = \sigma_{xx}F$  führt zum von außen messbaren Leitwert  $G$  entsprechend Gleichung 4.2. Der Winkel  $\theta$  zwischen der Stromdichte und dem elektrischen Feld ist durch  $\tan \theta = \sigma_{xy}/\sigma_{xx}$  gegeben. Details zur Bedeutung dieses so genannten Hall-Winkels  $\theta$  sind in [103] nachzulesen.

Zwar kann in einer Corbino-Geometrie nur eine Komponente des Leitfähigkeitstensors gemessen werden. Der Vorteil gegenüber der Hall-Geometrie ist jedoch, dass für diese die Invertierung des gemessenen Widerstandstensors zur Leitfähigkeit nur für homogene Elektronensysteme korrekt ist. Dies ist jedoch, wie Kapitel 6 zeigen wird, im Allgemeinen nicht gegeben. Damit ist die Corbino-Geometrie die zuverlässigere Methode, die Leitfähigkeit experimentell zu bestimmen. Dies ist wiederum die Größe, die sich direkt mit der Theorie vergleichen lässt. Der zweite Vorteil wird sich bei sehr kleinen Leitfähigkeiten zeigen, die in Corbino-Geometrie mit einer höheren Auflösung gemessen werden können als in Hall-Geometrie (vgl. Abschnitt 5.3.1).

## 4.3. Tiefe Temperaturen

### 4.3.1. Kryostat und Temperaturmessung

Im Folgenden werden nur die Kenndaten der verwendeten Geräte und Methoden gegeben. Eine ausführliche Darstellung der Methoden zur Erzeugung und Messung tiefer Temperaturen wird von F. Pobell [104] gegeben.

Alle Messungen wurden in einem  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ -Entmischungskryostaten Kelvinox 300 der Firma Oxford Instruments durchgeführt. Die tiefste erreichte Temperatur des Kryostaten war  $T_{\text{Kryo}} \lesssim 15$  mK ohne und  $T_{\text{Kryo}} \lesssim 30$  mK mit Verwendung von Hochfrequenzleitungen.

Die Temperaturmessung erfolgte durch eine Widerstandsmessbrücke der Firma RV-Elektronikka mit der Typenbezeichnung AVS 46. Diese Messbrücke führt eine Vierpunkt-Widerstandsmessung nach dem Lock-In-Prinzip bei einer Frequenz von 12,5 Hz durch. Bei der Messung wird die Spannung vorgegeben, so dass bei ansteigendem Widerstand der Strom und damit die dissipierte Leistung reduziert wird.

Als Sensor wird ein durch die Firma Oxford Instruments für  $T \geq 50$  mK kalibrierter  $\text{RuO}_2$ -Dickfilmwiderstand verwendet. Dieser Sensor zeigt eine nur geringe Änderung des Widerstandes im Magnetfeld ( $\Delta R/R \leq 10\%$  bei  $B = 1$  T). Der Sensor ist auf Höhe der Entmischungskammer angebracht. Durch eine Kompensationsspule ist das Feld dort maximal von der Größe  $B = 20$  mT, so dass Effekte des Magnetfeldes bei der Temperaturmessung vernachlässigbar sind.

Die Temperaturmessung wurde mit einer Anregungsspannung von  $U = 30 \mu\text{V}$  durchgeführt. Bei einem Widerstand des Sensors  $R \gtrsim 10 \text{ k}\Omega$  für  $T \lesssim 100$  mK bedeutet dies eine Heizleistung  $P < 10^{-13}$  W, so dass Heizeffekte nur bei tiefster Temperatur  $T \lesssim 30$  mK eine Rolle spielen. Für diese Temperaturen gilt die Kalibrierung nur bei Verwendung der immer gleichen Spannung.

Für Temperaturen  $T < 50$  mK wurde der Sensor im verwendeten Aufbau durch nukleare Orientierungs-Thermometrie kalibriert. Diese basiert auf der anisotropen Emission von  $\gamma$ -Strahlung durch  $^{60}\text{Co}$  im Magnetfeld bei tiefen Temperaturen [104]. Die Kalibrierung wurde für  $T = 10 - 70$  mK durchgeführt und zeigte Überlapp mit der von Oxford Instruments durchgeführten Kalibrierung für  $T \geq 50$  mK.

Zur Steuerung der Temperatur wurde der Regler der Firma RV-Elektronikka mit der Bezeichnung TS 530 verwendet. Dieser regelt den Heizstrom eines auf der Entmischungskammer angebrachten Heizers. Die Temperatur wurde während der Messung ständig kontrolliert.

Die Probe befindet sich im Vakuum am Ende eines so genannten Kaltfingers (*cold finger*), der von der Entmischungskammer aus 30 cm in die Öffnung eines supraleitenden Magneten reicht. Der Kaltfinger besteht aus reinsten, in Kunstharz eingegeossenen Kupferdrähten, die eine gute thermische Ankopplung gewährleisten. Eine Wärmeschild, das auf der *cold plate* bei etwa 300 mK angekoppelt ist, verhindert Heizeffekte durch Wärmestrahlung der 4,2 K warmen Vakuumkammer. Die Proben sind auf ein keramisches Trägermaterial aufgeklebt, das wiederum auf das Ende des Kaltfingers geklebt wird.

Der supraleitende Magnet ermöglicht Felder von 13 T ohne und 15 T mit Verwendung der  $\lambda$ -Stufe, die den Magneten von 4,2 K auf 2,2 K abkühlt.

### 4.3.2. Elektronische Temperatur – DC-Messung

Bei tiefen Temperaturen ist die Kopplung des untersuchten zweidimensionalen Elektronensystem an das Kristallgitter schlecht, eine an das Elektronensystem abgegebene Leistung wird also nur langsam an das Phononenbad abgegeben. Dadurch kann die Temperatur des Elektronensystems  $T_e$  deutlich über der des Phononensystems  $T_p$  liegen, die wiederum bei nicht zu hoher Heizleistung identisch mit der Temperatur  $T_{\text{Kryo}}$  des Kryostaten ist.

Zur Verbesserung der thermischen Ankopplung des Elektronensystems an den Kryostaten wurde großer Wert auf die thermische Ankopplung der Zuleitungen gelegt. Die Kopplung des zweidimensionalen Elektronensystems der Probe an das Elektronengas der Zuleitungen ist bei tiefsten Temperaturen entscheidend für  $T_e$ . Um eine sichere Ankopplung der Zuleitungen zu gewähren, wurden zum einen für die Verbindung zwischen der Entmischungskammer und den Stufen höherer Temperatur Manganindrähte mit geringer thermischer Leitfähigkeit verwendet. Zum anderen wurde die Verbindung ab der Entmischungskammer bis zur Probe durch Kupferdrähte ausgeführt, die auf einer Länge von etwa 1 m auf Kupferrollen aufgewickelt sind, die auf der Entmischungskammer befestigt sind. Dies gewährleistet eine gute Ankopplung des Elektronengases der Zuleitung an die Temperatur des Kryostaten.

Der zweite entscheidende Punkt ist die Vermeidung von unbeabsichtigten Heizströmen. Neben dem gewünschten Messsignal können durch die Zuleitungen auch unerwünschte Radio- und Mikrowellen zur Probe gelangen und das Elektronensystem aufheizen. Um dies zu verhindern, wurde eine zweistufige Filterung verwendet:

Zum einen wird durch einen Durchführungs- $\pi$ -Filter am Übergang zwischen Raumtemperatur und Kryostat hochfrequente ( $f > 10$  MHz) elektromagnetische Einkopplung stark unterdrückt. Es ist entscheidend, alle Leitungen in den Kryostaten zu filtern, damit nicht innerhalb des Kryostaten eine ungefilterte Leitung, zum Beispiel eine an sich unkritische Zuleitung zu einem Heizer, über kapazitive Kopplung wieder zu einem Hochfrequenzsignal auf der Messleitung führt.

Zum anderen ist jeder Kontakt der Probe direkt am Ende des Kaltfingers durch einen Kondensator mit einer Kapazität  $C \sim 40$  nF mit der gut geerdeten Entmischungskammer verbunden. Dadurch werden Wechselspannungssignale über diese Kapazität weitestgehend kurzgeschlossen und führen nur noch zu einer geringen deponierten Leistung in der Probe. Bei einem minimalen Widerstand der Probe von  $R > 2$  k $\Omega$  in einer typischen Messung führt dies bereits bei  $f \sim 10$  kHz zu einer deutlichen Reduktion der Heizleistung um einen Faktor  $> 25$ .

Trotz aller Maßnahmen muss für Temperaturen  $T_{\text{Kryo}} \lesssim 50$  mK die Ankopplung der elektronischen Temperatur  $T_e$  der Probe kritisch geprüft werden.

### 4.3.3. Hochfrequenz im Entmischungskryostaten

Für Messungen bei hohen Frequenzen ist es nötig, eine Leitung mit geringer Dämpfung selbst im Mikrowellenbereich ( $f \sim 1-10$  GHz) von Raumtemperatur aus bis zur Probe zu führen. Dies widerspricht allen im vorherigen Abschnitt dargestellten Techniken zur

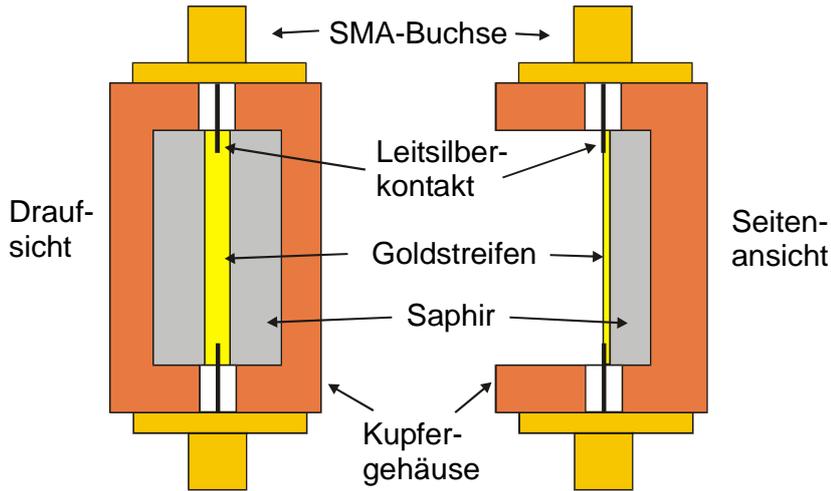


Abbildung 4.3.: Aufbau der Streifenleitung

Erlangung tiefster elektronischer Temperatur.

Es ist eine Herausforderung, die Leitung thermisch so an die Temperatur des Kryostaten zu koppeln, dass der Innenleiter am Ende der Leitung, an die die Probe gekoppelt wird, die nötige Temperatur  $T \lesssim 100$  mK aufweist. Der Wärmestrom von Raumtemperatur aus muss also zum einen minimiert und zum anderen effektiv vom Kryostaten aufgenommen werden.

Die Leitung wurde hierzu in drei unterschiedliche Teile zerlegt. Eine kommerziell erhältliche Koaxialleitung der Impedanz  $Z_0 = 50 \Omega$  mit einem Außenleiter aus Edelstahl und einem Innenleiter aus einer Kupfer-Beryllium-Legierung führt von Raumtemperatur bis zu dem Teil des Kryostaten, der sich auf einer Temperatur von  $T \sim 1,2$  K befindet, 1K-Stufe genannt. Der Außenleiter ist ca. 10 cm oberhalb der 1K-Stufe an das Heliumbad mit einer Temperatur von 4,2 K angekoppelt. Der silberbeschichtete Innenleiter dieses Kabels aus Kupfer-Beryllium weist eine im Vergleich zu reinem Kupfer deutlich reduzierte Wärmeleitfähigkeit bei vergleichbaren Hochfrequenzeigenschaften auf. Der Edelstahl-Außenleiter führt zwar zu erhöhter Dämpfung, die thermische Last durch einen Kupfer-Außenleiter ist jedoch nicht akzeptabel.

Auf der 1K-Stufe wird eine 2 cm lange Streifenleitung eingefügt. Der Signalleiter dieser Streifenleitung besteht aus einer auf ein Saphir-Substrat aufgedampften Goldleitung, das Substrat ist wiederum mit Leitsilber auf eine Kupferfläche geklebt, die einen guten elektrischen und thermischen Kontakt zur 1K-Stufe hat. Diese Kupferfläche übernimmt die Funktion des Außenleiters in koaxialer Geometrie. Einkristallines Saphir besitzt auch bei tiefen Temperaturen eine für Isolatoren sehr gute Wärmeleitfähigkeit. Die Streifenleitung ist somit thermisch gut an die 1K-Stufe angekoppelt und kann einen Großteil des Wärmeflusses von Raumtemperatur ableiten. Durch eine geeignete Wahl der Geometrie kann gleichzeitig die Wellenimpedanz  $Z_0 = 50 \Omega$  passend zur Impedanz der Koaxialleitung gewählt werden. Kritisch sind jedoch die Übergangspunkte zwischen der koaxialen und der planaren Geometrie: Dieser Über-

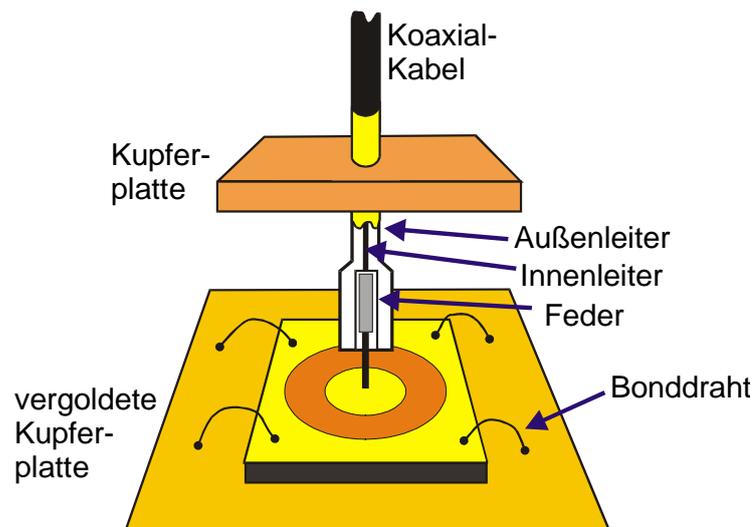


Abbildung 4.4.: Kontaktierung der Corbino-Geometrie für Mikrowellen-Reflexionsmessungen

gang gelingt nicht perfekt, weshalb es an jedem Wechsel der Leitungsgeometrie zu einer Reflexion kommt. Die Auswirkungen hiervon werden im Kapitel 8 dargestellt.

In Abbildung 4.3 ist die Realisierung dargestellt. Die SMA-Buchsen an beiden Seiten dienen als Anschluss für die Koaxialkabel. Die Kontaktierung zwischen SMA-Buchse und Streifenleitung erfolgt durch einen dünnen Pin, der auf der Streifenleitung aufliegt, ein Tropfen Leitsilber sichert den guten elektrischen Kontakt. Details zur Geometrie von Streifenleitungen sind in [105] nachzulesen.

Für das Leitungsstück von der 1K-Stufe zur Entmischungskammer muss ein Kompromiss zwischen optimalen Hochfrequenzeigenschaften und minimaler thermischer Leitfähigkeit gefunden werden. Hier wurde eine von der Elektronik-Werkstatt des MPI Stuttgart gefertigte Leitung aus Edelstahl-Kapillaren mit einer Wandstärke von 0,2 mm verwendet. Diese Leitung hat koaxiale Geometrie. Das Verhältnis der Radien wurde so gewählt, dass die Impedanz  $Z_0 = 50 \Omega$  beträgt. Zwischen Innen- und Außenleiter befindet sich kein Dielektrikum, das zu einer zusätzlichen Wärmeleitung führen würde. Stattdessen wird der Abstand zwischen den Leitern durch einige Quartzperlen gewährleistet, die außerdem zu einer zusätzlichen thermischen Kopplung zwischen Innen- und Außenleiter führen. Der Außenleiter ist thermisch an die *still* und die *cold plate* angekoppelt.

Auf der Entmischungskammer wird die Leitung wiederum durch eine Streifenleitung thermisch angekoppelt. Das verbleibende Stück der Leitung zur Probe wird durch eine herkömmliche Koaxialleitung mit Innen- und Außenleiter aus Kupfer ausgeführt.

Der Kontakt des Innenleiters der Koaxialleitung zum Innenkontakt der Corbino-Geometrie wird durch einen koaxialen Federkontakt hergestellt. Die Realisierung ist vereinfacht in Abbildung 4.4 dargestellt. Beim Federkontakt ist der Außenleiter als Metallhülse ausgeführt, die im Versuchsaufbau durch eine Kupferplatte eingeklemmt

wird, die am Ende des Kaltfingers befestigt ist. Hierdurch wird ein guter Massekontakt erreicht. Die Probe selbst befindet sich auf einer vergoldeten Kupferfläche, wobei (nicht eingezeichnet) zur Reduktion der Kapazität des Innenkontakts zur Masse die Kupferfläche in der Mitte durchbohrt ist. Der Außenkontakt der Corbino-Geometrie wird auf die vergoldete Kupferfläche kontaktiert. Diese Kupferfläche ist auch mit dem Kaltfinger und damit gut leitend mit der Erdung verbunden.

Dieser Aufbau ermöglicht es, die korrekte Wellenimpedanz der Leitung bis zu einem Abstand von 2 mm von der Probe einzuhalten. Nur hierdurch wird über den kompletten Frequenzbereich eine definierte Reflexion an der Probe erreicht, da die minimale Wellenlänge mit  $\lambda = 5$  cm viel größer als der Bereich abweichender Impedanz ist.



# 5. Skalierung im Hopping-Regime

Universelles kritisches Verhalten im Übergang zwischen QHE-Plateaus ist im Experiment, wie in Abschnitt 3.3.1 erläutert, für niederbewegliche AlGaAs/GaAs-Proben am kritischen Punkt nicht gegeben. So fanden Koch *et al.* [8] bei einer Auswertung des Skalierungsverhaltens der Halbwertsbreite entsprechend  $\Delta B \propto T^\kappa$  Exponenten im Bereich  $\kappa = 0,3 - 0,8$ .

Die Erklärungsansätze hierzu wurden in Abschnitt 3.3.1 dargestellt. Vorgeschlagen wurden als Mechanismus die Temperaturabhängigkeit des Tunnelns über flache Sattelpunkte, Effekte irrelevanter Längen und ein proben- und temperaturabhängiger Exponent der Phasenkohärenzlänge durch Elektron-Phonon-Wechselwirkung.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird gezeigt, dass der Skalierungsexponent  $\kappa$  davon abhängt, bei welcher Leitfähigkeit er bestimmt wird, also ob die Breite zum Beispiel bei einem Viertel, der Hälfte oder drei Vierteln der maximalen Leitfähigkeit bestimmt wird. Die Exponenten liegen umso näher am universellen Wert, je kleiner die Leitfähigkeit ist, bei der die Halbwertsbreite bestimmt wird.

Dies führt uns darauf, in den folgenden Abschnitten jenseits des „metallischen“ Bereichs am Rande des Quanten-Hall-Plateaus nach einem Wiederaufleben des Skalierungsverhaltens zu suchen. In diesem Bereich wird die Leitfähigkeit bei ausreichend niedrigen Temperaturen durch so genanntes *variable-range hopping* (VRH) bestimmt. Die Theorie des VRH wird vor der Anwendung auf die Daten kurz dargestellt.

Mit Hilfe der Theorie des VRH kann sowohl die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Temperatur als auch der Einfluss des angelegten elektrischen Feldes untersucht werden. Dies bietet ein direktes Maß für die Lokalisierungslänge, die so in diesem Bereich auf Skalierungsverhalten untersucht werden kann. Auch kann ihre absolute Größe mit der Größenskalierung nach Koch *et al.* [9] verglichen werden. Die Analyse wird für verschiedene Realisierungen des Unordnungspotentials durchgeführt und verglichen.

## 5.1. Breitenskalierung in niederbeweglichen Proben

Der Test der Skalierungstheorie mittels der Halbwertsbreite basiert auf der Annahme, dass der Widerstand eine Funktion

$$\rho_{xx} = \rho_{xx,c} \tilde{f}(\delta \cdot T^{-\kappa}), \quad \delta \propto \nu - \nu_c \quad (5.1)$$

ist. Damit sollte der auf  $\rho_{xx,c}$  normierte Widerstand über  $(\nu - \nu_c)T^{-\kappa}$  aufgetragen, wobei  $\kappa$  entsprechend der Skalierung der Halbwertsbreite gewählt wird, für alle Tempe-

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

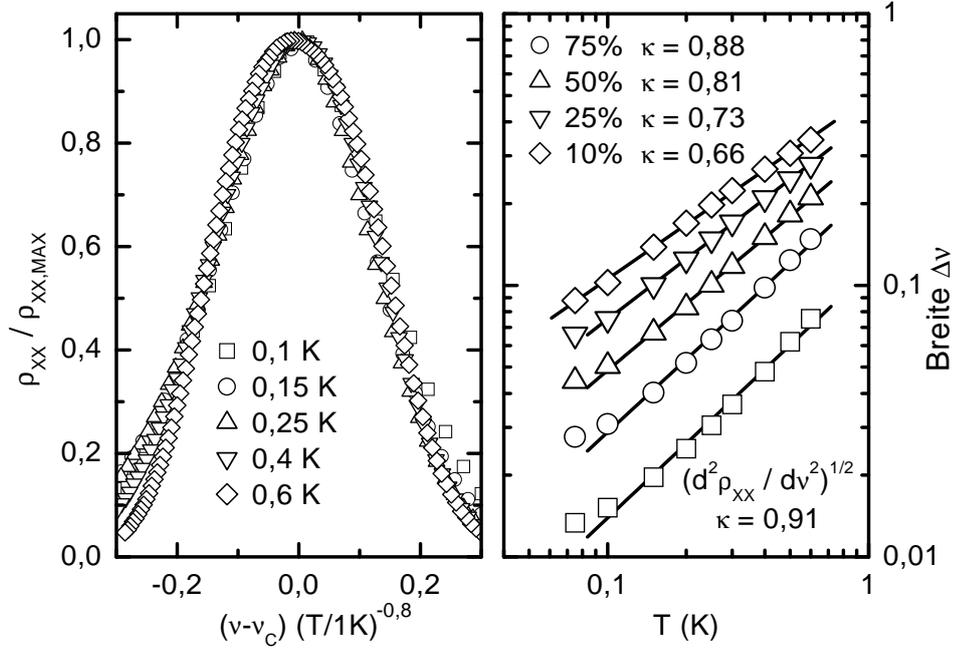


Abbildung 5.1.: **Links:** Normierter Widerstand der Probe 6047Be aufgetragen über der mit  $T^{-\kappa}$  reskalierten Abweichung des Füllfaktors  $\nu - \nu_c$  vom kritischen Punkt, wobei  $\kappa = 0,81$  entsprechend der Skalierung der Halbwertsbreite gewählt ist. Die unskalierten Daten sind in Abbildung 3.5 dargestellt. **Rechts:** Die Breiten des Widerstandsmaximums für verschiedene Höhen und Skalierung der Ableitung  $d^2\rho_{xx}/d\nu^2$  am kritischen Punkt ergeben verschiedene Exponenten.

raturen die gleiche Form aufweisen. Auch sollte die Breite  $\Delta\nu_h$  auf einer anderen Höhe  $h = \rho_{xx}/\rho_{xx,c}$  gemessen ebenfalls ein Skalierungsverhalten  $\Delta\nu_h \propto T^\kappa$  mit gleichem  $\kappa$  zeigen. Dies wird in Abbildung 5.1 für Probe P6047 in Hall-Geometrie untersucht. Diese  $\delta$ -dotierte Probe, deren Aufbau und Daten in Abschnitt 4.1 dargestellt sind, zeigt mit  $\kappa = 0,81$  einen sehr hohen Exponenten der Halbwertsbreite. Abbildung 5.1 zeigt, dass die Reskalierung mit einem Exponenten  $\kappa$  für  $\rho_{xx} \gtrsim \rho_{xx,c}$  mit annehmbarer Qualität gelingt. Die nahe am kritischen Punkt bestimmten Exponenten stimmen mit  $\kappa = 0,88$  bei 75% der maximalen Höhe und  $\kappa \approx 0,87$  bzw.  $\kappa \approx 0,91$  direkt am kritischen Punkt aus den Ableitungen  $d\rho_{xy}/d\nu$  [97] und  $d^2\rho_{xx}/d\nu^2$  überein, und auch bei der Halbwertsbreite liegt  $\kappa = 0,81$  noch gerade im Rahmen der statistischen Abweichungen.

Für kleinere Widerstände zeigen sich jedoch deutliche Abweichungen: Der Skalierungsansatz der Breite ergibt hier eine Abhängigkeit des Exponenten  $\kappa$  von der relativen Höhe  $h$ .  $\kappa$  nimmt von 0,88 bei 75% auf 0,64 bei 10% ab. Diese stark ungeordnete AlGaAs/GaAs-Probe zeigt also im Temperaturbereich  $T = 0,07 \dots 0,7$  K kein Skalierungsverhalten des kompletten Widerstandsmaximums in  $\rho_{xx}$ , auch wenn die Betrachtung der Breite zu einem bestimmten Wert von  $h = \rho_{xx}/\rho_{xx,c}$  Skalierungsverhalten mit Exponenten  $\kappa_h$  zeigen.

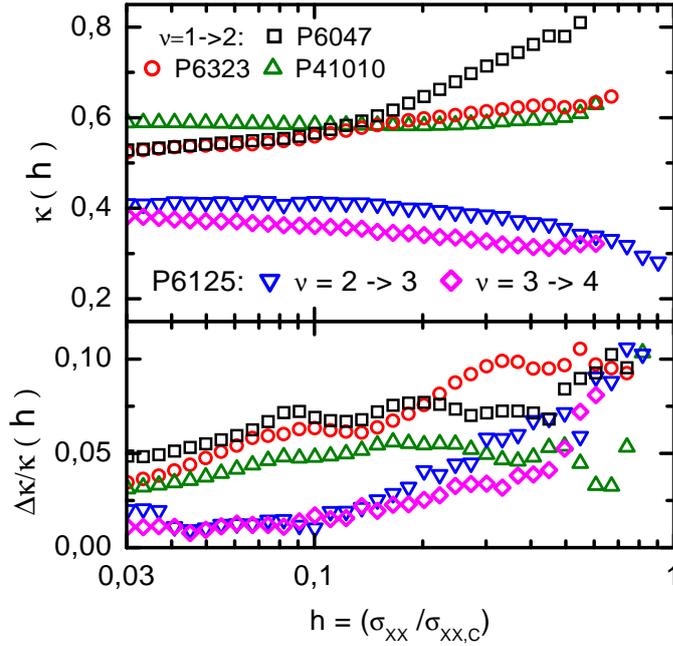


Abbildung 5.2.: Skalierungsexponent  $\kappa(h)$  bei Anpassung des Skalierungsverhaltens  $\Delta B_h \propto T^{\kappa(h)}$  an die Breite des Leitfähigkeitsmaximums, für verschiedene Höhen  $h = \sigma_{xx}/\sigma_{xx,c}$  (Messung in Corbino-Geometrie). **Oben:** Für verschiedene Proben und Übergänge. **Unten:** Der relative Fehler des Exponenten, bestimmt durch Standard-1 $\sigma$ -Analyse der linearen Anpassung auf logarithmischer Skala, ist Maß für die Güte der Modellanpassung.

In Abbildung 5.2 ist die Abhängigkeit des Exponenten  $\kappa$  vom analysierten  $h = \sigma_{xx}/\sigma_{xx,c}$  für Proben mit verschiedenen Realisierungen des Unordnungspotentials (siehe Abschnitt 4.1) und Übergängen zwischen verschiedenen Quanten-Hall-Plateaus dargestellt. Die Leitfähigkeit wurde hierbei in Corbino-Geometrie bestimmt. Es zeigt sich, dass die große Streuung der bei der Halbwertsbreite gewonnenen Exponenten (Wertebereich  $\kappa = 0,3 \dots 0,8$ ) bei niedrigen Leitfähigkeiten, also im isolierenden Bereich, deutlich zurückgeht und die Werte eher einem Wertebereich  $\kappa = 0,4 \dots 0,5$  zustreben. Gleichzeitig nimmt auch die relative Unsicherheit  $\Delta\kappa/\kappa$  ab, die Daten werden also besser durch ein Skalierungsgesetz beschrieben.

Es scheint also zwei Regime zu geben: Während für den Bereich „metallischer“ Leitfähigkeit durch ausgedehnte Zustände ( $\sigma_{xx} \sim \sigma_c$ ) eine große Streuung der Exponenten zu beobachten ist, zeigen die Exponenten im Bereich niedriger Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} \ll \sigma_c$  Anzeichen von Konvergenz hin zum universellen Wert  $\kappa \approx 0,43$ . Dies ist besonders bemerkenswert, da bei einem kritischen Phänomen das universelle Verhalten nahe dem kritischen Punkt auftreten sollten, während für einen größeren Abstand vom kritischen Punkt Abweichungen erwartet werden. Im Folgenden soll dieser Bereich niedriger Leitfähigkeiten, in dem der Transport durch Aktivierung oder *hopping* lokalisierter Elektronen stattfindet, genauer untersucht werden.

## 5.2. Mechanismus der Leitfähigkeit im lokalisierten Regime

Im Abschnitt 2.3.3 wurde dargestellt, dass sich die Plateaus im Hall-Widerstand und die gleichzeitig sehr kleine diagonale Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  durch Lokalisierung der Elektronen verstehen lässt. Die Abgrenzung zwischen lokalisiertem und „metallischem“ Regime geschieht durch den Vergleich der Lokalisierungslänge  $\xi$  mit der Probengröße  $L$  und einer temperaturabhängigen Länge  $L_T$ , die im Allgemeinen mit der Phasenkohärenzlänge identifiziert wird (vgl. Abschnitt 3.2.4).

Bei endlichen Temperaturen  $T$  ist die Leitfähigkeit auch im lokalisierten Bereich für keinen Füllfaktor identisch  $\sigma_{xx} = 0$ . Es konkurrieren zwei unterschiedliche Transportmechanismen: Zum einen führt eine endliche Temperatur  $T$  zu einer Wahrscheinlichkeit der Besetzung des Energieniveaus mit Energie  $E$  entsprechend der Fermi-Dirac-Verteilung  $f(\Delta E) = 1/(\exp[\Delta E/k_B T] + 1)$ , wobei  $\Delta E = E - E_F$  die Energiedifferenz zur Fermienergie  $E_F$  ist. Damit ist die Besetzungswahrscheinlichkeit des nächsten ausgedehnten Zustands mit der kritischen Energie  $E_c$  durch  $f(E_c - E_F)$  gegeben. Für  $E_F > E_c$  ist  $f(E_F - E_c)$  die Besetzungswahrscheinlichkeit eines „Loches“ bei der kritischen Energie  $E_c$ . Ist  $\sigma_c$  die Leitfähigkeit für  $E_F = E_c$ , so ergibt sich für die Leitfähigkeit durch aktivierten Transport

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_c}{\exp(T_a/T) + 1}, \quad T_a = |E_c - E_F|/k_B. \quad (5.2)$$

Mit diesem Prozess konkurrieren die bereits im Kapitel 3 als Mechanismus der Leitfähigkeit im isolierenden Bereich identifizierten Tunnelprozesse zwischen lokalisierten Zuständen. Dieser Mechanismus wird als *hopping* bezeichnet. Ein Überblick über die Theorie dieses Transports wird z. B. in [106, 107] gegeben. Entwickelt wurde diese Theorie für die Beschreibung von Transport in stark ungeordneten Festkörpern. In diesen bildet sich kein Leitungsband aus, und die Elektronen sind an Plätze mit Ort  $\vec{R}_m$  und Ein-Teilchen-Energie  $\epsilon_m$  gebunden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron von Platz  $m$  auf einen anderen (leeren) Platz  $m'$  wechseln kann, ist [108]

$$W_{mm'} \propto \exp\left(-2\alpha \left| \vec{R}_m - \vec{R}_{m'} \right| - |\epsilon_m - \epsilon_{m'}|/k_B T\right). \quad (5.3)$$

Der erste Term im Exponenten gibt die Tunnelwahrscheinlichkeit an, modifiziert durch den zweiten Term, der die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass das Elektron am Platz  $m$  eine passende Energie  $\epsilon_{m'}$  aufweist.

Bei hohen Temperaturen  $T > T_c$  wird diese Wahrscheinlichkeit durch den ersten Term dominiert, da der zweite vergleichsweise klein wird. Das Elektron führt daher nur Sprünge zwischen nächsten Nachbarn durch. Damit sind für alle Plätze  $m$  die Sprungziele  $m'$  festgelegt. Existiert nun ein Maximum in der Zustandsdichte bei einer Energie  $E_0$ , so wird der Transport komplett durch Plätze bei dieser Energie dominiert. Dies führt für  $E_F < E_0$  zu einer aktivierten Form  $\sigma_{xx} = \sigma_0 \exp[-(E_0 - E_F)/k_B T]$ . Da im QHE jedoch die Zustände bei  $E_0 = E_c$  ausgedehnt sind, entspricht dies (bis auf die Benutzung der Boltzmann- anstelle der Fermistatistik) genau dem oben beschriebenen

Mechanismus aktivierten Transports, weil für ausgedehnte Zustände der Term  $R_m - R_{m'}$  in Gleichung 5.3 wegfällt.

Für tiefe Temperaturen wird jedoch das Verhältnis  $(E_c - E_F)/k_B T$  sehr groß, und es kann günstiger sein, zu einem weiter entfernten Platz zu wechseln, der eine sehr ähnliche Energie hat, während für den nächsten Nachbarn eine große Energiedifferenz  $|\epsilon_m - \epsilon_{m'}|$  den Sprung unwahrscheinlich macht. In diesem Fall wird das Elektron auf seinem Weg durch die Probe Sprünge verschiedenster Weite machen, da es jeweils die Summe der beiden Terme in der Exponentialfunktion in Gleichung 5.3 minimiert. Dieser Prozess wird daher als *variable-range hopping* (VRH) bezeichnet.

Dieser Mechanismus wurde zuerst von Mott vorgeschlagen [109]-[111] und ergibt in drei Dimensionen ohne Coulomb-Wechselwirkung  $\sigma \propto \exp[-(T_0/T)^{1/4}]$ . Brenig *et al.* [112] zeigten für die Leitfähigkeit in zwei Dimensionen ohne Coulomb-Wechselwirkung zwischen Elektronen  $\sigma \propto \exp[-(T_0/T)^{1/3}]$ . Ohne Wechselwirkung gibt es für ein großes System vieler Elektronen und vieler freier Plätze, das sich im Grundzustand mit Energie  $E_0 = \sum \epsilon_m$  befindet, eine große Anzahl  $N(E)$  von Anregungen zu einer nahen Energie  $E = E_0 + \epsilon_2 - \epsilon_1 > E_0$  mittels eines Sprunges eines Elektrons mit Energie  $\epsilon_1$  zu einem anderen Platz mit Energie  $\epsilon_2$ . Bei einer großen Anzahl von Plätzen ist für diese kleinen Energieänderungen die Zustandsdichte  $N(E)$  konstant. Bei Vorhandensein von Wechselwirkung hingegen führt jeder Platzwechsel außer zu einer beliebig gering geänderten Ein-Elektron-Energie auch zu einer erhöhten Coulomb-Energie, da im Grundzustand auch die Abstände der Elektronen bezüglich ihrer Coulombenergie  $E_C = \sum e^2/|\vec{R}_m - \vec{R}_{m'}|$  optimiert waren. Es gibt also keine Ein-Elektron-Anregungen mit beliebig kleiner Energie wie ohne Wechselwirkung. Dies entspricht einer Lücke im Anregungsspektrum, charakterisiert durch  $N(E_0) = 0$  [113], wobei  $N$  die Zustandsdichte der Zielzustände für Anregung nur eines Elektrons ist. Diese Anregungslücke ist nicht mit den möglichen Energien des gesamten Systems zu verwechseln. Hier gibt es keine Energielücke, diese Anregungen erfordern jedoch die gleichzeitige Umverteilung vieler Elektronen.

Für zwei Dimensionen leiteten Efros und Shklovskii [114, 107] eine „weiche“ Anregungslücke der Ein-Elektron-Anregungen an der Fermienergie  $E_F$  mit der Form  $N(E) \propto |E - E_F|$  ab. Sie bestimmten für die Leitfähigkeit

$$\sigma = \sigma_0(T) \exp \left[ - \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \right] \quad (5.4)$$

mit der charakteristischen Energie

$$k_B T_0(\xi) = C \frac{e^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0\xi}. \quad (5.5)$$

Die Länge  $\xi$  ist die Ausdehnung der lokalisierten Zustände. Für die dimensionslose Konstante  $C$  wurde theoretisch ein Wert von  $C \approx 6,2$  abgeschätzt [115]. Experimente [98, 90, 116] ergeben für AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen mit der Annahme  $\epsilon = 12,4$  Werte für  $C$  zwischen 0,25 und 2. Dies wird von manchen Autoren statt auf einen Effekt von  $C$  auf eine effektive Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  zurückgeführt, die gegenüber dem

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

Wert im 3d-GaAs-Festkörper ( $\varepsilon = 12, 4$ ) reduziert ist. Es gibt jedoch keinen sicheren Nachweis für diese Hypothese.

Die anschauliche Interpretation der charakteristischen Energie  $k_B T_0$  ist die Selbstenergie, die eine Ladung  $e$  auf einer Scheibe mit Durchmesser  $\xi$  in einem Medium mit dielektrischer Konstante  $\varepsilon$  besitzt. Mit einer Selbstkapazität  $C_s = 1/(4\varepsilon\varepsilon_0 d)$  gilt für diese Energie  $E_s = e^2/C_s$ , was einer Konstante  $C \approx 3$  entspräche. Bei einer korrekten Ableitung muss unter anderem die komplexe geometrische Form eines Zustandes berücksichtigt werden.

Durch die schwächere Temperaturabhängigkeit im Argument der Exponentialfunktion ( $T^{-1/2}$  im Vergleich zu  $T^{-1}$ ) wechselt der dominierende Transportmechanismus für ausreichend tiefe Temperaturen  $T < T_c$  von aktiviertem Transport zu VRH, wobei  $T_c$  im QHE-Regime auch vom Füllfaktor abhängt.

### 5.2.1. Variable-range hopping im QHE

In Transportexperimenten in der Mitte eines Quanten-Hall-Plateaus wurde bei tiefen Temperaturen *variable-range hopping* entsprechend Gleichung 5.4 als Transportmechanismus gefunden. Für den Vorfaktor ergab ein temperaturabhängiger Vorfaktor  $\sigma_0 \propto 1/T$  die beste Anpassung an das Modell [117, 118].

Polyakov und Shklovskii haben vorgeschlagen, dass dieser Transportmechanismus bis nahe an den kritischen Punkt des Übergangs zwischen den Plateaus gilt. Für die Lokalisierungslänge erwartet die Skalierungstheorie in ausreichender Nähe zum kritischen Punkt

$$\xi(\nu) = \xi_0 |\nu - \nu_c|^{-\gamma}. \quad (5.6)$$

Mit Gleichung 5.4 und 5.5 folgt ein Skalierungsverhalten der vollen Halbwertsbreite entsprechend

$$\Delta\nu = 2 \left( a \frac{T}{T_0(\xi_0)} \right)^\kappa, \quad \kappa = 1/\gamma. \quad (5.7)$$

$a$  ist eine Konstante, die vom Vorfaktor  $\sigma_0$  in Gleichung 5.4 abhängt. Im Fall eines konstanten Vorfaktors  $\sigma_0$  gilt  $a = (\ln \frac{1}{2})^2$ .

Koch *et al.* [98] testeten diese Vermutung von VRH für einen geringen Abstand zum kritischen Punkt an einer Probe für die Übergänge von  $\nu = 2$  bis  $\nu = 6$ . Die konventionell bestimmte Halbwertsbreite zeigte Skalierungsverhalten mit  $\kappa = 0,62$ . Für Temperaturen im Bereich  $T = 0,05 \dots 0,94$  passten sie für Leitfähigkeiten  $\sigma_{xx} \geq 0,03 \cdot \sigma_c$  ein Modell entsprechend Gleichung 5.4 an, wobei sie den Vorfaktor  $\sigma_0 \propto 1/T$  temperaturabhängig entsprechend den Messungen in der Mitte des Plateaus annahmen. Mit dieser Auswertung bestimmten sie eine Abhängigkeit  $T_0 \propto |\nu - \nu_c|^\beta$  mit  $\beta \approx 1/\kappa \approx 1,6$ . Das Verfahren reproduziert also den Exponenten aus konventioneller Skalierung der Halbwertsbreite, weicht aber vom universellen Verhalten  $\beta = \gamma$  mit  $\gamma \approx 2,3$  ab, das in Größenskalierung (vgl. Abschnitt 3.3.2) für ähnliche Proben gefunden wird.

Der Vorfaktor  $\sigma_0$  konnte bisher nicht theoretisch abgeleitet werden. Jedoch erkannten bereits Polyakov und Shklovskii [119], dass eine strenge Anwendung des Skalierungsarguments eine Abhängigkeit der Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(T, \nu) = \sigma_{xx}(\tilde{x})$  von nur einem

### 5.3. Transportexperimente im lokalisierten Bereich

Parameter  $\tilde{x}(T, \nu)$  entsprechend Abschnitt 3.2.4, Gleichung 3.32, fordert. Mit der Festlegung auf VRH ist der Exponent der Exponentialfunktion in Gleichung 5.4 bereits auf eine bestimmte Kombination der Parameter festgelegt. Aus dieser Festlegung folgt als mögliche Wahl des kombinierten Parameters

$$\tilde{x} = \frac{T_0}{T} \propto \frac{1}{\xi T}. \quad (5.8)$$

Aus der Forderung von Ein-Parameter-Skalierungsverhalten der Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(\tilde{x})$  ergibt sich somit

$$\sigma_{xx} = \sigma_o(\tilde{x}) \exp(-\sqrt{\tilde{x}}), \quad \sigma_o(\tilde{x}) = \sigma_0^* \cdot f\left(\frac{T_0(\nu)}{T}\right). \quad (5.9)$$

Bei Annäherung an den kritischen Punkt  $\nu_c$  gilt  $\xi \rightarrow \infty \Rightarrow T_0 \rightarrow 0$  und damit auch  $\tilde{x} \rightarrow 0$ . Am kritischen Punkt des Plateau-Übergangs ist die Leitfähigkeit nicht mehr temperaturabhängig. Mit  $\exp(-\sqrt{\tilde{x}}) \rightarrow 1$  für  $\tilde{x} \rightarrow 0$  folgt somit  $f(\tilde{x}) = 1$  für  $\tilde{x} \rightarrow 0$ . Für großen Abstand vom kritischen Punkt zeigen die oben angeführten Experimente für den Vorfaktor  $\sigma_0 \propto 1/T$ . Für die Skalierungsform von  $\sigma_0$  folgt somit  $f(x) \propto x$  für große  $\tilde{x}$ , wobei der Übergangspunkt  $\tilde{x}_c$  zwischen den beiden Grenzfällen zunächst nicht bekannt ist. Ein möglicher Ansatz für eine Ein-Parameter-Skalierungsform des Vorfaktors, der diese Grenzwerte erfüllt, ist

$$\sigma_0 = \sigma_0^* \left(1 + \frac{x}{x_c}\right). \quad (5.10)$$

Für den sicheren Nachweis von Ein-Parameter-Skalierungsverhalten muss also auch der Vorfaktor mit der Randbedingung entsprechend 5.9 versehen werden. Die obige Ableitung der Halbwertsbreite aus VRH gilt auch für diese Ein-Parameter-Steigerungsform von  $\sigma_{xx}$  weiterhin, wobei die Konstante  $a$  in Gleichung 5.7 einen von der Form von  $f$  abhängigen Wert annimmt.

## 5.3. Transportexperimente im lokalisierten Bereich

In diesem Abschnitt wird zunächst die experimentelle Methode zur Messung von Leitfähigkeiten bis zu kleinsten Werten von  $10^{-12} \text{ 1}/\Omega$  vorgestellt. Die Daten werden anschließend auf zwei mögliche Transportmechanismen, aktivierte Leitfähigkeit und *variable-range hopping* (VRH) geprüft. VRH stellt ein direktes Maß für die Lokalisierungslänge dar, so dass in seinem Gültigkeitsbereich Skalierungsverhalten getestet werden kann. Hierbei stellt sich die Frage, inwieweit  $\xi \propto |\Delta\nu|^{-\gamma}$  noch erfüllt sein kann, wenn nicht mehr  $|\Delta\nu| \ll 1$  gilt.

Folgende Überlegung soll hierzu eine Abschätzung bieten: Das Skalierungsverhalten in  $\Delta\nu$  ist eine Folge des erwarteten Skalierungsverhaltens in  $E - E_c$ . Eine Grenze ist also der Gültigkeitsbereich von  $\Delta\nu \propto \Delta E$ . Das Skalierungsverhalten als Funktion von  $E - E_c$  wird streng genommen nur in einer kleinen Umgebung von  $E_c$  erwartet.

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

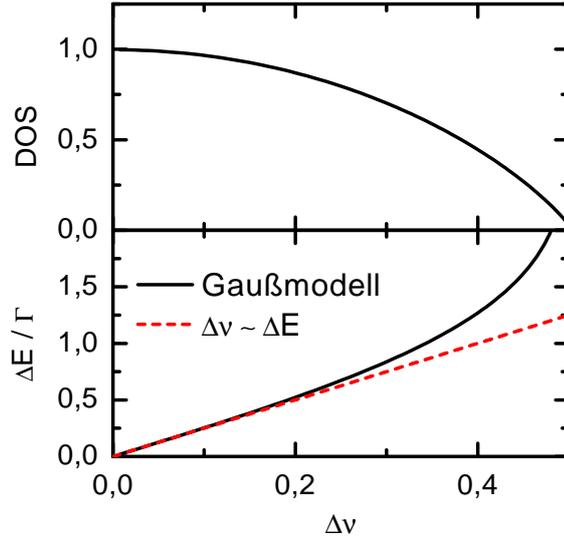


Abbildung 5.3.: **Oben:** Normierte Zustandsdichte (DOS) als Funktion des Abstandes  $\Delta\nu = \nu - \nu_c$  im Füllfaktor zum kritischen Punkt  $\nu_c$  für ein gaußförmig verbreitetes Landau-Niveau mit energetischer Breite  $\Gamma$ . **Unten:** Vergleich des aus der DOS bestimmten Abstands  $\Delta E$  zur kritischen Energie mit der Näherung  $\Delta\nu \propto \Delta E$ .

Die Energieskalen des Systems sind hierbei die Energielücke  $E_g$  zum nächsten Energieniveau und die Verbreiterung  $\Gamma < E_g$  des Energieniveaus. Der Einfluss anderer Energieniveaus wird das Skalierungsverhalten zerstören, so dass  $|E - E_c| \ll E_g$  gelten sollte. Die Energieskala  $\Gamma$  definiert einen Bereich  $|E - E_c| < \Gamma$  mit relativ geringer Energieabhängigkeit der Zustandsdichte. In diesem Bereich gilt die oben angesprochene Proportionalität  $\Delta\nu \propto \Delta E$  mit ausreichend kleinem Fehler, und auch von der Zustandsdichte an der Fermienergie abhängige Transportgrößen ändern sich nur wenig. Für  $|E - E_c| > \Gamma$  hingegen wird die Beziehung  $\Delta\nu(\Delta E)$  stark nichtlinear, die Energie  $\Delta E$  ändert sich deutlich schneller mit dem Füllfaktor. Die deutliche Abhängigkeit der Zustandsdichte mit der Energie kann nicht mehr vernachlässigt werden. Aus diesen Argumenten ergibt sich eine Abschätzung  $\Delta E \lesssim \Gamma$  für den Gültigkeitsbereich des Skalierungsverhaltens. Dies wird auch durch die numerischen Resultate von Huckestein [67] unterstützt, der für  $\Delta E = 0,5 \cdot \Gamma$  noch Übereinstimmung mit dem Skalierungsgesetz fand.

Um aus diesen Überlegungen zu einer Grenze für  $\Delta\nu$  zu kommen, bis zu der Skalierungsverhalten zu erwarten ist, ist in Abbildung 5.3 die Zustandsdichte (DOS) und die normierte Energie  $\Delta E/\Gamma$  als Funktion des Füllfaktors  $\Delta\nu$  für eine gaußförmig modellierte Zustandsdichte dargestellt. Hier lässt sich als sinnvoller Bereich für die Suche nach Skalierungsverhalten  $\Delta\nu \lesssim 0,3$  ablesen.

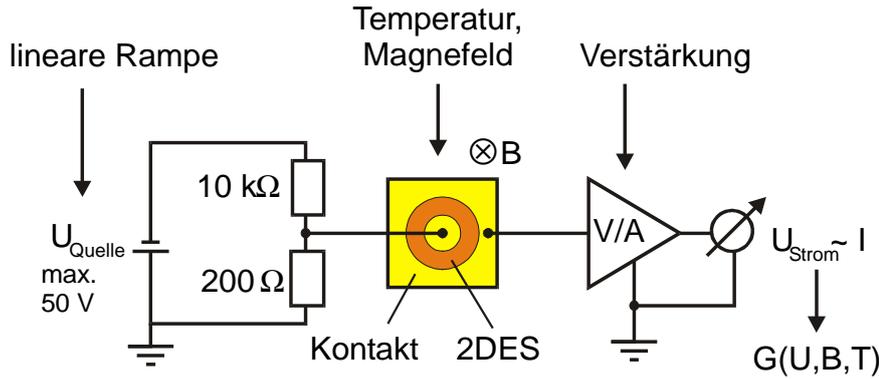


Abbildung 5.4.: Messaufbau zur Messung des Leitwerts  $G = I/U$  in Abhängigkeit von der Spannung  $U$ , dem Magnetfeld  $B$  und der Temperatur  $T$ .

### 5.3.1. Messung kleiner Leitfähigkeiten

Die Messung der Transporteigenschaften im isolierenden Bereich, also für  $\sigma_{xx} \ll \sigma_c$  bzw.  $\rho_{xx} \ll \rho_c$ , ist in Hall-Geometrie problematisch. In dieser Geometrie wird ein Strom aufgeprägt, der zwar innerhalb der Probe für kleines  $\rho_{xx}$  zu wenig Dissipation führt. An den Stromkontakten wird jedoch in den so genannten „hot spots“ auch in diesem Fall eine Leistung  $P = \rho_{xy} I^2$  dissipiert. Diese Heizleistung steht im Wettbewerb mit der thermischen Ankopplung der Probe an den Kryostaten, so dass sich in der Probe eine Gleichgewichtstemperatur  $T_p > T_{\text{Kryo}}$  einstellt. Um auch für tiefe Temperaturen  $T \leq 0,1$  K nur eine geringe Temperaturdifferenz zwischen Probe und Kryostaten zu gewährleisten, muss der Strom klein genug gewählt werden. Große Proben ermöglichen höhere Ströme von  $I \sim 100$  nA. Selbst mit einer sehr optimistischen Spannungsaufösung von 1 nV ergibt sich bei diesem Strom als kleinste messbare Leitfähigkeit für  $\nu = 2$  mit  $\sigma_{xx} \approx \rho_{xy} / \rho_{xy}^2$  etwa  $\Delta\sigma_{xx} \sim 10^{-6} e^2/h$ .

In Corbino-Geometrie hingegen ist der Strom durch die diagonale Leitfähigkeitskomponente  $\sigma_{xx}$  bestimmt. Die Darstellung dieser Geometrie ist in Abschnitt 4.2 gezeigt. Bei einer angelegten Spannung  $U$  fließt in dieser Geometrie ein Strom  $I = \sigma_{xx} U 2\pi / \ln(r_2/r_1)$ , die Dissipation ist  $P \propto \sigma_{xx} U^2$ . Bei sinkender Leitfähigkeit kann also die angelegte Spannung ohne Erhöhung der Dissipation vergrößert werden, so dass das Messsignal, der Strom, weniger stark abfällt. Außerdem lassen sich auch sehr kleine Ströme  $I \sim$  pA noch gut messen.

Der verwendete Messaufbau ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Die Spannung  $U_{\text{Quelle}}$  wird mit einer vom Messrechner steuerbaren Keithley2400 erzeugt. Diese hat wählbare Bereiche von 200 mV bis 200 V mit jeweils  $2,5 \cdot 10^{-5}$  Auflösung. Durch einen Teiler mit Faktor 50 lassen sich Spannungen bis zu  $U = 4$  V erzeugen oder auch für  $U \leq 4$  mV eine Auflösung von 100 nV erreichen. Nicht eingezeichnet ist ein zusätzlicher Tiefpass zwischen der Quelle und dem Teiler, der hochfrequente Störungen durch den Regelkreis der Spannungsquelle eliminiert. Die Spannung wird an den Innenkontakt der Probe angelegt und der daraus folgende Stromfluss durch das 2DES über den Außenkontakt und einen Stromverstärker (DLCPA 100 von Femto) zur Masse gemessen.

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

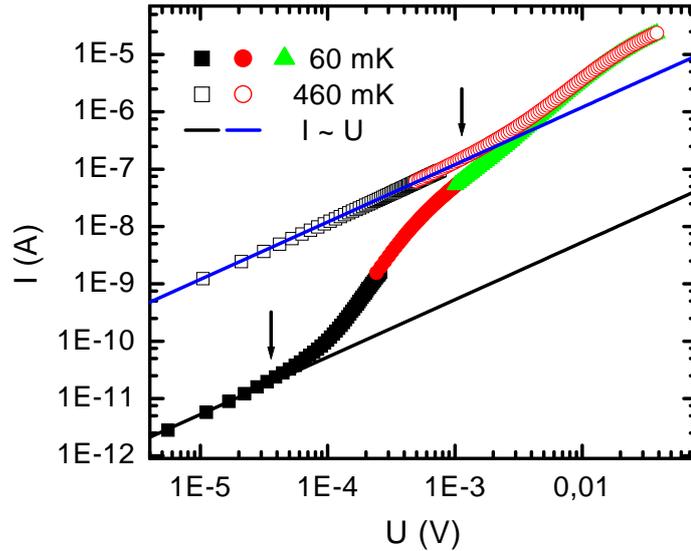


Abbildung 5.5.: I-U-Kennlinie der Probe 6047e für  $B=6$  Tesla und Temperaturen 0,06 und 0,46 K. Die verschiedenen Symbole stellen die Messungen verschiedener Auflösung dar. Die Geraden entsprechen konstanter ohmscher Leitfähigkeit. Die Pfeile kennzeichnen die Spannung, bis zu der die Probe lineares Verhalten zeigt.

Der Messbereich des Stromverstärkers ist steuerbar (zwischen 100 pA und 0,1 mA), so dass er automatisch durch den Messrechner angepasst werden kann. So kann sowohl im stark isolierenden Bereich als auch direkt auf den Leitfähigkeitsmaxima mit optimaler Auflösung gemessen und die Veränderung des Stromes über viele Größenordnungen verfolgt werden.

Zu jedem Parameterpaar von Magnetfeld und Temperatur wird so die Abhängigkeit des Stromes  $I$  von der Spannung  $U$  gemessen. Im Bereich niedriger Leitfähigkeit wird diese Messung in verschiedenen Auflösungen mit verschiedenen Verstärkungsfaktoren des Stromverstärkers durchgeführt. In der Messung mit höchster Auflösung wird aus dem linearen ohmschen Bereich um  $U = 0$  die Leitfähigkeit in so genannter linearer Antwort bestimmt. Für höhere Spannungen ergibt sich ein nichtlineares Verhalten des Stromes mit einem starken Anstieg, der in den Messungen mit geringerer Stromauflösung erfasst wird. In Abbildung 5.5 ist ein Beispiel einer solchen Messung bei verschiedenen Temperaturen dargestellt: In beiden Fällen ist ein anfängliches lineares Verhalten zu beobachten, dass bei deutlich verschiedenen Spannungen in einen starken Anstieg übergeht. Bei hohen Spannungen  $U > 10$  mV ist der Leitwert nicht mehr von der Temperatur abhängig, sondern wird allein durch die angelegte Spannung bestimmt. Der aus dem linearen Verhalten bei kleinen Spannungen gewonnene Leitwert  $G = I/U$  wird mit Hilfe der bekannten Geometrie in die Leitfähigkeit umgerechnet:

$$\sigma = G \frac{1}{2\pi} \ln(r_2/r_1). \quad (5.11)$$

### 5.3.2. Skalierungsverhalten im VRH-Regime

Als besonderes Studienobjekt dient im Folgenden die Probe 6047e, da bei ihr aufgrund der niedrigen Beweglichkeit von  $\mu_e = 2,1 \text{ m}^2/\text{Vs}$  der metallische Bereich besonders schmal ist und sie gleichzeitig in diesem kein universelles Skalierungsverhalten der Halbwertsbreite zeigt. In Abbildung 5.6 ist die Leitfähigkeit für den Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$  und die konventionelle Auswertung der Halbwertsbreite dargestellt. Auffällig in dieser Probe ist, dass der kritische Füllfaktor  $\nu_c = 1,29$  deutlich vom für eine symmetrische Zustandsdichte erwarteten  $\nu_c = 1,5$  abweicht. Ursache ist die starke  $\delta$ -Dotierung durch Beryllium-Atome, die zu einem repulsivem Unordnungspotential führen.

Die Messungen in diesem Abschnitt wurden alle an einer Probe in Corbino-Geometrie mit Außenradius  $r_1 = 330 \mu\text{m}$  und Innenradius  $r_2 = 300 \mu\text{m}$  durchgeführt. Die aus den I-U-Kennlinien gewonnenen Daten (Abbildung 5.7) ermöglichen es nun, die Analyse der Leitfähigkeit durch VRH weit in das Plateau bis zu etwa  $\sigma_{xx} \approx 10^{-7} \cdot \sigma_c$  auszudehnen. Nach Abschnitt 5.2.1 ist für kleine Leitfähigkeiten in großem Abstand zum kritischen Punkt VRH mit Vorfaktor  $\sigma_0 \propto 1/T$  zu erwarten, während nahe dem kritischen Punkt ein Übergang zu konstantem Vorfaktor stattfindet.

Die Daten wurden auch auf aktiviertes Transportverhalten getestet. Für  $\nu > \nu_c$  ist eine Anpassung der Daten mit Gleichung 5.2 von sehr schlechter Qualität. Für  $\nu < \nu_c$  lassen sich die Daten nahe  $\nu_c$  zwar mit mäßiger Qualität durch aktivierten Transport modellieren, aber eine Anpassung von VRH ergibt deutlich bessere Übereinstimmung. Die Qualität der Modellierung durch aktivierten Transport ist im Anhang in Abbil-

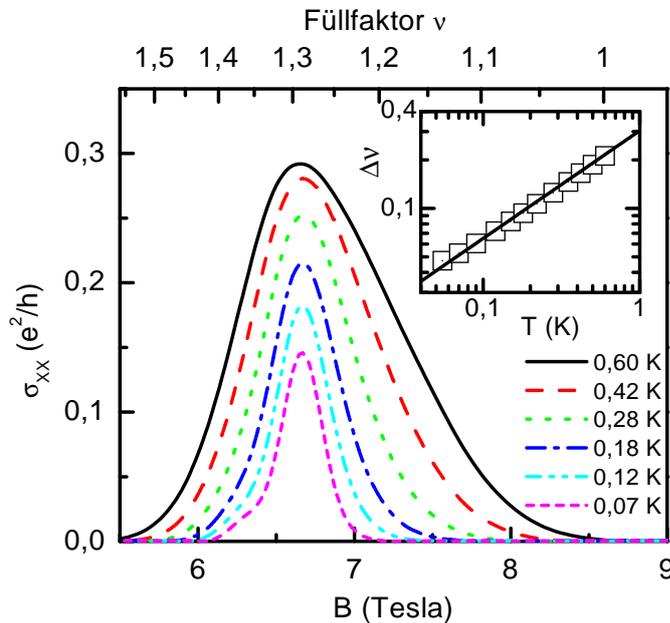


Abbildung 5.6.: Probe 6047e, Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$ . Die Halbwertsbreite folgt Skalierungsverhalten  $\Delta\nu \propto T^\kappa$  mit  $\kappa = 0,67 \pm 0,04$ .

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

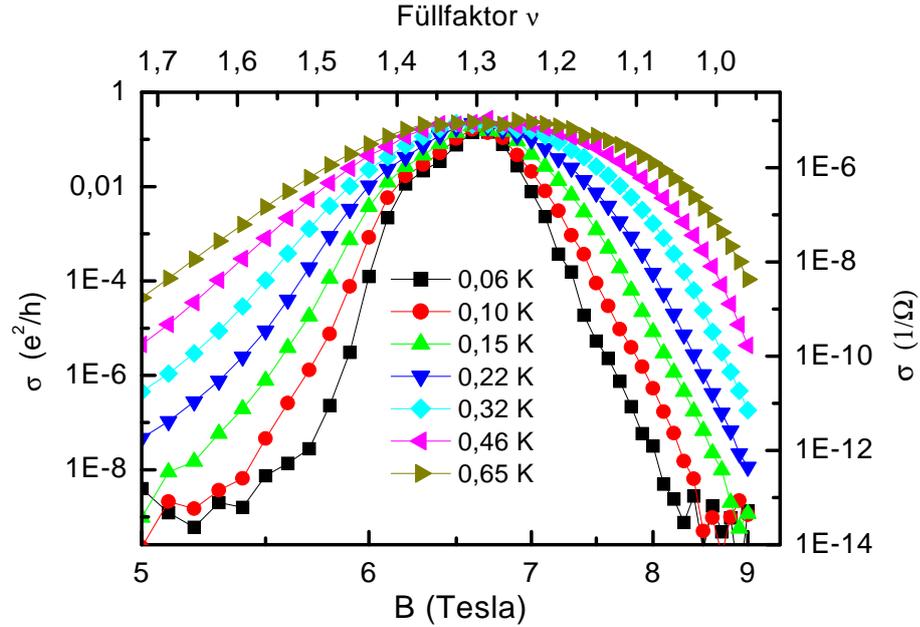


Abbildung 5.7.: Leitfähigkeit der Probe 6047e, ermittelt aus Messungen der Strom-Spannungs-Kennlinien.

dung [A.1](#) dargestellt.

Die Gültigkeit von VRH wird auch durch eine Abschätzung der Leitfähigkeit durch aktivierten Transport unterstützt. Ausgehend von einer Halbwertsbreite des Energieniveaus von  $\Gamma = 1$  meV (was nach Abschnitt [2.3.5](#) eher eine untere Grenze darstellt) entspricht z. B. dem Abstand  $\Delta\nu = 0,1$  zum kritischen Füllfaktor  $\nu_c = 1,29$  eine Energie  $\Delta E \approx 0,2$  meV und damit eine Aktivierungsenergie  $T_a \approx 2,3$  K. Für die höchste Temperatur  $T = 0,6$  K ergibt dies bereits eine Reduktion der Leitfähigkeit auf  $\sigma_{xx} \approx 0,02 \sigma_c$ , was deutlich niedriger als die Werte in [Abbildung 5.7](#) und [5.6](#) für  $\Delta\nu = 0,1$  ist. Für niedrigere Temperaturen ist die Abweichung noch deutlicher. Aktivierter Transport ist also nicht mit der beobachteten Leitfähigkeit vereinbar.

In [Abbildung 5.8](#) sind für verschiedene Magnetfelder im Bereich  $\nu > \nu_c$  ( $B < B_c$ ) die Anpassungen von VRH gezeigt. Die Darstellung ist so gewählt, dass mit

$$\sigma_{xx} = \sigma_0(T) \exp\left(-\sqrt{\frac{T_0}{T}}\right) \Rightarrow \ln\left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0(T)}\right) = -\frac{\sqrt{T_0}}{\sqrt{T}} \quad (5.12)$$

die Anpassung einer Geraden entspricht. Für großen Abstand vom kritischen Punkt gilt ein temperaturabhängiger Vorfaktor  $\sigma_0 = \sigma_1/T$ , so dass eine Auftragung von  $\ln(T \cdot \sigma_{xx})$  gegen  $1/\sqrt{T}$  einen linearen Verlauf ergibt. Für  $\Delta\nu > 0,1$  zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit dem Modell. Für kleine Abstände  $\Delta\nu = \nu - \nu_c$  wird entsprechend der Diskussion in [Abschnitt 5.2.1](#) der Übergang zu einem konstanten Vorfaktor  $\sigma_0$  erwartet. Zum Test ist für  $\Delta\nu = 0,17$  und  $\Delta\nu = 0,075$  die Anpassung  $\ln \sigma_{xx} \propto 1/\sqrt{T}$  dargestellt (gefüllte Symbole).

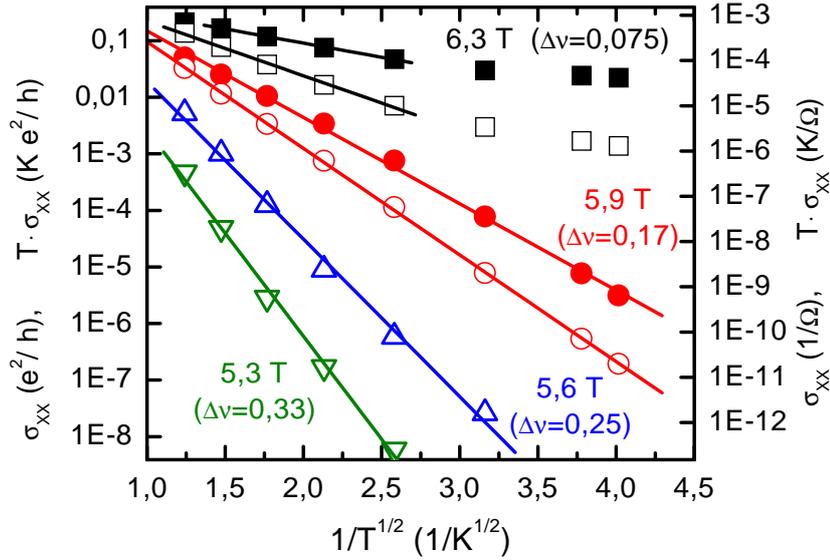


Abbildung 5.8.: Anpassung von VRH an die Leitfähigkeit der Probe P6047 für  $\nu > \nu_c$ . Für großen Abstand  $\Delta\nu = \nu - \nu_c$  ist der Vorfaktor  $\sigma_0 = \sigma_0^*(B)/T$  (offene Symbole,  $y$ -Achse  $\sigma_{xx} \cdot T$ ). Für kleines  $\Delta\nu$  wird ein Übergang zu einem temperaturunabhängigem Vorfaktor  $\sigma_0 = \sigma_0(B)$  erwartet (gefüllte Symbole,  $y$ -Achse  $\sigma_{xx}$ ). Die Geraden entsprechen der Anpassung an VRH.

Für  $B = 5,9$  T zeigt eine Anpassung über den gesamten Temperaturbereich ein besseres Ergebnis mit  $\sigma_0 \propto 1/T$ . Bei  $B = 6,3$  T weichen die Daten für Temperaturen  $T < 0,15$  K in beiden Fällen vom VRH-Verhalten ab. Die verbleibenden Daten werden etwa gleich gut für beide Vorfaktoren beschrieben. Der Übergang von  $\sigma \propto 1/T$  zu konstantem  $\sigma_0$  findet also im Bereich  $\Delta\nu < 0,1$  statt.

Die Punkte der Messung bei  $6,3$  T, die sich nicht durch VRH beschreiben lassen, können mit einer „Schulter“ bei  $B = 6,1 - 6,4$  T in der Magnetfeldabhängigkeit der Leitfähigkeit identifiziert werden (Abbildung 5.6 und 5.7). Die Ursache dieser erhöhten Leitfähigkeit kann in einer abweichenden Ladungsträgerdichte in einem Teilbereich des Ringes liegen (siehe Abbildung 5.9). Hierfür ist eine Corbino-Geometrie mit großem Verhältnis von Radius zu Ringbreite besonders anfällig. Für den hier beobachteten Effekt muss  $n_1 \approx 0,9 \cdot n_0$  sein. Zu höheren Temperaturen wird dieser Effekt durch die steigende Leitfähigkeit des restlichen Ringes überdeckt.

Die aus der Modellanpassung gewonnene charakteristische Temperatur  $T_0$  ist in Abbildung 5.10 als Funktion des Abstandes  $\Delta\nu = \nu - \nu_c$  zum kritischen Punkt  $\nu_c = 1,29$  dargestellt. Für  $\Delta\nu \geq 0,1$  bzw.  $B \leq 6,2$  T folgen die Werte mit Vorfaktor  $\sigma_0 = \sigma_1/T$  einem Skalierungsverhalten

$$T_0(\Delta\nu) \propto |\Delta\nu|^\gamma, \quad \gamma = 2,36 \pm 0,07. \quad (5.13)$$

Die Werte von  $T_0$  für  $\Delta\nu < 0,1$  für einen Vorfaktor  $\sigma_0 \propto 1/T$  weichen immer stärker nach oben vom extrapolierten Skalierungsverhalten ab, während die mit konstantem Vorfaktor gewonnenen Werte sich von unten annähern. Deutlich zeigt sich, dass im

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

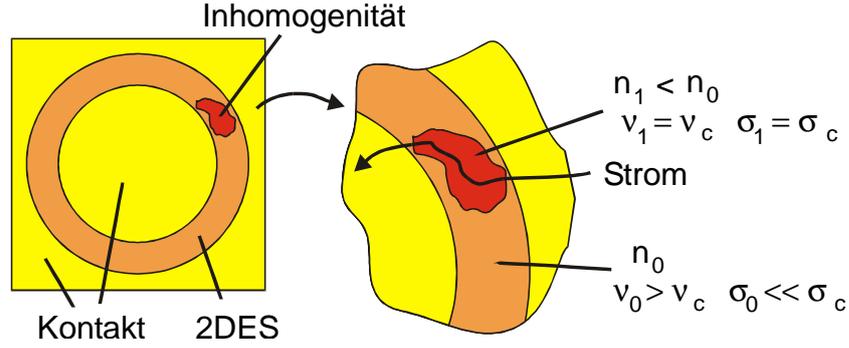


Abbildung 5.9.: Ein kleines Gebiet mit niedriger Ladungsträgerkonzentration  $n_1 < n_0$  führt für  $\nu_1 \approx \nu_c$  zu erhöhter Leitfähigkeit im Vergleich zu einer homogenen Probe mit Ladungsträgerkonzentration  $n_0$ .

Übergangsbereich, in dem  $\sigma_0$  an sich eine komplexere Funktion der Temperatur ist, keines der beiden einfachen Modelle Skalierungsverhalten ergibt. Nahe dem kritischen Punkt ( $\Delta\nu \leq 0,04$ ) gilt dann VRH mit konstantem Vorfaktor.

Der zweite Modellparameter in der Anpassung ist der Vorfaktor  $\sigma_0$  bzw.  $\sigma_0 = \sigma_1/T$ . Entsprechend den Überlegungen in Abschnitt 5.2.1 erwartet man für  $\sigma_0(\Delta\nu)$  Unabhängigkeit vom Füllfaktor, während  $\sigma_1(\Delta\nu)$  das gleiche Skalierungsverhalten wie  $T_0$  aufweisen sollte. Im Rahmen der Streuung sind die Daten mit diesem Bild vereinbar (siehe Abbildung 5.10).

Bisher wurde für jedes Magnetfeld eine einzelne Anpassung von VRH durchgeführt. Die Auswertung hat jedoch gezeigt, dass sich die Daten für verschiedene Magnetfelder durch eine Ein-Parameter-Skalierungsfunktion darstellen lassen sollten. Daher sollen nun alle Daten gleichzeitig an ein Modell angepasst werden. Der einfachste Ansatz für  $\sigma_0$  entsprechend Gleichung 5.10 lautet

$$\sigma_0(\nu, T) = \sigma_0^* \left( 1 + A \frac{T_0(\nu)}{T} \right). \quad (5.14)$$

Diese Form erfüllt die im Experiment beobachteten Grenzfälle  $\sigma_0 = \sigma_0^*$  für  $T_0/T \rightarrow 0$  ( $\nu \rightarrow \nu_c$ ) und  $\sigma_0 \propto T_0/T$  für großes  $T_0$  bei großem  $\Delta\nu$ . Mit dem Skalierungsansatz

$$T_0 = T_1 |\Delta\nu|^\gamma \quad (5.15)$$

kann eine neue Variable  $x$  eingeführt werden, die die Abhängigkeit von  $T$  und  $\Delta\nu$  vereint. Diese wird abweichend von  $\tilde{x} = T_0/T$  in Abschnitt 5.2.1 gewählt, da zum einen die Konstante  $C$  in der Definition von  $T_0$  noch nicht bekannt ist, und zum anderen ist die Berücksichtigung der Wurzel im Exponenten der Gleichung 5.12 bei der Definition dieses Parameters günstig für die weitere Analyse des Ein-Parameter-Skalierungsverhaltens. Somit wird folgende Definition gewählt:

$$x = \sqrt{\frac{|\Delta\nu|^\gamma}{T}}. \quad (5.16)$$

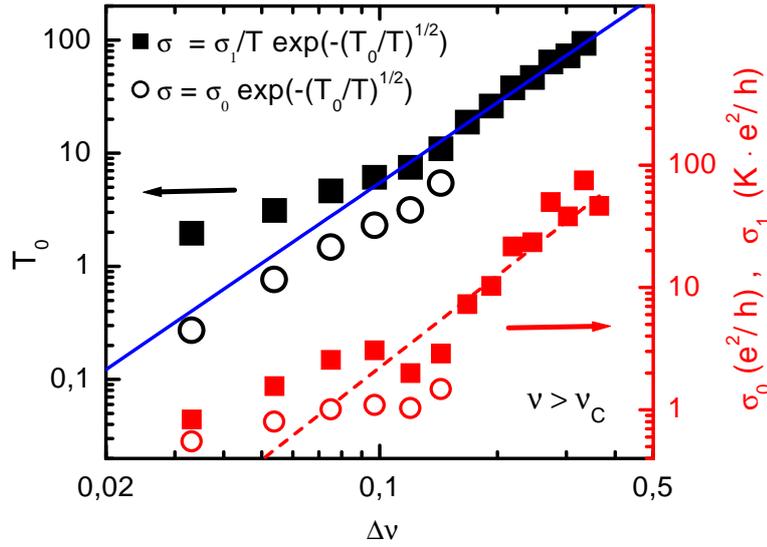


Abbildung 5.10.: **Linke Achse:** Charakteristische Temperatur  $T_0$  der Probe P6047. Die Gerade entspricht dem an die Messwerte für  $\Delta\nu \geq 0,1$  angepassten Skalierungsverhalten. **Rechte Achse:** Vorfaktor aus Modellanpassung. Die gestrichelte Gerade entspricht dem aus  $T_0$  abgeleiteten Skalierungsverhalten für  $\sigma_1$ .

Damit lässt sich die Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} = \sigma_0 \exp(-\sqrt{T_0/T})$  mit einem Vorfaktor entsprechend dem Ansatz aus Gleichung 5.10 bzw. gleichbedeutend Gleichung 5.14 wie folgt schreiben:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^* \left( 1 + \left( \frac{x}{x_c} \right)^2 \right) \cdot \exp(-\sqrt{T_1} \cdot x). \quad (5.17)$$

Die Konstante  $x_c = 1/\sqrt{T_1 A}$  trennt das Regime konstanten Vorfaktors ( $x \ll x_c$ ) vom Bereich mit  $\sigma_0 \propto 1/T$  ( $x \gg x_c$ ).

Mit dieser Gleichung sollen nur alle Datenpunkte  $\sigma_{xx}(\Delta\nu, T)$  gleichzeitig modelliert werden. Das Verfahren funktioniert vereinfacht wie folgt: Es werden der Reihe nach alle Kombinationen von  $x_c$  und  $\gamma$  durchprobiert. Für jede dieser Kombinationen wird die Variable  $x$  entsprechend Gleichung 5.16 aus  $T$ ,  $\Delta\nu$  und  $\gamma$  berechnet und eine lineare Anpassung von

$$\ln \frac{\sigma_{xx}}{1 + \left( \frac{x}{x_c} \right)^2} = \ln \sigma_0^* - \sqrt{T_1} \cdot x \quad (5.18)$$

an alle Daten durchgeführt. Die mittlere quadratische Abweichung in dieser linearen Anpassung wird nun als Kriterium für die Auswahl des optimalen Paares von  $\gamma$  und  $x_c$  benutzt. Die Parameter  $\sigma_0^*$  und  $T_1$  werden entsprechend der linearen Anpassung für diese optimalen  $\gamma$  und  $x_c$  gewählt. Das numerisch umgesetzte Verfahren enthält noch eine Verfeinerung des Suchnetzes während der Optimierung, um schneller zum Ziel zu kommen.

In Abbildung 5.11 sind für das optimale Paar  $\gamma$ ,  $x_c$  die Daten entsprechend Gleichung 5.18 skaliert dargestellt und die lineare Anpassung eingetragen. Die Daten lassen

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

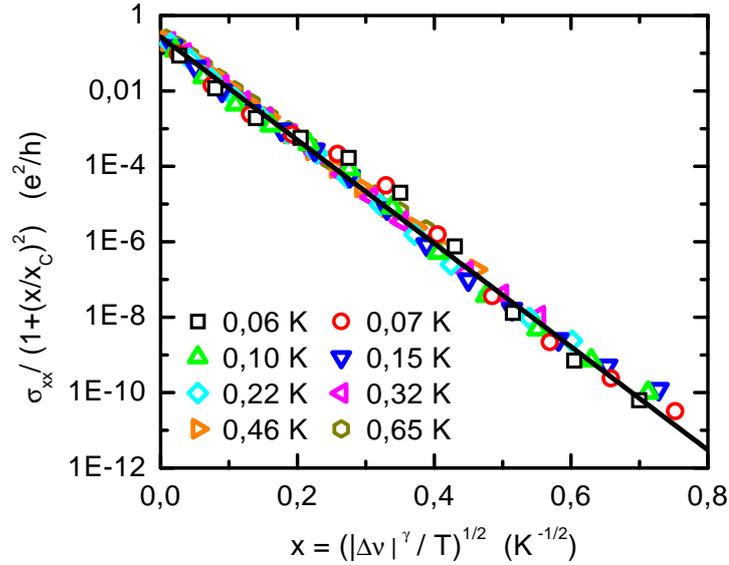


Abbildung 5.11.: Reskalierung der Leitfähigkeit der Probe 6047e im Bereich  $\nu = \nu_c \dots \nu_c + 0,35$  als Funktion einer Variablen  $x$ . Die Auftragung ist so gewählt, dass Gleichung 5.17 der eingezeichneten Geraden entspricht.

sich hervorragend auf eine Gerade reskalieren.

Die Anpassung aller Daten für  $\Delta\nu \leq 0,35$  ergibt

$$T_1 = 1000 \pm 100 \text{ K}, \quad \gamma = 2,3 \pm 0,1. \quad (5.19)$$

Die Fehlerabschätzung ergibt sich durch Test verschiedener Datengewichtungen des Bereiches kleiner und großer  $x$ -Werte, die Anpassung für eine bestimmte Gewichtung ergibt geringere Fehler.

Mit einer mittleren Temperatur  $T = 0,3 \text{ K}$  ergibt sich aus  $x_c = 0,033 \pm 0,002 \text{ K}^{-1/2}$  ein Übergangspunkt  $\Delta\nu = 0,03$  zu einer Skalierung mit konstantem Vorfaktor. Dies stimmt qualitativ mit der Abschätzung aus Abbildung 5.10 überein. Der Vorfaktor reproduziert mit  $\sigma_0^* = (0,27 \pm 0,03)e^2/h$  die Leitfähigkeit am kritischen Punkt. Der Parameter  $T_1$  wird im Abschnitt 5.3.4 analysiert.

Der Exponent  $\gamma = 2,3 \pm 0,1$  stimmt gut mit dem numerischen Wert  $\gamma = 2,35 \pm 0,03$  überein (vgl. Abschnitt 3.2.3). Auch kann er mit dem experimentellen Wert für die Größenskalierung verglichen werden. So bestimmte Koch [97] für eine beleuchtete Probe aus derselben Heterostruktur 6047 für diesen Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$  einen Exponenten  $\gamma = 2,3 \pm 0,1$ . Trotz nicht universeller Skalierung der Halbwertsbreite mit  $\kappa \approx 0,67$  und stark asymmetrischer Zustandsdichte wird also im Gültigkeitsbereich von VRH für den Übergang zum Plateau  $\nu = 2$  ein universelles Skalierungsverhalten wiedergewonnen.

### 5.3.3. Asymmetrie im variable range hopping

Bisher wurde mit  $\nu > \nu_c$  nur der Übergang vom kritischen Punkt zum Plateau  $\nu = 2$  betrachtet. Auch für den Übergang zu  $\nu = 1$  kann die Leitfähigkeit über einen größeren Bereich durch VRH beschrieben werden (im Anhang: Abbildung A.2). Die charakteristische Temperatur und der Vorfaktor sind in Abbildung 5.12 dargestellt. Für  $|\Delta\nu| > 0,1$  lässt sich wieder Skalierungsverhalten anpassen:

$$T_0 = T_1 |\Delta\nu|^\gamma, \quad T_1 = 1700 \pm 200 \text{ K}, \quad \gamma = 2,26 \pm 0,06 \quad (\nu < \nu_c). \quad (5.20)$$

Allerdings zeigt der Vorfaktor  $\sigma_1$  eine stärkere Abhängigkeit von  $\Delta\nu$  als es mit einer Skalierung in nur einem Parameter verträglich ist. Die Daten können also nicht alle entsprechend Gleichung 5.17 als Funktion nur eines Parameters dargestellt werden. Dies wird in Abbildung 5.13 verdeutlicht, in der das Skalierungsverhalten mit dem aus der charakteristischen Temperatur gewonnenen kritischen Exponenten  $\gamma \approx 2,26$  dargestellt ist. Es zeigten sich eine deutliche Streuung der Punkte, die Daten lassen sich nicht komplett auf eine Funktion von  $x$  reskalieren. Jedoch zeigen die Punkte für kleinste Leitfähigkeit wieder eine bessere Übereinstimmung.

Bei Beschränkung auf Leitfähigkeiten  $\sigma_{xx} > 0,01 \cdot \sigma_c$  ist jedoch eine Reskalierung möglich und ergibt einen nicht universellen Exponenten  $\beta = 1,5$  für die charakteristische Temperatur  $T_0 \propto |\Delta\nu|^\beta$ . Dies führt bei einer Untersuchung der Skalierung der Breite des Leitfähigkeitsmaximums zu einem nicht universellen Exponenten  $\kappa \approx 1/\beta = 0,67$ . Es zeigt sich also, dass die Abhängigkeit des Vorfaktors  $\sigma_1(\Delta\nu)$  kritisch für die Analyse des Skalierungsverhaltens ist. Durch seine Abweichung von einem Ein-Parameter-Skalierungsverhalten spiegelt er bei einer in diesem Fall eigentlich

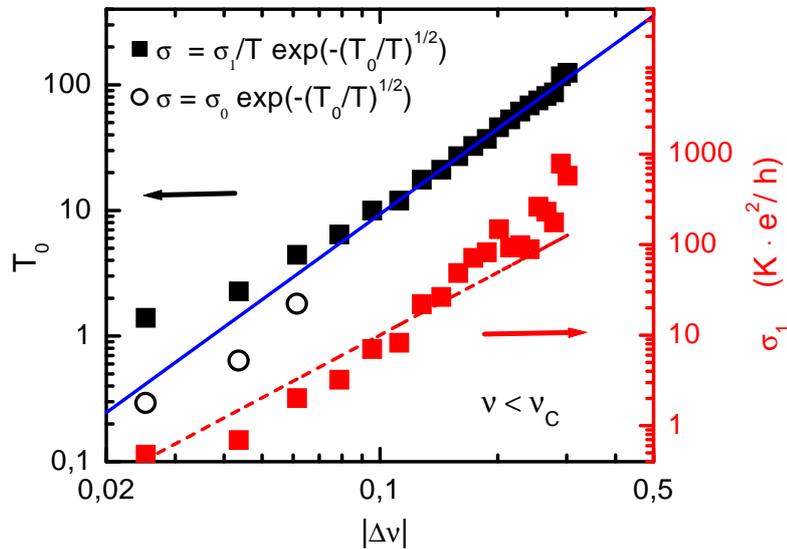


Abbildung 5.12.: **Linke Achse:** Charakteristische Temperatur  $T_0$  der Probe P6047 für  $\nu < \nu_c$ . Die Gerade entspricht dem an die Messwerte  $|\Delta\nu| \geq 0,1$  angepassten Skalierungsverhalten. **Rechte Achse:** Vorfaktor aus Modellanpassung. Die gestrichelte Gerade entspricht der Erwartung für Ein-Parameter-Skalierungsverhalten.

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

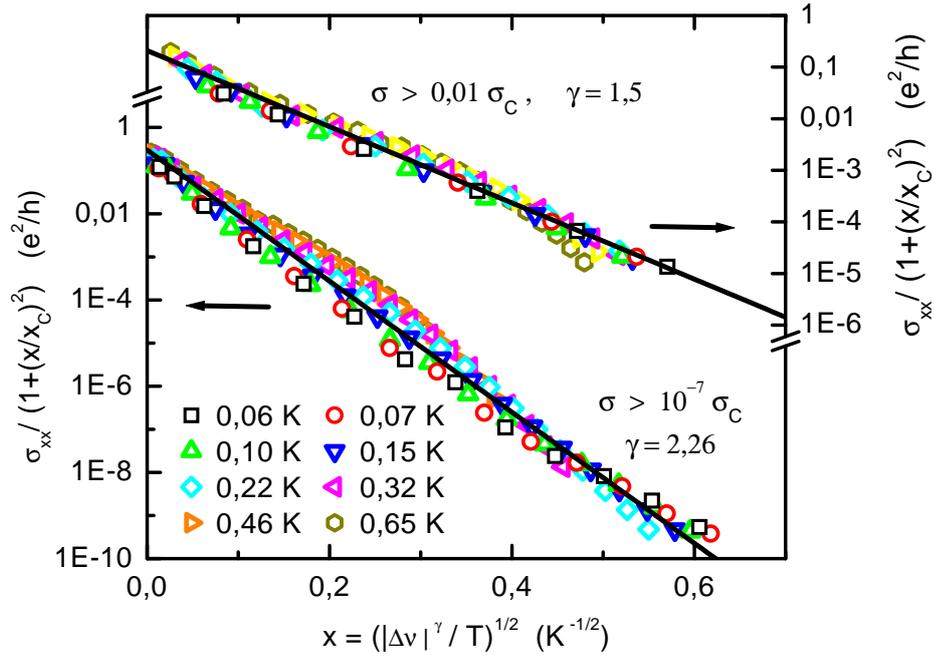


Abbildung 5.13.: **Unten:** Versuch einer Reskalierung für  $\nu < \nu_c$  mit  $\gamma = 2,26$  entsprechend der Skalierung der charakteristischen Temperatur  $T_0$ . **Oben:** Optimiertes Reskalierungsverhalten bei Beschränkung auf  $\sigma_{xx} > 0,01 \cdot \sigma_c$

nicht erlaubten Skalierungsanalyse einen nicht universellen Exponenten vor, obwohl die Auswertung der charakteristischen Temperatur, die mit  $T_0 \propto 1/\xi$  das Verhalten der Lokalisierungslänge wiedergibt, den universellen Exponenten reproduziert.

Für  $\nu < \nu_c$  wird also ein kritisches Verhalten  $\xi \propto 1/T_0 \propto |\Delta\nu|^{-\gamma}$  mit universellem Exponenten  $\gamma \approx 2,3$  gefunden, es liegt jedoch kein Ein-Parameter-Skalierungsverhalten vor, was für korrekte Ergebnisse durch eine herkömmliche Skalierungsanalyse der Breite des Leitfähigkeitsmaximums notwendig ist.

### 5.3.4. Hopping durch elektrische Felder

Bisher wurde der elektrische Transport für  $U \rightarrow 0$  betrachtet. Das angelegte elektrische Feld  $F = U/w$  führt zu einem ohmschen Transport mit  $I = GU$ , wobei  $G$  unabhängig von  $U$  ist. Für große elektrische Felder hängt der Strom  $I$  jedoch nichtlinear von  $U$  ab (vgl. Abbildung 5.5), der durch  $G(U) = I/U$  definierte Leitwert wird also abhängig von der Spannung  $U$ . Dies ist in Abbildung 5.14 für verschiedene elektrische Felder im Übergang von Plateau  $\nu = 1$  nach  $\nu = 2$  für Probe P6047 gezeigt, für die in den vorherigen Abschnitten die Temperaturabhängigkeit analysiert wurde.

Die Wirkung des elektrischen Feldes kann bei *hopping*-Transport durch eine effektive Temperatur  $T_F$  verstanden werden [120]. Durch das elektrische Feld  $F$  wird die Fermienergie verkippt. Ein lokalisiertes Elektron kann durch das elektrische Feld maximal über eine Strecke beschleunigt werden, die durch die Lokalisierungslänge  $\xi$

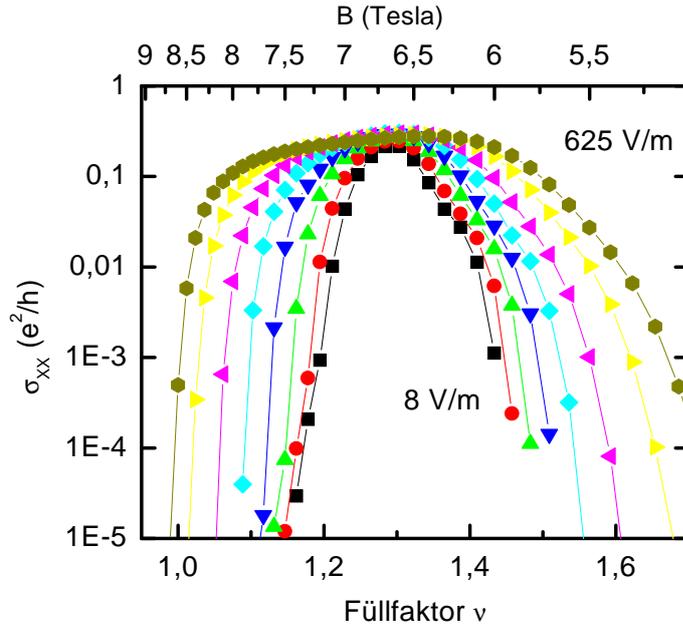


Abbildung 5.14.: Leitfähigkeit der Probe P6047e für verschiedene elektrische Felder  $F = 8 - 625$  V/m.

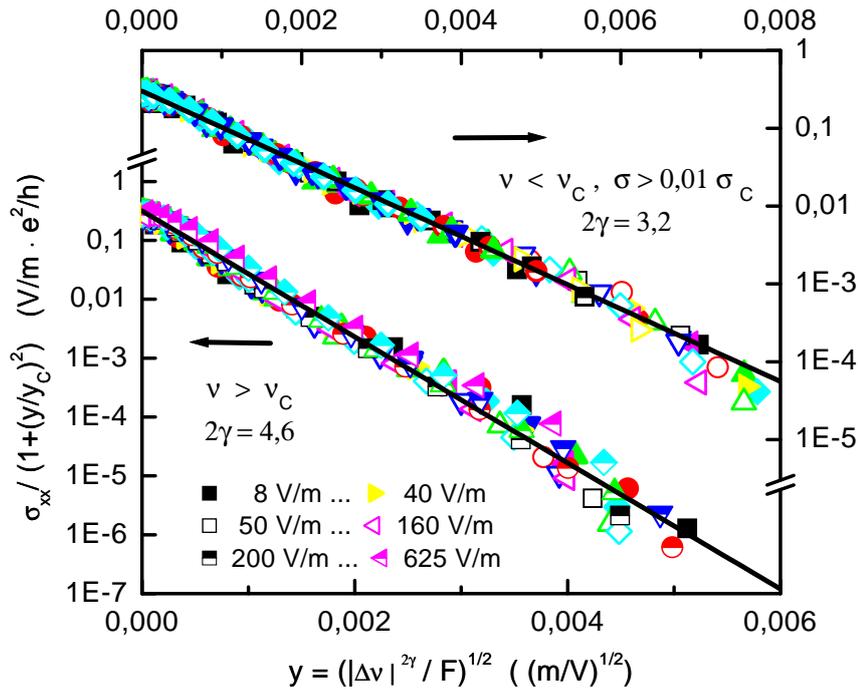


Abbildung 5.15.: **Unten:** Die Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}(\nu, F)$  der Probe für verschiedene elektrische Felder und Füllfaktoren  $\nu = \nu_c \dots \nu_c + 0,35$  folgt einer Ein-Parameter-Skalierung mit  $y = |\Delta\nu|^{2\gamma}/F$ . **Oben:** Für  $\nu < \nu_c$  ist die Reskalierung nur für  $\sigma_{xx} > 0,01\sigma_c$  möglich.

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

gegeben ist. Dies führt zu einer Energieaufnahme  $E_{\text{kin}} \sim eF\xi$ , die mit einer effektiven Temperatur  $T_F(\xi) = E_{\text{kin}}(F, \xi)/k_B$  identifiziert werden kann. Nach Polyakov und Shklovskii [119] gilt exakt

$$k_B T_F = eF\xi/2, \quad (5.21)$$

und mit Gleichung 5.4 mit  $T = T_F$  folgt für VRH

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \exp[-(F_0/F)^{1/2}], \quad F_0 = \frac{k_B T_0}{2\pi e \xi}. \quad (5.22)$$

Für eine Lokalisierungslänge  $\xi = \xi_0(\Delta\nu)^{-\gamma}$  (Gleichung 5.6) ergibt sich mit Gleichung 5.5 und Gleichung 5.21

$$F_0 = C \frac{e}{2\pi\epsilon\epsilon_0\xi^2} = F_1(\Delta\nu)^{2\gamma}, \quad F_1 = \frac{2k_B T_1}{e\xi_0}. \quad (5.23)$$

Damit lässt sich die Leitfähigkeit analog zu 5.17 durch eine Funktion eines Parameters schreiben:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^* \left(1 + \left(\frac{y}{y_c}\right)^2\right) \cdot \exp(-y\sqrt{F_1}), \quad y = \sqrt{\frac{|\Delta\nu|^{2\gamma}}{F}}. \quad (5.24)$$

Für  $\nu > \nu_c$  lassen sich die Daten entsprechend dieser Funktion modellieren. Das Verfahren zur Anpassung der Parameter ist analog zur Untersuchung der Temperaturabhängigkeit und wurde in Abschnitt 5.3.2 ausführlich beschrieben. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.15 dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass die Daten für  $\nu > \nu_c$  gut durch den Ein-Parameter-Skalierungsansatz entsprechend Gleichung 5.24 mit einem universellen kritischen Exponenten  $\gamma \approx 2,3$  beschrieben werden. Für  $\nu < \nu_c$  ergibt sich in Übereinstimmung mit der Temperaturabhängigkeit ein vorgetäushtes Skalierungsverhalten mit einem nicht universellen Exponenten.

Die für  $\nu > \nu_c$  gewonnenen Parameter sind

$$F_1 = (7 \pm 0,5) \cdot 10^6 \text{ V/m}, \quad \gamma = 2,3 \pm 0,1 \quad (5.25)$$

	$\nu > \nu_c$	$\nu < \nu_c$
$\gamma$ aus $T$ -VRH	$2,36 \pm 0,07$	$2,26 \pm 0,06$
$T_1$ aus $T$ -VRH		$1700 \pm 200 \text{ K}$
$\gamma$ aus $T$ -Reskalierung	$2,30 \pm 0,1$	$1,5$ ( $\sigma_{xx} > 0,01 \cdot \sigma_c$ )
$T_1$ aus $T$ -Reskalierung	$1000 \pm 200 \text{ K}$	
$ \Delta\nu $ -Bereich	$ \Delta\nu  < 0,35$	
$\gamma$ aus $F$ -Reskalierung	$2,3 \pm 0,1$	
$F_1$ aus $T$ -Reskalierung	$(7 \pm 0,5) \cdot 10^6 \text{ V/m}$	
$C/\epsilon$	$1,4 \pm 0,2$	
$\xi_0$	$24 \pm 4 \text{ nm}$	

Tabelle 5.1.: Parameter der Probe P6047

mit  $y_c = (7,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \sqrt{m/V}$  und  $\sigma_0^* = (0,3 \pm 0,02)e^2/h$ .

Mit Gleichung 5.23 kann für  $\nu > \nu_c$  aus dem Verhältnis  $F_1/T_1$  der Parameter  $\xi_0$  und daraus zusammen mit  $T_1$  die Größe  $C/\varepsilon$  bestimmt werden:

$$\xi_0 = \frac{2k_B T_1}{2F_1}, \quad \frac{C}{\varepsilon} = 4\pi\varepsilon_0 k_B T_1 \xi_0 / e^2. \quad (5.26)$$

Das Ergebnis ist mit einer Zusammenfassung der anderen gewonnenen Parameter in Tabelle 5.1 aufgelistet.

Der gewonnene Wert für  $C/\varepsilon$  ist größer als der theoretisch abgeschätzte Wert ( $C \approx 0,5$ ) und liegt deutlich über den aus der Halbwertsbreite für höhere Landau-Niveaus bestimmten Werten  $0,02 - 0,1$  [98, 90].

Der Parameter  $\xi_0$  der Lokalisierungslänge kann mit der Größenskalierung von Koch *et al.* [9] verglichen werden. Aus ihren Daten für eine Probe der gleichen Heterostruktur für den gleichen Übergang, allerdings nach Beleuchten, lässt sich ein Wert  $\xi_0 \approx 10 \text{ nm} \approx 1,5 \cdot l_B$  bestimmen (Tabelle 3.1). Bei einem kritischen Magnetfeld von  $B = 6,7 \text{ T}$ , und einer damit verbundenen magnetischen Länge  $l_B = 10 \text{ nm}$ , kann für die unbeleuchtete Probe  $\xi_0 \approx 15 \text{ nm}$  abgeleitet werden. Die Übereinstimmung mit dem aus VRH gewonnenen Wert  $\xi_0 \approx 24 \text{ nm}$  ist gut, wenn man berücksichtigt, dass unterschiedliche Ladungsträgerdichten auch zu unterschiedlichen Realisierungen des Unordnungspotentials führen.

### 5.3.5. Proben mit anderen Unordnungspotentialen

Im Folgenden soll untersucht werden, ob die zumindest teilweise Wiederkehr des universellen Exponenten eine spezielle Eigenschaft der Probe P6047 ist oder generisch in Proben mit nicht universellen Exponenten  $\kappa$  der Halbwertsbreite zu beobachten ist. Hierzu werden im Folgenden die Proben P6323 und P41010 untersucht.

Die Probe P6323 weist eine relativ schwache homogene Dotierung mit Beryllium auf. Der kritische Füllfaktor  $\nu_c = 1,52$  dieser Probe liegt sehr nahe an dem für eine symmetrische Zustandsdichte erwarteten  $\nu_c = 3/2$ . Diese Probe weist auch von den drei hier verglichenen Proben die höchste Beweglichkeit auf.

Die Probe P41010 hingegen ist mit Silizium  $\delta$ -dotiert, wobei diese Dotierschicht wie das Beryllium in P6047 in den Bereich eingebracht wurde, in dem sich das zweidimensionale Elektronengas ausbildet. Die Beweglichkeit ist ähnlich niedrig wie bei

Probe	Unordnung	$n_e$ ( $10^{15} \text{m}^{-2}$ )	$\mu_e$ ( $\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$ )	$\kappa$	$\nu_c$
P6047	Be (repulsiv)	2,1	2	$0,67 \pm 0,04$	1,29
P6323	schwach Be	2,4	12	$0,62 \pm 0,03$	1,52
P41010	Si (attraktiv)	3,2	4	$0,60 \pm 0,02$	1,62

Tabelle 5.2.: Vergleich der Probenparameter

## 5. Skalierung im Hopping-Regime

P6047. Der kritische Füllfaktor ist zu  $\nu_c = 1,62$  verschoben. Die attraktive Natur der Silizium-Atome, die nach Abgabe eines Elektrons positiv geladen sind, führt zu einer Asymmetrie der Zustandsdichte, die wiederum zu einer Verschiebung des kritischen Füllfaktors führt.

Eine Zusammenstellung der Probenparameter ist in Tabelle 5.2 aufgestellt. Weitere Informationen zu den Proben sind in Abschnitt 4.1 zu finden.

Für die Proben P6323 und P41010 wurde die Leitfähigkeit analog zur Probe P6047 ausführlich bezüglich VRH untersucht. Für beide wurde sowohl die Temperaturabhängigkeit als auch die Abhängigkeit vom elektrischen Feld analysiert. Die verwendeten Corbino-Geometrien der Probe P6323 und P41010 haben einen Innenradius von  $r_2 = 500 \mu\text{m}$  und einen Außenradius von  $r_1 = 700 \mu\text{m}$ . Der Überblick über die Daten wird im Detail im Anhang A.1 gegeben, im Folgenden werden nur die Ergebnisse der Analyse dargestellt.

### Probe P6323

Die Leitfähigkeit im isolierenden Bereich lässt sich sowohl für  $\nu > \nu_c$  als auch für  $\nu < \nu_c$  durch VRH ( $\sigma_{xx} \propto (\sigma_1/T) \exp[-T_0/T]$ ) modellieren. Die charakteristische Temperatur zeigt in beiden Fällen Skalierungsverhalten, allerdings in einem unterschiedlich großen Intervall von  $\Delta\nu$ : Für  $\nu > \nu_c$  gilt es für  $\Delta\nu < 0,35$ , für  $\nu < \nu_c$  nur für  $|\Delta\nu| < 0,25$ . Die Daten in diesen Bereichen lassen sich auch jeweils durch ein Ein-Parameter-Skalierungsverhalten darstellen, allerdings ist die Qualität für  $\nu < \nu_c$  etwas schlechter als für  $\nu > \nu_c$ . Hier deutet sich für große Leitfähigkeiten  $\sigma_{xx}$  ein Übergang zu einer Skalierung mit  $\beta = 1/\kappa \approx 1,6$  entsprechend dem Verhalten der Halbwertsbreite an. Dieser Qualitätsunterschied im Skalierungsverhalten setzt sich auch für das elektrische Feld fort: Nur der Bereich  $\nu > \nu_c$  zeigt gutes Ein-Parameter-Skalierungsverhalten. Die gewonnenen Parameter sind in Tabelle 5.3 dargestellt.

	$\nu > \nu_c$	$\nu < \nu_c$
$\gamma$ aus $T$ -VRH	$2,50 \pm 0,08$	$2,32 \pm 0,06$
$T_1$ aus $T$ -VRH	$2000 \pm 300 \text{ K}$	$730 \pm 100 \text{ K}$
$\gamma$ aus $T$ -Reskalierung	$2,30 \pm 0,1$	$2,35 \pm 0,1$
$T_1$ aus $T$ -Reskalierung	$2300 \pm 200 \text{ K}$	$440 \pm 50 \text{ K}$
$ \Delta\nu $ -Bereich	$ \Delta\nu  < 0,35$	$ \Delta\nu  < 0,25$
$\gamma$ aus $F$ -Reskalierung	vorgegeben	
$F_1$ aus $T$ -Reskalierung	$(2,7 \pm 0,3) \cdot 10^7 \text{ V/m}$	
$C/\varepsilon$	$1,9 \pm 0,2$	
$\xi_0$	$14 \pm 4 \text{ nm}$	

Tabelle 5.3.: Parameter der Probe P6323

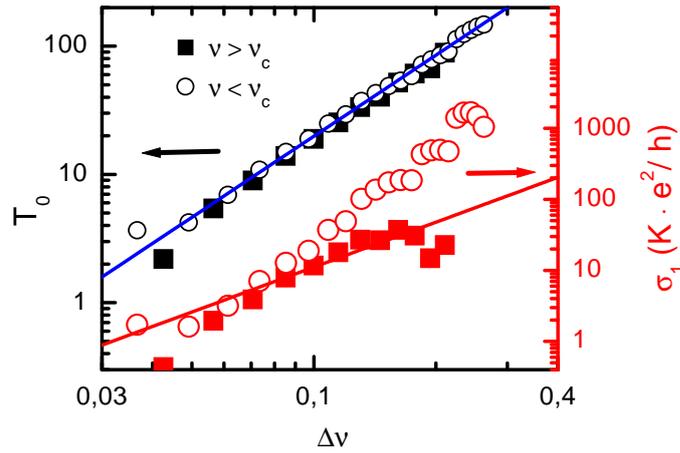


Abbildung 5.16.: Parameter der Anpassung von VRH an die Leitfähigkeiten der Probe P41010

## P41010

Die Anpassung von VRH für Probe P41010 ergibt für  $\nu < \nu_c$  und  $\nu > \nu_c$  das gleiche Skalierungsverhalten  $T_0 = T_1 |\Delta\nu|^\gamma$ . Die Vorfaktoren hingegen zeigen deutlich unterschiedliches Verhalten, wie in Abbildung 5.16 abzulesen ist: Während  $\sigma_1$  für  $\nu > \nu_c$  dem für Ein-Parameter-Skalierung erwarteten Verhalten (eingezeichnete Gerade) folgt, gilt für  $\nu < \nu_c$  näherungsweise  $\sigma_1 \propto |\Delta\nu|^{2\gamma}$ . Der Übergang zu  $\nu = 1$  kann also nicht als Funktion nur eines Parameters beschrieben werden. Im Übergang  $\nu > \nu_c$  zu  $\nu = 2$  liegt jedoch für  $\Delta\nu < 0,15$  ein gutes Ein-Parameter Skalierungsverhalten sowohl mit der Temperatur als auch mit dem elektrischen Feld vor. Die Skalierungs-Parameter für diese Probe sind in Tabelle 5.4 zusammengefasst.

	$\nu > \nu_c$	$\nu < \nu_c$
$\gamma$ aus $T$ -VRH	$2,10 \pm 0,05$	$2,10 \pm 0,05$
$T_1$ aus $T$ -VRH	$2500 \pm 150$ K	$2500 \pm 150$ K
$\gamma$ aus $T$ -Reskalierung	$2,10 \pm 0,05$	-
$T_1$ aus $T$ -Reskalierung	$1900 \pm 100$ K	-
$ \Delta\nu $ -Bereich	$ \Delta\nu  < 0,15$	-
$\gamma$ aus $F$ -Reskalierung	$2,10 \pm 0,1$	-
$F_1$ aus $T$ -Reskalierung	$(2,8 \pm 0,2) \cdot 10^7$ V/m	-
$C/\varepsilon$	$1,3 \pm 0,2$	-
$\xi_0$	$12 \pm 3$ nm	-

Tabelle 5.4.: Parameter der Probe P41010

### 5.3.6. Interpretation der Asymmetrie des Plateau-Übergangs

Für alle drei Proben wird im Übergang zum Plateau  $\nu = 2$  ( $\nu > \nu_c$ ) ein Skalierungsverhalten mit vergleichbaren Parametern für die relevanten Größen  $\gamma$ ,  $C/\varepsilon$  und  $\xi_0$  gefunden. Insbesondere zeigt sich  $\gamma$  nahe dem theoretisch erwarteten universellen Wert  $\gamma \approx 2,35$ . Das Verhalten für  $\nu < \nu_c$  ist hingegen sehr stark von den Eigenschaften der Probe abhängig und zeigt im allgemeinen keine Universalität oder kein Ein-Parameter-Skalierungsverhalten.

Dies hängt mit der in Kapitel 2 erläuterten unterschiedlichen Natur der Plateaus zusammen. Während das Plateau  $\nu = 2$  durch die Energieaufspaltung  $\hbar\omega_c$  entsprechend der Landauquantisierung hervorgerufen wird, ist für das Plateau  $\nu = 1$  die Energielücke durch die Zeemanenergie  $g^*\mu_B B$  mit erhöhtem effektiven  $g$ -Faktor  $g^*$  verantwortlich (vgl. Abschnitt 2.3.1). Im untersten Landau-Niveau ( $\nu < 2$ ) gilt näherungsweise

$$E_{\text{Spin}} = g^*\mu_B B = g\mu_B B + E_{\text{ex}}^0 P_S, \quad (5.27)$$

wobei  $E_{\text{ex}}^0$  die maximale Energie durch Austauschwechselwirkung und  $P_S$  der Polarisationsgrad des Elektronensystems ist. Für  $\nu = 1$  ist dieser Polarisationsgrad  $P_S = 1$ . Mit steigendem  $\nu$  nimmt  $P_S$  ab, wobei der genaue Verlauf von  $P_S(\nu)$  in letzter Zeit intensives Untersuchungsobjekt ist, da er mit der Anregung von komplexen Spintexturen, so genannten *Skyrmions*, verbunden ist. Diese verursachen eine noch schnellere Zerstörung der Polarisation mit wachsendem  $\nu$  im Vergleich zu einer aus Ein-Teilchen-Überlegungen gewonnenen Polarisation  $P_S = (\nu - 2)/\nu$  für  $1 < \nu < 2$ . Der effektive  $g$ -Faktor ist also bei Annäherung an den Plateau-Übergang deutlich gegenüber seinem Wert in der Plateau-Mitte reduziert.

Die Beweglichkeit  $\mu_e = 2 - 10 \text{ m}^2/\text{Vs}$  ist in den untersuchten Proben relativ gering, so dass eine energetische Breite der Energieniveaus  $\Gamma > 1 \text{ meV}$  zu erwarten ist. Mit einer Abschätzung des effektiven  $g$ -Faktors bei  $\nu = 3/2$  aus Koinzidenzmessungen [121] zu  $g^* \approx 2$  folgt für die untersuchten Proben am kritischen Punkt eine typische Zeemanaufspaltung von  $E_Z \approx 1 \text{ meV}$ . Damit ergibt sich insbesondere für  $E < E_c$  ein starker Überlapp zwischen den Energieniveaus der beiden Spin-Ausrichtungen im untersten Landau-Niveau. Dies führt zu einer Erhöhung der Zustandsdichte für  $E < E_c$  im Vergleich zu Energien  $E > E_c$ , für die durch die sehr viel größere Landauaufspaltung von  $\hbar\omega_c > 10 \text{ meV}$  kein Überlapp mit den Zuständen des nächsthöheren Landau-Niveaus existiert.

Die genaue Wirkung der erhöhten Zustandsdichte, bei gleichzeitigem Vorhandensein von unterschiedlichen Spins und dem möglichen Auftreten komplexer Spinstrukturen auf die Lokalisierungslänge und das Skalierungsverhalten ist nicht verstanden. Es existiert nach bestem Wissen keine theoretische Behandlung dieser Problematik. Es ist jedoch sicher ein Effekt zu erwarten, der umso größer ist, je stärker die verschiedenen Spins überlappen.

In Abbildung 5.17 ist dieser Überlapp schematisch für drei verschiedene Typen der energetischen Verbreiterung der Energieniveaus dargestellt, wie sie durch die untersuchten Proben repräsentiert werden. Die Form der Zustandsdichte der einzelnen Niveaus wurde schematisch einer numerische Studie des Einflusses attraktiver oder

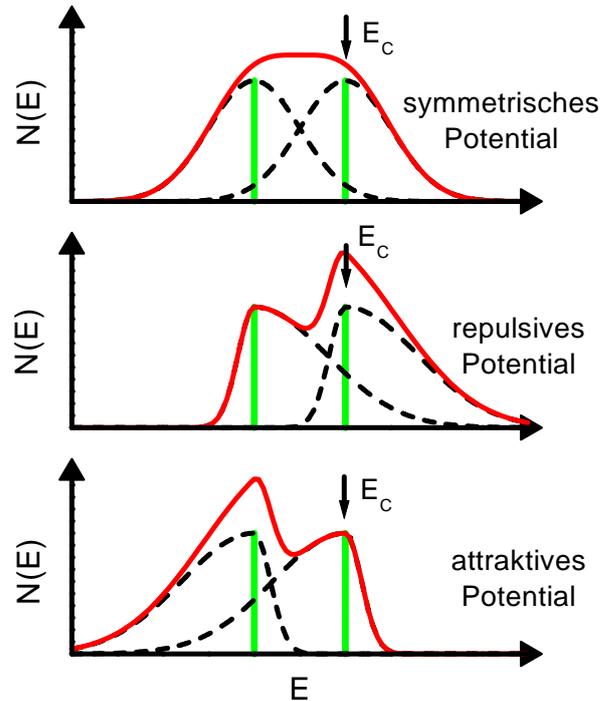


Abbildung 5.17.: Schematische Darstellung des Überlapps der beiden verbreiterten Spin-Energielevels für symmetrische und asymmetrische Verbreiterung der Energielevels.

repulsiver Streuzentren in [122] entlehnt. P6323 kommt von allen Proben dem symmetrischen Fall am nächsten, der im obersten Bild gezeigt ist. In Probe P6047 ist das Maximum der Zustandsdichte zu niedrigeren Füllfaktoren verschoben (mittleres Bild), was den Überlapp erhöht, in P41010 (unteres Bild) ist umgekehrt der Überlapp reduziert. Entsprechend dem unterschiedlichen Überlapp sind in den Proben auch unterschiedliche Abhängigkeiten des effektive  $g$ -Faktors vom Füllfaktor zu erwarten.

Die Zustandsdichte  $D(E_F, \nu)$  an der Fermienergie, der Abstand  $\Delta E(\nu)$  zum kritischen Punkt und der Anteil verschiedener Spins werden im Übergang zur Zeemann-Energielücke also individuell durch die gewählte Unordnung geprägt, entsprechend spiegelt auch die Leitfähigkeit diese Individualität wieder. Dabei scheint das Skalierungsverhalten der Lokalisierungslänge deutlich robuster gegenüber diesem Einfluss zu sein als der Vorfaktor und damit das Ein-Parameter-Skalierungsverhalten.

Auf der Seite der Landau-Energielücke wirkt sich hingegen die asymmetrische Verbreiterung im Wesentlichen nur dadurch aus, dass die Proportionalität  $\Delta\nu \propto \Delta E$  einen unterschiedlichen Gültigkeitsbereich zeigt. In Probe P41010 ist durch  $\nu = 1,62$  die Anzahl der Zustände im gleichen Landau-Niveau mit  $\nu > \nu_c$  reduziert. Dies schränkt den Gültigkeitsbereich des Skalierungsverhaltens ein. In P6047 hingegen ist durch  $\nu_c = 1,29$  ein großes Reservoir an Zuständen für  $\nu > \nu_c$  vorhanden, das Skalierungsverhalten gilt über einen großen Bereich.

## 5.4. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst gezeigt, dass niedrig bewegliche GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen, für die ein nicht universeller Exponent der Halbwertsbreite bestimmt wird, eine Abhängigkeit des Skalierungsexponenten  $\kappa(h)$  von der Höhe  $h = \sigma/\sigma_c$  zeigen, wobei für  $h \ll 1$  sich  $\kappa(h)$  dem als universell postulierten Wert  $\kappa \approx 0,43$  annähert.

Für drei Proben mit verschiedensten Unordnungspotentialen, die alle in der Halbwertsbreite einen nicht universellen Exponenten  $\kappa > 0,6$  zeigen, wurde der elektrische Transport im „isolierenden“ Bereich bei niedrigen Leitfähigkeiten  $\sigma_{xx} \ll \sigma_c$  bestimmt. Für den untersuchten Temperaturbereich  $T < 0,7$  K ist *variable-range hopping* (VRH) mit Vorfaktor  $\sigma_0 \propto 1/T$  der dominierende Transportmechanismus.

Durch Anpassung der Theorie von VRH konnte für alle Proben für den Übergang vom kritischen Punkt zu Plateau  $\nu = 2$  (also  $\nu > \nu_c$ ) ein Skalierungsverhalten  $T_0 \propto |\Delta\nu|^\gamma$  der charakteristischen Temperatur  $T_0$  gezeigt werden. Hieraus folgt durch  $\xi \propto 1/T_0$  ein Skalierungsverhalten der Lokalisierungsgröße. Die gewonnenen Exponenten variieren mit  $\gamma = 2,1 - 2,5$  nur wenig ( $< 10\%$ ) um den numerisch und aus Größenskalierung gewonnenen Wert  $\gamma = 2,3 - 2,35$ . Dies ist mit der deutlich größeren Abweichung von  $1/\kappa < 1,7$  zu vergleichen.

Für  $\nu > \nu_c$  konnten alle Daten gleichzeitig an eine auf VRH basierende Modellierung mit nur einer Variablen  $x(\nu, T)$  angepasst werden. Dieser Nachweis von Skalierungsverhalten in einem Parameter auch für großen Abstand zum kritischen Füllfaktor ( $\Delta\nu \leq 0,3$ ) zeigt die Robustheit dieses kritischen Phänomens.

Die zusätzliche Messung der Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom elektrischen Feld bei niedrigster Temperatur ermöglicht es, die in der Beziehung  $T_0 \propto 1/\xi$  auftretenden Konstanten zu bestimmen. Mit den Bezeichnungen aus Gleichung 5.5 folgt für alle Proben  $C/\varepsilon \approx 1 - 2$  (vgl. Tabelle 5.5). Dies weicht deutlich von den im „metallischen“ Bereich des Plateau-Übergangs bestimmten 0,02-0,1 [90, 98] ab.

Mit dieser Konstanten kann die absolute Größe der Lokalisierungsgröße  $\xi$  bestimmt werden. Der Parameter  $\xi_0$  in der Skalierungsform  $\xi = \xi_0 |\Delta\nu|^{-\gamma}$  ist für den Bereich  $\nu = \nu_c \rightarrow 2$  in Tabelle 5.5 aufgetragen. Die Werte für  $\xi_0$  sind alle von der gleichen Größenordnung und entsprechen der Größenordnung der magnetischen Länge  $l_B \sim 10$  nm. Damit stimmen die so bestimmten Werte zum einen mit der Messung der Größenskalierung von Koch *et al.* (siehe hierzu Abschnitt 3.3.2) überein und entsprechen zum anderen der Vorstellung, dass die kleinste Skala der Lokalisierungsgröße durch die Ausdehnung des quantenmechanischen Zustands eines Elektrons bestimmt wird. Diese Ausdehnung ist im untersten Landau-Niveau gerade von der Größe  $l_B$ .

Die Unterschiede der Lokalisierungsgröße zwischen den Proben, insbesondere im Vergleich zwischen P6047 und den anderen Proben, sind signifikant größer als der statistische Fehler. Hier manifestieren sich die unterschiedlichen Verbreiterungen der Zustandsdichten.

Im Regime des VRH kann also für das durch die Landauenergie gebildete Plateau  $\nu = 2$  die theoretisch erwartete Universalität und ein Ein-Parameter-Skalierungsverhalten für den Übergang zum kritischen Punkt weitestgehend wiedergewonnen werden,

Probe	Unordnung	$\nu_c$	$\kappa$	$\gamma$	$C/\varepsilon$	$\xi_0$
P6047	Be (repulsiv)	1,29	0,67	$2,3 \pm 0,1$	1,4	24 nm
P6323	schwach Be	1,52	0,62	$2,4 \pm 0,15$	1,9	14 nm
P41010	Si (attraktiv)	1,62	0,60	$2,1 \pm 0,1$	1,3	12 nm

Tabelle 5.5.: Parameter des *variable-range hopping*

und die Größenordnung der bestimmten Lokalisierungslänge stimmt gut mit den Erwartungen überein.

Das Verhalten im Übergang zum durch Spin-Effekte gebildeten Plateau  $\nu = 1$  ist hingegen durch die Details des Energieüberlapps der beiden Spinniveaus bestimmt, es ist kein Ein-Parameter-Skalierungsverhalten zu beobachten. Hier ist die Ursache für das nicht universelle Verhalten der Halbwertsbreite zu suchen. Trotz der Abwesenheit von Ein-Parameter-Skalierungsverhalten in diesem Bereich zeigt die Lokalisierungslänge, repräsentiert durch die charakteristische Temperatur  $T_0 \propto 1/\xi$ , ein Skalierungsverhalten mit universellem Exponenten. Das Verhalten der Lokalisierungslänge ist also robuster gegenüber Störungen durch den Überlapp der Energieniveaus als das Skalierungsverhalten der Leitfähigkeit.



# 6. Kritische Leitfähigkeiten

Anders als das Skalierungsverhalten im Übergang zwischen den Quanten-Hall-Plateaus ist die Leitfähigkeit am kritischen Punkt ein experimentell bisher wenig erforschtes Gebiet. Die Theorie erwartet für diese Leitfähigkeit einen universellen Wert. Dies konnte jedoch von den Experimenten bisher nicht bestätigt werden. Vielmehr scheint diese Größe viel anfälliger auf die mikroskopischen Eigenschaften der Probe zu sein als das Skalierungsverhalten der Leitfähigkeit bei Annäherung an den kritischen Punkt.

Der theoretische Zugang führt zu einer Berechnung der Leitfähigkeiten. Nahezu alle Untersuchungen auf Skalierungsverhalten wurden jedoch in Hall-Geometrie durchgeführt. Aus den gemessenen Widerständen  $\rho_{xx}$  und  $\rho_{xy}$  lässt sich im homogenen Fall durch einfache Inversion die Leitfähigkeit gewinnen, bei Vorhandensein von mikroskopischer oder makroskopischer Unordnung gilt diese Beziehung jedoch nur noch eingeschränkt und nur auf mikroskopischer Ebene. Ein anderer Ansatz beruht auf einer Messung in Corbino-Geometrie und wird in dieser Arbeit verfolgt. Damit kann ein direkter Vergleich mit einem theoretischen Modell einer Corbino-Geometrie bei Vorhandensein von Inhomogenitäten durchgeführt werden. Die Abbildung dieses Modells auf eine Hall-Geometrie ist deutlich schwieriger.

In diesem Kapitel wird zunächst ein Abriss über die theoretische Vorhersage und einige experimentelle Hinweise sowie Widersprüche zur universellen kritischen Leitfähigkeit gegeben. Hierbei wird eine Verbindung zu den in den ersten Kapiteln angeführte Aussagen hergestellt. Im Anschluss wird eine Theorie von Ruzin, Cooper und Halperin referiert, die eine mögliche Erklärung für die Abwesenheit der universellen Leitfähigkeit bietet.

Die Vorhersagen dieses die Skalierungstheorie ergänzenden Modells zur Leitfähigkeit am kritischen Punkt werden im verbleibenden Teil des Kapitels experimentell geprüft.

## 6.1. Pro Universalität

Ando [25] bestimmte die Leitfähigkeit im Maximum der Shubnikov-de Haas-Oszillation für kurzreichweitige Streuer in selbstkonsistenter Bornscher Näherung (SCBA) zu

$$\sigma_{xx,\text{peak}}^n = \frac{2}{\pi} \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{e^2}{h}. \quad (6.1)$$

## 6. Kritische Leitfähigkeiten

$n$  ist der Index des Landau-Niveaus. Für hochbewegliche Proben, in denen sich eine große Zahl von SdH-Oszillationen beobachten lässt, wird für große Füllfaktoren eine hervorragende Übereinstimmung mit  $\sigma_{xx} \propto n \propto 1/B$  beobachtet [123], wenn auch der Vorfaktor von Gleichung 6.1 abweicht. Es zeigte sich jedoch, dass für wenige gefüllte Niveaus, also kleines  $n$ , insbesondere für AlGaAs/GaAs eine deutlich schwächere Abhängigkeit von der Anzahl der gefüllten Niveaus beobachtet wird.

Die in Abschnitt 3.2.2 dargestellte Skalierungstheorie unterscheidet nicht zwischen den Übergängen zwischen verschiedenen ganzzahligen QHE-Plateaus. Dies spiegelt sich in der Symmetrie des Flussdiagramms nach Khmel'nitskii [5] und der  $\beta$ -Funktion nach Pruisken [62] unter der Transformation  $\sigma_{xy} \rightarrow \sigma_{xy} + e^2/h$  wieder. Hieraus ergibt sich eine Unabhängigkeit der Werte der Maxima vom Füllfaktor.

Fisher *et al.* [65, 66] konnten zunächst für ein verwandtes System (2d-Isolator-Supraleiter-Übergang) die Existenz eines universellen, also von der mikroskopischen Realisierung unabhängigen Wertes  $\sigma_c$  für den kritischen Punkt des Phasenüberganges zeigen. Weitere Untersuchungen folgerten die gleiche Universalitätsklasse für dieses System und den Plateau-Übergang im QHE. Mit verschiedenen Zugängen bestimmten zunächst Lee, Kivelson und Zhang [124, 125]  $\sigma_c = 0,5 \cdot e^2/h$  und Ludwig *et al.*  $\sigma_c = (1/\pi)e^2/h$ .

Die Beschreibung des Quanten-Hall-Effekts durch eindimensionale Kanäle mit einem Transmissionskoeffizienten  $\mathcal{T}_L$ , der einen kontinuierlichen Übergang von 0 nach 1 macht, ergibt Leitfähigkeiten  $\sigma_{xx} = \mathcal{T}_L(1 - \mathcal{T}_L)e^2/h$  und  $\sigma_{xy} = \mathcal{T}_L^2 e^2/h$  (Kucera und Streda [126]). Eine Auftragung von  $\sigma_{xx}$  gegen  $\sigma_{xy}$  ergibt einen Halbkreis mit einem Maximum von  $\sigma_{xx} = 0,5 \cdot e^2/h$  bei  $\sigma_{xy} = 0,5 \cdot e^2/h$ . Diese Betrachtung führt also auch zu einer kritischen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} = \sigma_c = 0,5 \cdot e^2/h$  bei  $\sigma_{xy} = 0,5 \cdot e^2/h$ .

Eine verallgemeinerte Version dieser Beziehung zwischen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{xy}$ , dem so genannten „Halbkreis-Gesetz“, konnten Ruzin *et al.* in einem völlig anderen Modell ableiten: Beim Übergang zwischen den Plateaus  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  und  $\sigma_{xy} = \sigma_2$  bilden sich durch das Unordnungspotential mikroskopische Quanten-Hall-„Tümpel“ aus, die sich entweder im Zustand  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  oder  $\sigma_{xy} = \sigma_2$  befinden. Die diagonale Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  dieses Systems hat ein Maximum

$$\sigma_c = \sigma_c^* = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}. \quad (6.2)$$

Der zweite Teil der Gleichung ist die Definition von  $\sigma_c^*$  für spätere Verwendung.

Verschiedene numerische Simulationen nicht wechselwirkender Systeme (z. B. [75]–[79],[127]) für den Übergang  $\sigma_{xy} = 0 \rightarrow e^2/h$  ergeben einen Wert von

$$\sigma_c = 0,5 \cdot e^2/h \quad (6.3)$$

unabhängig von den Eigenschaften der Unordnung (die insbesondere in [76, 127] variiert wurde). Diesen Wert fanden Lee *et al.* [72] in einem einfachen Perkolationsmodell mit Wechselwirkung. Huckestein und Backhaus untersuchten den Einfluss bei kontinuierlicher Einschaltung von Wechselwirkung [74] und fanden  $\sigma_c = 0,5 \cdot e^2/h$  unabhängig von der Stärke der Wechselwirkung. Untersuchungen höherer Landau-Niveaus sind numerisch noch problematisch, weisen aber auf einen Erhalt dieses Wertes hin [128].

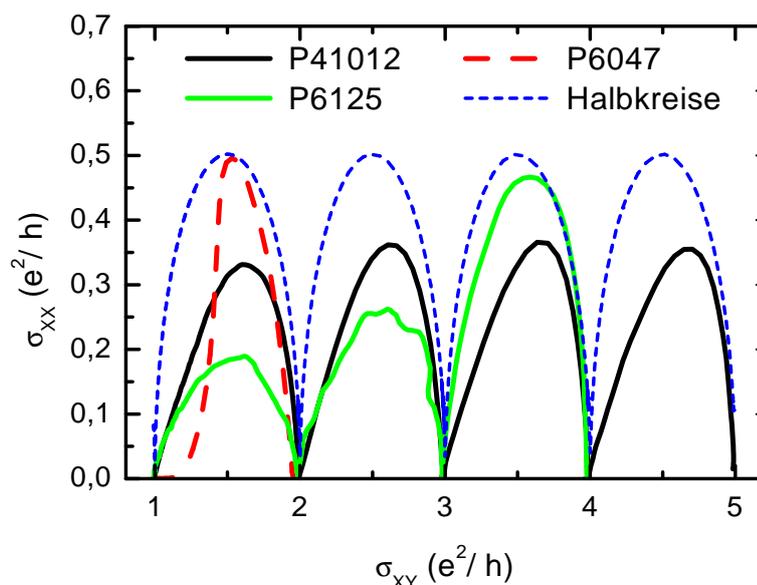


Abbildung 6.1.: Auftragung der in Hall-Geometrie gewonnenen Daten dreier Proben zum Test auf Universalität,  $T \approx 0,08$  K. Es sind nur Übergänge für aufgelöste Spin-Niveaus dargestellt. Für die Probe P6047 gilt dies nur für  $\sigma_{xy} < 2e^2/h$  und für Probe P6125 nur für  $\sigma_{xy} < 4e^2/h$ .

## 6.2. Modell zur Wirkung makroskopischer Unordnung

Die theoretische Untermauerung für einen universellen Wert der Leitfähigkeit am kritischen Punkt mit  $\sigma_c = 0,5 \cdot e^2/h$  ist also groß. Und doch zeigt eine einfache Auswertung des Experimentes keinen universellen Wert. In Abbildung 6.1 sind die Leitfähigkeiten für drei Proben aufgetragen, berechnet aus den in Hall-Geometrie gemessenen Widerständen. Die Asymmetrien sollen hier nicht weiter analysiert werden, sie sind vermutlich auf die Dotierung mit Silizium bzw. Beryllium zurückzuführen. Die Begrenzung der Probe P6047 auf  $\sigma_{xy} < 2 \cdot e^2/h$  und der Probe P6125 auf  $\sigma_{xy} < 4 \cdot e^2/h$  folgt aus der Beschränkung auf spinaufgelöste Quanten-Hall-Plateaus. Es fällt auf, dass zwar eine Probe eine Leitfähigkeit  $\sigma_c = 0,5 \cdot e^2/h$  zeigt und für eine andere Probe die Leitfähigkeit zumindest für alle Übergänge ähnlich ist, eine dritte Probe zeigt jedoch gar keine Systematik. Bei weiterer Untersuchung zeigt sich, dass in dieser Probe zusätzlich die Maxima der verschiedenen Übergänge temperaturabhängig sind.

Ein Experiment an hochbeweglichen Corbino-Geometrien von Rokhinson *et al.* [129] zeigte für Proben, in denen nur noch eine schwache Temperaturabhängigkeit zu beobachten war, für Füllfaktoren im Bereich  $\nu = 2 - 16$  identische, nicht universelle Leitfähigkeiten ( $\sigma_c = 0,22$  und  $\sigma_c = 0,34 \cdot e^2/h$ ). Die Vorhersage der Invarianz gegenüber der Operation  $\sigma_{xy} \rightarrow \sigma_{xy} + e^2/h$  scheint universeller als der Wert der Leitfähigkeit zu sein.

Bei einer zufälligen Auswahl von Proben (auch bei solchen ohne absichtliche Störstellendotierung und somit höherer Beweglichkeit) zeigt also immer nur eine Teilmenge

universelle Leitfähigkeit (vgl. z. B. auch [130, 97, 87]). Insbesondere ist auch ein universeller Exponent in der Breitenskalierung keine Garantie für eine Universalität der kritischen Leitfähigkeit. Es muss also eine zusätzliche Eigenschaft geben, die Proben wie in [131, 92] auszeichnet, die in guter Näherung universelle Leitfähigkeit im Plateau-Übergang zeigen und dem „Halbkreis“-Gesetz folgen. Der kritische Punkt im Übergang vom QHE zum Hall-Isolator scheint dagegen „universeller“ zu sein [132]-[135], gehört allerdings eventuell nicht derselben Universalitätsklasse an [136].

Ruzin, Cooper und Halperin [13, 137] sind der Frage der Abwesenheit der Universalität in dem schon zur Ableitung des „Halbkreis“-Gesetzes verwendeten Modell [138, 139] nachgegangen. Die für diese Arbeit relevanten Teile des Modells sollen hier kurz dargestellt werden.

Wie bereits im vorherigen Abschnitt kurz erwähnt, zerfällt die Probe im Übergang von einem Hall-Plateau mit  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  zum nächsten mit  $\sigma_{xy} = \sigma_2$  bei Vorhandensein von mikroskopischer Unordnung in viele kleine Bereiche, die jeweils entweder noch dem einen Plateau angehören und somit mikroskopisch  $\sigma_{xy}^{\text{mik}} = \sigma_1$  aufzeigen oder schon dem anderen Plateau mit  $\sigma_{xy}^{\text{mik}} = \sigma_2$  angehören.

Im nächsten Schritt wird eine zusätzliche Unordnung auf makroskopischer Skala eingeführt. Die makroskopische Unordnung kann durch einen ortsabhängigen Füllfaktor  $\nu(\vec{r}) = \bar{\nu} + \delta\nu(\vec{r})$  repräsentiert werden, wobei  $\bar{\nu}$  der gemittelte Füllfaktor ist. Der kritische Füllfaktor für den Plateau-Übergang ist  $\nu_c$ . Die Amplitude von  $\delta\nu(\vec{r})$  sei  $\delta\nu_0$ .

Die mikroskopischen Leitfähigkeiten zeigen einen Plateau-Übergang in Abhängigkeit von  $\nu(\vec{r})$  (Abbildung 6.2, Bild unten links). Im Grenzfall  $T = 0$  ist  $\sigma_{xx} = \sigma_c^* = (\sigma_2 - \sigma_1)/2$  für  $\nu(\vec{r}) = \nu_c$  und ansonsten 0. Für die Hall-Leitfähigkeit gilt in diesem Fall  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  für  $\nu(\vec{r}) < \nu_c$ ,  $\sigma_{xy} = \sigma_2$  für  $\nu(\vec{r}) > \nu_c$  und  $\sigma_{xy} = (\sigma_2 + \sigma_1)/2$  für  $\nu(\vec{r}) = \nu_c$ .

Im Bild unten rechts in Abbildung 6.2 ist der Fall  $T > 0$  dargestellt. Hier ist  $\sigma_{xx} > 0$  für eine Breite  $\delta\nu_T$  ( $\sim$  Halbwertsbreite in der Skalierungstheorie) um  $\nu_c$ , wobei entsprechend Abschnitt 3.2.4  $\nu_T \propto T^\kappa$  gilt. Der Übergang von  $\sigma_{xy}$  von einem Plateauwert zum anderen wird entsprechend ebenfalls über eine Breite  $\nu_T$  ausgeschmiert. Die Breite des mikroskopischen Plateau-Übergangs  $\delta\nu_T$  entspricht bis auf einen Vorfaktor der Größe 1, der durch die Inhomogenität der Amplitude  $\delta\nu_0$  hervorgerufen wird, der makroskopisch gemessenen Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  der Leitwertmaxima.

In Abbildung 6.2 ist der Fall dargestellt, dass der mittlere Füllfaktor  $\bar{\nu}$  gerade dem kritischen Füllfaktor  $\nu_c$  entspricht. Außerdem ist die Amplitude  $\delta\nu_0$  der Fluktuationen größer als der Übergangsbereich  $\delta\nu_T$  zwischen zwei Plateaus. Mit  $\delta\nu_0 > \delta\nu_T$  gibt es nun drei mögliche Kategorien für die mikroskopischen Leitfähigkeiten: (1)  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  und  $\sigma_{xx} = 0$ , (2)  $\sigma_2 < \sigma_{xy} < \sigma_1$  und  $\sigma_{xx} > 0$  sowie (3)  $\sigma_{xy} = \sigma_2$  und  $\sigma_{xx} = 0$  (Abbildung 6.2).

Der makroskopische Strom von einem Kontakt zum anderen kann nur entlang der grauen Bereiche, also entlang der Kanten zwischen weißen und schwarzen Gebieten, und über die Sattelpunkte, also die Berührungspunkte von vier abwechselnd weißen und schwarzen Gebieten, fließen. Die makroskopische Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  wird also durch ein Perkulationsproblem durch die über Sattelpunkte zusammenhängenden Bereiche im Zustand (2) definiert. Für  $\bar{\nu} \approx \nu_c$  existiert ein geschlossenes Perkulationsnetzwerk.

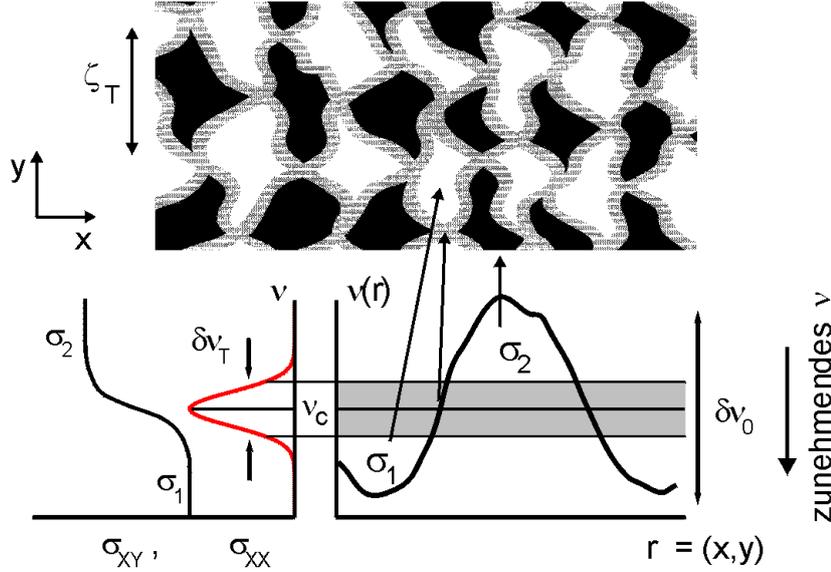


Abbildung 6.2.: Bild links unten: Der Übergangsbereich der lokalen Leitfähigkeiten  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{xy}$  weist eine Breite  $\delta\nu_T$  um  $\nu_c$  auf. Bild rechts unten: Der Füllfaktor  $\nu(r)$  weist eine Ortsabhängigkeit auf. Der mittlere Füllfaktor  $\bar{\nu}$  entspricht gerade dem kritischen Füllfaktor  $\nu_c$ . Ein Schnitt durch die Probe weist Bereiche mit Füllfaktor  $\nu(r)$  auf, die in dem Intervall der Breite  $\delta\nu_T$  um  $\nu_c$  mit Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} > 0$  liegen (grauer Bereich). Die anderen Bereiche befinden sich im Plateau-Zustand  $\sigma_1$  (weiß) oder  $\sigma_2$  (schwarz). Das sich hieraus ergebende Muster in der Probenebene ist im oberen Bild dargestellt. (nach [13])

Die typische Maschenweite dieses Netzwerkes ist nach klassischer Perkolationsstheorie

$$\zeta_T \sim R_c \left( \frac{\delta\nu_0}{\delta\nu_T} \right)^{\gamma_p}, \quad (6.4)$$

wobei  $\gamma_p = 4/3$  der klassische Perkolationsexponent und  $R_c$  die Korrelationslänge von  $\delta\nu(\vec{r})$  ist.

Der nächste Schritt ist die Bestimmung des Widerstandes, den ein solches inhomogenes Elektronensystem bei Messung in Corbino-Geometrie aufweist. Im idealen Fall  $\delta\nu_0 \rightarrow 0$  gilt am kritischen Punkt  $\bar{\nu} = \nu_c$

$$R_0 = \frac{A_0}{\sigma_c^*}, \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}. \quad (6.5)$$

Hierbei ist  $\sigma_c^* = (\sigma_2 - \sigma_1)/2$  der universelle Wert. Die Bezeichnung  $\sigma_c$  bleibt für den tatsächlich gemessenen Wert reserviert.

Mit Unordnung  $\delta\nu_0 > \delta\nu_T$  sind entlang des metallischen Kontakts abwechselnd Bereiche mit von außen sichtbarem Quanten-Hall-Zustand  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  und  $\sigma_{xy} = \sigma_2$  mit einer Ausdehnung von jeweils etwa  $\zeta_T$  aufgereiht. In Abbildung 6.3 ist schematisch

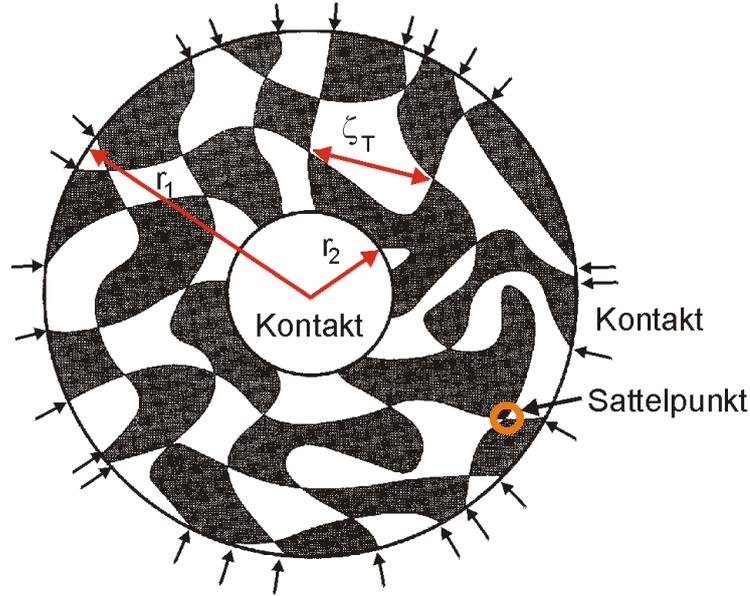


Abbildung 6.3.: Schema der Verteilung der Leitfähigkeit  $\sigma_{xy}$  in einer Corbino-Geometrie. Weiß entspricht  $\sigma_{xy} = \sigma_1$ , schwarz  $\sigma_{xy} = \sigma_2$ . Der Strom kann nur an einem Berührungspunkt von weiß und schwarz vom Kontakt in die Probe eindringen. Diese Punkte sind für den Außenkontakt durch Pfeile gekennzeichnet. Die Anzahl der Wechsel zwischen schwarz und weiß, entsprechend der Anzahl der Pfeile, entlang der beiden Kontakte ergeben die im Text eingeführte Größen  $M_1$  und  $M_2$ . Die Bezeichnung Sattelpunkt im Text steht für den Berührungspunkt mehrere Fläche. Im Bild ist ein Beispiel gekennzeichnet. (nach [13])

das so entstehende Muster dargestellt. Die interne Struktur der schwarzen und weißen Bereiche besteht zwar wiederum aus einem komplexen Muster von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Dies ist aber von außen nicht sichtbar, da diese „inneren“ Bereiche komplett von einem weißen oder schwarzen Streifen mit  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  umgeben sind.

Der Strom kann nur an den Grenzflächen zwischen diesen Bereichen vom Metall in die Probe eintreten, da nur dort für die Metall-2DES-Grenzfläche  $\sigma_{xx} \neq 0$  ist. Diese Punkte sind für den Außenkontakt in Abbildung 6.3 durch Pfeile gekennzeichnet. Insgesamt gibt es für jeden Kontakt etwa  $M_i \approx 2\pi r_i / \zeta_T$  dieser Übergangspunkte entsprechend dem Verhältnis der Kontaktlänge zur typischen Ausdehnung der Quanten-Hall-Tümpel (der weißen und schwarzen Gebiete).

Eine genaue Betrachtung zeigt [13], dass nur jeder zweite dieser Übergänge einen Strom trägt und dabei am Übergang eine Leistung  $P = I^2 R_\alpha$  mit  $1/R_\alpha = 2(\sigma_2 - \sigma_1)$  dissipiert. Diese Auswahl von Übergangspunkten und ihr Widerstand kann anschaulich in Analogie zu den in Abschnitt 2.3.4 eingeführten Randkanälen verstanden werden, wobei hier nur der Fall  $\sigma_2 - \sigma_1 = e^2/h$  betrachtet werden soll:

Der Übergang von einem Bereich  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  zu  $\sigma_2$  entspricht einer Stufe in der Ladungsträgerkonzentration und damit einer Stufe im Potential. Entlang dieser bildet sich genau ein Kanal aus, da  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  direkt benachbarten Energieniveaus entspre-

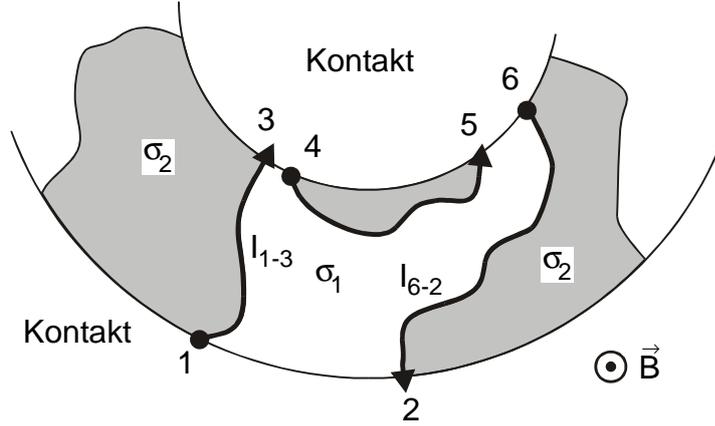


Abbildung 6.4.: Interpretation der Grenzen zwischen der  $\sigma_1$ - und  $\sigma_2$ -Phase mit  $\sigma_{xx} \neq 0$  als eindimensionale Kanäle mit Stromfluss in nur einer Richtung.

chen. Verbindet diese Grenzlinie zwischen den Quanten-Hall-Phasen beide Kontakte anders als in Abbildung 6.3 ohne Sattelpunkt, also ohne eine weitere Berührung anderen Flächen, kann der Widerstand des so entstehenden Kanals bei Annahme idealer Transmission direkt nach Landauer und Büttiker [41, 42] zu  $R = h/e^2 = 1/(\sigma_2 - \sigma_1)$  bestimmt werden. Dieser Fall ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

Desweiteren gilt analog zum Randkanal im QHE, dass in jedem Kanal der Strom nur in eine Richtung fließt, die vom Magnetfeld bestimmt wird (Abbildung 6.4). Da vom Kontakt aus gesehen immer abwechselnd die Quanten-Hall-Phasen von  $\sigma_1$  nach  $\sigma_2$  und zurück zu  $\sigma_1$  wechseln, fließt somit immer abwechselnd der Strom in den Kanal hinein oder heraus. Bei Vorgabe einer Stromrichtung zur Messung des Widerstandes ist damit nur jeder zweite Kanal in die Probe aktiv.

Wird nun der Kanal in zwei Teile aufgeschnitten und das Perkolationsnetzwerk in die Mitte eingefügt, so wird bei gleichbleibendem Strom der Spannungsabfall auf die beiden Teile des aufgeschnittenen Kanals aufgeteilt, und es ergibt sich die obige Beziehung für  $1/R_\alpha$ . Integriert über den gesamten Rand der Corbino, also den Kontakt, ergibt sich ein Widerstand

$$R_{\text{rand}}^{(i)} \approx \frac{2}{M_i} \frac{1}{2(\sigma_2 - \sigma_1)} \approx \frac{\zeta_T}{r_i 2\pi(\sigma_2 - \sigma_1)}. \quad (6.6)$$

Das gesamte innere Netzwerk trägt also nur den Beitrag  $R_0$  zum Widerstand bei. Durch eine endliche Temperatur werden die  $M_i$  nicht exakt ganzzahlig sein, da die Übergangspunkte adiabatisch entstehen bzw. verschwinden bzw. im Bild der 1d-Kanäle die Transmission  $\mathcal{T}_L < 1$  ist.

Der Gesamtwiderstand der Corbino-Geometrie ergibt sich nun durch Summation der Dissipation an beiden Rändern und der (unveränderten) inneren Dissipation  $R_0$ :

$$R_{\text{tot}} = R_0 + R_{\text{rand}}^{(1)} + R_{\text{rand}}^{(2)} \approx \frac{A_0}{\sigma_c^*} + \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{\zeta_T}{2\pi(\sigma_2 - \sigma_1)}. \quad (6.7)$$

## 6. Kritische Leitfähigkeiten

Die makroskopische Unordnung führt also zu einem temperaturabhängigem Korrekturterm  $R_{\text{rand}} = R_{\text{rand}}^{(1)} + R_{\text{rand}}^{(2)}$ , durch den die experimentelle Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}^{\text{exp}} = A_0/R_{\text{tot}}$  kleiner als der universelle Wert  $\sigma_c^*$  ist.

Die Größe  $\zeta_T$  der Maschen wird im Übergang  $T \rightarrow 0$  und damit  $\nu_T \rightarrow 0$  die Breite  $w = r_1 - r_2$  der Corbino-Geometrie überschreiten. Damit liegt kein Perkolationsmodell mehr vor, sondern es gibt für  $\bar{\nu} = \nu_c$  nur noch wenige große Bereiche, die der Phase  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  oder  $\sigma_{xy} = \sigma_2$  angehören. Somit werden  $M_1$  und  $M_2$  auf einen von der speziellen Realisierung der Unordnung abhängigen Wert fixiert. Die gemessene Leitfähigkeit der Probe für  $T = 0$  ist somit nicht universell.

Für schmale Ringe  $w \ll r_i$  verschwinden die mit beiden Kontakten verbundenen inneren Sattelpunkte und damit die Dissipation durch  $R_0$ . Übrig bleibt für das nun fixierte Muster von  $\sigma_{xy}$  eine feste Anzahl von  $M_1$  und  $M_2$  Enden der Leitfähigkeitskanäle entlang der Phasengrenzflächen. Dies ist für einen Ausschnitt aus der Corbino-Geometrie in Abbildung 6.4 skizziert. Ein Teil dieser Kanäle kann zum selben Kontakt zurückführen, im Beispiel die Verbindung der Punkte 4 und 5, so dass  $M_1 \neq M_2$  gelten kann. Eine Anzahl von  $2M$  Kanälen verbindet beide Kontakte, von denen je die Hälfte den Strom in eine Richtung trägt. Im Beispiel Abbildung 6.4 fließt bei positiver Spannung des äußeren Kontakts gegenüber dem inneren Kontakt ein Strom durch die Verbindung 1-3, während die Verbindung 6-2 inaktiv bleibt. Der Widerstand für  $T \rightarrow 0$  zeigt somit einen quantisierten Wert

$$G = \frac{1}{R_{\text{tot}}} = M(\sigma_2 - \sigma_1) = Me^2/h, \quad 2M \leq \min(M_1, M_2). \quad (6.8)$$

Im zweiten Schritt dieser Gleichung wurde nur noch der Übergang zwischen ganzzahligen Quanten-Hall-Plateaus betrachtet.

Die Weiterführung dieser Überlegungen für den Übergang vom kritischen Punkt  $\bar{\nu} = \nu_c$  in das Plateau ( $\bar{\nu} = n$ ,  $n$  ganze Zahl) führt zu weiteren Vorhersagen: Zum einen führt  $\zeta_T > w$  auch für  $\bar{\nu} \neq \nu_c$  zu einem Ende der Temperaturabhängigkeit und einer Sättigung der Leitfähigkeit, so dass eine von der Unordnung induzierte endliche Breite  $\Delta\nu_0$  des  $\sigma_{xx}$ -Maximums vorhergesagt wird. Diese ist nicht mit der Sättigung durch die Probenbreite zu verwechseln, die für eine homogene Probe bei tieferer Temperatur zu beobachten ist. Zum anderen muss der Leitwert  $G$  nach obigen Argumenten auch für  $\bar{\nu} \neq 0$  quantisiert sein. Dies sollte zu einer ungewöhnlichen, stufenförmigen Form der SdH-Maxima führen.

Die Wahrscheinlichkeiten bestimmter quantisierter Werte von  $G$  am kritischen Punkt wurden in [137, 140] numerisch untersucht. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Es zeigt sich, dass die wahrscheinlichsten Werte von  $M$  annähernd durch  $M \sim A_0/2$  beschrieben werden. Damit folgt die größte Wahrscheinlichkeit für eine Leitfähigkeit  $\sigma_c \sim 0,5 e^2/h$ . Der universelle Wert für  $T = 0$  wird also durch die makroskopischen Inhomogenitäten zu einem Schwerpunkt in der Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Leitfähigkeiten.

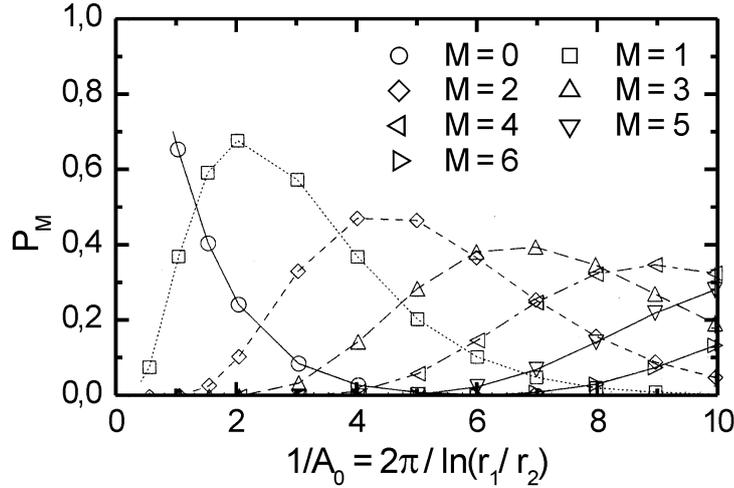


Abbildung 6.5.: Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten quantisierten Wert  $R_{\text{tot}} = (\sigma_2 - \sigma_1)/M$  in Abhängigkeit vom Geometriefaktor  $A_0$  für  $T = 0$ . (nach [137])

### 6.3. Experimenteller Test der Unordnungseffekte

Die im vorherigen Abschnitt vorgestellte Theorie macht zwei Voraussagen, die experimentell durch Messungen in Corbino-Geometrie getestet werden können. Zum einen sollte in einem gewissen Temperaturbereich die Abweichung vom erwarteten universellen Wert durch einen temperaturabhängigen Reihenwiderstand

$$R_{\text{rand}} \propto T^{-\kappa\gamma_p}, \quad \gamma_p = \frac{4}{3} \quad (6.9)$$

bestimmt sein. Hierbei ist  $\kappa$  der Exponent der Temperaturskalierung der Halbwertsbreite und  $\gamma_p$  der klassische Perkolationsindex. Zum anderen wird im Grenzwert  $T \rightarrow 0$  ein stufenförmiger quantisierter Widerstand entsprechend Gleichung 6.8 vorhergesagt. Im Idealfall sollten diese beiden Effekte in einer Probe beobachtet werden, jedoch ist der zugängliche Temperaturbereich begrenzt. Die tiefste mit dem Kryostaten erreichbare Temperatur liegt bei 20 mK. Die Temperatur des zweidimensionalen Elektronensystems ist bei solch tiefen Temperaturen nur noch schwach an die Umgebung gekoppelt und zeigt daher auch bei schwachen Heizeffekten durch die Messströme und durch elektromagnetische Einstreuungen auf den Zuleitungen eine noch höhere Temperatur von  $T = 30 - 60$  mK. Die obere Temperaturgrenze resultiert aus dem Gültigkeitsbereich des Skalierungsverhaltens der Leitfähigkeiten. Für die verwendeten AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen sollte somit  $T < 1$  K gelten. Je nach Temperatur, bei der der maximale Leitwert nach der Argumentation des vorherigen Abschnittes sättigt, kann innerhalb dieses Temperaturbereiches nur das Skalierungsverhalten oder das Sättigungsverhalten untersucht werden.

### 6.3.1. Skalierung der Maxima der Leitfähigkeit

Der Test auf Skalierungsverhalten von  $R_{\text{rand}} = R_{\text{tot}} - R_0$  im kritischen Punkt verschiedener Plateau-Übergänge ist in den Abbildungen 6.6 und 6.7 für zwei Proben dargestellt: In den Abbildungen zeigt das obere Bild die gemessene Kurve des Leitwerts  $G$  (rechte Skala) in Abhängigkeit vom Füllfaktor  $\nu$  für verschiedene Temperaturen  $T$ . Die linke Skala für die Leitfähigkeit entspricht der Umrechnung des Leitwerts durch  $\sigma_{xx} = A_0 G$ , wobei  $A_0 = \ln(r_1/r_2)/2\pi$  der Geometriefaktor der Corbino-Geometrie ist. Die Höhe und die Breite der Leitwertmaxima nimmt mit zunehmender Temperatur zu. Die kritischen Punkte der Plateau-Übergänge sind durch die Punkte maximaler Leitwerte zwischen zwei ganzzahligen Füllfaktoren definiert. Die Füllfaktoren, die zu diesen kritischen Punkten gehören, werden mit  $\nu_c$  bezeichnet.

Für das untere Bild wird die kritischen Leitwerte  $G(\nu_c)$  zunächst in einen Widerstand  $R_{\text{tot}} = 1/G(\nu_c)$  umgerechnet. Anschließend wird von diesem Widerstand entsprechen der Gleichung 6.7 der universelle Anteil  $R_0 = 2A_0 h/e^2$ , der einer Leitfähigkeit  $\sigma_0^* = 0,5 \cdot e^2/h$  entspricht, abgezogen und so  $R_{\text{rand}} = R_{\text{tot}} - R_0$  bestimmt. Diese Größe  $R_{\text{rand}}$ , die von der Temperatur abhängt, ist durch die Symbole im unteren Bild für die verschiedenen kritischen Punkte eingetragen.

Die beiden Proben wurden danach ausgewählt, dass sie eine Reihe von spinaufgelösten SdH-Oszillationen zeigen, aber ansonsten möglichst verschiedene Eigenschaften aufweisen. Die Heterostruktur P1851 zeigt mit  $\mu_e \approx 200 \text{ m}^2/\text{Vs}$  (gemessen in Hall-Geometrie) eine um fast einen Faktor zehn größere Beweglichkeit als die beleuchtete Probe P6323 ( $\mu_e \approx 25 \text{ m}^2/\text{Vs}$ ). Die zugehörigen Ladungsträgerkonzentrationen sind  $n_e = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  (P1851) und  $n_e = 4,5 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  (P6323).

Die hohe Beweglichkeit der Probe P1851 erklärt auch die komplexe Form im Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$ . Hier zeigt sich bereits der fraktionierte Quanten-Hall-Effekt, der in dieser Arbeit nicht weiter untersucht werden soll. Auch der Übergang von  $\nu = 2$  zu  $\nu = 3$  zeigt bei höheren Temperaturen eine asymmetrische Form und wird bei der weiteren Analyse nicht berücksichtigt.

Die Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  der Leitfähigkeitsmaxima der Proben wurde mit positivem Ergebnis auf Skalierungsverhalten  $\Delta\nu \propto T^\kappa$  getestet. Der Temperaturexponent ergibt für P1851 Werte  $\kappa \approx 0,4$  nahe dem „universellen“ Wert ( $\kappa \approx 0,43$ ), während P6323 deutlich höheres  $\kappa \approx 0,5 - 0,6$  zeigt.

Die Abbildungen 6.6 und 6.7 zeigen, dass für beide Proben die gewonnenen Werte  $R_{\text{rand}}$  in mehreren Übergängen über eine Dekade im Temperaturbereich kompatibel mit einem Skalierungsverhalten sind:

$$R_{\text{rand}} \propto T^{-\theta}, \quad \theta = \kappa\gamma_p. \quad (6.10)$$

Der Exponent  $\theta$  ist für die Übergänge mit guter Spinauflösung nahezu konstant (bei P6323 für  $\nu = 2 - 7$ , bei P1851 im Bereich  $\nu = 3 - 6$ ). Die Werte von  $\theta$  sind in den Abbildungen den Geraden zugeordnet, die in der doppelt logarithmischen Auftragung dem Potenzgesetz  $R_{\text{rand}} \propto T^{-\theta}$  entsprechen. Der Vorfaktor des Potenzgesetzes nimmt mit zunehmendem Füllfaktor ab.

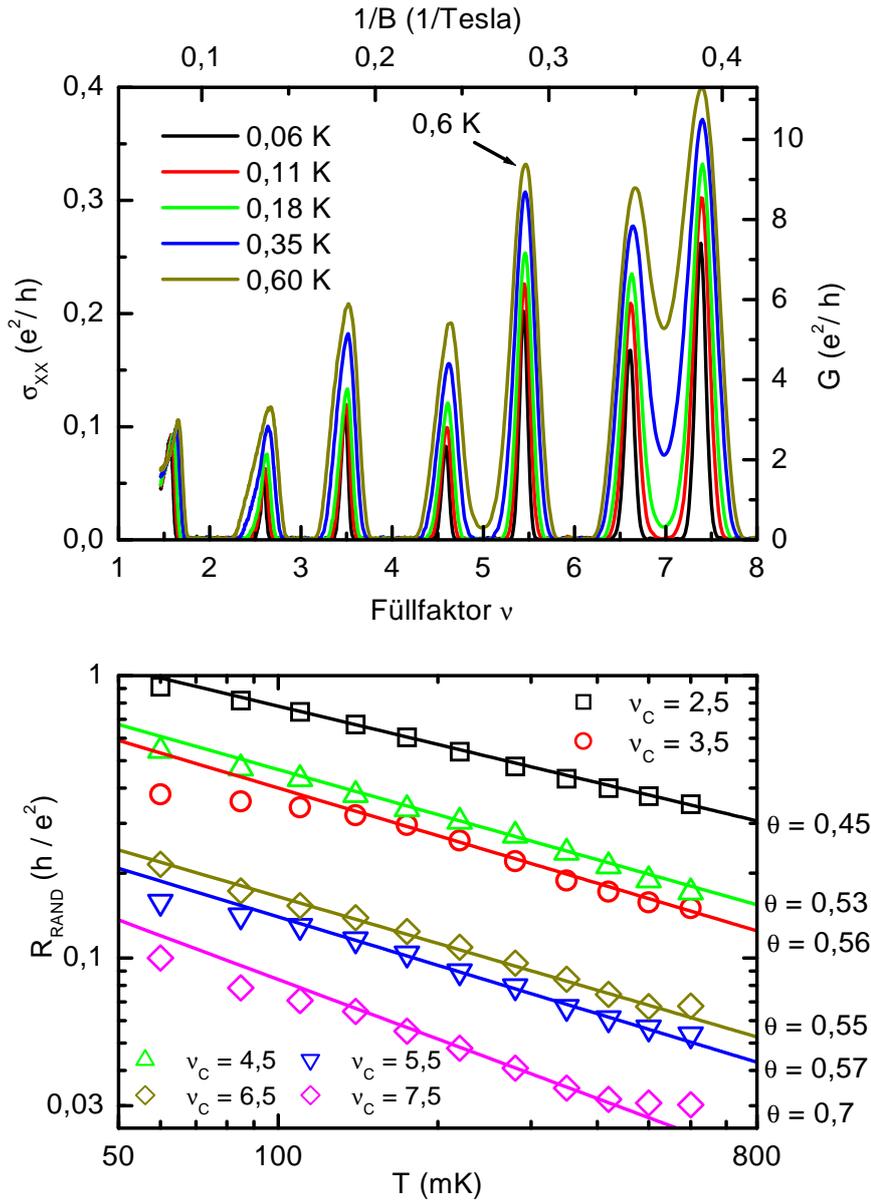


Abbildung 6.6.: Oben: Leitwert  $G = 1/R_{\text{tot}}$  der Probe P6323 (beleuchtet) in Corbino-Geometrie mit  $r_1 = 0,7$  mm und  $r_2 = 0,5$  mm in Abhängigkeit vom Magnetfeld  $B$  für verschiedene Temperaturen  $T$ . Die Leitfähigkeitsachse  $\sigma_{xx}$  entspricht der geometrischen Berechnung  $\sigma_{xx} = GA_0$ ,  $A_0 = \ln(r_1/r_2)/2\pi$ . Unten: Restwiderstand nach Text:  $R_{\text{rand}} = R_{\text{tot}} - 2A_0h/e^2$ . Die eingezeichneten Geraden entsprechen Potenzgesetzen  $R_{\text{rand}} \propto T^{-\theta}$  entsprechend Gleichung 6.9. Sie wurden durch lineare Anpassung auf doppelt logarithmischer Skala ermittelt.  $\nu_c$  ist der Füllfaktor des betrachteten Leitfähigkeitsmaximums.

6. Kritische Leitfähigkeiten

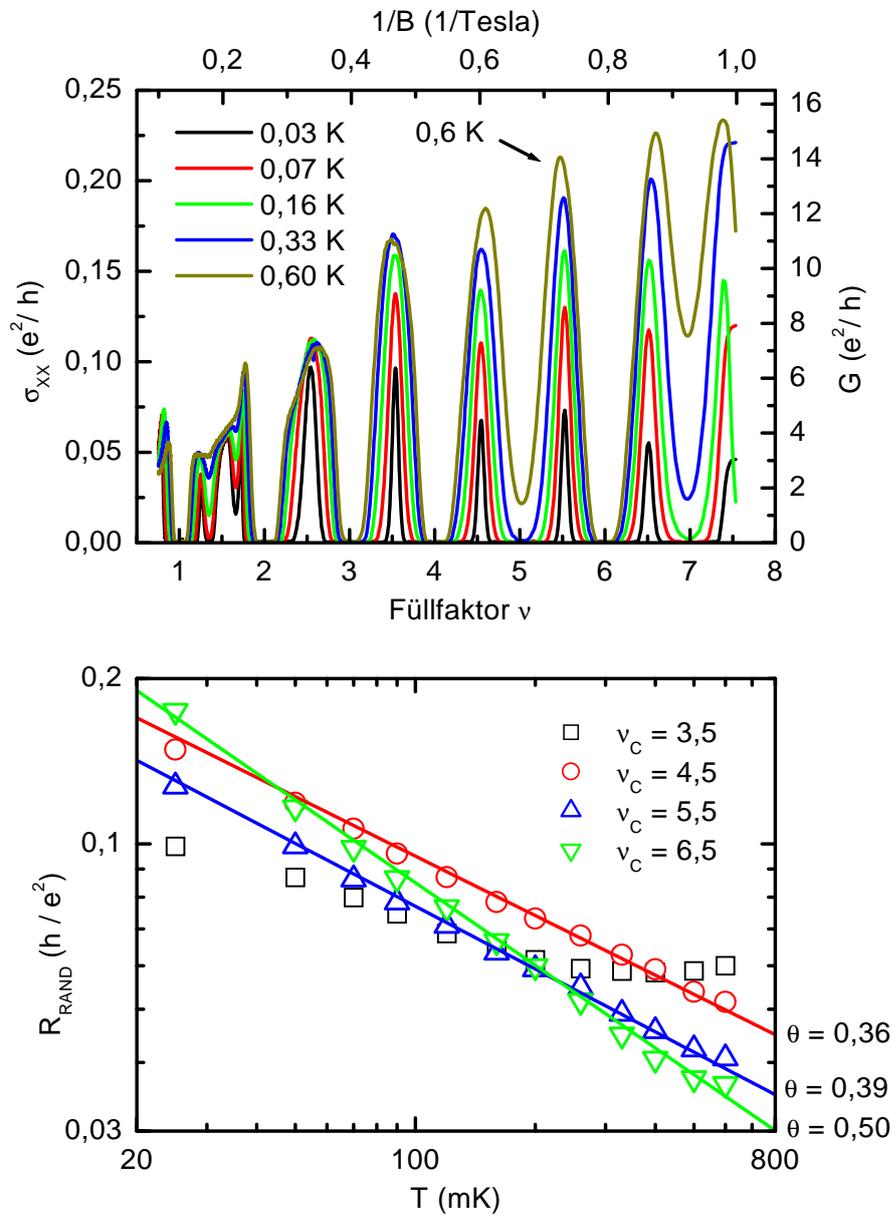


Abbildung 6.7.: Probe P1851, Darstellung wie in Abbildung 6.6

Probe	$n_e$ $\left(\frac{10^{15}}{\text{m}^2}\right)$	$\mu_e$ $\left(\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}\right)$	$\nu$	$\kappa$	$\theta$	$\gamma_p = \frac{\theta}{\kappa}$
P1851	1,9	200	3-6	0,4	0,4	1
P6323 bel.	4,5	25	2-7	0,5-0,6	0,55	1
P254	3,3	35	2-6	0,4	0,5-0,6	1,2-1,4
P6323-2	2,4	12	3-5	0,45+0,55	0,55	1,2+1
P6125	3,2	10	2-4	0,45	0,45+0,6	1+1,3
P6047 bel.	4,0	6	2-4	0,5+0,6	0,6+0,8	1,2+1,3
P41010	3,2	4	1-2	0,6	0,8	1,3
P6047	2,1	2	1-2	0,65	0,6	1

Tabelle 6.1.: Auswertung der Skalierung von  $R_{\text{rand}}$  für verschiedene Proben. Die Spalte  $\nu$  gibt den Füllfaktorbereich an, für den die Parameter bestimmt wurden.

Für hohe Füllfaktoren, bei denen die Spinaufspaltung nur noch gering oder ganz aufgehoben ist, steigt der Wert von  $\theta$  deutlich an. Dies ist für  $\nu_c = 6,5$  bei Probe P1851 und bei  $\nu_c = 7,5$  bei Probe P6323 zu sehen. Dieses Verhalten ist generisch auch für alle anderen untersuchten Proben. Beim Vergleich der gezeigten Proben fällt auf, dass für P6323 der Übergang um  $\nu = 6,5$  noch das  $\theta$  der niedrigeren Füllfaktoren zeigt, während für P1851 hier der Wert schon ansteigt. Dies liegt in den unterschiedlichen Ladungsträgerkonzentrationen begründet. Das zugehörige Magnetfeld und damit die Zeemanenergie ist in P6323 für denselben Übergang mehr als doppelt so gross.

Die niedrigsten Füllfaktoren (für P6323  $\nu < 2$ , für P1851  $\nu < 3$ ) zeigen in beiden Fällen nur eine geringe Temperaturabhängigkeit. Zusammen mit anderen Proben ergibt sich das Bild, dass der Übergang zu dieser geringen Temperaturabhängigkeit bei umso höheren Füllfaktoren liegt, je höher die Beweglichkeit ist.

In Tabelle 6.1 sind die Exponenten und ihr Gültigkeitsbereich für eine Reihe von verschiedenen Proben dargestellt, für die ein Skalierungsverhalten sinnvoll geprüft werden konnte. Es lässt sich direkt ablesen, dass der Exponent  $\gamma_p$ , der in der Theorie zu  $\gamma_p = 4/3$  bestimmt wurde, in diesem Experiment einen Wertebereich  $\gamma_p = 1,0 - 1,4$  annimmt. Die Abweichungen könnten auf verschiedene Typen der Verteilung der Unordnung hindeuten. Eine Analyse möglicher Perkolationsexponenten geht jedoch über diese Arbeit hinaus.

Zusammenfassend ist also ein Potenzgesetz für den eingeführten Randwiderstand  $R_{\text{rand}} = R_{\text{tot}} - R_0$  mit der Temperatur zu beobachten. Der Perkolationsexponent  $\gamma_p$  ist leicht probenabhängig, liegt jedoch mit  $\gamma_p = 1,0 - 1,4$  nahe dem Wert  $\gamma_p = 4/3$  aus der klassischen Perkolationstheorie.

### 6.3.2. Einfluss des Füllfaktors

Im Folgenden soll die qualitative Beobachtung der Füllfaktorabhängigkeit mit dem im vorherigen Abschnitt dargestellten Modell verglichen werden. Die Ursache für die

## 6. Kritische Leitfähigkeiten

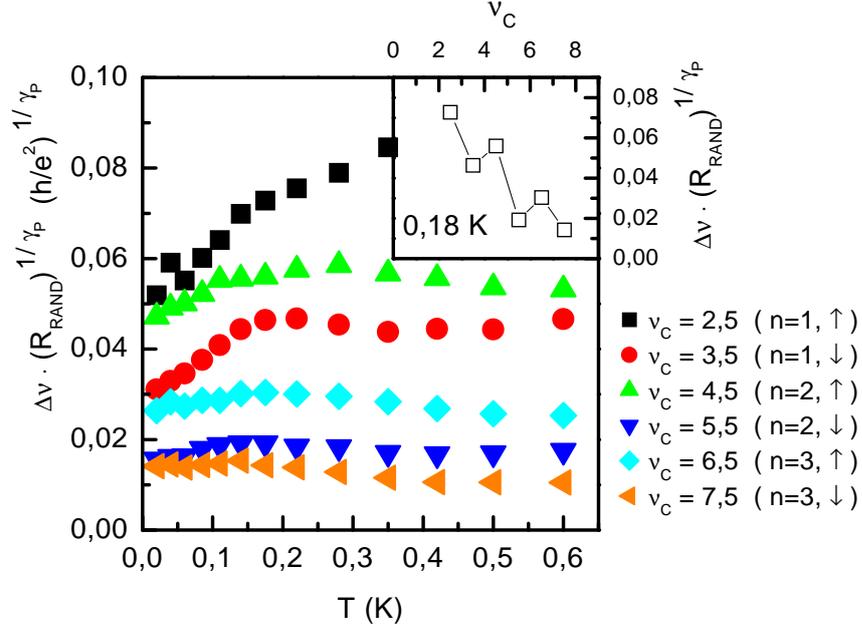


Abbildung 6.8.: Darstellung von  $(R_{\text{rand}})^{1/\gamma_p} \cdot \Delta\nu$  mit  $\gamma_p = 1$  für P6323 für verschiedene Übergänge. Kleines Bild: Abhängigkeit vom Füllfaktor für  $T = 0,18$  K.

räumliche Inhomogenität des Füllfaktors ist die Inhomogenität der Ladungsträgerkonzentration:

$$n(\vec{r}) = \bar{n} + \delta n(\vec{r}), \quad \nu(\vec{r}) = \frac{n_e}{n_L(B)} \Rightarrow \delta\nu(\vec{r}) = \frac{\bar{\nu}}{\bar{n}} \delta n(\vec{r}). \quad (6.11)$$

Das Potenzgesetz für  $R_{\text{rand}}$  folgt mit Gleichung 6.4 und 6.7 gerade durch

$$R_{\text{rand}} \propto \zeta_T \propto \left( \frac{\delta\nu_0}{\delta\nu_T} \right)^{\gamma_p} \propto \left( \frac{\bar{\nu} \delta n_0}{\delta\nu_T} \right)^{\gamma_p}. \quad (6.12)$$

Die Skalierung der gemessenen Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  der gesamten Probe gibt gerade die Skalierung der mikroskopischen Breite  $\delta\nu_T$  wieder. Es gilt bis auf einen Faktor der Größenordnung 1  $\Delta\nu \propto \delta\nu_T$ . Ersetzung von  $\delta\nu_T$  durch  $\Delta\nu$  ergibt die von der Temperatur unabhängige und im kritischen Füllfaktor lineare Beziehung

$$(R_{\text{rand}}(T))^{1/\gamma_p} \cdot \Delta\nu(T) \propto \nu_c. \quad (6.13)$$

Im großen Bild von Abbildung 6.8 sind im großen Bild die experimentellen Daten der Probe P6323 entsprechend dieser Gleichung dargestellt. Für jeden Füllfaktor und jede Temperatur wurde jeweils die maximale Leitfähigkeit  $\sigma_c(\nu_c, T)$  und die Halbwertsbreite  $\Delta\nu(\nu_c, T)$  ausgewertet, der Anteil  $R_{\text{Rand}}$  aus der maximalen Leitfähigkeit berechnet und das Produkt  $(R_{\text{rand}}(T))^{1/\gamma_p} \cdot \Delta\nu(T)$  bestimmt. Das hierfür gewählte  $\gamma_p = 1$  wurde entsprechend dem vorherigen Abschnitt aus der einzelnen Analyse des Skalierungsverhaltens der Halbwertsbreite und des Korrekturterms  $R_{\text{Rand}}$  bestimmt, wobei der Mittelwert über die verschiedenen Plateau-Übergänge gebildet wurde.

Abbildung 6.8 zeigt, dass die Unabhängigkeit von der Temperatur für  $T \geq 0,15$  K für die Mehrheit der Übergänge gut erfüllt ist. Der Übergang mit kritischem Füllfaktor zeigt die stärkste Abweichung, weil für diesen Übergang  $\theta \approx 0,45$  niedriger als für die anderen Übergänge ist.

Im kleinen Bild ist dieses Produkt entsprechend Gleichung 6.13 für eine ausgewählte Temperatur als Funktion des kritischen Füllfaktors des Plateau-Übergangs dargestellt. Die Vorhersage einer linearen Abhängigkeit entsprechend Gleichung 6.13 wird ganz klar nicht bestätigt. Im Gegenteil, diese Größe nimmt mit wachsendem Füllfaktor sogar ab, wenn auch für die erste Spinrichtung eines neuen Landau-Niveaus ein vorübergehender leichter Anstieg zu beobachten ist. Die Ursache hierfür ist, dass zwar  $\Delta\nu \propto \delta\nu_T$  mit wachsendem Füllfaktor leicht zunimmt, aber  $R_{\text{rand}}$  noch schneller wächst.

Dieses starke Wachstum von  $R_{\text{rand}}$  mit zunehmendem Füllfaktor ist nur dadurch zu erklären, dass ein Teil der in Abbildung 6.3 dargestellten „weißen“ oder „schwarzen“ Phasen in kleinere Gebiete zerfällt. So ist z. B. die „weiße“ Phase  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  zugeordnet, jedoch ist nicht ihr komplettes Gebiet im Zustand  $\sigma_{xy} = \sigma_1$ , sondern sie wird von einem geschlossenen Streifen, der sich in diesem QHE-Zustand befindet, umgeben. Dadurch sind die inneren Übergangsbereiche zwischen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  mit  $\sigma_{xx} > 0$  komplett von der Umgebung entkoppelt. Es muss nun einen Mechanismus geben, der für höhere Füllfaktoren Sattelpunkte<sup>1</sup>, die für niedrige Füllfaktoren durch  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  und  $\sigma_{xx} = 0$  inaktiv sind, aktiviert und so eine große Phase in mehrere kleine mit unterschiedlichem  $\sigma_{xy}$  und neuen Grenzflächen zerlegt. Dies führt zu einer effektiven Korrelationslänge  $R_{\text{c,eff}}(\nu_c)$  in Gleichung 6.4:

$$\zeta_T \sim R_{\text{c,eff}}(\nu_c) \left( \frac{\delta\nu_0(\nu_c)}{\delta\nu_T(\nu_c, T)} \right)^{\gamma_p}. \quad (6.14)$$

Hieraus folgt  $(R_{\text{rand}}(T))^{1/\gamma_p} \cdot \Delta\nu(T) \propto R_{\text{c,eff}}(\nu_c)/\nu_c$ . Abbildung 6.8 zeigt, dass diese Größe mit dem Füllfaktor fällt. Um dies zu verursachen, muss  $R_{\text{eff}}(\nu_c)$  schneller fallen als  $1/\nu_c$ . Welcher Art diese Abhängigkeit ist kann nur eine weitergehende theoretische Untersuchung der Prozesse an den Sattelpunkten zeigen.

Es ist mit diesen Beobachtungen konsistent, dass die Temperaturabhängigkeit für niedrige Füllfaktoren eine höhere Sättigungstemperatur zeigt als für höhere Füllfaktoren. Die Sättigungstemperatur wird durch  $\zeta_T \approx w = r_1 - r_2$  definiert. Nach obigen Überlegungen wächst  $\zeta_T$  bei konstanter Temperatur mit abnehmendem Füllfaktor und erreicht somit schon für höhere Temperaturen eine Größe  $w$ .

Zusammenfassend zeigt die Abhängigkeit vom betrachteten Übergang, gekennzeichnet durch  $\nu_c$ , ein komplizierteres Verhalten als im Modell beschrieben wird, wobei als Ursache ein Mechanismus vermutet wird, der bei einer höheren Zahl von besetzten Landau-Niveaus zusätzliche Sattelpunkte im makroskopischen Verteilungsbild der  $\sigma_1$ - und  $\sigma_2$ -Phasen aktiviert.

<sup>1</sup>Sattelpunkte sind hier Punkte, bei denen sich zwei gleiche Phasen, z. B. zu  $\sigma_1$  gehörig, beinahe berühren und nur von einer schmalen  $\sigma_2$ -Zone getrennt werden.

## 6. Kritische Leitfähigkeiten

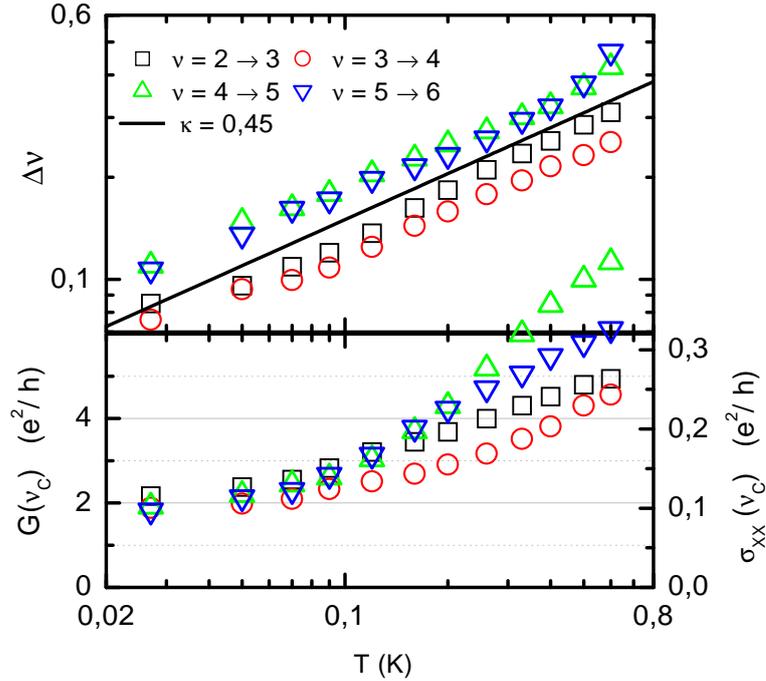


Abbildung 6.9.: Breite  $\Delta\nu$  und Höhe  $G(\nu_c)$  der Maxima im Leitwert  $G$  für Probe 6125 (Corbino-Geometrie,  $r_1 = 0,7$  mm,  $r_2 = 0,5$  mm). Die Leitfähigkeitsskala (rechts) entspricht der Umrechnung  $\sigma_{xx} = A_0 G$ .

### 6.3.3. Sättigung des Leitwerts

In diesem Abschnitt sollen die Vorhersagen zur Sättigung des Leitwerts bei tiefen Temperaturen geprüft werden. Die experimentellen Beobachtungen werden exemplarisch am Beispiel der Probe P6125 dargestellt und mit der Theorie verglichen.

In Abbildung 6.9 sind die Breiten und Höhen der Leitwertmaxima zwischen den Plateaus  $\nu = 2$  bis  $\nu = 6$  gezeigt. Für eine Temperatur  $T \leq 0,1$  K ist deutlich eine reduzierte Temperaturabhängigkeit des maximalen Leitwerts bei gleichzeitiger Annäherung an einen gemeinsamen Wert zu erkennen. Dies ist keine Sättigung der Temperatur des Elektronensystems, was durch die fortgesetzte Temperaturabhängigkeit der Halbwertsbreite gezeigt wird. Dies bestätigt die Vorhersage einer Konvergenz der Leitwerte für die verschiedenen kritischen Füllfaktoren und eines gemeinsamen Sättigungswertes im Grenzfall  $T \rightarrow 0$ .

Die Quantisierung des Sättigungswertes lässt sich jedoch nicht überzeugend beobachten: Die Werte liegen bei der tiefsten Temperatur zwar in einem Wertebereich  $G = (2,0 \pm 0,2)e^2/h$ , weisen aber noch eine schwache Temperaturabhängigkeit auf, werden also für kleinere Temperaturen noch etwas sinken. Gleichzeitig erscheint die verbleibende Temperaturabhängigkeit zu schwach, um den Leitwert auf  $G = e^2/h$  zu reduzieren. Für eine sichere Aussage reicht jedoch der Temperaturbereich nicht aus.

Nimmt man trotzdem zunächst  $M = 2$  als Sättigungswert für  $T = 0$  an, so zeigt ein Vergleich mit Abbildung 6.5, dass dieser Fall nach den numerischen Berechnungen

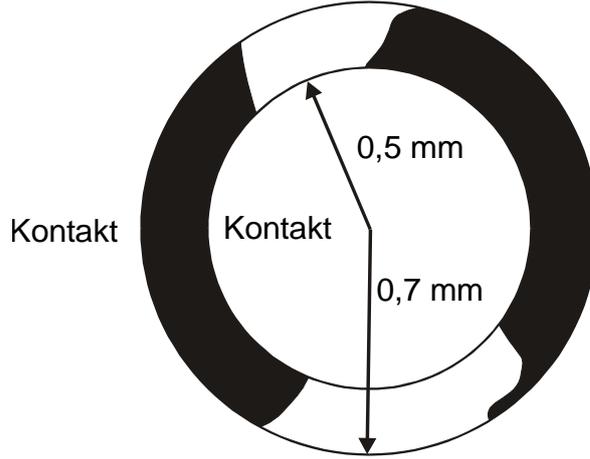


Abbildung 6.10.: Beispiel einer Verteilung von  $\sigma_1$ - und  $\sigma_2$ -Phasen für einen quantisierten Wert mit  $M = 2$

sehr unwahrscheinlich ist. Zwar ist der reziproke Geometriefaktor  $1/A_0 = 18$  dieser Probe um einen Faktor 2 außerhalb des numerisch berechneten Bereichs, aber bereits für  $1/A_0 = 10$  ist die Wahrscheinlichkeit für  $M \leq 2$  nur etwa 1%. Der jeweils wahrscheinlichste Wert zeigt in Abbildung 6.5 näherungsweise die Regel  $M \sim 1/(2A_0)$ . Für dieses  $M$  ergibt sich  $\sigma_{xx} \approx MA_0 e^2/h \approx 0,5 \cdot e^2/h$ . Ruzin *et al.* stellten in [137] bereits solche Abweichungen für die Messungen von Rokhinson *et al.* [129] fest. Sie interpretierten dies durch das Auftreten zusätzlicher systematischer Abweichungen der Ladungsträgerkonzentration.

Diese Vorstellung ist in Abbildung 6.10 dargestellt. Die Ladungsträgerkonzentration muss, um solche einfachen Muster der Verteilung der  $\sigma_i$ -Phasen hervorzurufen, eine Unordnung auf sehr großen Skalen besitzen. Lokal gesehen entspricht dies dann systematischen Gradienten in der Ladungsträgerkonzentration. In Abbildung 6.10 läuft zum Beispiel ein Streifen erhöhter Ladungsträgerdichte vertikal durch die gesamte Probe. Dadurch ist der Füllfaktor in diesem Bereich höher, und die Probe befindet sich noch in der Quanten-Hall-Phase  $\sigma_{xy} = \sigma_1$  während der Rest der Probe bereits dem nächsten Plateau  $\sigma_{xy} = \sigma_2$  angehört.

Das Modell sagt auch eine Sättigung der Halbwertsbreite voraus. Da der halbe Leitwert jedoch dem halben Wert von  $M$  und damit dem doppelten Wert von  $\zeta_T$  entspricht (vgl. Gleichung 6.6), tritt diese möglicherweise erst bei tieferen Temperaturen ein. Die reduzierte Temperaturabhängigkeit der Breiten zwischen  $\nu = 2$  und  $\nu = 4$  könnte ein Hinweis hierauf sein, es ist aber auch denkbar, dass die elektronische Temperatur  $T_e$  für höhere Magnetfelder schlechter an die Umgebung ankoppelt als für niedrigeres Feld, so dass für vorgegebene Temperatur  $T_{\text{Kryo}}$  des Kryostaten die elektronische Temperatur  $T_e$  eine Abhängigkeit vom Füllfaktor zeigt und für  $\nu < 4$  früher sättigt als für  $\nu > 4$ .

Eine weitere Vorhersage ist, dass neben dem maximalen Leitwert  $G = 2e^2/h$  nur

## 6. Kritische Leitfähigkeiten

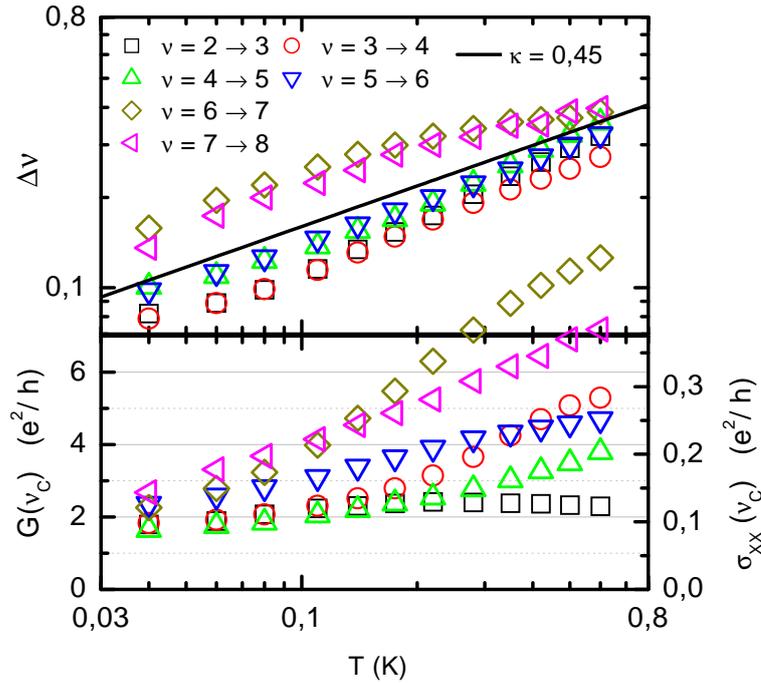


Abbildung 6.11.: Wie Abbildung 6.9, jedoch nach Beleuchtung.

noch ein weiterer Leitwert  $G = e^2/h$  auftreten darf, so dass der Leitwert als Funktion des Füllfaktors nur aus zwei Stufen besteht. Dies ist in dem im Experiment zugänglichen Temperaturbereich nicht zu beobachten. Wiederum ist jedoch nicht zu entscheiden, ob dieses Phänomen erst bei deutlich tieferen Temperaturen als die Sättigung des maximalen Leitwerts auftritt.

In Abbildung 6.11 wird gezeigt, in wie weit sich das Verhalten der Probe nach der Generation weiterer Ladungsträger durch intensives Beleuchten ändert. Die Ladungsträgerkonzentration wurde von  $n_e = 3,2 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  auf  $n_e = 4,5 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$  gesteigert. Die Messung zeigt für den kritischen Füllfaktor  $\nu_c = 2,5$  kaum noch eine Temperaturabhängigkeit. Das Verhalten der anderen Leitfähigkeitsmaxima ändert sich jedoch wenig. Die Daten sind wiederum am ehesten mit einer Sättigung bei  $M = 2$  kompatibel, wobei auch hier ein weiteres Absinken möglich erscheint.

Der gleiche Sättigungswert wie für die beleuchtete und die unbeleuchtete Probe unterstützt die These, dass der niedrige Leitwert durch systematische großräumige Inhomogenitäten verursacht wird, die auch durch eine höhere Ladungsträgerkonzentration nicht abgeschirmt werden. Eine mögliche Ursache dieser Inhomogenitäten können großräumige Variationen der Dichte der Dotieratome sein.

Andere Proben bestätigen die Konvergenz der Leitwertmaxima verschiedener Übergänge zu einem gemeinsamen Wert und den Nachweis von Sättigungsverhalten bei tiefen Temperaturen. Der Sättigungswert ist hierbei ebenfalls im Vergleich zur numerisch bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung für  $G = Me^2/h$  (Abbildung 6.5) sehr niedrig. Diese Abweichung ist also im Experiment der Normalfall. Die Frage der Quantisierung lässt sich ohne niedrigere Temperaturen auch in anderen Proben nicht klären.

### 6.3.4. Einfluss der Geometrie

Unter dem Einfluss der Geometrie ist hier der Einfluss sowohl des Geometriefaktors  $A_0 = \ln(r_1/r_2)/2\pi$  als auch die absolute Größe der Radien  $r_1$  und  $r_2$  zu verstehen. Die Theorie macht hierzu zwei Vorhersagen. Die eine ist, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Sättigungswertes der Leitfähigkeit bei  $T = 0$  nur vom Geometriefaktor  $A_0$  abhängt. Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass der experimentell gefundene Sättigungswert durch systematische Inhomogenitäten bestimmt wird und nicht der theoretisch erwarteten Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt. Damit hängt es aber von der spezifischen Realisierung dieser Inhomogenität ab, wie sich die Geometrie auf den Sättigungswert auswirkt. Dem entspricht, dass für die hier untersuchten Proben keine eindeutige systematische Beziehung zwischen Sättigungswert und Geometrie festzustellen ist.

Für hohe Temperaturen, für die der Sättigungswert noch nicht erreicht ist, und für die die kritischen Leitfähigkeiten noch Skalierungsverhalten des Korrekturterms  $R_{\text{rand}}(T)$  zeigen, wird die Leitfähigkeit noch durch die Eigenschaften des Perkulationsnetzwerkes bestimmt. Mit den Näherungen  $1/r_1 + 1/r_2 \approx 2/r_1$  und  $A_0 \approx w/(2\pi r)$  sowie der Beschränkung auf  $\sigma_2 - \sigma_1 = e^2/h$  im ganzzahligen QHE folgt aus Gleichung 6.7:

$$\frac{1}{A_0 G} = \frac{1}{\sigma_{xx}} \approx \frac{1}{\sigma_c^*} + \frac{\zeta_T}{2w} \frac{h}{e^2} \quad (A_0 \ll 1). \quad (6.15)$$

Die Größe  $\zeta_T(T)$  ist wiederum die temperaturabhängige Maschenweite des Perkulationsnetzwerkes. Für Leitfähigkeiten  $\sigma_{xx} \ll \sigma_c^* = 0,5 e^2/h$  ist somit bei konstanter Temperatur ein annähernd linearer Zusammenhang  $\sigma_{xx} \propto w$  zu erwarten.

In Abbildung 6.12 ist eine systematische Variation der Ringbreite bei konstant gehaltenem Geometriefaktor  $A_0$  für Probe P6047 gezeigt. Die inneren Radien der Geometrien sind 300,200,120 und 90  $\mu\text{m}$ .

Für die kleinen Geometrien ist auch ohne makroskopische Inhomogenitäten eine Sättigung der Breite des Leitwertmaximums zu erwarten, da die temperaturabhängige Skalierungslänge  $L_T \propto T^{-1/z_T}$ , die die Skalierung der Halbwertsbreite  $\Delta\nu \propto L_T^{-\gamma} \propto T^\kappa$  verursacht, für Temperaturen  $T \leq 0,05$  K von gleicher Größenordnung wie  $w$  ist (vgl. Abschnitt 3.3.2 und [9]). Die beobachtete Sättigung der Breite darf also nicht als Nachweis der entsprechenden Vorhersage für makroskopische Inhomogenitäten interpretiert werden.

Die Maxima des Leitwerts zeigen die erwartete Tendenz, dass für kleinere Proben kleinere Werte zu beobachten sind. Zwar sind die Unterschiede mit einem Faktor 2 zwischen der größten und der kleinsten Probe etwas kleiner als der Unterschied in  $w$ , dies liegt aber noch durchaus im Rahmen der Abweichungen, die durch eine statistisch verteilte makroskopische Inhomogenität und damit von Probe zu Probe variierende Werte von  $\zeta_T$  erwartet werden können.

Um den Einfluss von Radius und Ringbreite der Geometrien zu trennen, wurde zusätzlich eine Variation des Radius  $r$  bei konstanter Breite  $w$  durchgeführt. Für diesen Fall ist nach Gleichung 6.15 für Temperaturen, bei denen noch keine Sättigung zu erwarten ist, eine Unabhängigkeit der maximalen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} = A_0 G$  vom Ra-

## 6. Kritische Leitfähigkeiten

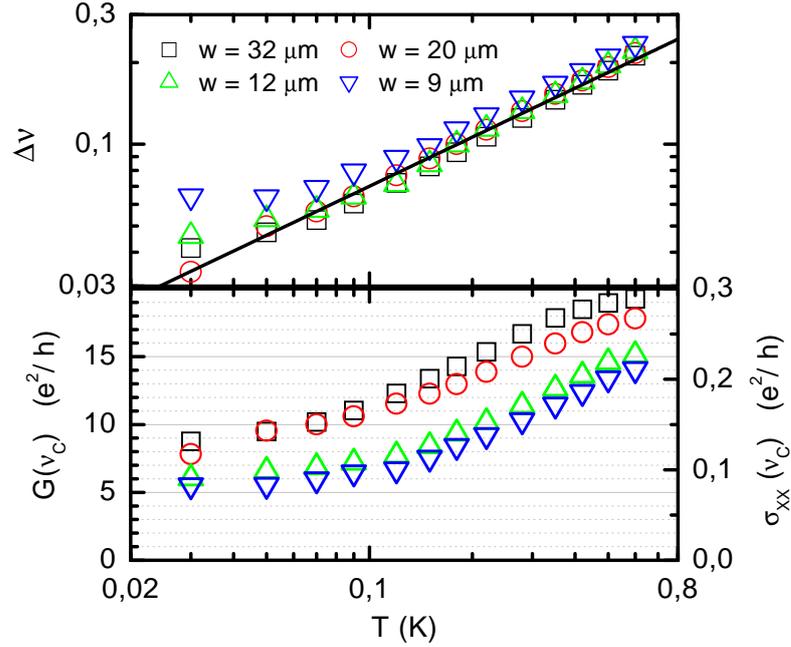


Abbildung 6.12.: Halbwertsbreite und Höhe des Leitwertmaximums im Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$  für verschiedene Größen und Ringbreiten  $w$  bei annähernd gleichem Geometrieverhältnis ( $r_1/r_2 = 1,1$ ,  $1/A_0 \approx 66$ ). Alle Geometrien wurden auf einem Stück der Heterostruktur P6047 hergestellt.

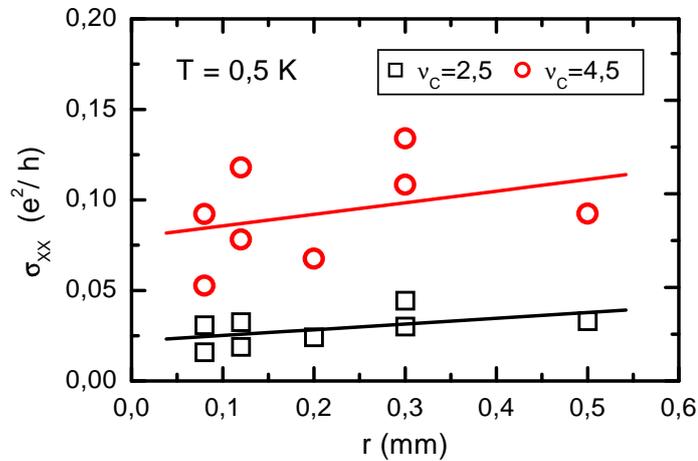


Abbildung 6.13.: Maxima der Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} = A_0 G$  für Corbino-Geometrien mit der gleichen Ringbreite  $w = 10 \mu\text{m}$ , aber verschiedenem Radius. Es sind exemplarisch die Werte für zwei Plateau-Übergänge dargestellt, die anderen Übergänge zeigen dasselbe Verhalten. Die Geraden entsprechen einer linearen Anpassung. (Heterostruktur P107)

dius zu erwarten. Die Messung für mehrere aus der Heterostruktur P107 hergestellte Geometrien ist in Abbildung 6.13 dargestellt. Die Messung wurde für eine Temperatur  $T = 0,5$  K durchgeführt, bei der noch keine Sättigungseffekte der Maxima zu beobachten sind. Es wurden zwei Plateau-Übergänge exemplarisch ausgewählt, die anderen Übergänge verhalten sich genauso.

Um die Daten auf einen Trend zu prüfen, wurde eine lineare Anpassung vorgenommen, die durch die Geraden dargestellt ist. Es zeigt sich ein geringer Anstieg der Leitfähigkeit mit zunehmendem Radius, der jedoch schwächer als die statistische Streuung von Probe zu Probe ist. Die Erwartung, dass die Leitfähigkeit bei konstant gehaltener Ringbreite  $w$  und ausreichend hoher Temperatur  $T$  unabhängig vom Radius ist, wird also weitestgehend erfüllt. Der schwache Trend zu zunehmender Leitfähigkeit könnte dahingehend interpretiert werden, dass die dominierenden Inhomogenitäten der Ladungsträgerkonzentration in dieser Heterostruktur eine Korrelationslänge  $R_c$  haben, die von der Größenordnung der kleinsten Probe ist. Für eine sichere Aussage ist die Anzahl der Proben angesichts der statistischen Fluktuation zwischen den Proben zu klein. Diese Fluktuationen werden durch die statistische Natur der Inhomogenitäten hervorgerufen, die in benachbarten Proben zu einem verschiedenen Unordnungspotential führen.

Die Messungen der verschiedenen Geometrieabhängigkeiten für noch nicht gesättigte Maxima zeigen also eine Übereinstimmung mit den Vorhersagen des Modells, nach denen für eine festgelegte Realisierung der Unordnung, das heißt eine festgelegte Korrelationslänge  $R_c$ , im Experiment durch Vergleich verschiedener Proben von einer Heterostruktur realisiert, die Leitfähigkeit mit  $\sigma_{xx} \propto w$  nur von der Breite und nicht vom Radius abhängt: In Geometrien unterschiedlicher Breite nimmt die Leitfähigkeit trotz gleicher Geometriefaktoren ab, in Geometrien gleicher Breite zeigt sie sich im Wesentlichen auch von einer Variation des Radius um nahezu einen Faktor zehn unberührt.

## 6.4. Zusammenfassung

Für ein zweidimensionales Elektronensystem in Gegenwart einer beliebigen mikroskopischen Unordnung sagt eine ganze Reihe analytischer und numerischer theoretischer Untersuchungen im Übergang zwischen Quanten-Hall-Plateaus eine universelle kritische Leitfähigkeit voraus, wobei die große Mehrheit einen Wert  $\sigma_c^* = 0,5 \cdot e^2/h$  bestimmt. Experimentell ist diese Universalität nicht zu beobachten.

Die Abwesenheit der universellen Leitfähigkeit kann durch ein Modell von Ruzin, Cooper und Halperin erklärt werden, das die Effekte einer makroskopischen Inhomogenität der Ladungsträgerkonzentration durch Ausbildung makroskopischer räumlich getrennter Quanten-Hall-Phasen beschreibt. Aus diesem Modell lassen sich mehrere einfache Aussagen für eine Messung des Leitwerts in Corbino-Geometrie ableiten: In einem gewissen (probenabhängigen) Temperaturbereich lässt sich der gemessene Widerstand am kritischen Punkt entsprechend  $R_{\text{tot}} = 1/G = A_0/\sigma_c^* + R_{\text{rand}}$  zerlegen. Der Korrekturterm zum universellen Wert zeigt die Abhängigkeit  $R_{\text{rand}} \propto \nu_c T^{-\kappa\gamma_p}$

## 6. Kritische Leitfähigkeiten

mit  $\gamma_p = 4/3$ . Im Grenzwert tiefer Temperatur sättigen die kritischen Leitwerte im Übergang zwischen verschiedenen ganzzahligen Quanten-Hall-Plateaus und nehmen alle denselben quantisierten Wert  $G = Me^2/h$  an, für den numerisch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt wird. Außerdem sollte auch die Halbwertsbreite sättigen und das Leitwert-Maximum im Plateau-Übergang eine Stufen-Form annehmen.

Diese Aussagen wurden durch Messungen an verschiedenen Proben in Corbino-Geometrie untersucht. Das Potenzgesetz konnte bestätigt werden, wobei für den Perkolationsexponenten ein Wertebereich von  $\gamma_p = 1, 0-1, 4$  gefunden wurde. Die Abhängigkeit vom Füllfaktor  $R_{\text{rand}} \propto \nu_c$  innerhalb einer Probe konnte nicht bestätigt werden. Hierzu wird als Mechanismus die Aktivierung zusätzlicher Sattelpunkte zwischen gleichen Quanten-Hall-Phasen vorgeschlagen.

Eine mit gleichzeitiger Sättigung verbundene Konvergenz der kritischen Leitwerte für verschiedene kritische Füllfaktoren konnte ebenfalls nachgewiesen werden. Die Quantisierung und die damit verbundene Stufenform der Leitwertmaxima konnte nicht beobachtet aber auch nicht ausgeschlossen werden. Hierfür müsste der untersuchte Temperaturbereich deutlich unter die aktuelle Grenze von 30 mK ausgedehnt werden. Der abgeschätzte Wert von  $M$  kann mit der numerischen Untersuchung verglichen werden und ist deutlich kleiner als theoretisch vorhergesagt. Dies weist auf eine langreichweitige Ordnung der Inhomogenität der Ladungsträgerkonzentration hin.

Durch zusätzliche Variation der Größe und des Geometriefaktors der Corbino-Geometrien konnten weitere Übereinstimmungen mit dem Modell nachgewiesen werden.

Zusammenfassend zeigen sich also Abweichungen in den Details der Vorhersagen, die auf Unterschiede zwischen der experimentellen und der theoretischen Realisierung der Inhomogenitäten und auf Abweichungen bei der geometrischen Analyse der Perkolation hindeuten. Die grundlegenden Eigenschaften des Modells werden jedoch vom Experiment bestätigt. Die Abweichung vom universellen Wert der kritischen Leitfähigkeit kann also darauf zurückgeführt werden, dass in der Mehrheit der Proben eine Korrelation des vom 2DES erfahrenen Unordnungspotentials auf makroskopischer Skala vorliegt.

# 7. Fluktuationen im Plateau-Übergang

In den meisten Experimenten im Quanten-Hall-Effekt und insbesondere seiner Anwendung in der Metrologie werden Geometrien von makroskopischer Dimension (0,1-10 mm) benutzt. Die von Koch *et al.* [9] unternommenen Experimente zur Größenskalierung (vgl. Abschnitt 3.3.2) führen jedoch in ein mesoskopisches Regime, in dem die Phasenkohärenz in der Größenordnung der Probenabmessungen liegt.

Im mesoskopischen Regime werden quantenmechanische Korrekturen  $\delta G$  zum mittleren Leitwert  $\langle G \rangle$  wichtig, die von der individuellen Unordnung der Probe abhängen. Eine Variation der Unordnung, der Fermienergie oder des Magnetfeldes führt zu einer Variation dieser Korrekturen und damit zu einer Fluktuation des gemessenen Leitwerts  $G = \langle G \rangle + \delta G$ . Bei ausreichend kleinen Proben und tiefen Temperaturen beträgt die Amplitude der Fluktuationen  $\delta G_{\text{rms}} \sim e^2/h$ , unabhängig von Geometrie und Art der Probe. Diese Fluktuationen werden universelle Leitwertfluktuationen (*universal conductance fluctuations*, UCF) genannt.

In dieser Arbeit werden die Fluktuationen der Leitfähigkeit im Bereich des QHE untersucht. Diese können naturgemäß nur im Bereich endlicher Leitfähigkeit, also im Übergang zwischen den quantisierten Hall-Plateaus, untersucht werden. Die Größe der verwendeten Proben wird in einem Übergangsbereich gewählt, in dem bei tiefen Temperaturen das Skalierungsverhalten bereits durch die Probengröße bestimmt wird, die Fluktuationen jedoch noch klein sind. Dies mögen auf den ersten Blick widersprüchliche Anforderungen sein, da die Sättigung des Skalierungsverhaltens bei tiefen Temperaturen durch eine Phasenkohärenzlänge  $L_\phi \geq L$  ( $L$  Probenabmessung) identifiziert wird [9, 141]. Eine genauere Analyse zeigt jedoch, dass es noch eine weitere Längenskala  $L_{Th} = \sqrt{\hbar D/k_B T}$  gibt, die eine dominante Rolle spielt.

Der erste Teil dieses Kapitels führt die theoretischen Grundlagen ein, mit denen anschließend im zweiten Teil die experimentellen Ergebnisse analysiert und verglichen werden.

## 7.1. Theorie der Fluktuationen

In diesem Abschnitt wird zunächst die Ursache von Leitwertfluktuationen und die Ableitung ihrer Temperaturabhängigkeit dargestellt. Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Leitwertfluktuationen geben Lee, Stone und Fukuyama [142]. Anschließend werden theoretische Ergebnisse zur Phasenkohärenzlänge im Quanten-Hall-Effekt und deren Interpretation in Bezug auf das Skalierungsverhalten der Leitfähigkeit darge-

stellt.

Die hier benutzte Theorie der Leitwertfluktuationen wurde für diffusiven Transport in Metallen entwickelt. Ein Metall ist hier abweichend von den Überlegungen in Kapitel 3 durch seine Eigenschaften bei endlicher Probengröße definiert. Um Übereinstimmung mit der Literatur zu bewahren, wird hier kein neuer Begriff eingeführt. Eine Probe der Größe  $L$  wird hier als metallisch bezeichnet, wenn der Transportmechanismus diffusiv ( $l \ll L$ ) und bei  $T = 0$  die Leitfähigkeit  $\sigma > e^2/h$  oder äquivalent <sup>1</sup>  $k_F l > 1$  ist.  $l$  ist hierbei die in Abschnitt 2.2 eingeführte elastische freie Weglänge.

Auf den ersten Blick widerspricht der Anwendung dieser Theorie auf das Regime des Quanten-Hall-Effekts, dass im hohen Magnetfeld  $\sigma_{xx} < e^2/h$  gilt. Der physikalische Hintergrund der Forderung an die Leitfähigkeit ist jedoch, dass das Elektronensystem auf der betrachteten Größenskala nicht lokalisiert ist, sondern Transport durch ausgedehnte Zustände stattfindet, so dass die Transporteigenschaften mikroskopisch durch kohärente Addition der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsamplituden verschiedener Wege bestimmt werden. Das Gegenteil hierzu ist der Transport durch *hopping*, bei dem die Elektronen jeweils einzelne Sprünge zwischen wohlbestimmten möglichen Aufenthaltsorten durchführen.

Im Übergang zwischen Quanten-Hall-Plateaus in der Nähe des kritischen Punktes wird die Leitfähigkeit durch ausgedehnte Zustände bestimmt. Die Bedingung an die Leitfähigkeit ist hier also  $\sigma_{xx} \approx \sigma_c$ , wobei  $\sigma_c$  die Leitfähigkeit im kritischen Punkt ist. Am kritischen Punkt im hohen Magnetfeld verhält sich das 2DES auch für  $T = 0$  und  $L \rightarrow \infty$  metallisch. Für endliches  $L$  und  $T > 0$  werden Zustände in einer Umgebung des kritischen Punktes delokalisiert. Die Größe dieses Bereiches wird durch die Halbwertsbreite des Leitfähigkeitsmaximums charakterisiert (vgl. 3.3).

Die Forderung  $l \ll L$  ist ebenfalls erfüllt, da die freie Weglänge zwischen zwei Stößen entsprechend den Überlegungen in Abschnitt 2.2 im Magnetfeld noch reduziert ist.

In einem Bereich um den kritischen Punkt ist damit die Forderung nach metallischem diffusiven Transport erfüllt und damit die Anwendung der Theorie der Leitwertfluktuationen in Metallen sinnvoll. Für  $\sigma_{xx} \ll \sigma_c$ , also in größerem Abstand zum kritischen Punkt, ist diese Theorie jedoch sicher nicht mehr anwendbar.

### 7.1.1. Leitwertfluktuationen im diffusiven metallischen Transport

Im Folgenden wird die Bezeichnung  $\langle G \rangle$  für die Mittelung eine wichtige Rolle spielen. Diese Bezeichnung steht für eine so genannte Ensemble-Mittelung. Für die Untersuchung gilt jedoch ein Analogon zur Ergodenhypothese:

$$\langle G \rangle = \langle G \rangle_E = \langle G \rangle_B \quad (7.1)$$

Hierbei stehen die Indizes  $B$  und  $E$  für die Mittelung über die Energie bzw. das Magnetfeld. Die Begründung für diese Beziehung wird im Verlauf dieses Abschnitts

<sup>1</sup>Diese Äquivalenz ergibt sich bis auf einen numerischen Faktor der Größe eins klassisch bei Verwendung der Einstein-Gleichung  $\sigma = e^2 N D$  mit der Diffusionskonstante  $D = v_F l / 2$  und der Zustandsdichte  $N$  (in 2d und  $B = 0$  gilt  $N = m^* / \pi \hbar^2$ ).

gegeben. Ausführlichere Bemerkungen zur Mittelung sind im Anhang in Abschnitt A.2 zu finden.

Der Leitwert  $G$  einer metallischen Probe beliebiger Dimension  $d$  und Größe  $L$  zeigt bei ausreichend tiefen Temperaturen bei Variation der Fermienergie, des Magnetfeldes oder der Streuzentren eine Variation  $\Delta G = \langle G^2 - \langle G \rangle^2 \rangle \sim e^2/h$  um den Mittelwert  $\langle G \rangle$ . Dies gilt erstaunlicherweise für verschiedene Proben, deren mittlerer Leitwert sich um Größenordnungen unterscheidet. Die theoretische Begründung hierzu konnten Lee und Stone geben [143].

Für diese Arbeit ist jedoch im Wesentlichen der Bereich von Temperaturen  $T > 0$  interessant, in dem die Amplitude der Fluktuationen reduziert wird. Der Mechanismus, der hierfür verantwortlich ist, soll im Folgenden qualitativ für  $d \geq 2$  veranschaulicht werden.

Der Leitwert einer Probe wird durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Transmission eines Elektrons von einem beliebigen Punkt des einen Kontakts zu einem beliebigen Punkt des anderen Kontakts bestimmt. Die Transmissionswahrscheinlichkeit von einem Punkt  $\vec{r}_1$  zu einem Punkt  $\vec{r}_2$  ist durch den Betrag der Green-Funktion  $|G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|$  gegeben. In WKB<sup>2</sup>-Näherung gilt

$$|G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 = \sum_{i,j} a_i a_j e^{i(\phi_i - \phi_j)}. \quad (7.2)$$

Die Koeffizienten  $a_i$  sind die Wahrscheinlichkeitsamplituden dafür, dass das Elektron den Weg  $i$  nimmt. Auf diesem Weg  $i$  durchläuft die Phase des Elektrons eine Änderung

$$\phi_i = (S_i - E t_i)/\hbar. \quad (7.3)$$

Hierbei ist  $S_i$  die klassische Wirkung auf diesem Weg,  $E$  die Energie des Elektrons und  $t_i$  die Laufzeit.

Für Pfade mit einer Länge  $L \gg l$  ist nur eine geringe Abhängigkeit der Amplituden  $a_i$  von der genauen Realisierung der Unordnung zu erwarten. Die Phase  $\phi_i$  hingegen entwickelt sich bereits zwischen zwei elastischen Stößen um  $k_F l > 1$ , so dass sich auf dem gesamten Weg auch geringe Änderungen des Pfades zu einer Phasendifferenz  $\Delta\phi = 2\pi$  summieren können. Änderungen des Unordnungspotentials (bei Beibehaltung von  $l$ , d. h. Realisierung von immer gleich vielen Streuzentren an verschiedenen Positionen) wirken also im Wesentlichen über die Phase. Somit nimmt bei einer großen Anzahl von verschiedenen Realisierungen die Phasendifferenz  $\phi_i - \phi_j$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit alle Werte zwischen 0 und  $2\pi$  an. Bei einer Mittelung über viele Proben löschen sich die außerdiagonalen Terme somit aus, und der Leitwert  $\langle G \rangle$  wird nur durch die Diagonalterme  $a_i^2$  bestimmt. Für die einzelne Probe tragen jedoch einige Terme  $i \neq j$  bei und führen somit zu einem abweichenden Leitwert  $G = \langle G \rangle + \delta G$ . Daraus folgt, dass die Amplitude der Fluktuation  $\Delta G = \sqrt{\langle \delta G^2 \rangle} \sim e^2/h$  von Probe zu Probe durch diese außerdiagonalen Beiträge bestimmt wird.

Nach Rückführung der Fluktuationen auf die Phase ist auch die Äquivalenz der Variation von Unordnung, Fermienergie und magnetischem Feld verständlich: Die Energie

<sup>2</sup>WKB: Wentzel-Kramers-Brillouin Methode, quasi-klassische Näherung, für  $k_F l > 1$  gerechtfertigt

## 7. Fluktuationen im Plateau-Übergang

ist mit Gleichung 7.3 direkt über die Laufzeit mit einer Phasenänderung  $\Delta(\phi_i - \phi_j) = t\Delta E$  verknüpft, und das magnetische Feld  $B$  bewirkt durch den Aharonov-Bohm-Effekt einen zusätzlichen Phasenunterschied

$$\Delta(\phi_i - \phi_j) = 2\pi \frac{BA_{i,j}}{\Phi_0} \quad (7.4)$$

ein, wobei  $A_{i,j}$  die von den Pfaden  $i$  und  $j$  eingeschlossene Fläche und  $\Phi_0 = h/e$  das magnetische Flussquant ist.

Eine Temperatur  $T > 0$  kann nun auf zwei Arten wirken. Zum einen finden Streuprozesse zwischen Elektronen oder von Elektronen mit Phononen statt, die nach einer Zeit  $\tau_\phi \propto T^{-p}$  die Phasenkohärenz zerstören. Der Exponent  $p$  der Streuzeit  $\tau_\phi$  variiert je nach dominierendem Streuprozess zwischen  $p = 1$  und  $p = 4$ . Dies wird im Abschnitt 7.1.2 für das QHE-Regime näher erläutert. Der typische Weg, den ein Elektron diffusiv, also bei vielfacher elastischer Streuung, unter Erhalt der Phase zurücklegt, ist  $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$ , wobei  $D$  die Diffusionskonstante entsprechend der Definition 2.8 im Abschnitt 2.2 ist. Für Abstände  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| > L_\phi$  ist somit keine phasenkohärente Addition der Amplituden für verschiedene Pfade möglich, da das Elektron wahrscheinlich unterwegs sein Phasengedächtnis verloren hat.

Die zweite Wirkung der Temperatur ist die Verbreiterung der Fermifunktion. Damit tragen nicht nur Elektronen bei einer Energie  $E_F$  zum Leitwert bei, sondern solche aus einem Energieintervall  $\Delta E \approx k_B T$  um  $E_F$ . Der Leitwert ergibt sich durch Mittelung über die Elektronen, korrekt gewichtet mit der Ableitung der Fermifunktion. Zwei Elektronen mit einer Energiedifferenz  $\Delta E$  haben nach Gleichung 7.3 nach Durchlaufen des Pfades  $i$  einen Phasenunterschied  $\Delta\phi_i = \Delta E t_i/\hbar$ , so dass sich für den Phasenfaktor in Gleichung 7.2 eine Änderung um  $\Delta(\phi_i - \phi_j) = (t_i - t_j)\Delta E/\hbar$  ergibt. Für die Mehrheit der Kombinationen  $i, j$  ist die Zeitdifferenz  $\delta t = t_i - t_j$  von der gleichen Größe wie die Zeit  $t_i$ , da durch eine große Zahl elastischer Streuprozesse Pfade von deutlich unterschiedlicher Länge zum Ziel führen. Bei der Mittelung über die Elektronen verschiedener Energien treten für  $t_i > \tau_{Th}$  mit  $\tau_{Th} = \hbar/k_B T$  Änderungen der Phasendifferenz um  $\Delta(\phi_i - \phi_j) > 1$  auf, so dass der gemittelte Beitrag dieser Terme zur Fluktuation reduziert wird oder ganz verschwindet. Der zurückgelegte Weg in der Zeit  $\tau_{Th}$  ergibt sich im diffusiven Transport zu  $L_{Th} = \sqrt{D\tau_{Th}}$ . Diese Länge hat somit für die Unterdrückung der Fluktuationen dieselbe Wirkung wie  $L_\phi$ .

Die Amplitude  $\Delta G \sim e^2/h$  gilt also nur für Proben mit Größe  $L < L_{\min}$ , wobei

$$L_{\min} = \min(L_{Th}, L_\phi), \quad L_{Th} = \sqrt{\frac{D\hbar}{k_B T}}, \quad L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}, \quad (7.5)$$

die dominierende der beiden durch die Temperatur eingeführten Längen ist. Für  $L > L_{\min}$  ergibt sich durch die Mittelung über mehrere  $L_{\min}^d$  große Teilstücke mit jeweils  $\delta G_{\text{rms}} \sim e^2/h$  eine reduzierte Amplitude der Fluktuation [142]:

$$\delta G_{\text{rms}} \sim \frac{e^2}{h} \left( \frac{L_{\min}}{L} \right)^{(4-d)/2}, \quad (L_{\min} < L) \quad (7.6)$$

Für den in dieser Arbeit relevanten Fall  $d = 2$  ist eine Temperaturabhängigkeit

$$\begin{aligned}\delta G_{\text{rms}} &\propto 1/\sqrt{T} \quad (L_{Th} \ll L_\phi), \\ \delta G_{\text{rms}} &\propto T^{-p/2} \quad (L_{Th} \gg L_\phi),\end{aligned}\quad (7.7)$$

zu erwarten. Hierbei ist  $p$  wieder der Temperaturexponent der Phasenkohärenzzeit  $\tau_\phi \propto T^{-p}$ .

Da in dieser Arbeit als Parameter das magnetische Feld variiert wird, ist für diesen Fall noch eine temperaturabhängige Größe wichtig: Nach obigen Überlegungen ist der größte für die Fluktuationen relevante Abstand  $L_{\text{min}}$  und damit die größte relevante eingeschlossene Fläche  $A_{i,j} \approx L_{\text{min}}^2$ . Eine Magnetfeldänderung  $\Delta B$  verursacht somit maximal eine Änderung der Phasendifferenz zweier relevanter Wege um  $\Delta(\phi_i - \phi_j) \approx 2\pi\Delta B L_{\text{min}}^2/\Phi_0$ . Es existiert somit ein Korrelationsfeld

$$B_{\text{korrr}} \sim \frac{\Phi_0}{L_{\text{min}}^2} \quad (7.8)$$

mit folgender Bedeutung: Für eine Änderung  $\Delta B \ll B_{\text{korrr}}$  sind die durchschnittlichen Phasenänderungen klein gegenüber  $2\pi$ , die Korrektur  $\delta G(B)$  zum mittleren Leitwert  $\langle G \rangle$  ändert sich somit nur wenig ( $\delta G(B + \Delta B) \approx \delta G$ ). Für  $B \gg B_{\text{korrr}}$  hingegen ändern sich die meisten relevanten Phasendifferenzen um Werte im gesamten Bereich zwischen 0 und  $2\pi$ , so dass die Korrelation  $\langle \delta G(B)\delta G(B + \Delta B) \rangle = 0$  ist.

Eine quantitative Beschreibung der Korrelation geschieht durch die Korrelationsfunktion

$$\tilde{F}(\Delta B) = \langle \delta G(B)\delta G(B + \Delta B) \rangle_B, \quad \tilde{F}(0) = \delta G_{\text{rms}}^2 \quad (7.9)$$

Die beiden Grenzfälle von  $\tilde{F}$  sind  $\tilde{F}(\Delta B) = \delta G_{\text{rms}}^2$  für  $\Delta B \ll B_{\text{korrr}}$  und  $\tilde{F}(\Delta B) \sim (B_{\text{korrr}}/\Delta B)^2$  für  $\Delta B \gg B_{\text{korrr}}$  [142]. Das Korrelationsfeld kann nun exakt durch die Halbwertsbreite definiert werden:

$$\tilde{F}(B_{\text{korrr}}) = \frac{\tilde{F}(0)}{2}. \quad (7.10)$$

Ein Ansatz für die Korrelationsfunktion, der die Grenzfälle erfüllt und eine Leitwertfluktuation entsprechend 7.6 ergibt, ist:

$$\tilde{F}(\Delta B) = \frac{\tilde{F}_0}{B_{\text{korrr}}} \frac{1}{1 + (\Delta B/B_{\text{korrr}})^2}, \quad \tilde{F}_0 \sim \frac{e^3}{L^2 h}. \quad (7.11)$$

Für die Analyse des Experiments ist es häufig einfacher, die sog. Spektraldichte  $\mathcal{P}(f_B)$  der Fluktuationen zu betrachten. Es gilt [144]

$$\mathcal{P}(f_B) = \mathcal{F}\left(\tilde{F}(\Delta B)\right) \Rightarrow \delta G_{\text{rms}}^2 = 2 \int_0^\infty \mathcal{P}(f_B) df_B. \quad (7.12)$$

Hierbei steht  $\mathcal{F}$  für die Fouriertransformation. Diese ist mit einem Exponentialfaktor  $\exp(i2\pi f_B B)$  definiert, die magnetische Frequenz  $f_B$  ist also analog zur Frequenz  $f$  und nicht entsprechend der Kreisfrequenz  $\omega$  definiert.

## 7. Fluktuationen im Plateau-Übergang

Für den Ansatz der Korrelationsfunktion entsprechend Gleichung 7.11 folgt

$$\mathcal{P}(f_B) = \mathcal{P}_0 e^{-\beta f_B}, \quad \mathcal{P}_0 = \pi \tilde{F}_0, \quad \beta = 2\pi B_{\text{korrr}}. \quad (7.13)$$

Bei der Übertragung der vorgestellten Konzepte auf den Bereich hoher Magnetfelder muss beachtet werden, dass neben dem Längswiderstand  $R_{xx}$ , der im niedrigen Magnetfeld mit  $R_{xx} = 1/G$  identifiziert wird, als zusätzliche Komponente der Hall-Widerstand  $\rho_{xy}$  auftritt, für den insbesondere bei niedrigen Füllfaktoren  $\rho_{xy} > \rho_{xx}$  gilt. Hierdurch wird die Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  mit wachsendem Magnetfeld zunächst stark reduziert und zeigt im hohen Magnetfeld oszillierendes Verhalten. Im Bereich der maximalen Leitfähigkeit im Übergang zwischen Quanten-Hall-Plateaus zeigt sie jedoch metallisches Verhalten, so dass sich hier die obigen Überlegungen zu Leitwertfluktuationen anwenden lassen. Der mögliche Einfluss des großen Hall-Widerstandes wurde von Khmel'nitskii und Yosefin untersucht [145]. Sie untersuchten eine schmale, lange Probe ( $w \ll L$ ) und fanden zwar für  $L_{Th} > w$  eine veränderte Korrelationsfunktion, für den hier relevanten Fall  $L_{Th} < w$  hingegen bleibt das normale 2d-Verhalten erhalten.

### 7.1.2. Phasenkohärenz im QHE

Die Phasenkohärenz wird bei tiefen Temperaturen durch zwei mögliche Prozesse dominiert: Zum einen streuen Elektronen unter Absorption oder Emission von Phononen am Gitter. Zum anderen verursacht die Coulombwechselwirkung auch Streuung von Elektronen an Elektronen.

Für kleine Magnetfelder um  $B = 0$  ermöglicht es die theoretisch gut verstandene Korrektur zur Leitfähigkeit durch schwache Lokalisierung (vgl. Abschnitt 3.1.1), die Phasenkohärenzlänge  $L_\phi$  in Abhängigkeit von der Temperatur zu messen. Da bei der schwachen Lokalisierung nur gegenläufige, jedoch ansonsten gleiche Pfade  $i$  und  $j$  berücksichtigt werden, spielt die Länge  $L_{Th}$  durch Verbreiterung der Fermiverteilung keine Rolle. Wenn sichergestellt ist, dass keine anormale Diffusion vorliegt [146], kann die Diffusionskonstante  $D$  aus der Messung von  $\rho_{xx}$  (abzüglich der Korrektur der schwachen Lokalisierung) und  $\rho_{xy}$  bestimmt werden, und die Phasenkohärenzzeit  $\tau_\phi = L_\phi^2/D$  kann mit guter Qualität aus der gemessenen Phasenkohärenzlänge berechnet werden. In zwei Dimensionen ergibt sich für tiefste Temperaturen eine theoretische Vorhersage der Phasenkohärenzzeit  $\tau_\phi \propto 1/T$  durch Elektron-Elektron-Streuprozesse [147, 148], die in zahlreichen Experimenten bestätigt wurde (z. B. für 2DES in AlGaAs/GaAs-Heterostrukturen im Temperaturbereich  $0,05 \text{ K} < T < 2 \text{ K}$  [149]). Zu höheren Temperaturen dominieren Elektron-Phonon-Streuungen mit  $\tau_\phi \propto T^{-p}$ , wobei  $p \geq 2$  von der Dimension und dem Temperaturbereich abhängt. Aktueller Gegenstand der Erforschung im Bereich  $B \approx 0$  ist die mögliche Beobachtung [150] der Sättigung der Phasenkohärenzzeit im Grenzwert  $T \rightarrow 0$ .

Für hohe Magnetfelder im Bereich des quantisierten Hall-Effekts ist zunächst unklar, in wie weit das 2DES den gleichen Prozessen zur Zerstörung der Phasenkohärenz wie bei  $B = 0$  unterworfen ist. Bei der Bestimmung der Streuraten muss berücksichtigt werden, dass die Diffusion im QHE für große Wellenvektoren  $q$  keine Konstante

mehr ist, sondern eine Funktion von  $(q^2/\omega)^{\eta/2}$  mit  $\eta \approx 0,4$  (Chalker und Daniell [75]). Die Temperaturabhängigkeit der Elektron-Elektron-Streureate bleibt erstaunlicherweise hiervon unberührt und wurde von Siak [151] zu  $\tau_{e-e} \propto 1/T$  bestimmt. Der Vorfaktor in dieser Beziehung ist eine Funktion von  $\eta$  und der Diffusionskonstante  $D = D_0$  für kleines  $q^2/\omega$ . Brandes *et al.* [83] bestätigten dieses Ergebnis und bestimmten

$$\tau_{e-e}^{-1} = \frac{k_B T}{\hbar} \gamma, \quad \gamma = -2\Theta_0 \ln \left( \tanh \frac{\gamma}{2} \right). \quad (7.14)$$

Die Größe  $\Theta_0$  ist eine nicht analytische Funktion der dimensionslosen Leitfähigkeit  $g = \sigma h/e^2$  mit den Grenzwerten  $\Theta_0 = 1/(2g)$  für  $g \rightarrow \infty$  und  $\Theta_0 = \gamma_\eta g^{-1/(1+\eta/2)}$  für  $g \rightarrow 0$ . Eine numerische Berechnung ergibt  $\gamma = 0,92$  für  $g = 1$  [84]. Somit gilt am kritischen Punkt mit einer Leitfähigkeit  $\sigma_{xx} \sim 0,5 e^2/h$  in guter Näherung  $\gamma \sim 1$ .

Für die Elektron-Phonon-Streureate bestimmten Brandes *et al.* für AlGaAs/GaAs-Quantentöpfe bei tiefen Temperaturen eine Dominanz der piezoelektrischen Kopplung an akustische Phononen mit

$$\tau_{e-p} \propto T^{-2}, \quad k_B T < \hbar \omega_0 = \hbar c_s^2 / D_0 \approx k_B \frac{10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}}{D_0} \cdot 0,2 \text{ K}. \quad (7.15)$$

Hierbei ist  $c_s$  die Schallgeschwindigkeit. Zu höheren Temperaturen koppeln die Phononen auch an größere Wellenvektoren, so dass die Modifikation der Diffusion berücksichtigt werden muss. Dies führt zu einer Änderung der Temperaturabhängigkeit  $\tau_{e-p} \propto T^{-p}$  zu  $p = 2 + \eta/2$ . Für  $\eta \approx 0,4$  ist dies jedoch nur ein Effekt von 10 %, der im Experiment schwierig zweifelsfrei zu beobachten ist.

Die Frage ist also, ob Elektron-Elektron-Streuung oder Elektron-Phonon-Streuung dominiert. Wie im Kapitel 3 ausführlich dargestellt, führt eine Interpretation der Skalierung mit der Temperatur zu dem Schluss  $p = 2$  für Temperaturen bis hinunter zu  $T = 0,05$  K. Interpretiert man außerdem die Sättigung der Temperaturskalierung bei kleinen Proben und tiefen Temperaturen durch die Phasenkohärenzlänge ([9], Abschnitt 3.3.2), so ergibt sich für  $T \approx 0,1$  K  $L_\phi > 1 \mu\text{m}$ . Eine Abschätzung der Diffusionskonstante  $D_0$  mittels der Einstein-Beziehung Gleichung 2.7 und einer gaußförmig verbreiterten Zustandsdichte der Landau-Niveaus mit energetischer Breite  $\Gamma$  entsprechend Gleichung 2.29 ergibt

$$D_0 \approx g \frac{\sqrt{2\pi} \Gamma}{eB} \ll 0,01 \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (7.16)$$

und damit  $L_{e-e} = \sqrt{\tau_{e-e} D} < 1 \mu\text{m}$  für  $T = 0,1$  K. Entweder muss also angenommen werden, dass die Elektron-Elektron-Streuprozesse meistens unter Erhalt der Phase stattfinden, so dass Elektron-Phonon-Prozesse die Zerstörung der Phasenkohärenz bestimmen, oder das Skalierungsverhalten wird auch nahe am kritischen Punkt durch einen anderen Prozess bestimmt, für den Polyakov *et al.* [119] Transport durch *variable-range hopping* vorgeschlagen haben.

Nach Brandes [84] lassen sich die Zahlenwerte der Streuraten bei halber Füllung im untersten Landau-Niveau abschätzen:

$$\tau_{e-e}^{-1} \approx 1,3 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1} \cdot \frac{T}{1 \text{ K}},$$

$$\tau_{e-p}^{-1} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1} \cdot \left( \frac{T}{1 \text{ K}} \right)^2. \quad (7.17)$$

Bei Interpretation der Sättigung des Skalierungsverhaltens durch Elektron-Phonon-Streuung ergibt sich mit einer Streulänge  $L_{e-p}$  von einigen  $\mu\text{m}$  eine Abschätzung der Diffusionskonstante  $D_0 \sim 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ . Nach Gleichung 7.16 folgt mit  $B \sim 5 - 10 \text{ T}$  für eine Halbwertsbreite  $\Gamma$  von einigen meV. Der Vergleich mit Abschnitt 2.3.5 zeigt, dass dies eine sinnvolle Abschätzung für die von Koch *et al.* [8] verwendeten niederbeweglichen Proben mit  $\mu \lesssim 10 \text{ m}^2/\text{Vs}$  ist.

## 7.2. Fluktuationen im QHE

Zur Untersuchung des Skalierungsverhaltens im QHE wurden im Wesentlichen Proben verwendet, deren Abmessungen  $L$  makroskopisch und damit um Größenordnungen größer als die Phasenkohärenzlänge sind. Leitwertkorrekturen durch Phasenkohärenz sind in diesen Proben vernachlässigbar klein. Die direkte Untersuchung der Größenskalierung durch Koch *et al.* [9] basierte jedoch darauf, die Proben so klein zu machen, dass die Länge  $L_T \propto T^{-z_T}$ , die das Skalierungsverhalten mit der Temperatur beschreibt, von gleicher Größe wie die Probe ist. Diese Proben weisen Fluktuationen auf, die jedoch noch nicht so gross sind, dass sie die Bestimmung der Halbwertsbreite verhindern. Dieses Regime der Fluktuationen soll im Folgenden untersucht werden.

Die Fluktuationen des Leitwerts im Quanten-Hall-Effekt sind für Proben mit einer kleinsten Abmessung  $w \sim 1 \mu\text{m}$  bereits in einer ganzen Reihe von Arbeiten untersucht worden (in Auswahl: [152]–[158] und Referenzen darin). Ein Teil der Beobachtungen wurde durch das Tunneln zwischen den in diesen Proben sehr eng benachbarten Randkanälen mittels einer Inhomogenität interpretiert [153, 155, 156]. Deutliches Kennzeichen hierfür ist eine Quasiperiode in der Fluktuation. Diese Effekte treten insbesondere in den „Füßen“ der SdH-Maxima auf. In [154] wurde das Korrelationsfeld über den gesamten Magnetfeldbereich  $B = 0 - 12 \text{ T}$  untersucht. Es zeigte einen deutlichen Anstieg, der auf eine reduzierte Diffusionskonstante zurückgeführt wurde. Cobden *et al.* [157] untersuchten den Zwei-Punkt-Widerstand sehr kleiner Si-MOSFET-Proben mit  $0,6 \mu\text{m}$  Kantenlänge. Sie beobachteten im Übergang zwischen den Quanten-Hall-Plateaus  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  einen Widerstand, der zwischen diesen Grenzwerten fluktuierte. Messungen in Abhängigkeit von der Ladungsträgerkonzentration für diese Probe [158] weisen auf eine dominante Rolle von Ladungseffekten in derart kleinen Proben hin. Andere Gruppen haben in noch kleineren Si-MOSFETs Einzelelektroneneffekte beobachtet.

Jedoch wurde bisher nach meinem besten Wissen noch in keiner Arbeit das Regime metallischer Leitwertfluktuationen im Plateau-Übergang des QHE in Proben „mittlerer“ Größe  $L \sim 10 \mu\text{m}$  im Detail untersucht und mit dem Skalierungsverhalten der Leitfähigkeit verglichen.

### 7.2.1. Vergleich der Temperaturabhängigkeit von Breite und Fluktuationsamplitude

Zur Untersuchung von Leitwertfluktuationen durch Phasenkohärenzeffekte im diffusiven Regime ist es nötig, ausreichend große Proben zu wählen. Hier werden sowohl Hall-Geometrien mit einer Breite von  $w \approx 10 \mu\text{m}$  bei einem Abstand  $l \approx 24 \mu\text{m}$  der Spannungsmesskontakte als auch Corbino-Geometrien mit einer Ringbreite von  $w = 6 \mu\text{m}$  und einem Radius von  $r = 60 \mu\text{m}$  verwendet. Bei dieser Probengröße sind die Fluktuationen bereits klein im Vergleich zum SdH-Maximum. Sie zeigen keines der oben angeführten Merkmale für Tunneln durch einzelne Inhomogenitäten. Für kleine Fluktuationen gilt in guter Näherung  $\delta(R_{xx})_{\text{rms}} \propto \delta(\sigma_{xx})_{\text{rms}}$ , so dass eine Analyse der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes in Hall-Geometrie und des Leitwerts in Corbino-Geometrie äquivalent sind. Erst bei einer quantitativen Analyse der Amplitude der Widerstandsfluktuationen muss der Einfluss des Hall-Widerstandes  $\rho_{xy}$  im Detail untersucht werden.

Der Strom bei Experimenten in Hall-Geometrie betrug  $I = 1 \text{ nA}$ . Der Leitwert in Corbino-Geometrie wurde mit einer Spannung von  $5 \mu\text{V}$  gemessen. In allen Fällen wurde der Übergang zwischen den Plateaus  $\nu = 1$  und  $\nu = 2$  untersucht, da er die größte Breite  $\Delta B$  auf der Magnetfeldachse zeigt. Nur für diesen Übergang ist  $\Delta B$  überhaupt groß genug, um die Fluktuationen zu analysieren. Ein Beispiel einer solchen Messung für die Probe P6125 ist in Abbildung 7.1 gezeigt. Im linken Bild ist der Widerstand der Probe beim Übergang zwischen den Quanten-Hall-Plateaus  $\nu = 1$  und  $\nu = 2$  für verschiedene Temperaturen gezeigt. Das rechte Teilbild enthält eine Ausschnittsvergrößerung der Spitze des Widerstandsmaximums. In diesem Bereich liegt metallischer Transport durch ausgedehnte Zustände vor. Deutlich sind die Widerstandsfluktuationen zu erkennen.

Es fällt auf, dass sich die Breite des Maximums in  $R_{xx}$  für Temperaturen unterhalb von  $T = 120 \text{ mK}$  nur noch geringfügig ändert. Die Fluktuationen hingegen zeigen zwischen  $120 \text{ mK}$  und  $30 \text{ mK}$  noch eine deutliche Änderung. Um diese qualitative Aussage zu verbessern, werden im Folgenden die Halbwertsbreite und die Amplitude der Fluktuationen analysiert.

Bei dieser Analyse besteht die Schwierigkeit, die Fluktuationen von der Form des SdH-Maximums zu trennen. Hierbei ist von Nutzen, dass die Form des Maximums eine deutlich langsamere Abhängigkeit vom Magnetfeld als die Fluktuationen zeigt. Deshalb wurde zunächst die Form des SdH-Maximums durch einen geeigneten Glättungsalgorithmus bestimmt, indem für jeden Magnetfeldpunkt  $B$  an die Daten in einer Umgebung  $[B - \Delta B_1, B + \Delta B_1]$  ein Polynom zweiten Grades angepasst und aus diesem wiederum für das Magnetfeld  $B$  ein Wert  $\bar{R}$  bzw.  $\bar{G}$  der geglätteten Kurve bestimmt wurde. Das Polynom zweiten Grades erhält im Gegensatz zu einfachen Mittelungstechniken die Krümmungen in erster Ordnung.

Ein Test mit Messungen in großen Geometrien, die keine Fluktuationen aufweisen, zeigt, dass für  $\Delta B_1 \leq 0,2 \cdot \Delta B_{\text{FWHM}}$ , wobei  $\Delta B_{\text{FWHM}}$  die Halbwertsbreite ist, die Form mit sehr guter Qualität reproduziert wird. Mit Hilfe der so gewonnenen Form  $\bar{R}(B)$  bzw.  $\bar{G}(B)$  kann zunächst die Halbwertsbreite bestimmt werden.

## 7. Fluktuationen im Plateau-Übergang

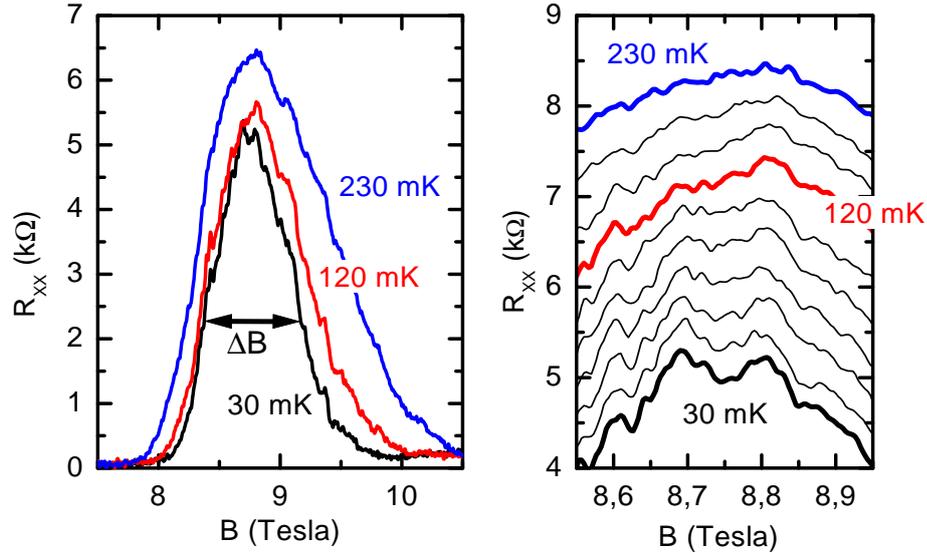


Abbildung 7.1.: Maximum des Längswiderstandes der Probe P6125 in Hall-Geometrie mit Breite  $w = 10 \mu\text{m}$  im Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$ . Rechts: Ausschnittsvergrößerung zeigt die Abnahme der Amplitude der Fluktuationen (Kurven sind gegeneinander versetzt).

Für die weitere Interpretation der Fluktuationen ist jedoch zu beachten, dass es Beiträge der Fluktuationen auf jeder Magnetfeldskala gibt. Die Fluktuationen auf großer Magnetfeldskala mit Korrelationsfeldern  $\Delta B \gtrsim \Delta B_1$  werden bei der verwendeten Auswertungsmethode auch noch der geglätteten Kurve  $\bar{R}(B)$  bzw.  $\bar{G}(B)$  aufgeprägt. Die im nächsten Schritt bestimmten Fluktuationen im Widerstand  $\delta R = R(B) - \bar{R}(B)$  bzw. Leitwert  $\delta G = G(B) - \bar{G}(B)$  enthalten somit nur noch die Fluktuationen mit Korrelationen  $\Delta B \lesssim \Delta B_1$ . Die Folge hiervon wird bei der Analyse der Fluktuationsamplitude dargestellt. Soweit nicht anders erwähnt, wurde  $\Delta B_1 = 0,15 \text{ T}$  benutzt.

Die Auswertung der Halbwertsbreite und der Fluktuationsamplitude ist in Abbildung 7.2 gezeigt. Das obere Bild enthält die Halbwertsbreite des Widerstandsmaximums in  $R_{xx}$  in Abhängigkeit von der Temperatur, und im unteren Bild sind die nach dem beschriebenen Verfahren gewonnenen Fluktuationen dargestellt. Die Achsen sind alle logarithmisch gewählt, so dass ein Potenzgesetz in Abhängigkeit von der Temperatur in dieser Auftragung einer Geraden entspricht.

Die Probe P6125, deren Messkurven in Abbildung 7.1 dargestellt sind, zeigt bei hohen Temperaturen das erwartete Skalierungsverhalten der Halbwertsbreite  $\Delta B \propto T^\kappa$  der Halbwertsbreite und sättigt bei etwa  $T_S = 80 \text{ mK}$ . Die Fluktuationen hingegen zeigen noch eine Temperaturabhängigkeit bis etwa 30-40 mK. Die elektronische Temperatur des Systems koppelt also noch bis zu diesen Temperaturen an.

Die Analyse der Probe P41012 zeigt das gleiche Verhalten mit einer Sättigungstemperatur der Halbwertsbreite von  $T_s \approx 60 \text{ mK}$ . Auch hier wachsen die Fluktuationen noch bis zu 30 mK an und weisen so eine entsprechend niedrige Temperatur des 2DES

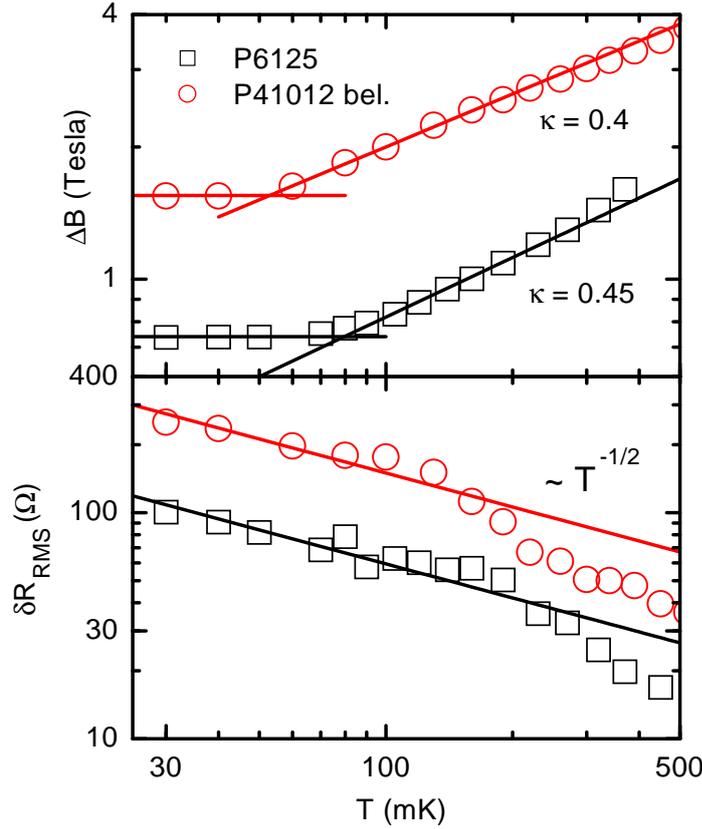


Abbildung 7.2.: Auswertung der Halbwertsbreite und der Fluktuationsamplitude für Messungen in Hall-Geometrie.

nach.

Es ist also der Nachweis gelungen, dass die Sättigung der Halbwertsbreite nicht durch eine Sättigung der Elektronentemperatur  $T_e$  hervorgerufen wird, sondern es handelt sich gerade um den in Abschnitt 3.2.4 und 3.3.2 dargestellte Effekt der endlichen Probengröße, den Koch *et al.* zur Bestimmung des kritischen Exponenten benutzten.

Das Sarma [141] wandte gegen die Ergebnisse von Koch *et al.* [9] ein, dass bei der Sättigung der Breite des Plateau-Übergangs auch gleichzeitig Fluktuationen im Leitwert von der Größenordnung  $e^2/h$  auftreten sollten und so das Maximum in  $\sigma_{xx}$  bzw.  $\rho_{xx}$  in starke Fluktuationen zerfallen würde. Dieser Einwand beruhte auf der Annahme, dass beide Prozesse von der gleichen Länge, der Phasenkohärenzlänge, bestimmt werden. Somit interpretierte er die Sättigung der Halbwertsbreite als experimentelles Artefakt, verursacht z. B. durch Heizeffekte. Die experimentelle Beobachtung von kleinen Fluktuationen mit einer fortgesetzten Temperaturabhängigkeit unterhalb der Sättigungstemperatur der Halbwertsbreite widerlegt diesen Einwand eindeutig. Das Sarma hat nicht berücksichtigt, dass, wie im Folgenden noch detailliert diskutiert wird und auch theoretisch im Abschnitt 7.1.1 schon dargelegt wurde, neben der Phasenkohärenzlänge auch die Länge  $L_{Th}$  für die Fluktuationen relevant ist.

Als weiterer Test wurden Messungen in Corbino-Geometrie durchgeführt, um einen

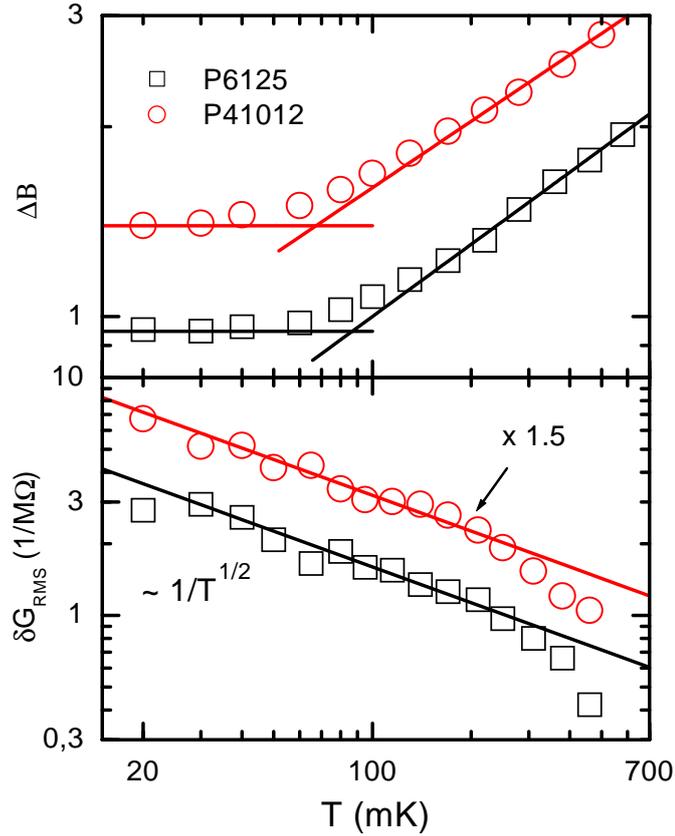


Abbildung 7.3.: Auswertung der Halbwertsbreite und der Fluktuationsamplitude für Messungen in Corbino-Geometrie.

Einfluss der gewählten Geometrie auszuschließen. Das Ergebnis ist in Abbildung 7.3 gezeigt. Die Halbwertsbreite zeigt auch hier bei hohen Temperaturen Skalierungsverhalten und sättigt bei vergleichbaren Temperaturen wie in Hall-Geometrie. Dies entspricht der Erwartung für die Sättigung durch endliche Probenbreite, da die Breiten der Hall-Geometrie und der Corbino-Geometrie vergleichbar sind. Die Fluktuationen weisen auch hier wieder eine Ankopplung der Temperatur des Elektronensystems an den Kryostaten bis etwa 30 mK nach.

### 7.2.2. Amplitude der Leitwertfluktuationen

Die Fluktuationen zeigen bei tiefen Temperaturen eine Abhängigkeit  $\delta R_{\text{rms}} \propto 1/\sqrt{T}$  bzw.  $\delta G_{\text{rms}} \propto 1/\sqrt{T}$ . Dies entspricht der Erwartung, dass die Fluktuationsamplitude entsprechend Gleichung 7.6 durch eine Länge  $L_{\text{min}} \approx L_{Th} = \sqrt{\hbar D/k_B T}$  bestimmt wird, da die Elektron-Phonon-Streuung nach Gleichung 7.17 bei diesen Temperaturen zu einer Länge  $L_{e-p} \gg L_{Th}$  führt. Entsprechend Abschnitt 7.1.1 gilt

$$\delta G_{\text{rms}} \sim \frac{L_{\text{min}}}{L} \frac{e^2}{h} \propto \sqrt{T}, \quad L_{\text{min}} \approx L_{Th} \approx L_{e-e} \ll L_{e-p}, L. \quad (7.18)$$

Die Fluktuationen sind auch bei 30 mK noch klein im Vergleich zu  $e^2/h$ . Also gilt  $L_{\min} \approx L_{e-e} \ll L$ . Damit kann die Elektron-Elektron-Streuung bei der Sättigung der Halbwertsbreite keine Rolle spielen, da sie hierfür von gleicher Größe  $L$  wie die Probe sein müsste. Dies ist zusätzlich zu den Überlegungen in Abschnitt 7.1.2 ein direkter Nachweis, dass entweder Elektron-Elektron-Streuung die Phase nicht zerstört oder die Sättigung der Halbwertsbreite durch einen anderen Prozess als den einfachen Vergleich der Phasenkohärenzlänge  $L_\phi$  mit der Probengröße  $L$  bestimmt wird. Zwischen diesen beiden Alternativen kann jedoch nicht entschieden werden.

Bei Temperaturen oberhalb etwa 100-200 mK zeigt sich eine Änderung des Temperaturverhaltens der Fluktuationen zu einem stärkeren Abfall mit der Temperatur. Dies ist nicht der Übergang zum Phonon-dominierten Streuregime. Hierfür gibt es ein theoretisches und ein experimentelles Argument: Mit den theoretisch bestimmten Raten in Gleichung 7.17 ist der Übergang erst bei höherer Temperatur  $T \gtrsim 1$  K zu erwarten. Das experimentelle Argument basiert auf der Analyse des Einflusses der hier verwendeten Auswertungsmethode:

Die zur Bestimmung des Leitwerts  $\langle G(B) \rangle$  benutzte Mittelung mit einem Polynom zweiten Grades über ein Intervall  $[B - \Delta B_1, B + \Delta B_1]$  schneidet alle Fluktuationen auf Skalen, die größer als  $\Delta B_1$  sind, ab. Diese Skala muss mit dem von der Temperatur abhängigen Korrelationsfeld  $B_{\text{kor}}(T)$  verglichen werden.

Die Bedeutung des Korrelationsfeldes ist, zunächst bei Vernachlässigung des Effekts der Mittelung mit  $\Delta B_1$ , dass auf Magnetfeldskalen kleiner als  $B_{\text{kor}}(T)$  die für  $T = 0$  auftretenden Fluktuationen unterdrückt werden. Die Fluktuationsamplitude wird also nur durch die verbleibenden Beiträge auf Skalen  $\Delta B \gtrsim B_{\text{kor}}$  bestimmt. Zusammen mit der Abhängigkeit  $B_{\text{kor}} \propto 1/L_{\min}^2$  führt dies zu einer Fluktuationsamplitude  $\delta G_{\text{rms}} \propto 1/\sqrt{B_{\text{kor}}} \propto 1/L_{\min}$  entsprechend Gleichung 7.18.

Solange  $B_{\text{kor}} \ll \Delta B_1$  gilt, ändert auch die Mittelung nichts an dieser Beziehung, da die Fluktuationen auf der jeweils kleinsten nicht unterdrückten Magnetfeldskala, also  $B_{\text{kor}}$ , die Amplitude dominieren. Mit zunehmender Temperatur wächst jedoch  $B_{\text{kor}}(T)$  an und erreicht die Größenordnung von  $\Delta B_1$ . Die durch die Mittelungsprozedur unterdrückten Fluktuationen wären nun entscheidend für die Gültigkeit von Gleichung 7.18. Ihr Fehlen führt zu einer Reduktion der Fluktuationsamplitude gegenüber der Abhängigkeit  $\delta G_{\text{rms}} \propto 1/\sqrt{T}$ . Das Abknicken der Fluktuationsamplitude bei hohen Temperaturen kann also durch das Erreichen von  $B_{\text{kor}} \gtrsim \Delta B_1$  verstanden werden.

Die quantitative Analyse dieser Argumente ist im Anhang in Abschnitt A.3 dargestellt. Sie zeigt, dass der Übergang von  $\delta G_{\text{rms}} \propto 1/\sqrt{T}$  zu einer stärkeren Temperaturabhängigkeit für

$$\Delta B_{\text{kor}}(T) \approx 0,5 \Delta B_1 \Rightarrow k_B T \sim 2\hbar D \frac{\Delta B_1}{\Phi_0} \quad (7.19)$$

stattfindet. Dies weicht nur einen Faktor zwei von der obigen qualitativen Diskussion ab.

Die Temperaturabhängigkeit der Fluktuationen kann also durch nur eine Länge

$$L_{\min} \approx L_{Th} \propto \sqrt{T} \quad (7.20)$$

## 7. Fluktuationen im Plateau-Übergang

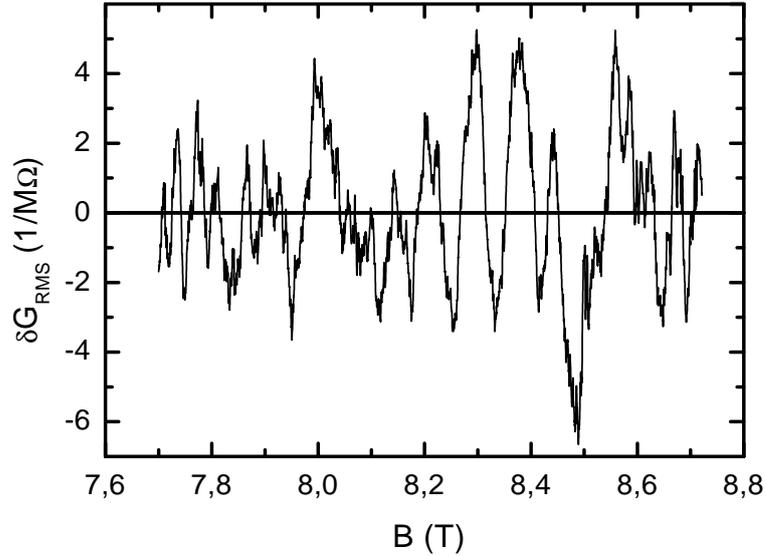


Abbildung 7.4.: Fluktuation  $\delta G(B) = G(B) - \bar{G}(B)$  der Probe P6125 in Corbino-Geometrie bei  $T = 100$  mK. Ermittlung von  $\bar{G}$  mit  $\Delta B_1 = 0,15$  T. Die Amplitude ist  $\delta G_{\text{rms}} = 2,2 \cdot 10^{-6} 1/\Omega \approx 0,06 e^2/h$ .

verstanden werden, die das Verhalten im gesamten beobachteten Temperaturbereich  $30 \text{ mK} < T < 500 \text{ mK}$  bestimmt. Die Bestimmung der absoluten Größe dieser Länge und damit auch der Vergleich der beobachteten Fluktuationsamplitude mit der für universelle Leitwertfluktuationen im Fall  $L_{\text{min}} < L$  erwarteten Amplitude wird am Ende des folgenden Abschnittes durchgeführt, in dem mit der Bestimmung des Korrelationsfeldes ein absolutes Maß für  $L_{\text{min}}$  gefunden wird.

### 7.2.3. Analyse der Spektraldichte

Bisher wurde nur die Amplitude der Fluktuationen analysiert. Deren Temperaturverhalten kann gut durch die Theorie der Leitwertfluktuationen in Metallen verstanden werden. Diese Theorie macht jedoch weitere Aussagen, die in diesem Abschnitt anhand der Untersuchung der Spektraldichte der Fluktuationen geprüft werden sollen. Dies ist ein guter Test, um die Übertragung der Theorie der Leitwertfluktuationen in Metallen auf den Plateau-Übergang im QHE zu rechtfertigen.

Für die detaillierte Analyse der Fluktuationen wurden einige Messungen mit erhöhter Auflösung durchgeführt. So wurde eine Messung an Probe P6125 in Corbino-Geometrie für  $T = 100$  mK durchgeführt, bei der zum einen die Spannung so weit erhöht wurde (auf  $U = 30 \mu\text{V}$ ), wie es ohne Beobachtung von Heizeffekten zulässig war. Zum anderen wurde die Messung mit einer hohen Zeitkonstante und entsprechend langsamer Magnetfeldrate von  $0,2$  T je Stunde durchgeführt. Die Messung ist in Abbildung 7.4 dargestellt.

Bei der Auswertung der Spektraldichte (PSD, *power spectral density*) der Fluktuationen  $\delta G_{\Delta B_1}(B) = G(B) - \bar{G}(B)$  muss wiederum die Auswirkung der Mittelung

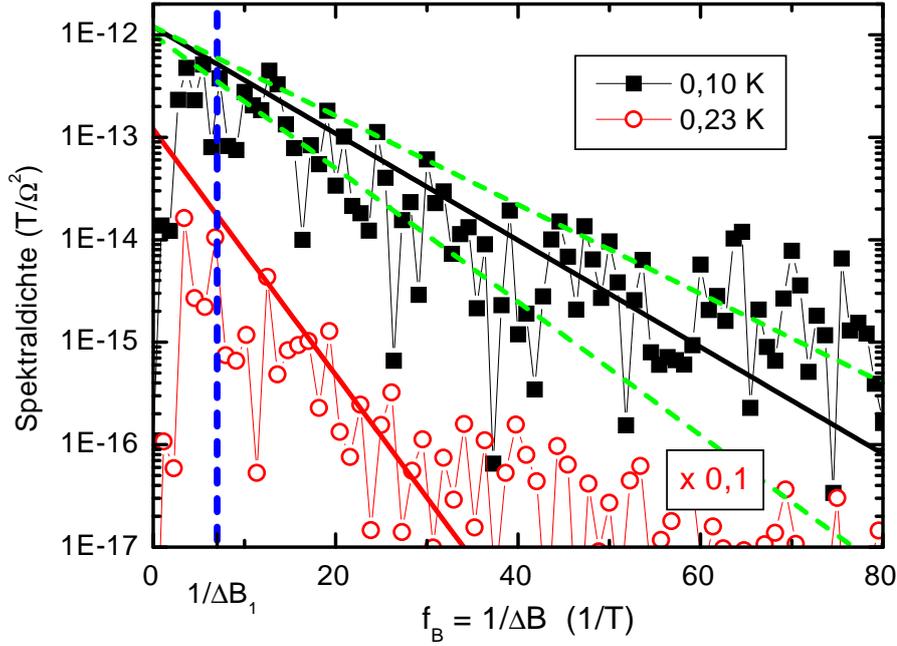


Abbildung 7.5.: Spektraldichte der Fluktuationen der Probe P6125 für  $T = 100$  mK und  $T = 230$  mK. Die Kurve für 230 mK wurde mit 0,1 multipliziert, um die Kurven zu trennen. Die eingezeichneten Kurven entsprechen dem Ansatz Gleichung 7.13. Die Anpassung des Modells bei 100 mK entspricht der mittleren durchgezogenen Gerade. Die beiden gestrichelten Geraden zu dieser Messung dienen der Abschätzung des Fehlers bei der Anpassung. Der Verlauf für 230 mK ergibt sich aus dem Verlauf für 100 mK ohne weiteren freien Parameter. Die senkrechte Linie kennzeichnet die zum Mittelungsintervall  $\Delta B_1$  gehörige Frequenz.

$\bar{G}(B) = \langle G(B) \rangle_{\Delta B_1}$  berücksichtigt werden, die von der Ensemble-Mittelung bzw. der nach der Ergodenhypothese äquivalenten Magnetfeld-Auswertung mit bekanntem  $\langle G(B) \rangle$  abweicht. Durch den Mittelungsprozess werden alle Fluktuationen auf langen  $B$ -Skalen bereits in  $\bar{G}(B)$  berücksichtigt und fehlen so in  $\delta G_{\Delta B_1}(B)$ . In der Fouriertransformierten  $\mathcal{F}(\delta G_{\Delta B_1}(B))$  fehlen somit die Beiträge zu Frequenzen  $f(B) < 1/\Delta B_1$ .

In Abbildung 7.5 ist die Spektraldichte für Messungen bei Temperaturen  $T = 100$  mK (vgl. Abbildung 7.4) und bei  $T = 230$  mK dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass die niedrigen Frequenzkomponenten ein großes Gewicht für die Fluktuationsamplitude haben, die sich durch Integration der PSD ergibt. Für kleine Magnetfeldfrequenzen zeigt sich der Einfluss der Mittelung: Anteile um  $1/\Delta B_1$  werden reduziert, unterhalb  $1/2\Delta B_1$  ist die Spektraldichte komplett unterdrückt.

Bei der Anpassung des Modells entsprechend Gleichung 7.13

$$\mathcal{P}(f_B) = \mathcal{P}_0 e^{-\beta f_B}, \quad \beta = 2\pi B_{\text{korrr}} \quad (7.21)$$

ist zu beachten, dass durch die notwendige Beschränkung auf das Leitfähigkeitsmaximum das ausgewertete Magnetfeldintervall auf nur etwa  $20 \cdot B_{\text{korrr}}$  begrenzt ist. Dies

## 7. Fluktuationen im Plateau-Übergang

entspricht einer Ensemble-Mittelung über nur eine geringe Anzahl von Proben und führt zu Abweichungen der PSD vom Verlauf für ein großes Ensemble. Dies zeigt sich in Abbildung 7.5 durch die Schwankungen auf logarithmischer Skala.

Bei einer Anpassung müssen die Daten also geeignet gewichtet werden. Eine geeignetere Methode nach [159] realisiert eine Maximierung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, ist aber aufwendig zu implementieren. Für die Anpassung einer einzelnen Messung genügt eine von Hand ausgeführte Datengewichtung. Hierbei werden die Maximalwerte auf logarithmischer Skala stärker gewichtet als kleine Werte. In Abbildung 7.5 ist die Anpassung des Modells an die Messung bei 100 mK durch die obere durchgezogene Gerade dargestellt. Die Anpassung wurde für den Bereich  $1/\Delta B = 5$  bis 40 durchgeführt. Bei kleineren Magnetfeld-Frequenzen ist der Einfluss der Auswertung durch Mittelung zu erwarten, bei hohen Frequenzen sind die Fluktuationen durch das elektrische Rauschen der Messgeräte bestimmt und nicht von der Probe verursacht. Zur Abschätzung des Fehlers sind gestrichelt zwei Geraden mit maximaler und minimaler glaubhafter Steigung eingezeichnet. Die gewonnenen Parameter sind

$$P_0 = (1,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-12} \Omega^2/T, \quad B_{\text{korrr}} = 19(+5 - 3) \text{ mT} \quad (T = 100 \text{ mK}). \quad (7.22)$$

Die Fehlerangabe für das Korrelationsfeld entspricht den beiden gestrichelt eingezeichneten Grenzfällen.

Die Temperatur beeinflusst die Spektraldichte nur durch das Korrelationsfeld. Mit Gleichung 7.8 und  $L_{\text{min}} = L_{Th}$  folgt  $B_{\text{korrr}} \propto 1/L_{Th}^2 \propto T$  und somit  $B_{\text{korrr}} \approx 44 \text{ mT}$  für  $T = 230 \text{ mK}$ . Der Vorfaktor  $P_0$  ist für  $L_{Th} < L$  temperaturunabhängig. Die zweite Modell-Kurve in Abbildung 7.5 ergibt sich also ohne weiteren freien Parameter aus der für 100 mK angepassten Abhängigkeit.

Die Übereinstimmung zwischen den Daten ist angesichts des geringen auswertbaren Magnetfeldintervalls gut. Dies erlaubt es nun, aus den experimentellen Daten quantitative Abschätzungen der dominierenden Längen durchzuführen. Für die Länge  $L_{Th}$  und die Diffusionskonstante ergibt sich mit Gleichung 7.8

$$L_{Th} \sim \sqrt{\frac{1 \text{ K}}{T}} \cdot 150 \text{ nm} \Rightarrow D \sim 0,003 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (7.23)$$

Dies ist nach Gleichung 7.16 mit der erwarteten energetischen Verbreiterung  $\Gamma$  der Landau-Niveaus von einigen meV verträglich.

Aus dieser Gleichung lässt sich auch ablesen, dass eine Sättigung der Fluktuationsamplitude, die für  $L_{Th} \gtrsim L$  eintritt, mit  $L \sim 10 \mu\text{m}$  erst für  $T \lesssim 0,2 \text{ mK}$  zu erwarten ist. Dies ist weit außerhalb des experimentellen Parameterbereiches.

Mit der von Brandes abgeschätzten Streurrate durch Elektron-Phonon-Streuung (Gleichung 7.17) kann mit Hilfe der Diffusionskonstante  $D$  nun die Streulänge  $L_{e-p} \sim 0,12 \mu\text{m} \cdot (1 \text{ K}/T)$  bestimmt werden. Bei der beobachteten Sättigungstemperatur der Halbwertsbreite von  $T_s \approx 60 - 80 \text{ mK}$  hat die Elektron-Phonon-Streulänge mit  $L_{e-p} \sim 2 \mu\text{m}$  die gleiche Größenordnung wie die Breite der Proben ( $w = 6 \mu\text{m}$  in Corbino-Geometrie). Somit ist die Elektron-Phonon-Streulänge  $L_{e-p}$  ein möglicher Kandidat für die Länge  $L_T(T)$ , die das Skalierungsverhalten der Leitfähigkeit mit der Temperatur bestimmt.

Für die Corbino-Geometrien kann mit dem gewonnenen  $L_{Th}$  die Größe der Fluktuationen im Übergang  $L_{Th} \rightarrow L$  abgeschätzt werden. Für 100 mK ergibt sich mit der Breite  $w = 6 \mu\text{m}$  und der Fluktuationsamplitude  $\delta G_{\text{rms}} \approx 0,05 - 0,08 e^2/h$  die Beziehung

$$\delta G_{\text{rms}} \approx (2 - 3) \frac{e^2}{h} \frac{L_{Th}}{w}. \quad (7.24)$$

Dies entspricht der nach Gleichung 7.18 erwartete Größenordnung für universelle Leitwertfluktuationen und ist damit ein weiterer Nachweis der Gültigkeit dieses Konzepts.

Zusammenfassend ergibt die Interpretation der Leitwertfluktuationen in kleinen Proben im Übergang zwischen Quanten-Hall-Plateaus entsprechend der Theorie der Leitwertfluktuationen also eine gute qualitative und quantitative Übereinstimmung. Die Fluktuationen werden nur durch die Länge  $L_{Th}(T) \approx \sqrt{\hbar D/k_B T}$  bestimmt. Die Auswertung der Fluktuationsamplitude und des Korrelationsfeldes ermöglichte die quantitative Abschätzung dieser Länge und damit der Diffusionskonstante für den metallischen Transport in der Nähe des kritischen Punktes. Eine Sättigung der Temperaturabhängigkeit der Fluktuationen ist erst für  $T < 1$  mK zu erwarten, während die Sättigung der Halbwertsbreite sich eventuell durch eine Identifikation der Skalierungslänge  $L_T$  mit der Elektron-Phonon-Streulänge  $L_{e-p}$  interpretieren lässt.

### 7.3. Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, dass die Fluktuationen und das Skalierungsverhalten des Leitwerts im Übergang zwischen Quanten-Hall-Plateaus von unterschiedlichen temperaturabhängigen Längenskalen bestimmt werden. Insbesondere weisen die Fluktuationen eine fortgesetzte Temperaturabhängigkeit in einem Temperaturbereich auf, in dem die Halbwertsbreite der SdH-Maxima bereits sättigt, weil die Länge  $L_T(T)$  des Skalierungsverhaltens bereits die Größe der Probe erreicht hat.

Eine Analyse der Spektraldichte der Fluktuationen und der Mittelungsprozesse bei der Bestimmung der Fluktuationsamplitude  $\delta G_{\text{rms}}$  zeigt, dass alle experimentellen Daten durch die für Fluktuationen in metallischen Proben entwickelte Theorie bei Dominanz nur einer Länge  $L_{Th} = \sqrt{\hbar D/k_B T}$  verstanden werden können. Die experimentell bestimmte Fluktuationsamplitude folgt bei tiefen Temperaturen  $\delta G_{\text{rms}} \sim (e^2/h)L_{Th}/L \propto 1/\sqrt{T}$  und zeigt somit ein mit UCF übereinstimmendes Verhalten. Bei steigenden Temperaturen wächst das Korrelationsfeld  $B_{\text{kor}} = \Phi_0/L_{Th}^2$  an. Durch die Auswertung wird unausweichlich eine zusätzliche Magnetfeldskala  $\Delta B_1$  durch einen Mittelungsprozess eingeführt. Die Analyse zeigt, dass für  $B_{\text{kor}}/\Delta B_1 \gtrsim 0,5$  die experimentell ermittelte Fluktuation stark reduziert wird, da Beiträge auf großen Magnetfeldskalen nicht berücksichtigt werden. Dies führt zu einer stärkeren Reduktion der Fluktuationsamplitude im Vergleich zu  $\delta G_{\text{rms}} \propto 1/\sqrt{T}$ .

Die ermittelte Größe der Länge  $L_{Th}$  ist in dem Temperaturbereich  $T = 50 - 100$  mK, für den die Sättigung der Halbwertsbreite zu beobachten ist, immer noch deutlich kleiner als die Probengröße. Damit ist nachgewiesen, dass die dominante Länge  $L_{Th}(T)$  der Fluktuationen und die dominante Länge  $L_T(T)$  des Skalierungsverhaltens nicht

## 7. Fluktuationen im Plateau-Übergang

identisch sind. Identifiziert man  $L_T(T)$  mit der Phasenkohärenzlänge  $L_\phi$ , so lässt sich der Schluss ziehen, dass im QHE Elektron-Elektron-Streuprozesse, die in der Nähe des kritischen Punktes eine Streulänge  $L_{e-e} \approx L_{Th}$  aufweisen, im Allgemeinen die Phase erhalten. Es folgt in diesem Bild, dass die Phasenkohärenzlänge durch Elektron-Phonon-Streuung bestimmt wird.

Die beobachteten Sättigungstemperaturen der Halbwertsbreite sind vergleichbar mit den Beobachtungen von Koch *et al.* [9]. Da in dieser Arbeit der Nachweis gelungen ist, dass die Sättigung ein echter Effekt der Probengröße ist und nicht durch experimentelle Unzulänglichkeiten verursacht wird, kann hieraus auch eine Bestätigung der Interpretation von Koch *et al.* abgeleitet werden. Die hier gewonnenen Ergebnisse sind somit indirekt auch eine Stärkung des experimentellen Nachweises von  $\gamma \approx 2, 3$ .

Aus der ermittelten Größe  $L_{Th}$  lässt sich eine Diffusionskonstante  $D \approx 0,003 \text{ m}^2/\text{s}$  in der Nähe des kritischen Punktes ableiten. Dies ist mit einer Ermittlung der Diffusionskonstante aus der Einstein-Gleichung bei einer energetischen Verbreiterung  $\Gamma$  der Landau-Niveaus von einigen meV kompatibel. Auch ist die mit dieser Diffusionskonstante und der Elektron-Phonon-Streurate aus Gleichung 7.17 ermittelte Länge  $L_{e-p}$  von der gleichen Größenordnung, die für  $L_T$  erwartet wird.

Ein sicherer Nachweis, dass Elektron-Phonon-Streuung der Mechanismus der Temperaturabhängigkeit des Skalierungsverhaltens ist, kann jedoch nicht geführt werden, da die Phasenkohärenzlänge aufgrund der Dominanz der Länge  $L_{Th}$  nicht aus Fluktuationen ermittelt werden kann. Dies wäre nur in einer Probe möglich, in der die Sättigung der Breite des Plateau-Übergangs bei der Temperatur stattfindet, bei der  $L_{e-p}$  die kürzeste relevante Länge ist. In GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen ist dies nach Gleichung 7.17 erst für  $T > 1 \text{ K}$  gegeben. Eine derartig hohe Sättigungstemperatur bedingt eine Probengröße  $L \sim 1 \mu\text{m}$ , was von gleicher Größenordnung wie die Randstruktur im QHE ist und somit die Interpretation erschwert. Für die endgültige Klärung der Identität von  $L_T$  ist daher ein anderes, neues Konzept nötig.

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

Während die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit im Übergang zwischen Quanten-Hall-Plateaus intensiv untersucht worden ist, wurde die Frequenzabhängigkeit bisher erst in wenigen Experimenten untersucht [10, 11, 100], und die Ergebnisse sind widersprüchlich, wie in Abschnitt 3.3.4 dargestellt wurde. Der Grund für die geringe Anzahl von Experimenten ist der große experimentelle Aufwand, der mit hohen Frequenzen im Mikrowellenbereich zusammen mit tiefsten Temperaturen verbunden ist.

Motivation der in diesem Kapitel vorgestellten Experimente ist es somit, die nach den Experimenten von Engel *et al.* [10] und Balaban *et al.* [11] noch immer offene Fragestellung zu untersuchen, ob überhaupt ein Skalierungsverhalten in Abhängigkeit von der Frequenz zu beobachten ist, und wenn ja, welcher kritische und dynamische Exponent dieses Verhalten beschreibt. Zusätzlich soll mit Hilfe der Theorie zum frequenzabhängigen *variable-range hopping* im QHE (Polyakov und Shklovskii [119]) direkt die Lokalisierungslänge gewonnen und auf kritisches Verhalten untersucht werden.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die experimentelle Methode dargestellt. Im Anschluss wird eine Analyse der Skalierungseigenschaften bei niedriger Frequenz („quasi-DC“) durchgeführt. Zum einen soll sichergestellt werden, dass nicht schon Abweichungen vom erwarteten Skalierungsverhalten mit der Temperatur zu beobachten sind, welche in den Ergebnissen von Balaban *et al.* auftreten und damit die Einordnung der Frequenzabhängigkeit erschweren. Zum anderen kann aus dem Skalierungsverhalten mit der Temperatur bereits ein Teil der relevanten Exponenten abgeleitet werden.

Es folgt als zentraler Teil dieses Kapitels eine ausführliche Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der kritischen Leitfähigkeiten und der Halbwertsbreite des Leitfähigkeitsmaximums für verschiedene Plateau-Übergänge. Den Abschluss bildet eine Analyse bezüglich *variable-range hopping*.

### 8.1. Messung der Frequenzabhängigkeit

Die Messung der Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit einer Probe durch herkömmliche Technik, wie sie bei Gleichstrom verwendet wird, ist nur für Frequenzen bis zu einer Größenordnung von 10 MHz, entsprechend einer Wellenlänge  $\lambda \sim 20$  m möglich. Dieser Wert ist mit einem Messaufbau erreichbar, bei dem analog zur in Abschnitt 5.3.1 beschriebenen Technik eine Probe in Reihe mit einer Spannungsquelle und einem Stromverstärker zur Strommessung geschaltet wird. Mit diesen Konzepten können

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

sinnvolle Messungen durchgeführt werden, solange bei Einspeisung der Wechselspannung die Wellenlänge der in den Zuleitungen zur Probe erzeugten elektromagnetischen Welle noch groß gegenüber der Leitungslänge ist. Bei einer typischen Länge der Leitungen von 2 m führt dies zu der Begrenzung  $f \ll 100$  MHz. Bis zu solchen Frequenzen kann das Experiment noch in guter Näherung durch ein um frequenzabhängige komplexe Widerstände erweitertes „Gleichspannungs“schaltbild beschrieben werden.

Die in dieser Arbeit angestrebten Frequenzen müssen jedoch nach Abschnitt 3.2.4 die Bedingung  $hf \geq k_B T$  erfüllen, wenn Skalierungsverhalten untersucht werden soll. Bei einer Temperatur von  $T \approx 0,1$  K, die mit einigem experimentellen Aufwand auch in Verbindung mit Hochfrequenz erreicht werden kann, entspricht diese Bedingung  $f \geq 2$  GHz. Der Frequenz 2 GHz entspricht in einer herkömmlichen Koaxialleitung mit einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $c_1 \approx 0,7c$ , wobei  $c$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist, eine Wellenlänge von  $\lambda = 10$  cm. Die minimale Entfernung zwischen dem Zugang zum Kryostaten und der Probe ist für einen Entmischungskryostaten, der für die angestrebten Temperaturen nötig ist, etwa 2 m. Die Welleneigenschaften der eingespeisten Wechselspannung hoher Frequenz müssen also in der Messung berücksichtigt werden.

Es gibt zwei grundsätzliche Möglichkeiten, eine elektromagnetische Welle im Mikrowellen-Frequenzbereich ( $\sim$  GHz) zur Probe zu leiten. Herkömmliche Standardtechnik für hohe Frequenzen und hohe Leistungen sind Hohlleiter. Dies ist im Wesentlichen ein zylindrisches oder rechteckiges Metallrohr, innerhalb dessen sich die Mikrowelle ausbreiten kann. Jedoch ist die größte Wellenlänge und damit die kleinste Frequenz, die vom Hohlleiter transmittiert wird, etwa durch  $\lambda = d/2$  gegeben, wobei  $d$  der Durchmesser des Hohlleiters ist. In der Praxis bedeutet dies bei Einbau im Kryostaten eine Beschränkung auf minimale Frequenzen von etwa 10 GHz entsprechend einer Abmessung von 1 cm. Zusätzlich ist eine Transmission auf der so genannten Grundmode nur bis etwa zum doppelten der minimalen Frequenz möglich. Darüber werden komplexe Schwingungsmoden angeregt, die die Analyse sehr erschweren.

Aus diesen Gründen wurden für die hier vorgestellten Experimente koaxiale Leitungen verwendet, mit denen eine durchgehende Messung von Gleichstrom bis zu etwa 20 GHz<sup>1</sup> möglich ist. Für diese Leitungen ist ein zusätzlicher Aufwand zur thermischen Ankopplung nötig, Details hierzu sind in Abschnitt 4.3.3 dargestellt.

Die Kenngröße einer Leitung ist die komplexe Wellenimpedanz  $Z_0$ , die im verlustlosen Fall  $Z_0 = \sqrt{L'/C'}$  beträgt, wobei  $L'$  die Induktivität und  $C'$  die Kapazität pro Längeneinheit sind. Die meist benutzten Leitungen haben bei Vernachlässigung der Verluste einen Wellenwiderstand

$$Z_0 = 50 \Omega. \quad (8.1)$$

Findet ein Übergang zwischen zwei Leitungen mit verschiedenen Wellenimpedanzen  $Z_0$  und  $Z_1$  statt, so wird ein Teil der elektromagnetischen Welle reflektiert. Der komplexe Reflexionskoeffizient wird durch das Verhältnis der Amplituden  $\mathcal{A}_{\text{ref}}$  der reflektierten und  $\mathcal{A}_{\text{ein}}$  der einlaufenden Welle definiert. Es gilt:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{A}_{\text{ref}}}{\mathcal{A}_{\text{ein}}} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \quad (8.2)$$

<sup>1</sup>Grenzfrequenz für die Kabelnorm UT141; es existieren allerdings auch Leitungen für höhere Frequenzen, die jedoch höhere Dämpfungen aufweisen.



## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

enthält alle Beiträge für die Mehrfachreflexionen.  $\mathcal{R}_p(f)$  ist die eigentlich gesuchte Größe, die Reflexion der Probe selbst.

Die Frequenzskala  $\Delta f \sim c_1/L$ , auf der sich deutliche Änderungen der Amplituden der Koeffizienten ergibt, ist durch die größte Länge  $L$  im Messaufbau gegeben. Mit einer typischen Länge  $L = 2$  m sind diese Koeffizienten auf einer Skala von  $\Delta f \sim 100$  MHz Veränderungen unterworfen. Sie müssen daher für jede Frequenz der Messung bestimmt werden. Das Verfahren hierzu wird im nächsten Abschnitt aufgezeigt.

Für die Umrechnung von Leitwert in Leitfähigkeit gilt entsprechend Abschnitt 4.2  $\sigma_{xx} = A_0 G$  mit dem Geometriefaktor  $A_0 = \ln(r_1/r_2)/2\pi$ . Die beste Auflösung erreicht man bei einer Reflexionsmessung für zu messende Leitwerte  $G$  in der Größenordnung  $G \sim G_0 = 1/Z_0 = 1/50 \Omega$ . Die Leitfähigkeit im Übergang zwischen Quanten-Hall-Plateaus ist maximal von der Größenordnung  $\sigma_{xx} \sim 0,5 e^2/h \approx 1/50 \text{ k}\Omega$ . Eine Corbino-Geometrie, die einen Leitwert  $1/50 \Omega$  erreichen soll, muss also eine Ringbreite  $w = r_1 - r_2 \approx r_1/160$  haben. Die minimale Ringbreite sollte jedoch so groß sein, dass noch keine Sättigung des Skalierungsverhaltens entsprechend Abschnitt 3.3.2 zu beobachten ist. Der Radius wiederum sollte klein gegenüber den minimalen Wellenlängen sein. Große Proben weisen zudem häufiger Inhomogenitäten in der Ladungsträgerkonzentration auf. Der Kompromiss in diesem Experiment ist

$$r = 0,8 \text{ mm}, \quad w = 20 \text{ }\mu\text{m}, \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r+w}{r} \approx \frac{w}{2\pi r} \approx 0,0040 \quad (8.6)$$

Der Leitwert folgt mit  $G = \sigma_{xx}/A_0$ . Bei einer erwarteten maximalen Leitfähigkeit von  $\sigma_{xx} \leq 0,5 e^2/h$  im hohen Magnetfeld (vgl. Kapitel 6) ist somit ein minimaler Widerstand  $R = 1/G \sim 200 \Omega$  zu erwarten.

Die im Folgenden vorgestellten Ergebnisse wurden alle an einer Probe der Heterostruktur P254 gewonnen. Die Ladungsträgerkonzentration dieser Probe beträgt  $n_e = 3,1 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Die Beweglichkeit wurde für diese Heterostruktur zu  $\mu_e \approx 35 \text{ m}^2/\text{Vs}$  bestimmt.

### 8.1.1. Kalibrierung

Die Leitfähigkeit der Probe lässt sich aus der vom Analysator gemessenen Reflexion bestimmen, wenn die Koeffizienten aus Gleichung 8.5 bekannt sind. Der normale Weg, diese zu bestimmen, besteht darin, anstelle der Probe nacheinander einen Kurzschluss, einen Abschluss mit der Leitungsimpedanz (hier  $Z_0 = 50 \Omega$ ) und ein offenes Ende (Impedanz  $Z = \infty$ ) zu vermessen. Dies ist jedoch nur möglich, bevor die Leitungen in den Kryostaten eingebaut und abgekühlt werden. Gerade das Abkühlen ruft jedoch durch unterschiedliche Ausdehnungskoeffizienten verschiedener Materialien die so genannten Fehlanpassungen, also die Sprünge in der Leitungsimpedanz, hervor. Es hilft auch nicht, nacheinander das System mit Kurzschluss, korrektem Abschluss und offenem Ende abzukühlen, da die Beobachtungen zeigen, dass die Reflexion bei jedem Abkühlzyklus anders ist.

Es muss also ein Weg gefunden werden, die Leitungen in situ im abgekühlten Zustand zu kalibrieren, ohne dass an Stelle der Probe andere Widerstände eingebaut

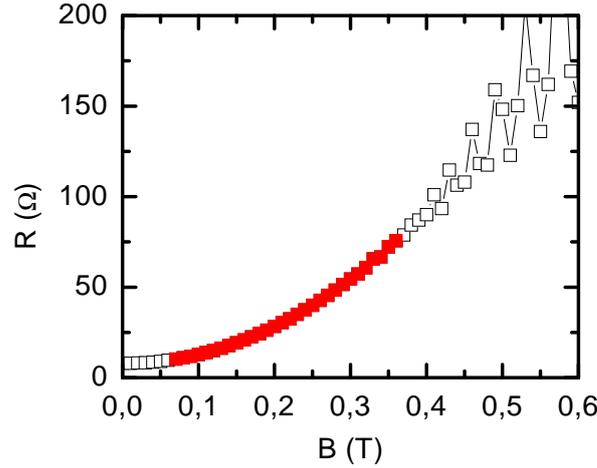


Abbildung 8.2.: Widerstand der Probe P254 in Corbino-Geometrie mit Radius  $r = 0,8$  mm und Ringbreite  $w = 20$   $\mu\text{m}$ , gemessen mit dem Netzwerkanalysator bei  $f = 100$  kHz. Die gefüllten Symbole zeigen den für die Kalibrierung verwendeten Bereich (vgl. Text). Temperatur des Elektronensystems:  $T_e \approx 0,1$  K.

sind. Dies ist nur möglich, wenn der Widerstand der Probe auch für hohe Frequenzen bekannt ist.

Für die Leitfähigkeit im niedrigen Magnetfeld gilt nach dem Drude-Modell

$$\frac{1}{\sigma_{xx}(\omega, \omega_c)} = \frac{m^*}{n_e e^2 \tau_t} (1 + (\omega_c \tau_t)^2 + i\omega \tau_t). \quad (8.7)$$

Hierbei ist  $\tau_t$  die durch  $\mu = e\tau_t/m^*$  definierte für den Transport relevante Streuzeit und  $\omega_c \propto B$  die Zyklotronfrequenz. Die Gültigkeit dieser Beziehung für  $\omega_c = 0$  wurde kürzlich von Burke *et al.* [160] experimentell überprüft. Für die Kalibrierung ist interessant, dass sich hieraus ein magnetfeldabhängiger Widerstand ergibt. Da in GaAs die Streuverbreiterung  $\Gamma$  der Landau-Niveaus durch eine kleinere Streuzeit  $\tau \ll \tau_t$  bestimmt wird, gibt es einen Gültigkeitsbereich  $\omega_c \tau_t > 1 > \omega_c \tau$  dieser klassische Gleichung, in dem der Widerstand eine deutliche Magnetfeldabhängigkeit zeigt, ohne dass bereits SdH-Oszillationen auftreten, für die wieder eine andere Frequenzabhängigkeit gelten kann.

Für die hier untersuchte Probe gilt  $\mu_e = 35$   $\text{m}^2/\text{Vs}$  und somit  $\tau_t \approx 13$  ps. Bei einer maximalen Frequenz von  $f = 6$  GHz gilt somit  $\omega \tau_t \lesssim 0,5$ . Für die Kalibrierung wird ein Magnetfeldbereich bis etwa  $B = 0,4$  T entsprechend  $(\omega_c \tau_t)^2 \sim 100$  benutzt. Der frequenzabhängige Imaginärteil in der Probenimpedanz  $Z_p = 1/(A_0 \sigma_{xx})$  ist somit in diesem Bereich kleiner Magnetfelder vernachlässigbar. Dies wurde auch überprüft, indem eine Kalibrierung mit und ohne diesen Anteil verglichen wurde. Hierfür wurde der erwartete Imaginärteil der klassischen Drude-Leitfähigkeit entsprechend Gleichung 8.7 aus dem für niedrige Frequenzen gemessenen Realteil berechnet und die Kalibrierung mit Real- und Imaginärteil getestet.

Abbildung 8.2 zeigt den bei  $f = 100$  kHz mit dem Netzwerkanalysator gemessenen Widerstand der gewählten Probengeometrie. Der Widerstand bei  $B = 0$  T ist etwas

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

höher als aus der bekannten Beweglichkeit erwartet, da bei der Zwei-Punkt-Messung immer Kontaktwiderstände vorhanden sind. Die Shubnikov-de Haas-Oszillationen setzen bei  $B \geq 0,4$  T ein. Dies schränkt den für die Kalibrierung verwendbaren Bereich auf  $R \leq 80 \Omega$  ein. Der verwendete Bereich ist in Abbildung 8.2 durch die gefüllten Symbole gekennzeichnet. Der Imaginärteil der Probenimpedanz ist bei dieser Frequenz nicht auflösbar, da er etwa einen Faktor  $10^6$  kleiner als der Realteil bei  $B = 0$  ist.

Da die Widerstände im Bereich hoher Magnetfelder jedoch deutlich höher sind, ist ein zusätzlicher Kalibrierwert bei „offener Leitung“ nötig. Der höchste Widerstand der Probe im zugänglichen Magnetfeldbereich liegt bei einem Füllfaktor  $\nu = 2$  in der Mitte des zugehörigen Plateaus. Der Leitwert der Probe bei  $\nu = 2$  ist klein, aber frequenzabhängig. Diese Frequenzabhängigkeit ist zunächst nicht bekannt. Der experimentelle Ansatz ist, für die Kalibrierung diesen Leitwert zunächst als  $G_{\nu=2} = 0$  anzunehmen. In erster Ordnung weisen die mit Hilfe dieser Kalibrierung gewonnenen Messwerte einen Offset auf, der durch den tatsächlichen Leitwert bei  $\nu = 2$  gegeben ist:

$$G^{exp}(B, f) = G(B, f) - G_{\nu=2}(f) \quad (8.8)$$

Eine Abschätzung dieses Fehler findet sich bei der Analyse der Messdaten.

Das praktische Verfahren der Kalibrierung funktioniert nun wie folgt: Zunächst wird der Leitwert der Probe bei einer niedrigen Frequenz gemessen. Um Abweichungen durch Umbauten des Experiments zu vermeiden, wird auch diese Messung mit Hilfe des Netzwerkanalysators bei einer Frequenz von 100 kHz gemessen. Bei dieser Frequenz sind im Rahmen der mit dieser Messmethode erreichbaren Auflösung keine Frequenzeffekte zu erwarten, was durch Vergleich mit einer Lock-In-Messung bei  $f = 11$  Hz bestätigt wurde.

Aus diesen Werten wird nun für  $B < 0,4$  T die erwartete Reflexion der Probe  $\mathcal{R}_p$  nach Gleichung 8.2 bestimmt. Die zusätzlich angenommene Reflexion für  $\nu = 2$  ist  $\mathcal{R}_p = 1$ . An die gemessene Reflexion  $\mathcal{R}(B, f)$  werden anschließend für  $B < 0,4$  T und  $\nu \approx 2$  die Koeffizienten der Kalibrierung nach Gleichung 8.5 angepasst.

In Abbildung 8.3 ist im oberen Bild die Amplitude des Transmissionskoeffizienten  $\mathcal{T}$  entsprechend Gleichung 8.5 für den gesamten Frequenzbereich dargestellt. Dieser Koeffizient ist ein Maß dafür, wie viel von der eingekoppelten elektromagnetischen Welle die Probe erreicht und anschließend wieder zum Analysator gelangt. Je kleiner dieser Wert ist, desto weniger Effekt ist bei einer gleichen Änderung des Probenwiderstandes durch den Netzwerkanalysator messbar. Damit sinkt das Signal-Rausch-Verhältnis, und der relative Fehler des aus der Messung gewonnenen Leitwerts der Probe wächst.

Für Frequenzen um 1,1 GHz wird dieser Koeffizient  $\mathcal{T}$  besonders klein. Hier absorbiert die Leitung effektiv einen Großteil der Leistung. In der Nähe dieser Frequenz ist keine Messung möglich.

Abgesehen von dieser Absorptionslinie zeigt sich eine sinkende Transmission  $\mathcal{T}$  mit steigender Frequenz. Ursache ist die normale frequenzabhängige Dämpfung der Leitung, die für jede Art von Koaxialleitung mit der Frequenz wächst.

Im unteren Teil von Abbildung 8.3 ist die Amplitude der Koeffizienten  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{R}_1$  und

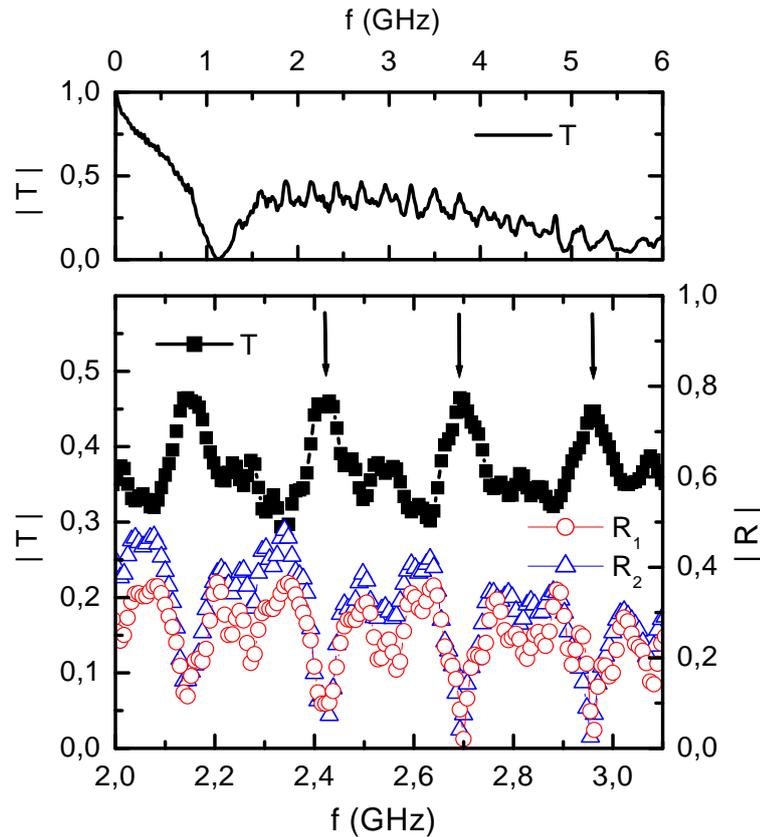


Abbildung 8.3.: Amplituden der Kalibrierungskoeffizienten. Oben: Der Betrag  $|T|$  des Transmissionskoeffizienten ist ein Maß für die relative Stärke des „Signals“ von der Probe. Unten: Für einen Ausschnitt aus dem Frequenzbereich ist der Betrag  $|T|$  der Transmissionsamplitude (volle Symbole, linke Achse) und die Beträge  $|R_i|$  der Reflexionsanteile (offene Symbole, rechte Achse) dargestellt. Die Pfeile zeigen besonders günstige Frequenzen für die Messung an.

$\mathcal{R}_1$  für einen Ausschnitt aus dem Frequenzbereich dargestellt. Die Koeffizienten zeigen eine Frequenzabhängigkeit mit einer dominierenden Periode von etwa 270 MHz, die einer stehenden Welle zwischen den beiden thermischen Ankoppelungen auf der 1-K-Stufe und der Entmischungskammer entspricht. Die Impedanzfehlanspassungen an diesen Stellen dominieren also die Reflexionen. In diesem Abstand von etwa 270 MHz gibt es Frequenzen, für die die unerwünschten Reflexionen, gekennzeichnet durch die Koeffizienten  $\mathcal{R}_{1,2}$ , besonders gering sind, und die direkt zur Probe und zurück transmittierte Amplitude  $\mathcal{T}$  besonders groß ist. Die Amplitude des Transmissionskoeffizienten  $\mathcal{T}$  bleibt trotzdem unter 0,5, weil die Leitungen in diesem Frequenzbereich bereits eine deutliche Dämpfung (Absorption) zeigen. Für diese ausgewählten Frequenzpunkte lässt sich die Reflexion der Probe  $\mathcal{R}_p$  und damit der Leitwert  $G$  mit der höchsten Genauigkeit bestimmen. Alle folgenden detaillierten Messungen bei hohen Frequenzen sind für diese ausgewählten Frequenzpunkte durchgeführt und nach dem beschriebenen Verfahren kalibriert worden.

## 8.2. DC-Charakterisierung und Skalierungsverhalten

Bevor in den folgenden Abschnitten die Leitfähigkeit bei hohen Frequenzen auf Skalierungsverhalten untersucht wird, sollen hier zunächst die Eigenschaften der Probe bei niedriger Frequenz bestimmt werden. Für diese Messung wird der identische Aufbau wie für die Hochfrequenz-Messungen verwendet. Als Frequenz wird  $f = 100$  kHz verwendet. Bei dieser Frequenz zeigen sich im Rahmen der Messgenauigkeit noch keine Abweichungen von der DC-Leitfähigkeit, so dass die folgenden Ergebnisse der DC-Charakterisierung für  $f \approx 0$  entsprechen. Diese Messung wird mit dem identischen Aufbau wie die Messungen bei hohen Frequenzen durchgeführt, um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse sicherzustellen.

Die nominelle Ausgangsleistung des Oszillators bei einer Abschlussimpedanz von  $50 \Omega$  entsprach  $P = -75$  dBm. Dies ergibt bei einer Probenimpedanz, die deutlich größer als  $50 \Omega$  ist, eine Spannung von  $U = 80 \mu\text{V}$  an der Probe. Dies ist die maximale Spannung, für die noch keine Heizeffekte zu beobachten sind. Es ist nicht sinnvoll, deutlich unter diese Amplitude zu gehen, da sonst das Signal-Rausch-Verhältnis für die höheren Frequenzen zu schlecht wird, und die Temperaturabhängigkeit unter denselben Bedingungen wie die Frequenzabhängigkeit gewonnen werden soll.

Das Ergebnis der Messung für verschiedene Temperaturen ist in Abbildung 8.4 dargestellt. Die Daten zeigen eine deutliche Abhängigkeit sowohl der maximalen Leitfähigkeit als auch der Breite der beobachteten SdH-Oszillationen von der Temperatur. Im gezeigten Füllfaktorbereich  $\nu < 6$  sind bei tiefster Temperatur auch die Hall-Plateaus der Spin-Niveaus gut ausgeprägt. Das Verschwinden der Lücke bei  $\nu = 5$  ist nur ein Effekt der unterschiedlichen maximalen Leitfähigkeiten der beiden Maxima bei  $\nu = 4, 5$

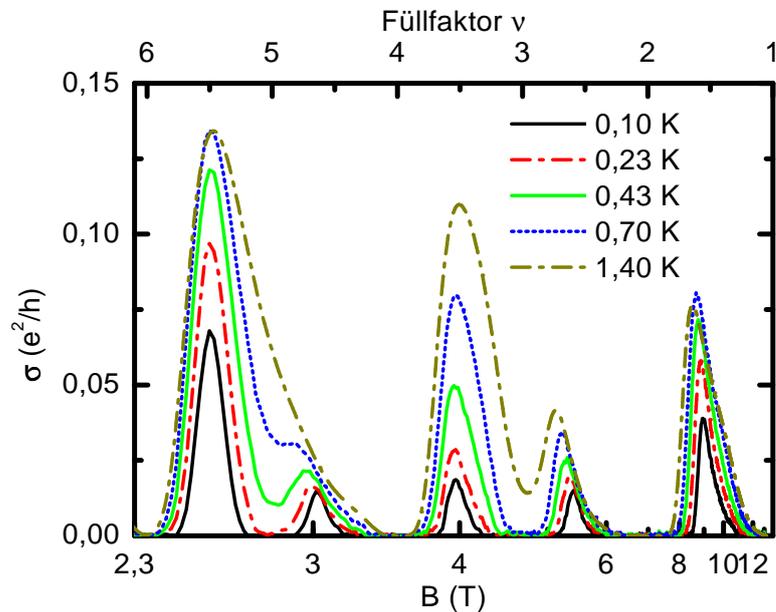


Abbildung 8.4.: Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit bei  $f = 100$  kHz (P254).

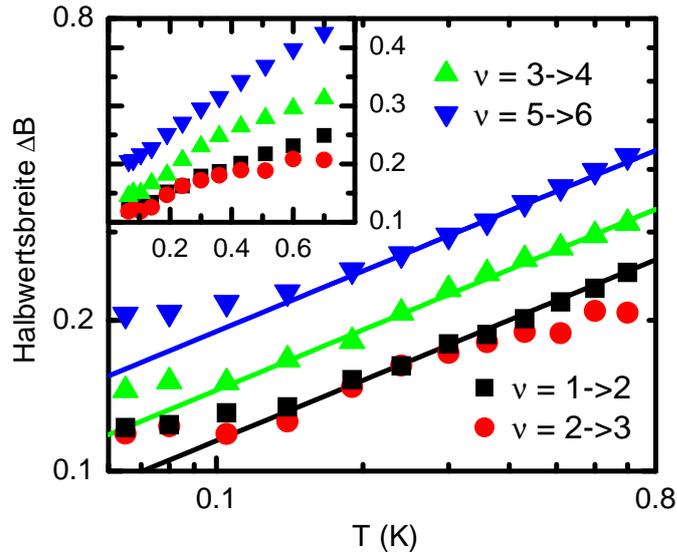


Abbildung 8.5.: Breitenskalierung der Leitfähigkeit bei  $f = 100$  kHz (P254). Kleines Bild: Darstellung auf linearer Skala zum Test auf lineares Verhalten.

und  $\nu = 5,5$ . Bei hohen Frequenzen wird sich zeigen, dass auch dieses Niveau noch gut aufgelöst ist.

Im Folgenden sollen die Halbwertsbreite und die kritischen (maximalen) Leitfähigkeiten genauer untersucht werden.

Die Halbwertsbreite der verschiedenen Übergänge ist in Abbildung 8.5 in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt. Da in [11] vorgeschlagen wurde, dass die Breitenskalierung eventuell auch einem einfachen linearen Verhalten folgt, ist die Halbwertsbreite sowohl auf logarithmischer Skala zum Test auf ein Potenzgesetz als auch auf linearer Skala dargestellt. Während sich ein Potenzgesetz mit guter Qualität anpassen lässt, sind die Daten nicht mit einem linearen Zusammenhang kompatibel. Die Temperaturskalierung der Halbwertsbreite ergibt über die verschiedenen Übergänge gemittelt

$$\Delta B \propto T^\kappa, \quad \kappa = 0,41 \pm 0,04. \quad (8.9)$$

Dies stimmt im Rahmen der Fehler mit dem postulierten universellen Wert  $\kappa = 0,43$  überein.

Aus der Temperatur, bei der die Breitenskalierung sättigt, kann auch die Temperatur des Elektronensystems bei Basistemperatur des Kryostaten abgeschätzt werden. Es ergibt sich  $T_e \approx 0,1$  K, was für eine direkt an eine Hochfrequenz-Koaxialleitung gekoppelte Probe ein hervorragender Wert ist.

Auffällig in Abbildung 8.4 sind die für einige Übergänge sehr niedrigen maximalen Leitfähigkeiten von  $\sigma_c \approx 0,015 e^2/h$  bei tiefster Temperatur und die starke Temperaturabhängigkeit dieser Leitfähigkeiten. Abbildung 8.6 zeigt den entsprechend Kapitel 6, Gleichung 6.7, definierten Widerstand  $R_{\text{Rand}}$ . Dieser sollte nach der Diskussion in

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

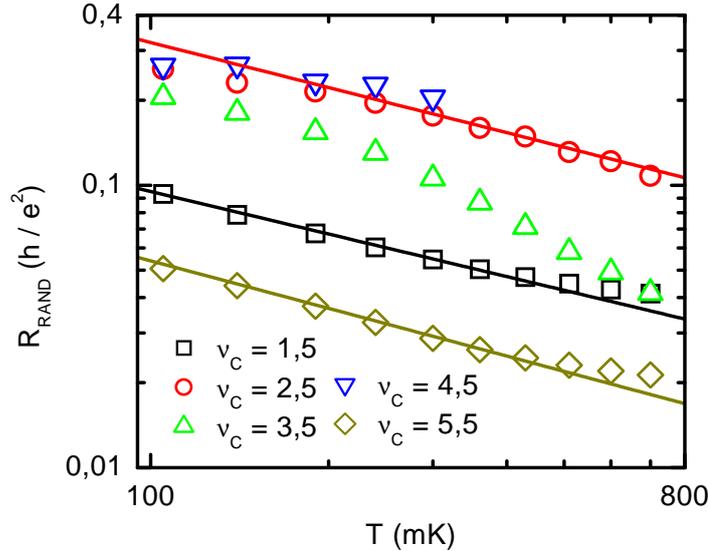


Abbildung 8.6.: Auswertung der Korrekturen zum kritischen Leitwert entsprechend Kapitel 6 für P254.  $\nu_c$  ist der Füllfaktor am kritischen Punkt und kennzeichnet das betrachtete Maximum.

Kapitel 6 ein Skalierungsverhalten mit der Temperatur zeigen:

$$R_{\text{Rand}} = \frac{1}{G} - 2A_0 \frac{e^2}{h} \propto T^{\kappa\gamma_p}. \quad (8.10)$$

$G$  ist der gemessene Leitwert der Probe,  $A_0$  der Geometriefaktor zur Umrechnung von Leitwert in Leitfähigkeit,  $\kappa = 0,41$  der aus der Skalierung der Halbwertsbreite bestimmte Skalierungsexponent und  $\gamma_p$  der klassische Perkolationsindex, für den theoretisch ein Wert  $\gamma_p = 4/3$  erwartet wird.

Die Geraden in Abbildung 8.6 entsprechen diesem erwarteten Potenzgesetz bei Auftragung auf doppelt logarithmischer Skala und zeigen abgesehen vom Übergang mit kritischem Füllfaktor  $\nu_c = 3,5$  eine gute Übereinstimmung mit den Daten. Der Grund für die Abweichung bei  $\nu_c = 3,5$  ist nicht bekannt. Die Punkte für  $\nu_c = 4,5$  enden bei etwa 300 mK, da oberhalb dieser Temperatur die Leitfähigkeit an diesem kritischen Punkt durch das benachbarte, deutlich größere Maximum der Leitfähigkeit bei  $\nu_c = 5,5$  maskiert wird.

Der aus der Anpassung eines Potenzgesetzes gewonnene Perkolationsindex hat einen Wert  $\gamma_p = 1,3 \pm 0,1$ , der sehr gut mit dem theoretisch erwarteten  $\gamma_p = 4/3$  übereinstimmt. Die Temperaturabhängigkeit der gemessenen Leitfähigkeit lässt sich also gut durch das in Kapitel 6 vorgestellte Modell makroskopischer Inhomogenitäten verstehen.

Die Temperaturabhängigkeit der Korrektur zeigt auch für die kleinsten Leitwerte und damit größten Korrekturbeiträge beginnendes Sättigungsverhalten. Für den Sättigungswert ergibt sich eine Abschätzung von  $G \sim 3 e^2/h$ , ein sehr kleiner Wert angesichts der Geometrie, der nach Kapitel 6 nur durch eine systematische makroskopische Inhomogenität unbekannter Ursache zu erklären ist.

### 8.3. Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit im Plateau-Übergang

Als zweiter Test auf Skalierungsverhalten wurde bei tiefster Temperatur die Abhängigkeit von der Spannung  $U$  an der Probe gemessen. Die Daten sind im Anhang A.5 aufgeführt. Die Auswertung der Halbwertsbreiten (vgl. Abschnitt 3.3.3) ergibt über zwei Dekaden

$$\Delta\nu \propto U^b, \quad b = 0,21 \pm 0,02 = \kappa/2. \quad (8.11)$$

Entsprechend Abschnitt 3.3.3 können hieraus der kritische Exponent  $\gamma$  und der Temperaturexponent  $z_T$  bestimmt werden:

$$z_T = \frac{\kappa}{b} - 1 \approx 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\kappa z_T} \approx 2,4 \quad (8.12)$$

Dies ist in guter Übereinstimmung mit dem universell erwarteten Exponenten  $\gamma \approx 2,35$ .

Die Experimente bei einer niedrigen Frequenzen zeigen also zusammenfassend ein gutes Skalierungsverhalten der Halbwertsbreiten der Leitfähigkeit in den Plateau-Übergängen. Die Exponenten für Temperatur- und Spannungsskalierung stimmen im Rahmen der Fehlerabschätzung gut mit den universell postulierten Werten  $z \approx 1$  und  $\gamma \approx 2,35$  überein. Die kritischen Leitfähigkeiten sind jedoch stark reduziert, was entsprechend Kapitel 6 auf großräumige makroskopische Inhomogenitäten der Ladungsträgerkonzentration hinweist.

## 8.3. Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit im Plateau-Übergang

Im Folgenden wird die Abhängigkeit der Leitfähigkeiten von der Frequenz für verschiedene Übergänge zwischen Quanten-Hall-Plateaus im Füllfaktorbereich  $\nu = 1-6$  untersucht. Dabei konzentriert sich dieser Abschnitt auf die kritischen Werte der Leitfähigkeit, also die maximale Leitfähigkeit in den einzelnen Plateau-Übergängen, und die Halbwertsbreiten. Der Bereich kleiner Leitfähigkeiten im Bereich der Plateaus wird im Abschnitt 8.4 untersucht.

In Abbildung 8.7 ist der Realteil der mit Hilfe von Gleichung 8.5 und 8.4 aus der Reflexion bestimmten Leitfähigkeit für drei Frequenzen dargestellt. Die Symbole stellen die gemessenen Daten dar, die eingezeichnete Linie wurde auf zwei Arten aus diesen Daten gewonnen: Für  $\nu < 2$  wurden die Daten mit einem laufenden Mittel geglättet. Für  $\nu > 2$  zeigt sich, dass die Daten hervorragend durch Gauß-Funktionen modelliert werden können. Somit wird jedes Maximum der Leitfähigkeit in der so gewonnenen Kurve nur durch die Höhe, die der kritischen Leitfähigkeit entspricht, und die Breite repräsentiert. Diese Anpassung erlaubt es, auch bei hohen Frequenzen, für die die Messung eine größere Streuung der Leitfähigkeit zeigt, zuverlässige Werte für diese Parameter zu erlangen. Dies ist gut für die Messung bei  $f = 5,11$  GHz zu erkennen.

Der Vergleich des Realteils der Messungen für  $f = 100$  kHz und  $f = 307$  MHz in Abbildung 8.7 zeigt bereits einen sehr großen Frequenzeffekt. Dies ist überraschend, da entsprechend Abschnitt 3.2.4 im Übergang zwischen den Hall-Plateaus ein Vergleich

8. Frequenzabhängigkeit im QHE

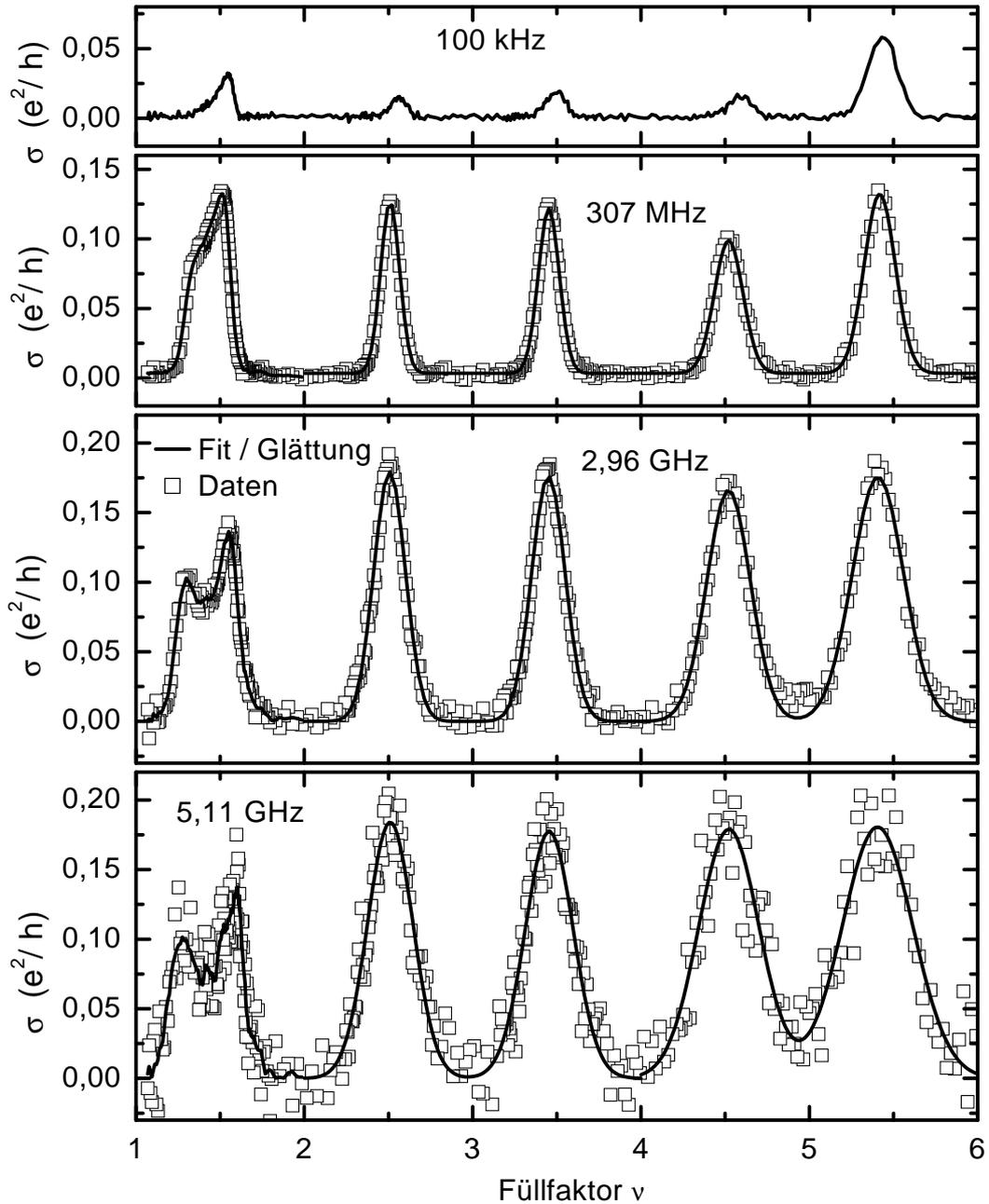


Abbildung 8.7.: Realteil der Leitfähigkeit der Probe P254 bei verschiedenen Frequenzen auf gleicher Skala. Zur Auswertung werden für  $f \gtrsim 100$  MHz die Übergänge zwischen  $\nu = 2$  und  $\nu = 6$  durch Gauß-Funktionen modelliert. Der Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$  wird aufgrund seiner abweichenden Form nur geglättet. Die Temperatur des Elektronensystems beträgt  $T_e \approx 0,1$  K.

### 8.3. Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit im Plateau-Übergang

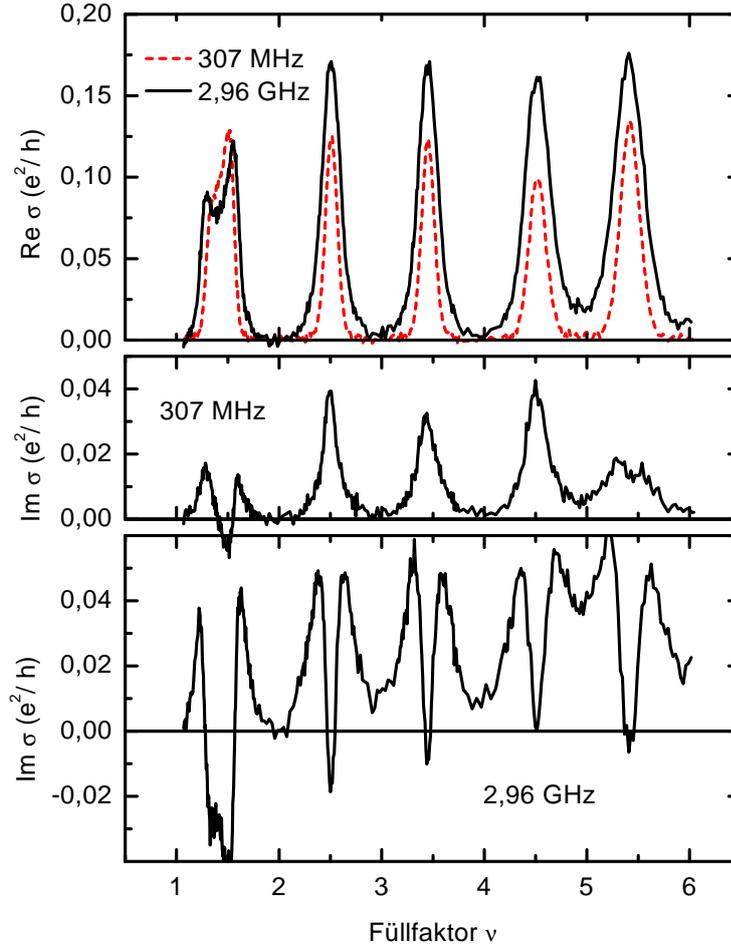


Abbildung 8.8.: Imaginärteil der Leitfähigkeit im Vergleich zum Realteil. Oben: Realteil für 307 MHz und 2,96 GHz. Mitte und Unten: Imaginärteil, Faktor zwei im Vergleich zum Realteil vergrößert. Die Messungen sind jeweils repräsentativ für die Bereiche  $f > 1$  GHz bzw.  $f < 1$  GHz.

der Energieskalen  $hf$  und  $k_B T$  zwischen der Dominanz von Temperatur und Frequenz entscheidet. Gleiche Energien ergeben sich für

$$hf \sim k_B T \Leftrightarrow f \sim (2 \text{ GHz}) \left( \frac{T}{0,1 \text{ K}} \right). \quad (8.13)$$

Mit einer Temperatur des Elektronensystems von  $T_e \approx 0,1$  K, abgeschätzt aus den temperaturabhängigen Messungen, sollten also nach der Skalierungstheorie unterhalb von etwa 1 GHz nur geringe Frequenzeffekte zu beobachten sein.

Der Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$  zeigt noch eine zusätzliche Besonderheit. Der Vergleich der Messungen bei 100 kHz und 2,96 GHz in Abbildung 8.7 zeigt eine deutliche Veränderung der Form des Leitfähigkeitsmaximums. Diese Form unterscheidet sich auch von den anderen Maxima. In der Messung bei 3 GHz ist die Ausbildung von zwei Maxima innerhalb des Übergangs zu erkennen. Entweder handelt es sich um das

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

von einigen Autoren postulierte so genannte *impurity band*, bei dem die Dotieratome zur Ausbildung eines zweiten Maximums in der Zustandsdichte eines spinaufgespaltenen Landau-Niveaus führen. Oder es sind Anzeichen des fraktionierten Quanten-Hall-Effekts, der vom gleichen Mechanismus, der für die Frequenzabhängigkeit der Amplitude verantwortlich ist, bei niedrigen Frequenzen unterdrückt wird. In diesem Fall entspräche das schwache Minimum innerhalb des Übergangs den ersten Anzeichen des Plateaus bei  $\nu = 4/3$ . In jedem Fall müssen die Ergebnisse für diesen Übergang kritisch analysiert werden.

Für alle Messungen wurde auch der Imaginärteil bestimmt. In Abbildung 8.8 sind die Messungen für 307 MHz und 2,96 GHz dargestellt. Zum Vergleich ist in der Abbildung für diese beiden Frequenzen im oberen Teil auch der Realteil noch einmal aufgeführt. In der Messung bei 307 MHz zeigen sich gleichzeitig mit den Maxima im Realteil für die Plateau-Übergänge  $\nu = 2 - 6$  auch Maxima des Imaginärteils der Leitfähigkeit. Dieses Verhalten ist für den Bereich  $f < 1$  GHz typisch. In diesem Bereich ist auch das Anwachsen der maximalen Leitfähigkeit im Realteil zu beobachten, das im Folgenden noch genauer untersucht wird. Für  $f > 2$  GHz hingegen zeigt der Imaginärteil ein qualitativ anderes Verhalten. In diesem Frequenzbereich ist auch der Anstieg des Realteils der kritischen Leitfähigkeit beendet. Der Imaginärteil steigt bei der Annäherung vom Plateau an den kritischen Punkt zunächst an und zeigt somit kapazitives Verhalten, wie es für frequenzabhängiges *variable-range hopping* erwartet wird. Bei weiterer Annäherung an die kritischen Punkte nimmt jedoch der Imaginärteil sogar wieder ab und wird sogar negativ, zeigt also induktives Verhalten. Zur Zeit existieren jedoch leider noch keine Modelle, anhand derer dieses Verhalten des Imaginärteils im Plateau-Übergang verstanden werden kann. Eine Präsentation weiterer experimenteller Daten zum Imaginärteil wird daher im Anhang A.6 gegeben, während im Folgenden nur der Realteil weiter analysiert wird.

In Abbildung 8.9 ist die Abhängigkeit der Halbwertsbreite und der kritischen Leitfähigkeit von der Frequenz  $f$  für  $f \leq 1$  GHz dargestellt. Die Werte für sehr kleine Maxima wurden, abweichend von der obigen Diskussion, ohne Anpassung eines Modells für die Form der SdH-Maxima direkt aus den Messdaten gewonnen, da sie sich nicht durch Gauß-Funktionen anpassen lassen. Für den dargestellten Bereich  $f < 1$  GHz ist nach der Skalierungstheorie nur eine geringe Frequenzabhängigkeit zu erwarten, da in diesem Bereich  $k_B T > hf$  gilt.

Die Abbildung zeigt, dass die Halbwertsbreite des Übergangs tatsächlich für  $f > 100$  MHz nur einen geringen Anstieg mit der Frequenz zeigt und somit mit den Erwartungen der Skalierungstheorie konform ist. Eine quantitative Untersuchung der Breiten auch für  $k_B T \gtrsim hf$  wird später in Abschnitt 8.3.4 durchgeführt. Die kritischen Leitfähigkeiten zeigen hingegen gleichzeitig einen deutlichen Anstieg um annähernd einen Faktor zehn für die besonders kleinen SdH-Maxima in Abbildung 8.4. Dieser Anstieg und die damit verbundene Änderung der Form der Leitfähigkeitsmaxima ist auch die wahrscheinliche Ursache der etwas stärkeren Frequenzabhängigkeit der Halbwertsbreite für  $f < 100$  MHz im Vergleich zu  $f > 100$  MHz.

Die Ursache dieses deutlichen Anstiegs der kritischen Leitfähigkeiten muss außerhalb der Skalierungstheorie gesucht werden.

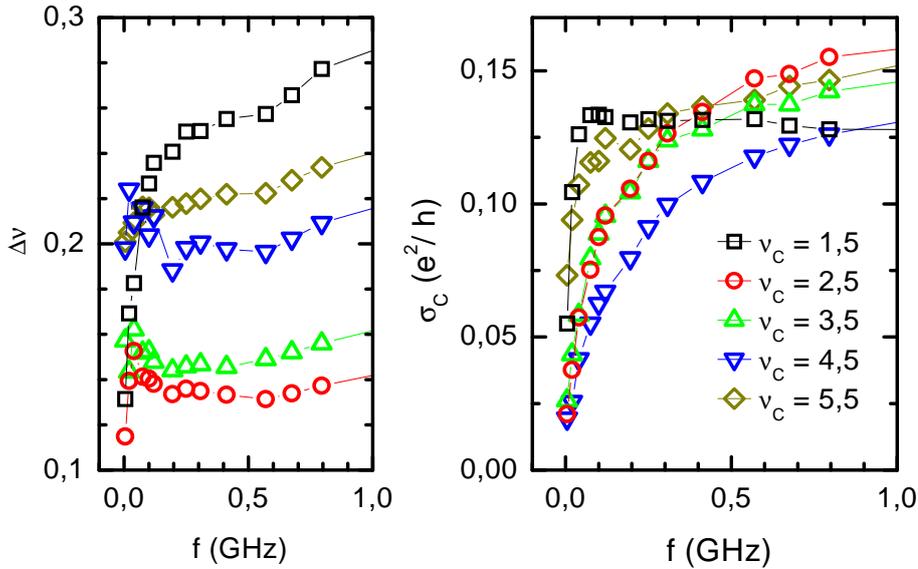


Abbildung 8.9.: Halbwertsbreite und Maximalwert der Leitfähigkeitsmaxima im Plateau-Übergang in Abhängigkeit von der Frequenz für  $f < 1$  GHz.

### 8.3.1. Kontaktwiderstand kontra Inhomogenitäten

In diesem Abschnitt sollen zwei Erklärungsansätze für die Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit am kritischen Punkt vorgestellt werden. Der eine Ansatz basiert auf Phänomenen nicht idealer Kontakte, der zweite Ansatz basiert auf der in Kapitel 6 vorgestellten Interpretation der nicht universellen Leitfähigkeiten durch makroskopische Inhomogenitäten der Ladungsträgerkonzentration.

Der Kontaktwiderstand zwischen dem dreidimensionalen metallischen Kontakt und dem zweidimensionalen Elektronensystem ist im hohen Magnetfeld nicht bekannt. Die metallischen Kontakte spielen durch das große Verhältnis von Umfang zu Breite der Geometrie eine besondere Rolle. Sie wurden durch herkömmliche Einlegierung eines Gold-Germanium-Eutektikums mit einer Gold-Deckschicht hergestellt. Die mikroskopische Geometrie dieser Kontakte ist nicht homogen. Beim Legierungsprozess wachsen bevorzugt Spitzen in das 2DES hinein, so dass eine mikroskopische Struktur von ungestörten Bereichen des 2DES und von dreidimensionalen metallischen Kontaktbereiche entsteht [161]. Um diese Spitzen können sich inkompressible Zustände bilden, die zu einer schlechten Ankopplung des 2DES an den ohmschen Kontakt führen [162].

Ein Modell für die Frequenzabhängigkeit ist somit, dass diese Kontakte im hohen Magnetfeld einen hohen Kontaktwiderstand  $R_1 = 1/G_1$  aufweisen, dem eine kapazitive Kopplung  $R_2(f) = 1/G_2(f)$  parallel geschaltet ist. Es ergibt sich ein frequenzabhängiger Kontaktwiderstand  $R_K(f) = 1/G_K(f)$  mit  $G_K(f) = G_1 + G_2(f)$ , der in Reihe mit dem Widerstand des 2DES geschaltet ist.

Unter der Annahme, dass die wahre Leitfähigkeit des 2DES am kritischen Punkt frequenzunabhängig ist und den bei hohen Frequenzen gemessenen Wert  $\sigma^{HF}$  hat, kann aus der im Experiment gemessenen frequenzabhängigen Leitfähigkeit  $\sigma(f)$  die

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

zum 2DES in Reihe geschaltete Leitfähigkeit des Kontakts bestimmt werden:

$$\sigma_K(f) = A_0 G_K(f) = \left( \frac{1}{\sigma(f)} - \frac{1}{\sigma^{HF}} \right)^{-1}, \quad \sigma^{HF} \approx 0,18 e^2/h \quad (8.14)$$

In Abbildung 8.10 ist diese Leitfähigkeit für  $\nu = \nu_c = 2,5$  durch die Symbole aufgeteilt in Realteil und Imaginärteil dargestellt.

Eine einfache Modellierung des Kontaktes durch eine Parallelschaltung einer Kapazität und eines Widerstandes ergibt  $G_K = G_1 + i\omega C$ . Der Realteil der Kontaktleitfähigkeit wäre also frequenzunabhängig, was der Beobachtung in Abbildung 8.10 widerspricht.

Ein komplexeres Modell für den Kontakt nimmt an, dass im Kontaktbereich neben den einlegierten Kontaktspitzen noch ungestörtes 2DES vorhanden ist, das kapazitiv an die metallische Kontaktfläche ankoppelt. Im Anhang, Abschnitt A.4, ist dargestellt, welcher Kontaktwiderstand sich für eine rein kapazitive Ankopplung an ein 2DES mit endlicher Leitfähigkeit  $\sigma_2$  unterhalb der für den Kontakt metallisierten Fläche ergibt. Bei Parallelschaltung einer zusätzlichen ohmschen Kontaktkomponente ergibt sich nach Gleichung A.11

$$\sigma_K(f) = \sigma_1 + (1 + i)\sigma^* \sqrt{f}. \quad (8.15)$$

$\sigma^*$  ist ein Parameter der Dimension  $1/\Omega\sqrt{\text{Hz}}$  und hängt von der Breite  $w$  der Corbino-Geometrie, dem Abstand  $d$  zwischen dem 2DES und dem Metall des Kontakts und der Leitfähigkeit  $\sigma_2$  des nicht legierten 2DES unter dem Kontakt ab. Der herkömmliche Kontaktwiderstand wird durch  $\sigma_1$  repräsentiert.

Für den ohmschen frequenzabhängigen Anteil ergibt sich aus der Messung für  $f = 100$  kHz  $\sigma_1 \approx 0,016 e^2/h$ . Eine Anpassung des zweiten Parameters an den Imaginärteil von  $\sigma_K$  in Abbildung 8.10 ergibt  $\sigma^* \approx 2,5 e^2/h/\sqrt{\text{GHz}}$ . Mit diesen Werten wurde der Realteil entsprechend dem Modell in die Abbildung eingetragen.

Abbildung 8.10 zeigt, dass das Modell sowohl den Imaginärteil als auch den Realteil der Daten für  $f > 10$  MHz befriedigend beschreibt. Für die schlechtere Übereinstimmung bei niedrigen Frequenzen ist möglicherweise die Vereinfachung verantwortlich, bei der Herleitung von einem homogenen, unendlich ausgedehnten Kontakt auszugehen, der sicher nicht realisiert wird. Die Herleitung im Anhang A.4 zeigt, dass die Breite des aktiven Kontaktbereiches mit  $1/\delta \propto 1/\sqrt{f}$  wächst. Bei niedrigen Frequenzen sind also größere Effekte durch die Idealisierung zu erwarten.

Die Eindringtiefe in den Kontakt, also die Länge bis zu einem Abfall des Stromes auf  $1/e$ , beträgt mit diesen Parametern bei einer Frequenz von  $f \sim 100$  MHz etwa  $50 \mu\text{m}$  und wäre damit deutlich größer als die Ringbreite. Dieser Erklärungsansatz ist somit nur sinnvoll, wenn der einlegierte Kontakt nur für einen geringen Teil der Fläche bis in das 2DES vordringt und noch große, ungestörte Bereiche des 2DES unter dem Metall existieren.

Mit den bekannten Werten der Probe ( $d = 75$  nm,  $w = 20 \mu\text{m}$ ) ergibt sich aus dem angepassten  $\sigma^*$  im Rahmen des Modells nach Gleichung A.11 eine Leitfähigkeit  $\sigma_2 \approx 0,5 e^2/h$  des 2DES unter dem Kontakt. Um Spekulationen vorzubeugen muss

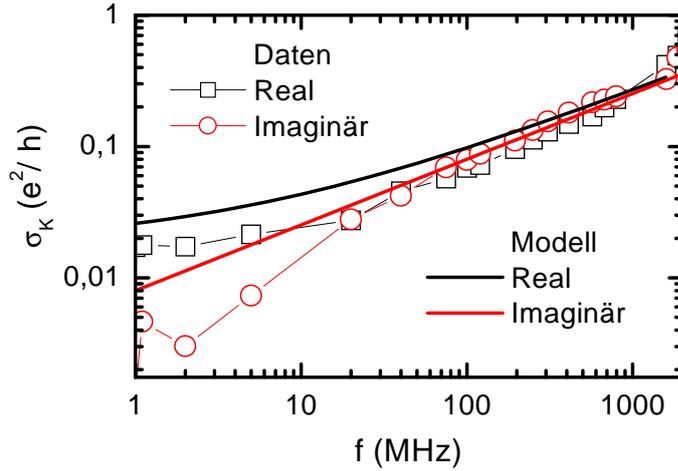


Abbildung 8.10.: Test eines Modells für frequenzabhängigen Kontaktwiderstand bei  $\nu_c = 2,5$ .

hier betont werden, dass die Übereinstimmung dieses angepassten Parameters mit der universell postulierten kritischen Leitfähigkeit als Zufall angesehen werden muss, da dieser Zahlenwert unter Annahmen gewonnen wurde, die nicht dem System entsprechen. Die einfache Modellierung des Kontakts durch eine glatte Metallschicht und ungestörtes 2DES entspricht nicht der Situation in der Probe mit einem einlegierten Kontakt, der die Geometrie sicher verändert. Da jedoch die mikroskopische Situation nicht im Detail bekannt ist, dient diese Näherung als Startpunkt.

Der so gewonnene Wert für  $\sigma_2$  liegt einen Faktor 2,5 über dem Wert  $\sigma^{HF} \approx 0,2 e^2/h$ , der für das ungestörte Elektronensystem bei hohen Frequenzen bestimmt wird. Dies erscheint unglaublich, da die Leitfähigkeit unter dem Kontakt durch die Gegenwart der einlegierten Bereiche allenfalls schlechter werden sollte. Eine Übereinstimmung der Leitfähigkeiten würde zum Beispiel durch eine Reduktion von  $d$  um diesen Faktor 2,5 erzielt werden.

### Alternativ: Randeffekte durch Inhomogenitäten

Eine zweite Interpretation des Kontaktwiderstands orientiert sich an der Übereinstimmung der Temperaturabhängigkeit bei niedrigen Frequenzen (Abbildung 8.6) mit den Darstellungen in Kapitel 6 für Effekte durch makroskopische Inhomogenitäten der Ladungsträgerkonzentration. Es ist denkbar, dass im Kontaktbereich eine systematische Veränderung der Ladungsträgerkonzentration zur einer geringen Zahl von Kanälen in die Probe und damit zu einem niedrigen Leitwert führt. Im Inneren des Corbino-Ringes hingegen haben die Inhomogenitäten in diesem Bild eine geringere Korrelationslänge als am Rand. Bei einer Leitwertmessung mit hoher Frequenz müssen nun zusätzliche Kanäle in das Innere der Probe geöffnet werden, so dass der Leitwert nicht mehr durch den Randbereich, sondern durch die Verteilung der Inhomogenitäten im Inneren der Probe bestimmt wird. Ohne ein detailliertes Modell für die Effekte von höheren Fre-

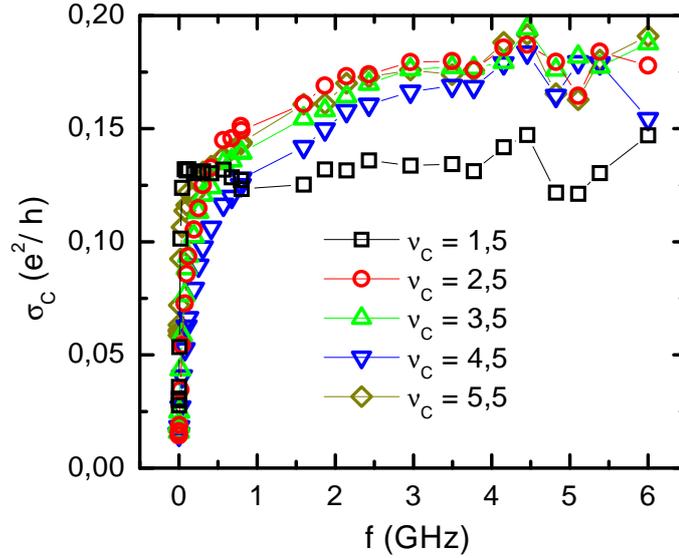


Abbildung 8.11.: Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit am kritischen Punkt für verschiedene Übergänge.  $\nu_c$  ist der Füllfaktor am kritischen Punkt und kennzeichnet somit den betrachteten Übergang.

quenzen in diesem Perkolationsmodell sind jedoch keine Aussagen über die erwartete Frequenzabhängigkeit möglich.

Auf Basis des vorhandenen Datenmaterials und der begrenzten theoretischen Vorhersagen kann also nicht zwischen den vorgestellten Interpretationen für die Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit am kritischen Punkt entschieden werden. Aus beiden Modellen ergibt sich jedoch, dass bei ausreichend hohen Frequenzen der gemessene Leitwert die intrinsische Leitfähigkeit des zweidimensionalen Elektronensystems korrekt wiedergibt. Die weiteren Analysen konzentrieren sich daher auf die experimentellen Ergebnisse für Frequenzen  $f > 300$  MHz, für die eine deutlich schwächere Abhängigkeit der kritischen Leitfähigkeit von der Frequenz zu beobachten ist.

### 8.3.2. Kritische Leitfähigkeiten bei hohen Frequenzen

In Abbildung 8.11 sind die kritischen Leitfähigkeiten bis zur maximalen untersuchten Frequenz von 6 GHz dargestellt. Oberhalb etwa 0,5 GHz ist für  $\nu > 2$  nur noch ein mäßiger Anstieg um etwa 30% zu beobachten. Bei  $f = 2$  GHz ist weitestgehend ein Sättigungswert erreicht. Bei einer Analyse der höchsten Frequenzen  $f \geq 2$  GHz sind also keine Kontaktphänomene mehr zu befürchten.

Im Rahmen der Messfehler ist die kritische Leitfähigkeit für  $\nu > 2$  unabhängig vom Füllfaktor. Die stimmt hervorragend mit den um Inhomogenitäten erweiterten Vorhersagen der Skalierungstheorie entsprechend Kapitel 6 überein, die ein gleiches Verhalten für die verschiedenen Plateau-Übergänge erwarten lässt. Der Wert der kritischen Leitfähigkeit von

$$\sigma_c = 0,18 \pm 0,02 e^2/h \quad (8.16)$$

liegt immer noch unter der „universellen“ kritischen Leitfähigkeit von  $0,5 e^2/h$ . Dies

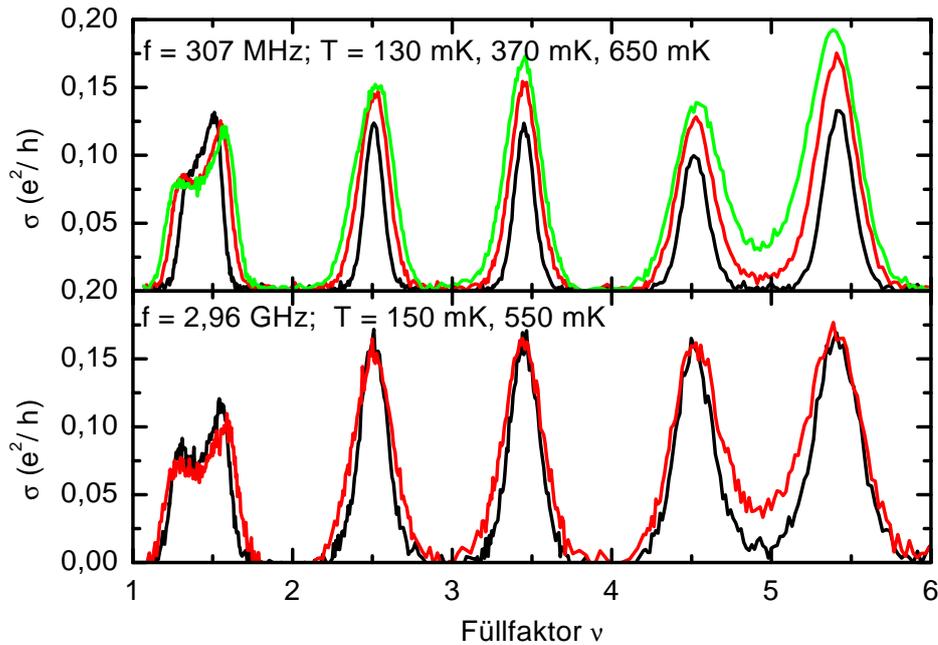


Abbildung 8.12.: Messungen bei verschiedenen Frequenzen und Temperaturen (ungeglättete Daten, P254).

kann jedoch nach Kapitel 6 gut durch das Vorhandensein von Inhomogenitäten der Ladungsträgerkonzentration verstanden werden. Der hier gefundene Wert lässt sich nicht direkt mit der numerischen Untersuchung der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten bestimmter Leitfähigkeiten vergleichen, da der Geometriefaktor der verwendeten Probe mit  $A_0 \approx 1/250$  weit außerhalb des numerisch analysierten Bereiches liegt. Da die wahrscheinlichsten Werte jedoch im analysierten Bereich nur wenig unter dem „universellen“ Wert  $\sigma_c^*$  liegen, wird der hier gemessene Wert auch eher am Rande der Wahrscheinlichkeitsverteilung liegen. Dies bestätigt die Ergebnisse in Kapitel 6, dass die im Experiment realisierten Proben von den in der Numerik getroffenen Annahmen zur Inhomogenität abweichen.

### 8.3.3. Temperaturabhängigkeit bei hohen Frequenzen

Bei niedrigen Frequenzen wird die Leitfähigkeit des zweidimensionalen Elektronensystems allein von der Temperatur bestimmt und ist, von den diskutierten Kontakteffekten abgesehen, frequenzunabhängig. Bei sehr hohen Frequenzen ist die Leitfähigkeit unabhängig von der Temperatur und nur abhängig von der Frequenz. Für den Übergang von dem einen Regime in das andere wurde bisher über einen einfachen Energievergleich  $hf \sim k_B T$  argumentiert. Dies soll nun genauer untersucht werden. Hierzu wurden Messungen bei verschiedenen Temperaturen für zwei Frequenzen,  $f = 307$  MHz und  $f = 2,96$  GHz, durchgeführt. Die Messung bei 307 MHz tritt an die Stelle der DC-Messung, da bei den Messungen mit geringerer Frequenz die starke Temperaturabhängigkeit der Amplitude das Ergebnis verfälschen könnte.

Die Leitfähigkeiten für die beiden Frequenzen und eine Auswahl verschiedener Tem-

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

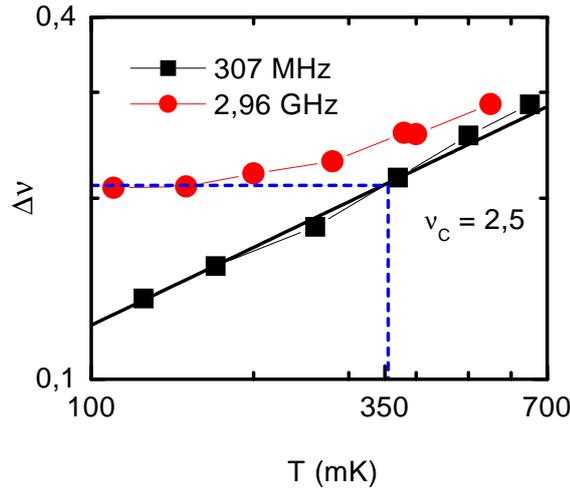


Abbildung 8.13.: Vergleich der Temperaturabhängigkeit der Halbwertsbreiten für  $f = 307$  MHz und  $f = 2,96$  GHz am Beispiel des Plateau-Übergangs bei  $\nu_c = 2,5$  (P254).

peraturen sind in Abbildung 8.12 dargestellt. Der Vergleich der beiden Frequenzen zeigt, dass eine höhere Temperatur bei 307 MHz einen deutlich größeren Effekt hat als bei 2,96 GHz. Die SdH-Maxima bei 2,96 GHz sind bereits durch die hohe Frequenz auch bei niedriger Temperatur so weit verbreitert, wie es bei 307 MHz erst für eine höhere Temperatur auftritt.

In Abbildung 8.13 ist die Halbwertsbreite für den beiden Plateauübergang  $\nu = 2 \rightarrow 3$  für eine quantitative Analyse dargestellt. Die anderen Übergänge zeigen ein vergleichbares Verhalten. Für die Messungen bei  $f = 307$  MHz ist die Anpassung der Temperaturskalierung der Halbwertsbreite  $\Delta\nu \propto T^\kappa$  eingezeichnet. Die eingezeichnete Gerade entspricht diesem Potenzgesetz mit  $\kappa = 0,43 \pm 0,03$ . Für die weiteren Übergänge mit  $\nu > 3$  werden ebenfalls Exponenten um  $\kappa = 0,42 \pm 0,03$  in Übereinstimmung mit den Werten bei niedriger Frequenz gefunden. Nur der Temperaturexponent für  $\nu = 1 \rightarrow 2$  weicht mit  $\kappa \approx 0,30$  von seinem bei  $f = 100$  KHz gemessenen Wert ab. Dies hängt vermutlich mit den schon in Abschnitt 8.3 diskutierten Besonderheiten dieses Übergangs zusammen.

Der Vergleich von  $f = 307$  MHz und 2,96 GHz zeigt, dass bei der höheren Frequenz die Halbwertsbreite eine deutlich geringere Temperaturabhängigkeit zeigt. Es ist bei tiefen Temperaturen ein Sättigungsverhalten durch den Übergang zum frequenzdominierten Regime zu beobachten. Aus der Halbwertsbreite bei tiefster Temperatur für  $f = 2,96$  GHz lässt sich somit im Vergleich mit der Temperaturabhängigkeit eine für das Skalierungsverhalten relevante effektive Temperatur einführen, die den Übergangspunkt zwischen Frequenzabhängigkeit und Temperaturabhängigkeit definiert. Diese Auswertung ist in Abbildung 8.13 durch die gestrichelte Linie verdeutlicht und ergibt für  $f = 2,96$  eine äquivalente Temperatur  $T_f = 350$  mK. Das Energieargument zum

### 8.3. Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit im Plateau-Übergang

Vergleich von Frequenz und Temperatur muss damit um einen Faktor ergänzt werden:

$$hf_T \approx 2,5 \cdot k_B T \quad (f_T \approx 3 \text{ GHz für } T \approx 350 \text{ mK}) \quad (8.17)$$

Dies steht nicht im Widerspruch zu der bisherigen Energieargumentation, da es sich bei der Beziehung  $hf \sim k_B T$  nur um eine Abschätzung gehandelt hat und die Theorie keine Aussagen über einen genauen Zahlenfaktor macht. Auch stimmt das hier gefundene Ergebnis gut mit den Messungen von Engel *et al.* [10] überein, aus denen sich eine Äquivalenz zwischen  $T = 470 \text{ mK}$  und  $f \approx 3,5 \text{ GHz}$  ablesen lässt. Dies weicht nur 10% von den hier gefundenen Werten ab.

#### 8.3.4. Skalierungsverhalten der Halbwertsbreite

Nach den Überlegungen des vorherigen Abschnittes hat bei einer Temperatur  $T_e \approx 100 \text{ mK}$  des 2DES die Frequenz für  $f > f_T(T_e) \approx 1 \text{ GHz}$  eine dominierende Rolle. Für genügend hohe Frequenzen ist nach der Skalierungstheorie reines Skalierungsverhalten mit der Frequenz zu erwarten:

$$\Delta\nu \propto f^{1/(z\gamma)} \quad f \gg f_T(T). \quad (8.18)$$

Im umgekehrten Grenzfall, der für  $f = 307 \text{ MHz}$  in Abbildung 8.12 zu finden ist, dominiert die Temperaturskalierung:

$$\Delta\nu \propto T^{(1/z_T\gamma)} \quad f \ll f_T(T). \quad (8.19)$$

Für die dynamischen Exponenten wurden verschiedene Bezeichnungen eingeführt, weil die theoretische Vermutung  $z = z_T$  erst noch experimentell zu untersuchen ist.

Mit einer maximalen Frequenz von  $f = 6 \text{ GHz}$  liegen die experimentellen Daten noch im Übergangsbereich zur reinen Frequenzabhängigkeit. Abbildung 8.14 zeigt die Halbwertsbreiten auf doppelt logarithmischer Skala. Ein Potenzgesetz nach Gleichung 8.18 entspricht in dieser Auftragung einer Geraden. Die Breiten wurden für  $\nu > 2$  durch Anpassung von Gauß-Funktionen und für  $\nu < 2$  durch direkte Auswertung nach Glättung ermittelt (vgl. Abbildung 8.7).

Die Daten zeigen deutlich, dass das reine Frequenz-Regime mit einem Potenzgesetz entsprechend Gleichung 8.18 nur in einem kleinen Teil des untersuchten Frequenzbereich schon erreicht ist. Ein Potenzgesetz ließe sich ab etwa 3 GHz anpassen. Eine solche Anpassung über nur einen Faktor zwei auf der Frequenzachse ist jedoch unbefriedigend.

Zur Beschreibung des kompletten Bereiches muss die Leitfähigkeit durch eine Skalierungsfunktion in zwei Parametern dargestellt werden:

$$\sigma = \sigma \left( f\xi^z, \frac{f^{1/z}}{T^{1/z_T}} \right), \quad \xi \propto \delta\nu^{-\gamma}. \quad (8.20)$$

Entsprechend ist auch die Halbwertsbreite eine Funktion beider Parameter.

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

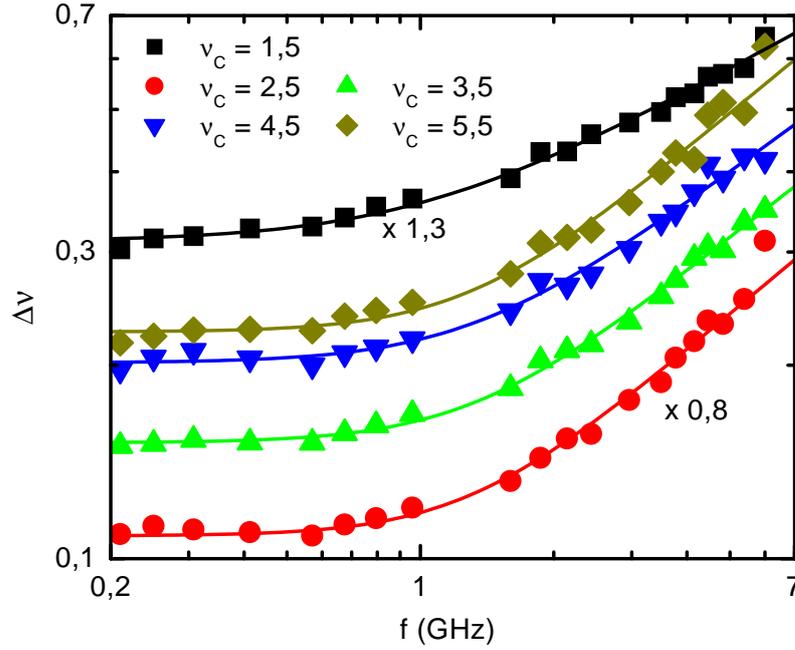


Abbildung 8.14.: Halbwertsbreiten der Plateau-Übergänge in Abhängigkeit von der Frequenz bei tiefster Temperatur ( $T_e \approx 100$  mK). Die durchgezogenen Linien entsprechen der Anpassung des im Text beschriebenen Modells. Die kritischen Füllfaktoren  $\nu_c$  kennzeichnen den jeweils betrachteten Plateau-Übergang.

Für den Übergang vom temperaturdominierten zum größendominierten Bereich bei der Untersuchung von kleinen Proben der Breite  $w$  hat sich in [96, 163] eine Form  $\Delta\nu \propto ((T/T_0)^p + (w_0/w)^2)^{1/(2\gamma)}$  bewährt, die über eine Addition von Streuraten abgeleitet wurde. Eine Ersetzung der Breite durch die Frequenz bei Berücksichtigung der oben diskutierten Grenzfälle ergibt für den hier untersuchten Übergang zwischen Temperaturabhängigkeit und Frequenzabhängigkeit den Ansatz

$$\Delta\nu = \Delta\nu_0 \left( \left( \frac{f_T}{f_0} \right)^{2/z_T} + \left( \frac{f}{f_0} \right)^{2/z} \right)^{1/(2\gamma)}, \quad f_T = a \frac{k_B T}{h}. \quad (8.21)$$

Die Frequenz  $f_0$  ist eine frei wählbare Frequenz, die aus Dimensionsgründen bei einer Verallgemeinerung auf  $z \neq z_T$  nötig ist. Die Konstante  $a$  hat die Größenordnung 1 und wurde im vorherigen Abschnitt zu 0,4 abgeschätzt. Die Exponenten  $z_T = 1$  und  $\gamma = 2,4$  sind aus der Untersuchung der Temperaturskalierung bei niedrigen Frequenzen bekannt.

Die Anpassung dieses Modells an die Daten ist in Abbildung 8.14 dargestellt. Die Übereinstimmung zwischen Modell und Daten ist gut und bestätigt den Ansatz. Die zugehörigen angepassten Parameter des Modells sind in Tabelle 8.1 aufgeführt. Der Einheitenfaktor wurde zu  $f_0 = 1$  GHz gewählt.

Der dynamische Exponent im untersten Landau-Niveau im Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$  zeigt mit  $z = 1,05 \pm 0,05$  Übereinstimmung mit der numerischen Analyse für Elek-

$\nu$	$\Delta\nu_0$	$f_T$ (GHz)	$z$	$z_T$	$z_T/z$
1 $\rightarrow$ 2	0,24	1,04 $\pm$ 0,15	1,05 $\pm$ 0,06	1,43 $\pm$ 0,1	1,36
2 $\rightarrow$ 3	0,11	1,5 $\pm$ 0,3	0,72 $\pm$ 0,1	0,96 $\pm$ 0,1	1,33
3 $\rightarrow$ 4	0,13	1,45 $\pm$ 0,12	0,76 $\pm$ 0,03	1,10 $\pm$ 0,1	1,45
4 $\rightarrow$ 5	0,17	1,42 $\pm$ 0,22	0,81 $\pm$ 0,06	1,0 $\pm$ 0,1	1,23
5 $\rightarrow$ 6	0,19	1,42 $\pm$ 0,25	0,73 $\pm$ 0,06	1,05 $\pm$ 0,1	1,44

Tabelle 8.1.: Anpassungsparameter für Skalierungsmodell,  $z_T$  wurde aus der Messung bei  $f = 307$  MHz bestimmt.

tronen mit Wechselwirkung im untersten Landau-Niveau (Huckestein *et al.* [74]) und dem Experiment von Engel *et al.* [10]. In beiden Fällen wurde für den dynamischen Exponenten  $z \approx 1,0$  bestimmt.

Für  $\nu > 2$  ergibt sich ein kleinerer dynamischer Exponent von  $z \approx 0,75 \pm 0,06$ , der keine weitere systematische Abhängigkeit vom Füllfaktor zeigt. Es gibt keine numerischen Untersuchungen, mit denen dieses Ergebnis verglichen werden kann. Im Experiment von Engel *et al.* ist bei der höchsten Frequenz fast keine Auflösung der Spinniveaus im zweiten Landau-Niveau zu beobachten. Es ist daher unklar, wie der für diese Niveaus gewonnene Exponent  $z = 1$  in ihrem Experiment beurteilt werden muss. Außerdem passen Engel *et al.* ein reines Potenzgesetz ab  $f = 1$  GHz an ihre Daten an, obwohl für  $f \leq 1$  GHz bereits vollständige Sättigung der Halbwertsbreite durch die endliche Proben temperatur eingetreten ist. Eine Anpassung ihrer Daten ab  $f = 2$  GHz ergibt niedrigere Exponenten  $z < 1$ .

Die Analyse der Daten durch eine Zwei-Parameter-Skalierungsfunktion zeigt also, dass der dynamische Exponent  $z$  tatsächlich vom Temperaturexponenten  $z_T$  abweichen kann. Insbesondere scheint das Verhältnis  $z_T/z \approx 1,3 \pm 0,1$  für diese Probe auch unabhängig vom Übergang von nur einem gefüllten Landau-Niveaus zu mehreren gefüllten Niveaus zu sein.

### 8.3.5. Test linearer Abhängigkeit der Halbwertsbreite

Balaban *et al.* [11] interpretierten ihre Messungen durch eine lineare Abhängigkeit der Halbwertsbreite von der Frequenz. Die Darstellung der in dieser Arbeit gewonnenen Daten auf linearer Skala in Abbildung 8.15 zeigt, dass die Halbwertsbreite auch mit einer linearen Abhängigkeit von der Frequenz kompatibel ist. Diese Anpassung ist jedoch nicht, wie Balaban *et al.* für ihre Daten reklamieren, von besserer Qualität als ein Skalierungsverhalten. Allerdings muss auch hervorgehoben werden, dass Balaban *et al.* ihre Daten mit einem reinen Potenzgesetz über einen Frequenzbereich von  $f = 0,7 - 7$  GHz verglichen haben. Der Vergleich der Messungen bei verschiedenen Temperaturen deutet jedoch für ihre Proben auf eine elektronische Temperatur von mindestens  $T_e = 200$  mK hin. Die Daten können also auch bei Gültigkeit

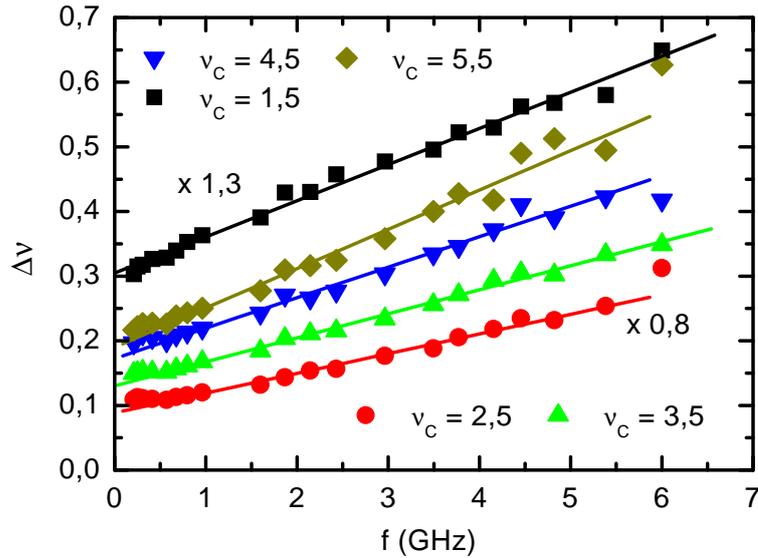


Abbildung 8.15.: Darstellung der Halbwertsbreite auf linearer Skala.

von Skalierungsverhalten in dem ausgewerteten Frequenzbereich nicht durch einen Ein-Parameter-Skalierungsansatz, den das Potenzgesetz darstellt, beschrieben werden. Gleichzeitig stellen sie fest, dass im Falle eines Potenzgesetzes sich ein Exponent von der Größenordnung  $1/(z\gamma) \sim 0,6$  ergeben würde. Hieraus folgt  $z \sim 0,7$ , kompatibel mit den hier gefundenen Werten.

Der stärkere Einwand gegen Skalierungsverhalten in der Arbeit von Balaban *et al.* ist das mangelhafte Skalierungsverhalten des herkömmlich gemessenen  $\rho_{xx}$  mit der Temperatur, während eine lineare Abhängigkeit von der Temperatur akzeptable Anpassung ergibt. Der entsprechende Vergleich in Abschnitt 8.2 für die hier untersuchte Probe zeigt jedoch eine sichtbar bessere Beschreibung durch Skalierungsverhalten als durch eine lineare Abhängigkeit.

Es kann also nicht sicher nachgewiesen werden, dass die Probe Skalierungsverhalten mit der Frequenz und nicht nur ein einfaches lineares Gesetz zeigt. Das nachgewiesene Skalierungsverhalten in der Temperatur lässt jedoch die Skalierungsanalyse für die Frequenz als sinnvoll erscheinen. Wünschenswert wäre eine Ausdehnung des Frequenzbereichs auf  $f > 10$  GHz, um einen eindeutigen Nachweis von Skalierungsverhalten zu geben.

## 8.4. Frequenzabhängiges variable-range hopping

Bisher wurde die frequenzabhängige Leitfähigkeit nur auf ihren kritischen Punkt und die Halbwertsbreite der Leitfähigkeitsmaxima untersucht. Diese Größen sind noch dem „metallischen“ Verhalten in der Umgebung des kritischen Punktes zuzuordnen. Wie auch im DC-Transport wird der Transport im Übergang zum Plateau bei tiefen Temperaturen durch *variable-range hopping* bestimmt.

### 8.4.1. Theorie

Die erste theoretische Untersuchung von *hopping* bei hohen Frequenzen in ungeordneten zweidimensionalen Systemen geschah durch Efros [164]. Er untersuchte den Fall  $\sigma(\omega) \gg \sigma(\omega = 0)$  unter gleichzeitiger Einschränkung auf  $\hbar\omega < k_B T$  und  $\omega < \omega_{ph}$ .  $\omega_{ph}$  ist die charakteristische Phononenfrequenz mit einer typischen Größenordnung von  $10^{12} - 10^{13} \text{ s}^{-1}$ . Für dieses Regime findet er

$$\begin{aligned} \text{Re } \sigma(\omega) &= 0,5\chi\xi\omega, \quad \chi = \frac{2\pi}{3}\varepsilon\varepsilon_0, \quad (\hbar\omega < k_B T) \\ \text{Im } \sigma(\omega) &= \text{Re } \sigma(\omega) \frac{2}{\pi} \ln \frac{\omega_{ph}}{\omega}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

$\xi$  ist die Lokalisierungslänge. Dieses Ergebnis ist nach Polyakov und Shklovskii [119] auch im Quanten-Hall-Effekt gültig. Sie erweiterten die theoretische Behandlung auf  $\hbar\omega > k_B T$  zur Anwendung auf den Plateau-Übergang und fanden für den Realteil ein nur wenig modifiziertes Ergebnis:

$$\text{Re } \sigma(\omega) = \chi\xi\omega \quad (8.23)$$

Leitet man aus dieser Beziehung analog zu Abschnitt 5.2.1 mit den dortigen Bezeichnungen eine Halbwertsbreite ab, so gilt

$$\Delta\nu = \left( \frac{T_{\text{eff}}(\omega)}{T_1} \right)^{1/\gamma}, \quad T_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{ak_B}\omega \gg T, \quad a \sim 1. \quad (8.24)$$

Diese Definition einer effektiven Temperatur  $T_{\text{eff}}(\omega)$  ist äquivalent zu der Definition einer effektiven Frequenz  $f_T(T)$  in Gleichung 8.21.

Über den Imaginärteil machen Polyakov und Shklovskii leider keine Angaben, es ist jedoch zu erwarten, dass das Verhältnis

$$\psi = \frac{\text{Im } \sigma}{\text{Re } \sigma} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{\omega_{ph}}{\omega}, \quad k_B T > \hbar\omega \quad (8.25)$$

im Übergang zu  $\hbar\omega \geq k_B T$  weiterhin eine im Vergleich zu  $\text{Re } \sigma \propto \omega$  schwache Frequenzabhängigkeit aufweist. Im in dieser Arbeit untersuchten Frequenzbereich hat der inverse Verlustfaktor  $\psi$  mit der typischen Frequenz  $\omega \sim 3 \text{ GHz}$  und der charakteristischen Phononen-Frequenz  $\omega_{ph} \sim 10^{12} - 10^{13} \text{ s}^{-1}$  nach Gleichung 8.25 die Größenordnung  $\psi \sim 3 - 4$ .

### 8.4.2. Leitfähigkeit im Plateau – Beurteilung der Kalibrierung

Mit Hilfe der Theorie des *variable-range hopping* kann nun auch der in Abschnitt 8.1.1 angesprochene Fehler durch die Kalibrierung untersucht werden. Zur Kalibrierung wird die Leitfähigkeit für Füllfaktor  $\nu = 2$  als null angenommen. Die experimentell bestimmte Leitfähigkeit ergibt sich nach Gleichung 8.8 aus der „wahren“ Leitfähigkeit durch Subtraktion des Wertes bei  $\nu = 2$ .

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

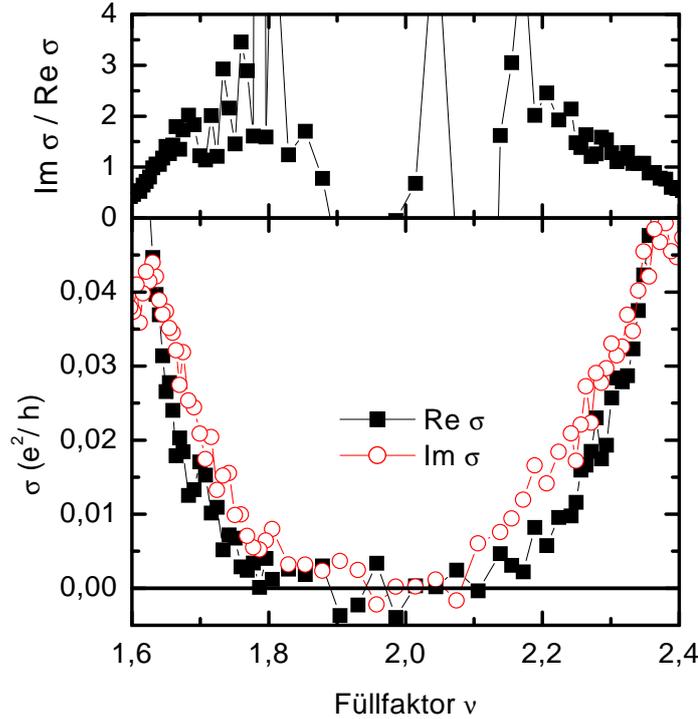


Abbildung 8.16.: Realteil und Imaginärteil der Leitfähigkeit im Quanten-Hall-Plateau  $\nu = 2$  für  $f = 2,96$  GHz.

Für eine feste Frequenz ist nach Gleichung 8.22 die Leitfähigkeit eine lineare Funktion der Lokalisierungslänge, die wiederum eine Funktion des Füllfaktors ist. Somit gilt

$$\sigma^{\text{exp}}(\nu) \propto \xi(\nu) - \xi(\nu = 2). \quad (8.26)$$

In Abbildung 8.16 ist die für  $f = 2,96$  GHz mit der Festlegung von  $\sigma(\nu = 2) = 0$  bestimmte Leitfähigkeit im Bereich des Plateaus  $\nu = 2$  dargestellt. Das Verhältnis zwischen dem Realteil (gefüllte Symbole) und dem Imaginärteil (offene Symbole) ist zusätzlich im oberen Bild abzulesen. Bei  $\nu \approx 2$  schwanken sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil um eine mittlere Leitfähigkeit  $\sigma = 0$ . Dieser Wert wurde durch die Kalibrierung (vgl. Abschnitt 8.1.1) festgelegt. Die Daten zeigen aber auch für das komplette Intervall  $[1,8, 2,2]$  eine Leitfähigkeit  $\sigma^{\text{exp}} \leq 0,005 e^2/h$ , die nur einen Faktor zwei über der mittleren Schwankung der Messwerte liegt.

Aus Untersuchungen des temperaturabhängigen *variable-range hopping*-Transportes für eine Probe ähnlicher Beweglichkeit durch Furlan [116] kann das Verhältnis der Lokalisierungslängen  $\xi(\nu)$  bei den Füllfaktoren  $\nu = 1,8$  und  $\nu = 2,0$  grob abgeschätzt werden. Dies führt mit Gleichung 8.23 zu einem erwarteten Verhältnis der Leitfähigkeiten:

$$\frac{\sigma(\omega, \nu = 1,8)}{\sigma(\omega, \nu = 2,0)} \propto \frac{\xi(\nu = 1,8)}{\xi(\nu = 2,0)} \sim 10, \quad (\sigma(\omega) \gg \sigma(\omega = 0)) \quad (8.27)$$

Die erwartete Leitfähigkeit für  $\nu = 2$  ist somit für 3 GHz von der Größenordnung

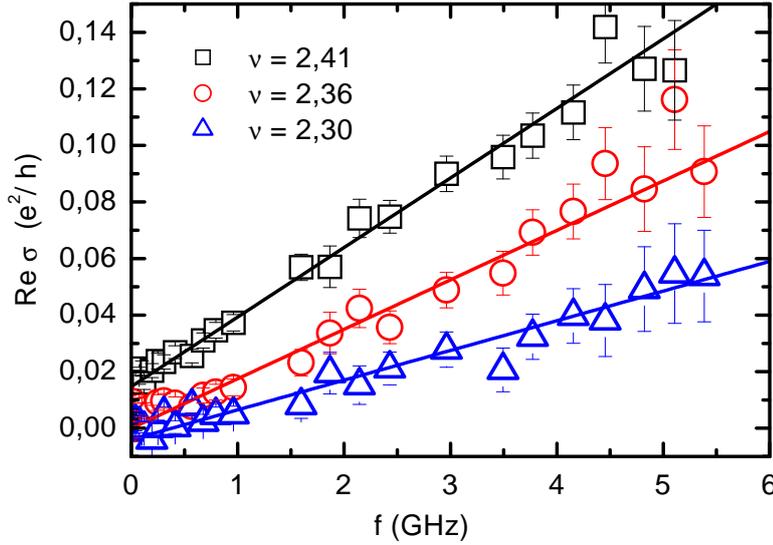


Abbildung 8.17.: Frequenzabhängigkeit des Realteils der Leitfähigkeit. Die eingezeichneten Geraden entsprechen der Anpassung von frequenzabhängigem *variable-range hopping*.

$\sigma \sim 0,0005 e^2/h$  und damit deutlich kleiner als die Streuung der Messwerte. Der systematische Fehler bei der Kalibrierung ist also deutlich kleiner als der statistische durch die Streuung und kann vernachlässigt werden.

In Abbildung 8.16 ist auch das Verhältnis  $\psi$  von Imaginärteil zu Realteil der Leitfähigkeit dargestellt. Im Plateaubereich ( $1,7 < \nu < 2,3$ ) ist es von der Größenordnung  $\psi \sim 1 - 3$  und damit etwas kleiner als die Abschätzung  $\psi \sim 3 - 4$  nach Efros für  $\hbar\omega < k_B T$ . Bei Annäherung an den kritischen Punkt nimmt  $\psi$  ab. Hier ist  $\sigma(\omega) \gg \sigma(\omega = 0)$  nicht mehr erfüllt. Weitere Daten zum Imaginärteil werden im Anhang A.6 dargestellt.

### 8.4.3. Lokalisierungslänge im VRH-Regime

Für die Leitfähigkeit im frequenzdominierten Regime ( $\sigma(f) \gg \sigma(0)$ ) ist nach Gleichung 8.23 ein lineares Verhalten  $\text{Re } \sigma(f) = b \cdot f$  zu erwarten, wobei  $b \propto \xi$  gilt. Für die Anpassung von *variable-range hopping* wird diese Beziehung hier um einen Term bei  $f = 0$  ergänzt, der die Leitfähigkeit durch eine endliche Temperatur nahe dem kritischen Punkt widerspiegelt. Entsprechend Gleichung 8.23 gilt

$$\text{Re } \sigma(f, \nu) = \sigma_0^f + b(\nu) \cdot f, \quad b(\nu) \approx 2\pi\chi\xi(\nu), \quad \chi = 2\pi\epsilon\epsilon_0/3. \quad (8.28)$$

Hierbei ist  $\xi(\nu)$  die Lokalisierungslänge und  $\sigma_0^f$  der Beitrag zur Leitfähigkeit durch die Temperatur  $T > 0$ . Der Gültigkeitsbereich der Beziehung zwischen  $b$  und  $\xi$  muss anhand der Daten kritisch beleuchtet werden, da Gleichung 8.23 für den Grenzfall  $\sigma(f) \gg \sigma_0^f$  abgeleitet wurde.

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

In Abbildung 8.17 ist die lineare Anpassung an die Daten für verschiedene Füllfaktoren im Übergang vom kritischen Punkt  $\nu_c$  zum Plateau  $\nu = 2$  gezeigt. Die Anpassung wurde für Frequenzen ab 300 MHz durchgeführt. Bei niedrigeren Frequenzen können die in Abschnitt 8.3.1 untersuchten Effekte des Randes oder des Kontakts das Ergebnis verfälschen. Da die Daten für verschiedene Frequenzen eine unterschiedliche Streuung zeigen, wurde zunächst im Füllfaktorbereich  $\nu = 2 - 4$  die Streuung der Daten in Abbildung 8.7 anhand einer Anpassung durch Gauß-Funktionen analysiert. Aus dieser Streuung lässt sich die Standardabweichung individuell für die verschiedenen Frequenzen bestimmen und kann in der Modellanpassung berücksichtigt werden. Die Standardabweichung ist als Fehlerbalken in Abbildung 8.17 eingetragen.

Der Vergleich der linearen Anpassung mit den Daten zeigt eine gute Übereinstimmung. Die Frequenzabhängigkeit des Realteils lässt sich also bis nahe an den kritischen Füllfaktor (hier  $\nu_c = 2, 5$ ) und damit bis zu hohen Leitfähigkeiten bei den höchsten Frequenzen gut durch die lineare Form in Gleichung 8.28 beschreiben.

Eine Auswertung des Imaginärteils wird in Anhang A.7 getestet. Es zeigt sich, dass in dem hier untersuchten Regime  $hf \gtrsim k_B T$  die Übertragung der Gleichung 8.25 keine sinnvollen Ergebnisse liefert. Im Folgenden soll daher nur der Realteil bezüglich *variable-range hopping* analysiert werden.

In Abbildung 8.18 wird ein Überblick über die Abhängigkeit von Steigung ( $b(\nu)$ ) und Offset ( $\sigma_0^{(f)}$ ) der linearen Modellierung des Realteils für Frequenzen  $f > 300$  MHz gegeben. Der Offset entspricht der im Frequenzbereich 0,3 – 1 GHz beobachteten Leitfähigkeit durch die endliche Temperatur  $T_e \approx 0,1$  K des 2DES und kann somit zur Orientierung dienen. Seine Maxima entsprechen den kritischen Punkten der Plateau-Übergänge.

Frequenzabhängiges *variable-range hopping* nach Gleichung 8.23 ist nur unter der Bedingung  $\sigma_{(f)}(\nu) \gg \sigma_0^{(f)}(\nu)$  gültig. Die Bereiche, in denen diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist, sind in der Abbildung grau unterlegt. In diesen Bereichen zeigt auch die Steigung  $b(\nu)$  ein Sättigungsverhalten, das mit einer Interpretation  $b \propto \xi$  durch die Lokalisierungslänge inkompatibel ist, da für diesen divergentes Verhalten erwartet wird.

Im übrigen Bereich kann die in Abbildung 8.18 dargestellte Steigung  $b$  direkt mit

$$\xi = \frac{3b(\nu)}{4\pi^2 \epsilon \epsilon_0}, \quad (\sigma(f, \nu) > \sigma_0^{(f)}(\nu)) \quad (8.29)$$

in die Lokalisierungslänge umgerechnet werden. Die entsprechende Achse für die Umrechnung in die Lokalisierungslänge  $\xi$  ist ergänzend in die Abbildung 8.18 eingezeichnet.

### Test des kritischen Verhaltens der Lokalisierungslänge

In Abbildung 8.19 ist die entsprechend Gleichung 8.29 aus den Steigungen in Abbildung 8.18 bestimmte Lokalisierungslänge als Funktion der Abstandes  $\delta\nu = \nu - \nu_c$  zum nächsten kritischen Füllfaktor auf doppelt logarithmischer Skala eingezeichnet. Hier-

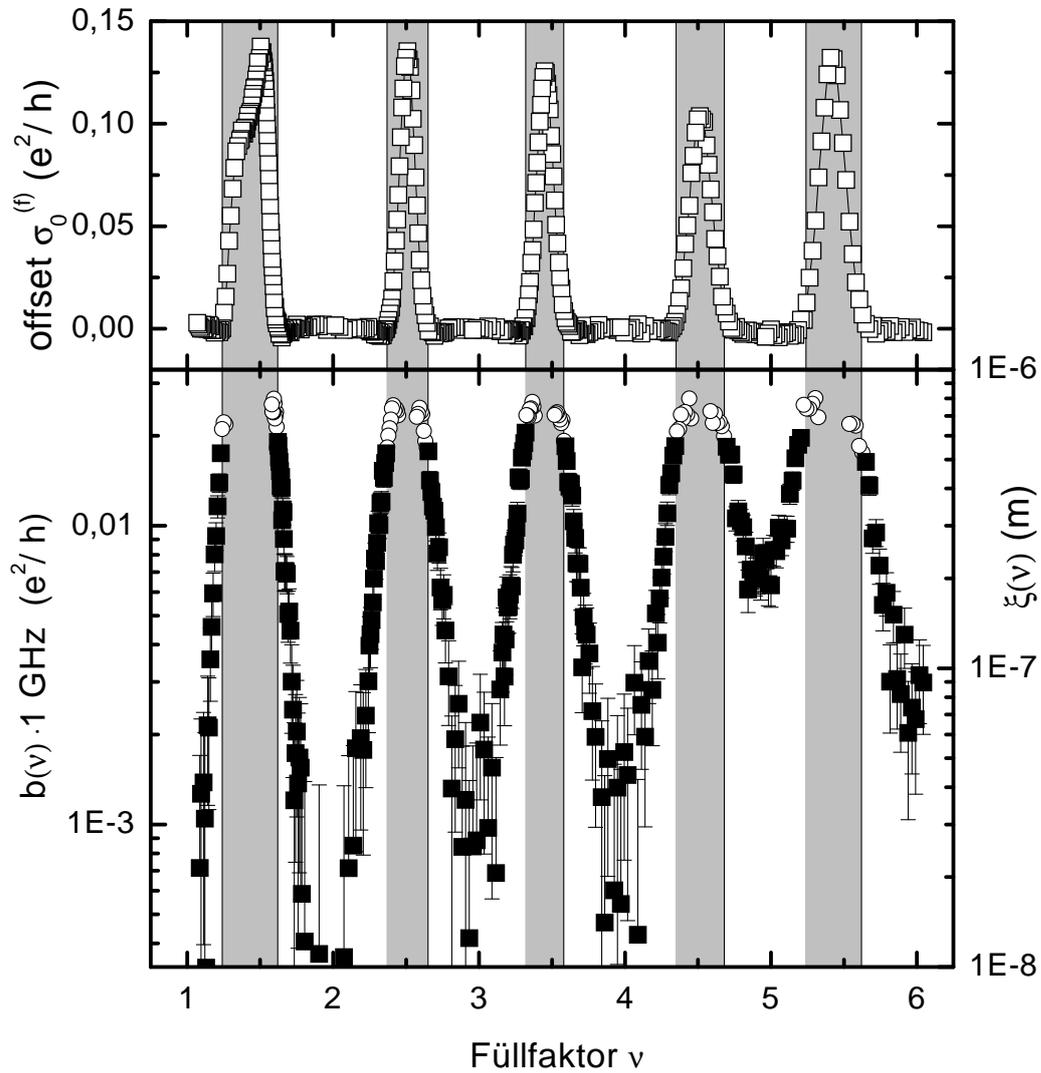


Abbildung 8.18.: Auswertung der Frequenzabhängigkeit des Realteils der Leitfähigkeit durch  $\sigma(f, \nu) = \sigma_0^f(\nu) + b(\nu) \cdot f$  im Frequenzbereich  $300 \text{ MHz} < f < 6 \text{ GHz}$ . **Oben:**  $\sigma_0^{(f)}$  gibt in guter Näherung die Leitfähigkeit für  $f < 1 \text{ GHz}$  wieder. **Unten:** Der Parameter  $b(\nu)$  entspricht für  $\sigma(f) \gg \sigma_0^f$  mit Gleichung 8.23 der Lokalisierungslänge  $\xi = 3b/(4\pi^2\epsilon\epsilon_0)$ . Im grau hinterlegten Bereich ist diese Beziehung nicht mehr gültig. Die Datenpunkte in diesem Bereich sind als offene Kreise dargestellt.

## 8. Frequenzabhängigkeit im QHE

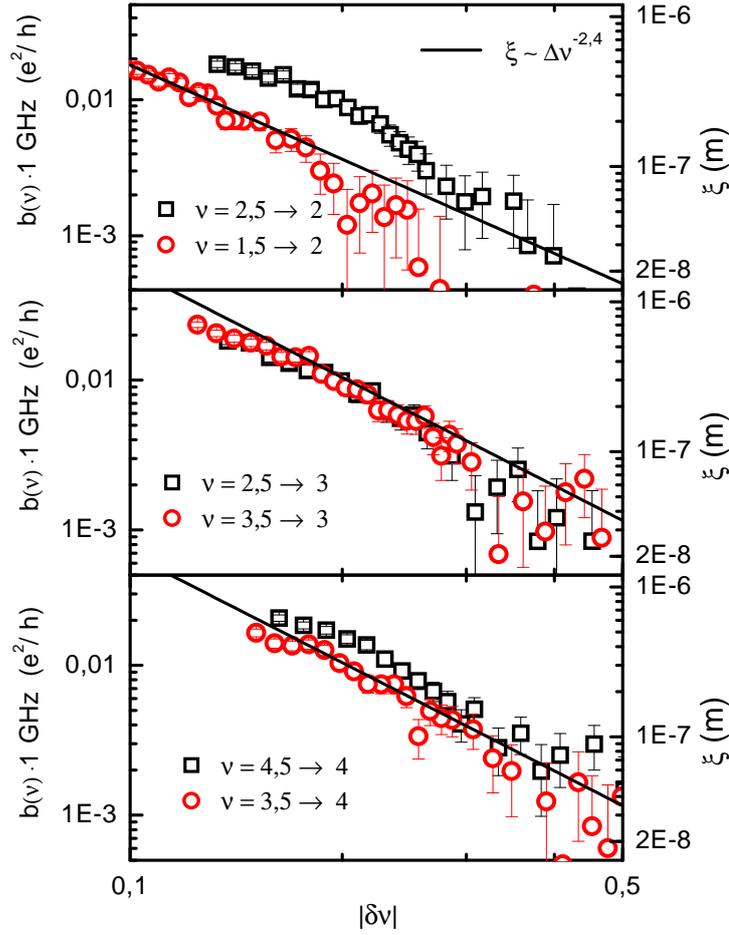


Abbildung 8.19.: Auftragung der Steigung  $b(\nu)$  bzw. der Lokalisierungslänge  $\xi(\nu)$  aus Abbildung 8.18 als Funktion des Abstandes  $\Delta\nu = |\nu - \nu_c|$  zum nächsten kritischen Füllfaktor  $\nu_c$ . Die durchgezogenen Geraden entsprechen mit  $\xi \propto \Delta\nu^{-\gamma}$  ( $\gamma \approx 2,4$ ) dem postulierten kritischen Verhalten.

bei sind nur die Füllfaktorbereiche berücksichtigt, für die die Bedingung  $\sigma(f) \gg \sigma_0^{(f)}$  erfüllt ist.

Die Auftragung auf doppelt logarithmischer Skala ermöglicht den Test des erwarteten kritischen Verhaltens

$$\xi \propto |\delta E|^{-\gamma} \propto |\delta\nu|^{-\gamma}, \quad |\delta\nu| \lesssim 0,3, \quad (8.30)$$

wobei die Gültigkeit der Ersetzung von  $\Delta E$  durch  $|\delta\nu|$  in Abschnitt 5.3 abgeschätzt wurde.

Der Bereich im Füllfaktor ist zu klein, um eine zuverlässige Anpassung eines Potenzgesetzes durchzuführen, jedoch kann für den erwarteten Exponenten die Übereinstimmung mit den Daten getestet werden. Die in Abbildung 8.19 eingetragenen Geraden entsprechen Potenzgesetzen mit  $\gamma \approx 2,4$  entsprechend dem in Abschnitt 8.2 bestätigten universellen kritischen Exponenten. Die Übereinstimmung ist zufrieden-

stellend. Die stärkste Abweichung zeigen die Übergänge  $\nu = 2 \rightarrow 2, 5$  und  $\nu = 4 \rightarrow 4, 5$ . In beiden Fällen wird gerade damit begonnen, ein neues Landau-Niveau aufzufüllen. Es ist jedoch unklar, wieso dies im Vergleich zu den anderen Füllfaktorbereichen zu einem schlechteren Skalierungsverhalten führt.

In Abschnitt 8.4.1 wurde bei Gültigkeit des frequenzabhängigen *variable-range hopping* für die Skalierung der Halbwertsbreite ein dynamischer Exponent  $z = 1$  abgeleitet. Damit ist das in diesem Abschnitt beobachtete Skalierungsverhalten auf den ersten Blick inkompatibel mit dem Exponenten  $z \approx 0,7 - 0,8$  aus der Analyse der Halbwertsbreite für  $\nu > 2$  (Abschnitt 8.3.4). Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dass für die Breitenskalierung im Wesentlichen Füllfaktoren um  $|\delta\nu| = |\nu - \nu_c| \approx 0,1$  relevant sind. In diesem Bereich ist aber, wie oben gezeigt, frequenzabhängiges *variable-range hopping* nicht mehr gültig. Die unterschiedlichen Exponenten spiegeln also den Wechsel des Transportmechanismus von *variable-range hopping* im lokalisierten Regime zu einem „metallischen“ Verhalten nahe dem Füllfaktor wieder.

## Lokalisierungslänge im Plateau

Zum Abschluss soll noch die Lokalisierungslänge in der Mitte der Plateaus analysiert werden. Für  $\nu \leq 2$  ist dabei nur eine Abschätzung möglich, da die Leitfähigkeiten dort zu klein sind, um eine Analyse durchzuführen. Die Werte sind in Tabelle 8.2 zu finden.

Zum Vergleich ist die natürliche Längenskala im Magnetfeld, die magnetische Länge  $l_B$  gegeben. Diese entspricht der Ausdehnung der Wellenfunktion eines Elektrons im untersten Landau-Niveau [33]. Der dritte eingetragene Parameter ist die Ausdehnung  $r_c$  der Wellenfunktionen im obersten gefüllten Landau-Niveau mit Landau-Quantenzahl  $n$ . Entsprechend Gleichung 2.26 gilt  $r_c = l_B \sqrt{2n + 1}$  mit  $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$ . Außer für  $\nu = 5$  zeigt sich eine gute quantitative Übereinstimmung zwischen der Lokalisierungslänge und der Ausdehnung  $r_c$  der Wellenfunktion eines einzelnen Elektrons ohne Überlapp mit anderen Wellenfunktionen. Dies ist die kleinste Lokalisierungslänge, die möglich ist. Dass dies auch die tatsächlich gefundene Lokalisierungslänge ist, zeigt, dass die Zustandsdichte in der Mitte des Plateaus so gering ist, so dass keine Deloka-

$\nu$	$n$	$\xi$ (nm)	$l_B$ (nm)	$r_c$ (nm)
1	0	$\leq 10$	7	7
2	0	$\leq 10$	10	10
3	1	$\sim 20 - 40$	12	21
4	1	$\sim 20 - 40$	14	23
5	2	$\sim 200$	16	36
6	2	$\sim 60$	17	40

Tabelle 8.2.: Lokalisierungslänge  $\xi$ , magnetische Länge  $l_B$  und Ausdehnung der Wellenfunktion  $r_c$  in verschiedenen Plateaus.  $\nu$  ist der Füllfaktor und  $n$  die Landau-Quantenzahl.

lisierung durch Überlapp mit anderen Wellenfunktionen stattfindet.

Hiervon weicht nur das Plateau bei  $\nu = 5$  ab. Grund hierfür ist, dass die Spin-Aufspaltung (die Ursache der Energielücke bei ungeraden Füllfaktoren) mit zunehmendem Füllfaktor und abnehmendem Magnetfeld schneller reduziert wird als die Landauaufspaltung bei geraden Füllfaktoren. Dies ist auf die komplexe Abhängigkeit des effektiven  $g$ -Faktors zurückzuführen. Für Details sei auf Abschnitt 2.3.1 verwiesen.

## 8.5. Zusammenfassung

Es wurde eine Messung der Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit bis zu  $f = 6$  GHz mit einer Temperatur des zweidimensionalen Elektronengases von etwa  $T_e \approx 0,1$  K realisiert. Damit ist ein Vorstoß in den Bereich  $hf > k_B T_e$  gelungen, in dem die Frequenzabhängigkeit über die Temperaturabhängigkeit dominiert.

Die untersuchte Probe zeigt bei niedrigen Frequenzen („quasi-DC“) Skalierungsverhalten der Halbwertsbreite sowohl mit der Temperatur ( $\Delta\nu \propto T^\kappa$ ) als auch mit der angelegten Spannung ( $\Delta\nu \propto U^b$ ). Aus den gewonnenen Exponenten  $\kappa \approx 0,41$  und  $b \approx 0,21 \approx \kappa/2$  ergibt sich ein kritischer Exponent  $\gamma \approx 2,4$  und ein Temperaturexponent  $z_T = 1$  in guter Übereinstimmung mit den erwarteten universellen Werten.

Die kritischen Leitfähigkeiten  $\sigma_c(\nu_c)$  sind bei niedriger Frequenz stark unterdrückt. Dies ist ein Effekt der Kopplung des 2DES an den ohmschen Kontakt. Es kann nicht sicher geklärt werden, ob dieser Effekt auf durch den Kontakt induzierte Inhomogenitäten am Rand der Probe oder auf die mikroskopische Realisierung der Kontakte zurückzuführen ist. Unabhängig hiervon führt eine hohe Frequenz  $f > 1$  GHz zu einer teilweisen Aufhebung dieses Effekts, und es wird für Füllfaktoren  $\nu > 2$  ein weitestgehend vom Füllfaktor und von der Frequenz unabhängiger Wert  $\sigma_c \approx 0,18e^2/h$  beobachtet. Diese Unabhängigkeit ist eine gute Bestätigung der Erwartungen der Skalierungstheorie.

Der gegenüber der universell postulierten Leitfähigkeit  $0,5e^2/h$  reduzierte Wert kann analog zu den Untersuchungen in Kapitel 6 durch Inhomogenitäten verstanden werden. Die Größe der hier gefundenen kritischen Leitfähigkeit ist vergleichbar mit den Messungen von Rokhinson *et al.* [129], wobei der große Unterschied der Geometrien zu betonen ist. Während der Leitwert, also die direkte Messgröße, im Fall von Rokhinson *et al.* nur  $G = e^2/h$  ist und nach der Interpretation in Kapitel 6 nur einem Leitfähigkeitskanal entspricht, ist in den hier durchgeführten Messungen bei hoher Frequenz  $G \approx 45e^2/h$ . Dies ist auch deutlich größer als der Leitwert in den in Kapitel 6 untersuchten Proben und entspricht der Erwartung für Inhomogenitäten der Ladungsträgerkonzentration mit einer Korrelationslänge  $R_c$ , die deutlich kleiner als die Probengröße ist.

Bei der Analyse der Halbwertsbreiten der Shubnikov-de Haas-Leitfähigkeitsmaxima zeigte sich, dass im erreichten Frequenzbereich die Temperatur in der Skalierungsanalyse nicht vernachlässigt werden darf. Mit einem Ansatz für ein Zwei-Parameter-Skalierungsverhalten mit Temperatur und Frequenz als Parametern ist eine gute Beschreibung der Daten für  $f = 0,3 - 6$  GHz möglich. Mit Vorgabe des kritischen Expo-

nenten der Lokalisierungslänge  $\gamma = 2, 4$  entsprechend der „quasi-DC“ Analyse konnte der dynamische Skalierungsexponent  $z$  gewonnen werden. In der hier untersuchten Probe ergab sich  $z = 1,05 \pm 0,06$  für das unterste Landau-Niveau und  $z = 0,75 \pm 0,05$  für die höheren Landau-Niveaus. Dies weicht von dem postulierten  $z = 1$  ab. Es gibt jedoch keine zuverlässigen numerischen und experimentellen Resultate für höhere Landau-Niveaus, mit denen dieses Ergebnis verglichen werden könnte. Hier ist also Bedarf für weitere experimentelle und theoretische Untersuchungen.

Für kleine Leitfähigkeiten im Plateaubereich wurde außerdem eine Analyse von frequenzabhängigem *variable-range hopping* durchgeführt. Dies bietet ein direktes Maß für die Lokalisierungslänge  $\xi$ , so dass direkt das Skalierungsverhalten und die absolute Größe von  $\xi$  untersucht werden können. Für eine sichere Skalierungsanalyse ist der Füllfaktorbereich mit gültigen *variable-range hopping* durch die Temperatur  $T_e \approx 0,1$  K zu weit eingeschränkt, es zeigt sich jedoch eine befriedigende Übereinstimmung mit dem für  $\gamma = 2, 4$  erwarteten Verhalten. Die absolute Größe der Lokalisierungslänge in der Mitte der Quanten-Hall-Plateaus zeigt gute Übereinstimmung mit der Ausdehnung der Ein-Elektron-Wellenfunktionen des jeweils obersten gefüllten Landau-Niveaus.



## 9. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde der Übergangsbereich zwischen den Plateaus im ganzzahligen Quanten-Hall-Effekt im hohen Magnetfeld auf vielfältige Weise untersucht. Der Übergang wurde durch Variation des Magnetfeldes  $B$  und damit des Füllfaktors  $\nu$  durchgestimmt. Hierbei wurden temperatur-, spannungs- und frequenzabhängige Messungen sowohl mitten im Plateau-Übergang als auch am Rande der Plateaus verwendet.

Als Untersuchungsobjekte dienten zweidimensionale Elektronensysteme in Heterostrukturen der III-V-Halbleiter Galliumarsenid und Aluminiumgalliumarsenid mit einer weit gestreuten Beweglichkeit der Elektronen. Die Beweglichkeit der Elektronen wird in einem Großteil der Proben durch ein absichtlich eingebrachtes attraktives oder repulsives Unordnungspotential bestimmt, das durch eine zusätzliche Dotierung der Heterostruktur mit Silizium oder Beryllium erzeugt wird. Die Proben weisen deutlich unterschiedliche Zufallspotentiale auf, so dass der Einfluss dieses Potentials getestet werden konnte.

Nahezu alle Experimente wurden in Corbino-Geometrie durchgeführt. Der elektrische Leitwert dieser Geometrie ist proportional zur diagonalen Komponente  $\sigma_{xx}$  des Leitfähigkeitstensors. Die Leitfähigkeit ist im Bereich der Quanten-Hall-Plateaus  $\sigma_{xx} \approx 0$  und nimmt nur im Plateau-Übergang Werte  $\sigma_{xx} > 0$  an. Sie zeigt als Funktion des Füllfaktors ein Maximum. Die maximale Leitfähigkeit kennzeichnet den kritischen Punkt  $\nu_c$  des Übergangs.

Von zentraler Rolle war die Frage nach einem universellen kritischen Verhalten des Plateau-Übergangs, das durch die Divergenz der Lokalisierungslänge  $\xi \propto |\nu - \nu_c|^{-\gamma}$  in der Nähe des kritischen Punktes  $\nu_c$  mit einem universellen Exponenten  $\gamma$  gekennzeichnet ist. Eine häufig benutzte Methode, dies zu untersuchen, ist die Analyse der Temperaturabhängigkeit der Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  des Leitfähigkeitsmaximums. Für eine Anzahl der untersuchten Proben gilt  $\Delta\nu \propto T^\kappa$  mit nicht universellem Exponenten  $\kappa$ . In dieser Arbeit wurde die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit dieser Proben im Regime des *variable-range hopping* (VRH) untersucht, das die Leitfähigkeit im Übergang zum Plateau beschreibt. Durch Analyse des VRH konnte ein Potenzgesetz der Lokalisierungslänge bis zu einem Abstand  $\delta\nu \approx 0,3$  vom kritischen Punkt nachgewiesen werden. Der Exponent dieses Potenzgesetzes hat unabhängig vom Unordnungspotential und vom Exponenten  $\kappa$  der Halbwertsbreite den Wert  $\gamma = 2,3 \pm 0,2$  und zeigt damit eine gute Übereinstimmung mit dem universell postulierten, numerisch und aus Größenskalierung gewonnenen Wert  $\gamma = 2,35$ . Somit wurde gezeigt, dass auch bei einem nicht universellen Verhalten der Halbwertsbreite in einem ge-

## 9. Zusammenfassung

wissen Abstand vom kritischen Punkt, der durch die Gültigkeit von *variable-range hopping* gekennzeichnet ist, das universelle Verhalten der Lokalisierungslänge wieder auflebt.

Durch eine ergänzende Untersuchung der Abhängigkeit des *variable-range hopping* vom elektrischen Feld konnte der universelle Exponent bestätigt und ein absoluter Wert für die Lokalisierungslänge im Übergang zum Füllfaktor  $\nu = 2$  bestimmt werden. Im untersuchten Bereich gilt  $\xi \sim l_B |\nu - \nu_c|^{-\gamma}$  mit  $\gamma \approx 2,3$ , wobei die magnetische Länge  $l_B$  die natürliche Längeneinheit im hohen Magnetfeld ist und die Ausdehnung der Zustände im untersten Landau-Niveau angibt.

Der zweite Teil der Arbeit untersuchte die maximale Leitfähigkeit  $\sigma_c$  am kritischen Punkt  $\nu_c$  des Plateau-Übergangs in Abhängigkeit von der Temperatur. Die Skalierungstheorie sagt einen universellen, temperaturunabhängigen Wert  $\sigma_c = 0,5 e^2/h$  voraus, der im Experiment im Allgemeinen nicht beobachtet wird. Ein theoretischer Erklärungsansatz von Ruzin, Cooper und Halperin führt dies auf Inhomogenitäten der Ladungsträgerkonzentration zurück. Aus diesem Modell lassen sich Aussagen über die Temperatur- und Geometrieabhängigkeit der gemessenen kritischen Leitfähigkeit ableiten, die in dieser Arbeit bestätigt werden konnten. Somit ist der Nachweis gelungen, dass der Wert von  $\sigma_c$  durch solche Inhomogenitäten bestimmt wird. Das Experiment zeigt zusätzlich, dass die makroskopische Ausdehnung und Ordnung dieser Schwankungen der Ladungsträgerdichte von derselben Größe wie die typische Probe und damit größer als von der Theorie angenommen ist.

Im dritten Teil wurde die Leitfähigkeit im Plateau-Übergang für mesoskopische Proben analysiert. Für kleine Proben sind bei tiefen Temperaturen quantenmechanische Korrekturen nicht mehr vernachlässigbar, und es kommt zu Fluktuationen im Leitwert in Funktion des Magnetfeldes. Es konnte gezeigt werden, dass sich die Fluktuationen im Plateau-Übergang völlig analog zu universellen Leitwertfluktuationen verhalten. Untersucht wurde die Temperaturabhängigkeit der Amplitude und die Spektraldichte der Fluktuationen. Alle Daten der Fluktuationen lassen sich im untersuchten Temperaturbereich  $T = 30 - 500$  mK durch nur eine temperaturabhängige Länge  $L_{Th} \approx \sqrt{\hbar D/k_B T}$  verstehen.

Die Fluktuationen lassen sich auch als Thermometer für die elektronische Temperatur  $T_e$  verwenden. Solange die Amplitude der Fluktuationen mit abnehmender Temperatur  $T_{\text{Kryo}}$  des Kryostaten entsprechend  $\delta G_{\text{rms}} \propto L_{Th}$  zunimmt, koppelt das Elektronensystem mit  $T_e = T_{\text{Kryo}} = T$  thermisch an. Damit gelang der Nachweis, dass die Sättigung der Halbwertsbreite des Leitfähigkeitsmaximums im Plateau-Übergang nicht durch eine Sättigung der elektronischen Temperatur hervorgerufen wird, sondern ein Effekt der geringen Probengröße sein muss, wie es von Koch *et al.* zur Bestimmung der Größenskalierung angenommen wurde. Damit ist außerdem gezeigt, dass es zwei relevante Längen gibt: Das Skalierungsverhalten wird durch eine Länge  $L_T(T)$  bestimmt, die deutlich größer als die Längenskala  $L_{Th}$  der Fluktuationen ist und im Gegensatz zu  $L_{Th}$  bereits für  $T \approx 50 - 100$  mK von gleicher Größe wie die Abmessung der Probe ist.  $L_{Th}$  ist bei diesen Temperaturen etwa um einen Faktor zehn kleiner als  $L_T$ .

Im abschließenden vierten Teil der Arbeit wurde die Frequenzabhängigkeit des

Plateau-Übergangs in einer Probe für den spinaufgelösten Füllfaktorbereich  $\nu = 1 - 6$  untersucht. Hierbei wurde eine Messung über einen durchgehenden Frequenzbereich  $f = 100$  kHz bis zu 6 GHz bei einer gleichzeitig sehr niedrigen elektronischen Temperatur  $T_e \approx 100$  mK des 2DES realisiert. Für Frequenzen  $f < 1$  GHz zeigte sich eine unerwartete Frequenzabhängigkeit der kritischen Leitfähigkeit. Dies ist entweder auf ein Kontaktphänomen oder auf die im Kapitel 6 untersuchten Ladungsträgerinhomogenitäten zurückzuführen. Oberhalb von 1 GHz zeigt sich in guter Übereinstimmung mit der Skalierungstheorie ein weitestgehend von der Frequenz und dem Füllfaktor unabhängiger Wert  $\sigma_c \approx 0,18 e^2/h$ .

Durch Einführung eines Modells, das sowohl den Einfluss der Temperatur als auch der Frequenz enthält, konnte das Skalierungsverhalten der Halbwertsbreite mit der Frequenz analysiert werden. Hieraus ergibt sich ein Wert für das Produkt  $\gamma z$ , wobei  $z$  der dynamische Exponent ist. Der Exponent  $\gamma$  wurde zusätzlich aus der Abhängigkeit von der Temperatur und der angelegten Spannung zu  $\gamma = 2,4 \pm 0,1$  in guter Übereinstimmung mit dem universell postulierten Wert  $\gamma = 2,35$  gefunden. Damit konnte  $z$  für den Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$  zu  $z = 1,05 \pm 0,06$  und für die Übergänge von  $\nu = 2$  bis  $\nu = 6$  zu  $z \approx 0,75 \pm 0,05$  bestimmt werden. Der Exponent im untersten Landau-Niveau ist damit vergleichbar mit numerischen Berechnungen und dem Experiment von Engel *et al.* Für höhere Landau-Niveaus existieren keine zuverlässigen numerischen oder experimentellen Ergebnisse, mit denen der hier gefundene Wert verglichen werden könnte. Bemerkenswert ist der Unterschied zwischen  $z$  und dem Exponenten  $z_T \approx 1,0$  aus der Messung der Temperaturabhängigkeit bei niedriger Frequenz. Der von  $z = 1$  abweichende Exponent für höhere Landau-Niveaus stellt also eine Herausforderung an die Theorie dar.

Für den endgültigen Nachweis von frequenzabhängigem Skalierungsverhalten sind höhere Frequenzen nötig, um ein Ein-Parameter-Skalierungsverhalten bei Vernachlässigung der Temperatur zu prüfen. Da sich hier jedoch zum einen für die Abhängigkeit von der Temperatur und der Leistung ein deutliches Skalierungsverhalten ergibt und zum anderen die Frequenzabhängigkeit in guter Qualität durch einen Zwei-Parameter-Skalierungsansatz beschrieben wird, ist die gewählte Analyse mit einem Skalierungsansatz gerechtfertigt.

Zum Abschluss wurde frequenzabhängiges *variable-range hopping* im Übergang zum Plateau untersucht. Hieraus lässt sich wiederum die Lokalisierungslänge bestimmen. Bei der gegebenen Temperatur des Elektronensystems ist kein sicherer Nachweis von kritischem Verhalten möglich, die gewonnenen Daten sind jedoch mit einem Potenzgesetz mit universellem Exponenten kompatibel. Für die Größe der Lokalisierungslänge in der Mitte der Plateaus, also bei ganzzahligen Füllfaktoren, wurden Werte  $\xi \sim r_c$  gefunden, wobei  $r_c$  der Ausdehnung der Wellenfunktion eines Elektrons im höchsten besetzten Landau-Niveau entspricht. Dies ist die natürliche Konsequenz für eine ausreichend geringe Zustandsdichte, bei der die Ein-Elektron-Wellenfunktionen nicht genug Überlapp haben, um weiter ausgedehnte Zustände zu bilden.

Zusammenfassend konnte das Bild vom Plateau-Übergang in einigen Punkten wie dem Potenzgesetz der Lokalisierungslänge  $\xi$  mit universellem Exponenten  $\gamma$ , den absoluten Werten von  $\xi$  und der Sättigung der Halbwertsbreite durch endliche Probengröße

## 9. Zusammenfassung

in den Experimenten zur Größenskalierung bestätigt werden. Das Modell von Ruzin, Cooper und Halperin zur nicht universellen kritischen Leitfähigkeit wurde erstmals experimentell untersucht und bestätigt, und auch die Verbindung der Analyse von Leitwertfluktuationen und Skalierungsverhalten der Halbwertsbreite wurde hier erstmals demonstriert. Mit der gegenüber vorherigen Experimenten verbesserten Analyse der Frequenzabhängigkeit der Leitfähigkeit und der großen Anzahl aufgelöster Spinniveaus gelang außerdem der Nachweis, dass der dynamische Exponent  $z$  und der Temperaturexponent  $z_T$  voneinander abweichen können und in höheren Landau-Niveaus nicht zwingend  $z = 1$  gilt.

Wichtigste Punkte für zukünftige Experimente sind eine Erweiterung des Frequenzbereichs für einen zweifelsfreien Nachweis des Skalierungsverhaltens und die Bestimmung des dynamischen Exponenten in weiteren Proben.

# A. Anhang

## A.1. Skalierungsverhalten im isolierenden Bereich

Im Folgenden werden einige Daten dargestellt, die das Kapitel 5 ergänzen. Die eingezeichneten Anpassungen und Auswertungen entsprechen den dort beschriebenen Modellen.

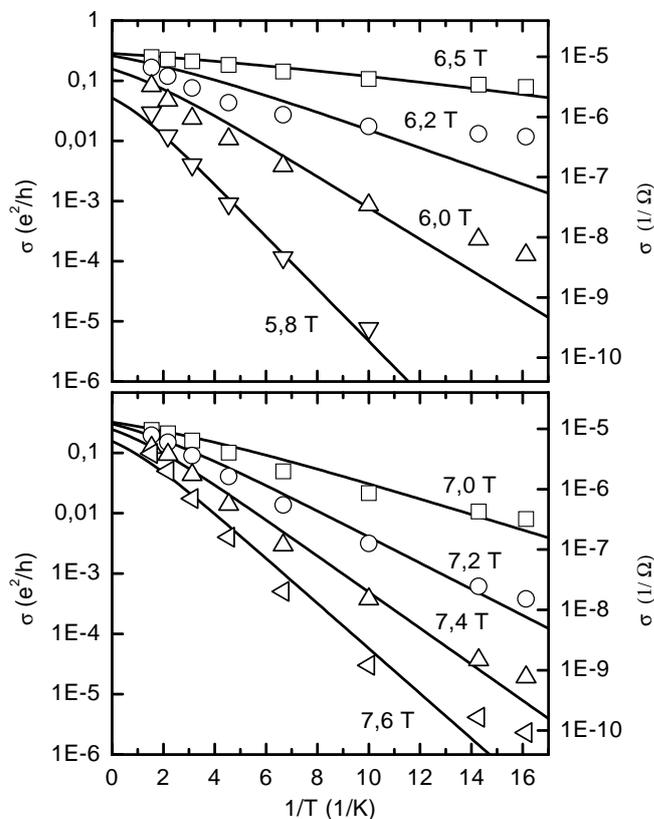


Abbildung A.1.: Anpassung von aktiviertem Verhalten ergibt für  $\nu > \nu_c$  ( $B < 6,7$  T) mangelhafte Übereinstimmung. Für  $\nu < \nu_c$  ( $B > 6,7$  T) ist die Anpassung von besserer Qualität, aber immer noch schlechter als die in Abbildung A.2 gezeigte Modellierung durch *variable-range hopping*.

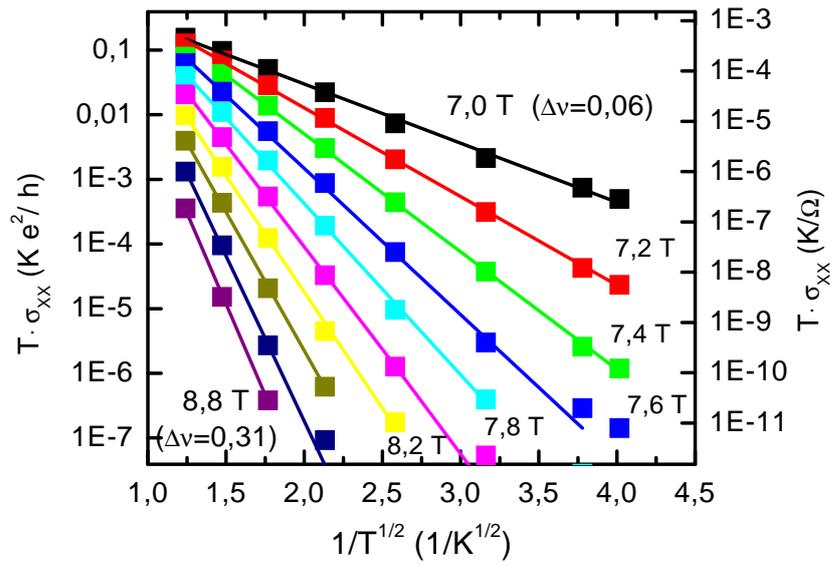


Abbildung A.2.: Anpassung von *variable-range hopping* mit  $\sigma_0 = \sigma_0^*(B)/T$  für  $\nu < \nu_c$  (Probe P6047).

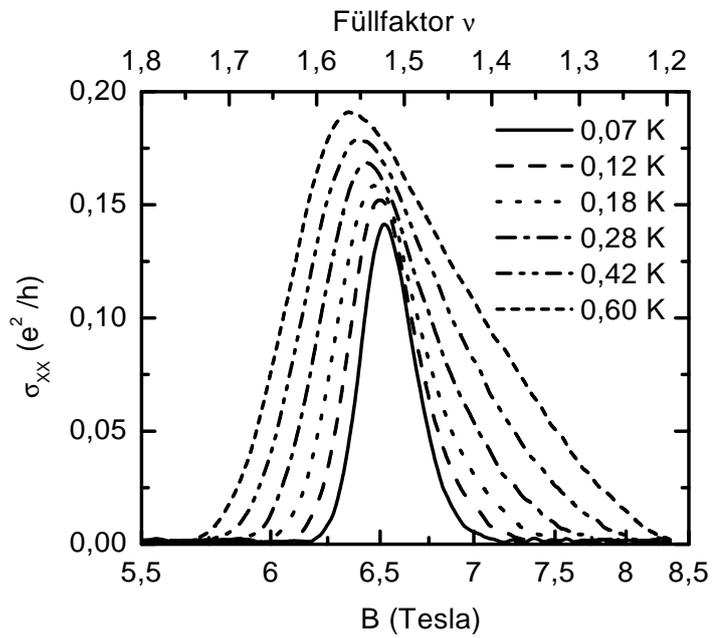


Abbildung A.3.: Leitfähigkeit der Probe P6323 im Übergang  $\nu = 1 \rightarrow 2$ .

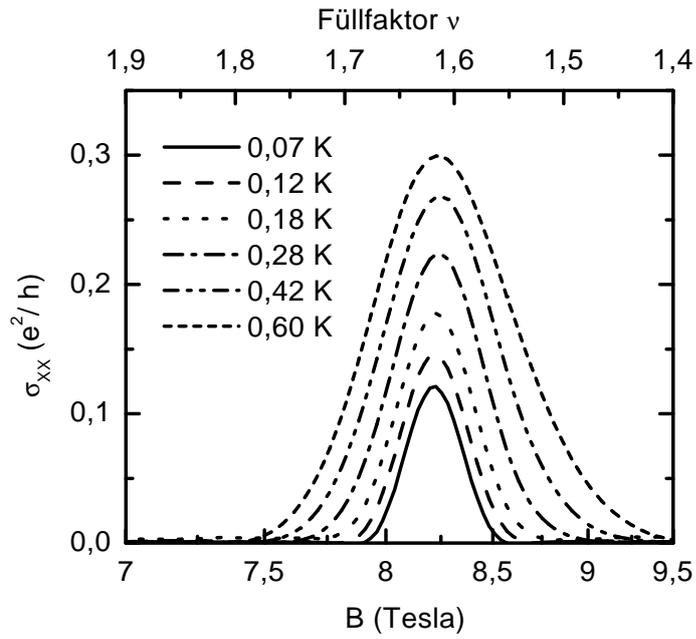


Abbildung A.4.: Leitfähigkeit der Probe P41010 im Übergang von Plateau  $\nu = 1$  nach  $\nu = 2$ .

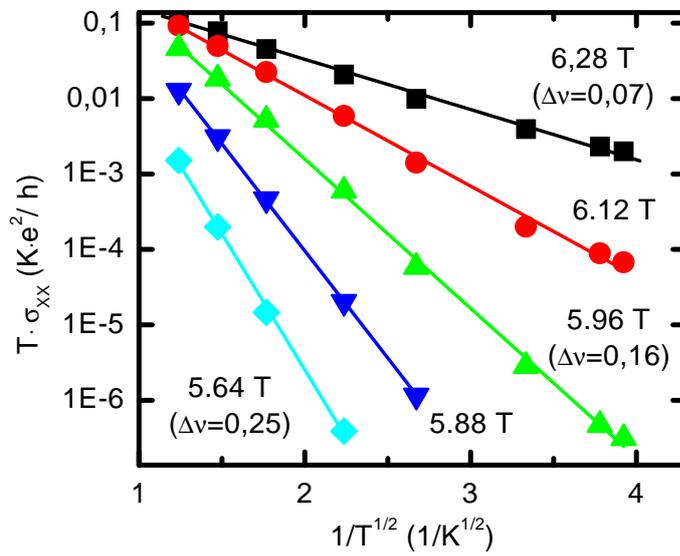


Abbildung A.5.: Anpassung von *variable-range hopping* für  $\nu > \nu_c$  mit Vorfaktor  $\sigma_0 \propto 1/T$  (Probe P6323).

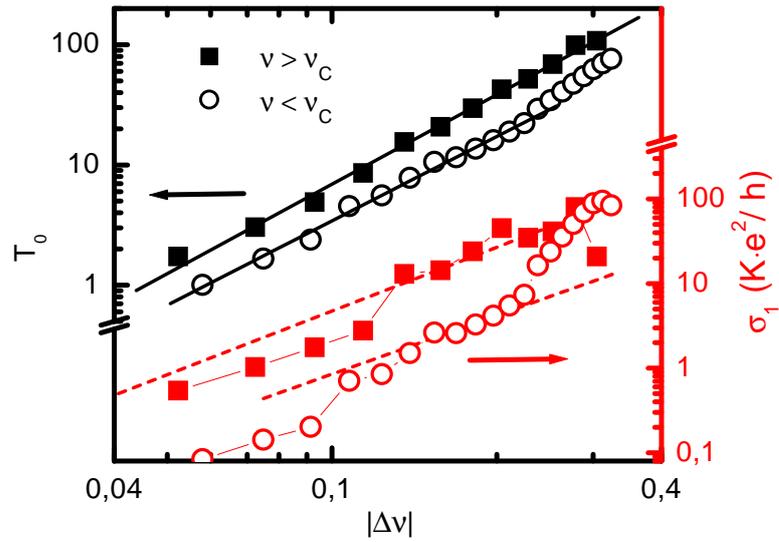


Abbildung A.6.: Parameter  $T_0$  und  $\sigma_1$  der Anpassung von *variable-range hopping* an die gemessenen Leitfähigkeiten für P6323.

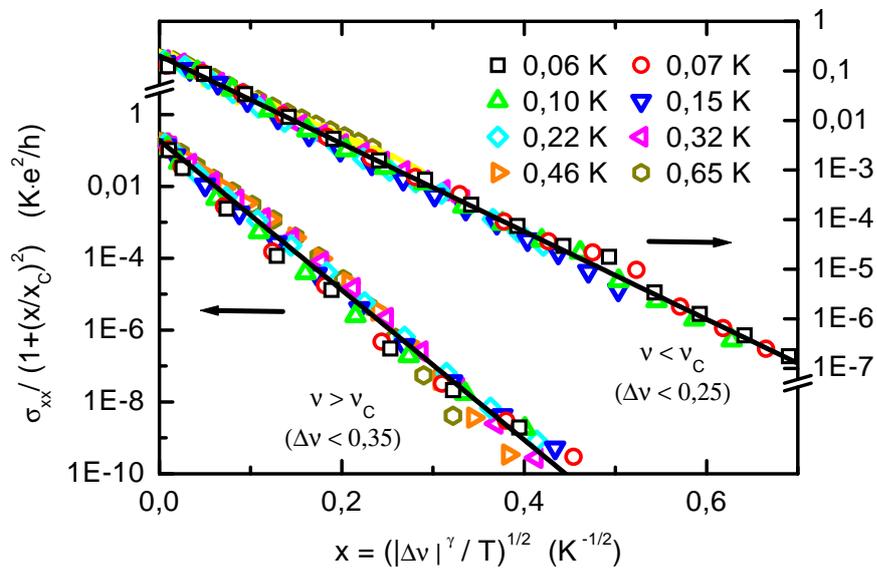


Abbildung A.7.: Test auf Skalierungsverhalten für Probe P6323 ( $x_c = 0,021 \pm 0,03/\sqrt{K}$  für  $\nu > \nu_c$ ;  $x_c = 0,031 \pm 0,03/\sqrt{K}$  für  $\nu < \nu_c$ ).

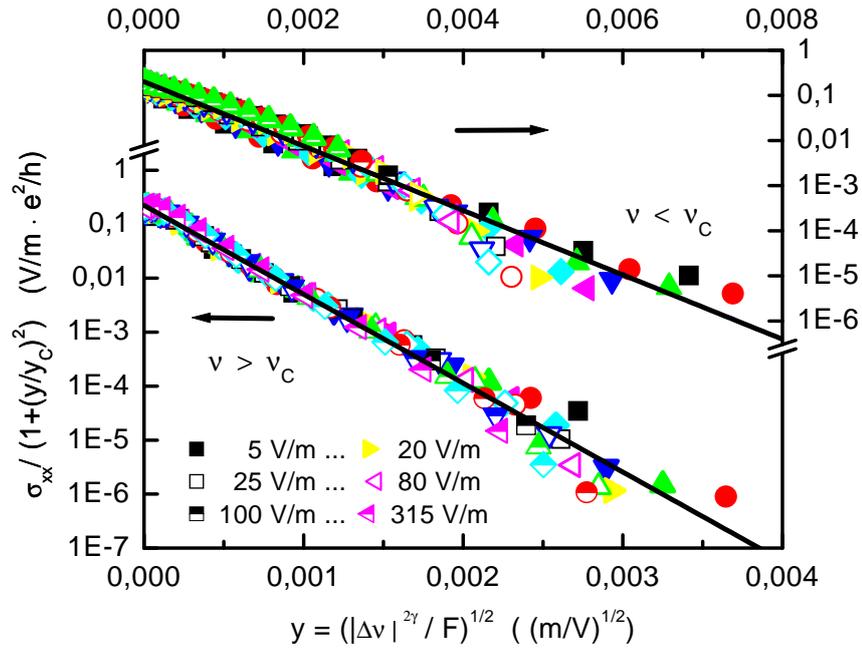


Abbildung A.8.: Test des Skalierungsverhaltens mit dem elektrischen Feld.

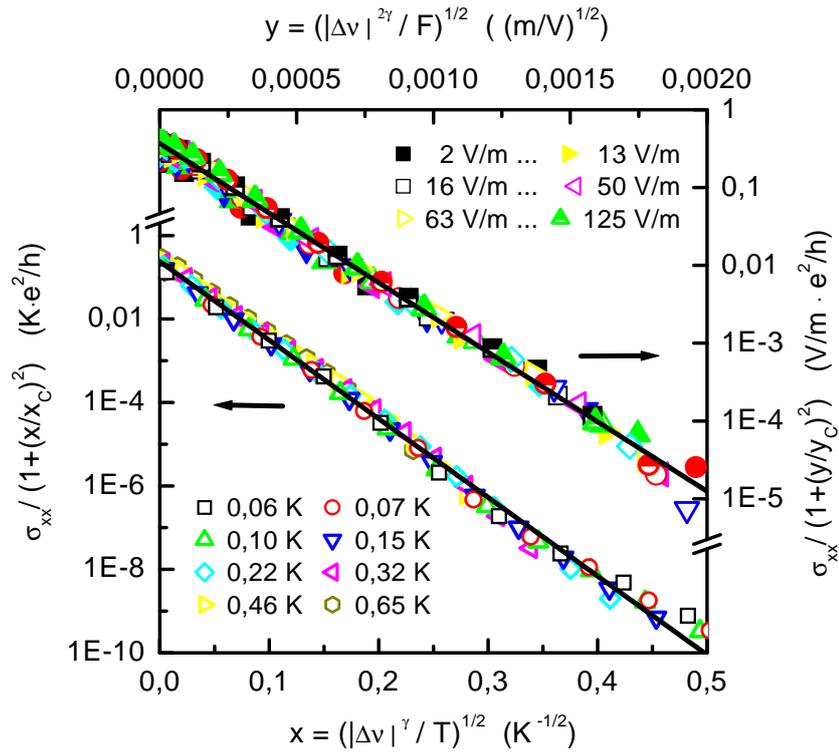


Abbildung A.9.: Test des Skalierungsverhaltens mit einem Parameter  $\tilde{x}(\Delta\nu, T)$  bzw.  $\tilde{y}(\Delta\nu, F)$  für Probe P41010.

## A.2. Bemerkungen zur Mittelung

Für die Untersuchung der Variation einer Größe, z. B. des Leitwerts in Abschnitt 7.1.1, spielt die Mittelung dieser Größe eine zentrale Rolle.

$$\langle X \rangle = \frac{1}{N} \sum X_i \quad (\text{A.1})$$

steht hierbei zunächst für das Ensemble-Mittel einer bestimmten physikalischen Größe. Dies bedeutet Folgendes: Ein bestimmtes physikalisches System ist durch verschiedene makroskopische Größen gekennzeichnet. Die hier wichtigen sind für die Proben, deren elektrische Transporteigenschaften in dieser Arbeit untersucht werden, die Ladungsträgerdichte (und daraus folgend die Fermienergie und der Fermiwellenvektor), die mittlere elastische Streuzzeit, das Magnetfeld und die Temperaturabhängigkeit der Phasenkohärenzzeit. Das Ensemble besteht in diesem Fall aus allen möglichen mikroskopischen Realisierungen der gleichen makroskopischen Größen. Für das Beispiel der Probe bedeutet dies, dass die genaue Anordnung der Streuer variiert wird, wobei gleichzeitig die mittlere freie Weglänge  $l$  konstant gehalten wird. Der Mittelungswert  $\langle X \rangle$  ist das Mittel über eine möglichst große Anzahl dieser mikroskopischen Realisierungen.

Im Experiment ist es im Allgemeinen nicht möglich, die mikroskopische Realisierung überhaupt, geschweige denn in einer großen Zahl, für gleiche charakteristische makroskopische Größen zu variieren. Daher werden andere Parameter variiert: In den elektrischen Transportuntersuchungen das Magnetfeld und die Fermienergie. In dieser Arbeit ist der variierte Parameter das Magnetfeld. Das hieraus resultierende Mittel

$$\langle X \rangle_B = \frac{1}{\Delta B} \int_{\Delta B} X(B) dB \quad (\text{A.2})$$

ist zunächst eine andere Größe als das Ensemble-gemittelte  $\langle X \rangle$ . Jedoch gibt es ein Analogon zur Ergodenhypothese. Diese sagt in ihrer klassischen Form mit  $\langle X \rangle = \langle X \rangle_t$  die Gleichheit von Ensemble- und Zeitmittelung aus. Voraussetzung ist, dass die Größe  $X$  auch als Funktion der Zeit, oder eben des Magnetfeldes, alle möglichen Zustände mit einer der Ensemble-Variation entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilung annimmt. Die Ergodenhypothese lautet also auf die Anwendung in dieser Arbeit übertragen

$$\langle G \rangle = \langle G \rangle_B. \quad (\text{A.3})$$

### A.3. Einfluss der Mittelung auf die Fluktuationsamplitude

In Kapitel 7 werden die Leitwertfluktuationen für kleine Proben im QHE-Regime analysiert. Um die Fluktuationsamplitude  $\delta G$  zu bestimmen, muss zunächst der mittlere Leitwert  $\langle G \rangle$  bestimmt werden. Dieser ist korrekt durch eine Ensemble-Mittelung definiert. Da diese experimentell nicht durchgeführt werden kann, wurde in Abschnitt 7.2.1 eine Bestimmung eines mittleren Leitwerts  $\bar{G}(B)$  durch eine geeignete Mittelung über ein Intervall  $[B - \Delta B_1, B + \Delta B_1]$  eingeführt.

Im Folgenden soll der Einfluss der Bestimmung von  $\bar{G}(B)$  durch diese Mittelung untersucht werden. Die Untersuchung der Spektraldichte in Abschnitt 7.2.3 zeigte bereits für Frequenzen um  $1/\Delta B_1$  in Abbildung 7.5 eine Reduzierung der experimentell ermittelten Spektraldichte, und für  $f_B < 1/(2\Delta B_1)$  wird sie nahezu komplett unterdrückt. Es folgt, dass die experimentell bestimmte Amplitude der Fluktuationen, die sich durch Integration über die spektrale Dichte ergibt, um so stärker vom korrekten Wert abweicht, je größer das Verhältnis  $B_{\text{korr}}/\Delta B_1$  ist.

Ein vereinfachtes Modell soll dieses Verhalten beschreiben. Es berücksichtigt, dass durch die experimentelle Bestimmung von  $\bar{G}(B)$  alle Anteile der Spektraldichte  $\mathcal{P}(f_B)$  für  $f_B < f_1$  zu null werden, für  $f_B > f_1$  hingegen unverändert bleiben. Die experimentell ermittelte Fluktuationsamplitude ergibt sich somit zu

$$(\delta G_{\text{rms}}^{\text{exp}})^2 = 2 \int_{f_1}^{\infty} \mathcal{P}(f_B) df_B = \frac{2\pi\mathcal{P}_0}{\beta} e^{-\beta f_1}, \quad \beta = 2\pi B_{\text{korr}}. \quad (\text{A.4})$$

In Abbildung A.10 ist die Abhängigkeit der so bestimmten Fluktuationsamplitude  $\delta G_{\text{rms}}^{\text{exp}}$  von  $x = \beta f_1$  dargestellt. Mit  $B_{\text{korr}} \propto 1/L_{Th}^2 \propto T$  entspricht  $x \propto T$  der Temperatur im Experiment. Die gestrichelte Gerade entspricht der Abhängigkeit  $\delta G_{\text{rms}} \propto L_{Th} \propto 1/\sqrt{T}$  für eine „ideale“ Auswertung mit  $f_1 = 0$ , also ohne Abschneiden der niedrigen Magnetfeld-Frequenzen.

Zum Vergleich sind zwei experimentelle Abhängigkeiten eingezeichnet. Zum einen wurde für hochaufgelöste Messungen der Probe P6125 in Corbino-Geometrie für verschiedene Temperaturen die Spektraldichte bestimmt. Die Spektraldichten wurden entsprechend Gleichung A.4 mit  $f_1 = 8/T$  ausgewertet. Die Abschneidefrequenz wurde hierbei mit  $f_1 > 1/\Delta B_1$  so gewählt, dass kein Einfluss der Mittelung über  $\Delta B_1$  zu erwarten ist. Das Korrelationsfeld wurde in Abschnitt 7.2.3 für diese Probe zu  $B_{\text{korr}} \approx 19$  mT und die Amplitude zu  $\mathcal{P}_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-12} \Omega^2/T$  bestimmt. Es gibt keinen freien Parameter. Das Modell zeigt gute Übereinstimmung mit diesen Daten.

Ziel dieser Überlegungen war es, die Änderung der Temperaturabhängigkeit der in Abschnitt 7.2.1 präsentierten Daten durch den Mittelungsprozess zu erklären. Exemplarisch ist die Fluktuationsamplitude der Probe P41012 in Corbino-Geometrie in Abbildung A.10 eingetragen. Hierbei wurde die Temperaturachse und die Fluktuationsamplitude derart reskaliert, dass sich eine gute Übereinstimmung mit dem Modell ergibt. Das Korrelationsfeld wurde für diese Probe analog zum vorherigen Abschnitt zu  $B_{\text{korr}} = 17 \pm 6$  mT bei  $T = 100$  mK bestimmt. Es ist von gleicher Größe wie

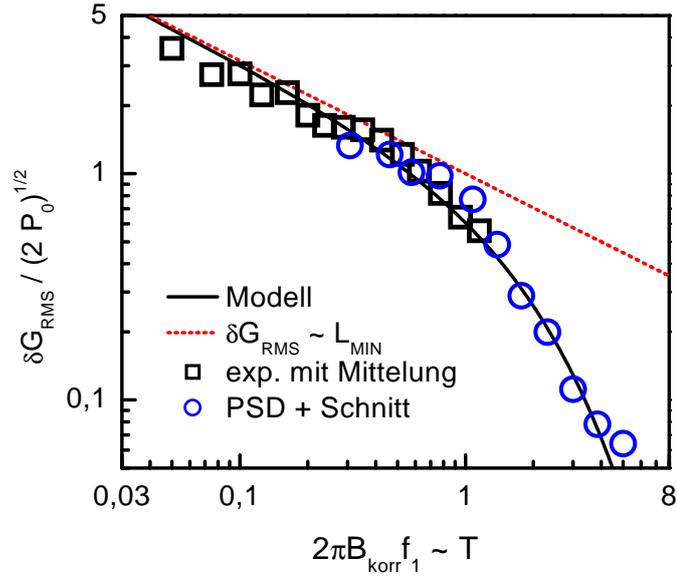


Abbildung A.10.: Abhängigkeit der Fluktuationsamplitude vom Korrelationsfeld: Das Modell entspricht Gleichung A.4 für Abschneiden der Spektraldichte (PSD) unterhalb der Frequenz  $f_1$  und weicht für  $x = 2\pi\alpha B_{\text{korr}} f_1 > 1$  vom Verhalten  $\delta G_{\text{rms}} \propto L_{\text{min}}$  ab. Die Symbole stehen für verschiedene Daten:  $\square$  entspricht der Messung von P41012 in Corbino-Geometrie entsprechend Abbildung 7.3 mit  $x \approx 1$  für  $T = 0,3$  K.  $\circ$  wurde aus den hochauflösenden Messungen durch Integration der Spektraldichte ab  $f_1 = 15$   $1/T$  bestimmt.

bei P6125, was für Proben mit vergleichbarer Beweglichkeit und damit vergleichbarer energetischer Breite  $\Gamma$  der Landau-Niveaus zu erwarten ist.

Die Anpassung des Modells ergibt die Amplitude  $\mathcal{P}_0 = \pi F_0 \approx 0,8 \cdot 10^{-12} \Omega^2/T$  in hervorragender Übereinstimmung mit der Abschätzung in Gleichung 7.11. Die Reskalierung der  $x$ -Achse ergibt  $T \approx 400$  mK für  $2\pi B_{\text{korr}} f_1 = 1$ . Für diese Temperatur folgt mit dem Wert bei 100 mK und der Beziehung  $B_{\text{korr}} \propto T$  ein Korrelationsfeld  $B_{\text{korr}} \approx 70$  mT. Damit folgt für die Abschneidefrequenz  $f_1 \approx 2,2$   $1/T \approx 1/(3\Delta B_1)$ . Dies passt gut zu der beobachteten Unterdrückung der Spektraldichte in Abbildung 7.5. Insbesondere ergibt sich auch eine Beziehung zwischen dem Mittelungsintervall  $\Delta B_1$  und dem Korrelationsfeld am Übergangspunkt  $T_{\check{U}}$ , der durch  $2\pi B_{\text{korr}}(T_{\check{U}}) f_1 = 1$  definiert wird:

$$B_{\text{korr}}(T_{\check{U}}) \approx 0,5 \cdot \Delta B_1 \quad (\text{A.5})$$

Die Analyse zeigt also, dass sich die stärkere Temperaturabhängigkeit von  $\delta G_{\text{rms}}$  bei hohen Temperaturen durch einen Korrelationseffekt erklären lässt, der durch die Mittelungsprozedur bei der Auswertung der Daten eingeführt wird.

## A.4. Kapazitive Kopplung in Corbino-Geometrie

In diesem Abschnitt wird der Leitwert für den Fall eines nur kapazitiv angekoppelten 2DES mit Metallisierung in Corbino-Geometrie berechnet.

Für  $w > r$  lässt sich eine Corbino-Geometrie in einem quasi-eindimensionalen Modell beschreiben und für den Fall der kapazitiven Ankopplung in ein Ersatzschaltbild entsprechend Abbildung A.11 übertragen. Zwei jeweils halb-unendliche Kontakte, bestehend aus der ideal leitenden Metallisierung und dem kapazitiv angekoppelten 2DES mit endlicher Leitfähigkeit, sind mit dem mittleren, nicht metallisierten Stück 2DES in Reihe geschaltet. Gesucht ist der frequenzabhängige Leitwert  $G(\omega) = I(\omega)/U(\omega)$ ,

$$1/G(\omega) = R(\omega) = R_K(\omega) + R_w(\omega) + R_K(\omega) \quad (\text{A.6})$$

entsprechend der gezeigten Beschaltung. Unter der Annahme, dass die Leitfähigkeit  $\sigma_x x = \sigma$  für das nicht bedeckte 2DES und  $\sigma_2$  unter der Metallisierung ist, gilt:

$$R_w = \frac{w}{2\pi r \sigma}, \quad R' = \frac{1}{2\pi r \sigma_2}, \quad C' = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{2\pi r}{d} \quad (\text{A.7})$$

Für den einzelnen Baublock ergeben sich die Differenzengleichungen  $\Delta U = IR' \Delta x$  und  $\Delta I = i\omega C' \Delta x (U + \Delta U)$ . Hieraus lässt sich durch den Übergang  $\Delta x \rightarrow 0$  für die

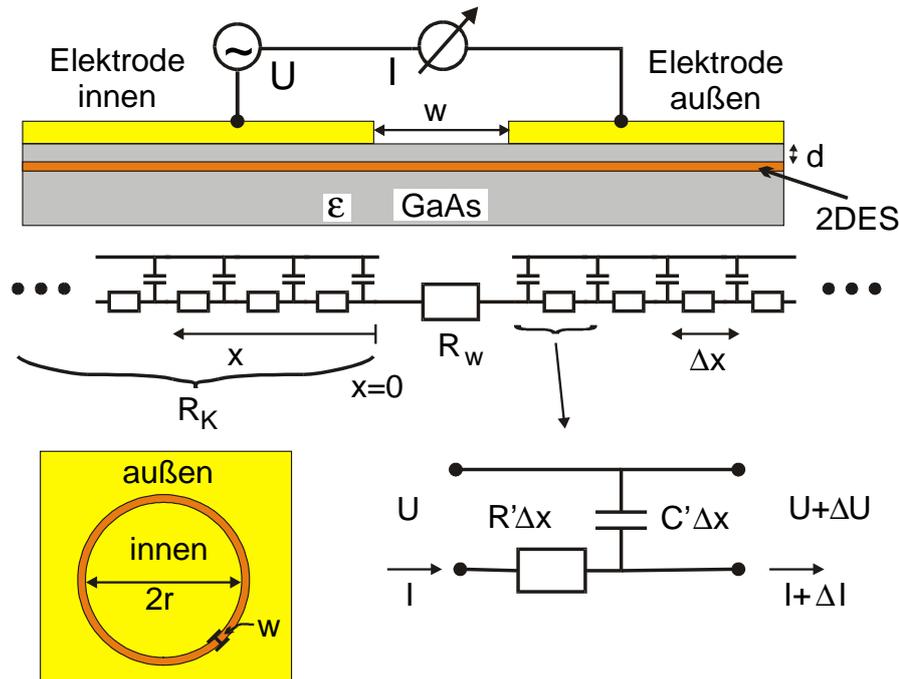


Abbildung A.11.: Oben: Corbino-Geometrie mit aufgedampften Elektroden von der Seite gesehen. Mitte: Eindimensionales Ersatzschaltbild. Unten rechts: Einzelner Baublock für den Bereich unter den Elektroden. Unten links: Corbino-Geometrie.

## A. Anhang

Region unter den Elektroden eine Differentialgleichung aufstellen:

$$\frac{dU}{dx} = IR', \quad \frac{dI}{dx} = i\omega C'U \Rightarrow \frac{d^2U}{dx^2} - i\omega C'R'U = 0 \quad (\text{A.8})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$U(x) = U(0)e^{\pm\delta x}, \quad I(x) = \mp \frac{U(0)\delta}{R'}e^{\pm\delta x}, \quad \delta = \sqrt{i\omega C'R'} \quad (\text{A.9})$$

Bei Wahl von  $x = 0$  am Rande einer Metallisierung und positiver  $x$ -Richtung in die Metallisierung hinein muss die abklingende Lösung gewählt werden. Der Widerstand eines Kontakts beträgt somit

$$R_K(\omega) = \frac{U(x=0)}{I(x=0)} = \frac{1-i}{2\pi r} \sqrt{\frac{d}{2\varepsilon\varepsilon_0\omega\sigma_2}}. \quad (\text{A.10})$$

Als Zahlenwertgleichung ergibt sich mit  $\varepsilon \approx 12$  für den Gesamtwiderstand  $R(\omega) = 1/G(\omega)$ , umgerechnet in eine Leitfähigkeit

$$\frac{1}{G(f)} \frac{2\pi r}{w} = \frac{1}{\sigma} + (1-i) \cdot 0,34 \frac{h}{e^2} \frac{10 \mu\text{m}}{w} \sqrt{\frac{1 \text{ GHz}}{f}} \sqrt{\frac{e^2/h}{\sigma_2}} \sqrt{\frac{d}{100 \text{ nm}}}. \quad (\text{A.11})$$

## A.5. Leistungsabhängigkeit für Probe P254

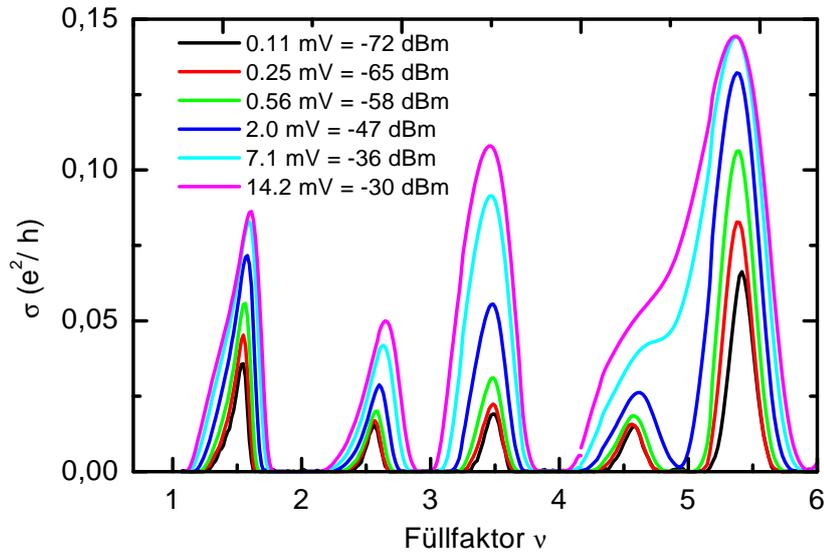


Abbildung A.12.: Leitfähigkeit der Probe P254 für verschiedene angelegte Spannungen, gemessen bei 1 MHz im Hochfrequenz-Aufbau

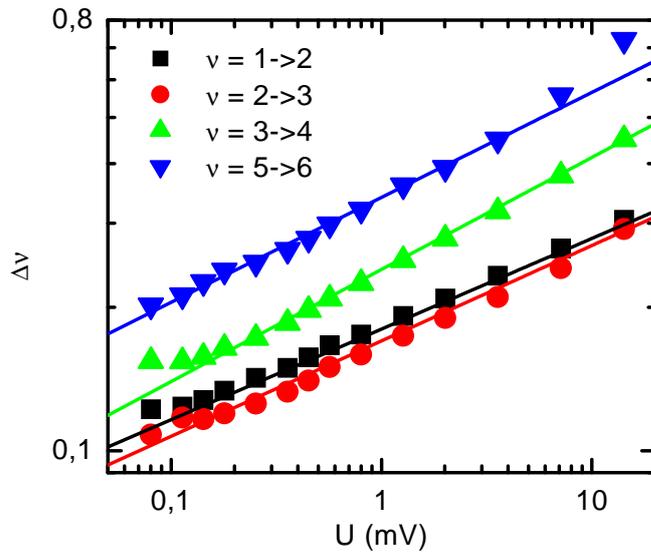


Abbildung A.13.: Auswertung der Halbwertsbreiten zu Abbildung A.12 zeigt Potenzgesetz  $\Delta\nu \propto U^b$  mit  $b = 0,21 \pm 0,02$

## A.6. Imaginärteil der Frequenzabhängigkeit

Hier werden ergänzend zu Kapitel 8 weitere Daten der frequenzabhängigen Messungen an der Probe P107 dargestellt.

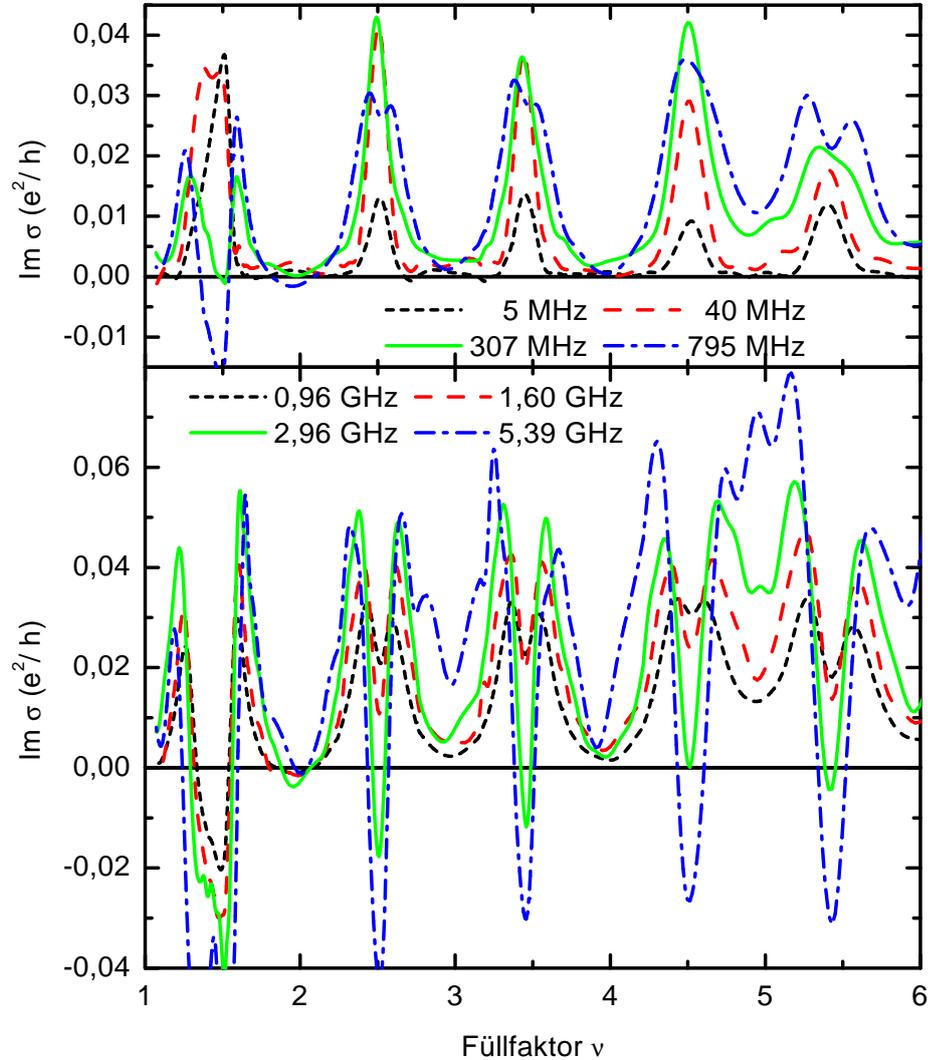


Abbildung A.14.: Übersicht über den Imaginärteil der Leitfähigkeit bei verschiedenen Frequenzen. Im oberen Bild ist der Frequenzbereich  $f < 1$  GHz dargestellt, in dem die Maximalwerte des Realteils noch stark anwachsen, im unteren Bild ist der Bereich  $f \gtrsim 1$  GHz repräsentiert. Für beide Bilder gilt der gleiche Maßstab.

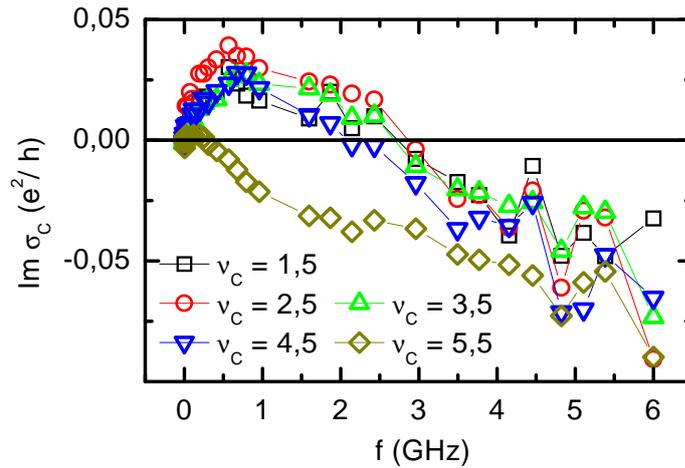


Abbildung A.15.: Imaginärteil der Leitfähigkeit für die kritischen Punkte  $\nu_c$ , ermittelt durch die Maxima des Realteils der Leitfähigkeit. Der anfängliche Anstieg für  $f < 1$  GHz und  $\nu > 2$  findet im Realteil eine Entsprechung im starken Anstieg der kritischen Leitfähigkeit. Für  $f > 2$  GHz zeigt der Imaginärteil induktives Verhalten, wie es auch für  $B = 0$  von Burke *et al.* [160] beobachtet wurde. Möglicherweise handelt es sich hier also auch um eine kinetische Induktivität, also einen Trägheitseffekt, wie er sich entsprechend dem klassischen Drude-Modell für  $B = 0$  ergibt.

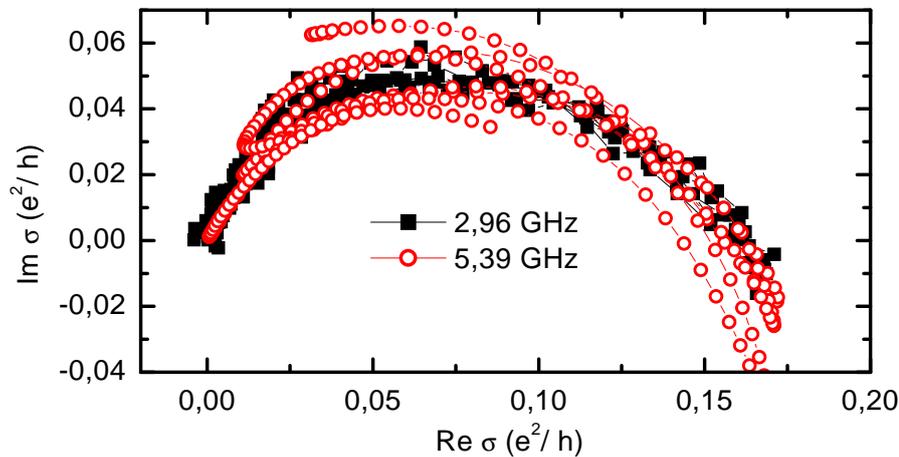


Abbildung A.16.: Auftragung des Imaginärteils der Leitfähigkeit gegen den Realteil für den Füllfaktorbereich  $\nu = 1,6 - 5$ . Die Form der Kurve ist für  $f = 2 - 6$  GHz annähernd frequenzunabhängig. Der Imaginärteil skaliert somit auf gleiche Weise wie der Realteil.

## A.7. Imaginärteil und variable range hopping

Für den Imaginärteil der frequenzabhängigen Leitfähigkeit für  $hf \gtrsim k_B T$  gibt es kein Modell, jedoch kann ein Versuch entsprechend der von Efros [164] für  $hf < k_B T$  abgeleiteten Beziehung in Gleichung 8.22 durchgeführt werden, da kein abrupter Wechsel des Regimes zu erwarten ist. Der entsprechende Ansatz für die Frequenzabhängigkeit ist

$$\text{Im } \sigma(f, \nu) = \sigma_2^{(f)} + b_2(\nu) f \cdot \ln \frac{f_{ph}}{f}, \quad f_{ph} \sim 10^{12} \text{ Hz.} \quad (\text{A.12})$$

Abbildung A.17 zeigt den Vergleich der Daten für Probe P107 mit der Anpassung dieses Modells für verschiedene Füllfaktoren. In ausreichendem Abstand vom kritischen Punkt (hier  $\nu \lesssim 2,3$ ) lässt sich diese Form anpassen, jedoch ergibt eine Anpassung eines linearen Verhaltens annähernd gleich gute Ergebnisse. Auch hängt das Verhältnis  $b/b_2$  der Anpassungsparameter des Real- und Imaginärteils vom Füllfaktor ab (vgl. auch Abbildung 8.16), anders als nach Efros erwartet. In der Nähe des kritischen Füllfaktors für  $\nu \gtrsim 2,3$  zeigen die Daten für den Imaginärteil ein Verhalten, das nicht durch *variable-range hopping* nach Efros beschrieben werden kann. Die Anwendbarkeit des Modells ist also zweifelhaft.

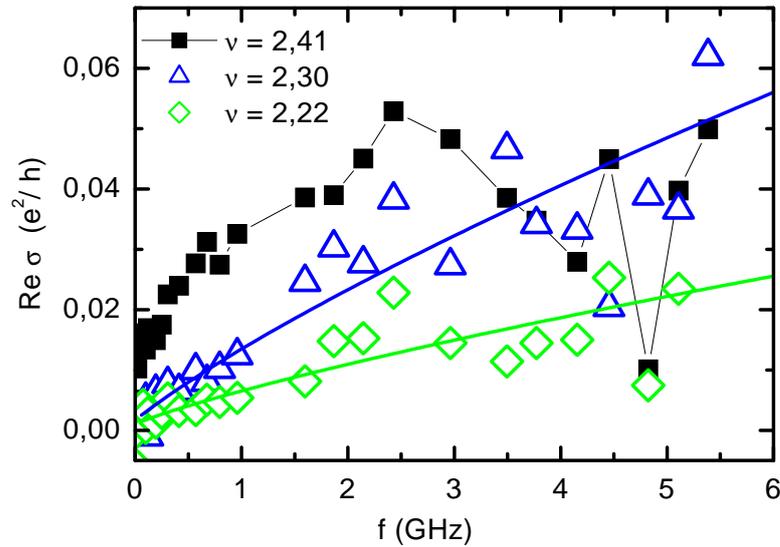


Abbildung A.17.: Frequenzabhängigkeit des Imaginärteils der Leitfähigkeit. Die eingezeichneten Modelle entsprechen einer Abhängigkeit nach Efros [164].

# Literaturverzeichnis

- [1] K. v. Klitzing, G. Dorda und M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980). [7](#), [11](#)
- [2] D. C. Tsui, H. L. Störmer und A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982). [7](#)
- [3] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983). [7](#)
- [4] E. Hall, Amer. Jour. Math. **2**, 287 (1879). [7](#), [11](#), [16](#)
- [5] D. E. Khmel'nitskii, JETP Lett. **38**, 552 (1984). [8](#), [42](#), [43](#), [96](#)
- [6] A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. Lett. **61**, 1297 (1988). [8](#), [8](#)
- [7] H. P. Wei, D. C. Tsui, M. A. Paalanen und A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. Lett. **61**, 1294 (1988). [8](#), [48](#), [49](#)
- [8] S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing und K. Ploog, Phys. Rev. B **43**, 6828 (1991). [8](#), [8](#), [49](#), [50](#), [51](#), [67](#), [124](#)
- [9] S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing und K. Ploog, Phys. Rev. Lett. **67**, 883 (1991). [8](#), [51](#), [67](#), [87](#), [113](#), [117](#), [117](#), [123](#), [124](#), [127](#), [134](#)
- [10] L. W. Engel, D. Shahar, C. Kurdak und D. C. Tsui, Phys. Rev. Lett. **71**, 2638 (1993). [8](#), [9](#), [53](#), [135](#), [135](#), [155](#), [157](#)
- [11] N. Q. Balaban, U. Meirav und I. Bar-Joseph, Phys. Rev. Lett. **81**, 4967 (1998). [8](#), [8](#), [9](#), [54](#), [135](#), [135](#), [143](#), [157](#)
- [12] H. P. Wei, L. W. Engel und D. C. Tsui, Phys. Rev. B **50**, 14609 (1994). [8](#), [48](#), [52](#)
- [13] I. M. Ruzin, N. R. Cooper und B. I. Halperin, Phys. Rev. B **53**, 1558 (1996). [9](#), [98](#), [99](#), [100](#), [100](#)
- [14] T. Ando, A. B. Fowler und F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982). [11](#)
- [15] M. J. Kelly, *Low-Dimensional Semiconductors* (Oxford University Press, New York, 1995). [11](#), [19](#)

- [16] W. T. Sommer, Phys. Rev. Lett. **12**, 271 (1964). 11
- [17] R. S. Crandall, Surface Science **58**, 266 (1976). 11
- [18] A. B. Fowler, F. F. Fang, W. E. Howard und P. J. Stiles, Phys. Rev. Lett. **16**, 901 (1966). 11, 19
- [19] S. M. Sze, *Semiconductor Devices, Physics and Technology* (Wiley, New York, 1985). 12
- [20] H. L. Störmer, R. Dingle, A. C. Gossard, W. Wiegmann und M. D. Sturge, Solid State Commun. **29**, 705 (1979). 13
- [21] P. Drude, Annalen der Physik **1**, 566 (1900). 15
- [22] J. M. Ziman, *Electrons and Phonons* (Clarendon Press, Oxford, 1960), Seite 286. 17
- [23] T. Ando, J. Phys. Soc. Jap. **51**, 3900 (1982). 18
- [24] L. Shubnikov und W. J. de Haas, Leiden Comm. **207a, c, d, 210a**, (1930). 19
- [25] T. Ando, J. Phys. Soc. Jap. **37**, 1233 (1974). 19, 26, 95
- [26] B. Jeanneret, B. Jeckelmann, H.-J. Bühlmann und R. Houdré, IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-44**, 254 (1995). 20
- [27] B. Jeckelmann, B. Jeanneret und A. D. Inglis, Phys. Rev. B **55**, 13124 (1997). 20
- [28] A. Hartland, K. Jones, J. M. Williams, B. Gallagher und T. Galloway, Phys. Rev. Lett. **66**, 969 (1991). 20
- [29] F. Delahaye, T. J. Witt, F. Piquemal und G. Geneves, IEEE Trans. Instrum. Meas. **IM-44**, 258 (1995). 21
- [30] F. Delahaye, T. J. Witt, B. Jeckelmann und B. Jeanneret, Metrologia **32**, 385 (1997). 21
- [31] F. Delahaye, T. J. Witt, E. Pesel und B. Warnecke, Metrologia **34**, 211 (1997). 21
- [32] E. Braun, B. Schumacher und P. Warnecke, PTP Mitteilungen . 21
- [33] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, 9. Aufl. (Akademie-Verlag, Berlin, 1979), Band III. 22, 165
- [34] L. D. Landau, Zeitschrift für Physik **64**, 629 (1930). 22
- [35] V. Fock, Zeitschrift für Physik **47**, 446 (1928). 22

- [36] Y. Aharonov und D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959). [22](#)
- [37] T. Ando und Y. Uemura, J. Phys. Soc. Jap. **37**, 1044 (1974). [24](#)
- [38] R. B. Laughlin, Phys. Rev. B **23**, 5632 (1981). [28](#)
- [39] B. I. Halperin, Phys. Rev. B **25**, 2185 (1982). [29](#)
- [40] R. J. Haug, Semicond. Sci. Technol. **8**, 131 (1993). [29](#)
- [41] R. Landauer, Philos. Mag. **21**, 863 (1970). [29](#), [101](#)
- [42] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer und S. Pinhas, Phys. Rev. B **31**, 6207 (1985). [29](#), [101](#)
- [43] E. Gornik, R. Lassnig, G. Strasser, H. L. Störmer, A. C. Gossard und W. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **54**, 1820 (1985). [30](#)
- [44] J. P. Eisenstein, H. L. Störmer, V. Narayanamurti, A. Y. Cho, A. C. Gossard und C. W. Tu, Phys. Rev. Lett. **55**, 875 (1985). [31](#)
- [45] S. A. J. Wieggers, M. Specht, L. P. Lévy, M. Y. Simmons, D. A. Ritchie, A. Cavanna, B. Etienne, G. Martinez und P. Wyder, Phys. Rev. Lett. **79**, 3238 (1997). [31](#)
- [46] E. Stahl, D. Weiss, G. Weimann, K. von Klitzing und K. Ploog, Physica C **18**, L783 (1985). [31](#)
- [47] P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958). [33](#)
- [48] P. A. Lee und T. V. Ramakrishnan, Rev. Mod. Phys. **57**, 287 (1985). [33](#), [36](#)
- [49] N. F. Mott und W. D. Twose, Ann. Phys. **10**, 107 (1961). [34](#)
- [50] D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **39**, 1167 (1977). [35](#)
- [51] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello und T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979). [35](#)
- [52] S. V. Kravchenko, G. V. Kravchenko, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov und M. D'Iorio, Phys. Rev. B **50**, 8039 (1994). [39](#)
- [53] S. V. Kravchenko, D. Simonian, M. P. Sarachik, W. Mason und J. E. Furneaux, Phys. Rev. Lett. **77**, 4938 (1996). [39](#)
- [54] D. Simonian, S. V. Kravchenko, M. P. Sarachik und V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. **79**, 2304 (1997). [39](#)
- [55] P. T. Coleridge, R. L. Williams, Y. Feng und P. Zawadzki, Phys. Rev. B **56**, R12764 (1997). [39](#)

- [56] Y. Hanein, U. Meirav, D. Shahar, C. C. Li, D. C. Tsui und H. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. **80**, 1288 (1998). [39](#)
- [57] B. L. Altshuler und D. L. Maslov, Phys. Rev. Lett. **82**, 145 (1999). [39](#)
- [58] J. T. Chalker, J. Phys. C. **20**, L493 (1987). [39](#)
- [59] R. E. Prange, in *The Quantum Hall Effect*, Herausgeber: R. E. Prange und S. M. Girvin (Springer-Verlag, New York, 1987), Kap. 3. See Ref. [165]. [40](#)
- [60] D. Stauffer, Phys. Reports **54**, 2 (1979). [41](#)
- [61] J. L. Black und V. J. Emery, Phys. Rev. B **23**, 429 (1981). [41](#)
- [62] A. M. M. Pruisken, Nucl. Phys. B. **235**, 277 (1984). [42](#), [96](#)
- [63] A. M. M. Pruisken, in *The Quantum Hall Effect*, Herausgeber: R. E. Prange und S. M. Girvin (Springer-Verlag, New York, 1987), Kap. 5. See Ref. [165]. [42](#)
- [64] G. V. Mil'nikov und I. M. Sokolov, JETP Lett. **48**, 536 (1988). [43](#)
- [65] M. P. A. Fisher, G. Grinstein und S. M. Girvin, Phys. Rev. Lett. **64**, 587 (1990). [43](#), [96](#)
- [66] M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **65**, 923 (1990). [43](#), [96](#)
- [67] B. Huckestein, Rev. Mod. Phys. **67**, 357 (1995). [44](#), [51](#), [52](#), [74](#)
- [68] B. Huckestein und B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **64**, 1437 (1990). [44](#)
- [69] B. Mieck, Europhys. Lett. **13**, 435 (1990). [45](#)
- [70] Y. Huo und R. N. Bhatt, Phys. Rev. Lett. **68**, 1375 (1992). [45](#)
- [71] T. Ando, J. Phys. Soc. Jap. **61**, 415 (1992). [45](#)
- [72] D.-H. Lee, Z. Wang und S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **70**, 4130 (1993). [45](#), [46](#), [96](#)
- [73] J. Sinova, V. Meden und S. M. Girvin, cond-mat/0002202 (2000). [45](#)
- [74] B. Huckestein und M. Backhaus, Phys. Rev. Lett. **82**, 5100 (1999). [45](#), [46](#), [96](#), [157](#)
- [75] J. T. Chalker und G. J. Daniell, Phys. Rev. Lett. **61**, 593 (1988). [45](#), [46](#), [96](#), [123](#)
- [76] Y. Huo, R. E. Hetzel und R. N. Bhatt, Phys. Rev. Lett. **70**, 481 (1993). [45](#), [96](#)
- [77] B. M. Gammel und W. Brenig, Phys. Rev. Lett. **73**, 3286 (1994). [45](#)

- [78] B. M. Gammel und W. Brenig, Phys. Rev. B **53**, R13279 (1996). [45](#)
- [79] X. Wang, Q. Li und C. M. Soukoulis, Phys. Rev. B **58**, 3576 (1998). [45](#), [96](#)
- [80] S. L. Sondhi, S. M. Girvin, J. P. Carini und D. Shahar, Rev. Mod. Phys. **69**, 315 (1997). [46](#), [46](#)
- [81] D. G. Polyakov und K. V. Samokhin, Phys. Rev. Lett. **80**, 1509 (1998). [46](#), [47](#)
- [82] Z. Wang, M. P. Fisher, S. M. Girvin und J. T. Chalker, Phys. Rev. B **61**, 8326 (2000). [47](#)
- [83] T. Brandes, L. Schweitzer und B. Kramer, Phys. Rev. Lett. **72**, 3582 (1994). [47](#), [51](#), [123](#)
- [84] T. Brandes, Phys. Rev. B **52**, 8391 (1995). [47](#), [51](#), [123](#), [123](#)
- [85] D. G. Polyakov und B. I. Shklovskii, Phys. Rev. Lett. **70**, 3796 (1993). [47](#)
- [86] P. W. Anderson, E. Abrahams und T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **43**, 718 (1979). [48](#)
- [87] H. P. Wei, D. C. Tsui und A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. B **33**, 1488 (1985). [48](#), [98](#)
- [88] H. P. Wei, S. W. Hwang, D. C. Tsui und A. M. M. Pruisken, Surface Science **229**, 34 (1990). [49](#)
- [89] V. T. Dolgoplov, A. A. Shashkin, B. K. Medvedev und V. G. Mokerov, JETP **72**, 113 (1991). [49](#), [50](#)
- [90] H. Scherer, L. Schweitzer, F. J. Ahlers, L. Bliiek, R. Lösch und W. Schlapp, Semicond. Sci. Technol. **10**, 959 (1995). [49](#), [50](#), [53](#), [71](#), [87](#), [92](#)
- [91] H. P. Wei, S. Y. Lin, D. C. Tsui und A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. Lett. **45**, 3926 (1992). [49](#), [50](#)
- [92] S. W. Hwang, T. Sakamoto und K. Nakamura, Physica B **227**, 180 (1996). [49](#), [50](#), [98](#)
- [93] J. Wakabayashi, M. Yamane und S. Kawaji, J. Phys. Soc. Jap. **58**, 1903 (1989). [50](#)
- [94] J. Wakabayashi, A. Fukaro, S. Kawaji, T. Koike und T. Fukose, Surface Science **229**, 60 (1990). [50](#)
- [95] V. Kagalovsky, B. Horovitz und Y. Avishai, Europhys. Lett. **31**, 467 (1995). [51](#)
- [96] S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing und K. Ploog, Phys. Rev. B **46**, 1596 (1992). [51](#), [156](#)

- [97] S. Koch, *Der Metall-Isolator-Übergang im Quanten-Hall-Effekt*, Dissertation, Stuttgart, 1991. [52](#), [68](#), [82](#), [98](#)
- [98] S. Koch, R. J. Haug, K. v. Klitzing und K. Ploog, *Semicond. Sci. Technol.* **10**, 209 (1995). [53](#), [71](#), [72](#), [87](#), [92](#)
- [99] E. Chow und H. P. Wei, *Phys. Rev. B* **52**, 13749 (1995). [53](#)
- [100] F. Kuchar, R. Meisels und B. Kramer, in *Advances in Solid State Physics*, Herausgeber: B. Kramer (Vieweg, 1999), Band 39. [54](#), [135](#)
- [101] K. Ploog, *J. Cryst. Growth.* **81**, 304 (1987). [58](#)
- [102] S. A. J. Wiegers, J. G. S. Lok, M. Jeuken, U. Zeitler, J. C. Maan und M. Henini, *Phys. Rev. B* **59**, 7323 (1999). [60](#)
- [103] R. S. Allgaier, *Semicond. Sci. Technol.* **3**, 204 (1988). [60](#)
- [104] F. Pobell, *Matter and Methods at Low Temperatures*, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, 1996). [61](#), [61](#)
- [105] *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*, Herausgeber: K. Lange und K.-H. Löcherer (Springer-Verlag, Berlin, 1992). [64](#), [137](#)
- [106] H. Böttger und V. V. Bryksin, *Hopping Conduction in Solids* (Akademie-Verlag, Berlin, 1985). [70](#)
- [107] B. I. Shklovskii und A. L. Efros, *Electronic Properties of Doped Semiconductors* (Springer, Berlin, 1984). [70](#), [71](#)
- [108] A. Miller und B. Abrahams, *Phys. Rev.* **120**, 745 (1960). [70](#)
- [109] N. F. Mott, *J. non-crystall. Solids* **1**, 1 (1968). [71](#)
- [110] N. F. Mott, *Phil. Mag.* **19**, 835 (1969).
- [111] N. F. Mott, *Festkörperprobleme* **9**, 22 (1969). [71](#)
- [112] W. Brenig, G. Döhler und P. Wölfe, *Z. Physik* **246**, 1 (1973). [71](#)
- [113] M. Pollak, *Disc. Faraday. Soc.* **15**, 30 (1970). [71](#)
- [114] A. L. Efros und B. I. Shklovskii, *J. Phys. C* **8**, L49 (1975). [71](#)
- [115] N. van Lien, *Sov. Phys. Semicond.* **18**, 207 (1984). [71](#)
- [116] M. Furlan, *Phys. Rev. B* **57**, 14818 (1998). [71](#), [160](#)
- [117] G. Ebert, K. von Klitzing, C. Probst, E. Schuberth, K. Ploog und G. Weimann, *Solid State Commun.* **45**, 625 (1983). [72](#)

- [118] A. Briggs, Y. Guldner, J. P. Vieren, M. Voos, J. P. Hirtz und M. Razeghi, Phys. Rev. B **27**, 6549 (1983). [72](#)
- [119] D. G. Polyakov und B. I. Shklovskii, Phys. Rev. B **48**, 11167 (1993). [72](#), [86](#), [123](#), [135](#), [159](#)
- [120] B. I. Shklovskii, Sov. Phys. Semicond. **6**, 1964 (1973). [84](#)
- [121] R. J. Haug, *Untersuchungen zum Magnetotransport in zweidimensionalen Elektronensystemen*, Dissertation, Stuttgart, 1988. [90](#)
- [122] H. Aoki, Rep. Prog. Phys. **50**, 655 (1987). [91](#)
- [123] P. T. Coleridge, P. Zawadzki und A. S. Sachrajda, Phys. Rev. B **49**, 10798 (1994). [96](#)
- [124] D.-H. Lee, S. Kivelson und S.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **68**, 2386 (1992). [96](#)
- [125] S. Kivelson, D.-H. Lee und S.-C. Zhang, Phys. Rev. B **46**, 2223 (1992). [96](#)
- [126] J. Kucera und P. Streda, J. Phys. C **21**, 4357 (1988). [96](#)
- [127] B. M. Gammel und F. Evers, Phys. Rev. B **57**, 14829 (1998). [96](#), [96](#)
- [128] T. Terao, Phys. Rev. B **55**, 4077 (1997). [96](#)
- [129] L. P. Rokhinson, B. Su und V. J. Goldman, Solid State Commun. **96**, 309 (1995). [97](#), [111](#), [166](#)
- [130] P. T. Coleridge, Phys. Rev. Lett. **72**, 3917 (1994). [98](#)
- [131] P. T. Coleridge, Phys. Rev. B **60**, 4493 (1999). [98](#)
- [132] D. Shahar, D. C. Tsui, M. Shayegan, R. N. Bhatt und J. E. Cunningham, Phys. Rev. Lett. **74**, 4511 (1995). [98](#)
- [133] D. Shahar, D. C. Tsui, M. Shayegan, E. Shimshoni und S. L. Sondhi, Science **274**, 589 (1996).
- [134] M. Hilke, D. Shahar, S. H. Song, D. C. Tsui, Y. H. Xie und D. Monroe, Nature **395**, 675 (1998).
- [135] P. T. Coleridge, P. Zawadzki, A. S. Sachrajda, R. L. Williams und Y. Feng, cond-mat/9906285 (1999). [98](#)
- [136] D. Shahar, M. Hilke, C. C. Li, D. C. Tsui, S. L. Sondhi und M. Razeghi, Solid State Commun. **107**, 19 (1998). [98](#)
- [137] N. R. Cooper, B. I. Halperin, C.-K. Hu und I. M. Ruzin, Phys. Rev. B **55**, 4551 (1997). [98](#), [102](#), [103](#), [111](#)

- [138] A. M. Dykhne und I. M. Ruzin, Phys. Rev. B **50**, 2369 (1994). [98](#)
- [139] I. M. Ruzin und S. Feng, Phys. Rev. Lett. **74**, 154 (1995). [98](#)
- [140] C.-K. Hu und B. I. Halperin, Phys. Rev. B **55**, 2705 (1997). [102](#)
- [141] S. D. Sarma, in *Perspectives in Quantum Hall Effects*, Herausgeber: S. D. Sarma und A. Pinczuk (Wiley-Interscience, New York, 1997), Kap. 1. [117](#), [127](#)
- [142] P. A. Lee, A. D. Stone und H. Fukuyama, Phys. Rev. B **35**, 1039 (1987). [117](#), [120](#), [121](#)
- [143] P. A. Lee und A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **55**, 1622 (1985). [119](#)
- [144] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, 9. Aufl. (Akademie-Verlag, Berlin, 1979), Band V. [121](#)
- [145] D. E. Khmel'nitskii und M. Yosefin, Surface Science **305**, 507 (1994). [122](#)
- [146] G. Dumpich, Festkörperprobleme **31**, 59 (1991). [122](#)
- [147] E. Abrahams, P. W. Anderson, P. A. Lee und T. V. Ramakrishan, Phys. Rev. B **24**, 6783 (1981). [122](#)
- [148] B. L. Altshuler, A. G. Aronov und D. E. Khmel'nitskii, J. Phys. C **15**, 7367 (1982). [122](#)
- [149] B. J. F. Lin, M. A. Paalanen, A. C. Gossard und D. C. Tsui, Phys. Rev. B **29**, 927 (1984). [122](#)
- [150] P. Mohanty, E. M. Q. Jariwala und R. A. Webb, Phys. Rev. Lett. **78**, 3366 (1997). [122](#)
- [151] S. C. K. Siak, J. Phys.: Condensed Matter **3**, 4213 (1991). [123](#)
- [152] G. Timp, A. M. Chang, P. Mankiewich, R. Behringer, J. E. Cunningham, T. Y. Chang und R. E. Howard, Phys. Rev. Lett. **59**, 732 (1987). [124](#)
- [153] J. A. Simmons, S. W. Hwang, D. C. Tsui, H. P. Wei, L. W. Engel und M. Shayegan, Phys. Rev. B **44**, 12933 (1991). [124](#)
- [154] A. K. Geim, P. C. Main, P. H. Beton, L. Eaves, S. B. Beaumont und C. D. W. Wilkinson, Phys. Rev. Lett. **69**, 1248 (1992). [124](#)
- [155] P. C. Main, A. K. Geim, H. A. Carmona, C. V. Brown, T. J. Foster, R. Taboryski und P. E. Lindelof, Phys. Rev. B **50**, 4450 (1994). [124](#)
- [156] A. A. Bykov, Z. D. Kvon, E. B. Ol'shanetskii, L. V. Litvin und S. P. Moshchenko, Phys. Rev. B **54**, 4464 (1996). [124](#)

- [157] D. H. Cobden und E. Kogan, Phys. Rev. B **54**, R17316 (1996). [124](#)
- [158] D. H. Cobden und C. H. W. Barnes, Phys. Rev. Lett. **82**, 4695 (1999). [124](#), [124](#)
- [159] R. Schäfer, P. vom Stein und C. Wallisser, in *Advances in Solid State Physics*, Herausgeber: B. Kramer (Vieweg, 1999), Band 39. [132](#)
- [160] P. J. Burke, I. B. Spielman, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer und K. W. West, Appl. Phys. Lett. **76**, 745 (2000). [139](#), [185](#)
- [161] R. P. Taylor, R. Newbury, A. S. Sachrajda, Y. Feng, P. T. Coleridge, M. Davies und J. P. McCaffrey, Superlatt. Microstruct. **24**, 337 (1998). [149](#)
- [162] A. S. Sachrajda, Y. Feng, R. P. Taylor, R. Newbury, P. T. Coleridge und J. P. McCaffrey, Superlatt. Microstruct. **20**, 651 (1996). [149](#)
- [163] T. Machida, *Phase Coherence of Two-Dimensional Systems in High Magnetic Fields*, Dissertation, 1998. [156](#)
- [164] A. L. Efros, JETP **62**, 1057 (1985). [159](#), [186](#), [186](#)
- [165] *The Quantum Hall Effect*, Herausgeber: R. E. Prange und S. M. Girvin (Springer-Verlag, New York, 1987). [190](#), [190](#)



# Symbole und Abkürzungen

## Symbole

$\alpha$	Feinstrukturkonstante der Quantenelektrodynamik
$\alpha\beta$	wahlweise Index $xx$ oder $xy$
$\beta$	nicht universeller kritischer Exponent
$\beta(g)$	Skalierungsfunktion des Leitwerts
$\delta$	Abweichung von $E$ , $B$ , $\nu$ oder $n_e$ vom kritischen Punkt
$\delta\nu_T$	mikroskopisch definierte Breite des Plateau-Übergangs
$\delta\nu(\vec{r})$	Ortsabhängige Inhomogenität im Füllfaktor
$\delta\nu_0$	Amplitude von $\delta\nu(\vec{r})$
$\epsilon$	Ein-Teilchen-Energie
$\varepsilon$	Materialwert der Dielektrizitätskonstante, $\varepsilon = 12,4$ für GaAs
$\varepsilon_0$	Dielektrizitätskonstante im Vakuum
$\zeta_T$	Maschenweite des Perkolationsnetzwerkes im Plateau-Übergang
$\eta$	Exponent der Diffusionskonstante im QHE
$\theta$	Temperatur-Exponent der Leitwertkorrektur im Plateau-Übergang
$\phi$	quantenmechanische Phase
$\gamma$	kritischer Exponent der Lokalisierungslänge
$\gamma_p$	kritischer Exponent eines klassischen Perkolationsnetzwerkes
$\kappa$	kritischer Exponent für Skalierung mit der Temperatur
$\lambda_F$	Fermiwellenlänge
$\lambda_M, \lambda_L$	Lokalisierungslänge des endlichen Systems
$\mu_B$	Bohr-Magneton
$\mu_e$	Beweglichkeit der Elektronen
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante im Vakuum
$\nu$	Füllfaktor
$\bar{\nu}$	mittlerer Füllfaktor bei ortsabhängigem $\nu(\vec{r})$
$\nu_c$	kritischer Füllfaktor
$\omega$	Frequenz
$\omega_c$	Zyklotronfrequenz
$\rho_{xx}, \rho_{xy}$	Komponenten des Widerstandstensors $\hat{\rho}$ in $\vec{F} = \hat{\rho}\vec{j}$
$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}$	Komponenten des Leitfähigkeitstensors $\hat{\sigma}$ in $\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{F}$
$\sigma_c$	kritischer Wert der Leitfähigkeit am Phasenübergang
$\sigma_1, \sigma_2$	benachbarte Hall-Plateau-Leitfähigkeiten
$\zeta_T$	typische Ausdehnung der Quanten-Hall-„Tümpel“

## Symbole und Abkürzungen

$\tau_{\dots}$	Streuzeit
$\xi$	Lokalisierungslänge
$\Delta$	Anregungslücke
$\Delta\nu, \Delta B$	Halbwertsbreite des SdH-Maximums in $\sigma_{xx}$ bzw. $\rho_{xx}$
$\Gamma$	Verbreiterung eines Landau-Niveaus ( $\Gamma^2 = \langle \Delta E \rangle^2$ )
$\Lambda$	Reskalierungsfunktion der Lokalisierungslänge
$\Phi$	magnetischer Fluss
$\Phi_0 = h/e$	magnetisches Flussquant
$\Psi$	quantenmechanische Wellenfunktion
$a$	Exponent der effektiven Temperatur mit dem Strom
$a_i$	Wahrscheinlichkeitsamplituden
$b$	Skalierungsexponent von Strom bzw. Spannung
$c$	Lichtgeschwindigkeit
$c_s$	Schallgeschwindigkeit
$d$	Anzahl der Dimensionen
$e$	Elementarladung
$f_{\dots}$	Skalierungsfunktion von $L, T, k, \omega, F, \dots$
$f_1$	kleinste relevante Magnetfeldfrequenz in der Spektraldichte
$g$	Leitwert in Einheiten des Leitwertquantums $e^2/h$
$g_c$	kritischer Leitwert für Metall-Isolator-Übergang
$g^*$	effektiver g-Faktor
$g_s$	Spinentartungsgrad
$h = 2\pi\hbar$	Planck'sches Wirkungsquantum
$i$	Nummerierung von Energieniveaus
$j$	elektrische Stromdichte
$k$	Wellenvektor
$k_F$	Fermi-Wellenvektor
$k_B$	Boltzmannkonstante
$l$	mittlere freie Weglänge
$l_B$	magnetische Länge
$m^*$	effektive Elektronenmasse im Festkörper
$n_e$	Elektronendichte
$n(\vec{r})$	Ortsabhängige Ladungsträgerdichte durch Inhomogenitäten
$n_L$	Entartungsdichte eines Landau-Niveaus
$n$	Quanten-Hall-Effekt- bzw. Landau- bzw. Energiequantenzahl
$p$	Exponent der Phasenkohärenzzeit: $\tau_\Phi \propto T^{-p}$
$q$	elektrische Ladung
$r_1, r_2$	Außen- und Innenradius der Corbino-Geometrie
$r_B$	Ausdehnung des einzelnen Streuers
$r_c$	Zyklotronradius
$\vec{r}$	Ortsvektor

$s$	Spinquantenzahl
$t$	Zeit
$v_F$	Fermi-Geschwindigkeit
$w$	Breite der Hall-Geometrien oder der Corbino-Ringe ( $w = r_1 - r_2$ )
$x, y$	Parameter im Ein-Parameter-Skalierungsverhalten, zusammengesetzt aus zwei der folgenden Größen: $L, \xi \propto \Delta\nu^{-\gamma}, T, F, f$
$z$	dynamischer Skalierungsexponent
$A_0$	Geometriefaktor für Corbino-Geometrie: $A_0 = \ln(r_1/r_2)/(2\pi)$
$A_{i,j}$	von den Pfaden i und j eingeschlossene Fläche
$B$	Magnetfeld
$B_{\text{korr}}$	Korrelationsfeld (halbe Halbwertsbreite der Korrelationsfunktion)
$B_c$	kritisches Magnetfeld
$C$	Vorfaktor der Größenordnung eins
$D$	Diffusionskonstante
$E$	Energie
$E_i$	diskretes Energieniveau
$E_c$	kritische Energie
$E_F$	Fermienergie
$E_z^i$	Quantisierungsenergie in Wachstumsrichtung
$F$	elektrisches Feld
$F_0, F_1$	Parameter im <i>variable-range hopping</i> , $F_0 = F_1 \Delta\nu ^{-\gamma}$
$\tilde{F}(\Delta B)$	Korrelationsfunktion
$G$	Leitwert
$\hat{H}$	quantenmechanischer Hamiltonoperator
$I$	elektrischer Strom
$L$	Ausdehnung des elektronischen Systems bzw. der Probe
$L_{e-e}, L_{e-p}$	Elektron-Elektron bzw. Elektron-Phonon-Streulänge
$L_{\text{in}}, L_{\Phi}$	synonym für inelastische Streulänge bzw. Phasenkohärenzlänge
$L_T$	temperaturabhängige Länge im Skalierungsverhalten
$L_{Th}$	effektive Länge durch Fermiverteilung, $L_{Th} = \sqrt{\hbar D/k_B T}$
$M$	Quantisierung $G_c = Me^2/h$ der Corbino bei $T = 0$
$N$	Zustandsdichte
$N_L$	Entartung eines Landau-Niveaus mit Spinfreiheitsgrad
$P_S$	Spin-Polarisationsgrad
$R_0$	Widerstand in Corbino-Geometrie bei universeller Leitfähigkeit
$R_c$	Korrelationslänge der Inhomogenitäten des Füllfaktors
$R_{\text{rand}}$	Zusätzlicher Widerstand durch Inhomogenitäten
$R_{xx}, R_L$	Längswiderstand
$R_{xy}$	Quer- bzw. Hall-Widerstand
$R_K$	von Klitzing-Konstante ( $R_K = e^2/h$ )
$S$	Wirkung
$T$	Temperatur

## Symbole und Abkürzungen

$T_0, T_1$	Parameter im <i>variable-range hopping</i> , $T_0 = T_1  \Delta\nu ^{-\gamma}$
$T_a$	Aktivierungstemperatur
$T_e$	Temperatur des 2DES
$T_F$	effektive Temperatur im elektrischen Feld
$T_{\text{Kryo}}$	Temperatur des Kryostaten
$U$	elektrische Spannung
$U_H$	Hall-Spannung (Spannung senkrecht zum Strom)
$W$	endliche Breite des numerischen Gitters
$Z$	Impedanz (komplexer Widerstand)
$Z_0$	Impedanz der Hochfrequenzleitung, meist $Z_0 = 50 \Omega$
$\mathcal{F}(x)$	Fouriertransformierte von $x$
$\mathcal{P}$	Spektraldichte der Fluktuationen ( $\mathcal{P}(f_B) = \mathcal{F}(\tilde{F}(\Delta B))$ )
$\mathcal{R}$	Reflexionsfaktor für eine elektromagnetische Welle
$\mathcal{R}_p$	Reflexion der Probe
$\mathcal{R}_{1,2}$	Kalibrierungsgrößen für die Hochfrequenzmessung
$\mathcal{T}_L$	Transmission eines Kanals der Leitfähigkeit
$\mathcal{T}$	Kalibrierungsgröße, gibt die Transmission der Leitung an

## Abkürzungen

2DES	zweidimensionales Elektronensystem
DC	Gleichstrom ( <i>direct current</i> )
DOS	Zustandsdichte ( <i>density of states</i> )
HF	Hochfrequenz
MOSFET	Metalloxid-Halbleiter-Feldeffekttransistor <i>metal oxide semiconductor field effect transistor</i>
PSD	Spektraldichte bzw. spektrale Leistungsdichte ( <i>power spectral density</i> )
QHE	Quanten-Hall-Effekt
SCBA	selbstkonsistente Bornsche Näherung ( <i>self consistent born approximation</i> )
SdH	Shubnikov-de Haas-Oszillationen
UCF	universelle Leitwertfluktuationen ( <i>universal conductance fluctuations</i> )
VRH	<i>variable-range hopping</i>

## Mein herzlicher Dank gilt

Herrn Prof. Dr. Rolf Haug für die Möglichkeit, diese Dissertation anfertigen zu können, und für seine stetige Diskussionsbereitschaft und Unterstützung,

Herrn Priv.-Doz. Walter Apel für die Übernahme des Korreferats und das große Interesse an dieser Arbeit,

Herrn Dr. Ulrich Zeitler, der sich von mir insbesondere in den letzten Monaten stark in meine Arbeit einbinden ließ und die komplette Arbeit lesen musste,

natürlich all meinen lieben Doktoranden-Kollegen für die super Stimmung und viel Spaß im Institut, zuvorderst (soviel Hierarchie muss sein) den A-Dos Peter König und Hans Werner Schumacher, die für gute Laune in unserem Büro sorgten und mich beinahe zum Fußballfan konvertierten, sowie Philipp Hullmann für Hilfe in allen Lebenslagen, und den Mi- und Ju-Dos Jörn Regul, Isabella Hapke-Wurst, André Nauen, Ulrich Keyser, Claus Fühner, Jens Könnemann und Fritz Schulze-Wischeler, noch seid Ihr mich aber auch nicht ganz los,

Klaus Pierz für Heterostrukturen und auch noch einmal André und Fritz für Proben, natürlich auch den Diplomanden Jan Plöger, Florian Beug, Mathias Wick, Andreas Kunz und Martin Monka, mit denen ich so manches mal am Kryo gestanden habe,

Yvonne Griep, die das Kunststück vollbringt, den Laden in Schwung zu halten, und Klara Tetzlaff, die immer Helium parat hat,

der Feinmechanikwerkstatt unter der Leitung von Herrn Claus und Herrn Lehmann, die immer unglaublich schnelle Ergebnisse lieferte,

meinen Eltern, die mir den Weg hierher bereiteten, und ganz besonders Sonja, die in letzter Zeit viel Geduld mit mir haben musste.

## Lebenslauf

Name: Frank Hohls  
Geburtsdatum: 14. Juni 1970  
Geburtsort: Celle

1976-1980 Grundschole in Hasselhorst  
1980-1989 Gymnasium der Christianschule in Hermannsburg  
08.05.1989 Abitur

1989-1990 Grundwehrdienst

1990-1996 Studium der Physik  
an der Universität Hannover

Oktober 1992 Vordiplom  
1994-1995 Diplomarbeit am Institut für Atom- und Molekülphysik  
bei Prof. Dr. K. Danzmann mit dem Thema  
„Strahlungsdruck in Laserinterferometern“

05.03.1996 Diplom

April 1996-  
Mai 2000 Doktorarbeit in der Abteilung Nanostrukturen  
am Institut für Festkörperphysik der Universität Hannover  
bei Prof. Dr. R. J. Haug