

Neuartige Randintegralmethode zur Berechnung der Portinduktivitäten in planparallelen Plattenstrukturen

Dr.-Ing. Matthias Friedrich
Siemens AG Erlangen – EMV Zentrum, matthiasfriedrich@siemens.com

M.Sc. Christian Bednarz
Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, OvGU Magdeburg, christian.bednarz@ovgu.de

Prof. Dr.-Ing. Marco Leone
Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, OvGU Magdeburg, marco.leone@ovgu.de

1 Einleitung

Die numerische, analytische sowie messtechnische Analyse von planparallelen, leitenden Strukturen ist seit vielen Jahren für die Analyse und EMV-Optimierung auf Leiterplattebene unverzichtbar [1–4]. Typische Beispiele sind hierbei Motherboard-Subboard-Anordnungen, Kühlkörper sowie die Versorgungslagen (Power-Bus, Electromagnetic Bandgap) auf Multilayer-Leiterplatten. Für viele praktische Anwendungen genügt eine quasistatische Betrachtung der untersuchten Struktur [3–11]. Dazu können aus den quasistatischen Portinduktivitäten für die jeweiligen Anwendungen (Abstrahlung, EBG-Filter usw.) einfache Ersatzschaltbilder abgeleitet werden. Die einfachen Modelle auf der Basis von konzentrierten Bauelementen ermöglichen hierbei ein sehr gutes physikalisches Verständnis des elektromagnetischen Verhaltens der Struktur. Dies erlaubt eine zielgerichtete Optimierung sowie die Ableitung von effektiven Design-Rules. Weiterhin wurde in [6] gezeigt, dass die quasistatischen Portinduktivitäten zur Beschleunigung eines breitbandigen Foster-Ersatzschaltbildes verwendet werden können. Für die Betrachtung beliebig berandeter Strukturen muss zur Berechnung dieser Portinduktivitäten auf numerische Lösungsmethoden zurückgegriffen werden. Dafür wurden in der Literatur bisher nur differentielle Verfahren wie FEM [7] oder FDM [6, 12] genutzt. Diese benötigen jedoch die Implementierung komplexer Vernetzungsalgorithmen. Als Alternative wird in diesem Paper die Induktivitätsberechnung über eine Randintegralgleichung (Boundary Element Methode, BEM) vorgestellt [5]. Aufgrund der simplen Randvernetzung ist diese sehr einfach zu implementieren, wobei sämtliche Elemente der Systemmatrix analytisch berechnet werden können, was die Effizienz des Verfahrens noch zusätzlich erhöht.

2 BEM - Formulierung

Ist der vertikale Plattenabstand h einer Parallelplattenanordnung deutlich kleiner als die lateralen Abmessungen der Struktur, kann die Feldverteilung innerhalb der Struktur auf das in Abbildung 1 gezeigte zweidimensionale Randwertproblem zurückgeführt werden [13]. Während die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke an den offenen Rändern C der Struktur verschwindet (perfect magnetic conductor, PMC), wird sie gemäß des Durchflutungssatzes an den Ports (C_i, C_j) durch die Normalkomponente der Stromdichte bestimmt. Für die hier betrachteten elektrisch kleinen Anordnungen erfüllt das vertikal gerichtete magnetische Vektorpotential A_j die Poissongleichung [9]:

$$\Delta A_j = \mu \frac{I_j}{S} \quad (1)$$

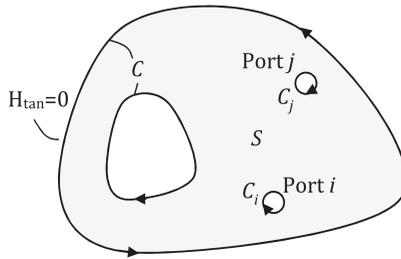


Abbildung 1: Beliebige berandete Parallelplattenstruktur mit zwei Ports i und j

mit der Randbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial n} A_j = \begin{cases} \mu \frac{I_j}{C_j} & \text{entlang des Ports } C_j, \\ 0 & \text{sonst (PMC)}. \end{cases} \quad (2)$$

Zur Ableitung einer Randintegralgleichung wird der zweite Green'sche Integralsatz:

$$\int_S (A_j \Delta G_e - G_e \Delta A_j) \, dS' = \oint_C \left(A_j \frac{\partial G_e}{\partial n} - G_e \frac{\partial A_j}{\partial n} \right) \, dC' \quad (3)$$

auf das Vektorpotential A_j und eine erweiterte Green'sche Funktion G_e („Greens Function in an extended sense“, [14]) der Form:

$$G_e = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\rho}{R} \right) + \frac{\rho^2}{4\pi R^2} \quad (4)$$

angewandt [5]. Analog zum Vektorpotential A_j , welches im Zweidimensionalen nicht eindeutig bestimmt ist, besitzt auch die Green'sche Funktion G_e einen zunächst unbestimmten Bezugsradius R . Wie in [5, 10] gezeigt, sollte dieser stets größer als die maximalen lateralen Abmessungen der Struktur gewählt werden. Eine mögliche eindeutige Festlegung (Eichung) des Vektorpotentials A_j ist die Beziehung [9]:

$$\int_S \tilde{A}_j \, dS = 0 \quad (5)$$

mit welcher das resultierende Vektorpotential \tilde{A}_j auf dem Lösungsgebiet S mittelwertfrei ist. Setzt man (4) und (5) in (3) ein, erhält man nach wenigen Zwischenrechnungen (siehe [5]) die Integralgleichung:

$$\tilde{A}_j(\mathbf{r}) = \frac{\mu I_j}{C_j} \oint_{C_j} G_e \, dC' - \frac{\mu I_j}{S} \oint_C \hat{G}_e \cos \phi \, dC' - \oint_C \left(\tilde{A}_j \frac{\partial}{\partial \rho} G_e \cos \phi' \right) \, dC', \quad (6)$$

mit der Funktion [5]:

$$\hat{G}_e = -\frac{1}{8\pi} \left(\rho \left(2 \ln \left(\frac{\rho}{R} \right) - 1 \right) - \frac{\rho^3}{2R^2} \right). \quad (7)$$

Der Abstand ρ in (4) und (7) sowie der Winkel ϕ in (6) berechnen sich wie in Abb. 2 skizziert.

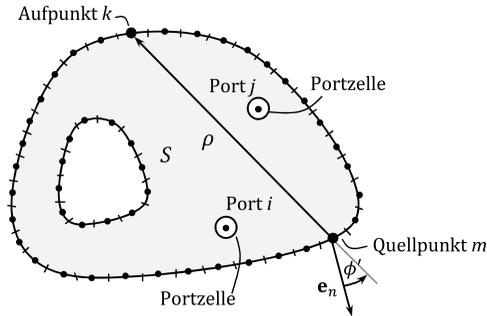


Abbildung 2: Beliebige berandete Struktur mit Randdiskretisierung

Durch die Eichung (5) kann nach [9] die Portinduktivität allein aus dem Vektorpotential entlang der Portberandung C_i bestimmt werden:

$$L_{ij} = \frac{\hbar}{C_i I_j} \int_{C_i} \tilde{A}_j dC. \quad (8)$$

Diskretisiert man den Rand der Struktur und nutzt auch für die Definition der Randinduktivitäten L_{mj} den Zusammenhang (8), erhält man schließlich die zu lösende diskrete Integralgleichung für die Induktivitäten [5]:

$$L_{kj} = \sum_{m \in \{l_m \in C_j\}} \frac{2\mu\hbar}{C_j} \int_{l_m} G_e dC' - \sum_m \frac{2\mu\hbar}{S} \int_{l_m} \hat{G}_e \cos \phi' dC' - \sum_m L_{mj} 2 \int_{l_m} \frac{\partial G_e}{\partial \rho} \cos \phi' dC'. \quad (9)$$

Damit kann zur Berechnung des gesuchten Induktivitätsvektors (\mathbf{L}) ein Gleichungssystem der Art:

$$(\mathbf{L}) = (\mathbf{G}) + [\mathbf{D}](\mathbf{L}) \quad (10)$$

aufgestellt werden [5]. Wie in [10] gezeigt, können für gerade Randzellen und kleine runde Ports die Matrixeinträge von $[\mathbf{D}]$ sowie die des Vektors (\mathbf{G}) analytisch berechnet werden.

3 Induktives Ersatzschaltbild für elektrisch kleine Strukturen

Die aus (10) resultierenden Portinduktivitäten können in einem Ersatzschaltbild nach (Abb. 3, [15, 16]) verschaltet und dann zur weiteren Analyse vielseitig genutzt werden. Hierbei entspricht C_{00} der Plattenkapazität, $Z_{q,l}$ der zusammengefassten Quellen- und Lastimpedanz und R_{rad} dem Strahlungswiderstand der Struktur. Dieser entspricht für elektrisch kleine Strukturen dem eines Hertz'schen Dipols [10, 15, 16]. Dieses Ersatzschaltbild kann für elektrisch kleine Strukturen z.B. für Signalintegritätsanalysen [11] oder Abstrahlungsanalysen [16] verwendet werden.

Die Gültigkeit ist dabei auf den Frequenzbereich unterhalb von Struktur (Hohlraum) – Resonanzen beschränkt. Hier tritt bereits eine stark ausgeprägte Kreisresonanz auf.

Durch eine Simulation des Netzwerkmodells (Abb. 3) kann der Kondensatorstrom I_{ant} bestimmt werden, welcher dem Antennenstrom des Hertz'schen Dipols entspricht. Die elektrische Feldstärke im Fernfeld kann somit mit Hilfe der bekannten Abstrahlungsformel bestimmt werden [10, 15, 16].

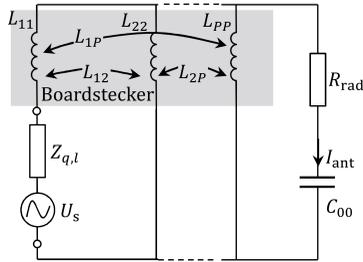


Abbildung 3: Äquivalentes Netzwerk zur Abstrahlungsanalyse elektrisch kleiner Strukturen

3.1 Näherungsweise Betrachtung von Randeffekten

Bei praktischen Anwendungen sind die lateralen Abmessungen oftmals nicht ausreichend groß, um die Randeffekte komplett vernachlässigen zu können. Für eine möglichst genaue Modellierung sollen diese daher näherungsweise bei der Berechnung der Ersatzschaltbildparameter berücksichtigt werden.

Für eine rechteckige Struktur mit Kantenlänge w kann zur Berücksichtigung dieser Randeffekte eine effektive Abmessung w_e mit Hilfe des Vergrößerungsfaktors [8, 10, 17]:

$$\eta(h/w) = \frac{w_e}{w} = \frac{4\pi h/w}{\ln\left(1 + 4(h/w)\left(8(h/w) + \sqrt{(8h/w)^2 + \pi^2}\right)\right)} \quad (11)$$

abgeschätzt werden. Für sehr kleine Verhältnisse h/w kann (11) durch eine Taylor-Reihe angenähert werden. Für die absolute Vergrößerung der Plattenabmessungen erhält man:

$$\Delta w = w_e - w \approx 3,736 \cdot h = 2 \cdot 1,868 \cdot h. \quad (12)$$

Dieser Ausdruck ist nur noch vom Plattenabstand h abhängig. Für kleine Abstände genügt es also, den Rand der Struktur, unabhängig von den lateralen Abmessungen, um $1,868 \cdot h$ zu erweitern.

4 Validierung – Vergleich mit 3D-Feldsimulationen

Zur Validierung der vorgestellten Methode wird eine 3D-Feldsimulation auf Basis der Momentenmethode [18] durchgeführt. Hierzu wird die in Abb. 4 gezeigte unregelmäßige Struktur betrachtet. Die Simulation wird wahlweise mit 2 Pins (1 und 2) und 3 Pins (1 - 3) durchgeführt. Die Anregung erfolgt jeweils an Port 1 mit einer Amplitude von 1 V. Zusätzlich ist ein Quellen-/Lastwiderstand von 50Ω im Strompfad von Pin 1 eingefügt.

Zum Vergleich der 3D-Vollwellensimulation mit der 1D-Randintegralgleichung wurde die abgestrahlte elektrische Feldstärke der in Abb. 4 dargestellten Beispielstruktur im Abstand von $r = 3 \text{ m}$ berechnet.

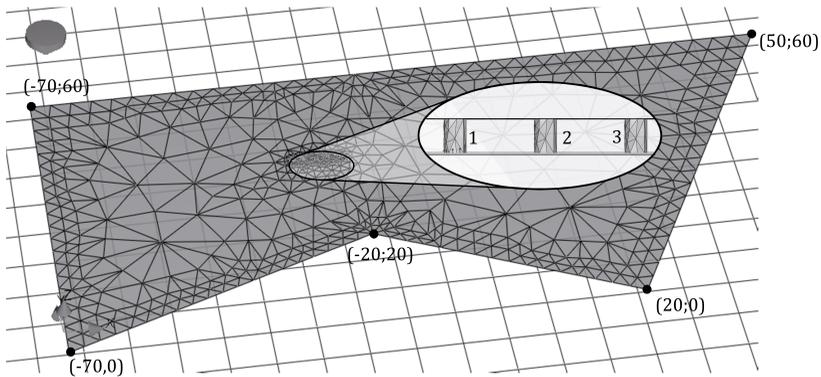


Abbildung 4: Validierungsbeispiel mit Vernetzung in Concept II mit 3 Ports $(x_1; y_1) = (-30; 40)$ mm, $(x_2; y_2) = (-26; 40)$ mm, $(x_3; y_3) = (-22; 40)$ mm mit Radius $r_0 = 0,5$ mm und Plattenabstand $h = 1,5$ mm

Die resultierenden Betragsverläufe sind in Abbildung 5 dargestellt. Man erkennt in beiden Fällen, dass die einfache Randintegralgleichung bis zur ersten Kreisresonanz eine sehr gute Übereinstimmung mit der Referenzsimulation zeigt.

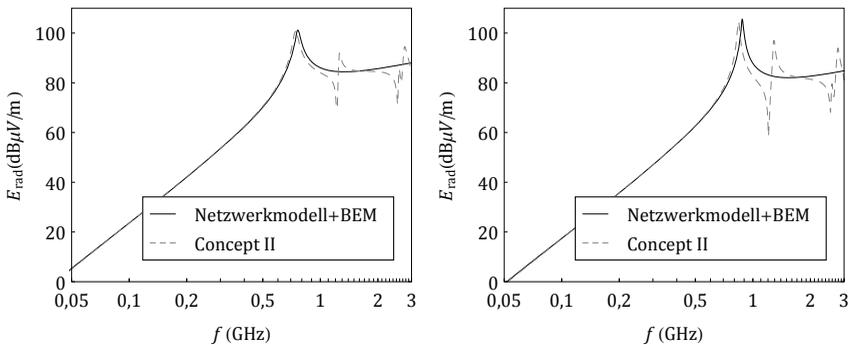


Abbildung 5: Vergleich von 3D-Simulation und 1D-BEM - links: für 2 Pins, rechts: für 3 Pins

Die im höheren Frequenzbereich auftretenden Hohlraumresonanzen sind im quasistatischen Ansatz nicht enthalten. Jedoch oszillieren diese um den quasistatischen Verlauf, wodurch dieser auch in diesem Frequenzbereich als grobe Abschätzung genutzt werden kann.

5 Vergleich mit Messungen

Als praktisches Anwendungsbeispiel für das vorgestellte induktive Ersatzschaltbild (Abb. 3) wurde die elektromagnetische Emission unterschiedlicher Motherboard-Subboard-Strukturen in der Absorberhalle untersucht. Um hierbei nur den Dipolanteil der Subboards zu messen und weitere parasitäre Abstrahlungseffekte von Zuleitungen zu vermeiden, wurden die Subboards mit einer batteriebetriebenen Signalquelle gespeist (siehe Abb. 6). Die elektrische Feldstärke

im Fernfeld wird in Hauptstrahlrichtung des Hertz'schen Dipols im Abstand $r = 10\text{ m}$ gemessen.

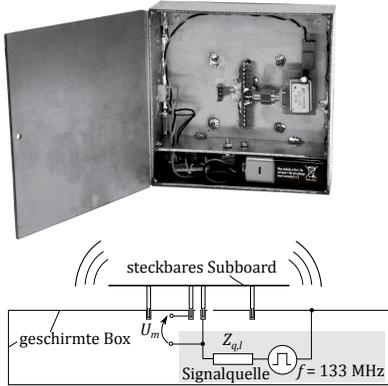


Abbildung 6: Geschirmte Signalquelle mit batteriebetriebenen Oszillator



Abbildung 7: Testaufbau mit aufgestecktem Subboard ohne Massepfosten

Als Beispiele werden zwei quadratische Subboards mit $a = b = 50\text{ mm}$ und Plattenabstand $h = 9\text{ mm}$ betrachtet. In der Mitte jedes Boards sind zwei Pins (1,2) im Abstand $d = 2,4\text{ mm}$ angeordnet. Während Board 1 (siehe Messaufbau in Abb. 7) mit Kunststoffposten aufgebaut wurde, wurden an Board 2 vier weitere Pins (3,4,5,6) mit Abstand 5 mm zur jeweiligen Ecke angebracht. Der effektive Radius aller leitfähigen Pins beträgt $r_0 = 0,354\text{ mm}$. Die rechteckige Geometrie erlaubt eine zusätzliche Validierung der Induktivitätsergebnisse anhand der exakten analytischen Lösung [15]. Die in Tabelle 1 dargestellten Ergebnisse ausgewählter Kopplungen zeigen hierbei eine sehr gute Übereinstimmung.

	L_{11} (nH)	L_{33} (nH)	L_{12} (nH)	L_{13} (nH)	L_{34} (nH)
BEM	7,285	9,299	3,741	-0,256	0,702
Exakt [15]	7,280	9,290	3,756	-0,231	0,702

Tabelle 1: Vergleich der Portinduktivitäten zwischen analytischer Lösung und BEM

Da die frequenzabhängigen Parameter der realen Signalquelle nicht bekannt sind, wurde zum Vergleich von Messung und Simulation die Spannung U_m am Signalpin mitgemessen und als Eingangsgröße in das Ersatzschaltbild nach Abb. 3 eingesetzt. Das Anregungsspektrum erreicht dabei ein Maximum von ca. $200 - 300\text{ mV}$ bei der jeweiligen Resonanz des Boards. Wie man den Ergebnissen in Abbildung 8 entnehmen kann, genügen solche geringen Pegel bereits für eine deutliche Überschreitung von Standardgrenzwerten.

Weiterhin erkennt man eine deutliche Reduktion der elektromagnetischen Emission durch das Hinzufügen von leitfähigen Massepfosten. Für beide Beispiele liefert das einfache Netzwerkmodell eine sehr gute Vorhersage des Strahlungsverhaltens.

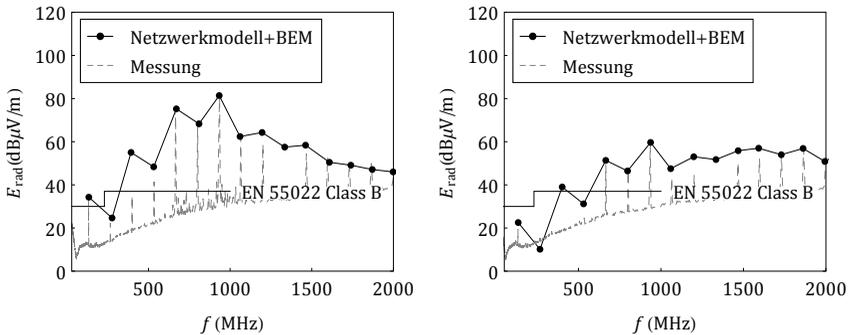


Abbildung 8: Vergleich von Messung und Simulation für Subboard - links: ohne Massepfosten, rechts: mit Massepfosten

Zusammenfassung

Im Paper wird eine neuartige Randintegralmethode zur Berechnung der Portinduktivitäten in planparallelen Plattenstrukturen vorgestellt. Durch die Verfügbarkeit von analytischen Lösungen für alle Einträge der Systemmatrix ermöglicht dies eine sehr einfache Analyse von beliebig geformten, elektrisch kleinen planparallelen Strukturen. Die Validierung der Methode wurde für eine komplexe Geometrie an einer 3D-Vollwellen-Simulation durchgeführt. Die Anwendbarkeit der Methode wurde messtechnisch mit Fernfeldmessungen am Beispiel von Motherboard-Subboard-Anordnungen verifiziert und diskutiert.

Literatur

- [1] Li, E.-P.: *Electrical Modeling and Design for 3D System Integration: 3D Integrated Circuits and Packaging, Signal Integrity, Power Integrity and EMC*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2012
- [2] Held, J. ; Sjarief, R.: One-Sided Measurement of Power Supply Impedance without Connectors. In: *Proc. DesignCon, Santa Clara, CA* Jan. 27-30 (2015)
- [3] Funato, H. ; Suga, T. ; Suhara, M.: Application of a Cavity Resonator Model for Characterization and Estimation of Radiation From a PCB-Chassis System. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 56 (2014), April, Nr. 2, S. 475–481
- [4] Funato, H. ; Suga, T. ; Suhara, M.: Model-based analysis of screw locations to reduce radiation from a PCB-chassis structure. In: *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC), Raleigh, 2014*, S. 123–127
- [5] Friedrich, M. ; Leone, M.: Boundary-Element Method for the Calculation of Port Inductances in Parallel-Plane Structures. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 56 (2014), Dezember, Nr. 6, S. 1439–1447
- [6] Leone, M. ; Friedrich, M. ; Mantzke, A.: Efficient Broadband Circuit-Modeling Approach for Parallel-Plane Structures of Arbitrary Shape. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 55 (2013), Oktober, Nr. 5, S. 941–948
- [7] Bednarz, C. ; Mantzke, A. ; Leone, M.: Efficient FEM-Based Modal Circuit Representation of Arbitrarily Shaped Plate Pairs. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 56 (2014), August, Nr. 4, S. 990–993

- [8] Friedrich, M. ; Bednarz, C. ; Leone, M.: Efficient Equivalent Circuit Representation of Electromagnetic Bandgap Structures. In: *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC Europe)*, Brügge, 2013, S. 126–131
- [9] Friedrich, M. ; Leone, M.: Quasi-Static Inductance of Vertical Interconnections in Parallel-Plane Structures. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54 (2012), Dezember, Nr. 6, S. 1302–1305
- [10] Friedrich, M.: *Hochfrequenzmodellierung vertikaler Parallelplattenstrukturen*, OvGU Magdeburg, Diss., 2014
- [11] Kim, J. ; Ren, L. ; Fan, J.: Physics-Based Inductance Extraction for Via Arrays in Parallel Planes for Power Distribution Network Design. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 58 (2010), September, Nr. 9, S. 2434 –2447
- [12] Friedrich, M. ; Mantzke, A. ; Leone, M.: Efficient finite-difference method with analytical port model for the analysis of power-plane applications. In: *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility (EMC Europe)*, Rom, 2012, S. 1 –6
- [13] Okoshi, T.: *Planar Circuits for Microwaves and Lightwaves*. Springer-Verlag, Berlin, 1985
- [14] Van Bladel, J.G.: *Electromagnetic Fields*. IEEE Press, Piscataway (NJ), 2007
- [15] Friedrich, M. ; Leone, M.: Inductive Network Model for the Radiation Analysis of Electrically Small Parallel-Plate Structures. In: *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 53 (2011), November, Nr. 4, S. 1015 –1024
- [16] Leone, M.: Netzwerkmodell für die Strahlungsanalyse von horizontalen Leiterplatten-Submodulen. In: *EMV 2008, Düsseldorf*, 2008 (Internationale Fachmesse und Kongress für Elektromagnetische Verträglichkeit), S. 137–144
- [17] Wheeler, H.A.: Transmission-Line Properties of a Strip on a Dielectric Sheet on a Plane. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 25 (1977), August, Nr. 8, S. 631–647
- [18] TU Hamburg -Harburg: *CONCEPT-II*. 2015. – Weiter Informationen online: <http://www.tet.tu-harburg.de/concept/> (Stand: Juli 2015)