

**Liliane Biskupek**

**Bestimmung der Erdorientierung  
mit Lunar Laser Ranging**

**München 2015**

**Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission beim Verlag C. H. Beck**

**ISSN 0065-5325**

**ISBN 978-3-7696-5154-6**

---

**Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:  
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover  
ISSN 0174-1454, Nr. 316, Hannover 2015**



## Bestimmung der Erdorientierung mit Lunar Laser Ranging

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen und Geodäsie  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieurin (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Liliane Biskupek

München 2015

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

ISSN 0065-5325

ISBN 978-3-7696-5154-6

---

Diese Arbeit ist gleichzeitig veröffentlicht in:  
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz Universität Hannover  
ISSN 0174-1454, Nr. 316, Hannover 2015

Adresse der Deutschen Geodätischen Kommission:



Deutsche Geodätische Kommission

Alfons-Goppel-Straße 11 • D – 80 539 München

Telefon +49 – 89 – 23 031 1113 • Telefax +49 – 89 – 23 031 -1283 / - 1100

e-mail hornik@dgfi.badw.de • <http://www.dgk.badw.de>

Prüfungskommission

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Winrich Voß

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Müller

Korreferenten: Prof. Dr. phil. nat. habil. Michael Soffel (TU Dresden)

Prof. Dr.-Ing. Ingo Neumann

Tag der mündlichen Prüfung: 05.12.2014

---

© 2015 Deutsche Geodätische Kommission, München

Alle Rechte vorbehalten. Ohne Genehmigung der Herausgeber ist es auch nicht gestattet,  
die Veröffentlichung oder Teile daraus auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

ISSN 0065-5325

ISBN 978-3-7696-5154-6

# Kurzfassung

Entfernungsmessungen zum Mond mit Laserpulsen, englisch als *Lunar Laser Ranging* (LLR) bezeichnet, werden seit 45 Jahren durchgeführt. Die Daten stellen die längste Reihe räumlicher geodätischer Beobachtungen dar. Nachdem es auf Beobachtungsebene gelungen ist, die Erde-Mond-Entfernung bei optimalen Bedingungen mit Millimeter-Genauigkeit zu messen, ist es nun notwendig, die Genauigkeit der Auswertung diesem Niveau anzunähern, um so das volle Potential der hoch genauen LLR-Beobachtungen nutzen zu können.

Für die LLR-Analyse am Institut für Erdmessung (IfE) steht das Auswerteprogramm LUNAR zur Verfügung, das in den letzten 30 Jahren entwickelt wurde. Mit dem Programm können verschiedene Parameter des Erde-Mond-Systems in einem Gauß-Markov-Modell bestimmt werden. Dazu gehören zum Beispiel Anfangswerte für die Translation und Rotation des Mondes, Koordinaten von Beobachtungsstationen und Retroreflektoren sowie die Koeffizienten der Nutationsreihe. Mit speziellen Modifikationen des Programms LUNAR ist es außerdem möglich, die Gültigkeit von Einsteins Relativitätstheorie zu untersuchen.

Im Rahmen der Arbeit wird das funktionale Modell von LUNAR erweitert. Dies umfasst unter anderem die Gezeitenmodelle für die Atmosphäre, die Ozeane und die feste Erde. Ein zentraler Teil der Modellverbesserungen betrifft die Transformation aus dem erdfesten Referenzsystem (ITRS) ins raumfeste System (BCRS). Verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Transformationsmatrix werden implementiert. Es zeigt sich, dass die Art der Transformation einen großen Einfluss auf die Parameterschätzung hat. Zusätzlich werden im stochastischen Modell der Ausgleichung Varianten der Datengewichtung getestet.

Mit dem erweiterten und verbesserten Auswerteprogramm werden Parameter der Erdorientierung und ihre Bestimmbarkeit aus LLR untersucht. Einerseits werden Nutationskoeffizienten für fünf Perioden (18.6 Jahre, 182.6 Tage, 13.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage) über unterschiedliche Modellierungsansätze bestimmt. Vergleiche zum offiziellen Nutationsmodell MHB2000 zeigen besonders in den langperiodischen Nutationskoeffizienten signifikante Abweichungen von mehreren Millibosekunden, die diskutiert werden. Andererseits werden Erdrotationsparameter in unterschiedlichen Konfigurationen bezüglich der Datenauswahl (variierende Zeiträume, Stations-Reflektor-Kombinationen) geschätzt und analysiert. Aus den hoch genauen Daten der Station APOLLO kann die Erdrotationsphase  $\Delta UT$  im Genauigkeitsbereich von 3 – 50  $\mu s$  bestimmt werden. Die bei den durchgeführten Analysen erhaltenen Korrelationen zwischen den Erdorientierungsparametern und anderen Parametern des Erde-Mond-Systems geben Hinweise zu wechselseitigen Abhängigkeiten.

Die LLR-Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten werden auf Basis bestimmter Annahmen hinsichtlich der Datumsfestlegung und gleichzeitig geschätzter weiterer Parameter des Erde-Mond-Systems bestimmt. Vergleiche mit entsprechenden Ergebnissen aus Entfernungsmessungen zu Satelliten (SLR) zeigen nach einer Ähnlichkeitstransformation Differenzen im Bereich einiger Zentimeter. Somit kann die LLR-Lösung grundsätzlich in einer kombinierten Lösung des Internationalen Terrestrischen Referenzrahmens (ITRF) genutzt werden.

Zusätzlich werden in dieser Arbeit Tests der Relativitätstheorie von Einstein durchgeführt. Untersucht wird, inwieweit die Modellerweiterungen des Auswerteprogramms LUNAR die Schätzung ausgewählter relativistischer Parameter verbessern, z.B. die zeitliche Variation der Gravitationskonstanten. Analysen mit der aktuellen LLR-Auswertesoftware des IfE haben die Gültigkeit der Einstein'schen Theorie weiter gefestigt.

**Schlagwörter:** *Lunar Laser Ranging, Nutation, Erdrotation, Polkoordinaten, Stationskoordinaten, ITRF, Gravitationskonstante, Gravitomagnetismus*



# Abstract

Lunar Laser Ranging (LLR) is now carried out for 45 years. The data represent the longest series of space geodetic observations. Under optimal conditions, the measurements reach accuracies at the millimeter level. To benefit from the high observational accuracy, now the accuracy of the analysis has to be improved correspondingly.

For the LLR analysis at the Institut für Erdmessung (IfE) the software LUNAR, which was developed over the last 30 years, is available. It enables to determine various parameters of the Earth-Moon system in a least squares adjustment. These include parameters of physical libration and orbit of the Moon, coordinates of LLR stations and retroreflectors as well as coefficients of the nutation series. With special modifications, tests of Einstein's theory of relativity are possible.

In this thesis the functional model of LUNAR is updated. This especially concerns the tidal models of the atmosphere, the ocean and the solid Earth. The central part of the updates comprises the transformation from the terrestrial reference system (ITRS) to the celestial system (BCRS). Different realisations of the transformation matrix are implemented. Obviously, the kind of transformation has a large impact on the parameter determination. Additionally in the stochastic model of the least squares fit, different options of data weighting are studied.

With the updated analysis software, parameters of the Earth orientation are determined. On the one hand, nutation coefficients for five periods (18.6 years, 182.6 days, 13.6 days, 9.3 years and 365.3 days) are estimated applying different modelling approaches. The comparison with the official nutation model MHB2000 shows significant differences of some milliarcseconds especially for the long-periodic coefficients, which are further discussed. On the other hand, Earth rotation parameters for different configurations with respect to the datum definition (varying time spans, station-reflector combinations) are fitted and analysed. From the highly accurate data of APOLLO, the Earth rotation phase  $\Delta\text{UT}$  is obtained at the level of  $3 - 50 \mu\text{s}$ . The correlations, that are determined in the analysis, indicate mutual dependencies between Earth orientation parameters and other parameters of the Earth-Moon system.

The station coordinates and velocities are estimated under certain datum conditions. Comparisons with results of satellite laser ranging (SLR) show differences of some centimetres after a similarity transformation. Thus, in principle the LLR solution can be used in combined solutions of the International Terrestrial Reference Frame (ITRF).

One further part of the thesis examines selected predictions of Einstein's theory of relativity. It is investigated, whether the updates of the analysis software are also beneficial for an improved determination of relativistic parameters like the temporal variation of the gravitational constant. The results using the updated LLR analysis software of IfE further underpin the validity of Einstein's theory.

**Keywords:** *Lunar Laser Ranging, nutation, Earth rotation, pole coordinates, station coordinates, ITRF, gravitational constant, gravitomagnetism*





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Zielsetzung und Gliederung der Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Räumliche Referenzsysteme . . . . .	5
2.1.1	Raumfeste Referenzsysteme . . . . .	5
2.1.1.1	Internationales himmelfestes Referenzsystem - ICRS . . . . .	5
2.1.1.2	Baryzentrisches himmelfestes Referenzsystem - BCRS . . . . .	6
2.1.1.3	Geozentrisches himmelfestes Referenzsystem - GCRS . . . . .	7
2.1.1.4	Selenozentrisches himmelfestes Referenzsystem - SCRS . . . . .	7
2.1.2	Körperfeste Referenzsysteme . . . . .	7
2.1.2.1	Erdfeste Referenzsysteme . . . . .	7
2.1.2.2	Mondfeste Referenzsysteme . . . . .	8
2.2	Zeitskalen . . . . .	9
2.2.1	Julianisches Datum . . . . .	9
2.2.2	Internationale Atomzeit - TAI . . . . .	9
2.2.3	Dynamische Zeiten - TDB und TDT . . . . .	10
2.2.4	Koordinatenzeiten - TCB und TCG . . . . .	10
2.2.5	Universelle Koordinierte Weltzeit - UTC . . . . .	11
2.2.6	Universelle Weltzeit - UT . . . . .	11
2.3	Physikalische Grundlagen des Erde-Mond-Systems . . . . .	11
2.3.1	Präzession . . . . .	12
2.3.2	Nutation . . . . .	15
2.3.3	Definition des intermediären Himmelspols - CIP . . . . .	16
2.3.4	Erdrotationsphase und Polbewegung . . . . .	16
2.3.5	Translation und Rotation des Mondes . . . . .	17
2.4	Transformation der räumlichen Referenzsysteme . . . . .	17
2.4.1	Transformation aus dem ITRS ins GCRS . . . . .	18
2.4.1.1	Transformation basierend auf dem Frühlingspunkt . . . . .	18
2.4.1.2	Transformation basierend auf dem CIO . . . . .	20
2.4.2	Transformation aus dem PAS <sub>E</sub> ins GCRS . . . . .	21
2.4.3	Transformation aus dem GCRS ins BCRS . . . . .	21
2.4.4	Transformation aus dem PAS <sub>M</sub> ins SCRS . . . . .	21
2.4.5	Transformation aus dem SCRS ins BCRS . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Auswertung von Entfernungsmessungen zum Mond mit dem Programmpaket LUNAR</b>	<b>23</b>
3.1	Das Messverfahren Lunar Laser Ranging . . . . .	23
3.2	Auswertung der LLR-Daten . . . . .	24
3.3	Ephemeridenberechnung - EPHEM . . . . .	26
3.3.1	Translation der Körper des Sonnensystems . . . . .	26
3.3.2	Rotation des Mondes . . . . .	27
3.3.3	Rotation der Erde . . . . .	27
3.4	Berechnung der partiellen Ableitungen . . . . .	27
3.5	Berechnung der Variationsgleichungen - AVAR . . . . .	28
3.6	Parameterschätzung - PAR . . . . .	28
3.6.1	Funktionales Modell . . . . .	29
3.6.2	Stochastische Modell . . . . .	30
3.6.3	Geschätzte Parameter . . . . .	30

<b>4</b>	<b>Aktualisierung der LLR Auswertesoftware</b>	<b>31</b>
4.1	Datengrundlage . . . . .	31
4.2	Aktualisierung des funktionalen Modells . . . . .	34
4.2.1	Anfangswerte für die Ephemeridenberechnung . . . . .	34
4.2.2	Stationskoordinaten . . . . .	34
4.2.3	Räumliche Verschiebung der Stationen . . . . .	35
4.2.3.1	Plattentektonik . . . . .	35
4.2.3.2	Gezeiten der festen Erde . . . . .	36
4.2.3.3	Auflasten durch Ozeangezeiten . . . . .	36
4.2.3.4	Auflasten der Atmosphäre . . . . .	37
4.2.3.5	Rotationsdeformation durch Polgezeiten . . . . .	38
4.2.3.6	Auflasten durch Ozeanpolgezeiten . . . . .	38
4.2.3.7	Langperiodische Breitenschwankung . . . . .	39
4.2.4	Reflektorkoordinaten . . . . .	39
4.2.4.1	Räumliche Verschiebung der Reflektorkoordinaten . . . . .	40
4.2.5	Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten Referenzsystem . . . . .	40
4.2.6	Zeitliche Variation der Erdrotationsparameter . . . . .	41
4.2.6.1	Gezeiten der festen Erde . . . . .	42
4.2.6.2	Ozeangezeiten . . . . .	42
4.2.6.3	Librationseffekt . . . . .	42
4.2.7	Transformation zwischen dem mondfesten und raumfesten Referenzsystem . . . . .	43
4.2.8	Schwerefelder von Erde und Mond . . . . .	43
4.2.9	Korrekturen an der berechneten Laufzeit . . . . .	43
4.2.9.1	Korrektur wegen fehlerhafter Messungen . . . . .	43
4.2.9.2	Relativistische Korrektur in der Zeittransformation . . . . .	44
4.2.9.3	Atmosphärische Korrektur . . . . .	44
4.2.10	Untersuchung der aktualisierten Programmversion LUNAR 3.0 . . . . .	44
4.2.11	Schätzung neuer Parameter . . . . .	46
4.3	Aktualisierung des stochastischen Modells . . . . .	47
4.3.1	Varianzkomponentenschätzung . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Untersuchungen von Erdorientierungsparametern</b>	<b>51</b>
5.1	Schätzung von Nutationskoeffizienten . . . . .	51
5.1.1	Ableitungen für die Schätzung der Nutationskoeffizienten . . . . .	53
5.1.1.1	Über Frühlingspunkt und FW-Modell . . . . .	54
5.1.1.2	Über Frühlingspunkt und P03-Modell . . . . .	56
5.1.1.3	Über CIO und FW-Modell . . . . .	56
5.1.2	Beschreibung der Nutationsuntersuchungen und Diskussion der Ergebnisse . . . . .	58
5.1.2.1	Nutationskoeffizienten für die 18.6-Jahre-Periode . . . . .	59
5.1.2.2	Nutationskoeffizienten für verschiedene Perioden . . . . .	61
5.1.2.3	Nutationskoeffizienten und Störrotationen . . . . .	63
5.1.2.4	Nutationskoeffizienten aus verschiedenen Transformationsmethoden . . . . .	65
5.1.2.5	Nutationskoeffizienten aus APOLLO-Daten . . . . .	67
5.1.3	Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick . . . . .	68
5.2	Schätzung von Erdrotationsparametern . . . . .	69
5.2.1	Ableitungen für die Schätzung der Erdrotationsparameter . . . . .	72
5.2.2	Beschreibung der ERP-Untersuchungen und Diskussion der Ergebnisse . . . . .	73
5.2.2.1	ERP für Zeiträume von 70 Tagen . . . . .	73
5.2.2.2	ERP für ausgewählte Zeitpunkte - alle Stationen gemeinsam . . . . .	75
5.2.2.3	ERP für ausgewählte Zeitpunkte - stationsweise . . . . .	77
5.2.3	Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Vergleich von Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten aus LLR und SLR</b>	<b>85</b>
6.1	Vorbereitende Arbeiten . . . . .	85
6.2	Vergleich von LLR-Ergebnissen mit dem DTRF2008 . . . . .	86

<b>7</b>	<b>Schätzung relativistischer Parameter</b>	<b>91</b>
7.1	Zeitliche Variation der Gravitationskonstanten . . . . .	91
7.2	Gravitomagnetismus . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>103</b>
A.1	Rotationsmatrizen . . . . .	103
A.2	Schematische Zusammenfassung der Transformationen zwischen ITRS und GCRS . .	104
A.3	Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten . . . . .	105
A.4	Vergleich der Modelle für Stationsbewegungen in LUNAR 2.0 und LUNAR 3.0 . . .	106
A.5	Reflektorkoordinaten . . . . .	107
A.6	Vergleich der Modelle für ERP-Korrekturen in LUNAR 2.0 und LUNAR 3.0 . . . .	107
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>109</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>111</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>113</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>115</b>



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Am 16. Juli 1969 startete die Raumfahrtmission APOLLO 11 der US-amerikanischen Raumfahrtbehörde NASA zum Mond. Durch die Landung der ersten bemannten Raumfähre *Eagle* auf der Mondoberfläche und die Installation eines Retroreflektors am 21. Juli 1969 ist die Entfernungsmessung zum Mond mit Laserpulsen, englisch als *Lunar Laser Ranging* (LLR) bezeichnet, möglich geworden. Für den Zeitraum von 1969 bis 2013 stehen mehr als 20 000 sogenannte Normalpunkte zur Verfügung, die die Erde-Mond-Entfernung angeben. Durch die Auswertung dieser Messungen ist es möglich, verschiedene Parameter des Erde-Mond-Systems zu bestimmen. Dazu gehören beispielsweise Anfangswerte für die Translation und Rotation des Mondes, Koordinaten von Messstationen und Reflektoren oder die Masse des Erde-Mond-Systems. Für die Schätzung langperiodischer Nutationskoeffizienten oder die Untersuchung der zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten erweist sich die lange Datenreihe als Vorteil. Außerdem gelingt die Dekorrelation von Parametern, was bei einer kurzen Datenreihe nicht möglich wäre.

Für die Auswertung von LLR-Daten in Deutschland wurde an der Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie der Technischen Universität München unter der Leitung von Prof. Dr. M. Schneider das Auswerteprogramm LUNAR entwickelt. Das Programm entstand in mehreren Abschnitten und basiert auf den Arbeiten von Egger [1985], Gleixner [1986] und Bauer [1989]. Sie stellten die Grundlagen für die Modellierung des Erde-Mond-Systems und die Auswertung der Entfernungsmessungen zusammen. Müller [1991] hat die Bewegungsgleichungen gemäß des Brumberg-Kopejkin-Formalismus erweitert und ermöglichte so die Untersuchung von Einsteins Relativitätstheorie. An der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen nutzte Schastok [1987] die Programmversion von Gleixner für die Ephemeridenberechnung und erweiterte diese, um damit die bis dahin am häufigsten verwendete Ephemeride des Jet Propulsion Laboratory (JPL) *DE118* zu reproduzieren. Ergebnisse dieser Arbeit flossen bei Bauer ein. LUNAR wurde in FORTRAN77 implementiert. Reichhoff [1999] schrieb die Auswertung in C++ um und nutzte die Bewegungsgleichungen gemäß des DSX-Formalismus von Damour, Soffel und Xu [Damour et al., 1991, 1992, 1993, 1994]. Außerdem untersuchte er die Störungen der Mondbahn durch Asteroiden. Im Rahmen seiner Diplomarbeit hat Koch [2005] die Programmversion von Müller auf FORTRAN90 umgeschrieben. Gleichzeitig wurde der bis dahin verwendete Formalismus der Extrapolation nach Bulirsch-Stoer für die Lösung der Differentialgleichungen mit Hilfe eines Moduls von Montenbruck & Gill [2000] auf das Mehrschrittverfahren von Adams-Bashfort umgestellt. Das Programmpaket LUNAR steht am Institut für Erdmessung (IfE) zur Verfügung und bildet die Grundlage für die vorliegende Arbeit.

Parallel zur Entwicklung einer Auswertesoftware in Deutschland haben Gruppen in den USA, in Frankreich und Russland entsprechende LLR-Analyseprogramme entwickelt. Die jeweils aktuellen Arbeiten der offiziellen Analysezentren werden alle zwei Jahre in den Berichten des *International Laser Ranging Service* (ILRS) veröffentlicht [Noll & Pearlman, 2012]. Zu den offiziellen Analysezentren gehören, neben dem IfE, das JPL Lunar Associate Analysis Center in Pasadena (USA), das LLR-Daten hauptsächlich für die Berechnung von Ephemeriden [Folkner et al., 2008] und zur Untersuchung des inneren Aufbaus des Mondes [Williams & Dickey, 2003] nutzt, sowie das Paris Observatory Lunar Analysis Center (POLAC) in Frankreich, bei dem LLR-Daten in die Untersuchung von erd- und raumbezogenen Referenzsystemen und deren Transformation einfließen [Chapront & Francou, 2006]. Zerhouni & Capitaine [2009] bestimmten zälestische Polkoordinaten  $\delta X$  und  $\delta Y$  aus LLR-Messungen. Außer den offiziellen Analysezentren des ILRS werden auch an anderen Institutionen LLR-Daten genutzt. Das Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics (CfA) in Cambridge (USA) wertet die Daten vor allem für relativistische Untersuchungen aus [Battat et al., 2007]. Das Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides (IMCCE) in Paris (Frankreich) [Fienga et al., 2011] und das Institute of Applied Astronomy RAS in St. Petersburg (Russland) [Pitjeva, 2009] nutzen LLR-Daten hauptsächlich für die Ephemeridenberechnung.

Die Genauigkeit der LLR-Auswertung der verschiedenen Gruppen liegt aktuell im Bereich von einigen Zentimetern.

Die direkte Schätzung von Erdorientierungsparametern aus LLR-Daten war bislang noch nicht im Fokus der Forschung. Sie ist nun ein Schwerpunkt der vorliegenden Dissertation. Besonders die Schätzung von Nutationskoeffizienten ist, neben der Auswertung von LLR-Daten, sonst nur noch aus den Daten der Interferometrie auf sehr langen Basislinien (VLBI) möglich. Somit bildet diese Arbeit eine wichtige Grundlage für die Kombination der Ergebnisse beider Messverfahren.

Seit Beginn der Entfernungsmessungen zum Mond wurden sowohl die Genauigkeit der Auswertung als auch die der Messungen verbessert. Das derzeit neuste und modernste Observatorium (Apache Point Observatory Lunar Laser ranging Operation, APOLLO) in New Mexico (USA) ist in der Lage, bei guten Bedingungen die Entfernung Erde-Mond mit einer Genauigkeit von einigen Millimetern zu messen. Dieses und das Côte d'Azur Observatory (OCA) in Grasse (Frankreich) liefern regelmäßig neue Normalpunkte. Weitere Messungen werden vom Matera Laser Ranging Observatory (MLRO) in Matera (Italien) und der McDonald Laser Ranging Station (MLRS) in Texas (USA) durchgeführt. Informationen zu den Station finden sich auf den Internetseiten des ILRS<sup>1</sup>.

## 1.2 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Nachdem es auf Beobachtungsebene gelungen ist, die Entfernung Erde-Mond bei optimalen Bedingungen mit einer Genauigkeit von wenigen Millimetern zu messen, ist es nun Ziel dieser Arbeit, die Auswertung an dieses Genauigkeitsniveau anzunähern. Mit dem dann aktualisierten Auswerteprogramm werden diverse Detailstudien durchgeführt. Die Schwerpunkte liegen dabei auf folgenden Bereichen:

- Erdorientierungsparameter
- Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten
- Tests der Relativitätstheorie

Es wird jeweils untersucht, wie und mit welcher Genauigkeit die einzelnen Parameter des Erde-Mond-Systems bestimmt werden können und welche Korrelationen sich mit den speziell bestimmten Zielgrößen ergeben.

Die vorliegende Dissertation ist so aufgebaut, dass Kapitel 2 zunächst die Definitionen der einzelnen räumlichen und zeitlichen Referenzsysteme, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden, beschreibt. Es stellt die physikalischen Grundlagen des Erde-Mond-Systems zusammen und erläutert die Transformationen zwischen den einzelnen Referenzsystemen. In Kapitel 3 wird die zu Beginn der Arbeit bestehende Programmversion von LUNAR dokumentiert.

Die gesamte Modellierung der LLR-Auswertung wird auf Konsistenz und Aktualität hin überprüft. In den letzten Jahren wurden für viele Effekte im System Erde verbesserte Modelle veröffentlicht, die in der Arbeit berücksichtigt werden. Der Fokus liegt dabei auf der Transformation aus dem erdfesten ins raumfeste Referenzsystem, da diese die Grundlage für die Schätzung der Erdorientierungsparameter bildet. Die durchgeführten Aktualisierungen am funktionalen Modell der Ausgleichung werden in Kapitel 4 besprochen. Außerdem wird untersucht, ob das stochastische Modell der Ausgleichung durch eine Varianzkomponentenschätzung eine homogenere Auswertung der LLR-Daten ermöglicht. Zum Abschluss der Modellaktualisierung und -erweiterung wird überprüft, in welchem Maß die Auswertegenauigkeit verbessert werden konnte.

Mit dem aktualisierten Auswerteprogramm werden Untersuchungen zur Erdorientierung durchgeführt. Einerseits wird die bestehende Schätzung der Nutationskoeffizienten für die 18.6-Jahre-Periode um weitere Perioden (182.6 Tage, 13.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage) ergänzt. Andererseits wird die von Bauer [1989] implementierte vereinfachte Schätzung von Erdrotationsparametern (ERP) ausgedehnt. Mit den Erweiterungen wird es möglich, die Bestimmbarkeit der

---

<sup>1</sup><http://ilrs.gsfc.nasa.gov>

Erdorientierungsparameter aus LLR abzuschätzen und die Korrelationen aller Erdorientierungsparameter mit anderen Parametern des Erde-Mond-Systems genauer zu analysieren. Die Beschreibung der Untersuchungen und Ergebnisse ist in Kapitel 5 zusammengefasst.

Des Weiteren wird das Auswerteprogramm soweit vorbereitet, dass es möglich wird, die aus LLR bestimmten Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten mit den Ergebnissen anderer geodätischer Messverfahren, wie z.B. aus dem *Satellite Laser Ranging* (SLR), zu kombinieren und so einen Beitrag zum Internationalen Terrestrischen Referenzrahmen zu leisten. In Kapitel 6 werden die Ergebnisse aus LLR mit denen aus SLR verglichen.

Zuletzt werden ausgewählte Tests zu Einsteins Relativitätstheorie in Kapitel 7 beschrieben. Analysen werden zeigen, ob die aktualisierte Auswertesoftware einen positiven Effekt auf die Schätzung relativistischer Parameter hat und ob damit Verletzungen von Einsteins Theorie festgestellt werden können.

Die Arbeit wird mit einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und einem Ausblick auf die zukünftige Auswertung von LLR-Daten in Kapitel 8 abgeschlossen.





## 2 Grundlagen

Zur Beschreibung von Bewegungen astronomischer Körper und Satelliten, geophysikalischer Vorgänge und von jeglichen Ereignissen im Raum und auf Himmelskörpern benötigt man entsprechende Referenzsysteme. Durch die Festlegung eines Ursprungs, der Richtungen der drei räumlichen Achsen, eines Maßstabes und einer zugehörigen Zeitskala kann ein Referenzsystem eindeutig definiert werden. Über Regeln kann festgelegt werden, wie die vierdimensionale Raum-Zeit-Koordinate eines bestimmten Ereignisses gebildet wird. Um das Referenzsystem für praktische Zwecke nutzbar zu machen, benötigt man seine Realisierung, den sogenannten Referenzrahmen, der durch vierdimensionale Koordinaten von tatsächlichen Punkten beschrieben wird, drei Dimensionen beschreiben den Ort, die vierte repräsentiert die Zeit. Dies bedeutet, dass neben räumlichen Referenzsystemen auch Zeitskalen konsistent definiert werden müssen. In Abschnitt 2.1 werden die relevanten räumlichen Referenzsysteme beschrieben, Abschnitt 2.2 beschäftigt sich mit den Zeitskalen. Einige physikalische Phänomene wie Präzession, Nutation, Erd- und Mondrotation, die im Zusammenhang von räumlichen Referenzsystemen berücksichtigt werden müssen, werden in Abschnitt 2.3 erläutert. Auf deren Grundlage werden in Abschnitt 2.4 die Transformationsmatrizen zwischen den räumlichen Referenzsystemen aufgestellt.

### 2.1 Räumliche Referenzsysteme

In der Astronomie und Geodäsie kann man Ereignisse in verschiedenen Referenzsystemen beschreiben. Dabei kommt es darauf an, wo sich ein Betrachter befindet. Ist er auf der Oberfläche eines Körpers oder in seiner direkten Umgebung, wird das Ereignis in einem körperfesten Referenzsystem beschrieben. Befindet sich der Betrachter im Sonnensystem, schaut somit von außen auf einen Körper, wird das Ereignis im raumfesten System beschrieben. Der Ursprung eines körperfesten Systems ist im Massenmittelpunkt des Körpers definiert, z.B. der Erde oder des Mondes. Es rotiert mit dem Körper und Beschleunigungen sowie Scheinkräfte, wie z.B. die Corioliskraft, treten auf. Der Ursprung des raumfesten Systems kann im Massenmittelpunkt eines Körpers, des Sonnensystems oder der Galaxis definiert sein. Die Achsen des Systems ändern ihre Orientierung im Raum nur sehr langsam bezüglich der Fixsterne bzw. Quasare. Trotzdem bewegt sich das System innerhalb der Galaxis und kann somit nicht als inertial angesehen werden. Die hier beschriebenen raumfesten Referenzsysteme werden als quasi-inertiale Systeme bezeichnet [Müller et al., 2008a]. Ein wahres Inertialsystem unterliegt nur einer gleichförmig gradlinigen Bewegung [d’Inverno, 2009].

#### 2.1.1 Raumfeste Referenzsysteme

##### 2.1.1.1 Internationales himmelfestes Referenzsystem - ICRS

Die Definition der raumfesten Referenzsysteme wurde in den Resolutionen der internationalen astronomischen Union IAU von 1991 [IAU, 1991] festgelegt. Das *Internationale Himmelfeste Referenzsystem* ICRS ist folgendermaßen spezifiziert:

- Es gelten die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie.
- Das baryzentrische Referenzsystem ICRS hat seinen räumlichen Ursprung im Massenmittelpunkt des Sonnensystems.
- Die räumlichen Koordinatenachsen des ICRS sind relativ zum Hintergrund ferner extragalaktischer Objekte fixiert und zeigen keine globale Rotation (kinematische Festlegung). Die Hauptebene des baryzentrischen Systems soll möglichst mit dem mittleren Äquator zum Zeitpunkt J2000.0 (01.01.2000, 12:00 Uhr TDB (Baryzentrische Dynamische Zeit)) übereinstimmen. Der Ursprung der Rektaszension soll möglichst nah am dynamischen Frühlingspunkt von J2000.0 liegen. Deswegen zeigt der Pol des ICRS in Richtung des mittleren Pols von

J2000.0, der durch die Präzession [Lieske et al., 1977] und Nutation [Seidelmann, 1982] definiert wird. Der Ursprung der Rektaszension wird auf die Position des Quasars 3C273B des Fundamentalkatalog FK5 fixiert [Hazard et al., 1971]. Die Stabilität der Achsen liegt bei  $20 \mu\text{as}$ .

- Als Zeiteinheit gilt die SI-Sekunde.
- Die Realisierung des Systems wird durch systematische und regelmäßige Beobachtungen extragalaktischer Quellen mit astronomischen Raumverfahren, besonders der Radiointerferometrie auf sehr langen Basislinien VLBI, sichergestellt.

Da das ICRS auf Grundlage extragalaktischer Quellen definiert ist, bei denen man davon ausgeht, dass sie über lange Zeiträume keiner messbaren Rotation bzw. Bewegung unterliegen, wird keine Epochenangabe mit dem Referenzsystem verknüpft [Kovalevsky, 2002]. Der Vorteil einer solchen Definition liegt darin, dass sich der Ursprung und die Definition der Achsen des Systems mit der Zeit nicht ändern. Eine genaue Beschreibung des Systems findet sich in Arias et al. [1995] und Feissel & Mignard [1998]. Das ICRS ersetzt das bis dahin gültige himmelfeste Referenzsystem, dessen Grundlage der astronomische Fundamentalkatalog FK5 der Sternpositionen ist.

Die Auswertung von 295 „definierenden“ Positionen extragalaktischer Quellen, die mit VLBI beobachtet wurden, führten dazu, dass 2010 auf der 27. Generalversammlung der IAU die Realisierung des himmelfesten Referenzsystems, der sogenannte *Internationale Himmelfeste Referenzrahmen* ICRF verabschiedet wurde. Um als „definierende“ Quelle in die Berechnung des ICRF einzugehen, muss die Quelle gewisse Kriterien erfüllen, z.B. muss es genügend gute Beobachtungen geben, aus denen keine Bewegung der Quelle in den Genauigkeitsgrenzen der Auswertung nachgewiesen werden kann. Die Genauigkeit dieser „definierenden“ Quellen ist besser als  $0.01 \mu\text{as}$  [Ma et al., 1998]. Die Stabilität der Achsen liegt bei  $10 \mu\text{as}$  [Fey et al., 2009].

Neben dem ICRS wurden in den IAU Resolutionen von 1991 [IAU, 1991] zwei weitere Referenzsysteme definiert, ein ebenfalls im Baryzentrum des Sonnensystems und ein im Geozentrum gelagertes. Wenn nötig, können zusätzliche Referenzsysteme analog definiert werden, z.B. für den Mond. Der Unterschied des ICRS zu diesen Systemen besteht darin, dass das ICRS auf Grundlage von Positionsinformationen extragalaktischer Objekte definiert ist, während die anderen Systeme über einen metrischen Tensor definiert werden. Laut Kovalevsky & Seidelmann [2004] kann man sagen, dass das ICRS mit seinen Achsen die Orientierung der anderen raumfesten Systeme definiert.

### 2.1.1.2 Baryzentrisches himmelfestes Referenzsystem - BCRS

In den IAU Resolutionen von 2000 [IAU, 2000] wurde das *Baryzentrische Himmelfeste Referenzsystem* BCRS eingeführt. Die Beschreibung des Systems erfolgt über den metrischen Tensor, der z.B. Informationen über die Bewegung massiver Körper, Lichtstrahlen, den Gang von Uhren und das Gravitationsfeld enthält [Schuh et al., 2003]. Für praktische Anwendungen ist das BCRS entsprechend der Achsen des ICRS orientiert. Da die Galaxis mit ihrer Masse vernachlässigt wird, kann man das BCRS als inertiales Referenzsystem bezeichnen [Soffel et al., 2003], das weder kinematisch noch dynamisch gegen den Fixsternhimmel rotiert.

Nach Soffel & Langhans [2013] kann das BCRS verschieden realisiert werden. Wird es aus dem ICRS abgeleitet, also über die Positionen von Sternen und Quasaren, handelt es sich um eine kinematische Realisierung des Referenzsystems. Es gibt auch die Möglichkeit, das himmelfeste Referenzsystem auf einer dynamischen Grundlage zu beschreiben. Hierbei werden die relativistischen Bewegungsgleichungen für die Sonne, die Planeten und den Mond ausgewertet. Ergebnis dieser Auswertung sind die Ephemeriden, die von verschiedenen Auswertezentren bereitgestellt werden. Die genauesten sind *DE* des Jet Propulsion Laboratory (JPL) [Folkner et al., 2008], *INPOP* des Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides (IMCCE) [Fienga et al., 2011] und *EPM* des Institute of Applied Astronomy (IAA) [Pitjeva, 2009]. Unterschiede in den Ephemeriden ergeben sich z.B. durch die unterschiedliche Betrachtung von Störungen, die durch Asteroiden verursacht werden [Nothnagel et al., 2010].

Das BCRS ist das grundlegende Referenzsystem der Astrometrie und wird z.B. für die Berechnung von Ephemeriden, die Festlegung der Ekliptik und die Navigation von Raumschiffen genutzt. Für LLR ist es das Referenzsystem, in dem die gesamte Auswertung durchgeführt wird. Dabei wird das System allerdings als Ekliptiksystem verwendet, d.h. die Ebene, die von den Achsen X und Y aufgespannt wird, liegt in der Ekliptik und nicht in der Äquatorebene.

### 2.1.1.3 Geozentrisches himmelfestes Referenzsystem - GCRS

Neben dem himmelfesten Referenzsystem, das sich auf das Baryzentrum bezieht, wurde im Jahr 2000 von der IAU auch ein himmelfestes Referenzsystem mit Ursprung im Geozentrum, als GCRS bezeichnet, eingeführt [IAU, 2000]. Die Beschreibung des Systems erfolgt analog zum BCRS über einen metrischen Tensor. Der Unterschied zwischen den metrischen Tensoren des BCRS und GCRS ergibt sich durch unterschiedliche Potentiale. Die Orientierung des GCRS resultiert aus dem BCRS, die beiden Systeme rotieren kinematisch nicht gegeneinander. In diesem Sinne kann das GCRS als quasi-inertial bezeichnet werden [Soffel et al., 2003]. Über eine generalisierte vierdimensionale Lorentz-Transformation gelingt der Übergang zwischen den Systemen. Analog zum BCRS kann auch das GCRS dynamisch definiert werden. In diesem Fall werden Bewegungsgleichungen künstlicher Satelliten ausgewertet [Damour et al., 1994].

Das GCRS dient als Grundlage für die Beschreibung physikalischer Prozesse im nahen Umfeld der Erde und die Festlegung des terrestrischen Referenzsystems. Des Weiteren wird es für die Beschreibung der Bahnen von erdnahen Satelliten und der Erdrotation verwendet. Als nahes Umfeld der Erde kann nach Empfehlung von Soffel [2000] etwa der Bereich bis 50 000 km vom Geozentrum entfernt angesehen werden. In diesem Bereich können einige Terme in der Berechnung vernachlässigt werden, da sie nur zu geringen Fehlern führen. Bei der Auswertung von LLR-Daten wird das GCRS als Zwischensystem benötigt, um Stationskoordinaten aus dem terrestrischen System ITRS ins BCRS zu transformieren. Wie das BCRS wird auch das GCRS als Ekliptiksystem verwendet.

### 2.1.1.4 Selenozentrisches himmelfestes Referenzsystem - SCRS

Wie in den IAU Resolutionen von 1991 [IAU, 1991] beschrieben, können analog zum BCRS und GCRS weitere Referenzsysteme für andere Himmelskörper definiert werden. Laut Kaplan [2005] müssen dafür in den entsprechenden Gleichungen nur die Indizes der Erde durch die Indizes des jeweiligen Körpers ersetzt werden, z.B. des Mondes. Der Ursprung des Referenzsystems befindet sich dann im Selenozentrum, dem Massenmittelpunkt des Mondes. Da die Definition des selenozentrischen himmelfesten Referenzsystems der des GCRS folgt, ist auch seine Orientierung so festgelegt, dass es kinematisch nicht gegen das BCRS rotiert. Von der IAU wurde dieses System nicht speziell beschrieben und auch kein Name für ein himmelfestes Referenzsystem mit dem Ursprung im Selenozentrum eingeführt. Analog zu dem anderen Referenzsystemen wird in dieser Arbeit der Name SCRS für dieses System benutzt.

In der LLR-Auswertung wird das System als Zwischensystem bei der Transformation der Reflektorkoordinaten von einem mondfesten Referenzsystem ins BCRS benötigt und ist ebenfalls ein Ekliptiksystem.

## 2.1.2 Körperfeste Referenzsysteme

### 2.1.2.1 Erdfeste Referenzsysteme

Unter Berücksichtigung der IAU Resolutionen wurde 1991 durch die Internationale Union der Geodäsie und Geophysik IUGG das *Internationale Terrestrische Referenzsystem* ITRS eingeführt [Tscherning, 1992]. Nach weiteren Spezifikationen und der Resolution der IUGG von 2007, erfüllt das ITRS die folgenden Bedingungen [Petit & Luzum, 2010]:

- Das ITRS soll sich aus einem geozentrischen nichtrotierenden System über eine räumliche Drehung ergeben. Dieses geozentrische nichtrotierende System soll das GCRS sein.
- Der Ursprung des Systems ist das Massenzentrum der Erde. Als Massen werden die feste Erde, die Atmosphäre und die Ozeane berücksichtigt.
- Die Grundlage der Orientierung bildet das terrestrische System des BIH (Bureau International de l'Heure) zur Epoche 1984. Die x/y-Ebene beschreibt den Äquator, die x-Achse zeigt zum Meridian von Greenwich, die z-Achse in Richtung der Rotationsachse der Erde und die y-Achse vervollständigt das Rechtssystem.
- Die zeitliche Entwicklung der Orientierung wird durch die *no-net-rotation* Bedingung festgelegt, d.h. die Summe der horizontalen Bewegungen der Erdoberfläche führt keine globale Rotation aus.
- Die Längeneinheit ist das SI-Meter.
- Es handelt sich um ein orthogonales Rechtssystem mit gleich skalierten Achsen.

Ein Netzwerk von Stationen auf der Erdoberfläche liefert Ergebnisse wie Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten sowie Erdrotationsparameter. Sie ergeben sich aus der Auswertung der Messungen verschiedener globaler Messtechniken wie VLBI, LLR, der Entfernungsmessung zu Satelliten SLR, der globalen Satellitenpositionierung GPS sowie der Messung des Dopplereffektes von Radiosignalen DORIS. Die Lösungen werden in Kombinationszentren des Internationalen Service für Erdrotation und Referenzsysteme IERS zu einem Referenzrahmen kombiniert. Aktuell gilt der *Internationale Terrestrische Referenzrahmen* ITRF2008 [Altamimi et al., 2011] sowie eine Realisierung des Deutschen Geodätischen Forschungsinstitutes DTRF2008 [Seitz et al., 2012]. Weitere Details sind in den Publikationen von Altamimi et al. [2009] und Angermann et al. [2009] beschrieben.

Ein erdfestes Referenzsystem kann auch auf Grundlage der Hauptträgheitsachsen definiert werden, die aus der Massenverteilung in der Erde resultieren. In dieser Arbeit wird es gemäß der englischen Bezeichnung *principal axes*, als  $PAS_E$  bezeichnet. Der Ursprung des Systems liegt, wie beim ITRS, im Massenmittelpunkt der Erde. Beim ITRS zeigt die z-Achse in Richtung der mittleren Rotationsachse und somit näherungsweise entlang einer der Hauptträgheitsachsen der Erde, diese Achse gilt ebenfalls im  $PAS_E$ . Eine weitere Hauptträgheitsachse liegt in der Äquatorebene, etwa  $\lambda = 14.9^\circ$  westlich von Greenwich. Die dritte Achse liegt ebenfalls in der Äquatorebene und vervollständigt das orthogonale System. Somit resultiert das  $PAS_E$  über eine Drehung um  $\lambda$  aus dem ITRS.

In der LLR-Auswertung wird das  $PAS_E$  bei der Berechnung der Ephemeriden benötigt, da gravitative Effekte zwischen Körpern in einem Hauptachsensystem einfacher beschrieben werden können. Die Bestimmung der Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten erfolgt direkt im ITRF.

### 2.1.2.2 Mondfeste Referenzsysteme

Für den Mond unterscheidet man zwei Referenzsysteme, die beide jeweils im Massenmittelpunkt des Mondes gelagert sind und mit dem Mond rotieren. Der Unterschied besteht in der Orientierung der Achsen.

Das erste mondfeste System wird durch seine Hauptträgheitsachsen definiert und  $PAS_M$  genannt. Die Massenverteilung im Mondkörper bestimmt die drei orthogonalen Hauptträgheitsachsen. Im Fall des Mondes ist die Achse mit dem größten Trägheitsmoment die z-Achse und gleichzeitig die Rotationsachse. Die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment ist die x-Achse und die dritte ergänzt als y-Achse das orthogonale System.

Beim zweiten mondfesten System, dem *ME-System*, benannt nach der englischen Bezeichnung *mean Earth/rotation axis*, ist die z-Achse ebenfalls durch die Rotationsachse des Mondes gegeben. Allerdings zeigt die mittlere x-Achse in Richtung Erde und die y-Achse vervollständigt das Rechtssystem. In anderen Quellen wird das System der IAU/IAG folgend als *mean Earth/polar axis*

System bezeichnet. Die Achsen des  $PAS_M$  und ME-Systems unterscheiden sich um bis zu 860 m auf der Mondoberfläche [Archinal et al., 2011]. Wie in Williams et al. [2008] angegeben, können Rotationswinkel zwischen den beiden Systemen berechnet werden, allerdings hängen sie von der verwendeten Ephemeride und dem Schwerefeld des Mondes ab.

Die Realisierung eines mondfesten Referenzrahmens ergibt sich aus der Kombination verschiedener Ergebnisse. Als markante Punkte dienen die Retroreflektoren auf der Mondoberfläche, deren Positionen seit 1969 mit LLR bestimmt werden [Müller et al., 2008b], und die ALSEP (Apollo Lunar Surface Experiment Package) Radiowellensender, die zwischen September 1972 und Juni 1974 mit VLBI angemessen wurden [King et al., 1976]. Davies & Colvin [2000] werten diese Messungen gemeinsam aus und übertragen die Koordinaten der markanten Punkte mit Hilfe verschiedener Karten auf andere Punkte und Mondkrater in der Nähe der APOLLO Landeplätze. Als aktuellste Lösung eines mondfesten Referenzrahmens werden die Koordinaten von Kratern und markanten Punkten seit Juni 2012 im LOLA Referenzrahmen angegeben [Blue, 2012], dessen Grundlage das ME-System ist [LRO, 2008]. Das ME-System kommt hauptsächlich in Bereich der Kartographie des Mondes zum Einsatz [Archinal et al., 2011].

Das  $PAS_M$  wird für die Berechnung des Gravitationsfeldes des Mondes genutzt. Für hohe Genauigkeiten in der Kartographie und Satellitennavigation sollte das ME-System aus dem  $PAS_M$  bestimmt werden. In der Auswertung von LLR-Daten werden sowohl die gravitativen Kräfte des Mondes als auch die Reflektorkoordinaten im  $PAS_M$  beschrieben.

## 2.2 Zeitskalen

Analog zu den verschiedenen räumlichen Referenzsystemen gibt es verschiedene Zeitskalen. Eine zentrale Zeitskala ist die internationale Atomzeit (TAI), aus der sowohl natürliche Zeitskalen auf Grundlage der Erdrotation (UTC) abgeleitet werden können, als auch Zeitskalen, die nach McCarthy & Seidelmann [2009] nicht gemessen, sondern nur berechnet werden können und somit auf Modellannahmen beruhen (TT, TCG, TCB, TDB). Die Zeitskalen mit Bezug zur Erdrotation geben die Orientierung der Erde an und werden hauptsächlich für die Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten Referenzsystem benötigt. Die Zeitskalen mit Bezug zu Modellen sind jeweils ein Argument der vierdimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten.

In den folgenden Abschnitten werden die verschiedenen Zeitskalen kurz erläutert und die Transformationen zwischen den Zeitskalen beschrieben. Eine ausführliche Darstellung der Zeitskalen und ihrer Entwicklung findet sich in Müller [1999], McCarthy & Seidelmann [2009], McCarthy [2011] und Soffel & Langhans [2013].

### 2.2.1 Julianisches Datum

Das Julianische Datum JD ist eine kontinuierliche Zählung von Tagen, die am 01.01.4713 v.Chr. um 12 Uhr mittags begann. Der Zeitpunkt J2000.0, der in vielen astronomischen Zusammenhängen eine Rolle spielt, ist definiert als

$$J2000.0 = JD\ 2451\ 545.0 = 12\ \text{Uhr}\ 1.\ \text{Januar}\ 2000. \quad (2.1)$$

JD wird mit Bezug zu verschiedenen Zeitskalen angegeben, z.B. TAI, TT, TDB, da zwischen diesen geringe Unterschiede bestehen (siehe folgende Abschnitte).

Das Julianische Datum wird in der LLR-Auswertung als Zeitargument verwendet und in verschiedenen Skalen benutzt.

### 2.2.2 Internationale Atomzeit - TAI

Über die ganze Erde verteilt befinden sich verschiedene Arten von Atomuhren, die zur Festlegung der *Internationalen Atomzeit* TAI beitragen. Aus den Messungen von aktuell etwa 400 Uhren wird

an einer zentralen Stelle in der Nähe von Paris, beim Internationalen Büro für Maß und Gewicht (Bureau International des Poids et Mesures, BIPM) die Zeit TAI kombiniert. Diese kontinuierliche Zeitskala dient als Grundlage für alle weiteren Zeitskalen und ist auf dem Geoid definiert [Soffel & Langhans, 2013]. Die Einheit ist die SI Sekunde.

Für die LLR-Auswertung wird TAI nur als Zwischenskala bei der Zeittransformation verwendet.

### 2.2.3 Dynamische Zeiten - TDB und TDT

Die dynamischen Zeitskalen dienen als Zeitargumente in der Berechnung von Ephemeriden und dynamischen Theorien. Je nachdem auf welches Massenzentrum sich die Ephemeride bezieht, Baryzentrum oder Geozentrum, sind auch die Zeitskalen als *Baryzentrische* TDB und *Terrestrische* TDT *Dynamische Zeit* definiert. In den IAU Resolutionen von 1991 wurde die *Terrestrische Zeit* TT eingeführt, die analog zu TDT ist. TT berechnet sich für den 01.01.1977 0h 0m 0s [TAI] durch einen konstanten Versatz

$$TT = TAI + 32.184 \text{ s.} \quad (2.2)$$

Dieser gewährleistet, dass TT und die früher benutzte *Ephemeridenzeit* ET, die auf der Bewegung der Sonne basiert, konsistent sind [McCarthy & Seidelmann, 2009]. Wie TAI ist auch TT auf dem Geoid definiert.

Der Unterschied zwischen TDB und TDT beruht auf der jeweils zu Grunde liegenden relativistischen Theorie und hat sowohl lineare als auch periodische Anteile. Näherungsweise kann die Differenz  $TDB - TDT_0$  z.B. über die Reihenentwicklung von Hirayama et al. [1987]

$$TDB - TDT_0 = \sum_{i=1}^{131} A_i \sin(n_i \cdot dt + \alpha_i) \quad (2.3)$$

berechnet werden. Die Werte für die Amplituden  $A_i$  sowie die Winkelargumente  $n_i$  und  $\alpha_i$  stehen in Hirayama et al. [1987, Tabelle 1],  $dt$  ist die Zeitdifferenz zu J2000.0 in Julianischen Jahrhunderten. Da  $TDT_0$  auf das Geozentrum und nicht auf das Geoid bezogen ist, muss noch ein stationsabhängiger Term,  $c^{-2} \cdot [\mathbf{v}_e(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e)]$ , addiert werden.  $\mathbf{x}_e$  und  $\mathbf{v}_e$  geben die baryzentrische Position und Geschwindigkeit des Geozentrums an,  $\mathbf{x}$  enthält die baryzentrische Stationskoordinate,  $c$  ist die Lichtgeschwindigkeit.

TDB wird in der LLR Auswertung für die Ephemeridenberechnung und in der Ausgleichung als Zeitskala verwendet. TT dient als Zwischensystem in der Transformation.

### 2.2.4 Koordinatenzeiten - TCB und TCG

Die Koordinatenzeitskalen werden, analog zu den dynamischen, als *Baryzentrische* TCB bzw. *Geozentrische* TCG *Koordinatenzeit* benannt. Sie bezeichnen ein Argument der vierdimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten der allgemeinen Relativitätstheorie, TCB ist für das BCRS und TCG für das GCRS definiert. Sie berechnen sich aus den dynamischen Zeitskalen über einen linearen Zusammenhang. Für den 01.01.1977 0h 0m 32.184 s [TT] stimmen TT, TCG und TCB überein. Für andere Zeitpunkte ist der Unterschied zwischen Koordinatenzeit und dynamischer Zeit bezogen auf das Geozentrum nach Petit & Luzum [2010]

$$TCG - TT = \frac{L_G}{1 - L_G} \cdot (JD_{TT} - T_0) \cdot 86\,400 \text{ s}, \quad (2.4)$$

$L_G$  beträgt  $6.969290134 \cdot 10^{-10}$ ,  $T_0 = 2443\,144.5003725$  und  $JD_{TT}$  bezeichnet den Zeitpunkt in Julianischen Tagen. TCG ist im Geozentrum definiert, im Gegensatz zu TT, die auf dem Geoid definiert ist.

Bezogen auf das Baryzentrum ist der Unterschied der Koordinatenzeit und dynamischen Zeit durch

$$TCB - TDB = L_B \cdot (JD_{TCB} - T_0) \cdot 86\,400 \text{ s} + TDB_0 \quad (2.5)$$

gegeben, mit  $L_B = 1.550519768 \cdot 10^{-8}$ ,  $JD_{\text{TCB}}$  bezeichnet wieder den Zeitpunkt in Julianischen Tagen.  $TDB_0 = -6.55 \cdot 10^{-5}$  muss berücksichtigt werden, da TDB am 01.01.1977 mit den anderen Zeitskalen nicht synchronisiert wurde. Die Differenz zwischen TCG und TCB kann durch säkulare und periodische Effekte beschrieben werden und berechnet sich über die relativistische Lorentz-Transformation

$$\text{TCB} - \text{TCG} = c^{-2} \left[ \int_{t_0}^t \left( \frac{\mathbf{v}_e^2}{2} + U_0^{\text{ext}}(\mathbf{x}_e) \right) dt + \mathbf{v}_e(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \right] + O(c^{-4}). \quad (2.6)$$

Darin bedeuten  $\mathbf{x}_e, \mathbf{v}_e$  die baryzentrische Koordinate und Geschwindigkeit des Geozentrums,  $\mathbf{x}$  ist die baryzentrische Koordinate des Beobachters,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $U_0^{\text{ext}}$  das Newton'sche Potential der Körper des Sonnensystems ohne die Erde, betrachtet im Geozentrum.  $t$  entspricht TCB und  $t_0 = T_0$ . Da in Gleichung (2.6) die baryzentrische Koordinate und Geschwindigkeit des Geozentrums benötigt werden, ist die Berechnung abhängig von der Ephemeride, die zur Bestimmung den beiden Vektoren als Grundlage dient. Eine vereinfachte Form der Transformation geben Petit & Luzum [2010] an

$$\text{TCB} - \text{TCG} = \frac{L_C \cdot (\text{TT} - T_0) + P(\text{TT}) - P(T_0)}{1 - L_B} + c^{-2} \mathbf{v}_e(\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \quad (2.7)$$

mit  $L_C = 1.48082686741 \cdot 10^{-8}$ . Dort findet sich auch eine Empfehlung zum genauen Berechnungsablauf. Der Term  $P(\text{TT}) - P(T_0)$  wird dabei durch eine Zeitephemeride bereitgestellt, z.B. die von Irwin & Fukushima [1999].

Die Zeitskalen TCG und TCB werden in der LLR-Auswertung für die Zeittransformation benötigt.

### 2.2.5 Universelle Koordinierte Weltzeit - UTC

Die *Universelle Koordinierte Weltzeit* UTC leitet sich von der Atomzeitskala TAI ab, sie hat die gleiche Gangrate wie die Atomzeit. Allerdings soll ebenfalls ein Bezug zur Erdrotation und Bewegung der Sonne gewährleistet sein, die über die Universelle Weltzeit UT1 beschrieben werden. Beträgt der Zeitunterschied zwischen den beiden Zeitskalen

$$|\text{UTC} - \text{UT1}| \geq 0.9 \text{ s}, \quad (2.8)$$

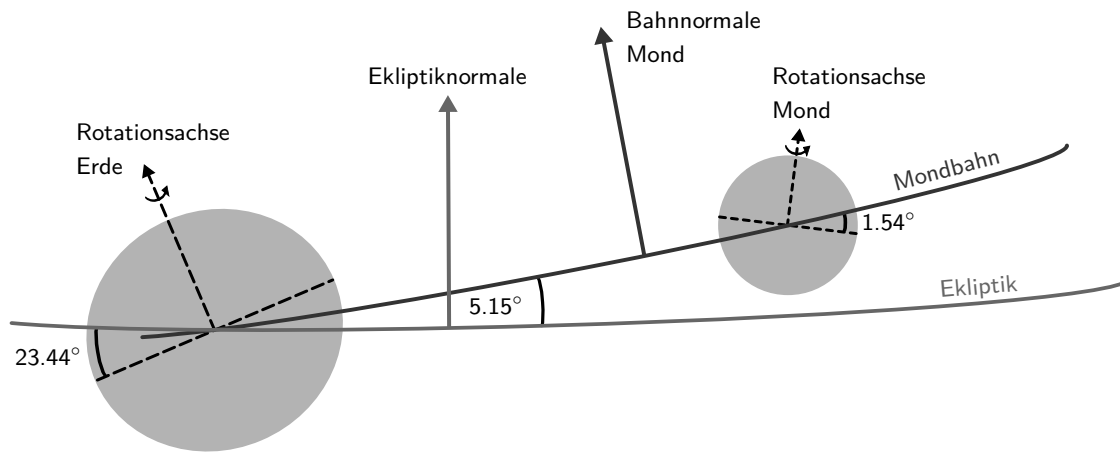
wird in UTC eine Schaltsekunde eingeführt. Dieser Unterschied wird kontinuierlich durch den IERS überwacht. In ihrer jetzigen Form gilt UTC seit dem 01.01.1972 und mittlerweile weltweit als Zeitstandard.

### 2.2.6 Universelle Weltzeit - UT

Die *Universelle Weltzeit* UT existiert in drei verschiedenen Varianten, je nachdem welche Effekte in der Zeitskala berücksichtigt werden. UT0 bezeichnet die mittlere Sonnenzeit von Greenwich, die an jedem Ort der Erde aus Beobachtungen abgeleitet werden kann. Sie bezieht sich auf die Rotationsachse der Erde und enthält noch den Effekt der Polbewegung [Torge, 2003]. Wird dieser Effekt korrigiert, erhält man die Zeitskala UT1, die als Maß des Erdrotationswinkels gilt. Werden in UT1 die Effekte der saisonalen Erdrotationsschwankung reduziert, ergibt sich die Zeitskala UT2.

## 2.3 Physikalische Grundlagen des Erde-Mond-Systems

Das Erde-Mond-System bewegt sich auf seiner Bahn um das Baryzentrum des Sonnensystems. Die mittlere Ebene dieser Umlaufbahn definiert laut den IAU Resolutionen von 2006 [IAU, 2006] die Ebene der Ekliptik. Erde und Mond rotieren um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Dieser befindet sich innerhalb des Erdkörpers, etwa 4700 km vom Geozentrum entfernt.



**Abb. 2.1:** Anordnung von Bahnen, Ebenen und Achsen im Erde-Mond-System

Der Erdkörper kann in erster Näherung als starres, abgeplattetes Rotationsellipsoid beschrieben werden. Durch die Fliehkräfte, die bei seiner Rotation wirken, entsteht der Äquatorwulst. An den Polen ist die Erde abgeplattet. Da die Rotationsachse der Erde nicht orthogonal zur Ekliptikebene steht, sondern um den Ekliptikwinkel von etwa  $23.44^\circ$  von der Ekliptiknormalen abweicht, ist auch der Äquatorwulst um diesen Winkel zur Ekliptik geneigt, siehe Abbildung 2.1.

Die Form des Mondes ist, wie bei der Erde, ein leicht abgeplattetes Ellipsoid. Die Rotationsachse des Mondes steht ebenfalls nicht orthogonal auf der Ekliptik, sie ist um etwa  $1.54^\circ$  geneigt, was dazu führt, dass die Äquatorebene um diesen Winkel zur Ekliptik geneigt ist. Die Bahnnormale des Mondes schließt mit der Ekliptiknormalen einen Winkel von etwa  $5.15^\circ$  ein [Williams & Dickey, 2003], siehe Abbildung 2.1.

Die tatsächliche Form von Erde und Mond wird durch das Schwerfeld des jeweiligen Körpers beschrieben. Um die genauen gravitativen Effekte zwischen Erde und Mond berechnen zu können, werden Modelle des jeweiligen Schwerfeldes in der Auswertung genutzt (siehe Abschnitt 4.2.8).

Die Planeten bewegen sich, wie Erde und Mond, um den Massenmittelpunkt des Sonnensystems, die jeweiligen Bahnen weisen geringe Neigungen gegen die Ekliptik auf. Alle Körper wirken mit ihren gravitativen Kräften aufeinander und beeinflussen so gegenseitig ihre Bahnen und Rotationen. Die Größe des Einflusses hängt von den Massen, Entfernungen, Inklinationen, Exzentrizitäten und dem Ekliptikwinkel ab [Williams, 1994].

Die Orientierungen der körperfesten Achsen von Erde und Mond unterliegen zeitlichen Variationen. Bei der Erde z.B. auf Grund von Massenverlagerungen im Ozean, der Atmosphäre und der festen Erde. Für Transformationen zwischen den körperfesten und dem raumfesten System müssen die Orientierungen bekannt sein. Dazu werden im Folgenden einige weitere physikalische Zusammenhänge beschrieben und auf deren Grundlage die jeweiligen Transformationsmatrizen für Erde und Mond aufgestellt.

### 2.3.1 Präzession

Betrachtet man ein einfaches astronomisches Dreikörperproblem mit Sonne, Mond und Erde, erzeugen Sonne und Mond durch ihre Gravitationskräfte ein Drehmoment, das versucht den Äquatorwulst der Erde in die Ekliptikebene zu kippen. Die rotierende Erde weicht diesem Drehmoment rechtwinklig aus und beschreibt als Folge mit ihrer Rotationsachse einen Kegel mit einem Radius, der dem Ekliptikwinkel entspricht. Dieser Prozess wurde als *lunisolare Präzession* bezeichnet und hat eine Umlaufdauer von etwa 26 000 Jahren [Seidelmann, 1992]. Die Bewegung ist retrograd und wird nach Williams [1994] zu etwa  $1/3$  von der Sonne und  $2/3$  vom Mond verursacht. Erweitert man das Dreikörperproblem um die Planeten des Sonnensystems, üben diese gravitative Kräfte auf die Bahn der Erde aus und führen zu dem wesentlich kleineren Effekt der *planetaren Präzession*. Da die geodätischen Raumverfahren mit der jetzigen Messgenauigkeit auch für den Einfluss der Planeten





der J2000.0-Ekliptik beschreiben. Die Winkel

$$\begin{aligned} \psi_A = & 5038.481507'' dt - 1.0790069'' dt^2 - 0.00114045 dt^3 \\ & + 0.000132851'' dt^4 - 0.0000000951'' dt^5 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \omega_A = & \epsilon_0 - 0.025754'' dt + 0.0512623'' dt^2 - 0.00772503'' dt^3 \\ & - 0.000000467'' dt^4 + 0.0000003337'' dt^5 \end{aligned} \quad (2.12)$$

beschreiben die Präzession des Äquators im Bezug zur Ekliptik J2000.0.  $\psi_A$  ist die Komponente in der Länge entlang der mittleren Ekliptik  $t_0$ ,  $\omega_A$  die Schiefe zwischen mittlerem Äquator  $t$  und der mittleren Ekliptik  $t_0$ .  $\epsilon_0$  bezeichnet den Ekliptikwinkel, mit dem aktuellen Wert gemäß der IERS Konventionen [Petit & Luzum, 2010]

$$\epsilon_0 = 84381.406'' = 23.43927944^\circ. \quad (2.13)$$

Das Zeitargument  $dt$  in den Gleichungen gibt die Differenz des aktuellen Zeitpunktes zu J2000.0 in Jahrhunderten an

$$dt = (\text{TT} - \text{J2000.0}) \text{ in Tagen}/36525. \quad (2.14)$$

Diese Zeitdifferenz kann in TT oder TDB angegeben werden, obwohl der Konsistenz wegen TDB richtig ist, da es sich um Phänomene im raumfesten Referenzsystem bezogen auf das Baryzentrum handelt. Der Unterschied durch Verwendung von TT statt TDB liegt laut Petit & Luzum [2010] im Bereich von Nanobogensekunden.

Um den mittleren Frühlingspunkt  $\gamma_m$  definieren zu können, benötigt man die Präzession der Ekliptik entlang des mittleren Äquators zum Zeitpunkt  $t$ , die sich über

$$\begin{aligned} \chi_A = & 10.556403'' dt - 2.3814292'' dt^2 - 0.00121197'' dt^3 \\ & + 0.000170663'' dt^4 - 0.0000000560'' dt^5 \end{aligned} \quad (2.15)$$

berechnet. Die mittlere Schiefe zum Zeitpunkt  $t$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \epsilon_A = & \epsilon_0 - 46.836769'' dt - 0.0001831'' dt^2 + 0.00200340'' dt^3 \\ & - 0.000000576'' dt^4 - 0.0000000434'' dt^5. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Beschreibung von Fukushima [2003] und Williams [1994], in dieser Arbeit als FW-Modell bezeichnet, nutzt ebenfalls die mittlere Schiefe  $\epsilon_A$  für die Beschreibung der Präzession und ergänzt diese um die Präzession in der Länge entlang der mittleren Ekliptik zum Zeitpunkt  $t$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} = & -0.041775'' + 5038.481484'' dt + 1.5584175'' dt^2 - 0.00018522'' dt^3 \\ & - 0.000026452'' dt^4 - 0.0000000148'' dt^5. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die Schiefe zwischen der Ekliptik zum Zeitpunkt  $t$  und dem GCRS Äquator beschreibt

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & 84381.412819'' - 46.811016'' dt + 0.0511268'' dt^2 + 0.00053289'' dt^3 \\ & - 0.000000440'' dt^4 - 0.0000000176'' dt^5. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Schließlich beschreibt

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} = & -0.052928'' + 10.556378'' dt + 0.4932044'' dt^2 - 0.00031238'' dt^3 \\ & - 0.000002788'' dt^4 + 0.0000000260'' dt^5 \end{aligned} \quad (2.19)$$

die Rektaszension vom Schnittpunkt der Ekliptik zum Zeitpunkt  $t$  mit dem GCRS Äquator bis zur X-Achse des GCRS. Im Unterschied zum P03-Modell stellt das FW-Modell mit der Präzession direkt den Bezug zum GCRS her.

### 2.3.2 Nutation

Die Präzession wird durch eine Reihe von Schwingungen überlagert, die charakteristische Perioden und Amplituden haben. Sie werden unter dem Begriff Nutation zusammengefasst. Der Größte dieser Effekte mit der längsten Periode von 18.6 Jahren wird durch die Knotendrehung der Mondbahn verursacht. Wie die Präzession wird auch die Nutation nach den verursachenden Körpern in *lunisolare* und *planetare Nutation* eingeteilt.

Die Nutation verknüpft das wahre raumfeste Referenzsystem mit dem mittleren raumfesten System zum Zeitpunkt  $t$ . In den aktuellen Konventionen des IERS [Petit & Luzum, 2010] wird das MHB2000-Modell von Mathews et al. [2002] zur Berechnung des Einflusses der Nutation empfohlen. Die Grundlagen dieses Modells bilden die Präzession gemäß Lieske et al. [1977] sowie das REN2000-Modell von Souchay et al. [1999] für die Nutation einer starren Erde. Mit Hilfe einer Transferfunktion wird daraus das Modell der Nutation für eine nicht-starre Erde berechnet. Es liegt als Reihenentwicklung vor,

$$\Delta\psi_{MHB} = \sum_{i=1}^n (A_i + A'_i dt) \sin(\text{ARG}_i) + (A''_i + A'''_i dt) \cos(\text{ARG}_i) \quad (2.20)$$

$$\Delta\epsilon_{MHB} = \sum_{i=1}^n (B_i + B'_i dt) \cos(\text{ARG}_i) + (B''_i + B'''_i dt) \sin(\text{ARG}_i) \quad (2.21)$$

mit der die lunisolaren und planetaren Anteile in Länge und Schiefe mit Bezug zur mittleren Ekliptik zum Zeitpunkt  $t$  berechnet werden können, siehe Abbildung 2.2.  $dt$  bezeichnet die Zeitdifferenz zu J2000.0 in Julianischen Jahrhunderten (siehe Gleichung (2.14)),  $n$  die Anzahl der Reihenelemente (678 für die lunisolare und 687 für die planetare Nutation). In

$$\text{ARG}_i = \sum_{j=1}^m M_j^i F_j \quad (2.22)$$

fließen die Fundamentalargumente  $F_j$  ein, deren Zahlenwerte in Petit & Luzum [2010] angegeben sind. Die Summe berechnet sich dabei entweder über  $m = 5$  Elemente für die lunisolare Nutation oder über  $m = 14$  für die planetare Nutation.  $M_j^i$  bezeichnet die jeweiligen Multiplikatoren. Die sogenannten *in-phase* Terme, in Gleichung (2.20)  $(A_i + A'_i dt)$  und in Gleichung (2.21)  $(B_i + B'_i dt)$ , entstehen auf Grund der Bewegung der Körper auf ungestörten Keplerbahnen. Durch Effekte, wie z.B. die Dissipation und Gezeiten der Ozeane, kommt es zu Störungen und Phasenverschiebungen, die zu den *out-of-phase* Termen führen, in Gleichung (2.20)  $(A''_i + A'''_i dt)$  und in Gleichung (2.21)  $(B''_i + B'''_i dt)$ , [Williams et al., 1991]. Weitere Einzelheiten zu den Nutationsmodellen finden sich in Souchay et al. [1999] und Mathews et al. [2002], die Berechnung der Nutationswinkel ebenso wie der Fundamentalargumente findet sich in Petit & Luzum [2010].

Die Parametrisierung der Nutation über das MHB2000-Modell bezieht sich auf die IAU Resolutionen 2000. Um sie mit der Präzession bezogen auf die Resolutionen von 2006 konsistent zu machen, müssen an die Nutation kleine Korrekturen angebracht werden [Wallace & Capitaine, 2006] die sich mit den Gleichungen

$$\Delta\bar{\psi} = \Delta\psi_{MHB} + (0.4697 \cdot 10^{-6} + f)\Delta\psi_{MHB} \quad (2.23)$$

$$\Delta\bar{\epsilon} = \Delta\epsilon_{MHB} + f\Delta\epsilon_{MHB} \quad (2.24)$$

und  $f = -2.7774 \cdot 10^{-6} dt$  berechnen lassen.

Ein weiterer Effekt, der die Bewegung der Rotationsachse der Erde im Raum beeinflusst, entsteht durch die Interaktion des flüssigen Kerns der Erde mit dem Mantel und wird als freie Nutation des Kerns (*free core nutation* - FCN) bezeichnet. Er resultiert in einer quasi-täglichen retrograden Bewegung der Erdrotationsachse. Auf Grund der Definition des CIP (siehe Abschnitt 2.3.3), wird sie als Bewegung im raumfesten System mit einer Periode von etwa 430.2 Tagen [Mathews, 2000] dargestellt. Wie in Petit & Luzum [2010] beschrieben, kann die FCN einerseits über das Modell von Lambert [2009] berechnet werden. Andererseits veröffentlicht der IERS regelmäßig sogenannte

*pole offsets*  $\delta\psi$  und  $\delta\epsilon$ . Sie werden aus VLBI Beobachtungen abgeleitet und enthalten den Effekt der FCN. Über die Gleichungen

$$\Delta\psi = \Delta\bar{\psi} + \delta\psi \quad (2.25)$$

$$\Delta\epsilon = \Delta\bar{\epsilon} + \delta\epsilon \quad (2.26)$$

werden die *pole offsets* in der Nutation berücksichtigt.

### 2.3.3 Definition des intermediären Himmelspols - CIP

Beim Übergang vom erdfesten ins raumfeste Referenzsystem spielt die Definition und Bewegung des *intermediären Himmelspols* CIP eine Rolle. Wird der relative Drehimpuls der Erde als Null angenommen, bezeichnet man die resultierenden Hauptträgheitsachsen als mittlere Tisserand-Achsen [Munk & MacDonald, 1960]. Die IAU hat 2000 in ihren Resolutionen festgelegt [IAU, 2000], dass der intermediäre Himmelspol durch die Bewegung der Tisserand-Achse der Erde mit dem größten Hauptträgheitsmoment definiert wird, siehe auch Kaplan [2005].

Die aktuelle Position des CIP im GCRS wird durch das Modell der Präzession [Capitaine et al., 2003b] und Nutation [Mathews et al., 2002] plus beobachtete Korrekturen beschrieben und enthält Perioden größer als zwei Tage. Bewegungen des CIP mit Perioden kleiner als zwei Tage werden per Definition IAU [2000] der Polbewegung der Erdrotationsachse im ITRS zugeordnet.

### 2.3.4 Erdrotationsphase und Polbewegung

Die Polbewegung  $x_p$  und  $y_p$  beschreibt die Veränderung der Rotationsachse im Bezug zur Erdoberfläche. Die x-Achse der Polbewegung zeigt in Richtung Greenwich und die y-Achse rechtwinklig zur x-Achse in Richtung Westen. Unter dem Begriff der Erdrotationsphase  $\Delta\text{UT1}$  versteht man die Drehbewegung der Erde. Die Parameter  $\Delta\text{UT1}$ ,  $x_p$  und  $y_p$  werden als Erdrotationsparameter ERP zusammengefasst.

Die Erdrotationsparameter beschreiben, wie die Nutationskoeffizienten, Variationen der Erdrotationsachse und -phase verursacht durch die Gravitationseinwirkung von Sonne und Mond. Per Definition (siehe Abschnitt 2.3.3) sind aber die Effekte, die Perioden größer als zwei Tage verursachen, der Nutation zugeordnet. In den ERP sind Effekte enthalten, deren Perioden kleiner als zwei Tage sind. Durch Anregungsmechanismen, verursacht von Atmosphäre und Ozeanen, fallen bei der Erde die Hauptträgheits- und Rotationsachse nicht zusammen, d.h. die Erde rotiert nicht um ihre Hauptträgheitsachse. Dies ist ein weiterer Grund für die Polbewegung und verursacht die charakteristische Periode von 435 Tagen, die sogenannte Chandler-Periode. Außerdem ist die Erde ein elastischer deformierbarer Körper, es kommt zu Massenverlagerungen in der Atmosphäre, den Ozeanen, der Hydrosphäre und im inneren der Erde [Schuh et al., 2003]. Auch diese führen zur Polbewegung und einer weiteren charakteristischen Periode von einem Jahr, die die Chandler-Periode überlagert. Alle Massenverlagerungen führen zu Variationen des Trägheitstensors der Erde sowie des relativen Drehimpulses [Moritz & Müller, 1987]. Es kommt sowohl zu direkten Effekten als auch zu indirekten Effekten, die durch Rückkopplungen entstehen [Schuh et al., 2003]. In Moritz & Müller [1987] und Schödlbauer [2000] werden die Aspekte der Polbewegung detailliert besprochen. Eine Zusammenstellung der verschiedenen Mechanismen, die im System Erde wirken, findet sich ebenfalls in Gross [2009a], Seitz [2004] und Seitz & Schuh [2010].

Bis heute sind die Mechanismen, die die Erdrotation und Polbewegung beeinflussen, nicht ausreichend erforscht und die Effekte können mit Modellen nicht genau genug beschrieben werden. Stattdessen werden sie, wie die in Abschnitt 2.3.2 beschriebenen *pole offsets*, aus Beobachtungen der geodätischen Raumverfahren berechnet [Gambis, 2004].  $\Delta\text{UT1}$ ,  $x_p$ ,  $y_p$ ,  $\delta\psi$  und  $\delta\epsilon$  zusammen werden als Erdorientierungsparameter EOP bezeichnet. Die vom IERS berechneten Werte werden regelmäßig in EOP-Reihen<sup>1,2</sup> veröffentlicht. Ozeangezeiteneffekte ( $(\Delta x, \Delta y)_{\text{Ozeangezeiten}}$ ) mit Perioden

<sup>1</sup><http://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/EarthOrientationData/eop.html>

<sup>2</sup><http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php?index=C04&lang=en>

von einem Tag oder kürzer, sind in diesen Polkoordinaten nicht enthalten. Es fehlen auch Effekte, die theoretisch der Nutation zuzuordnen sind  $((\Delta x, \Delta y)_{\text{Libration}})$ , deren Perioden aber kleiner als zwei Tage sind. Durch die Definition des CIP werden sie nicht im Nutationsmodell berücksichtigt und müssen entsprechen bei der Berechnung der Polkoordinaten angebracht werden. Für die Ozeangezeiten und den Nutationseffekt werden in den IERS Konventionen Modelle veröffentlicht. Die Polkoordinaten berechnen sich über

$$(x_p, y_p) = (x, y)_{\text{IERS}} + (\Delta x, \Delta y)_{\text{Ozeangezeiten}} + (\Delta x, \Delta y)_{\text{Libration}}. \quad (2.27)$$

Analog zu den Polkoordinaten muss auch der vom IERS veröffentlichte Wert für die Erdrotationsphase um die Effekte der Ozeangezeiten und Nutation ergänzt werden und ergibt sich aus

$$\Delta \text{UT1} = \Delta \text{UT1}_{\text{IERS}} + \Delta \text{UT1}_{\text{Ozeangezeiten}} + \Delta \text{UT1}_{\text{Libration}}. \quad (2.28)$$

Die genaue Berechnung der Effekte wird in Abschnitt 4.2.6 erläutert.

Effekte die durch Gezeiten der festen Erde hervorgerufen werden, sind in den veröffentlichten ERP bereits enthalten, ebenso säkulare und langperiodische Effekte der Nutation an den Polkoordinaten.

### 2.3.5 Translation und Rotation des Mondes

Sonne und Erde üben gravitative Kräfte auf den Mond aus und beeinflussen seine Bahn und Rotation, die sowohl den Cassini- als auch den Kepler-Gesetzen folgen. Die Bahn des Mondes um die Erde ist elliptisch. Seine Bewegung wird durch das 2. Keplersche Gesetz beschrieben und ist ungleichförmig, da sich die Bahngeschwindigkeit ändert. Die Rotation ist gleichförmig und gemäß des 1. Cassini-Gesetzes entspricht die Periode der Rotation des Mondes seinem Umlauf um die Erde, was zu einer gebundenen Rotation um die Erde führt, d.h. der Mond zeigt der Erde immer die gleiche Seite. Da die Bahn des Mondes um die Erde aber elliptisch ist, kommt es zum Effekt der optischen Libration. Diese scheinbare Taumelbewegung des Mondes führt dazu, dass etwa 60 % der Mondoberfläche von der Erde aus zu sehen sind.

Die Bewegung der Rotationsachse des Mondes könnte ebenfalls als Präzessions- und Nutationsbewegung beschrieben werden. Da diese jedoch nicht hinreichend genau beobachtet werden kann, wird das Rotationsverhalten des Mondes über die Euler-Liouville Kreiselgleichungen modelliert.

Genauere Beschreibungen der Translation und Rotation des Mondes finden sich in Goller et al. [1981], Gleixner [1986] und Bauer [1989]. Da der Mond kein starrer, sondern ein deformierbarer Körper ist, wirkt sich die Deformation auch auf sein Rotationsverhalten aus. Dieser Effekt fließt in den Trägheitstensor des Mondes ein. Die Modellierung dazu findet sich in Cappallo [1980], Bauer [1989], Williams & Boggs [2009] und Hofmann et al. [2010].

## 2.4 Transformation der räumlichen Referenzsysteme

Die Verbindung zwischen einem raumfesten und einem körperfesten Referenzsystem gelingt über die entsprechende Transformation. Liegt der Ursprung im Massenmittelpunkt des Körpers, können Referenzsysteme durch Rotationen um ihre drei Achsen ineinander überführt werden. Da sich die Bestimmung der Rotationsmatrizen zwischen den Systemen für die Erde und den Mond unterscheiden, werden im Folgenden auch die Transformationen für Erde und Mond aus den jeweiligen körperfesten Referenzsystemen in ein raumfestes System getrennt beschrieben.

In den folgenden Abschnitten bedeutet eine Rotationsmatrix  $\mathbf{R}$  die Drehung um eine Achse. Der Aufbau der Rotationsmatrix ist im Anhang A.1 beschrieben. Rotationsmatrizen bezeichnet mit einem anderen Buchstaben, sind Drehungen, die aus mehreren Einzelmatrizen bestehen.

### 2.4.1 Transformation aus dem ITRS ins GCRS

Die Transformation eines Vektors  $\mathbf{r}_{ITRS}$  aus dem erdfesten Äquatorsystem ITRS in das raumfeste Ekliptiksystem GCRS  $\mathbf{r}_{GCRS}$  wird über eine Kombination von Matrizen beschrieben

$$\mathbf{r}_{GCRS} = \mathbf{E} \mathbf{S}(dt) \mathbf{Q}(dt) \mathbf{R}(dt) \mathbf{W}(dt) \mathbf{r}_{ITRS}. \quad (2.29)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}_1(\epsilon_0) \quad (2.30)$$

enthält die Rotation um den Ekliptikwinkel (2.13). In Matrix

$$\mathbf{S}(dt) = \begin{bmatrix} 1 & \Theta_z & -\Theta_y \\ -\Theta_z & 1 & \Theta_x \\ \Theta_y & -\Theta_x & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

werden systematische Einflüsse durch ungenau modellierte Rotationen bzw. noch vorhandene Abweichungen zwischen den Referenzsystemen berücksichtigt [Sovers & Fanselow, 1987; Bauer, 1989]. Diese Matrix wird in Abschnitt 5.1.2.1 genauer erläutert.  $\mathbf{Q}(dt)$  enthält die Bewegung des intermediären Himmelspols CIP im raumfesten System,  $\mathbf{R}(dt)$  beschreibt die Rotation der Erde um ihre Rotationsachse und  $\mathbf{W}(dt)$  enthält die Bewegung des Pols im erdfesten System. Das Zeitargument  $dt$  wird über Gleichung (2.14) berechnet.

Matrix  $\mathbf{W}(dt)$  überführt das ITRS in ein *intermediäres erdfestes Referenzsystem* TIRS. Die Bewegung des Pols im erdfesten System berechnet sich aus der Multiplikation der Rotationsmatrizen

$$\mathbf{W}(dt) = \mathbf{R}_3(-s') \mathbf{R}_2(x_p) \mathbf{R}_1(y_p). \quad (2.32)$$

Die Polkoordinaten  $x_p, y_p$  werden mit Gleichung (2.27) bestimmt. Der Parameter  $s'$ , der die Position der x-Achse TIO (siehe Abbildung 2.2) des TIRS beschreibt, ergibt sich aus den Polkoordinaten und ihren zeitlichen Ableitungen  $\dot{y}_p, \dot{x}_p$  über

$$s'(dt) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (x_p \dot{y}_p - \dot{x}_p y_p) dt, \quad (2.33)$$

bzw. kann näherungsweise berechnet werden mit

$$s' = -47 \mu\text{as } dt. \quad (2.34)$$

Für das weitere Vorgehen in der Transformation können die Matrizen  $\mathbf{Q}(dt)$  und  $\mathbf{R}(dt)$  über verschiedene Wege bestimmt werden. Entweder man orientiert sich an den klassischen Definitionen und führt die Transformation basierend auf dem Frühlingspunkt durch oder man betrachtet den raumfesten intermediären Ursprung, den sogenannten CIO, der in der Äquatorebene des raumfesten Systems liegt. Die Ergebnisse beider Methoden unterscheiden sich laut Petit & Luzum [2010] nur im Bereich von Mikrobogensekunden. Auf die Definition und Berechnung der einzelnen Matrizen soll im Folgenden nur kurz eingegangen werden. Die ausführliche Beschreibung findet sich in Petit & Luzum [2010], Capitaine et al. [2003a], Capitaine & Wallace [2006], Fukushima [2003] und Wallace & Capitaine [2006]. Im Anhang A.2 sind die verschiedenen Transformationswege mit den jeweiligen Gleichungen nochmals schematisch zusammengefasst, um sie besser nachvollziehen zu können.

#### 2.4.1.1 Transformation basierend auf dem Frühlingspunkt

Die Erdrotation wird über die scheinbare Sternzeit GST berücksichtigt

$$\mathbf{R}(dt) = \mathbf{R}_3(-\text{GST}) \quad (2.35)$$

und dreht den TIO auf den wahren Frühlingspunkt  $\gamma$ , was zum wahren raumfesten System zum Zeitpunkt  $t$  führt. Die scheinbare Sternzeit berechnet sich nach

$$\text{GST} = \text{ERA}(dT) - \text{EO}, \quad (2.36)$$

wobei ERA den Erdrotationswinkel bezeichnet, der sich aus

$$\text{ERA}(dT) = 2\pi (0.7790572732640 + 1.00273781191135448 dT), \quad (2.37)$$

$$dT = \text{Julian date (UT1)} - 2451545.0, \quad (2.38)$$

$$\text{UT1} = \text{UTC} + \Delta\text{UT1} \quad (2.39)$$

ergibt.  $\Delta\text{UT1}$  wird über Gleichung (2.28) bestimmt. EO in Gleichung (2.36) ist die sogenannte *equation of the origins* und beschreibt den Unterschied zwischen dem, auf den wahren Äquator projizierten, CIO und dem wahren Frühlingspunkt  $\gamma$ . Sie berechnet sich über die hier vereinfacht dargestellte Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \text{EO} = & -0.014506'' - 4612.156534'' dt - 1.3915817'' dt^2 + 0.00000044'' dt^3 \\ & - \Delta\psi \cos \epsilon_A - \sum_k C'_k \sin \alpha_k. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Zahlenwerte für die Argumenten  $\alpha_k$  und Amplituden  $C'_k$  finden sich in Petit & Luzum [2010],  $\Delta\psi$  und  $\epsilon_A$  sind bereits aus den Gleichungen (2.25) und (2.16) bekannt und werden als *Gleichung der Äquinoktien*

$$\text{EE} = \Delta\psi \cos \epsilon_A \quad (2.41)$$

bezeichnet.

Für die weitere Transformation ins GCRS und somit den Aufbau der Matrix  $\mathbf{Q}(dt)$  gibt es verschiedene Möglichkeiten (siehe Abschnitt 2.3.1). Die Präzessionsmatrix kann entweder über das von Capitaine et al. [2003b] beschriebene P03-Modell oder über das FW-Modell von Fukushima [2003] und Williams [1994] gebildet werden. Im Folgenden wird der Aufbau von  $\mathbf{Q}(dt)$  für die zwei Modelle kurz aufgeführt.

**P03-Modell** Analog zu Capitaine & Wallace [2006], wird die Matrix  $\mathbf{Q}(dt)$  als Kombination von Einzelrotationen um die drei räumlichen Achsen des Referenzsystems aus Nutations- und Präzessionswinkeln und dem sogenannten *frame bias* aufgestellt

$$\mathbf{Q}_{\text{P03}}(dt) = \mathbf{B} \mathbf{P}_{\text{P03}}(dt) \mathbf{N}(dt). \quad (2.42)$$

Die Nutationsmatrix wird als Kombination der Winkel aus den Gleichungen (2.16), (2.25) und (2.26) aufgestellt

$$\mathbf{N}(dt) = \mathbf{R}_1(-\epsilon_A) \mathbf{R}_3(\Delta\psi) \mathbf{R}_1(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \quad (2.43)$$

und transformiert in ein mittleres raumfestes System zum Zeitpunkt  $t$ . Die Präzessionsmatrix enthält die Winkel der Gleichungen (2.11) bis (2.15)

$$\mathbf{P}_{\text{P03}}(dt) = \mathbf{R}_1(-\epsilon_0) \mathbf{R}_3(\psi_A) \mathbf{R}_1(\omega_A) \mathbf{R}_3(-\chi_A). \quad (2.44)$$

Nachdem die Präzession berücksichtigt wurde, liegt die zu transformierende Größe in einem mittleren raumfesten System zum Zeitpunkt J2000.0 vor. Der *frame bias*

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}_3(-d\alpha_0) \mathbf{R}_2(-\xi_0) \mathbf{R}_1(\eta_0) \quad (2.45)$$

mit  $d\alpha_0 = -0.01460''$ ,  $\xi_0 = -0.0166170''$  und  $\eta_0 = -0.0068192''$  ist hier nötig, um schließlich in das GCRS zu transformieren (siehe Abbildung 2.2).

**FW-Modell** Im Gegensatz zum P03-Modell hat das FW-Modell nach Hilton et al. [2006] zwei Vorteile. Erstens transformieren die Präzessionswinkel direkt ins GCRS und nicht ins mittlere System J2000.0, somit entfällt die Aufstellung einer Rotation um den *frame bias*. Zweitens bezieht sich der Winkel  $\bar{\psi}$ , wie die Nutationswinkel, auf die Ekliptik zum Zeitpunkt  $t$  und kann somit direkt zu  $\Delta\psi$  der Nutation addiert werden. Durch die zwei Vorteile kann im FW-Modell die Matrix  $\mathbf{Q}(dt)$  aus nur vier Rotationsmatrizen aufgebaut werden

$$\mathbf{Q}_{\text{FW}}(dt) = \mathbf{R}_3(-\bar{\gamma}) \mathbf{R}_1(-\bar{\varphi}) \mathbf{R}_3(\bar{\psi} + \Delta\psi) \mathbf{R}_1(\epsilon_A + \Delta\epsilon). \quad (2.46)$$

### 2.4.1.2 Transformation basierend auf dem CIO

In diesem Ansatz wird der CIO als zentraler Punkt für die Transformation betrachtet. Er bewegt sich nur langsam entlang des Äquators des CIRS, was ein Vorteil gegenüber der Transformation über den Frühlingspunkt ist.

Die Berücksichtigung der Erdrotation in der Matrix

$$\mathbf{R}(dt) = \mathbf{R}_3(-\text{ERA}) \quad (2.47)$$

erfolgt in diesem Ansatz über den Erdrotationswinkel, der über Gleichung (2.37) berechnet wird.

Auch bei der Berechnung der Transformationsmatrix basierend auf dem CIO gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten zum Aufbau der Matrix  $\mathbf{Q}(dt)$ , die im Folgenden erläutert sind.

**X/Y aus Reihenentwicklung** Wie ebenfalls in Capitaine & Wallace [2006] beschrieben, wird die Matrix  $\mathbf{Q}(dt)$  mit der Bewegung des Himmelspols in diesem Ansatz nicht speziell in Präzession und Nutation aufgeteilt. Statt dessen werden diese Phänomene durch die beiden zälestischen Polkoordinaten

$$\begin{aligned} X = & -0.016617'' + 2004.191898'' dt - 0.4297829'' dt^2 \\ & - 0.19861834'' dt^3 + 0.000007578'' dt^4 + 0.0000059285'' dt^5 \\ & + \sum_{j=0}^4 \sum_{i=1}^{n_j} [(a_{s,j})_i dt^j \sin(\text{ARG}_i) + (a_{c,j})_i dt^j \cos(\text{ARG}_i)] + \dots \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} Y = & -0.006951'' - 0.025896'' dt - 22.4072747'' dt^2 \\ & + 0.00190059'' dt^3 + 0.001112526'' dt^4 + 0.0000001358'' dt^5 \\ & + \sum_{j=0}^4 \sum_{i=1}^{n_j} [(b_{c,j})_i dt^j \cos(\text{ARG}_i) + (b_{s,j})_i dt^j \sin(\text{ARG}_i)] + \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

ausgedrückt. Der Zeitparameter  $dt$  ergibt sich durch Gleichung (2.14),  $\text{ARG}_i$  durch Gleichung (2.22). Die jeweiligen Koeffizienten  $a$  und  $b$  können dem kombinierten Nutations-/Präzessionsmodell der IERS Konventionen 2010 entnommen werden, ebenso  $n_j$ . Als weiterer Parameter für die Aufstellung der Matrix  $\mathbf{Q}(dt)$  wird  $s$  benötigt, der die Lage des CIO angibt und sich über eine Reihenentwicklung berechnet, die hier in vereinfachter Form dargestellt ist

$$\begin{aligned} s(dt) = & -XY/2 + 94 + 3808.65 dt - 122.68 dt^2 - 72574.11 dt^3 + \sum_k C_k \sin \alpha_k \\ & + 1.73 dt \sin \Omega + 3.57 dt \cos 2\Omega + 743.52 dt^2 \sin \Omega + 56.91 dt^2 \sin(2F - 2D + 2\Omega) \\ & + 9.84 dt^2 \sin(2F + 2\Omega) - 8.85 dt^2 \sin 2\Omega. \end{aligned} \quad (2.50)$$

$XY$  ist die Multiplikation der Gleichungen für  $X$  und  $Y$  in (2.48) bzw. (2.49). Zahlenwerte für die Argumenten  $\alpha_k$  und Amplituden  $C_k$  und die Fundamentalargumente  $\Omega$ ,  $F$  und  $D$  finden sich in Petit & Luzum [2010]. Mit all diesen Größen ergibt sich

$$\mathbf{Q}_{\text{CIO}}(dt) = \mathbf{Q}_{\text{XY}}(dt) \cdot \mathbf{R}_3(s) = \begin{bmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_3(s), \quad (2.51)$$

in der näherungsweise  $a = 1/2 + 1/8 (X^2 + Y^2)$  gilt. In diesem Transformationsansatz überführt  $\mathbf{Q}_{\text{CIO}}(dt)$  direkt aus einem intermediären CIRS in das GCRS.

**X/Y aus FW-Modell** Laut Wallace & Capitaine [2006] und Capitaine & Wallace [2006] ist es möglich, aus der Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{FW}}(dt)$  des FW-Modells in Gleichung (2.46) die Koordinaten des CIP abzuleiten. Element  $\mathbf{Q}_{\text{FW}}[3, 1]$  beschreibt die  $X$ -Koordinate und Element  $\mathbf{Q}_{\text{FW}}[3, 2]$  die  $Y$ -Koordinate.



Schreibt man die Berechnung der jeweiligen Elemente aus, folgen die Gleichungen

$$X = \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\gamma} - \left( \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \cos(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\varphi} - \cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin \bar{\varphi} \right) \sin \bar{\gamma}, \quad (2.52)$$

$$Y = \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin(\bar{\psi} + \Delta\psi) \sin \bar{\gamma} + \left( \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \cos(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\varphi} - \cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin \bar{\varphi} \right) \cos \bar{\gamma}. \quad (2.53)$$

Bei den einzelnen Winkeln in diesen Gleichungen handelt es sich um die Präzessionswinkel im FW-Modell (2.16) bis (2.19) sowie die Nutationswinkel (2.25) und (2.26). Mit  $X$  und  $Y$  sowie  $s$  aus (2.50) kann über Gleichung (2.51) die Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{FWCIO}}(dt)$  berechnet werden. Sie entspricht  $\mathbf{Q}_{\text{CIO}}(dt)$ , wird aber mit FWCIO bezeichnet, um die Basis der Berechnung für  $X$  und  $Y$  zu kennzeichnen.

### 2.4.2 Transformation aus dem $\text{PAS}_E$ ins GCRS

Wie in Abschnitt 2.1.2.1 erläutert, erhält man das  $\text{PAS}_E$  aus dem ITRS über eine Drehung um die  $z$ -Achse mit  $\lambda = 14.9^\circ$ . Für die Transformation aus dem  $\text{PAS}_E$  ins GCRS wird somit die Transformationsmatrix in Gleichung (2.47) um eine zusätzliche Rotation um die  $z$ -Achse mit dem Winkel  $\lambda$  ergänzt. Diese Transformation wird bei der Berechnung der Ephemeride benötigt.

### 2.4.3 Transformation aus dem GCRS ins BCRS

Liegen Stationskoordinaten im GCRS vor und sollen ins BCRS transformiert werden, kann dies nicht einfach über eine Verschiebung des Ursprungs des Referenzsystems erreicht werden. Da sich die Erde im Schwerfeld des Sonnensystems mit einer Geschwindigkeit relativ zum Baryzentrum bewegt, müssen Effekte der allgemeinen (Einstein-Effekt) und speziellen (Lorentz-Effekt) Relativitätstheorie berücksichtigt werden [Misner et al., 1973]. Die Transformation gelingt dann über eine generalisierte Lorentz-Transformation. Nimmt man an, dass die Koordinaten im GCRS auf die Zeitskala TT bezogen sind und die BCRS Koordinaten auf die TDB, so ergibt sich die Transformation zwischen den Systemen gemäß Petit & Luzum [2010] über

$$\mathbf{r}_{\text{BCRS}} = \mathbf{r}_{\text{GCRS}} \left( 1 - \frac{U_{GS}}{c^2} - L_C \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{v}_E \mathbf{r}_{\text{GCRS}}}{c^2} \right) \mathbf{v}_E. \quad (2.54)$$

$\mathbf{r}$  ist die Koordinate im jeweiligen Referenzsystem bezogen auf dessen Ursprung,  $U_{GS}$  ist das geozentrische gravitative Potential der Sonne ohne das Potential der Erde. Theoretisch müsste hier das Potential des gesamten Sonnensystems berücksichtigt werden. Es ist jedoch ausreichend nur die Sonne zu berücksichtigen, da der Effekt der anderen Planeten gering ist.  $\mathbf{v}_E$  ist die baryzentrische Geschwindigkeit der Erde,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und der Skalierungsfaktor  $L_C$  beträgt  $1.48082686741 \times 10^{-8}$ .

### 2.4.4 Transformation aus dem $\text{PAS}_M$ ins SCRS

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die Transformationen der erdbezogenen räumlichen Referenzsysteme erläutert wurden, sollen nun die mondbezogenen Transformationen behandelt werden.

Die Rotationsmatrix vom mondfesten  $\text{PAS}_M$  ins raumfeste SCRS ist nicht, wie bei der Erde, aus vereinbarten Einzelrotationen zusammengesetzt, sondern wird durch die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen 1. Ordnung erhalten. Für den Fall eines starren Mondes sind es die Euler'schen Kreiselgleichungen [Schneider, 1979]

$$\begin{aligned} A \dot{\omega}_1 + (C - B) \omega_2 \omega_3 &= M \pi_1, \\ B \dot{\omega}_2 + (A - C) \omega_1 \omega_3 &= M \pi_2, \\ C \dot{\omega}_3 + (B - A) \omega_1 \omega_2 &= M \pi_3. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Darin stehen  $A, B$  und  $C$  für die Hauptträgheitsmomente bezüglich der Achsen  $\pi_1, \pi_2$  und  $\pi_3$  des Mondes.  $\omega_1, \omega_2$  und  $\omega_3$  geben die Komponenten des Drehvektors,  $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$  und  $\dot{\omega}_3$  entsprechend die Winkelbeschleunigungen bezüglich dieser Achsen an.  $M$  ist das gesamte, von außen auf den Körper wirkende, Drehmoment.

Führt man nach Schneider [1979] noch die Euler'schen Winkelgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= (\omega_1 \sin \phi + \omega_2 \cos \phi) / \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \omega_1 \cos \phi - \omega_2 \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= -\cot \theta (\omega_1 \sin \phi + \omega_2 \cos \phi) + \omega_3\end{aligned}\tag{2.56}$$

als Zusammenhang der Euler'schen Winkel  $\psi, \theta, \phi$  und der Komponenten des Drehvektors ein, ergibt sich mit den Gleichungen (2.55) und (2.56) ein gekoppeltes System mit sechs Differentialgleichungen 1. Ordnung. Aus der simultanen Integration dieses Gleichungssystems für die Rotation des Mondes und seiner Translation berechnen sich die Euler'schen Winkel, die zwischen dem mondfesten  $PAS_M$  und dem raumfesten SCRS vermitteln

$$\mathbf{r}_{SCRS} = \mathbf{R}_3(\psi) \mathbf{R}_1(\theta) \mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{r}_{PAS}.\tag{2.57}$$

Um die tatsächlichen Rotationseigenschaften des Mondes genauer zu beschreiben, wird ein elastischer dissipativer Mond angenommen. Die dadurch entstehenden elastischen Deformationen des Mondes werden berücksichtigt, indem zeitabhängige Zuschläge an die Hauptträgheitsmomente angebracht werden [Bauer, 1989], die sich entsprechend bei der Berechnung der Euler'schen Winkel auswirken. Durch eine weitere Verfeinerung wird der Mond nach Williams & Boggs [2009] als Körper mit festem Mantel und flüssigen Kern betrachtet. Die Drehmomente werden getrennt für den gesamten Mond und für den Mondkern berechnet. Der Effekt des Kerns kann danach bei der Berechnung der Winkelgeschwindigkeiten und der Euler'schen Winkel berücksichtigt werden [Hofmann et al., 2010].

#### 2.4.5 Transformation aus dem SCRS ins BCRS

Analog zur raumfesten Transformation der Stationskoordinaten in Abschnitt 2.4.3 müssen auch bei der Transformation von Reflektorkoordinaten aus dem SCRS ins BCRS relativistische Effekte berücksichtigt werden. Bei der Transformation aus dem GCRS in das BCRS geht man davon aus, dass zwischen Koordinaten transformiert wird, die sich auf dynamische Zeitskalen beziehen. Für das SCRS ist keine spezielle Zeitskala definiert, es wird in dieser Arbeit aber eine *Selenozentrische Koordinatenzeit* TCS angenommen, die analog zu TCG definiert ist. Die generalisierte Lorentz-Transformation aus dem SCRS ins BCRS, das auf TDB bezogen ist, lautet dann

$$\mathbf{r}_{BCRS} = \mathbf{r}_{SCRS} \left( 1 - \frac{U_{SS}}{c^2} - L_B \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{v}_M \mathbf{r}_{SCRS}}{c^2} \right) \mathbf{v}_M.\tag{2.58}$$

$\mathbf{r}$  ist die Koordinate im jeweiligen Referenzsystem bezogen auf dessen Ursprung,  $U_{SS}$  ist das selenozentrische gravitative Potential der Sonne. Wie bei der Transformation für die Erde über Gleichung (2.54) ist auch für diese Transformation das Potential der Sonne ausreichend.  $\mathbf{v}_M$  ist die baryzentrische Geschwindigkeit des Mondes,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und der Skalierungsfaktor  $L_B = 1.550519768 \times 10^{-8}$ .

# 3 Auswertung von Entfernungsmessungen zum Mond mit dem Programmpaket LUNAR

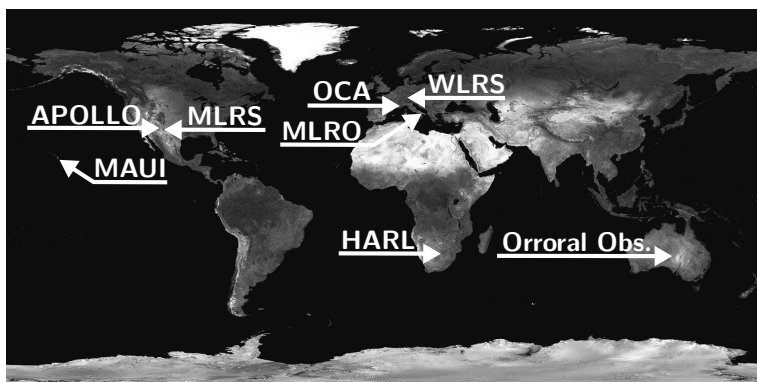
## 3.1 Das Messverfahren Lunar Laser Ranging

Entfernungsmessungen zum Mond sind Laufzeitmessungen mehrerer Laserpulse mit einer Länge von 70 bis 200 Picosekunden von einem Sender auf der Erde zu einem Retroreflektor auf dem Mond und wieder zurück. Die Besonderheit des Reflektors besteht darin, dass er das ankommende Licht des Lasers in die selbe Richtung reflektiert, aus der es gekommen ist. Auf der Erde werden die reflektierten Photonen von einer Messoptik empfangen und in einem Detektor registriert. Da dort aber nicht nur Photonen vom Mond, sondern auch Störlicht registriert werden, müssen die Daten zeitlich, spektral und räumlich gefiltert werden. Die Bedingungen zur Durchführung der Messungen sind durch den großen Abstand zwischen Erde und Mond schwierig, da es zu Intensitätsverlusten durch z.B. eine starke Divergenz, Absorption und Streuung des Laserstrahls kommt. Eine Beschreibung der Effekte, die sich auf die Entfernungsmessungen auswirken, geben Williams et al. [2009]. Die einzelnen Laufzeitmessungen aus einer Beobachtungssequenz von etwa fünf bis 20 Minuten werden statistisch zu einem Normalpunkt NP kombiniert. Die von den Stationen zur Verfügung gestellten NP enthalten unter anderem folgende Informationen:

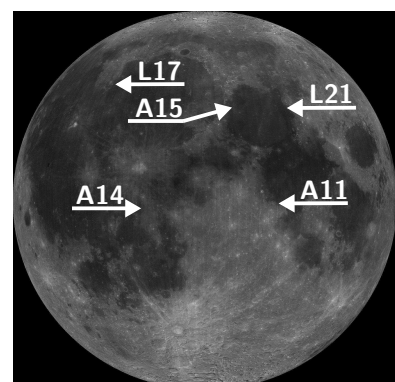
- den Messzeitpunkt in UTC,
- die Laufzeit mit Genauigkeitsangabe der Messung,
- welche Station zu welchem Reflektor gemessen hat,
- Angaben zur Wellenlänge des Lasers,
- Anzahl der Messungen, aus denen der NP zusammengefasst wurde
- sowie meteorologische Angaben zur Temperatur, Luftdruck und -feuchtigkeitsgehalt.

Genauere Beschreibungen zur Durchführung der Messung und Bestimmung der NP finden sich in Abbot et al. [1973], Bauer [1989], Müller et al. [1992] und Dickey et al. [1994].

Weltweit sind nur wenige Stationen in der Lage, über einen langen Zeitraum die Mondentfernung zu messen. Die vier Stationen APOLLO in New Mexiko (USA), OCA in Grasse (Frankreich), MLRO in Matera (Italien) und MLRS in Texas (USA) führen diese Messungen aktuell aus. In der Vergangenheit wurden auch vom Lure Observatory auf MAUI/Hawaii (USA) Messungen durchgeführt. In Wettzell (Deutschland) am Geodätischen Observatorium Wettzell WLRS wurden vereinzelte Ent-



3.1.1: Verteilung der acht Messstationen auf der Erde, die technisch in der Lage sind oder waren, Entfernungsmessungen zum Mond durchzuführen.



3.1.2: Verteilung der Reflektoren auf dem Mond

Abb. 3.1: Positionen der Stationen und Reflektoren

fernungen zum Mond gemessen, die in Kürze wieder regelmäßig durchgeführt werden sollen. Einige wenige Beobachtungen von der Südhalbkugel vom Orroal Satellite Laser Ranging Observatory aus Orroal (Australien) existieren ebenfalls. Da es sich aber um NP handelt, die über Mehrfachpulse gewonnen wurden, können sie in der bestehenden Software nicht ausgewertet werden. Aktuell hat die Station ein Teleskop mit dem nur Entfernungen zu Satelliten gemessen werden. Für die Zukunft ist es geplant, dieses so aufzurüsten, dass auch Entfernungsmessungen zum Mond wieder möglich sind. Des Weiteren wird bei Johannesburg (Südafrika) am Hartebeesthoek Radio Astronomy Observatory HARL eine LLR-Station eingerichtet. Hier wird ein altes System der Station OCA, das dort nicht mehr betrieben wird, aufgebaut. Abbildung 3.1.1 zeigt die Verteilung der einzelnen Stationen.

Auf der Mondoberfläche wurde 1969 während der bemannten APOLLO 11 Mission der NASA der Retroreflektor A11 installiert. 1970 folgte mit der unbemannten sowjetischen Raumfahrtmission LUNA 17 der Reflektor L17. Nach einigen erfolgreichen Messungen zu L17, erhielt die Station MLRS kein Signal vom Reflektor zurück und er wurde für die LLR-Messungen aufgegeben. Im April 2010 konnte die Station APOLLO erstmals wieder ein Signal von L17 aufzeichnen, nachdem seine Koordinaten auf hochauflösenden Bildern des Lunar Reconnaissance Orbiters neu bestimmt werden konnten [Murphy et al., 2011]. Weitere Retroreflektoren (A14, A15) wurden im Januar und Juli 1971 durch die bemannten APOLLO 14 und 15 Missionen auf der Mondoberfläche installiert. Nach der unbemannten LUNA 21 Mission im Januar 1973 stand Reflektor L21 zur Verfügung. Somit können, wie in Abbildung 3.1.2 dargestellt, fünf Reflektoren von der Erde aus für die Entfernungsmessung anvisiert werden.

Aktuelle Statistiken der NP der letzten 44 Jahre werden in Abschnitt 4.1 diskutiert.

## 3.2 Auswertung der LLR-Daten

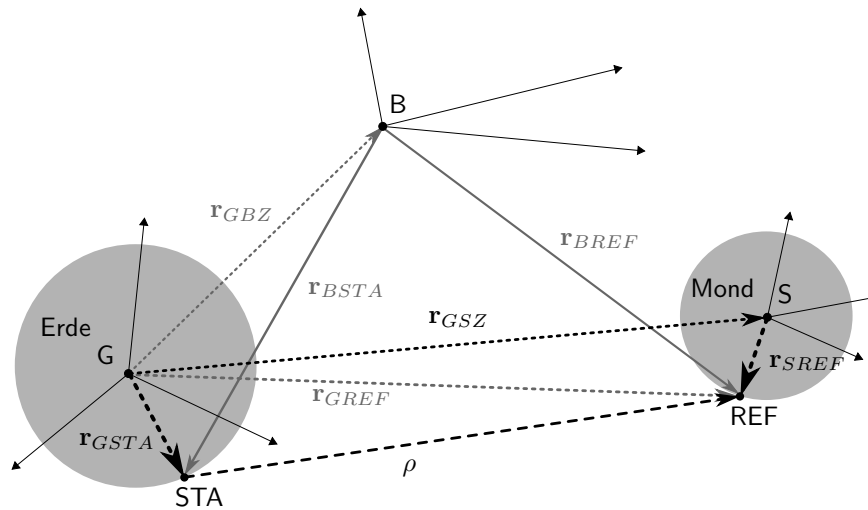
Bei der Durchführung von Entfernungsmessungen zum Mond werden den Laserpulsen zum Send- und Empfangszeitpunkt Zeitmarken zugeordnet, aus deren Differenz sich die Laufzeit  $\tau$  des Laserlichts ergibt. Multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  berechnet sich die gemessene Entfernung  $\rho_{mess}$  zwischen Sendestation und Retroreflektor näherungsweise über

$$\rho_{mess} = \tau \frac{c}{2}. \quad (3.1)$$

Da in der Auswertung der LLR-Daten berücksichtigt werden muss, dass sich Erde und Mond auf ihren Bahnen im Sonnensystem bewegen und um ihre Achsen rotieren, spielen in der Auswertung drei Zeitpunkte eine Rolle: Sendezeitpunkt des Laserpulses  $t_1$ , Reflexionszeitpunkt am Retroreflektor  $t_2$  und Empfangszeitpunkt am Detektor der Station  $t_3$ . Die Laufzeit des Laserpulses wird auf den Hinweg zum Mond  $\tau_{12}$  und Rückweg zur Erde  $\tau_{23}$  aufgeteilt. Des Weiteren werden an die Laufzeit Korrekturwerte angebracht: auf Grund der relativistischen Lichtzeitgleichung im Schwerfeld von Erde und Sonne (auch Shapiro-Effekt genannt) [Moyer, 1971] sowie der relativistischen Zeittransformation zwischen TT und TDB. Sie werden in  $\Delta\tau_{rel}$  zusammengefasst. Andere Effekte entstehen wegen der Atmosphäre  $\Delta\tau_{atmo}$  [Marini & Murray, 1973], die den Laserpuls beeinflusst.  $\Delta\tau_{syn}$  korrigiert eine synodische Oszillation der geozentrischen Mondbahn wegen des Strahlungsdrucks der Sonne und thermischer Effekte [Vokrouhlicky, 1997]. Systematische Fehler in der Messoptik werden über  $\Delta\tau_{syst}$  berücksichtigt. Die berechnete Entfernung Station-Reflektor resultiert somit aus

$$\rho_{rech} = (\tau_{12} + \tau_{23} + \Delta\tau_{rel} + \Delta\tau_{atmo} + \Delta\tau_{syn} + \Delta\tau_{syst}) \frac{c}{2}. \quad (3.2)$$

In den Beobachtungsdaten, die von den Stationen zur Verfügung stehen, ist nur der Sendezeitpunkt  $t_1$  in der Zeitskala UTC und die Laufzeit  $\tau$  gegeben. Die Zeitpunkte  $t_2$  und  $t_3$  werden in der Auswertung iterativ bestimmt und müssen in der Zeitskala TDB vorliegen. Für die Transformation UTC  $\rightarrow$  TAI  $\rightarrow$  TT  $\rightarrow$  TDB werden die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Zeittransformationen angewendet. Sind Reflexionszeitpunkt  $t_2$  und Empfangszeitpunkt  $t_3$  bekannt, können die in Gleichung (3.2) benötigten Laufzeiten  $\tau_{12}$  und  $\tau_{23}$  berechnet werden. Dazu wird die Messanordnung



**Abb. 3.2:** Messkonfiguration und der Zusammenhang verschiedener Vektoren, wie sie für die Auswertung der LLR-Daten benötigt werden. Alle hier dargestellten Vektoren sind im BCRS definiert.

und der Zusammenhang verschiedener Vektoren, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, benötigt. Die Translations- und Rotationsbewegung von Erde und Mond sind in der Abbildung nicht zu sehen, werden in der entsprechenden Berechnung aber berücksichtigt.

Die Bezeichnungen in Abbildung 3.2 und den folgenden Gleichungen bedeuten:

- B - Baryzentrum des Sonnensystems
- G - Geozentrum
- S - Selenozentrum
- STA - Station
- REF - Retroreflektor
- $\mathbf{r}_{GBZ}$  - geozentrischer Vektor des Baryzentrums im BCRS
- $\mathbf{r}_{GSZ}$  - geozentrischer Vektor des Selenozentrums im BCRS
- $\mathbf{r}_{GREF}$  - geozentrischer Vektor des Retroreflektors im BCRS
- $\mathbf{r}_{GSTA}$  - geozentrischer Vektor der Station im BCRS
- $\mathbf{r}_{SREF}$  - selenozentrischer Vektor des Retroreflektors im BCRS
- $\mathbf{r}_{BSTA}$  - baryzentrischer Vektor der Station im BCRS
- $\mathbf{r}_{BREF}$  - baryzentrischer Vektor des Retroreflektors im BCRS
- $\rho$  - gemessene oder berechnete Entfernung Station-Reflektor

Die Laufzeit für den Hinweg des Laserpulses  $\tau_{12}$  berechnet sich aus

$$\mathbf{r}_{BSTA}(t_1) = \mathbf{r}_{GSTA}(t_1) - \mathbf{r}_{GBZ}(t_1), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{r}_{BREF}(t_2) = \mathbf{r}_{SREF}(t_2) + \mathbf{r}_{GSZ}(t_2) - \mathbf{r}_{GBZ}(t_2), \quad (3.4)$$

$$\tau_{12} = (\mathbf{r}_{BREF}(t_2) - \mathbf{r}_{BSTA}(t_1))/c. \quad (3.5)$$

Die Vektoren liegen für die Zeitpunkte  $t_1$  und  $t_2$  vor. Für den Rückweg vom Retroreflektor zur Station wird die Laufzeit  $\tau_{23}$  über

$$\mathbf{r}_{BSTA}(t_3) = \mathbf{r}_{GSTA}(t_3) - \mathbf{r}_{GBZ}(t_3), \quad (3.6)$$

$$\tau_{23} = (\mathbf{r}_{BREF}(t_2) - \mathbf{r}_{BSTA}(t_3))/c \quad (3.7)$$

ermittelt, wo die Vektoren für die Zeitpunkte  $t_2$  und  $t_3$  vorliegen.

Mit den bekannten Laufzeiten  $\tau_{12}$  und  $\tau_{23}$  bezeichnet die Differenz der Gleichungen (3.1) und (3.2) die Widersprüche zwischen gemessener und berechneter Station-Retroreflektor-Entfernung.

Für die weitere Auswertung der LLR-Daten wird die Entfernung  $\rho_2$  zum Reflexionszeitpunkt  $t_2$  benötigt. Die genäherte Entfernungsgleichung zwischen Station und Reflektor lautet

$$\rho_2 = |\mathbf{r}_{GSZ}(t_2) + \mathbf{r}_{SREF}(t_2) - \mathbf{r}_{GSTA}(t_2)|. \quad (3.8)$$

Die in diesem Abschnitt dargestellten Berechnungen sind als Auswertung im Programmpaket LUNAR implementiert. Dieses ist in drei Teilprogramme gegliedert:

**Ephemeridenberechnung - EPHEM** Numerische Integration der Einstein-Infeld-Hoffmann-Gleichungen zur Berechnung der Ephemeriden (Positionen und Geschwindigkeiten) der Körper des Sonnensystems. Gleichzeitig werden die Euler'schen Winkel und Winkelgeschwindigkeiten für den Mond integriert.

**Berechnung der Variationsgleichungen - AVAR** Berechnung dynamischer Ableitungen der Entfernungsgleichung nach den zu schätzenden Parametern über numerische Integration Newton'scher Bewegungsgleichungen.

**Parameterschätzung - PAR** In diesem Programmteil fließen die Ergebnisse der anderen beiden Teile zusammen und ermöglichen durch eine Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell die Schätzung der unbekannt Parameter.

Die Ausführung der drei Teilprogramme erfolgt iterativ, d.h. Parameter, die in PAR geschätzt werden (z.B. Translationsparameter des Mondes), fließen wieder in EPHEM und AVAR ein. Mit den neu berechneten Ephemeriden und Ableitungen kann eine neue Parameterschätzung erfolgen. Diese Iteration wird so lange durchgeführt, bis die Lösung konvergiert.

Die geschichtliche Entwicklung des Programmpaketes LUNAR wurde bereits in Abschnitt 1.1 angesprochen. Das Auswerteprogramm, das als Ergebnis der damaligen Arbeiten entstanden ist, wurde als Grundlage für die hier vorliegende Arbeit verwendet. Es wird als Programmversion LUNAR 2.0 bezeichnet und in den folgenden Abschnitten kurz dokumentiert.

## 3.3 Ephemeridenberechnung - EPHEM

### 3.3.1 Translation der Körper des Sonnensystems

Die Ephemeriden der Körper des Sonnensystems, die in der Auswertung von LLR-Daten eine Rolle spielen, werden in erster Näherung aus der zweifachen Integration der Einstein-Infeld-Hoffmann-Bewegungsgleichungen (EIH), siehe (3.9), berechnet [Bauer, 1989]. Die numerische Integration erfolgt mit einem Integrator von Montenbruck & Gill [2000] nach dem Verfahren von Adams-Bashfort-Moulton für den gesamten Beobachtungszeitraum. Die Ephemeriden werden alle acht Stunden ausgegeben.

Das Modell basiert auf Einsteins Gravitationstheorie bis zur ersten nach-Newton'schen Ordnung ( $1/c^2$ ). Die hier verwendete Schreibweise orientiert sich an Reichhoff [1999, Gleichung (1.3)] und Soffel et al. [2008, Gleichung (10)]. Die Beschleunigung  $\mathbf{a}_A$  eines Körpers  $A$  wird über

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A = & - \sum_{B \neq A} \frac{GM_B}{r_{AB}^2} \mathbf{n}_{AB} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[ \gamma \mathbf{v}_A^2 + (\gamma + 1) \mathbf{v}_B^2 - (2\gamma + 2) \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B - \frac{3}{2} (\mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{v}_B)^2 \right] \right. \\ & \left. - 2(\gamma + \beta) \sum_{C \neq A} \frac{GM_C}{c^2 r_{AC}} - \sum_{C \neq B} \frac{GM_C}{c^2 r_{BC}} \left[ (2\beta - 1) + \frac{1}{2} \frac{r_{AB}}{r_{CB}} \mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{n}_{CB} \right] \right\} \\ & - \frac{(4\gamma + 3)}{2} \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq B} \frac{G^2 M_B M_C}{c^2 r_{AB} r_{BC}^2} \mathbf{n}_{BC} \\ & + \sum_{B \neq A} (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) \frac{GM_B}{c^2 r_{AB}^2} \{ \mathbf{n}_{AB} [(2\gamma + 2) \mathbf{v}_A - (2\gamma + 1) \mathbf{v}_B] \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

mit

$$\mathbf{n}_{AB} = \frac{\mathbf{x}_A(t) - \mathbf{x}_B(t)}{r_{AB}}$$

berechnet und resultiert aus der Wechselwirkung der Körper des Sonnensystems. Die Indizes  $A, B$  und  $C$  repräsentieren die verschiedenen Körper, in diesem Fall werden die acht Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun), der Erdmond, die Sonne und die drei massereichsten Asteroiden (Ceres, Pallas und Vesta) berücksichtigt.  $G$  bezeichnet die Newton'sche Gravitationskonstante. Die Masse  $M$ , der baryzentrische Ortsvektor  $\mathbf{x}$  und der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  beziehen sich auf den jeweiligen Körper, der durch den dazugehörigen Index angegeben ist.  $\mathbf{n}$  bezeichnet den Einheitsvektor und  $r$  den Abstand zwischen den im Index angegebenen Körpern. Der Nichtlinearitätsparameter  $\beta$  und der Raumkrümmungsfaktor  $\gamma$  werden nach der Einstein'schen Theorie gleich eins gesetzt [Einstein et al., 1938]. Alle Körper in Gleichung (3.9) werden als Massenmonopole behandelt. Für die Lösung der Gleichung durch eine numerische Integration werden als Anfangswerte Positionen und Geschwindigkeiten der Körper des Sonnensystems der Ephemeride DE200 vom JPL verwendet [Standish, 1982, 1990].

Um die Ephemeriden der Hauptkörper Erde und Mond möglichst genau zu berechnen, werden für diese beiden Körper und die Sonne zusätzlich die Figurenkräfte berechnet, die durch eine nicht punktsymmetrische Massenverteilung entstehen. Das Gravitationspotential des Mondes wird über die Kugelfunktionsentwicklung bis Grad und Ordnung vier berechnet. Für das Gravitationspotential der Erde werden nur die zonalen Terme bis Grad vier berücksichtigt, für die Sonne fließt das Quadrupolmoment ein. Als weiterer Effekt, der im Erde-Mond-System wirkt, ist die Gezeitenreibung zwischen Erde und Mond analog zu Bauer [1989] modelliert. Die Ephemeriden werden im BCRS als Ekliptiksystem mit der Zeitskala TDB berechnet.

### 3.3.2 Rotation des Mondes

Für die Berechnung der Euler'schen Winkel, die in der Transformationsgleichung (2.57) benötigt werden, werden die Drehmomente berechnet, die Erde und Sonne als Punktmassen auf den Mond mit seinem Gravitationsfeld bis Grad und Ordnung vier ausüben. Außerdem wird die Quadrupolkopplung zwischen Erde und Mond gemäß Gleixner [1986] berücksichtigt. Wie in Abschnitt 2.4.4 erläutert, wird der Mond außerdem als elastischer dissipativer Körper modelliert. Die relativistischen Einflüsse der geodätischen und der Lense-Thirring-Präzession auf die Euler'schen Winkel werden ebenfalls berücksichtigt. Über die Integration der Gleichungen (2.55) und (2.56) berechnen sich die Euler'schen Winkel, die zwischen dem  $PAS_M$  und dem SCRS transformieren.

### 3.3.3 Rotation der Erde

Die Rotation der Erde wird über das Modell der Präzession von Lieske et al. [1977] und der Nutation von Wahr [1981b] beschrieben. Die Nutation fließt allerdings nur mit der größten Periode von 18.6 Jahren in die Berechnung ein. Zusätzlich werden Korrekturwerte angebracht. Außerdem wird der mittlere Stundenwinkel von Greenwich berücksichtigt. Da für die Ephemeridenberechnung die Erde in ihrem Hauptachssystem betrachtet wird, fließt noch die entsprechende Rotation um die Z-Achse ein. Die Polbewegung der Erde kann hier vernachlässigt werden. Die Modellierung folgt den IERS Konventionen von 1996 [McCarthy, 1996].

## 3.4 Berechnung der partiellen Ableitungen

Um die Auswertung der LLR-Daten in einem Gauß-Markov-Modell durchführen zu können, muss die Entfernungsgleichung (3.8) nach den zu schätzenden Parametern  $p$  abgeleitet werden. In

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{GSZ}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{r}_{SREF}}{\partial p} - \frac{\partial \mathbf{r}_{GSTA}}{\partial p} \right) \quad (3.10)$$

beschreibt  $\boldsymbol{\rho}/\rho$  den Einheitsvektor, die weiteren Brüche in der Gleichung stehen für die entsprechenden Ableitungen der Vektoren nach den zu schätzenden Parametern. Nach Williams et al. [2009] werden dazu einerseits geometrische Ableitungen benötigt, die sich auf alle Parameter beziehen, die

die Laufzeit des Laserpulses betreffen. Andererseits werden dynamische Ableitungen benötigt, die alle Parameter der Bewegungsgleichung betreffen. Die Ableitungen werden über drei verschiedene Möglichkeiten berechnet [Bauer, 1989; Reichhoff, 1999]:

1. Die geometrischen Ableitungen, z.B. nach den geozentrischen Stations- oder selenozentrischen Reflektorkoordinaten, Koeffizienten der Nutationsreihe und Bewegungen der tektonischen Platten, können direkt analytisch gebildet werden. Dies erfolgt im Teilprogramm PAR. Die geometrischen Ableitungen sind in den Gleichungsteilen  $\partial \mathbf{r}_{GSTA}/\partial p$  und  $\partial \mathbf{r}_{SREF}/\partial p$  enthalten.
2. Die dynamischen Ableitungen nach den relativistischen Parametern werden, wie in Müller [1991] beschrieben, durch numerische Differentiation der Ephemeride des Mondes bei der Berechnung in EPHEM erhalten. Diese sind im Gleichungsteil  $\partial \mathbf{r}_{GSZ}/\partial p$  enthalten.
3. Die dynamischen Ableitungen, die die Bahnen von Sonne und Mond, sowie die Rotation des Mondes betreffen, können nur semianalytisch durch die numerische Integration der Bewegungsgleichungen (3.9) sowie der Euler'schen Kreisgleichung (2.55) und Winkelgeschwindigkeiten (2.56) gebildet werden. Die entsprechenden Parameter sind z.B. die Anfangswerte der Mondbahn, Eulersche Winkel und Geschwindigkeiten sowie Kugelfunktionskoeffizienten des Mondes. Dies erfolgt im Programmteil AVAR. Die Ableitungen sind in den Gleichungsteilen  $\partial \mathbf{r}_{GSZ}/\partial p$  und  $\partial \mathbf{r}_{SREF}/\partial p$  enthalten.

In AVAR und EPHEM wird die Integration über den gesamten Beobachtungszeitraum berechnet und in einer Datei in Acht-Stunden-Intervallen gespeichert. Die Bildung der vollständigen partiellen Ableitungen nach den zu schätzenden Parametern erfolgt im Programmteil PAR über die Kettenregel.

### 3.5 Berechnung der Variationsgleichungen - AVAR

Um den Rechenaufwand zu reduzieren, liegt der Berechnung von dynamischen Ableitungen im Programmteil AVAR eine vereinfachte Ephemeridenberechnung zu Grunde, in der die Bewegungsgleichungen nur in Newton'scher Form ausgewertet werden. Alle Körper des Sonnensystems werden als Punktmassen modelliert. Zusätzlich werden die Figurenkräfte des Mondes als zonale Potentialkoeffizienten bis Grad drei und die der Erde vollständig bis Grad und Ordnung drei berücksichtigt. Des Weiteren fließt die Gezeitenreibung zwischen Erde und Mond ein. Für die Modellierung der Mondrotation werden die Euler'schen Kreisgleichungen integriert, wobei der Mond nur von Sonne und Erde als Punktmassen beeinflusst wird. Die Rotation der Erde wird über die Präzession, die 18.6-Jahre-Periode der Nutation und den Stundenwinkel von Greenwich modelliert. Relativistische Effekte werden hier nicht berücksichtigt. Die Ephemeriden werden im BCRS als Ekliptiksystem mit der Zeitskala TDB berechnet.

Die Ungenauigkeiten in den partiellen Ableitungen durch die vereinfachte Ephemeride wirken sich in der Schätzung nicht signifikant aus, wenn die in die Ausgleichung eingeführten Näherungswerte genau genug sind [Bauer, 1989]. Dies wird durch die iterative Berechnung hinreichend sichergestellt.

### 3.6 Parameterschätzung - PAR

Der Programmteil der Parameterschätzung enthält die eigentliche Implementierung der Ausgleichung nach dem Gauß-Markov-Modell. Durch die Aufstellung des funktionalen und stochastischen Modells ist es theoretisch möglich, bis zu 170 unbekannte Parameter zu schätzen. In einem ersten Schritt werden Näherungswerte für die unbekannt Parameter bereitgestellt und alle im Zuge der Auswertung benötigten Variablen berechnet. Es muss berücksichtigt werden, dass in den Gleichungen (3.5) bis (3.8) alle Vektoren im BCRS definiert sind. Die Stations- und Reflektorvektoren werden deswegen aus ihren jeweiligen Referenzsystemen (ITRS für die Erde und  $PAS_M$  für den Mond) in das übergeordnete BCRS transformiert.



Für die Erde erfolgt die Transformation auf Grundlage der IERS Konventionen [McCarthy, 1996] mit den Modellen von Lieske et al. [1977] für die Präzession und Wahr [1981b] für die Nutation. Anders als in der Ephemeridenberechnung wird hier die vollständige Reihe der lunisolarer Nutation mit 106 Termen verwendet, ergänzt um zwei *out-of-phase* Terme für die 18.6-Jahre-Periode. Die zur Berechnung der Erdrotationsmatrix benötigten Polkoordinaten und Werte für die Erdrotationsphase stammen vom JPL aus der COMB2006 Reihe [Gross, 2007]. Zusätzlich wird, wie in Bauer [1989] beschrieben, eine Störrotation berücksichtigt, die eine Anpassung der Referenzsysteme ermöglicht.

Für den Mond stehen aus der Ephemeridenberechnung die entsprechenden Euler'schen Winkel als äquidistante Werte alle acht Stunden zur Verfügung und werden mit Hilfe eines Lagrange-Formalismus auf den entsprechenden Auswertzeitpunkt interpoliert.

Die Stationskoordinaten unterliegen zeitlichen Variationen auf Grund verschiedener Effekte. Durch die geforderte möglichst hohe Genauigkeit in der Auswertung werden diese Effekte über entsprechende Modelle berücksichtigt:

- langperiodische Breitenschwankung [Dickey et al., 1985]
- Polzeiten [Wahr, 1985]
- Bewegung der tektonischen Platten [DeMets et al., 1994]
- Ozeanauflasten [Schwidorski, 1980]
- Atmosphärenauflasten [McCarthy, 1996, vereinfachte Methode]
- feste Erdzeiten [Mathews et al., 1997]

Sie sind im Anhang in Tabelle A.4 nochmals zusammengefasst.

### 3.6.1 Funktionales Modell

Die Grundlage einer Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell besteht in der Formulierung der funktionalen Beziehungen zwischen den Beobachtungen  $L_i$  und den zu schätzenden Parametern  $X_i$  [Niemeier, 2001]. Die in der Messung auftretenden Ungenauigkeit werden in der Auswertung durch eine Verbesserung  $v_i$  kompensiert. Es ergibt sich das funktionale Modell

$$L_i + v_i = f_i(X_1, X_2, \dots, X_u). \quad (3.11)$$

In dieser Beschreibung des Modells geht man von linearen Beziehungen aus. Das LLR-Modell ist jedoch nicht-linear. Diese Tatsache erfordert nach Niemeier [2001] eine Linearisierung des funktionalen Modells durch eine Reihenentwicklung nach Taylor, wobei für die zu schätzenden Parameter Näherungswerte  $X^0$  eingeführt werden müssen. Die folgenden Betrachtungen, die zum endgültigen funktionalen Modell führen, folgen aus Niemeier [2001] und werden hier auf die Auswertung der LLR-Daten übertragen.

Die in (3.11) dargestellten Beobachtungen  $L_i$  fließen in einen verkürzten Beobachtungsvektor  $l$  ein, der sich aus der Differenz der gemessenen Größen und der mit dem Auswertmodell berechneten Größen auf Grundlage der Näherungswerte ergibt. Übertragen auf die Auswertung der LLR-Daten resultiert der verkürzte Beobachtungsvektor aus den Gleichungen (3.1) und (3.2)

$$l = \rho_{mess} - \rho_{rech}. \quad (3.12)$$

Die Linearisierung des funktionalen Modells erfolgt durch die Bildung von partiellen Ableitungen nach den zu schätzenden Parametern. Abschnitt 3.4 folgend, werden diese Ableitungen auf Grundlage von Gleichung (3.8) in verschiedenen Programmteilen berechnet und in PAR nach der Kettenregel zusammengefügt. Die entsprechenden Koeffizienten werden in der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  zusammengefasst. Die gesuchten Parameter  $X_i$  berechnen sich aus der Summe der jeweiligen Näherungswerte und der sich in der Ausgleichung ergebenden Zuschläge  $\hat{\mathbf{x}}$ .

Das nun linearisierte funktionale Modell für die Auswertung der LLR-Daten lautet somit

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{1}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,u)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(u,1)}{\hat{\mathbf{x}}}, \quad (3.13)$$

die Indizes  $n$  und  $u$  stehen für die Anzahl der Beobachtungen und Unbekannten.

### 3.6.2 Stochastische Modell

Das für die Ausgleichung benötigte stochastische Modell gemäß Niemeier [2001]

$$\Sigma_{ll} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{ll}, \quad (3.14)$$

wird aus den Genauigkeitsinformationen der Beobachtungen aufgestellt. Die Beobachtungen werden für die LLR-Auswertung als unkorreliert angenommen. Über

$$\mathbf{Q}_{ll}^{-1} = \mathbf{P} \quad (3.15)$$

berechnet sich die Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  der Ausgleichung. In der Auswertung der LLR-Daten werden so die Beobachtungen entsprechend ihrer jeweiligen Genauigkeiten gewichtet. Die Genauigkeiten resultieren aus der Normalpunktberechnung und werden von den Messstationen zur Verfügung gestellt.

### 3.6.3 Geschätzte Parameter

Die Auswertung von LLR-Daten kann im Rahmen einer sogenannten Standardauswertung erfolgen, in der bis zu 90 Newton'sche Parameter geschätzt werden. Dazu gehören unter anderem

- Anfangswerte für die Translation und Rotation des Mondes,
- Koordinaten der Retroreflektoren im mondfesten Referenzsystem,
- Love-Zahl des Mondes, die sein elastisches Verhalten beschreibt,
- Dissipationsparameter des Mondes, der seine verzögerte Reaktion auf Gezeitenkräfte von außen beschreibt,
- Anfangswerte für die Translation der Erde,
- Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten im ITRS,
- Masse des Erde-Mond-Systems multipliziert mit der Gravitationskonstanten,
- Präzessionsrate,
- Nutationskoeffizienten der 18.6-Jahre-Periode,
- Gezeitenbeschleunigung des Mondes
- und verschiedene Korrekturwerte für die Messungen.

Welche Parameter tatsächlich geschätzt und welche fixiert werden, kann für jede Berechnung unterschiedlich sein. Dies hängt von der Fragestellung ab, die der Berechnung zu Grunde liegt.

Mit der Schätzung weiterer Parameter ist es möglich spezielle Untersuchungen, z.B. Tests der Einstein'schen Relativitätstheorie, durchzuführen, etwa

- zur zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten. Diese wird in der Einstein'schen Theorie als unveränderlich angenommen. In anderen Theorien ist aber eine Änderung möglich;
- des Raumkrümmungsparameters  $\gamma$ , der ein Maß für die Krümmung des Raums ist, die eine Einheitsmasse verursacht (in der Einstein'schen Theorie  $\gamma = 1$ );
- des Nichtlinearitätsparameters  $\beta$ , der angibt, wie sich die Nichtlinearität der Gravitation auswirkt (in der Einstein'schen Theorie  $\beta = 1$ );
- der Geodätischen Präzession der Mondbahn, die daraus resultiert, dass sich das Erde-Mond-System im Gravitationsfeld der Sonne bewegt;
- zum starkem und schwachen Äquivalenzprinzip, mit dem untersucht werden kann, ob Körper, die der gleichen Gravitation ausgesetzt sind, auch gleich beschleunigt werden;
- des Yukawa Terms, über den untersucht werden kann, ob das Newton'sche  $1/r^2$ -Gesetz der Gravitation auch für die Erde-Mond-Entfernung gilt und
- zu bevorzugten Referenzsystemen, bei deren Existenz Bewegungsgleichungen eine andere Form annehmen würden als in den zur Einstein'schen Theorie konsistenten Referenzsystemen.

## 4 Aktualisierung der LLR Auswertesoftware

Die Programmversion LUNAR 2.0 für die Auswertung von Entfernungsmessungen zum Mond wurde in Kapitel 3 vorgestellt. Damit war es möglich, die Messungen mit einer Genauigkeit von wenigen Zentimetern auszuwerten. Nachdem die Station APOLLO nun bei guten Bedingungen in der Lage ist, mit einer Genauigkeit von wenigen Millimetern die Entfernung Erde-Mond zu messen, ist es nötig das Auswerteprogramm ebenfalls an diese Genauigkeit anzunähern. Dafür müssen Modelle, wie z.B. für die Auflasteffekte durch Ozeanpolgezeiten, neu in die Auswertung eingeführt werden. Für andere Effekte, die schon in die Auswertung integriert waren, sind in den letzten Jahren genauere Modelle bestimmt worden. An diesen Stellen muss die Auswertung aktualisiert werden.

In Abschnitt 4.2 sind alle Neuerungen am funktionalen Modell zusammengefasst, die nötig sind, um die Auswertegenauigkeit zu verbessern. Dabei wird jeweils genau erläutert, wo der Unterschied zwischen der alten Programmversion LUNAR 2.0 und der neuen Version besteht. Für die Effekte an den Stationskoordinaten und den ERP sind die Unterschiede zwischen den Modellen in den Programmversionen im Anhang in den Tabellen A.4 und A.6 nochmals zusammengestellt.

In Abschnitt 4.3 wird untersucht, ob das stochastische Modell der Auswertung von LLR-Daten mit einer Varianzkomponentenschätzung verbessert werden kann.

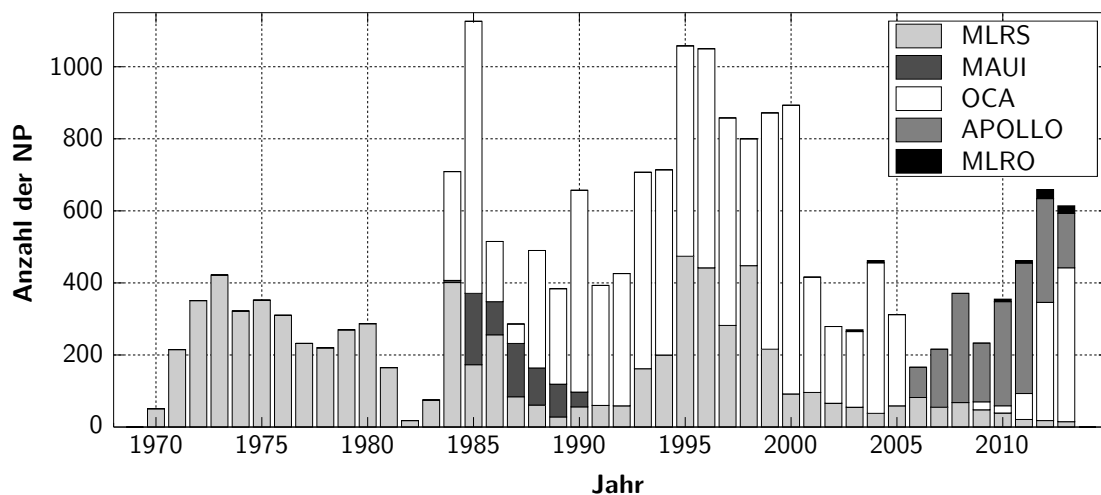
Die aus der Aktualisierung resultierende Programmversion wird als LUNAR 3.0 bezeichnet. Der folgende Abschnitt 4.1 beschäftigt sich mit der Datengrundlage, die in LUNAR 3.0 ausgewertet wird.

### 4.1 Datengrundlage

In der Programmversion LUNAR 2.0 wurden 15 717 Normalpunkte (NP) für den Zeitraum 05.1970 bis 01.2005 ausgewertet. Für LUNAR 3.0 wurde die Datengrundlage erweitert. NP können einerseits bei zwei offiziellen Datenbanken, CDDIS<sup>1</sup> und EDC<sup>2</sup>, heruntergeladen werden. Andererseits wurden und werden NP sowohl von den einzelnen Stationen als auch, auf Nachfrage, von den Auswertezentren bereitgestellt. Aus den verschiedenen Quellen stehen bis Ende 2013 insgesamt 21 496 NP zur Verfügung. Diese wurden in einer Vorauswertung auf mögliche Ausreißer untersucht. Als Ausreißer werden NP deklariert, deren Residuen für die Erde-Mond-Entfernung eine gewissen Grenze

<sup>1</sup><ftp://cddis.gsfc.nasa.gov/pub/slr/data>

<sup>2</sup><ftp://edc.dgfi.badw.de/pub/slr/data>



**Abb. 4.1:** Histogramm der NP aufgeschlüsselt nach Jahren und den einzelnen Stationen. Die drei Stationen McDonald, MLRS1 und MLRS2 werden als MLRS zusammengefasst. Die wenigen NP von WLRS sind nicht dargestellt.

**Tab. 4.1:** Verteilung der einzelnen NP auf die verschiedenen Stationen. Es ist jeweils der Name der Station, der Messzeitraum, die Anzahl der in die Auswertung einfließenden NP und der prozentuale Anteil dieser NP an der gesamten Anzahl der NP in der Auswertung angegeben.

Name	Zeitraum der Messungen	Anzahl der NP	prozentualer Anteil
APOLLO	04.2006 – 09.2013	1801	9 %
MAUI	11.1984 – 08.1990	679	3 %
MLRO	02.2003 – 08.2013	71	< 1 %
McDonald	05.1970 – 06.1985	3401	17 %
MLRS1	08.1983 – 01.1988	808	4 %
MLRS2	02.1988 – 12.2013	3235	16 %
OCA	04.1984 – 07.2005	9179	46 %
	11.2009 – 12.2013	869	4 %
WLRS	02.1994 – 02.1996	4	< 1 %

**Tab. 4.2:** Verteilung der einzelnen NP auf die verschiedenen Reflektoren. Es ist jeweils der Name des Reflektors, die Anzahl der NP in der Auswertung und der prozentuale Anteil dieser NP an den gesamten NP in der Auswertung angegeben. Die Anzahl bezieht sich dabei jeweils auf den gesamten Messzeitraum 1970 – 2013. Reflektor L17 kann erst ab April 2010 für Messungen genutzt werden.

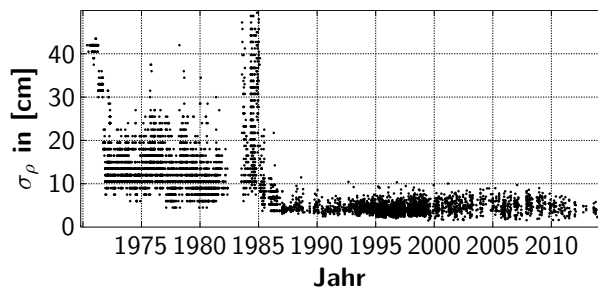
Name	Anzahl der NP	prozentualer Anteil
A11	1964	10 %
A14	1978	10 %
A15	15389	77 %
L17	138	< 1 %
L21	578	3 %

von einigen Dezimetern übersteigen. Wo die Grenze liegt, wird für die jeweiligen Stationen unterschiedlich festgelegt, da diese mit unterschiedlichen Genauigkeiten beobachten. Teilweise sind NP einer oder mehrerer Nächte um den gleichen Betrag verschoben, z.B. durch Kalibrierungsprobleme während der Messung. Für diesen Zeitraum kann ein Korrekturwert in die Auswertung eingeführt werden. Des Weiteren wird für die Beurteilung der Ausreißer die standardisierte Normalverteilung [Niemeier, 2001] herangezogen. Übersteigt diese einen gewissen Wert, wird der NP ebenfalls als Ausreißer klassifiziert und fließt in die weitere Auswertung nicht ein.

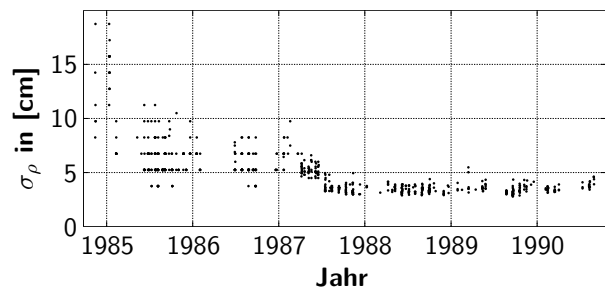
Nach den durchgeführten Tests wurden 1447 NP des aktuellen Datensatzes als Ausreißer deklariert. Somit fließen 20047 NP für den Zeitraum 05.1970 bis 12.2013 in die Auswertung ein. Tabelle 4.1 gibt für die einzelnen Stationen den Zeitraum an, in dem gemessen wurde, die Anzahl der NP, die ausgewertet werden sowie deren prozentualen Anteil an allen auszuwertenden NP. Für die Reflektoren sind diese Informationen in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Dort werden allerdings keine expliziten Messzeiträume angegeben, da bis auf L17 in den vergangenen 44 Jahren zu allen Reflektoren gemessen wurde.

Abbildung 4.1 zeigt die NP der Auswertung in einem jährlichen Histogramm aufgeschlüsselt nach den einzelnen Stationen. McDonald, MLRS1 und MLRS2 werden hier als MLRS zusammengefasst. Bis 1983 stehen nur die Daten von MLRS zur Verfügung. Danach nahmen OCA und MAUI den Messbetrieb auf und die Anzahl der NP steigt. Zwischen 2001 und 2010 gibt es nur relativ wenige Messungen, da OCA wegen Wartungsarbeiten wenig bzw. gar nicht gemessen hat und MLRS nur noch wenig Kapazitäten für LLR bereitstellen konnte. Der Ausfall von OCA wurde ab 2006 durch APOLLO kompensiert. Ab 2011 können noch vereinzelte NP vom MLRS genutzt werden, sowie die Messungen von OCA und APOLLO. Unterstützt wird LLR ab 2010 von MLRO. Die wenigen NP von WLRS sind im Histogramm nicht dargestellt.

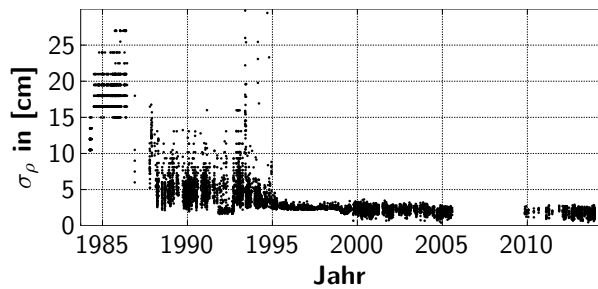
Anhand von Abbildung 4.1 und Tabelle 4.1 ist ersichtlich, dass die Auswertung von Daten der Station OCA dominiert ist, die alleine 50 % der NP liefert. Weitere 37 % der Beobachtungen entfallen auf die drei MLRS-Stationen. Des Weiteren überwiegen in der Auswertung Messungen zum



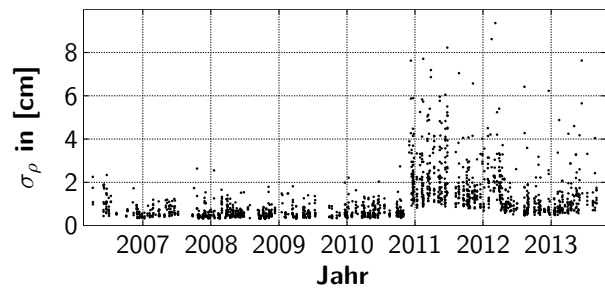
4.2.1: McDonald, MLRS1 und MLRS2



4.2.2: MAUI



4.2.3: OCA



4.2.4: APOLLO

**Abb. 4.2:** Homogenisierte Genauigkeiten  $\sigma_\rho$  der Laufzeiten  $\rho_{mess}$  der NP von APOLLO, MAUI, McDonald und OCA. Die Stationen McDonald, MLRS1 und MLRS2 sind in einer Abbildung zusammengefasst.

Reflektor A15, der mit seinen vielen Spiegeln ein relativ starkes Signal zur Messstation reflektiert und somit häufig angemessen wird.

Genau wie die NP selbst, werden auch die Laufzeitgenauigkeiten der NP, die in der Beobachtungsdatei der Messstationen angegeben werden, in einer Vorauswertung untersucht. Es wird geprüft, ob die Genauigkeiten im Vergleich zu denen anderer Stationen und Zeiträume plausibel sind. Bei Inkonsistenzen werden die Genauigkeiten im Auswerteprozess entsprechend angepasst. In Abbildung 4.2 sind für die sechs Stationen APOLLO, MAUI, McDonald, MLRS1, MLRS2 und OCA die Laufzeitgenauigkeiten des aktuellen Datensatzes über den jeweiligen Zeitraum aufgetragen, in dem die Station gemessen hat. Waren in den Genauigkeiten Inkonsistenzen vorhanden, wurden sie entsprechend bereinigt [Hofmann, persönliche Kommunikation, 2013].

Abbildung 4.2.1 zeigt Laufzeitgenauigkeiten für McDonald, MLRS1 und MLRS2. Für McDonald liegen die Genauigkeiten 1970 bei 43.5 cm, danach überwiegend unter 30 cm. Bei MLRS1 verschlechtern sich die Genauigkeiten auf bis zu 80 cm, für einzelne Beobachtungen (hier nicht dargestellt) sogar auf 105 cm. Durch die Messungen von MLRS2 verbessern sich die Werte deutlich und schwanken um 4.5 cm. Für die in Abbildung 4.2.2 dargestellte Station MAUI liegen die Laufzeitgenauigkeiten im Zeitraum 1984 bis Mitte 1986 bei 3.7 – 18.7 cm. Einige wenige Messungen erreichen 1984 sogar Werte von etwa 40 cm (hier nicht dargestellt). Ab Mitte 1986 verbessern sich die Laufzeitgenauigkeiten und liegen bei etwa 4 cm. Die Station OCA (Abbildung 4.2.3) erreicht zwischen 1984 und 1987 überwiegend Werte von 14.9 – 26.9 cm, danach verbessern sie sich auf 1.8 – 13.5 cm. Trotzdem liegen 1994 einige Messungen bei 51 cm (hier nicht dargestellt). Ab 1995 schwanken die Werte um 2.0 cm. Bei den drei diskutierten Stationen haben sich die Laufzeitgenauigkeiten im Laufe der Jahre verbessert. Für APOLLO in Abbildung 4.2.4 zeigt sich ein etwas anderes Bild. Im Zeitraum 2006 bis 2010 betragen die Laufzeitgenauigkeiten etwa 4.6 cm. Ab 2011 schwanken noch viele Werte um 1 – 2 cm, allerdings liegen etliche auch bei bis zu 6 cm. 2011 bis 2013 liegen vereinzelte Messungen sogar bei 21 cm, da es Problemen bei der Kalibrierung der Messeinheit gab.

## 4.2 Aktualisierung des funktionalen Modells

### 4.2.1 Anfangswerte für die Ephemeridenberechnung

Für die Berechnung der Ephemeriden der Körper des Sonnensystems durch numerische Integration werden Anfangswerte für die Positionen und Geschwindigkeiten der Körper sowie für die Euler'schen Winkel und Geschwindigkeiten des Mondes benötigt. In LUNAR 2.0 wurden diese Werte aus der JPL Ephemeride *DE200* [Standish, 1982, 1990] übernommen. In LUNAR 3.0 wird als Grundlage die JPL Ephemeride *DE421* [Folkner et al., 2008; Williams et al., 2008] genutzt, die auch Werte für die Massen der Himmelskörper, die mittleren Radien für die Erde und den Mond sowie die dynamischen Abplattungen des Mondes angibt.

Nach Folkner et al. [2008] gilt für die Bahnen der Planeten in der *DE421* Ephemeride:

- Die Mondbahn ist mit der höchsten Genauigkeit von besser als einem Meter bestimmt.
- Für die Erde und den Mars betragen die Ungenauigkeiten in den Bahnen bis zu 300 m.
- Die Ungenauigkeit der Bahn der Venus beträgt etwa 200 m.
- Für den Merkur ist die Bahn auf wenige Kilometer genau bestimmt.
- Die Bahngenauigkeiten von Jupiter und Saturn liegen im Bereich von Zehner Kilometern, wobei die Bahn des Saturn besser bestimmt ist, als die von Jupiter.
- Die Bahnen von Uranus und Neptun sind nicht gut bestimmt, hier wird allerdings keine bestimmte Genauigkeit angegeben.

Die Zeitskala der *DE421* ist  $T_{eph}$ . In den IAU Resolutionen von 2006 [IAU, 2006] wird  $T_{eph}$  allerdings für den praktischen Gebrauch mit TDB gleichgesetzt. Die Achsen des Referenzsystems der JPL Ephemeride *DE421* sind konsistent zum ICRS orientiert. Die gemachten Annahmen bezüglich der Zeitskala und des Referenzsystems sind für die LLR-Auswertung ausreichend genau.

### 4.2.2 Stationskoordinaten

In der Auswertung von LUNAR 2.0 war es möglich, die Daten der sechs Stationen MAUI, McDonald, MLRS1, MLRS2, OCA und WLRS zu verarbeiten. In LUNAR 3.0 wurde die Auswertung um die Stationen APOLLO und MLRO erweitert.

Als a-priori Koordinaten werden in die Ausgleichung für MLRO, MLRS2, OCA und WLRS direkt Koordinaten im ITRF2008 eingeführt. Zwischen den Stationen McDonald, MLRS1 und MLRS2 sind aus dem ITRF2000 lokale terrestrische Vermessungen, sogenannte *local ties*, bekannt. Sie sind im Anhang Tabelle A.2 angegeben. Mit diesen Werten und der Koordinate von MLRS2 im ITRF2008 werden a-priori Koordinaten der Stationen McDonald und MLRS1 berechnet. Die *local ties* werden wegen ihrer hohen Genauigkeit in der Auswertung festgehalten, damit sich die Stationen relativ zueinander nicht verschieben können. Für MLRS2 bezieht sich die ITRF2008 Koordinate auf einen externen Referenzpunkt. In der LLR-Auswertung wird als Referenzpunkt für die Entfernungsmessung der sogenannte Systemreferenzpunkt SRP betrachtet. Dies ist der Schnittpunkt der Teleskopachsen. Die Werte zwischen externem Referenzpunkt und SRP, die berücksichtigt werden müssen, finden sich ebenfalls in Tabelle A.2.

Für die Station MAUI stehen Sender und Empfänger der Laserpulse an unterschiedlichen Stellen. Die Koordinate des Senders ist aus dem ITRF2000 bekannt und wird mit Hilfe der Transformationsparameter aus Petit & Luzum [2010] in das ITRF2008 überführt. Die Empfängerkoordinate wird über die Ergebnisse der lokalen terrestrischen Vermessung [Dan O'Gara, persönliche Kommunikation, 2013] mit der Senderkoordinate verknüpft, siehe Tabelle A.2. Die Station APOLLO ist im Rahmen einer ITRF-Kombination noch nicht bestimmt worden, deswegen existiert bisher keine Koordinate in einer offiziellen ITRF-Lösung. Als a-priori Koordinate wird ein Ergebnis von Tom Murphy [persönliche Kommunikation, 2008] genutzt.

Alle Koordinaten in der LLR-Auswertung beziehen sich auf den jeweiligen SRP für die Referenzepeche J2000.0. Die in die Auswertung einfließenden a-priori Koordinaten sind im Anhang Tabelle A.1 zusammengefasst.

### 4.2.3 Räumliche Verschiebung der Stationen

In Abschnitt 2.3 wird die Erde näherungsweise als starrer Körper angenommen, der seine Geschwindigkeit und Orientierung im Raum auf Grund der gravitativen Effekte von Mond, Sonne und Planeten ändert. Betrachtet man die Erde genauer, verhält sie sich wie ein elastischer Körper, der auch seine Gestalt auf Grund der Gezeitenkräfte der Himmelskörper ändert [Torge & Müller, 2012]. Es entstehen einerseits direkte Effekte wie die Gezeiten der Erde, der Ozeane und der Atmosphäre, andererseits indirekte Effekte, die durch Massenverlagerungen und die Verlagerung der Erdrotationsachse hervorgerufen werden. Sie alle führen zu Deformationen und Potentialänderungen der Erde, die sowohl permanente als auch periodische Anteile haben. Durch Konvektionsströme im Erdmantel kommt es außerdem zu Bewegungen der Lithosphärenplatten, die zu Verschiebungen der Stationskoordinaten führen.

Reduziert man nur die periodischen Anteile, erhält man Stationskoordinaten in einem sogenannten *mean tide* System, also auf die mittlere Erdkruste bezogen. Wird auch die Deformation durch den permanenten Anteil reduziert, beziehen sich die Koordinaten auf ein *tide free* System, somit eine Erde, die von anderen Himmelskörpern nicht beeinflusst wird. In einem solchen System können allerdings keine Beobachtungen durchgeführt werden, da die Himmelskörper immer da sind. Die über Modelle berücksichtigten Effekte führen zu einem *conventional tide free* System [Petit & Luzum, 2010].

Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, werden zur Berechnung der Laufzeiten des Laserpulses, die in Gleichung (3.2) einfließen, Stationskoordinaten benötigt. Diese müssen für den Messzeitpunkt mit Millimeter-Genauigkeit vorliegen, da sie einen wichtigen Teil dazu beitragen, die angestrebte Auswertegenauigkeit im Millimeterbereich realisieren zu können. Als Folge dessen müssen in der Berechnung der Stationskoordinaten alle Effekte berücksichtigt werden, die Verschiebungen im Bereich von Millimetern verursachen. Dies sind die Gezeiten der festen Erde, des Ozeans, der Atmosphäre und des Pols sowie die Plattentektonik. Dabei ist die hohe Genauigkeit der radialen Komponente am wichtigsten, da sie sich, je nach Konstellation von Erde und Mond, am stärksten auf die Entfernung auswirkt.

Weitere Effekte, die die Positionen der Stationskoordinaten beeinflussen, aber in der Auswertung von LLR-Daten bislang nicht berücksichtigt werden, sind z.B. nicht-gezeitenabhängige Auflasten durch die Ozeane und die Atmosphäre, Variationen der kontinentalen Wassermassen, die nacheiszeitliche Landhebung, Verschiebungen nach Erdbeben, Massenverschiebungen im System Erde und weitere saisonale, sekuläre und episodische Ereignisse.

In den folgenden Abschnitten werden die Effekte dargestellt, um die die Koordinaten der LLR-Messstationen in LUNAR 3.0 korrigiert werden. Die meisten Berechnungen wurden bereits in LUNAR 2.0 implementiert. In LUNAR 3.0 werden teilweise neue oder veränderte Gleichungen genutzt sowie die zu Grunde gelegten Modelle aktualisiert. Darauf wird im Text jeweils hingewiesen. Im Anhang Tabelle A.4 sind die Modelle nochmals zusammengestellt. Dies ermöglicht einen schnellen Überblick der Änderungen zwischen LUNAR 2.0 und LUNAR 3.0.

#### 4.2.3.1 Plattentektonik

Die Bewegungen der tektonischen Platten der Erde führen zu Verschiebungen der Messstationen. Das Maß dieser Verschiebung kann auf zwei unterschiedlichen Wegen berechnet werden. Einerseits beschrieben als Rotation von Kugelkappen um eine Achse, die durch den Erdmittelpunkt verläuft [Torge, 2003] und andererseits direkt als Stationsgeschwindigkeiten ausgedrückt. In LUNAR 2.0 wurde die Variante über die Rotation der Kugelkappen implementiert. In LUNAR 3.0 wurde diese

Berechnung beibehalten, allerdings wurde das Programm so erweitert, dass es alternativ auch möglich ist, direkt Stationsgeschwindigkeiten zu nutzen.

Für die Berechnung der Rotationen von Kugelkappen wird das Modell NUVEL1A [DeMets et al., 1990, 1994] genutzt. Es basiert auf geophysikalischen Daten und gibt Rotationen für 16 tektonische Platten an. Über die Gleichung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + (\boldsymbol{\Omega}_k \cdot \mathbf{x}(t_0))(t - t_0) \quad (4.1)$$

kann eine Koordinate  $\mathbf{x}(t_0)$  für den Zeitpunkt  $t_0$  auf einen beliebigen Zeitpunkt  $t$  als  $\mathbf{x}(t)$  berechnet werden, dabei enthält  $\boldsymbol{\Omega}_k$  die Modellrotationen der jeweiligen tektonischen Platte. Werden für  $\mathbf{x}(t_0)$  die in Tabelle A.1 beschriebenen a-priori Koordinaten verwendet, ergeben sich aus  $\boldsymbol{\Omega}_k \cdot \mathbf{x}(t_0)$  a-priori Geschwindigkeiten, die in der Ausgleichung genutzt werden können.

Im Zuge der ITRF-Kombination werden aus den Beobachtungen der geodätischen Raumverfahren neben den Stationskoordinaten auch Geschwindigkeiten abgeleitet. Diese können ebenfalls als a-priori Werte in die Ausgleichung einfließen. Für alle Stationen außer APOLLO können diese aus dem ITRF2008 zum Zeitpunkt J2000.0 genutzt werden. Da Messungen von APOLLO noch in keine ITRF-Lösung einfließen, werden hier näherungsweise die Geschwindigkeiten der benachbarten GPS-Station White Sands verwendet, die etwa 65 km entfernt liegt. Eine Stationskoordinate  $\mathbf{x}(t)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt ergibt sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des ITRF aus

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{v}(t - t_0). \quad (4.2)$$

Alle a-priori Geschwindigkeiten sind in Tabelle A.3 zusammengefasst.

#### 4.2.3.2 Gezeiten der festen Erde

Die Gezeiten der festen Erde entstehen als direkter Effekt der gravitativen Kräfte von Sonne und Mond. Die Erdkruste unterliegt permanenten und periodischen Bewegungen. Diese werden durch Love-Zahlen charakterisiert, die von der Stationsbreite und der Frequenz der Gezeiten abhängen [Wahr, 1981a]. Um den Effekt berücksichtigen zu können, wird die Berechnung in zwei Schritten durchgeführt. Der erste Schritt erfolgt im Zeitbereich und berechnet über konventionelle Love-Zahlen, deren Breitenabhängigkeit berücksichtigt wird, das gesamte Gezeitenpotential von Grad zwei und drei sowie zusätzlich für Grad zwei die *out-of-phase* Anteile, die zu den langperiodischen, täglichen und subtäglichen Bändern gehören. Der zweite Schritt erfolgt im Frequenzbereich, um so die Frequenzabhängigkeit der Love-Zahlen berücksichtigen zu können. Aus der Summe beider Schritte resultiert die Stationsverschiebung auf Grund der Erdgezeiten, die in radialer Richtung bis zu 30 cm betragen kann.

In LUNAR 2.0 wurde diese Berechnung gemäß Mathews et al. [1997] implementiert. Das Modell bildet auch für LUNAR 3.0 die Grundlage. Allerdings wurden gemäß der IERS Konventionen 2010 einige Koeffizienten neu berechnet, die nun in LUNAR 3.0 genutzt werden. Das in den IERS Konventionen 2010 angegebene Programm DEHANTTIDEINEL von V. Dehant, S. Mathews und J. Gipson wurde entsprechend für die LLR-Auswertung angepasst.

#### 4.2.3.3 Auflasten durch Ozeangezeiten

Ozeangezeiten werden durch die gravitativen Kräfte der Himmelskörper verursacht und führen dazu, dass sich die Verteilung der Ozeanmassen zeitlich ändert. Durch den veränderlichen Auflasteffekt der Wassermassen entsteht eine Verschiebung der Stationskoordinaten, die bis zu 10 cm betragen kann. Der tatsächliche Betrag der Verschiebung unterscheidet sich auf Grund lokaler und regionaler Gegebenheiten für jede Station. Zur Berechnung des Auflasteffektes durch die Ozeangezeiten stehen verschiedene Modelle zur Verfügung, die Werte für elf langperiodische, tägliche und halbtägliche Partialtiden als Amplituden und Phasen angeben.



Abhängig von den geozentrischen Koordinaten  $\varphi$  und  $\lambda$  werden die Stationsverschiebungen in einem topozentrischen System über

$$\Delta_i(\varphi, \lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_w \\ \Delta_s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{11} f_k A_{ki}(\varphi, \lambda) \cos(\chi_k(t) + u_k - \phi_{ki}(\varphi, \lambda)) \quad (4.3)$$

berechnet.  $i$  steht darin für die Komponenten in radialer Richtung  $r$ , nach Westen  $w$  und Süden  $s$ . Die benötigten Amplituden  $A_{ki}$  und Phasen  $\phi_{ki}$  für die jeweiligen Richtungskomponenten werden aus einem Gitterdatenmodell über den Service von Bos & Scherneck [2011] interpoliert.  $\chi_k(t)$  ist das astronomische Argument für die elf Partialtiden zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$ ,  $f_k$  und  $u_k$  sind von der Länge des Mondknotens abhängig [Doodson, 1928].

Bei der Berechnung der Stationsverschiebung auf Grund von Ozeangezeiten bildet sowohl in LUNAR 2.0 als auch in LUNAR 3.0 Gleichung (4.3) die Grundlage. Allerdings wurden in LUNAR 2.0 die Phasen und Amplituden dem Modell von Schwiderski [1980] entnommen. LUNAR 3.0 basiert auf dem Modell FES2004 [Letellier, 2004] und berücksichtigt noch zusätzlich den Effekt von 342 Nebentiden, die auf Grundlage der Theorie der Admittanz aus den elf Partialtiden bestimmt werden. Das in den IERS Konventionen 2010 bereitgestellte Programm HARDISP von D. Agnew wurde an die Nutzung in LUNAR 3.0 angepasst.

#### 4.2.3.4 Auflasten der Atmosphäre

Der Auflasteffekt der Atmosphäre entsteht einerseits infolge der Erwärmung von Luftmassen durch die Sonne und andererseits, wie beim Ozean, über die gravitative Wirkung von Sonne und Mond. Dies führt sowohl zu täglichen, subtäglichen und höherfrequenten temperaturbedingten Luftdruckänderungen als auch zu eher langperiodischen auf Grund der Jahreszeiten und des Austausches von Luftmassen über den Ozeanen und dem Land. Als Folge der Luftdruckänderungen kommt es zu Deformationen der Erdkruste, die entweder für den Einfluss der gesamten Atmosphäre oder nur für bestimmte Gezeiten berechnet werden können. Da der gezeitenbedingte Effekt hinreichend genau modelliert werden kann, empfehlen Petit & Luzum [2013] nur diesen über das Modell von Ray & Ponte [2003] für die Stationsverschiebung zu berücksichtigen. Über die Gleichung

$$\Delta_i(\varphi, \lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_e \\ \Delta_n \end{bmatrix} = A_{S1i}(\varphi, \lambda) \cos(\omega_1 T) + B_{S1i}(\varphi, \lambda) \sin(\omega_1 T) \quad (4.4) \\ + A_{S2i}(\varphi, \lambda) \cos(\omega_2 T) + B_{S2i}(\varphi, \lambda) \sin(\omega_2 T)$$

lassen sich die Korrekturen an den Koordinatenkomponenten  $i$  in radialer Richtung  $r$ , nach Osten  $e$  und Norden  $n$  berechnen. Die von den Koordinaten  $\varphi$  und  $\lambda$  abhängigen Koeffizienten der  $S_1$ -Gezeiten  $A_{S1i}(\varphi, \lambda)$  und  $B_{S1i}(\varphi, \lambda)$ , sowie für die  $S_2$ -Gezeiten  $A_{S2i}(\varphi, \lambda)$  und  $B_{S2i}(\varphi, \lambda)$  können über den Service von van Dam & Ray [2010] aus Gitterdaten interpoliert werden.  $T$  wird als UT1-Zeitpunkt eingesetzt.  $\omega_1$  und  $\omega_2$  bezeichnen einen bzw. zwei Umläufe pro Tag. Der gezeitenbedingte Effekt verursacht eine radiale Stationsverschiebung von bis zu 1.5 mm, horizontale Verschiebungen sind um den Faktor 10 kleiner.

Der Effekt der gesamten Atmosphäre wird, wie in Manche [2011], über ein vereinfachtes Modell der IERS Konventionen von 1996 [McCarthy, 1996] berücksichtigt. Dafür wird aus der meteorologischen Information der Beobachtungsdatei über den gesamten Beobachtungszeitraum einer Station der mittlere Druck  $\bar{p}$  bestimmt. Mit der Gleichung

$$\Delta r = -0.9 (p_j - \bar{p}) \quad (4.5)$$

kann für jede Beobachtung  $j$  die Verschiebung durch die Atmosphärenauflast aus der Differenz des aktuellen Drucks  $p_j$  und des Mittleren berechnet werden. Mit Hilfe des normierten Stationsvektors wird die Verschiebung an die Stationskoordinate angebracht. Der Effekt der gesamten Atmosphäre kann mehr als 1 cm betragen [Böhm & Schuh, 2013].

In LUNAR 2.0 wurde nur die Stationsverschiebung verursacht durch die gesamte Atmosphäre in der Auswertung berücksichtigt. In LUNAR 3.0 wurden beide Möglichkeiten der Korrektur implementiert. Vor der Auswertung kann nun gewählt werden, ob die Stationsverschiebung bedingt durch die gesamte Atmosphäre oder nur der gezeitenbedingte Effekt berücksichtigt werden soll.

#### 4.2.3.5 Rotationsdeformation durch Polgezeiten

Das Zentrifugalpotential der Erde entsteht durch die Rotation des Erdkörpers um seine mittlere Rotationsachse. Durch die Polbewegung verlagert sich die Rotationsachse, was zu einer Änderung des Zentrifugalpotentials führt. Diese Änderung verursacht eine Deformation des Erdkörpers und wirkt sich als Verschiebung der Stationskoordinaten  $\Delta_i$  aus. Die Rotationsdeformation auf Grund der Polgezeiten hat sowohl Perioden im Bereich von einem Jahr und von 435 Tagen (Chandler-Periode) als auch einen säkularen Anteil. Sie wird über das Modell von Wahr [1985] beschrieben.

Über Gleichung (4.6) lassen sich die Verschiebungen der Stationskoordinaten durch die Deformation der Erde bestimmen. Dabei geben  $\theta$  und  $\lambda$  die Poldistanz und Länge der jeweiligen Station an. Die Verschiebungen werden in einem topozentrischen Referenzsystem für die Station berechnet und geben positive Werte in radialer Richtung  $r$ , Richtung Süden  $s$  und Osten  $e$  an

$$\Delta_i(\theta, \lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_s \\ \Delta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \sin 2\theta(m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) \\ -9 \cos 2\theta(m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda) \\ 9 \cos \theta(m_1 \sin \lambda - m_2 \cos \lambda) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Die Größenordnung beträgt dabei laut Petit & Luzum [2010] in radialer Richtung maximal 25 mm, in horizontaler Richtung nur bis zu 7 mm.

In LUNAR 2.0 wurden in Gleichung (4.6) für  $m_1$  und  $m_2$  direkt die terrestrischen Polkoordinaten  $x_p$  und  $y_p$  aus Gleichung (2.27) eingesetzt. In LUNAR 3.0 werden

$$\begin{aligned} m_1 &= x_p - \bar{x}_p \\ m_2 &= -(y_p - \bar{y}_p) \end{aligned} \quad (4.7)$$

bestimmt, indem aus den Polkoordinaten ein mittlerer Pol herausgerechnet wird. Dieser berechnet sich zum Zeitpunkt  $t$  über die Gleichungen

$$\bar{x}_p(t) = \sum_{i=0}^3 (t - t_0)^i \cdot \bar{x}_p^i, \quad (4.8)$$

$$\bar{y}_p(t) = \sum_{i=0}^3 (t - t_0)^i \cdot \bar{y}_p^i. \quad (4.9)$$

Die Modellwerte für  $\bar{x}_p^i$  und  $\bar{y}_p^i$  sind in Petit & Luzum [2010] gegeben,  $t_0$  steht für J2000.0.

Die Änderung des Bezugspols in der Auswertung bewirkt, dass der säkulare Effekt der Polgezeiten auf die Stationskoordinaten nicht korrigiert wird.

#### 4.2.3.6 Auflasten durch Ozeanpolgezeiten

Die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Polgezeiten verursachen durch die Änderung des Zentrifugalpotentials Verlagerungen der Ozeanmassen. Dieser indirekte Effekt führt wiederum zu einer Deformation der Erde mit daraus resultierenden Stationsverschiebungen. Mit dem Modell von Desai [2002] lassen sich die Verschiebungen in radialer Richtung  $r$  sowie in Richtung Norden  $n$  und Osten  $e$  abhängig von den Stationskoordinaten  $\varphi$  und  $\lambda$  in einem topozentrischen System berechnen. Dazu werden aus Gitterdaten reale  $u_i^R$  und imaginäre  $u_i^I$  Anteile der Ozeanpolgezeiten interpoliert. Fügt man diese Werte mit den in den Gleichungen (4.8) und (4.9) berechneten Werten des mittleren Pols in

$$\Delta_i(\varphi, \lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_r \\ \Delta_n \\ \Delta_e \end{bmatrix} = K \left( (m_1 \gamma_2^R + m_2 \gamma_2^I) u_i^R(\varphi, \lambda) + (m_2 \gamma_2^R + m_1 \gamma_2^I) u_i^I(\varphi, \lambda) \right) \quad (4.10)$$

ein, erhält man die Stationsverschiebung für die jeweilige Koordinatenkomponente. Die Variablen  $\gamma_2^R$  und  $\gamma_2^I$  ergeben sich als Real- und Imaginärteil von  $\gamma = 1 + k_2 - h_2$ , wobei  $k_2$  und  $h_2$  die Love'schen Zahlen zweiten Grades sind. Die Variable

$$K = \frac{4\pi G a_E \rho_w H_p}{3g_E} \quad (4.11)$$

und darin

$$H_p = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{\Omega^2 a_E^4}{GM} \quad (4.12)$$

berechnen sich mit Hilfe folgender weiterer Größen:  $G$  Gravitationskonstante,  $a_E$  Radius der Erde am Äquator,  $\rho_w$  Dichte des Meerwassers,  $g_E$  mittlere Schwere,  $\Omega$  mittlere Rotationsgeschwindigkeit der Erde,  $GM$  Gravitationskonstante multipliziert mit der Masse der Erde. Die Zahlenwerte der Größen sind in Petit & Luzum [2010] gegeben.

Der Effekt der Ozeanpolzeiten kann zu Stationsverschiebungen in radialer Richtung von bis zu 1.8 mm führen, in horizontaler Richtung bis zu 0.5 mm. Je nach Lage der Station und Zeitpunkt können die Werte allerdings größer ausfallen. Auf Grund der geforderten Millimeter-Auswertegenauigkeit wurde die Korrektur der Ozeanpolzeiten neu in LUNAR 3.0 implementiert.

#### 4.2.3.7 Langperiodische Breitenschwankung

Ergänzend zu den Korrekturen an den Stationskoordinaten, die in den IERS Konventionen 2010 empfohlen werden, wird in der Auswertung der LLR-Daten noch eine Breitenschwankung nach Dickey et al. [1985] berücksichtigt. Diese hat sich im Vergleich zu LUNAR 2.0 nicht geändert, wird aber der Vollständigkeit halber hier aufgeführt, um alle in der Auswertung berücksichtigten Effekte zu beschreiben.

Die Breitenschwankung wird nur bei der Stationskoordinate von McDonald angebracht. Sie ist nötig, da vor 1983 nur diese Station LLR-Messungen durchgeführt hat. Dadurch waren diese Messungen sensitiv für Ungenauigkeiten in der Polkoordinate  $y_p$ , die die Ergebnisse der Auswertung verfälscht haben. Bei der von Dickey et al. [1985] vorgeschlagenen Methode werden über Gleichung

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^8 (G_i \sin \omega_i t + H_i \cos \omega_i t) + \left\{ 0.5 - \frac{1}{\pi} \arctan [0.011 (t - 2442500.5)] \right\} \cdot \left\{ H_0 + \sum_{i=9}^{21} (G_i \sin \omega_i t + H_i \cos \omega_i t) \right\} \quad (4.13)$$

für 21 Perioden von 62 Tagen bis neun Jahren Korrekturwerte der Stationsbreite berechnet und an die Koordinate angebracht. Die Korrektur kann in den einzelnen Koordinatenkomponenten bis zu einem Meter betragen.

#### 4.2.4 Reflektorkoordinaten

Wie in Abschnitt 3.1 erläutert, konnten bis April 2010 nur Messungen zu den vier Retroreflektoren A11, A14, A15 und L21 durchgeführt werden. Aus diesem Grund war die LLR-Auswertesoftware LUNAR 2.0 nur auf diese Reflektoren ausgelegt. Um Messungen zu L17 ebenfalls nutzen zu können, wurde die Auswertung in LUNAR 3.0 entsprechend erweitert.

Die in der Berechnung genutzten a-priori Reflektorkoordinaten für A11, A14, A15 und L21 wurden im Zusammenhang mit der JPL Ephemeride DE421 von Williams et al. [2008] bestimmt. Für L17 fließen als a-priori Koordinaten neu ermittelte Werte von Murphy et al. [2011] ein. Alle Koordinaten sind in Tabelle A.5 zusammengefasst, sie beziehen sich auf das  $PAS_M$ .

#### 4.2.4.1 Räumliche Verschiebung der Reflektorkoordinaten

Analog zu den festen Erdzeiten müssen ebenfalls auf dem Mond die Gezeiten, die Erde und Sonne verursachen, berücksichtigt werden. Sie führen zu zeitlichen Änderungen der Reflektorkoordinaten, die bis zu 10 cm in der Erde-Mond-Entfernung verursachen können [Murphy et al., 2011]. In LUNAR 3.0 wurde die Korrektur von Hofmann [persönliche Kommunikation, 2013] neu implementiert und berechnet sich über

$$\Delta \mathbf{r} = \sum_{j=1}^2 \frac{GM_j \cdot R_M^4}{GM_M \cdot R_j^3} \left\{ \frac{h_2 \hat{\mathbf{r}}}{2} \left( 3 \left( \hat{R}_j \cdot \hat{\mathbf{r}} \right)^2 - 1 \right) + 3 l_2 \left( \hat{R}_j \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \left[ \hat{R}_j - \left( \hat{R}_j \cdot \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \hat{\mathbf{r}} \right] \right\}, \quad (4.14)$$

$j$  steht dabei für die Erde bzw. Sonne.  $GM_M$  ist die Gravitationskonstante multipliziert mit der Masse des Mondes und  $GM_j$  entsprechend die Gravitationskonstante multipliziert mit der Masse der Erde bzw. Sonne.  $R_M$  ist der Radius des Mondes, der Einheitsvektor  $\hat{R}_j$  verbindet jeweils das Massenzentrum des Mondes mit dem der Erde bzw. Sonne,  $R_j$  ist der Betrag des jeweiligen Vektors,  $\hat{\mathbf{r}}$  der Einheitsvektor von Selenozentrum zum Reflektor,  $h_2$  und  $l_2$  die Love-Zahlen von Grad zwei.

Zusätzlich zu den Erdzeiten erfährt der Mond, auch hier analog zur Erde, eine Rotationsdeformation auf Grund von Polgezeiten. Dieser Effekt führt laut Manche [2011] zu einer Verschiebung der Reflektorkoordinaten, die höchstens 0.2 mm Abweichung in der Erde-Mond-Entfernung verursacht und deswegen in der LLR-Auswertung vernachlässigt wird.

#### 4.2.5 Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten Referenzsystem

In LUNAR 2.0 wurde die Transformation aus dem erdfesten Referenzsystem ins raumfeste GCRS in jedem der drei Teilprogramme einzeln implementiert und musste dort, bei Bedarf, jeweils separat angepasst werden. Um den Aufwand der Aktualisierung einerseits zu verringern und andererseits die Möglichkeit eines flexiblen Wechsels zwischen verschiedenen Möglichkeiten der Transformation zu ermöglichen, wurde in LUNAR 3.0 ein eigenes Modul für die Transformation gebildet. Dabei handelt es sich um eine Sammlung von Routinen, die in einer Programmeinheit zusammengefasst wurden. Der Vorteil dieses modularen Aufbaus besteht darin, dass z.B. durch neue Konventionen des IERS nur an dieser einen Stelle Änderungen vorgenommen werden müssen, die aber für alle Teilprogramme gelten. Außerdem ist es sehr einfach, für Untersuchungen verschiedene Möglichkeiten der Transformation zu nutzen, da nur das Transformationsmodul geändert werden muss.

Folgende Kriterien zeichnen dieses Modul aus:

- Je nachdem, welcher Weg der Transformation gewählt wird, werden im Modul alle benötigten Dateien aufgerufen, die Werte eingelesen und zur Verfügung gestellt. Die Transformation wird jeweils in sich konsistent aufgebaut. Alle Korrekturen, die diese Transformation betreffen und berücksichtigt werden müssen, sind ebenfalls im Modul integriert.
- Im weiteren Programmverlauf werden aus der Transformationsmatrix nur die Sinus- und Cosinuswerte der Euler'schen Winkel für die Erde benötigt. Das Modul stellt diese Werte zur Verfügung, die von der Routine, in der die tatsächliche Drehung vollzogen wird, genutzt werden können.
- Je nachdem in welchem Programmteil (EPHEM, AVAR, PAR) die Transformation berechnet werden soll, sind verschiedene Genauigkeiten nötig. Aus diesem Grund identifiziert sich der Programmteil beim Aufruf des Moduls und die benötigte Transformation wird entsprechend berechnet. In PAR erfolgt die Transformation aus dem ITRS ins GCRS, in EPHEM und AVAR zwischen  $PAS_E$  und GCRS. Die in Abschnitt 2.4.3 beschriebene Transformation GCRS-BCRS wird direkt im Programmteil PAR durchgeführt und ist somit kein Bestandteil des Moduls.
- In PAR werden die Erdrotationsparameter  $x_p, y_p$  und  $\Delta UT1$  aus der IERS EOP Combined Serie C04 verwendet. Die Berechnung von Korrekturwerten, die an diese ERP angebracht werden müssen, wird in LUNAR 3.0 teilweise neu implementiert bzw. erweitert. Die jeweiligen Berechnungen sind in Abschnitt 4.2.6 beschrieben und ebenfalls im Modul enthalten.

- Die Serie liefert außerdem Werte für die *pole offsets*  $\delta\psi$  und  $\delta\epsilon$ , die in die Gleichungen (2.25) und (2.26) einfließen. Die Korrektur um die *pole offsets* wurde in LUNAR 3.0 neu eingeführt, da sie bis zu eine Millibogensekunde betragen kann und somit für die geforderte Millimeter-Auswertegenauigkeit eine Rolle spielt. Allerdings beziehen sich  $\delta\psi$  und  $\delta\epsilon$  in der C04-Reihe auf die IAU Resolutionen von 1980 und müssen auf die IAU 2006 Werte umgerechnet werden. Dies wird in einem separaten Programm vor der eigentlichen Auswertung durchgeführt, so dass für die Transformation die richtigen  $\delta\psi$  und  $\delta\epsilon$  vorliegen.
- In EPHEM und AVAR werden, wie schon in LUNAR 2.0, die ERP, die *pole offsets* und eine Korrektur um die Störrotation vernachlässigt. Für die Berechnung der Nutationswinkel  $\Delta\psi_{MHB}$  und  $\Delta\epsilon_{MHB}$  über die Gleichungen (2.20) bzw. (2.21) wird in LUNAR 3.0 die gesamte lunisolare und planetare Nutation des MHB2000-Modells [Mathews, 2000] verwendet, nicht mehr nur die ersten Hauptterme des lunisolaren Anteils gemäß Wahr [1981b], wie in LUNAR 2.0.

In Abschnitt 2.4.1 werden vier unterschiedliche Ansätze der Transformation aus dem ITRS in das GCRS beschrieben. Zwei Transformationsmethoden (P03- und FW-Modell) beziehen sich auf den Frühlingspunkt, zwei Methoden, die die zälestischen Polkoordinaten  $X, Y$  nutzen ( $X, Y$  aus Reihenentwicklung und FWCIO-Modell) beziehen sich auf den CIO. Zur Verdeutlichung des Berechnungsablaufs der Methoden findet sich im Anhang A.2 eine schematische Zusammenfassung. Ein gemeinsames Merkmal der Methoden P03, FW und FWCIO ist die Nutzung von Nutationswinkeln in der Berechnung der  $\mathbf{Q}$ -Matrix. Diese Transformationsmethoden werden für die Auswertung von LLR-Daten betrachtet, da sie es umgekehrt auch ermöglichen, Werte für Nutationswinkel aus den LLR-Daten zu schätzen, wie in Abschnitt 5.1 dargestellt ist. In der LLR-Auswertung LUNAR 3.0 wird für diese drei Methoden jeweils ein separates Transformationsmodul angelegt:

**Trans1** für das Modell P03

**Trans2** für das Modell FW

**Trans3** für FWCIO

Um die Wirkung der drei Transformationsmethoden auf die LLR-Auswertung zu untersuchen, werden für verschiedene Zeitpunkte jeweils die Transformationsmatrizen aus dem erdfesten ins raumfeste Referenzsystem gemäß Gleichung (2.29) berechnet. Ein Vergleich der neun Komponenten der Matrix für jede Methode führt zu Differenzen, die maximal  $1 \times 10^{-12}$  rad betragen, was auf der Erdoberfläche am Äquator einen Unterschied von etwa  $6 \mu\text{m}$  bedeutet. Somit wird angenommen, dass alle drei Wege der Transformation das gleiche Ergebnis liefern.

In der Standardauswertung der LLR-Daten wird die Methode Trans3 verwendet. Sie zeichnet sich durch zwei Vorteile aus. Erstens können selbst geschätzte Nutationskoeffizienten in der Transformation genutzt werden und zweitens beruht die Parametrisierung der Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{FWCIO}}(dt)$  auf den zälestischen Polkoordinaten  $X$  und  $Y$  (siehe Gleichungen (2.52) und (2.53)). Der zweite Vorteil kann bei der Kombination der Auswertung von Daten aus LLR und anderen geodätischen Raumverfahren auf Normalgleichungsebene genutzt werden, da hier die gleiche Parametrisierung zu Grunde liegen muss [Seitz, 2009]. In der Auswertung von VLBI-Daten wird die Transformationsmatrix ITRS-GCRS basierend auf dem CIO modelliert.

#### 4.2.6 Zeitliche Variation der Erdrotationsparameter

Die Gezeitenkräfte von Mond und Sonne führen zu Verschiebungen der Stationskoordinaten. Sie bewirken durch die Massenverlagerungen aber auch eine zeitliche Variation der Erdrotationsgrößen  $x_p$ ,  $y_p$  und  $\Delta\text{UT1}$ . Da in der LLR-Auswertung eine Genauigkeit im Millimeter-Bereich angestrebt wird, müssen alle Effekte berücksichtigt werden, die an den Polkoordinaten Variationen in der Größenordnung  $0.03$  Millibogensekunden [mas] und an der Erdrotationsphase  $2$  Mikrosekunden [ms] verursachen.

In den folgenden Abschnitten werden die Effekte beschrieben, um die die ERP in LUNAR 3.0 korrigiert werden. Im Anhang Tabelle A.6 sind die Modelle nochmals zusammengestellt. Damit ist ein Überblick der Änderungen zwischen LUNAR 2.0 und LUNAR 3.0.

#### 4.2.6.1 Gezeiten der festen Erde

Der Gezeiteneffekt der festen Erde, der in Abschnitt 4.2.3.2 besprochen wurde, führt zu einer zeitliche Änderung des polaren Hauptträgheitsmoments. Dies hat Einfluss auf die Rotation der Erde und drückt sich in Variationen von  $\Delta\text{UT1}$  aus. In den vom IERS in der C04-Reihe veröffentlichten  $\Delta\text{UT1}$  Werten ist der Gezeiteneffekt der festen Erde bereits enthalten. Da die Werte allerdings nur mit täglichem Abstand vorliegen, müssen sie in der LLR-Auswertung auf die Beobachtungszeitpunkte interpoliert werden. Für diese Interpolation ist es wichtig, den Gezeiteneffekt zu subtrahieren, um die Kurve der  $\Delta\text{UT1}$ -Werte zu glätten und so eine genauere Interpolation zu ermöglichen. Nach der Interpolation wird der Gezeiteneffekt wieder addiert.

Über Love-Zahlen ist es möglich, den Gezeiteneffekt zu modellieren. In LUNAR 2.0 wurde dafür das Modell von Yoder et al. [1981] verwendet, in dem der Effekt von 41 gezeitenerzeugenden Perioden von fünf bis 35 Tagen einfließt. Inzwischen ist dieses Modell erweitert und mit Beiträgen anderer Modelle kombiniert worden [Gross, 2009b]. Es können Korrekturen der Erdrotationsphase für 62 Perioden von fünf Tagen bis 18.6 Jahren über

$$\delta\text{UT1} = \sum_{i=1}^{62} B_i \sin \xi_i + C_i \cos \xi_i \quad (4.15)$$

$$\text{mit } \xi_i = \sum_{j=1}^5 a_{ij} F_j$$

berechnet werden. Die Koeffizienten  $B_i$ ,  $C_i$  sowie  $a_{ij}$  sind in Petit & Luzum [2010, Tabelle 8.1] angegeben.  $F_j$  bezeichnet die Fundamentalargumente. Das erweiterte Modell wird in LUNAR 3.0 genutzt.

#### 4.2.6.2 Ozeangezeiten

Die Gezeiten der Ozeane führen einerseits zu täglichen und subtäglichen Variationen sowohl der Erdrotationsachse als auch der Rotationsphase selbst. Andererseits bewirken sie langperiodische Variationen der Rotationsachse. Dieser langperiodische Effekt ist in den vom IERS bereitgestellten  $x_p/y_p$ -Werten bereits enthalten. Über das Modell von Dickman & Nam [1995] mit der Gleichung

$$\mathbf{p}(t) = p_x(t) - i p_y(t) = A_p e^{i\varphi_p} e^{iF} + A_r e^{i\varphi_r} e^{-iF} \quad (4.16)$$

kann der Effekt berechnet werden. Die Amplituden  $A$  und Phasen  $\varphi$  sind für zehn prograde  $p$  und retrograde  $r$  Komponenten im Bereich von neun Tagen bis zu 18.6 Jahren angegeben [Petit & Luzum, 2010, Tabelle 8.4].  $F$  bezeichnet die Fundamentalargumente. Wie beim Gezeiteneffekt der festen Erde, wird auch der langperiodische Effekt der Ozeane in einem eigenem Programm von den terrestrischen Polkoordinaten  $x_p/y_p$  subtrahiert, um sie für die Interpolation in LUNAR 3.0 zu glätten. Nach der Interpolation wird der Effekt wieder addiert. In LUNAR 2.0 wurde der langperiodische Effekt der Ozeane vor der Interpolation aus den Polkoordinaten nicht herausgerechnet.

Wie in Abschnitt 2.3.4 erläutert, ist der tägliche und subtägliche Ozeangezeiteneffekt in den ERP des IERS noch nicht enthalten. Mit dem Modell von Ray et al. [1994] kann dieser für 71 Perioden berechnet werden. Die Werte der einzelnen Koeffizienten wurden vom *IERS Earth Orientation Center* berechnet und in Petit & Luzum [2010, Tabellen 8.2 und 8.3] veröffentlicht. Die Berechnung erfolgt analog zu Gleichung (4.15), sowohl für die Polkoordinaten als auch für die Erdrotationsphase. Die Gleichungen sind in LUNAR 3.0 implementiert. In LUNAR 2.0 wurde nur der Effekt der jeweils vier größten täglichen und subtäglichen Amplituden auf die ERP berücksichtigt.

#### 4.2.6.3 Librationseffekt

Als Librationseffekt in den ERP bezeichnet man den Effekt der Nutation, der allerdings Perioden kleiner als zwei Tage enthält und somit per Definition des CIP nicht im Modell der Nutation enthalten ist, siehe Abschnitt 2.3.3. Analog zu Gleichung (4.15) kann der Librationseffekt für die ERP

bestimmt werden. Die benötigten Koeffizienten  $B_i$ ,  $C_i$  sowie  $a_{ij}$  wurden von der IAU Kommission 19 berechnet [Brzeziński & Mathews, 2003] und sind in Petit & Luzum [2010, Tabelle 5.1] angegeben. In LUNAR 3.0 wird der Librationseffekt, wie hier beschrieben, berücksichtigt. In LUNAR 2.0 wurde er vernachlässigt.

#### 4.2.7 Transformation zwischen dem mondfesten und raumfesten Referenzsystem

Die Euler'schen Winkel für die Transformation zwischen dem mondfesten  $PAS_M$  und dem raumfesten SCRS berechnen sich aus der Lösung von gekoppelten Differentialgleichungen, wie in Abschnitt 2.4.4 dargestellt. Für LUNAR 3.0 kann dabei die erweiterte Kern-Mantel-Kopplung des Mondes genutzt werden, die von Hofmann et al. [2010] implementiert wurde.

Um die Reflektorkoordinaten im Programmteil PAR aus dem SCRS ins BCRS zu transformieren, wurde in LUNAR 2.0 die Lorentz-Einstein'sche-Kontraktion angebracht, die über Gleichung (2.54) auch für die Erde berechnet wurde. Dabei geht man davon aus, dass zwischen dynamischen Zeitsystemen transformiert wird. Wie in Abschnitt 2.4.5 erläutert, ist für den Mond keine dynamische Zeitskala definiert. Dementsprechend wird in LUNAR 3.0 die Lorentz-Einstein'sche-Kontraktion über Gleichung (2.58) angebracht.

#### 4.2.8 Schwerefelder von Erde und Mond

Die Berechnung der Ephemeriden basiert auf den EIH-Gleichungen (3.9). Um für die Erde und den Mond auch die gravitativen Kräfte ausgedehnter Körper berücksichtigen zu können, benötigt man Schwerefeldkoeffizienten eines entsprechenden Modells. In LUNAR 3.0 wurden die jeweiligen Modelle aktualisiert.

Die Erde wird über das EGM2008 [Pavlis et al., 2012] bis Grad vier und Ordnung Null modelliert. Dies bedeutet, dass nur zonale Koeffizienten verwendet werden. Da sich das EGM2008 auf das ITRF bezieht, muss vorher eine Hauptachsentransformation vorgenommen werden, um das Schwerefeld auf das  $PAS_E$  zu beziehen. In diesem Fall sind die Schwerefeldkoeffizienten  $S_{lm}(2, 2)$ ,  $C_{lm}(2, 1)$  und  $S_{lm}(2, 1)$  gleich Null. Die anderen Koeffizienten werden entsprechend transformiert.

Die Schwerefeldkoeffizienten des Mondes stammen aus dem LP165P [Konopliv et al., 2001]. Der Mond wird vollständig bis Grad und Ordnung fünf modelliert.

#### 4.2.9 Korrekturen an der berechneten Laufzeit

Wie in Gleichung (3.2) beschrieben, werden in der berechneten Laufzeit des Laserpulses verschiedene Effekte berücksichtigt: auf Grund der Relativistik, der Atmosphäre, des Strahlungsdrucks der Sonne sowie systematischer Fehler in der Messoptik. Es müssen Effekte berücksichtigt werden, die in der Laufzeit mehr als  $6 \times 10^{-12}$  s ausmachen, da dies zu Ungenauigkeiten im Millimeter-Bereich für die Entfernung Erde-Mond führt. In den nächsten Abschnitten werden die in LUNAR 3.0 vorgenommenen Aktualisierungen der Laufzeit-Korrekturen besprochen.

##### 4.2.9.1 Korrektur wegen fehlerhafter Messungen

Die Messstationen führen vor der Entfernungsmessung zum Mond entsprechende Kalibrierungen am System durch. Trotzdem kommt es zu kurzzeitigen Probleme mit dieser internen Kalibrierung oder bei der Vorberechnung der NP, die zu einer fehlerhaften Laufzeit führen. Dies wird über Korrekturwerte, die an die Laufzeit addiert werden, berichtigt. In LUNAR 2.0 wurden diese nach der Ausgleichung aus den Residuen bestimmt und für die folgenden Berechnungen genutzt. Dadurch waren die Werte aber stark von der Auswertekonfiguration abhängig, nach der sie bestimmt wurden. Wurde die Konfiguration geändert, mussten die Laufzeit-Korrekturwerte neu bestimmt werden.

Die Laufzeit-Korrekturwerte wirken sich direkt auf die Erde-Mond-Entfernung aus und führen in der Schätzung von Stationskoordinaten zu einer fehlerhaften Höhenkomponente [Ray et al., 1999]. Aus diesem Grund ist eine genaue Bestimmung dieser Werte nötig. LUNAR 3.0 wurde so erweitert, dass die Werte während der Ausgleichung, passend zu jeweiligen Auswertekonfiguration, mitgeschätzt werden. Im nächsten Schritt der iterativen Auswertung werden sie direkt an die Laufzeit in Gleichung (3.2) über  $\Delta_{\text{sys}t}$  angebracht.

#### 4.2.9.2 Relativistische Korrektur in der Zeittransformation

Die Auswertung der LLR-Daten wird im relativistisch formulierten Referenzsystem BCRS durchgeführt. Die räumlichen Koordinaten aus dem GCRS werden über eine Lorentz-Transformation ins BCRS überführt. Der Beobachtungszeitpunkt der LLR-Daten ist in UTC gegeben und muss über die Transformationen

$$\text{UTC} \rightarrow \text{TAI} \rightarrow \text{TT} \rightarrow \text{TCG} \rightarrow \text{TCB} \rightarrow \text{TDB}$$

in TDB überführt werden. Der Übergang von TT nach TDB enthält die relativistischen Anteile der zeitlichen Lorentz-Transformation.

In LUNAR 2.0 wurde direkt eine TT-TDB Transformation gemäß Hirayama et al. [1987] durchgeführt. Um die Auswertung konsistent mit den IERS Konventionen 2010 zu implementieren, wird diese Zeit-Transformation in LUNAR 3.0 nun in drei Schritten durchgeführt:

1. Umrechnung von TT nach TCB über Gleichung (2.4)
2. Berechnung der vereinfachten Transformation TCG-TCB über Gleichung (2.7)
3. Umrechnung von TCB nach TDB über Gleichung (2.5)

Die Berechnung wird zwei Mal, einmal für den Hinweg des Laserpulses und einmal für den Rückweg, durchgeführt. Aus der Differenz ergibt sich  $\Delta_{\text{rel}}$ , das an die Laufzeit in Gleichung (3.2) angebracht wird.

#### 4.2.9.3 Atmosphärische Korrektur

Die Genauigkeit der Laufzeit des Laserpulses hängt von der Genauigkeit der atmosphärischen Laufzeitverzögerung ab. Je nach Messzeitpunkt und Elevation des Mondes kann der Effekt der Atmosphäre über 2.5 m in der Entfernung Erde-Mond betragen. In LUNAR 2.0 wurde die atmosphärische Korrektur  $\Delta_{\text{atmo}}$  in Gleichung (3.2) über das Modell von Marini & Murray [1973] berechnet. In LUNAR 3.0 wird das verbesserte Modell von Mendes & Pavlis [2004] genutzt, das von Hofmann [persönliche Kommunikation, 2012] implementiert wurde.

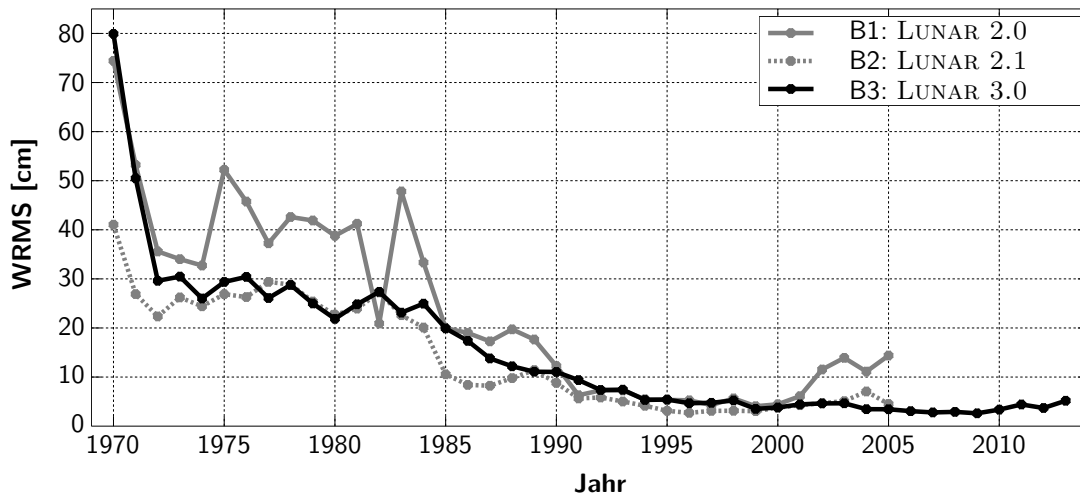
#### 4.2.10 Untersuchung der aktualisierten Programmversion LUNAR 3.0

Um die erzielten Verbesserungen durch die Aktualisierung des Auswerteprogramms und die Nutzung einer längeren Datenreihe zu untersuchen, wurden drei Standardauswertungen durchgeführt. Diese drei Berechnungen hatten folgende Merkmale:

- B1** altes Programm LUNAR 2.0, 15 717 NP bis Januar 2005;
- B2** eine Zwischenversion LUNAR 2.1, bei der die Schwerefelder von Erde und Mond, die Kern-Mantel-Kopplung des Mondes und die räumlichen Transformationen aktualisiert waren, 15 717 NP bis Januar 2005;
- B3** neues Programm LUNAR 3.0 mit allen in Abschnitt 4.2 beschriebenen Aktualisierungen und 20 047 NP bis Dezember 2013.

Abbildung 4.3 zeigt die gewichteten jährlichen Residuen der drei Berechnungsfälle. Das Ergebnis von B1 ist in grau dargestellt. Im Anfangsjahr 1970 war die Genauigkeit mit fast 75 cm noch sehr schlecht. Bis 1984 wurden nur von McDonald und MLRS1 Messungen zum Mond durchgeführt,





**Abb. 4.3:** Vergleich der gewichteten jährlichen Residuen aus drei Standardauswertungen B1 mit LUNAR 2.0 (grau), B2 mit LUNAR 2.1 (grau gestrichelt) und B3 mit LUNAR 3.0 (schwarz)

die Genauigkeit lag im Bereich 32.7 – 47.8 cm, mit einer Ausnahme 1982 bei 20.9 cm. Danach nahmen MAUI und OCA Messungen auf, die Genauigkeit verbesserte sich schrittweise erst unter 20 cm, später in den 90er Jahren sogar bis auf etwa 4 cm. Ab 2002 verschlechterte sich das Ergebnis wieder, da MLRS2 und OCA nur mit verminderter Genauigkeit gemessen haben.

In grau gestrichelt ist das Ergebnis von B2 zu sehen. Durch die aktualisierte Programmversion wurde eine signifikante Verbesserung erzielt. Untersuchungen zeigen, dass diese hauptsächlich aus der verbesserten Transformation zwischen den räumlichen Referenzsystem resultiert. Die Residuenkurve fällt schon für den Zeitraum 1970 – 1984, bis auf zwei Ausnahmen, in den Bereich 20.1 – 29.4 cm. Zwischen 1985 und 1996 sinkt die Kurve weiter bis auf 2.7 cm. Danach steigt sie wieder leicht auf über 4 cm, 2004 sogar auf 7.1 cm.

Bei beiden besprochenen Kurven B1 und B2 ist auffällig, dass um die Jahre 1988/1989 und ab 2002 ein Anstieg der Residuen zu sehen ist, besonders bei B1.

Die Residuen der Lösung B3 werden durch die schwarze Kurve repräsentiert. Auf den ersten Blick sind sie teilweise höher als die von B2. Hierzu ist anzumerken, dass die Lösung mit der neuen Datenreihe gerechnet wurde, in der ab dem Jahr 2006 NP von APOLLO enthalten sind. Diese erhalten in der Auswertung auf Grund ihrer hohen Genauigkeit ein hohes Gewicht. Auch die neuen Beobachtungen von OCA haben eine gute Genauigkeit und somit hohes Gewicht. Dies führt dazu, dass die Messungen der früheren Jahre in der Auswertung ein geringeres Gewicht erhalten und somit die gesamte Kurve wenige Zentimeter schlechter ist als bei B2. Positiv anzumerken ist, dass die auffälligen Anstiege in B1 und B2 reduziert wurden. In den Jahren 2007 – 2009, in denen die Ergebnisse stark von APOLLO dominiert sind, liegen die gewichteten Residuen unter 3 cm, 2006 sind es 2.6 cm.

**Tab. 4.3:** Vergleich der internen Standardabweichungen einiger geschätzter Parameter aus den Standardauswertungen B1 mit LUNAR 2.0, B2 mit LUNAR 2.1 und B3 mit LUNAR 3.0. Außerdem ist der jeweilige Verbesserungsfaktor zwischen B1 und B3 angegeben.

Parameter	Standardabweichung			Verbesserungs- faktor	
	B1 LUNAR 2.0	B2 LUNAR 2.1	B3 LUNAR 3.0		
Anfangswerte der Mondbahnkoordinaten	0.3 – 0.8 m	0.2 – 0.3 m	0.07 – 0.2 m	4	
Reflektorkoordinaten	0.6 – 10.3 m	0.04 – 0.35 m	0.004 – 0.20 m	50	
Stationskoordinaten	MAUI	6.9 – 8.2 cm	1.3 – 1.6 cm	2.0 – 2.5 cm	3.2
	MLRS2	1.3 – 2.3 cm	0.8 – 1.0 cm	0.3 – 0.8 cm	2.8
	OCA	0.6 – 2.0 cm	0.3 – 0.7 cm	0.1 – 0.4 cm	5

Als weitere Untersuchung werden die internen Standardabweichung der geschätzten Parameter aus den Fällen B1 – B3 miteinander verglichen. Bei den internen Standardabweichungen handelt es sich um die Werte, die sich direkt aus der Ausgleichung ergeben. Es fällt für fast alle Parameter auf, dass die Standardabweichungen im Fall B1 am größten sind. In B2 wurde durch die verbesserte Transformation zwischen den räumlichen Referenzsystemen zum Teil schon eine erhebliche Genauigkeitssteigerung erreicht. Eine weitere Verbesserung resultiert aus der längeren Datenreihe in B3. Einzige Ausnahme sind die Werte für die Stationskoordinaten von MAUI, die in Lösung B2 am kleinsten sind. In Tabelle 4.3 sind exemplarisch die Standardabweichungen für die Anfangswerte der Mondbahn, die Reflektorkoordinaten und einige Stationskoordinaten zusammengefasst. Dort lässt sich die Verbesserung der Auswertegenauigkeit anhand der Standardabweichung gut nachvollziehen.

Als Ziel der Arbeit wurde in Kapitel 1 die Annäherung der Auswertegenauigkeit an das Niveau von einigen Millimetern gefordert. Die hier diskutierten Ergebnisse zeigen eine deutliche Verbesserung der Auswertegenauigkeit durch die aktualisierte Modellierung. Allerdings hängt die Auswertegenauigkeit auch von der Genauigkeit der einfließenden Beobachtungen ab. Da nur sehr wenige NP eine Messgenauigkeit im Millimeter-Bereich aufweisen (siehe Abbildung 4.2), erreichen die aktuellen Residuen nur den Bereich von Zentimetern.

#### 4.2.11 Schätzung neuer Parameter

Im Zuge der Aktualisierung von LUNAR wurde das funktionale Modell der Ausgleichung erweitert, um neue Parameter schätzen zu können. Diese werden hier kurz beschrieben und zusammengefasst. In den Kapiteln 5 bis 7 wird auf einige davon nochmals detailliert eingegangen. Um die beschriebenen Parameter schätzen zu können, werden die entsprechenden partiellen Ableitung der Entfernung Erde-Mond nach dem jeweiligen Parameter gebildet. Sie werden im Programmteil PAR implementiert.

**Laufzeit-Korrekturwerte** In LUNAR 2.0 wurden die Korrekturwerte für die Laufzeiten nach der Auswertung aus den Residuen bestimmt. In LUNAR 3.0 wurde die Bestimmung der Korrekturwerte direkt in die Ausgleichung eingeführt. So können die Werte jeweils passend zur Auswertekonfiguration direkt mitbestimmt und im nächsten Iterationsschritt angebracht werden.

**Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten** Für die neu in die Auswertung eingeführten Stationen APOLLO und MLRO wurde das funktionale Modell von LUNAR 3.0 erweitert, damit jeweils Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten geschätzt werden können.

**Reflektorkoordinaten** Für den Retroreflektor L17, der erstmals für LLR-Messungen genutzt werden kann, können die Koordinaten in der Ausgleichung geschätzt werden.

**Nutationskoeffizienten** In LUNAR 2.0 war es möglich, die *in-* und *out-of-phase* Terme der 18.6-Jahre-Periode der Nutation zu schätzen. LUNAR 3.0 ermöglicht die Schätzung der fünf Terme, die den größten Beitrag zur Nutation liefern (18.6 Jahre, 182.6 Tage, 13.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage). Auf diese Erweiterung des funktionalen Modells wird in Abschnitt 5.1 ausführlich eingegangen.

**Erdrotationsparameter** Die Schätzung von ERP bot in LUNAR 2.0 zwei Möglichkeiten. Es konnte entweder für den gesamten Datensatz jeweils der Trend für die drei Komponenten  $x_p$ ,  $y_p$  und  $\Delta UT1$  geschätzt werden. Oder es wurde nach Bauer [1989] für die entsprechende Komponente ein Wert zum Beobachtungszeitpunkt geschätzt und anschließend auf die beiden umliegenden Stützstellenwerte extrapoliert, die aus der COMB2006-Reihe für die ERP bekannt waren.

In LUNAR 3.0 können die ERP in verschiedenen Konstellationen geschätzt werden, z.B. für begrenzte Zeiträume oder ausgewählte Nächte, die bestimmte Bedingungen erfüllen. Die entsprechenden Untersuchungen und Ergebnisse werden in Abschnitt 5.2 diskutiert.

**Relativistische Parameter** LLR eignet sich besonders gut, um Fragestellungen der Einstein'schen Relativitätstheorie zu untersuchen. Dazu wurde in LUNAR 3.0 die Möglichkeit implementiert, zwei vorher noch nicht geschätzte relativistische Parameter zu bestimmen. Die entsprechenden Untersuchungen zur quadratischen Variation der Gravitationskonstanten und zum Gravitomagnetismus werden in den Abschnitten 7.1 und 7.2 behandelt.

### 4.3 Aktualisierung des stochastischen Modells

Wie in Abschnitt 3.6.2 erläutert, können über das stochastische Modell der Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell die einzelnen Beobachtungen gemäß ihrer Genauigkeiten gewichtet werden. Von den LLR-Messtationen werden für die einzelnen Normalpunkte entsprechende Laufzeitgenauigkeiten angegeben, die für die Gewichtung genutzt werden können. Das Verfahren ist als Standardverfahren sowohl in LUNAR 2.0 als auch in LUNAR 3.0 implementiert. Wie ebenfalls in Abschnitt 3.6.2 beschrieben, werden die LLR-NP dabei als unkorreliert angenommen. In Abschnitt 4.1 wurden bereits die Laufzeitgenauigkeiten der NP besprochen, die im Standardverfahren genutzt werden. In nächsten Abschnitt wird nun auf die Varianzkomponentenschätzung näher eingegangen. Sie ist in LUNAR 3.0 implementiert worden und kann statt der Standardgewichtung genutzt werden.

#### 4.3.1 Varianzkomponentenschätzung

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob sich das stochastische Modell der Auswertung von LLR-Daten über eine Varianzkomponentenschätzung VCE verbessern lässt. Die Motivation dieser Untersuchung liegt darin, dass die tatsächlichen Relationen der Genauigkeiten zwischen den Stationen nicht bekannt sind. Es wird zwar für jeden NP eine Genauigkeit der Laufzeit ermittelt, diese ist aber einerseits von den Eigenschaften des Lasers, Teleskops und Reflektors abhängig. Andererseits spielen die Genauigkeit der Kalibrierung des Systems und die Länge des ausgesendeten Signals eine Rolle. Diese Punkte unterscheiden sich bei allen Stationen.

In der Varianzkomponentenschätzung bleibt das funktionale Modell der Ausgleichung gemäß Gleichung (3.13) unverändert. Das stochastische Modell

$$\Sigma_{ll} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{ll} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{P}^{-1} \quad (4.17)$$

beruhte bisher auf der Kofaktormatrix der Beobachtungen  $\mathbf{Q}_{ll}$ , in die die einzelnen Genauigkeiten der NP einfließen. Im Rahmen der VCE wird das stochastische Modell zerlegt. Es werden Varianzfaktoren  $\sigma_i^2$  für einzelne Beobachtungsgruppen eingeführt [Niemeier, 2001], die das Genauigkeitsniveau der Gruppen zueinander widerspiegeln. Es können zwei bis  $m$  Gruppen untersucht werden. Das stochastische Modell lautet nun:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ll} &= \sigma_1^2 \cdot \mathbf{Q}_1 + \sigma_2^2 \cdot \mathbf{Q}_2 + \dots + \sigma_m^2 \cdot \mathbf{Q}_m \\ &= \sigma_1^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} + \sigma_2^2 \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{Q}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \sigma_m^2 \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \mathbf{Q}_m \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Für die VCE werden die Beobachtungen in Gruppen sortiert. Ihre Genauigkeiten fließen in die Kofaktorsubmatrizen  $\mathbf{Q}_i$  ein. Die Varianzfaktoren der verschiedenen Gruppen berechnen sich iterativ. Hierzu wird nach der Ausgleichung in einem ersten Schritt die Gleichung

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\mathbf{v}' \mathbf{P}_j \mathbf{v}}{\text{Spur}(\mathbf{Q}_{vv} \mathbf{P}_j)} \quad (4.19)$$

gelöst, die von den Verbesserungen  $\mathbf{v}$ , den Gewichten der Beobachtungen  $\mathbf{P}_j$  sowie der Kofaktormatrix der Verbesserungen  $\mathbf{Q}_{vv}$  abhängt. Die Gruppenvarianzen  $\hat{\sigma}_i^2$  fließen im zweiten Schritt wieder in die Ausgleichung ein und dienen der Skalierung der Genauigkeiten derjenigen Gruppe, für die sie ermittelt wurden. Nach einer erneuten Ausgleichung werden wiederum neue Varianzfaktoren berechnet, in einem weiteren Iterationsschritt wieder in die Auswertung eingeführt und mit den Varianzfaktoren des ersten Schrittes multipliziert. Die Iteration wird solange wiederholt, bis alle neu bestimmten Varianzfaktoren gleich eins sind. Aus der Multiplikation der einzelnen Varianzfaktoren einer Gruppe resultiert die endgültige Gruppenvarianz.

Drei Testfälle wurden für die Varianzkomponentenschätzung untersucht:

**VCE1** Es wurden acht Gruppen anhand der einzelnen Stationen gebildet. Für jede wurde ein Varianzfaktor berechnet.

**VCE2** Der Datensatz wurde in fünf Gruppen eingeteilt, für die Varianzfaktoren berechnet wurden. Die einzelnen Gruppen ergaben sich auf Grundlage von Abbildung 4.4, wo die Residuen der NP gemäß ihrer Größenordnung in fünf Zeiträume eingeteilt wurden. Die schwarzen senkrechten Linien markieren dabei die Gruppengrenzen. Es ist anzumerken, dass im letzten Zeitraum 08.2004 – 11.2011 die NP von APOLLO mit einer Anzahl von 942 gegenüber den anderen Stationen (4 von MLRO, 459 von MLRS2 und 294 von OCA) deutlich überwiegen.

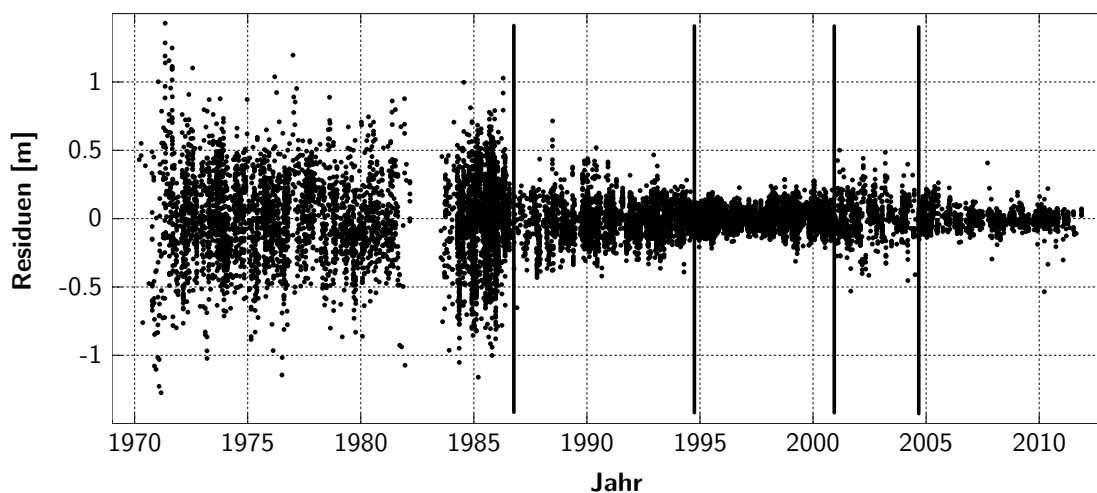
**VCE3** Wie in Fall eins wurden acht Gruppen anhand der einzelnen Stationen gebildet. Allerdings wurde für die Gruppe, die aus den Beobachtungen der Station APOLLO bestehen, keine Gruppenvarianz berechnet, es ergaben sich also nur sieben Gruppenvarianzen.

Die durchgeführte Untersuchung wurde mit einem Datensatz von 1970 – 2011 (16 741 NP) und einer Zwischenversion von LUNAR durchgeführt, die hier nicht explizit beschrieben wird. Der Testfall VCE1 wurde bereits in früheren Untersuchungen betrachtet, die in Müller et al. [2012b] und Müller et al. [2014b] publiziert sind.

In Tabelle 4.4 sind als Ergebnisse der drei Untersuchungen, die sich am Ende der Iteration ergebenden Gruppenvarianzen zusammengefasst. Je größer die Gruppenvarianz ist, desto geringer ist das Gewicht der Gruppe in der Auswertung bzw. desto geringer ihr Anteil am Gesamtergebnis.

Bei VCE1 (Tab. 4.4.1) ist auffällig, dass die Gruppenvarianz für APOLLO mit 79.20 im Gegensatz zu den anderen Werten sehr hoch ist. Die kleinste Gruppenvarianz und somit das höchste Gewicht in der Auswertung erhalten die Beobachtungen vom WLRS. Da dies aber nur fünf NP sind, ist die Wirkung in der Auswertung nicht signifikant. Ähnlich sieht es für MLRO aus, hier wird zwar mit 4.55 die zweitgrößte Gruppenvarianz erreicht, da es aber nur vier NP sind, wirkt sich die Gewichtung in der gesamten Auswertung kaum aus. Die Werte der anderen Stationen bewegen sich zwischen 1.92 für McDonald und 4.20 für MLRS1.

Das Ergebnis für VCE2 (Tab. 4.4.2) wurde nach anderen Kriterien ermittelt als VCE1, trotzdem zeigt sich ein ähnliches Bild. Der letzte Untersuchungszeitraum 08.2004 – 11.2011, der von NP der Station APOLLO dominiert ist, zeigt in diesem Ergebnis wieder die höchste Gruppenvarianz von 16.82 und hat in der Auswertung das geringste Gewicht. Die ersten drei Zeiträume weisen mit Varianzen zwischen 2.192 und 3.701 ein ähnliches Genauigkeitsniveau auf. Lediglich der Zeitraum 12.2000 – 08.2004, in den 248 NP von MLRS2 und 733 NP von OCA einfließen, hat mit 7.451 eine höhere Gruppenvarianz.



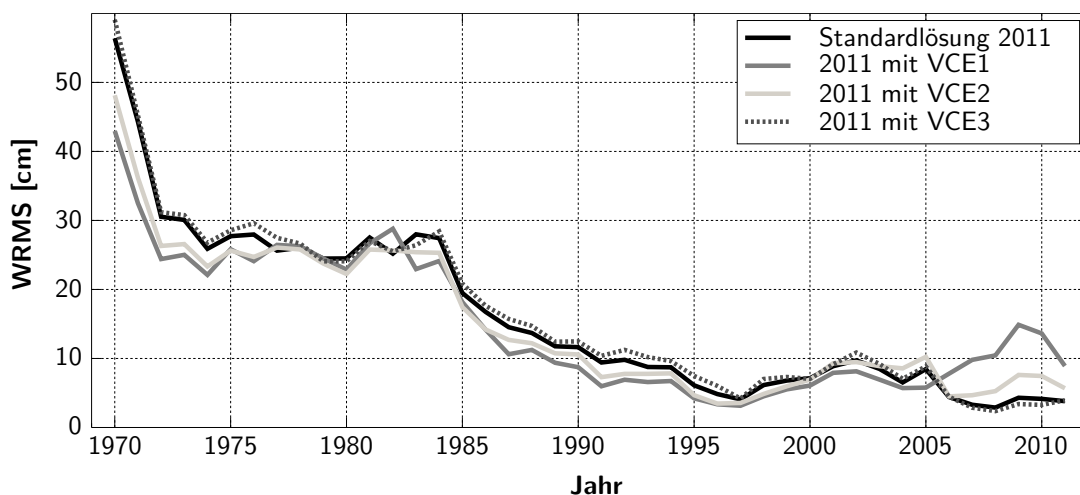
**Abb. 4.4:** Darstellung der Residuen der einzelnen NP nach der Auswertung in einer Standardlösung. Es wurde ein Datensatz mit 16 741 NP für den Zeitraum 1970 – 2011 ausgewertet. Die schwarzen senkrechten Linien markieren die Gruppengrenzen, nach denen die Residuen für VCE2 eingeteilt werden.

**Tab. 4.4:** Ergebnisse der drei Untersuchungen zur Varianzkomponentenschätzung. Für VCE3 wird die Anzahl der NP nicht angegeben, da sie in den angegebenen Gruppen der Anzahl in VCE1 entspricht.

4.4.1: VCE1			4.4.2: VCE2			4.4.3: VCE3	
Station	Anz. NP	$\sigma_i^2$	Zeitraum	Anz. NP	$\sigma_i^2$	Station	$\sigma_i^2$
APOLLO	942	79.20	03.1970 – 09.1986	5214	2.19	MAUI	5.12
MAUI	389	3.59	09.1986 – 08.1994	3487	3.70	MLRO	4.63
MLRO	4	4.55	08.1994 – 12.2000	5360	2.84	McDonald	1.92
McDonald	3146	1.92	12.2000 – 08.2004	981	7.45	MLRS1	5.20
MLRS1	695	4.20	08.2004 – 11.2011	1699	16.82	MLRS2	2.60
MLRS2	2734	1.93				OCA	4.15
OCA	8826	2.94				WLRS	0.40
WLRS	5	0.40					

Die bisherigen Untersuchungen VCE1 und VCE2 haben gezeigt, dass in beiden Fällen die Gruppen, die NP mit hoher Genauigkeit enthalten, in der Auswertung ein geringes Gewicht haben. Dies bedeutet, dass sich das Gesamtergebnis auf Daten stützt, die geringere Beobachtungsgenauigkeiten aufweisen. Die guten Genauigkeiten der Stationen OCA und APOLLO werden nicht voll ausgenutzt. Aus diesem Grund wird VCE3 durchgeführt, bei der für APOLLO keine Gruppenvarianz bestimmt wird, die Beobachtungen also nur anhand ihrer jeweiligen Beobachtungsgenauigkeit in  $\mathbf{Q}_{ll}$  gewichtet werden. Das Ergebnis für VCE3 (Tab. 4.4.3) resultiert wieder in einer sehr kleinen Varianz für die wenigen NP von WLRS. Für McDonald ergibt sich wieder ein Wert von 1.921, wie im Fall VCE1. Bei den anderen Stationen schwanken die Varianzen zwischen 2.595 für MLRS2 und 5.203 für MLRS1.

Um die Ergebnisse der drei Untersuchungen auch im Bereich der Residuen zu vergleichen, stellt Abbildung 4.5 für die drei Fälle die gewichteten jährlichen Residuen dar. Zusätzlich ist die Standardlösung für den benutzten Datensatz ohne VCE als schwarze Kurve dargestellt. Es wird deutlich, dass die dunkelgraue Kurve für VCE1 die kleinsten gewichteten Residuen über den Zeitraum 1970 – 2005 aufweist. Ab 2006 werden in diesen Fall die gering gewichteten NP von APOLLO ausgewertet, die nun Residuen vom bis zu 15 cm zeigen. In der Standardlösung ohne VCE liegt das Ergebnis im gleichen Zeitraum bei etwa 3 – 4 cm, dafür im restlichen Zeitraum höher als mit VCE1. Die hellgraue Kurve für VCE2 zeigt gegenüber VCE1 von 1970 – 2005 leicht schlechtere gewichtete Residuen, die aber dennoch besser sind, als bei der Standardlösung. Ab 2006 steigen die Residuen wieder, hier auf bis zu 8 cm. Auch in diesem Fall erhalten ab 2006 die NP von APOLLO und OCA geringes Gewicht. Die gestrichelte Kurve repräsentiert die gewichteten Residuen für VCE3.



**Abb. 4.5:** Darstellung der gewichteten jährlichen Residuen aus den drei untersuchten Fällen zur Varianzkomponentenschätzung und einer Standardlösung, die ohne VCE berechnet wurde.

Sie verläuft sehr nah an der Kurve für die Standardlösung, ist teilweise sogar einige Zentimeter schlechter.

Die drei Untersuchungen haben gezeigt, dass durch die Varianzkomponentenschätzung in den Residuen nur eine leichte Verbesserung erreicht werden kann, wenn die NP von APOLLO gering gewichtet werden. Daraus folgt, dass in diesen Fällen die hohe Messgenauigkeit in der Auswertung nicht voll ausgenutzt werden kann. Gewichtet man, wie in VCE3 APOLLO nicht ab, verbessern sich auch die Residuen nicht signifikant. Können Messfehler und Ausreißer ausgeschlossen werden, bieten Beobachtungen mit hoher Genauigkeit die Möglichkeit, neu geschätzte Parameter ebenfalls mit einer hohen Genauigkeit zu bestimmen. Daher sollte die Messgenauigkeit bzw. das Gewicht von APOLLO nicht rechnerisch verschlechtert werden.

Man kann zusammenfassen, dass durch die Varianzkomponentenschätzung keine signifikante Verbesserung der Residuen erreicht werden konnte. In den weiteren Auswertungen und Untersuchungen werden die Beobachtungen nur anhand ihrer Messgenauigkeiten in der Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_l$  gewichtet.

Laut Niemeier [2001] kann die VCE ihr Potential nur voll entwickeln, wenn das Modell der Ausgleichung korrekt ist und keine Beobachtungsfehler vorliegen. In der LLR-Auswertung werden die Beobachtungen als unkorreliert angenommen. Dies ist nicht ganz zutreffend, da z.B. Beobachtungen einer Station oder einer Nacht durchaus korreliert sein können. In den untersuchten Fällen spielt dies möglicherweise eine Rolle und die VCE führt aus diesem Grund zu keiner wesentlichen Verbesserung der Auswerteergebnisse.

Zukünftig wäre zu untersuchen, wie man Korrelationen zwischen LLR-Beobachtungen modellieren könnte, z.B. durch eine Autokorrelationsfunktion, und wie sich dieses Vorgehen auf die Lösung auswirkt.

# 5 Untersuchungen von Erdorientierungsparametern

In der Auswertung von LLR-Daten wird für die Stationskoordinaten gemäß Gleichung (2.29) eine Transformation aus dem erdfesten ITRS ins raumfeste GCRS durchgeführt. In der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{W} \quad (5.1)$$

beschreibt  $\mathbf{E}$  die Drehung um den Ekliptikwinkel,  $\mathbf{S}$  enthält die sogenannten Störrotationen,  $\mathbf{Q}$  beinhaltet Präzession und Nutation, in  $\mathbf{R}$  fließt der Rotationswinkel der Erde ein und in  $\mathbf{W}$  die Polkoordinaten  $x_p$  und  $y_p$ . Für alle in der Transformationsmatrix enthaltenen Größen können während der Ausgleichung Zuschläge geschätzt werden.

Die Untersuchungen in diesem Kapitel stützen sich auf Gleichung (5.1) und beschäftigen sich jeweils mit Teilmatrizen dieser Transformation. Die Untersuchungen zur Schätzung von Nutationskoeffizienten und der Präzessionskonstanten sowie die Diskussion der Ergebnisse beschreibt Abschnitt 5.1. Abschnitt 5.2 beschäftigt sich mit den Erdrotationsparametern.

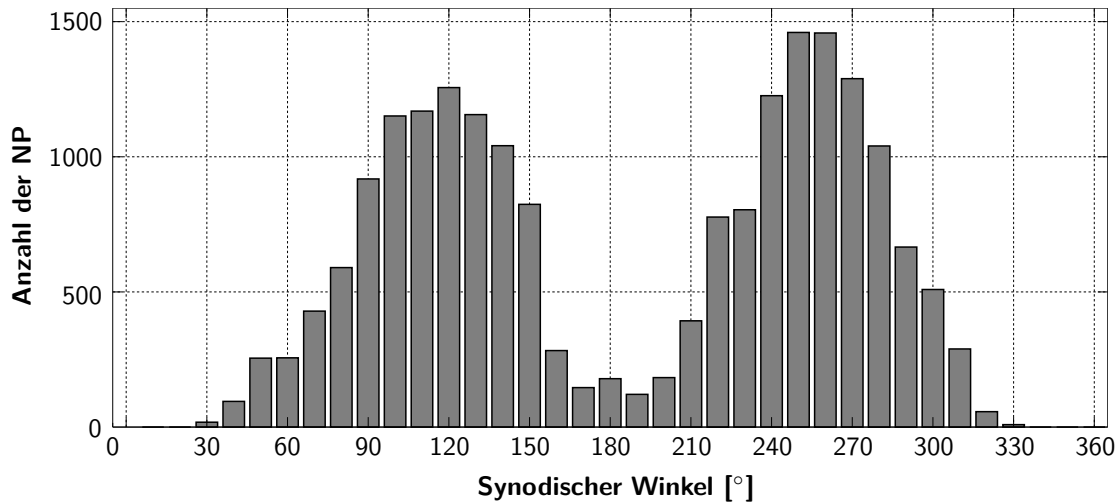
## 5.1 Schätzung von Nutationskoeffizienten

Die Nutation enthält die Reaktion der Erde auf die Drehmomente, die unter anderem von Sonne und Mond ausgeübt werden. Die Hauptperiode der Nutation mit etwa 18.6 Jahren entsteht durch die Knotenbewegung der Mondbahn. Andere Perioden sind mit der Sonne oder dem Umlauf der Erde um die Sonne verknüpft. Bestimmt man die Nutation aus Messdaten geodätischer Raumverfahren, lassen sich über Modelle geophysikalische Parameter der Erde, z.B. bezogen auf den festen äußeren oder flüssigen inneren Kern, bestimmen, die mit anderen Methoden kaum untersucht werden können [Herring et al., 2002].

Das von der IAU empfohlene Modell für die Nutation der Erde ist das MHB2000-Modell von Mathews et al. [2002]. Dabei handelt es sich um ein geophysikalisches Modell, das im Gegensatz zu früheren Modellen, wie z.B. dem von Wahr [1981b], die dynamische Theorie um Effekte der Anelastizität des Mantels und Ozeangezeiten erweitert. Außerdem werden elektromagnetische Kopplungen des Mantels und des festen inneren Kerns der Erde mit dem flüssigen äußeren Kern berücksichtigt. Nichtlineare Terme und zeitabhängige Deformationen, verursacht durch zonale und sektorische Tiden, werden ebenfalls in die Berechnung einbezogen. Es resultiert eine Transferfunktion, über die sich Nutationsamplituden einer realen Erde aus denen einer starren Erde berechnen lassen. Die Nutation der starren Erde wird durch das Modell REN2000 von Souchay et al. [1999] beschrieben. Einige Parameter, die in der Transferfunktion eine Rolle spielen, werden an Nutationszeitreihen aus VLBI angepasst, z.B. die Elliptizität der Erde und des flüssigen inneren Kerns, sogenannte Komplianz-Parameter, die die Deformierbarkeit der Erde und des flüssigen Kerns beschreiben sowie reale und imaginäre Anteile für die Kern-Mantel-Grenze und die innere Kern-Grenze [Mathews et al., 2002]. Die Schätzung von Parametern aus VLBI und die anschließende Berechnung der Nutationsreihe mit diesen Parametern führt allerdings dazu, dass diese nicht unabhängig von der VLBI-Datengrundlage ist.

Mögliche Ungenauigkeiten im Nutationsmodell werden aktuell über die Schätzung von *pole offsets*  $\delta\psi$  und  $\delta\epsilon$  aus VLBI bestimmt. Die Werte erreichen dabei Genauigkeiten von 0.1 mas, wenn sie aus 24-Stunden Beobachtungen bestimmt werden [Schuh et al., 2003]. In diesen Korrekturwerten ist auch der in Abschnitt 2.3.2 besprochene Effekt der FCN enthalten. Vom IERS werden die  $\delta\psi$ - und  $\delta\epsilon$ -Werte in den EOP-Reihen zusammen mit  $x_{\text{IERS}}$ ,  $y_{\text{IERS}}$  und  $\Delta\text{UT1}_{\text{IERS}}$  veröffentlicht.

Zerhouni & Capitaine [2009] haben gezeigt, dass es möglich ist  $\delta\psi$  und  $\delta\epsilon$  aus LLR-Daten zu schätzen. Dabei wurden jeweils Zeiträume von 70 Tagen gebildet und aus den darin enthaltenen



**Abb. 5.1:** Histogramm aller 20047 NP aufgeschlüsselt nach dem synodischen Winkel. Bei  $0^\circ$  herrscht Neumond, mit steigendem Winkel nimmt der Mond zu und erreicht bei  $180^\circ$  Vollmond. Danach nimmt der Mond mit weiter steigendem synodischen Winkel ab und erreicht bei  $360^\circ$  wieder Neumond.

Messungen Korrekturwerte zur Nutation bestimmt. Die erzielte Genauigkeit ist etwas schlechter als für Korrekturwerte aus VLBI.

Bestimmt man direkt die Nutationskoeffizienten aus LLR, erhält man eine unabhängige Überprüfung des MHB2000-Modells. Obwohl LLR-Messungen eine geringere zeitliche Dichte und Genauigkeit aufweisen als VLBI-Daten, ist die lange Datenreihe von mittlerweile 44 Jahren vorteilhaft für die Schätzung. Sie trägt dazu bei, dass langperiodische Nutationskoeffizienten und Parameter der Präzession dekorreliert werden können. Ein weiterer Vorteil der LLR-Messtechnik besteht in der Sensitivität der Daten für das dynamische Referenzsystem und somit für die Ekliptik und den Äquator.

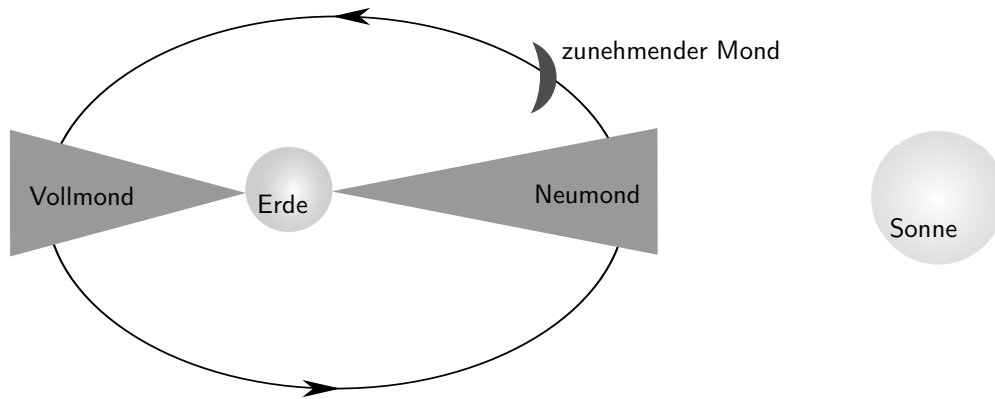
In der Vergangenheit wurde schon in mehreren Publikationen die Bestimmung von Zuschlägen zu den Nutationskoeffizienten thematisiert, so in Newhall et al. [1988], Williams et al. [1991], Müller [1991], Williams et al. [1994], Dickey et al. [1994] und Charlot et al. [1995]. Die Untersuchungen beschäftigten sich mit der 18.6-Jahre und der jährlichen Periode des Modells von Wahr [1981b]. Diese Ergebnisse können mit der aktuellen Untersuchung nicht direkt verglichen werden, da sie sich auf ein anderes Nutationsmodell beziehen. Im Abschnitt 5.1.2.1 wird kurz darauf eingegangen. Williams et al. [1991] stellte bei seinen Untersuchungen außerdem das Problem fest, die 18.6-Jahre-Periode der Nutation vom Orbit des Mondes zu trennen.

Zerhouni & Capitaine [2009] haben aus den zuvor angesprochenen *pole offsets* in einem zweiten Auswerteschritt Zuschläge zu Nutationskoeffizienten für die Perioden 18.6 Jahre, 182.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage geschätzt. Als Vergleichsmodell galt hier das MHB2000. Diese Ergebnisse sind in Abschnitt 5.1.3 erwähnt.

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels werden die Zuschläge zu den Nutationskoeffizienten für die fünf Perioden mit dem größten Beitrag zur Nutation (18.6 Jahre, 182.6 Tage, 13.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage) bestimmt. Diese Perioden erfahren die größten Änderungen, wenn sich die Theorien für die elastische Erde und den flüssigen Kern der Erde ändern [Williams et al., 1991].

Die vier Perioden von 18.6 Jahren, 182.6 Tagen, 9.3 Jahren und 365.3 Tagen sind gut mit LLR-Messungen abgedeckt und können somit geschätzt werden. Um zu beurteilen, ob sich LLR-Messungen für eine Schätzung der Koeffizienten der 13.6-Tage-Periode eignen, wird die Datengrundlage auf ihre Verteilung über den synodischen Winkel hin untersucht. In Abbildung 5.1 sind alle Beobachtungen, die in die Auswertung einfließen, über den synodischen Winkel des Mondes aufgetragen. Der Winkel beschreibt, von der Erde aus betrachtet, die Position des Mondes bezüglich der Sonne, wie in Abbildung 5.2 dargestellt. Ein Umlauf des Mondes ist vollendet, wenn der Mond einmal alle Phasen durchlaufen hat. Bei  $0^\circ$  befindet sich der Mond in der Neumondphase und





**Abb. 5.2:** Darstellung des synodischen Umlaufs des Mondes. In den grau hinterlegten Bereichen können fast keine LLR-Messungen durchgeführt werden, da hier das Licht der Sonne (bei Neumond) bzw. das Streulicht des Vollmondes zu großen Störungen führen.

ist am Himmel nicht zu sehen. In dieser Phase sind Entfernungsmessungen zum Mond unmöglich, da das Licht der Sonne dominiert. Mit steigendem synodischen Winkel nimmt der Mond zu und die Anzahl der NP steigt. Das Maximum der NP in der zunehmenden Phase wird erreicht, wenn der Mond die Halbmondphase überschritten hat. Nähert sich der Mond der Vollmondphase, ist das Streulicht, das von der Mondoberfläche zur Erde gelangt, recht hoch und erschwert wieder die Messungen, deswegen sind in der Vollmondphase um  $180^\circ$  sehr wenige NP vorhanden. Die meisten NP, die hier zur Verfügung stehen, wurden zu Zeiten von Mondfinsternissen gemessen. Nach Vollmond, in der abnehmenden Phase, nimmt die Anzahl der NP wieder zu, bevor um die Halbmondphase ein zweites Maximum erreicht wird. Bei weiter abnehmendem Mond sinkt die Anzahl der NP bis bei Neumond keine Messungen durchgeführt werden.

Der synodische Winkel des Mondes ist mit dem synodischen Monat verknüpft, der etwas mehr als 29 Tage und 12 Stunden beträgt. Da die LLR-Messungen sehr ungleichmäßig über den synodischen Monat verteilt sind, ist zu erwarten, dass die Schätzung der 13.6-Tage-Nutation schwierig wird. Die ungleichmäßige Verteilung kann außerdem zu Korrelationen zwischen zu schätzenden Parametern führen [Williams et al., 2009].

### 5.1.1 Ableitungen für die Schätzung der Nutationskoeffizienten

Für die Schätzung von lunisolaren Nutationskoeffizienten in der Ausgleichung von LLR-Daten wird im Auswerteprogramm PAR die Subroutine DRDNUT um die entsprechenden Ableitungen der Entfernung Erde-Mond nach den Koeffizienten der Nutationsreihe erweitert. Die Transformationsmatrix aus dem erdfesten in das raumfeste Referenzsystem, die durch Gleichung (5.1) beschrieben ist, bildet die Grundlage für die Bildung der Ableitungen. Die Nutationswinkel, die in  $\mathbf{Q}$  einfließen, sind durch die Gleichungen (2.25) bzw. (2.26) gegeben. Wie in Abschnitt 2.3.2 erläutert, bestehen diese aus einem lunisolaren ( $ls$ ) und einem planetaren ( $pl$ ) Anteil. Des Weiteren beschreiben die Gleichungen (2.23) und (2.24) die Anpassung der MHB2000-Nutation an die Präzession gemäß den IAU Resolutionen 2006. Diese Anpassung über

$$\begin{aligned} b &= 0.4697 \cdot 10^{-6} + f \\ f &= -2.7774 \cdot 10^{-6} \cdot dt \end{aligned} \quad (5.2)$$

wird in den folgenden Gleichungen getrennt für den lunisolaren und planetaren Anteil angebracht

$$\Delta\psi = (1 + b) \cdot \Delta\psi_{ls} + (1 + b) \cdot \Delta\psi_{pl} + \delta\psi, \quad (5.3)$$

$$\Delta\epsilon = (1 + f) \cdot \Delta\epsilon_{ls} + (1 + f) \cdot \Delta\epsilon_{pl} + \delta\epsilon, \quad (5.4)$$

wobei  $dt$  die Zeitdifferenz eines Messzeitpunktes zu J2000.0 darstellt. Die Variablen  $\delta\psi$  bzw.  $\delta\epsilon$  enthalten den Effekt der freien Nutation des Erdkerns (FCN).

Die Berechnung der Nutationswinkel aus dem MHB2000-Modell wurde schon durch die Gleichungen (2.20) und (2.21) dargestellt. In diesem Abschnitt werden sie für die lunisolaren Anteile betrachtet

$$\Delta\psi_{ls} = \sum_{i=1}^5 (A_i + A'_i dt) \sin(\text{ARG}_i) + (A''_i + A'''_i dt) \cos(\text{ARG}_i), \quad (5.5)$$

$$\Delta\epsilon_{ls} = \sum_{i=1}^5 (B_i + B'_i dt) \cos(\text{ARG}_i) + (B''_i + B'''_i dt) \sin(\text{ARG}_i). \quad (5.6)$$

Die Summe wird hier für die fünf Perioden (18.6 Jahre, 182.6 Tage, 13.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage) berechnet. Dabei spielen folgende Fundamentalargumente bei der Berechnung von  $\text{ARG}_i$  (siehe Gleichung (2.22)) eine Rolle [Petit & Luzum, 2010]:

- $l$  mittlere Anomalie des Mondes,
- $l'$  mittlere Anomalie der Sonne,
- $F = L - \Omega$ ,
- $D$  mittlere Elongation des Mondes zur Sonne,
- $\Omega$  mittlere Länge des aufsteigenden Knotens des Mondes

und  $L$  bezeichnet die mittlere Länge des Mondes. Diese Argumente geben Grundfrequenzen an, die in unterschiedlicher Kombination in der Nutation enthalten sind. In der Ausgleichung der LLR-Daten können für die Koeffizienten  $A_i, A''_i, B_i$  sowie  $B''_i$  der beschriebenen fünf Perioden Zuschläge geschätzt werden. Die Bildung der entsprechenden Ableitungen erfolgt in mehreren Schritten und wird in den nächsten Abschnitten für drei unterschiedliche Berechnungswege hergeleitet.

### 5.1.1.1 Über Frühlingspunkt und FW-Modell

Liegt der Transformation aus dem erdfesten ins raumfeste Referenzsystem die Transformationsmatrix im FW-Modell über den Frühlingspunkt zugrunde, spielen die lunisolaren Anteile der Nutation sowohl in der direkten Berechnung der Nutationsmatrix eine Rolle, als auch indirekt über die Gleichung der Äquinoktien (2.41), die hier wiederholt wird

$$\text{EE} = \Delta\psi \cdot \cos(\epsilon_A).$$

Diese Gleichung ist in der sogenannten *equation of the origins* (2.40) bei der Berechnung von GST über Gleichung (2.36) enthalten. Die Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{FW}}$  kann in die Anteile der Nutation  $\mathbf{N}$  und Präzession  $\mathbf{P}_{\text{FW}}$  aufgespalten werden. Die Transformationsmatrix (5.1) nimmt folgende Gestalt an

$$\mathbf{T}_{\text{FW}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_{\text{FW}} \cdot \mathbf{N}_3(\Delta\psi) \cdot \mathbf{N}_1(\Delta\epsilon) \cdot \mathbf{R}_3(-\text{GST}) \cdot \mathbf{W}. \quad (5.7)$$

Die genaue Besetzung der Rotationsmatrizen und ihre Ableitungen sind im Anhang A.1 zusammengestellt.

Im nächsten Schritt wird diese Gleichung jeweils nach den gesuchten Parametern  $A_i, A''_i, B_i$  und  $B''_i$  abgeleitet

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A_i} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \frac{\partial \Delta\psi_{ls}}{\partial A_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A''_i} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \frac{\partial \Delta\psi_{ls}}{\partial A''_i}, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B_i} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \frac{\partial \Delta\epsilon_{ls}}{\partial B_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B''_i} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \frac{\partial \Delta\epsilon_{ls}}{\partial B''_i}. \quad (5.9)$$

Die darin enthaltene Ableitung der Transformationsmatrix (5.7) nach  $\Delta\psi_{ls}$  setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich dem direkten und dem indirekten Effekt

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \mathbf{N}_3(\Delta\psi)} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_3(\Delta\psi)}{\partial \Delta\psi_{ls}} + \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \mathbf{R}_3(-\text{GST})} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_3(-\text{GST})}{\partial \Delta\psi_{ls}}. \quad (5.10)$$

Die Ableitungen für den direkten Effekt der Nutation sind

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \mathbf{N}_3(\Delta\psi)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_{\text{FW}} \cdot \mathbf{N}_1(\Delta\epsilon) \cdot \mathbf{R}_3(-\text{GST}) \cdot \mathbf{W}, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_3(\Delta\psi)}{\partial \Delta\psi_{ls}} = \begin{bmatrix} -\sin(\Delta\psi) & \cos(\Delta\psi) & 0 \\ -\cos(\Delta\psi) & -\sin(\Delta\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (1+b). \quad (5.12)$$

Für die Ableitung des indirekten Effektes in der Gleichung der Äquinoktien (2.41) wird berücksichtigt, dass die Rotationsmatrix eines negativen Winkels der transponierten Drehmatrix des positiven Winkels entspricht:  $\mathbf{R}(-\alpha) = \mathbf{R}^T(\alpha)$ . Die einzelnen Ableitungen sehen nun wie folgt aus

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \mathbf{R}_3(-\text{GST})} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_{\text{FW}} \cdot \mathbf{N}_3(\Delta\psi) \cdot \mathbf{N}_1(\Delta\epsilon) \cdot \mathbf{W}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3(-\text{GST})}{\partial \Delta\psi_{ls}} = \begin{bmatrix} -\sin(\text{GST}) & -\cos(\text{GST}) & 0 \\ \cos(\text{GST}) & -\sin(\text{GST}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (1+b) \cdot \cos(\epsilon_A). \quad (5.14)$$

Bei der Ableitung der Transformationsmatrix nach  $\Delta\epsilon_{ls}$  ergibt sich nur ein direkter Effekt durch die Nutation und die Ableitung besteht aus

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \mathbf{N}_1(\Delta\epsilon)} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}_1(\Delta\epsilon)}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \quad (5.15)$$

mit

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \mathbf{N}_1(\Delta\epsilon)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_{\text{FW}} \cdot \mathbf{N}_3(\Delta\psi) \cdot \mathbf{R}_3(-\text{GST}) \cdot \mathbf{W}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_1(\Delta\epsilon)}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\Delta\epsilon) & \cos(\Delta\epsilon) \\ 0 & -\cos(\Delta\epsilon) & -\sin(\Delta\epsilon) \end{bmatrix} \cdot (1+f). \quad (5.17)$$

Die in den Gleichungen (5.8) und (5.9) enthaltenen Ableitungen der Nutationswinkel nach den einzelnen Koeffizienten für die fünf betrachteten Perioden ergeben sich aus einer Kombination der zu Beginn des Abschnitts 5.1.1 beschriebenen Fundamentalarumente. Als Index  $i$  ist die jeweilige Periode in Jahren  $J$  bzw. Tagen  $T$  angegeben. Für den Nutationswinkel  $\Delta\psi_{ls}$  sind die Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A_{-18.6J}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \sin(\Omega), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A''_{-18.6J}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \cos(\Omega), \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A_{182.6T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \sin(2F - 2D + 2\Omega), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A''_{182.6T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \cos(2F - 2D + 2\Omega), \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A_{13.6T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \sin(2F + 2\Omega), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A''_{13.6T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \cos(2F + 2\Omega), \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A_{-9.3J}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \sin(2\Omega), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A''_{-9.3J}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \cos(2\Omega), \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A_{365.3T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \sin(l'), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial A''_{365.3T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} \cdot \cos(l'). \quad (5.22)$$

Entsprechende Ableitungen des Nutationswinkels  $\Delta\epsilon_{ls}$  sind

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B_{-18.6J}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \cos(\Omega), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B''_{-18.6J}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \sin(\Omega), \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B_{182.6T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \cos(2F - 2D + 2\Omega), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B''_{182.6T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \sin(2F - 2D + 2\Omega), \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B_{13.6T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \cos(2F + 2\Omega), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B''_{13.6T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \sin(2F + 2\Omega), \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B_{-9.3J}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \cos(2\Omega), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B''_{-9.3J}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \sin(2\Omega), \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B_{365.3T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \cos(l'), \quad \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial B''_{365.3T}} = \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FW}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \cdot \sin(l'). \quad (5.27)$$

### 5.1.1.2 Über Frühlingspunkt und P03-Modell

Bildet die Transformation im P03-Modell und über den Frühlingspunkt die Grundlage für die Schätzung der Nutationskoeffizienten, ist die Transformationsmatrix fast identisch mit Gleichung (5.7). Da die Präzessionsmatrix  $\mathbf{P}_{\text{P03}}$  (2.44) des P03-Modells verwendet wird, muss noch der durch Gleichung (2.45) gegebene *frame bias*  $\mathbf{B}$  berücksichtigt werden. Die Transformationsgleichung (5.1) hat jetzt die Form

$$\mathbf{T}_{\text{P03}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_{\text{P03}} \cdot \mathbf{N}_3(\Delta\psi) \cdot \mathbf{N}_1(\Delta\epsilon) \cdot \mathbf{R}_3(-\text{GST}) \cdot \mathbf{W}. \quad (5.28)$$

Die Darstellung der Nutation hat sich in der Transformationsmatrix im Vergleich zu Gleichung (5.7) nicht geändert. Somit gelten die in Abschnitt 5.1.1.1 hergeleiteten Ableitungen für die Nutationskoeffizienten auch in der Schätzung über das P03-Modell. Lediglich in den Gleichungen (5.11), (5.13) und (5.16) muss jeweils die Präzessionsmatrix  $\mathbf{P}_{\text{FW}}$  durch  $\mathbf{P}_{\text{P03}}$  ersetzt und mit  $\mathbf{B}$  multipliziert werden.

### 5.1.1.3 Über CIO und FW-Modell

Werden die Nutationskoeffizienten aus der Transformationsmatrix über das FW-Modell und den CIO geschätzt, fließen die Nutationswinkel nur direkt in die Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{FWCIO}}$  ein. Sie sind in den zälestischen Polkoordinaten  $X$  und  $Y$  sowie in  $s$  enthalten. Die Transformationsmatrix (5.1) wird jetzt über

$$\mathbf{T}_{\text{FWCIO}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_{\text{FWCIO}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{W} \quad (5.29)$$

beschrieben. Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{FWCIO}}$  ist mit Gleichung (2.51) gegeben und wird hier wiederholt

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\text{FWCIO}} &= \mathbf{Q}_{\text{XY}} \cdot \mathbf{R}_3(s) \\ &= \begin{bmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_3(s), \end{aligned}$$

mit

$$a = 1/2 + 1/8 (X^2 + Y^2).$$

Die Gleichungen für  $s$  (2.50),  $X$  (2.52) und  $Y$  (2.53) werden hier ebenfalls wiederholt

$$\begin{aligned} s(dt) &= -XY/2 + 94 + 3808.65 dt - 122.68 dt^2 - 72574.11 dt^3 + \sum_k C_k \sin \alpha_k \\ &+ 1.73 dt \sin \Omega + 3.57 dt \cos 2\Omega + 743.52 dt^2 \sin \Omega + 56.91 dt^2 \sin(2F - 2D + 2\Omega) \\ &+ 9.84 dt^2 \sin(2F + 2\Omega) - 8.85 dt^2 \sin 2\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &= \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\gamma} \\
&\quad - \left( \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \cos(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\varphi} - \cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin \bar{\varphi} \right) \sin \bar{\gamma}, \\
Y &= \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin(\bar{\psi} + \Delta\psi) \sin \bar{\gamma} \\
&\quad + \left( \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \cos(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\varphi} - \cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin \bar{\varphi} \right) \cos \bar{\gamma}.
\end{aligned}$$

In Transformationsmatrix (5.29) kann  $\mathbf{Q}_{\text{FWCIO}}$  gemäß (2.51) aufgeteilt werden und es ergibt sich

$$\mathbf{T}_{\text{FWCIO}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_{\text{XY}} \cdot \mathbf{R}_3(s) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}. \quad (5.30)$$

Die Ableitungen nach den gesuchten Parametern  $A_i, A_i'', B_i$  und  $B_i''$  werden nun analog zu (5.8) und (5.9) gebildet. In den Gleichungen muss nur Matrix  $\mathbf{T}_{\text{FW}}$  durch  $\mathbf{T}_{\text{FWCIO}}$  ersetzt werden. Diese Ableitungen müssen allerdings aus mehreren Komponenten zusammengesetzt werden, da die Nutationswinkel  $\Delta\psi_{ls}$  und  $\Delta\epsilon_{ls}$  sowohl in  $X$  als auch in  $Y$  einfließen. Die zälestischen Polkoordinaten sind wiederum in  $\mathbf{Q}_{\text{XY}}$  und  $\mathbf{R}_3(s)$  enthalten. Die entsprechenden Ableitungen der Transformationsmatrix nach den Nutationswinkeln summieren sich demzufolge für  $\Delta\psi_{ls}$  aus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FWCIO}}}{\partial \Delta\psi_{ls}} &= \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FWCIO}}}{\partial \mathbf{Q}_{\text{XY}}} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{XY}}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial \Delta\psi_{ls}} + \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{XY}}}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \Delta\psi_{ls}} \right) \\
&\quad + \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FWCIO}}}{\partial \mathbf{R}_3(s)} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{R}_3(s)}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial \Delta\psi_{ls}} + \frac{\partial \mathbf{R}_3(s)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \Delta\psi_{ls}} \right).
\end{aligned} \quad (5.31)$$

Für  $\Delta\epsilon_{ls}$  berechnen sich die Ableitung analog

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FWCIO}}}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} &= \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FWCIO}}}{\partial \mathbf{Q}_{\text{XY}}} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{XY}}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} + \frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{XY}}}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \right) \\
&\quad + \frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FWCIO}}}{\partial \mathbf{R}_3(s)} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{R}_3(s)}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} + \frac{\partial \mathbf{R}_3(s)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \Delta\epsilon_{ls}} \right).
\end{aligned} \quad (5.32)$$

Die in den Gleichungen (5.31) und (5.32) enthaltenen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FWCIO}}}{\partial \mathbf{Q}_{\text{XY}}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}_3(s) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{\text{FWCIO}}}{\partial \mathbf{R}_3(s)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_{\text{XY}} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}, \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{XY}}}{\partial X} = \begin{bmatrix} -2aX - \frac{X^3}{4} & -aY - \frac{X^2Y}{4} & 1 \\ -aY - \frac{X^2Y}{4} & -\frac{XY^2}{4} & 0 \\ -1 & 0 & -2aX - \frac{X(X^2+Y^2)}{4} \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_{\text{XY}}}{\partial Y} = \begin{bmatrix} -\frac{X^2Y}{4} & -aX - \frac{XY^2}{4} & 0 \\ -aX - \frac{XY^2}{4} & -2aY - \frac{Y^3}{4} & 1 \\ 0 & -1 & -2aY - \frac{Y(X^2+Y^2)}{4} \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3(s)}{\partial X} = \begin{bmatrix} -\sin(s) & \cos(s) & 0 \\ -\cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{-Y}{2}, \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3(s)}{\partial Y} = \begin{bmatrix} -\sin(s) & \cos(s) & 0 \\ -\cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{-X}{2}, \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \Delta \psi_{ls}} &= \left( \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \cos(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\gamma} \right. \\ &\quad \left. + \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\gamma} \right) \cdot (1 + b), \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \Delta \psi_{ls}} &= \left( \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \cos(\bar{\psi} + \Delta\psi) \sin \bar{\gamma} \right. \\ &\quad \left. - \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\gamma} \right) \cdot (1 + b), \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \Delta \epsilon_{ls}} &= \left( \cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\gamma} \right. \\ &\quad - \cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \cos(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\gamma} \\ &\quad \left. - \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\gamma} \right) \cdot (1 + f), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \Delta \epsilon_{ls}} &= \left( \cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin(\bar{\psi} + \Delta\psi) \sin \bar{\gamma} \right. \\ &\quad + \cos(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \cos(\bar{\psi} + \Delta\psi) \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\gamma} \\ &\quad \left. + \sin(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\gamma} \right) \cdot (1 + f). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Die Variablen  $b$  und  $f$  sind in den Gleichungen (5.2) gegeben.

In einem letzten Schritt müssen die Ableitungen (5.31) und (5.32) um die Ableitungen der Nutationswinkel nach den Koeffizienten der zu schätzenden Perioden erweitert werden. Diese letzten Ableitungen sind in allen Transformationsmethoden identisch. In den Gleichungen (5.18) bis (5.27) sind sie für die jeweiligen Koeffizienten gegeben. Dort müssen nur die Ableitungen der Transformationsmatrix nach den Nutationswinkeln aus der Methode FWCI0 eingesetzt werden.

### 5.1.2 Beschreibung der Nutationsuntersuchungen und Diskussion der Ergebnisse

Erste Studien zur Schätzung von Nutationskoeffizienten wurden schon in früheren Jahren durchgeführt und in Biskupek & Müller [2009a], Biskupek & Müller [2009b] sowie Biskupek et al. [2012] publiziert. Die Untersuchungen stützten sich auf eine ältere Programmversion von LUNAR, in der die Transformation aus dem erdfesten ins raumfeste Referenzsystem über den Frühlingspunkt gemäß der IERS Konventionen von 2003 [McCarthy & Petit, 2004] realisiert war. Außerdem waren einige Annahmen bei der Berechnung noch unvollständig. Auf Grund der Neuerungen in der aktuellen Programmversion LUNAR 3.0 und einer anderen Berechnungsstrategie ist ein Vergleich zwischen den publizierten und aktuellen Ergebnissen nicht ohne weiteres möglich. So werden die publizierten Ergebnisse hier nicht weiter diskutiert.

Die aktuellen Schätzungen von Nutationskoeffizienten werden mit verschiedenen Programmversionen und in unterschiedlichen Konfigurationen durchgeführt, die in den folgenden Abschnitten jeweils beschrieben und diskutiert werden. Dabei werden verschiedene Teilaspekte in der Schätzung der Nutationskoeffizienten untersucht.

Um zu beurteilen, mit welcher Genauigkeit die Nutationskoeffizienten aus LLR-Daten bestimmt werden können, wurde im Vorfeld eine Genauigkeitsabschätzung durchgeführt. Die Komponenten in der Schiefe  $\Delta\epsilon$  können mit einer Genauigkeit von 0.3 mas bestimmt werden. Für die Komponenten der Länge  $\Delta\psi$  resultiert eine Genauigkeit von 0.5 mas. Obwohl die Genauigkeiten aus LLR schlechter sind als aus VLBI, können besonders die langperiodischen Koeffizienten unabhängig überprüft werden.

In den folgenden Tabellen und Diskussionen werden die geschätzten Werte mit dem formalen  $1\sigma$ -Fehler angegeben, der sich aus der Ausgleichung ableitet.

### 5.1.2.1 Nutationskoeffizienten für die 18.6-Jahre-Periode

In der Programmversion LUNAR 2.0 war die Nutation gemäß Wahr [1981b] und die Präzession gemäß Lieske et al. [1977] modelliert. Es konnten die Nutationskoeffizienten der 18.6-Jahre-Periode geschätzt werden. Als Datengrundlage wurden 15 717 NP bis Januar 2005 genutzt. Die Ergebnisse dieser Schätzung sind in Tabelle 5.1 dargestellt. Sie zeigen Abweichungen von einigen Millibogensekunden zum Modell von Wahr [1981b], die schon von Müller [1991] festgestellt wurden. Die Abweichungen wurden von der IAU [1997] bestätigt und führten schließlich zur Einführung jeweils neuer Modelle der Präzession und Nutation. Vergleicht man die geschätzten Nutationskoeffizienten mit denen des MHB2000, zeigen die *in-phase* Koeffizienten  $A$  und  $B$  nur noch geringe Abweichungen zum Modell.

Um zu untersuchen, wie sich die Aktualisierungen aus Kapitel 4 auf die Schätzung der Nutationskoeffizienten auswirken, wurden Schätzungen der 18.6-Jahre-Periode in verschiedenen Programmversionen und Konfigurationen durchgeführt. Die Transformation aus dem erdfesten ins raumfeste Referenzsystem ist dabei jeweils über den Frühlingspunkt realisiert, wie in Abschnitt 2.4.1.1 erläutert, mit der Nutation gemäß MHB2000-Modell sowie der Präzession gemäß Fukushima [2003] und Williams [1994]. Die verschiedenen Untersuchungen hatten folgende Merkmale:

- N1** Zwischenversion LUNAR 2.1, bei der die Schwerefelder von Erde und Mond, die Kern-Mantel-Kopplung des Mondes und die räumlichen Transformationen aktualisiert waren, 15 717 NP bis Januar 2005;
- N2** neues Programm LUNAR 3.0 mit allen in Abschnitt 4.2 beschriebenen Aktualisierungen, 16 752 NP bis Januar 2005;
- N3** neues Programm LUNAR 3.0 mit allen in Abschnitt 4.2 beschriebenen Aktualisierungen, 20 047 NP bis Dezember 2013, die verlängerte Datenreihe enthielt viele NP von APOLLO und OCA mit hoher Genauigkeit.

Die Nutation bezieht sich definitionsgemäß auf ein dynamisches Referenzsystem. Um mögliche Abweichungen in der Orientierung zwischen dem dynamischen Referenzsystem und dem GCRS vor der Schätzung der Nutationskoeffizienten zu minimieren, wurden in einem ersten Schritt mit den Modellwerten für die Nutation die Störrotationen  $\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$  bestimmt, die in Matrix  $\mathbf{S}$  (2.31) der Transformationsmatrix (5.1) enthalten sind. Mit  $\Theta_x$  wird dabei eine Anpassung des Ekliptikwinkels vorgenommen.  $\Theta_y$  ermöglicht eine Anpassung des GCRS-Äquators,  $\Theta_z$  eine Anpassung zwischen Frühlingspunkt und Ursprung entlang des Äquators. Eine ähnliche Vorgehensweise zur Anpassung der Referenzsysteme wird auch bei Chapront et al. [2002], Hilton & Hohenkerk [2004], Yagudina [2009], Zerhouni & Capitaine [2009] sowie Williams et al. [2013] beschrieben.

Im nächsten Berechnungsschritt wurden die geschätzten Werte für die Störrotationen fixiert und die Koeffizienten für die Nutation geschätzt. Gleichzeitig wurden unter anderem auch die Parameter für den Mondorbit und die -rotation, Reflektor- und Stationskoordinaten sowie die zeitliche Änderung der Präzessionskonstante geschätzt. Die Ergebnisse für Nutationskoeffizienten und Präzessionskonstante sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt.

**Tab. 5.1:** Nutationskoeffizienten der 18.6-Jahre-Periode aus dem Modell von Wahr [1981b] und aus der Schätzung mit LUNAR 2.0, 15 717 NP bis Januar 2005. Außerdem die Differenz der geschätzten Nutationskoeffizienten zum MBH2000 Modell. Die Werte sind in Millibogensekunden [mas]. In der letzten Zeile ist die geschätzte Korrektur zur zeitlichen Änderung der Präzessionskonstanten angegeben.

Periode	Nutation nach Wahr [1981b]	LUNAR 2.0	Differenz zu MHB2000	
18.6 Jahre	$A$	$-17199.6$	$-17206.15 \pm 0.37$	$-0.26$
	$B$	$9202.5$	$9204.97 \pm 0.12$	$0.26$
	$A''$	$-17.4$	$0.09 \pm 0.23$	$-3.24$
	$B''$	$0.9$	$0.05 \pm 0.12$	$-1.48$
$\Delta p$ ["/cy]		$-0.41 \pm 0.003$		

**Tab. 5.2:** Nutationskoeffizienten der 18.6-Jahre-Periode aus dem MHB2000-Modell und die Abweichungen dazu aus der Schätzung N1 mit LUNAR 2.1, N2 mit LUNAR 3.0 sowie N3 mit LUNAR 3.0 und verlängerter Datenreihe. Die Werte sind in Millibogensekunden [mas]. In der letzten Zeile ist die geschätzte Korrektur zur zeitlichen Änderung der Präzessionskonstanten angegeben.

Periode	MHB2000	N1	N2	N3	
18.6 Jahre	A	-17206.42	$4.26 \pm 0.15$	$3.73 \pm 0.21$	$1.64 \pm 0.17$
	B	9205.23	$-0.52 \pm 0.12$	$0.00 \pm 0.12$	$0.22 \pm 0.09$
	A''	3.34	$-9.41 \pm 0.15$	$-4.97 \pm 0.15$	$-5.35 \pm 0.11$
	B''	1.54	$-2.56 \pm 0.09$	$-1.57 \pm 0.09$	$-2.14 \pm 0.08$
$\Delta p$ ["/cy]	-0.2997	$-0.1437 \pm 0.0029$	$-0.1261 \pm 0.0028$	$-0.1123 \pm 0.0016$	

Trotz der Einführung neuer Präzessions- und Nutationsmodelle in der Auswertung kommt es weiterhin in allen drei Berechnungsversionen N1, N2 und N3 zu Abweichungen von einigen Millibogensekunden zwischen dem MHB2000-Modell und den geschätzten Nutationskoeffizienten. Die Abweichungen sind in den Koeffizienten A und A'' für den Winkel  $\Delta\psi$  wesentlich größer, als in B'' für  $\Delta\epsilon$ . B passt sehr gut und weicht um weniger als eine Millibogensekunde ab. Die Abweichungen in den *out-of-phase* Termen sind größer, als in den *in-phase* Termen.

Ein Vergleich der Werte aus LUNAR 2.0 in Tabelle 5.1 und N1 zeigt, dass alle Abweichungen der Nutationskoeffizienten durch die Einführung der neuen Transformation zwischen dem erdfesten und dem raumfesten Referenzsystem größer geworden sind. Hier scheint es eine Verdrehung zwischen dem Nutationsmodell und dem LLR-Referenzsystem zu geben, besonders in  $\Delta\psi$ , also entlang der Ekliptik. Der Übergang zu N2 und die damit verbesserte Behandlung vieler Effekte im System Erde führt dazu, dass die Abweichungen der Nutationskoeffizienten etwas kleiner werden. N3 liegt für die Auswertung das gleiche Modell zu Grunde wie N2, allerdings wurde ein längerer Datensatz bis Dezember 2013 ausgewertet. Der Wert für A hat sich nochmals verbessert und weicht nur noch um 1.64 mas vom Modell ab. Die drei Koeffizienten B, A'' und B'' haben sich jeweils durch die längere Datenreihe etwas verschlechtert. Hier wäre eher zu erwarten gewesen, dass alle Koeffizienten von der längeren Datenreihe profitieren. Allerdings werden mit dieser Datenreihe viele NP der Stationen APOLLO und OCA mit hoher Genauigkeit ausgewertet. So können mögliche Probleme im Nutationsmodell deutlicher in der LLR-Auswertung erfasst werden. Insgesamt betrachtet, sind die Abweichungen zum Modell in N3 geringer als in N1.

Die Genauigkeiten der geschätzten Nutationskoeffizienten haben sich zwischen den Ergebnissen aus LUNAR 2.0 und N3 um einige Millibogensekunden verbessert, vor allem für die Koeffizienten von  $\Delta\psi$ .

Betrachtet man die Abweichungen zur zeitlichen Änderung der Präzessionskonstante, sind die Werte aus allen Berechnungen in Tabelle 5.2 wesentlich kleiner, als aus der früheren Berechnung mit LUNAR 2.0. In LUNAR 2.0 beschrieb der Wert die Abweichung zu IAU1976 Präzessionskonstante. Mit dem MHB2000-Modell wird eine Präzessionskonstante von  $-0.2997$  Bogensekunden pro Jahrhundert angegeben, die sich ebenfalls auf das IAU1976 Präzessionsmodell bezieht. In LUNAR 2.1 und LUNAR 3.0 stellt die Präzession direkt den Zusammenhang zwischen dem dynamischen System und dem GCRS her und bezieht sich auf die IAU2006 Präzession, weswegen ein kleinerer Wert für die residuale Präzessionskonstante zu erwarten war.

In Lösung N1 bestehen Korrelationen von 30 – 40 % zwischen den Koeffizienten A'' und B'' mit der Z-Koordinate und -geschwindigkeit des Mondorbits sowie 30 bzw. 50 % mit D-Mond, dem Maß für das dissipative Verhalten des Mondes. Des Weiteren sind die Koeffizienten A und B zu 50 % miteinander korreliert. Die Korrelation der Nutationskoeffizienten mit der Präzessionskonstante beträgt für A und A'' jeweils 10 %, für B 30 %, B'' ist nicht korreliert. In Lösung N2 haben sich die Korrelationen zwischen den Parametern kaum geändert. Nur die Korrelationen zwischen den einzelnen Nutationskoeffizienten sind im Vergleich zu Lösung N1 um 10 % gestiegen. In Lösung N3 sind die Korrelationen zwischen A'' und B'' mit der Z-Koordinate und -geschwindigkeit des Mondorbits auf 40 – 50 % gestiegen, die Korrelationen mit D-Mond betragen jetzt 40 %. Stark



erhöht haben sich die Korrelationen der Nutationskoeffizienten mit den Stationskoordinaten. In N1 und N2 betragen sie in einigen Komponenten höchstens 20 %. In N3 sind es bis zu 50 % mit der X- und Z-Koordinate von APOLLO. Die Korrelation zwischen  $A$  und  $B$  beträgt 50 %, die zwischen  $A''$  und  $B''$  30 %. Die Korrelationen mit der Präzessionskonstante betragen 30 % zu  $A$  und jeweils 10 % zu den anderen Koeffizienten.

Die längere Datenreihe aus Lösung N3 hat die Korrelationen zwischen den Nutationskoeffizienten und der Präzessionskonstante etwas verändert aber nicht signifikant zur Dekorrelation der beiden Parameter beigetragen. Hier liegt eine mögliche Ursache in der Genauigkeit der NP, die in die Auswertung einfließen. Erst ab Ende der 80er Jahre liegt die Genauigkeit der Laufzeiten unter 10 cm (siehe Abbildung 4.2), zu dieser Zeit erreichten auch die Residuen nach der Auswertung Werte unter 10 cm (siehe Abbildung 4.3). Der Beobachtungszeitraum ist zwar theoretisch lang genug für eine Dekorrelation der Parameter, die schlechte Genauigkeit der frühen NP verhindert hier aber, dass dieser Vorteil voll in der Auswertung genutzt werden kann. Eine ähnliche Feststellung machten auch Zerhouni & Capitaine [2009].

Durch die Aktualisierungen aus Kapitel 4 im Zusammenhang mit der längeren Datenreihe können einige Koeffizienten in Lösung N3 nun mit höherer Genauigkeit bestimmt werden als früher. Verbleibende Abweichungen zwischen dem MHB2000-Modell und den Nutationskoeffizienten aus LLR werden einerseits durch Modellierungsungenauigkeiten im Erde-Mond-System verursacht, die durch die Nutation aufgefangen werden. Andererseits sind auch Systematiken im VLBI basierten Nutationsmodell möglich, die durch den Vergleich mit LLR sichtbar werden.

Wie in Abschnitt 4.2.5 beschrieben, werden mit der Aktualisierung in der Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten Referenzsystem nun auch *pole offsets* als Korrekturen an der Nutation in der Auswertung berücksichtigt. Diese liegen vom IERS nur bezogen auf die IAU1980-Nutation vor, können aber auf die IAU2000-Nutation umgerechnet werden. Mögliche Ungenauigkeiten, die durch diese Umrechnung entstehen, können in den hier geschätzten Zuschlägen zu Nutation ebenfalls enthalten sein.

### 5.1.2.2 Nutationskoeffizienten für verschiedene Perioden

Auf Grundlage der drei Berechnungsvarianten N1 – N3 wurden weitere Untersuchungen durchgeführt, in denen auch Nutationskoeffizienten der Perioden für 182.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage zusammen mit denen für die 18.6-Jahre-Periode geschätzt wurden. Die Konfigurationen für N1 – N3 entsprachen denen im vorherigen Abschnitt 5.1.2.1. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.3 zusammengefasst. Dort sind die Perioden nach der Größe ihres Effektes an der Nutation sortiert.

Als erstes erfolgt ein Vergleich der Abweichungen der Koeffizienten für die 18.6-Jahre-Periode aus alleiniger Schätzung (Abschnitt 5.1.2.1) und der Schätzung mit mehreren Perioden gemeinsam. Bei den Ergebnissen von N1 sind die Abweichungen für  $A_{18.6 \text{ Jahre}}$  bei der gemeinsamen Schätzung der vier Perioden um etwa 2.5 mas größer geworden, für die anderen Koeffizienten gab es nur geringfügige Änderungen von weniger als 0.5 mas, also innerhalb der LLR-Analysegenauigkeit. Ein ähnliches Ergebnis der Abweichungen zeigt sich für N2 und N3. Auch die Genauigkeiten der 18.6-Jahre-Periode sind in der gemeinsamen Schätzung mit anderen Perioden etwas schlechter geworden, als bei der alleinigen Schätzung. Für alle drei Berechnungsvarianten werden die Nutationskoeffizienten für  $\Delta\psi$  mit schlechterer Genauigkeit bestimmt als  $\Delta\epsilon$ . Allerdings sind durch die lange Datenreihe in N3 die Genauigkeiten aller Koeffizienten höher als in N1 und N2.

Als nächstes werden die Ergebnisse aller Perioden analysiert. Der Vergleich der Abweichungen zum Modell zwischen N1 und N2 zeigt, dass bei N2 in den Perioden für 18.6 Jahre, 182.6 Tage und 365.3 Tage die Abweichungen zum Modell geringer geworden sind, für 9.3 Jahre sind sie wiederum wesentlich höher.

Die längere Datenreihe in N3 führt im Gegensatz zu N2 nur in einigen Perioden zu Verbesserungen der Koeffizienten. So betragen die Abweichungen für die 9.3-Jahre-Periode jetzt nur noch höchstens 1.5 mas. In der 18.6-Jahre-Periode haben sich  $A$  und  $A''$  verbessert,  $B$  und  $B''$  hingegen verschlechtert. Für die halbjährliche und jährliche Periode sind durch die längere Datenreihe die

**Tab. 5.3:** Nutationskoeffizienten der Perioden für 18.6 Jahre, 182.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage aus dem MHB2000-Modell und die Abweichungen dazu aus der Schätzung N1 mit LUNAR 2.1, N2 mit LUNAR 3.0 sowie N3 mit LUNAR 3.0 und verlängerter Datenreihe. Die Werte sind in Millibogensekunden [mas]. In der letzten Zeile ist die geschätzte Korrektur zur zeitlichen Änderung der Präzessionskonstanten angegeben.

Periode	MHB2000	N1	N2	N3	
18.6 Jahre	A	-17206.42	6.71 ± 0.19	6.23 ± 0.23	2.70 ± 0.20
	B	9205.23	-0.46 ± 0.14	0.05 ± 0.14	-0.48 ± 0.10
	A''	3.34	-9.07 ± 0.17	-7.07 ± 0.17	-4.62 ± 0.12
	B''	1.54	-2.47 ± 0.10	-1.60 ± 0.10	-2.29 ± 0.09
182.6 Tage	A	-1317.09	-0.99 ± 0.09	0.64 ± 0.09	-2.38 ± 0.08
	B	573.03	0.11 ± 0.06	0.10 ± 0.06	0.25 ± 0.05
	A''	-1.37	1.73 ± 0.09	1.30 ± 0.09	1.80 ± 0.07
	B''	-0.46	0.21 ± 0.05	-0.21 ± 0.06	0.23 ± 0.05
9.3 Jahre	A	207.46	2.23 ± 0.14	6.15 ± 0.14	0.45 ± 0.11
	B	-89.75	0.51 ± 0.10	1.83 ± 0.10	-0.15 ± 0.07
	A''	-0.07	-1.00 ± 0.14	-7.14 ± 0.14	-1.50 ± 0.12
	B''	-0.03	0.10 ± 0.11	1.66 ± 0.10	-0.87 ± 0.08
365.3 Tage	A	147.59	-3.10 ± 0.11	-1.35 ± 0.11	-2.91 ± 0.10
	B	7.39	0.50 ± 0.07	0.14 ± 0.08	0.55 ± 0.06
	A''	1.12	-1.42 ± 0.10	-0.48 ± 0.10	-2.30 ± 0.09
	B''	-0.19	0.03 ± 0.06	0.34 ± 0.06	-0.29 ± 0.05
$\Delta p$ ["/cy]	-0.2997	-0.1262 ± 0.0030	-0.1062 ± 0.0029	-0.1208 ± 0.0016	

Abweichungen wesentlich größer geworden. Also profitieren nur die langperiodischen Koeffizienten von der langen Datenreihe. Hier wäre zu erwarten gewesen, dass alle Koeffizienten geringere Abweichungen zeigen. Allerdings ist die Lösung durch die hohe interne Genauigkeit der APOLLO und der neueren OCA-Beobachtungen dominiert. Mögliche systematische Fehler in diesen NP können von der Nutation absorbiert werden und schlagen sich, bedingt durch den relativ kurzen Messzeitraum von APOLLO, besonders in den jährlichen und halbjährlichen Perioden nieder. Eine spezielle Untersuchung zur Nutationsbestimmung aus APOLLO-Daten folgt in Abschnitt 5.1.2.5.

Der Wert der Präzessionskonstanten schwankt in den drei Berechnungsvarianten in einem ähnlichen Bereich, wie bei der Untersuchung im vorherigen Abschnitt 5.1.2.1. Die Genauigkeiten haben sich im Vergleich zur Schätzung der Präzessionskonstanten nur mit der 18.6-Jahre-Periode nicht signifikant verändert.

Die Auswertung der Korrelationen der 18.6-Jahre-Periode zeigt für N1 nur geringe Unterschiede zwischen der alleinigen Schätzung und der gemeinsamen Schätzung mehrerer Perioden. Weitere Korrelationen bestehen zwischen

- $B''_{9.3 \text{ Jahre}}$  und der Z-Koordinate und -geschwindigkeit des Mondorbits mit jeweils 30 %,
- den Koeffizienten der jährlichen Periode und einigen Reflektorkoordinaten von bis zu 40 %,
- den jährlichen *in-phase* Nutationskoeffizienten und der Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems von 30 – 40 %,
- $A_{18.6 \text{ Jahre}}$  und  $A_{9.3 \text{ Jahre}}$  mit 50 %,
- den 9.3-Jahre *in-phase* sowie den 9.3-Jahre *out-of-phase* Komponenten mit jeweils 50 %,
- $A''_{18.6 \text{ Jahre}}$  und  $A''_{9.3 \text{ Jahre}}$  mit 30 %.

Für N2 zeigen die Korrelationen sehr ähnliche Werte wie für N1. Die Korrelationen der Koeffizienten der 18.6- und 9.3-Jahre-Perioden sind etwas geringer geworden. N3 zeigt wie in der vorherigen Untersuchung wieder erhöhte (bis zu 60 %) Korrelationen mit der X- und Z-Koordinate von APOLLO. Die weiteren Korrelationen in Lösung N3 unterscheiden sich nicht wesentlich von denen in N2.

Aus den Untersuchungen dieses Abschnitts lässt sich zusammenfassen, dass

- die Schätzung der Nutationskoeffizienten für mehrere Perioden gleichzeitig möglich ist, allerdings sind die Zuschläge der Koeffizienten der 18.6-Jahre-Periode im Gegensatz zur alleinigen Schätzung höher;
- die verbesserte Berücksichtigung der Effekte im System Erde in N2 zu geringeren Abweichungen in den jährlichen und halbjährlichen Nutationskoeffizienten führt;
- die längere Datenreihe eine genauere Schätzung der Nutationskoeffizienten ermöglicht;
- durch die längere Datenreihe und die Beobachtungen mit hoher Genauigkeit der Stationen APOLLO und OCA die 18.6- und 9.3-Jahre-Perioden geringere Abweichungen zum MHB2000-Modell haben, dagegen aber die jährlichen und halbjährlichen Koeffizienten höhere Abweichungen zeigen. Dies hängt mit der nicht ganz gleichmäßigen Verteilung der Beobachtungen über das Jahr zusammen.

### 5.1.2.3 Nutationskoeffizienten und Störrotationen

In den Untersuchungen der letzten beiden Abschnitte wurde vor der Schätzung der Nutationskoeffizienten eine Schätzung der Störrotationen zur Anpassung der Referenzsysteme durchgeführt. Wird das Nutationsmodell dabei festgehalten, werden mögliche Abweichungen der Nutation von den Störrotationen aufgenommen. Um zu untersuchen, welchen Einfluss die Störrotationen explizit auf die Schätzung der Nutationskoeffizienten (18.6 Jahre, 182.6 Tage, 9.3 Jahre, 365.3 Tage) haben, wurden die folgenden Berechnungen durchgeführt:

**N4** Schätzung der Nutationskoeffizienten ohne Anpassung der Referenzsysteme;

**N5** wie N4 aber Love-Zahl  $k$  und Dissipationsparameter  $D$  des Mondes wurden festgehalten;

**N6** Störrotationen  $\theta_X, \theta_{\dot{X}}, \theta_Y$  und  $\theta_{\dot{Y}}$  wurden gleichzeitig mit den Nutationskoeffizienten geschätzt. Die Komponenten in Z-Richtung wurden nicht geschätzt, da sie zu 100 % mit den Stationskoordinaten korreliert sind.

Allen Berechnungen lag die Programmversion LUNAR 3.0 mit 20047 NP bis Dezember 2013 zu Grunde. Die Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten Referenzsystem wurde über das FW-Modell und den Frühlingspunkt realisiert. Tabelle 5.4 stellt die Ergebnisse der Untersuchungen dar.

Ein Vergleich von N4 mit Lösung N3 des letzten Abschnitts zeigt, dass die Abweichungen der Nutationskoeffizienten ohne Anpassung der Referenzsysteme lediglich in den  $\Delta\psi$  Koeffizienten der 9.3-Jahre-Periode um etwa 2 mas schlechter geworden sind. In allen anderen Perioden gab es nur geringe Abweichungen, die kaum signifikant sind. Die Genauigkeiten haben sich bei N4 im Vergleich zu N3 leicht verschlechtert.

Betrachtet man die Korrelationen der Nutationskoeffizienten mit anderen Parametern der Untersuchung, gibt es zwischen N3 und N4 nur in einigen Komponenten Unterschiede. Allerdings sind in N4 die Korrelationen von  $A''_{18.6\text{Jahre}}$  und  $B''_{18.6\text{Jahre}}$  zu  $k$ - und  $D$ -Mond mit 30 bzw. 40 % relativ hoch, im Vergleich zu den Korrelationen mit anderen Parametern.

Auf Grund dieser Korrelationen wurden in der Berechnung N5 keine Störrotationen geschätzt und zusätzlich die Parameter  $k$ - und  $D$ -Mond festgehalten. Dies führt dazu, dass die *out-of-phase* Terme der 18.6-Jahre-Periode wesentlich geringere Abweichungen zum Modell zeigen. Hier haben sich auch die Genauigkeiten verbessert. Die *out-of-phase* Terme der 9.3-Jahre-Periode und alle jährlichen Terme zeigen ebenfalls etwas geringere Abweichungen. Die Genauigkeiten haben sich kaum verändert.

Die jährlichen *in-phase* Terme sind bei festgehaltenem  $k$ - und  $D$ -Mond mit dem Mondorbit gar nicht mehr korreliert (in N4 etwa mit 20 %) und nur noch gering mit den Reflektorkoordinaten (in N4 teilweise bis zu 40 %). Dies bedeutet, dass die jährlichen *in-phase* Koeffizienten Abweichungen des Mondorbits aufnehmen, wenn gleichzeitig  $k$ - und  $D$ -Mond geschätzt werden.

Wie an den bisherigen Ergebnissen zu sehen, kann nicht ganz klar entschieden werden, ob eine Anpassung der Referenzsysteme tatsächlich sinnvoll ist. Betrachtet man zusätzlich die Abweichun-

**Tab. 5.4:** Nutationskoeffizienten der Perioden für 18.6 Jahre, 182.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage aus dem MHB2000-Modell und die Abweichungen dazu aus der Schätzung N4 – N6 zur Untersuchung des Einflusses der Störrotationen und der Elastizitäts- bzw. Dissipationsparameter auf die Schätzung der Nutationskoeffizienten. Die Werte sind in Millibogensekunden [mas]. In der letzten Zeile ist die geschätzte Korrektur zur zeitlichen Änderung der Präzessionskonstanten angegeben.

Periode	MHB2000	N4	N5	N6	
18.6 Jahre	A	-17206.42	-1.32 ± 0.22	-1.40 ± 0.22	1.89 ± 0.19
	B	9205.23	-0.67 ± 0.12	-0.54 ± 0.12	-0.22 ± 0.10
	A''	3.34	-4.35 ± 0.14	-1.96 ± 0.13	-3.71 ± 0.12
	B''	1.54	-2.45 ± 0.10	-1.48 ± 0.10	-1.35 ± 0.09
182.6 Tage	A	-1317.09	-1.21 ± 0.09	-1.30 ± 0.09	-1.49 ± 0.08
	B	573.03	0.07 ± 0.05	0.12 ± 0.05	0.08 ± 0.05
	A''	-1.37	1.34 ± 0.09	1.50 ± 0.09	1.22 ± 0.07
	B''	-0.46	0.14 ± 0.06	0.22 ± 0.06	-0.08 ± 0.05
9.3 Jahre	A	207.46	2.10 ± 0.12	2.73 ± 0.12	-0.88 ± 0.10
	B	-89.75	-0.02 ± 0.08	0.06 ± 0.08	-0.57 ± 0.07
	A''	-0.07	-3.26 ± 0.14	-3.08 ± 0.13	-1.74 ± 0.11
	B''	-0.03	0.12 ± 0.09	0.01 ± 0.09	-0.18 ± 0.08
365.3 Tage	A	147.59	-2.40 ± 0.11	-1.96 ± 0.10	-1.47 ± 0.09
	B	7.39	0.92 ± 0.07	0.64 ± 0.07	0.58 ± 0.06
	A''	1.12	-2.25 ± 0.11	-2.17 ± 0.11	-1.47 ± 0.09
	B''	-0.19	-0.25 ± 0.06	-0.17 ± 0.05	-0.04 ± 0.05
$\Delta p$ ["/cy]	-0.2997	/	/	-0.1467 ± 0.0016	

gen (hier nicht dargestellt) der geschätzten Stationskoordinaten von den entsprechenden Werten des ITRF, kann man allerdings feststellen, dass diese eine Abweichung in der Z-Koordinate aller McDonald Stationen von 28 cm aufweisen und in X der Station HARL sogar 34 cm, wenn die Anpassung der Referenzsysteme nicht durchgeführt wird. Wird die Anpassung berechnet wie in N3, sind die Abweichungen in der Z-Koordinate McDonald bei 13 cm und in der X-Koordinate HARL bei 25 cm. Daraus kann geschlossen werden, dass die Anpassung der Referenzsysteme in der LLR-Auswertung nötig ist.

Um nun zu verhindern, dass Anteile der Nutation bei der vorherigen Schätzung der Störrotationen von diesen Parametern absorbiert werden, wird in der Untersuchung N6 die Schätzung der Störrotationen  $\theta_X, \theta_{\dot{X}}, \theta_Y$  und  $\theta_{\dot{Y}}$  sowie der Nutation gleichzeitig durchgeführt. Eine Schätzung in  $\theta_Z$  ist hier nicht möglich, da diese Richtung voll mit den Stationskoordinaten korreliert ist und somit dort zu fehlerhaften Zuschlägen führen würde.

An den Ergebnissen von N6 im Vergleich zu N4 und N5 sieht man, dass einige Koeffizienten geringere Abweichungen zum Modell aufweisen, einige aber auch höhere. Eine signifikante Verbesserung ergibt sich für A und A'' der 9.3 Jahre und der jährlichen Periode. Die Genauigkeiten sind bei allen Koeffizienten besser, als in N4 und N5. Vergleicht man die geschätzte Korrektur zur zeitlichen Änderung der Präzessionskonstanten mit der aus N3, ergibt sich in N6 ein etwas höherer Wert. Die Genauigkeit ändert sich nicht.

Die Korrelationen in N6 unterscheiden sich bei den meisten Parametern wenig von denen in N4. Die höchsten Korrelationen der Nutationskoeffizienten mit den Störrotationen betragen

- $B''_{18.6 \text{ Jahre}}$  mit  $\theta_X$  30 %,
- $B_{9.3 \text{ Jahre}}$  mit  $\theta_{\dot{X}}$  30 %,
- $B''_{9.3 \text{ Jahre}}$  mit  $\theta_X$  40 %,
- $B_{365.3 \text{ Tage}}$  mit  $\theta_X$  30 %.

Mit den Störrotationen sind also eher die Koeffizienten, die zu  $\Delta\epsilon$  gehören korreliert. Schätzt man sie mit der Nutation gemeinsam, nehmen die Störrotationen Anteile der Nutationskoeffizienten auf und

verfälschen so die Zuschläge. Außerdem führt die gemeinsame Schätzung von Nutationskoeffizienten und Störrotationen zu einer schwachen Datumsfestlegung des raumfesten Referenzsystems.

Vergleicht man die Ergebnisse von N6 mit denen von N3, sieht man für die 18.6-Jahre und die halbjährliche Periode geringere Abweichungen bei N6, ebenso in  $A$  und  $A''$  der jährlichen Periode. Auch die Genauigkeiten sind für die meisten Perioden in N6 besser als in N3. Bezieht man allerdings auch die Stationskoordinaten in die Betrachtung ein, zeigt sich, dass diese durch die fehlende Anpassung in  $\theta_Z$  stärker von den ITRF-Werten abweichen als in N3.

Zusammenfassend lässt sich folgern, dass

- eine Anpassung der Referenzsysteme in der LLR-Auswertung nötig und sinnvoll ist, um einerseits die Schätzung der Nutationskoeffizienten nicht zu verfälschen und andererseits fehlerhafte Zuschläge in den Stationskoordinaten zu verhindern;
- mit Blick auf die Stationskoordinaten eine Anpassung um  $\theta_Z$  ebenfalls nötig ist;
- die gemeinsame Schätzung von Störrotationen und Nutationskoeffizienten zwar die Genauigkeiten der Nutation verbessert, aber nicht klar ist, inwieweit Effekte der Nutation in den Störrotationen enthalten sind und die Nutationsschätzung somit verfälschen. Außerdem führt die gleichzeitige Schätzung zu einer schwachen Datumsfestlegung für den CIP. Somit sollten  $\theta_X, \theta_Y$  und  $\theta_Z$  getrennt von den Nutationskoeffizienten bestimmt werden;
- das Verhalten des Mondkörpers in Form von  $k$ - und  $D$ -Mond Einfluss auf die Nutationskoeffizienten hat. Hier sollten weitere Untersuchungen folgen.

#### 5.1.2.4 Nutationskoeffizienten aus verschiedenen Transformationsmethoden

Wie in Abschnitt 4.2.5 beschrieben, ist es mit dem in LUNAR 3.0 eingeführten Transformationsmodul möglich, die Variante der Transformation zwischen dem erdfesten und raumfesten Referenzsystem auf einfache Weise auszutauschen. Nachdem in den letzten Abschnitten die Nutationskoeffizienten jeweils über die Transformationsmatrix FW und den Frühlingspunkt geschätzt wurden, soll es in diesem Abschnitt darum gehen, die Transformationsmethoden FW, P03 und FWCI0 zu vergleichen, die in Abschnitt 2.4.1 erläutert wurden. Über die folgenden Berechnungen lassen sich möglicherweise Rückschlüsse auf die LLR-Auswertung und die einzelnen Modelle ziehen:

**N3** Vergleichslösung für FW aus Abschnitt 5.1.2.2;

**N7** Transformation erdfest-raumfest über P03;

**N8** Transformation erdfest-raumfest über FWCI0.

Es wurden jeweils 20 047 NP bis Dezember 2013 ausgewertet. Außerdem wurden in einem ersten Berechnungsschritt die Störrotationen  $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$  bestimmt. Danach wurden diese Werte festgehalten und die Nutationskoeffizienten der Perioden für 18.6 Jahre, 182.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage zusammen mit der Präzessionskonstanten geschätzt. Die jeweiligen Ergebnisse der Berechnungen sind in Tabelle 5.5 zusammengestellt.

Der Vergleich der Ergebnisse für die 18.6-Jahre-Periode zeigt besonders in den *in-phase* Termen  $A$  und  $B$  große Unterschiede bei den Abweichungen zum MHB2000-Modell. In  $A$  für N7 sind es mit 5.21 mas und für N8 mit 8.12 mas wesentlich höhere Werte als für N3 mit 2.70 mas. Die *out-of-phase* Terme weisen zwischen den verschiedenen Berechnungsmethoden geringere Unterschiede auf. Auch bei der halbjährlichen Periode sind die *out-of-phase* Terme sehr ähnlich. Bei der 9.3-Jahre-Periode sind die Unterschiede zum MHB2000-Modell in den verschiedenen Berechnungsarten wiederum sehr unterschiedlich. Für N7 sind in der jährlichen Periode die Abweichungen zum Modell geringer als bei N3. Es fällt außerdem auf, dass die Abweichungen zum Modell bei N7 und N8 in den jährlichen und halbjährlichen Perioden ähnliche Ergebnisse liefern.

Bei den Genauigkeiten ist auffällig, dass jeweils die Koeffizienten für  $\Delta\epsilon_{ls}$  in allen drei Berechnungsmethoden mit ähnlicher Genauigkeit bestimmt wurden. Allerdings sind die Genauigkeiten für die Koeffizienten von  $\Delta\psi_{ls}$  bei N3 deutlich besser und werden über N7 zu N8 schlechter. Die

**Tab. 5.5:** Nutationskoeffizienten der Perioden für 18.6 Jahre, 182.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage aus der Schätzung mit LUNAR 3.0, wobei verschiedene Transformationsmethoden genutzt wurden: N3 über FW, N7 über P03 und N8 über FWCI0. Alle Werte sind in Millibogensekunden [mas]. In der letzten Zeile ist die geschätzte Korrektur zur zeitlichen Änderung der Präzessionskonstanten angegeben.

Periode	MHB2000	N3	N7	N8	
18.6 Jahre	A	-17206.42	$2.70 \pm 0.20$	$5.21 \pm 0.25$	$8.12 \pm 0.28$
	B	9205.23	$-0.48 \pm 0.10$	$-1.32 \pm 0.11$	$-2.30 \pm 0.11$
	A''	3.34	$-4.62 \pm 0.12$	$-3.46 \pm 0.21$	$-3.79 \pm 0.24$
	B''	1.54	$-2.29 \pm 0.09$	$-2.19 \pm 0.10$	$-2.46 \pm 0.10$
182.6 Tage	A	-1317.09	$-2.38 \pm 0.08$	$-1.69 \pm 0.11$	$-1.45 \pm 0.13$
	B	573.03	$0.25 \pm 0.05$	$0.15 \pm 0.05$	$0.10 \pm 0.05$
	A''	-1.37	$1.80 \pm 0.07$	$1.85 \pm 0.09$	$1.77 \pm 0.11$
	B''	-0.46	$0.23 \pm 0.05$	$0.22 \pm 0.05$	$0.10 \pm 0.05$
9.3 Jahre	A	207.46	$0.45 \pm 0.11$	$0.85 \pm 0.18$	$2.43 \pm 0.19$
	B	-89.75	$-0.15 \pm 0.07$	$-0.13 \pm 0.08$	$0.34 \pm 0.08$
	A''	-0.07	$-1.50 \pm 0.12$	$-0.97 \pm 0.20$	$-0.34 \pm 0.21$
	B''	-0.03	$-0.87 \pm 0.08$	$-1.35 \pm 0.09$	$-1.71 \pm 0.09$
365.3 Tage	A	147.59	$-2.91 \pm 0.10$	$-0.51 \pm 0.16$	$0.42 \pm 0.18$
	B	7.39	$0.55 \pm 0.06$	$0.01 \pm 0.07$	$-0.24 \pm 0.07$
	A''	1.12	$-2.30 \pm 0.09$	$-0.06 \pm 0.11$	$0.09 \pm 0.12$
	B''	-0.19	$-0.29 \pm 0.05$	$-0.02 \pm 0.05$	$0.14 \pm 0.05$
$\Delta p$ ["/cy]	-0.2997	$-0.1208 \pm 0.0016$	$-0.1284 \pm 0.0015$	$-0.1326 \pm 0.0016$	

Werte und Genauigkeiten der Präzessionskonstante sind aus allen drei Berechnungsmethoden sehr ähnlich.

Betrachtet man die Korrelationen der Nutationskoeffizienten untereinander und zu anderen Parametern der Auswertung, fällt auf, dass diese für N7 und N8 sehr ähnlich sind und sich nur um wenige Prozent unterscheiden. Zwischen N3 und N7/N8 bestehen aber einige Unterschiede in den Korrelationen, die im Folgenden zusammengefasst werden:

- bei N3 finden sich Korrelationen von bis zu 60 % zwischen den Koeffizienten der 18.6-Jahre-Periode mit den X- und Z-Koordinaten von APOLLO, die bei N7/N8 nur bis zu 40 % betragen;
- die Koeffizienten der jährlichen Periode sind in N7/N8 bis zu 60 % mit den Reflektorkoordinaten korreliert;
- allgemein sind in N7/N8 die Koeffizienten mehr mit den Reflektorkoordinaten sowie dem Mondorbit und weniger mit den Stationskoordinaten korreliert, bei N3 ist es umgekehrt;
- die einzelnen *in-phase* sowie *out-of-phase* Terme sind bei N7/N8 stärker miteinander korreliert als bei N3, dafür sind die langperiodischen Nutationskoeffizienten geringer miteinander korreliert.

Interessant an den durchgeführten Analysen sind als erstes die unterschiedlichen Ergebnisse zwischen N3 und N7. Beide Transformationsmethoden unterscheiden sich nur durch die Formulierung der Präzessionsmatrix. Die Formulierung sowie die Ableitungen für die Nutation sind gleich. Trotzdem hat der Unterschied einen großen Einfluss auf das Ergebnis. In N3 sind die Abweichungen in A und A'' über die Perioden von 18.6 Jahren, 182.6 Tagen und 365.3 Tagen verteilt. In N7 sind die Abweichungen eher in den Koeffizienten der 18.6-Jahre-Periode konzentriert. Eine ähnliche Aussage lässt sich ebenfalls für N8 treffen. Auch hier sind die Abweichungen in den Koeffizienten der 18.6-Jahre-Periode höher als in den anderen Perioden.

### 5.1.2.5 Nutationskoeffizienten aus APOLLO-Daten

Wie in den Abbildungen 5.1 und 5.2 sowie der dazugehörigen Diskussion gezeigt, ist die Verteilung der LLR-Daten über den synodischen Winkel für die Schätzung der Nutationskoeffizienten der 13.6-Tage-Periode ungünstig. Die Station APOLLO ist mit ihrem leistungsstarken Laser in der Lage, auch nahe der Vollmondphase zu messen. Dies führt zu einer wesentlich homogeneren Verteilung der Daten über den synodischen Winkel, wie in Abbildung 5.3 dargestellt. Es finden sich zwar noch immer die charakteristisch vielen Beobachtungen um  $120^\circ$  und  $270^\circ$ , jedoch werden auch in den Phasen davor und danach wesentlich mehr Beobachtungen durchgeführt als von anderen Stationen. Nur in der Neumondphase um  $0^\circ$  bzw.  $360^\circ$  sind auch von APOLLO keine Entfernungsmessungen zum Mond möglich.

In diesem Abschnitt wird untersucht, mit welcher Genauigkeit die Nutationskoeffizienten aus der wesentlich homogeneren Verteilung der APOLLO-Daten, die auch noch eine hohe Messgenauigkeit haben, geschätzt werden können. Außerdem wird untersucht, ob sich die Daten dazu eignen, auch die 13.6-Tage-Periode der Nutation zusammen mit der jährlichen und halbjährlichen Periode zu schätzen.

Die Berechnungen wurden analog zu den Bedingungen von Lösung N3 durchgeführt. Dies bedeutet, in einem ersten Berechnungsschritt wurden die Störrotationen  $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$  aus einem Datensatz mit allen NP bestimmt, danach wurden sie festgehalten. Außerdem wurden die Stationskoordinaten der anderen Stationen auf ihren Modellwerten fixiert. Geschätzt wurden die Werte der Nutationskoeffizienten zusammen mit der Präzessionskonstanten. Die Berechnungen hatten folgende weitere Merkmale:

**N9** Nutationskoeffizienten aller Perioden wurden aus 20 047 NP aller Stationen geschätzt;

**N10** Nutationskoeffizienten der 182.6-Tage, 13.6-Tage und 365.3-Tage-Periode wurden aus 1801 NP der Station APOLLO geschätzt.

Die Ergebnisse der beiden Untersuchungen finden sich in Tabelle 5.6. In Lösung N10 erhalten  $A''$  in allen Perioden kleinere Abweichungen als bei N9. Bei  $A$  gibt es nur geringe Unterschiede zwischen den beiden Lösungen.  $B$  und  $B''$  sind in der jährlichen und halbjährlichen Periode bei N10 jeweils etwas schlechter als in N9. Trotzdem gibt es bei den jährlichen und halbjährlichen Koeffizienten zwischen N9 und N10 eine gute Übereinstimmung. Die Genauigkeiten sind für alle Perioden in N10 schlechter als in N9, also können die Koeffizienten aus dem wesentlich kürzeren Zeitraum der APOLLO-Daten nur mit geringerer Genauigkeit bestimmt werden als aus dem gesamten Datensatz. An dieser Stelle bestätigt sich die Vermutung aus Abschnitt 5.1.2.2, dass die Abweichungen der jährlichen und halbjährlichen Perioden systematische Fehler aus den APOLLO-Daten enthalten können.

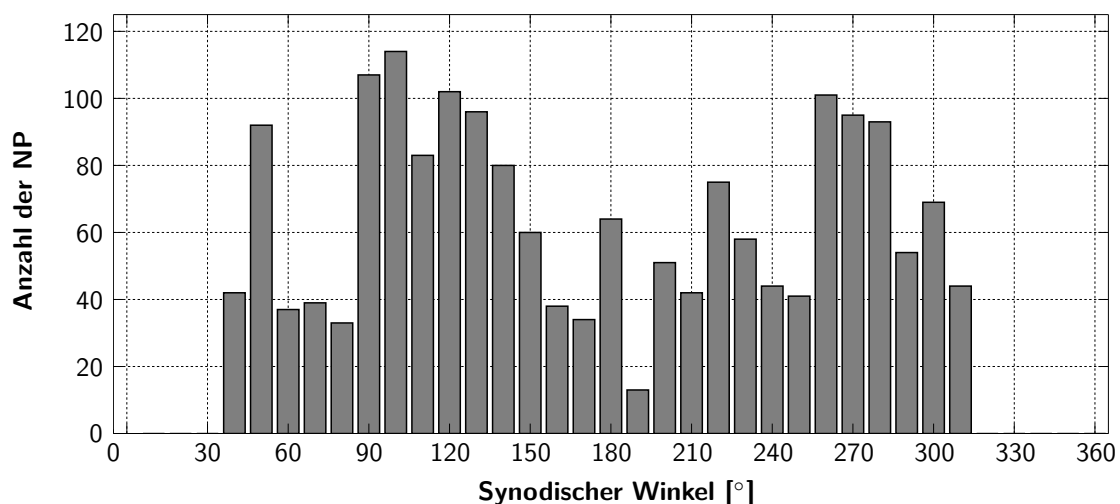


Abb. 5.3: Histogramm von 1801 NP der Station APOLLO aufgetragen über dem synodischen Winkel

**Tab. 5.6:** Nutationskoeffizienten der Perioden für 182.6 Tage, 13.6 Tage und 365.3 Tage aus N9 mit 20 047 NP aller Stationen und aus N10 mit 1801 NP der Station APOLLO. Alle Werte sind in Millibogensekunden [mas].

Periode	MHB2000	N9	N10	
182.6 Tage	A	-1317.09	$-1.25 \pm 0.08$	$-1.16 \pm 0.17$
	B	573.03	$0.13 \pm 0.05$	$-0.36 \pm 0.10$
	A''	-1.37	$1.89 \pm 0.07$	$0.79 \pm 0.15$
	B''	-0.46	$-0.10 \pm 0.05$	$-0.38 \pm 0.10$
13.6 Tage	A	-227.64	$1.30 \pm 0.10$	$1.42 \pm 0.18$
	B	97.85	$-0.69 \pm 0.07$	$-1.21 \pm 0.12$
	A''	0.28	$-4.58 \pm 0.08$	$-1.05 \pm 0.18$
	B''	0.14	$-2.54 \pm 0.06$	$-0.80 \pm 0.11$
365.3 Tage	A	147.59	$-1.87 \pm 0.09$	$-2.16 \pm 0.22$
	B	7.39	$0.35 \pm 0.06$	$0.37 \pm 0.12$
	A''	1.12	$-1.02 \pm 0.09$	$-0.62 \pm 0.20$
	B''	-0.19	$-0.19 \pm 0.05$	$-0.51 \pm 0.09$

Die Koeffizienten der 13.6-Tage-Periode können bei N9 ebenfalls mit besserer Genauigkeit geschätzt werden, als in N10. Allerdings sieht man bei N9 in den *out-of-phase* Termen große Abweichungen zum Modell, in denen wahrscheinlich Effekte der jährlichen und halbjährlichen Periode absorbiert werden. Diese Abweichungen sind in N10 wesentlich kleiner.

Die Korrelationen der Nutationskoeffizienten zu den anderen Parametern der Schätzung unterscheiden sich in den beiden Lösungen N9 und N10 nur wenig voneinander. Es gibt jeweils die schon früher festgestellten Korrelationen von bis zu 30 % mit den Stationskoordinaten und bis zu 40 % mit den Reflektorkoordinaten, dies hauptsächlich in der jährlichen Periode.

Aus der Untersuchung lässt sich schließen, dass die jährlichen und halbjährlichen Nutationskoeffizienten gut mit dem gesamten Datensatz der LLR-Beobachtungen bestimmt werden können. Die 13.6-Tage-Periode sollte weiterhin nicht aus dem gesamten Datensatz berechnet werden, da etwaige Modellierungsungenauigkeiten, die an anderen Stellen bestehen, durch die schlechte Datenverteilung über den synodischen Monat, in die Koeffizienten der 13.6-Tage-Periode fließen. Allerdings wird eine längere Datenreihe der APOLLO Station in Zukunft eine gute Schätzung dieser Koeffizienten mit den Koeffizienten der anderen Perioden ermöglichen.

### 5.1.3 Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

Bei einem Vergleich der Nutationsergebnisse aus LUNAR 2.0 (Tabelle 5.1) und LUNAR 3.0 (Tabelle 5.2) erkennt man, dass sich die Abweichungen der Nutationskoeffizienten zum MHB2000-Modell durch die neue Programmversion erhöht haben. Dies liegt hauptsächlich daran, dass die Auswertestrategie verändert wurde und nun nicht mehr Nutationskoeffizienten und Störrotationen gemeinsam geschätzt werden. So wird eine höhere Stabilität in der Datumsfestlegung des raumfesten Referenzsystems erreicht.

Die Abweichungen zwischen Nutationskoeffizienten und dem MHB2000-Modell betreffen hauptsächlich die Komponenten in  $\Delta\psi$ . Dies bedeutet eine Abweichung entlang der Ekliptik, was auf eine Verdrehung des LLR-Systems zum BCRS hinweist. Wie in den Abschnitten 2.1.1.2 und 4.2.5 erläutert, wird die Auswertung der LLR-Daten im Ekliptiksystem durchgeführt, dadurch besteht eine erhöhte Sensitivität der Auswertung auf die Komponenten in  $\Delta\psi$ . Außerdem wird, wie in Abbildung 5.1 dargestellt, die Mondbahn in einem Umlauf nicht kontinuierlich beobachtet. Dies erschwert die Trennung einiger Parameter und mögliche Modellinkonsistenzen wirken sich stärker aus. Aber auch Systematiken im VLBI-basierten MHB2000-Modell können nicht ausgeschlossen werden, da diesem Modell zum Beispiel die Präzession von Lieske et al. [1977] zu Grunde liegt.



Größere Abweichungen zum MHB2000-Modell treten vor allem in den langperiodischen Koeffizienten der Nutation auf. Ein ähnliches Ergebnis erhielten Zerhouni & Capitaine [2009], die aus der Schätzung von *pole offsets* im *post-processing* Komponenten für verschiedene Perioden der Nutation bestimmt haben. In deren Untersuchung zeigten sich ebenfalls in den langperiodischen Komponenten größere Abweichungen.

Es hat sich weiterhin gezeigt, dass die Schätzung der Nutationskoeffizienten auf verschiedene Effekte im Erde-Mond-System sensitiv ist. Sowohl die ungleichmäßige Verteilung der Beobachtungen über jährliche und synodische Zeiträume als auch die Berücksichtigung von kurzperiodischen Effekten auf die Stationskoordinaten spielen eine wichtige Rolle. Deswegen muss eine hohe Modellierungsgenauigkeit der diversen Effekte auf die Stationskoordinaten gewährleistet werden. Parameter, die den inneren Aufbau des Mondes beschreiben, sind mit Koeffizienten der Nutation korreliert. Daher ist es wichtig, das Modell der Mondzeiten künftig weiter zu verbessern. Hohe Zuschläge in den langperiodischen Nutationskoeffizienten können außerdem durch Ungenauigkeiten in der Modellierung des Mondorbits verursacht werden.

Eine weitere Quelle für mögliche negative Effekte in der Schätzung von Nutationskoeffizienten sind die in LUNAR 3.0 genutzten *pole offsets*, die als Korrekturen in die Nutation einfließen. Sie müssen in der Transformation berücksichtigt werden, um die angestrebte Auswertegenauigkeit zu erreichen. Allerdings beziehen sich die aktuell vom IRES bereitgestellten Werte auf die Nutation von Wahr [1981b] und müssen auf die Nutation von Mathews et al. [2002] umgerechnet werden. Diese Umrechnung kann zu Effekten führen, die in die geschätzten Nutationszuschläge einfließen.

Die LLR-Ergebnisse, die Genauigkeiten von 0.5 mas in  $\Delta\psi$  und 0.3 mas in  $\Delta\epsilon$  erreichen, können bei einer Kombination von LLR und VLBI durch die Langzeitstabilität zu einem präziseren Nutationsmodell beitragen, auch wenn sie schlechter als die Nutationsergebnisse aus VLBI sind. Eine mögliche Kombination von LLR und VLBI auf Normalgleichungsebene zur Bestimmung von Nutationskoeffizienten und der Präzessionskonstante wurde schon durch Charlot et al. [1995] beschrieben. Die Form der Transformation aus dem erdfesten ins raumfeste System spielt in der LLR-basierten Schätzung eine Rolle und sollte in der Kombination berücksichtigt werden.

## 5.2 Schätzung von Erdrotationsparametern

In Abschnitt 2.3.4 wurden für die ERP die Werte des IERS und jeweils nötige Korrekturen eingeführt, die über die Matrizen  $\mathbf{R}_3(-\text{GST})$  und  $\mathbf{W}$  in die Transformationsmatrix (5.1) einfließen. Die ERP, die als Reihen vom IERS bereitgestellt werden, stellen eine Kombination der Lösungen verschiedener geodätischer Messverfahren dar [Gambis, 2004], deren Technik und Auswertung sich in den letzten Jahren verbessert haben. Außerdem werden die ERP nun konsistent zusammen mit den Stationskoordinaten des ITRF [Altamimi et al., 2007], [Altamimi et al., 2011] und DTRF [Seitz et al., 2012] ausgewertet. Die Methode zur Kombination der ERP-Reihe ist in Bizouard & Gambis [2009] beschrieben. Die terrestrischen Polkoordinaten haben aktuell eine Genauigkeit im Bereich von etwa 30  $\mu\text{s}$ , die Erdrotationsphase von bis zu 6  $\mu\text{s}$ . Die Genauigkeiten, die von den einzelnen Messverfahren VLBI, SLR und GPS für die ERP erreicht werden, sind in Tabelle 5.7 zusammengefasst.

**Tab. 5.7:** Zusammenstellung der Genauigkeiten von Erdrotationsparametern, die aus anderen geodätischen Raumverfahren bestimmt werden.

Verfahren	Parameter				Quelle
	$x_p$ [mas]	$y_p$ [mas]	$\Delta\text{UT1}$ [ms]	LOD [ms/d]	
VLBI kombi	0.04	0.04	0.003	0.005	Böckmann et al. [2010]
VLBI 24 Std Session	0.1	0.1	0.1	0.1	Schuh et al. [2003]
GPS	0.03 – 0.05			0.01	Ferland & Piraszewski [2009]
SLR	0.05	0.05		0.01	Sciarretta et al. [2010]

Wie bereits Fröhlich [1989], Müller [1991] und Biskupek & Müller [2009a] gezeigt haben, ist es möglich, aus LLR-Daten Werte für die ERP zu bestimmen. Bisher wurde dies über die sogenannte *daily decomposition* Methode nach Dickey et al. [1985] realisiert, bei der Zuschläge für die Schwankung der Erdrotationsphase  $\Delta UT$  sowie für die Breitenschwankung einer Station  $\Delta\phi$  aus den Residuen nach der Ausgleichung bestimmt wurden. In der Breitenschwankung sind, unter anderem, die Polkoordinaten kombiniert. Diese Methode hat jedoch einige Nachteile. Es ist eine gewisse Erfahrung in der Filterung der Daten nötig, um sinnvolle Werte für die ERP zu erhalten. Außerdem geht man davon aus, dass die für die Berechnung von  $\Delta UT$  benötigten Polkoordinaten fehlerfrei sind [Müller, 1991], was tatsächlich nicht der Fall ist. Ein weiterer Nachteil ist, dass alle verbliebenen Modellfehler in den Residuen der LLR-Daten den ERP zugeordnet werden. Letztendlich können auch keine Korrelationen zwischen den ERP und anderen Parametern des Erde-Mond-Systems untersucht werden.

Die Untersuchung von Biskupek & Müller [2009a] hat gezeigt, dass ERP, die über *daily decomposition* bestimmt und wieder in die Ausgleichung eingeführt wurden, kaum signifikante Verbesserungen in den Residuen zur Folge hatten. Dies wird ab etwa 1993 besonders deutlich, da ab dieser Zeit ERP vom IERS mit hoher Genauigkeit vorliegen. Die Schätzung der ERP sollte also direkt in der Ausgleichung der LLR-Daten erfolgen. Nur so ist es möglich, die Korrelationen und Einflüsse anderer Parameter des Erde-Mond-Systems auf die ERP unmittelbar zu berücksichtigen.

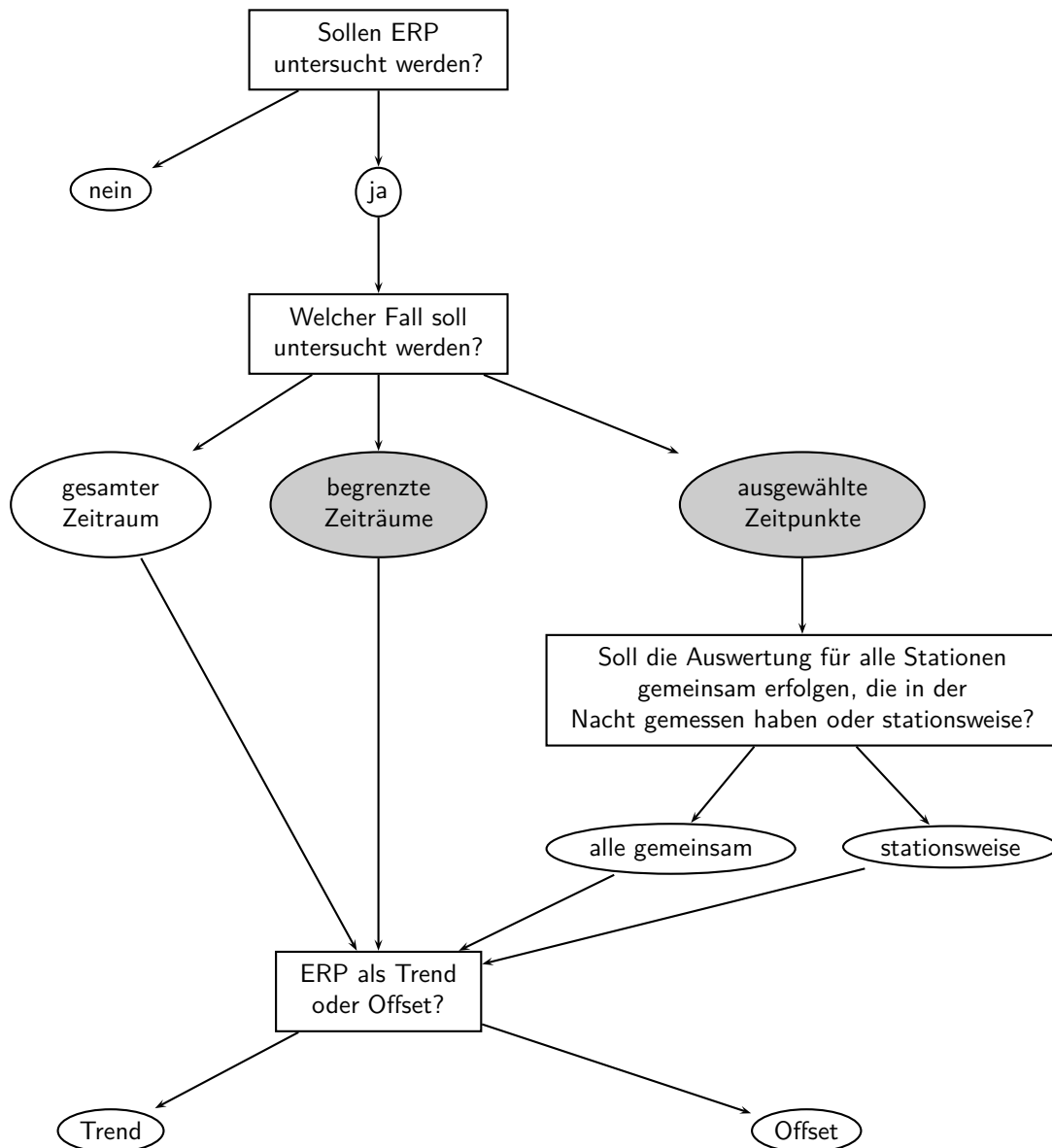
Zur Schätzung von ERP direkt in der Ausgleichung der LLR-Daten hatte schon Bauer [1989] eine Möglichkeit in der LLR-Auswertesoftware implementiert. Für den jeweiligen Beobachtungszeitpunkt wurde ein Zuschlag zu den a-priori ERP berechnet und auf die beiden umliegenden Stützstellen extrapoliert. Als Stützstellen lagen die a-priori ERP-Werte mit täglichem Abstand vor. Die durchgeführte Schätzung diente hauptsächlich dazu, ein in sich konsistentes erdfestes Referenzsystem zu berechnen, um so andere Parameter des Erde-Mond-Systems genauer bestimmen zu können [Müller, 1991]. Bauer [1989] hat jedoch die Korrelationen zwischen den ERP und anderen Parametern der Auswertung nicht näher untersucht.

In den vorherigen Abschnitten wurde darauf eingegangen, dass die LLR-Daten sowohl über den gesamten Messzeitraum als auch über den synodischen Monat sehr ungleichmäßig verteilt sind (siehe Abbildungen 4.1 und 5.1). Auf Grund dieser ungleichmäßigen Datenlage ist eine besondere Auswertestrategie für die Schätzung von ERP aus LLR-Daten nötig. Um außerdem zu ermitteln, welche Genauigkeit die aus LLR bestimmten ERP haben und um die Korrelationen mit anderen Parametern analysieren zu können, wurde in die LLR-Auswertesoftware ein neues Modul zur Schätzung von ERP implementiert. Es beinhaltet verschiedene Möglichkeiten der Bestimmung, z.B. können die ERP derzeit für den gesamten Datenzeitraum, für begrenzte Zeiträume oder für ausgewählte Zeitpunkte geschätzt werden. Bei der Bestimmung für ausgewählte Zeitpunkte kann zwischen einer gemeinsamen Auswertung aller Stationen oder einer stationsweisen Auswertung gewählt werden. Außerdem können die Werte als Trend oder Offset analysiert werden. Die verschiedenen Möglichkeiten sind im Schema 5.4 dargestellt. Bei den Auswertefällen, die in der Abbildung grau hinterlegt sind, werden jeweils Dateien benötigt, die vor der Auswertung erstellt werden müssen. Über Steuerparameter kann die Auswertung im Modul angepasst werden. Im Folgenden sind die nötigen Einstellungen und Dateien für die einzelnen Auswertefälle beschrieben:

**gesamter Zeitraum** In dieser Berechnungsmethode sind keine speziellen Einstellungen nötig, da die Schätzung der ERP für den gesamten Datenzeitraum grundsätzlich schon in älteren LUNAR-Versionen möglich war.

**begrenzte Zeiträume** Vor der Berechnung muss eine Datei erstellt werden, die die Zeiträume enthält, für die ERP geschätzt werden sollen. Hier können z.B. jährliche Zeiträume oder beliebige Perioden festgelegt werden. Die Anzahl der Zeiträume muss ebenfalls angegeben werden, sie legt die Anzahl der unbekannt Parameter fest.

**ausgewählte Zeitpunkte** Vor der Ausgleichung der LLR-Daten werden die zur Verfügung stehenden NP in einem separaten Programm analysiert. Es geht darum herauszufinden, wie viele NP pro Nacht zur Verfügung stehen. Gibt man z.B. an, nur Nächte auswerten zu wollen, in denen mindestens 5 NP gemessen wurden, so erhält man eine Datei, die den Beobachtungs-



**Abb. 5.4:** Schema der Schätzung von Erdrotationsparametern. Für die beiden grau hinterlegten Fälle werden Dateien benötigt, die vor der Auswertung erstellt werden müssen. Alle Angaben, die in den Ovalen stehen, werden über Steuerparameter festgelegt.

zeitpunkt der ersten und letzten Beobachtung der Nacht enthält, die Anzahl der enthaltenen NP und den Zeitpunkt aus der ERP-Datei des IERS, der in diesem Intervall liegt. Für diesen Zeitpunkt erfolgt die Schätzung der Zuschläge. Die Datei wird in der Ausgleichung genutzt und legt fest, welche Beobachtung in die ERP-Schätzung eines Zeitpunktes einfließen. Die Anzahl der Nächte, die das Kriterium erfüllen, wird als Variable festgelegt, die wiederum die Anzahl der unbekannt Parameter bestimmt. Sollen nur für ausgewählte Zeitpunkte einer Station ERP geschätzt werden, so kann die entsprechende Station in der Vorverarbeitung spezifiziert werden, dann werden nur deren Beobachtungen untersucht. Wird dieser Fall der Auswertung gewählt, muss im Hauptprogramm die Station ebenfalls angegeben werden.

Der Vorteil dieser neuen Schätzung der ERP im Gegensatz zum Verfahren von Bauer [1989] liegt darin, dass aus mehreren Beobachtungen einer Nacht die ERP für einen Zeitpunkt geschätzt werden und nicht eine Beobachtung für die beiden umliegenden Stützstellen genutzt wird. Die neue Methode ist somit robuster und mögliche Restfehler in der Auswertung schlagen sich nicht vollständig in den ERP nieder.

### 5.2.1 Ableitungen für die Schätzung der Erdrotationsparameter

Für die Schätzung der ERP in der Ausgleichung von LLR-Daten wurde die Routine DRDERP im Auswertprogramm PAR an die neue Transformationsmatrix angepasst. Es werden die Ableitungen der Erde-Mond-Entfernung nach den terrestrischen Polkoordinaten  $x_p$  und  $y_p$  sowie der Erdrotationsphase  $\Delta\text{UT}$  gebildet. Im Folgenden wird bewusst  $\Delta\text{UT}$  angegeben und nicht  $\Delta\text{UT}1$ , da aus LLR auch  $\Delta\text{UT}0$  geschätzt werden kann. Die jeweiligen Ableitungen sind identisch.

Wie bei der Schätzung der Nutationskoeffizienten in Abschnitt 5.1.1, bildet auch hier die Transformationsmatrix (5.1) zwischen dem erdfesten und raumfesten Referenzsystem die Grundlage, sie bezieht sich auf den Frühlingspunkt und das FW-Modell. Für die Schätzung werden die Matrizen  $\mathbf{R}_3(-\text{GST})$  und  $\mathbf{W}$  betrachtet. Soll die Transformation über den CIO erfolgen, müssen nur die Matrizen  $\mathbf{R}_3(-\text{GST})$  durch  $\mathbf{R}_3(-\text{ERA})$  und  $\mathbf{Q}_{\text{FW}}$  durch  $\mathbf{Q}_{\text{FWCIO}}$  ersetzt werden. Wird  $\mathbf{W}$  für die ERP entsprechend explizit dargestellt, nimmt die Transformationsmatrix folgende Form an

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_{\text{FW}} \cdot \mathbf{R}_3(-\text{GST}) \cdot \mathbf{R}_3(-s') \cdot \mathbf{R}_2(x_p) \cdot \mathbf{R}_1(y_p). \quad (5.43)$$

Die darin angegebene scheinbare Sternzeit GST berechnet sich über Gleichung (2.36) und enthält den Parameter für die Rotationsphase  $\Delta\text{UT}$  gemäß Gleichung (2.28).  $x_p$  und  $y_p$  berechnen sich über Gleichung (2.27). Für die genaue Besetzung der Rotationsmatrizen und ihrer Ableitungen wird auf den Anhang A.1 verwiesen.

Die Ableitungen nach der Polkoordinate  $x_p$  werden wie folgt gebildet

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_p} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{R}_2(x_p)} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_2(x_p)}{\partial x_p}, \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{R}_2(x_p)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_{\text{FW}} \cdot \mathbf{R}_3(-\text{GST}) \cdot \mathbf{R}_3(-s') \cdot \mathbf{R}_1(y_p), \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_2(x_p)}{\partial x_p} = \begin{bmatrix} -\sin(x_p) & 0 & -\cos(x_p) \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos(x_p) & 0 & -\sin(x_p) \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

Die Ableitungen nach der Polkoordinate  $y_p$  ergeben sich analog

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y_p} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{R}_1(y_p)} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_1(y_p)}{\partial y_p}, \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{R}_1(y_p)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_{\text{FW}} \cdot \mathbf{R}_3(-\text{GST}) \cdot \mathbf{R}_3(-s') \cdot \mathbf{R}_2(x_p), \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1(y_p)}{\partial y_p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(y_p) & \cos(y_p) \\ 0 & -\cos(y_p) & -\sin(y_p) \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Für die Schätzung von  $\Delta\text{UT}$  gibt es einen direkten Effekt in der Matrix  $\mathbf{R}_3(-\text{GST})$ . Des Weiteren müsste auch der indirekte Effekt an allen Stellen des Auswertprozesses berücksichtigt werden, an denen  $\Delta\text{UT}$  einfließt. Dies ist einerseits in der Berechnung der Erdzeitenkorrektur für die Stationskoordinaten der Fall, die in Abschnitt 4.2.3.2 beschrieben ist. Hier wird  $\Delta\text{UT}$  für die frequenzabhängige Korrektur der Love-Zahlen benötigt, speziell für den Beitrag des täglichen Bandes. Andererseits wird  $\Delta\text{UT}$  in der Berechnung des Effektes auf Grund der Ozeangezeiten, beschrieben in Abschnitt 4.2.6.2, benötigt. Dieser Effekt wird sowohl in den terrestrischen Polkoordinaten als auch bei  $\Delta\text{UT}$  berücksichtigt, wie in den Gleichungen (2.27) und (2.28) zu sehen. Da es sich hier jeweils um sehr kleine Korrekturwerte handelt, bei den Erdzeiten sind es etwa 12 mm in radialer Richtung, bei den Ozeangezeiten Werte im Bereich von  $\mu\text{as}$  bzw.  $\mu\text{s}$ , werden diese indirekten Effekte in der Schätzung von Zuschlägen zu  $\Delta\text{UT}$  vernachlässigt. Es bleibt für die Ableitungen nur

der direkte Effekt in der Transformationsmatrix mit

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \Delta \text{UT}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{R}_3(-\text{GST})} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_3(-\text{GST})}{\partial \text{GST}} \cdot \frac{\partial \text{GST}}{\partial \Delta \text{UT}}, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\mathbf{R}_3(-\text{GST})} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_{\text{FW}} \cdot \mathbf{R}_3(-s') \cdot \mathbf{R}_2(x_p) \cdot \mathbf{R}_1(y_p), \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3(-\text{GST})}{\partial \text{GST}} = \begin{bmatrix} -\sin(\text{GST}) & -\cos(\text{GST}) & 0 \\ \cos(\text{GST}) & -\sin(\text{GST}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial \text{GST}}{\partial \Delta \text{UT}} = 2\pi \cdot 1.00273781191135448. \quad (5.53)$$

Bei der Bildung der einzelnen Ableitungen wird berücksichtigt, dass GST negativ in die Rotationsmatrix einfließt und somit  $\mathbf{R}(-\alpha) = \mathbf{R}^T(\alpha)$  gilt. Die hier gebildeten Ableitungen (5.52) und (5.53) für eine Transformation über den Frühlingspunkt werden auch in der Berechnung über den CIO verwendet, da sie dort identisch sind. Es muss nur die scheinbare Sternzeit GST durch den Erdrotationswinkel ERA aus Gleichung (2.37) ersetzt werden.

## 5.2.2 Beschreibung der ERP-Untersuchungen und Diskussion der Ergebnisse

Um die verschiedenen Möglichkeiten der neuen ERP-Schätzung zu testen, wurden unterschiedliche Szenarien analysiert. Die jeweiligen Merkmale der Untersuchungen und die Ergebnisse werden in den folgenden Abschnitten beschrieben und diskutiert. Allen Untersuchungen gemeinsam war ein Teil der Datumsfestlegung. Der Ursprung des erdfesten Referenzsystems wurde über die drei Kugelfunktionskoeffizienten  $C_{1,0} = C_{1,1} = S_{1,1} = 0$  im Massenmittelpunkt der Erde festgelegt. Während der Schätzung der ERP wurde die Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems ebenfalls geschätzt, was bedeutet, dass der Maßstab des Referenzsystems nicht festgelegt war. Weitere Annahmen zur Datumsfestlegung werden direkt bei der Beschreibung der einzelnen Analysen erläutert.

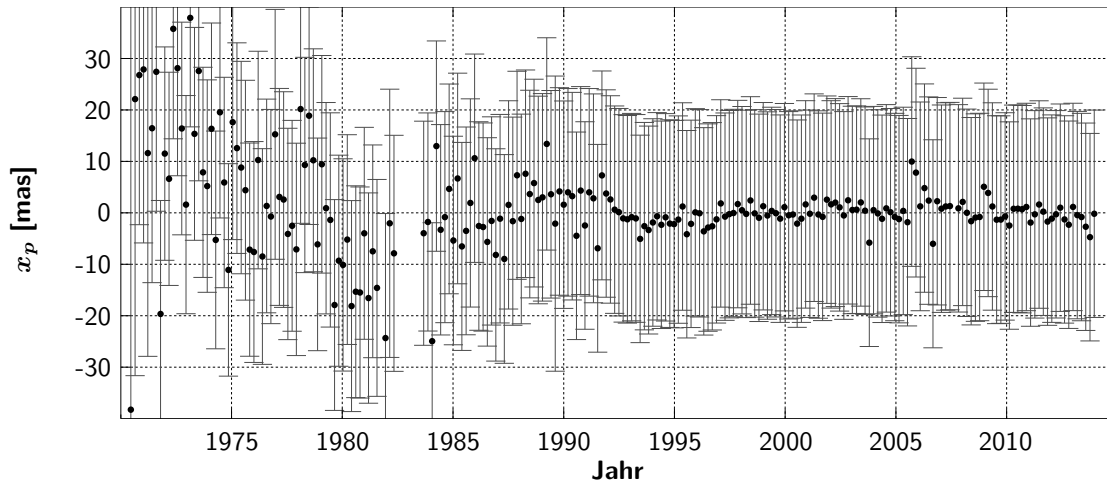
Die Transformation aus dem erdfesten ins raumfeste Referenzsystem wurde in allen durchgeführten Berechnungen gemäß Gleichung (5.43) realisiert. Es wurden 20 047 NP ausgewertet. Vor der Schätzung der ERP wurde, wie bei der Schätzung der Nutationskoeffizienten in Abschnitt 5.1.2.1, eine Anpassung der Referenzsysteme über die Störrotationen vorgenommen. In der weiteren Berechnung wurden diese Werte fixiert.

Bei allen angegebenen Genauigkeiten handelt es sich jeweils um die formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung. Um die Größenordnung der angegebenen Werte zu verdeutlichen, werden sie jeweils auf die Erdoberfläche umgerechnet, 10 mas entsprechen etwa 30 cm, 10 ms etwa 4.6 m am Äquator.

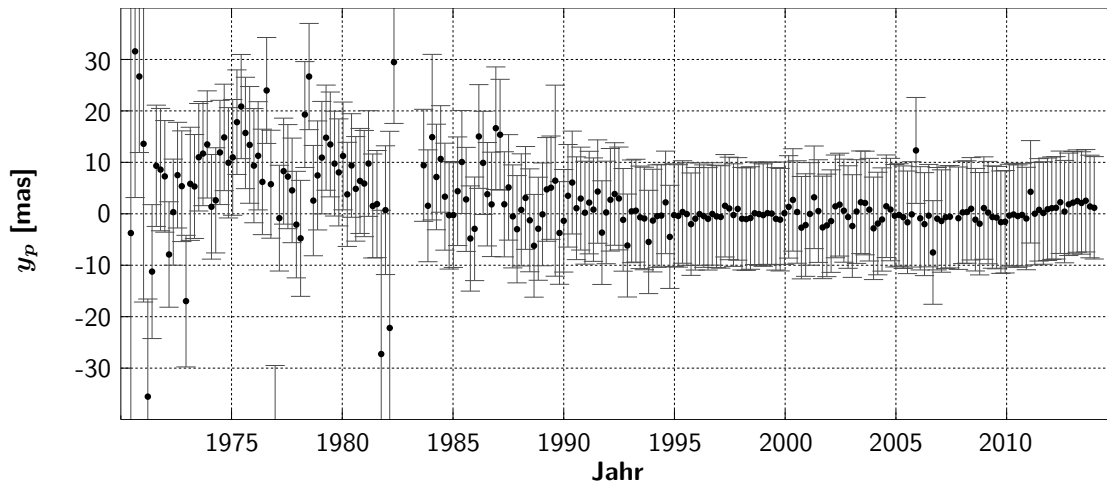
### 5.2.2.1 ERP für Zeiträume von 70 Tagen

In der ersten Untersuchung wurden die ERP aus Beobachtungen geschätzt, die in äquidistanten Zeiträumen vorlagen. Angelehnt an die Untersuchungen von Zerhouni & Capitaine [2009], die zälestische Polkoordinaten ( $dX$ ,  $dY$ ) aus LLR geschätzt haben, wurde auch in dieser Analyse ein Intervall von 70 Tagen zu Grunde gelegt. So ergaben sich über den gesamten Beobachtungszeitraum 221 Datensätze mit 5 – 331 NP. In jedem Intervall wurden die Beobachtungen aller Stationen ausgewertet.

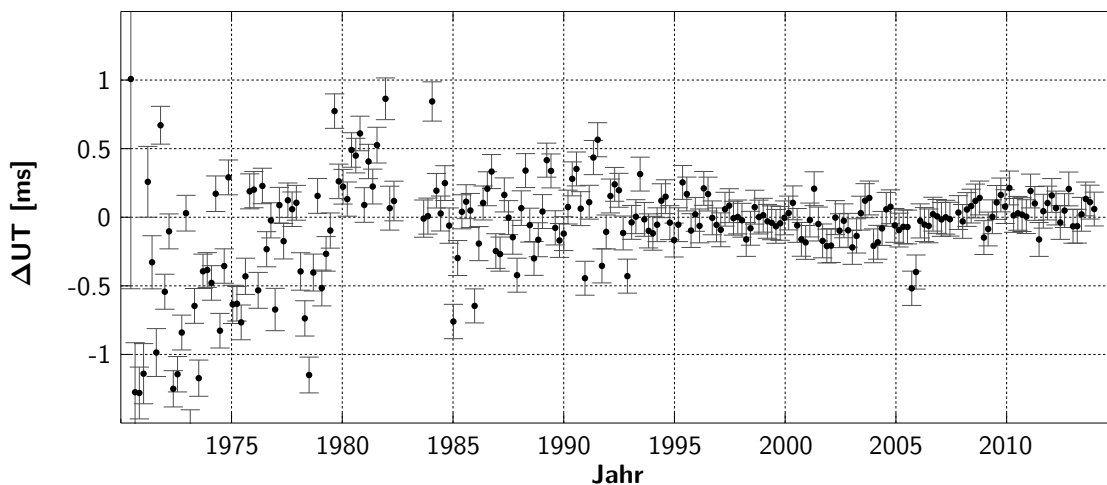
Bei den Untersuchungen wurden alle Stationskoordinaten bis auf WLRs geschätzt. Die Stationsgeschwindigkeiten wurden auf den ITRF-Werten fixiert. Die Schätzung der Polkoordinaten und der Erdrotationsphase erfolgte getrennt, die jeweils anderen Komponenten wurden auf den IERS-Werten fixiert. Durch die gemeinsame Schätzung von Stations- und Polkoordinaten gab es nur eine



**Abb. 5.5:** Schätzung von Zuschlägen für  $x_p$  in Zeiträumen von 70 Tagen, die Beobachtungen aller Stationen wurden ausgewertet. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung. In der Darstellung wurde ein konstanter Offset von 48.7 mas reduziert.



**Abb. 5.6:** Schätzung von Zuschlägen für  $y_p$  in Zeiträumen von 70 Tagen, die Beobachtungen aller Stationen wurden ausgewertet. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung. In der Darstellung wurde ein konstanter Offset von  $-5.4$  mas reduziert.



**Abb. 5.7:** Schätzung von Zuschlägen für  $\Delta UT$  in Zeiträumen von 70 Tagen, die Beobachtungen aller Stationen wurden ausgewertet. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung. In der Darstellung wurde ein konstanter Offset von  $-2.4$  ms reduziert.

sehr schwache Datumsfestlegung. Bei der Bestimmung der Erdrotationsphase war durch die fixierten Polkoordinaten die Orientierung etwas stabiler festgelegt. Die Ergebnisse der jeweils geschätzten Zuschläge zu den IERS-Werten sind für die einzelnen ERP-Komponenten in den Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7 dargestellt.

Bei der Darstellung der Polkoordinaten wurde ein festgestellter Offset in den geschätzten Werten reduziert. Für  $x_p$  beträgt der Offset 48.7 mas, was 1.5 m auf der Erdoberfläche entspricht. Für  $y_p$  beträgt der Offset  $-5.4$  mas, also 0.2 m auf der Erdoberfläche. Des Weiteren weisen die Zuschläge bis Anfang der 90er Jahre Schwankungen auf. Die  $x_p$  Komponente erreicht Werte zwischen  $-20$  und  $30$  mas mit Genauigkeiten von  $20.4 - 21.8$  mas, einige wenige Punkte erreichen  $30$  mas und schlechter. Für  $y_p$  schwanken die Zuschläge zwischen  $-10$  und  $20$  mas bei Genauigkeiten von  $10$  mas, mit wenigen Ausnahmen bis zu  $30$  mas. Ab etwa 1990 pendeln sich in beiden Komponenten die Zuschläge ein und haben relativ konstante Werte um Null herum.

Die Korrelationen beider Komponenten der Polkoordinaten mit den Stationskoordinaten betragen  $70 - 100$  %. Lediglich mit den Z-Koordinaten der McDonald Stationen und APOLLO liegen die Korrelationen bei  $40$  %. Die hohen Korrelationen mit den Stationskoordinaten führen zu den festgestellten Offsets, was ein Hinweis auf die zu schwache Datumsfestlegung ist. Außerdem sind die beiden Polkomponenten zu  $70 - 80$  % miteinander korreliert, was wiederum an der geringen Anzahl von Stationen liegt, die LLR-Messungen durchführen.

Die Zuschläge für  $\Delta UT$  zeigen ein ähnliches Verhalten wie die der Polkoordinaten. Auch hier wurde für die Darstellung ein Offset von  $-2.4$  ms, bzw.  $1.1$  m auf der Erdoberfläche, reduziert. Dadurch pendeln sich die Zuschläge nach 1995 auf einen Wert von  $0.0 \pm 0.15$  ms ein. Vorher schwanken die Werte zwischen  $-1.3$  und  $1.0$  ms mit einer Genauigkeit von  $0.13 - 0.14$  ms. Auch bei der Erdrotationsphase zeigen sich Korrelationen von  $80 - 100$  % mit den X- und Y-Komponenten der Stationskoordinaten und mit den Rotationsphasenwerten untereinander, die hier ebenfalls zu den Offsets führen.

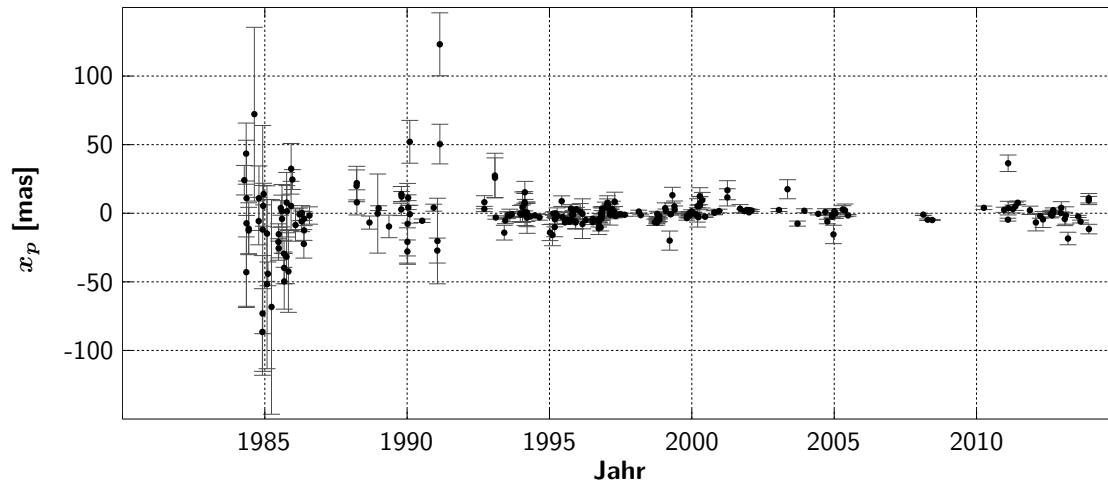
Der abschließende Vergleich der Stationskoordinaten (hier nicht dargestellt) mit den Werten des ITRF zeigt hohe Abweichungen von teilweise über einem Meter in den Z-Koordinaten der Stationen. Auch die Abweichungen in den X-Koordinaten sind stark erhöht. Hier wird der Offset von  $1.5$  m in  $x_p$  kompensiert. Lediglich die Y-Koordinaten bei den drei McDonald Stationen haben nach der Schätzung der Polkoordinaten keine signifikanten Abweichungen zu den ITRF-Werten. Die gemeinsame Schätzung von Stations- und Polkoordinaten führt so zu einer Verdrehung des erdfesten Referenzsystems um die Y-Achse.

Bei der Schätzung der Erdrotationsphase  $\Delta UT$  zeigen die X- und Y-Koordinaten der Stationen hohe Abweichungen bis zu einem Meter zu den ITRF-Werten. Die Z-Koordinaten passen gut. Hier kommt es zu einer Verdrehung um die Z-Achse des erdfesten Referenzsystems, um den geschätzten Erdrotationsphasenoffset von einem Meter zu korrigieren.

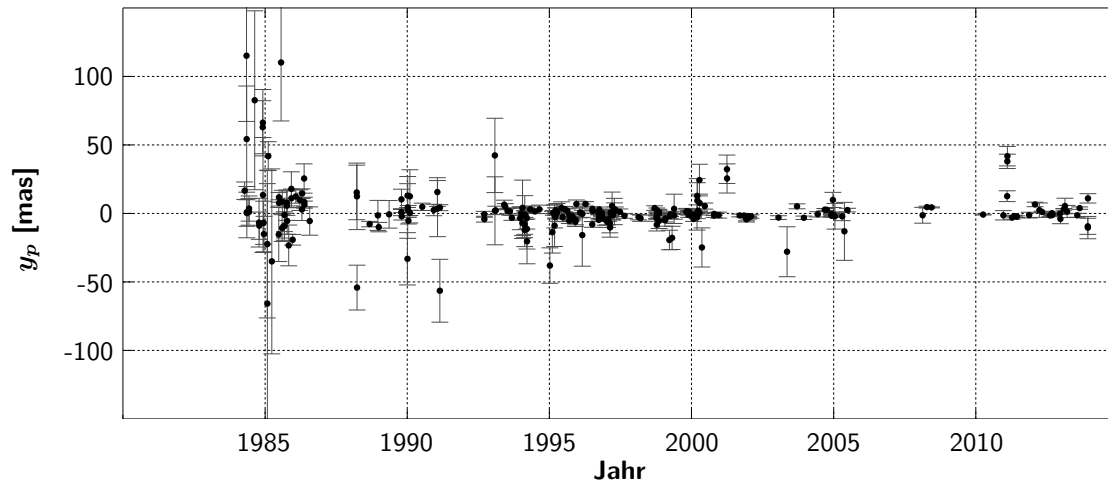
Durch die jeweils hohen Korrelationen der einzelnen Komponenten der ERP mit den Stationskoordinaten und die schlechten Genauigkeiten kann man annehmen, dass die hier geschätzten Zuschläge keine hohe Aussagekraft haben. Das schwach festgelegte Datum des Systems führt zu einer Verdrehung der Stationskoordinaten im Vergleich zu den ITRF-Werten. Für eine Schätzung von ERP aus begrenzten Intervallen, die allerdings den gesamten Beobachtungszeitraum überspannen, müssen mehr Stationskoordinaten festgehalten werden.

### 5.2.2.2 ERP für ausgewählte Zeitpunkte - alle Stationen gemeinsam

Da sich in der vorherigen Untersuchung die schwache Datumsfestlegung in Kombination mit Zeiträumen von 70 Tagen als problematisch für die Schätzung von ERP erwiesen hat, wurden in einer weiteren Analyse ERP für spezielle Nächte geschätzt. Die Bedingung war, dass nur für solche Nächte  $x_p$  und  $y_p$  geschätzt werden sollten, in denen mindestens 15 NP zur Verfügung standen. Es wurde dabei nicht unterschieden, von welcher Station der NP gemessen wurde. Unter dieser Voraussetzung ergaben sich 247 Nächte mit 15 bis 41 NP für den Zeitraum April 1984 bis Dezember 2013. Auch in dieser Untersuchung wurden alle Stationskoordinaten, bis auf WLRS, geschätzt. Die Geschwin-



**Abb. 5.8:** Schätzung von Zuschlägen für  $x_p$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht mindestens 15 NP gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.



**Abb. 5.9:** Schätzung von Zuschlägen für  $y_p$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht mindestens 15 NP gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.

digkeiten der Stationen waren auf ITRF-Werten festgehalten. Für Nächte, die die Bedingung von mindestens 15 NP nicht erfüllten, wurden die ERP auf die Werte der IERS-Reihe fixiert und trugen so zur Datumsfestlegung bei. Außerdem wurden die beiden Polkomponenten getrennt voneinander geschätzt, die jeweils andere Komponente und  $\Delta UT$  wurden auf die IERS-Werte fixiert.

Die geschätzten Zuschläge der beiden Polkoordinaten sowie ihre Genauigkeiten sind in den Abbildungen 5.8 und 5.9 dargestellt. In den Zuschlägen dieser Untersuchung wurden keine Offsets festgestellt. Allerdings schwanken die Zuschläge bis etwa 1995 relativ stark, in  $x_p$  im Bereich von  $\pm 80$  mas mit einer Genauigkeit von 1 – 80 mas. In  $y_p$  liegen die Zuschläge zwischen  $-70$  und 110 mas, die Genauigkeit beträgt 2 – 90 mas. Ab 1995 pendeln sich die Zuschläge in beiden Komponenten um Null herum ein. Für  $x_p$  betragen sie jetzt  $\pm 15$  mas mit einer Genauigkeit von 1 – 12 mas. In  $y_p$  schwanken die Zuschläge zwischen  $\pm 10$  mas mit einer Genauigkeit von 1 – 15 mas. Dieses Verhalten war zu erwarten, da man davon ausgehen kann, dass die in der Berechnung genutzten ERP-Reihen des IERS sehr genaue a-priori Werte liefern, zu denen mit LLR keine signifikanten Abweichungen festgestellt werden sollten.

Die Korrelationen in dieser Untersuchung unterscheiden sich stark von denen in Abschnitt 5.2.2.1. Bei beiden Polkoordinaten gibt es Korrelationen von lediglich 10 % mit einigen Stationskoordinaten. Untereinander sind die einzelnen Komponenten vereinzelt mit 10 % korreliert, die meisten Nächte sind jedoch unkorreliert. Dadurch, dass die Polkoordinaten nicht mit den Stationskoordinaten kor-



reliert sind, zeigen sich auch keine signifikanten Abweichungen in den Stationskoordinaten zu einer Vergleichsberechnung ohne Schätzung der ERP.

Obwohl hier nicht dargestellt, wurde auch eine Auswertung durchgeführt, bei der die Polkoordinaten gemeinsam geschätzt wurden. Die Ergebnisse unterscheiden sich nur wenig von den oben besprochenen. Lediglich die Korrelationen zwischen den Polkoordinatenkomponenten einer Nacht erhöhen sich und liegen zwischen 10 und 100%.

Schlussfolgernd kann man aus dieser Untersuchung zusammenfassen, dass die ERP-Schätzung für ausgewählte Zeitpunkte eher zu einem aussagekräftigen Ergebnis führt, als eine Schätzung der ERP aus Zeiträumen. Die bessere Datumsfestlegung stabilisiert hier das Ergebnis. Die höhere Genauigkeit der LLR-Daten ab 1995 führt zu Zuschlägen, die um Null herum schwanken. Diese LLR-basierten Lösungen könnten in kombinierten IERS-Lösungen genutzt werden.

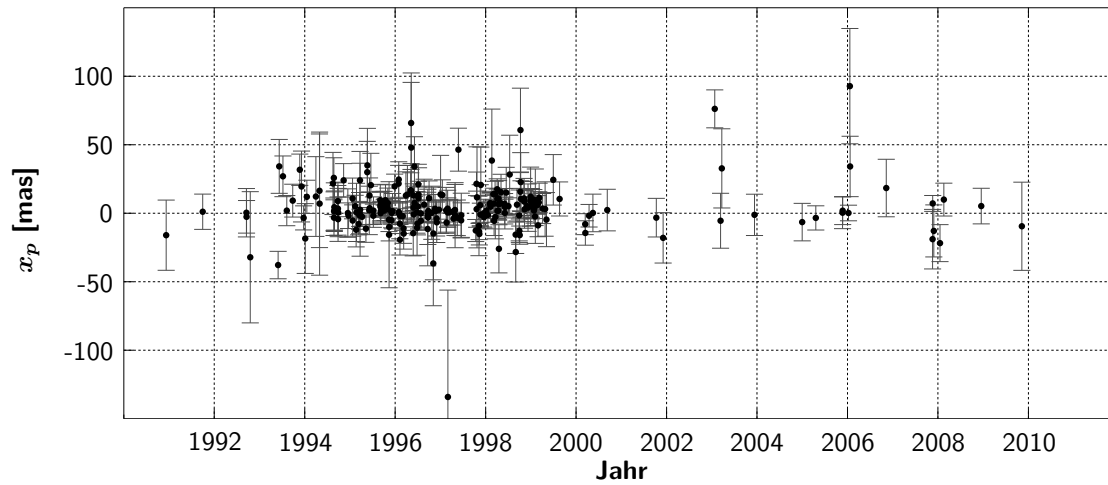
### 5.2.2.3 ERP für ausgewählte Zeitpunkte - stationsweise

Die Verteilung der aktiven LLR-Stationen auf der Erdoberfläche ist, wie in Abbildung 3.1.1 zu sehen, auf die Nordhalbkugel beschränkt. Dort liegen sie in einem schmalen Band. Die europäischen Stationen befinden sich etwa entlang der  $x_p$ -Achse, die in den USA entlang der  $y_p$ -Achse der Polkoordinaten. Man kann annehmen, dass die Messungen der jeweiligen Stationen unterschiedlich sensitiv auf die Komponenten der ERP sind. Nach Moritz & Müller [1987] liefert die Messung einer Station nur eine Komponente der Polkoordinaten entlang des Meridians der Station. Bei der Schätzung der Erdrotationsphase ergibt sich außerdem die Besonderheit, dass die geschätzten  $\Delta UT$  einer Station direkt die Differenz zwischen UT0 und UTC angeben, somit den Drehwinkel der Erde bezüglich einer mittleren Sonne.

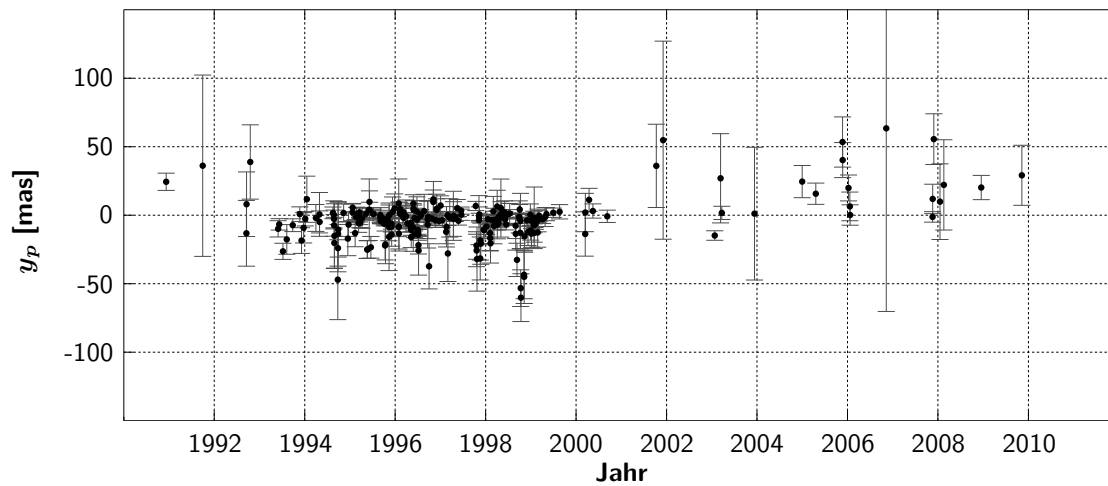
Um die Schätzung der ERP noch genauer untersuchen und mögliche Zusammenhänge zwischen ERP und Stationskoordinaten feststellen zu können, wurden in den folgenden Untersuchungen nur die NP einer bestimmten Station analysiert. Stellvertretend für die gesamte Station MLRS wurden Daten von MLRS2 untersucht, des Weiteren die Daten von OCA und APOLLO. Es wurden nur Nächte ausgewertet, in denen mindestens fünf NP gemessen wurden.

**Station MLRS2** Für MLRS2 konnten 235 Datensätze mit 5 – 15 NP für den Zeitraum Dezember 1990 bis November 2009, insgesamt 1618 NP, ausgewertet werden. In der Auswertung wurden die Polkoordinaten zusammen geschätzt, während die Erdrotationsphase auf den Werten des IERS fixiert wurde. Bei der Schätzung der Erdrotationsphase wurden die Polkoordinaten auf den IERS-Werten fixiert. Es wurden alle Stationskoordinaten, bis auf WLRS, geschätzt und die Geschwindigkeiten festgehalten. Da in dieser Untersuchung ebenfalls nicht für alle Nächte ERP geschätzt wurden, trugen die jeweils fixierten Werte zur Datumsfestlegung bei. Die geschätzten Zuschläge sind in den Abbildungen 5.10, 5.11 und 5.12 dargestellt.

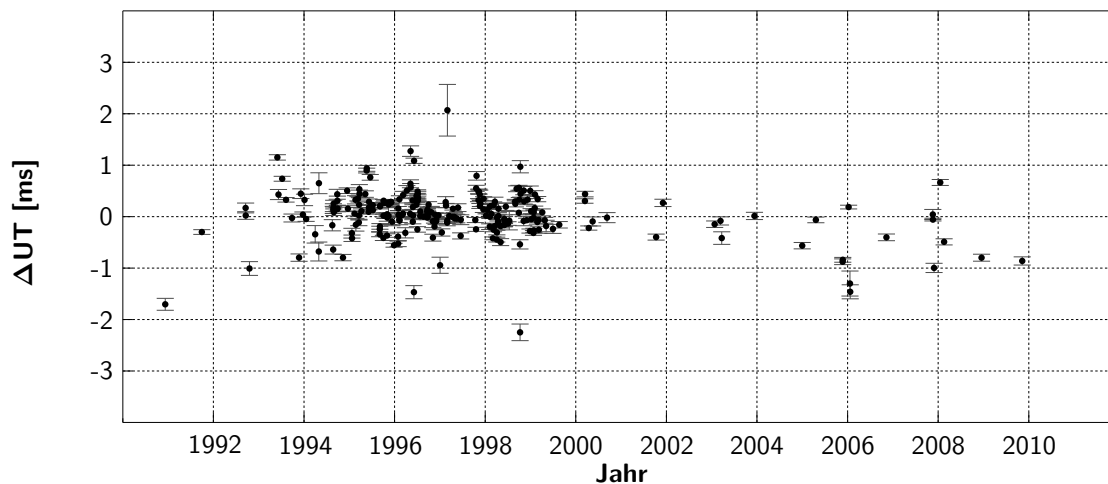
Zwischen 1993 und 2000 liegen die meisten auszuwertenden Nächte. Die Zuschläge für  $x_p$  schwanken hier zwischen  $\pm 40$  mas, vereinzelt Werte sind höher. Die Genauigkeit liegt bei 4 – 55 mas. Für  $y_p$  liegen die meisten Werte zwischen  $-40$  und 11 mas mit einer Genauigkeit von 2 – 30 mas. Ab 2000 nimmt die Anzahl der auszuwertenden Nächte stark ab, da pro Nacht nicht mehr die geforderten 5 NP zur Verfügung stehen. Gleichzeitig zeigen die Zuschläge bei  $y_p$  eine Drift und schwanken zwischen  $-15$  – 55 mas mit einer Genauigkeit von 4 – 70 mas, die sich im Vergleich zum vorherigen Bereich stark verschlechtert hat. Für  $x_p$  ist keine Drift zu sehen, aber auch hier hat sich die Genauigkeit auf 6 – 45 mas verschlechtert. Die Zuschläge liegen zwischen  $\pm 20$  mas, wobei zwei Nächte auch fast 100 mas erreichen. Die reduzierte Genauigkeit der Zuschläge hängt mit einer reduzierten Genauigkeit der NP von MLRS2 zusammen (siehe Abbildung 4.2.1), die im veralteten Messsystem begründet liegt. Die festgestellte Drift in den Zuschlägen von  $y_p$  zeigt sich ebenfalls in den Residuen von MLRS2. Nach der Schätzung der Polkoordinaten wird diese Drift etwas kleiner, was bedeutet, dass die Ungenauigkeiten durch die ERP-Schätzung ausgeglichen wurden.



**Abb. 5.10:** Schätzung von Zuschlägen für  $x_p$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht min. 5 NP der Station MLRS2 gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.



**Abb. 5.11:** Schätzung von Zuschlägen für  $y_p$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht min. 5 NP der Station MLRS2 gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.



**Abb. 5.12:** Schätzung von Zuschlägen für  $\Delta UT$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht min. 5 NP der Station MLRS2 gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.

Wie zu erwarten, betragen die Korrelationen der Polkoordinaten mit den Koordinaten aller Stationen nur 10 %. Jeweils innerhalb einer Komponente sind die einzelnen Nächte der Polkoordinatenschätzung nicht miteinander korreliert. Dafür treten zwischen den  $x_p$  und  $y_p$  jeweils für die gleiche Nacht Korrelationen von teilweise 100 % auf, besonders in der Periode 1993 und 2000. Davor und danach sind die Korrelationen wesentlich geringer.

Durch die geringen Korrelationen der Pol- und Stationskoordinaten kommt es nur zu Veränderungen der Stationskoordinaten im Bereich von Millimetern. Die Y-Koordinate von MLRS2, die etwa entlang der  $y_p$ -Achse liegt, hat nach der Schätzung geringere Abweichungen zum ITRF-Vergleichswert. Somit wurde in diesem Ergebnis die besondere Sensitivität von MLRS2 auf  $y_p$  bestätigt.

Bei Untersuchung der Erdrotationsphase schwanken die Zuschläge im Zeitbereich 1993 – 2000 zwischen  $\pm 1$  ms mit einer Genauigkeit von 0.02 – 0.2 ms. In den Bereichen davor und danach sind die Zuschläge mit  $-1.5$  und  $0.7$  ms und einer Genauigkeit von 0.03 – 0.1 ms höher und sie weisen, wie die  $y_p$ -Komponente, eine Drift auf. Dabei handelt es sich ebenfalls um die Drift in den Residuen, die bei fixierten Polkoordinaten von der Erdrotationsphase zum Teil absorbiert wird.

Die Korrelationen von  $\Delta UT$  mit den Stationskoordinaten sind gering mit höchstens 10 %. Untereinander sind die einzelnen Nächte nicht korreliert. Dadurch gibt es bei den Stationskoordinaten keine signifikante Veränderung zu einer Schätzung ohne ERP.

**Station OCA** Für OCA wurde die Bedingung, dass mindestens fünf NP in einer Nacht gemessen waren, von 832 Datensätzen erfüllt. Die vielen Datensätze führten zu einer hohen Zahl von Unbekannten und damit zu einer Größe der zu invertierenden Normalgleichungsmatrix, die die aktuelle Version der LLR-Auswertesoftware instabil werden ließ. Aus diesem Grund wurde ein Zeitraum von Februar 1998 – Juli 2005 für die Schätzung ausgewählt. Hier erreichen die Messungen, wie in Abbildung 4.2.3 zu sehen, hohe Genauigkeiten. In dieser Periode erfüllten noch 260 Datensätze mit 5 – 35 NP die geforderte Bedingung, insgesamt 2790 NP. Auch in dieser Berechnung wurden entweder die Polkoordinaten gemeinsam oder die Erdrotationsphase geschätzt, die jeweils anderen Komponenten wurden auf den IERS-Werten fixiert. Die Anmerkungen der letzten Abschnitte zu den Stationskoordinaten und der Datumsfestlegung galten hier ebenfalls. Die geschätzten Zuschläge sind in den Abbildungen 5.13, 5.14 und 5.15 dargestellt.

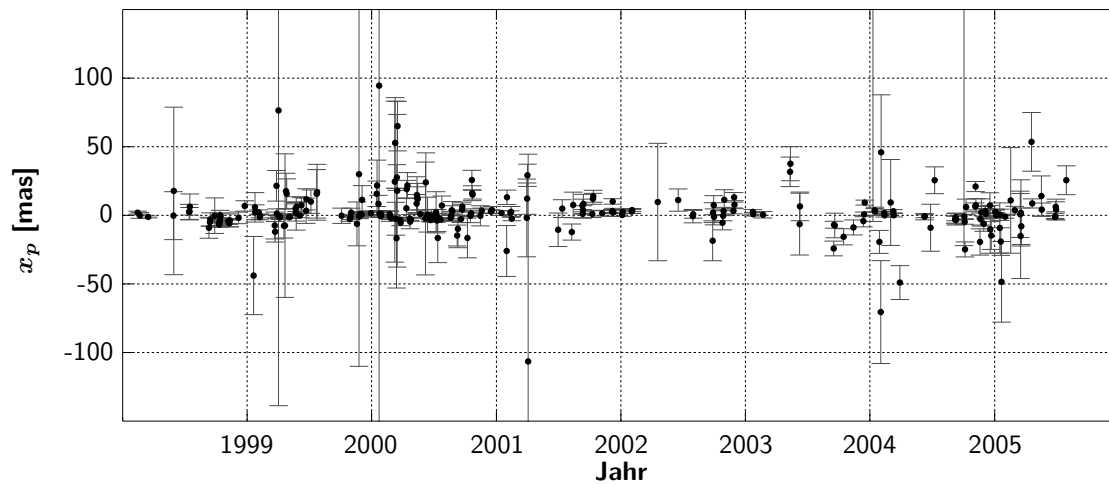
Die Zuschläge der Polkoordinaten sind recht homogen und dicht um Null verteilt. Die  $x_p$ -Zuschläge schwanken insgesamt zwischen  $\pm 40$  mas, einige wenige Werte sind größer, die meisten liegen aber bei  $\pm 7$  mas. Die Genauigkeit beträgt 0.5 – 30 mas. Die  $y_p$ -Zuschläge weisen leicht höhere Werte von  $\pm 60$  mas auf. Auch hier sind einige Werte größer, der Großteil konzentriert sich allerdings ebenfalls auf einen Bereich von  $\pm 7$  mas mit einer Genauigkeit von 1 – 80 mas.

Die Korrelationen der Polkoordinaten mit den Stationskoordinaten weisen erwartungsgemäß geringe Werte von bis zu 20 % auf. Es zeigen sich einige Korrelationen mit den Reflektorkoordinaten, die aber mit 10 % klein sind. Höhere Korrelationen von 40 % zeigen sich mit einigen Korrekturwerten der Laufzeiten der Station OCA, die in der Auswertung gleichzeitig geschätzt werden. Innerhalb einer Polkomponente treten kaum Korrelationen zwischen den einzelnen Nächten auf. Allerdings sind auch bei OCA, wie schon bei MLRS2, die Polkoordinaten einer Nacht teilweise bis zu 100 % miteinander korreliert.

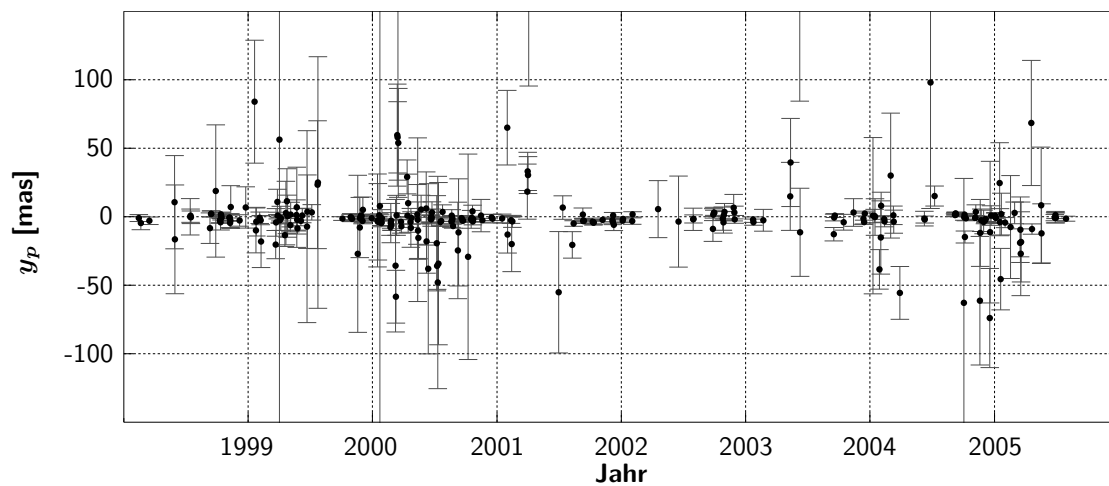
Die Auswirkung der Polkoordinatenschätzung auf die Stationskoordinaten ist gering, allerdings konnte die X-Koordinaten von OCA signifikant verbessert werden. Auch hier bestätigt sich die Sensitivität der Messungen einer Station auf eine bestimmte Komponente der Polkoordinaten. OCA liegt etwa entlang der  $x_p$ -Achse.

Die Zuschläge zur Erdrotationsphase schwanken relativ gleichmäßig um Null, insgesamt zwischen  $\pm 3$  ms, die meisten liegen allerdings im Bereich von  $\pm 0.4$  ms. Die Genauigkeit beträgt 0.008 – 0.6 ms.

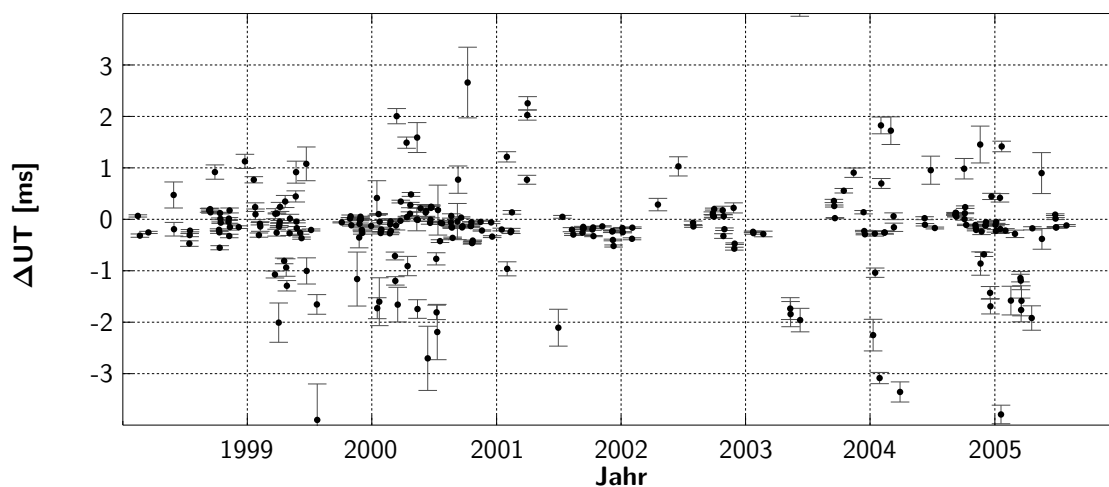
Die Korrelationen der Erdrotationsphase verhalten sich ähnlich wie bei den Polkoordinaten mit geringen Werten bei den Stationskoordinaten. Mit den gleichzeitig geschätzten Korrekturwerten



**Abb. 5.13:** Schätzung von Zuschlägen für  $x_p$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht mindestens 5 NP der Station OCA gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.



**Abb. 5.14:** Schätzung von Zuschlägen für  $y_p$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht mindestens 5 NP der Station OCA gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.



**Abb. 5.15:** Schätzung von Zuschlägen für  $\Delta UT$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht mindestens 5 NP der Station OCA gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.

der Laufzeiten bestehen teilweise Korrelationen von 80 %, untereinander haben die  $\Delta UT$ -Werte Korrelationen von bis zu 40 %.

Die Schätzung der Erdrotationsphase führt zu Abweichungen in der X- und Y-Stationskoordinate von OCA, die allerdings nur wenige Millimeter im Vergleich zu einer Auswertung ohne ERP-Schätzung betragen und damit nicht signifikant sind.

Durch die Untersuchung konnte auch bei OCA die Sensitivität auf eine bestimmte Komponente der ERP, nämlich  $x_p$ , bestätigt werden. Durch die hohe Beobachtungsgenauigkeit können auch die ERP mit hoher Genauigkeit bestimmt werden und könnten wiederum zu einer kombinierten IERS-Lösung beitragen.

**Station APOLLO** Im Zeitraum Juni 2006 bis September 2013 erfüllten von der Station APOLLO 182 Datensätze mit 5 – 35 NP die geforderte Bedingung von mindestens fünf NP pro Nacht. Insgesamt wurden 1504 NP ausgewertet, um entweder die Polkoordinaten oder die Erdrotationsphase zu schätzen. Die vorherigen Anmerkungen zu den Stationskoordinaten und der Datumsfestlegung galten hier ebenfalls. In den Abbildungen 5.13, 5.14 und 5.15 sind die geschätzten Zuschläge dargestellt.

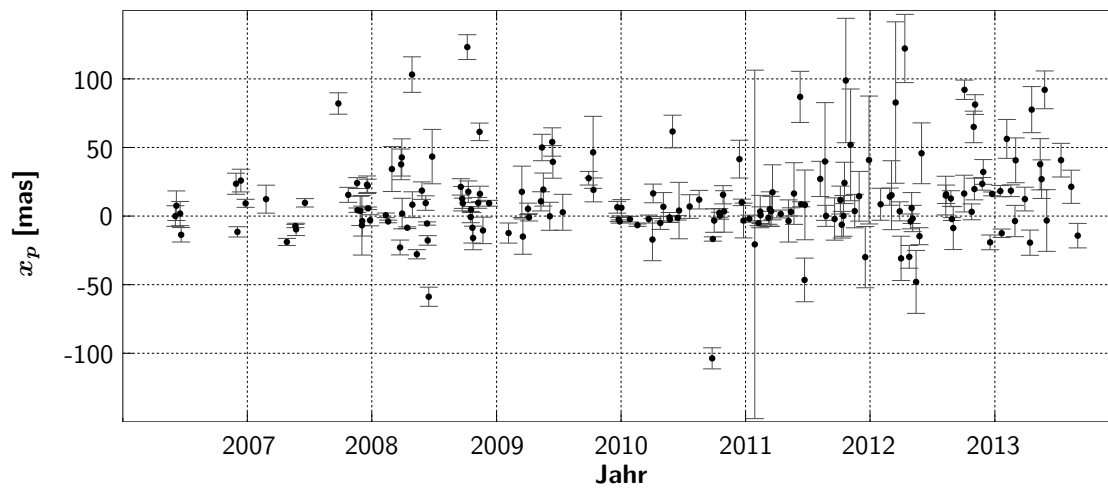
Im Vergleich zu den Zuschlägen von MLRS2 und OCA streuen die Zuschläge von APOLLO wesentlich stärker. Die  $x_p$  schwanken insgesamt zwischen  $-100$  und  $150$  mas mit einer Genauigkeit von  $1 - 40$  mas. Es lässt sich eine leichte Konzentration der Zuschläge auf den Bereich  $\pm 50$  mas ausmachen.  $y_p$  schwanken zwischen  $\pm 100$  mas mit einer Genauigkeit von  $0.5 - 40$  mas. Hier ist die Konzentration um Null ausgeprägter und liegt im Bereich von  $\pm 40$  mas. Die Zuschläge und Genauigkeiten beider Komponenten verschlechtern sich ab Ende 2010 leicht, was in der reduzierten Messgenauigkeit der NP begründet liegt, siehe Abbildung 4.2.4.

Die Korrelationen mit anderen Parametern sind in der Auswertung der APOLLO-Daten etwas höher als in der Auswertung von MLRS2 und OCA. Mit den Reflektorkoordinaten sind die Polkoordinaten bis zu 30 % korreliert. Mit den Stationskoordinaten von APOLLO gibt es Korrelationen von 20 – 30 %, in einigen Bereichen wird dieser Wert aber auch mit den X- und Y-Komponenten der drei McDonald Stationen erreicht. Durch die örtliche Nähe der Stationen fließen offensichtlich Effekte von APOLLO in die Berechnung der Laufzeit-Korrekturwerte der McDonald Stationen ein. Darüber entsteht die Verbindung der Polkoordinaten zu McDonald, obwohl diese Daten in die Polkoordinatenschätzung nicht einfließen. Innerhalb einer Polkomponente und zwischen den beiden Komponenten kommt es zu Korrelationen von 20 – 40%. Außerdem treten auch noch Korrelationen von bis zu 20 % mit der Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems, der Präzessionskonstanten und mit dem Winkel  $\delta$  auf, der die Phasenverschiebung der Gezeitenwirkung des Mondes auf die Erde angibt.

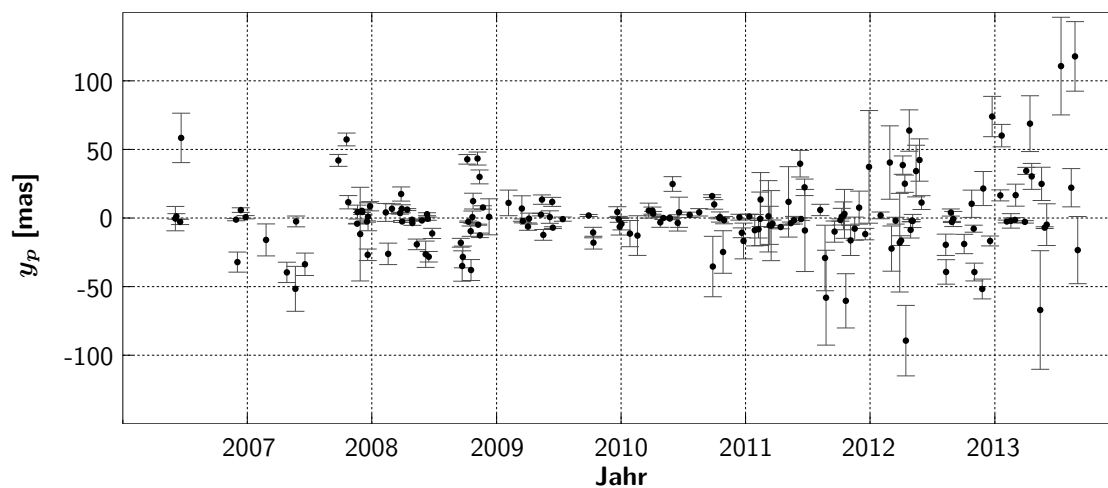
Die Stationskoordinaten von APOLLO werden, im Vergleich zu den a-priori-Werten, in der Z-Komponente durch die Schätzung etwas besser, die anderen beiden Komponenten verschlechtern sich. Bei der Erdrotationsphase tritt keine so starke Konzentration der Zuschläge um Null auf, wie bei MLRS2 und OCA vorher. Die Werte bewegen sich zwischen  $\pm 2$  ms, wobei die meisten im Bereich von  $\pm 0.6$  ms liegen. Die Genauigkeit beträgt  $0.003 - 0.05$  ms. Hier fällt ebenfalls der Effekt durch die reduzierte Messgenauigkeit auf. Trotzdem ist die  $\Delta UT$ -Bestimmung aus APOLLO-Daten bisher die Beste.

Die Korrelationen der Erdrotationsphase zeigen ein ähnliches Bild wie die der Polkoordinaten. Es ergeben sich Werte von bis zu 30 % mit den Reflektorkoordinaten und bis zu 20 % mit der Mondbahn. Mit den X- und Y-Koordinaten von APOLLO und den Laufzeit-Korrekturwerten von McDonald gibt es 50 % Korrelation. Untereinander sind die Nächte der Erdrotationsphase 20 – 40 % korreliert.

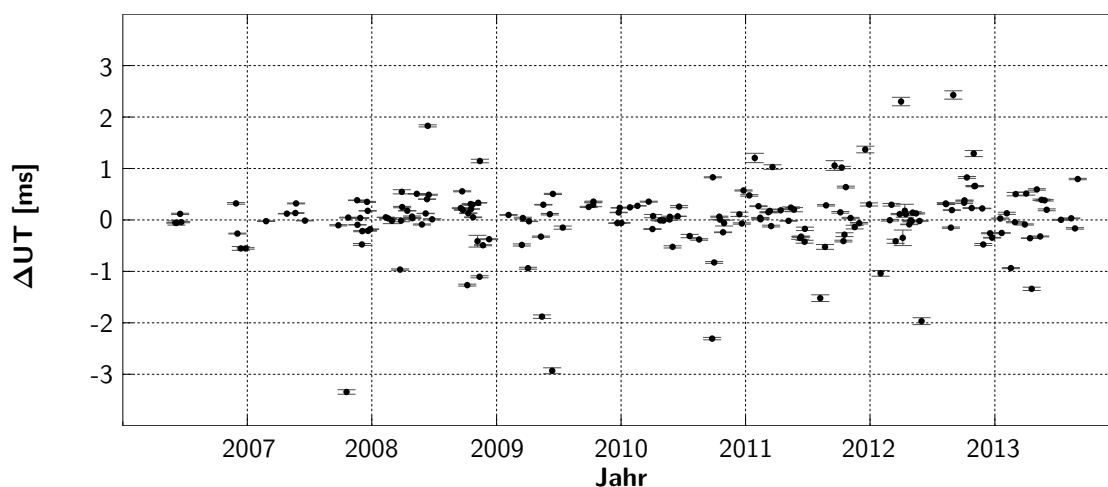
Wie diese Untersuchung zeigt, spielt die Genauigkeit der Beobachtungen in der Schätzung der ERP eine große Rolle. Die gute Beobachtungsgenauigkeit der APOLLO-Daten, besonders zwischen 2006 und 2010, führt zu hohen Genauigkeiten in den ERP, verglichen mit den Ergebnisse aus MLRS2 und OCA bzw. aus der gemeinsamen Schätzung aller Stationen.



**Abb. 5.16:** Schätzung von Zuschlägen für  $x_p$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht mindestens 5 NP der Station APOLLO gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.



**Abb. 5.17:** Schätzung von Zuschlägen für  $y_p$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht mindestens 5 NP der Station APOLLO gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.



**Abb. 5.18:** Schätzung von Zuschlägen für  $\Delta UT$  unter der Bedingung, dass in der auszuwertenden Nacht mindestens 5 NP der Station APOLLO gemessen wurden. Die Punkte geben den jeweiligen Zuschlag an, die Fehlerbalken entsprechen dem formalen  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.

### 5.2.3 Zusammenfassung der Ergebnisse und Ausblick

Die Untersuchungen der letzten Abschnitte haben gezeigt, dass es nicht ganz einfach ist, Erdrotationsparameter aus den unregelmäßig verteilten LLR-Beobachtungen zu schätzen, die teilweise nur von einer Station über längere Zeiträume durchgeführt wurden. Die in den Abbildungen dargestellten Genauigkeiten für die ERP sind jeweils die aus der Ausgleichung erhaltenen  $1\sigma$ -Fehler. Geht man davon aus, dass in der Auswertung noch Effekte und Modellierungsungenauigkeiten eine Rolle spielen, die nicht erfasst sind, kann man annehmen, dass Fehler bis zur  $3\sigma$ -Grenze realistische Werte sind. Es resultiert für die Polkoordinaten eine Genauigkeit von  $1 - 20$  mas, für die Erdrotationsphase von  $0.03 - 0.4$  ms aus LLR-Beobachtungen.

Die erreichten ERP-Genauigkeiten aus LLR sind, besonders für die Polkoordinaten, schlechter als aus anderen räumlichen geodätischen Messverfahren, deren Genauigkeiten in Tabelle 5.7 zusammengestellt sind. Ein Hauptgrund dafür ist die unregelmäßige globale Verteilung der Messstationen, die besonders in der Schätzung von Polkoordinaten nachteilig ist. Die für eine Schätzung der Erdrotationsphase nötige gute Ost-West-Verteilung wird von den LLR-Stationen näherungsweise erreicht, hier liegt die LLR-Genauigkeit etwa in dem Bereich der anderen Messverfahren. Ein weiteres Problem ist die geringe zeitliche Dichte, die LLR-Messungen erreichen. Beide Gründe spielen bei der Genauigkeit der geschätzten ERP eine große Rolle [Schuh et al., 2003].

Es wurde bestätigt, dass die einzelnen Stationen unterschiedlich sensitiv auf die Komponenten der ERP sind. Schätzt man Polkoordinaten und Erdrotationsphase aus den Messungen einer Station, sind die Zuschläge der ERP und die Genauigkeit etwas anders als bei einer gemeinsamen Auswertung aller Stationen. Hier spielt die Genauigkeit der jeweils genutzten NP eine große Rolle. Allerdings muss betont werden, dass bei der stationsweisen Auswertung direkt der Unterschied zu UT0 bestimmt werden kann. Diese Größe lässt sich nur aus LLR- und VLBI-Messungen ableiten.

Die verschiedenen Möglichkeiten der Schätzung haben verdeutlicht, dass aus LLR-Daten pro Nacht, in der gemessen wurde, genügend Beobachtungen vorliegen, um ERP zu schätzen. Bei Schätzung aus längeren Zeiträumen fließen durch die schwache Datumsfestlegung und die sich dadurch ergebenden Korrelationen Effekte in die ERP, die zu unrealistischen Ergebnissen führen. Schätzt man aber z.B. mit 15 NP pro Nacht, wie in Abschnitt 5.2.2.2, erreicht man sowohl eine gute Genauigkeit als auch realistische Werte für die ERP. Die jeweils stationsabhängige Sensitivität wird bei gleichzeitigen Auswertung aller Stationen ausgeglichen und kombiniert.

Für die zukünftige Schätzung sollten mit 5 NP pro Nacht aus allen Stationen gute Ergebnisse erreichbar sein, vor allem für die Erdrotationsphase. Diese LLR-Lösungen könnten gut in die kombinierte IERS-Lösung einfließen. Allerdings muss dazu die Auswertesoftware angepasst werden, um trotz der hohen Anzahl an Unbekannten, eine stabile Berechnung zu ermöglichen. Des Weiteren könnte die Auswertung hinsichtlich der *pole offsets*, als Korrekturwerte für das Nutationsmodell und die freie Nutation des Erdkerns, erweitert werden. Mit einem ähnlichen Verfahren wie für die ERP könnten statt Nutationskoeffizienten direkt die *pole offsets* in der LLR-Auswertung geschätzt werden.





# 6 Vergleich von Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten aus LLR und SLR

Aus der Auswertung von LLR-Daten können Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten sowie Erdorientierungsparameter geschätzt werden. Diese Parameter werden, unter anderem, auch aus den geodätischen Raumverfahren VLBI, SLR, GPS und DORIS bestimmt. Die Ergebnisse dieser Verfahren werden regelmäßig zu einem Internationalen Terrestrischen Referenzrahmen, dem ITRF [Altamimi et al., 2011], sowie der Lösung des DGFI, dem DTRF [Seitz et al., 2012], kombiniert. Nachdem die LLR-Auswertesoftware nun an die IERS Konventionen von 2010 [Petit & Luzum, 2010] angepasst und auch an anderen Stellen erweitert wurde, sind die geschätzten Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten aus LLR konsistent zu denen anderer Raumverfahren. Es wurde eine wichtige Voraussetzung geschaffen, damit die LLR-Ergebnisse zu der kombinierten Berechnung eines Referenzrahmens beitragen können.

In diesem Kapitel sollen die aktuell berechneten Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten mit der SLR-DTRF2008 Lösung von Seitz et al. [2012] verglichen werden, um so das LLR-Potential darzustellen.

## 6.1 Vorbereitende Arbeiten

Die Kombination von Ergebnissen verschiedener Raumverfahren setzt ein unabhängiges Datenformat namens SINEX [IERS, 2006] voraus. Die Abkürzung SINEX steht für *Solution (Software/technique) INdependent EXchange format*. Um die Ergebnisse der LLR-Auswertung in diesem speziellen Format ausgeben zu können, waren an der in Kapitel 4 vorgestellten Programmversion LUNAR 3.0 noch einige Erweiterungen nötig. Es wurde eine Routine implementiert, die eine fertig konfigurierte Datei im SINEX-Format mit folgenden Informationen ausgibt:

- Informationen zur Institution, die die Berechnung durchgeführt hat,
- Angaben und Parameter der Stationen, von denen Messungen verarbeitet wurden,
- Angaben zu möglichen Exzentrizitäten und lokalen Vermessungen, wie in Tabelle A.2 angegeben,
- für jede Station der Anfangs- und Endzeitpunkt der Datenreihe, die dort gemessen wurde,
- statistische Angaben zu Ausgleichung, wie z.B. Standardabweichung, Anzahl der Beobachtungen und unbekanntem Parameter,
- a-priori Werte für die zu schätzenden Parameter,
- geschätzte Parameter und ihre Standardabweichung,
- Angabe von Zwängen, falls sie an bestimmte Parameter angebracht wurden sowie
- Normalgleichungsmatrix und -vektor.

Werden in einer Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell mehr unbekannte Parameter geschätzt, als in die SINEX-Datei geschrieben werden, ist es nach Seitz [2009] nötig, das Normalgleichungssystem zu reduzieren. Die Normalgleichung  $\mathbf{N}$  wird entsprechend der Gleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

umsortiert. Der Parametervektor enthält in  $\hat{\mathbf{x}}_2$  die Parameter der SINEX-Datei und in  $\hat{\mathbf{x}}_1$  die reduzierten Parameter,  $\mathbf{n}$  ist der Normalgleichungsvektor. Die erste Zeile des Normalgleichungssystems wird mit  $\mathbf{N}_{11}^{-1}$  multipliziert, was zu

$$\mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{n}_1 = \hat{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \hat{\mathbf{x}}_2 \quad (6.2)$$

führt. Multipliziert man diese Gleichung mit  $\mathbf{N}_{21}$  und subtrahiert sie von der zweiten Zeile des Normalgleichungssystems, erhält man die reduzierte Normalgleichung

$$\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{x}}_2 \quad (6.3)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12}, \quad (6.4)$$

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{n}_1. \quad (6.5)$$

Diese Parameterreduktion wird bei Ausgabe der SINEX-Datei entsprechend ausgeführt, da in der LLR-Ausgleichung mehr Parameter geschätzt werden, als in die SINEX-Datei einfließen sollen, z.B. die Mondbahn und -rotation, einige Laufzeit-Korrekturwerte sowie Schwerefeldkoeffizienten für den Mond.

## 6.2 Vergleich von LLR-Ergebnissen mit dem DTRF2008

Für den Vergleich von Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten aus LLR und dem DTRF2008 [Seitz et al., 2012] wurde die SLR-Lösung des DTRF2008 verwendet [Seitz M., persönliche Kommunikation, 2013]. Es wurden die Stationen MAUI, MLRO, MLRS2 und OCA verglichen, da nur für diese Stationen entsprechende Werte im DTRF2008 vorlagen. Die LLR-Lösung hatte folgende Merkmale:

- Berechnung mit der Programmversion LUNAR 3.0 und 20 047 NP im Zeitraum 1969 – 2013. Die Beschreibung des Datensatzes findet sich in Abschnitt 4.1.
- Die a-priori Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten basierten auf dem ITRF2008.
- Alle aus LLR geschätzten Koordinaten bezogen sich auf den jeweiligen Systemreferenzpunkt, also den Schnittpunkt der Teleskopachsen.
- Die Stationskoordinaten der drei McDonald Stationen wurden über lokale Vermessungen (siehe Tabelle A.2) verbunden und in der Ausgleichung als eine Station ausgewertet.
- Die Transformation aus dem erdfesten ins raumfeste Referenzsystem erfolgte über das Modell FWCI0. Die ERP wurden auf die C04-Reihe des IERS fixiert.
- Der Ursprung des Koordinatensystems wurde auf das Massenzentrum der Erde festgelegt, d.h. die Potentialkoeffizienten  $C_{1,0} = C_{1,1} = S_{1,1}$  waren Null.
- Der Maßstab wurde nicht festgelegt, da er über die Schätzung der Gesamtmasse des Erde-Mond-Systems angepasst werden konnte.

Die LLR-Lösung wurde in zwei Schritten berechnet. In einem ersten Schritt erfolgte die Berechnung zur Anpassung der Orientierung des raumfesten und erdfesten Referenzsystems, wie es bei der Schätzung der Nutationskoeffizienten in Abschnitt 5.1.2.1 durchgeführt wurde. Die Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten wurden auf ihren a-priori Werten festgehalten. Neben der Orientierung wurden auch die Anfangswerte für den Mondorbit und die -rotation, die Reflektorkoordinaten, einige Potentialkoeffizienten für den Mond bis Grad und Ordnung vier, die Masse des Erde-Mond-Systems, Laufzeit-Korrekturwerte für alle Stationen sowie Gezeitenparameter für Erde und Mond geschätzt. Für den zweiten Schritt wurden die angepasste Orientierung, die Masse des Erde-Mond-Systems und die Laufzeit-Korrekturwerte festgehalten, dafür aber die Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten geschätzt. Für die Geschwindigkeiten mussten leichte Zwänge vergeben werden, da sonst sowohl die jeweiligen Koordinaten als auch Geschwindigkeiten unrealistische Zuschläge und Standardabweichungen von bis zu 80 cm erhielten. Die Zwänge erlaubten für MLRS und OCA Bewegungen im Bereich von Dezimetern, für MAUI und MLRO nur im Millimeterbereich.

Als Ergebnis der LLR-Ausgleichung sind in Tabelle 6.1 die Koordinaten für MAUI (Sender), MLRO, MLRS, OCA und APOLLO mit ihren Standardabweichungen zusammengefasst. Obwohl

**Tab. 6.1:** Stationskoordinaten und deren Genauigkeiten, die aus LLR-Daten geschätzt wurden

Name	LLR Koordinaten		
	X [m]	Y [m]	Z [m]
MAUI Send.	$-5466006.957 \pm 0.021$	$-2404427.680 \pm 0.021$	$2242188.859 \pm 0.025$
MLRO	$4641978.860 \pm 0.076$	$1393067.483 \pm 0.080$	$4133249.643 \pm 0.113$
MLRS	$-1330021.389 \pm 0.004$	$-5328403.320 \pm 0.003$	$3236481.732 \pm 0.007$
OCA	$4581692.096 \pm 0.003$	$556196.137 \pm 0.002$	$4389355.111 \pm 0.003$
APOLLO	$-1463998.859 \pm 0.005$	$-5166632.763 \pm 0.004$	$3435012.766 \pm 0.012$

**Tab. 6.2:** Stationsgeschwindigkeiten und deren Genauigkeiten, die aus LLR-Daten geschätzt wurden

Name	LLR Geschwindigkeiten		
	$v_x$ [m/a]	$v_y$ [m/a]	$v_z$ [m/a]
MAUI Send.	$-0.009 \pm 0.002$	$0.057 \pm 0.002$	$0.018 \pm 0.002$
MLRO	$-0.020 \pm 0.002$	$0.019 \pm 0.002$	$0.015 \pm 0.002$
MLRS	$-0.011 \pm 0.000$	$0.004 \pm 0.000$	$-0.014 \pm 0.001$
OCA	$-0.016 \pm 0.000$	$0.019 \pm 0.000$	$0.019 \pm 0.000$
APOLLO	$-0.014 \pm 0.001$	$0.001 \pm 0.000$	$0.009 \pm 0.001$

für APOLLO kein Vergleich mit dem DTRF2008 möglich ist, sind die Ergebnisse der Vollständigkeit halber mit aufgeführt. In Tabelle 6.2 sind die jeweiligen geschätzten Geschwindigkeiten der Stationen angegeben. Die Genauigkeiten der Koordinaten liegen im Bereich von 0.2 – 11.3 cm. Die Koordinaten von MLRS und OCA sind mit einer Standardabweichung von 2 – 7 mm besonders gut bestimmt. Auch APOLLO liegt in einem ähnlichen Genauigkeitsbereich. Die Senderkoordinate von MAUI ist mit bis zu 2.5 cm schlechter, MLRO erreicht sogar 11.3 cm in der Z-Komponente. Die hohe Abweichung bei MLRO lässt sich damit erklären, dass von dieser Station nur 71 NP zur Auswertung vorliegen und die Station auf der Grenze zwischen der eurasischen und afrikanischen Platte liegt. Dies erschwert die sichere Bestimmung der Stationskoordinaten. Die Genauigkeiten der Geschwindigkeiten sind alle besser und betragen 0 – 2 mm/a. Trotz der Zwänge, die bei MAUI und MLRO relativ stark sind, haben beide Stationen im Vergleich zu den anderen Stationen höhere Standardabweichungen. Bei allen besprochenen Standardabweichungen handelt es sich um die  $1\sigma$ -Fehler aus der Ausgleichung.

Um nun diese geschätzten Koordinaten und Geschwindigkeiten aus LLR, bezüglich der Netzwerkgeometrie sowie der Datumparameter, mit der SLR-Lösung in Beziehung setzen zu können, wurde zwischen den identischen Punkten in beiden Techniken (MAUI, MLRO, MLRS und OCA) eine Ähnlichkeitstransformation über 14 Parametern durchgeführt. Es wurden sieben Transformationsparameter für die Koordinaten und sieben für die Geschwindigkeiten berechnet. Die Grundlagen zu Transformation finden sich in Altamimi et al. [2002] und Angermann et al. [2004]. Der Zusammenhang zwischen den Lösungen aus SLR und LLR besteht über

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{SLR} \\ \dot{\mathbf{x}}_{SLR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \mu)\mathbf{R} & 0 \\ (1 + \mu)\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mu}\mathbf{R} & (1 + \mu)\mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{LLR} \\ \dot{\mathbf{x}}_{LLR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

$\mu$  steht für den Maßstab,  $\mathbf{R}$  enthält die Rotationsparameter in Form von drei kleinen Winkeln und  $\mathbf{d}$  enthält für jede Richtung den entsprechenden Translationsparameter. Die jeweiligen Parameter mit Punkt sind die Raten der eben genannten. Über eine Ausgleichung können diese 14 Parameter berechnet werden.

In Tabelle 6.3 sind die Differenzen zwischen der SLR- und LLR-Lösung vor der Ähnlichkeitstransformation angegeben. Die SLR-Koordinaten für MAUI und MLRS wurden dafür mit den *local ties* aus Tabelle A.2 auf die Systemreferenzpunkte umgerechnet. Die Standardabweichungen der SLR-Koordinaten für MLRO, MLRS und OCA liegen bei einem Millimeter, die für die Geschwindigkeiten etwas besser. Die Koordinaten von MAUI haben eine Standardabweichung von 5 – 6 mm, die Geschwindigkeiten unter einem Millimeter. Der Vergleich von SLR und LLR zeigt die besten Übereinstimmungen von unter einem Millimeter bei den Z-Komponenten von MAUI und OCA.

**Tab. 6.3:** *Differenzen zwischen der SLR-Lösung des DTRF2008 und der LLR-Lösung vor der Ähnlichkeitstransformation*

Name	Koordinaten			Geschwindigkeiten		
	$\Delta X$ [cm]	$\Delta Y$ [cm]	$\Delta Z$ [cm]	$\Delta v_X$ [cm/a]	$\Delta v_Y$ [cm/a]	$\Delta v_Z$ [cm/a]
MAUI Send.	-18.8	34.7	0.0	-0.5	1.2	1.5
MLRO	-5.9	5.1	-16.9	0.1	0.1	-0.0
MLRS	-8.8	-1.8	-5.9	-0.2	-0.5	0.9
OCA	4.3	-5.2	-0.1	0.4	0.0	-0.8

**Tab. 6.4:** *Parameter der Ähnlichkeitstransformation zwischen der SLR-Lösung des DTRF2008 und der LLR-Schätzung*

Parameter	Werte für Koordinaten [cm]	Werte für Geschwindigkeiten [cm/a]
$d_1$	$9.4 \pm 6.7$	$0.6 \pm 6.7$
$d_2$	$-14.5 \pm 8.6$	$-0.3 \pm 8.6$
$d_3$	$6.5 \pm 6.2$	$-0.4 \pm 6.2$
$r_1$	$6.6 \pm 14.0$	$0.0 \pm 14.0$
$r_2$	$8.8 \pm 8.7$	$1.2 \pm 8.7$
$r_3$	$-14.5 \pm 5.7$	$-0.5 \pm 5.7$
$\mu$	$-5.7 \pm 5.1$	$-0.2 \pm 5.1$
mittlerer Fehler	6.3	6.1

Die anderen OCA-Komponenten zeigen Abweichungen von 4.3 bzw. -5.2 cm. Dagegen sind die X/Y-Abweichungen von MAUI mit -18.8 und 34.7 cm sehr hoch. Auch die Z-Komponente von MRLO zeigt mit -16.9 cm eine hohe Abweichung. Die restlichen Werte schwanken im Bereich von -1.8 und -8.8 cm.

Die Abweichungen der Geschwindigkeiten sind besonders für MAUI in der Y- und Z-Komponente mit 1.2 und 1.5 cm/a relativ hoch. Auch die Z-Komponenten von MLRS und OCA haben eine Abweichung von fast einem Zentimeter pro Jahr. Bis auf MLRO scheinen also eher die Z-Komponenten der jeweiligen Stationsgeschwindigkeiten Abweichungen zum DTRF2008 aufzuweisen.

Tabelle 6.4 enthält die Parameter der Ähnlichkeitstransformation sowie die mittleren Fehler für die Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten, die über die Ausgleichung berechnet wurden. Alle Parameter sind auf die Erdoberfläche bezogen angegeben, d.h. die Rotationen und der Maßstab wurden entsprechend umgerechnet. Mit Hilfe dieser Werte können die Netzwerkgeometrie zwischen SLR und LLR sowie die Datumparameter beurteilt werden. Die Netzwerkgeometrie stimmt zwischen SLR und LLR mit 6.3 cm für die Koordinaten und 6.1 cm/a für die Geschwindigkeiten überein. Der Maßstab, der auf die Erdoberfläche umgerechnet ist, passt im Bereich von -5.7 cm bzw. -0.2 cm/a. Für den Ursprung ist die Übereinstimmung bei den Koordinaten mit bis zu 14.5 cm relativ schlecht, bei den Geschwindigkeiten mit bis zu 0.6 cm/a besser. Allerdings muss man festhalten, dass alle Transformationsparameter für die Geschwindigkeiten im Vergleich zur jeweiligen Standardabweichung nicht signifikant sind.

Wendet man die Parameter aus Tabelle 6.4 an, um die LLR-Ergebnisse zu transformieren, erhält man die in Tabelle 6.5 zusammengestellten Residuen zwischen SLR und LLR. Die großen Abweichungen in der X- und Y-Komponente von MAUI sind wesentlich kleiner geworden, auch die Z-Komponente von MLRO hat sich verbessert. Dafür hat die Z-Komponente von OCA nun eine wesentlich höhere Abweichung. Bei den Geschwindigkeiten fällt auf, dass sich für MAUI lediglich die Vorzeichen geändert haben, aber die Werte immer noch hoch sind. Für die anderen Stationen liegen die Abweichungen im Bereich von wenigen Millimetern bis zu 1.2 cm.

Die hier analysierte und diskutierte Lösung wurde als Beitrag für das ITRF2013 eingereicht. Theoretisch ist die Messtechnik LLR in der Lage zum Ursprung und Maßstab eines Referenzrahmens beizutragen. Auf Grund der hohen Abweichungen in der aktuellen Lösung, können diese Größen aber genauer aus SLR und VLBI generiert werden. Für die aktuelle ITRF-Kombination waren

**Tab. 6.5:** Residuen zwischen der SLR-Lösung des DTRF2008 und der LLR-Schätzung nach der Ähnlichkeitstransformation

Name	Koordinaten			Geschwindigkeiten		
	$\Delta X$ [cm]	$\Delta Y$ [cm]	$\Delta Z$ [cm]	$\Delta v_X$ [cm/a]	$\Delta v_Y$ [cm/a]	$\Delta v_Z$ [cm/a]
MAUI Send.	2.1	-12.3	0.5	0.3	-0.9	-1.1
MLRO	9.5	-4.2	9.2	0.0	0.3	0.4
MLRS	-9.4	11.2	-1.4	0.2	0.8	-0.5
OCA	-2.3	5.2	-8.3	-0.2	0.3	1.2

grundsätzlich Zeitreihen von Koordinaten und EOP gefordert und nicht die von LLR gelieferten Stationskoordinaten und Geschwindigkeiten für den Zeitpunkt J2000.0. In Zukunft lässt sich dies ändern, denn in Abschnitt 5.2 hat sich gezeigt, dass bei LLR für viele Nächte genügend Messungen vorliegen, um ERP für ausgewählte Zeitpunkte zu schätzen. Eine Modifikation und Erweiterung dieser Schätzung würde eine gemeinsame Bestimmung von Stationskoordinaten und ERP für diese Nächte oder begrenzte Zeiträume ermöglichen. Des Weiteren sollte zukünftig die gemeinsame Ausgleichung der drei Stationen McDonald, MLRS1 und MLRS2 aufgelöst werden, um für jede Station einen eigenen Satz von Koordinaten und Geschwindigkeiten berechnen zu können. Trotz aller Bemühungen wird es LLR im Bereich des erdfesten Referenzrahmens aber wohl nicht ebenbürtig mit z.B. SLR aufnehmen können, wo pro Woche 2000 – 4000 NP zur Verfügung stehen [Angermann & Müller, 2009].



# 7 Schätzung relativistischer Parameter

Die Auswertung von LLR-Beobachtungen erfolgt auf Basis der Einstein'schen Relativitätstheorie und ist bis zur  $1/c^2$ -Ordnung in der nach-Newton'schen Näherung modelliert. So sind die Einstein-Infeld-Hoffmann-Gleichungen, die Signalausbreitung im Gravitationsfeld der Erde und Sonne, die zeitlichen und räumlichen Referenzsysteme sowie ihre jeweiligen Transformationen relativistisch formuliert. Durch geschickte Modifikation der Einstein-Infeld-Hoffmann-Gleichungen (3.9) können die relativistischen Anteile genauer untersucht werden. Aktuelle Ergebnisse z.B. zum Äquivalenzprinzip, Yukawa-Term, Metrikparameter und zur geodätischen Präzession finden sich in Publikationen von Müller et al. [2014a], Hofmann et al. [2013] und Müller et al. [2012a]. Die einzelnen Anteile verursachen signifikante z.B. jährliche, monatliche, mit dem Knoten des Mondes verknüpfte und daraus kombinierte Perioden in der Erde-Mond-Entfernung, über die es möglich ist, sie voneinander zu trennen [Müller et al., 2008b]. Auf Grund der großen Distanz zwischen Erde und Mond sowie der Wirkung der Körper im Sonnensystem sind in der gemessenen Erde-Mond-Entfernung die relativistischen Anteile größer als z.B. bei Entfernungsmessungen zu Satelliten [Müller et al., 2008a]. Dies ist ein großer Vorteil von LLR.

In den folgenden Abschnitten werden der Gravitomagnetismus und die Variation der Gravitationskonstanten näher untersucht. Ziel ist es herauszufinden, inwieweit die längere Datenreihe und die Modellverbesserungen in der LLR-Auswertesoftware LUNAR 3.0, die in Kapitel 4 erläutert sind, Auswirkungen auf die Schätzung dieser Parameter haben.

## 7.1 Zeitliche Variation der Gravitationskonstanten

Aus der von Einstein eingeführten Allgemeinen Relativitätstheorie folgt die Gravitationskonstante  $G$  als zeitlich und räumlich unveränderliche Größe [Einstein, 1916]. Laut den Untersuchungen von Brans & Dicke [1961] und Peebles & Dicke [1962] ist allerdings die Existenz alternativer Theorien möglich, die eine Variation der Gravitationskonstanten zulassen. Eine der bekanntesten ist die Brans-Dicke-Theorie, bei der es sich um eine Skalar-Tensor-Theorie handelt. Es ist eine Erweiterung der Allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein, die zusätzlich zur Einstein'schen Metrik auch Skalarfelder enthält [Brans & Dicke, 1961]. Aktuelle Untersuchungen von Sanders et al. [2010] und Steinhardt & Wesley [2010] bestätigen die Überlegungen, dass eine Variation der Gravitationskonstanten im Bereich von  $\dot{G}/G_0 = 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$  bis  $\dot{G}/G_0 = -10^{-14} \text{ yr}^{-1}$  möglich ist. Gemäß den Ausführungen von Will & Nordtvedt [1972] gibt es außerdem Theorien, die sogenannte bevorzugte Referenzsysteme zulassen. Auch in solchen Systemen wäre eine zeitliche Abhängigkeit von  $G$  möglich.

Untersuchungen zu bevorzugten Referenzsystemen und einer säkularen zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten  $\dot{G}/G_0$  wurden bereits von verschiedenen Autoren durchgeführt. Als Auswahl seien hier die Arbeiten von Will [1993], Müller et al. [1996], Nordtvedt & Vokrouhlický [1997], Nordtvedt [1998], Müller et al. [2008b], Williams & Folkner [2009], Hofmann et al. [2010], Shao & Wex [2012] und Pitjeva & Pitjev [2013] genannt. Nesseris & Perivolaropoulos [2007] untersuchten die Expansion des Universums, die über einen Skalenparameter  $a(t)$  beschrieben wird. Daraus resultiert der Hubble-Parameter  $H(t) = \dot{a}/a$ . Ziel der Untersuchung war es, den Hubble-Parameter in verschiedene Sektoren einzuteilen, in denen jeweils unterschiedliche Eigenschaften der Quintessenz galten. Die Quintessenz ist eine Form dunkler Energie, die als skalares Feld vorliegt und für die zunehmende Expansion des Universums verantwortlich gemacht wird. Mit Hilfe einer zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten in Abhängigkeit des Hubble-Parameters könnten verschiedene Sektoren und damit verschiedene Skalar-Tensor-Theorien bestätigt oder verworfen werden. Die zeitliche Variation der Gravitationskonstanten wurde mit einem säkularen Anteil proportional zu  $\dot{G}/G_0$  und einem quadratischen Anteil proportional zu  $\ddot{G}/G_0$  angenommen. Allerdings konnte  $\ddot{G}/G_0 \approx 10^{-15} \text{ yr}^{-2}$  nur theoretisch aus  $\dot{G}/G_0 \approx 10^{-11} \text{ yr}^{-1}$  [Pitjeva, 2005] abgeleitet werden.

In LUNAR 2.0 konnte nur  $\dot{G}/G_0$  geschätzt werden. Nach einer Erweiterung der Einstein-Infeld-Hoffmann-Bewegungsgleichungen, wo die Gravitationskonstante nun als

$$G(t) = G_0 \left( 1 + \frac{\dot{G}}{G_0} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\ddot{G}}{G_0} \Delta t^2 \right) \quad (7.1)$$

einfließt, war es möglich, auch  $\ddot{G}/G_0$  aus LLR-Messungen zu schätzen, wie Müller & Biskupek [2007] gezeigt haben. Die Zeitdifferenz  $\Delta t$  ergibt sich aus dem aktuellen Berechnungszeitpunkt und dem Beginn der LLR-Messungen (28.12.1969). Die für die Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell benötigten Ableitungen von  $\dot{G}$  und  $\ddot{G}$  werden durch numerische Differentiation der geozentrischen Mond-Ephemeride berechnet.

Die Untersuchung von Müller & Biskupek [2007] wurde mit der damaligen Programmversion von LUNAR und etwa 15 600 NP für den Zeitraum 1969 – 2006 durchgeführt. Um sinnvolle Werte für  $\ddot{G}/G_0$  schätzen zu können, mussten in der Ausgleichung die Koeffizienten für die 18.6-Jahre-Periode der Nutation mitbestimmt werden. Die Variationen der Gravitationskonstanten waren

$$\begin{aligned} \frac{\dot{G}}{G_0} &= (2 \pm 7) \times 10^{-13} \text{ yr}^{-1}, \\ \frac{\ddot{G}}{G_0} &= (4 \pm 5) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-2}. \end{aligned}$$

Es sind die realistischen Fehler angegeben, die auf Grundlage der Residuen aus der Ausgleichung abgeschätzt wurden, d.h. die Standardabweichung aus der Schätzung für  $\dot{G}/G_0$  wurde mit dem Faktor 2, für  $\ddot{G}/G_0$  mit dem Faktor 3 skaliert. Die Korrelationen betragen 97 % zwischen  $\dot{G}/G_0$  und  $k_2\delta$  sowie 80 % zwischen  $\ddot{G}/G_0$  und  $k_2\delta$ . Der Parameter  $\delta$  gibt an, um welchen Winkel die vom Mond auf der Erde verursachten Gezeiten phasenverschoben sind.  $k_2$  ist die Love-Zahl der Erde, die allerdings aus der Literatur nicht hinreichend genau bekannt ist. Aus diesem Grund wurden hier jeweils beide Parameter gemeinsam als  $k_2\delta$  geschätzt.

Analog zur Untersuchung von Müller & Biskupek [2007] wurde eine neue Schätzung zur zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten mit der Programmversion LUNAR 3.0 und 20 047 NP für den Zeitraum 1969 – 2013 durchgeführt. Durch die Verbesserungen am funktionalen Modell der Ausgleichung und die längere Datenreihe, die nun die hoch genauen APOLLO-Daten enthält, sollte sich die Genauigkeit der Parameter verbessern [Müller et al., 2008a]. Auch in dieser aktuellen Schätzung wurden wieder die Koeffizienten der 18.6-Jahre-Periode der Nutation mitbestimmt. Es ergaben sich für die säkulare bzw. quadratische Variation der Gravitationskonstanten

$$\begin{aligned} \frac{\dot{G}}{G_0} &= (1.2 \pm 1.5) \times 10^{-13} \text{ yr}^{-1}, \\ \frac{\ddot{G}}{G_0} &= (1.4 \pm 3.0) \times 10^{-15} \text{ yr}^{-2}. \end{aligned}$$

Die Genauigkeiten und Absolutwerte beider Parameter haben sich, wie erwartet, verbessert. Angegeben sind wieder die jeweils realistischen und somit skalierten Fehler. Es bestehen Korrelation von fast 100 % mit  $k_2\delta$  und von je 70 % mit der X- bzw. Y-Komponente der Mondbahn. Für  $\dot{G}/G_0$  beträgt die Korrelation mit  $k_2\delta$  ebenfalls fast 100 %, mit den Komponenten der Mondbahn sind es maximal 40 %. Die Korrelationen mit  $k_2\delta$  haben sich scheinbar trotz der längeren Datenreihe und der neuen Programmversion in Gegensatz zu der Untersuchung von Müller & Biskupek [2007] noch vergrößert. Allerdings sei an dieser Stelle angemerkt, dass sich die Auswertekonfiguration im Gegensatz zu früher leicht verändert hat. Die Koordinaten und Geschwindigkeiten des Erde-Mond-Baryzentrums wurden früher alle zusammen mit den zeitlichen Variationen der Gravitationskonstanten geschätzt. Um eine stabilere Ausgleichung hinsichtlich der Datumsfestlegung zu erreichen, wird die X-Komponente der Koordinate nun festgehalten, was zu den höheren Korrelationen beiträgt.

Zusätzlich zur Schätzung wurden Sensitivitätsanalysen durchgeführt, um die Auswirkung der Variationen der Gravitationskonstanten auf die Erde-Mond-Entfernung besser beurteilen zu können.



Über die Gleichung

$$\Delta \mathbf{r}_{EM}^p = \frac{\partial \mathbf{r}_{EM}}{\partial p} \Delta p \quad (7.2)$$

wird der Beitrag der variierten Gravitationskonstanten, ausgedrückt als  $p$ , auf die Erde-Mond-Entfernung  $\mathbf{r}_{EM}$  mit Hilfe der entsprechenden Ableitung berechnet.  $\Delta p$  bezeichnet den Zuschlag aufgrund der Variation von  $G_0$ . Die Berechnung erfolgte für den Zeitraum 1969 – 2013, in dem die Gleichung alle acht Stunden ausgewertet wurde. Es wurden die jeweiligen Genauigkeiten der säkularen und quadratischen Variation verwendet, also  $\Delta p = \dot{G}/G_0 = 1.5 \times 10^{-13} \text{ yr}^{-1}$  und  $\Delta p = \ddot{G}/G_0 = 3.0 \times 10^{-15} \text{ yr}^{-2}$ . In Abbildung 7.1 ist das Ergebnis der Sensitivitätsanalyse dargestellt. Bei einer säkularen Variation der Gravitationskonstanten resultiert nach einer Zeit von fast 45 Jahren ein Effekt von etwa  $\pm 60$  cm auf die Erde-Mond-Entfernung, bei der quadratischen Variation sind es  $\pm 20$  cm. In dieser Analyse kann allerdings nicht ausgeschlossen werden, dass die gestörte Erde-Mond-Entfernung Effekte enthält, die durch die bloße Änderung der Anfangsbedingungen hervorgerufen werden. Aus diesem Grund wurde, wie in Müller & Biskupek [2007], eine weitere Analyse durchgeführt, für die

1. eine von jeglichen Variationen der Gravitationskonstanten ungestörte Erde-Mond-Entfernung berechnet wurde;
2. eine Erde-Mond-Entfernung berechnet wurde, in die die Gravitationskonstante gemäß Gleichung (7.1) einfließt. Für die Variationen von  $G_0$  wurden die gleichen Werte angenommen, wie in der Sensitivitätsanalyse zuvor. Allerdings wurden die Startwerte für die Integration der Bahnen von Erde und Mond neu geschätzt.

Danach wurde die Differenz der beiden Berechnungen gebildet, die nun nur noch die tatsächlichen Effekte der variierten Gravitationskonstanten auf die Erde-Mond-Entfernung enthielt, wie in Abbildung 7.2 dargestellt. Die Differenz schwankt dort nicht um Null, sondern ist um etwa 1 cm verschoben. Der Effekt auf die Erde-Mond-Entfernung ist besonders in den ersten Jahren mit  $-2$  bis  $4$  cm am höchsten, nach etwa 10 Jahren wird er erheblich schwächer und schwankt mit einer Amplitude von etwa 4 mm. Im Rahmen der dargestellten Differenz könnte eine Störung der Erde-Mond-Entfernung durch die Variation der Gravitationskonstanten auftreten, ohne in der LLR-Auswertung signifikant nachgewiesen werden zu können.

Zur Untersuchung der sichtbaren periodischen Signale in Abbildung 7.2 wurde die dargestellte Differenz der beiden Erde-Mond-Entfernungen in den Frequenzraum transformiert und in Abbildung 7.3 als Leistungsdichtespektrum über die Perioden aufgetragen. Alle Perioden, die eine hohe Leistungsdichte haben, sind die mit der Mondbahn verknüpften Perioden und Kombinationen aus ihnen. Sie alle werden gleichzeitig von der variierten Gravitationskonstanten beeinflusst. Die stärkste Dichte ergibt sich für die siderische Periode mit 27.32 Tagen und die Periode, die mit dem halben Knotenumlauf vom 3 414.98 Tagen verbunden ist.

In die Berechnung der Gezeitenbeschleunigung des Mondes, die proportional zu  $k_2\delta$  ist, fließt die Knotenbewegung des Mondes als Parameter ein [Williams et al., 1978]. Die Gezeitenbeschleunigung führt dazu, dass sich die Erde-Mond-Entfernung vergrößert. Die säkulare Variation der Gravitationskonstanten führt ebenfalls zu einer Vergrößerung der Erde-Mond-Entfernung, was zur Folge hat, dass die beiden Effekte kaum voneinander getrennt werden können. Diese Verbindung zeigt sich in den Korrelationen zwischen den Variationen von  $G_0$  und  $k_2\delta$  sowie dem starken, mit der Knotenbewegung verknüpften, Signal im Leistungsdichtespektrum. Über einen noch längeren Zeitraum der Messungen würde man eine Dekorrelation erwarten, da  $k_2\delta$  nur im Erde-Mond-System wirkt, die zeitliche Variation der Gravitationskonstanten aber über alle Körper des Sonnensystems.

Die hier durchgeführten Analysen haben bestätigt, dass die Genauigkeit der zeitlichen säkularen und quadratischen Variationen der Gravitationskonstanten durch die längere Beobachtungsreihe und neue Programmversion tatsächlich verbessert werden konnten. Die Ergebnisse schränken eine mögliche Verletzung der Relativitätstheorie von Einstein weiter ein. Die bestehenden Korrelationen mit  $k_2\delta$  haben sich durch eine etwas andere Auswertekonfiguration als in Müller & Biskupek [2007] verändert bzw. leicht verstärkt. Allerdings liegt der Schätzung noch immer das gleiche Modell für die Gezeitenbeschleunigung des Mondes zu Grunde, bei dem die Gezeiteneffekte nur mit einem

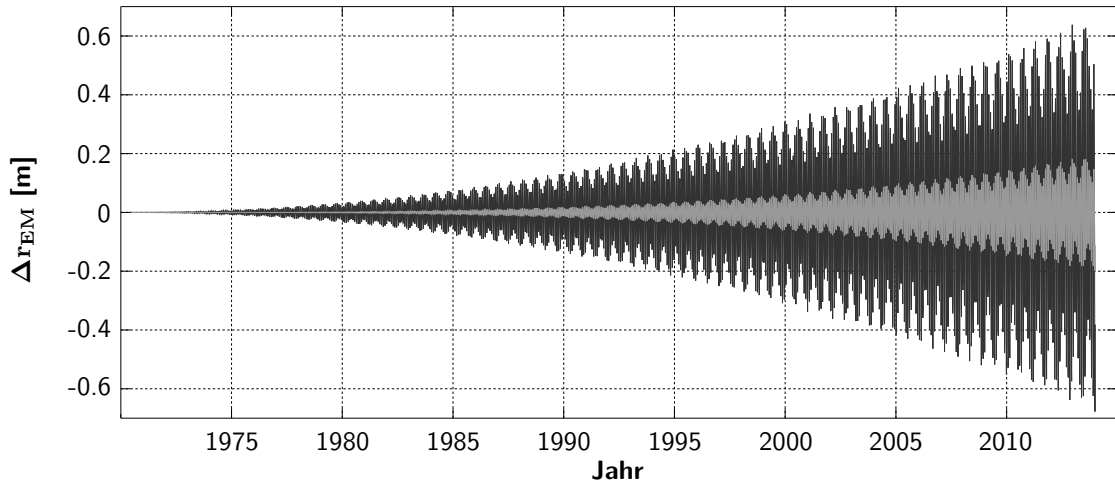


Abb. 7.1: Sensitivität der Erde-Mond-Entfernung auf eine säkulare Variation der Gravitationskonstanten mit  $\dot{G}/G_0 = 1.5 \times 10^{-13} \text{ yr}^{-1}$  (schwarz) bzw. eine quadratische Variation mit  $\ddot{G}/G_0 = 3.0 \times 10^{-15} \text{ yr}^{-2}$  (grau)

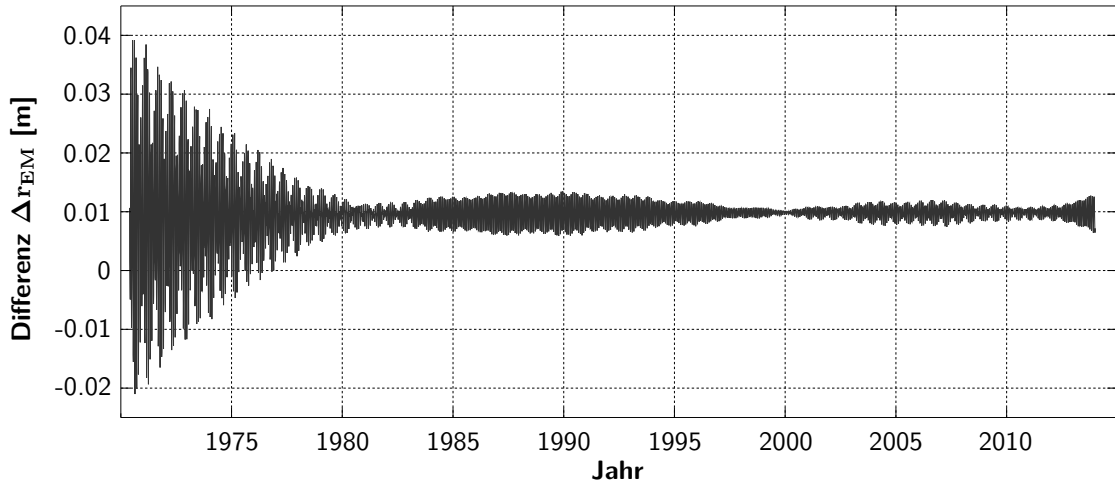


Abb. 7.2: Differenz der Erde-Mond-Entfernung zwischen einer mit  $\dot{G}/G_0 = 1.5 \times 10^{-13}$  und  $\ddot{G}/G_0 = 3.0 \times 10^{-15}$  gestörten und einer ungestörten Berechnung

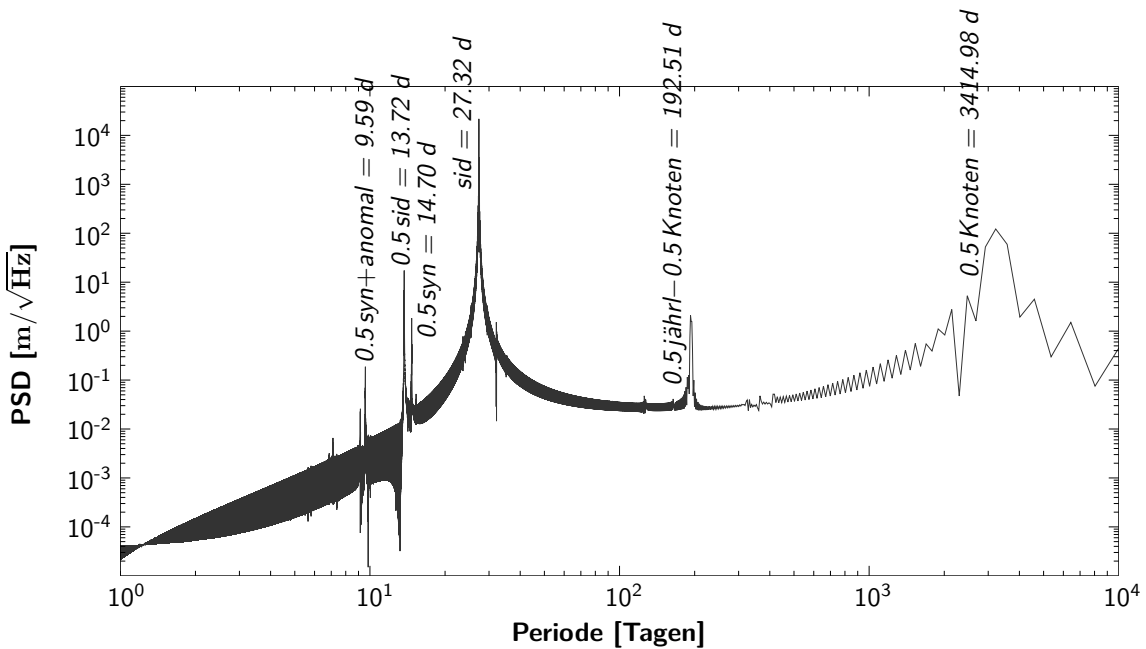


Abb. 7.3: Leistungsspektraldichte der in Abbildung 7.2 dargestellten Differenz der Erde-Mond-Entfernung zwischen einer mit  $\dot{G}/G_0 = 1.5 \times 10^{-13}$  und  $\ddot{G}/G_0 = 3.0 \times 10^{-15}$  gestörten und einer ungestörten Berechnung

einfachen Ansatz modelliert sind. Dies hat einen Einfluss auf die Schätzung der Gravitationskonstantenvariationen. Eine entsprechende Verbesserung des Modells ist geplant.

Wie eingangs erläutert, kann der Wert der quadratischen Variation der Gravitationskonstanten für die Beurteilung verschiedener Skalar-Tensor-Theorien genutzt werden. Mit der Schätzung aus LLR wird der schon theoretisch von Nesseris & Perivolaropoulos [2007] erreichte Wert bestätigt. Dieser kann prinzipiell, in Verbindung mit Werten für die Parameter zu den bevorzugten Referenzsystemen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  von Müller et al. [2014a], für Aussagen zur Gültigkeit von Skalar-Tensor-Theorien genutzt werden. Allerdings muss man bedenken, dass die Schätzung der Werte aus LLR-Daten im kosmischen Sinn auf einer sehr kurzen Zeitskala basiert.

## 7.2 Gravitomagnetismus

Einsteins Relativitätstheorie besagt, dass die Raumzeit um einen massereichen Körper herum gekrümmt ist. Wie schon in Abschnitt 2.3.1 erläutert, folgte daraus die von de Sitter [1916] festgestellte geodätische Präzession. Durch die Rotation dieses massereichen Körpers kommt es zusätzlich zum Lense-Thirring-Effekt [Lense & Thirring, 1918]. Massenströmungen generieren somit eine zusätzliche Krümmung der Raumzeit. Diese wird, wegen der formalen Analogie zum Magnetismus in der Elektrodynamik, gravitomagnetisches Feld genannt [Ciufolini & Wheeler, 1995]. Der Lense-Thirring-Effekt ist ein Effekt des Gravitomagnetismus, der abhängig vom Referenzsystem ist [Soffel et al., 2008]. Bei Satellitenbahnen verursacht der Lense-Thirring-Effekt eine Präzession des Perigäums sowie eine säkulare Drift des Bahnknotens, die in den Daten der LAGEOS-Satelliten von Ciufolini & Pavlis [2004] und Ciufolini et al. [2006] nachgewiesen werden konnten.

Murphy et al. [2007] untersuchten die Residuen einer Auswertung von LLR-Daten und konnten so den Lense-Thirring-Effekt im Erde-Mond-System mit einer Genauigkeit von 0.15 % nachweisen. Soffel et al. [2008] haben für die Untersuchung des Gravitomagnetismus im Erde-Mond-System einen anderen Ansatz gewählt und die Einstein-Infeld-Hoffmann-Bewegungsgleichungen mit einem entsprechenden gravitomagnetischen Parameter

$$\Delta = 2\gamma + 2 + \frac{\alpha_1}{2} \quad (7.3)$$

erweitert.  $\gamma$  bezeichnet den Raumkrümmungsparameter (bei Einstein gilt  $\gamma = 1$ ) und  $\alpha_1$  einen Parameter der bevorzugten Referenzsysteme (bei Einstein gilt  $\alpha_1 = 0$ ). Das BCRS wurde hypothetisch als ein bevorzugtes Referenzsystem angenommen.

Die Identifizierung der gravitomagnetischen Terme in den EIH-Bewegungsgleichungen wurde auf Grundlage des Formalismus von Will [1993] durchgeführt, erweitert um  $\Delta$  nehmen sie die folgende Form an

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A = & - \sum_{B \neq A} \frac{GM_B}{r_{AB}^2} \mathbf{n}_{AB} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[ \gamma \mathbf{v}_A^2 + (\gamma + 1) \mathbf{v}_B^2 - \Delta \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_B - \frac{3}{2} (\mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{v}_B)^2 \right] \right. \\ & - 2(\gamma + \beta) \sum_{C \neq A} \frac{GM_C}{c^2 r_{AC}} - \sum_{C \neq A, B} \frac{GM_C}{c^2 r_{BC}} \left[ (2\beta - 1) + \frac{1}{2} \frac{r_{AB}}{r_{CB}} \mathbf{n}_{AB} \cdot \mathbf{n}_{CB} \right] \\ & - \left( 2\gamma + 2\beta + 1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) \frac{GM_A}{c^2 r_{AB}} \left. - \frac{(4\gamma + 3 + \alpha_1)}{2} \sum_{B \neq A} \sum_{C \neq A, B} \frac{G^2 M_B M_C}{c^2 r_{AB} r_{BC}^2} \mathbf{n}_{BC} \right. \\ & + \sum_{B \neq A} \frac{GM_B}{c^2 r_{AB}^2} \{ \mathbf{n}_{AB} [(2\gamma + 2) \mathbf{v}_A - (2\gamma + 1) \mathbf{v}_B] \} \mathbf{v}_A \\ & \left. - \sum_{B \neq A} \frac{GM_B}{c^2 r_{AB}^2} \left\{ \mathbf{n}_{AB} \left[ \Delta \mathbf{v}_A - \left( 2\gamma + 1 + \frac{\alpha_1}{2} \right) \mathbf{v}_B \right] \right\} \mathbf{v}_B \right. \end{aligned} \quad (7.4)$$

mit

$$\mathbf{n}_{AB} = \frac{\mathbf{x}_A(t) - \mathbf{x}_B(t)}{r_{AB}}.$$

Führt man weiterhin

$$\eta_G = 2\gamma + 2 - \Delta \quad (7.5)$$

ein, ist es möglich, diesen Parameter direkt in der Auswertung von LLR-Messungen zu bestimmen. Alternativ ist es möglich,  $\alpha_1$  zu bestimmen und damit eine Aussage zu den Abweichungen zwischen gravitomagnetischen Effekten im BCRS und den in der allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagten zu ermöglichen. Diese Aussage ist insofern wichtig, da das gravitomagnetische Feld vom Referenzsystem abhängig ist, in dem es berechnet wird, was aus der Analogie zum elektromagnetischen Feld resultiert. Transformiert man das gravitomagnetische Feld ins GCRS, wird es teilweise eliminiert [Soffel et al., 2008].

Die beschriebene Erweiterung der EIH-Bewegungsgleichungen wurde in die Auswertesoftware LUNAR 3.0 implementiert. Theoretisch wäre es auch nötig,  $\Delta$  bei der Transformation zwischen dem GCRS bzw. SCRS und dem BCRS sowie in der Lichtzeitgleichung zu berücksichtigen. Da dort der gravitomagnetische Effekt allerdings sehr klein ist, wird er vernachlässigt. Die benötigten partiellen Ableitungen für die Ausgleichung wurden über numerische Differentiation der geozentrischen Mond-Ephemeride berechnet.

Die Untersuchung zum Gravitomagnetismus wurde von Soffel et al. [2008] auf Grundlage von 15 700 NP im Zeitraum 1969 – 2006 und einer Zwischenversion von LUNAR durchgeführt, die hier nicht näher beschrieben wird. Wie eingangs erläutert, handelt es sich beim Lense-Thirring-Effekt um eine Präzession, deren Trennung von der Präzession der Erdrotationsachse schwierig ist [Ciufolini & Wheeler, 1995]. Aus diesem Grund wurde in der Auswertung der LLR-Daten die Präzessionskonstante mitgeschätzt. Der gravitomagnetische Parameter betrug

$$\eta_G = (0.9 \pm 1.5) \times 10^{-3}.$$

Es ist der realistische Fehler angegeben, für den der formale Fehler der Ausgleichung mit dem Faktor 2 multipliziert wurde. Als Korrelationen ergaben sich Werte im Bereich von 50 – 60 % mit den Bahnparametern des Mondes, außerdem bis zu 80 % mit der Bahn des Erde-Mond-Baryzentrums um die Sonne und  $k_2\delta$ .

Eine Wiederholung der damaligen Schätzung, die mit der aktuellen Programmversion LUNAR 3.0 und 20 047 NP für den Zeitraum 1969 – 2013 durchgeführt wurde, ergab

$$\eta_G = (-0.2 \pm 0.6) \times 10^{-3},$$

wieder mit dem realistischen, also skalierten, Fehler. Die Korrelationen betragen jetzt 40 % mit den Z-Komponenten der Mondbahn und des Erde-Mond-Baryzentrums. Die Korrelation zu  $k_2\delta$  beträgt nur noch 10 % und hat sich im Vergleich zu vorherigen Untersuchung durch die längere Datenreihe signifikant verringert. Dies führt auch zu der Steigerung der Genauigkeit von  $\eta_G$ , was schon durch Soffel et al. [2008] vermutet wurde. Weiterhin hat eine veränderte Auswertestrategie, die wie in Abschnitt 7.1 die Koordinaten und Geschwindigkeiten des Erde-Mond-Baryzentrums betrifft, zu den geringeren Korrelationen und somit zur Genauigkeitssteigerung beigetragen.

Analog zu Abschnitt 7.1 wurde auch zum Gravitomagnetismus eine Sensitivitätsanalyse gemäß Gleichung (7.2) durchgeführt, in der  $\Delta p$  durch  $\eta_G = 0.6 \times 10^{-3}$  ersetzt wurde. Das Ergebnis der Berechnung zeigt Abbildung 7.4. Nach einer Zeit von fast 45 Jahren resultiert ein Effekt von  $\pm 60$  cm auf die Erde-Mond-Entfernung. Um allerdings auch bei dieser Analyse den reinen Effekt durch den gravitomagnetischen Parameter  $\eta_G$  zu erhalten, der durch veränderte Anfangsbedingungen der Berechnung nicht beeinflusst wird, wurden zwei Varianten der Erde-Mond-Entfernung berechnet, eine von  $\eta_G$  ungestörte und eine mit  $\eta_G = 0.6 \times 10^{-3}$  gestörte. Die daraus gebildete Differenz ist in Abbildung 7.5 dargestellt. Der resultierende gravitomagnetische Effekt verursacht eine Verschiebung von 4.97 cm. Um diesen Wert entsteht eine gedämpfte periodische Schwingung, deren Amplitude in den ersten Jahren 2.5 mm, am Ende des dargestellten Zeitraums etwa 1.8 mm beträgt.

Zur Analyse der in Abbildung 7.5 sichtbaren Perioden, wurde die Differenz zwischen gestörter und ungestörter Erde-Mond-Entfernung in den Frequenzraum transformiert. In Abbildung 7.6 ist das entsprechende Leistungsdichtespektrum dargestellt. Die Perioden mit hoher Dichte sind mit

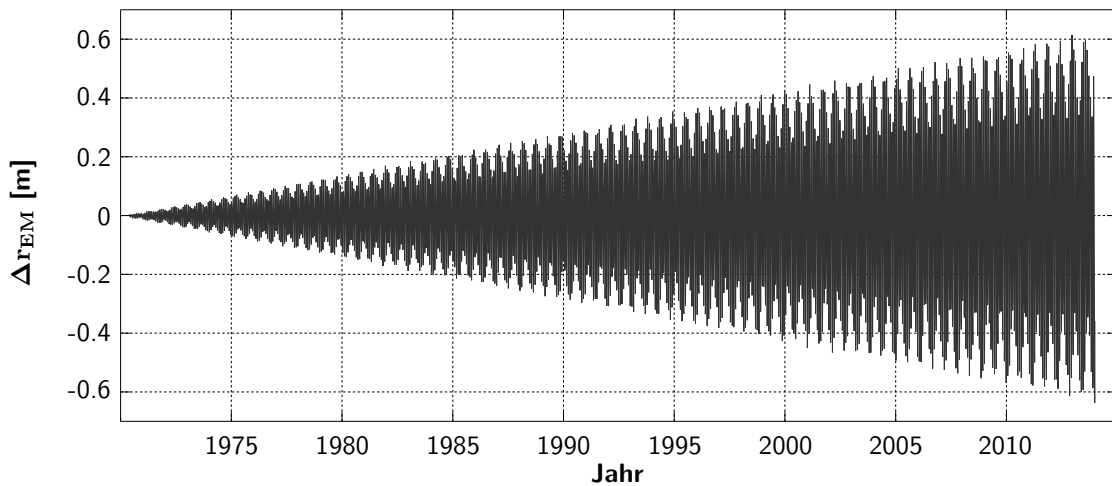


Abb. 7.4: Sensitivität der Erde-Mond-Entfernung auf einen gravitomagnetischen Parameter mit  $\eta_G = 0.6 \times 10^{-3}$

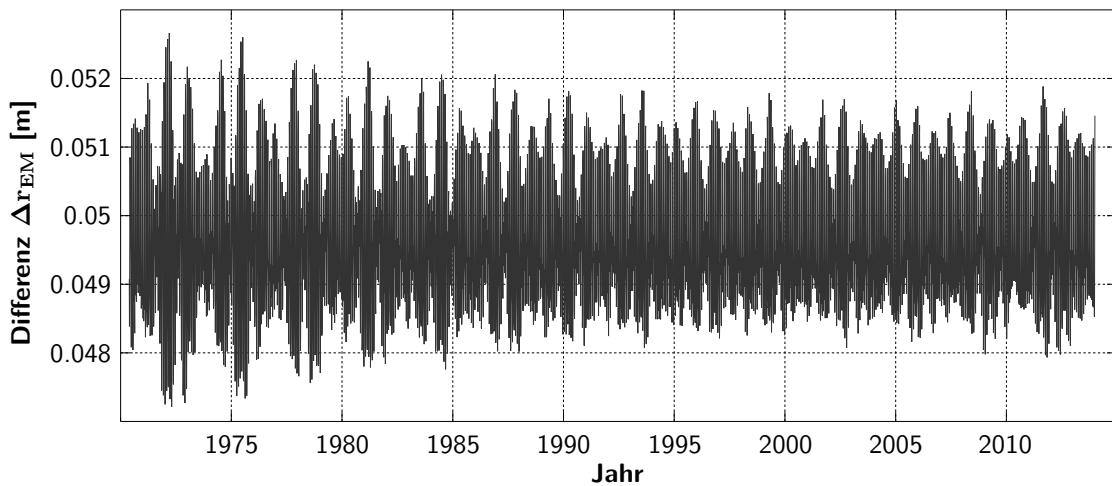


Abb. 7.5: Differenz der Erde-Mond-Entfernung zwischen einer mit  $\eta_G = 0.6 \times 10^{-3}$  gestörten und einer ungestörten Berechnung

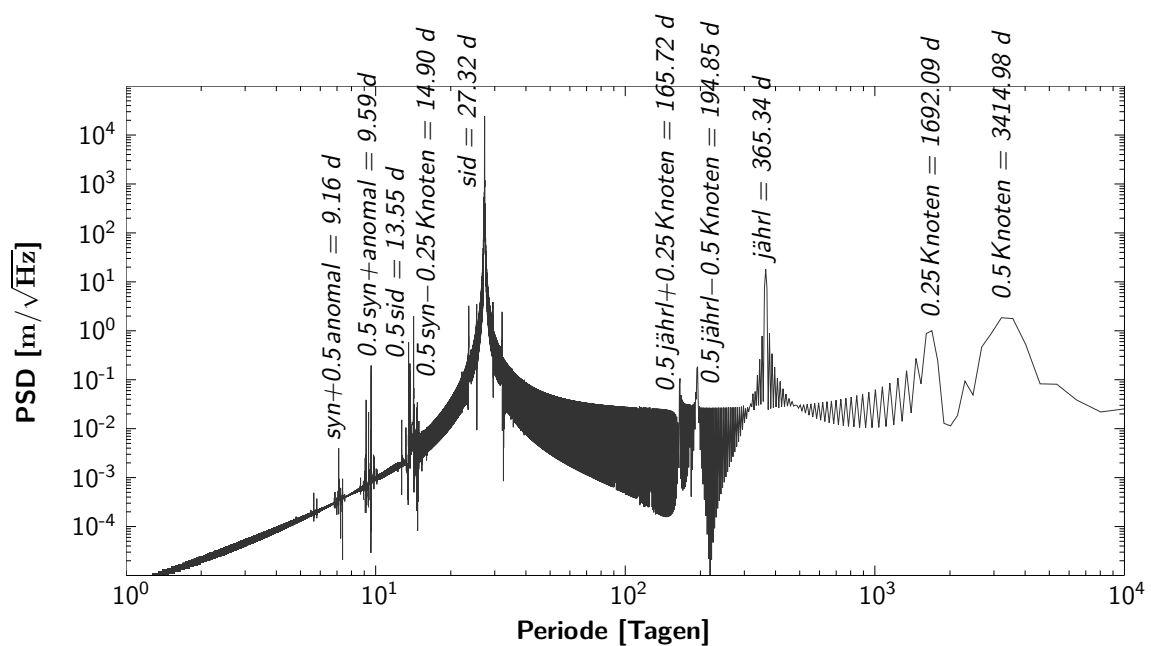


Abb. 7.6: Leistungsspektraldichte der in Abbildung 7.5 dargestellten Differenz der Erde-Mond-Entfernung zwischen einer mit  $\eta_G = 0.6 \times 10^{-3}$  gestörten und einer ungestörten Berechnung

dem Mond verknüpft bzw. Kombinationen dieser typischen Perioden. Die größten Werte zeigen sich in der siderischen Periode mit 27.32 Tagen und der jährlichen Periode mit 365.34 Tagen.

Man kann nun argumentieren, dass  $\eta_G$  kein post-Newton'scher Parameter ist und er außerdem keine fundamentale Aussagekraft besitzt, da er sich bei einer Änderung der Bewegung seines Beobachters ebenfalls ändert. Aus diesem Grund wird über den Parameter  $\alpha_1/2$  eine Verletzung der lokalen Lorentz-Invarianz getestet, die mit dem Gravitomagnetismus verbunden ist. Dazu wurde in Gleichung (7.4) der Parameter  $\eta_G$  durch  $-\alpha_1/2$  ersetzt. In der von Soffel et al. [2008] durchgeführten Untersuchung ergab sich

$$\alpha_1 = (1.6 \pm 4.0) \times 10^{-3},$$

wobei wieder der mit Faktor 2 skalierte realistische Fehler angegeben ist. Die Korrelationen betragen etwa 95 % mit den Bahnparametern des Mondes sowie fast 90 % mit  $k_2\delta$ . Dies führt zu der schlechten Genauigkeit von  $\alpha_1$ .

In der aktuellen Schätzung mit 20 047 NP im Zeitraum 1969 – 2013 und LUNAR 3.0 folgte

$$\alpha_1 = (0.6 \pm 0.6) \times 10^{-3},$$

hier ebenfalls mit dem realistischen Fehler, der sich im Gegensatz zur vorherigen Untersuchung signifikant verbessert hat. Für die Berechnung wurde das Erde-Mond-Baryzentrum festgehalten. Dies führt zusammen mit der jetzt längeren Datenreihe zu wesentlich geringeren Korrelationen mit den anderen Parametern des Erde-Mond-Systems und dies zu der guten Genauigkeit. Die Korrelationen betragen bis zu 30 % mit den Reflektorkoordinaten und nur noch 20 % mit  $k_2\delta$ .

Die hier erzielten Ergebnisse bestätigen in Übereinstimmung mit Einsteins Theorie, dass das BCRS kein bevorzugtes Referenzsystem ist und somit die lokale Lorentz-Invarianz nicht verletzt wird. Außerdem ist es mit Hilfe von  $\eta_G$  möglich, Untersuchungen zum Gravitomagnetismus mit LLR durchzuführen.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Entfernungsmessungen zum Mond werden seit 45 Jahren durchgeführt. Die Daten stellen die längste Reihe räumlicher geodätischer Beobachtungen dar, die zur Verfügung steht. Mit der Station APOLLO in New Mexiko (USA) und den Erneuerungen am Messsystem der Station OCA in Grasse (Frankreich) ist es gelungen, die Erde-Mond-Entfernung bei optimalen Bedingungen mit Millimeter-Genauigkeit zu beobachten. Ziel dieser Arbeit war, die Genauigkeit der Auswertung diesem Niveau anzunähern, um so das Potential der hoch genauen LLR-Beobachtungen nutzen zu können. Der Schwerpunkt lag dabei auf Untersuchungen von Erdorientierungsparametern, Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten sowie Tests der Relativitätstheorie.

Das Auswerteprogramm LUNAR wurde in den letzten 30 Jahren an der Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie der TU München und am Institut für Erdmessung der Leibniz Universität Hannover entwickelt. Es bildete die Grundlage dieser Arbeit. Das funktionale Modell von LUNAR wurde nun an verschiedenen Stellen aktualisiert und erweitert. Um die Bewegung der Stationskoordinaten sehr genau zu bestimmen, werden nun alle Gezeiteneffekte der Atmosphäre, der Ozeane sowie der festen Erde berücksichtigt, die eine Änderung im Millimeter-Bereich verursachen. Ebenso werden Bewegungen der Reflektorkoordinaten durch die Gezeiten der Erde in der Auswertung berücksichtigt. Ein weiterer wichtiger Teil der Auswertung, der die Genauigkeit beeinflusst, ist die Transformation zwischen den räumlichen Referenzsystemen. In der Transformation des erdfesten ITRS ins raumfeste GCRS und weiter ins BCRS werden die aktuellsten Modelle für die Präzession und Nutation verwendet. Ebenso werden zeitliche Variationen der Transformationsparameter berücksichtigt, um sich auch an dieser Stelle der Auswertung dem Millimeter-Bereich anzunähern. Die Modellerweiterungen führten dazu, dass die Residuen der Auswertung signifikant verbessert wurden und nun in Zeiträumen, in denen genügend gut verteilte Beobachtungen vorliegen, im Bereich von 2 – 3 cm liegen. Die gute Auswertegenauigkeit lässt sich auch anhand der signifikant verbesserten Standardabweichungen von geschätzten Parametern nachvollziehen, z.B. der Stationskoordinaten, die im Vergleich zu vorher etwa um den Faktor drei verbessert wurden, Reflektorkoordinaten sogar um den Faktor fünf. Die Genauigkeit der Reflektorkoordinaten ließe sich noch weiter steigern, wenn die thermale Ausdehnung der Reflektoren in der Auswertung berücksichtigt werden würde [Murphy et al., 2010].

Untersuchungen zum stochastischen Modell der Ausgleichung haben ergeben, dass die Gewichtung zwischen den Beobachtungen der verschiedenen Stationen, die als unkorreliert angenommen werden, mit Hilfe einer Varianzkomponentenschätzung zu keiner signifikanten Verbesserung der Auswerteergebnisse geführt hat. Da man von einem Zusammenhang zwischen Normalpunkten einer Station oder einer Messsequenz ausgehen muss, der aktuell noch nicht berücksichtigt wird, sind hier weitere Untersuchungen im Bereich der Korrelationen zwischen den Beobachtungen nötig, um das Potential der Varianzkomponentenschätzung besser nutzen zu können.

Im Zuge der allgemeinen Aktualisierungen im Auswerteprogramm wurde dessen Aufbau erneuert und modular gestaltet. Für die Berechnung der Transformationsmatrix zwischen dem ITRS und dem GCRS gibt es verschiedene Möglichkeiten. Deswegen wurden drei entsprechende Module für die Transformation erstellt, die jeweils eine in sich konsistente Berechnung der Transformationsmatrix ermöglichen. Nun kann die Art der Transformation für spezielle Untersuchungen mit wenig Aufwand ausgetauscht werden. Außerdem wird durch die Modularisierung die zukünftige Pflege der Programme vereinfacht, da alle Programmteile (z.B. Ephemeridenberechnung und Parameterschätzung) der LLR-Auswertung auf das selbe Transformationsmodul zugreifen und nicht mehr in jedem Programmteil eine separate Transformation implementiert ist.

In Gegensatz zum früheren Auswerteprogramm wurde im Rahmen der Arbeit die Möglichkeit geschaffen, die Koeffizienten der Nutationsreihe für fünf Perioden zu schätzen: 18.6 Jahre, 182.6 Tage, 13.6 Tage, 9.3 Jahre und 365.3 Tage. Untersuchungen für verschiedene Modellierungsansätze haben gezeigt, dass die Ergebnisse aus LLR besonders in der  $\Delta\psi$ -Komponente, also entlang der Ekliptik, vom offiziellen Nutationsmodell MHB2000 abweichen. Dies weist auf eine Verdrehung des

LLR-Systems zum BCRS hin. Die Ursache könnte einerseits die Auswertung der LLR-Messungen im Ekliptiksystem sein. Da die Mondbahn nicht kontinuierlich beobachtet wird, ist die Trennung von Effekten entlang der Ekliptik schwierig. Andererseits können Systematiken im VLBI-basierten Nutationsmodell MHB2000 nicht ausgeschlossen werden. Des Weiteren zeigen die Untersuchungen, dass unterschiedliche Transformationswege aus dem erdfesten ins raumfeste Referenzsystem auch zu unterschiedlichen Ergebnissen bei der Schätzung der Nutationskoeffizienten führen. Die Abweichungen betragen vor allem bei Koeffizienten der 18.6-Jahre-Periode einige Millibogensekunden, was mit den Korrelationen zusammenhängt, die aus der unterschiedlichen Modellierung resultieren. An dieser Stelle wäre eine gemeinsame Auswertung der Messungen aus LLR und VLBI auf Normalgleichungsebene eine Möglichkeit, die Ergebnisse beider Verfahren zu verknüpfen und Modellinkonsistenzen zu identifizieren. Auch eine zukünftige integrierte Auswertung von differentiellen VLBI- und LLR-Beobachtungen würde zur Verbesserung der Ergebnisse führen. Eine weitere Verbesserung der Nutationsergebnisse sollte durch eine genauere Modellierung der Mondzeiten erreicht werden, da diese einen entscheidenden Einfluss auf die Schätzung der Nutationskoeffizienten haben. Problematisch an den LLR-Beobachtungen bleibt allerdings deren ungleichmäßige zeitliche Verteilung über den jährlichen und synodischen Zeitraum.

Die alte Version des Auswerteprogramms LUNAR zur Schätzung von Erdrotationsparametern wurde stark erweitert. Es können nun ausgewählte Nächte oder begrenzte Zeiträume separat ausgewertet werden, entweder als Trend oder Offset. Ergebnisse verschiedener Analysen zeigen, dass genügend Beobachtungen aus LLR vorliegen, besonders die der Station APOLLO, um Zeitreihen von Polkoordinaten oder der Erdrotationsphase zu berechnen. Die Genauigkeit der Polkoordinaten liegt bei 1 – 20 mas, für die Erdrotationsphase bei 0.03 – 0.4 ms. Diese Ergebnisse sind, besonders für die Polkoordinaten, schlechter als aus anderen räumlichen geodätischen Messverfahren. Trotzdem haben diese Untersuchungen verdeutlicht, dass in Zukunft bei einer Schätzung von ERP aus allen Stationen gute Ergebnisse mit LLR erreichbar sind, die in die Kombination von IERS-EOP-Lösungen einfließen können. Weitere Analysen müssen zeigen, ob es möglich ist, aus LLR gleichzeitig *pole offsets* zu schätzen, die als Korrektur für das Nutationsmodell und die freie Nutation des Erdkerns bestimmt werden. Würde sich hier eine geeignete Auswertestrategie finden lassen, könnte aus LLR ein vollständiger Satz Erdorientierungsparameter geschätzt werden.

Hauptgründe für die Ungenauigkeiten der ERP sind die schlechte geographische Verteilung der Stationen und die oftmals kaum vorhandene gleichzeitige Messung zum Mond von mehreren Stationen aus. Simulationen von Hofmann et al. [2013], die eine größere Anzahl von Stationen und Reflektoren angenommen haben, zeigen, dass sich die LLR-Ergebnisse mit Messungen weiterer Stationen verbessern ließen. Aktuell werden die Stationen Wettzell in Süddeutschland und Hartbeesthoek in Südafrika für LLR-Messungen vorbereitet und lassen somit hoffen, dass sich die Situation der ungünstigen Stationsverteilung etwas verbessern lässt. In Müller et al. [2009] beschriebene Bestrebungen zu Installation von Transpondern auf dem Mond oder zur Entwicklung neuer Retroreflektoren [Currie et al., 2013] versprechen außerdem eine Verbesserung der Situation sowohl zur Verteilung der Reflektoren auf der Mondoberfläche als auch die Möglichkeit, dass dann SLR-Stationen in der Lage sein werden, Entfernungsmessungen zum Mond durchzuführen. Dies würde die Beobachtungssituation signifikant verbessern.

Ein Vergleich von Stationskoordinaten aus LLR und SLR hat nach einer Ähnlichkeitstransformation ergeben, dass Abweichungen im Bereich von einigen Zentimetern zwischen den beiden Lösungen bestehen. Somit hat LLR auch das Potential, in kombinierten Lösungen, etwa des ITRF, einen Beitrag zu leisten. Aktuell werden in der LLR-Auswertung allerdings Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten nur für einen Zeitpunkt berechnet. Nachdem die Schätzung von ERP in ausgewählten Nächten gezeigt hat, dass aus LLR auch Zeitreihen generiert werden können, ist es möglich das dort angewendete Verfahren auf die Stationskoordinaten zu erweitern. Wie bei einer angestrebten Erweiterung um die Schätzung von *pole offsets* der Nutation als Zeitreihe, wären auch hier weitere Untersuchungen nötig. Diese müssten eine optimale Auswertestrategie finden, die zuverlässige Ergebnisse liefert, sowohl in Bezug auf die Datumsfestlegung und Schätzung der Parameter als auch auf die rein numerische Stabilität der Ausgleichung bei der großen Anzahl der dann zu bestimmenden Unbekannten.



Im Bereich der Relativitätstheorie gilt LLR als einzigartige Möglichkeit, verschiedenen Theorien, wie die von Einstein oder Brans-Dicke, mit hoher Genauigkeit zu überprüfen. Analysen haben verdeutlicht, dass die erweiterte LLR-Auswertesoftware und längere Datenreihe positive Effekte auf die Schätzung relativistischer Parameter haben. Speziell wurden die zeitliche Variation der Gravitationskonstanten und Parameter des Gravitomagnetismus untersucht. Die Tests haben die Gültigkeit der Einstein'schen Theorie weiter gefestigt. Allerdings könnte eine genauere Modellierung der Mondgezeiten die Genauigkeiten der relativistischen Parameter verbessern.

In dieser Arbeit wurde demonstriert, dass LLR für verschiedene geodätische und weitere wissenschaftliche Bereiche einen wichtigen Beitrag liefert, z.B. zur Bestimmung von Stationskoordinaten, -geschwindigkeiten, Erdorientierungsparametern und insbesondere relativistischen Parametern. Die Genauigkeit dieser Parameter konnte durch eine längere Datenreihe und konsistente Modellerweiterungen bzw. -verfeinerungen signifikant verbessert werden. Trotzdem ermöglicht sowohl die aktuelle Datenlage als auch die Auswertung noch keine Millimetergenauigkeit. Weitere Arbeiten am Institut für Erdmessung zum inneren Aufbau des Mondes, zur Mondrotation und zum Effekt der Asteroiden in der Ephemeridenberechnung werden jedoch zu weiteren Genauigkeitssteigerungen führen.



# A Anhang

## A.1 Rotationsmatrizen

Zur Festlegung der Rotationsmatrizen und deren Drehsinn, wie er in dieser Arbeit verwendet wird, sind im Folgenden die Matrizen mit ihren Komponenten angegeben.

Die Rotation um die x-Achse (Achse 1) wird beschrieben über

$$\mathbf{R}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{R}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

beschreibt die Rotation um die y-Achse (Achse 2). Und schließlich

$$\mathbf{R}_3(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

die Rotation um die z-Achse (Achse 3). Der in den Matrizen angegebene Winkel  $\alpha$  kann durch einen beliebigen Winkel ersetzt werden.

Die jeweiligen Ableitungen der Rotationsmatrizen ergeben sich für die Rotation um die x-Achse zu

$$\dot{\mathbf{R}}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ 0 & -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

für die Rotation um die y-Achse zu

$$\dot{\mathbf{R}}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) & 0 & -\cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

und für die Rotation um die z-Achse zu

$$\dot{\mathbf{R}}_3(\alpha) = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

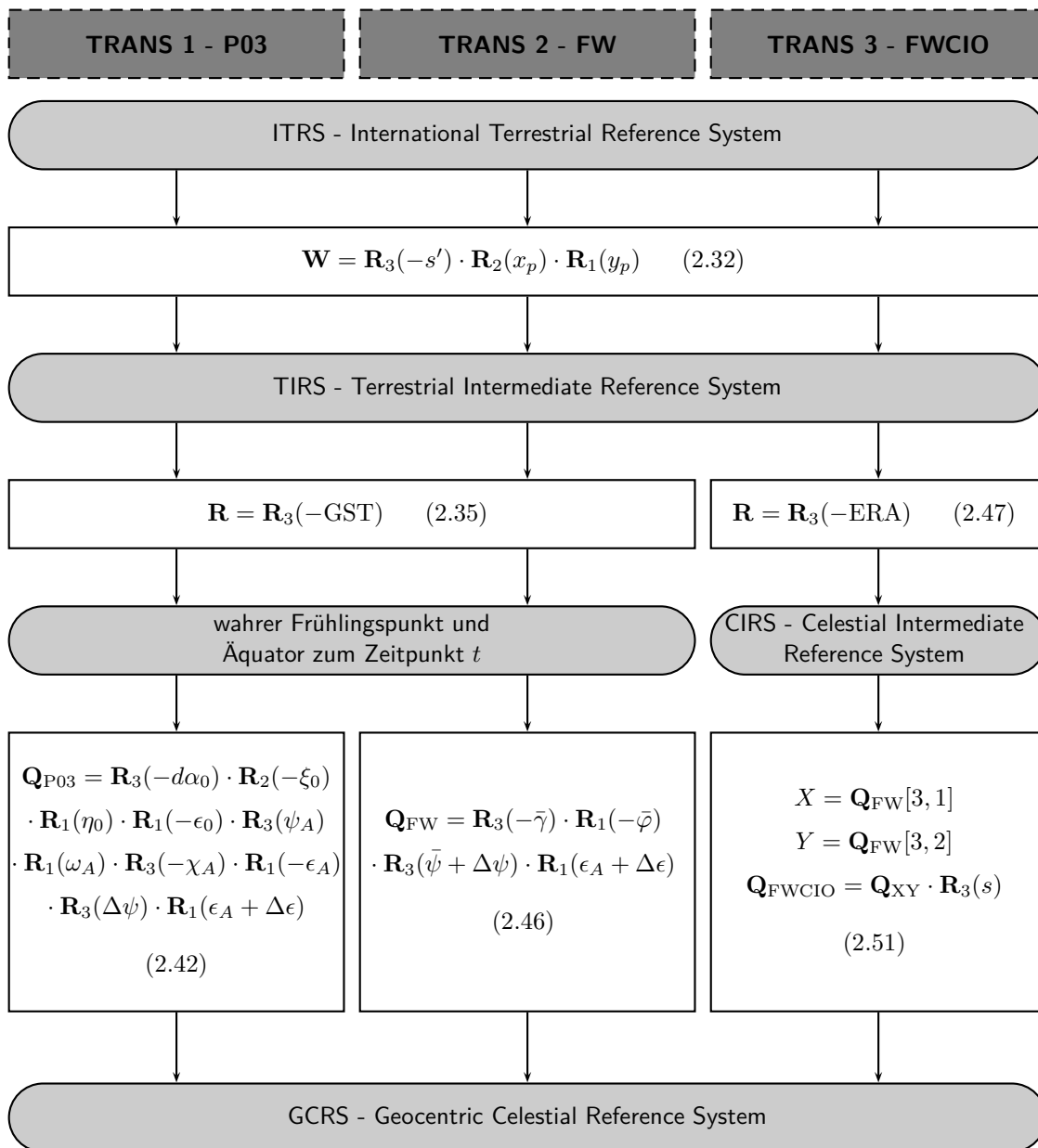
Bei Rotationen um einen negativen Winkel gilt  $\mathbf{R}(-\alpha) = \mathbf{R}^T(\alpha)$ .

## A.2 Schematische Zusammenfassung der Transformationen zwischen ITRS und GCRS

Im Folgenden ist zusammenfassend dargestellt, welche Gleichungen für die verschiedenen Wege der Transformation aus dem erdfesten ITRS ins raumfeste GCRS angewendet werden. Die gesamte Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  setzt sich aus

$$\mathbf{T} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}$$

zusammen. Im Schema sind die Matrizen für die Rotation um den Ekliptikwinkel  $\mathbf{E}$  und die Störrotationen  $\mathbf{S}$  nicht dargestellt, da sie für alle Wege identisch sind. TRANS 1 und TRANS 2 werden über den Frühlingspunkt berechnet, TRANS 3 über den CIO. In den grau hinterlegten Kästen sind die jeweiligen Referenzsysteme bezeichnet. In den weißen Kästen sind die entsprechenden Gleichungen angegeben, die für die Berechnung verwendet werden. Sie wurden in Abschnitt 2.4 eingeführt.



### A.3 Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten

**Tab. A.1:** A-priori Koordinaten der Stationen, die in die LLR-Auswertung einfließen. Bei allen Punkten handelt es sich um die Systemreferenzpunkte, d.h. entsprechende lokale Vermessungen sind schon berücksichtigt. Mit den DOMES bzw. CODE Namen werden die Stationen innerhalb des offiziellen ITRF-Netzwerkes identifiziert. Die APOLLO-Koordinaten stammen aus einer persönlichen Mitteilung von T. Murphy, für alle anderen Koordinaten bildet das ITRF2008 die Grundlage.

Name	Kennung		Koordinaten		
	DOMES	CODE	X [m]	Y [m]	Z [m]
APOLLO	49447S001	7045	-1463998.892	-5166632.765	3435012.988
MAUI Send.	40445S005	7210	-5466007.121	-2404427.445	2242188.861
MLRO	12734S008	7941	4641978.804	1393067.533	4133249.476
McDonald	40442S002	7206	-1330781.412	-5328755.587	3235697.645
MLRS1	40442S001	7086	-1330121.097	-5328532.278	3236146.688
MLRS2	40442S006	7080	-1330021.479	-5328403.329	3236481.671
OCA	10002S002	7845	4581692.140	556196.084	4389355.112
WLRS	14201S018	8834	4075576.807	931785.510	4801583.598

**Tab. A.2:** Lokale terrestrische Vermessung (local ties) zwischen den Stationen McDonald, MLRS1 und MLRS2 sowie Anbindung des Systemreferenzpunktes an das Exzentrum von MLRS2. DOMES-Kennungen, die ein S enthalten, beziehen sich auf den Systemreferenzpunkt; die, die M enthalten, auf ein Exzentrum. Außerdem sind die terrestrische Messung zwischen Sender und Empfänger von MAUI sowie zwischen Sender Systemreferenzpunkt und Exzentrum angegeben.

DOMES Kennung		lokale Vermessung		
von	nach	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta z$ [m]
40442M006	40442S001	-99.9727	-130.4155	-334.1173
40442M006	40442S002	-760.3057	-353.7285	-783.1293
40442M006	40442S006	-0.373	-1.471	0.897
40445S005	MAUI Empf.	6.7708	2.9821	18.1782
40445M001	40445S005	-0.483	-0.212	1.003

**Tab. A.3:** A-priori Geschwindigkeiten der Stationen, die in die LLR-Auswertung einfließen, aus dem ITRF2008 und dem NUVEL1A Model. Da die drei McDonald Stationen gemeinsam ausgewertet werden, sind nur die Geschwindigkeiten für MLRS2 angegeben.

Name	ITRF2008			NUVEL1A		
	$v_x$ [m/a]	$v_y$ [m/a]	$v_z$ [m/a]	$v_x$ [m/a]	$v_y$ [m/a]	$v_z$ [m/a]
APOLLO	-0.0141	-0.0015	-0.0064	-0.0132	-0.0007	-0.0066
MAUI Send.	-0.0127	0.0620	0.0320	-0.0131	0.0579	0.0301
MLRO	-0.0181	0.0193	0.0147	-0.0183	0.0145	0.0156
MLRS2	-0.0128	0.0004	-0.0051	-0.0125	-0.0006	-0.0062
OCA	-0.0142	0.0188	0.0116	-0.0123	0.0187	0.0104
WLRS	-0.0154	0.0172	0.0112	-0.0144	0.0175	0.0088

## A.4 Vergleich der Modelle für Stationsbewegungen in LUNAR 2.0 und LUNAR 3.0

Im Folgenden sind die Modelle aus LUNAR 2.0 und LUNAR 3.0 dargestellt, die genutzt werden, um Effekte an den Stationskoordinaten zu berechnen. Jeder schwarze Punkt beschreibt dabei ein Berechnungsverfahren, das implementiert ist. Sind für einen Effekt mehrere Punkte angegeben, kann vor der Auswertung der LLR-Daten gewählt werden, wie der Effekt berechnet werden soll.

*Tab. A.4: Modelle zur Berücksichtigung von Effekten an den Stationskoordinaten*

Effekt	LUNAR 2.0	LUNAR 3.0
Stations- geschwindigkeiten	<ul style="list-style-type: none"> <li>• NUVEL1A DeMets et al. [1990, 1994]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• NUVEL1A DeMets et al. [1990, 1994]</li> <li>• aus ITRF2008 Altamimi et al. [2011]</li> </ul>
Gezeiten der festen Erde	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mathews et al. [1997]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mathews et al. [1997] gemäß Petit &amp; Luzum [2010] aktualisiert</li> </ul>
Auflasten durch Ozeangezeiten	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Schwiderski [1980]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• FES2004 Letellier [2004] mit Berücksichtigung von 342 Nebentiden</li> </ul>
Auflasten der Atmosphäre	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Effekt der gesamten Atmosphäre über vereinfachtes Modell aus McCarthy [1996]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• gezeitenabhängiger Effekt Ray &amp; Ponte [2003] van Dam &amp; Ray [2010]</li> <li>• Effekt der gesamten Atmosphäre über vereinfachtes Modell aus McCarthy [1996]</li> </ul>
Rotationsdeformation durch Polgezeiten	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modell von Wahr [1985] berechnet mit den jeweils aktuellen terrestrischen Polkoordinaten <math>x_p</math> und <math>y_p</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modell von Wahr [1985] berechnet mit der Differenz zwischen den aktuellen terrestrischen Polkoordinaten <math>x_p</math> und <math>y_p</math> und dem mittleren Pol gemäß Petit &amp; Luzum [2010]</li> </ul>
Auflasten durch Ozeanpolgezeiten	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nicht berücksichtigt</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Desai [2002]</li> </ul>
Langperiodische Breitenschwankung	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dickey et al. [1985]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dickey et al. [1985]</li> </ul>

## A.5 Reflektorkoordinaten

**Tab. A.5:** *A-priori Koordinaten der Reflektoren, die in die LLR-Auswertung einfließen. Koordinaten für A11, A14, A15 und L21 stammen aus Williams et al. [2008]. Für L17 werden die Werte aus Murphy et al. [2011] genutzt.*

Name	Koordinaten		
	X [m]	Y [m]	Z [m]
A11	1591967.522	690698.106	21003.309
A14	1652689.359	-520999.919	-109731.018
A15	1554678.949	98094.117	765004.907
L17	1114292.387	-781299.330	1076058.310
L21	1339364.624	801870.788	756358.470

## A.6 Vergleich der Modelle für ERP-Korrekturen in LUNAR 2.0 und LUNAR 3.0

Im Folgenden sind die Modelle aus LUNAR 2.0 und LUNAR 3.0 dargestellt, die genutzt werden, um Effekte an den Erdrotationsparametern zu berechnen.

**Tab. A.6:** *Modelle zur Berücksichtigung von Effekten an den Erdrotationsparametern  $\Delta UT$  und  $x_p, y_p$*

Effekt	LUNAR 2.0	LUNAR 3.0
Gezeiten der festen Erde in $\Delta UT$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Yoder et al. [1981] mit 41 Perioden</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Yoder et al. [1981] gemäß Gross [2009b] aktualisiert, mit 62 Perioden</li> </ul>
langperiodische Ozeangezeiten in den Polkoordinaten	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nicht berücksichtigt</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dickman &amp; Nam [1995]</li> </ul>
tägliche und subtägliche Ozeangezeiten in den ERP	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ray et al. [1994] Effekt von jeweils vier täglichen und subtäglichen Perioden in <math>\Delta UT</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ray et al. [1994] Effekt von 71 Perioden in <math>\Delta UT</math> und <math>x_p, y_p</math></li> </ul>
Librationseffekt	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nicht berücksichtigt</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modell gemäß IAU Kommission 19 [Brzeziński &amp; Mathews, 2003]</li> </ul>





# Abbildungsverzeichnis

2.1	Erde-Mond-System . . . . .	12
2.2	Präzessions- und Nutationswinkel . . . . .	13
3.1	Positionen der Stationen und Reflektoren . . . . .	23
3.1.1	Verteilung der Messstationen auf der Erde . . . . .	23
3.1.2	Verteilung der Reflektoren auf dem Mond . . . . .	23
3.2	Messkonfiguration und Vektoren in der LLR Auswertung . . . . .	25
4.1	Histogramm der NP . . . . .	31
4.2	Homogenisierte Genauigkeiten der gemessenen Laufzeiten $\rho_{mess}$ der NP . . . . .	33
4.2.1	McDonald, MLRS1 und MLRS2 . . . . .	33
4.2.2	MAUI . . . . .	33
4.2.3	OCA . . . . .	33
4.2.4	APOLLO . . . . .	33
4.3	Vergleich von Residuen verschiedener Stufen der LUNAR Aktualisierung . . . . .	45
4.4	Residuen für VCE Fall 2 . . . . .	48
4.5	Vergleich von Residuen verschiedener VCE Berechnungen . . . . .	49
5.1	Verteilung aller NP über den synodischen Winkel . . . . .	52
5.2	Darstellung des synodischen Umlaufs des Mondes . . . . .	53
5.3	Verteilung der NP von APOLLO über den synodischen Winkel . . . . .	67
5.4	Schema der Schätzung von Erdrotationsparametern . . . . .	71
5.5	$x_p$ aus 70 Tage Zeiträumen . . . . .	74
5.6	$y_p$ aus 70 Tage Zeiträumen . . . . .	74
5.7	$\Delta UT$ aus 70 Tage Zeiträumen . . . . .	74
5.8	$x_p$ aus 15 NP pro Nacht . . . . .	76
5.9	$y_p$ aus 15 NP pro Nacht . . . . .	76
5.10	$x_p$ aus 5 NP von MLRS2 pro Nacht . . . . .	78
5.11	$y_p$ aus 5 NP von MLRS2 pro Nacht . . . . .	78
5.12	$\Delta UT$ aus 5 NP von MLRS2 pro Nacht . . . . .	78
5.13	$x_p$ aus 5 NP von OCA pro Nacht . . . . .	80
5.14	$y_p$ aus 5 NP von OCA pro Nacht . . . . .	80
5.15	$\Delta UT$ aus 5 NP von OCA pro Nacht . . . . .	80
5.16	$x_p$ aus 5 NP von APOLLO pro Nacht . . . . .	82
5.17	$y_p$ aus 5 NP von APOLLO pro Nacht . . . . .	82
5.18	$\Delta UT$ aus 5 NP von APOLLO pro Nacht . . . . .	82
7.1	Sensitivitätsanalyse zur zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten . . . . .	94
7.2	Sensitivitätsanalyse zur zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten - Differenz . . . . .	94
7.3	Leistungsspektraldichte zur zeitlichen Variation der Gravitationskonstanten . . . . .	94
7.4	Sensitivitätsanalyse zum Gravitomagnetismus . . . . .	97
7.5	Sensitivitätsanalyse zum Gravitomagnetismus - Differenz . . . . .	97
7.6	Leistungsspektraldichte zum Gravitomagnetismus . . . . .	97



# Tabellenverzeichnis

4.1	Anzahl der NP pro Station . . . . .	32
4.2	Anzahl der NP pro Reflektor . . . . .	32
4.3	Vergleich von Standardabweichungen geschätzter Parameter . . . . .	45
4.4	Ergebnisse von drei Untersuchungen zur Varianzkomponentenschätzung. . . . .	49
4.4.1	VCE1 . . . . .	49
4.4.2	VCE2 . . . . .	49
4.4.3	VCE3 . . . . .	49
5.1	18.6-Jahre Nutationskoeffizienten aus LUNAR 2.0 . . . . .	59
5.2	18.6-Jahre Nutationskoeffizienten, verschiedene Programmversionen . . . . .	60
5.3	Nutationskoeffizienten verschiedener Programmversionen . . . . .	62
5.4	Nutationskoeffizienten und Störrotationen . . . . .	64
5.5	Nutationskoeffizienten aus verschiedenen erdfest-raumfest Transformationen . . . . .	66
5.6	Nutationskoeffizienten aus APOLLO Daten . . . . .	68
5.7	Genauigkeiten der ERP verschiedener Raumverfahren . . . . .	69
6.1	Stationskoordinaten aus LLR . . . . .	87
6.2	Stationsgeschwindigkeiten aus LLR . . . . .	87
6.3	Differenzen zwischen SLR und LLR vor der Transformation . . . . .	88
6.4	Parameter der Ähnlichkeitstransformation . . . . .	88
6.5	Residuen zwischen SLR und LLR nach der Transformation . . . . .	89
A.1	A-priori Stationskoordinaten . . . . .	105
A.2	Terrestrische Vermessung zwischen verschiedenen Stationen . . . . .	105
A.3	A-priori Stationsgeschwindigkeiten . . . . .	105
A.4	Modelle zur Berücksichtigung von Effekten an den Stationskoordinaten . . . . .	106
A.5	A-priori Reflektorkoordinaten . . . . .	107
A.6	Modelle zur Berücksichtigung von Effekten an den ERP . . . . .	107



# Abkürzungsverzeichnis

<b>APOLLO</b>	Apache Point Observatory Lunar Laser ranging Operation, New Mexico, USA
<b>BCRS</b>	Barycentric Celestial Reference System - Baryzentrisches himmelfestes Referenzsystem
<b>CIO</b>	Celestial Intermediate Origin - Ursprung der x-Achse im intermediären himmelfesten Referenzsystem
<b>CIP</b>	Celestial Intermediate Pole - Intermediärer Himmelspol
<b>DORIS</b>	Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite - Bahnbestimmung von Satellitenbahnen mit Hilfe des Dopplereffekts von Radiosignalen
<b>EIH</b>	Einstein-Infeld-Hoffmann
<b>EOP</b>	Erdorientierungsparameter
<b>ERP</b>	Erdrotationsparameter
<b>FW</b>	Beschreibung der Präzession gemäß Fukushima [2003] und Williams [1994], Transformation über Frühlingspunkt
<b>FWCIO</b>	Beschreibung der Präzession gemäß Fukushima [2003] und Williams [1994], Transformation über CIO
<b>GCRS</b>	Geocentric Celestial Reference System - Geozentrisches himmelfestes Referenzsystem
<b>GPS</b>	Global Positioning System - Globales Positionierungssystem
<b>HARL</b>	Hartebeesthoek Radio Astronomy Observatory, Südafrika
<b>IAU</b>	International Astronomical Union - Internationale Astronomische Union
<b>ICRF</b>	International Celestial Referenz Frame - himmelfester Referenzrahmen des Internationalen Erdrotationservices
<b>ICRS</b>	International Celestial Referenz System - himmelfestes Referenzsystem des Internationalen Erdrotationservices
<b>IERS</b>	International Earth Rotation and Reference Systems Service - Internationaler Service für Erdrotation und Referenzsysteme
<b>ILRS</b>	International Laser Ranging Service - Internationaler Service für Laserentfernungsmessungen
<b>ITRF</b>	International Terrestrial Reference Frame - Internationaler Terrestrischer Referenzrahmen
<b>ITRS</b>	International Terrestrial Reference System - Internationales Terrestrisches Referenzsystem
<b>IUGG</b>	International Union of Geodesy and Geophysics - Internationale Union der Geodäsie und Geophysik
<b>JD</b>	Julian Date - Julianisches Datum
<b>LLR</b>	Lunar Laser Ranging - Laserentfernungsmessung zum Mond
<b>MAUI</b>	Lure Observatory auf Maui/Hawaii, USA
<b>MLRO</b>	Matera Laser Ranging Observatory, Matera, Italien
<b>MLRS</b>	McDonald Laser Ranging Station, Texas, USA
<b>NP</b>	Normalpunkt
<b>OCA</b>	Côte d'Azur Observatory, Grasse, Frankreich
<b>P03</b>	Beschreibung der Präzession gemäß Capitaine et al. [2003b], Transformation über Frühlingspunkt
<b>PAS<sub>E</sub></b>	Principle axis system of the Earth - Hauptachsensystem der Erde
<b>PAS<sub>M</sub></b>	Principle axis system of the Moon - Hauptachsensystem des Mondes
<b>SCRS</b>	Selenocentric Celestial Reference System - Selenozentrisches himmelfestes Referenzsystem
<b>SLR</b>	Satellite Laser Ranging - Laserentfernungsmessung zu Satelliten
<b>SRP</b>	Systemreferenzpunkt
<b>TAI</b>	International Atomic Time - Internationale Atomzeit

---

<b>TCB</b>	Barycentric Coordinate Time - Baryzentrische Koordinatenzeit
<b>TCG</b>	Geocentric Coordinate Time - Geozentrische Koordinatenzeit
<b>TCS</b>	Selenocentric Coordinate Time - Selenozentrische Koordinatenzeit
<b>TDB</b>	Barycentric Dynamical Time - Baryzentrische Dynamische Zeit
<b>TDT</b>	Terrestrial Dynamical Time - Terrestrische Dynamische Zeit
<b>TIO</b>	Terrestrial Intermediate Origin - Ursprung der x-Achse im intermediären erdfesten Referenzsystem
<b>TT</b>	siehe TDT
<b>UTC</b>	Universal Time Coordinated - Universelle Koordinierte Weltzeit
<b>UT</b>	Universal Time - Universelle Weltzeit
<b>VCE</b>	Varianzkomponentenschätzung
<b>VLBI</b>	Very Long Baseline Interferometry - Radiointerferometrie auf sehr langen Basislinien
<b>WLRS</b>	Geodätischen Observatorium Wettzell, Deutschland

# Literaturverzeichnis

- ABBOT R.I., SHELUS P.J., MULHOLLAND J.D., SILVERBERG E.C. [1973]: *Laser observations of the Moon: Identification and construction of normal points for 1969-1971*. The Astronomical Journal, 78, 784–793.
- ALTAMIMI Z., COLLILIEUX X., BOUCHER C. [2009]: *Strengths and Limitations of the ITRF: ITRF2005 and Beyond*. In: H. DREWES, M.G. SIDERIS (Hg.) *Geodetic Reference Frames*, International Association of Geodesy Symposia, Bd. 134, 73–79, Springer, Berlin, Heidelberg.
- ALTAMIMI Z., COLLILIEUX X., LEGRAND J., GARAYT B., BOUCHER C. [2007]: *ITRF2005: A new release of the International Terrestrial Reference Frame based on time series of station positions and Earth Orientation Parameters*. Journal of Geophysical Research, 112, B09401.
- ALTAMIMI Z., COLLILIEUX X., MÉTIVIER L. [2011]: *ITRF2008: an improved solution of the international terrestrial reference frame*. Journal of Geodesy, 85, 457–473.
- ALTAMIMI Z., SILLARD P., BOUCHER C. [2002]: *ITRF2000: A new release of the International Terrestrial Reference Frame for earth science applications*. Journal of Geophysical Research, 107, ETG 2 1–ETG 2 19.
- ANGERMANN D., DREWES H., GERSTL M., KRÜGEL M., MEISEL B. [2009]: *DGFI Combination Methodology for ITRF2005 Computation*. In: H. DREWES, M.G. SIDERIS (Hg.) *Geodetic Reference Frames*, International Association of Geodesy Symposia, Bd. 134, 11–16, Springer, Berlin, Heidelberg.
- ANGERMANN D., DREWES H., KRÜGEL M., MEISEL B., GERSTL M., KLEM R., MÜLLER H., SEEMÜLLER W., TESMER V. [2004]: *ITRS Combination Center at DGFI: A Terrestrial Reference Frame Realization 2003*. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe B, Nr. 313, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission beim Verlag C. H. Beck.
- ANGERMANN D., MÜLLER H. [2009]: *On the Strength of SLR Observations to Realize the Scale and Origin of the Terrestrial Reference System*. In: M. SIDERIS (Hg.) *Observing our Changing Earth*, International Association of Geodesy Symposia, Bd. 133, 21–29, Springer, Berlin, Heidelberg.
- ARCHINAL B.A., A'HEARN M.F., BOWELL E., CONRAD A., CONSOLMAGNO G.J., COURTIN R., FUKUSHIMA T., HESTROFFER D., HILTON J.L., KRASINSKY G.A., NEUMANN G., OBERST J., SEIDELMANN P.K., STOOKE P., THOLEN D.J., THOMAS P.C., WILLIAMS I.P. [2011]: *Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 109, 101–135.
- ARIAS E.F., CHARLOT P., FEISSEL M., LESTRADE J.F. [1995]: *The extragalactic reference system of the International Earth Rotation Service, ICRS*. Astronomy and Astrophysics, 303, 604–608.
- BATTAT J.B.R., CHANDLER J.F., STUBBS C.W. [2007]: *Testing for Lorentz Violation: Constraints on Standard-Model-Extension Parameters via Lunar Laser Ranging*. Physical Review Letters, 99, 241103.
- BAUER R. [1989]: *Bestimmung von Parametern des Erde-Mond-Systems - Ein Beitrag zur Modellerweiterung und Bewertung, Ergebnisse*. Dissertation, Technische Universität München, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 353.
- BISKUPKE L., MÜLLER J. [2009a]: *Lunar Laser Ranging and Earth Orientation*. In: M. SOFFEL, N. CAPITAINE (Hg.) *Astrometry, Geodynamics and Astronomical Reference Systems*, Proceedings of the Journées 2008 «Systèmes de Référence Spatio-Temporels», 182–185, Lohrmann-Observatorium and Observatoire de Paris.
- BISKUPKE L., MÜLLER J. [2009b]: *Relativity and Earth Orientation Parameters from Lunar Laser Ranging*. In: S. SCHILLAK (Hg.) *Proceedings of the 16th International Workshop on Laser Ranging*, Bd. 1, 270–276, Space Research Centre, Polish Academy of Sciences, Warsaw.
- BISKUPKE L., MÜLLER J., HOFMANN F. [2012]: *Determination of Nutation Coefficients from Lunar Laser Ranging*. In: S. KENYON, M.C. PACINO, U. MARTI, M.G. SIDERIS (Hg.) *Geodesy for Planet Earth*, International Association of Geodesy Symposia, Bd. 136, 521–525, Springer, Berlin, Heidelberg.
- BIZOUARD C., GAMBIS D. [2009]: *The Combined Solution C04 for Earth Orientation Parameters Consistent with International Terrestrial Reference Frame 2005*. In: H. DREWES, M.G. SIDERIS (Hg.) *Geodetic Reference Frames*, International Association of Geodesy Symposia, Bd. 134, 265–270, Springer, Berlin, Heidelberg.
- BLUE J. [2012]: *Coordinates of Named Lunar Features Now Available in LOLA Reference Frame*. online in Gazetteer of Planetary Nomenclature, letzter Zugriff 06.11.2012.
- BOS M., SCHERNECK H.G. [2011]: *Ocean tide loading provider*. <http://holt.oso.chalmers.se/loading/>, letzter Zugriff 18.06.2013.
- BRANS C., DICKE R.H. [1961]: *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*. Physical Review, 124, 925–935.
- BRZEZIŃSKI A., MATHEWS P.M. [2003]: *Recent advances in modeling the lunisolar perturbation in polar motion corresponding to high frequency nutation: Report on the discussion of the IAU Commission 19 WG on Nutation*. In: N. CAPITAINE, M. STAVINSCHI (Hg.) *Astrometry from ground and from space*, Proceedings of the Journées 2008 «Systèmes de Référence Spatio-Temporels», 101–108, Observatoire de Paris.

- BÖCKMANN S., ARTZ T., NOTHNAGEL A. [2010]: *VLBI terrestrial reference frame contributions to ITRF2008*. Journal of Geodesy, 84, 201–219.
- BÖHM J., SCHUH H. (Hg.) [2013]: *Atmospheric Effects in Space Geodesy*. Springer Atmospheric Sciences, Springer, Berlin, Heidelberg.
- CAPITAINE N., CHAPRONT J., LAMBERT S., WALLACE P.T. [2003a]: *Expressions for the Celestial Intermediate Pole and Celestial Ephemeris Origin consistent with the IAU 2000A precession-nutation model*. Astronomy and Astrophysics, 400, 1145–1154.
- CAPITAINE N., WALLACE P.T. [2006]: *High precision methods for locating the celestial intermediate pole and origin*. Astronomy and Astrophysics, 450, 855–872.
- CAPITAINE N., WALLACE P.T., CHAPRONT J. [2003b]: *Expressions for IAU 2000 precession quantities*. Astronomy and Astrophysics, 412, 567–586.
- CAPPALLO R.J. [1980]: *The Rotation of the Moon*. Dissertation, Massachusetts Institute of Technology.
- CHAPRONT J., CHAPRONT-TOUZÉ M., FRANCOU G. [2002]: *A new determination of lunar orbital parameters, precession constant and tidal acceleration from LLR measurements*. Astronomy and Astrophysics, 387, 700–709.
- CHAPRONT J., FRANCOU G. [2006]: *Lunar Laser Ranging: measurements, analysis, and contribution to the reference systems*. In: J. SOUCHAY, M. FEISSEL-VERNIER (Hg.) *The International Celestial Reference System and Frame - ICRS Center Report for 2001–2004*, IERS Technical Note 34, 97–116, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- CHARLOT P., SOVERS O.J., WILLIAMS J.G., NEWHALL X.X. [1995]: *Precession and nutation from joint analysis of radio interferometric and lunar laser ranging observations*. The Astronomical Journal, 109, 418–427.
- CIUFOLINI I., PAVLIS E., PERON R. [2006]: *Determination of frame-dragging using Earth gravity models from CHAMP and GRACE*. New Astronomy, 11, 527–550.
- CIUFOLINI I., PAVLIS E.C. [2004]: *A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect*. Nature, 431, 958–960.
- CIUFOLINI I., WHEELER J.A. [1995]: *Gravitation and Inertia*. Princeton Series in Physics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- CURRIE D.G., DELL’AGNELLO S., MONACHE G.O.D., BEHR B., WILLIAMS J.G. [2013]: *A Lunar Laser Ranging Retroreflector Array for the 21st Century*. Nuclear Physics B, 243–244, 218–228.
- DAMOUR T., SOFFEL M., XU C. [1991]: *General-relativistic celestial mechanics. I. Method and definition of reference systems*. Physical Review D, 43, 3273–3307.
- DAMOUR T., SOFFEL M., XU C. [1992]: *General-relativistic celestial mechanics. II. Translational equations of motion*. Physical Review D, 45, 1017–1044.
- DAMOUR T., SOFFEL M., XU C. [1993]: *General-relativistic celestial mechanics. III. Rotational equations of motion*. Physical Review D, 47, 3124–3135.
- DAMOUR T., SOFFEL M., XU C. [1994]: *General-relativistic celestial mechanics. IV. Theory of satellite motion*. Physical Review D, 49, 618–635.
- DAVIES M.E., COLVIN T.R. [2000]: *Lunar coordinates in the regions of the Apollo landers*. Journal of Geophysical Research, 105, 20277–20280.
- DE SITTER W. [1916]: *On Einstein’s theory of gravitation and its astronomical consequences. Second paper*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 77, 155–184.
- DEMETS C., GORDON R.G., ARGUS D.F., STEIN S. [1990]: *Current plate motions*. Geophysical Journal International, 101, 425–478.
- DEMETS C., GORDON R.G., ARGUS D.F., STEIN S. [1994]: *Effect of Recent Revisions to the Geomagnetic Reversal Time Scale on Estimates of Current Plate Motions*. Geophysical Research Letters, 21, 2191–2194.
- DESAI S.D. [2002]: *Observing the pole tide with satellite altimetry*. Journal of Geophysical Research, 107, 7–17–13.
- DICKEY J.O., BENDER P.L., FALLER J.E., NEWHALL X.X., RICKLEFS R.L., RIES J.G., SHELUS P.J., VEILLET C., WHIPPLE A.L., WIAN T.J., WILLIAMS J.G., YODER C.F. [1994]: *Lunar Laser Ranging: A Continuing Legacy of the Apollo Program*. Science, 265, 482–490.
- DICKEY J.O., NEWHALL X.X., WILLIAMS J.G. [1985]: *Earth Orientation From Lunar Laser Ranging and an Error Analysis of Polar Motion Services*. Journal of Geophysical Research, 90, 9353–9362.
- DICKMAN S.R., NAM Y.S. [1995]: *Revised predictions of long-period ocean tidal effects on Earth’s rotation rate*. Journal of Geophysical Research, 100, 8233–8243.
- D’INVERNO R. [2009]: *Einführung in die Relativitätstheorie*. Wiley-VCH, Weinheim.
- DOODSON A.T. [1928]: *The Analysis of Tidal Observations*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 227, 223–279.
- EGGER D. [1985]: *Systemanalyse der Laserentfernungsmessung*. Dissertation, Technische Universität München, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 311.
- EINSTEIN A. [1916]: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Annalen der Physik, 354, 769–822.
- EINSTEIN A., INFELD L., HOFFMANN B. [1938]: *The Gravitational Equations and the Problem of Motion*. The Annals of Mathematics, 39, 65–100.
- FEISSEL M., MIGNARD F. [1998]: *The adoption of ICRS on 1 January 1998: meaning and consequences*. Astronomy and Astrophysics, 331, L33–L36.
- FERLAND R., PIRASZEWSKI M. [2009]: *The IGS-combined station coordinates, earth rotation parameters and apparent geocenter*. Journal of Geodesy, 83, 385–392.



- FEY A., GORDON D., JACOBS C.S. (Hg.) [2009]: *The Second Realization of the International Celestial Reference Frame by Very Long Baseline Interferometry*. Nr. 35 in IERS Technical Note, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- FIENGA A., LASKAR J., KUCHYNKA P., MANCHE H., DESVIGNES G., GASTINEAU M., COGNARD I., THEUREAU G. [2011]: *The INPOP10a planetary ephemeris and its applications in fundamental physics*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111, 363–385.
- FOLKNER W.M., WILLIAMS J.G., BOGGS D.H. [2008]: *The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421*. JPL Interoffice Memorandum IOM 343R-08-003, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- FRÖHLICH H. [1989]: *Bestimmung von Erdrotationsparametern aus LLR-Messungen*. Diplomarbeit, Technische Universität München, nicht veröffentlicht.
- FUKUSHIMA T. [2003]: *A New Precession Formula*. *The Astronomical Journal*, 126, 494–534.
- GAMBIS D. [2004]: *Monitoring Earth orientation using space-geodetic techniques: state-of-the-art and prospective*. *Journal of Geodesy*, 78, 295–303.
- GLEIXNER H. [1986]: *Ein Beitrag zur Ephemeridenrechnung und Parameterschätzung im Erde-Mond-System*. Dissertation, Technische Universität München, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 319.
- GOLLER K., GLEIXNER H., SCHNEIDER M. [1981]: *Materialien zur Dynamik des Erde-Mond-Systems*. Mitteilungen aus dem Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie Nr. 155, Technische Hochschule München, München.
- GROSS R.S. [2007]: *Combinations of Earth orientation measurements: SPACE2006, COMB2006, and POLE2006*. JPL Publication 07-05, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- GROSS R.S. [2009a]: *Earth Rotation Variations – Long Period*. In: T.A. HERRING (Hg.) *Geodesy*, Treatise on Geophysics, Bd. 3, 239–294, Elsevier, Amsterdam.
- GROSS R.S. [2009b]: *Ocean tidal effects on Earth rotation*. *Journal of Geodynamics*, 48, 219–225.
- HAZARD C., SUTTON J., ARGUE A.N., KENWORTHY C.M., MORRISON L.V., MURRAY C.A. [1971]: *Accurate Radio and Optical Positions of 3G273B*. *Nature Physical Science*, 233, 89–91.
- HERRING T.A., MATHEWS P.M., BUFFETT B.A. [2002]: *Modeling of nutation-precession: Very long baseline interferometry results*. *Journal of Geophysical Research*, 107, 10.1029/2001JB000165.
- HILTON J.L., CAPITAINE N., CHAPRONT J., FERRANDIZ J.M., FIENGA A., FUKUSHIMA T., GETINO J., MATHEWS P.M., SIMON J.L., SOFFEL M., VONDRÁK J., WALLACE P.T., WILLIAMS J.G. [2006]: *Report of the International Astronomical Union Division I Working Group on Precession and the Ecliptic*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94, 351–367.
- HILTON J.L., HOHENKERK C.Y. [2004]: *Rotation matrix from the mean dynamical equator and equinox at J2000.0 to the ICRS*. *Astronomy and Astrophysics*, 413, 765–770.
- HIRAYAMA T., KINOSHITA H., FUJIMOTO M.K., FUKUSHIMA T. [1987]: *Analytical expression of TDB - TDT<sub>0</sub>*. In: *Relativistic Effects in Geodesy*, Proceedings of the International Association of Geodesy Symposia, Bd. Tome I, 91–100, Bureau Central de l’A.I.G., Paris.
- HOFMANN F., MÜLLER J., BISKUPEK L. [2010]: *Lunar laser ranging test of the Nordtvedt parameter and a possible variation in the gravitational constant*. *Astronomy and Astrophysics*, 522, L5.
- HOFMANN F., MÜLLER J., BISKUPEK L., MAI E., TORRE J.M. [2013]: *Lunar Laser Ranging - What is it Good for?*. In: *Proceedings of the 18th International Workshop on Laser Ranging*, 13–0402.
- IAU [1991]: *IAU Resolution 1991*.
- IAU [1997]: *IAU Resolution 1997*.
- IAU [2000]: *IAU Resolution 2000*.
- IAU [2006]: *IAU Resolution 2006*.
- IERS [2006]: *SINEX - Format, Version 2.02*.
- IRWIN A., FUKUSHIMA T. [1999]: *A numerical time ephemeris of the Earth*. *Astronomy and Astrophysics*, 348, 642–652.
- KAPLAN G.H. [2005]: *The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models*. Circular 179, United States Naval Observatory, Washington, D.C.
- KING R.W., COUNSELMAN C.C., SHAPIRO I.I. [1976]: *Lunar dynamics and selenodesy: Results from analysis of VLBI and laser data*. *Journal of Geophysical Research*, 81, 6251–6256.
- KOCH C. [2005]: *Implementierung eines neuen Integrators in die Lunar Laser Ranging-Auswertesoftware und Erzeugung von Standardlösungen für die zu bestimmenden Zielparameter*. Diplomarbeit, Universität Hannover, nicht veröffentlicht.
- KONOPLIV A.S., ASMAR S.W., CARRANZA E., SJOGREN W.L., YUAN D.N. [2001]: *Recent gravity models as a result of the lunar prospector mission*. *Icarus*, 150, 1–18.
- KOVALEVSKY J. [2002]: *Comparison of Old and New Concepts: Reference Systems*. In: N. CAPITAINE, D. GAMBIS, D. MCCARTHY, G. PETIT, J. RAY, B. RICHTER, M. ROTHACHER, M. STANDISH, J. VONDRÁK (Hg.) *Proceedings of the IERS Workshop on the Implementation of the New IAU Resolutions*, Nr. 29 in IERS Technical Note, 31–34, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- KOVALEVSKY J., SEIDELMANN P.K. [2004]: *Fundamentals of Astrometry*. Cambridge University Press.
- LAMBERT S.B. [2009]: *Empirical Model of the Free Core Nutation*. Techn. Ber., Observatoire de Paris, SYRTE, zu finden unter: <http://syrte.obspm.fr/lambert/fcn/notice.pdf>.

- LENSE J., THIRRING H. [1918]: *Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie*. Physikalische Zeitschrift, 19, 156–163, übersetzt und diskutiert in: Mashhoon et al. [1984].
- LETELLIER T. [2004]: *Etude des ondes de marée sur les plateaux continentaux*. Dissertation, Université de Toulouse III.
- LIESKE J.H., LEDERLE T., FRICKE W., MORANDO B. [1977]: *Expressions for the precession quantities based upon the IAU (1976) system of astronomical constants*. Astronomy and Astrophysics, 58, 1–16.
- LRO [2008]: *A Standardized Lunar Coordinate System for the Lunar Reconnaissance Orbiter*. LRO Project and LGCWG White Paper, Version 5, Goddard Space Flight Center Greenbelt, Maryland.
- MA C., ARIAS E.F., EUBANKS T.M., FEY A.L., GONTIER A.M., JACOBS C.S., SOVERS O.J., ARCHINAL B.A., CHARLOT P. [1998]: *The International Celestial Reference Frame as Realized by Very Long Baseline Interferometry*. The Astronomical Journal, 116, 516–546.
- MANCHE H. [2011]: *Élaboration de l'éphéméride INPOP: modèle dynamique et ajustements aux données de télémétrie laser Lune*. Dissertation, L'Observatoire de Paris en Astronomie et Astrophysique.
- MARINI J.W., MURRAY C. W. J. [1973]: *Correction of laser range tracking data for atmospheric refraction at elevations above 10 degrees*. Techn. Ber., Goddard Space Flight Center.
- MASHHOON B., HEHL F.W., THEISS D.S. [1984]: *On the gravitational effects of rotating masses: The Thirring-Lense papers*. General Relativity and Gravitation, 16, 711–750.
- MATHEWS P.M. [2000]: *Improved Models for Precession and Nutation*. In: K. JOHNSTON, D. MCCARTHY, B. LUZUM, G. KAPLAN (Hg.) *Towards Models and Constants for Sub-Microarcsecond Astrometry*, International Astronomical Union Colloquium, Bd. 180, 212–222, U.S. Naval Observatory, Washington, D.C.
- MATHEWS P.M., DEHANT V., GIPSON J.M. [1997]: *Tidal station displacements*. Journal of Geophysical Research, 102, 20469–20477.
- MATHEWS P.M., HERRING T.A., BUFFETT B.A. [2002]: *Modeling of nutation and precession: New nutation series for nonrigid Earth and insights into the Earth's interior*. Journal of Geophysical Research, 107, ETG 3–1–ETG 3–30.
- MCCARTHY D.D. (Hg.) [1996]: *IERS Conventions 1996*. Nr. 21 in IERS Technical Note, Central Bureau of IERS - Observatoire de Paris, Paris.
- MCCARTHY D.D. [2011]: *Evolution of timescales from astronomy to physical metrology*. Metrologia, 48, S132.
- MCCARTHY D.D., PETIT G. (Hg.) [2004]: *IERS Conventions 2003*. Nr. 32 in IERS Technical Note, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- MCCARTHY D.D., SEIDELMANN P.K. [2009]: *Time - From Earth Rotation to Atomic Physics*. Wiley-VCH, Weinheim.
- MENDES V.B., PAVLIS E.C. [2004]: *High-accuracy zenith delay prediction at optical wavelengths*. Geophysical Research Letters, 31, L14602.
- MISNER C.W., THORNE K.S., WHEELER J.A. [1973]: *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, San Francisco.
- MONTENBRUCK O., GILL E. [2000]: *Satellite orbits. Models, methods and applications*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- MORITZ H., MÜLLER I.I. [1987]: *Earth Rotation*. Ungar, New York.
- MOYER T.D. [1971]: *Mathematical formulation of the Double Precision Orbit Determination Program DPODP*. Technical Report JPL-TR-32-1527, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- MÜLLER J. [1991]: *Analyse von Lasermessungen zum Mond im Rahmen einer post-Newton'schen Theorie*. Dissertation, Technische Universität München, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 383.
- MÜLLER J. [1999]: *Zeitskalen*. In: 3. DFG-Rundgespräch zum Thema Bezugssysteme, Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Bd. 5, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- MÜLLER J., BISKUPEK L. [2007]: *Variations of the gravitational constant from lunar laser ranging data*. Classical and Quantum Gravity, 24, 4533–4538.
- MÜLLER J., BISKUPEK L., HOFMANN F., MAI E. [2014a]: *Lunar laser ranging and relativity*. In: S.M. KOPEIKIN (Hg.) *Frontiers in relativistic celestial Mechanics*, Bd. 2: Applications and Experiments, 103–156, Walter de Gruyter, Berlin.
- MÜLLER J., BISKUPEK L., OBERST J., SCHREIBER U. [2009]: *Contribution of Lunar Laser Ranging to Realise Geodetic Reference Systems*. In: H. DREWES (Hg.) *Geodetic Reference Frames*, International Association of Geodesy Symposia, Bd. 134, 55–59, Springer, Berlin, Heidelberg.
- MÜLLER J., HOFMANN F., BISKUPEK L. [2012a]: *Testing various facets of the equivalence principle using lunar laser ranging*. Classical and Quantum Gravity, 29, 184006.
- MÜLLER J., HOFMANN F., FANG X., BISKUPEK L. [2012b]: *Lunar Laser Ranging – recent activities at Institut für Erdmessung (IfE)*. In: *Proceedings of the 17th International Workshop on Laser Ranging*, Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Bd. 48, 227–231, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- MÜLLER J., HOFMANN F., FANG X., BISKUPEK L. [2014b]: *Lunar Laser Ranging: Recent Results based on Refined Modelling*. In: C. RIZOS, P. WILLIS (Hg.) *Earth on the Edge: Science for a Sustainable Planet*, International Association of Geodesy Symposia, Bd. 139, 447–452, Springer, Berlin, Heidelberg.
- MÜLLER J., NORDTVEDT K., VOKROUHLICKÝ D. [1996]: *Improved constraint on the  $\alpha_1$  PPN parameter from lunar motion*. Physical Review D, 54, R5927–R5930.

- MÜLLER J., SCHREIBER U., SCHNEIDER M. [1992]: *Lasermessungen zum Mond*. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 11-12/92, 447–483.
- MÜLLER J., SOFFEL M., KLIONER S.A. [2008a]: *Geodesy and relativity*. Journal of Geodesy, 82, 133–145.
- MÜLLER J., WILLIAMS J.G., TURYSHEV S.G. [2008b]: *Lunar Laser Ranging Contributions to Relativity and Geodesy*. In: H. DITTUS, C. LÄMMERZAHN, S.G. TURYSHEV (Hg.) *Lasers, Clocks and Drag-Free Control: Exploration of Relativistic Gravity in Space*, Astrophysics and Space Science Library, Bd. 349, 457–472, Springer, Berlin, Heidelberg.
- MUNK W.H., MACDONALD G.J.F. [1960]: *The Rotation of the Earth*. Cambridge University Press, Cambridge.
- MURPHY T., ADELBERGER E., BATTAT J., HOYLE C., MCMILLAN R., MICHELSEN E., SAMAD R., STUBBS C., SWANSON H. [2010]: *Long-term degradation of optical devices on the Moon*. Icarus, 208, 31–35.
- MURPHY T.W., ADELBERGER E.G., BATTAT J. B. R. J.B.R., HOYLE C.D., JOHNSON N.H., MCMILLAN R.J., MICHELSEN E.L., STUBBS C.W., SWANSON H.E. [2011]: *Laser ranging to the lost Lunokhod 1 reflector*. Icarus, 211, 1103–1108.
- MURPHY T.W., NORDTVEDT K., TURYSHEV S.G. [2007]: *Gravitomagnetic Influence on Gyroscopes and on the Lunar Orbit*. Physical Review Letters, 98, 071102.
- NESSERIS S., PERIVOLAROPOULOS L. [2007]: *Limits of extended quintessence*. Physical Review D, 75, 023517.
- NEWHALL X.X., WILLIAMS J.G., DICKEY J.O. [1988]: *Earth Rotation from Lunar Laser Ranging*. In: A.K. BABCOCK, G.A. WILKINS (Hg.) *The Earth's Rotation and Reference Frames for Geodesy and Geodynamics*, International Astronomical Union Symposium, Bd. 128, 159–164, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- NIEMEIER W. [2001]: *Ausgleichsrechnung: eine Einführung für Studierende und Praktiker des Vermessungs- und Geoinformationswesens*. Walter de Gruyter, Berlin.
- NOLL C., PEARLMAN M. (Hg.) [2012]: *International Laser Ranging Service 2009–2010 Report*. NASA/TP 2013-217507, Goddard Space Flight Center, Greenbelt.
- NORDTVEDT K. [1998]: *Optimizing the observation schedule for tests of gravity in lunar laser ranging and similar experiments*. Classical and Quantum Gravity, 15, 3363.
- NORDTVEDT K., VOKROUHLICKÝ D. [1997]: *Recent Progress in Analytical Modeling of Relativistic Effects in the Lunar Motion*. In: I.M. WYTRZYSZCZAK, J.H. LIESKE, R.A. FELDMAN (Hg.) *Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies*, International Astronomical Union Colloquium, Bd. 165, 205–214, Springer, Dordrecht.
- NOTHNAGEL A., ANGERMANN D., BÖRGER K., DIETRICH R., DREWES H., GÖRRES B., HUGENTOBLE U., IHDE J., MÜLLER J., OBERST J., PATZOLD M., RICHTER B., ROTHACHER M., SCHREIBER U., SCHUH H., SOFFEL M. [2010]: *Space-Time Reference Systems for Monitoring Global Change and for Precise Navigation*. Nr. 44 in Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- PAVLIS N.K., HOLMES S.A., KENYON S.C., FACTOR J.K. [2012]: *The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)*. Journal of Geophysical Research, 117, B04406.
- PEEBLES P.J., DICKE R.H. [1962]: *Significance of Spatial Isotropy*. Physical Review, 127, 629–631.
- PETIT G., LUZUM B. (Hg.) [2010]: *IERS Conventions 2010*. Nr. 36 in IERS Technical Note, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- PETIT G., LUZUM B. [2013]: *The 2010 Reference Edition of the IERS Conventions*. In: Z. ALTAMIMI, X. COLLILIEUX (Hg.) *Reference Frames for Applications in Geosciences*, International Association of Geodesy Symposia, Bd. 138, 57–61, Springer, Berlin, Heidelberg.
- PITJEVA E. [2005]: *Relativistic effects and solar oblateness from radar observations of planets and spacecraft*. Astronomy Letters, 31, 340–349.
- PITJEVA E.V. [2009]: *Ephemerides EPM2008: the updated model, constants, data*. In: M. SOFFEL, N. CAPITAINE (Hg.) *Proceedings of the Journées 2008 «Systèmes de référence spatio-temporels»*, 57–59, Lohrmann-Observatorium und Observatoire de Paris.
- PITJEVA E.V., PITJEV N.P. [2013]: *Relativistic effects and dark matter in the Solar system from observations of planets and spacecraft*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 432, 3431–3437.
- RAY J., BLEWITT G., BOUCHER C., EANES R., FEISSEL M., HEFLIN M., HERRING T.A., KOUBA J., MA C., MONTAG H., WILLIS P., ALTAMIMI Z., EUBANKS T., GAMBIS D., PETIT G., RIES J.C., SCHERNECK H.G., SILLARD P. [1999]: *Report of the Working Group on ITRF datum*. <http://hpiers.obspm.fr/iers/itrf/ITRF-WG.Report>, letzter Zugriff 15.01.2014.
- RAY R.D., PONTE R.M. [2003]: *Barometric tides from ECMWF operational analyses*. Annales Geophysicae, 21, 1897–1910.
- RAY R.D., STEINBERG D.J., CHAO B.F., CARTWRIGHT D.E. [1994]: *Diurnal and Semidiurnal Variations in the Earth's Rotation Rate Induced by Oceanic Tides*. Science, 264, 830–832.
- REICHHOFF B. [1999]: *Verfeinerung und objektorientierte Implementierung eines Modells zur Nutzung von Lasermessungen zum Mond*. Dissertation, Technische Universität München, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 512.

- SANDERS A., GILLIES G., SCHMUTZER E. [2010]: *Implications upon theory discrimination of an accurate measurement of the time rate of change of the gravitational "constant"  $G$  and other cosmological parameters*. *Annalen der Physik*, 522, 861–873.
- SCHASTOK J. [1987]: *Drei Studien zur Dynamik des Erde-Mond-Systems*. Dissertation, Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen.
- SCHNEIDER M. [1979]: *Himmelsmechanik*. B.I.-Wissenschaftsverlag, Zürich.
- SCHUH H., DILL R., GREINER-MAI H., KUTTERER H., MÜLLER J., NOTHNAGEL A., RICHTER B., ROTHACHER M., SCHREIBER U., SOFFEL M. [2003]: *Erdrotation und globale dynamische Prozesse*. Nr. 32 in *Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie*, Verlag des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- SCHWIDERSKI E.W. [1980]: *On charting global ocean tides*. *Reviews of Geophysics*, 18, 243–268.
- SCHÖDLBAUER A. [2000]: *Geodätische Astronomie*. Walter de Gruyter, Berlin.
- SCIARRETTA C., LUCERI V., PAVLIS E.C., BIANCO G. [2010]: *The ILRS EOP Time Series*. *Artificial Satellites*, 45, 41–48.
- SEIDELMANN P.K. [1982]: *1980 IAU Theory of Nutation - The Final Report of the IAU Working Group on Nutation*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 27, 79–106.
- SEIDELMANN P.K. (Hg.) [1992]: *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. University Science Books, Mill Valley, California.
- SEITZ F. [2004]: *Atmosphärische und ozeanische Einflüsse auf die Rotation der Erde - Numerische Untersuchungen mit einem dynamischen Erdsystemmodell*. Dissertation, Technische Universität München, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 578.
- SEITZ F., SCHUH H. [2010]: *Earth Rotation*. In: G. XU (Hg.) *Sciences of Geodesy - I*, Kap. 6, 185–227, Springer, Berlin, Heidelberg.
- SEITZ M. [2009]: *Kombination geodätischer Raumbeobachtungsverfahren zur Realisierung eines terrestrischen Referenzsystems*. Dissertation, Technische Universität Dresden, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 630.
- SEITZ M., ANGERMANN D., BLOSSFELD M., DREWES H., GERSTL M. [2012]: *The 2008 DGFI realization of the ITRS: DTRF2008*. *Journal of Geodesy*, 86, 1097–1123.
- SHAO L., WEX N. [2012]: *New tests of local Lorentz invariance of gravity with small-eccentricity binary pulsars*. *Classical and Quantum Gravity*, 29, 215018.
- SOFFEL M. [2000]: *Report of the Working Group 'Relativity for Celestial Mechanics and Astrometry'*. In: K. JOHNSTON, D. MCCARTHY, B. LUZUM, G. KAPLAN (Hg.) *Towards Models and Constants for Sub-Microarcsecond Astrometry*, International Astronomical Union Colloquium, Bd. 180, 283–292, U.S. Naval Observatory, Washington D.C.
- SOFFEL M., KLIONER S., MÜLLER J., BISKUPEK L. [2008]: *Gravitomagnetism and lunar laser ranging*. *Physical Review D*, 78, 024033.
- SOFFEL M., KLIONER S.A., PETIT G., WOLF P., KOPEIKIN S.M., BRETAGNON P., BRUMBERG V.A., CAPITAINE N., DAMOUR T., FUKUSHIMA T., GUINOT B., HUANG T.Y., LINDEGREN L., MA C., NORDTVEDT K., RIES J.C., SEIDELMANN P.K., VOKROUHLICKÝ D., WILL C.M., XU C. [2003]: *The IAU 2000 Resolutions for Astrometry, Celestial Mechanics, and Metrology in the Relativistic Framework: Explanatory Supplement*. *The Astronomical Journal*, 126, 2687–2706.
- SOFFEL M., LANGHANS R. [2013]: *Space-Time Reference Systems*. *Astronomy and Astrophysics Library*, Springer, Berlin, Heidelberg.
- SOUCHAY J., LOYSEL B., KINOSHITA H., FOLGUEIRA M. [1999]: *Corrections and new developments in rigid earth nutation theory - III. Final tables "REN-2000" including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects*. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 135, 111–131.
- SOVERS O.J., FANSELOW J.L. [1987]: *Observation model and parameter partials for the JPL VLBI parameter estimation software MASTERFIT-1987*. JPL Publication 83-39, Rev. 3, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA.
- STANDISH JR. E.M. [1982]: *Orientation of the JPL Ephemerides, DE 200/LE 200, to the dynamical equinox of J 2000*. *Astronomy and Astrophysics*, 114, 297–302.
- STANDISH JR. E.M. [1990]: *The observational basis for JPL's DE 200, the planetary ephemerides of the Astronomical Almanac*. *Astronomy and Astrophysics*, 233, 252–271.
- STEINHARDT P.J., WESLEY D. [2010]: *Exploring extra dimensions through observational tests of dark energy and varying Newton's constant*. arXiv:1003.2815v1, version vom 14.03.2010.
- TORGE W. [2003]: *Geodäsie*. Walter de Gruyter, Berlin, 2. Aufl.
- TORGE W., MÜLLER J. [2012]: *Geodesy*. Walter de Gruyter, Berlin, 4. Aufl.
- TSCHERNING C.C. (Hg.) [1992]: *The Geodesist's Handbook*, *Bulletin Géodésique*, Bd. 66. Springer, Berlin, Heidelberg.
- VAN DAM T., RAY R. [2010]: *S1 and S2 Atmospheric Tide Loading Effects for Geodetic Applications*. <http://geophy.uni.lu/ggfc-atmosphere/tide-loading-calculator.html>, letzter Zugriff: 16.12.2013.
- VOKROUHLICKÝ D. [1997]: *A Note on the Solar Radiation Perturbations of Lunar Motion*. *Icarus*, 126, 293–300.
- WAHR J.M. [1981a]: *Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth*. *Geophysical Journal International*, 64, 677–703.
- WAHR J.M. [1981b]: *The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth*. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 64, 705–727.
- WAHR J.M. [1985]: *Deformation induced by polar motion*. *Journal of Geophysical Research*, 90, 9363–9368.

- WALLACE P.T., CAPITAINE N. [2006]: *Precession-nutation procedures consistent with IAU 2006 resolutions*. *Astronomy and Astrophysics*, 459, 981–985.
- WILL C.M. [1993]: *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 Aufl.
- WILL C.M., NORDTVEDT K. [1972]: *Conservation Laws and Preferred Frames in Relativistic Gravity. I. Preferred-Frame Theories and an Extended PPN Formalism*. *The Astrophysical Journal*, 177, 757–774.
- WILLIAMS J.G. [1994]: *Contributions to the Earth's obliquity rate, precession, and nutation*. *The Astronomical Journal*, 108, 711–724.
- WILLIAMS J.G., BOGGS D.H. [2009]: *Lunar Core and Mantle. What Does LLR See?*. In: S. SCHILLAK (Hg.) *Proceedings of the 16th International Workshop on Laser Ranging, October 2008, Poznan, Poland*, Bd. 1, 101–120, Space Research Centre, Polish Academy of Sciences, Warsaw.
- WILLIAMS J.G., BOGGS D.H., FOLKNER W.M. [2008]: *DE421 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates*. JPL Interoffice Memorandum IOM 335-JW,DB,WF-20080314-001, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- WILLIAMS J.G., BOGGS D.H., FOLKNER W.M. [2013]: *DE430 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates*. JPL Interoffice Memorandum IOM 335-JW,DB,WF-20080314-001, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- WILLIAMS J.G., DICKEY J.O. [2003]: *Lunar Geophysics, Geodesy, and Dynamics*. In: R. NOOMEN, S. KLOSKO, C. NOLL, M. PEARLMAN (Hg.) *Proceedings From the Science Session and Full Proceedings CD-ROM*, NASA/CP-2003-212248.
- WILLIAMS J.G., FOLKNER W.M. [2009]: *Lunar Laser Ranging: Relativistic Model and Tests of Gravitational Physics*. Abstract, Bulletin of the American Astronomical Society, 41, 882.
- WILLIAMS J.G., NEWHALL X.X., DICKEY J.O. [1991]: *Luni-solar precession - Determination from lunar laser ranges*. *Astronomy and Astrophysics*, 241, L9–L12.
- WILLIAMS J.G., NEWHALL X.X., DICKEY J.O. [1994]: *Determination of Precession and Nutation from Lunar Laser Ranging Analysis*. Techn. Ber., Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology.
- WILLIAMS J.G., SINCLAIR W.S., YODER C.F. [1978]: *Tidal Acceleration of the Moon*. *Geophysical Research Letters*, 5, 943–946.
- WILLIAMS J.G., TURYSHEV S.G., BOGGS D.H. [2009]: *Lunar Laser Ranging Tests of the Equivalence Principle with the Earth and Moon*. *International Journal of Modern Physics D*, 18, 1129–1175.
- YAGUDINA E.I. [2009]: *Lunar numerical theory EPM2008 from analysis of LLR data*. In: M. SOFFEL, N. CAPITAINE (Hg.) *Astrometry, Geodynamics and Astronomical Reference Systems*, Proceedings of the Journées 2008 «Systèmes de Référence Spatio-Temporels», 61–64, Lohrmann-Observatorium and Observatoire de Paris.
- YODER C.F., WILLIAMS J.G., PARKE M.E. [1981]: *Tidal Variations of Earth Rotation*. *Journal of Geophysical Research*, 86, 881–891.
- ZERHOUNI W., CAPITAINE N. [2009]: *Celestial pole offsets from lunar laser ranging and comparison with VLBI*. *Astronomy and Astrophysics*, 507, 1687–1695.