NOTIZEN

Bemerkungen hinsichtlich der Verallgemeinerung von Feldtheorien und der Allgemeinheit der Feldgrößen

Von W. R. Davis

Institut für theoretische Physik der TH Hannover

(Z. Naturforschg. **12 a**, 658—659 [1957]; eingeg. am 29. Oktober 1956)

Bergmann und Mitarb.[1–4] haben einen tiefgehenden Formalismus für die Untersuchung allgemein kovarianter Feldtheorien und das Problem ihrer Quantisierung entwickelt. In diesem Formalismus werden die allgemeinen Feldgrößen Ψ_{A} durch infinitesimale Transformationsgesetz spezifiziert, z. B.

$$\delta \Psi_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{A}\sigma}^{\mathrm{B}\varrho} \Psi_{\mathrm{B}} \zeta^{\sigma}_{,\varrho} - \Psi_{\mathrm{A},\sigma} \zeta_{\sigma}, \tag{1}$$

welches Tensoren, Tensordichten und Spinoren einschließt. Die $F_{\mathrm{A}\sigma}^{\mathrm{B}\varrho}$ sind hier Konstante und die ζ^{σ}, die „descriptors", sind willkürliche unabhängige Funktionen der Koordinaten $x_1 \dots x_4$, die im allgemeinen nicht geometrisch interpretiert werden. Durch ein Komma abgetrennte Indizes bedeuten, wie üblich, Differentiationen nach den entsprechenden Koordinaten. Man kann natürlich noch allgemeinere Feldgrößen Ψ_{A}' betrachten, deren infinitesimales Transformationsgesetz durch

$$\delta \Psi_{\mathrm{A}}' = {}^{0}f_{\mathrm{A}\sigma} \zeta^{\sigma} + {}^{1}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1} \zeta^{\sigma}_{,\lambda_1} + {}^{2}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1 \lambda_2} \zeta^{\sigma}_{,\lambda_1,\lambda_2} + \dots + {}^{p}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} \zeta^{\sigma}_{,\lambda_1,\dots,\lambda_p} \tag{2}$$

gegeben ist *. Die ${}^{i}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1 \dots \lambda_i}$ können hier Funktionen der Ψ_{A}' und ihrer Ableitungen sein. Dieses Gesetz schließt sogar Größen mit einem nicht homogenen Transformationsgesetz ein **. Die Untersuchungen von Bergmann und Mitarb. umfassen alle allgemeinen Feldtheorien, die auf einem Variationsprinzip beruhen:

$$\delta \iiiint L[\Psi_{\mathrm{A}}, \Psi_{\mathrm{A},\sigma}, \dots]\, \mathrm{d}_4 x = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, 4),$$

wo L eine Funktion der Ψ_{A} und ihrer Ableitungen $\Psi_{\mathrm{A},\sigma} \dots$ ist und die Feldgleichungen durch die Hamiltonsche Ableitung $\delta L / \delta \Psi_{\mathrm{A}} \equiv L^{\mathrm{A}} = 0$ gegeben sind. In ihren Untersuchungen haben sie im besonderen die Wichtigkeit der starken Erhaltungssätze (d. h. Erhaltungssätze, deren Geltung unabhängig davon ist, ob die Feldgleichungen erfüllt sind oder nicht) und der zugeordneten Identitäten, wie man sie in reinen Feldtheorien wie der allgemeinen Relativitätstheorie findet, hervorgehoben.

Wir untersuchen hier die Frage, ob durch eine Verallgemeinerung der Feldgrößen entsprechend einem Transformationsgesetz von der Form (2) (das von fast willkürlicher Allgemeinheit ist) in die Theorie wesentlich neue Strukturen eingeführt werden können und unter welchen Bedingungen dieses möglich ist. Umgekehrt ergibt sich dann, daß die Allgemeinheit der Feldgrößen einer gegebenen Feldtheorie gewissen Beschränkungen unterworfen ist, wenn man verlangt, daß die wesentliche Struktur dieser Theorie erhalten bleiben soll[1]. Es ist wohlbekannt, daß die Feldgleichungen einer reinen Feldtheorie invariant bleiben, wenn die Lagrange-Funktion L der Theorie invariant bleibt, d. h. wenn L eine Skalardichte ist, wo[5]

$$\delta L + (L\, \zeta^{\sigma})_{,\sigma} = 0\,. \tag{3}$$

Man kann dann immer die starken Erhaltungssätze und die zugeordneten Intensitäten ungeachtet der Allgemeinheit der Feldgrößen ableiten. Jedoch werden die starken Erhaltungssätze und die Identitäten ihre Form in Übereinstimmung mit den Gliedern ändern, die zu dem Transformationsgesetz hinzugefügt werden. Aber die Übereinstimmung zwischen den ursprünglichen und den verallgemeinerten starken Erhaltungssätzen und Identitäten verbleibt eng[6].

[1] P. G. Bergmann, Phys. Rev. **75**, 680 [1949].
[2] P. G. Bergmann u. J. H. M. Brunings, Rev. Mod. Phys. **21**, 480 [1949].
[3] J. L. Anderson u. P. G. Bergmann, Phys. Rev. **83**, 1018 [1951].
[4] P. G. Bergmann u. R. Schiller, Phys. Rev. **89**, 4 [1953].

* Es wird implizit angenommen, daß dieses infinitesimale Transformationsgesetz gewisse zusätzliche Bedingungen erfüllt[3], die notwendig sind, um den Gruppencharakter zu garantieren.

** Zum Beispiel ist das infinitesimale Transformationsgesetz einer affinen Verbindung: $\Gamma_{\mathrm{A}} \equiv \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ von der Form:

$$\delta \Gamma_{\mathrm{A}} = {}^{0}f_{\mathrm{A}\sigma} \zeta^{\sigma} + {}^{1}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1} \zeta^{\sigma}_{,\lambda_1} + {}^{2}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1\lambda_2} \zeta^{\sigma}_{,\lambda_1,\lambda_2}$$

mit ${}^{0}f_{\mathrm{A}\sigma} = - \Gamma_{\alpha\beta,\sigma}^{\gamma}$,

$${}^{1}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda_1} \delta_{\sigma}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\sigma}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\lambda_1} - \Gamma_{\sigma\beta}^{\gamma} \delta_{\alpha}^{\lambda_1}$$

und ${}^{2}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1\lambda_2} = - \delta_{\alpha}^{\lambda_1} \delta_{\beta}^{\lambda_2} \delta_{\sigma}^{\gamma}$.

[5] W. Pauli, Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften **19**, § 23 [1920].

[6] Wenn wir z. B. das infinitesimale Transformationsgesetz (1) in der Form $\delta\Psi_{\mathrm{A}} = {}^{0}f_{\mathrm{A}\sigma} \zeta^{\sigma} + {}^{1}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda} \zeta^{\sigma}_{,\lambda}$ annehmen, erhalten wir für den ursprünglichen Erhaltungssatz

$$T_{\sigma,\lambda}^{\lambda} \equiv \left[\frac{\partial L}{\partial \Psi_{\mathrm{A}\,\lambda}}\, {}^{0}f_{\mathrm{A}\sigma} + \delta_{\sigma}^{\lambda} L + L^{\mathrm{A}}\, {}^{1}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda} \right]_{,\lambda} \equiv 0\,.$$

Und im Falle eines allgemeineren Transformationsgesetzes (2) finden wir für die verallgemeinerten Erhaltungssätze

$$T_{\sigma,\lambda_1}^{\lambda_1} \equiv \left[\frac{\partial L}{\partial \Psi_{\mathrm{A}\,\lambda_1}}\, {}^{0}f_{\mathrm{A}\sigma} + \delta_{\sigma}^{\lambda_1} L + L^{\mathrm{A}}\, {}^{1}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1} - \left(L^{\mathrm{A}}\, {}^{2}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1\lambda_2}\right)_{,\lambda_2} + \dots - (-1)^{p} \left(L^{\mathrm{A}}\, {}^{p}f_{\mathrm{A}\sigma}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}\right)_{,\lambda_1,\dots,\lambda_p} \right]_{,\lambda_1} \equiv 0\,.$$

2. Die Feldgleichungen bleiben aber auch dann invariant (eine Forderung, die man vernünftigerweise an jede Feldtheorie stellen muß), wenn L nach der Verallgemeinerung der Feldgrößen und damit des Transformationsgesetzes zwar *nicht*invariant ist, aber δL von der Form einer reinen Divergenz ist [1], also $\delta L = Q^{\sigma}{}_{,\sigma}$ mit beliebigem Q ist. In diesem Fall möge sich L von einer invarianten LAGRANGE-Dichte um eine Funktion S unterscheiden, so daß also für $L+S$ die obige Invarianzbeziehung (3) gilt:

$$\delta(L+S) + [(L+S)\,\zeta^{\sigma}]_{,\sigma} = 0 \quad (\text{mit } \delta L = Q^{\sigma}{}_{,\sigma}). \quad (4)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Das Glied S habe ebenfalls die Form einer reinen Divergenz: $S = s^{\varrho}{}_{,\varrho}$. Man kann dann die starken Erhaltungssätze und die zugeordneten Identitäten wieder ohne weiteres ableiten [4]. Die Übereinstimmung zwischen den ursprünglichen und den verallgemeinerten starken Erhaltungssätzen und Identitäten wird aber nicht so eng sein wie in dem Falle [1], wo L eine skalare Dichte war, denn nun treten Glieder in S^{ϱ} in diesen verallgemeinerten Beziehungen auf. Aber sie enthalten ebenfalls noch dieselben Feldgleichungen L^{A}.

b) Der allgemeinere Fall, wenn das Glied S, um das sich L von einer invarianten Dichte unterscheidet, *nicht* die Form einer Divergenz hat, erfordert eine etwas tiefere Untersuchung. Zunächst folgt aus dem Transformationsgesetz für die invariante Dichte (4), daß

$$\delta S = -Q^{\sigma}{}_{,\sigma} - [(L+S)\,\zeta^{\sigma}]_{,\sigma} = R^{\sigma}{}_{,\sigma}.$$

Also transformiert S auch wie L als $\delta S = R^{\sigma}{}_{,\sigma}$. Dieses bedeutet natürlich, daß S mit L auf gleicher Stufe als eine LAGRANGE-Funktion steht, die die Feldgrößen Ψ_{A} und ihre Ableitungen enthält. Dann kann man also diesen Fall durch zwei Variationsprinzipien beschreiben, nämlich:

$$\int L^{A}\,\delta\Psi_{A}\,d_4x = 0 \quad \text{und} \quad \int S^{A}\,\delta\Psi_{A}\,d_4x = 0,$$

welches erfordert, wenn die willkürlichen $\delta\Psi_{A}$ an der Grenze verschwinden, daß

$$L^{A} = 0 \quad \text{und} \quad S^{A} = 0.$$

In diesem Fall haben wir also auch noch dieselben Feldgleichungen L^{A}, aber zusätzlich treten die Feldgleichungen S^{A} auf. Da die starken Erhaltungssätze und die zugeordneten Identitäten von dem Transformationsgesetz (4) für die invariante Dichte abgeleitet werden [4], welches L und S enthält, werden $L^{A}+S^{A}$ in den verallgemeinerten Erhaltungssätzen auftreten. Hierdurch sehen wir, daß sich die ursprünglichen Erhaltungssätze und Identitäten stark von den verallgemeinerten Beziehungen unterscheiden werden, da in den letzteren bestimmte völlig neue Elemente in die Theorie eingeführt wurden, was z. B. durch das Auftreten von S^{A} ausgedrückt wird. (Der spezielle Ausnahmefall $S^{A} = L^{A}$ ist natürlich uninteressant.)

Eine Verallgemeinerung der Feldgrößen für eine gegebene LAGRANGE-Funktion, die das obige Resultat zur Folge hat, dürfte einen Weg andeuten, auf dem man eine weitere neue Struktur in ein Theorie einführen kann. Die so verallgemeinerte Theorie wird aber bestimmt im allgemeinen stark von der ursprünglichen abweichen. Wenn man also den größten Teil der einer gegebenen Feldtheorie unterliegenden Struktur beizubehalten wünscht, ist die mögliche Allgemeinheit der Feldgrößen (und daher der betrachteten Transformationsgesetze) auf die beschränkt, die die LAGRANGE-Funktion in einer Form belassen, die von einer invarianten Dichte höchstens durch ein Glied abweicht, das eine reine Divergenz ist (außer dem oben erwähnten Spezialfall, wenn $S^{A} = L^{A}$).

Herrn Professor Dr. G. BURKHARDT danke ich für wertvolle Diskussionen.

Zur kosmologischen Zeitskala

Von C. CARSTENS/HILBIG *

(Z. Naturforschg. **12 a**, 659—660 [1957]; eingegangen am 16. April 1957)

Bei Betrachtungen über Beziehungen zwischen mikrophysikalischen und kosmischen Naturkonstanten ist schon von JORDAN [1] auf die Bedeutung der EDDINGTON-Zahl hingewiesen worden. Besonders klar werden die Verhältnisse, wenn der EDDINGTON-Zahl Z, also dem Quotienten aus elektrischer Anziehung und Gravitationsanziehung von Proton und Elektron, eine andere Bedeutung beigelegt wird. Z kann auch interpretiert werden als das Verhältnis zweier atomarer Längen, bzw. als eine bestimmte ganz besonders ausgezeichnete Anzahl von Protonen, da auch der Quotient aus der Elementarlänge $l = e^2/m_e c^2$ und dem Gravitationsradius $r_g = f\,m_{pr}/c^2$ des Protons gleich Z ist. Also bedeutet Z diejenige Anzahl von Protonen, deren Gesamtmasse einen Gravitationsradius hat, der gerade gleich der Elementarlänge l ist. So wird unmittelbar verständlich, warum im Fall positiver Raumkrümmung eine Beziehung zwischen dem Gravitationsradius R_{gr} der gesamten Weltmasse M, der Protonenanzahl $N_{pr} = M/m_{pr}$, l und Z besteht:

$$R_{gr}/l = N_L = N_{pr}/Z.$$

Aus $l = Z\,r_g = Z \cdot f\,m_{pr}/c^2$ folgt $m_{pr} = l\,c^2/f\,Z$ und damit für die COMPTON-Wellenlänge λ_p des Protons

$$\lambda_p = h/m_{pr}\,c = h\,f\,Z/l\,c^3 = 2\,\pi\,r_{\lambda},$$

wenn $r_{\lambda} = \lambda_p/2\,\pi$ gesetzt wird. Für den statischen EINSTEIN-Kosmos mit $e = 1$ gilt

$$V = 2\,\pi^2\,R_e^3; \quad M\,f/c^2 = R_{gr} = \pi/2 \cdot R_e.$$

Bedeutet σ die mittlere Dichte im Kosmos, so wird

$$M = 2\,\pi^2\,R_e^3 \cdot \sigma = \pi\,c^2\,R_e/2\,f \quad \text{oder} \quad R_e^2 = c^2/4\,\pi\,f\,\sigma.$$

Da definitionsgemäß der EINSTEIN-Radius in Lichtsekunden ist: $R_e/c = t$, so folgt $t^2 = 1/4\,\pi\,f\,\sigma$. Die Gesamt-

* Fredelsloh/Northeim, Tönnieshof.

[1] P. JORDAN, Naturwiss. **25**, 513 [1937].