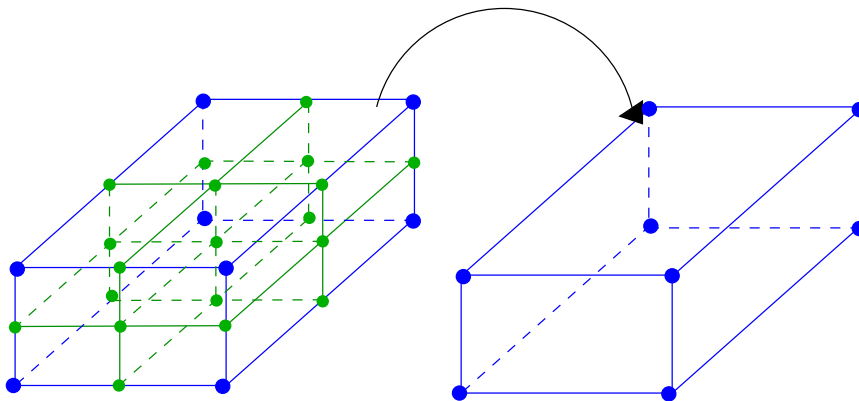


Bachelorarbeit

30. Oktober 2006

Implementation, Weiterentwicklung und Verifikation eines finiten Strukturelementes für elastisches und inelastisches Materialverhalten bei großen Deformationen.



Verfasserin: Meriem Ben Salah

Mat.Nr. 2221260

Betreuerin: Dipl.-Ing Eiris Börner

Erstprüfer: Prof. Dr.-Ing. P. Wriggers

Zweitprüfer: Prof. Dr.-Ing. U. Nackenhorst

Institut für Baumechanik und numerische Mechanik

Leibniz Universität Hannover

Ehrenwörtliche Erklärung

Gemäß § 26 der Prüfungsordnung vom 06. November 2001 für die Studiengänge Computergestützte Ingenieurwissenschaften (PO'01) der Fakultät Bauingenieurwesen und Geodäsie der Leibniz Universität Hannover erkläre ich, Meriem Ben Salah, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

.....
(Ort) (Datum)

.....
(Unterschrift Meriem Ben Salah)



Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Institut für Baumechanik und numerische Mechanik der Leibniz Universität Hannover im Rahmen des Projektes $\dot{F}E$ formulation based on the theory of a Cosserat point.

Dipl.-Ing. Eiris Börner danke ich für die sehr gute Betreuung und Unterstützung in allen Phasen dieser Arbeit.

Dana Müller-Hoeppe danke ich für die Unterstützung am Anfang der Arbeit.

Hannover, im Oktober 2006

Meriem Ben Salah



Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
2	Makro-Element für nichtlineares elastisches Material	9
2.1	Grundlage: Cosserat-Punkt-Theorie	9
2.1.1	Material	9
2.1.2	Kinematik	9
2.1.3	Schwache Form des Gleichgewichts	11
2.2	Makro-Element: die Theorie	12
2.2.1	Modellierung der Mikro-Knoten und -Elemente	13
2.2.2	Berechnung der inneren Knotenkräfte am Mikro-Element	13
2.2.3	Sortieren der inneren Knotenkräfte	14
2.2.4	Projektion der inneren Knotenkräfte auf die Makro-Knoten	14
3	Makro-Element: Implementierung und Verifizierung	17
3.1	Das Feap-Element	17
3.1.1	Pre- und Post-Processing	17
3.1.2	Berechnung der numerischen Tangente	17
3.2	Verifizierung und Patch-Test	18
3.2.1	Verifizierungstest mit einem Makro-Element	18
3.2.2	Verifizierungstest mit mehreren Elementen	19
3.2.3	Patch-Test mit schiefen Elementen	20
4	Makro-Element: Evaluationstests	23
4.1	Balkenstrukturen	23
4.1.1	Schiefvernetzter Balken	23
4.1.2	Biegetest	25
4.1.3	Kragarm	28
4.2	Dünne Strukturen	29
4.2.1	Durchbiegung einer Platte	29
4.2.2	Eingespannte Schale	30
4.2.3	Cola-Dose	32
4.3	Ein rechteckiger Block unter Druckbelastung	33
5	Erweiterung um plastisches Materialverhalten	35
5.1	Die Theorie	35
5.1.1	Kinematik	35
5.1.2	Das plastische Modell	36
5.1.3	Numerische Umsetzung des plastischen Modells	37
5.2	Implementierung und Verifizierung	38
5.3	Evaluationstest: Kragarm mit plastischen Verformungen	39
6	Zusammenfassung	43



Kapitel 1

Einführung

Ein unbestreitbarer Fakt ist, dass die numerischen Lösungsmethoden und speziell die Finite-Elemente-Methode (FEM) den Horizont der Ingenieurwissenschaften erweitert haben. Es ist heutzutage möglich mit Hilfe dieser Methode analytisch nichtlösbare partielle Differentialgleichungen numerisch zu lösen und die dazugehörigen Problemstellungen zu simulieren. Die wesentliche Idee, auf der die FEM basiert, ist die Diskretisierung des geometrischen Gebietes in eine endliche Anzahl von Elementen und die folgende Überführung der Differentialgleichung in ein Gleichungssystem. Die Lösung des Problems erfolgt auf der Elementebene und wird im nachhinein zu einer gesamten Lösung assembliert. Es ist aber nicht zu „verheimlichen“, dass die einzelnen Schritte des Lösungsverfahrens mit Schwierigkeiten verbunden sind, obwohl manche früheren Stolpersteine, wie die für die Lösung der Gleichungssysteme nicht ausreichenden Rechnerkapazitäten, „beseitigt“ wurden. Eine aktuelle und herausfordernde Problemstellung ist, dass es keinen Element gibt, das für die Lösung aller problemspezifischen Differentialgleichungen geeignet ist. Der eigentliche Knackpunkt bei der Anwendung der FEM ist die richtige Wahl des Elementes für das zu behandelnde Problem. Obwohl manche Elemente zufriedenstellende Ergebnisse liefern, müssen wir feststellen, dass einige unerwünschte Nebeneffekte auftauchen, die das echte Verhalten schlecht abbilden. Aus diesem Grund werden heutzutage Elemente entwickelt, die diese bereits erkannten Nebeneffekte beheben können.

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wird ein dreidimensionales sogenanntes „Makro-Element“ mit linearen Ansatzfunktionen entwickelt und verifiziert, das für die Lösung statischer Probleme für nichtlinear elastisches und inelastisches Materialverhalten geeignet ist, fokussierend auf Situationen, die unerwünschte Nebeneffekte wie Locking oder Hourglassing hervorrufen können. Das Makro-Element basiert auf dem in (I) entwickelte 3D Cosserat Brick Element, das sich in der Behebung von Locking und Hourglassing bewährt hat. Das Makro-Element wird in kleine Elemente, sogenannte Mikro- oder Subelemente unterteilt, in denen erstmal die Spannungen wie in einem rein homogenen 3D Cosserat Brick Element berechnet und dann auf das ursprüngliche Element abgebildet werden. Aus diesem Grund wurde das Element „Makro-Element“ getauft. Ein schöner Nebeneffekt bei der Verwendung dieses Elementes ist der Verzicht auf die numerische Integration über das Gebiet aufgrund einer speziell entwickelten Kinematik.

In dem ersten Teil dieser Arbeit wird die Theorie des Makro-Elementes für das nichtlineare, elastische Materialverhalten vorgestellt. Das implementierte Element wird einem Patch-Test und anderen Tests unterzogen, um es auf seine Richtigkeit zu überprüfen, und um sein Verhalten in heiklen Situationen im Vergleich zu anderen Elementen zu evaluieren. Im zweiten Teil wird die Theorie um das inelastische, insbesondere um das nichtlineare, plastische Materialverhalten erweitert. Es wird die Von-Mises-Plastizität verwendet mit Beschränkung auf isotrope Verfestigung. Das plastische Modell wird mit Hilfe des Radial-Return-Mapping-Algorithmus numerisch umgesetzt. Diese Erweiterung im Element wird implementiert und für einen speziellen Fall untersucht.



Kapitel 2

Makro-Element für nichtlineares elastisches Material

2.1 Grundlage: Cosserat-Punkt-Theorie

Es ist erstmal wichtig den Hintergrund für die Entwicklung des Makro-Elementes zu verstehen. Wie bereits in der Einführung erwähnt wurde, basiert das Makro-Element auf dem in (I) entwickelten 3D Cosserat Brick Element, das wiederum auf die Cosserat-Punkt-Theorie fundiert. Ein gutes Argument für die Verwendung dieser Theorie ist die richtige Darstellung der inhomogenen Deformationen wie Biegung oder Torsion. Um diese Theorie herleiten zu können, muss man wie in jedem gewöhnlichen FEM-Problem vorgehen, in dem man das Gleichgewicht aufstellt, eine konstitutive Gleichung und eine geeignete Kinematik wählt.

2.1.1 Material

Die Cosserat-Punkt-Theorie ist für hyperelastische Materialien entwickelt worden, die durch eine Verzerrungsenergiefunktion Ψ gegeben sind. Ψ lässt sich aufgrund der in dieser Theorie benutzten Kinematik in einen homogenen und einen inhomogenen Anteil aufspalten.

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi_{hom}(\mathbf{C}_{hom}) + \Psi_{inh}(\beta_i), \quad (2.1)$$

wobei der homogene Anteil von dem homogenen rechten Cauchy-Green-Verzerrungstensor abhängt, der wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{C}_{hom} = \mathbf{F}_{hom}^T \mathbf{F}_{hom}. \quad (2.2)$$

β_i sind Maße für den inhomogenen Anteil der Deformationen. Auf den inhomogenen Anteil der Verzerrungsenergie möchte ich nicht näher eingehen, da er irrelevant ist für die Herleitung der Theorie des Makro-Elementes.

Der Split der Verzerrungsenergiefunktion wirkt wie ein zweiseitiges Schwert. Auf der einen Seite können die inhomogenen Deformationen damit „wunderbar“ dargestellt werden. Auf der anderen Seite müssen für jedes Material die Verzerrungsenergiefunktion und damit die nachfolgenden Gleichungen neu aufgestellt werden.

2.1.2 Kinematik

Im Rahmen dieser Theorie wurde eine neue Kinematik entwickelt, die den Split der Verzerrungsenergiefunktion ermöglicht. Bevor ich diese neue Theorie kurz vorstelle, möchte ich das bisher von uns bekannte Vorgehen in Erinnerung rufen. Die Geometrie eines in FEM benutzten Elementes wird mittels seiner Konfigurationslage bestimmenden Koordinaten beschrieben, die wiederum über die Knotenkoordinaten mittels im Element definierter Ansatzfunktionen interpoliert werden. In mathematischer Schreibweise lautet dies wie folgt:

$$\mathbf{X} = \sum_I N^I \mathbf{X}_I. \quad (I = 1, \dots, 8) \quad (2.3)$$

Hier steht \mathbf{X} für die Koordinatenfunktion des gesamten Systems, N^I für die Ansatzfunktionen und \mathbf{X}_I für die Knotenkoordinaten. Im Prinzip wird die Berechnung der Koordinaten bei der Cosserat-Punkt-Theorie analog zu dem oben erläuterten Ablauf durchgeführt. Anstelle von den Knotenkoordinaten führt man sogenannte Direktoren \mathbf{D} ein, die auf dem Element konstant definiert sind.

$$\mathbf{X} = \sum_I N^I \mathbf{D}_I. \quad (I = 1, \dots, 8) \quad (2.4)$$

Analog dazu berechnet man die Knotenkoordinaten im momentanen Deformationszustand mit den in der Momentankonfiguration definierten Direktoren \mathbf{d} :

$$\mathbf{x} = \sum_I N^I \mathbf{d}_I. \quad (I = 1, \dots, 8) \quad (2.5)$$

Die Direktoren lassen sich wie folgt berechnen:

$$\mathbf{D}_I = \sum_{J=1}^8 A_{IJ} \mathbf{X}_J, \quad (I, J = 1, \dots, 8) \quad (2.6)$$

$$\mathbf{d}_I = \sum_{J=1}^8 A_{IJ} \mathbf{x}_J. \quad (2.7)$$

Hier ist \mathbf{X}_J der Koordinatenvektor des J-ten Knotens und A_{IJ} sind skalare Werte, die sich aus den Abmessungen des Makro-Elementes in der Ausgangskonfiguration berechnen lassen. Sie sind (I) zu entnehmen. Die Verwendung der Direktoren ist der Grund dafür, dass die numerische Integration über das gesamte Gebiet nicht mehr explizit durchgeführt werden muss. Im Falle des dreidimensionalen Cosserat-Elementes, das einen Quader mit acht Eckknoten darstellt, hat man für den Direktorenansatz die folgenden Ansatzfunktionen eingeführt:

$$N^1 = 1 \quad (2.8)$$

$$N^2 = \theta^1, \quad (2.9)$$

$$N^3 = \theta^2, \quad (2.10)$$

$$N^4 = \theta^3, \quad (2.11)$$

$$N^5 = \theta^1 \theta^2, \quad (2.12)$$

$$N^6 = \theta^1 \theta^3, \quad (2.13)$$

$$N^7 = \theta^2 \theta^3, \quad (2.14)$$

$$N^8 = \theta^1 \theta^2 \theta^3, \quad (2.15)$$

wobei θ^1, θ^2 und θ^3 die Knotenkoordinaten bezüglich des Elementschwerpunktes in der Referenzkonfiguration sind.

Mit Hilfe dieser Kinematik kann nun der homogene Anteil des Deformationsgradienten aufgestellt werden:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (2.16)$$

$$= \sum_{j=1}^3 \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j, \quad (2.17)$$

$$(2.18)$$

mit

$$\mathbf{g}_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^j}, \quad \mathbf{G}^j = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^j} \quad (2.19)$$

Der konstante Anteil des Deformationsgradienten wird somit wie folgt definiert:

$$\mathbf{F}_{con} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{D}^i. \quad (2.20)$$

\mathbf{D}^i und \mathbf{d}_i sind die kontravarianten bzw. die kovarianten Direktoren in der Ausgangs- bzw. der Momentankonfiguration.

Mit dem konstanten Anteil des Deformationsgradienten lässt sich der homogene Anteil wie folgt berechnen:

$$\mathbf{F}_{hom} = \mathbf{F}_{con} \left(1 + \sum_{m=1}^4 \beta_m \otimes \mathbf{V}^m \right), \quad (m = 1, \dots, 4) \quad (2.21)$$

mit

$$\mathbf{V}^m = \frac{1}{D^{1/2}V} \int_{\Omega_0} \sum_{k=1}^3 \frac{dN^{(m+3)}}{d\theta^k} \mathbf{G}^k dV, \quad (m = 1, \dots, 4) \quad (2.22)$$

$$D^{1/2}V = \int_{\Omega_0} dV, \quad (2.23)$$

$$\beta_i = \mathbf{F}_{con}^{-1} \mathbf{d}_{i+3} - \mathbf{D}_{i+3} \quad (i = 1, \dots, 4). \quad (2.24)$$

2.1.3 Schwache Form des Gleichgewichts

Nach der Umformulierung der Grundgleichung der Kontinuumsmechanik für den statischen Fall mit dem Prinzip der virtuellen Verrückung, erhält man die folgende schwache Form bezogen auf die Momentankonfiguration:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad} \boldsymbol{\eta} dv - \int_{\Omega} \rho \cdot \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} dv - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0, \quad (2.25)$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ der Cauchy-Spannungstensor, ρ die Dichte des Kontinuums, $\boldsymbol{\eta}$ die virtuelle Testfunktion, \mathbf{t} die äußeren Kräfte und \mathbf{b} die Volumenkräfte sind.

Mit der in der Cosserat-Punkt-Theorie eingeführten Kinematik und speziell mit Hilfe der Direktoren kann man diese schwache Form weiter umformen, in dem man aus jedem der drei Integrale eine auf die Direktoren bezogene Größe konstruiert:

$$\boldsymbol{\eta} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{dN^i}{d\theta^j} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}^i dv}_{\mathbf{t}^i} - \underbrace{\int_{\Omega} N^i \mathbf{f} dv}_{\mathbf{f}^i} - \underbrace{\int_{\Gamma} N^i \mathbf{t} da}_{\mathbf{m}^i} \right) = 0. \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (2.26)$$

Somit erhält man eine auf die Direktoren bezogene Gleichgewichtsgleichung:

$$\mathbf{t}^i - \mathbf{f}^i - \mathbf{m}^i = 0. \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (2.27)$$

Hier sind \mathbf{t}^i die auf den Direktoren bezogenen inneren Kräfte, \mathbf{f}^i die auf den Direktoren bezogenen Volumenkräfte und \mathbf{m}^i die auf den Direktoren bezogenen Oberflächenkräfte für das i -te Mikroelement. Der innere Anteil der schwachen Form \mathbf{t}^i wird über die konstitutive Beziehung ermittelt, wobei der inhomogene Anteil der Verzerrungsenergiefunktion im Folgenden nicht miteinbezogen wird.

$$\mathbf{t}^1 = \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{t}^i = \left(d^{1/2}v \boldsymbol{\sigma}_{hom} - \sum_{j=5}^8 \mathbf{t}^j \otimes \mathbf{d}_j \right) \mathbf{d}^i, \quad (i = 2, \dots, 4), \quad (2.29)$$

$$d^{1/2}v = \int_{\Omega} dv, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{t}^{(i+4)} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_{con}^{-T} \frac{d\Psi(\mathbf{C}_{hom})}{d\beta_i} dV, \quad (i = 1, \dots, 4). \quad (2.31)$$

2.2 Makro-Element: die Theorie

Die Modellierung des Makro-Elementes erfolgt anders als die von dem 3D Cosserat Element. Es wird in acht Mikro-Elemente unterteilt, die mit den Eckknoten des Makro-Elementes verbunden sind. Die Knoten sind mit Hilfe von trilinearen Ansatzfunktionen miteinander verbunden (Siehe Abbildung 1) Bei der Aufteilung des Makro-Elementes in Mikro-Elemente, teilen sich auch die Masse m und die einzelnen Energieformen E^k (Verzerrungsenergie, kinetische Energie, Dissipationsenergie etc.) auf alle Mikro-Elementen auf:

$$m = \sum_{I=1}^8 m_I, \quad (2.32)$$

$$E^k = \sum_{I=1}^8 E_I^k. \quad (2.33)$$

Bei der Assemblierung der Mikro-Elemente in das ursprünglichen Makro-Element, lassen sich die in der Modellierung aufgeteilten Größen aufsummieren. Es gilt ausserdem, dass sich die Hyperelastizität des Makro-Element-Materials auf die Mikro-Elemente übertragen lässt, und umgekehrt auch. Das Makro-Element wird aber trotz dieser Modellierung als ein Standard-Quader mit acht Knoten betrachtet, damit man die unter 2.1 aufgeführten Gleichungen mit der Beschränkung auf homogene Deformationen und Spannungen übernehmen kann. Um diesen Ansatz machen zu dürfen, muss die Arbeitsrate des Makro-Elementes gleich der Summe der Arbeitsraten der Mikro-Elementen sein. Die Arbeitsrate des Makro-Elementes \mathcal{W}_c unter Berücksichtigung aller durch die Verwendung der Mikroelemente gegebenen Größen lässt sich wie folgt berechnen:

$$\mathcal{W}_c = \underbrace{\sum_{m=1}^8 \overline{\mathbf{m}}^m \bullet \overline{\mathbf{v}}^m}_{\mathcal{W}_c^I} + \underbrace{\sum_{i=9}^{27} \sum_{r=1}^3 \tau_i^r \dot{u}_i^r}_{\mathcal{W}_c^{II}}, \quad (2.34)$$

wobei $\overline{\mathbf{m}}^m$ die auf die Direktoren bezogenen äußeren Kräfte am Knoten m , τ_i^r die Schubspannungen am Knoten i , $\overline{\mathbf{v}}^m$ die Geschwindigkeit am Knoten m und \dot{u}_i^r die Freiheitsgrade (die Knotenverschiebungsgeschwindigkeiten) des Knotens i sind. Im Vergleich zu der Arbeitsrate eines linearen dreidimensionalen 8-Knoten Brick Element \mathcal{W}_c^* :

$$\mathcal{W}_c^* = \sum_{m=1}^8 \overline{\mathbf{m}}^m \bullet \overline{\mathbf{v}}^m, \quad (2.35)$$

muss der zweite Summand der Arbeitsrate des Makro-Elementes \mathcal{W}_c^{II} in Gleichung (2.34) verschwinden. Es ist bekannt, dass die Schubspannungen bei einem hyperelastischen Material zu Null werden. Somit verschwindet \mathcal{W}_c^{II} und die Arbeitsrate des „Mikro-Makro Elementes“ entspricht in diesem Fall der des linearen dreidimensionalen Quader-Elementes. Da wir das Makro-Element für das elastische Material und insbesondere für ein hyperelastisches Material, das Ogden-Material, verwenden werden, ist diese Bedingung erfüllt. Das Ogden-Material ist wie jedes hyperelastische Material durch die eine Verzerrungsenergiefunktion Ψ gegeben. Ψ speziell für ein Ogden-Material lautet: β , μ_p , α_p und K sind Materialparameter.

$$\Psi(\tilde{\lambda}_k) = \sum_{p=1}^n \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\tilde{\lambda}_1^{\alpha_p} + \tilde{\lambda}_2^{\alpha_p} + \tilde{\lambda}_3^{\alpha_p} - 3) + \frac{K}{\beta^2} \left(\frac{1}{J^\beta} - 1 + \beta \ln J \right), \quad (2.36)$$

$$\lambda_k = \sqrt{\text{eig} \mathbf{C}}, \quad \tilde{\lambda}_k = J^{-1/3} \lambda_k, \quad J = \det \mathbf{F}. \quad (2.37)$$

Damit das Verhalten des linearen dreidimensionalen Elementes durch diese Modellierung nicht verletzt wird, müssen die Mikro-Elemente einen gemeinsamen inneren Knoten haben. Ausserdem dürfen sich die Mikro-Knoten, die auf der Oberfläche des Makro-Elementes liegen, nur auf den Kanten oder auf den Seitenflächen des Makro-Elementes bewegen. Der innere Knoten, der alle Mikro-Elemente verbindet, darf sich im Raum frei bewegen (Siehe Abbildung 1). Die Lösung des FE-Problems erfolgt zunächst in dem Mikro-Element unter der Verwendung der homogenen Cosserat-Punkt-Theorie. Die Knotenwerte aller Mikro-Elemente werden der Reihe nach sortiert und anschließend auf die Knoten des Makro-Elementes projiziert. Die Berechnung mit dem Makro-Element läuft in den folgenden Schritten ab:

2.2.1 Modellierung der Mikro-Knoten und -Elemente

Bei der Aufteilung des Makro-Elementes in acht Mikro-Elemente entstehen zusätzlich neunzehn Knoten (siehe Abbildung 1), deren sowohl ursprüngliche als auch momentane Koordinaten sich mit Hilfe der am Makro-Element definierten Direktoren berechnen lassen:

$$\mathbf{X} = \sum_i N^i \mathbf{D}_i, \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (2.38)$$

$$\mathbf{x} = \sum_i N^i \mathbf{d}_i, \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (2.39)$$

wobei N^i die unter 2.1 definierten Ansatzfunktionen sind. In der Referenzkonfiguration liegen die Mikro-Knoten immer mittig zwischen zwei Makroknoten.

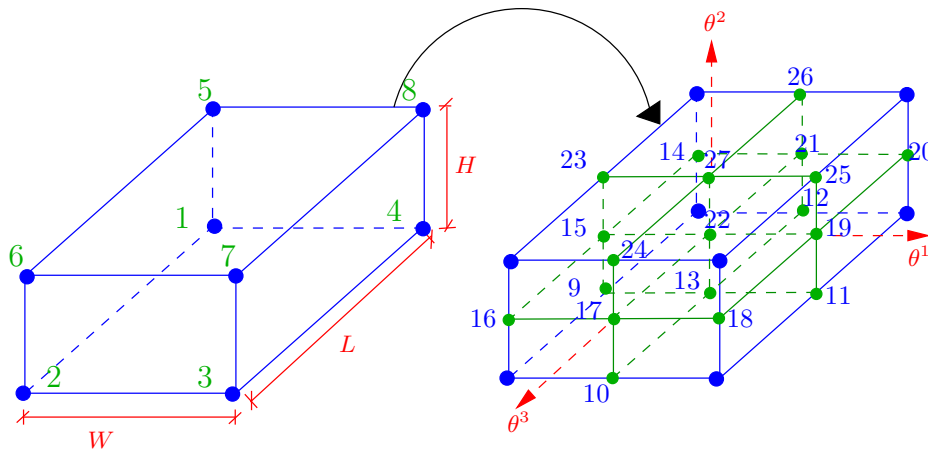


Abbildung 1: Mikro-Elemente und -Knoten

Nehmen wir als Beispiel den Knoten mit der Nummer 11, dessen Koordinaten sich wie folgt berechnen lassen:

$$X_{11} = \sum_{i=1}^8 N_{11}^i D_i, \quad (2.40)$$

$$= N_{11}^1 D_1 + N_{11}^2 D_2 + N_{11}^3 D_3 + N_{11}^4 D_4 + N_{11}^5 D_5 + N_{11}^6 D_6 + N_{11}^7 D_7 + N_{11}^8 D_8, \quad (2.41)$$

$$= D_1 + \theta_{11}^1 D_2 + \theta_{11}^2 D_3 + \theta_{11}^3 D_4 + \theta_{11}^1 \theta_{11}^2 D_5 + \theta_{11}^1 \theta_{11}^3 D_6 + \theta_{11}^2 \theta_{11}^3 D_7 + \theta_{11}^1 \theta_{11}^2 \theta_{11}^3 D_8, \quad (2.42)$$

$$= D_1 + \frac{W}{2} D_2 - \frac{H}{2} D_3 + 0 \cdot D_4 - \frac{WH}{4} D_5 + 0 \cdot D_6 + 0 \cdot D_7 + 0 \cdot D_8, \quad (2.43)$$

$$= D_1 + \frac{W}{2} D_2 - \frac{H}{2} D_3 - \frac{WH}{4} D_5. \quad (2.44)$$

Das Makro-Element hat dann im allgemeinen Fall insgesamt 51 Freiheitsgrade, die sich auf der Bewegung des inneren gemeinsamen Knotens und auf dem Gleiten der Mikro-Knoten auf die Kanten oder auf die Seiten des Makro-Elementes beziehen.

2.2.2 Berechnung der inneren Knotenkräfte am Mikro-Element

Im Endeffekt bleiben alle für das 3D-Cosserat-Element aufgestellten Annahmen und Gleichungen erhalten und können weiterhin für das Makro-Element benutzt werden. Man geht bei der Berechnung über alle Mikro-Elemente und löst jedesmal die folgende aus Direktorgrößen bestehende Gleichgewichtsgleichungen im I-ten Mikro-Element.

$$\mathbf{t}_I^i - \mathbf{f}_I^i - \mathbf{m}_I^i = 0. \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (2.45)$$

Am Ende erhält man die inneren Knotenkräfte \mathbf{t}_I^i an den zugehörigen Mikro-Knoten.

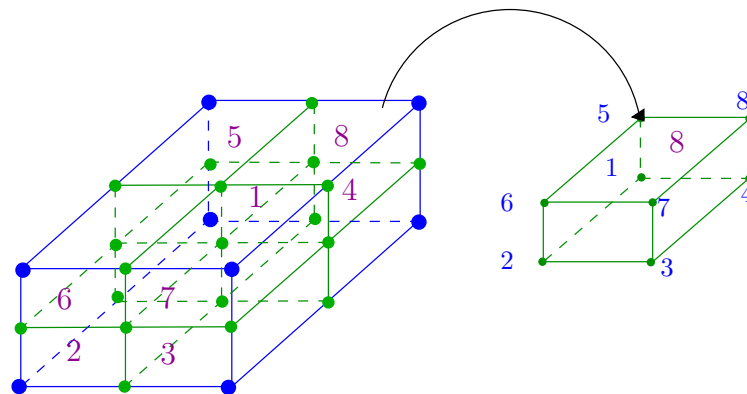


Abbildung 2: Berechnung der Spannungen

2.2.3 Sortieren der inneren Knotenkräfte

Nachdem man die Gleichgewichtsgleichung an jedem Mikro-Element separat gelöst hat, stellt man fest, dass man an einigen Knoten mehr als einen Wert für t hat. Da man bei der Spannungsberechnung am Mikro-Element die Nachbarelemente nicht berücksichtigt hat, hat man den Fall nicht betrachtet, dass einige Elemente gemeinsame Knoten haben können. Um diesen Fehler zu beheben, werden alle Einträge für jede Spannungskomponente an dem gemeinsamen Knoten überlagert. Für diese Superposition braucht man keine Wichtungsfaktoren, da die Werte direkt an den Knoten berechnet werden. Somit führt man hier lediglich eine Assemblierung durch.

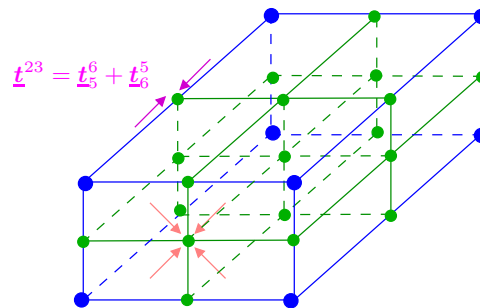


Abbildung 3: Sortieren der Spannungen

2.2.4 Projektion der inneren Knotenkräfte auf die Makro-Knoten

Nachdem man die Spannungen sortiert hat, erhält man 27 Spannungsvektoren, die auf die acht Makro-Knoten projiziert werden müssen. Für diese Abbildung hat man Ansatzfunktionen eingeführt, die an jedem Knoten wie folgt definiert sind:

$$\overline{N}_j^m = A_{1m} + \theta_j^1 A_{2m} + \theta_j^2 A_{3m} + \theta_j^3 A_{4m} + \theta_j^1 \theta_j^2 A_{5m} + \theta_j^1 \theta_j^3 A_{6m} + \theta_j^2 \theta_j^3 A_{7m} + \theta_j^1 \theta_j^2 \theta_j^3 A_{8m}. \quad (2.46)$$

Der untere Index an den Ansatzfunktionen $\theta_j^1, \theta_j^2, \theta_j^3$ steht für den j -ten Knoten. ($j = 1, \dots, 27$), ($m = 1, \dots, 8$)

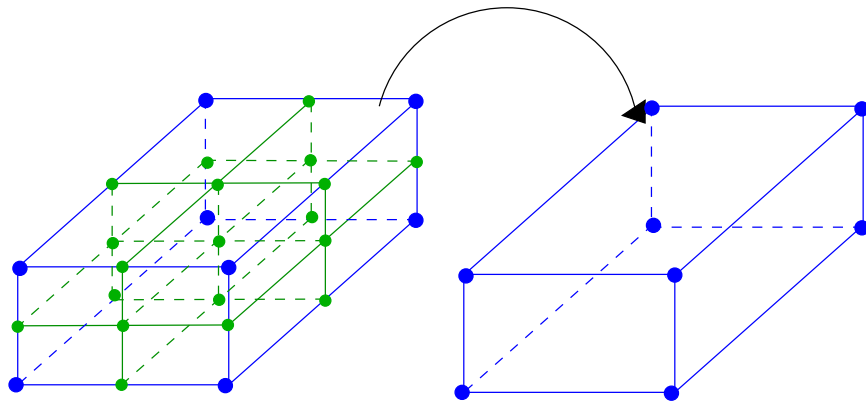


Abbildung 4: Projektion der Spannungen

Falls ein Mikro-Knoten mit einem Makro-Knoten übereinstimmt, wird sein Anteil direkt zu dem Knotenwert addiert. Die Spannungen an den anderen Mikro-Knoten werden mit den oben definierten Ansatzfunktionen gewichtet und zu dem Knotenwert addiert.

$$\bar{\mathbf{t}}^m = \delta_1^m \bar{\mathbf{t}}_1^1 + \delta_2^m \bar{\mathbf{t}}_2^2 + \delta_3^m \bar{\mathbf{t}}_3^3 + \delta_4^m \bar{\mathbf{t}}_4^4 + \delta_5^m \bar{\mathbf{t}}_5^5 + \delta_6^m \bar{\mathbf{t}}_6^6 + \delta_7^m \bar{\mathbf{t}}_7^7 + \delta_8^m \bar{\mathbf{t}}_8^8 + \sum_{r=9}^{27} \bar{N}_r^m \bar{\mathbf{t}}^r, \quad (m = 1..8) \quad (2.47)$$

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j. \end{cases} \quad (2.48)$$

Hier ist m der Index des Makro-Knotens und $\mathbf{t}_j^i = [t_1^1, \dots, t_8^8]$ ist der Spannungsvektor des j -ten Mikro-Elementes an seinem lokalen i -ten Knotens.



Kapitel 3

Makro-Element: Implementierung und Verifizierung

3.1 Das Feap-Element

Die Routine zur Lösung des statischen Gleichgewichtsproblems für das Ogden-Material unter Verwendung des Makro-Elementes wurde in der Programmiersprache FORTRAN implementiert und als Element in dem Finite-Element-Analyse-Programm FEAP eingebunden.

3.1.1 Pre- und Post-Processing

Unter $isw=1$ im FEAP-Element, werden die Materialparameter für das Ogden-Material aus dem input-File eingelesen. Unter $isw=4$ oder $isw=8$ werden die Cauchy-Spannungen auf die Makro-Knoten projiziert. Normalerweise müssten die Spannungswerte an den Gaußpunkten projiziert werden. Im Fall des Makro-Elementes werden die homogenen Cauchy-Spannungen in den Mikro-Elementen projiziert. D.h. an jedem Mikro-Element hat man im dreidimensionalen Fall neun Spannungskomponenten. Wir machen den gleichen Ansatz, wie bei der Gaußpunkt-Projektion und wichten die Spannungsanteile mit den entsprechenden Faktoren. Es bietet sich an, die Volumina der Elemente als Wichtungsfaktoren zu benutzen:

$$\sigma_{Knoten} = \frac{\sum_{Mikroelemente} \sigma_{Mikroelement} \cdot V_{Mikroelement}}{V_{MakroElement}}. \quad (3.1)$$

Die Projektion erfolgt in der subroutine **stcn3344**.

3.1.2 Berechnung der numerischen Tangente

Das Problem lässt sich mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens lösen. Man hat das folgende nichtlineare Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}_{i+1} = \lambda \mathbf{P} - \mathbf{r}(\mathbf{u}_i). \quad (3.2)$$

Hier ist \mathbf{P} die äußere angreifende Last, λ ist der Lastparameter, und \mathbf{u} sind die Knotenverschiebungen.

Unter $isw=6$ wird die numerische Tangente $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i)$ wie folgt berechnet.

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_i(u_1, \dots, u_j + \varepsilon, \dots, u_n) - \mathbf{r}_i(u_1, \dots, u_j - \varepsilon, \dots, u_n)}{2\varepsilon}, \quad \varepsilon = 10^{-6}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} t^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ t^8 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

t^i sind die Spannungen an den Makro-Knoten und werden in der Subroutine **nodeStresses44** berechnet.

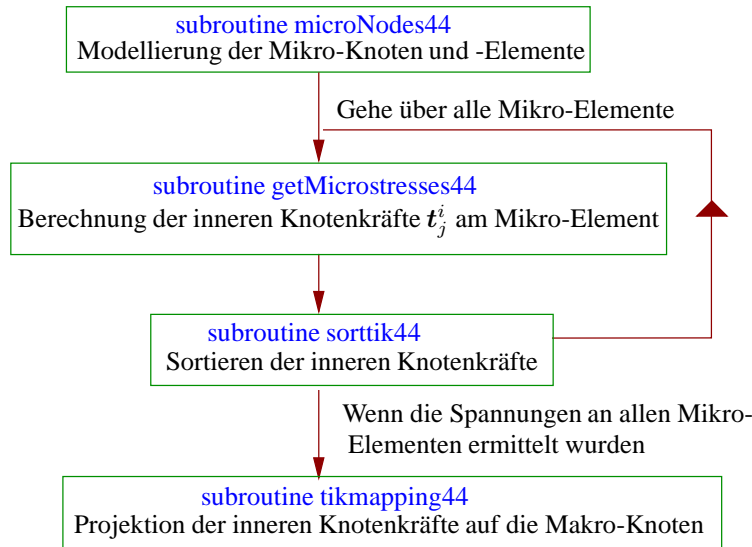


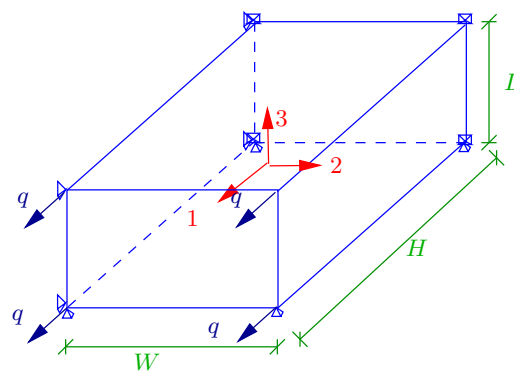
Abbildung 5: Ablaufschema der Subroutine nodeStresses44

3.2 Verifizierung und Patch-Test

Um das implementierte Makro-Element auf seine Richtigkeit überprüfen zu können, werden zwei Verifizierungstests und ein Patch-Test durchgeführt. Es ist erstmal zu überprüfen, ob konstante Spannungen σ und Verzerrungen ε im Element vorhanden sind, und ob die Verschiebungen u linear sind. Der erste Verifizierungstest ist damit erfüllt und die Konvergenz der Lösung ist nachgewiesen. Es ist auch noch zu überprüfen, ob die mittels des Makro-Elementes ermittelten Ergebnisse richtig sind. Somit hat man das Programm auf Implementierungsfehler untersucht. Die Ergebnisse werden mit den mittels eines Standard-8-Knoten-Element (kurz Q1) berechneten Werte verglichen. Das Q1-Element ist ein Quader mit trilinearen Ansatzfunktionen und vollständiger Integration. Die Werte müssen miteinander übereinstimmen, weil die beiden Elemente gegen die analytische Lösung konvergieren. Im zweiten Verifizierungstest wird überprüft, ob die Lösung unabhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade und von der Diskretisierungsart konvergiert. Es können mittels diesem Test andere Fehler detektiert, die aus dem ersten Verifizierungstest nicht erkannt werden konnten. Mit dem Patch-Test soll gezeigt werden, dass konstante Spannungen sowie lineare Verschiebungen darstellbar sind, auch in schiefen Netzen.

3.2.1 Verifizierungstest mit einem Makro-Element

Im ersten Verifizierungstest besteht die Geometrie aus einem einzigen Makro-Element mit den Abmessungen H , W und L , das an drei Seiten eingespannt und in 1-Richtung mittels einer Oberflächenlast q_0 gezogen wird. Die geometrischen und physikalischen Daten sind der Abbildung 6 zu entnehmen.



Geometrie

$W = 4 \text{ mm}$
 $H = 3 \text{ mm}$
 $L = 2 \text{ mm}$

Material

$K = 1000 \text{ MPa}$
 $\mu = 600 \text{ MPa}$
 $\alpha = 2.0$
 $\beta = -1.0$

Belastung

$q = 50 \text{ N/mm}^2$

Abbildung 6: Der erste Verifizierungstest

Das Makro-Element weist den erwarteten homogenen Spannungs- und Verzerrungszustand auf, wie man aus der Abbildung 7 erkennen kann.

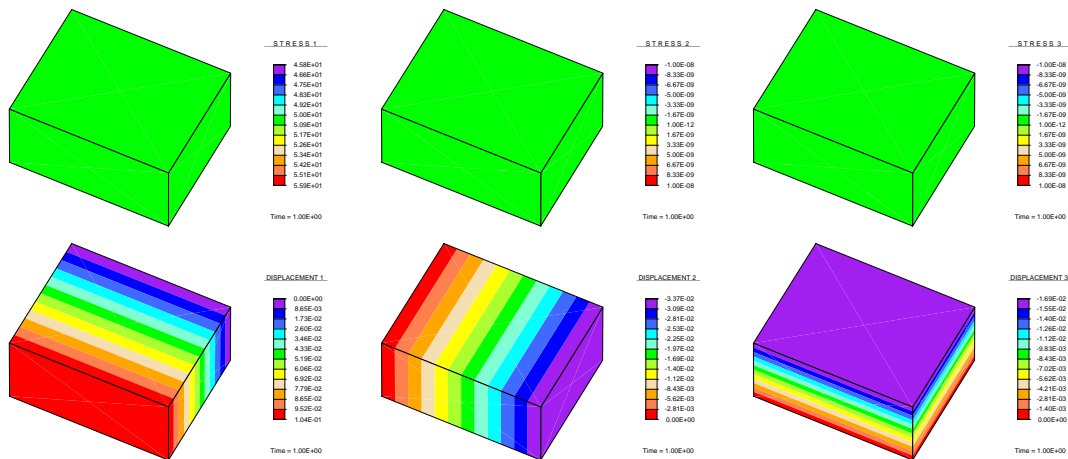
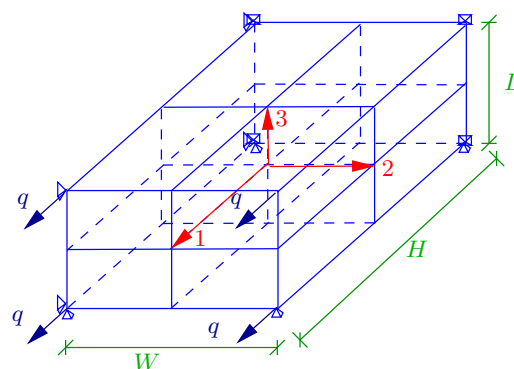


Abbildung 7: Spannungen (1. Reihe) und Verschiebungen (2. Reihe)

Die mittels des Makro-Elementes berechneten Größen sind richtig, da sie mit den Werten übereinstimmen, die mit dem Q1-Element ermittelt worden sind.

3.2.2 Verifizierungstest mit mehreren Elementen

Im zweiten Verifizierungstest wird die Geometrie in acht gerade gleich große Makro-Elemente unterteilt. Alle Größen und Randbedingungen aus dem ersten Verifizierungstest werden übernommen.



Geometrie

$W = 4 \text{ mm}$
 $H = 3 \text{ mm}$
 $L = 2 \text{ mm}$

Material

$K = 1000 \text{ MPa}$
 $\mu = 600 \text{ MPa}$
 $\alpha = 2.0$
 $\beta = -1.0$

Belastung

$q = 50 \text{ N/mm}^2$

Abbildung 8: Der zweite Verifizierungstest

Hierbei erkennt man auch, dass die Spannungen und die Verzerrungen auf dem gesamten Element konstant sind (siehe Abbildung 9). Die Knotenverschiebungen sind identisch mit den Werten aus dem ersten Test. Somit haben wir überprüft, dass die Ergebnisse gegen der analytischen Lösung konvergieren unabhängig davon, wieviel Knoten das gesamte Modell hat.

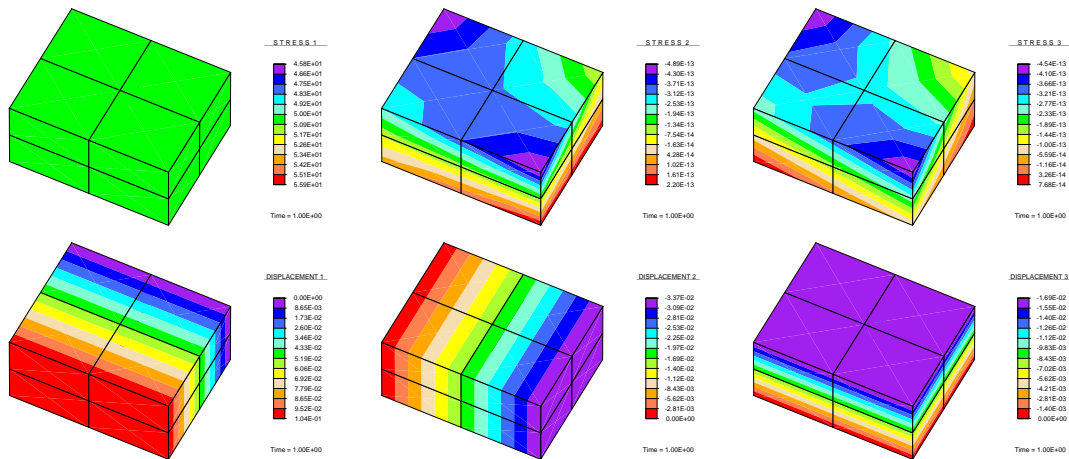


Abbildung 9: Spannungen (1. Reihe) und Verschiebungen (2. Reihe)

3.2.3 Patch-Test mit schiefen Elementen

Im Patch-Test wird die Geometrie in acht schiefe Makro-Elemente unterteilt. Alle Größen und Randbedingungen aus dem ersten Test werden weiterhin übernommen.

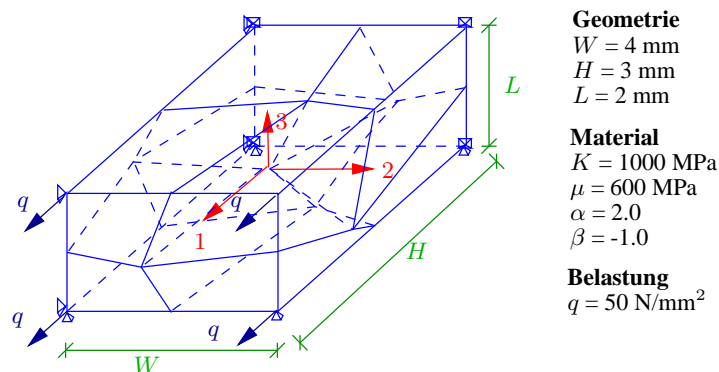


Abbildung 10: Der dritte Patch-Test

In diesem Fall hat man konstante Spannungen und Verzerrungen und lineare Verschiebungen (siehe Abbildung 11). Die Knotenverschiebungen dieses Modells bilden die analytische Lösung exakt ab. Mit Erfüllung des Patch-Testes ist es gewährleistet, dass die Lösung mit dem Makro-Element mit einer anderen Diskretisierungsart gegen die exakte Lösung konvergiert.

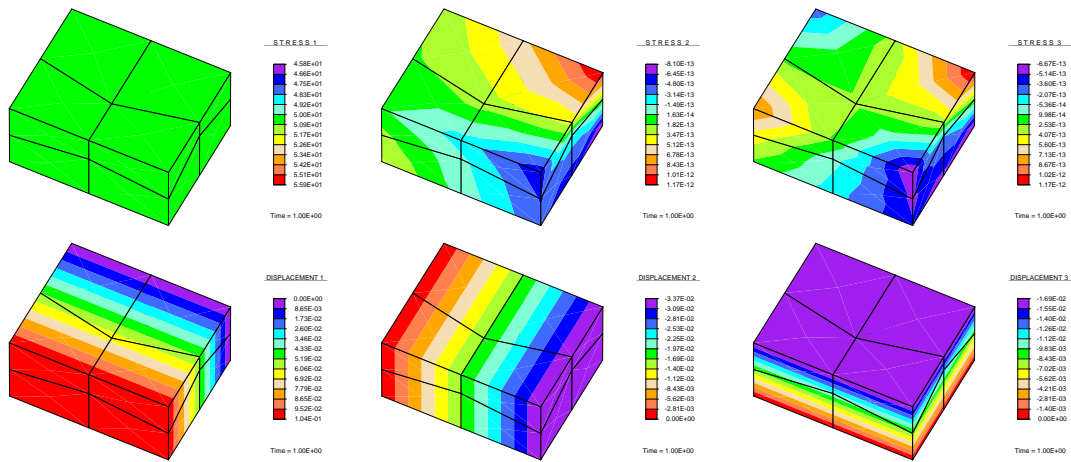


Abbildung 11: Spannungen (1. Reihe) und Verschiebungen (2. Reihe)



Kapitel 4

Makro-Element: Evaluationstests

In diesem Abschnitt wird das Verhalten des Makro-Elementes in verschiedenen kritischen Fällen evaluiert, die Locking oder Hourglassing hervorrufen können. Die Ergebnisse des Makro-Elementes werden mit den Ergebnissen des bereits verwendeten Q1-Elementes, mit denen des Cosserat-Elementes und mit denen eines Standard-27-Knoten-Element (kurz Q2) verglichen. Das Q2-Element ist ein Standard Verschiebungselement mit triquadratischen Ansatzfunktionen und vollständiger Integration. Das Cosserat-Element benutzt eine Direktorformulierung basierend auf der Cosserat-Punkt-Theorie, die in Abschnitt 2.1 beschrieben wird (Siehe z.B. (V) oder (I)). Dabei wird die Verzerrungsenergiefunktion in einen homogenen und einen inhomogenen Anteil aufgeteilt. Die durch inhomogene Deformationen hervorgerufene kinetische Antwort wird durch konstitutive Konstanten berechnet, die mittels analytischer Lösungen an einem rechteckigen Quader unter Biegung, Torsion und Hourglassing bestimmt werden.

4.1 Balkenstrukturen

4.1.1 Schiefvernetzter Balken

Der schiefvernetzte Balken ist ein Kragarm, der an seiner freien Ende in 2-Richtung belastet wird. Die Vernetzungseinheit des Balkens wird bei diesem Test variiert, wobei das Modell und die Randbedingungen nicht verändert werden. Bei diesem Test wird auch die Form der Elemente gesteuert durch den Parameter a (Siehe Abbildung 12). Material- und Geometrieparameter sind in der Abbildung 12 gegeben.

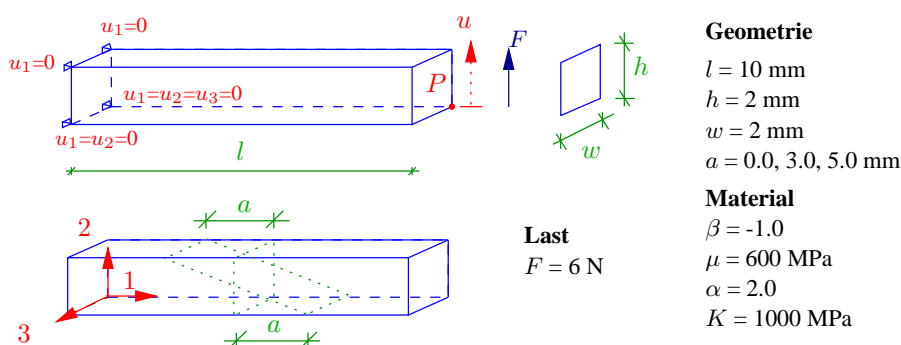


Abbildung 12: Schiefvernetzter Balken

Es wird eine Konvergenzstudie für die Verschiebung des Punktes P (siehe Abbildung 12) in 2-Richtung in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade durchgeführt.

Es werden drei unterschiedliche Werte für den Netzverformungsparameter verwendet, um den Einfluss der Elementform auf die Makro-Element-Ergebnisse zu studieren. Wir beschränken uns auf die Darstellung der für $a = 5 \text{ mm}$ verwendeten Netze:

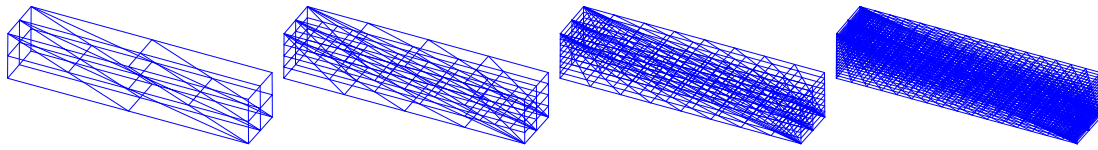


Abbildung 13: Netze des schiefvernetzten Balkens für $a = 5\text{mm}$

Zur Interpretation der Ergebnisse werden die Verschiebung-Freiheitsgrade-Kurven für die vier Elementformulierungen (das Makro-, das Q1-, das Q2- und das Cosserat-Element) dargestellt.

(a) $a = 0.0\text{mm}$

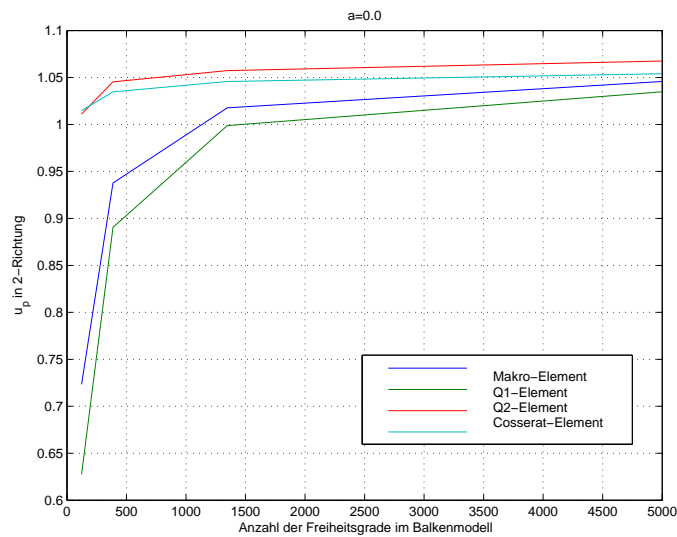


Abbildung 14: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

(b) $a = 3.0\text{mm}$

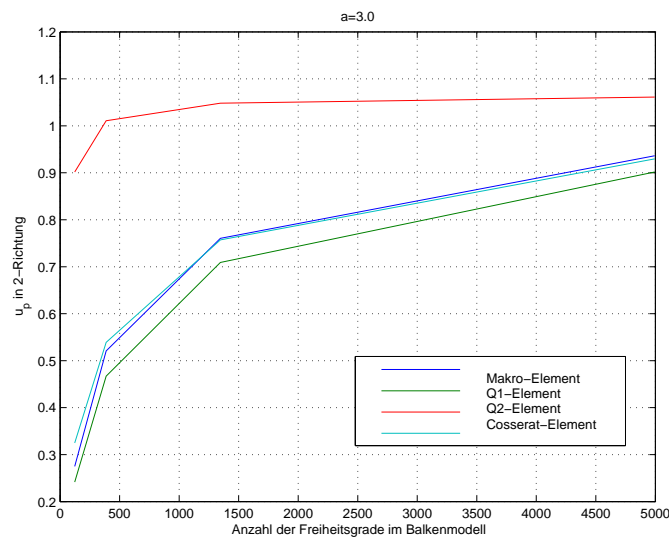


Abbildung 15: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

(c) $a = 5.0$

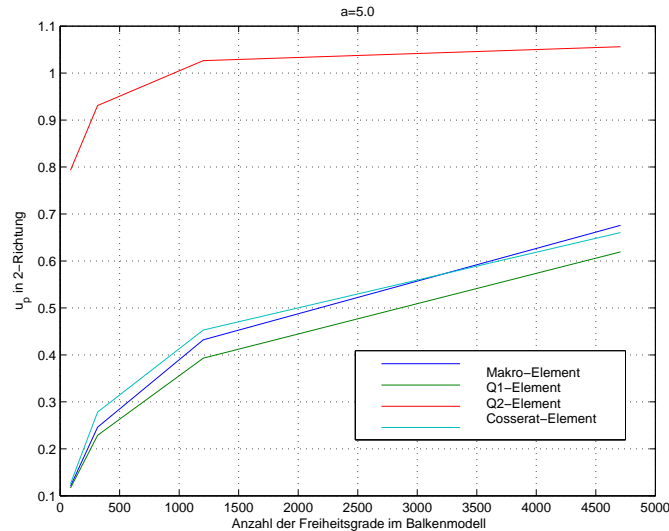


Abbildung 16: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

Man kann aus den Kurven erkennen, dass das Verhalten des Makro-Elementes von der Feinheit des Netzes und von der Form der Elemente (Netzverformungsparameter a) abhängt. Bei dem geraden Netz ($a = 0.0$ mm) verhält sich das Makro-Element gut. Die Ergebnisse konvergieren gegen die exakte Lösung. Schon bei größeren Netzen ist das Ergebnis nah an der auskonvergierten Lösung. Das Element ist weicher als das Q1-Element aber sichtbar steifer als das Q2-Element. Mit größerem Netzverformungsgrad a verschlechtert sich das Verhalten des Makro-Elementes. Es „lockt“ und konvergiert sehr langsam gegen die exakte Lösung. Das Netz des Modells muss stark verfeinert werden, um akzeptable Ergebnisse zu erhalten.

4.1.2 Biegetest

Um ein Biegetest durchführen zu können, wird der Balken mit einem Biegemoment M an seinem freien Ende belastet. Die Modellierung des Biegebalkens wird auf ein Viertel des gesamten Modells reduziert aufgrund der unten abgebildeten Symmetrieebedingungen.

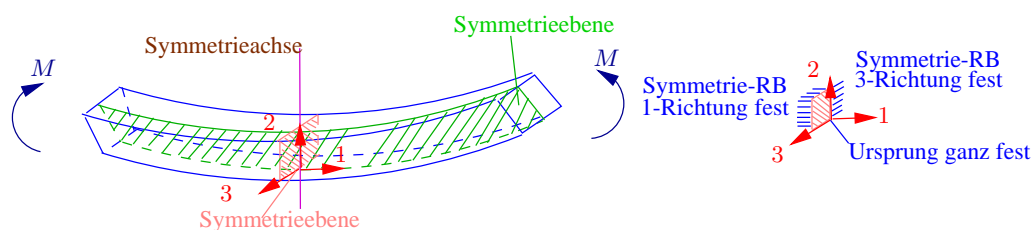


Abbildung 17: Symmetrierandbedingungen

Auch in diesem Test spielen die Netzauflösung und die Netzverformung eine wichtige Rolle. Die Verfeinerung und die Netzverformung des Netzes werden analog zu dem vorherigen Test durchgeführt. Die physikalischen und die geometrischen Größen sind der Abbildung 18 zu entnehmen.

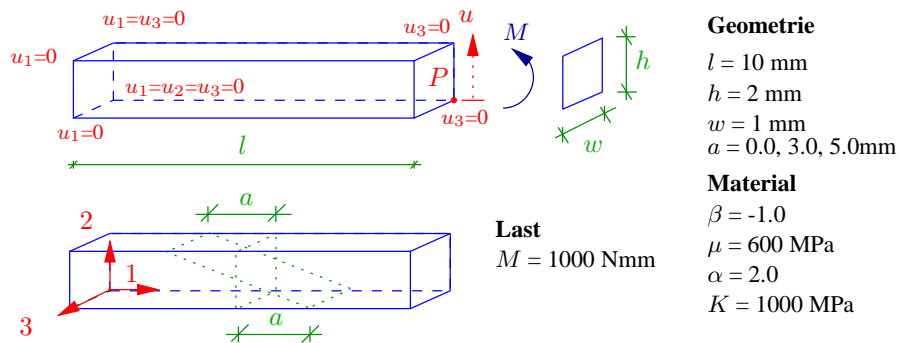
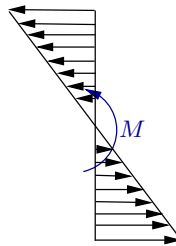


Abbildung 18: Biegebalken

Das Moment M wird als eine lineare veränderliche Spannung über das gesamte profil aufgebracht.


 Abbildung 19: Moment M als lineare Spannungen

Um das Verhalten des Makro-Elements in diesem Belastungsfall interpretieren zu können, wird eine Konvergenzstudie für die Verschiebung des Punktes P (siehe Abbildung 18) über die Anzahl der Freiheitsgrade für drei verschiedene Netzverformungsgrade a durchgeführt.

Im Rahmen dieser Konvergenzstudie werden Netze in verschiedenen Verfeinerungsstufen verwendet. In der folgenden Abbildung ist dies beispielhaft für den Netzverformungsparameter $a = 5 \text{ mm}$ dargestellt:

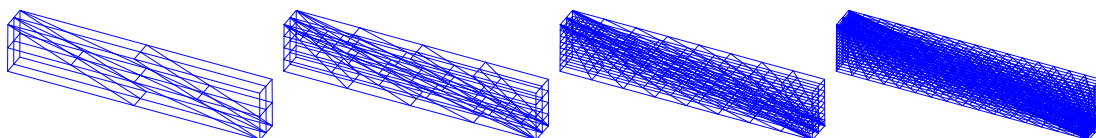


Abbildung 20: Netze des schiefvernetzten Balkens unter Biegebeanspruchung

Die für die anderen Netzverformungsgrade verwendeten Netze werden analog zu den oben dargestellten Netze diskretisiert, d.h. die Anzahl der Elemente im Modell je Netzfeinheit bleiben unverändert, wenn a variiert wird. Es ändert sich nur die Form der Elemente. Zur Evaluation des Makro-Elementverhaltens, werden die Verschiebung-Freiheitsgrade-Kurven abgebildet.

(a) $a = 0.0$

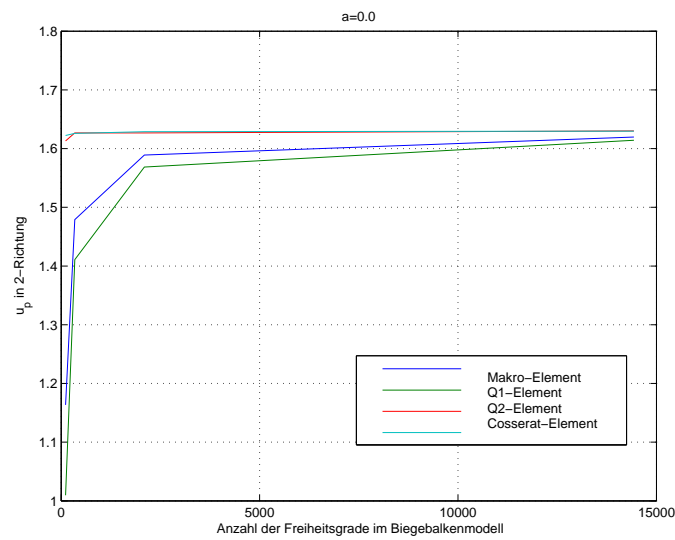


Abbildung 21: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

(b) $a = 3.0$

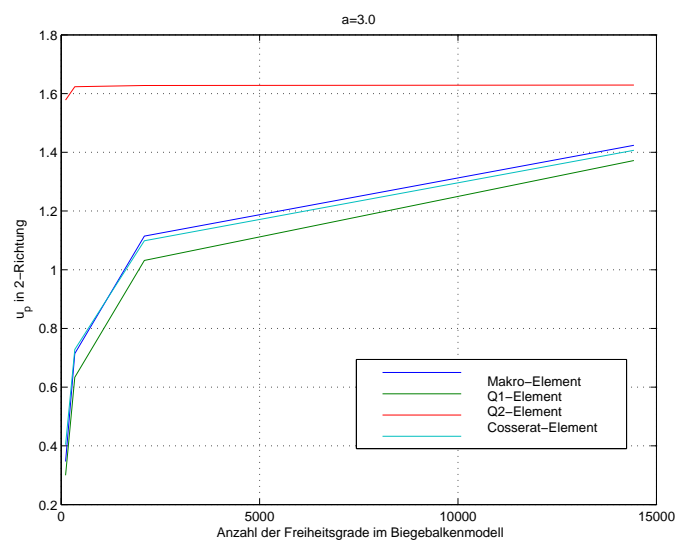


Abbildung 22: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

(c) $a = 5.0$

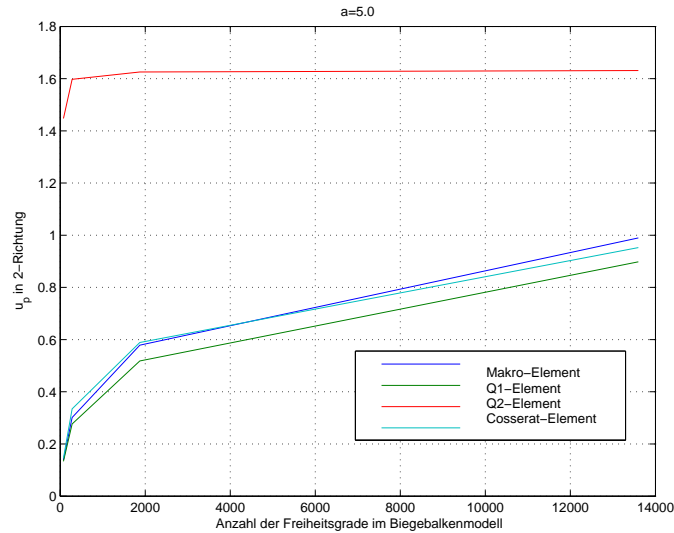


Abbildung 23: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

Es lässt sich in diesem Test das gleiche Elementverhalten wie im ersten Test beobachten. Die Form der Elemente beeinflusst die „Geschwindigkeit“ der Konvergenz und die Lösungsqualität. Das Verhalten des Makro-Elementes bleibt in diesem Test auch besser als das des Q1-Elementes, aber ist weiterhin schlechter als das des Q2-Elementes. Das Cosserat- und das Makro-Element liefern bei dem zweiten ($a = 3\text{mm}$) und bei dem dritten Fall ($a = 5\text{mm}$) beinahe die gleichen Ergebnisse.

4.1.3 Kragarm

Um das Biegeverhalten des Makro-Elementes zu studieren wird der in Abbildung 24 Kragarm in 2-Richtung belastet und mit unterschiedlich feinen Netzen diskretisiert. In diesem Fall führen wir eine Konvergenzstudie für die Durchbiegung im Punkt P in 2-Richtung über die Anzahl der Freiheitsgrade im gesamten Modell durch. Die Diskretisierungsfeinheit des Netzes wird variiert. Alle physikalischen und geometrischen Informationen für diesen Test sind in der Abbildung 24 gegeben.

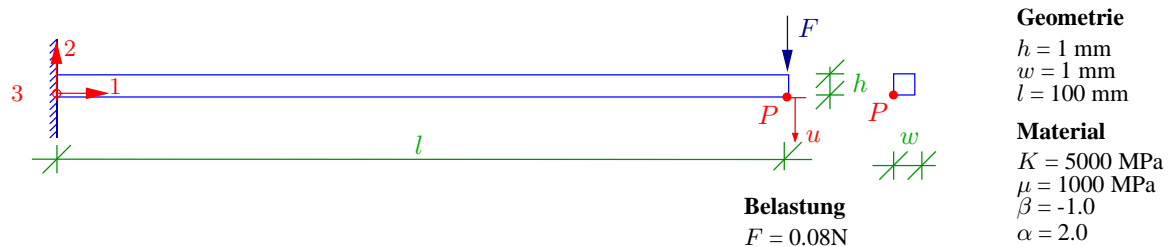


Abbildung 24: Kragarm

Die folgenden Modelldiskretisierungen wurden für die Konvergenzstudie verwendet. Um die Diskretisierung anschaulich abbilden zu können, ist die Länge des Kragarms für die in Abbildung 25 dargestellten Netze auf 10mm verkürzt worden. Die Berechnung erfolgt aber mit der gesamten Länge ($l = 100\text{mm}$):

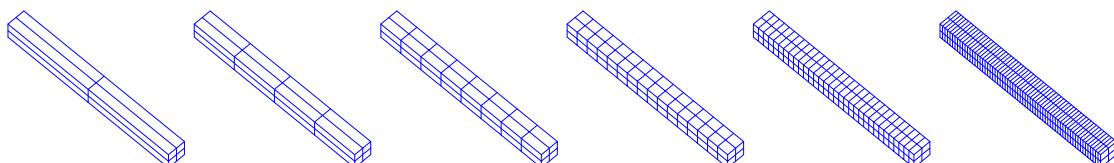


Abbildung 25: Netze des Kragarms

Der deformierte Kragarm ist in Abbildung ??:

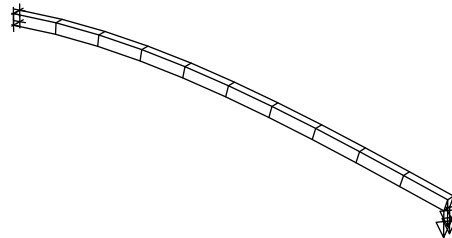


Abbildung 26: Deformierter Kragarm

Die Konvergenzstudie liefert die folgenden Verschiebung-Freiheitsgrade-Kurven. Die Q2-Element-Kurve ist deswegen nicht für alle Freiheitsgrade aufgetragen, weil die Verformung der Q2-Elemente für die feineren Netze zu Durchdringungen geführt hat, die zum Abbruch der Berechnung führten.

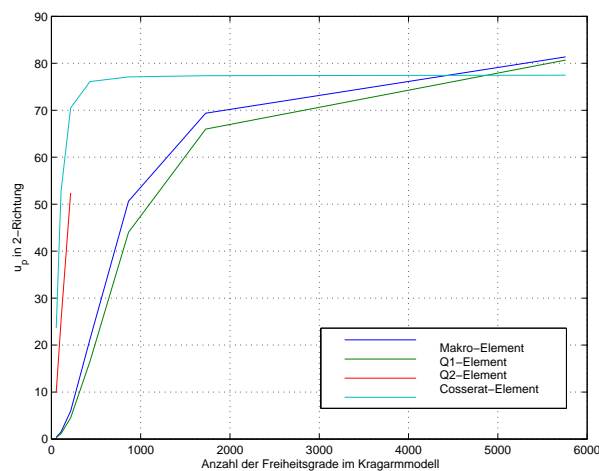


Abbildung 27: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

Es lässt sich das bisher beobachtete Verhalten des Makro-Elementes bestätigen. Die Ergebnisse sind zufriedenstellend, da die Elemente in der Ausgangskonfiguration exakt quaderförmig sind. Bei ca. 4500 Freiheitsgraden (128 Elemente in Längsrichtung) verhält sich das Makro-element besser als das Cosserat-Element, und es liefert für alle Netze bessere Ergebnisse als das Q1-Element.

4.2 Dünne Strukturen

4.2.1 Durchbiegung einer Platte

Ein Viertel einer eingespannten Platte wird modelliert, die durch eine Kraft F an dem Punkt P belastet wird. Das Modell und die physikalischen und geometrischen Daten werden in der Abbildung 28 dargestellt.

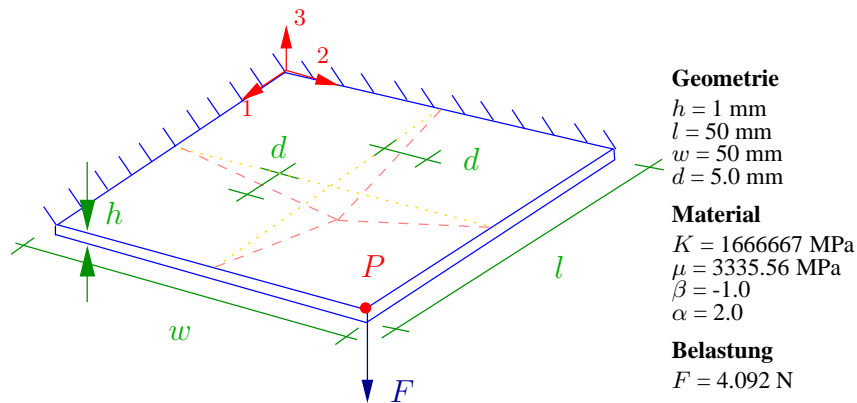


Abbildung 28: Durchbiegung einer Platte

Eine Konvergenzstudie für die Verschiebung des Punktes P in 3-Richtung über die Anzahl der Freiheitsgrade wird durchgeführt. Die verwendeten Netze sind unten dargestellt:

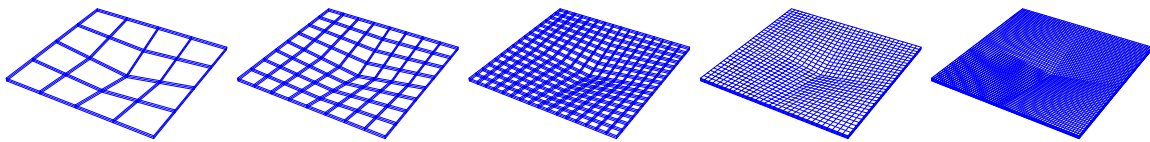


Abbildung 29: Netze des Plattenmodells

Das Ergebnis der Konvergenzstudie:

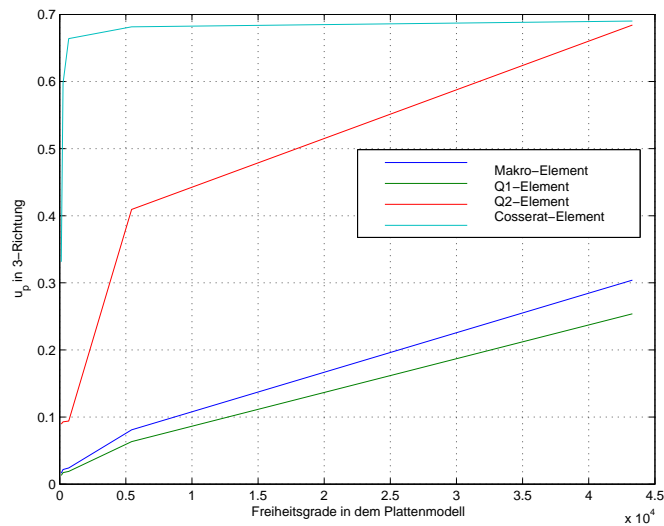
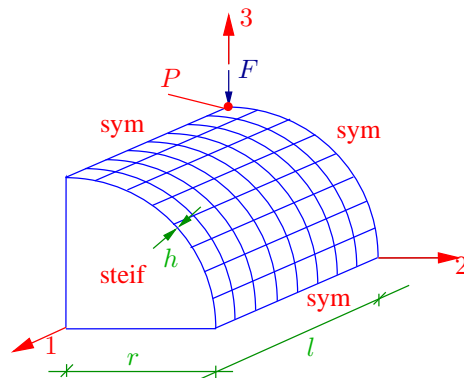


Abbildung 30: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

Hier sieht man, dass das Makro-Element genauso wie das Q1-Element sehr stark „lockt“. Es besteht ein großer Unterschied zu dem Cosserat- und dem Q2-Element, die sehr schnell gegen die Lösung konvergieren.

4.2.2 Eingespannte Schale

Ein Achtel eines eingespannten Zylinders mit steifen Bodenflächen wird modelliert. Der Zylinder wird in seiner Mitte mit einer Einzellast F belastet. Die geometrischen und die physikalischen Angaben sind in der Abbildung 31 gegeben.



Geometrie

$h = 3 \text{ mm}$
 $r = 300 \text{ mm}$
 $l = 300 \text{ mm}$

Material

$K = 2500000 \text{ MPa}$
 $\mu = 1153846 \text{ MPa}$
 $\beta = -1.0$
 $\alpha = 2.0$

Belastung

$F = 1 \text{ N}$

Abbildung 31: Eingespannte Schale

Eine Konvergenzstudie für die auf die analytische Lösung (1.8248810^{-5}) normierte Verschiebung des Punktes P wird durchgeführt, wobei die Netzdiskretisierung verfeinert wird. Die folgenden Netze werden für die Studie verwendet:

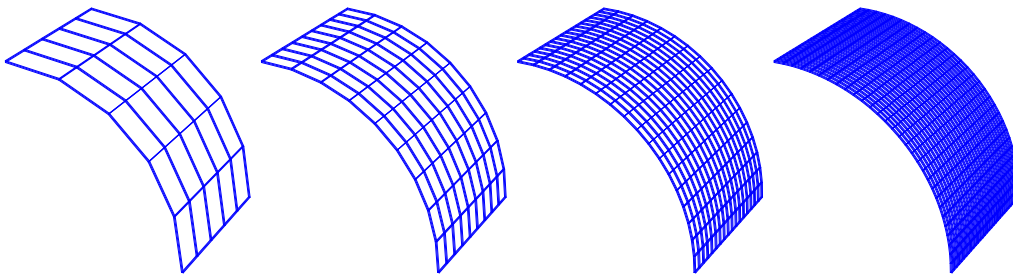


Abbildung 32: Netze des Schalenmodells

Unten ist das Verformungsverhalten der Schale für diesen Belastungsfall abgebildet, wobei die Verformungen mit einem Faktor von ca. 100000 skaliert sind.

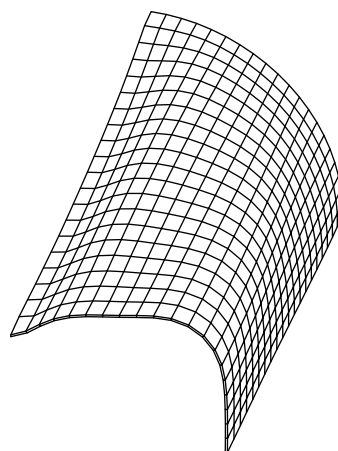


Abbildung 33: Verformtes Schalenmodell

Die Konvergenzstudie liefert die unten abgebildeten Kurven:

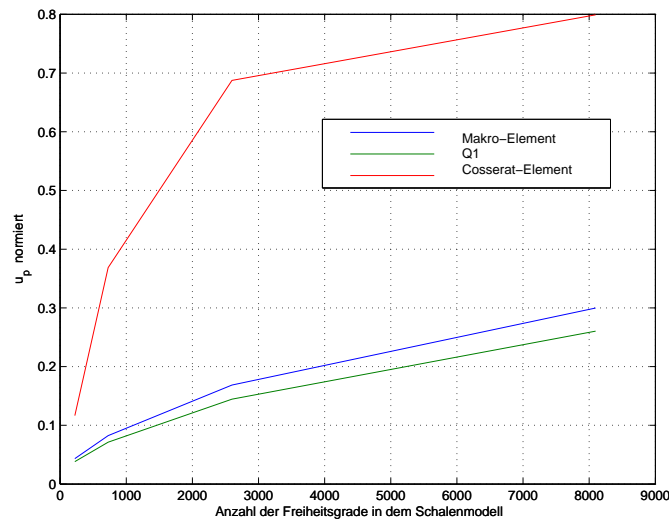


Abbildung 34: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

Für solche dünnen Strukturen liefert das Makro-Element auch für sehr feine Netze keine vernünftige Lösung. Es verhält sich wie das Q1-Element und wird bei der Berechnung durch den Locking-Effekt gehindert.

4.2.3 Cola-Dose

Ein Achtel einer Cola-Dose wird modelliert. Die Dose wird an der oberen Mitte durch eine Oberflächenlast q belastet. Die notwendigen Angaben für das Modell sind in der Abbildung 35 gegeben.

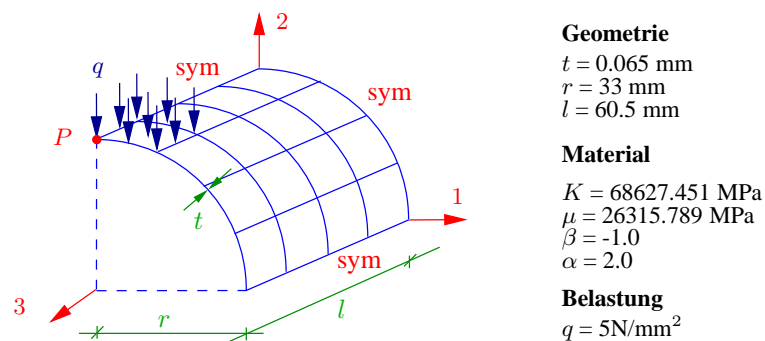


Abbildung 35: Cola-Dose

Es wird das Konvergenzverhalten des Makro-Elementes bezüglich der Verschiebung des Punktes P in 2-Richtung über die Anzahl der Freiheitsgrade im gesamten Modell studiert. Die folgenden Netzdiskretisierungen werden benutzt:

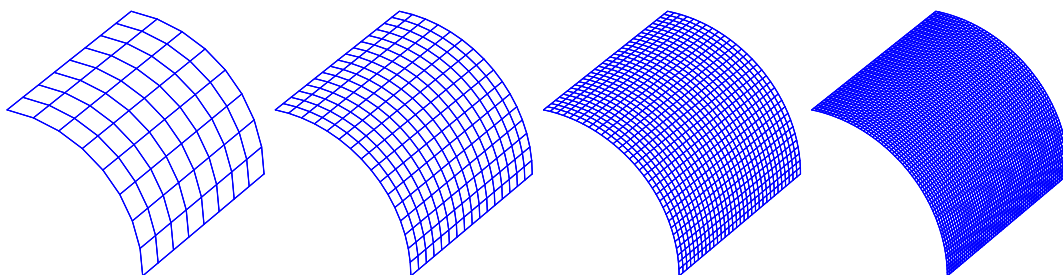


Abbildung 36: Netze der Cola-Dose

Die Cola-Dose verformt sich wie in Abbildung 37 gezeigt:

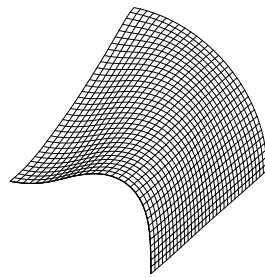


Abbildung 37: Verformte Cola-Dose

Aufgrund der gekrümmten Form der Cola-Dose liefern die Hauptspannungen eine anschauliche Darstellung des Modellverhaltens. Es lässt sich beobachten, dass die größten Spannungen, wie man es erwarten würde, an der Belastungsstelle auftreten.

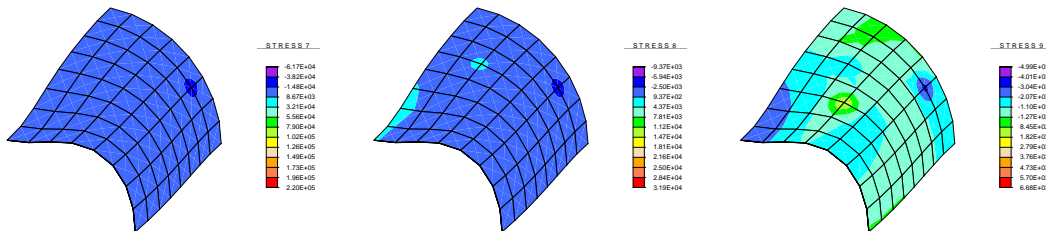


Abbildung 38: Hauptspannungen der Cola-Dose

Die durchgeführte Konvergenzstudie liefert die folgenden Verschiebung-Freiheitsgrade-Kurven für das Makro-Element, das Q1- und das Cosserat-Element:

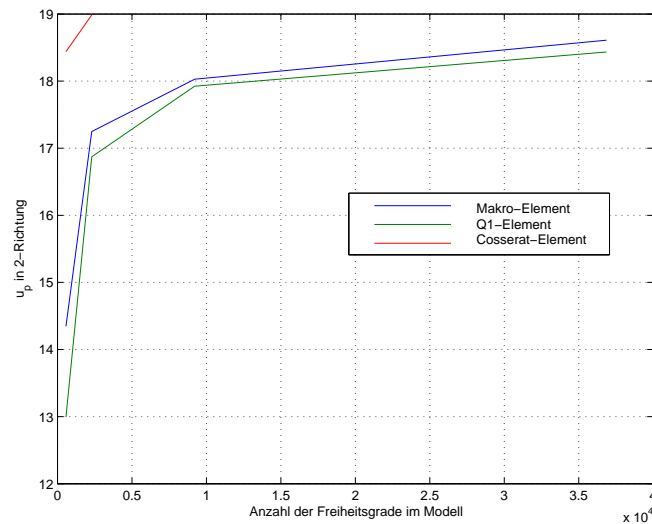


Abbildung 39: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

Es genügt in diesem Fall, die Ergebnisse des Cosserat-Elementes für die größten Auflösungen darzustellen, da man bei diesen Netzen schon erkennen kann, wie die Leistung des Makro-Elementes im Vergleich zu dem Cosserat-Element aussieht. Das Makro-element liefert in diesem Fall auch ein besseres Konvergenzverhalten als das Q1-Element aber ein wesentlich schlechteres als das Cosserat-Element.

4.3 Ein rechteckiger Block unter Druckbelastung

Ein dünner Block aus einem nahezu inkompressiblen Material wird durch eine Oberflächenlast belastet. Der Block ist verschieblich gelagert und kann sich dementsprechend unter der Druckbelastung verbreitern. Alle geometrischen und physikalischen Daten dieses Tests sind in der Abbildung 40 gegeben.

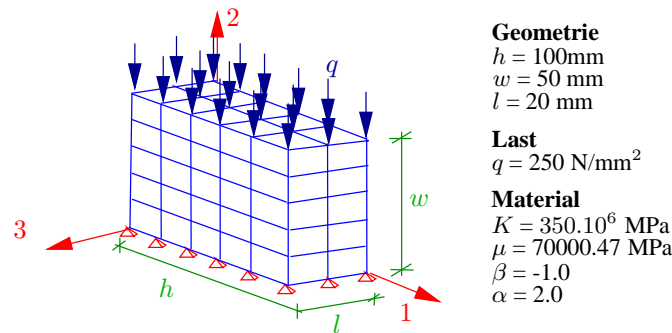


Abbildung 40: Inkompressibler Block unter Druckbelastung

Ziel dieses Tests ist, das Verhalten des Makro-Elementes auf Hourglassing zu überprüfen. Es treten in diesem Test große Deformationen auf, die die klassischen Hourglass-Moden hervorrufen können. Sobald ein Nulleigenwert in der tangentialen Steifigkeitsmatrix auftritt, kann eine Eigenwertanalyse durchgeführt werden, die Aufschluss über das Vorliegen eines Hourglass-Mode gibt. Wie die Geometrie, das Material und die Randbedingungen anzeigen, liegt hier ein rein homogenes Spannungszustand vor, bei dem keine Instabilitäten auftreten dürfen. Wir führen eine Eigenwertanalyse mit dem Makro-Element durch, um auftretende Nulleigenwerte auf Hourglassing zu untersuchen. Als Vergleichselement, wird ein unterintegriertes (1-Gaußpunkt-Integration) Q1-Element gewählt.

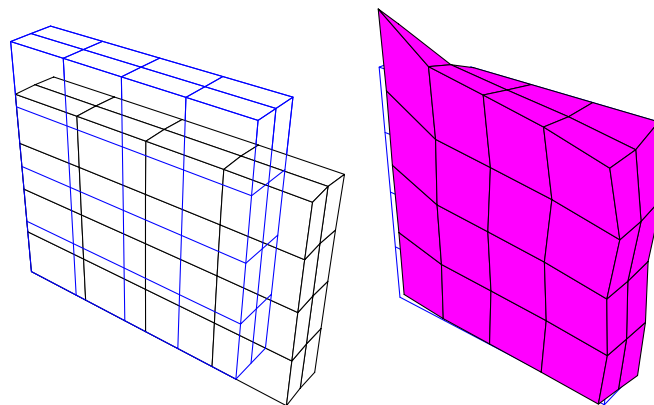


Abbildung 41: Eigenwertanalyse Makro-Element (links) und Q1-Element (rechts)

Die obigen Bilder stellen zwei Eigenvektoren der behandelten Elementen dar. Das Hourglassing-Effekt tritt bei dem unterintegrierten Q1-Element allerdings aber nicht bei dem Makro-Element auf. Es treten außerdem bei dem Makro-Element keine Nulleigenwerte auf. Das neu entwickelte Element hat diesen Test bestanden. Es kann nicht verallgemeinert werden, dass das Makro-Element in allen Fällen kein Hourglassing hervorruft. In diesem Sinne müssen andere Tests durchgeführt werden, um mögliches Hourglassing zu detektieren.

Kapitel 5

Erweiterung um plastisches Materialverhalten

5.1 Die Theorie

5.1.1 Kinematik

Die Idee bei der Berechnung der Spannungen am Makro-Element bleibt im Grunde genommen die gleiche. Es wird hier versucht die nichtlinearen plastischen Verformungen zu berücksichtigen. Da es um große plastische Deformationen geht, kann man nicht mehr von einer Addition der elastischen und plastischen Anteile der Verzerrungstensoren ausgehen. D.h. die folgende Gleichung kann in diesem Fall nicht verwendet werden.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (5.1)$$

Eine Alternative zur einfachen Berechnung der nichtlinearen plastischen Verformung besteht darin, eine Zwischenkonfiguration einzuführen, die die elastische Antwort des Materials charakterisiert. Diese Idee wurde im Rahmen einer mikromechanischen Beschreibung der kristallinen Metallplastizität entwickelt. Durch den eben erwähnten Ansatz lässt sich der Deformationsgradient in einem multiplikativen Split aufstellen:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^e(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t), \quad (5.2)$$

wobei \mathbf{F}^e die Deformationen infolge Dehnung und Rotation des Kristallgitters und \mathbf{F} die gesamten Deformationen beschreiben.

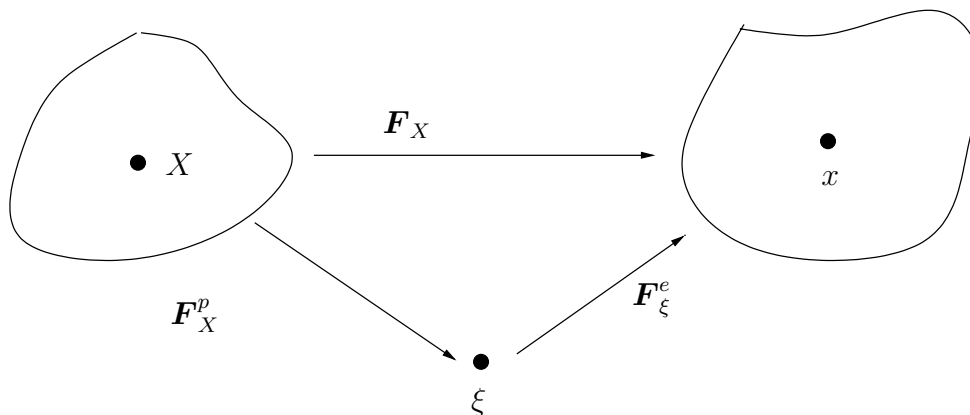


Abbildung 42: Multiplikativer Split des Deformationsgradienten

Mit den eingeführten Größen \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^p , lassen sich die elastischen und plastischen kinematischen Größen der Momentan- und der Referenzkonfiguration formulieren:

$$\mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \mathbf{F}^p, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}. \quad (5.4)$$

Da es sich hier um eine nichtlineare Theorie handelt, verliert der additive Split des Verzerrungstensors ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{dev} + \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}$) seine physikalische Bedeutung. Aus diesem Grund müssen die isochoren und die deviatorischen Deformationsanteile neu definiert werden. Sie lassen sich mittels des Deformationsgradienten wie folgt beschreiben:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^{1/3} \overline{\mathbf{F}}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{J} = det \mathbf{F}, \quad (5.6)$$

wobei \mathbf{J} die lokalen Volumenänderungen beschreibt und $\overline{\mathbf{F}}$ den volumenerhaltenden Anteil des Deformationsgradienten darstellt.

5.1.2 Das plastische Modell

In einem nächsten Schritt, muss ein plastisches Modell formuliert werden. Im Rahmen dieser Arbeit, wird die von-Mises-Fließtheorie, eine einfache Formulierung, verwendet. Die von-Mises-Fließtheorie setzt voraus, dass die Spannungsantwort isotrop ist und dass das plastische Fließen isochor ist ($det \mathbf{F}^p = 1$).

Die Spannungsantwort (ie Kirchhoff-Spannungen $\boldsymbol{\tau}$) lässt sich durch die Verzerrungsenergiefunktion berechnen. Es gilt:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^e p \mathbf{1} + \mathbf{s}, \quad (5.7)$$

$$p := \frac{\kappa (\mathbf{J}^{e2} - 1)}{2 \mathbf{J}^e}, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{s} := dev[\boldsymbol{\tau}] = \mu dev[\mathbf{b}^e], \quad (5.9)$$

$$\overline{\mathbf{b}}^e = \mathbf{J}^{e-\frac{2}{3}} \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}, \quad (5.10)$$

$$\overline{\mathbf{C}}^p = \overline{\mathbf{F}}^{pT} \overline{\mathbf{F}}^p, \quad (5.11)$$

wobei μ der Schubmodul und κ der Kompressionsmodul sind.

Wir beschränken uns auf die lineare isotrope Verfestigung des Materials und verwenden die folgende Fließbedingung (Mises-Huber-Fließbedingung):

$$f(\boldsymbol{\tau}, \alpha) := \|dev[\boldsymbol{\tau}]\| + \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + k\alpha), \quad (5.12)$$

σ_y ist die Fließgrenze, k ist der Verfestigungsmodul und α ist der Verfestigungsparameter. Die Definition der Fließbedingung reicht nicht aus, um das plastische Modell vollständig zu beschreiben. Eine Fließregel muss mittels des Prinzips der maximalen plastischen Dissipation entwickelt werden. Die zugehörige Fließregel lautet wie folgt:

$$\frac{d}{dt}(\overline{\mathbf{C}}^p)^{-1} = -\frac{2}{3}\gamma((\mathbf{C}^p)^{-1} : \mathbf{C})\mathbf{F}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{F}^{-T}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{n} := \mathbf{s} / \|\mathbf{s}\|, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{s} = dev[\boldsymbol{\tau}]. \quad (5.15)$$

Als letztes, geht man davon aus, dass die Evolution der Verfestigungsvariable (sie kann auch als innere Variable betrachtet werden) durch die folgende Evolutionsgleichung gegeben ist:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma, \quad (5.16)$$

wobei γ der Konsistenzparameter ist, der durch die Kuhn-Tucker-Be- und Entlastungsbedingung gegeben ist:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = 0. \quad (5.17)$$

Mit der folgenden Konsistenzbedingung ist die Formulierung des Modells abgeschlossen:

$$\gamma \frac{df(\boldsymbol{\tau}, \alpha)}{dt} = 0. \quad (5.18)$$

5.1.3 Numerische Umsetzung des plastischen Modells

Die Gleichungen (5.11) und (5.14) beschreiben das Evolutionsverhalten des Modells über die Zeit. Sie werden mit Hilfe einer Euler-Rückwärts-Zeitintegration diskretisiert. Man erhält die folgenden Gleichungen:

$$\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{p-1} - \bar{\mathbf{C}}_n^{p-1} = -\frac{2}{3} \Delta\gamma [\mathbf{C}_{n+1}^{p-1} : \mathbf{C}_{n+1}] \mathbf{F}_{n+1}^{-1} \mathbf{n}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}^{-T}, \quad (5.19)$$

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\gamma. \quad (5.20)$$

Durch Umformungen und mit Benutzung der unter (5.1.2) definierten Größen, bekommt man auch die folgenden diskreten Evolutionsgleichungen:

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e = \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \bar{\mathbf{b}}_n^e \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^T - \frac{2}{3} \Delta\gamma [\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e] \mathbf{n}_{n+1}, \quad (5.21)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{n+1} := \bar{\mathbf{F}}_{n+1} \bar{\mathbf{F}}_n^{-1}, \quad (5.22)$$

$$\mathbf{n}_{n+1} := \mathbf{s}_{n+1} / \|\mathbf{s}_{n+1}\|, \quad (5.23)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} := dev[\boldsymbol{\tau}_{n+1}]. \quad (5.24)$$

Wir haben bis jetzt das gesamte plastische Modell diskretisiert. Die Lösung des numerischen Problems erfolgt mittels des Radial-Return-Mapping -Algorithmus. Das Verfahren funktioniert folgendermaßen: Zunächst geht man von reinen elastischen Verformungen aus. Man „friert“ das plastische Fließen ein. Dabei bleibt die vordefinierte Zwischenkonfiguration unverändert. Dieser Schritt wird als Prädiktorschritt bezeichnet und wird durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{pr} := p_{n+1} \mathbf{J}_{n+1} \mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1}^{pr}, \quad (5.25)$$

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{epr} := \bar{\mathbf{f}}_{n+1} \bar{\mathbf{b}}_n^e \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^T, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{pr} := \mu dev[\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{epr}], \quad (5.27)$$

$$p_{n+1} := \frac{\kappa}{2} (\mathbf{J}_{n+1}^{e2} - 1) / \mathbf{J}_{n+1}^e, \quad (5.28)$$

$$\alpha_{n+1}^{pr} := \alpha_n. \quad (5.29)$$

Hier steht pr für den Prädiktorschritt. Mit diesen definierten Größen, muss man überprüfen, ob die Fließbedingung erfüllt ist. D.h. es muss gelten, dass:

$$f_{n+1}^{pr}(\boldsymbol{\tau}, \alpha) \leq 0. \quad (5.30)$$

Wenn dies der Fall ist, dann gilt es, dass $\Delta\gamma = 0$ und die Kuhn-Tucker-Bedingung damit erfüllt ist. Die im Prädiktorschritt berechneten Größen sind die tatsächlichen Lösungen zum Zeitpunkt t_{n+1} .

Wenn die Fließbedingung aber verletzt ist, d.h. es gilt, dass:

$$f_{n+1}^{pr}(\boldsymbol{\tau}, \alpha) > 0, \quad (5.31)$$

dann gilt es, dass die berechneten Spannungen $\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{pr}$ nicht zulässig sind und nicht als Lösung angenommen werden können:

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} \neq \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{pr}, \quad (5.32)$$

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e \neq \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{epr}. \quad (5.33)$$

Es lässt sich feststellen, dass $\Delta\gamma > 0$ sein muss, um die obigen Gleichungen erfüllen zu müssen. Um die richtigen Größen zum Zeitpunkt t_{n+1} ermitteln zu können, führt man einen sogenannten Korrektorschritt durch. Die Korrektur der falsch ermittelten Größen erfolgt nach dem Return-Mapping-Verfahren. Es erfolgt anschaulich ein Zurückbringen aller Größen auf dem Fließbereich.

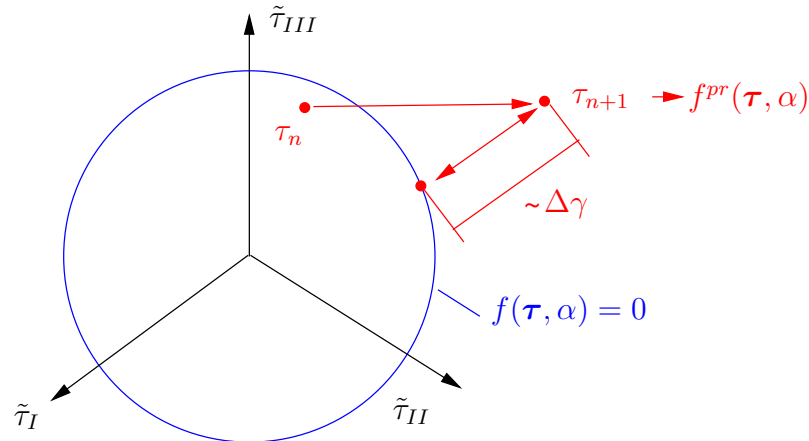


Abbildung 43: Radial Return Mapping

Die neuen Größen werden wie folgt berechnet:

$$\Delta\gamma = \frac{f(\tau, \alpha)_{n+1}^{pr}/2\bar{\mu}}{1 + k/3\bar{\mu}}, \quad (5.34)$$

$$\bar{\mu} := \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{epr})\mu, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{n} := \mathbf{s}_{n+1}^{pr} / \|\mathbf{s}_{n+1}^{pr}\|, \quad (5.36)$$

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{pr} - 2\bar{\mu}\Delta\gamma\mathbf{n}, \quad (5.37)$$

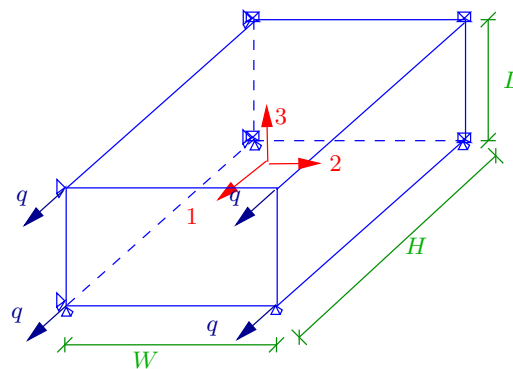
$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma, \quad (5.38)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \mathbf{J}_{n+1}p_{n+1}\mathbf{1} + \mathbf{s}_{n+1}. \quad (5.39)$$

5.2 Implementierung und Verifizierung

Das in dem ersten Teil implementierte Element wird um den oben beschriebenen aus (II) entnommenen Return-Mapping-Algorithmus erweitert. Die Berechnung erfolgt in diesem Fall auch mit Hilfe der numerischen Tangente, obwohl sie für plastische Verformungen nicht gut geeignet ist. Das Neo-Hooke-Material wird hier als elastisches Material verwendet.

Die Ergebnisse des Elementes werden zunächst geprüft. Wir verwenden dazu den in Abbildung 44 vorgestellten einfachen Patch-Test. Alle geometrischen und physikalischen Größen sowie die Materialparameter für das Neo-Hooke-Material sind in der selben Abbildung gegeben.


Geometrie

$W = 4 \text{ mm}$
 $H = 3 \text{ mm}$
 $L = 2 \text{ mm}$

Material

$K = 171818 \text{ MPa}$
 $\mu = 81000 \text{ MPa}$
 $k = 50000 \text{ MPa}$
 $\beta = -2.0$
 $\sigma_{y0} = 400 \text{ MPa}$

Belastung
elastisch

1) $q = 50 \text{ MPa}$

elasto-plastisch

2) $q = 500t, t \in [0, 1]$

3) $q = 500 - 500t, t \in [1, 2]$

Abbildung 44: Der plastische Patch-Test

Zuerst wird das Element mit einer Spannung von $50 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ belastet. Da diese Spannung die Fließspannung nicht überschreitet, muss sich das Element elastisch verformen und die gleichen Ergebnisse wie das elastische Makro-Element unter den gleichen Bedingungen liefern. Und tatsächlich, die Fließbedingung wird bei der Berechnung immer erfüllt. Die Knotenverschiebungen des elasto-plastischen Makro-Element stimmen mit den Verschiebungen des elastischen Makro-Element überein. Danach wird das Element einmal belastet bis die Fließspannung überschritten ist und danach elastisch entlastet. Das Element plastiziert wie erwartet ab einer Spannung von $400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Die Plastizität wird durch die verletzte Fließbedingung detektiert. In der folgenden Abbildung, sind die Kräfte $F = 2\sigma$ aufgetragen.

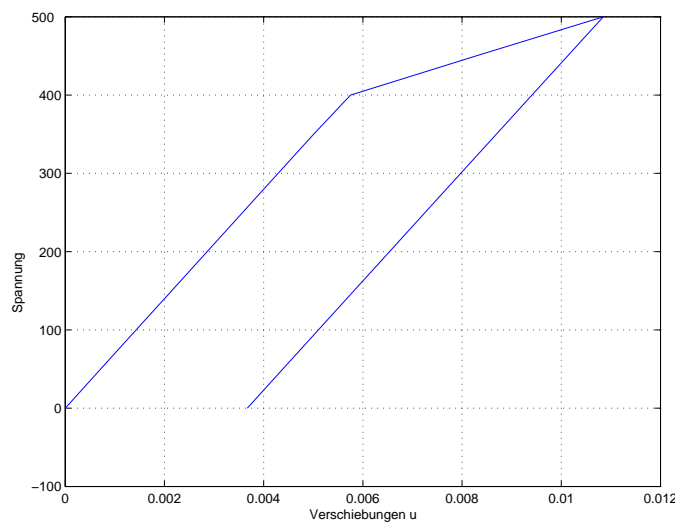


Abbildung 45: Be- und Entlastungskurve

Die Steigung der Kurve im plastischen Bereich hängt von dem isotropen Verfestigungsparameter k ab.

5.3 Evaluationstest: Kragarm mit plastischen Verformungen

Die Stabilität und die Lösungsqualität des elastoplastischen Makro-Elementes wird in dem Kragarmtest studiert, der in Abbildung 46 dargestellt ist. Wir benutzen hier ebenfalls das Neo-Hooke-Material mit den gleichen Materialparametern wie für den plastischen Patch-Test.

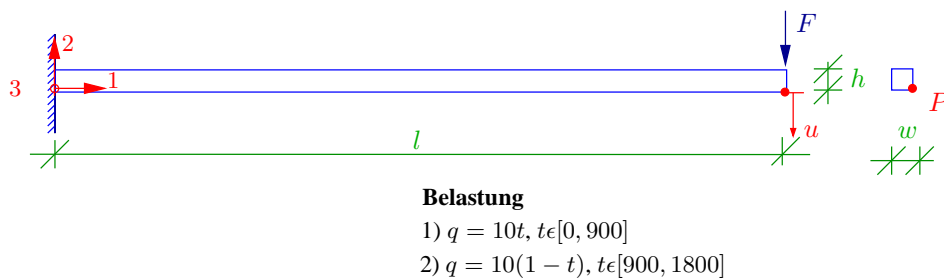


Abbildung 46: Kragarm mit plastischen Verformungen

Der Test besteht darin, den Kragarm bis zur Überschreitung der Fließspannung zu belasten und dann elastisch zu entlasten. Dann wird die Lösungsqualität des Makro-Elementes mittels einer Konvergenzstudie über die Anzahl der Freiheitsgrade überprüft. Ein Be- und Entlastungsversuch des Kragarms mittels einer transienten Last ergibt für die vier Elemente die folgenden Kurven:

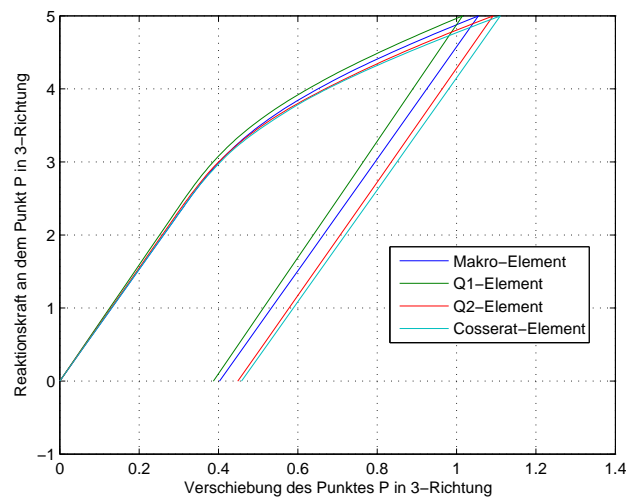


Abbildung 47: Be-Entlastungszyklus des Kragarms

Das Makro-Element gibt ein exaktes elastisches Verhalten zurück, wie auch alle anderen Elemente. Die Ergebnisse unterscheiden sich in dem nichtlinear plastischen Bereich, wobei das Makro-Element nicht optimal gegen die exakte Lösung konvergiert. Die plastischen Phänomene wie die Überschreitung der Fließgrenze, die Verfestigung und die plastischen Dehnungen werden im Rahmen dieses Beispiels beobachtet.

Diese Beobachtung lässt sich auch im Rahmen der folgenden Konvergenzstudie bestätigen:

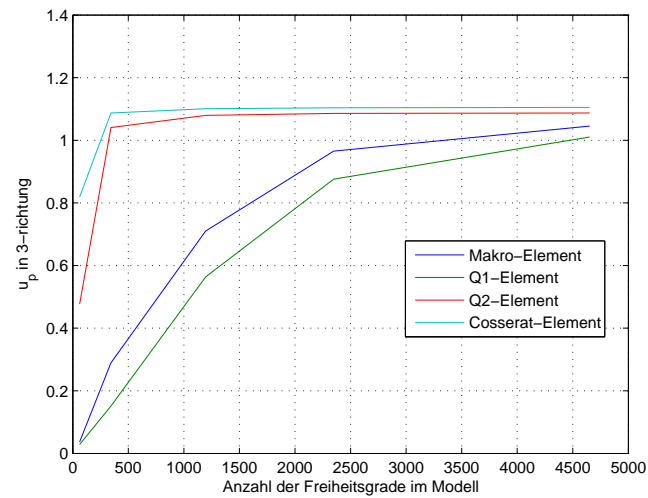


Abbildung 48: Konvergenzstudie-Verschiebung des Punktes P über die Anzahl der Freiheitsgrade

Wir stellen hier das gleiche Elementverhalten und die gleiche Klassifizierung fest, die unter den elastischen Versuchen vorgewiesen wurde. Das Makro-Element besitzt ein besseres Konvergenzverhalten als das Q1-Element und ein schlechteres als das Q2- und das Cosserat-Element.



Kapitel 6

Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit bestand darin, das Verhalten eines neu entwickelten finiten Elementes, das Makro-Element, für besondere Belastungsfälle zu studieren. Die Theorie für die Berechnung der Spannungen am Element basiert auf die Cosserat-Point-Theorie, die durch neue Kinematikansätze charakterisiert ist. Das Elementverhalten wurde speziell für nichtlinear elastische und plastische Deformationen betrachtet. Die zugrundeliegende Theorie wurde im Rahmen dieser Arbeit ausführlich dargestellt. Anschließend wurde die Theorie numerisch umgesetzt und in das Finite-Element-Analysis-Programm FEAP implementiert. Fokussierend auf zwei Problemen, Locking und Hourglassing, wurde eine Reihe von Tests durchgeführt.

Das Makro-Element wurde zunächst für die numerische Lösung von elastischen Belastungsfällen von klassischen Balkenbeispielen, dünnen Strukturen und anschließend auch für ein inkompressibles Material verwendet. Konvergenzstudien wurden für vier unterschiedliche Elemente durchgeführt: das Makro-Element, das Q1-Element, das Q2-Element und das Cosserat-Element. In diesem Teil konnte man schon feststellen, dass das Makro-Element im Hinblick auf das Locking-Problem keine optimale Lösung darstellt. Er ist immerhin ein klein wenig besser als das Q1-Element aber seine Leistung unterscheidet sich sehr von den anderen Elementen im Hinblick auf die Konvergenz der Lösung. Es ließ sich auch bemerken, dass die Netzqualität die Lösungsqualität stark beeinflusst. Bei dem elastischen Test für das inkompressible Material tauchte kein Hourglassing auf.

Die Kombination der elastischen und plastischen Deformationen wurde in einem nächsten Schritt behandelt. Ein Kragarm wurde mit dem Makro-Element modelliert und einmal belastet bis zur Überschreitung der Fließgrenze und anschließend elastisch entlastet. Diese Prozedur wurde für mehrere Netzauflösungen durchgeführt. Es lässt sich daraus schließen, dass das Makro-Element vergleichbares Konvergenzverhalten wie unter den elastischen Belastungen aufweist. In anderen Worten, das Makro-Element liefert ein besseres Konvergenzverhalten als das Q1-Element aber ein schlechteres als das Q2- und das Cosserat-Element. Ein Be- und Entlastungszyklus konnte mit dem Makro-Element stabil gerechnet werden, wobei der nichtlineare plastische Bereich realistisch wiedergegeben wurde.



Literaturverzeichnis

- [I] M.Jabareen, M.B. Rubin, E.F.I. Boerner, P. Wriggers *A 3-D Cosserat brick macro-element for nonlinear anisotropic elastic materials* 14 July 2006
- [II] J.C. Simo, T.J.R. Hughes *Computational Inelasticity* 1998, Springer Verlag
- [III] E.F.I Boerner, D.S. Mueller-Hoepe, S. Loehnert, P. Wriggers *A finite element formulation based on the theory of a Cosserat Point-Extension to Ogden material* June2006
- [IV] *Cosserat Theory 3D* 11 August 2006
- [V] S. Loehert, E.F.I Boerner, M.B. Rubin, P. Wriggers *Response of a nonlinear elastic general Cosserat brick element in simulations typically exhibiting locking and hourglassing* 29 October 2004