

Gemischte Finite Element Least-Squares Methoden für die Flachwassergleichungen mit kleiner Viskosität

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der Gottfried
Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. Garvin Danisch

geboren am 05.08.1976 in Hannover

Referent: Prof. Dr. Gerhard Starke

Korreferent: Prof. Dr. Joachim Escher

Tag der Promotion: 25. Januar 2007

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die Flachwassergleichungen oder Shallow Water Equation untersucht. Dabei wird besonderes Augenmerk auf die Schwierigkeiten gerichtet, die sich im Zusammenhang mit einem kleinem Viskositätsparameter ergeben.

Zur Lösung der Flachwassergleichungen werden häufig Formulierungen benutzt, die nur für grosse Viskositätsparameter zulässig sind oder für den künstlichen Fall ohne Viskosität. In dieser Arbeit wird dagegen eine Least-Squares Formulierung für die Shallow Water Equations mit Viskositätsparameter $\mu \geq 0$ vorgeschlagen und untersucht. Die vorgeschlagene LS-Formulierung ist dabei insbesondere auch für kleinere Werte von μ zulässig.

Die Shallow Water Equations werden zunächst in ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben und das so umgeformte System mit einer ELLAM Zeitdiskretisierung und einem Least-Squares Ansatz kombiniert.

Als nächstes wird das System um vernünftige Randbedingungen für die Least-Squares Formulierung ergänzt und gezeigt, dass diese Randbedingungen für das gesamte Spektrum von $\mu \geq 0$ zulässig und sinnvoll sind. Ein Teil der Randbedingung hängt dabei von der Viskosität ab und wird in schwacher Form direkt in das Funktional mit eingebaut.

Desweiteren wird mit Hilfe des 2. Lemmas von Strang gezeigt, dass das Funktional stetig und elliptisch bzgl einer bestimmten Norm ist und damit als a-posteriori Fehlerschätzer genutzt werden kann. Darüber hinaus werden Konvergenzabschätzungen gegeben.

Die vorgeschlagene LS-Formulierung wurde implementiert und auf verschiedenen Testgebieten simuliert und mit den theoretischen Konvergenzresultaten verglichen. Dabei wurde u.a. das Finite Element von Mardal, Tai and Winther (SIAM Journal on Numerical Analysis 40, pp. 1605–1631, [MTW00]) genutzt und mit dem quadratischen Raviart Thomas Element verglichen.

Stichworte: Least-Squares, Flachwassergleichungen, Fehlerschätzer

Abstract

In this thesis the shallow water equations are studied particularly with regard to problems due to a small viscosity parameter. To solve the equations, often methods are used which are only feasible for a high viscosity parameter or for the artificial case of no viscosity. In this thesis a least-squares finite element method for the shallow water equations with viscosity parameter $\mu > 0$ is proposed and studied. The proposed method is in particular feasible for small viscosity.

The shallow water equations are reformulated as a first order system by adding a new variable for the velocity flux. The reformulated first order system is combined with a characteristic-based time discretization and a least squares approach.

Next the LS System is supplemented with reasonable boundary conditions. A trace theorem is presented and it is shown that the new boundary conditions are feasible for the entire range of the viscosity parameter $\mu \geq 0$. A part of the boundary conditions depend on the viscosity and is built in weakly into the least squares formulation.

Further it is shown with Strang's second Lemma that the least squares functional is continuous and coercive in respect to a suitable norm and thus can be used as a a-posteriori error estimator. Furthermore convergence estimations are given.

The proposed least squares formulation is implemented for some test examples and the results of the numerical computations are compared to the theoretical convergence estimates. There the finite element spaces introduced recently by Mardal, Tai and Winther (SIAM Journal on Numerical Analysis 40, pp. 1605–1631) are used and compared to the quadratic Raviart-Thomas element.

Keywords: Least-Squares, Shallow Water Equations, Error estimator

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	15
2	Mathematische Grundlagen	21
2.1	Notationen	21
2.2	Einige nützliche Definitionen und Ungleichungen	22
2.3	Sobolevräume	24
2.3.1	Ganzzahlige Sobolevräume	24
2.3.2	Nicht ganzzahlige Sobolevräume	26
3	Die Flachwassergleichung	29
3.1	Einleitung	29
3.2	ELLAM	30
3.3	Zeitdiskretisierung	32
4	Least-Squares Ansatz	37
4.1	Einführung in Least-Squares	37
4.1.1	Vor- und Nachteile von LeastSquares Formulierungen	38
4.2	Das Least-Squares Funktional	40
4.2.1	Vorbereitung	40
4.2.2	Das SWE Least-Squares Funktional	41
4.2.3	Das Darcy Stokes Least-Squares Funktional	44
5	Randbedingungen	47
5.1	Allgemeines	47
5.1.1	Charakterisierung der Randbedingungen	48
5.2	Randbedingung für den geschlossenen Rand	49
6	FE-Ansatzräume	53
6.1	Standard Polynomiale Ansatzräume	53
6.2	Das Raviart-Thomas Element	54
6.3	Das Mardal-Tai-Winther Element	56
6.4	Implementierung	59
6.4.1	Allgemeines	59
6.4.2	Datenorganisation	59
6.4.3	Implementierung	60
6.4.4	Rückverfolgung der Charakteristiken	61
6.4.5	Aufstellen der Steifigkeitsmatrix	61
6.4.6	Lösung des Gleichungssystems	64
6.4.7	Verfeinerungsstrategie	65

Inhaltsverzeichnis

7	Fehlerschätzer	67
7.1	Einleitung	67
7.2	SWE ohne Viskosität	68
7.3	Der Stokes Fall	73
7.4	SWE mit Viskosität	77
7.5	Konvergenz	81
8	Numerische Ergebnisse	89
8.1	Stokes	89
8.2	SWE Quadrat	93
8.3	SWE L-Shape	97

Abbildungsverzeichnis

3.1	Querschnitt des Gebiets	29
3.2	Charakteristiken	33
6.1	Freiheitsgrade der Ansatzräume Q_1 und Q_2	54
6.2	Freiheitsgrade der RT-Elemente der niedrigsten und nächst höheren Ordnung	55
6.3	Freiheitsgrade des MTW-Elements	56
6.4	Freiheitsgrade des Crouzeix-Raviart Elements	58
8.1	Fluss \mathbf{u} im Testgebiet Quadrat für $\mu = 0$ und $\tau = 15$	93
8.2	Geometrie L-Shape mit Gitter auf größtem Level	97
8.3	Fehler im 30. Zeitschritt für $\mu = 0$, $\tau = 10$ auf der Geometrie L-Shape . . .	99
8.4	Fluss auf Feinheitslevel 2 in Geometrie L-Shape	102
8.5	Höhe auf Feinheitslevel 2 mit $\mu = 10^{-8}$ in Geometrie L-Shape	103

Tabellenverzeichnis

8.1	LS-Funktional für $\delta = 1$ und $P_2/RT_2/RT_1^2$ im Stokes Fall	91
8.2	LS-Funktional für $\delta = 0$ und $P_2/RT_2/RT_1^2$ im Stokes Fall	91
8.3	LS-Funktional für $\delta = 1$ und $P_2/MTW/RT_1^2$ im Stokes Fall	92
8.4	LS-Funktional für $\delta = 0$ und $P_2/MTW/RT_1^2$ im Stokes Fall	92
8.5	LS-Funktional auf Quadrat für $P_1/MTW/RT_1$	94
8.6	LS-Funktional auf Quadrat für $P_2/MTW/RT_1$	94
8.7	LS-Funktional auf Quadrat für $P_1/MTW/RT_2$	95
8.8	LS-Funktional auf Quadrat für $P_2/MTW/RT_2$	95
8.9	LS-Funktional auf Quadrat für $P_1/RT_2/RT_1$	95
8.10	LS-Funktional auf Quadrat für $P_1/RT_2/RT_2$	96
8.11	LS-Funktional auf Quadrat für $P_2/RT_2/RT_1$	96
8.12	LS-Funktional auf Quadrat für $P_2/RT_2/RT_2$	96
8.13	LS-Funktional auf L-Shape für $P_2/MTW/RT_1, \tau = 15$	100
8.14	LS-Funktional auf L-Shape für $P_2/RT_2/RT_1, \tau = 15$	101

Abkürzungsverzeichnis

k.A.	keine Angabe
i.A.	im Allgemeinen
i.d.R.	in der Regel
vgl.	vergleiche
u.a.	unter anderem
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
PDGL	partielle Differentialgleichung(en)
FEM	Finite Element Methode
SWE	Shallow Water Equations oder Flachwassergleichung 3.3
Γ	$= \partial\Omega$ Rand des betrachteten Gebietes Ω
$\bar{\Omega}$	$\Omega \cup \partial\Omega$
$C^m(\Omega)$	Menge der m -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$C_0^m(\Omega)$	Menge der Funktionen aus $C^m(\Omega)$ mit kompaktem Träger
$L^p(\Omega)$	Lebesgue-Raum
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	duale Paarung zwischen V und V'
$F'(v)$	Gateaux-Ableitung von $F(v)$
$\mathcal{L}(V, W)$	Menge aller stetigen linearen Abbildungen von V nach W
$W^{m,p}(\Omega)$	$\{v \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, \alpha \leq m, \partial^\alpha v \in L^p(\Omega)\}$, Sobolevraum 2.19
$H^m(\Omega)$	$W^{m,2}(\Omega)$ 2.19
$H_0^m(\Omega)$	$W_0^{m,2}(\Omega)$ 2.19
$W_0^{m,p}(\Omega)$	Menge der Funktionen aus $W^{m,p}(\Omega)$ mit kompaktem Träger
$W^{-m,p'}(\Omega)$	Dualraum von $W^{m,p}(\Omega)$
$W_0^{-m,p'}(\Omega)$	Dualraum von $W_0^{m,p}(\Omega)$
$\ \cdot\ _p$	Norm von $L^p(\Omega)$
$\ \cdot\ _{m,p}$	Norm von $W^{m,p}(\Omega)$
$H_\Gamma^1(\Omega)$	$\{\eta \in H^1(\Omega), \eta = 0 \text{ auf } \Gamma\}$ 2.23
$H_\Gamma(\text{div } \cdot, \Omega)$	$\{\mathbf{v} \in H(\text{div } \cdot, \Omega), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma\}$ 2.23
ELLAM	Euler Lagrange Localized Adjoint Method 3.2
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$	Normalkomponente der Funktion \mathbf{v}
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$	Tangentialkomponente der Funktion \mathbf{v}
$[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E$	Kantensprung ber Tangentialkomponente 4.19
\mathcal{R}	SWE Residuum 4.16
\mathcal{F}	SWE LS-Funktion 4.17

Tabellenverzeichnis

\mathcal{B}	zur SWE gehörende Bilinearform 4.24
\mathcal{J}	Frechet-Ableitung von \mathcal{R} 4.29
\mathcal{R}_S	Darcy Stokes Residuum 4.32
\mathcal{F}_S	Darcy Stokes LS-Funktion 4.34
\mathcal{B}_S	zum Stokes Fall gehörende Bilinearform 4.37
\mathcal{T}_h	Triangulierung von Ω_h
h	maximaler Gitterabstand
T	Dreieck aus \mathcal{T}_h
\mathcal{E}_h	Liste der Kanten der Triangulierung
E	Eine Kante der Triangulierung
P	Eine Punkt der Triangulierung
$P_k(T)$	Menge der Polynome vom Grad k (ber dem Dreieck T)
\mathbf{b}	Bubblefunktion 6.8
λ_i	Baryzentrische Koordinaten in einem Dreieck
MTW	Finiter Element Raum von Mardal, Tai and Winther 6.2
RT	Finiter Element Raum von Raviart-Thomas 6.3
n_p	Anzahl der Punkte einer Triangulierung
n_t	Anzahl der Dreiecke einer Triangulierung
n_e	Anzahl der Ecken einer Triangulierung

1 Einleitung

Die mathematische Modellierung von Vorgängen in der Natur ist von grosser Bedeutung für viele verschiedene Aspekte des täglichen Lebens. So beruht z.B. die Wettervorhersage auf einer numerischen Simulation eines Systems von partiellen Differentialgleichungen, welches das Verhalten von Fluiden beschreibt.

Gerade durch die in den letzten Jahren verstärkt aufgetretenen Wetterphänomene, wie die Oder-Flut im Jahre 2002, die Überschwemmung von New Orleans oder das El Nino Phänomen, ist die Aufmerksamkeit wieder verstärkt auf die Beschreibung und die Simulation von Naturereignissen gelenkt worden. Die Beschreibung und Simulation von Vorkommnissen dieser Art ist ein wichtiger und aktueller Zweig der Forschung.

Die ersten Versuche zur numerischen Simulation von atmosphärischen und ozeanischen Ereignissen fanden bereits im Jahr 1922 statt. Richardson versuchte die atmosphärischen Bewegungsgleichungen mit Hilfe von finiten Differenzen numerisch zu lösen [Ri22]. Er scheiterte allerdings bei seinem Versuch.

Bis zum heutigen Zeitpunkt ist es meist unmöglich eine geschlossene Lösung für Systeme von Differentialgleichungen anzugeben. Aus diesem Grund ist die numerische Behandlung zur Lösung von Differentialgleichungen noch immer Gegenstand der aktuellen Forschung. Auch die Shallow Water Equations (SWE), die aus einer Vereinfachung der Navier-Stokes (NS) Gleichungen resultieren [WEI92], sind ein Beispiel für ein System von Differentialgleichungen, dessen geschlossene Lösung man bis heute nicht anzugeben vermag.

Die Shallow Water Equation sind seit vielen Jahren bekannt und gut untersucht. Dabei wurden wichtige Beiträge u.a. von Lynch und Grey [LYG79] oder auch Peraire und Zienkiewicz (siehe z.B. [PEZ86]) geliefert. Allerdings weichen die vorgeschlagenen Formulierungen der SWE in Details immernoch leicht ab.

Aber nicht nur die Beschreibung der SWE mittels eines nichtlinearen Systems von partiellen Differentialgleichungen, sondern auch ihre (numerische) Lösung ist von eminenter Bedeutung. Da es nicht möglich ist für die Shallow Water Equations eine geschlossene Lösung anzugeben, werden numerische Methoden zur approximativen Näherung an die Lösung benötigt. Zur näherungsweise Lösung der SWE ist die Methode der Finiten Elemente unerlässlich.

In dieser Arbeit wird eine gemischte Finite Element Least-Squares Formulierung für die Flachwassergleichungen vorgeschlagen und untersucht. Die Idee der Methode der kleinsten Quadrate oder Least-Squares Methode, wurde bereits von Carl Friedrich Gauss im 17. Jahrhundert entdeckt. Legendre war allerdings der erste, der die Least-Squares Methode in einer Publikation erwähnte. Die Anwendung der Least-Squares Methode auf die Finiten Elemente wurde allerdings erst in den 1970er Jahren populär. Zunächst versuchte man nur, die Least-Squares Finite Element Methode (LSFEM) auf Probleme anzuwenden, bei denen die klassische Galerkin Finite Element Methode versagte. Erste Arbeiten auf dem Gebiet der Least-Squares Finite Element Methoden publizierten z.B. Lynn und Araya[LYA74], Zienkiewicz[ZIO74] oder Wendland[WEN79]. Aziz et.al. lieferten später wichtige theore-

tische Grundlagen [AKS85]. Aufgrund der Erfolge wurden die Least-Squares Methoden schnell populär und auch auf andere Probleme angewandt. Für eine Übersicht über Finite-Element Least-Squares Formulierungen sei auf [BOG98] verwiesen.

In jedem Lösungsschritt der Finite-Element Methode muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Dies ist in der Regel ein Gleichungssystem mit sehr vielen Unbekannten. Je feiner das Gitter, mit dem man das zu simulierende Gebiet für die Finite Element Methode überziehen muss, desto grösser wird die Zahl der Freiheitsgrade. Und damit vergrößert sich auch die Zahl der Unbekannten für das zu lösende Gleichungssystem. Aus diesem Grund möchte man es vermeiden das Gitter an Stellen zu verfeinern, wo es nicht unbedingt nötig ist. Denn dies kostet natürlich unnötig Rechenzeit. Aus diesem Grund ist es essentiell zu wissen, wo das Netz verfeinert werden muss. Es ist klar, dass das Gitter dort verfeinert werden soll, wo der Fehler, den man mit der bisherigen Näherungslösung macht, besonders gross ist. Man benötigt einen a-posteriori Fehlerschätzer. Ein a-posteriori Fehlerschätzer zeigt einem die Grössenordnung des Fehlers, den man auf jedem Dreieck mit der Näherungslösung macht, an. Die ersten Arbeiten zu a-posteriori Fehlerschätzern lieferten Babuska und Rheinboldt im Jahr 1978, siehe [BAR78] und [BRH78], und begründeten damit ein neues Forschungsgebiet.

Ein a-posteriori Fehlerschätzer muss sowohl effektiv als auch zuverlässig sein. Dabei meint effektiv, dass der Fehlerschätzer eine untere Schranke für den Fehlerschätzer darstellt. Diese kann man zur oben angesprochenen adaptiven Verfeinerung des Gitters nutzen. Andererseits muss ein Fehlerschätzer auch zuverlässig sein. Damit ist eine obere Schranke des Fehlers für die Näherungslösung gemeint.

Ziel dieser Arbeit ist die Formulierung und Untersuchung einer Finite Element Least-Squares Formulierung der Shallow Water Equations, auch Flachwassergleichungen genannt, und die Entwicklung eines a-posteriori Fehlerschätzers für die Flachwassergleichungen. In den meisten numerischen Simulationen der SWE wird der sog. Viskositätsparameter μ entweder auf den künstlichen Wert 0 oder aber auf einen recht grossen Wert gesetzt. Dies resultiert einerseits aus der Tatsache, dass sich die Flachwassergleichungen mathematisch von einem System hyperbolischer Differentialgleichungen zu einem System parabolischer Differentialgleichungen ändern, wenn der Viskositätsparameter gegen Null strebt. Für sehr kleine Viskositätsparameter lassen sich klassische Verfahren zur Lösung von hyperbolischen Systemen von Differentialgleichungen nicht anwenden, da das System mathematisch gesehen zwar parabolisch ist, sich aber schon hyperbolisches Verhalten einstellt. Zum anderen ändern sich die Randbedingungen für den Fall eines verschwindenden Viskositätsparameters. Es muss daher ein glatter Übergang zwischen den Randbedingungen für den Fall großer Viskosität zum Fall verschwindender Viskosität gefunden werden.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Aufstellung einer Least-Squares Formulierung für die Flachwassergleichungen und die Entwicklung eines Fehlerschätzers für das ganze Spektrum des Viskositätsparameters. Insbesondere sollen die Least-Squares Formulierung und der Fehlerschätzer auch für kleine Viskositätsparameter gültig sein. Ein weiterer Aspekt war die Implementierung und Nutzung des Finiten Elements, das Mardal Tai und Winther in [MTW00] vorgestellt haben. Dieses Element kommt in den numerischen Tests in Abschnitt 8 zum Einsatz und wird dort mit den Raviart-Thomas Elementen verglichen.

Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt:

In Kapitel 2 werden die in späteren Kapiteln benötigten grundlegenden Definitionen, Gleichungen und Ungleichungen gegeben. Desweiteren wird ein kurzer Überblick über die Finite Element Methode gegeben und es werden die Sobolevräume eingeführt.

Kapitel 3 beschreibt zunächst die Flachwassergleichungen genauer. Die Shallow Water Equations stellen eine Advektions-Diffusions-Gleichung dar. Die Schwierigkeiten die aus einer im Vergleich zur Diffusion hohen Advektion ergeben, werden in Kapitel 3 erläutert und die SWE in der Zeit diskretisiert. Die verwendete Diskretisierungsmethode basiert auf einer Charakteristikenmethode[DAW00] und wird in Kapitel 3 genauer erläutert. Anschliessend wird zur Illustration eine mögliche Galerkin Formulierung für die Flachwassergleichungen gegeben.

Im anschliessenden Kapitel wird näher auf die Least-Squares Methode für die Finiten Elemente eingegangen. Es wird ein kurzer Überblick über verschiedene Least-Squares Formulierungen gegeben und zum Abschluss eine Finite-Element Least-Squares Formulierung für die Shallow Water Equations vorgeschlagen.

Beim Übergang des Viskositätsparameters von $\mu > 0$ zu $\mu = 0$ ergeben sich Probleme hinsichtlich der korrekten Randbedingungen. Kapitel 5 beschreibt ausführlich welche Probleme sich dabei ergeben und wie sie gelöst werden können. Es werden Randbedingungen für die geschlossenen, die Einfluss- und die Ausflussränder gegeben und damit die im vorigen Kapitel gegebene Least-Squares Formulierung komplettiert. Insbesondere wird ein Spursatz bewiesen, der zeigt dass die angegebene Randbedingung für die geschlossenen Ränder zulässig ist.

Nachdem die Least-Squares Formulierung komplett angegeben wurde, werden in Kapitel 6 die zur numerischen Simulation verwendeten Finite-Element Ansatzräume vorgestellt. Insbesondere wird auf das MTW-Element näher eingegangen.

In Kapitel 7 wird dann schliesslich mit Hilfe des 2. Lemmas von Strang zunächst für den Stokes Fall und darauf aufbauend für die Flachwassergleichungen gezeigt, dass die Norm des Least-Squares Funktionals als a-posteriori Fehlerschätzers genutzt werden kann. Es werden Konvergenzabschätzungen für die jeweiligen Finiten Elemente gegeben, die zur numerischen Simulation benutzt werden.

Im Anschluss werden im letzten Abschnitt die Resultate der numerischen Simulation einiger Testprobleme gezeigt und mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Kapitel verglichen.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei einigen Personen bedanken, ohne die diese Arbeit nicht entstanden wäre. Da ist an erster Stelle Prof. Starke, dem ich für seine sehr gute Betreuung dieser Arbeit danken möchte. Er hatte immer ein offenes Ohr für meine Probleme und konnte mir stets bei auftauchenden Problemen weiterhelfen.

Desweiteren danke ich den Mitarbeitern des Institutes für Angewandte Mathematik und insbesondere der Arbeitsgruppe Wissenschaftliches Rechnen an der Leibniz Universität Hannover für ihre Unterstützung.

Mein Dank gilt weiterhin meinen Eltern Ulrike und Werner Danisch und meiner Schwester Dinah Carina Danisch, die mich immer in meinem Wunsch Mathematik bestärkt haben zu studieren und diese Arbeit damit erst möglich machten.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei allen meinen Freunden bedanken, die ausserhalb der Universität immer für mich da waren.

Garvin Danisch.

2 Mathematische Grundlagen

Im vorliegenden Kapitel werden die mathematischen Grundlagen gelegt, die für die Entwicklung der Theorien in den weiteren Kapiteln benötigt werden. Desweiteren werden einige häufig gebrauchte Gleichungen und Ungleichungen gegeben, sowie grundlegende Konzepte, wie etwa die Finite Element Methode, kurz erläutert.

Für eine grundlegende Einführung in die Konzepte der Finiten Elemente wird auf einschlägige Literatur, wie z.B. auf [BRA97] oder [GIR86], verwiesen.

2.1 Notationen

In diesem Abschnitt sollen die gebräuchlichsten Symbole und Operatoren kurz in Erinnerung gerufen werden.

Bemerkung 2.1

In dieser Arbeit wird ein Skalar $a \in \mathbb{R}$ oder $\alpha \in \mathbb{R}$ immer in 'Normalschrift' gegeben, während Vektoren $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ in **fetter** Schrift gedruckt werden. Um Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu kennzeichnen werden im allgemeinen Grossbuchstaben verwendet. Eventuell auftretende Abweichungen werden gesondert gekennzeichnet.

Bemerkung 2.2

Wie allgemein üblich wird

- mit $\nabla \mathbf{u} := \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ der Gradient und

- mit $\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} := \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ die Divergenz

einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Bemerkung 2.3

Für eine Funktion $A = (a_{ij}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ wird

- mit $\operatorname{div} A$ die Divergenz der Zeilen und
- mit $\operatorname{tr} A$ die Spur

von A bezeichnet.

Definition 2.4

Mit C^n wird wie üblich die Menge der n -mal differenzierbaren Funktionen bezeichnet. Mit C^∞ wird die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen bezeichnet.

2.2 Einige nützliche Definitionen und Ungleichungen

Als nützlich werden sich im folgenden die unten angegebenen elementaren Ungleichungen erweisen, dessen Beweise sich, falls nicht angegeben, in der Standardliteratur, z.B. in [EVA98], finden lassen.

Lemma 2.5 (Ungleichung von Cauchy)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad (2.1)$$

Beweis:

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Lemma 2.6 (Ungleichung von Cauchy mit ϵ)

Für $\mathbb{R} \ni a, b > 0$ und $\epsilon > 0$ gilt:

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \quad (2.2)$$

Beweis:

Setze $ab = ((2\epsilon)^{1/2}a) \left(\frac{b}{(2\epsilon)^{1/2}} \right)$ und wende die Ungleichung von Cauchy (2.1) an.

□

Lemma 2.7 (Ungleichung von Young)

Sei $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $a, b > 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (2.3)$$

□

Beweis:

Die Abbildung $x \rightarrow e^x$ ist konvex, daher gilt

$$ab = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\log a^p} + \frac{1}{q} e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

□

Lemma 2.8 (Ungleichung von Young mit ϵ)

Seien $a, b > 0$ und $\epsilon > 0$

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q \quad (2.4)$$

wobei $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

Beweis:

Setze $ab = ((\epsilon p)^{1/p} a) \left(\frac{b}{(\epsilon p)^{1/p}} \right)$ und wende die Ungleichung von Young (2.3) an.

□

Definition 2.9 (Fréchet-Ableitung)

Seien X und Y Banachräume. Die Funktion $f : G \subset X \rightarrow Y$ mit G offen, heisst Fréchet-differentierbar im Punkt $x_0 \in G$, falls es eine stetige lineare Abbildung $\mathcal{L}(X; Y)$ gibt, so dass für alle $x_0 + h$ aus einer ε -Umgebung $U \subset G$ von x_0 gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \mathcal{L}h + r(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0 \quad (2.5)$$

Die eindeutig bestimmte Abbildung $\mathcal{L}(X; Y)$ wird dann Fréchet-Ableitung von f an der Stelle x_0 genannt.

Für die Theorie der Finiten Elemente sind die L^p -Räume die wichtigsten Funktionenräume.

Definition 2.10 (L^p -Räume)

Der Raum

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ messbar auf } \Omega, \|f\|_p < \infty\} \quad (2.6)$$

versehen mit

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \text{ für } 1 \leq p < \infty \text{ und } \|f\|_{\infty} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \quad (2.7)$$

ist ein Banachraum. Dabei ist $\text{ess sup}_{x \in D} := \inf\{\mu : f(x) \leq \mu \text{ für fast alle } x \in D\}$

Bemerkung 2.11

Der Raum L^2 ist sogar ein Hilbertraum.

Definition 2.12

Sei H ein Hilbert-Raum. Eine Bilinearform $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ heisst stetig, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, so dass

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \cdot \|v\|_H \text{ für alle } u, v \in H \quad (2.8)$$

gilt. Eine symmetrische, stetige Bilinearform a wird H-elliptisch oder koerziv genannt, wenn es ein $\gamma > 0$ gibt, so dass

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|_H^2 \text{ für alle } v \in H \quad (2.9)$$

gilt. Die hierdurch induzierte Norm $\|v\|_a = \sqrt{a(v, v)}$ wird dann als Energienorm bezeichnet und ist äquivalent zur Norm des Hilbert-Raums H .

Folgerung 2.13

Aus Lemma 2.6 folgt natürlich insbesondere

$$(a, b)_{0, \Omega} \leq \epsilon \|a\|_{0, \Omega}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|b\|_{0, \Omega}^2 \quad (2.10)$$

Definition 2.14 (Lipschitz-Stetigkeit)

Eine Funktion $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird Lipschitz-stetig genannt, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega \quad (2.11)$$

gilt.

Satz 2.15 (Schwarz Ungleichung)

Sei V ein Raum mit einem inneren Produkt (\cdot, \cdot) , dann ist

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2} \quad (2.12)$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.

Für das Rechnen mit Differentialgleichungen insbesondere bei Umformungen einer Variationsformulierung ist die *Greensche Formel* von besonderer Bedeutung.

Lemma 2.16 (Greensche Formel)

Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein räumlicher Bereich, der von einer stückweise glatten, nach aussen orientierten Fläche F berandet wird. Sind die reellen Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ genügend differenzierbar, so gilt:

$$\int_F f \cdot \nabla g dF = \int_V (\nabla f \cdot \nabla g + f \cdot \Delta g) dV \quad (2.13)$$

2.3 Sobolevräume

2.3.1 Ganzzahlige Sobolevräume

Für partielle Differentialgleichungen (im weiteren als PDGLn bezeichnet), wie die in dieser Arbeit untersuchten Shallow Water Equations (SWE), lässt sich im allgemeinen keine geschlossene Lösung angeben. Dies ist nur bei sehr einfachen Beispielen von PDGLn möglich. Wenn man keine geschlossene Lösung finden kann, ist es mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente trotz allem meist möglich eine Näherungslösung für die zugrunde liegende PDGL zu bestimmen.

Als Funktionenräume, in denen nach einer Näherungslösung für eine bestimmte PDGL zu suchen ist, bieten sich die sog. Sobolevräume an. Beim Versuch die 'einfachsten' Funktionenräume, nämlich die Räume C^n , zu nutzen, ergaben sich schnell Schwierigkeiten, da die Räume C^n nicht abgeschlossen sind. D.h. dass eine Folge aus C^n eventuell gegen ein Element konvergiert, welches nicht in C^n liegt.

Aus diesem Grund wurden die Sobolevräume eingeführt, die unter bestimmten Voraussetzungen als Vervollständigung der C^n und C^∞ Räume angesehen werden können. So ist z.B. der Raum $H^1(\Omega)$ (siehe Definition 2.19) die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der H_1 -Norm.

Da die ursprünglichen verwendeten Räume C^n erweitert werden, spricht man nun von einer schwachen Lösung, die man sucht. Um die Sobolev Räume zu definieren bedarf es zunächst der Definition der schwachen Ableitung.

Definition 2.17

Zu $u \in L^2(\Omega)$ existiert die schwache Ableitung v , $\partial^\alpha u = v \in L^2(\Omega)$, wenn

$$(\Psi, v)_{L^2} = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \Psi, u)_{L^2} \quad \forall \Psi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.14)$$

gilt. Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex.

Bemerkung 2.18

Wenn die klassische Ableitung zu einer Funktion existiert, so existiert ebenfalls die schwache Ableitung und beide Ableitungen stimmen überein. Die Definition der schwachen Ableitung kann man kanonisch auf Funktionen höherer Dimension übertragen.

Mit Hilfe dieser Definition ist es nun möglich, die Sobolev-Räume zu definieren.

Definition 2.19 (Sobolevraum)

Für $l \in \mathbb{N}$ sei

$$W_m^l = \{\varphi \in L^m(\Omega) \mid D^\alpha \varphi \in L^m(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq l\} \quad (2.15)$$

der Sobolevraum mit Norm:

$$\|\varphi\|_{W_m^l(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha \varphi\|_{L^m(\Omega)}^m \right)^{1/m} \quad (2.16)$$

Ausserdem sei

$$W_\infty^l = \{\varphi \in L^\infty(\Omega) \mid D^\alpha \varphi \in L^\infty(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq l\} \quad (2.17)$$

der Sobolevraum mit Norm:

$$\|\varphi\|_{W_\infty^l(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (2.18)$$

Für $m=2$ wird der Sobolevraum zu einem Hilbertraum und mit $H_l = W_l^2$ bezeichnet. Mit $H(\text{div}, \Omega)$ wird der Raum $\{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \text{div } \varphi \in L^2\}$ bezeichnet.

So wie mit C_0^n die Menge der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger bezeichnet wird, bezeichnet man auch die Menge der Funktionen aus H^m mit kompaktem Träger als H_0^m . Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass im \mathbb{R}^n kompakt äquivalent zu abgeschlossen und beschränkt ist. Daher nimmt eine Funktion $f \in H_0^m$ insbesondere auf dem Rand $\partial\Omega$ des betrachteten Gebietes Ω den Wert Null an.

Neben den Normen $\|\cdot\|_m$ der Sobolevräumen sind auch auf ihnen definierte Seminormen von einiger Bedeutung.

Definition 2.20

Auf dem Sobolevraum H^m wird mit

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \mathbf{u}\|_{L^2}^2} \quad (2.19)$$

die zugehörige Seminorm bezeichnet.

In Räumen mit verallgemeinerter Nullrandbedingung, d.h. in H_0^m , sind die Seminormen zu den Normen äquivalent. Gleiches gilt, wenn Ω beschränkt ist (siehe [GIR86]).

Bemerkung 2.21

Nach diesen Definitionen ist natürlich klar, dass der Raum $H(\operatorname{div}, \Omega)$ den Raum $H^1(\Omega)$ enthält.

Definition 2.22

Analog zum Raum $H_0^m(\Omega)$ kann man $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ definieren als

$$H_0(\operatorname{div}, \Omega) = \{\varphi \in H(\operatorname{div}, \Omega) \mid (\varphi \cdot \mathbf{n}, v) = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)\} \quad (2.20)$$

Bemerkung 2.23

Benötigte Randbedingungen werden meist direkt in die Ansatzräume mit eingebaut. Daher wird zur Vereinfachung folgende Schreibweise vereinbart:

$$\begin{aligned} H_\Gamma^1(\Omega) &:= \{\eta \in H^1(\Omega), \eta = 0 \text{ auf } \Gamma\} \\ H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) &:= \{\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma\} \end{aligned}$$

Die etwas inkonsistente Schreibweise für diese Abkürzungen liegt in den später verwendeten Randbedingungen und Ansatzräumen begründet.

2.3.2 Nicht ganzzahlige Sobolevräume

Die Notation der Sobolevräume $W^{m,p}(\Omega)$ kann erweitert werden auf den Fall, dass m nicht aus \mathbb{N} ist. Leider gibt es mehrere Definition von Sobolevräumen mit nicht ganzzahliger Dimension, die nicht alle äquivalent sind.

In dieser Arbeit verwenden wir die folgende Definition, die u.a. in [GIR86] und [BRS94] zu finden ist.

Definition 2.24

Sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^N , $0 \leq m \in \mathbb{N}$ und s und p zwei reelle Zahlen, für die gilt $1 \leq p < \infty$ und $s = m + \sigma$, wobei $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $0 < \sigma < 1$. Wir bezeichnen mit $W^{s,p}(\Omega)$ den Raum aller Distributionen von u mit $u \in W^{s,p}(\Omega)$ und

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha \mathbf{u}(x) - \partial^\alpha \mathbf{u}(y)|^p}{\|x - y\|^{N+\sigma p}} dx dy < \infty \quad \forall |\alpha| = m.$$

Dementsprechend wird mit $W^{s,\infty}(\Omega)$ der Unterraum der Funktionen $\mathbf{u} \in W^{m,\infty}(\Omega)$ mit

$$\max_{|\alpha|=m} \operatorname{ess\,sup}_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|\partial^\alpha \mathbf{u}(x) - \partial^\alpha \mathbf{u}(y)|}{\|x - y\|^\sigma} < \infty$$

bezeichnet.

Definition 2.25

Eine algebraisch und topologisch äquivalente Definition der Sobolevräume mit $p = 2$, erhält man durch Verwendung von Fourier Transformationen [GIR86]: Für reelle $s > 0$ definieren wir

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^N) \mid (1 + \|\sigma\|^2)^{s/2} \hat{v}(\sigma) \in L^2(\mathbb{R}_\sigma^N)\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{s,\mathbb{R}^N} = \{\|v\|_{0,\mathbb{R}^N}^2 + (1 + \|\sigma\|^2)^{s/2} \hat{v}(\sigma)\|_{0,\mathbb{R}^N}^2\}^{1/2}$$

wobei \hat{v} die Fourier Transformation von v bezeichnet. Wenn Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^N ist, definieren wir

$$H^s(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \exists \tilde{v} \in H^s(\mathbb{R}^N) \text{ mit } \tilde{v}|_{\Omega} = v\}$$

mit der Norm

$$\|v\|_{s,\Omega} = \inf_{\tilde{v} \in H^s(\mathbb{R}^N), \tilde{v}|_{\Omega} = v} \|\tilde{v}\|_{s,\mathbb{R}^N}.$$

Bemerkung 2.26

Ebenso wie im Fall $H^1(\Omega) \subset H(\operatorname{div}, \Omega)$ kann man sich leicht überlegen, dass der Raum $H^{-1/2}(\Omega)$ den Raum $H^{1/2}(\Omega)$ enthält. Denn w ist ein Element aus $H^{-1/2}(\Omega)$, falls die $H^{-1/2}$ -Norm von w endlich ist, d.h. falls gilt

$$\sup_{\phi \in H^{1/2}} \frac{\langle w, \phi \rangle}{\|\phi\|_{1/2}} < \infty. \quad (2.21)$$

Man kann sich weiter überlegen: Wäre $\phi \in L^2$ in der obigen Ungleichung 2.21, so würde sich in 2.21 das normale L^2 Skalarprodukt ergeben. Und damit wäre natürlich auch $w \in L^2$. Da aber $\phi \in H^{1/2}$ liegt und natürlich $H^{1/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ gilt, ist w aus einer Menge, die L^2 enthält. Es gilt daher also:

$$H^{1/2}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega) \subseteq H^{-1/2}(\Omega)$$

Weiterhin gilt sogar

$$H^{1/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1/2}(\Omega)$$

Bemerkung 2.27

Der Beweis für die Äquivalenz der Definitionen (2.24) und (2.25) findet sich beispielsweise in [GIR86].

3 Die Flachwassergleichung

In diesem Kapitel werden die Flachwassergleichungen vorgestellt und ihre wichtigsten Eigenschaften kurz charakterisiert. Desweiteren wird im Abschnitt 3.2 eine Zeitdiskretisierung der Flachwassergleichungen gegeben, die auf einer Kombination des Eulerschen und des Lagrangeschen Koordinatensystems beruht. Am Ende des Kapitels werden zwei mögliche Variationsformulierungen gegeben, die zur (Näherungs-)Lösung der Flachwassergleichungen per Finite Element Methode genutzt werden können.

3.1 Einleitung

Bei den Flachwassergleichungen handelt es sich zunächst einmal um ein freies Randwertproblem, d.h. die Berechnung der Ränder, in diesem Fall der Wasserhöhe, ist ein Teil des Problems. Die Flachwassergleichungen (Shallow Water Equations, SWE) werden durch Mittelung der Wasserhöhe aus den inkompressiblen drei-dimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen (NS) gewonnen. Durch Mittelung über die Wasserhöhe wird aus der ursprünglichen drei-dimensionalen nichtlinearen Advektions-Diffusions Gleichung eine leichter zu lösende zwei-dimensionale nichtlineare Advektions-Diffusions Gleichung. Dies reduziert einerseits den Rechenaufwand, den man zur Lösung der SWE betreiben muss. Andererseits erkaufte man sich diese Vereinfachung durch einige Einschränkungen. So sind die Flachwassergleichungen, wie der Name schon vermuten lässt, nur in einem Gebiet gültig, indem die Länge des Gebietes sehr viel grösser als seine Höhe ist. Desweiteren wird angenommen, dass sich die Bodenbeschaffenheit nicht zu schnell ändert. Dies kann

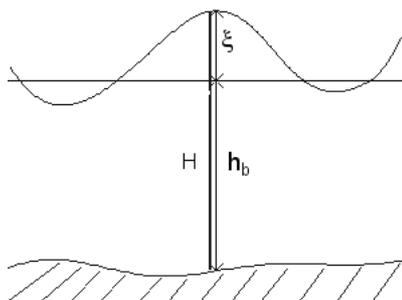


Abbildung 3.1: Querschnitt des Gebiets

mathematisch durch

$$\left| \frac{\partial h_b}{\partial x_1} \right| \approx \frac{d|h_b|}{|L|} < \frac{d|H|}{|L|} \ll 1$$

$$\left| \frac{\partial h_b}{\partial x_2} \right| \approx \frac{d|h_b|}{|L|} < \frac{d|H|}{|L|} \ll 1$$

beschrieben werden (siehe [DAW00]). Dabei ist $\xi(x_1, x_2, t)$ die Wasserhöhe über einer Referenzebene, h_b die Wassertiefe unter dieser Referenzebene und $H = \xi + h_b$ die tatsächliche Wasserhöhe (siehe Abbildung 3.1). Weiterhin wird das Fluid als inkompressibel und hydrostatisch angenommen [FQS99]. Für eine genaue Herleitung der SWE aus den NS sei auf [WEI92] verwiesen.

Sei $\mathbf{u} = (u(x_1, x_2, t), v(x_1, x_2, t))$ die höhengemittelte Geschwindigkeit, dann haben die Flachwassergleichungen die folgende Form:

1. Kontinuitätsgleichung (Continuity Equation)

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}H) = 0 \quad (3.3)$$

2. Impulserhaltung (Momentum Equation)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g \nabla \xi - \mu \Delta \mathbf{u} + \tau_b \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0 \quad (3.4)$$

dabei ist g die Gravitationskonstante, $\tau_b(\xi, \mathbf{u}) = c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}$ ist eine Bodenreibungskonstante. Die hier verwendete Form von τ_b ist aus [FQS99] übernommen und bei verschiedenen Autoren unterschiedlich. \mathbf{F} ist eine Funktion, die externe Kräfte, wie z.B. die Corioliskraft, Windstärke, atmosphärischen Druck, usw., darstellt. Die mathematische Darstellung dieser Kraft ist bei verschiedenen Autoren ebenfalls unterschiedlich. Eine mögliche Darstellung dieser Kraft ist $\mathbf{F} = (f_c \mathbf{k} \times \mathbf{u} - \frac{1}{H} \boldsymbol{\tau}_{WS} + \nabla p - g \nabla \mathcal{N})$ [LWS91].

Im Folgenden wird $\tilde{\Omega}$ als der gesamte dreidimensionale Wasserkörper und Ω als die zweidimensionale Projektion von $\tilde{\Omega}$ auf die x-y Ebene bezeichnet. Dabei wird zur Vereinfachung davon ausgegangen, dass der Rand $\partial\Omega$ von Ω glatt ist.

3.2 ELLAM

Neben Vereinfachungen, ergeben sich auch spezielle Schwierigkeiten aus den Flachwassergleichungen. Eine der grössten Schwierigkeiten geht mit einer, im Vergleich zur Dispersion, sehr grossen Advektionsgeschwindigkeit einher. Dies trifft häufig auf kleine Kanäle oder schmale Buchten zu und die SWE sind in diesem Fall mit Standard-Galerkin Verfahren nur sehr schwer zu lösen (vgl. Kapitel 6.1 in [QUV00]).

Die SWE sind dann zwar noch parabolisch, durch die sehr geringe Dispersion macht sich aber ein hyperbolisches Verhalten bemerkbar. Deshalb sucht man nach Verfahren um diese Schwierigkeit in den Griff zu bekommen.

Für allgemeine Advektions-Diffusions-Probleme der Form

$$L\mathbf{z}(\mathbf{x}) := \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}D_j\mathbf{z}) + \sum_{i=1}^n D_i(b_i\mathbf{z}) + a_0\mathbf{z} \quad (3.5)$$

($D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$), $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit einem sehr grossen Advektionsanteil ergibt sich eine, im Vergleich zur Stetigkeitskonstante γ , kleine Elliptizitätskonstante α (vgl. 2.12). Dies führt dazu, dass besonders der Fehler im Gradienten der Näherungslösung bei Verwendung von Standard Finiten Elementen sehr gross sein kann. Was im weiteren dazu führt, dass bei der Standardfehlerabschätzung des Fehlers

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 \leq Ch^l \|\mathbf{u}\|_{l+1} \quad (3.6)$$

die Konstante C sehr gross wird. Der Fehler den man durch nur näherungsweise Lösung der SWE macht, wird in diesem Fall also sehr gross (siehe [QUV00]). In der Lösung können in diesem Fall unphysikalische Oszillationen auftreten.

Um dieses Problem zu umgehen, gibt es verschiedene Stabilisierungsstrategien. Die wohl bekannteste Strategie ist die 'artificial diffusion method'. In diesem Fall wird der Diffusionsterm künstlich erhöht. Man vermeidet dadurch zwar die typischerweise auftretenden Oszillationen, allerdings ist der Nachteil die erhöhte Ungenauigkeit. Die Lösung verschmiert durch die zusätzliche Diffusion. ('cannot be better than first order accurate'). Ebenfalls sehr bekannt ist die $2\Delta x$ -Methode von Lynch und Grey (1979) [LYG79].

Es existieren allerdings schon seit geraumer Zeit Methoden, die eine höhere Genauigkeit erreichen, so z.B. die 'streamline-upwind/Petrov-Galerkin' Methode (SUPG) (vgl. z.B. [BRH82]), oder etwa die 'Galerkin Least-Squares' Methode (GaLS) (vgl. Kapitel 4). Darauf soll an dieser Stelle allerdings (noch) nicht weiter eingegangen werden. Stattdessen wird im folgenden die Euler Lagrange Localized Adjoint Method (ELLAM) beschrieben, die einer Arbeit von Dawson und Martinez-Canales entstammt [DAW00], mit der die Schwierigkeiten, die sich in Verbindung mit einer zu geringen Diffusion ergeben, ebenfalls in den Griff zu bekommen sind. Die ELLAM-Methode verbindet die klassische Eulersche Sichtweise eines festen Koordinatensystems mit der Lagrangeschen Sichtweise, bei der sich das Koordinatensystem mit einem Partikel mitbewegt. Für den Advektionsteil wird die Lagrangesche Sichtweise verwendet, während sonst die klassische Eulersche Sichtweise verwendet wird. Im Advektionsteil bewegt man sich durch den Lagrange-Ansatz auf den Trajektorien der Partikel mit, erreicht so, dass dieser Teil aus der resultierenden Gleichung 'herausfällt'. Diese Darstellung erreicht man durch Ersetzen der 'normalen' Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ durch die Richtungs- bzw. totale Ableitung in Richtung $(\mathbf{u}, 1)$. Dies soll etwas näher dargestellt werden:

Sei also \mathbf{s} der Einheitsvektor in Richtung $(\mathbf{u}, 1)$, also $\mathbf{s} = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{u}, 1)$ mit $\alpha = \sqrt{1 + |\mathbf{u}|^2}$. Dann ergibt sich als Richtungsableitung für eine beliebige Funktion f :

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla f \quad (3.7)$$

Angewandt auf \mathbf{u} und ξ in (3.3) und (3.4) erhält man als Charakteristikenform der SWE

$$\alpha \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{s}} + \operatorname{div}(\mathbf{u}H) - \mathbf{u} \nabla \xi = 0 \quad (3.8)$$

$$\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}} + g \nabla \xi + c_f \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0 \quad (3.9)$$

oder für H statt ξ als Prozessvariable:

$$\alpha \frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}} + \underbrace{\operatorname{div}(\mathbf{u}H) - \mathbf{u} \nabla H}_{H \operatorname{div}(\mathbf{u})} = 0 \quad (3.10)$$

$$\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}} + g \nabla (H - h_b) + c_f \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0 \quad (3.11)$$

Eine mögliche schwache Formulierung von (3.3),(3.4) lautet also:

Schwache Formulierung:

$$\alpha \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}}, \eta \right) + (H \operatorname{div}(\mathbf{u}), \eta) = 0 \quad \text{für alle } \eta \in L^2(\Omega) \quad (3.14)$$

$$\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}}, \mathbf{v} \right) + (g \nabla (H - h_b), \mathbf{v}) + c_f \left(\frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H}, \mathbf{v} \right) + \mu (\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{F}, \mathbf{v}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2 \quad (3.15)$$

3.3 Zeitdiskretisierung

Im nächsten Schritt ist die schwache Formulierung zeitlich zu diskretisieren.

Für eine zeitliche Diskretisierung benötigt man die Werte von \mathbf{u} und H zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t und $t - 1$. Da man, zumindest teilweise, eine Lagrangesche Sichtweise benutzt hat, ist es geschickt zuerst die Partikel zurückzuverfolgen und ihren Ort zum Zeitpunkt $t - 1$ zu errechnen. Um dies zu erreichen wird das Eulerverfahren auf die Charakteristiken angewandt. Durch Anwenden des impliziten Euler Verfahrens auf das Problem (3.14),(3.15), mit passenden Randwerten und Anfangswerten $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$, $H(0) = H_0$, ergibt sich:

$$\check{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t$$

wobei $\check{\mathbf{x}}$ die Approximation an den Ort des Partikels, das sich zum Zeitpunkt t am Ort \mathbf{x} befand, zur Zeit $t-1$ ist. Im folgenden sei $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^k - \mathbf{u}_h^k(x) \Delta t$ und $\hat{f} = f(\hat{\mathbf{x}})$.

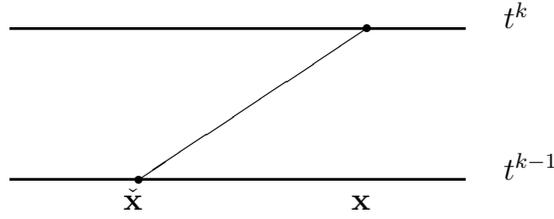


Abbildung 3.2: Charakteristiken

Da die ELLAM-Methode auf die Flachwassergleichungen angewandt wurde, ergibt sich nun der einfache Zusammenhang (vgl. z.B. [DAN02])

$$\alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{s}} \simeq \frac{\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t}$$

und natürlich ebenso $\alpha \frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}} \simeq \frac{H - \hat{H}}{\Delta t}$, siehe dazu auch Abbildung 3.2.

Bei der Zurückverfolgung der Charakteristiken entsteht ein Approximationsfehler. Diesen kann man verkleinern, indem man genauere Verfahren als das implizite Eulerverfahren anwendet, so zum Beispiel ein Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung. Je genauer man die Stromlinien zurückverfolgt, desto grösser wird der Rechenaufwand den man betreiben muss. Man muss hier also einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und vertretbarem Aufwand eingehen.

Mit $\Delta t = \tau$ lautet die **Variationsformulierung** nach der Zeitdiskretisierung also:

Variationsformulierung:

Bestimme $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2$
 $H \in L^2(\Omega)$ so, dass

$$(H + \tau H \operatorname{div} \mathbf{u}, \eta)_{0,\Omega} = (\hat{H}^{\text{alt}}, \eta)_{0,\Omega} \quad \forall \eta \in L^2(\Omega) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{u} + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}, \mathbf{v} \right)_{0,\Omega} - \tau g(H, \operatorname{div} \mathbf{v})_{0,\Omega} + \tau \mu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{0,\Omega} \\ & = (\hat{\mathbf{u}}^{\text{alt}}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + \tau g(\nabla h_b, \mathbf{v})_{0,\Omega} - \tau g(H^{\text{Rand}}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$\forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$

mit geeigneten Randbedingungen, die i.A. von der Viskosität abhängen, z.B.:

$$H = H_\Gamma \quad \text{auf } \Gamma_{\text{open, inflow}} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_{\text{closed}} \quad (3.21)$$

und Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (3.22)$$

$$H(0) = H_0 \quad (3.23)$$

Dies ist ein nichtlineares Variationsproblem. Die Lösung kann hier z.B. mit Hilfe des Newton-Verfahrens ermittelt werden. Dazu setzen wir:

$$\begin{aligned} H^{k+1} &= H^k + \delta_H \quad \text{mit} \quad \delta_H \in L^2(\Omega) \\ \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^k + \delta_u \quad \delta_u \in H_{\Gamma_N}(\text{div}, \Omega)^2 \end{aligned}$$

Als nächstes werden die nichtlinearen Anteile $H \cdot \text{div} \mathbf{u}$ und $\frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H}$ linearisiert. Mit

$$\begin{aligned} |\mathbf{v} + \delta| &= \sqrt{(v_1 + \delta_1)^2 + (v_2 + \delta_2)^2} \\ &\stackrel{\text{Taylorentw.}}{\approx} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} + \frac{\delta_1 2v_1}{2\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} + \frac{\delta_2 2v_2}{2\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \\ &\approx |\mathbf{v}| + \frac{\mathbf{v}\delta}{|\mathbf{v}|} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{u}_k + \delta_u)|\mathbf{u}_k + \delta_u|}{H_k + \delta_H} &\approx (\mathbf{u}^k + \delta_u) \left(|\mathbf{u}^k| + \frac{\mathbf{u}^k \delta_u}{|\mathbf{u}^k|} \right) \left(\frac{1}{H^k} - \frac{\delta_H}{|(H^k)^2|} \right) \\ &\approx \mathbf{u}^k |\mathbf{u}^k| \frac{1}{H^k} + \frac{|\mathbf{u}^k| \delta_u}{H^k} + \frac{\mathbf{u}^k (\mathbf{u}^k \delta_u)}{|\mathbf{u}^k|} - \frac{\mathbf{u}^k |\mathbf{u}^k|}{(H^k)^2} \delta_H \end{aligned} \quad (3.25)$$

ergibt sich als ein linearisiertes Problem für die

Variationsformulierung:

$$\begin{aligned} &\text{Bestimme} \quad \delta_u \in H^1(\Omega)^2 \\ &\quad \delta_H \in L^2(\Omega) \text{ so, dass} \\ &(\delta_H, \eta) + \tau(\text{div} \mathbf{u}^k \delta_H, \eta) + \tau(H^k \text{div} \delta_u, \eta) \\ &= (\hat{H}^{alt}, \eta) - (H^k, \eta) - \tau(H^k \text{div} \mathbf{u}^k, \eta) \quad \forall \eta \in L^2(\Omega) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} &(\delta_u, \mathbf{v}) + \tau c_f \left(\frac{|\mathbf{u}^k| \delta_u}{H^k}, \mathbf{v} \right) + \tau c_f \left(\frac{\mathbf{u}^k (\mathbf{u}^k \delta_u)}{|\mathbf{u}^k| H^k}, \mathbf{v} \right) \\ &- \tau c_f \left(\frac{\mathbf{u}^k |\mathbf{u}^k|}{(H^k)^2} \delta_H, \mathbf{v} \right) + \tau g(\delta_H, \text{div} \mathbf{v}) + \tau \mu(\nabla \delta_u, \nabla \mathbf{v}) \\ &= (\hat{u}^{alt}, \mathbf{v}) + \tau g(\nabla h_b, \mathbf{v}) - (\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \tau c_f \left(\frac{\mathbf{u}^k |\mathbf{u}^k|}{H^k}, \mathbf{v} \right) \\ &- \tau g(H^k, \text{div} \mathbf{v}) - \tau \mu(\nabla \mathbf{u}^k, \nabla \mathbf{v}) - \tau g(H^{\text{Rand}}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{v})_{0,\Gamma} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$\forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$

wieder mit geeigneten Rand-

$$H = H_\Gamma \quad \text{auf } \Gamma_{\text{open, inflow}} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{u}_n = 0 \quad \text{auf } \Gamma_{\text{closed}} \quad (3.31)$$

bzw. Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (3.32)$$

$$H(0) = H_0 \quad (3.33)$$

Die oben stehende Variationsformulierung könnte nun dazu genutzt werden eine numerische Lösung für die Flachwassergleichungen zu erhalten. Allerdings ergeben sich dabei die unterschiedlichsten Schwierigkeiten. Man hat bei dem oben stehenden Problem ein Sattelpunktproblem zu lösen und Sattelpunktprobleme sind allgemein sehr aufwendig zu lösen. Beim Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems tauchen i.A. indefinite Matrizen auf. Desweiteren müssen die Ansatzräume für die Finiten Elemente einer Kompatibilitätsbedingung genügen. Man kann die Finiten Elemente also nicht völlig frei wählen, sondern muss die Ansatzräume aufeinander abstimmen. Und zu guter Letzt stellte es sich als sehr schwierig heraus, einen a-posteriori Fehlerschätzer für die oben stehen Variationsformulierung zu finden. Und gerade ein Fehlerschätzer ist zur effektiven Lösung der SWE unerlässlich.

Aus diesen unterschiedlichen Gründen wird auf die weitere Untersuchung der Variationsformulierung (3.28) verzichtet. Sie soll hier nur als Illustration dienen. Stattdessen wird mit dem nächsten Kapitel ein anderer Ansatz verfolgt, der frei von den oben beschriebenen Beschränkungen ist. Es wird eine Least-Squares Formulierung für die Flachwassergleichungen hergeleitet, bei der die Finiten Elemente frei gewählt werden können, man lediglich positiv definite lineare Gleichungssysteme zu lösen hat und sogar einen Fehlerschätzer erhält.

4 Least-Squares Ansatz

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Eigenschaften der Least-Squares Methode erläutert. Desweiteren wird knapp beschrieben welche Vorteile sich aus einer Least-Squares Formulierung im Gegensatz zu einer klassischen Variationsformulierung aus Kapitel 3 ergeben. Für einen umfangreicheren Überblick sei z.B. auf den Artikel [BOG98] von Bochev und Gunzburger verwiesen.

4.1 Einführung in Least-Squares

Die Least-Squares Formulierung eines Systems von PDGLn basiert auf der Minimierung einer Norm des zugehörigen Residuums des Systems.

Beispiel 4.1

Im Beispiel der Poisson-Gleichung

$$\Delta \mathbf{u} = f \quad (4.1)$$

wäre das Residuum $\mathcal{R} = \Delta \mathbf{u} - f$. Man sieht sofort, ist \mathbf{u} Lösung von (4.1) so gilt

$$\|\Delta \mathbf{u} - f\|^2 = 0 \quad (4.2)$$

und umgekehrt, wobei $\|\cdot\|$ eine vom Problem abhängende Norm ist.

Dies motiviert die folgende Vorgehensweise: Man versucht nun eine Näherungslösung \mathbf{u}_h an 4.1 zu finden, in dem man die Gleichung 4.2 nicht exakt, sondern eben nur näherungsweise löst. Dies geschieht durch Minimierung der linken Seite. In unserem Beispiel sucht man also:

Finde

$$\min_u \|\Delta \mathbf{u} - f\|^2 \quad (4.3)$$

Dabei ergibt sich gleich der offensichtliche Vorteil, dass die Norm des Residuums definitionsgemäß immer grösser oder gleich Null ist. Das bedeutet, falls man in Beispiel (4.2) ein \mathbf{u}_h mit

$$\|\Delta \mathbf{u}_h - f\|^2 = 0 \quad (4.4)$$

gefunden hat, oder allgemein eine Lösung, so dass die Norm des Residuums Null ergibt, so hat man auch die exakte Lösung des Problems gefunden.

Um die im obigen Beispiel stehende Least-Squares Formulierung 4.2 zu lösen, stellt man nun die Normalengleichungen

$$(\Delta \mathbf{u}_h, \Delta \mathbf{u}_h) = (f, f) \quad (4.5)$$

auf und löst dieses Variationsproblem.

Bemerkung 4.2

An der zur Illustration verwendeten DGL (4.1) kann man gut beobachten, dass es nicht in jedem Fall optimal ist, eine Least-Squares Formulierung zu benutzen. Wie man in der Normalengleichung (4.5) beobachten kann, ergibt sich in diesem Beispiel als Konditionszahl für einen Least-Squares Ansatz $O(h^{-4})$ im Gegensatz zu einer Konditionszahl von $O(h^{-2})$ bei der Standard Galerkin Methode.

Abhilfe schafft die Transformation der PDGL in ein System von PDGLn erster Ordnung (siehe auch Kapitel 4.2.1).

Desweiteren müssen die Ansatzräume für eine LS-Formulierung H^2 -konform sein, während für die Galerkin-Formulierung H^1 -Ansatzräume ausreichen.

4.1.1 Vor- und Nachteile von LeastSquares Formulierungen

Für die Implementierung der SWE wurde eine Least-Squares Formulierung gewählt. Dies hat verschiedene Gründe.

Die Least-Squares Formulierung bietet allgemein und insbesondere für das vorliegende Problem der SWE einige Vorteile.

So führt eine Standard Variationsformulierung für die Flachwassergleichungen, wie schon in Kapitel 3 bemerkt, auf ein meist schwer zu lösendes Sattelpunktproblem. Dabei können u.a. die Finiten Elemente für die Prozessvariablen nicht frei gewählt werden, sondern müssen einer Kompatibilitätsbedingung, der sog. inf-sup oder Babuska-Brezzi-Bedingung, genügen. Im Gegensatz dazu können bei einem Least-Squares Verfahren beliebige Finite Element-Ansatzräume kombiniert werden. Z.B. führt die Verwendung von standard polynomialen linearen Ansatzräumen (vgl. Kapitel 6.1) für beide Prozessvariablen zu Oszillationen in der Lösung (siehe auch [DAN02]). Desweiteren benötigt man für Advektions-Diffusions-Gleichungen mit grosser Advektion, zu denen natürlich auch die SWE mit geringer Viskosität gehören, Stabilisierungsverfahren wie z.B. artificial diffusion oder upwind- Verfahren (siehe auch Kapitel 3). Durch diese Stabilisierungsverfahren entstehen allerdings meist zusätzliche Ungenauigkeiten und grössere Fehler bei der Lösung der DGLn. Zumindest erhöht sich aber der Rechenaufwand zur Lösung bei Verwendung von Stabilisierungsverfahren. Im Gegensatz dazu wird bei der Least-Squares Methode keine Kompatibilitätsbedingung für die Ansatzräume benötigt.

Ein weiterer Vorteil der Least-Squares-Methode ist, dass man für das zu lösende Gleichungssystem immer positiv definite Matrizen bekommt. Bei allgemeinen Variationsformulierungen hat man es dagegen häufig mit indefiniten Matrizen und damit mit schwieriger zu lösenden Sattelpunktproblemen zu tun.

Desweiteren hat man die Möglichkeit Randbedingungen direkt in das Funktional einzubauen. Dies ist besonders bei komplizierten Randbedingungen sehr vorteilhaft, da die Ansatzräume sonst ebenfalls dementsprechend kompliziert wären. Von diesem Vorteil einer Least-Squares Formulierung wird im Folgenden noch Gebrauch gemacht werden. Denn die Randbedingung für den geschlossenen Rand hat bei der hier verwendeten Form der SWE die Gestalt

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + (\mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t} = 0. \quad (4.6)$$

Wie diese Randbedingung zustande kommt, wird ausführlich in Kapitel 5 beschrieben.

Man hat also unterschiedliche Randbedingungen für unterschiedliche Viskositätsparameter. Insbesondere im Fall $\mu = 0$ reduziert sich die Randbedingung für den geschlossenen Rand auf

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.7)$$

Dies in die Finite-Element-Ansatzräume einzubauen wäre sehr schwierig, deshalb wird die Randbedingung 4.6, wie in Bemerkung 5.9 beschrieben, umgeschrieben zu

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.8)$$

$$\mu \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (4.9)$$

und der Anteil 4.9 der Randbedingung direkt in das Funktional eingebaut.

Ein weiterer wichtiger Vorteil eines Least-Squares Verfahrens ist die Tatsache, dass es i.a. möglich ist, das LS-Funktional als einen a-posteriori Fehlerschätzer zu nutzen. Für ein lineares System von PDGLn ist es generell nicht sonderlich schwer einen residuellen Fehlerschätzer zu erhalten. Allerdings stellen die SWE ein nichtlineares System von PDGLn dar. In diesem Fall wäre der Aufwand einen residuellen Fehlerschätzer zu erhalten sehr gross, wenn es überhaupt möglich ist. Für die Least-Squares Methode hingegen reicht es zu zeigen, dass eine Norm des zu den PDGLn gehörenden Funktionals nach oben und unten durch eine beliebige Norm beschränkt ist. Dass also das Funktional koerziv und stetig ist. Die Norm sollte dabei möglichst nicht von einem evtl. vorhandenen Zeitschritt, sondern nur von Konstanten und den Prozessvariablen abhängen. In diesem Fall stellt die Norm des Funktionals einen Fehlerschätzer dar, denn es gilt die folgende Relation zwischen dem Residuum \mathcal{R} eines Funktionals \mathcal{F} und seiner Fréchet-Ableitung \mathcal{J} :

$$\mathcal{R}(X_h) = \mathcal{R}(X_h) - \mathcal{R}(X) \quad (4.10)$$

$$= \int_0^1 \mathcal{J}(X + s(X_h - X))[X_h - X] ds \quad (4.11)$$

wobei wie üblich X_h eine Näherung an die wahre Lösung X bezeichnet. Um zu zeigen, dass das Residuum \mathcal{R} einen a-posteriori Fehlerschätzer darstellt, genügt es also zu zeigen, dass

$$\int_0^1 \mathcal{J}(X + s(X_h - X))[X_h - X] ds \approx |||X_h - X|||^2 \quad (4.12)$$

mit einer geeigneten Norm $|||(\cdot, \cdot)|||$ auf dem Ansatzraum gilt. Diese Äquivalenz zu zeigen, ist ein wesentlicher Teil dieser Arbeit und wird ausführlich in Kapitel 7 behandelt.

Die Möglichkeit einen einfach zu berechnenden Fehlerschätzer zu erhalten, stellte auch ganz wesentlich die Motivation zur Verwendung der Least-Squares Methode dar.

Bemerkung 4.3

Mit Hilfe eines Fehlerschätzers ist es möglich die Näherungslösung auf einem Gitter adaptiv zu verfeinern, d.h. also nur dort zu verfeinern, wo der Fehler besonders gross ist. Dies reduziert den erforderlichen Rechenaufwand eine bestimmte Genauigkeit in der Lösung zu bekommen, ganz erheblich.

Least-Squares Formulierungen lassen sich allgemein in die folgenden Methoden einteilen [BOG98]. Aus Platzgründen werden die verschiedenen LS Methoden hier allerdings nur sehr grob erläutert. Für eine detailliertere Beschreibung sei wiederum auf [BOG98] verwiesen.

- Einfache L^2 - LS-Methoden (Basic L^2 methods)
Einfache L^2 -Least-Squares Methoden basieren auf einem System von PDGLn erster Ordnung. Das zugehörige Least-Squares Funktional beinhaltet ausschliesslich L^2 -Normen. Wenn das resultierende LS-Funktional vollständig H^1 -koerziv (fully H^1 coercive) ist, sind diese Formulierungen zur Lösung des Problems sehr gut geeignet. Vollständig H^1 -koerziv bedeutet, dass die auftauchenden Normen äquivalent zu einem Produkt aus H^1 -Normen sind. In diesem Fall ist es möglich die Variablen durch Umformungen entkoppeln. Man erhält eine Konditionszahl der Ordnung $o(h^{-2})$ und einen bezüglich der H^1 -Norm optimalen Fehlerschätzer. Als weiterer Vorteil ist die Formulierung sehr leicht aufzustellen und das Funktional ausserdem leicht zu implementieren.
- gewichtete L^2 -Methoden (weighted L^2 methods)
Bei gewichteten L^2 -Methoden werden die in dem Least-Squares Funktional auftauchenden Normen, wie der Name schon vermuten lässt, zusätzlich mit Gewichten versehen. Diese Gewichte sind i.A. von der Gitterkonstante abhängig. Viele Systeme sind nicht vollständig H^1 -koerziv, wie z.B. auch das Stokes-Problem und die SWE. Denn bei diesen beiden PDGLn sucht man eine Lösungsvariable in dem Zwischenraum $H(\text{div}, \Omega)$. Bei der LS-Formulierung taucht daher auch die diesem Raum zugeordnete Norm $\|\cdot\|_{\text{div}, \Omega}$ auf. Und damit ist klar, dass diese Formulierungen nicht vollständig H^1 -koerziv sein können. Für solche Probleme können gewichtete L^2 -LS-Methoden verwendet werden. Gewichtete Methoden lassen sich i.A. dazu verwenden Probleme zu beheben, die dadurch entstehen, dass
 - andere Normen als die Norm $\|\cdot\|_0^2$ bei der LS-Formulierung verwendet werden,
 - man ungünstige Randbedingungen zu implementieren hat oder
 - man einspringende Ecken in der Geometrie hat.
- H^{-1} -Methoden
 H^{-1} -Methoden, sind LS-Methoden, in denen negative Sobolev-Normen in der Formulierung auftreten. Die auftretenden negativen Sobolev-Normen verkomplizieren allerdings die Implementierung einer H^{-1} -LS-Formulierung entscheidend.

Da bei den hier untersuchten SWE u.a. zumindest eine Lösung in $H(\text{div}, \Omega)$ gesucht wird, wird zur Aufstellung der LS-Formulierung eine gewichtete Least-Squares-Methode genutzt.

4.2 Das Least-Squares Funktional

4.2.1 Vorbereitung

Bevor die konkrete Least-Squares Formulierung der Shallow Water Equations gegeben wird, werden wir zunächst eine neue Hilfsvariable \mathbf{U} für den Gradienten des Flusses \mathbf{u}

einführen. Es wird also

$$\mathbf{U} := \nabla \mathbf{u} \quad (4.13)$$

gesetzt.

Mit Hilfe dieser Standardtechnik, die z.B. auch bei [CLM94] gefunden werden kann, wird aus einem System von PDGLn zweiter Ordnung ein äquivalentes System erster Ordnung geschaffen. Man umgeht damit die Schwierigkeiten, die sich beim Lösen von PDGLn zweiter Ordnung mit Hilfe eines Least-Squares Ansatzes ergeben (vgl. Bemerkung 4.2).

Desweiteren ist es durch die Einführung der zusätzlichen Variablen möglich, einen weiteren Finite-Element Ansatzraum für den Fluss \mathbf{u} zu verwenden. So ist es möglich, die sog. MTW-Räume, die in Kapitel 6.3 näher betrachtet werden, als Ansatzräume für den Fluss \mathbf{u} zu nutzen.

4.2.2 Das SWE Least-Squares Funktional

Nach Anwendung der Charakteristiken-Methode (vgl. 3.2) und der Einführung der neuen Hilfsvariablen \mathbf{U} sehen die SWE (3.3)-(3.4) nun wie folgt aus. Unsere zu lösende Least-Squares Formulierung lautet zunächst:

Finde $(\hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\text{div } \cdot, \Omega) \cap \mu \cdot H_{\Gamma_N}^1(\Omega)^2 \times H_{\Gamma_D}(\text{div } \cdot, \Omega)^2$
so dass

$$\|\mathcal{R}(H^D + \hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}})\|_{0,\Omega}^2 \quad (4.15)$$

minimiert wird.

Dabei ist nach der Beschreibung der LS-Methode aus der Einleitung klar, dass das Residuum \mathcal{R} definiert ist als

$$\mathcal{R}(H, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) =$$

$$\left(\begin{array}{c} H - \hat{H}^{\text{old}} + \tau H \text{div } \mathbf{u} \\ \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}} + \tau(g \nabla(H - H_b) + c_f \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H} + \sqrt{\mu} \text{div } \mathbf{U} + \mathbf{F}) \\ \tau^{1/2}(\mathbf{U} + \sqrt{\mu} \nabla \mathbf{u}) \end{array} \right). \quad (4.16)$$

Allerdings suchen wir die Lösung der Variablen \mathbf{u} aufgrund der Randbedingungen immer noch im Raum $H_{\Gamma_N}(\text{div } \cdot, \Omega) \cap \mu \cdot H_{\Gamma_N}^1(\Omega)^2$. Es ist klar, dass dieser Raum unterschiedliche Form für verschiedene Werte von μ annehmen kann. In diesem von μ abhängenden Raum zu suchen ist problematisch. Wir umgehen diese Schwierigkeit, indem wir den von μ abhängenden Teil der Randbedingungen, nämlich $\mu \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}\|_{\Gamma}$, direkt in das Funktional einbauen. Die Randbedingung wird dann schwach erfüllt.

Dazu definieren wir

$$\mathcal{F}(H^D + \eta, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}(H^D + H, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}})\|_{0,K}^2 + \tau \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E\|_{0,E}^2 \quad (4.17)$$

Dabei steht $[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E$ für einen Kantensprungterm.

Definition 4.4

Genauer, der Kantensprung $[\mathbf{u}]_E$ ist definiert als

$$[\mathbf{u}]_E = \begin{cases} \mathbf{u}|_{T^l} - \mathbf{u}|_{T^r} & , E \in \mathcal{E} \cap \Omega \\ \mathbf{u}|_{T^l} & , E \in \mathcal{E} \cap \Gamma_N \\ 0 & , E \in \mathcal{E} \cap \Gamma_D \end{cases} \quad (4.18)$$

wobei T^l und T^r das linke bzw. das rechte angrenzende Dreieck an der Kante E ist. Analog ist es möglich den Kantensprung für den Tangentialanteil der Geschwindigkeit zu definieren.

$$[\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E = \begin{cases} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}|_{T^l} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}|_{T^r} & , E \in \mathcal{E} \cap \Omega \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}|_{T^l} & , E \in \mathcal{E} \cap \Gamma_N \\ 0 & , E \in \mathcal{E} \cap \Gamma_D \end{cases} \quad (4.19)$$

Bemerkung 4.5

Für stückweise polynomiale Funktionen $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ gilt

$$[\mathbf{u}]_E = [\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}]_E \mathbf{n} + [\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E \mathbf{t} = [\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E \mathbf{t} \quad (4.20)$$

da die Normalkomponente des Sprungs auf allen Kanten verschwindet.

Das Least-Squares Problem unter Berücksichtigung der Randbedingungen besteht nun also darin:

Finde $(\hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}, \Omega) \times H_{\Gamma_D}(\operatorname{div}, \Omega)^2$ so dass

$$\mathcal{F}(H^D + \hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) \leq \mathcal{F}(H^D + \eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) \quad (4.22)$$

gilt, für alle $(\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}, \Omega) \times H_{\Gamma_D}(\operatorname{div}, \Omega)^2$.

Die Finite Element Approximation $(H_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$ erfüllt dann natürlich

$$\mathcal{F}(H^D + \hat{H}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h; \hat{p}_h^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}_h^{\text{old}}) \leq \mathcal{F}(p_h^D + q_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h; \hat{p}_h^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}_h^{\text{old}}) \quad (4.23)$$

für alle $(q_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$. Wobei $Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$ Finite Element Ansatzräume bezeichnen, die in Kapitel 6 näher beschrieben werden. Die zum Funktional 4.17 gehörende Bilinearform ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(H, \mathbf{u}, \mathbf{U}; q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{R}(H^D + \hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{p}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}), \mathcal{R}(H^D + \hat{q}, \mathbf{v}, \mathbf{V}; \hat{q}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{v}}^{\text{old}}))_{0,K} \\ &+ \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} ([\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E, [\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E)_{0,E} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Lösung von 4.22 erfüllt natürlich auch die Variationsformulierung

$$\mathcal{B}(H^D + \hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}; r, \mathbf{w}, \mathbf{W}) = 0 \quad (4.25)$$

für alle $(r, \mathbf{w}, \mathbf{W}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}, \Omega) \times H_{\Gamma_D}(\operatorname{div}, \Omega)^2$. Ebenso erfüllt die Lösung von 4.23

$$\mathcal{B}(H^D + \hat{H}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h; r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) = 0 \quad (4.26)$$

für alle $(r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$.

Bemerkung 4.6

Für den Fall $\mu = 0$ reduziert sich das System (4.16) zu

$$\mathcal{R}_0(H, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) = \begin{pmatrix} H - \hat{H}^{\text{old}} + \tau H \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}} + \tau \left(g \nabla (H - H_b) + c_f \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H} + \mathbf{F} \right) \\ \tau^{1/2} \mathbf{U} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

und es gilt

$$\mathcal{R}(H, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) = \mathcal{R}_0(H, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) + \mu^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \operatorname{div} \mathbf{U} \\ \tau^{1/2} \nabla \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Die Fréchet-Ableitung von \mathcal{R} bzgl. $(H, \mathbf{u}, \mathbf{U})$, die wir noch benötigen, hat dann folgende Gestalt:

$$\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}] = \begin{pmatrix} \eta + \tau(H \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta \operatorname{div} \mathbf{u}) \\ D(H, \mathbf{u})\mathbf{v} + \tau \left(g \nabla \eta - \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H^2} \eta + \sqrt{\mu} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \\ \tau^{1/2}(\mathbf{V} + \sqrt{\mu} \nabla \mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

mit

$$D(H, \mathbf{u}) = \left(1 + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\tau c_f}{|\mathbf{u}|H} \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.7

Die Fréchet-Ableitung von \mathcal{R}_0 bzgl. (H, \mathbf{u}) hat die Form

$$\mathcal{J}_0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}] = \begin{pmatrix} \eta + \tau(H \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta \operatorname{div} \mathbf{u}) \\ D(H, \mathbf{u})\mathbf{v} + \tau \left(g \nabla \eta - \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H^2} \eta \right) \\ \tau^{1/2} \mathbf{V} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Die Gleichungen (4.16) und (4.29) führen dann direkt auf das zu lösende Variationsproblem, die Normalgleichungen:

Finde

$(\hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\operatorname{div} \cdot, \Omega) \times H_{\Gamma_D}(\operatorname{div} \cdot, \Omega)^2$ so dass

$(\mathcal{R}(H^D + \hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}), \mathcal{J}(H, \mathbf{u}, \mathbf{U})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}])_{0, \Omega}$

$$+ \left(\tau \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} [\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E, \tau \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} [\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E \right)_{0, E} = 0$$

gilt für alle $(\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\operatorname{div} \cdot, \Omega) \times H_{\Gamma_D}(\operatorname{div} \cdot, \Omega)^2$

4.2.3 Das Darcy Stokes Least-Squares Funktional

Wenn man die Fréchet-Ableitung von \mathcal{R} bzgl. $(H, \mathbf{u}, \mathbf{U})$ (4.29) näher betrachtet, fällt die Ähnlichkeit zwischen $\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]$ für $\mathbf{u} \equiv 0, H \equiv 1$ und $\tau = 1$ und den Stokes Gleichungen auf.

Die grosse Ähnlichkeit motiviert die folgende nähere Betrachtung des Systems

$$\begin{aligned} \delta p + \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{u} + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{0} \text{ in } \Omega, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} &= g \text{ on } \Gamma, \\ \mu(\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) &= 0 \text{ on } \Gamma \end{aligned} \quad (4.31)$$

mit $\delta, \mu \geq 0$ und die Hoffnung, dass Ergebnisse, die sich für 4.31 gewinnen lassen, auch auf die Flachwassergleichungen übertragen werden können.

Bemerkung 4.8

Das System (4.31) entspricht für $(\delta, \mu) = (0, 1)$ einem Stokes System, während es für $(\delta, \mu) = (0, 0)$ einfach eine Umformulierung der Laplace-Gleichung als System erster Ordnung ist.

Im Fall (4.31) ist das Residuum nach der Einführung einer Hilfsvariablen für den Gradient des Flusses (vgl. 4.13) gegeben durch

$$\mathcal{R}_S(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \delta p + \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} + \nabla p + \mu^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{U} \\ \mathbf{U} + \mu^{1/2} \nabla \mathbf{u} \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Analog zu den Flachwassergleichungen, besteht das Least-Squares Problem für den Stokes Fall darin, $(p, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma^1(\Omega)^2 \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ zu finden, so dass

$$\|\mathcal{R}_S(p, \mathbf{u}^N + \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{U})\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\mathcal{R}_S(q, \mathbf{u}^N + \mathbf{v}, \mathbf{V})\|_{0,\Omega}^2 \quad (4.33)$$

erfüllt ist, für alle $(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma^1(\Omega)^2 \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$.

Ebenso wie bei den SWE muss allerdings auch hier die Randbedingung $\mu(\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) = 0$ noch eingebaut werden. Wir definieren also ähnlich wie im Fall der SWE

$$\mathcal{F}_S(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}_S(p, \mathbf{u}, \mathbf{U})\|_{0,K}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E\|_{0,E}^2 \quad (4.34)$$

und das Least-Squares Minimierungsproblem besteht nun also darin, finde $(p, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ so dass

$$\mathcal{F}_S(p, \mathbf{u}^N + \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{U}) \leq \mathcal{F}_S(q, \mathbf{u}^N + \mathbf{v}, \mathbf{V}) \quad (4.35)$$

gilt für alle $(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$.

Bemerkung 4.9

Zur Vereinfachung nehmen wir im weiteren Verlauf an, dass $\delta > 0$ gilt. Im Fall $\delta = 0$, kann eine zusätzliche Bedingung wie

$$\int_{\Gamma} p \, ds = 0$$

eingefügt werden, um eine eindeutige Lösung p zu garantieren.

Die zugehörige Finite Element Approximation $(p_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$ erfüllt dann natürlich analog zu 4.23

$$\mathcal{F}_S(p_h, \mathbf{u}^N + \mathbf{u}_h, \mathbf{U}) \leq \mathcal{F}_S(q_h, \mathbf{u}^N + \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h) \quad (4.36)$$

für alle $(q_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$.

Die zu 4.35 gehörende Bilinearform wird dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_S(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}; q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{R}_S(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}), \mathcal{R}_S(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}))_{0,K} \\ &+ \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} ([t \cdot \mathbf{u}]_E, [t \cdot \mathbf{v}]_E)_{0,E} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Lösung von 4.35 erfüllt natürlich auch die Variationsformulierung

$$\mathcal{B}_S(p, \mathbf{u}^N + \mathbf{u}, \mathbf{U}; r, \mathbf{w}, \mathbf{W}) = 0 \quad (4.38)$$

für alle $(r, \mathbf{w}, \mathbf{W}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\text{div}, \Omega) \times H_{\Gamma_D}(\text{div}, \Omega)^2$.
Ebenso erfüllt die Lösung von 4.36

$$\mathcal{B}_S(p, \mathbf{u}^N + \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h; r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) = 0 \quad (4.39)$$

für alle $(r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$.

Bemerkung 4.10

Wenn wir das System (4.32) für den Fall $\mu = 0$ mit

$$\mathcal{R}_{S0}(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \delta p + \text{div } \mathbf{u} \\ \mathbf{u} + \nabla p \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}$$

bezeichnen, sieht man sofort, dass

$$\mathcal{R}_S(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = \mathcal{R}_{S0}(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) + \mu^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \text{div } \mathbf{U} \\ \nabla \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

gilt.

5 Randbedingungen

In diesem Kapitel wird auf die bisher nicht besprochenen Probleme näher eingegangen, die im Zusammenhang mit den Randbedingungen auftauchen. Es werden die in dieser Arbeit verwendeten Randbedingungen für die Flachwassergleichungen näher erläutert und in einem Spursatz gezeigt, dass insbesondere die für den geschlossenen Rand verwendete Randbedingung mathematisch sinnvoll ist.

5.1 Allgemeines

Die in Kapitel 3 stehende Variationsformulierung ist ebenso wie die erste Least-Squares-Formulierung (4.15) aus Kapitel 4 noch unvollständig ohne physikalisch korrekte Rand- und Anfangsbedingungen. Doch nicht nur physikalisch, sondern auch im mathematischen Sinn ist es i.A. nötig, PDGLn um Rand- und Anfangsbedingungen zu erweitern. Nur so ist es in der Regel möglich eine eindeutige Lösung für eine PDGL garantieren zu können.

Beispiel 5.1

Betrachtet man die (parabolische) Wärmeleitungsgleichung

$$\mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (5.1)$$

so stellt man fest, dass für jede Lösung $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ von (5.1) auch $\mathbf{u}(c^2 \cdot t, c \cdot \mathbf{x})$, $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung liefert. Mit einer geeigneten Anfangsbedingung, z.B.

$$\mathbf{u}(0, \cdot) = g \quad \text{auf } \Omega \quad (5.2)$$

und einer Randbedingung wie z.B.

$$\mathbf{u} = g \quad \text{auf } [0, T] \times \partial\Omega \quad (5.3)$$

mit $g \in L^\infty$ oder

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } [0, T] \times \partial\Omega \quad (5.4)$$

erhält man für das obige Anfangsrandwertproblem (5.1),(5.2),(5.3) allerdings eine **eindeutige** Lösung.

Es gibt eine Reihe von unterschiedlich möglichen, problemabhängigen Randbedingungen für die Flachwassergleichungen. So muss eine Wand in einem Hafenbecken anders als ein zum Meer offener Rand behandelt werden. Ebenso können mit Randbedingungen vom offenen Meer kommende Wellen, z.B. bei Ebbe oder Flut, beschrieben werden.

Die richtige Wahl der Randbedingungen ist daher ein wichtiger Faktor bei der Aufstellung und Lösung der zu modellierenden PDGLn.

Eine gute Übersicht über mögliche Randbedingungen für die Flachwassergleichungen gibt z.B. [AQF94].

5.1.1 Charakterisierung der Randbedingungen

Die Ränder des betrachteten Gebietes Ω werden zunächst in offene und geschlossene Ränder eingeteilt. Dabei werden die offenen Ränder nochmals in Ein- bzw. Ausflussränder unterteilt. Offene Einflussränder sind charakterisiert durch die Bedingung

$$\{x \in \partial\Omega : \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(x) < 0\}. \quad (5.5)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{n} wie üblich die nach aussen gerichtete Normale am Rand. Entsprechend wird der Ausflussrand durch

$$\{x \in \partial\Omega : \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(x) > 0\} \quad (5.6)$$

beschrieben. Dabei ist es natürlich möglich, dass sich Einflussränder mit der Zeit in Ausflussränder ändern und umgekehrt.

Bemerkung 5.2

Ebenfalls möglich wäre die Änderung von offenen zu geschlossenen Rändern oder eine Änderung der Geometrie.

Für offene Einflussränder (Inflow open boundary) Γ_{inflow} wird

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = g \quad (\text{nat.}) \text{ auf } \Gamma_{inflow} \quad (5.7)$$

mit $g \in L^\infty$ auf dem Rand gesetzt.

Diese Randbedingung ist physikalisch sinnvoll, da die Änderung des Einströmflusses auf diesem Randstück konstant gehalten wird.

Ganz ähnlich wird der offene Ausflussrand (Outflow open boundary) $\Gamma_{outflow}$ behandelt. Es wird

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = g \quad (\text{nat.}) \text{ auf } \Gamma_{outflow} \quad (5.8)$$

wieder mit $g \in L^\infty$ bzw.

$$H = H_\Gamma \quad (\text{ess.}) \text{ auf } \Gamma_{outflow} \quad (5.9)$$

vorgeschrieben.

Die oben beschriebenen Randbedingungen für die Ein- bzw. Ausströmränder sind sinnvoll unabhängig vom Viskositätsparameter μ . Die Randbedingung für den geschlossenen Rand Γ_{closed} gestaltet sich beim vorliegenden Fall allerdings schwieriger, denn eine besondere Schwierigkeit bei den Flachwassergleichungen ergibt sich daraus, dass sich mit der

Viskosität auch die Randbedingung für den geschlossenen Rand ändert. Bei sehr hoher Viskositätskonstante hat man eine sehr zähe Flüssigkeit, die wie Honig am geschlossenen Rand kleben bleibt und sich daher am Rand nicht bewegt. Man muss also die Geschwindigkeit am Rand (closed boundary) auf Null setzen, d.h. man erhält in diesem Fall als Randbedingung $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf Γ_{closed} . Man benötigt eine sog. no-slip Bedingung. Anders ist der Fall bei sehr kleiner Viskosität bzw. dem theoretischen Fall einer Viskosität von Null. Hier haftet die Flüssigkeit nicht bzw. in sehr, sehr geringem Masse am Rand. Sie kann also in Tangentialrichtung nahezu ungehindert strömen. In Normalenrichtung muss der Fluss natürlich aufgrund des undurchlässigen Randes auf Null gesetzt werden. Man hat also für den Fall $\mu = 0$ die Randbedingung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ_{closed} .

Die Herausforderung besteht nun darin, eine in μ gleichmässig stetige Randbedingung zu finden, die den beiden Randbedingungen in den 'Extremfällen' $\mu = 0$ und $\mu \gg 0$ genügt. Dies wird im nächsten Unterabschnitt ausführlich untersucht werden. Dabei ist zu beachten, dass $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$ für $\mu = 0$, aber $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2$ für $\mu > 0$.

Bemerkung 5.3

Die Kennzeichnung (ess.) bzw. (nat.) der einzelnen Randbedingungen, gibt an, ob diese Randbedingungen wesentlich oder natürlich sind. Natürliche Randbedingungen haben den Vorteil, dass sie direkt in die Variationsformulierung eingebaut werden können. Daher auch der Name natürliche Randbedingung. Notwendige Randbedingungen muss man dagegen explizit fordern.

5.2 Randbedingung für den geschlossenen Rand

Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen ist zunächst der Fall $\mu = 0$, also der künstliche Fall ohne Viskosität. In diesem Fall hat man die Randbedingung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf dem geschlossenen Rand. Zunächst wird in einem bekannten Spursatz gezeigt, dass die obige Randbedingung wohldefiniert ist. Davon ausgehend wird ein Spursatz für den allgemeinen Fall $\mu \geq 0$ gegeben, der sich für den Fall $\mu = 0$ auf die Randbedingung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ und für grosse μ auf die Randbedingung $\mathbf{u} = 0$ reduziert.

Lemma 5.4

Die Abbildung $\gamma_n : \mathbf{v} \rightarrow (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_\Gamma$ definiert auf $D(\bar{\Omega})^N$ kann erweitert werden zu einer linearen und stetigen Abbildung, ebenfalls als γ_n bezeichnet, von $H(\text{div})$ nach $H^{-1/2}(\Gamma)$. Hierbei bezeichnet $D(\Omega)$ den linearen Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf Ω .

Beweis:[GIR86]

Sei $\phi \in D(\bar{\Omega})$ und $\mathbf{v} \in D(\bar{\Omega})^2$. Dann setzen wir $D(\bar{\Omega}) = \{\phi|_\Omega : \phi \in D(\mathbb{R}^2)\}$ und es gilt die Greensche Formel (2.16):

$$(\mathbf{v}, \text{grad } \phi) + (\text{div } \mathbf{v}, \phi) = \int_\Gamma \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (5.10)$$

Da $D(\bar{\Omega})$ dicht in $H^1(\Omega)$ liegt, sind diese Ungleichungen immernoch gültig, wenn $\phi \in H^1(\Omega)$. Daher gilt

$$\left| \int_\Gamma \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \right| \leq \|\mathbf{v}\|_{H(\text{div}; \Omega)} \|\phi\|_{1, \Omega} \quad \forall \phi \in H^1(\Omega), \forall \mathbf{v} \in D(\bar{\Omega})^N.$$

Sei nun $\lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dann existiert ein Element $\phi \in H^1(\Omega)$, so dass $\phi = \lambda$ auf Γ . Daher folgt aus der obigen Ungleichung:

$$\left| \int_{\Gamma} \lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dx \right| \leq \| \mathbf{v} \|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \| \lambda \|_{1/2, \Gamma} \quad \forall \lambda \in H^{1/2}(\Gamma), \forall \mathbf{v} \in D(\bar{\Omega})^N. \quad (5.11)$$

Daher gilt

$$\| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \|_{-1/2, \Gamma} \leq \| \mathbf{v} \|_{H(\operatorname{div}; \Omega)} \quad (5.12)$$

D.h. die Abbildung γ_n definiert auf $D(\bar{\Omega})^2$ ist stetig in der Norm von $H(\operatorname{div}; \Omega)$. Da $D(\bar{\Omega})^2$ dicht in $H(\operatorname{div}; \Omega)$ liegt, kann γ_n stetig fortgesetzt werden zu einer Abbildung $\gamma_n \in L(H(\operatorname{div}; \Omega); H^{-1/2}(\Gamma))$, so dass

$$\| \gamma_n \|_{L(H(\operatorname{div}; \Omega); H^{-1/2}(\Gamma))} \leq 1$$

□

Bemerkung 5.5

Die Spur von $H(\operatorname{div}; \Omega)$ 'lebt' also in $H^{-1/2}$. Die Spur von $H^1(\Omega)$ bildet hingegen auf $H^{1/2}$ ab. Dies muss miteinander kombiniert werden. Dazu wird u.a. das folgende Lemma benötigt.

Lemma 5.6

Die Abbildung $\gamma_t : \mathbf{v} \rightarrow (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})_{\Gamma}$ definiert auf $D(\bar{\Omega})^N$ kann erweitert werden zu einer linearen und stetigen Abbildung, ebenfalls als γ_t bezeichnet, von $H(\operatorname{curl})$ nach $H^{-1/2}(\Gamma)$. Hierbei bezeichnet $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$ wie üblich die Tangentialkomponente von \mathbf{v} auf dem Rand.

Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Lemma 5.4. □

Da bekanntlich die Beziehung $\mathbf{v}|_{\Gamma} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ gilt, ist es naheliegend einen Spursatz von $H(\operatorname{div}; \Omega) \cap \mu \cdot H^1(\Omega)^2$ nach $H^{-1/2}(\Gamma) \cap \mu \cdot H^{1/2}$ mit der Abbildung

$$\gamma_{nt} : \mathbf{v} \rightarrow [\mu \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]_{\Gamma} \quad (5.13)$$

zu verwenden. Durch die Kombination der beiden Lemmata 5.4 und 5.6 erhält man einen Spursatz von $H(\operatorname{div}; \Omega) \cap \mu \cdot H(\operatorname{curl}; \Omega)$ nach $H^{-1/2}(\Gamma) \cap \mu \cdot H^{1/2}$, mit $0 \leq \mu \leq 1$. Dabei wird \mathbf{v} wie angedacht abgebildet durch

$$\gamma_{nt} : \mathbf{v} \rightarrow [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]_{\Gamma}. \quad (5.14)$$

Satz 5.7 (Spursatz)

Die Abbildung $\gamma_{nt} : \mathbf{v} \rightarrow [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]_{\Gamma}$ definiert auf $D(\bar{\Omega})^N$ kann erweitert werden zu einer linearen und für $\mu \rightarrow 0$ gleichmässig stetigen Abbildung, ebenfalls als γ_{nt} bezeichnet, von $H(\operatorname{div}; \Omega) \cap \mu \cdot H^1(\Omega)^2$ nach $H^{-1/2}(\Gamma) \cap \mu \cdot H^{1/2}$.

Der Beweis erfolgt mit den obigen Überlegungen und einer Kombination von Lemma 5.4 und Lemma 5.6. \square

Durch diesen Spursatz ist es möglich, für die Flachwassergleichungen (3.3)-(3.4) die Randbedingungen am geschlossen Rand zu wählen als

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = 0 \text{ auf } \Gamma_{closed} \quad (5.15)$$

für $0 \leq \mu \leq 1$.

Bemerkung 5.8

Für den Fall $\mu = 0$ reduziert sich die Randbedingung, wie oben erwähnt, auf den Fall $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Es ist eine Abbildung auf den Raum $H^{-1/2}(\Omega)$.

Für den Fall $\mu > 0$ bildet 5.15 auf den Raum $H^{1/2}(\Omega)$ ab, denn $H^{1/2}(\Omega) \subset H^{-1/2}(\Omega)$

Für $\mu = 1$ ist 5.15 natürlich identisch zur bekannten Randbedingung $\mathbf{u} = 0$, die für SWE mit hoher Viskosität verwendet wird.

Aufgrund der in diesem Kapitel beschriebenen Randbedingungen, erhält man insgesamt die folgende, bereits in Kapitel 4 vorgestellte, Least-Squares Formulierung:

Finde $(\hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\text{div}, \Omega) \times H_{\Gamma_D}(\text{div}, \Omega)^2$ so dass

$$\mathcal{F}(H^D + \hat{H}, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) \leq \mathcal{F}(H^D + \eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) \quad (5.16)$$

gilt, für alle $(\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\text{div}, \Omega) \cap \mu \cdot H_{\Gamma_N}^1(\Omega)^2 \times H_{\Gamma_D}(\text{div}, \Omega)^2$.

Dabei waren \mathcal{F} , \mathcal{R} und \mathcal{J} definiert als

$$\mathcal{F}(H^D + \eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}(H^D + \eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}})\|_{0,K}^2 + \tau \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2, \quad (5.17)$$

$$\mathcal{R}(H, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) =$$

$$\left(\begin{array}{c} H - \hat{H}^{\text{old}} + \tau H \text{div } \mathbf{u} \\ \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}} + \tau (g \nabla (H - H_b) + c_f \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H} + \sqrt{\mu} \text{div } \mathbf{U} + \mathbf{F}) \\ \tau^{1/2} (\mathbf{U} + \sqrt{\mu} \nabla \mathbf{u}) \end{array} \right) \quad (5.18)$$

$$\text{bzw. } \mathcal{J}(H, \mathbf{u}, \mathbf{U})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}] =$$

$$\left(\begin{array}{c} \eta + \tau (H \text{div } \mathbf{v} + \eta \text{div } \mathbf{u}) \\ \mathbf{v} + \tau \left(g \nabla \eta + c_f \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H} \mathbf{v} + \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|H} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H^2} \eta \right) + \sqrt{\mu} \text{div } \mathbf{V} \right) \\ \tau^{1/2} (\mathbf{V} + \sqrt{\mu} \nabla \mathbf{v}) \end{array} \right) \quad (5.19)$$

Bemerkung 5.9

In Formulierung 5.16 wird deutlich, dass die Randbedingungen auf dem Rand Γ_{inflow}

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (\text{nat.}) \quad (5.20)$$

und die Randbedingungen auf dem Randstück $\Gamma_{outflow}$

$$H = H_\Gamma \text{ (ess.)} \quad (5.21)$$

bereits in den Ansatzräumen für die finiten Elemente eingebaut sind. Die Randbedingung 5.15 wurde zerlegt in die Teile $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ und $\mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) = 0$. Denn natürlich ist $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = 0$, wenn $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ und $\mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) = 0$. Diese Aufspaltung hat den Vorteil, dass es möglich ist, den ersten Teil der Randbedingung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ wieder direkt in die Ansatzräume einzubauen, während der zweite, aufgrund des Parameters μ variable Teil $\mu(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) = 0$ explizit in die Least-Squares-Formulierung eingebaut wurde. Dies ist gut zu beobachten in der Definition von \mathcal{F} (5.17).

Bemerkung 5.10 (Implementierung der Randbedingung)

- i) In der Implementierung wurde die, in die LS-Formulierung eingebaute Randbedingung, $\mu \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}\|_{1/2, \Gamma_N}^2$ durch die strengere, aber besser implementierbare Norm

$$\mu \sum_{e \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_e} \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}\|_{e, \Gamma_N}^2 \quad (5.22)$$

ersetzt, wobei e die Menge der Kanten \mathcal{E} durchläuft und h_e die Länge der jeweiligen Kante ist.

- ii) Eine MTW-Funktion \mathbf{u}_h , die genauer in Kapitel 6.3 untersucht wird, hat als Freiheitsgrade auf einem Dreieck
- a) die Normalkomponente von \mathbf{u}_h am Anfangs- und am Endpunkt jeder Kante,
 - b) den Wert des Integrals über die Tangentialkomponente an jeder Kante.

Aufgrund dieser Freiheitsgrade fällt die Implementierung der Randbedingungen relativ leicht aus.

6 FE-Ansatzräume

In diesem Kapitel werden zunächst die verwendeten Finite-Element Ansatzräume genauer beschrieben. Anschliessend wird kurz auf einige Aspekte der Implementierung unter MATLAB eingegangen. Zur Anwendung in den Beispielrechnungen (vgl. Kapitel 8) kamen dabei verschiedene konforme und nichtkonforme Ansatzräume, angefangen bei simplen standard konformen H^1 -Elementen, bestehend aus stückweisen Polynomen, über Raviart-Thomas Elemente bis zu MTW-Elementen (vgl. Unterabschnitt 6.3).

In diesem und in den folgenden Abschnitten bezeichnet \mathcal{T}_h eine quasiuniforme Triangulierung der Feinheit h , T ein Dreieck dieser Triangulierung und $P_k(T)$ den Raum der Polynome vom Grad k auf dem Dreieck T .

Definition 6.1

Eine Familie von Zerlegungen \mathcal{T}_h heisst quasiuniform, wenn es eine Zahl $\kappa > 0$ gibt, so dass jedes T aus \mathcal{T}_h einen Kreis vom Radius ρ_T mit

$$\rho_T \geq h_T/\kappa$$

enthält, wobei h_T der halbe Durchmesser von T ist.

6.1 Standard Polynomiale Ansatzräume

Zur Approximation der Wasserhöhe H werden in dieser Arbeit standard konforme H^1 -Elemente benutzt.

Der Ansatzraum Q_k der standard konformen H^1 -Elementen, bestehend aus stückweisen Polynomen des Grades k , ist definiert als

$$P_k(T) = \left\{ p(x_1, x_2) : p(x_1, x_2) = \sum_{i,j \leq k} a_{ij} x_1^i x_2^j \right\}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.1)$$

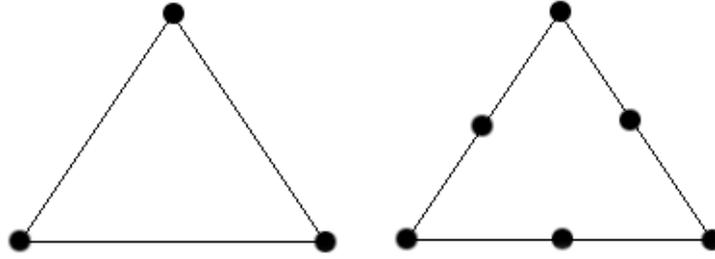
Bemerkung 6.2

Die Dimension des Raums Q_k ist $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

Bemerkung 6.3

Anschaulich besteht der Ansatzraum Q_1 des Grades 1, aus linearen Funktionen auf dem Dreieck T und hat als Freiheitsgrade die Eckpunkte auf den Dreiecken.

Der zweite hier verwendete Ansatzraum ist Q_2 und besteht aus quadratischen Funktionen über jedem Dreieck T . Die Freiheitsgrade von Q_2 sind neben den Eckpunkten jedes Dreiecks die Kantenmittelpunkte auf jeder Kante (siehe Abbildung 6.1).

Abbildung 6.1: Freiheitsgrade der Ansatzräume Q_1 und Q_2

6.2 Das Raviart-Thomas Element

Um Näherungslösungen für die Hilfsvariable \mathbf{U} bzw. die Geschwindigkeit \mathbf{u} im Raum $H(\text{div}, \Omega)$ mit Hilfe finiter Elemente zu finden, soll der unendlich dimensionale Raum $H(\text{div}, \Omega)$ durch endlich dimensionale Räume approximiert werden. Als geeignete Teilräume von $H(\text{div}, \Omega)$ bieten sich die Raviart-Thomas Elemente an. Um diese Räume zu konstruieren wird der Rand von Ω durch einen Polygonzug approximiert und Ω mit einer Triangulierung \mathcal{T} überzogen. Für $T \in \mathcal{T}$ ist der Raviart-Thomas Raum der Ordnung k definiert als:

$$RT_{k+1}(T) = (P_k(T))^2 + \mathbf{x}P_k(T), \quad k = 0, 1, \dots$$

Dabei bezeichnen wir mit $P_k(T)$ den Raum aller Polynome von Grad $\leq k$ auf T und $\mathbf{x} = (x, y)^T$.

Diese Elemente haben die Dimension $(k+1)(k+3)$ [RT77].

Die Raviart-Thomas Elemente wurden konstruiert, um die beiden folgenden Lemmata zu erfüllen.

Lemma 6.4

Für jedes Dreieck T gilt für $\mathbf{v} \in RT_{k+1}(T)$

$$(i) \quad \text{div } \mathbf{v} \in P_k(T)$$

$$(ii) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial T} \in R_k(\partial T)$$

Darüberhinaus ist der Divergenzoperator surjektiv von $RT_{k+1}(T)$ nach $P_k(T)$

Beweis: [RT77]

□

Bemerkung 6.5

In diesem Lemma bezeichnet R_k die Menge aller Funktionen φ , für die gilt

$$\varphi \in L^2(\partial T)$$

$$\varphi|_{e_i} \in P_k(e_i),$$

wobei mit e_i die Kanten des Dreiecks T bezeichnet werden.

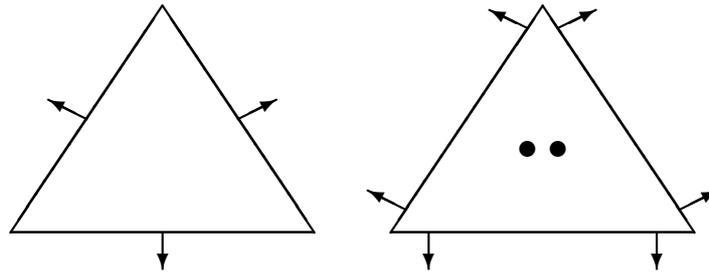


Abbildung 6.2: Freiheitsgrade der RT-Elemente der niedrigsten und nächst höheren Ordnung

Lemma 6.6

Für $k \geq 0$ und für jedes $\mathbf{v} \in RT_{k+1}$ gilt weiterhin

Falls

$$\int_{\partial T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} p_k = 0 \quad \forall p_k \in R_k(\partial T) \quad (6.2)$$

$$\text{und } \int_T \mathbf{v} \cdot p_{k-1} = 0 \quad \forall p_{k-1} \in (P_{k-1}(T))^2 \quad (6.3)$$

$$\text{dann ist } \mathbf{v} = 0. \quad (6.4)$$

Beweis: [RT77]

□

Wenn wir RT_k^0 als

$$RT_k^0(T) = \{\mathbf{v} \in RT_k(T) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$$

definieren, folgt sofort

$$RT_{k+1}^0(T) \subset (P_k(T))^2.$$

Der Grund, warum der Raviart-Thomas Raum so konstruiert wurde, dass die Eigenschaften aus Lemma 6.4 und Lemma 6.6 erfüllt werden, besteht darin, dass mit Hilfe dieser Lemmata gezeigt werden kann, dass die Raviart-Thomas-Räume sehr einfach zu handhaben sind. Denn als Freiheitsgrade für RT_{k+1} kann man

- (i) die Momente bis zur Ordnung k von $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ auf den Kanten von T und
- (ii) die Momente bis zur Ordnung $k-1$ von \mathbf{v} auf T

benutzen (vgl. Abbildung 6.2).

Denn die Räume $R_k(\partial T)$ und $(P_{k-1}(T))^2$ mit den Dimensionen $3(k+1)$ und $\frac{k(k+1)}{2}$ sind unabhängig. Daher kann, wie oben beschrieben, jede Funktion \mathbf{v} eindeutig durch den Wert an $\frac{k(k+1)}{2}$ verschiedenen Punkten und den Wert der Normalkomponenten an $k+1$ verschiedenen Punkten der Kanten beschrieben werden.

Da wir uns im folgenden auf die Raviart-Thomas Elemente niedrigster Ordnung, RT_1 (linear), und der Ordnung 2, RT_2 (quadratisch), beschränken, erhält man durch diese

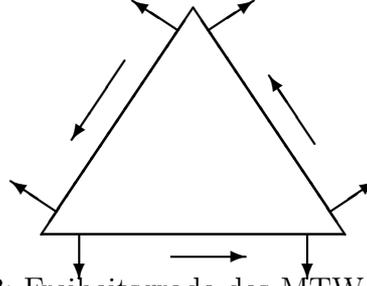


Abbildung 6.3: Freiheitsgrade des MTW-Elements

Eigenschaft eine sehr einfache Darstellung der Raviart-Thomas-Elemente. Die Freiheitsgrade sind dann im linearen Fall durch den Wert von $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ auf den Kanten von T eindeutig bestimmt und im quadratischen Fall durch den Wert $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ an den beiden Eckpunkten jeder Kante sowie dem Wert von \mathbf{v} im Mittelpunkt des Dreiecks (siehe Abbildung 6.2).

Diese einfache Darstellung der Freiheitsgrade erleichtert die Implementierung der Raviart-Thomas-Elemente enorm.

Das Raviart-Thomas Element der niedrigsten Ordnung hat auf einem Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ die Form:

$$RT_1(T) = \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad (6.5)$$

Das quadratische Raviart-Thomas Element hat auf dem Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ die Form:

$$RT_2(T) = \left\{ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot y \\ \delta + \rho \cdot x + \sigma \cdot y \end{pmatrix} + (\omega \cdot x + \eta \cdot y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \sigma, \omega, \eta \in \mathbb{R} \right\} \quad (6.6)$$

6.3 Das Mardal-Tai-Winther Element

Eine Alternative zur Approximation von \mathbf{u} ist die Nutzung des finiten Elements von Mardal, Tai und Winther, das in [MTW00] vorgestellt wurde. Dieses Element, im folgenden kurz MTW-Element genannt, ist ein nichtkonformes H^1 -Element und wird in diesem Unterabschnitt näher beschrieben werden. Zunächst soll das MTW-Element und insbesondere seine Freiheitsgrade dargestellt werden.

Sei $T \in \mathcal{T}_h$ ein Dreieck, dann kann das MTW-Element auf dem Dreieck T beschrieben werden als

$$M(T) = \{ \mathbf{v} \in (P_3(T))^2 \mid \operatorname{div} \mathbf{v} \in P_0(T), (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_e \in P_1(T) \quad \forall e \in \mathcal{E}(T) \}$$

Dabei bezeichnet $P_k(T)$ wieder die Menge der Polynome vom Grad k über dem Dreieck T und $\mathcal{E}(T)$ bezeichnet die Menge der Ecken von T .

Definition 6.7 (Baryzentrische Koordinaten)

Sei $T \in \mathcal{T}$ ein Dreieck mit den Eckpunkten P^1, P^2, P^3 . Unter Baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P aus T versteht man dann die (eindeutige) Lösung $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ des

LGS

$$\sum_{i=1}^3 P_j^i \lambda_i = P_j, \quad j = 1, 2, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1 \quad (6.7)$$

wobei P_j^i die j -te Koordinate des Punktes P^i bezeichnet.

Definition 6.8 (Bubblefunktion)

Die auf 1 normierte Bubblefunktion \mathbf{b} wird definiert durch

$$\mathbf{b} := \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (6.8)$$

Dabei bezeichnen λ_1, λ_2 und λ_3 die Baryzentrischen Koordinaten.

Bemerkung 6.9

Falls $T_h \in \mathbb{R}^2$ und T_h das Einheitsdreieck darstellt, lassen sich die Baryzentrischen Koordinaten schreiben als

$$\lambda_1 = x_1, \quad \lambda_2 = x_2, \quad \lambda_3 = 1 - x_1 - x_2 \quad (6.9)$$

Lemma 6.10

Der Raum $M(T)$ hat die Dimension 9. Weiterhin ist jedes Element $\mathbf{v} \in M(T)$ eindeutig bestimmt durch die Freiheitsgrade

- $\int_e (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \tau^k d\tau, \quad k = 0, 1, \quad \forall e \in \mathcal{E}(T).$
- $\int_e (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \tau d\tau, \quad \forall e \in \mathcal{E}(T).$

dabei bezeichnet τ die (Bogen)länge einer Kante e .

Beweis:[MTW00]

Der Raum $(P_3)^2$ ist ein Vektorraum der Dimension 20. Die Einschränkungen

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \in P_0(T) \quad \text{und} \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})|_e \in P_1 \quad \forall e \in \mathcal{E}(T)$$

stellen höchstens 11 linear unabhängige Nebenbedingungen dar.

Daher folgt sofort $\dim M(T) \geq 9$. Es reicht also zu zeigen, dass jedes Element von $M(T)$ durch 9 Freiheitsgrade eindeutig beschrieben wird.

Angenommen, dass für $\mathbf{v} \in M(T)$ alle Freiheitsgrade Null sind. Dies bedeutet insbesondere auch

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\partial T} = 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\int_T \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\partial T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\tau = 0.$$

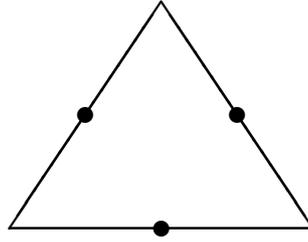


Abbildung 6.4: Freiheitsgrade des Crouzeix-Raviart Elements

Da $\operatorname{div} \mathbf{v} \in P_0(T)$, können wir schliessen, dass \mathbf{v} divergenzfrei ist.

Da $\mathbf{v} \in (P_3)^2$ divergenzfrei ist, gibt es eine skalare Funktion $w \in P_4$ mit $\mathbf{v} = \operatorname{curl} w$. Da

$$(\nabla w \cdot \mathbf{t})|_e = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_e = 0$$

für Kante e gilt, folgt weiter, dass $(\nabla w \cdot \mathbf{t}) = 0$ auf ∂T . Da w damit nur bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt ist, können wir annehmen, dass $w = 0$ gilt auf ∂T .

Das bedeutet wiederum, dass w von Form $w = pb$ ist, wobei $p \in P_1(T)$ und \mathbf{b} die kubische Bubblefunktion darstellt. D.h. $\mathbf{b} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, wobei die λ_i baryzentrischen Koordinaten des Dreiecks T sind. Das impliziert, dass $\frac{\partial b}{\partial \mathbf{n}}|_e$ das Vorzeichen auf der Kante e nicht wechselt. Desweiteren gilt

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial T} = p \frac{\partial b}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial T}$$

und

$$\int_e p \frac{\partial b}{\partial \mathbf{n}} d\tau = \int_e \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} d\tau = \int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} d\tau = 0 \quad \forall e \in \mathcal{E}(T).$$

Daraus ergibt sich, dass $p = w = 0$.

□

Bemerkung 6.11

Ein entscheidender Vorteil des MTW-Elements ist die Tatsache, dass man sowohl die Normal- als auch die Tangentialkomponente direkt als Freiheitsgrad gegeben hat. Dies ist besonders für die Vorgabe von Randbedingungen sehr praktisch, da bei der Implementierung sowohl die Normal- als auch die Tangentialkomponente direkt vorgegeben werden können.

Als nächstes soll eine elementweise Darstellung des MTW-Elements angegeben werden. Dazu wird zunächst die folgende Definition benötigt.

Definition 6.12

Es seien wieder $T \in \mathcal{T}_h$ ein Dreieck, $e^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) die Eckpunkte des Dreiecks und $m^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) die Kantenmittelpunkte des Dreiecks. Das Crouzeix-Raviart Element ist ein Finites Element mit genau einem Freiheitsgrad auf jedem Kantenmittelpunkt. Jede Basisfunktion $\Psi^{(i)}$ des Crouzeix-Raviart Element hat also am Mittelpunkt der Kante $m^{(i)}$ den Wert δ_{ij} , (vgl. Abbildung 6.4).

Neben den Bezeichnungen aus Definition 6.12 sollen mit $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}$ und $\Phi^{(3)}$ die Basisfunktionen der standard Finiten Elemente mit Freiheitsgraden an den Eckpunkten $e^{(i)}, i = 1, 2, 3$, also $\Phi^{(i)}(e^{(j)}) = \delta_{ij}$ bezeichnet werden (vgl. Kapitel 6.1).

Mit diesen Definitionen ist es möglich, die MTW-Funktion \mathbf{v} auf dem Dreieck T_h , $\mathbf{v}|_T \in M(T)$ darzustellen als

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_T := & \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Phi^{(1)} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Phi^{(2)} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \Phi^{(3)} \\ & + \rho \operatorname{curl} \{ \Psi^{(1)} \mathbf{b} \} + \sigma \operatorname{curl} \{ \Psi^{(2)} \mathbf{b} \} + \tau \operatorname{curl} \{ \Psi^{(3)} \mathbf{b} \} \end{aligned} \quad (6.10)$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \rho, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

6.4 Implementierung

6.4.1 Allgemeines

Die Implementierung der Finite-Element-Methoden erfolgt über das Programmpaket MATLAB in der Version 7.1 Release 14. MATLAB hat gegenüber anderen Programmiersprachen mehrere Vorzüge. Daten werden in MATLAB immer in Matrizen bzw. Vektoren gespeichert und aus diesem Grund sind Matrixoperationen, auch wenn sie elementweise erfolgen, in MATLAB besonders schnell implementiert. Daher sollten Programme in MATLAB so geschrieben werden, dass die Daten möglichst geschickt in Datenfelder angeordnet werden, um Matrixoperationen nutzen zu können und Schleifen zu vermeiden. Im Gegensatz zu den Matrixoperationen sind Schleifen in MATLAB aufgrund der Interpreter-Struktur relativ zeitaufwendig.

Ein weiterer Vorteil von MATLAB liegt in den mitgelieferten Toolboxen. Besonders die PDE-Toolbox fand in den Programmen, die dieser Arbeit angehören, Verwendung. Diese Toolbox liefert unter anderem fertige Routinen für die Erzeugung einer Triangulierung und deren Verfeinerung, für die Berechnung der Fläche der entsprechenden Dreiecke und den Wert der Gradienten für Funktionen, die auf den Eckpunkten der Dreiecke definiert sind.

6.4.2 Datenorganisation

Im folgenden sollen n_p , n_e und n_t die Anzahl der Punkte, Ecken bzw. Dreiecke der Triangulierung \mathcal{T} bezeichnen.

Bei der Verwendung des standard linearen Finiten Elements P_1 reichen für eine eindeutige Beschreibung der Wasserhöhe H die Werte der Funktionen auf den Eckpunkten der Dreiecke aus. Man benötigt zur Speicherung der Daten für H in diesem Fall also lediglich einen Vektor der Grösse n_p , also der Anzahl der Gitterpunkte. Wenn man den Ansatz P_2 für die Wasserhöhe nutzt werden zusätzlich die Werte an den Mittelpunkten der Kanten benötigt. Man nutzt zur Speicherung der Daten also Vektor der Grösse $n_p + n_e$.

Die Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{u} ist ein wenig schwieriger. Wie in Kapitel 6.2 beschrieben, wurde der Raviart-Thomas Raum niedrigster Ordnung so konzipiert, dass die Freiheitsgrade genau den Werten der Normalen an den Kantenmittelpunkten

der Dreiecke entsprechen. Das heisst, man kann die Funktion \mathbf{u} durch die Werte an den entsprechenden Normalen vollständig beschreiben. Da Funktionen aus RT_1 normalerweise die Gestalt

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

haben, benötigt man noch eine Routine, die diese Darstellung in eine Darstellung auf den Kanten umrechnet. Die Funktion `loctonod`, die genau dieses leistet, wurde ebenso wie die Funktion `nodtoloc`, die die Umkehrung liefert, bereits von Herrn Prof. Dr. Starke und Herrn Dr. Korsawe programmiert und für diese Arbeit zur Verfügung gestellt. Für eine genauere Darstellung der Umrechnung siehe [KOR05].

Man benötigt zur Speicherung also einen Vektor der Grösse n_e , wobei n_e die Anzahl der Kanten der Triangulierung darstellt. Analog verhält es sich bei Verwendung des quadratischen Raviart-Thomas Raums. Auch hier muss die Darstellung der Funktionen auf die Kanten bzw. den Mittelpunkt des Dreiecks umgerechnet werden. Dies leistet die erstellte Funktion `nodtoloq`. Man benötigt hier zur Speicherung der Daten einen Vektor der Länge $2n_e + 2n_t$.

Ebenso erfolgt die Nutzung des MTW Elements. Das MTW-Element hat 3 Freiheitsgrade pro Kante. Also wird zur Speicherung der Daten hier eine Vektor der Länge $3n_e$ benötigt. Zur Darstellung der Funktion auf den einzelnen Dreiecken wird die Funktion `nodtoloc_mtw` genutzt.

Schliesslich benötigt man noch die Daten für die Näherung an \mathbf{U} . Dafür werden wiederum die RT_1 bzw. RT_2 Ansatzräume genutzt. Es ist klar, dass hier zum Speichern der Daten eine Matrix mit 2 Spalten der Länge n_e bzw. $2n_e + n_t$ benötigt wird.

6.4.3 Implementierung

Nach der Datenorganisation folgt als nächster Schritt die eigentliche Implementierung zur Lösung der Least-Squares Formulierung. Diese gliedert sich in die folgenden Punkte:

- Erzeugung der Geometrie und der Randdaten
- Erzeugung und evtl. Verfeinerung des Gitters
- Neue Korrektur mit Hilfe eines Gauss-Newton-Verfahrens berechnen, dazu
 - Zurückverfolgung der Charakteristiken
 - Aufstellen der Steifigkeitsmatrix und der rechten Seite

In den folgenden Unterabschnitten sollen die einzelnen Schritte etwas genauer dargestellt werden.

Geometrie- und Gittererzeugung

Da die Geometrien der Testbeispiele sehr einfach gehalten sind, stellt die Geometrieerzeugung in MATLAB kein Problem dar. In einer Geometriedatei wird der Rand des Gebiets Ω durch Linien und Kreisbögen beschrieben. In einer zugehörigen Randdatendatei wird festgelegt, welche Randbedingung - Neumann oder Dirichlet - das jeweilige Randstück erfüllen soll.

Für die Erzeugung eines Gitters auf der zuvor festgelegten Geometrie kann der MATLAB-Befehl `initmesh` aus der PDE-Toolbox verwendet werden. Dieses Ausgangsgitter kann man durch den Aufruf der Funktion `refinemesh` beliebig weiter verfeinern.

Mit diesen Befehlen wird zusätzlich eine Liste mit Punkten, Dreiecken und Rändern des Gitters geliefert, die zur Arbeit mit den Unbekannten H , \mathbf{u} und \mathbf{U} benötigt werden.

Für den Einsatz des Raviart-Thomas Elements wird allerdings zusätzlich eine Kantenliste benötigt, die MATLAB nicht zur Verfügung stellt. Die Routine `edgemesh`, die eine solche nummerierte Kantenliste erstellt, wurde ebenso wie die Routine `nodtoloc` von Herrn Prof. Dr. Starke und Herrn Dr. Korsawe programmiert.

6.4.4 Rückverfolgung der Charakteristiken

Ein wesentlicher Bestandteil des ELLAM Verfahrens ist die Verwendung der Charakteristiken. Um nun die Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite für aufstellen zu können, müssen die Funktionen \mathbf{u} und H an den Stellen $\check{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\Delta t$ ausgewertet werden. Man muss also zunächst die Position $\check{\mathbf{x}}$, die ein Partikel zum Zeitpunkt $t - \Delta t$ innehatte berechnen. Um dies zu erreichen werden die einzelnen Elemente wieder elementweise in der nodalen Basis betrachtet.

Bei Verwendung der standard lineare Elemente kann die betreffende Funktion, die durch den Wert an den Kanten gegeben ist, einfach durch eine Interpolation berechnet werden. Bei Verwendung des Raviart-Thomas Elements niedrigster Ordnung ist die Darstellung von \mathbf{u} wieder elementweise in der nodalen Basis:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In dieser Darstellung ist die Berechnung von $\check{\mathbf{x}}$ simpel.

Ebenso wurden Routinen erstellt, die die anderen FE-Ansatzräume, Q_2 , RT_2 (vgl. 6.6) und MTW (vgl. 6.10) elementweise darzustellen und damit die Berechnung von $\check{\mathbf{x}}$ möglich machen.

Die Auswertung einer Funktion auf einem Dreieck T leisten die Funktionen `evalpp`, `evalpq`, `evalrt`, `evalrt2` bzw. `evalmtw`.

Im nächsten Schritt müssen die Funktionen H und \mathbf{u} an den jeweiligen Stellen ausgewertet werden. Dazu wurden zunächst Routinen erstellt, die errechnen, in welchem Dreieck der Punkt $\check{\mathbf{x}}$ liegt.

Anschliessend können die Werte der Funktionen nun einfach mit den oben genannten Funktionen errechnet werden.

6.4.5 Aufstellen der Steifigkeitsmatrix

Zum Aufstellen der Steifigkeitsmatrix müssten in einem ersten Schritt die Basisfunktionen der einzelnen finiten Elemente erstellt werden. Zu diesem Zweck wurden die Funktionen `base_p1`, `base_p2`, `base_rt1`, `base_rt` und `base_mtw` programmiert. Wie aus dem Residuum der Least-Squares Formulierung 4.16 ersichtlich ist, haben die Steifigkeitsmatrix

und die rechte Seite des zu lösenden Systems die folgende Gestalt

$$\begin{pmatrix} A_{HH} & A_{Hu} & A_{HU} \\ A_{uH} & A_{uu} & A_{uU} \\ A_{UH} & A_{uU} & A_{UU} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ u \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_h \\ f_u \\ f_U \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Die Steifigkeitsmatrix kann also in 9 Teilmatrizen unterteilt und diese einzeln implementiert werden. Ebenso wird die rechte Seite in 3 Vektoren unterteilt.

Das Aufstellen der Teilsteifigkeitsmatrizen bzw. rechten Seiten erfolgt in den Routinen `aswehh`, `aswehu`, `aswehw` usw. Dabei werden aufgrund vorher eingestellter Parameter stets die ausgewählten Finiten Elemente für die jeweilige Variable genutzt.

Um die Steifigkeitsmatrix, bzw. ihre Teilmatrizen, aufzustellen, ist es u.a. nötig, die L^2 -Norm von Funktionen auszuwerten.

Da $(f, g)_{L^2(T)} = \int_T f \cdot g \, dx$ ist, genügt es Interpolationsformeln zu benutzen, um die entsprechenden Integrale auszuwerten. Dazu werden die üblichen Interpolationsformeln benutzt, von der Mittelpunktsregel

$$I(f) = \frac{|T|}{3}(f(m_1) + f(m_2) + f(m_3))$$

bis hin zur Formel

$$I(f) = |T| \left[\frac{9}{40} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + B[f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)] + C[f(\gamma, \gamma) + f(\gamma, \delta) + f(\delta, \gamma)] \right],$$

mit $s = \sqrt{15}$, $\alpha = \frac{6-s}{21}$, $\beta = \frac{9+2*s}{21}$, $\gamma = \frac{6+s}{21}$, $\delta = \frac{9-2*s}{21}$, $B = \frac{155-s}{1200}$ und $C = \frac{155+s}{1200}$, die auf dem Einheitsdreieck für Polynome vom Grad kleiner gleich 7 exakt ist. $|T|$ bezeichnet wie üblich die Fläche des Dreiecks T und f die auszuwertende Funktion (vgl. [AT97]).

Mit diesen Hilfsmitteln ist es möglich, die Matrizen in MATLAB aufzustellen. Als Beispiel soll der folgende Programmauszug dienen

```
p = mesh.p;t = mesh.t;te = mesh.te;e = mesh.e;
nt = size(t,2); % Number of triangles
ne = size(e,2); % Number of edges
np = size(p,2); % Number of points
[ ar,ag1,ag2,ag3 ] = pdetrg(p,t);
```

%Auswertung der Funktionen auf den Dreiecken

```
s=[' [ hg1qu,hg2qu,hqu ] = quval',mesh.h.name,'(mesh,5,HH);'];
eval(s);
s=[' [ phig1qu,phig2qu,phiqu ] = quval',mesh.h.name,'(mesh,5);'];
eval(s);
s=[' [ udqu,u1qu,u2qu ] = quval',mesh.u.name,'(mesh,5,UU);'];
eval(s);
s=[' [ wdqu1,w1qu1,w1qu2 ] = quval',mesh.w.name,'(mesh,5,WW(:,1));'];
eval(s);
s=[' [ wdqu2,w2qu1,w2qu2 ] = quval',mesh.w.name,'(mesh,5,WW(:,2));'];
```

```

eval(s);
%[ holdqu,u1oldqu,u2oldqu ] = quvalcc2_mtw(mesh,tau,UU,meshold,HHold,UUold);
s=['[ holdqu,u1oldqu,u2oldqu ] = quvalcc2_',mesh.u.name,'
(mesh,tau,UU,meshold,HHold,UUold);']; eval(s);

s=['[ hbg1qu,hbg2qu,hbqu ] = quval',mesh.h.name,'(mesh,5,hb);'];
eval(s);

% Assemble indices
oh=ones(1,mesh.h.anzahlbasis);
iej=[];
I=[];
dreiecksindex=1:nt;
for i=1:mesh.h.anzahlbasis
    s=['s=mesh.h.index.basis',int2str(i),',';'];
    eval(s);
    s=['ie=',s,',';'];
    eval(s);
    iej=[iej ie];
    I=[I kron(oh,ie)];
end;
J = kron(oh,iej);

% assemble matrix entries

A = 9/40; B = (155-sqrt(15))/1200; C = (155+sqrt(15))/1200;
arwgt = [ A ; B ; B ; B ; C ; C ; C ]*ar;
uabsqu = sqrt(u1qu.*u1qu+u2qu.*u2qu);

jach=[];shi=[];
jacu1=[];jacu2=[];
su1i=[];su2i=[];
for i=1:mesh.h.anzahlbasis
    s=['jach=[jach (1 + tau*udqu).*phiqu.basis',int2str(i),',';'];
    eval(s);
    s=['shi=[shi kron(oh,(1 + tau*udqu).*phiqu.basis',int2str(i),')]];'];
    eval(s);
    s=['jacu1=[jacu1 tau*(gz*phig1qu.basis',int2str(i),_
'-cf*u1qu.*uabsqu./(hqu.*hqu).*phiqu.basis',int2str(i),')]];'];
    eval(s);
    s=['su1i=[su1i
kron(oh,tau*(gz*phig1qu.basis',int2str(i),_
'-cf*u1qu.*uabsqu./(hqu.*hqu).*phiqu.basis',int2str(i),')]];'];

```

```

eval(s);
s=['jacu2=[jacu2 tau*(gz*phig2qu.basis',int2str(i),_
'-cf*u2qu.*uabsqu./(hqu.*hqu).*phiqu.basis',int2str(i),'')];'];
eval(s);
s=['su2i=[su2i
kron(oh,tau*(gz*phig2qu.basis',int2str(i),_
'-cf*u2qu.*uabsqu./(hqu.*hqu).*phiqu.basis',int2str(i),''))];'];
eval(s);
end;

shj = kron(oh,jach); su1j = kron(oh,jacu1); su2j = kron(oh,jacu2);

S = sum(kron(ones(1, mesh.h.anzahlbasis^2), arwgt) .*
*(shi.*shj+su1i.*su1j+su2i.*su2j)); s=['Khh =
sparse(I,J,S, ', mesh.h.dof, ', ', mesh.h.dof, ')']; eval(s);

% assemble right hand side entries

resh = hqu - holdqu + tau*hqu.*udqu;

resu1 = u1qu - u1oldqu + tau*gz*(hg1qu-hbg1qu)+
tau*cf*u1qu.*uabsqu./hqu + c1*wdqu1;

resu2 = u2qu - u2oldqu + tau*gz*(hg2qu-hbg2qu) +
tau*cf*u2qu.*uabsqu./hqu + c1*wdqu2; resh = kron(oh,resh);

resu1 = kron(oh,resu1); resu2 = kron(oh,resu2);

F = -sum(kron(oh, arwgt) .* (resh.*jach+resu1.*jacu1+resu2.*jacu2));
s=['Fh = sparse(iej,1,F, ', mesh.h.dof, ', 1)']; eval(s); Fh =
full(Fh);

```

der die Matrix A_{HH} aufstellt.

Die anderen Steifigkeitsteilmatrizen werden entsprechend analog aufgestellt. Die vollständigen Quelltexte aller Programme finden sich unter www.ifam.uni-hannover/~danisch/Source.

Zusätzlich musste natürlich noch die Auswertung des Kantensprungterm

$$\tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E\|_{0,E}^2$$

und die Auswertung des Funktionals (in `lsfunc`) an sich implementiert werden. Die Auswertung des Kantensprungterm wurde in 2 verschiedenen Dateien, `aswe_tang_mtw` bzw. `aswe_tang_rt2`, jeweils für das MTW bzw. das RT_2 Element realisiert.

6.4.6 Lösung des Gleichungssystems

Nachdem die Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite aufgestellt wurde, gilt es nun, eine Näherungslösung in jedem Zeitschritt zu berechnen. Zur Berechnung einer neuen Näherung

in jedem Zeitschritt wurde das bekannte Gauss Newton Verfahren verwendet (`swesolve`). Als Gleichungssystemlöser im Gauss Newton Verfahren wurde der in MATLAB eingebaute direkte Löser für lineare Gleichungssysteme benutzt. Dieser Löser ist soweit optimiert, dass die 'manuelle' Verwendung von Vorkonditionierern das Ergebnis und die Geschwindigkeit nicht verbessern würde.

Für eine ausführlichere Beschreibung der verwendeten MATLAB Befehle und Routinen siehe auch [MAT98] und [MAT].

6.4.7 Verfeinerungsstrategie

Zur Verfeinerung werden zunächst diejenigen Dreiecke identifiziert, in denen der Fehler sehr hoch ist bzw. der Fehlerschätzer hohe Werte liefert. In den numerischen Beispielen in Kapitel 8.3 wird ein Dreieck T verfeinert, wenn der Wert des Funktionals, also des Fehlerschätzers, auf diesem Dreieck grösser als der Durchschnittliche Wert des Funktionals auf den Dreiecken ist. Als Verfeinerungsstrategie zur adaptiven Verfeinerung wurde die h-Methode genutzt. Bei der h-Methode wird das bereits vorhandene Gitter an den oben beschriebenen Dreiecken verfeinert. Dazu wird jedes dieser Dreiecke in mehrere kleinere Dreiecke, hier uniform, unterteilt. Es wird kein neues Gitter erstellt, wodurch kein zu grosser Rechenaufwand entsteht.

7 Fehlerschätzer

Dieses Kapitel ist das Herzstück dieser Arbeit. Es wird gezeigt wie man für die in Kapitel 4 vorgeschlagene Least-Squares Formulierung einen a-posteriori Fehlerschätzer gewinnen kann. Genauer wird gezeigt, dass das Funktional \mathcal{F} als a-posteriori Fehlerschätzer dienen kann. Damit ist es möglich adaptiv zu verfeinern. Der Beweis, dass das Funktional ein Fehlerschätzer ist, gliedert sich in drei Abschnitte. Zunächst wird kurz die Arbeit [STA] rekapituliert, in der gezeigt wird, dass das Funktional im Grenzfall verschwindender Viskosität einen Fehlerschätzer darstellt. Danach wird der Beweis auf den Stokes Fall und anschliessend auf den allgemeinen Fall $\mu \geq 0$ der Flachwassergleichungen ausgeweitet.

7.1 Einleitung

Um zu zeigen, dass das Funktional einen a-posteriori Fehlerschätzer darstellt, genügt es zu zeigen, dass

$$\alpha \|\|(\eta; \mathbf{v}, \mathbf{V})\|\|^2 \leq \|\mathcal{J}(H, \mathbf{u}, \mathbf{U})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|^2 \leq \beta \|\|(\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V})\|\|^2 \quad (7.1)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ unabhängig von μ für alle $\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}$ mit einer geeigneten Norm $\|\|(\cdot, \cdot, \cdot)\|\|$ gilt. In diesem Fall erhält man, aufgrund der aus Kapitel 4 bekannten Relation zwischen dem Residuum \mathcal{R} und der Fréchet-Ableitung \mathcal{J} eines Funktionals \mathcal{F}

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(H_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h, \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) &= \mathcal{R}(H_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h, \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) - \mathcal{R}(H, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) \\ &= \int_0^1 \mathcal{J}(H + s(H_h - H), \mathbf{u} + s(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}), \mathbf{U} + s(\mathbf{U}_h - \mathbf{U})) [H_h - H, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{U}_h - \mathbf{U}] ds \end{aligned}$$

wobei wiederum H_h, \mathbf{u}_h und \mathbf{U}_h Näherungen an die Lösung $H, \mathbf{u}, \mathbf{U}$ sind, sofort die Stetigkeit und Koerzivität des Funktionals. Dies soll nun im Folgenden gezeigt werden. Allerdings werden die Stetigkeit und die Elliptizität des Funktionals in unterschiedlichen Normen erzielt. Genauer wird die Elliptizität in einer schwächeren Norm als die Stetigkeit gezeigt. Dies kann zu schlechteren Ergebnissen in der Approximation der Lösung führen.

Bemerkung 7.1

Das Funktional \mathcal{F} (siehe 4.17), das Residuum \mathcal{R} (siehe 4.16) und die zugehörige Fréchet-Ableitung \mathcal{J} (siehe 4.29) waren definiert als

$$\mathcal{F}(H^D + \eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}(H^D + \eta, \mathbf{v}, \mathbf{v}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}})\|_{0,K}^2 + \tau \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2, \quad (7.2)$$

$$\mathcal{R}(H, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) =$$

$$\left(\begin{array}{c} H - \hat{H}^{\text{old}} + \tau H \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}} + \tau (g \nabla (H - H_b) + c_f \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H} + \sqrt{\mu} \operatorname{div} \mathbf{U} + \mathbf{F}) \\ \tau^{1/2} (\mathbf{U} + \sqrt{\mu} \nabla \mathbf{u}) \end{array} \right) \quad (7.3)$$

und

$$\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}] = \begin{pmatrix} \eta + \tau(H \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta \operatorname{div} \mathbf{u}) \\ D(H, \mathbf{u})\mathbf{v} + \tau \left(g \nabla \eta - \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H^2} \eta + \sqrt{\mu} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \\ \tau^{1/2}(\mathbf{V} + \sqrt{\mu} \nabla \mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

Definition 7.2

Für den restlichen Unterabschnitt wird folgende vereinfachende Bezeichnung vereinbart

$$|||(\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V})||| := (\|\eta\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 \|\nabla \eta\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau \|\mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \quad (7.5)$$

mit der zusätzlichen Vereinbarung, dass $|||(\cdot, \cdot)||| = |||(\cdot, \cdot, 0)|||$, also

$$|||(\eta, \mathbf{v})||| := (\|\eta\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 \|\nabla \eta\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \quad (7.6)$$

7.2 SWE ohne Viskosität

Dieser Unterabschnitt stellt den ersten Schritt des Beweises dar. Konkret wird gezeigt, dass das Funktional der SWE ohne Viskosität ($\mu = 0$) einen a-posteriori Fehlerschätzer darstellt. Dieser Abschnitt ist dem Artikel [STA] von G. Starke entnommen.

Sei also für den Rest dieses Abschnitts $\mu = 0$. Implizit bedeutet der Fall $\mu = 0$ natürlich auch $\mathbf{U} = 0$, daher wird im Folgenden ebenfalls davon ausgegangen, dass $\mathbf{U} = 0$ ist.

Damit reduziert sich das Residuum \mathcal{R} und damit auch \mathcal{F} auf \mathcal{R}_0 (4.27), also

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} = \mathcal{R}_0(H, \mathbf{u}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}}) = \begin{pmatrix} H - \hat{H}^{\text{old}} + \tau H \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}} + \tau(g \nabla(H - H_b) + c_f \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H} + \mathbf{F}) \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Für diesen Fall ergibt sich als Fréchet-Ableitung

$$\mathcal{J}_0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}] = \begin{pmatrix} \eta + \tau(H \operatorname{div} \mathbf{v} + \eta \operatorname{div} \mathbf{u}) \\ D(H, \mathbf{u})\mathbf{v} + \tau \left(g \nabla \eta - \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H^2} \eta \right) \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Lemma 7.3

Die Matrix

$$D(H, \mathbf{u}) = \left(1 + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\tau c_f}{|\mathbf{u}|H} \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit

$$D(H, \mathbf{u})^{-1} = \frac{1}{1 + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\tau c_f}{|\mathbf{u}|H(1 + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H})(1 + 2\tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H})} \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{pmatrix}$$

für $\mathbf{u} \neq 0$

Beweis: [STA]

□

Zur Vereinfachung wird nun eine Variablentransformation ausgeführt. Die Variable \mathbf{v} wird ersetzt durch

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H} (D^{-1}\mathbf{u})\eta \quad (7.9)$$

Durch Einsetzen in (7.7) ergibt sich dann für \mathcal{J}

$$\tilde{\mathcal{J}}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}] = \left(\begin{array}{c} (1 + \tau \operatorname{div} \mathbf{u})\eta + \tau H \operatorname{div} \mathbf{w} + \tau^2 c_f H \operatorname{div} \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u})\eta \right) \\ D\mathbf{w} + \tau g \nabla \eta \end{array} \right) \quad (7.10)$$

Da im folgenden mit der transformierten Variablen \mathbf{w} gearbeitet wird, ist es wichtig zu zeigen, dass die Normen $|||(\eta, \mathbf{v})|||$ und $|||(\eta, \mathbf{w})|||$ äquivalent sind. Dazu dient das nachstehende Lemma.

Lemma 7.4

Seien $H \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(\Omega)^2$ und $H \geq H_*$ mit einer Konstanten $H_* > 0$, dann gilt für alle $\eta \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, dass die Abbildung

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} - \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u})\eta =: \mathbf{w} \quad (7.11)$$

bijektiv in $H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}, \Omega)$ ist. Es existiert sogar eine Konstante $\gamma > 0$, die unabhängig von τ ist, so dass

$$\frac{1}{\gamma} |||(\eta, \mathbf{v})||| \leq |||(\eta, \mathbf{w})||| \leq \gamma |||(\eta, \mathbf{v})||| \quad (7.12)$$

gleichmässig für $\tau \rightarrow 0$ und für alle $(\eta, \mathbf{v}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\operatorname{div}, \Omega)$ gilt.

Beweis:[STA]

Es gilt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ_N und daher auch

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (D^{-1}\mathbf{u}) &= \mathbf{n} \cdot \frac{1}{1 + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}} \left(1 - \frac{\tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}}{1 + 2\tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}} \right) \mathbf{u} \\ &= \mathbf{n} \cdot \frac{1}{1 + 2\tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}} \mathbf{u} \\ &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \quad (7.13)$$

Deswegen ist $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ auf Γ_N gdw $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = 0$ auf Γ_N . Desweiteren folgt aus der obigen Gleichung

$$\frac{|\mathbf{u}|}{H} (D^{-1}\mathbf{u}) = \frac{|\mathbf{u}|}{H(H + 2\tau c_f |\mathbf{u}|)} \mathbf{u} \quad (7.14)$$

und daraus wiederum folgt

$$\left\| \frac{|\mathbf{u}|}{H} (D^{-1}\mathbf{u}) \right\|_{\infty, \Omega} \leq \left\| \frac{\mathbf{u}}{H} \right\|_{\infty, \Omega}^2 \leq \left(\frac{\|\mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}}{H_*} \right)^2 =: C_1 \quad (7.15)$$

Aus (7.14) folgt ebenfalls

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u}) \right) &= \mathbf{u} \operatorname{div} \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H(H+2\tau c_f |\mathbf{u}|)} \right) + \frac{|\mathbf{u}|}{H(H+2\tau c_f |\mathbf{u}|)} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot (H^2 \nabla(|\mathbf{u}|) - 2|\mathbf{u}|(H+\tau c_f |\mathbf{u}|) \nabla H)}{H^2(H+2\tau c_f |\mathbf{u}|)^2} + \frac{|\mathbf{u}|}{H(H+2\tau c_f |\mathbf{u}|)} \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Mit $\nabla(|\mathbf{u}|) \leq |\nabla \mathbf{u}|$ erhalten wir aus obigen Gleichung

$$\begin{aligned} \left\| \operatorname{div} \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u}) \right) \right\|_{\infty, \Omega} &\leq \left\| \frac{|\mathbf{u}| |\nabla \mathbf{u}|}{H^2} \right\|_{\infty, \Omega} + 2 \left\| \frac{|\mathbf{u}|^2 |\nabla \mathbf{u}|}{H^3} \right\|_{\infty, \Omega} + \left\| \frac{|\mathbf{u}| \operatorname{div} \mathbf{u}}{H^2} \right\|_{\infty, \Omega} \\ &\leq 2 \left\| \frac{\mathbf{u}}{H} \right\|_{\infty, \Omega} \left(\left\| \frac{\nabla \mathbf{u}}{H} \right\|_{\infty, \Omega} + \left\| \frac{\mathbf{u}}{H} \right\|_{\infty, \Omega} + \left\| \frac{\nabla H}{H} \right\|_{\infty, \Omega} \right) \\ &\leq 2 \frac{\|\mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}}{H_*} \left(\frac{\|\nabla \mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}}{H_*} + \frac{\|\mathbf{u}\|_{\infty, \Omega} \|\nabla H\|_{\infty, \Omega}}{H_*^2} \right) =: C_2 \end{aligned} \quad (7.17)$$

Und daher erhält man

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{0, \Omega} &= \|\mathbf{v} - \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u}) \eta\|_{0, \Omega} \leq \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega} + \tau c_f \left\| \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u}) \right\|_{\infty, \Omega} \|\eta\|_{0, \Omega} \\ &\leq \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega} + \tau c_f C_1 \|\eta\|_{0, \Omega} \end{aligned} \quad (7.18)$$

und

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{0, \Omega} &= \|\operatorname{div} \mathbf{v} - \tau c_f \operatorname{div} \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u}) \right) \eta - \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u}) \nabla \eta\|_{0, \Omega} \\ &\leq \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0, \Omega} + \tau c_f \left\| \operatorname{div} \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u}) \right) \right\|_{\infty, \Omega} \|\eta\|_{0, \Omega} + \tau c_f \left\| \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1}\mathbf{u}) \right\|_{\infty, \Omega} \|\nabla \eta\|_{0, \Omega} \\ &\leq \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0, \Omega} + \tau c_f C_2 \|\eta\|_{0, \Omega} + \tau c_f C_1 \|\nabla \eta\|_{0, \Omega} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Und damit ergibt sich insgesamt

$$\|(\eta, \mathbf{w})\|^2 = \|\eta\|_{0, \Omega}^2 + \tau^2 \|\nabla \eta\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{w}\|_{0, \Omega}^2 + \tau^2 \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{0, \Omega}^2 \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 + 2\tau^2 c_f^2 (C_1^2 + C_2^2)) \|\eta\|_{0, \Omega}^2 \\ &\quad + (1 + 2c_f^2 C_1^2) \tau^2 \|\nabla \eta\|_{0, \Omega}^2 + 2\|\mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 + 2\tau^2 \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2 \end{aligned} \quad (7.21)$$

Und damit ist rechte Seite der Ungleichung für $\gamma = 1 + \max\{1, 2\tau^2 c_f^2 (C_1^2 + C_2^2), 2c_f^2 C_1^2\}$ bewiesen. Der Beweis der anderen Richtung erfolgt analog.

□

Mit Hilfe dieser Lemmata ist es nun möglich den unten stehenden Satz zu formulieren, indem die Elliptizität des Least-Squares Funktionals gezeigt wird.

Satz 7.5

Es seien wieder $H \in W^{1, \infty}(\Omega)$, $\mathbf{u} \in W^{1, \infty}(\Omega)^2$ und $H \geq H_*$ mit einer Konstanten $H_* > 0$. Wenn weiterhin für den Zeitschritt τ gilt, dass

$$\tau \leq \min \left\{ \frac{1}{2\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}}, \frac{1}{(8c_f C_2 H_*)^{1/2}}, \frac{g}{4c_f C_1 (H_* (1 + 2\tau c_f C_1^{1/2}))^{1/2}} \right\} \quad (7.22)$$

wobei $H^* = \|H\|_{\infty, \Omega}$ und C_1 und C_2 definiert sind wie in (7.15) und (7.17), dann existieren positive Konstanten α und β , so dass

$$\alpha \|\eta, \mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathcal{J}_0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}]\|_{0, \Omega}^2 \leq \beta \|\eta, \mathbf{v}\|^2 \quad (7.23)$$

für alle $(\eta, \mathbf{v}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\text{div}, \Omega)$ gleichmässig für $\tau \rightarrow 0$ gilt.

Beweis:

Nach Lemma 7.4 reicht es zu zeigen, dass

$$\tilde{\alpha} \|\eta, \mathbf{w}\|^2 \leq \|\tilde{\mathcal{J}}(H, \mathbf{u})\|_{0, \Omega}^2 \leq \tilde{\beta} \|\eta, \mathbf{w}\|^2 \quad (7.24)$$

gleichmässig für $\tau \rightarrow 0$ für alle $(\eta, \mathbf{w}) \in H_{\Gamma_D}^1 \times H_{\Gamma_N}(\text{div}, \Omega)$ gilt. Es gilt sogar, dass $\tilde{\mathcal{J}}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}]$ äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}] = & \quad (7.25) \\ \left(\left(\frac{1+\tau \text{div } \mathbf{u}}{H} \right)^{1/2} + \tau \left(\frac{H}{1+\tau \text{div } \mathbf{u}} \right)^{1/2} \text{div } \mathbf{w} + \tau^2 c_f \left(\frac{H}{1+\tau \text{div } \mathbf{u}} \right)^{1/2} \text{div} \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1} \mathbf{u}) \eta \right) \right) \\ \frac{1}{(2g)^{1/2}} D^{1/2} \mathbf{w} + \tau \left(\frac{g}{2} \right)^{1/2} D^{-1/2} \nabla \eta \end{aligned}$$

in dem Sinn, dass

$$\begin{aligned} & \min H_*(1 - \tau \|\text{div } \mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}), 2g(1 - \tau c_f \frac{\|\mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}}{H_*}) \|\mathcal{J}^0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}]\|_{0, \Omega}^2 \\ & \leq \|\tilde{\mathcal{J}}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}]\|_{0, \Omega}^2 \\ & \leq \max H^*(1 + \tau \|\text{div } \mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}), 2g(1 + 2\tau c_f \frac{\|\mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}}{H_*}) \|\mathcal{J}^0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}]\|_{0, \Omega}^2 \end{aligned} \quad (7.26)$$

gleichmässig für $\tau \rightarrow 0$ für alle $(\eta, \mathbf{w}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\text{div}, \Omega)$.

Aufgrund der Voraussetzung (7.22), gilt $1 + \tau \text{div } \mathbf{u} > 0$ in ganz Ω und daher ist es möglich in der obigen Gleichung die Wurzel zu ziehen. Daher bleibt nur zu zeigen:

$$\alpha^0 \|\eta, \mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathcal{J}^0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}]\|^2 \leq \beta^0 \|\eta, \mathbf{w}\|^2 \quad (7.27)$$

gilt für alle $(\eta, \mathbf{w}) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_N}(\text{div}, \Omega)$ mit Konstanten α^0, β^0 , die unabhängig von τ sind.

Gezeigt werden soll hier nur die schwerer zu zeigende linke Ungleichung.

Mit (7.15) und (7.17) erhält man

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\frac{H}{1 + \tau \text{div } \mathbf{u}} \right)^{1/2} \text{div} \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1} \mathbf{u}) \eta \right) \right\|_{0, \Omega} \\ & \leq \left\| \frac{H}{1 + \tau \text{div } \mathbf{u}} \right\|_{\infty, \Omega}^{1/2} \left(\left\| \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1} \mathbf{u}) \right) \right\|_{\infty, \Omega} \|\eta\|_{0, \Omega} + \left\| \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1} \mathbf{u}) \right\|_{\infty, \Omega} \|\nabla \eta\|_{0, \Omega} \right) \\ & \leq \left(\frac{H}{1 + \tau \|\text{div } \mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}} \right)^{1/2} (C_2 \|\eta\|_{0, \Omega} + C_1 \|\nabla \eta\|_{0, \Omega}) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Zusammen mit der Einschränkung der Schrittweite τ ergibt sich

$$\left\| \left(\frac{H}{1 + \tau \operatorname{div} \mathbf{u}} \right)^{1/2} \operatorname{div} \left(\frac{|\mathbf{u}|}{H^2} (D^{-1} \mathbf{u}) \eta \right) \right\|_{0,\Omega} \leq (2H^*)^{1/2} (C_2 \|\eta\|_{0,\Omega} + C_1 \|\nabla \eta\|_{0,\Omega}) \quad (7.29)$$

und daraus wiederum

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{J}^0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}]\|_{0,\Omega}^2 \\ & \geq \frac{1}{2} \left\| \left(\frac{H}{1 + \tau \operatorname{div} \mathbf{u}} \right)^{1/2} \eta + \tau \left(\frac{1 + \tau \operatorname{div} \mathbf{u}}{H} \right)^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{w} \right\|_{\Omega}^2 \\ & \quad - 2\tau^2 c_f H^* (C_2 \|\eta\|_{0,\Omega} + C_1 \|\nabla \eta\|_{0,\Omega})^2 + \left\| \frac{1}{(2g)^{1/2}} D^{1/2} \mathbf{w} \frac{g^{1/2}}{2} D^{-1/2} \nabla \eta \right\|_{0,\Omega}^2 \\ & = \frac{1}{2} \left\| \left(\frac{1 + \tau \operatorname{div} \mathbf{u}}{H} \right)^{1/2} \eta \right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\tau^2}{2} \left\| \left(\frac{H}{1 + \tau \operatorname{div} \mathbf{u}} \right)^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{w} \right\|_{\Omega}^2 \\ & \quad - 2\tau^2 c_f H^* (C_2 \|\eta\|_{0,\Omega} + C_1 \|\nabla \eta\|_{0,\Omega})^2 + \frac{1}{2g} \|D^{1/2} \mathbf{w}\|_{0,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{g}{2} \tau^2 \|D^{-1/2} \nabla \eta\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

dabei wurde $(\eta, \operatorname{div} \mathbf{w})_{0,\Omega} + (\mathbf{w}, \nabla \eta)_{0,\Omega} = 0$ benutzt. Dies gilt aufgrund der Randbedingungen.

Zusammen mit den Abschätzungen

$$\mathbf{z} \cdot D(H, \mathbf{u}) \mathbf{z} = \left(1 + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H} \right) |\mathbf{z}|^2 + \tau c_f \frac{1}{|\mathbf{u}| H} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})^2 \geq \left(1 + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H} \right) |\mathbf{z}|^2 \quad (7.31)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot D(H, \mathbf{u})^{-1} \mathbf{z} & = \frac{1}{1 + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}} \left(|\mathbf{z}|^2 - \frac{\tau c_f (\mathbf{u} \cdot \mathbf{z})^2}{|\mathbf{u}| H (1 + 2\tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H})} \right) \\ & \geq \frac{1}{1 + \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}} |\mathbf{z}|^2 \left(1 - \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H (1 + 2\tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H})} \right) \\ & = \frac{|\mathbf{z}|^2}{1 + 2\tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H}} \end{aligned} \quad (7.32)$$

kann dies weiter abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}^0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}]\|_{0,\Omega}^2 & \geq \frac{1 - \tau \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\infty,\Omega}}{2H^*} \|\eta\|_{0,\Omega}^2 + \frac{2H_*}{1 + \tau \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\infty,\Omega}} \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{0,\Omega}^2 \\ & \quad - 4\tau^2 c_f H^* (C_2^2 \|\eta\|_{0,\Omega}^2 + C_1^2 \|\nabla \eta\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2g} \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{g\tau^2}{2(1 + \tau c_f C_1^{1/2})} \|\nabla \eta\|_{0,\Omega}^2) \\ & \geq \left(\frac{1}{4H^*} - 4\tau^2 c_f^2 H^* C_2^2 \right) \|\eta\|_{0,\Omega}^2 + \frac{g\tau^2}{2(1 + 2\tau c_f C_1^{1/2})} \|\nabla \eta\|_{0,\Omega}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2g} \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\tau^2 H_*}{2(1 + \tau \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\infty,\Omega})} \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Zusammen mit der Einschränkung an die Schrittweite τ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}^0(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{w}]\|_{0,\Omega}^2 &\geq \frac{1}{8H^*} \|\eta\|_{0,\Omega}^2 + \frac{g}{4(1 + 2\tau c_f C_1^{1/2})} \tau^2 \|\nabla \eta\|_{0,\Omega}^2 \\ &+ \frac{1}{2g} \|\mathbf{w}\|_{0,\Omega}^2 + \frac{H_*}{2(1 + \tau \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\infty,\Omega})} \tau^2 \|\operatorname{div} \mathbf{w}\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (7.34)$$

□

7.3 Der Stokes Fall

Nachdem in Satz 7.5 ein Elliptizitätsresultat für den SWE Fall ohne Viskosität gezeigt wurde, soll nun in einem nächsten Schritt ein ähnliches Resultat für das Stokes System gezeigt werden. Darauf aufbauend wird anschliessend ein Elliptizitätsresultat für die Flachwassergleichungen im allgemeinen Fall mit nichtnegativer Viskosität gezeigt.

Im ersten Schritt wird kurz die Stetigkeit und Elliptizität im Fall $\mu = 0$ gezeigt.

Anschliessend soll gezeigt werden, dass das Least-Squares Funktional 4.34 stetig und elliptisch bezüglich einer geeigneten Norm ist. Dies geschieht indem zunächst gezeigt wird, dass die Finite Element Approximation aus 4.36 stetig und elliptisch ist. Mit Hilfe des nachstehenden 2. Lemmas von Strang wird gezeigt, dass dann auch die wahre Lösung stetig und elliptisch ist. Dazu legen wir für diesen Unterabschnitt die folgende Abkürzung fest:

$$\begin{aligned} |||(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})||| &= \left(\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,\Omega}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|q\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 + \|q + \mu^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Bemerkung 7.6

$|||(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})|||$ definiert eine Norm auf dem Raum $H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)^2$.

Satz 7.7 (2. Lemma von Strang)

Sei die Bilinearform $a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ elliptisch und stetig bzgl. der (gitterabhängigen) Norm $\|\cdot\|_h$ im Finite Element Raum S_h an den Raum V , genauer gelte

$$a_h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_h^2 \quad \text{für } \mathbf{v} \in S_h \quad (7.35)$$

$$|a_h(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\|_h \|\mathbf{v}\|_h \quad \text{für } \mathbf{u} \in V + S_h, \mathbf{v} \in S_h \quad (7.36)$$

mit von h unanabhängigen Konstanten α und C . Dabei ist S_h üblicherweise ein nichtkonformer Finite Element Raum. Dann existiert eine von h unabhängige Konstante c , so dass die Ungleichung

$$\|u - u_h\|_h \leq c \left(\inf_{v_h \in S_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in S_h} \frac{a_h(u, w_h)}{\|w_h\|_h} \right) \quad (7.37)$$

gilt. Dabei wird der erste Term als Approximationsfehler, der zweite als Konsistenzfehler bezeichnet.

Beweis: z.B. in [BRA97]

□

Das Residuum im Stokes Fall war definiert als

$$\mathcal{R}_S(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \delta p + \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{u} + \nabla p + \mu^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{U} \\ \mathbf{U} + \mu^{1/2} \nabla \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

und das Funktional als

$$\mathcal{F}_S(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}_S(p, \mathbf{u}, \mathbf{U})\|_{0,K}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E\|_{0,E}^2. \quad (7.39)$$

Für $\mu = 0$ besteht die Minimierung von (4.35) nur aus der Minimierung von $\|\mathcal{R}_{S0}(p, \mathbf{u}, \mathbf{U})\|_{0,\Omega}$ (vgl. 4.10). Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{R}_0(p, \mathbf{u}, \mathbf{U})\|_{0,\Omega} \\ & \begin{cases} \geq \min\{\delta, 1\} (\|\delta^{1/2} p + \delta^{-1/2} \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u} + \nabla p\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{U}\|_{0,\Omega}^2) \\ \leq \max\{\delta, 1\} (\|\delta^{1/2} p + \delta^{-1/2} \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u} + \nabla p\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{U}\|_{0,\Omega}^2) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.40)$$

Für $(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$, erhält man durch partielle Integration

$$\begin{aligned} & \|\delta^{1/2} p + \delta^{-1/2} \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u} + \nabla p\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{U}\|_{0,\Omega}^2 \\ & = \delta \|p\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla p\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \delta^{-1} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{U}\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Dies, zusammen mit (7.40), ergibt die Stetigkeit und Elliptizität in der Norm $H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times L^2(\Omega)^2$ im Fall $\mu = 0$.

Satz 7.8 (Stetigkeit)

Mit den üblichen Bezeichnungen aus diesem Kapitel, gilt

$$\mathcal{F}_S(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \lesssim \|(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})\|^2 \quad (7.42)$$

Beweis:

Es gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}_S(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})\|_{0,K}^2 \\ & \leq \max\{\delta, 1\} \left(\|\delta^{1/2} q + \delta^{-1/2} \operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v} + \nabla q + \mu^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{V} + \mu^{1/2} \nabla \mathbf{v}\|_{0,K}^2 \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}_S(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})\|_{0,K}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \\ & \leq 2 \max\{\delta^2, \delta^{-1}\} \left(\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|q\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla q + \mu^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 \right) \end{aligned}$$

für alle $(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$.

□

Eine untere Schranke für das Funktional zu finden, gestaltet sich allgemein etwas schwieriger. Dazu definieren wir zunächst

$$\hat{\mathcal{R}}_S(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \delta^{1/2} q + \delta^{-1/2} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} + \nabla q + \mu^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{V} \\ \mathbf{V} + \mu^{1/2} \nabla \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

Dann gilt offensichtlich

$$\|\mathcal{R}_S(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})\|_{0,\Omega}^2 \geq \min\{\delta, 1\} \|\hat{\mathcal{R}}_S(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})\|_{0,\Omega}^2 \quad (7.44)$$

Mit Hilfe dieses Satzes reicht es die Elliptizität von $\hat{\mathcal{R}}_S$ bezüglich des Finite Element Ansatzraums $Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h \subset H^1(\Omega) \times H_\Gamma^1(\Omega)^2 \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ zu zeigen.

Wie müssen also nur noch eine untere Schranke für $\hat{\mathcal{R}}_S(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})$ finden. Dazu dient das nachfolgende Lemma

Lemma 7.9

Seien $\Theta_h \subset H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ und $\Sigma_h \subset H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega)$ stückweise polynomiale Finite Element Räume auf der Triangulierung \mathcal{T}_h . Es existiert eine Konstante $C > 1$, so dass die Ungleichung

$$2 \left| \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}, [\mathbf{v}_h]_E)_{0,E} \right| \leq \frac{1}{2\mu^{1/2}} \|\mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + 2C\mu^{1/2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E\|_{0,E}^2. \quad (7.45)$$

für alle $\mathbf{V}_h \in \Theta_h$ und $\mathbf{v}_h \in \Sigma_h$ gilt.

Beweis:

Mit Hilfe der Cauchy Schwarzchen Ungleichung und Bemerkung 4.5 folgt

$$\begin{aligned} 2 \left| \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}, [\mathbf{v}_h]_E)_{0,E} \right| &= 2 \left| \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (\mathbf{t}(\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}), [\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E)_{0,E} \right| \\ &\leq 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|(\mathbf{t}(\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}))\|_{0,E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E\|_{0,E} \\ &\leq \frac{\rho}{\mu^{1/2}} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|(\mathbf{t}(\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}))\|_{0,E} + \frac{\mu^{1/2}}{\rho} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E\|_{0,E}^2. \end{aligned} \quad (7.46)$$

wobei der Parameter $\rho \in (0, 1)$ im weiteren genauer bestimmt werden soll.

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|(\mathbf{t}(\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}))\|_{0,E}^2 &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|\mathbf{V}_h\|_{0,E}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \subset \partial K} h_E \|\mathbf{V}_h\|_{0,E}^2 \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{V}_h\|_{0,E}^2 = C \|\mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (7.47)$$

mit einer Konstanten C .

O.B.d.A kann hier $C > \frac{1}{2}$ angenommen und $\rho = 1/(2C)$ in (7.46) eingesetzt werden. Dies führt zu

$$2 \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}, [\mathbf{v}_h]_E)_{0,E} \leq \frac{1}{2\mu^{1/2}} \|\mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + 2C\mu^{1/2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E\|_{0,E}^2. \quad (7.48)$$

□

Damit sind nun alle Voraussetzungen für den folgenden Satz gegeben.

Satz 7.10 (Elliptizität)

Seien $\Theta_h \subset H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ und $\Sigma_h \subset H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega)$ stückweise polynomiale Finite Element Räume auf der Triangulierung \mathcal{T}_h . Mit den üblichen Bezeichnungen aus diesem Kapitel gilt für das in 4.34 definierte LS-Funktional

$$\mathcal{F}_S(q_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h) \gtrsim |||(q_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h)||| \quad (7.49)$$

für alle $(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\hat{\mathcal{R}}_S(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})\|_{0,K}^2 \\ &= \|\delta^{1/2}q + \delta^{-1/2}\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v} + \nabla q + \mu^{1/2}\operatorname{div} \mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{V} + \mu^{1/2}\nabla \mathbf{v}\|_{0,K}^2 \\ &= \delta \|q\|_{0,\Omega}^2 + \delta^{-1} \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla q + \mu^{1/2}\operatorname{div} \mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 \\ &+ \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + 2\mu^{1/2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}, [\mathbf{v}]_E)_{0,E} \end{aligned} \quad (7.50)$$

für alle $(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$, wobei partielle Integration genutzt wurden. Mit Lemma 7.9 kann dies weiter abgeschätzt werden zu

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\hat{\mathcal{R}}_S(q_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h)\|_{0,K}^2 + (2C+1)\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E\|_{0,E}^2 \\ & \geq \delta \|q_h\|_{0,\Omega}^2 + \delta^{-1} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 \\ & + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E\|_{0,E}^2 + \|\nabla q_h + \mu^{1/2}\operatorname{div} \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (7.51)$$

für alle $(q_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$

□

Satz 7.11

Sei $(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ die exakte Lösung von 4.35 und sei $(p_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$ die nichtkonforme Approximation an 4.36. Dann gilt

$$|||(p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h)||| \lesssim \inf_{p_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h} |||(p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h)||| \quad (7.52)$$

Beweis:

Mit dem zweiten Lemma von Strang 7.7 ergibt sich

$$\begin{aligned} |||(p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h)||| &\lesssim \inf_{p_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h} |||(p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h)||| \\ &+ \sup_{(r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h} \frac{\mathcal{B}(p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h; r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h)}{\|(r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h)\|} \end{aligned} \quad (7.53)$$

Für den Zähler des Konsistenzfehlers erhalten wir aufgrund von 4.39

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h; r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) &= \mathcal{B}(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}; r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{R}(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}), \mathcal{R}(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}))_{0,K} + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} ([\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E, [\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E)_{0,E} \end{aligned}$$

Da für die exakte Lösung $(p, \mathbf{u}, \mathbf{U})$ gilt $\mathcal{R}(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = 0$ und $\mu[\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}] = 0$ für alle $E \in \mathcal{E}_h$, ist der Konsistenzfehler Null.

□

Bemerkung 7.12

In der Norm $|||(\cdot, \cdot, \cdot)|||$ sind ∇q und $\operatorname{div} \mathbf{V}$ durch einen Term gekoppelt. Es ist klar, dass man Schranken ohne Kopplungsterm gewinnen kann durch

$$\begin{aligned} |||(q, \mathbf{v}\mathbf{V})|||^2 &\geq \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 \\ |||(q, \mathbf{v}\mathbf{V})|||^2 &\leq \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 + \|q\|_{0,\Omega}^2 + 2\|\nabla q\|_{0,\Omega}^2 \\ &+ \|\mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 + 2\mu\|\operatorname{div} \mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

Diese Schranken werden auch im Abschnitt 7.5 genutzt, um Konvergenzabschätzungen zu erhalten.

7.4 SWE mit Viskosität

Analog zur Gewinnung des Elliptizitätsresultats für das Stokes System soll nun ein Elliptizitätsresultat im allgemeinen Fall nichtnegativer Viskosität für die Flachwassergleichungen gewonnen werden.

D.h. in diesem Abschnitt sollen obere und untere Schranken für das linearisierte Least-Squares Funktional

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 + \tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \quad (7.54)$$

gefunden werden.

Eine obere Schranke für dieses Funktional ist wie im Stokes Fall recht einfach zu zeigen.

Zunächst führen wir wieder analog zum Stokes Fall eine Norm ein, die im restlichen Unterabschnitt wieder mit $|||\cdot, \cdot, \cdot|||$ bezeichnet wird.

$$|||(q, \mathbf{v}, \mathbf{V})||| = \left(\|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,\Omega}^2 + g \|q\|_{0,\Omega}^2 + \tau \|\mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 \|q + \mu^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

Satz 7.13

Es gilt

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 + \tau \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \lesssim |||(\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V})|||^2 \quad (7.55)$$

für alle $(\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$.

Beweis:

Analog zum Stokes Fall. □

Die Entwicklung einer unteren Schranke durch eine Norm $|||\cdot|||$ gestaltet sich hingegen wiederum schwieriger. Allerdings kann man zunächst ganz analog zum Stokes Fall vorgehen. Zunächst soll erst einmal der Spezialfall $H = 1, \mathbf{u} = 0$ betrachtet werden. In diesem Fall ergibt sich nach einer Skalierung der ersten Zeile \mathcal{J} zu \mathcal{J}^\bullet durch

$$\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{W}] = \begin{pmatrix} g^{1/2}(\eta + \tau \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ \mathbf{v} + \tau(g \nabla \eta + \sqrt{\mu} \operatorname{div} \mathbf{V}) \\ \tau^{1/2}(\mathbf{V} + \mu^{1/2} \nabla \mathbf{v}) \end{pmatrix} \quad (7.56)$$

Dann ist klar, dass sich die Ergebnisse für den Stokes Fall übertragen lassen.

Lemma 7.14

Seien $\Theta_h \subset H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ und $\Sigma_h \subset H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega)$ stückweise polynomiale Finite Element Räume auf der Triangulierung \mathcal{T}_h . Dann existiert eine Konstante $C > 1$, so dass die Ungleichung

$$2\tau \left| \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}, [\mathbf{v}_h]_E)_{0,E} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{\tau}{\mu^{1/2}} \|\mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + 2C\tau\mu^{1/2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E\|_{0,E}^2. \quad (7.57)$$

für alle $\mathbf{V} \in \Theta_h$ und $\mathbf{v} \in \Sigma_h$ gilt.

Beweis:

Analog zum Beweis von Lemma 7.9. □

Damit sind nun alle Voraussetzungen für den folgenden Satz gegeben.

Satz 7.15 (Elliptizität)

Seien $\Theta_h \subset H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ und $\Sigma_h \subset H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega)$ stückweise polynomiale Finite Element Räume auf der Triangulierung \mathcal{T}_h . Mit den üblichen Bezeichnungen aus diesem Kapitel gilt

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h]\|_{0,K}^2 + \tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E\|_{0,E}^2 \gtrsim \|(\eta_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h)\|$$

für alle $(\eta_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$.

Beweis:

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{W}_h]\|_{0,K}^2 \\ &= \|g^{1/2}(\eta_h + \tau \operatorname{div} \mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}_h + \tau g \nabla \eta_h + \sqrt{\mu} \operatorname{div} \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{V}_h + \mu^{1/2} \nabla \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \\ &= g \|\eta_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\tau g \nabla \eta_h + \sqrt{\mu} \operatorname{div} \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau \|\mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 \quad (7.58) \\ &+ \tau\mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 + 2\tau\mu^{1/2} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} (\mathbf{V}_h \cdot \mathbf{n}, [\mathbf{v}_h]_E)_{0,E} \end{aligned}$$

für alle $(\eta_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{V}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$, wobei partielle Integration genutzt wurde. Mit Lemma 7.14 kann dies analog zum Stokes Fall weiter abgeschätzt werden zu

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{W}_h]\|_{0,K}^2 + 2C\mu \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_h]_E\|_{0,E}^2 \\ & \geq g \|\eta_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau\mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2}\tau \|\mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 \quad (7.59) \end{aligned}$$

□

Satz 7.16

Sei $(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) \in H^1(\Omega) \times H_\Gamma(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ die exakte Lösung von 4.22 und sei $(p_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h$ die nichtkonforme Approximation an 4.23. Dann gilt

$$\| (p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \| \lesssim \inf_{p_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h} \| (p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \| \quad (7.60)$$

Beweis:

Mit dem zweiten Lemma von Strang 7.7 ergibt sich

$$\begin{aligned} \| (p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \| & \lesssim \inf_{p_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h} \| (p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h) \| \quad (7.61) \\ & + \sup_{(r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) \in Q_h \times \Sigma_h \times \Theta_h} \frac{\mathcal{B}(p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h; r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h)}{\| (r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) \|} \end{aligned}$$

Für den Zähler des Konsistenzfehlers erhalten wir aufgrund von 4.26

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(p - p_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h; r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) &= \mathcal{B}(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}; r_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{W}_h) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{R}(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}), \mathcal{R}(q, \mathbf{v}, \mathbf{V}))_{0,K} + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} ([\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}]_E, [\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E)_{0,E} \end{aligned}$$

Da für die exakte Lösung $(p, \mathbf{u}, \mathbf{U})$ gilt $\mathcal{R}(p, \mathbf{u}, \mathbf{U}) = 0$ und $\mu[\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}] = 0$ für alle $E \in \mathcal{E}_h$, ist der Konsistenzfehler Null.

□

Bemerkung 7.17

Auch in diesem Abschnitt sind $\nabla\eta$ und $\operatorname{div} \mathbf{V}$ in der Norm $|||(\cdot, \cdot, \cdot)|||$ durch einen Term gekoppelt. Es können wiederum leicht Schranken ohne Kopplungsterm gefunden werden durch

$$\begin{aligned}
|||(\eta, \mathbf{v}\mathbf{V})|||^2 &\geq \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau\mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \\
&\quad + g \|\eta\|_{0,\Omega}^2 + \tau \|\mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 \\
|||(q, \mathbf{v}\mathbf{V})|||^2 &\leq \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \tau\mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \\
&\quad + g \|\eta\|_{0,\Omega}^2 + 2\tau^2 \|\nabla\eta\|_{0,\Omega}^2 + \tau \|\mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2 + 2\tau^2 \mu \|\operatorname{div} \mathbf{V}\|_{0,\Omega}^2
\end{aligned}$$

Diese Schranken werden im nächsten Abschnitt 7.5 genutzt, um Konvergenzabschätzungen zu erhalten.

In einem nächsten Schritt soll nun die Äquivalenz von $\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]$ und $\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]$ gezeigt werden.

Lemma 7.18

Sei $\tau \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\infty,\Omega} \leq 1$ und $H \geq H_*$ in ganz Ω , dann gilt für alle $K \in \mathcal{T}_h$

$$\|\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 \simeq \left\| \mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}] - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} \eta \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{0,K}^2 \quad (7.62)$$

Beweis: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 &= \left\| \begin{pmatrix} (1 + \tau \operatorname{div} \mathbf{u})\eta + \tau(H \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ D(H, \mathbf{u})\mathbf{v} + \tau \left(g \nabla\eta - \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} \eta + \sqrt{\mu} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) \\ \tau^{1/2}(\mathbf{V} + \sqrt{\mu} \nabla \mathbf{v}) \end{pmatrix} \right\|_{0,K}^2 \\
&\simeq \left\| \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\tau \operatorname{div} \mathbf{u}}{H} \right)^{1/2} \eta + \tau \left(\frac{H}{1+\tau \operatorname{div} \mathbf{u}} \right)^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{v} \\ D^{1/2}(H, \mathbf{u})\mathbf{v} + \tau D^{-1/2}(\sqrt{\mu} \operatorname{div} \mathbf{V} - c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} \eta + g \nabla\eta) \\ \tau^{1/2}(\mathbf{V} + \mu^{1/2} \nabla \mathbf{v}) \end{pmatrix} \right\|_{0,K}^2 \\
&\simeq \left\| \begin{pmatrix} g^{1/2}(\eta + \tau \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ \mathbf{v} + \tau(\mu^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{V} - c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} \eta + g \nabla\eta) \\ \tau^{1/2}(\mathbf{V} + \mu^{1/2} \nabla \mathbf{v}) \end{pmatrix} \right\|_{0,K}^2 \quad (7.63) \\
&= \left\| \mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}] - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau c_f \frac{|\mathbf{u}|}{H^2} \eta \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{0,K}^2
\end{aligned}$$

□

Satz 7.19

Wenn der Zeitschritt τ so gewählt wird, dass $2\tau c_f \|\mathbf{u}\|_{\infty, \Omega} \leq g^{1/2} H_*$, gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 + \tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \\ & \simeq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 + \tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \end{aligned} \quad (7.64)$$

Beweis:

Aus (7.59) ergibt sich sofort

$$\|\eta\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{1}{g} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{W}]\|_{0,K}^2 + 2C\tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \right) \quad (7.65)$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \left\| \tau c_f \frac{\mathbf{u}|\mathbf{u}|}{H^2} \eta \right\|_{0,\Omega}^2 & \leq \tau^2 c_f^2 \frac{\|\mathbf{u}\|_{\infty, \Omega}^2}{g H_*^2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 + 2C\tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \right) \\ & \leq \frac{1}{4} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 + 2C\tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \right) \end{aligned} \quad (7.66)$$

unter obiger Voraussetzung an τ gilt dann

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 + \tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \\ & \simeq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{J}^\bullet(H, \mathbf{u})[\eta, \mathbf{v}, \mathbf{V}]\|_{0,K}^2 + \tau\mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}]_E\|_{0,E}^2 \end{aligned} \quad (7.67)$$

□

7.5 Konvergenz

Für die Konvergenzanalyse in diesem Abschnitte benötigt man für die verschiedenen Finiten Elemente eine Abschätzung des Diskretisierungsfehlers $\|q - q_h\|$, wobei $q_h \in Q_h$ die Näherung an die wahre Lösung q bezeichnet. Aus [BRA97] erhält man das folgende Ergebnis:

Lemma 7.20

Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Verfeinerung von Ω , h bezeichne die Gitterkonstante der Verfeinerung und Q_h^m bezeichne den standard polynomialen Ansatzräume des Grades m , dann gilt

$$\inf_{q_h \in Q_h^{m+1}} \|q - q_h\|_{1,\Omega} \lesssim h^{m+1} |q|_{m+2,\Omega} \quad (7.68)$$

Die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers für die RT-Elemente erhält man aus [BRF91].

Lemma 7.21

Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Verfeinerung von Ω und Σ_h^m bezeichne den Raviart-Thomas Raum des Grades m , dann gilt

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \Sigma_h^m} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\text{div}, \Omega} \lesssim h^{m+1} (|\mathbf{u}|_{m+1, \Omega} + |\text{div } \mathbf{u}|_{m+1, \Omega}) \quad (7.69)$$

und aus [MTW00] erhält man schliesslich die folgende Abschätzung

Lemma 7.22

Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Verfeinerung von Ω und sei $\Pi_h : H_\Gamma(\text{div}, \Omega) \rightarrow \Sigma_h$ der Interpolationsoperator aus Kapitel 4 in [MTW00]. Dann gilt

$$\left(\|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{\text{div}, \Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u})\|_{0, K}^2 \right)^{1/2} \lesssim h |\mathbf{u}|_{2, \Omega} \quad (7.70)$$

Lemma 7.23

Wenn zur Approximation der Variablen \mathbf{u} der Raviart-Thomas Raum Σ_h^m des Grades m genutzt wird, gilt mit den Bezeichnungen aus diesem und dem vorigen Kapitel die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \inf_{\mathbf{v}_h \in \Sigma_h^m} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0, \Omega}^2 + \tau^2 g \|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0, \Omega}^2) \\ & + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0, K}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0, E}^2)^{1/2} \\ & \lesssim h^{m+1} (|\mathbf{u}|_{m+1, \Omega} + |\text{div } \mathbf{u}|_{m+1, \Omega}) + h^m \mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{m+1, \Omega} \end{aligned} \quad (7.71)$$

Beweis:

Aus Lemma 7.21 folgt

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \Sigma_h} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0, \Omega}^2 + \tau^2 g \|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0, \Omega}^2)^{1/2} \lesssim h^{m+1} (|\mathbf{u}|_{m+1, \Omega} + |\text{div } \mathbf{u}|_{m+1, \Omega})$$

Dies kann mit Prop III.3.6 aus [BRF91] weiter abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} & \inf_{\mathbf{v}_h \in \Sigma_h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0, \Omega}^2 + \tau^2 g \|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0, \Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0, K}^2 \right)^{1/2} \\ & \lesssim h^{m+1} (|\mathbf{u}|_{m+1, \Omega} + |\text{div } \mathbf{u}|_{m+1, \Omega} + h^m \mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{m+1, \Omega}) \end{aligned} \quad (7.72)$$

Sei $\Pi_h : H_\Gamma(\text{div}, \Omega) \rightarrow \Sigma_h$ der Interpolationsoperator, der üblicherweise für die Raviart-Thomas Elemente genutzt wird, siehe z.B. Kapitel III.5 [BRF91] und sei $\Psi_h : H_\Gamma^1(\Omega)^2 \rightarrow \Sigma_h^2$ der Interpolationsoperator der Standard Finiten Elemente, dann gilt

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0, E}^2 & \leq \|[(\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0, E}^2 = \|\Pi_h \mathbf{u}|_{K^l} - \Pi_h \mathbf{u}|_{K^r}\|_{0, E}^2 \\ & \leq 2\|\Pi_h \mathbf{u}|_{K^l} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0, E}^2 + 2\|\Pi_h \mathbf{u}|_{K^r} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0, E}^2 \end{aligned} \quad (7.73)$$

Daraus erhält man weiter

$$\begin{aligned}
\sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 &\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \subset \partial K} \frac{1}{h_E} \|\Pi_h \mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,E}^2 \\
&\lesssim \frac{1}{h} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Pi_h \mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,\partial K}^2 \\
&\lesssim \frac{1}{h^2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Pi_h \mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,K}^2 \\
&= \frac{1}{h^2} \|\Pi_h \mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 \\
&\leq \frac{2}{h^2} \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 \\
&\lesssim h^{2m} |\mathbf{u}|_{m+1,\Omega}^2
\end{aligned} \tag{7.74}$$

Also kann die Abschätzung (7.72) erweitert werden zu

$$\begin{aligned}
&\inf_{\mathbf{v}_h \in \Sigma_h} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega}^2 \\
&+ \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2)^{1/2} \\
&\lesssim h^{m+1} (|\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{m+1,\Omega}) + h^m \mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{m+1,\Omega}
\end{aligned} \tag{7.75}$$

□

Eine analoge Abschätzung zu Lemma 7.23 kann auch für die Approximation des Flusses \mathbf{u} durch das MTW-Elements gewonnen werden.

Lemma 7.24

Wenn zur Approximation der Variablen \mathbf{u} der MTW-Ansatzraum genutzt wird, gilt mit den Bezeichnungen aus diesem und dem vorigen Kapitel die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\inf_{\mathbf{v}_h \in \Sigma_h} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega}^2 \\
&+ \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2)^{1/2} \\
&\lesssim h (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega})
\end{aligned} \tag{7.76}$$

Beweis:

Nach Lemma 7.22 gilt

$$\begin{aligned}
&\inf_{\mathbf{v}_h \in \Sigma_h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
&\lesssim h (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega}) + h \mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{1,\Omega} \\
&\lesssim h (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega})
\end{aligned} \tag{7.77}$$

Sei $\Pi_h : H_\Gamma(\operatorname{div} \cdot, \Omega) \rightarrow \Sigma_h$ analog zu Lemma 7.23 der Interpolationsoperator der MTW-Elemente aus Kapitel 4, [MTW00]. Sei weiterhin $\Psi_h : H_\Gamma^1(\Omega)^2 \rightarrow Q_h^2$ wiederum der Interpolationsoperator der standard finiten Elemente, dann gilt wie oben

$$\begin{aligned} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 &\leq \|[(\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 = \|\Pi_h \mathbf{u}|_{K^l} - \Pi_h \mathbf{u}|_{K^r}\|_{0,E}^2 \\ &\leq 2\|\Pi_h \mathbf{u}|_{K^l} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,E}^2 + 2\|\Pi_h \mathbf{u}|_{K^r} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,E}^2 \end{aligned} \quad (7.78)$$

Und daraus erhält man wiederum analog zum Beweis von Lemma 7.23

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 &\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \subset \partial K} \frac{1}{h_E} \|\Pi_h \mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,E}^2 \\ &\lesssim \frac{1}{h} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Pi_h \mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,\partial K}^2 \\ &\lesssim \frac{1}{h^2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\Pi_h \mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,K}^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \|\Pi_h \mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \frac{2}{h^2} \|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{u} - \Psi_h \mathbf{u}\|_{0,\Omega}^2 \\ &\lesssim h^2 |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (7.79)$$

Damit kann die Abschätzung (7.77) erweitert werden zu

$$\begin{aligned} &\inf_{\mathbf{v}_h \in \Sigma_h} (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega}^2) \\ &+ \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\|_{0,K}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2)^{1/2} \\ &\lesssim h(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega}) \end{aligned} \quad (7.80)$$

□

Lemma 7.25

Für die Approximation der Variablen \mathbf{U} mit Hilfe des Raviart-Thomas Raums Σ_h^m , gilt die entsprechende Abschätzung

$$\inf_{\mathbf{V}_h \in \Sigma_h^m} (\|\mathbf{U} - \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|\operatorname{div}(\mathbf{U} - \mathbf{V}_h)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \lesssim h^{m+1} \mu^{1/2} (|\nabla \mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + \mu^{1/2} |\Delta \mathbf{u}|_{m+1,\Omega}) \quad (7.81)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} &\inf_{\mathbf{V}_h \in \Sigma_h^m} (\|\mathbf{U} - \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|\operatorname{div}(\mathbf{U} - \mathbf{V}_h)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \\ &\lesssim h^{m+1} (|\mathbf{U}|_{m+1,\Omega} + \mu^{1/2} |\operatorname{div} \mathbf{U}|_{m+1,\Omega}) \\ &= h^{m+1} (\mu^{1/2} |\nabla \mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + \mu |\Delta \mathbf{u}|_{m+1,\Omega}) \\ &= h^{m+1} \mu^{1/2} (|\nabla \mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + \mu^{1/2} |\Delta \mathbf{u}|_{m+1,\Omega}) \\ &= h^{m+1} \mu^{1/2} (|\mathbf{u}|_{m+2,\Omega} + \mu^{1/2} |\Delta \mathbf{u}|_{m+1,\Omega}). \end{aligned} \quad (7.82)$$

□

Damit erhält man insgesamt die folgende Abschätzung:

Satz 7.26

Wenn zur Approximation der Variablen \hat{H} der standard polynomiale Ansatzraum Q_h^n und für die Variablen \mathbf{u} bzw. \mathbf{U} der Raviart-Thomas Raum Σ_h^m des Grades m bzw. der Raviart-Thomas Raum Σ_h^k des Grades k genutzt wird, gilt mit den Bezeichnungen aus diesem und dem vorigen Kapitel die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K}^2 + \|\hat{H} - \hat{H}_h\|_{0,\Omega}^2 \\
& + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 + \|\mathbf{U} - \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|\operatorname{div}(\mathbf{U} - \mathbf{V}_h)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}(\hat{H}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 \right)^{1/2} \quad (7.83) \\
& \lesssim h^{m+1} (|\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{m+1,\Omega}) + h^m \mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{m+1,\Omega} + h^{n+1} |\hat{H}|_{n+2,\Omega} \\
& + h^{k+1} (\mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{k+2,\Omega} + \mu |\Delta \mathbf{u}|_{k+1,\Omega})
\end{aligned}$$

Beweis:

Nach Lemma 7.20 gilt $\inf_{\hat{H}_h \in Q_h^{n+1}} \|\hat{H} - \hat{H}_h\|_{1,\Omega} \lesssim h^{n+1} |q|_{n+2,\Omega}$. Zusammen mit Lemma 7.23 und Lemma 7.25 liefert dies die Behauptung. □

Folgerung 7.27

- Bei Approximation von \hat{H} , \mathbf{u} und \mathbf{U} durch Verwendung der Ansatzräume Q_h^1 , RT_h^2 und RT_h^1 ergibt sich daher insbesondere die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K}^2 + \|\hat{H} - \hat{H}_h\|_{0,\Omega}^2 \\
& + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 + \|\mathbf{U} - \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|\operatorname{div}(\mathbf{U} - \mathbf{V}_h)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}(\hat{H}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 \right)^{1/2} \quad (7.84) \\
& \lesssim h^2 (|\mathbf{u}|_{2,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{2,\Omega}) + h (|\hat{H}|_{2,\Omega} + \mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{2,\Omega} + \mu |\Delta \mathbf{u}|_{1,\Omega})
\end{aligned}$$

- Bei Approximation von \hat{H} , \mathbf{u} und \mathbf{U} durch Verwendung der Ansatzräume Q_h^2 , RT_h^2

und RT_h^1 ergibt sich daher insbesondere die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K}^2 + \|\hat{H} - \hat{H}_h\|_{0,\Omega}^2 \\
& + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 + \|\mathbf{U} - \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|\operatorname{div}(\mathbf{U} - \mathbf{V}_h)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}(\hat{H}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 \right)^{1/2} \quad (7.85) \\
& \lesssim h^2 (|\mathbf{u}|_{2,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{2,\Omega} + |\hat{H}|_{3,\Omega}) + h(\mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{2,\Omega} + \mu |\Delta \mathbf{u}|_{1,\Omega})
\end{aligned}$$

Eine analoge Abschätzung erhält man bei Verwendung des MTW-Elements statt des RT-Elements als Ansatzraum für den Fluss \mathbf{u} .

Satz 7.28

Wenn zur Approximation der Variablen \hat{H} der standard polynomiale Ansatzraum Q_h^n und für die Variablen \mathbf{u} der MTW-Raum und für die Variable \mathbf{U} der Raviart-Thomas Raum Σ_h^k des Grades k genutzt wird, gilt mit den Bezeichnungen aus diesem und dem vorigen Kapitel die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K}^2 + \|\hat{H} - \hat{H}_h\|_{0,\Omega}^2 \\
& + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 + \|\mathbf{U} - \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|\operatorname{div}(\mathbf{U} - \mathbf{V}_h)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}(\hat{H}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 \right)^{1/2} \quad (7.86) \\
& \lesssim h (|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega}) + h^{n+1} |\hat{H}|_{n+2,\Omega} + h^{k+1} (\mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{k+2,\Omega} + \mu |\Delta \mathbf{u}|_{k+1,\Omega})
\end{aligned}$$

Beweis:

Analog zum Beweis von Satz 7.26

□

Folgerung 7.29

- Bei Approximation von \hat{H} , \mathbf{u} und \mathbf{U} durch Verwendung der Ansatzräume Q^1 , MTW und RT^1 ergibt sich daher die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K}^2 + \|\hat{H} - \hat{H}_h\|_{0,\Omega}^2 \\
& + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 + \|\mathbf{U} - \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|\operatorname{div}(\mathbf{U} - \mathbf{V}_h)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}(\hat{H}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 \right)^{1/2} \quad (7.87) \\
& \lesssim h(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\hat{H}|_{2,\Omega} + \mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{2,\Omega} + \mu |\Delta \mathbf{u}|_{1,\Omega})
\end{aligned}$$

- Bei Approximation von \hat{H} , \mathbf{u} und \mathbf{U} durch Verwendung der Ansatzräume Q^2 , MTW und RT^2 ergibt sich die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}^2 + \tau^2 g \|\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K}^2 + \|\hat{H} - \hat{H}_h\|_{0,\Omega}^2 \\
& + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 + \|\mathbf{U} - \mathbf{V}_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu \|\operatorname{div}(\mathbf{U} - \mathbf{V}_h)\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{R}(\hat{H}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{U}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \mu \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{1}{h_E} \|[\mathbf{t} \cdot (\Pi_h \mathbf{u})]_E\|_{0,E}^2 \right)^{1/2} \quad (7.88) \\
& \lesssim h(|\mathbf{u}|_{1,\Omega} + |\operatorname{div} \mathbf{u}|_{1,\Omega} + \mu^{1/2} |\mathbf{u}|_{2,\Omega} + \mu |\Delta \mathbf{u}|_{1,\Omega}) + h^2 |\hat{H}|_{3,\Omega}
\end{aligned}$$

8 Numerische Ergebnisse

Zur numerischen Simulation wurde die Finite Element Least-Squares Formulierung sowohl für das Stokes System als auch für die Shallow Water Equations implementiert und in verschiedenen Geometrien jeweils für eine Reihe von unterschiedlichen Viskositätsparametern getestet.

Zum Einsatz kamen dabei die folgenden Geometrien

- das Einheitsquadrat
- ein L-Shape

die in den folgenden Unterabschnitten zusammen mit den Ergebnissen kurz beschrieben werden sollen.

8.1 Stokes

Zunächst soll auch in diesem Kapitel zum Vergleich der Stokes Fall betrachtet werden. Die numerischen Simulationen für das Least-Squares Funktional des Darcy-Stokes-Falls (4.34) wurden auf dem Einheitsquadrat $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ (siehe auch Abbildung 8.2) mit Randbedingungen

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - x_1^2 & , \quad \text{für } x_2 = 1 , \\ x_1^2 - 1 & , \quad \text{für } x_2 = -1 , \\ 0 & , \quad \text{sonst } \Gamma . \end{cases}$$

getestet (vgl. [DST05]). Dabei bestand die gröbste Triangulierung ($l=0$) aus 12 Dreiecken, 24 Kanten und 13 Punkten. Diese Triangulierung wurde fünfmal gleichmässig verfeinert, so dass die feinste Triangulierung ($l=5$) aus 12288 Dreiecken, 18624 Kanten und 6337 Punkten bestand.

Das Least-Squares Funktional $\mathcal{F}_S(p_h, \mathbf{u}, \mathbf{U})$ (vgl. 4.34) des Stokes Falls wurde implementiert, auf jedem Level, $l=0$ bis $l=5$, berechnet und in den Tabellen 8.1 - 8.4 für verschiedene Werte des Viskositätsparameters dargestellt. Dabei wurden als Ansatzräume für die Wasserhöhe Q_h und den Gradienten des Flusses Θ_h standard quadratische Ansatzräume bzw. lineare Raviart-Thomas Räume genutzt. Bei den numerischen Tests stellte sich heraus, dass standard quadratische Ansatzräume nötig sind, um quadratische Konvergenz zu erhalten, während es ausreicht für den Gradienten des Flusses Raviart-Thomas Räume niedrigster Ordnung zu nutzen.

Als Ansatzraum für den Fluss Σ_h wurde in den Tabellen 8.1 und 8.2 der quadratische Raviart-Thomas Raum (RT_2) genutzt. Aus Tabelle 8.1 kann man für den Fall $\mu = 0$ tatsächlich quadratische Konvergenz beobachten, während man für $\mu = 1$ nur lineare

Konvergenz erhält. Die zugrunde liegende Triangulierung \mathcal{T}_h wird in jedem Verfeinerungsschritt gleichmässig verfeinert. Daher weiss man, dass die Gitterkonstante h , auf dem nächst feineren Level (z.B. $l = 1$) nur noch viertel so gross wie auf dem Ausgangslevel (z.B. $l = 0$) ist. D.h. man kann in den Tabellen gut beobachten, dass sich das Funktional für $\mu = 0$ verhält wie h^4 und für $\mu = 1$ wie h^2 . Damit verhält sich die Wurzel des Funktionals wie h^2 bzw. wie h . Man beobachtet also eine Reduktion des Funktionals auf ein Viertel des Wertes im nächsten Verfeinerungsschritt bei linearer Konvergenz bzw. auf ein sechzehntel bei quadratischer Konvergenz. Für die Zwischenwerte von μ kann man anfangs eine quadratische Konvergenz beobachten, die sich dann aber immer weiter zur linearen Konvergenz abschwächt, je dominanter der Viskositätsanteil wird. Man kann ebenfalls beobachten, dass der Wert des Funktionals ab und zu auf einem höheren Feinheitslevel grösser wird. Eine genauere Betrachtung enthüllt, dass für diese kleinen Rückschritte der Tangential-Sprungterm der LS-Formulierung verantwortlich ist. Die Tabellen 8.1 und 8.4 sind hier nur der Vollständigkeit halber mit angegeben worden und sollen nicht weiter erläutert werden, da der Stokes Fall ($\delta = 1$) das hier interessierende Problem darstellt. Allerdings erkennt man in Tabelle 8.2 ein ähnliches Konvergenzverhalten wie für den Fall $\delta = 1$.

Für die nächsten beiden Tabellen 8.3 und 8.4 wurde für den Fluss der MTW Ansatzraum genutzt. Man erkennt dabei in Tabelle 8.3, dass man hier auch im Fall $\mu = 0$ nur noch lineare Konvergenz erhält. Man erhält für das gesamte Spektrum von μ nur noch eine lineare Konvergenz des Funktionals. Dass die Konvergenz schlechter als bei Nutzung der quadratischen Raviart-Thomas Räume ist und man auch etwas grössere Werte für den Wert des Funktionals bekommt, deutet daraufhin, dass sich die Verwendung des MTW Elements hier nicht lohnt. D.h. dass die Verringerung der Freiheitsgrade, die man durch Nutzung des MTW Elements erhält, nicht die schlechteren Resultate kompensiert. Man kann die Freiheitsgrade noch ein wenig mehr reduzieren, indem man bei Verwendung des MTW Elements zur Näherung an die Wasserhöhe standard lineare statt quadratische Ansatzräume verwendet. Man erhält dann fast identische Werte zu Tabelle 8.3. Zur Tabelle 8.4 soll hier nur kurz angemerkt werden, dass die Konvergenz des Funktionals zwar nicht quadratisch, aber doch sichtbar besser als nur linear ist.

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$\dim Q_h$	37	121	433	1633	6337	24961
$\dim \Sigma_h$	48	216	912	3744	15168	61056
$\dim \Theta_h$	48	168	624	2400	9408	37248
$\mu = 1$	$7.24 \cdot 10^{-1}$	$2.49 \cdot 10^{-1}$	$6.93 \cdot 10^{-2}$	$1.81 \cdot 10^{-2}$	$4.61 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$
10^{-1}	$1.14 \cdot 10^{-1}$	$4.61 \cdot 10^{-2}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$4.27 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-3}$	$2.92 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	$4.22 \cdot 10^{-2}$	$1.91 \cdot 10^{-2}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$6.85 \cdot 10^{-3}$	$1.97 \cdot 10^{-3}$	$5.09 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$3.02 \cdot 10^{-2}$	$5.70 \cdot 10^{-3}$	$4.63 \cdot 10^{-3}$	$5.96 \cdot 10^{-3}$	$4.01 \cdot 10^{-3}$	$1.34 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	$2.88 \cdot 10^{-2}$	$3.47 \cdot 10^{-3}$	$7.89 \cdot 10^{-4}$	$9.99 \cdot 10^{-4}$	$1.65 \cdot 10^{-3}$	$1.81 \cdot 10^{-3}$
10^{-5}	$2.87 \cdot 10^{-2}$	$3.23 \cdot 10^{-3}$	$3.32 \cdot 10^{-4}$	$1.25 \cdot 10^{-4}$	$2.05 \cdot 10^{-4}$	$3.80 \cdot 10^{-4}$
10^{-6}	$2.87 \cdot 10^{-2}$	$3.21 \cdot 10^{-3}$	$2.85 \cdot 10^{-4}$	$3.26 \cdot 10^{-5}$	$2.24 \cdot 10^{-5}$	$4.13 \cdot 10^{-5}$
10^{-7}	$2.87 \cdot 10^{-2}$	$3.20 \cdot 10^{-3}$	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-5}$	$3.76 \cdot 10^{-6}$	$4.27 \cdot 10^{-6}$
10^{-8}	$2.87 \cdot 10^{-2}$	$3.20 \cdot 10^{-3}$	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-5}$	$1.89 \cdot 10^{-6}$	$5.39 \cdot 10^{-7}$
10^{-9}	$2.87 \cdot 10^{-2}$	$3.20 \cdot 10^{-3}$	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$2.23 \cdot 10^{-5}$	$1.71 \cdot 10^{-6}$	$1.65 \cdot 10^{-7}$
10^{-10}	$2.87 \cdot 10^{-2}$	$3.20 \cdot 10^{-3}$	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$2.23 \cdot 10^{-5}$	$1.69 \cdot 10^{-6}$	$1.28 \cdot 10^{-7}$
$\mu = 0$	$2.87 \cdot 10^{-2}$	$3.20 \cdot 10^{-3}$	$2.80 \cdot 10^{-4}$	$2.23 \cdot 10^{-5}$	$1.69 \cdot 10^{-6}$	$1.24 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 8.1: LS-Funktional für $\delta = 1$ und $P_2/RT_2/RT_1^2$ im Stokes Fall

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$\dim Q_h$	37	121	433	1633	6337	24961
$\dim \Sigma_h$	48	216	912	3744	15168	61056
$\dim \Theta_h$	48	168	624	2400	9408	37248
$\mu = 1$	$7.09 \cdot 10^{-1}$	$2.87 \cdot 10^{-1}$	$8.87 \cdot 10^{-2}$	$2.41 \cdot 10^{-2}$	$6.21 \cdot 10^{-3}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$
10^{-1}	$1.30 \cdot 10^{-1}$	$7.61 \cdot 10^{-2}$	$2.92 \cdot 10^{-2}$	$8.23 \cdot 10^{-3}$	$2.13 \cdot 10^{-3}$	$5.37 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	$4.36 \cdot 10^{-2}$	$3.02 \cdot 10^{-2}$	$2.90 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.82 \cdot 10^{-3}$	$9.85 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$2.75 \cdot 10^{-2}$	$7.00 \cdot 10^{-3}$	$7.78 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-2}$	$7.27 \cdot 10^{-3}$	$2.46 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	$2.56 \cdot 10^{-2}$	$3.36 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-3}$	$1.70 \cdot 10^{-3}$	$2.86 \cdot 10^{-3}$	$3.19 \cdot 10^{-3}$
10^{-5}	$2.54 \cdot 10^{-2}$	$2.97 \cdot 10^{-3}$	$3.49 \cdot 10^{-4}$	$1.98 \cdot 10^{-4}$	$3.50 \cdot 10^{-4}$	$6.54 \cdot 10^{-4}$
10^{-6}	$2.54 \cdot 10^{-2}$	$2.94 \cdot 10^{-3}$	$2.70 \cdot 10^{-4}$	$3.88 \cdot 10^{-5}$	$3.71 \cdot 10^{-5}$	$7.08 \cdot 10^{-5}$
10^{-7}	$2.54 \cdot 10^{-2}$	$2.93 \cdot 10^{-3}$	$2.62 \cdot 10^{-4}$	$2.28 \cdot 10^{-5}$	$5.17 \cdot 10^{-6}$	$7.24 \cdot 10^{-6}$
10^{-8}	$2.54 \cdot 10^{-2}$	$2.93 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-4}$	$2.12 \cdot 10^{-5}$	$1.97 \cdot 10^{-6}$	$8.32 \cdot 10^{-7}$
10^{-9}	$2.54 \cdot 10^{-2}$	$2.93 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-4}$	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$1.65 \cdot 10^{-6}$	$1.90 \cdot 10^{-7}$
10^{-10}	$2.54 \cdot 10^{-2}$	$2.93 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-4}$	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$1.61 \cdot 10^{-6}$	$1.26 \cdot 10^{-7}$
$\mu = 0$	$2.54 \cdot 10^{-2}$	$2.93 \cdot 10^{-3}$	$2.61 \cdot 10^{-4}$	$2.11 \cdot 10^{-5}$	$1.61 \cdot 10^{-6}$	$1.19 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 8.2: LS-Funktional für $\delta = 0$ und $P_2/RT_2/RT_1^2$ im Stokes Fall

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$\dim Q_h$	37	121	433	1633	6337	24961
$\dim \Sigma_h$	48	204	840	3408	13728	55104
$\dim \Theta_h$	48	168	624	2400	9408	37248
$\mu = 1$	$9.06 \cdot 10^{-1}$	$3.09 \cdot 10^{-1}$	$8.56 \cdot 10^{-2}$	$2.22 \cdot 10^{-2}$	$5.63 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^{-3}$
10^{-1}	$1.61 \cdot 10^{-1}$	$6.01 \cdot 10^{-1}$	$1.86 \cdot 10^{-2}$	$5.03 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \cdot 10^{-3}$	$3.35 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	$7.56 \cdot 10^{-2}$	$3.00 \cdot 10^{-2}$	$1.68 \cdot 10^{-2}$	$6.53 \cdot 10^{-3}$	$1.84 \cdot 10^{-3}$	$4.72 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$5.97 \cdot 10^{-2}$	$1.61 \cdot 10^{-2}$	$7.35 \cdot 10^{-3}$	$6.09 \cdot 10^{-3}$	$3.51 \cdot 10^{-3}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	$5.76 \cdot 10^{-2}$	$1.36 \cdot 10^{-2}$	$3.63 \cdot 10^{-3}$	$1.70 \cdot 10^{-3}$	$1.72 \cdot 10^{-3}$	$1.61 \cdot 10^{-3}$
10^{-5}	$5.74 \cdot 10^{-2}$	$1.34 \cdot 10^{-2}$	$3.16 \cdot 10^{-3}$	$8.57 \cdot 10^{-4}$	$3.85 \cdot 10^{-4}$	$4.07 \cdot 10^{-4}$
10^{-6}	$5.74 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.11 \cdot 10^{-3}$	$7.64 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$8.71 \cdot 10^{-4}$
10^{-7}	$5.74 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.11 \cdot 10^{-3}$	$7.55 \cdot 10^{-4}$	$1.89 \cdot 10^{-4}$	$5.06 \cdot 10^{-4}$
10^{-8}	$5.74 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.11 \cdot 10^{-3}$	$7.54 \cdot 10^{-4}$	$1.87 \cdot 10^{-4}$	$4.69 \cdot 10^{-4}$
10^{-9}	$5.74 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.11 \cdot 10^{-3}$	$7.54 \cdot 10^{-4}$	$1.86 \cdot 10^{-4}$	$4.65 \cdot 10^{-4}$
10^{-10}	$5.74 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.11 \cdot 10^{-3}$	$7.54 \cdot 10^{-4}$	$1.86 \cdot 10^{-4}$	$4.65 \cdot 10^{-4}$
$\mu = 0$	$5.74 \cdot 10^{-2}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$	$3.11 \cdot 10^{-3}$	$7.54 \cdot 10^{-4}$	$1.86 \cdot 10^{-4}$	$4.65 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 8.3: LS-Funktional für $\delta = 1$ und $P_2/MTW/RT_1^2$ im Stokes Fall

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$	$l = 5$
$\dim Q_h$	37	121	433	1633	6337	24961
$\dim \Sigma_h$	48	204	840	3408	13728	55104
$\dim \Theta_h$	48	168	624	2400	9408	37248
$\mu = 1$	$6.13 \cdot 10^{-1}$	$2.46 \cdot 10^{-1}$	$7.38 \cdot 10^{-2}$	$1.97 \cdot 10^{-2}$	$5.03 \cdot 10^{-3}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$
10^{-1}	$1.18 \cdot 10^{-1}$	$6.66 \cdot 10^{-1}$	$2.46 \cdot 10^{-2}$	$6.82 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	$4.40 \cdot 10^{-4}$
10^{-2}	$3.77 \cdot 10^{-2}$	$2.86 \cdot 10^{-2}$	$2.50 \cdot 10^{-2}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$	$3.12 \cdot 10^{-3}$	$8.03 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$6.21 \cdot 10^{-3}$	$7.38 \cdot 10^{-3}$	$9.40 \cdot 10^{-3}$	$6.00 \cdot 10^{-3}$	$2.01 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$2.32 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-3}$	$1.63 \cdot 10^{-3}$	$2.65 \cdot 10^{-3}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$
10^{-5}	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$1.90 \cdot 10^{-3}$	$2.53 \cdot 10^{-4}$	$1.89 \cdot 10^{-4}$	$3.42 \cdot 10^{-4}$	$6.21 \cdot 10^{-4}$
10^{-6}	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$1.72 \cdot 10^{-4}$	$3.09 \cdot 10^{-5}$	$3.64 \cdot 10^{-5}$	$6.99 \cdot 10^{-5}$
10^{-7}	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	$1.48 \cdot 10^{-5}$	$4.56 \cdot 10^{-6}$	$7.19 \cdot 10^{-6}$
10^{-8}	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$1.35 \cdot 10^{-6}$	$7.86 \cdot 10^{-7}$
10^{-9}	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$1.03 \cdot 10^{-6}$	$1.45 \cdot 10^{-7}$
10^{-10}	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$	$8.08 \cdot 10^{-8}$
$\mu = 0$	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$1.85 \cdot 10^{-3}$	$1.62 \cdot 10^{-4}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$9.97 \cdot 10^{-7}$	$7.37 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 8.4: LS-Funktional für $\delta = 0$ und $P_2/MTW/RT_1^2$ im Stokes Fall

8.2 SWE Quadrat

Die einfachste Testgeometrie für die Flachwassergleichungen bestand wie im Stokes Fall des vorherigen Unterabschnitts ebenfalls aus einem Quadrat mit einer Kantenlänge von 2m. Dabei ist die auf der nebenstehenden Abbildung 8.2 oben zu sehende Kante der Einfluss- die untere Kante der Ausflussrand. Die Anfangsbedingungen der Simulation in diesem Testgebiet sind $H \equiv 2$, $\mathbf{U} \equiv 0$ auf ganz Ω , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 1 - x_1^2$ auf Γ_{inflow} , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = x_1^2 - 1$ auf $\Gamma_{outflow}$ und $\mathbf{u} \equiv 0$ sonst.

Analog zum Stokes Unterabschnitt sind den nachstehenden Tabellen 8.5 bis 8.12 die Ergebnisse für die unterschiedlichen Kombinationen von FE-Elementen und für verschiedene Viskositätsparameter gegeben.

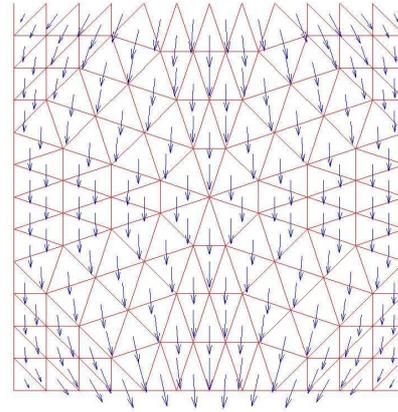


Abbildung 8.1: Fluss \mathbf{u} im Testgebiet Quadrat für $W=0$ und $\tau = 15$

Auch für die Shallow Water Equations wurde das Funktional $\mathcal{F}(H^D + \eta, \mathbf{u}, \mathbf{U}; \hat{H}^{\text{old}}, \hat{\mathbf{u}}^{\text{old}})$ (vgl. 4.17) auf den Leveln $l=0$ bis $l=5$ berechnet und in den Tabellen 8.5 - 8.12 für verschiedene Werte des Viskositätsparameters dargestellt. Dabei bestanden die Triangulierungen für die Feinheitslevel ($l=0$ bis $l=5$) aus denselben Triangulierungen wie im Stokes Fall. Die Triangulierung im größten Fall ($l=0$) bestand also auch hier aus 12 Dreiecken, 24 Kanten und 13 Punkten und dementsprechend die feinste Triangulierung ($l=5$) aus 12288 Dreiecken, 18624 Kanten und 6337 Punkten.

Als Finite Element Ansatzräume zur Approximation an die Wasserhöhe Q_h kamen diesmal sowohl standard lineare Finite Elemente P_1 in den Tabellen 8.5, 8.7, 8.9 und 8.10 als auch standard quadratische Elemente P_2 in den Tabellen 8.6, 8.8, 8.11 und 8.12 zum Einsatz.

Zur Approximation an den Gradienten des Flusses Θ_h wurden in den Tabellen 8.5, 8.6, 8.9, und 8.11 lineare (RT_1) bzw. in den Tabellen 8.7, 8.8, 8.10 und 8.12 quadratische (RT_2) Raviart-Thomas Räume genutzt.

Als Ansatzräume an den Fluss \mathbf{u} wurden wiederum das MTW Element, vgl. Tabellen 8.5-8.8, bzw. das quadratische Raviart-Thomas Element, vgl. Tabellen 8.9-8.12, genutzt.

Die Ansatzräume für die Wasserhöhe, den Fluss und den Gradienten des Flusses wurden auch hier mit Q_h , Σ_h und Θ_h bezeichnet und die Freiheitsgrade auf den verschiedenen Leveln zu Vergleichszwecken mit in die Tabellen aufgenommen. Zur besseren Vergleichsmöglichkeit wurden in den Tabellen 8.5-8.12 ebenfalls die Quotienten der Werte des Funktionals auf benachbarten Leveln angegeben. So bezeichnet beispielsweise die Spalte $l1/10$ den Quotienten aus dem Wert des Funktionals auf dem Level $l=1$ und dem Wert des Funktionals auf dem Level $l=0$.

Bei näherer Betrachtung fällt auf, dass für eine quadratische Konvergenz im Fall $\mu = 0$ standard lineare Ansatzräume für die Wasserhöhe nicht ausreichend sind. Um quadratische Konvergenz zu erreichen, müssen mindestens standard quadratische Ansatzräume genutzt werden. Dagegen spielt es für das Konvergenzverhalten keine Rolle, ob lineare oder quadratische Raviart-Thomas Räume für Θ_h , den Ansatzraum für \mathbf{U} , genutzt werden. Bei der Verwendung von RT_2 -Räumen ist der Wert des Funktionals für $\mu = 1$ etwas kleiner, allerdings hat man natürlich sehr viel mehr Freiheitsgrade als bei der Verwendung von RT_1 Elementen. Deshalb ist es hier empfehlenswert RT_1 Elemente zu nutzen.

Erstaunlicherweise fällt bei einem Vergleich zwischen dem MTW - und dem RT_2 -Element zur Approximation an \mathbf{u} auf, dass man für dieses Testbeispiel auch im Fall des MTW -Elements quadratische Konvergenz des Funktionals im Fall $\mu = 0$ erzielen kann. Bei Nutzung des RT_2 -Elements erhält man, wie zu erwarten war, fast identische Ergebnisse wie im Stokes Fall. Man erhält für $\mu = 0$ quadratische Konvergenz des Funktionals, die sich mit zunehmender Viskosität immer weiter abschwächt, bis man nur noch lineares Konvergenzverhalten im Fall $\mu = 1$ erhält. Genau diese Resultate erzielt man in diesem Beispiel allerdings auch bei Nutzung des MTW -Elements. Auch hier erhält man für den Fall $\mu = 0$ quadratische Konvergenz, die sich mit zunehmender Viskosität zur linearen Konvergenz abschwächt. Sogar die Werte des Funktionals sind hier etwas kleiner. Für dieses Testbeispiel lohnt sich also die Verwendung des MTW -Elements für den Fluss.

Insgesamt legt die Betrachtung hier die Nutzung der Kombination aus den Ansatzräume P_2 , MTW und RT_1 für Q_h , Σ_h und Θ_h dar.

Tabelle 8.5: LS-Funktional auf Quadrat für $P_1/MTW/RT_1$

	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	11/10	12/11	13/12	14/13	15/14
dim Q_h	13	37	121	433	1633	6337					
dim Σ_h	48	204	840	3408	13728	55104					
dim Θ_h	48	168	624	2400	9408	37248					
0e+00	6.62e-02	2.86e-02	8.96e-03	2.42e-03	6.21e-04	1.56e-04	2.32	3.19	3.70	3.90	3.97
1e-10	6.62e-02	2.86e-02	8.96e-03	2.42e-03	6.21e-04	1.57e-04	2.32	3.19	3.70	3.90	3.97
1e-09	6.62e-02	2.86e-02	8.96e-03	2.42e-03	6.21e-04	1.57e-04	2.32	3.19	3.70	3.90	3.95
1e-08	6.62e-02	2.86e-02	8.96e-03	2.42e-03	6.25e-04	1.66e-04	2.32	3.19	3.70	3.88	3.76
1e-07	6.62e-02	2.86e-02	8.97e-03	2.44e-03	6.66e-04	2.52e-04	2.31	3.19	3.67	3.67	2.64
1e-06	6.62e-02	2.86e-02	9.03e-03	2.61e-03	1.05e-03	1.00e-03	2.31	3.17	3.46	2.48	1.05
1e-05	6.65e-02	2.89e-02	9.63e-03	4.21e-03	3.96e-03	3.42e-03	2.30	3.00	2.28	1.06	1.16
1e-04	6.94e-02	3.13e-02	1.56e-02	1.28e-02	7.00e-03	2.23e-03	2.21	2.01	1.22	1.83	3.14
1e-03	8.84e-02	5.07e-02	3.25e-02	1.27e-02	3.56e-03	9.12e-04	1.74	1.56	2.56	3.57	3.90
1e-02	1.96e-01	9.98e-02	3.43e-02	9.32e-03	2.38e-03	5.97e-04	1.96	2.91	3.68	3.92	3.98
1e-01	9.53e-01	3.95e-01	1.17e-01	3.05e-02	7.75e-03	1.95e-03	2.41	3.39	3.82	3.94	3.98
1e+00	8.30e+00	3.35e+00	9.76e-01	2.56e-01	6.49e-02	1.63e-02	2.48	3.43	3.82	3.94	3.98

Tabelle 8.6: LS-Funktional auf Quadrat für $P_2/MTW/RT_1$

	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	11/10	12/11	13/12	14/13	15/14
dim Q_h	37	121	433	1633	6337	24961					
dim Σ_h	48	204	840	3408	13728	55104					
dim Θ_h	48	168	624	2400	9408	37248					
0e+00	1.69e-02	1.95e-03	1.70e-04	1.37e-05	1.05e-06	7.96e-08	8.67	11.42	12.47	13.03	13.17
1e-10	1.69e-02	1.95e-03	1.70e-04	1.37e-05	1.10e-06	1.87e-07	8.67	11.42	12.45	12.42	5.89
1e-09	1.69e-02	1.95e-03	1.71e-04	1.39e-05	1.59e-06	1.15e-06	8.67	11.41	12.24	8.79	1.37
1e-08	1.69e-02	1.95e-03	1.72e-04	1.64e-05	6.42e-06	1.08e-05	8.67	11.34	10.50	2.55	0.60
1e-07	1.69e-02	1.95e-03	1.84e-04	4.05e-05	5.43e-05	1.04e-04	8.64	10.62	4.54	0.75	0.52
1e-06	1.69e-02	2.02e-03	3.06e-04	2.78e-04	5.06e-04	8.92e-04	8.38	6.60	1.10	0.55	0.57
1e-05	1.73e-02	2.66e-03	1.47e-03	2.38e-03	3.58e-03	3.02e-03	6.51	1.81	0.62	0.66	1.18
1e-04	2.11e-02	8.28e-03	1.02e-02	1.13e-02	5.82e-03	1.77e-03	2.55	0.81	0.91	1.94	3.30
1e-03	4.66e-02	3.62e-02	2.69e-02	1.01e-02	2.78e-03	7.10e-04	1.28	1.35	2.66	3.64	3.92
1e-02	1.52e-01	7.93e-02	2.69e-02	7.25e-03	1.85e-03	4.64e-04	1.92	2.95	3.71	3.93	3.98
1e-01	8.97e-01	3.70e-01	1.09e-01	2.85e-02	7.24e-03	1.82e-03	2.43	3.40	3.82	3.94	3.98
1e+00	8.25e+00	3.32e+00	9.68e-01	2.54e-01	6.44e-02	1.62e-02	2.48	3.43	3.82	3.94	3.98

Tabelle 8.7: LS-Funktional auf Quadrat für $P_1/MTW/RT_2$

	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	11/10	12/11	13/12	14/13	15/14
dim Q_h	13	37	121	433	1633	6337					
dim Σ_h	48	204	840	3408	13728	55104					
dim Θ_h	144	204	840	3408	13728	55104					
0e+00	6.62e-02	2.86e-02	8.96e-03	2.42e-03	6.21e-04	1.56e-04	2.32	3.19	3.70	3.90	3.97
1e-10	6.62e-02	2.86e-02	8.96e-03	2.42e-03	6.21e-04	1.57e-04	2.32	3.19	3.70	3.90	3.97
1e-09	6.62e-02	2.86e-02	8.96e-03	2.42e-03	6.21e-04	1.57e-04	2.32	3.19	3.70	3.90	3.95
1e-08	6.62e-02	2.86e-02	8.96e-03	2.42e-03	6.24e-04	1.65e-04	2.32	3.19	3.70	3.88	3.78
1e-07	6.61e-02	2.86e-02	8.95e-03	2.43e-03	6.52e-04	2.41e-04	2.32	3.19	3.69	3.72	2.71
1e-06	6.61e-02	2.85e-02	8.87e-03	2.48e-03	9.55e-04	8.50e-04	2.32	3.21	3.58	2.59	1.12
1e-05	6.52e-02	2.75e-02	8.51e-03	3.53e-03	2.73e-03	1.41e-03	2.38	3.23	2.41	1.29	1.93
1e-04	5.84e-02	2.35e-02	1.15e-02	6.60e-03	2.31e-03	6.18e-04	2.48	2.05	1.74	2.85	3.74
1e-03	4.56e-02	2.91e-02	1.32e-02	3.88e-03	9.99e-04	2.51e-04	1.57	2.20	3.40	3.89	3.98
1e-02	8.37e-02	3.50e-02	1.01e-02	2.59e-03	6.52e-04	1.63e-04	2.39	3.48	3.88	3.97	3.99
1e-01	4.66e-01	1.56e-01	4.22e-02	1.08e-02	2.71e-03	6.80e-04	2.99	3.69	3.92	3.97	3.99
1e+00	4.31e+00	1.42e+00	3.84e-01	9.82e-02	2.47e-02	6.20e-03	3.04	3.70	3.91	3.97	3.99

Tabelle 8.8: LS-Funktional auf Quadrat für $P_2/MTW/RT_2$

	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	11/10	12/11	13/12	14/13	15/14
dim Q_h	37	121	433	1633	6337	24961					
dim Σ_h	48	204	840	3408	13728	55104					
dim Θ_h	144	204	840	3408	13728	55104					
0e+00	1.69e-02	1.95e-03	1.70e-04	1.37e-05	1.05e-06	7.96e-08	8.67	11.42	12.47	13.03	13.17
1e-10	1.69e-02	1.95e-03	1.70e-04	1.37e-05	1.10e-06	1.87e-07	8.67	11.42	12.45	12.42	5.89
1e-09	1.69e-02	1.95e-03	1.71e-04	1.39e-05	1.59e-06	1.15e-06	8.67	11.41	12.24	8.79	1.37
1e-08	1.69e-02	1.95e-03	1.72e-04	1.63e-05	6.41e-06	1.08e-05	8.67	11.34	10.51	2.55	0.59
1e-07	1.69e-02	1.95e-03	1.83e-04	4.03e-05	5.42e-05	1.04e-04	8.65	10.65	4.55	0.74	0.52
1e-06	1.69e-02	2.00e-03	2.99e-04	2.75e-04	4.95e-04	7.76e-04	8.45	6.69	1.09	0.56	0.64
1e-05	1.69e-02	2.47e-03	1.39e-03	2.19e-03	2.54e-03	1.39e-03	6.85	1.77	0.64	0.86	1.83
1e-04	1.71e-02	6.66e-03	8.24e-03	6.16e-03	2.26e-03	6.13e-04	2.57	0.81	1.34	2.72	3.69
1e-03	2.43e-02	2.29e-02	1.23e-02	3.77e-03	9.86e-04	2.50e-04	1.06	1.87	3.25	3.82	3.95
1e-02	7.24e-02	3.26e-02	9.76e-03	2.55e-03	6.47e-04	1.63e-04	2.22	3.33	3.82	3.94	3.98
1e-01	4.34e-01	1.51e-01	4.15e-02	1.07e-02	2.70e-03	6.78e-04	2.88	3.63	3.88	3.96	3.98
1e+00	4.05e+00	1.38e+00	3.78e-01	9.73e-02	2.46e-02	6.18e-03	2.95	3.64	3.88	3.95	3.98

Tabelle 8.9: LS-Funktional auf Quadrat für $P_1/RT_2/RT_1$

	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	11/10	12/11	13/12	14/13	15/14
dim Q_h	13	37	121	433	1633	6337					
dim Σ_h	144	204	840	3408	13728	55104					
dim Θ_h	48	168	624	2400	9408	37248					
0e+00	7.60e-02	2.97e-02	9.06e-03	2.43e-03	6.22e-04	1.56e-04	2.56	3.28	3.73	3.91	3.97
1e-10	7.60e-02	2.97e-02	9.06e-03	2.43e-03	6.22e-04	1.57e-04	2.56	3.28	3.73	3.91	3.97
1e-09	7.60e-02	2.97e-02	9.06e-03	2.43e-03	6.22e-04	1.57e-04	2.56	3.28	3.73	3.91	3.95
1e-08	7.60e-02	2.97e-02	9.06e-03	2.43e-03	6.26e-04	1.66e-04	2.56	3.28	3.73	3.89	3.76
1e-07	7.60e-02	2.97e-02	9.07e-03	2.45e-03	6.66e-04	2.54e-04	2.56	3.28	3.70	3.68	2.62
1e-06	7.60e-02	2.97e-02	9.12e-03	2.61e-03	1.06e-03	1.05e-03	2.56	3.26	3.49	2.46	1.01
1e-05	7.62e-02	2.99e-02	9.69e-03	4.27e-03	4.26e-03	3.96e-03	2.55	3.08	2.27	1.00	1.08
1e-04	7.78e-02	3.17e-02	1.59e-02	1.44e-02	8.25e-03	2.62e-03	2.45	2.00	1.10	1.75	3.14
1e-03	9.22e-02	5.22e-02	3.72e-02	1.49e-02	4.19e-03	1.07e-03	1.77	1.40	2.49	3.56	3.90
1e-02	2.11e-01	1.12e-01	3.98e-02	1.09e-02	2.79e-03	6.92e-04	1.89	2.81	3.64	3.93	4.02
1e-01	1.14e+00	4.80e-01	1.44e-01	3.75e-02	9.16e-03	2.16e-03	2.38	3.33	3.85	4.09	4.25
1e+00	1.01e+01	4.12e+00	1.19e+00	2.92e-01	6.85e-02	1.62e-02	2.46	3.47	4.06	4.27	4.22

Tabelle 8.10: LS-Funktional auf Quadrat für $P_1/RT_2/RT_2$

	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	11/10	12/11	13/12	14/13	15/14
dim Q_h	13	37	121	433	1633	6337					
dim Σ_h	144	204	840	3408	13728	55104					
dim Θ_h	144	204	840	3408	13728	55104					
0e+00	7.60e-02	2.97e-02	9.06e-03	2.43e-03	6.22e-04	1.56e-04	2.56	3.28	3.73	3.91	3.97
1e-10	7.60e-02	2.97e-02	9.06e-03	2.43e-03	6.22e-04	1.57e-04	2.56	3.28	3.73	3.91	3.97
1e-09	7.60e-02	2.97e-02	9.06e-03	2.43e-03	6.22e-04	1.57e-04	2.56	3.28	3.73	3.91	3.95
1e-08	7.60e-02	2.97e-02	9.06e-03	2.43e-03	6.25e-04	1.65e-04	2.56	3.28	3.73	3.89	3.79
1e-07	7.60e-02	2.97e-02	9.05e-03	2.43e-03	6.53e-04	2.43e-04	2.56	3.28	3.72	3.73	2.69
1e-06	7.59e-02	2.96e-02	8.97e-03	2.48e-03	9.78e-04	9.76e-04	2.57	3.30	3.61	2.54	1.00
1e-05	7.48e-02	2.84e-02	8.60e-03	3.74e-03	3.60e-03	2.44e-03	2.63	3.31	2.30	1.04	1.48
1e-04	6.66e-02	2.45e-02	1.30e-02	1.02e-02	4.24e-03	1.17e-03	2.72	1.89	1.27	2.41	3.64
1e-03	5.40e-02	3.57e-02	2.21e-02	7.09e-03	1.86e-03	4.68e-04	1.51	1.62	3.11	3.82	3.96
1e-02	1.18e-01	5.89e-02	1.83e-02	4.78e-03	1.21e-03	3.01e-04	2.00	3.23	3.82	3.96	4.01
1e-01	7.77e-01	2.91e-01	8.16e-02	2.09e-02	5.20e-03	1.26e-03	2.67	3.57	3.90	4.03	4.14
1e+00	7.34e+00	2.68e+00	7.41e-01	1.85e-01	4.43e-02	1.05e-02	2.74	3.62	4.00	4.18	4.21

Tabelle 8.11: LS-Funktional auf Quadrat für $P_2/RT_2/RT_1$

	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	11/10	12/11	13/12	14/13	15/14
dim Q_h	37	121	433	1633	6337	24961					
dim Σ_h	144	204	840	3408	13728	55104					
dim Θ_h	48	168	624	2400	9408	37248					
0e+00	2.67e-02	3.07e-03	2.72e-04	2.18e-05	1.66e-06	1.22e-07	8.70	11.30	12.46	13.13	13.57
1e-10	2.67e-02	3.07e-03	2.72e-04	2.18e-05	1.71e-06	2.30e-07	8.70	11.30	12.45	12.74	7.46
1e-09	2.67e-02	3.07e-03	2.72e-04	2.21e-05	2.20e-06	1.20e-06	8.70	11.29	12.32	10.05	1.84
1e-08	2.67e-02	3.07e-03	2.73e-04	2.45e-05	7.02e-06	1.08e-05	8.70	11.24	11.15	3.48	0.65
1e-07	2.67e-02	3.08e-03	2.85e-04	4.85e-05	5.52e-05	1.06e-04	8.68	10.79	5.87	0.88	0.52
1e-06	2.67e-02	3.13e-03	4.04e-04	2.87e-04	5.22e-04	9.47e-04	8.53	7.75	1.41	0.55	0.55
1e-05	2.70e-02	3.71e-03	1.57e-03	2.49e-03	3.92e-03	3.60e-03	7.28	2.37	0.63	0.64	1.09
1e-04	2.98e-02	9.05e-03	1.09e-02	1.30e-02	7.14e-03	2.17e-03	3.29	0.83	0.84	1.83	3.29
1e-03	5.23e-02	3.88e-02	3.20e-02	1.24e-02	3.42e-03	8.73e-04	1.35	1.21	2.58	3.63	3.92
1e-02	1.72e-01	9.30e-02	3.26e-02	8.87e-03	2.25e-03	5.59e-04	1.85	2.85	3.67	3.93	4.03
1e-01	1.09e+00	4.56e-01	1.37e-01	3.55e-02	8.65e-03	2.03e-03	2.39	3.34	3.85	4.10	4.26
1e+00	1.01e+01	4.09e+00	1.18e+00	2.90e-01	6.80e-02	1.61e-02	2.47	3.47	4.06	4.27	4.22

Tabelle 8.12: LS-Funktional auf Quadrat für $P_2/RT_2/RT_2$

	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l=5	11/10	12/11	13/12	14/13	15/14
dim Q_h	37	121	433	1633	6337	24961					
dim Σ_h	144	204	840	3408	13728	55104					
dim Θ_h	144	204	840	3408	13728	55104					
0e+00	2.67e-02	3.07e-03	2.72e-04	2.18e-05	1.66e-06	1.22e-07	8.70	11.30	12.46	13.13	13.57
1e-10	2.67e-02	3.07e-03	2.72e-04	2.18e-05	1.71e-06	2.30e-07	8.70	11.30	12.45	12.74	7.46
1e-09	2.67e-02	3.07e-03	2.72e-04	2.21e-05	2.20e-06	1.20e-06	8.70	11.29	12.32	10.05	1.84
1e-08	2.67e-02	3.07e-03	2.73e-04	2.44e-05	7.01e-06	1.08e-05	8.70	11.25	11.17	3.48	0.65
1e-07	2.67e-02	3.07e-03	2.84e-04	4.82e-05	5.51e-05	1.06e-04	8.69	10.82	5.89	0.88	0.52
1e-06	2.67e-02	3.10e-03	3.94e-04	2.84e-04	5.19e-04	9.05e-04	8.59	7.88	1.39	0.55	0.57
1e-05	2.63e-02	3.42e-03	1.48e-03	2.42e-03	3.42e-03	2.42e-03	7.69	2.31	0.61	0.71	1.42
1e-04	2.41e-02	7.22e-03	9.80e-03	9.83e-03	4.20e-03	1.16e-03	3.33	0.74	1.00	2.34	3.61
1e-03	2.85e-02	2.92e-02	2.11e-02	7.00e-03	1.85e-03	4.67e-04	0.98	1.38	3.02	3.79	3.95
1e-02	1.02e-01	5.61e-02	1.80e-02	4.75e-03	1.20e-03	3.01e-04	1.81	3.12	3.78	3.94	4.00
1e-01	7.23e-01	2.84e-01	8.08e-02	2.08e-02	5.19e-03	1.25e-03	2.54	3.52	3.88	4.02	4.13
1e+00	6.88e+00	2.62e+00	7.33e-01	1.84e-01	4.42e-02	1.05e-02	2.62	3.57	3.98	4.17	4.20

8.3 SWE L-Shape

Die zweite Testgeometrie für das SWE Funktional besteht aus einem L-förmiges Gebiet. Die Daten dieser Geometrie wurden einem Artikel von Fontana et al. [FQS99] entnommen und leicht modifiziert. Das Gebiet besteht aus einem Kanal mit 1000m Länge, der am Einfluss des Wassers eine Breite von 100m und am Ausfluss eine Breite von 200m besitzt. Die Wasserhöhe H ist zu Anfang konstant auf 2m gesetzt. Der Fluss ist am Einflussrand zeitabhängig mit $\mathbf{u}(0, x_2) = \frac{2500 - (x_2 - 50)^2}{2500} \cdot inc$, wobei inc zeitabhängig definiert ist als $inc = -\sin\left(\frac{2j\tau\pi}{nsteps \cdot \tau}\right) - \sin\left(\frac{2(j-1)\tau\pi}{nsteps \cdot \tau}\right)$. $nsteps$ steht dabei für die Anzahl der Zeitschritte und j bezeichnet den aktuellen Zeitschritt. Im restlichen Gebiet wird der Fluss \mathbf{u} ebenso wie die Hilfsvariable \mathbf{U} konstant auf 0 gesetzt.

Während in den vorigen Testbeispielen alle Dreiecke auf jedem Level gleichmässig verfeinert wurden, wird in diesem Beispiel eine adaptive Verfeinerung vorgenommen. Es werden nun ausschliesslich die Dreiecke verfeinert, bei denen das Funktional einen grösseren Wert als den durchschnittlichen Wert des Funktionals über alle Dreiecke liefert. Dies bedeutet natürlich auch, dass es in diesem Beispiel schwieriger ist, die Konvergenz des Funktionals zu bewerten. Denn die Dreiecke werden ja nicht mehr gleichmässig in 4 Dreiecke geteilt und damit reduziert sich natürlich auch die Gitterkonstante nicht mehr auf ein Viertel. Im Kopf der beiden Tabellen 8.13 und 8.14 sind aus diesem Grund auch nur die Freiheitsgrade der Ansatzräume für den ersten Zeitschritt und für einen Viskositätsparameter von $\mu = 0$ gegeben. Aufgrund der adaptiven Verfeinerung weichen die Freiheitsgrade in den folgenden Schritten und bei anderer Viskosität von den angegebenen Freiheitsgraden ab. Allerdings stimmen die übrigen Freiheitsgrade in der Größenordnung mit den angegebenen überein.

Bei diesem Testbeispiel handelt es sich, wie man schon an der Definition der Randwerte erkennen konnte, um ein zeitabhängiges Problem. Während die beiden vorigen Testbeispiele stationäre Probleme behandelten, wird in diesem Testgebiet durch die zeitabhängigen Randwerte eine ankommende Welle simuliert. Dies ist auch gut in der Abbildung 8.5 (a)-(f) zu erkennen.

In den Tabellen 8.13 - 8.14 sind exemplarisch die Werte für die Norm des Funktionals bei einem konstanten Zeitschritt von $\tau = 15$ und bei unterschiedlichen Viskositätsparametern gegeben. Trotz der adaptiven Verfeinerung sind ebenfalls wieder die Quotienten aus den Werten des Funktionals von benachbarten Feinheitsleveln gegeben. Aus Platzgründen wurden hier nur Teile der Tabellen für gewisse Zeitschritte und für ausgewählte Werte des Viskositätsparameters angegeben. Die vollständigen Tabellen finden sich im Internet unter den Adressen

www.ifam.uni-hannover/~danisch/Daten/p2rt2rt1tau15chan1tabelle.txt bzw.

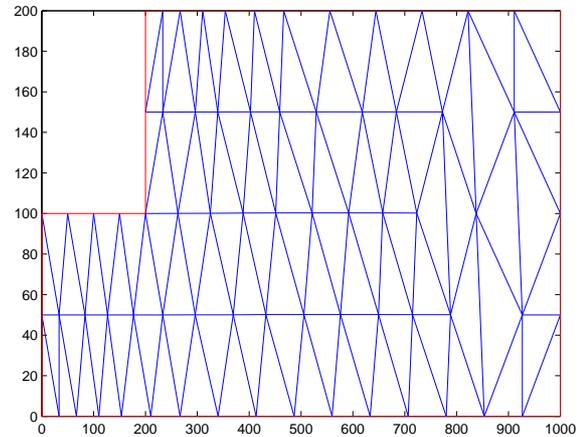


Abbildung 8.2: Geometrie L-Shape mit Gitter auf größtem Level

www.ifam.uni-hannover/~danisch/Daten/p2mtwrt1tau15chan1tabelle.txt.

Aufgrund der Erfahrungen aus den letzten zwei Testbeispielen, werden als Ansatzräume für Q_h und Θ_h diesmal nur standard quadratische Ansatz- bzw. lineare Raviart-Thomas Räume ausgewählt. Denn diese Kombination erwies sich bei den vorherigen Beispielen als am effektivsten. Für den Fluss wurden wieder die MTW - bzw. RT_2 Ansatzräume genutzt und verglichen. Die Betrachtung der Tabellen lässt den Schluss zu, dass auch hier in beiden Fällen für $\mu = 0$ mindestens lineare, wahrscheinlich sogar quadratische Konvergenz, bei gleichmässiger Verfeinerung vorliegen würde. Allerdings scheint sich die Konvergenz auch mit zunehmender Viskosität weiter abzuschwächen. Die Resultate für das RT_2 sind hier durchgängig, insbesondere aber auf dem Level $l = 2$, besser als die Resultate bei Verwendung des MTW -Elements. Allerdings erkauft man sich diese Verbesserung natürlich durch die erhöhte Anzahl von Freiheitsgraden. Es ist also fraglich, welches Element hier wirklich einen Vorteil verspricht.

Man erkennt auch in diesem Testbeispiel wiederum, dass die sich der Wert des Funktionals bei einigen Zeitschritten auf dem feineren Level erhöht. So z.B. für $\mu = 10^{-1}$ in beiden Tabellen im letzten Verfeinerungsschritt. Dieses Verhalten konnte man schon bei den vorherigen Testrechnungen auf dem Quadrat sowohl für das Stokes als auch das SWE Funktional beobachten. Auch in diesem Fall ist wieder der Kantensprungterm in dem Funktional für dieses Verhalten verantwortlich zu machen.

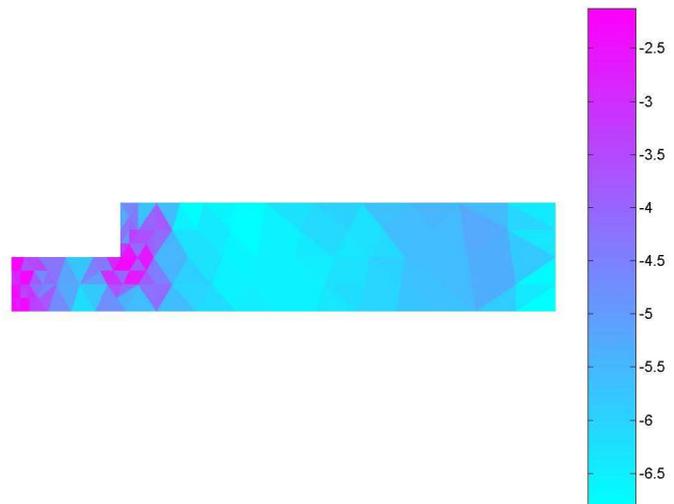
In den Abbildungen 8.3 (a) bis (c) lässt sich gut die Adaptive Verfeinerung erkennen. Verfeinert wird nur dort, wo der Fehlerschätzer, also das Funktional, besonders grosse Werte liefert. Im Fall des L-Shapes werden die Dreiecke nahe der einspringenden Ecke und am Einflussrand verfeinert. Dies entspricht auch der Erwartung.

In Abbildung 8.4 ist der Fluss \mathbf{u} zu zwei verschiedenen Zeitpunkten, dem 15. und dem 30. Zeitschritt, und für die beiden Viskositätsparameter $\mu = 0$ bzw. $\mu = 1$ dargestellt. Man erkennt, wie sich der Fluss aufgrund der Randbedingungen mit der Zeit fast umkehrt.

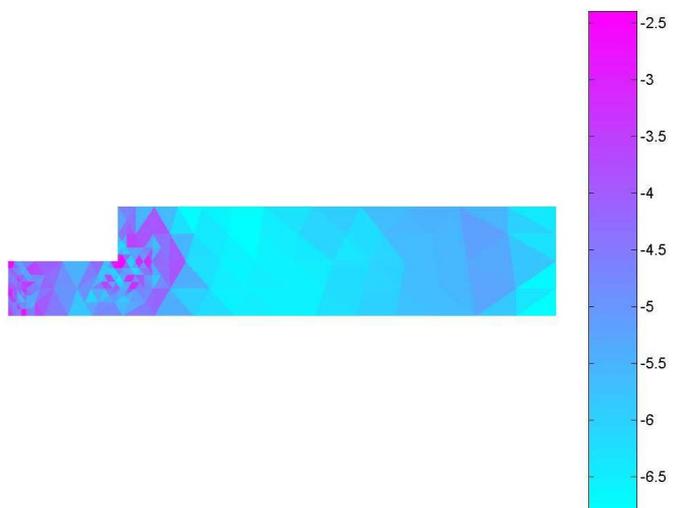
In Abbildung 8.5 ist die Wasserhöhe in der Geometrie L-Shape zu verschiedenen Zeitpunkten für einen Viskositätsparameter von $\mu = 10^{-8}$ dargestellt. Man kann in der Abbildung sehr gut die einlaufende Welle erkennen, die sich aus den zeitabhängigen Randwerten ergibt.



(a) Level 0



(b) Level 1



(c) Level 2

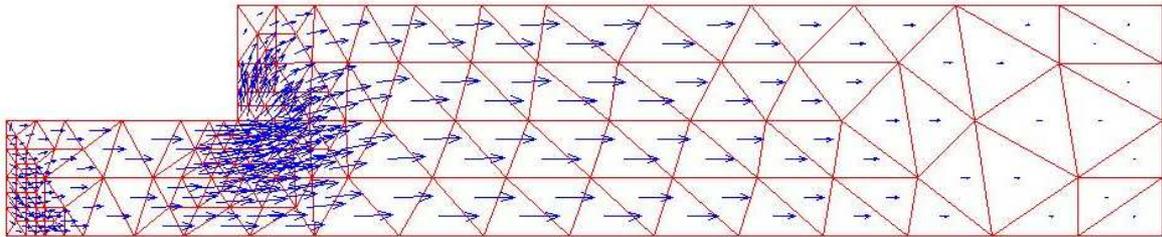
Abbildung 8.3: Fehler im 30. Zeitschritt für $\mu = 0$, $\tau = 10$ auf der Geometrie L-Shape

Tabelle 8.13: LS-Funktional auf L-Shape für $P_2/MTW/RT_1$, $\tau = 15$

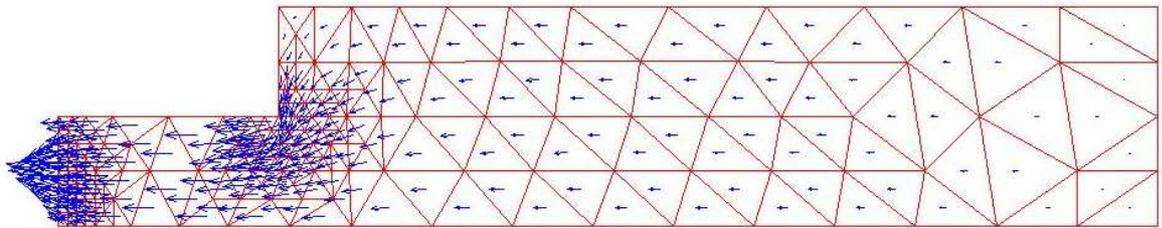
τ	μ	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l1/10	l2/11	l3/12	l4/13
15	0	249	304	481	1002	2099	dim Q_h			
15	0	480	558	926	2046	4451	dim Σ_h			
15	0	352	432	692	1464	3098	dim Θ_h			
15	0e+000	9.53e-001	1.71e-001	3.64e-002	1.10e-002	4.38e-003	5.57	4.70	3.31	2.51
75	0e+000	5.54e-001	9.96e-002	2.11e-002	6.41e-003	2.54e-003	5.56	4.72	3.29	2.52
135	0e+000	5.21e-002	9.37e-003	1.99e-003	6.03e-004	2.40e-004	5.56	4.71	3.30	2.51
195	0e+000	1.40e-001	2.52e-002	5.34e-003	1.62e-003	6.43e-004	5.56	4.72	3.30	2.52
255	0e+000	6.98e-001	1.26e-001	2.65e-002	7.97e-003	3.18e-003	5.54	4.75	3.32	2.51
315	0e+000	9.54e-001	1.72e-001	3.63e-002	1.09e-002	4.35e-003	5.55	4.74	3.33	2.51
375	0e+000	5.55e-001	9.99e-002	2.11e-002	6.34e-003	2.52e-003	5.56	4.73	3.33	2.52
435	0e+000	5.21e-002	9.38e-003	1.99e-003	6.03e-004	2.40e-004	5.55	4.71	3.30	2.51
495	0e+000	1.40e-001	2.52e-002	5.35e-003	1.62e-003	6.44e-004	5.56	4.71	3.30	2.52
555	0e+000	6.97e-001	1.25e-001	2.66e-002	8.07e-003	3.20e-003	5.58	4.70	3.30	2.52
600	0e+000	9.53e-001	1.71e-001	3.64e-002	1.10e-002	4.38e-003	5.57	4.70	3.31	2.51
15	1e-009	9.53e-001	1.71e-001	3.64e-002	1.10e-002	4.38e-003	5.57	4.70	3.31	2.51
75	1e-009	5.54e-001	9.96e-002	2.11e-002	6.41e-003	2.54e-003	5.56	4.72	3.29	2.52
135	1e-009	5.21e-002	9.37e-003	1.99e-003	6.03e-004	2.40e-004	5.56	4.71	3.30	2.51
195	1e-009	1.40e-001	2.52e-002	5.34e-003	1.62e-003	6.43e-004	5.56	4.72	3.30	2.52
255	1e-009	6.98e-001	1.26e-001	2.65e-002	7.97e-003	3.18e-003	5.54	4.75	3.32	2.51
315	1e-009	9.54e-001	1.72e-001	3.63e-002	1.09e-002	4.35e-003	5.55	4.74	3.33	2.51
375	1e-009	5.55e-001	9.99e-002	2.11e-002	6.34e-003	2.52e-003	5.56	4.73	3.33	2.52
435	1e-009	5.21e-002	9.38e-003	1.99e-003	6.03e-004	2.40e-004	5.55	4.71	3.30	2.51
495	1e-009	1.40e-001	2.52e-002	5.35e-003	1.62e-003	6.44e-004	5.56	4.71	3.30	2.52
555	1e-009	6.97e-001	1.25e-001	2.66e-002	8.07e-003	3.20e-003	5.58	4.70	3.30	2.52
600	1e-009	9.53e-001	1.71e-001	3.64e-002	1.10e-002	4.38e-003	5.57	4.70	3.31	2.51
15	1e-005	9.53e-001	1.71e-001	3.64e-002	1.10e-002	4.42e-003	5.57	4.70	3.31	2.49
75	1e-005	5.54e-001	9.96e-002	2.11e-002	6.42e-003	2.55e-003	5.56	4.72	3.29	2.52
135	1e-005	5.21e-002	9.37e-003	1.99e-003	6.04e-004	2.41e-004	5.56	4.71	3.29	2.51
195	1e-005	1.40e-001	2.52e-002	5.34e-003	1.62e-003	6.47e-004	5.56	4.72	3.30	2.50
255	1e-005	6.98e-001	1.26e-001	2.65e-002	7.97e-003	3.19e-003	5.54	4.75	3.32	2.50
315	1e-005	9.54e-001	1.72e-001	3.63e-002	1.09e-002	4.36e-003	5.55	4.74	3.33	2.50
375	1e-005	5.55e-001	9.99e-002	2.11e-002	6.34e-003	2.54e-003	5.56	4.73	3.33	2.50
435	1e-005	5.21e-002	9.38e-003	1.99e-003	6.04e-004	2.41e-004	5.55	4.71	3.29	2.51
495	1e-005	1.40e-001	2.52e-002	5.35e-003	1.62e-003	6.47e-004	5.56	4.71	3.30	2.50
555	1e-005	6.97e-001	1.25e-001	2.66e-002	8.07e-003	3.21e-003	5.58	4.70	3.30	2.51
600	1e-005	9.53e-001	1.71e-001	3.64e-002	1.10e-002	4.42e-003	5.57	4.70	3.31	2.49
15	1e-003	9.54e-001	1.72e-001	3.71e-002	1.21e-002	6.51e-003	5.55	4.64	3.07	1.86
75	1e-003	5.54e-001	9.99e-002	2.16e-002	7.03e-003	3.78e-003	5.55	4.63	3.07	1.86
135	1e-003	5.21e-002	9.40e-003	2.03e-003	6.61e-004	3.56e-004	5.54	4.63	3.07	1.86
195	1e-003	1.40e-001	2.53e-002	5.45e-003	1.77e-003	9.46e-004	5.53	4.64	3.08	1.87
255	1e-003	6.98e-001	1.26e-001	2.71e-002	8.80e-003	4.69e-003	5.54	4.65	3.08	1.88
315	1e-003	9.55e-001	1.72e-001	3.70e-002	1.20e-002	6.45e-003	5.55	4.65	3.08	1.86
375	1e-003	5.55e-001	1.00e-001	2.15e-002	7.00e-003	3.73e-003	5.55	4.65	3.07	1.88
435	1e-003	5.21e-002	9.41e-003	2.03e-003	6.61e-004	3.53e-004	5.54	4.64	3.07	1.87
495	1e-003	1.40e-001	2.53e-002	5.46e-003	1.78e-003	9.58e-004	5.53	4.63	3.07	1.86
555	1e-003	6.97e-001	1.26e-001	2.71e-002	8.84e-003	4.76e-003	5.53	4.65	3.07	1.86
600	1e-003	9.54e-001	1.72e-001	3.71e-002	1.21e-002	6.51e-003	5.55	4.64	3.07	1.86
15	1e-001	9.95e-001	2.19e-001	1.09e-001	1.32e-001	1.37e-001	4.54	2.01	0.83	0.96
75	1e-001	5.79e-001	1.28e-001	6.35e-002	7.67e-002	7.96e-002	4.52	2.02	0.83	0.96
135	1e-001	5.44e-002	1.20e-002	5.96e-003	7.19e-003	7.46e-003	4.53	2.01	0.83	0.96
195	1e-001	1.46e-001	3.23e-002	1.60e-002	1.92e-002	1.99e-002	4.52	2.02	0.83	0.96
255	1e-001	7.28e-001	1.60e-001	7.90e-002	9.50e-002	9.85e-002	4.55	2.03	0.83	0.96
315	1e-001	9.96e-001	2.19e-001	1.08e-001	1.30e-001	1.35e-001	4.55	2.03	0.83	0.96
375	1e-001	5.79e-001	1.28e-001	6.29e-002	7.56e-002	7.84e-002	4.52	2.03	0.83	0.96
435	1e-001	5.44e-002	1.20e-002	5.94e-003	7.16e-003	7.42e-003	4.53	2.02	0.83	0.96
495	1e-001	1.46e-001	3.23e-002	1.60e-002	1.94e-002	2.01e-002	4.52	2.02	0.82	0.97
555	1e-001	7.28e-001	1.60e-001	7.99e-002	9.65e-002	1.00e-001	4.55	2.00	0.83	0.96
600	1e-001	9.95e-001	2.19e-001	1.09e-001	1.32e-001	1.37e-001	4.54	2.01	0.83	0.96
15	1e+000	1.34e+000	5.54e-001	4.65e-001	3.12e-001	1.25e-001	2.42	1.19	1.49	2.50
75	1e+000	7.80e-001	3.22e-001	2.69e-001	1.81e-001	7.26e-002	2.42	1.20	1.49	2.49
135	1e+000	7.34e-002	3.03e-002	2.52e-002	1.69e-002	6.79e-003	2.42	1.20	1.49	2.49
195	1e+000	1.97e-001	8.11e-002	6.73e-002	4.51e-002	1.81e-002	2.43	1.21	1.49	2.49
255	1e+000	9.81e-001	4.02e-001	3.32e-001	2.23e-001	8.95e-002	2.44	1.21	1.49	2.49
315	1e+000	1.34e+000	5.50e-001	4.55e-001	3.04e-001	1.23e-001	2.44	1.21	1.50	2.47
375	1e+000	7.80e-001	3.20e-001	2.65e-001	1.77e-001	7.12e-002	2.44	1.21	1.50	2.49
435	1e+000	7.34e-002	3.02e-002	2.51e-002	1.68e-002	6.75e-003	2.43	1.20	1.49	2.49
495	1e+000	1.97e-001	8.14e-002	6.78e-002	4.55e-002	1.83e-002	2.42	1.20	1.49	2.49
555	1e+000	9.81e-001	4.05e-001	3.39e-001	2.28e-001	9.11e-002	2.42	1.19	1.49	2.50
600	1e+000	1.34e+000	5.54e-001	4.65e-001	3.12e-001	1.25e-001	2.42	1.19	1.49	2.50

Tabelle 8.14: LS-Funktional auf L-Shape für $P_2/RT_2/RT_1$, $\tau = 15$

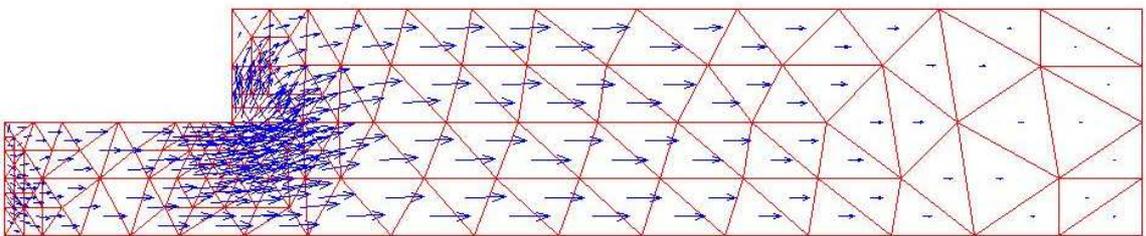
τ	μ	l=0	l=1	l=2	l=3	l=4	l1/10	l2/11	l3/12	l4/13
15	0	249	292	397	661	1097	dim Q_h			
15	0	480	570	808	1426	2460	dim Σ_h			
15	0	352	414	568	958	1604	dim Θ_h			
15	0e+000	1.25e+000	1.83e-001	2.57e-002	6.09e-003	1.82e-003	6.83	7.12	4.22	3.35
75	0e+000	7.25e-001	1.06e-001	1.49e-002	3.53e-003	1.05e-003	6.84	7.11	4.22	3.36
135	0e+000	6.82e-002	9.98e-003	1.40e-003	3.31e-004	9.83e-005	6.83	7.13	4.23	3.37
195	0e+000	1.83e-001	2.68e-002	3.75e-003	8.82e-004	2.62e-004	6.83	7.15	4.25	3.37
255	0e+000	9.11e-001	1.33e-001	1.86e-002	4.32e-003	1.25e-003	6.85	7.15	4.31	3.46
315	0e+000	1.25e+000	1.83e-001	2.54e-002	5.89e-003	1.71e-003	6.83	7.20	4.31	3.44
375	0e+000	7.24e-001	1.06e-001	1.48e-002	3.47e-003	1.01e-003	6.83	7.16	4.27	3.44
435	0e+000	6.81e-002	9.98e-003	1.40e-003	3.29e-004	9.76e-005	6.82	7.13	4.26	3.37
495	0e+000	1.83e-001	2.69e-002	3.77e-003	8.90e-004	2.65e-004	6.80	7.14	4.24	3.36
555	0e+000	9.12e-001	1.34e-001	1.88e-002	4.45e-003	1.33e-003	6.81	7.13	4.22	3.35
600	0e+000	1.25e+000	1.83e-001	2.57e-002	6.09e-003	1.82e-003	6.83	7.12	4.22	3.35
15	1e-009	1.25e+000	1.83e-001	2.57e-002	6.09e-003	1.82e-003	6.83	7.12	4.22	3.35
75	1e-009	7.25e-001	1.06e-001	1.49e-002	3.53e-003	1.05e-003	6.84	7.11	4.22	3.36
135	1e-009	6.82e-002	9.98e-003	1.40e-003	3.31e-004	9.83e-005	6.83	7.13	4.23	3.37
195	1e-009	1.83e-001	2.68e-002	3.75e-003	8.82e-004	2.62e-004	6.83	7.15	4.25	3.37
255	1e-009	9.11e-001	1.33e-001	1.86e-002	4.32e-003	1.25e-003	6.85	7.15	4.31	3.46
315	1e-009	1.25e+000	1.83e-001	2.54e-002	5.89e-003	1.71e-003	6.83	7.20	4.31	3.44
375	1e-009	7.24e-001	1.06e-001	1.48e-002	3.47e-003	1.01e-003	6.83	7.16	4.27	3.44
435	1e-009	6.81e-002	9.98e-003	1.40e-003	3.29e-004	9.76e-005	6.82	7.13	4.26	3.37
495	1e-009	1.83e-001	2.69e-002	3.77e-003	8.90e-004	2.65e-004	6.80	7.14	4.24	3.36
555	1e-009	9.12e-001	1.34e-001	1.88e-002	4.45e-003	1.33e-003	6.81	7.13	4.22	3.35
600	1e-009	1.25e+000	1.83e-001	2.57e-002	6.09e-003	1.82e-003	6.83	7.12	4.22	3.35
15	1e-005	1.25e+000	1.83e-001	2.57e-002	6.10e-003	1.81e-003	6.83	7.12	4.21	3.37
75	1e-005	7.25e-001	1.06e-001	1.49e-002	3.54e-003	1.05e-003	6.84	7.11	4.21	3.37
135	1e-005	6.82e-002	9.98e-003	1.40e-003	3.31e-004	9.81e-005	6.83	7.13	4.23	3.37
195	1e-005	1.83e-001	2.68e-002	3.75e-003	8.84e-004	2.61e-004	6.83	7.15	4.24	3.39
255	1e-005	9.11e-001	1.33e-001	1.86e-002	4.32e-003	1.26e-003	6.85	7.15	4.31	3.43
315	1e-005	1.25e+000	1.83e-001	2.54e-002	5.90e-003	1.72e-003	6.83	7.20	4.31	3.43
375	1e-005	7.24e-001	1.06e-001	1.48e-002	3.48e-003	1.02e-003	6.83	7.16	4.25	3.41
435	1e-005	6.81e-002	9.98e-003	1.40e-003	3.29e-004	9.73e-005	6.82	7.13	4.26	3.38
495	1e-005	1.83e-001	2.69e-002	3.77e-003	8.92e-004	2.64e-004	6.80	7.14	4.23	3.38
555	1e-005	9.12e-001	1.34e-001	1.88e-002	4.46e-003	1.32e-003	6.81	7.13	4.22	3.38
600	1e-005	1.25e+000	1.83e-001	2.57e-002	6.10e-003	1.81e-003	6.83	7.12	4.21	3.37
15	1e-003	1.25e+000	1.83e-001	2.64e-002	6.70e-003	3.90e-003	6.83	6.93	3.94	1.72
75	1e-003	7.26e-001	1.07e-001	1.53e-002	3.88e-003	2.26e-003	6.79	6.99	3.94	1.72
135	1e-003	6.82e-002	1.00e-002	1.44e-003	3.63e-004	2.12e-004	6.82	6.94	3.97	1.71
195	1e-003	1.83e-001	2.69e-002	3.84e-003	9.69e-004	5.65e-004	6.80	7.01	3.96	1.72
255	1e-003	9.11e-001	1.34e-001	1.90e-002	4.79e-003	2.79e-003	6.80	7.05	3.97	1.72
315	1e-003	1.25e+000	1.83e-001	2.60e-002	6.53e-003	3.81e-003	6.83	7.04	3.98	1.71
375	1e-003	7.25e-001	1.06e-001	1.52e-002	3.81e-003	2.22e-003	6.84	6.97	3.99	1.72
435	1e-003	6.81e-002	1.00e-002	1.43e-003	3.61e-004	2.11e-004	6.81	6.99	3.96	1.71
495	1e-003	1.83e-001	2.69e-002	3.86e-003	9.79e-004	5.71e-004	6.80	6.97	3.94	1.71
555	1e-003	9.13e-001	1.34e-001	1.93e-002	4.89e-003	2.85e-003	6.81	6.94	3.95	1.72
600	1e-003	1.25e+000	1.83e-001	2.64e-002	6.70e-003	3.90e-003	6.83	6.93	3.94	1.72
15	1e-001	1.28e+000	2.26e-001	1.01e-001	1.28e-001	1.44e-001	5.66	2.24	0.79	0.89
75	1e-001	7.44e-001	1.32e-001	5.85e-002	7.43e-002	8.35e-002	5.64	2.26	0.79	0.89
135	1e-001	6.99e-002	1.24e-002	5.49e-003	6.94e-003	7.80e-003	5.64	2.26	0.79	0.89
195	1e-001	1.88e-001	3.32e-002	1.47e-002	1.85e-002	2.07e-002	5.66	2.26	0.79	0.89
255	1e-001	9.35e-001	1.65e-001	7.26e-002	9.14e-002	1.03e-001	5.67	2.27	0.79	0.89
315	1e-001	1.28e+000	2.26e-001	9.92e-002	1.25e-001	1.40e-001	5.66	2.28	0.79	0.89
375	1e-001	7.43e-001	1.31e-001	5.78e-002	7.27e-002	8.16e-002	5.67	2.27	0.80	0.89
435	1e-001	6.99e-002	1.23e-002	5.47e-003	6.89e-003	7.73e-003	5.68	2.25	0.79	0.89
495	1e-001	1.88e-001	3.32e-002	1.48e-002	1.87e-002	2.10e-002	5.66	2.24	0.79	0.89
555	1e-001	9.36e-001	1.66e-001	7.36e-002	9.34e-002	1.05e-001	5.64	2.26	0.79	0.89
600	1e-001	1.28e+000	2.26e-001	1.01e-001	1.28e-001	1.44e-001	5.66	2.24	0.79	0.89
15	1e+000	1.57e+000	5.43e-001	4.63e-001	3.42e-001	1.47e-001	2.89	1.17	1.35	2.33
75	1e+000	9.10e-001	3.16e-001	2.69e-001	1.98e-001	8.49e-002	2.88	1.17	1.36	2.33
135	1e+000	8.55e-002	2.96e-002	2.52e-002	1.86e-002	7.94e-003	2.89	1.17	1.35	2.34
195	1e+000	2.30e-001	7.94e-002	6.72e-002	4.95e-002	2.11e-002	2.90	1.18	1.36	2.35
255	1e+000	1.14e+000	3.94e-001	3.32e-001	2.44e-001	1.04e-001	2.89	1.19	1.36	2.35
315	1e+000	1.56e+000	5.38e-001	4.53e-001	3.33e-001	1.42e-001	2.90	1.19	1.36	2.35
375	1e+000	9.08e-001	3.13e-001	2.64e-001	1.94e-001	8.30e-002	2.90	1.19	1.36	2.34
435	1e+000	8.55e-002	2.96e-002	2.50e-002	1.84e-002	7.88e-003	2.89	1.18	1.36	2.34
495	1e+000	2.30e-001	7.97e-002	6.77e-002	5.00e-002	2.14e-002	2.89	1.18	1.35	2.34
555	1e+000	1.14e+000	3.97e-001	3.38e-001	2.50e-001	1.07e-001	2.87	1.17	1.35	2.34
600	1e+000	1.57e+000	5.43e-001	4.63e-001	3.42e-001	1.47e-001	2.89	1.17	1.35	2.33



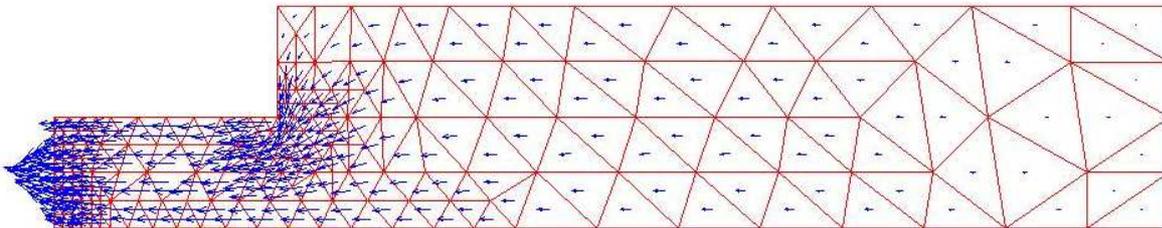
(a) Zeitschritt 15, $\mu = 0$



(b) Zeitschritt 30, $\mu = 0$

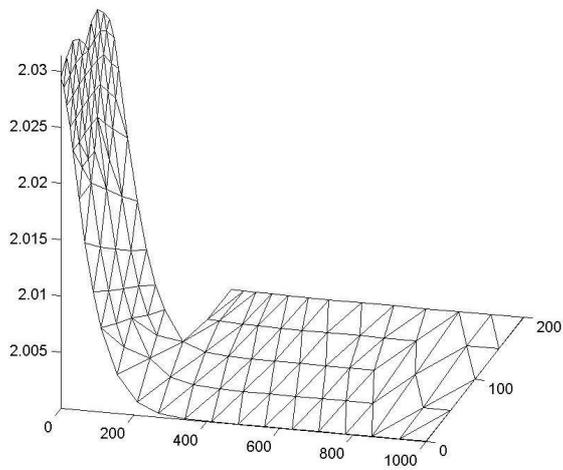


(c) Zeitschritt 15, $\mu = 1$

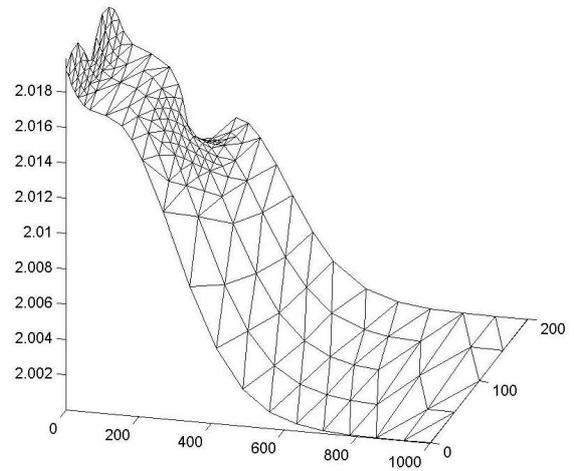


(d) Zeitschritt 30, $\mu = 1$

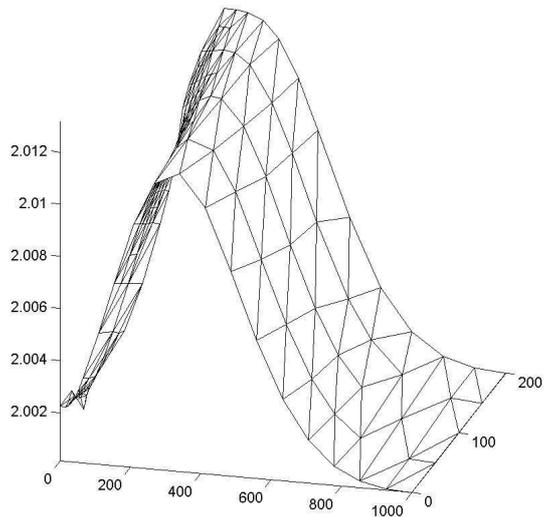
Abbildung 8.4: Fluss auf Feinheitslevel 2 in Geometrie L-Shape



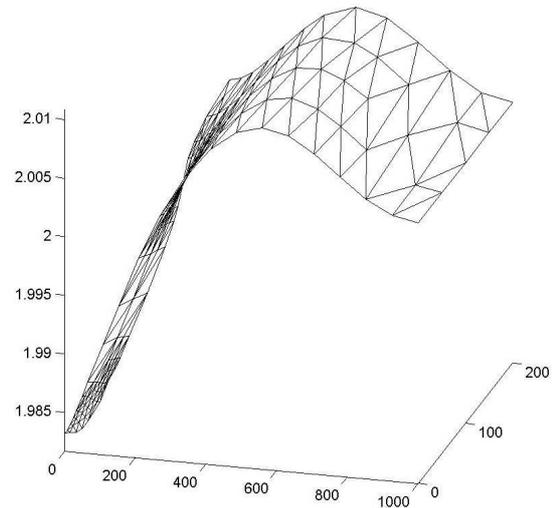
(a) Zeitschritt 2



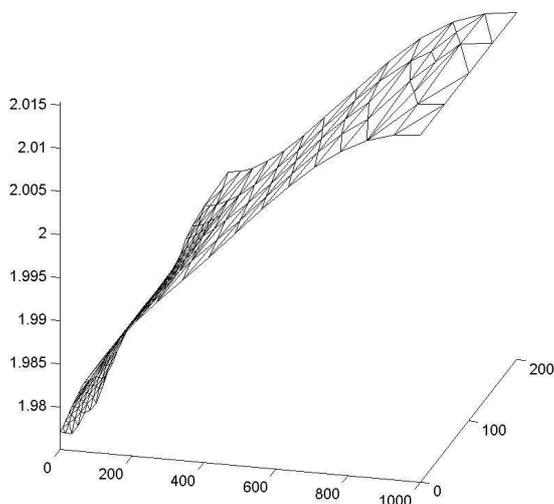
(b) Zeitschritt 8



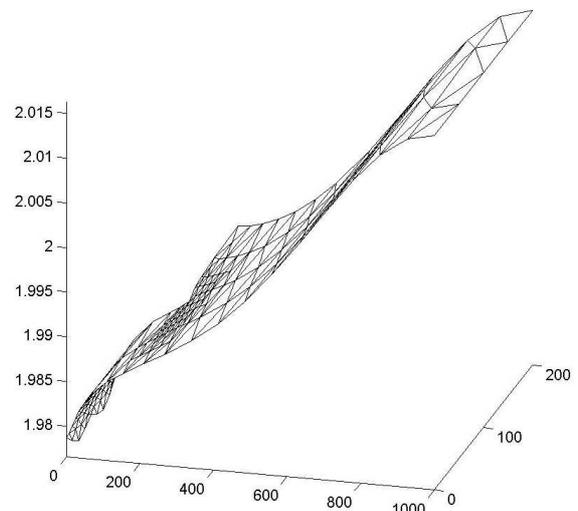
(c) Zeitschritt 12



(d) Zeitschritt 18



(e) Zeitschritt 24



(f) Zeitschritt 30

Abbildung 8.5: Höhe auf Feinheitslevel 2 mit $\mu = 10^{-8}$ in Geometrie L-Shape

Literaturverzeichnis

- [AQF94] V.I. Agoshkov, A. Quarteroni, F. Saleri *Recent developments in the numerical simulation of shallow water equations I: Boundary conditions*, Applied Numerical Mathematics 15 (1994), 175-200
- [AOF94] V.I. Agoshkov, E. Ovchinnikov, A. Quarteroni, F. Saleri *Recent developments in the numerical simulation of shallow water equations II: Temporal discretizations*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 4, No. 4(1994), 533-556
- [ADO00] M. Ainsworth, J.T. Oden *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, Wiley, 2000
- [ALT00] H.W. Alt *Lineare Funktionalanalysis, 3. Auflage*, Springer Verlag, 2000
- [AFW97] D.N. Arnold, R.S. Falk, R. Winther *Preconditioning in $H(\text{div})$ and applications*, Mathematics of Computations, Vol. 66, No. 219, pp. 957-984, 1997
- [AT97] K.E. Atkinson *Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997
- [AKS85] A. Aziz, R. Kellog, A. Stephens *Least squares methods for elliptic systems*, Math. Comp. 44, pp. 53-70, 1985
- [BAR78] I. Babuska, W.C. Rheinboldt *A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 12, pp. 1597-1615, 1978
- [BRH78] I. Babuska, W.C. Rheinboldt *Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 15, pp. 736-754, 1978
- [BEH95] J. Behrens *Adaptive Semi-Lagrange-Finite-Element-Methode zur Lösung der Flachwassergleichungen*, Dissertation, 1995
- [BOG98] P.B. Bochev, M.D. Gunzburger *Finite Element Methods of Least-Squares Type*, Siam Rev. Vol.40, No.4, pp789-837, 1998
- [BRA97] D. Braess *Finite Elements*, Cambridge University Press, 1997.
- [BRS94] S. Brenner, L.R. Scott *The Mathematical Theory of finite Element Methods* Springer-Verlag, 1994
- [BRF91] F. Brezzi, M. Fortin *Mixed and Hybrid Finite Element Methods* Springer, New York, 1991

- [BRH82] A.N. Brooks, T.R.J. Hughes *Streamline Upwinding/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., vol. 32, pp. 199-259. (1982)
- [CLM94] Z. Cai, R. Lazarov, T.A. Manteuffel, S.F. McCormick *First-Order System Least Squares for Second-order Partial Differential Equations: Part I*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 31, No. 6, pp 1785-1799, 1994
- [DAW00] Clint N. Dawson, Monica L. Martinez-Canales *A characteristic-Galerkin approximation to a system of shallow water equations*, Numer. Math. 86: pp. 239 - 256 (2000).
- [DAN02] G. Danisch *Charakteristiken-Galerkin-Verfahren und gemischte finite Elemente für die Flachwassergleichungen*, Diplomarbeit, 2002
- [DST05] G. Danisch, G. Starke *First-Order System Least-Squares for Darcy-Stokes Flow*, to appear in SIAM Journal on Numerical Analysis, 2007
- [EVA98] L.C. Evans *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, 1998
- [FQS99] L. Fontana, E. Miglio, A. Quarteroni, F. Saleri *A finite element method for 3D hydrostatic water flows.*, Comput. Visual Sci 2: 85-93, 1999
- [GEI05] A. Geilenkothen *Efficient Solvers and Error Estimators for a Mixed Method in Elastoplasticity*, Dissertation, 2005
- [GIR86] V. Girault, P. Raviart *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer Verlag, 1986
- [KH05] O. Kayser-Herold, H. Matthies *Least-Squares FEM, Literature Review*, Informatikbericht Nr.: 2005-05, Institute of Scientific Computing, TU Braunschweig, 2005
- [KOR05] J. Korsawe *Multilevelverfahren für nichtlineare Finite-Element Ausgleichsprobleme*, Dissertation, 2001
- [LWS91] R.A. Luetlich, J.J. Westerink, N.W. Schaffner *ADCIRC: An advanced three-dimensional circulation model for shelves, coasts, and estuaries*. Technical Report 1, Department of the Army, U.S. Army Corps of Engineers, Washington, D.C 20314-100, (1991).
- [LYG79] D.R. Lynch, W.G. Grey *A wave equation model for finite element tidal computations*, Computers and Fluids 7, pp:207-228, (1979)
- [LYA74] P.P. Lynn, S.K. Arya *Finite elements formulation by the weighted discrete least squares method*, Int. J. Num. Methods Engrg 8, pp: 71-90, (1974)
- [MTW00] K.A. Mardal, X.Tai, R.Winther *A robust Finite Element Method for Darcy-Stokes Flow*, SIAM J. Numer. Anal., Vol.40, No. 5, pp:1605-1631 (2000)
- [MAT98] Mathworks *MATLAB - Using Matlab*The MathWorks Inc., Natick, 1998

- [MAT] Mathworks *MATLAB Partial Differential Equation Toolbox - User's Guide* The MathWorks Inc., Natick
- [MQS99] E. Miglio, A. Quarteroni, F. Saleri *Finit Element approximation of Quasi-3D shallow water equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 174, 355-369, 1999
- [NTW00] T.K. Nilssen, X. Tai, R. Winther *A Robust Nonconforming H^2 -Element*, Math. Comp., Vol.70, No. 234, pp: 489-505, 2000
- [OEH02] A. Oehmen *Additive und multiplikative Schwarz-Verfahren für nichtlineare elliptische Randwertprobleme*, Diplomarbeit
- [PEZ86] J. Peraire, O.C. Zienkiewicz und K. Morgan *Shallow water problems. A general explicit formulation*, Int. J. numer. methods eng., 22, 547-574 (1986)
- [QUV00] A. Quarteroni, A. Valli *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 2000
- [RT77] P.A. Raviart, J.M. Thomas *A mixed finite element method for second-order elliptic problems.*, Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Lecture Notes in Mathematics 606, 295-315, Springer 1977.
- [Ri22] L.F. Richardson *Weather Prediction by Numerical Process.*, Cambridge University Press 1922.
- [STA] G. Starke *A First-Order System Least Squares Finite Element Method for the Shallow Water Equations* SIAM J. Numer. Anal. Vol. 42 Number 6, pp. 238-240 (2005)
- [WEI92] T. Weiyang *Shallow Water Hydrodynamics* Elsevier Oceanography Series, vol.55, Elsevier Amsterdam, 1992
- [WEN79] W.L. Wendland *Elliptic Systems in the plain* Pitman, Boston, 1979
- [WOH99] B.I. Wohlmuth, R.H.W. Hoppe *A Comparison of a posteriori Error Estimators for Mixed Finite Element Discretizations by Raviart-Thomas Elements* Mathematics of Computations Vol.68, No. 228, 1347-1378, 1999.
- [ZIO74] O.C. Zienkiewicz und D.R.J. Owen *Least squares finite element for elasto-static problems - use of reduced integration* Internat. J. Numer. Methods Engrg. 8, 341-358, 1974.

Lebenslauf

Dipl-Math. Garvin Danisch

5. August 1976 Geboren in Hannover
Eltern: Werner & Ulrike Danisch, geb. Grethe

Ausbildung

1989 - 1996 Gymnasium Sarstedt
5/1996 Abitur
8/1996 - 9/1997 Zivildienst im Altenheim St. Nicolai, Sarstedt
1997 - 2003 Mathematikstudium an der Universität Hannover
Nebenfach VWL
11/2002 Diplom in Mathematik, Universität Hannover

Wissenschaftliche Tätigkeit

seit 12/2002 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am
Institut für Angewandte Mathematik der
Universität Hannover
Kollegiat im Graduiertenkolleg 615:
Interaktion von Modellbildung, Numerik und
Software-Konzepten für technisch-wissenschaftliche
Problemstellungen an der Universität Hannover

